

N^o d'ordre : 09/2012 - M / MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Systèmes Dynamiques

Par

Djamel Eddine CHERIET

THÈME

Sur les différentes utilisations de l'intégrale d'Osgood

Soutenu publiquement, le 14/11/2012, devant le jury composé de :

Mr.	A. KESSI	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Président
Mr.	R. BEBBOUCHI	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Directeur de Mémoire
Mr.	A. BENMEZAI	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Examineur
Mr.	M. LAKRIB	Professeur	à l'U.D.L.S.B	Examineur
Mr.	K. YADI	Maître de conférences/A	à l'U.A.B.B.T	Examineur
Mme.	T. BEN ZEKRI	Maître de conférences/A	à l'U.S.T.H.B	Examinatrice


Remerciements

Bismillah Rahman Rahim

Louange à Allah, créateur des cieux et de la terre, des ténèbres et de la lumière.

Celui qui a créé l'homme d'une argile et sa descendance d'une eau vile. Il honora Adam, père des hommes, en le créant de la plus belle forme.

Louange à Allah le miséricordieux de m'avoir donné le courage; la force, la patience et la volonté pour la réalisation de ce travail.

Et prières sur notre prophète Mohamed , sur sa famille et ses compagnons ainsi que ceux qui le suivent.

Tout d'abord, je remercie tous les enseignants de l'USTHB, et particulièrement ceux de la Faculté de Mathématiques, pour avoir contribué et assuré ma formation.

Je remercie chaleureusement et spécialement le Professeur BEBBOUCHI, mon directeur de thèse, pour son soutien et sa vision pragmatique des problèmes. En de nombreuses occasions, son recul et sa vision d'ensemble du monde des EDO se sont avérés essentiels pour trouver de nouvelles solutions et dégager des perspectives de recherche.

Je tiens à remercier le Professeur KESSI de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire et de m'avoir accompagné de ses précieux conseils et de ses orientations.

Mes vifs remerciements vont aux Professeurs LAKRIB et YADI qui ont accepté d'être les rapporteurs de ma thèse, et qui ont contribué à améliorer sensiblement mon document. Je suis de plus très honoré d'avoir pu les compter parmi les membres du jury au même titre que les professeurs BEN MEZAI et BEN ZEKRI qui n'ont jamais manqué l'occasion de m'exprimer leurs encouragements.

Merci à mes parents et mes frères pour leur soutien sans faille, leurs encouragements et sans qui rien n'aurait été possible.

Enfin je remercierai tous ceux qui ont participé de loin ou de près à la réalisation de ce travail.

Dédicaces

À

Ma chère mère, pour ses sacrifices depuis qu'elle m'a mis au monde, et qui n'a pas cessé de prier pour moi et m'encourager, que ALLAH me la garde.

Mon père, qui m'a toujours soutenu et aidé à affronter les difficultés.

Je sais que les paroles ne suffiront jamais à décrire ce que je ressens envers vous...mais je ne trouve pas mieux à dire que : " *Ô mon Seigneur, fais-leur; à tous deux; miséricorde comme ils m'ont élevé tout petit*".

À ma petite sœur Fadoua et tous mes frères

Mes oncles et tantes, cousins et cousines

À mes belles sœurs

À mes petits neveux et nièces

Tous mes amis sans citer les noms

Tous ceux qui me sont chers.

Je dédie ce modeste travail.

Table des matières

1	Préambule	6
2	Analyse non standard	7
2.1	Introduction	7
2.2	Notions et définitions	7
2.2.1	Formalisation	7
2.2.2	Les nombres	9
2.2.3	Les axiomes	10
2.2.4	Les suites et les fonctions	13
2.2.5	Collections externes et principes de permanence	15
2.2.6	Topologie sur un espace métrique	16
2.2.7	Ombres	17
3	Unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire	21
3.1	Introduction	21
3.2	Les travaux de Cauchy	21
3.2.1	Le théorème de Cauchy-Lipschitz	21
3.2.2	Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences	23
3.3	Plus loin que Cauchy-Lipschitz	24
3.4	Les travaux d'Osgood	25
3.4.1	Version classique	25
3.4.2	Version non standard	30
3.5	Les travaux de Tamarkine	32

3.5.1	Version classique	32
3.5.2	Version non standard	34
3.6	Lien entre le critère d'Osgood et le critère de Tamarkine	36
3.7	Conclusion	37
4	Critère de prolongement	38
4.1	Introduction	38
4.2	Les travaux de Hartman	38
4.2.1	Théorème d'extension	38
4.2.2	Solution maximale et solution minimale	39
4.3	Les travaux de Bernfeld	41
4.3.1	Equations différentielles perturbées	41
4.3.2	Prolongement des solutions d'une équation différentielle perturbée	42
4.4	Le prolongement en Analyse Non Standard	44
4.4.1	Critère de prolongement	44
4.4.2	Prolongement des solutions d'une équation différentielle perturbée	45
4.5	Les travaux de Ceballos-Lira, Macias-Diaz et Villa	46
4.5.1	Introduction	46
4.5.2	Test d'Osgood	47
4.5.3	Version non standard	49
4.6	Conclusion	49
5	Caractérisation d'une solution singulière	50
5.1	Introduction	50
5.2	Caractérisation des intégrales singulières d'une EDO	51
5.3	Conclusion	56
6	Généralisation du test d'Osgood	57
6.1	Introduction	57
6.2	Lien entre l'unicité et la caractérisation des solutions singulières	57
6.3	Lien entre l'unicité et le prolongement	58

Conclusion générale	59
Annexe : Un peu d'histoire	60
6.4 Cauchy Augustin Louis (1789-1857)	60
6.5 Osgood William Fogg (1864-1943)	61
6.6 Tamarkine Yakov Davidovitch (1888-1945)	62
6.7 Bernfeld Stephen R (1945 - 2003)	63

Chapitre 1

Préambule

Ce modeste travail est consacré à la présentation de différentes utilisations d'une intégrale très importante et très utile dans le domaine des équations différentielles, appelée intégrale d'Osgood.

Initialement, l'intégrale d'Osgood a servi comme critère d'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire. Plus tard, elle sera utilisée pour un critère de prolongement ou d'explosion de la solution. Enfin, à partir des travaux de Cauchy, on peut aussi l'utiliser pour un critère de caractérisation d'une solution singulière d'une équation différentielle.

Le travail consiste à revoir tous ces aspects et éventuellement en découvrir d'autres, en utilisant des méthodes non standard.

Pour mener à bien notre projet, nous avons élaboré le plan suivant:

- Le premier chapitre servira à faire une brève présentation de l'analyse non standard.
- Le second chapitre parlera essentiellement des travaux d'Osgood et Tamarkine pour l'unicité d'une solution d'une équation différentielle avec une extension grâce à l'outil non standard.
- Le troisième chapitre est consacré à l'étude du prolongement d'une solution vers l'infini (les travaux de Hartman et de Bernfeld et autres), suivant deux versions classique et non standard.
- Le quatrième chapitre cite un critère de caractérisation d'une solution singulière d'une équation différentielle.

Chapitre 2

Analyse non standard

2.1 Introduction

En mathématiques, l'analyse non standard (ANS) est un ensemble d'outils développés depuis 1960 afin de traiter la notion d'infiniment petit de manière rigoureuse. Pour cela, une nouvelle notion est introduite, celle d'objet standard (s'opposant à celle d'objet non standard), ou plus généralement de modèle standard ou de modèle non standard. Cela permet de présenter les principaux résultats de l'analyse sous une forme plus intuitive que celle exposée traditionnellement depuis le XIXe siècle.

L'Analyse Non Standard est aujourd'hui utilisée dans de nombreux domaines des Mathématiques: systèmes dynamiques, calcul asymptotique, probabilités, algèbre... Elle s'est révélée un outil à la fois efficace et agréable à utiliser.

Nous tentons ici d'exposer, très brièvement, les notions d'ANS qui nous paraissent nécessaires pour comprendre la partie non standard de notre travail.

2.2 Notions et définitions

2.2.1 Formalisation

Précisons les règles qui régissent l'utilisation de la propriété "*être standard*". Ces règles se traduisent formellement par:

- L'introduction dans le langage de la théorie des ensembles d'un nouveau prédicat à une entrée $st()$. La formule $st(x)$ est une notation pour " x est standard", propriété que possèdent certains éléments de l'univers ensembliste.
- L'énoncé de trois schémas d'axiomes qu'on rajoute à ceux de la théorie ZFC (Zermelo-Fraenkel+ Axiome du Choix).

L'introduction de la propriété " st " amène à distinguer plusieurs sortes de formules: celles qui peuvent s'écrire sans utiliser le prédicat st (autrement dit celles qui sont exprimables dans le langage de ZFC) sont appelées *formules internes*; les autres (qui contiennent le prédicat $st()$ ou ses dérivés) sont appelées *formules externes*. De plus, on s'autorise à rajouter aux formules des paramètres, désignant certains objets de l'univers où on se place. Les formules internes dont tous les paramètres désignent des objets standard sont appelées *formules standard*.

Collections externes

Les propriétés et énoncés internes obéissent aux mêmes règles que dans ZFC; il n'en est pas de même des énoncés externes: ainsi le Schéma de Compréhension de ZFC, qui dit que pour tout ensemble X et toute formule $\phi(x)$, il existe un ensemble défini comme $\{x \in X / \phi(x)\}$, ne s'applique qu'aux formules internes (par exemple la collection des entiers standard n'est pas un ensemble). Par commodité, on écrira aussi $\{x \in X / \phi(x)\}$ pour des formules externes, mais les éléments de X ainsi délimités peuvent ne pas constituer un ensemble: dans ce cas on dira qu'on a défini une partie externe de X , ou collection externe, et on s'autorisera à la noter par un symbole (C par exemple), et à écrire $x \in C$ au lieu de " $x \in X / \phi(x)$ ", ainsi qu'à pratiquer sur ces collections les opérations booléennes élémentaires (intersection, réunion...). Les théorèmes classiques des mathématiques ne peuvent pas en général s'appliquer aux collections externes; ainsi le fait que toute partie non vide de N admet un plus petit élément ne s'applique pas à la collection des entiers non standard (ce qui montre bien que cette collection est externe, ainsi que son complémentaire). De même la collection des réels infinitésimaux est majorée, mais n'a pas de borne supérieure.

Quantificateurs externes :

On écrit $\forall^{st} x F(x)$ pour $\forall x(st(x) \implies F(x))$, ce qui se lit "pour tout x standard $F(x)$ ", et de même $\exists^{st} x G(x)$ pour $\exists x(st(x) \wedge G(x))$ signifie "il existe x standard tel que $G(x)$ ".

2.2.2 Les nombres

Entiers naturels, standard ou non

Il existe des entiers naturels plus grands que tout entier standard. Ces entiers sont évidemment non-standard, et tout entier non standard est plus grand que tout entier standard.

Réels standard ou non

Il existe plusieurs sortes de réels non standard :

- Les uns sont plus grands en valeur absolue que tout réel standard, et leur partie entière est un entier non standard. On les nomme réels **i-grands**.
- D'autres (les inverses des précédents) sont plus proches de 0 que tout réel standard non nul. On les nomme **i-petits** ou **infinitésimaux**.
- D'autres ne sont ni i-grands ni i-petits: ces sont les réels **appréciables**.
- Enfin, il résulte de la stabilité des standard pour l'addition que, si a est un standard non nul et ε un réel i-petit, $a + \varepsilon$ est non standard, mais n'est ni i-petit ni i-grand. Il résultera des axiomes à venir que tout réel non-standard qui n'est ni i-petit ni i-grand est de cette forme $a + \varepsilon$ (a standard, ε infinitésimal).

Un peu de vocabulaire

- Deux réels x et y sont **i-voisins** ou **i-proches** si $x - y$ est i-petit (on écrit alors $x \simeq y$, et naturellement $x \simeq 0$ est une notation pour " x est i-petit ").
- x est limité s'il n'est pas i-grand.
- x est appréciable s'il n'est ni i-petit ni i-grand.

En particulier tout réel standard est limité, et tout réel standard non nul est appréciable.

2.2.3 Les axiomes

- On se place dans le cadre de la théorie des ensembles de Zermelo-Fraenkel.
- Les objets ou les ensembles définis par cette théorie seront qualifiés d'internes ou classiques. C'est le cas de tous les objets et ensembles usuels que nous connaissons: $\pi, e, 2, \mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{C} \dots$

Axiome de transfert

Dès que tous les paramètres E_i d'une formule classique F ont des valeurs standard:

Pour tout x standard, $F(x, E_1, \dots, E_n)$ ssi pour tout x , $F(x, E_1, \dots, E_n)$

Autrement dit, pour vérifier qu'une formule usuelle dépendant de paramètres standard est vraie pour tout x , il suffit de la vérifier pour tout x standard. Intuitivement, nous ne pouvons accéder qu'aux éléments standard, et ce sont eux qui nous permettront de vérifier une formule classique. Cet axiome peut aussi s'exprimer (par négation) :

Il existe x standard, $F(x, E_1, \dots, E_n)$ ssi il existe x , $F(x, E_1, \dots, E_n)$

Si une propriété classique est vraie pour un x , alors elle est vraie pour un x standard. En voici quelques conséquences. La plus importante est le fait que si un objet mathématique est défini de façon classique de manière unique à partir d'objets standard, il est nécessairement standard. C'est donc le cas de $\emptyset, 0, 1, 2, \pi, e, i, \mathbb{N}, \mathbb{R}^n$ pour n standard,...

Si E et F sont des ensembles standard, il en est de même de leur intersection, de leur réunion, de leur produit, de l'ensemble des applications de E dans F , de l'ensemble des parties de E . Si a et b sont deux nombres standard, il en est de même de ab , $a + b$, $a - b$, $\frac{a}{b}$ (b non nul), etc. Si n est standard, il en est de même de $n + 1$ ou de $I_n = \{1, \dots, n\}$. Si A est une partie standard de \mathbb{R} bornée, $Sup A$ et $Inf A$ sont standard. Si f est une fonction standard (c'est-à-dire définie sur des ensembles standard et de graphe standard), alors l'image d'un élément standard est standard.

Enfin, cet axiome permet de montrer que, pour voir que deux ensembles standard sont égaux, il suffit de vérifier qu'ils possèdent les mêmes éléments standard. Ainsi, la seule partie standard de \mathbb{N} contenant tous les entiers standard est lui-même. Par contre, il existe des parties non standard contenant tous les entiers standard, à savoir les parties $\{0, 1, 2, \dots, \omega\}$ avec ω non standard.

Voici quelques applications de l'axiome de transfert:

- Tous les objets spécifiques des mathématiques classiques sont standard.
- Deux ensembles standard sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes éléments standard.
- Une fonction standard prend des valeurs standard aux points standard.
- Une fonction standard est continue si et seulement si elle est continue en tout point standard.
- tout sous-ensemble standard et borné de \mathbb{R} est borné par un standard.

Axiome d'idéalisation

Soit $R(x, y)$ une relation « classique ». Par relation classique, on entend une relation ne faisant pas intervenir le nouveau prédicat « standard » dans son énoncé. Il s'agit donc d'une relation usuelle de nos mathématiques de tous les jours.

L'axiome d'idéalisation affirme que les deux propositions suivantes sont équivalentes:

1. *Pour chaque ensemble standard fini F , il existe x (noté dans la suite x_F) tel que $R(x, y)$ pour tous les y appartenant à F .*

2. *Il existe x tel que $R(x, y)$ pour tout y standard.*

Relation concourante

Soit B une relation binaire et interne. On dit que B est *concourante* si elle vérifie la propriété:

$$\forall^{st} Z, Z \text{ fini}, \exists x B(x, y) \forall y \in Z.$$

La relation \leq est un exemple de ce type.

L'axiome signifie que, pour trouver un x qui vérifie une propriété relative à tous les y standard, il suffit qu'on puisse trouver un tel x qui vérifie la propriété considérée relativement aux éléments y de n'importe quel ensemble standard fini.

Voici quelques applications de l'axiome d'idéalisation:

- Il existe un entier supérieur à tous les entiers standard, et tout entier non standard est plus grand que tous les entiers standard.

- Tout ensemble infini possède un élément non standard, et un ensemble n'a que des éléments standard si et seulement si il est standard et fini.
- Théorème de Nelson: Si E est un ensemble standard, il existe une partie standard et finie X de E contenant tous les éléments standard de E .
- Dans un espace topologique, la relation d'inclusion entre les voisinages d'un point x donné étant *concourante*, il existe un voisinage de x inclus dans tout voisinage standard de x (c'est ce qu'on appelle un voisinage infinitésimal de x)

Axiome de standardisation

Soit E un ensemble standard et P une propriété quelconque, faisant ou non intervenir le prédicat « standard ». Alors il existe un ensemble A standard tel que pour tout x standard, x appartient à A si et seulement si x appartient à E et vérifie $P(x)$.

Cet axiome ne présente d'intérêt que si la propriété P est non classique (elle utilise le prédicat « standard »). A n'est autre qu'un ensemble standard dont les éléments standard sont les éléments standard de E vérifiant la propriété P . Il se peut que A possède d'autres éléments, mais ils seront non standard. Par ailleurs, un ensemble standard étant défini de manière unique par ses éléments standard, il en résulte que A est unique. On l'appelle le standardisé de la collection $\{x \text{ élément de } E \mid P(x)\}$ qui, à priori, n'est pas un ensemble au sens ZFC. L'interprétation intuitive qu'on peut donner à cet axiome est la suivante : la collection $\{x \text{ élément de } E \mid P(x)\}$ ne nous est pas directement accessible. Nous ne pouvons considérer que son standardisé.

Par exemple, considérons $E = \mathbb{N}$, et $P(x)$ la propriété " x est standard". La collection $\{x \text{ élément de } E \mid P(x)\}$ est la collection des éléments standard. Son standardisé est un ensemble standard contenant tous les éléments standard de \mathbb{N} . Nous avons déjà vu que c'était \mathbb{N} tout entier.

Considérons maintenant $E = \mathbb{N}$, et $P(x)$ la propriété " x est non standard". La collection $\{x \text{ élément de } E \mid P(x)\}$ est la collection des éléments non standard. Son standardisé est l'ensemble vide.

Voici quelques conséquences de l'axiome de standardisation:

- *le principe de Saturation* (qui se démontre avec l'Axiome du Choix):

Soient X et Y deux ensembles standard, B une relation (interne ou externe) telle que $(\forall^{st} x \in X)(\exists^{st} y \in Y)B(x; y)$; alors il existe une application standard f de X dans Y telle que $(\forall^{st} x \in X)B(x; f(x))$.

- Pour tout réel x limité, il existe un réel standard ${}^\circ x$ (nécessairement unique) tel que ${}^\circ x \simeq x$.

2.2.4 Les suites et les fonctions

On se donne deux espaces métriques standard E et F .

Les suites

Nous allons donner des propriétés non classiques des suites, qui, dans le cas des suites standard, coïncideront avec des propriétés usuelles.

Convergence d'une suite Soient u_n une suite standard dans E et l un élément standard de E .

- (u_n) converge vers l si et seulement si, pour tout n i-grand, $u_n \simeq l$.
- l est valeur d'adhérence de (u_n) si et seulement s'il existe n i-grand tel que $u_n \simeq l$.

Convergence d'une sous-suite Pour une suite (a_n) standard, il y a équivalence entre:

- il existe une sous-suite de (a_n) qui converge vers l .
- l est standard et il existe n illimité tel que $a_n \simeq l$.

(l est une valeur d'adhérence de la suite (a_n) , et dans ce cas, il existe une sous-suite de (a_n) qui converge).

Suite de Cauchy Pour une suite (a_n) standard, il y a équivalence entre:

- (a_n) est une suite de Cauchy.
- pour tout n et p illimités, $a_n \simeq a_p$

Les fonctions

Continuité La continuité d'une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} se définit plus simplement avec l'analyse non standard. Pour une fonction standard, il y a équivalence entre:

- f est continue.
- Pour tout x standard et pour tout ε infiniment petit, $f(x + \varepsilon)$ est infiniment proche de $f(x)$.

Continuité uniforme Pour une fonction standard f , il y a équivalence entre:

- f est uniformément continue.
- Pour tout x et pour tout ε infiniment petit, $f(x + \varepsilon)$ est infiniment proche de $f(x)$.

Dérivation Pour une fonction standard f définie sur un intervalle standard de \mathbb{R} , et pour x_0 standard il y a équivalence entre:

- f est dérivable en x_0 de dérivée l standard.
- pour tout x infiniment proche de x_0 , $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \simeq l$, avec l standard.

Intégration Pour une fonction standard f sur $I = [a, b]$ standard, il y a équivalence entre:

- f intégrable au sens de Riemann.
- pour toute subdivision de $[a, b] : a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ avec $x_i \simeq x_{i+1}$, il existe deux fonctions en escalier ϕ et ψ relatives à la subdivision de façon que, pour tout x de I , $\phi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$, et

$$\int_a^b \psi - \phi \simeq 0$$

On pose alors $\int_a^b f$ la partie standard de $\int_a^b \phi$ ou de $\int_a^b \psi$.

Suites de fonctions Soient (f_n) une suite standard de fonctions de E dans F , et f une fonction standard de E dans F .

- (f_n) converge simplement vers f si et seulement si, pour tout n i-grand et tout standard $x_0 \in E$, $f_n(x_0) \simeq f(x_0)$.

- (f_n) converge uniformément vers f si et seulement si, pour tout $x \in E$ (standard ou non) et tout n i-grand, $f_n(x) \simeq f(x)$.

- Si E est localement compact, (f_n) tend vers f uniformément sur tout compact si et seulement si $f_n(x) \simeq f(x)$ pour tout n i-grand et tout x presque standard dans E .

La S-notion

Le langage non standard permet ainsi de reformuler, d'une façon souvent plus simple, les notions de base de l'analyse. On remarque que les nouvelles caractérisations ne sont valables que pour les objets standard. Pour les objets non standard, on dispose donc de notions à priori distinctes: la notion classique et une notion non standard (ou *S-notion*) correspondante, obtenue en appliquant les définitions ci-dessus à tous les objets (standard ou non).

Etudions par exemple la S-notion la plus naturelle qui correspond à la continuité.

S-continuité Soient E et F deux espaces métriques standard. On dit qu'une fonction:

$f : E \longrightarrow F$ est *S-continue* en un point x si pour tout $y \in E$, $x \simeq y \implies f(x) \simeq f(y)$.

Si f et x sont standard, la S-continuité en x équivaut à la continuité en x . Par contre, la S-continuité en tout point de E pour une fonction standard équivaut à sa continuité uniforme.

S-dérivabilité Une fonction f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , est dite *S-dérivable* au point x et de *S-dérivée* a , ssi a est standard et , pour tout $\varepsilon \neq 0$, *i.p.* on ait :

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon} \simeq a$$

L'unicité d'un tel standard a provient de ce que deux standards infiniment voisins soient égaux .

2.2.5 Collections externes et principes de permanence

Halos et galaxies

Soit E un ensemble interne.

Une partie G de E est appelée galaxie de E si c'est un ensemble externe et s'il existe une suite $(A_n)_{n \leq \omega}$ avec ω entier *i.g.*, de sous-ensembles internes de E telle que l'on ait:

$$G = \bigcup_{st(n)} A_n \text{ et } A_0 \subset A_1 \subset \dots \subset A_\omega.$$

Une partie H de E est appelée halo si c'est un ensemble externe et s'il existe une suite $(B_n)_{n \leq \omega}$ avec ω entier *i.g.*, de sous-ensembles internes de E telle que l'on ait:

$$H = \bigcap_{st(n)} B_n \text{ et } E = B_0 \supset B_1 \supset \dots \supset B_\omega.$$

Ces deux définitions entraînent que si H est un halo, $G = E - H$ est une galaxie et réciproquement.

Principes de permanence

La distinction entre ensembles internes et collections externes, ainsi que la classification des collections externes en halos et galaxies, permettent souvent de montrer que certaines propriétés démontrées pour tous les éléments d'un certain domaine s'étendent en fait à un domaine plus grand: c'est ce que l'on appelle les raisonnements par permanence.

Permanence de Cauchy Elle repose sur la distinction entre ensembles internes et parties externes:

Si X est un ensemble interne et P une propriété interne, alors $\{x \in X / P(x)\}$ est interne; donc si Y est une partie externe de X et que l'on a démontré que P est vérifié pour tous les éléments de Y , alors on peut affirmer que P est encore vraie pour certains éléments hors de Y .

Permanence de Fehrele Elle repose sur le principe précédent. Si X est un ensemble interne et $H(y)$ une propriété de la forme $\forall^{st}x P(x; y)$ où P est interne, alors $\{y \in X; H(y)\}$ est un halo; donc si $Y \subseteq X$ est une galaxie et que l'on sait que H est vérifié par tous les éléments de Y , alors H est encore vraie pour certains éléments hors de Y .

Lemme de Robinson (Voir [1]) Si une suite (u_n) est telle que u_n est *i-petit* pour tout n standard, alors il existe ω *i-grand* tel que u_n soit *i-petit* pour tout $n < \omega$.

2.2.6 Topologie sur un espace métrique

Soient (E, d) un espace métrique standard et A un sous-ensemble standard de E .

- A est ouvert si et seulement si, il contient le halo de tous ses points standard.
- A est fermé si et seulement si, pour tout x presque standard dans A , ${}^\circ x \in A$.
- un point standard y est adhérent à A si et seulement si $hal(y) \cap A \neq \emptyset$; ou encore si et seulement si $y \in hal(A)$.
- A est compact si et seulement si tout point x de A est presque standard dans A (c'est à dire que ${}^\circ x$ existe et appartient à A).

2.2.7 Ombres

Plaçons-nous dans un espace métrique standard (E, d) . Si A est une partie standard de E , on a vu que les points standard adhérents à A sont ceux qui appartiennent à $hal(A)$; comme \overline{A} est un ensemble standard, il en résulte que \overline{A} est le standardisé de $hal(A)$.

Une *S-notion* correspondante est la notion d'*ombre*: si A est une partie (interne ou externe) de E , l'ombre de A est l'ensemble standard ${}^\circ A = {}^s hal(A)$.

Quelques propriétés des ombres :

- si A est standard, ${}^\circ A = \overline{A}$;
- si A est interne, ${}^\circ A$ est fermé;
- si E est localement compact et A interne et limité, ${}^\circ A$ est compact. Si de plus A est connexe, ${}^\circ A$ l'est également.

Remarques et exemples

- si x est presque standard dans E , ${}^\circ \{x\} = \{x\}$.
 - soit $\varepsilon \simeq 0$; l'ombre de $A =]\varepsilon, 1 + \varepsilon[$ est $[0, 1]$. On voit que l'on n'a ni $A \subset {}^\circ A$, ni ${}^\circ A \subset A$.
 - si A n'a aucun point standard, ${}^\circ A = \emptyset$.
 - ${}^\circ(A \cup B) = {}^\circ A \cup {}^\circ B$ et ${}^\circ(A \cap B) \subset {}^\circ A \cap {}^\circ B$.
 - si $A = \{x \in \mathbb{R}/x \simeq 0\}$, ${}^\circ A = \mathbb{R}^*$. On voit que si A est externe, ${}^\circ A$ n'est pas toujours fermé.
 - si A est le graphe de $y = \sin(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $x \in [-1, 1]$, ${}^\circ A = [-1, 1]^2$, (Voir [Fig.1]).

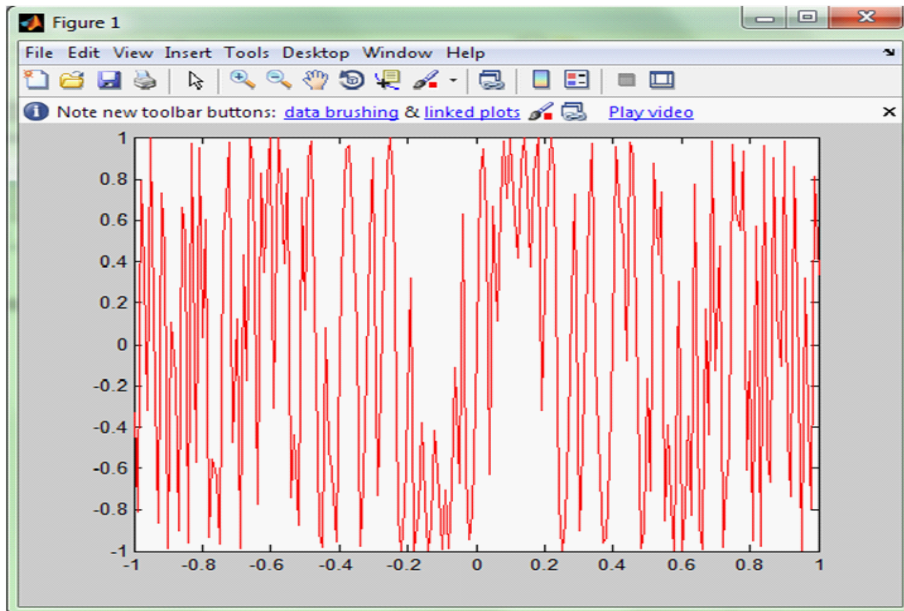


Fig.1. Graphe de la fonction: $y = \sin(\frac{x}{\varepsilon})$, ($\varepsilon = 10^{-63}$).
 - si A est le graphe de $y = \arctg(\frac{x}{\varepsilon})$ pour $x \in \mathbb{R}$, ${}^\circ A$ est composé de:
 $\mathbb{R}^- \times \{-\frac{\pi}{2}\} \cup \{0\} \times [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \cup \mathbb{R}^+ \times \{\frac{\pi}{2}\}$, (Voir [Fig.2]).

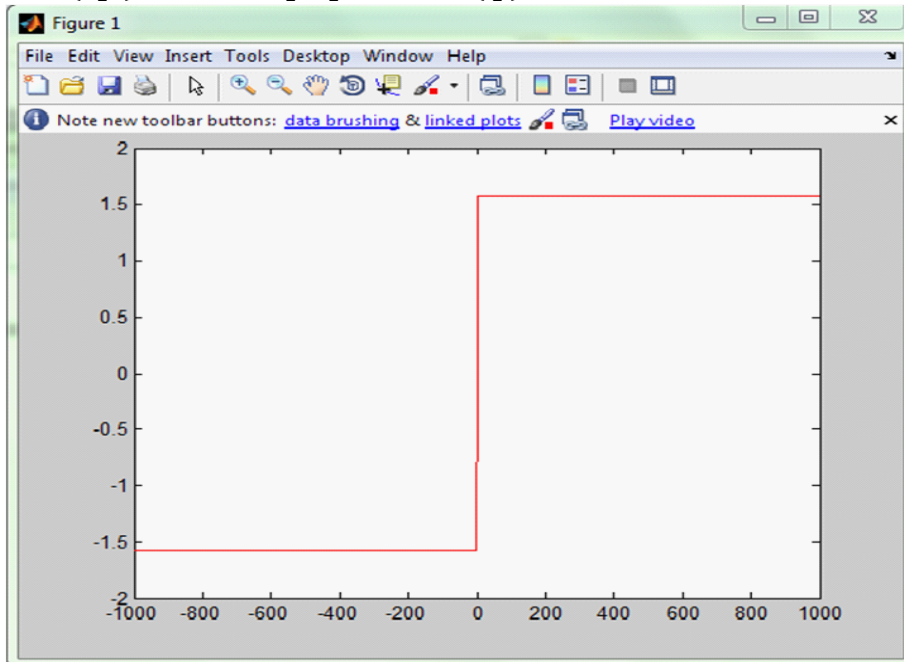


Fig.2. Graphe de la fonction: $y = \arctg(\frac{x}{\varepsilon})$, ($\varepsilon = 10^{-61}$).
 Remarquons que dans ces deux derniers cas, A est un graphe de fonction, mais pas ${}^\circ A$;
 cela est dû au fait que la fonction n'est pas S -continue.

Cette remarque nous amène à un résultat important, le théorème de *l'ombre continue*, qui peut s'énoncer ainsi:

Théorème 2.2.1 (Voir [1])

Soient E et F deux espaces métriques standard, f une fonction de $D \subset E$ dans F , et G le graphe de f . Alors:

- si f est S -continue sur D , ${}^\circ G$ est le graphe d'une fonction standard continue.
- si pour tout x presque standard dans D , $f(x)$ est presque standard, et si ${}^\circ G$ est le graphe d'une fonction g , alors:

- g est standard et continue;
- f est S -continue.

De plus pour tout x presque standard dans D , $f(x) \simeq g(x)$. La fonction g est celle qu'on obtient par standardisation de la relation $y = {}^\circ f(x)$ sur les éléments standard de D . On la note ${}^\circ f$ et on dit que g est l'ombre de f .

Remarque 2.2.1 Si f est une fonction interne qui vérifie les deux conditions suivantes:

- f est S -continue;
- f est presque standard.

Alors f est dite de classe S^0 .

f est dite de classe S^0 sur une partie interne A de E si f est de classe S^0 en tout point presque standard de A .

Alors f vérifie le théorème de l'ombre continue ssi f est de classe S^0 .

On peut ainsi définir la classe S^1 par:

Définition 2.2.1 Une fonction interne f de \mathbb{R} dans \mathbb{R} est dite de classe S^1 en un réel a si f est presque standard en a et s'il existe un réel standard b tel que l'on ait:

$$\forall x \forall y, x \neq y, x \simeq a \simeq y \implies \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \simeq b.$$

f est dite de classe S^1 sur une partie interne A de E si f est de classe S^1 en tout point presque standard de A .

Conséquences

- Si f est une fonction standard de classe S^1 en a , f est strictement dérivable en a , mais f n'est pas nécessairement de classe C^1 au voisinage de a .
- Par contre, une fonction standard de classe C^1 est forcément de classe S^1 .
- Si une fonction interne est dérivable et presque standard, alors elle est de classe S^1 ssi sa dérivée est de classe S^0 .

Chapitre 3

Unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire

3.1 Introduction

Quand on parle de l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy de la forme:

$$\begin{cases} y' = f(y) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases} \quad (PC)$$

la première chose qui vient à l'esprit pour la majorité des mathématiciens, c'est vérifier les conditions du théorème de "Cauchy-Lipschitz". Pourtant il existe d'autres critères.

3.2 Les travaux de Cauchy

3.2.1 Le théorème de Cauchy-Lipschitz

Soit l'équation différentielle:

$$y' = f(t, y) \quad (EN)$$

avec f une fonction continue définie sur $I \times \Omega$ (avec I un intervalle ouvert de \mathbb{R} et Ω un ouvert de \mathbb{R}^n) et à valeurs dans \mathbb{R}^n .

On s'intéresse au problème de Cauchy: étant donnés $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$:

- Existe-t-il une solution de (EN) définie au voisinage de t_0 et prenant la valeur y_0 en t_0 ; et,

- Cette solution, si elle existe, est-elle unique?

Dans tout ce qui suit, $\|\cdot\|$ désigne une norme sur \mathbb{R}^n , Le résultat suivant donne une première réponse à cette question.

Théorème 3.2.1 (de Cauchy-Lipschitz) (Voir [14])

Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n et I un intervalle ouvert de \mathbb{R} . On suppose que:

- f est continue de $I \times \Omega$ dans \mathbb{R}^n ;
- il existe une fonction L localement intégrable sur I , telle que:

$$\forall t \in I, \forall (x, y) \in \Omega^2, \|f(t, x) - f(t, y)\| \leq L(t) \|x - y\|.$$

Alors pour tout point (t_0, y_0) de $I \times \Omega$, il existe un intervalle ouvert $J \subset I$ contenant t_0 et une fonction ϕ continue et bornée de J dans Ω vérifiant (EN) sur J et telle que $\phi(t_0) = y_0$.

Cette solution (la fonction ϕ) est unique au sens suivant: s'il existe une autre fonction ψ définie sur un sous-intervalle ouvert J' de I contenant t_0 ; vérifiant (EN) sur J' et telle que $\psi(t_0) = y_0$ alors $\psi \equiv \phi$ sur $J \cap J'$.

Remarque 3.2.1 La deuxième hypothèse du théorème de Cauchy-Lipschitz - le caractère lipschitz par rapport à la variable d'espace - est vérifiée dès que f est différentiable par rapport à y ; à différentielle bornée. C'est une conséquence immédiate de l'inégalité des accroissements finis. Insistons également sur le fait que le théorème de Cauchy-Lipschitz est à la fois local en temps et en espace. C'est-à-dire qu'il suffit en fait d'exiger que l'hypothèse Lipschitz soit vérifiée au voisinage de tout point de Ω pour une fonction L pouvant dépendre du point et du voisinage considérés.

Remarque 3.2.2 Si l'on exige seulement que la fonction f soit continue, alors on a encore existence d'une solution pour le problème de Cauchy (c'est le théorème d'Arzela-Peano) mais on peut perdre l'unicité. Pour s'en convaincre on cherchera à résoudre l'équation différentielle:

$$y' = 2\sqrt{|y|}, \text{ et on aura plusieurs solutions passant par l'origine.}$$

Le théorème de Cauchy-Lipschitz ne fournit l'existence d'une solution que sur un sous-intervalle de I contenant t_0 suffisamment petit. On peut se demander s'il n'est pas possible de prolonger cette solution sur un intervalle de temps plus grand. Le lemme ci-dessous nous aidera à répondre à cette question.

Lemme 3.2.1 (de recollement), (Voir[14])

Soit f vérifiant les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz et $(t_0, y_0) \in I \times \Omega$. Soit ϕ_1 et ϕ_2 deux solutions de (EN) définies sur des sous-intervalles I_1 et I_2 de I contenant t_0 .

Alors $\phi_1 \equiv \phi_2$ sur $I_1 \cap I_2$ et la fonction définie sur $I_1 \cup I_2$ par:

$$\begin{cases} \phi_1 & \text{si } t \in I_1 \\ \phi_2 & \text{si } t \in I_2 \end{cases}$$

vérifie $\phi(t_0) = y_0$ sur $I_1 \cup I_2$, et est une solution.

Définition 3.2.1 On dit que la solution du problème de Cauchy:

$$(PVI) \begin{cases} y' = f(t, y) \\ y|_{t=t_0} = y_0 \end{cases}$$

est maximale si on ne peut pas la prolonger en une solution de (PVI) définie sur un intervalle strictement plus grand.

Théorème 3.2.2 (Voir[14])

Sous les hypothèses du théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout $(t_0, y_0) \in I$ le problème de Cauchy (PVI) admet une unique solution maximale. De plus, l'intervalle de définition de cette solution est ouvert.

3.2.2 Le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire et conséquences

Dans toute cette section, on considère un système différentiel linéaire:

$$(EL) \quad y' = A(t)y + B(t).$$

avec $A \in C(I, \Psi_n(\mathbb{R}))$ et $B \in C(I, \mathbb{R}^n)$.

Lemme 3.2.2 (de Gronwall), (Voir([14])).

Soit a et φ deux fonctions continues et positives sur l'intervalle I de \mathbb{R} , $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^+$.

Supposons que:

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq y_0 + \left| \int_{t_0}^t a(\tau)\varphi(\tau)d\tau \right|$$

Alors on a :

$$\forall t \in I, \varphi(t) \leq y_0 \exp\left(\left| \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau \right|\right).$$

Théorème 3.2.3 (de Cauchy-Lipschitz linéaire), (Voir [14]).

Pour tout $t_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}^n$; le système différentiel (EL) admet une unique solution de classe C^1 telle que $y(t_0) = y_0$ et prolongeable.

3.3 Plus loin que Cauchy-Lipschitz

La première remarque qu'on peut observer dans les travaux de Cauchy, c'est que la démonstration est longue: on a besoin du lemme de Gronwall pour montrer le théorème de Cauchy-Lipschitz linéaire.

Deuxièmement, on sait bien que la continuité de f est suffisante pour avoir l'existence locale de solutions du système différentiel (PC) ou de (PVI). En revanche, l'unicité n'est pas assurée et donc aussi la régularité de la solution en fonction des données. Il est donc, *à priori*, hors de question de pouvoir définir le flot associé à f . On peut quand même aller un peu plus loin. Pour cela on se donne deux critères plus efficaces, ceux d'Osgood et de Tamarkine.

En écrivant $y' = \frac{dy}{dt}$, et en passant le dt à droite, nous trouvons successivement:

$$y' = f(y)$$

$$dy = f(y)dt$$

$$\frac{dy}{f(y)} = dt$$

$$\int \frac{dy}{f(y)} = \int dt$$

Ainsi, l'intervention de la fonction réciproque devient utile si l'intégrale $\int \frac{dy}{f(y)}$ est finie.

3.4 Les travaux d'Osgood

En 1898, W.F. Osgood a donné un critère de l'unicité d'une solution d'une équation différentielle ordinaire. Citons le critère d'Osgood selon deux aspects, la version originale classique celle qui a été découverte par Osgood, et la version non standard.

3.4.1 Version classique

Soit le système différentiel autonome suivant:

$$y' = f(y), y(0) = 0 \quad (C0)$$

où f une fonction continue, non nulle sur un intervalle $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}_*^+$ et $f(0) = 0$.

Théorème 3.4.1 (Voir[13])

Il y a unicité à l'origine de la solution triviale ssi $\exists \alpha_0 \in]0, a]$, $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} = \infty$

Preuve. (Voir[13])

a)- On va montrer l'implication:

$(\exists \alpha_0 \in]0, a], \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} = \infty) \implies$ (L'unique solution du système (C0) qui passe par l'origine est la solution triviale).

Par l'absurde supposons qu'il y a non unicité à l'origine (voir *Graphe2.1*), ç-à-d, qu'il existe une autre solution y_1 de (C0), définie sur $]0, a]$, non identiquement nulle.

Cette solution vérifie:

$$y_1' = f(y_1) \text{ et } y_1(0) = 0.$$

$$\text{Donc } y_1(x) = \int_0^x f(y_1(t)) dt.$$

Comme y_1' est non nulle sur $]0, a]$, y_1 est une bijection, donc inversible.

Soit $u = y_1^{-1}$ la fonction réciproque de y_1 .

$$\text{Donc } u' = \frac{1}{y_1'} = \frac{1}{f(y_1)} \text{ et } u(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{dt}{f(t)}, \text{ avec } u(0) = 0 \text{ car :}$$

$$y_1(0) = 0 \implies y_1^{-1}(y_1(0)) = y_1^{-1}(0) = u(0).$$

Donc $u(y_1) = \int_0^{y_1} \frac{dt}{f(t)}$ existe et elle est bien définie, mais ceci est impossible car l'intégrale est infinie, d'après l'hypothèse.

b)- Idem, pour l'implication:

(Il y a unicité à l'origine de la solution triviale) $\implies (\exists \alpha_0 \in]0, a], \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} = \infty)$.

Par l'absurde supposons que: $\forall \alpha_0 \in]0, a], \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} < \infty$.

Soit:

$u(y) = \int_{0^+}^y \frac{dz}{f(z)}$, u est bien définie, et:

$$u' = \frac{1}{f(y)} \neq 0.$$

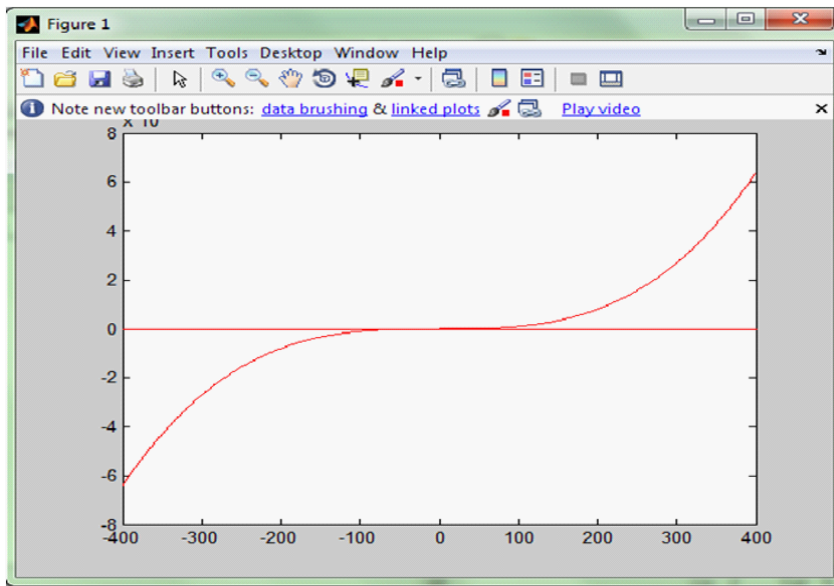
On a:

$$\begin{aligned} (u^{-1})' &= \frac{1}{u'(u^{-1})} \\ &= f(u^{-1}). \end{aligned}$$

Si, $u^{-1}(0) = r$, avec $r \neq 0$, on a $u(r) = 0$, ce qui est impossible.

Donc $u^{-1}(0) = 0$.

u^{-1} serait une solution de (C0) différente de 0 et il y a non unicité, il y a contradiction avec l'hypothèse. ■



Graphe2.1 Non unicité des solutions à l'origine.

Remarque 3.4.1 Si on prend la contraposée, on a bien cette équivalence:

il y a non unicité à l'origine, ssi $\forall \alpha_0 \in]0, a]$, $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)}$ est finie.

Exemple 3.4.1 L'exemple suivant est très connu et illustre la non-unicité des solutions d'une équation différentielle.

Soit le problème de Cauchy suivant:

$$y' = 2\sqrt{|y|} \quad , \quad y(0) = 0$$

On a :

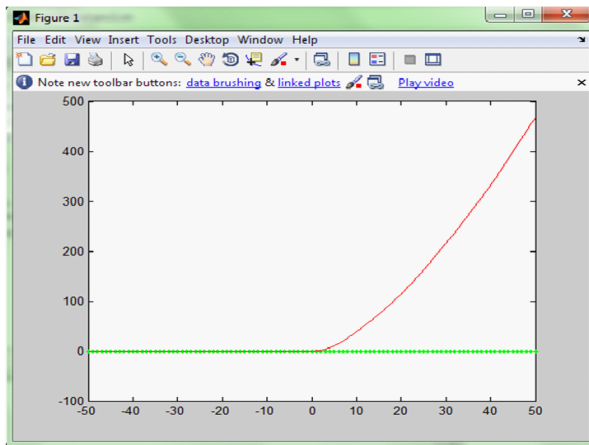
$$\begin{aligned} \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} &= \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{2\sqrt{|y|}} \\ &= \left[\sqrt{|y|} \right]_{0^+}^{\alpha_0} \\ &= \sqrt{\alpha_0} < \infty, \text{ ie, l'intégrale est finie.} \end{aligned}$$

Donc d'après Osgood, il n'y a pas d'unicité à l'origine.

Il est facile de vérifier ce résultat.

Effectivement, le problème admet au moins deux solutions différentes:

$$y_1 = 0 \text{ et } y_2 = \begin{cases} t^2 & \text{Si } t > 0 \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$



Graph2.2 Deux solutions de: $y' = 2\sqrt{|y|}, y(0) = 0$

Exemple 3.4.2 On peut généraliser:

$$y' = y^k \quad 0 < k < 1, \quad y(0) = 0$$

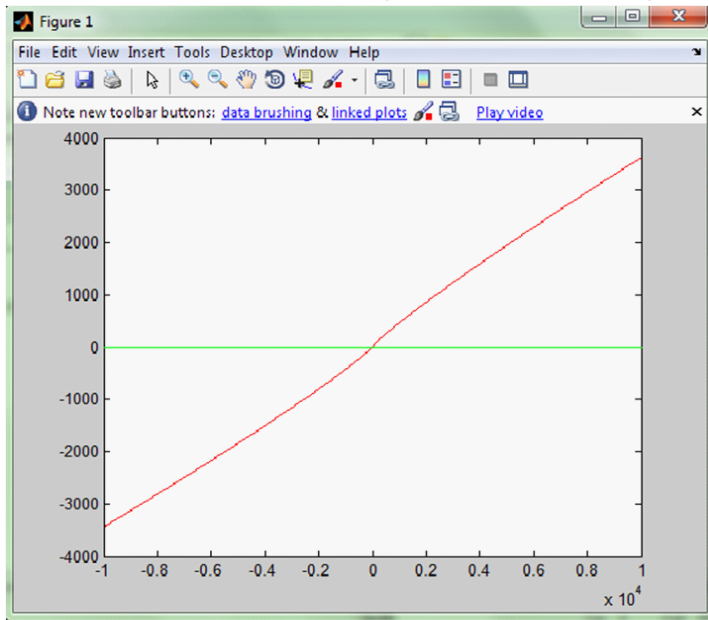
On a :

$$\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{f(r)} = \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{r^k}$$

$$= \left[\frac{1}{1-k} r^{1-k} \right]_{0^+}^{\alpha_0}$$

$$= \frac{1}{1-k} [\alpha_0^{1-k}] < +\infty.$$

Donc l'intégrale est finie. D'après Osgood il n'y a pas d'unicité à l'origine, (Voir Graphe2.3).



Graphe2.3 Deux solutions de: $y' = y^{0.1}, y(0) = 0$

Exemple 3.4.3 Traitons le cas où $k = 1$, ie :

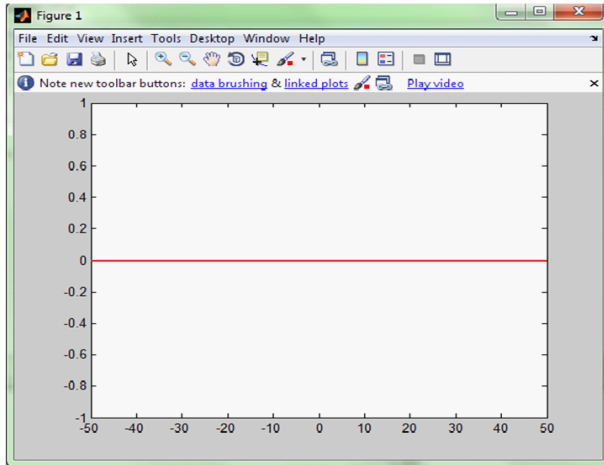
$$y' = y, \quad y(0) = 0$$

On a :

$$\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{f(r)} = \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{r}$$

$$= [\log(y)]_{0^+}^{\alpha_0}$$

Donc, pour $\alpha_0 = 1$, l'intégrale est infinie, alors d'après Osgood il y a unicité à l'origine, (Voir Graphe2.4).



Graph2.4 L'unique solution de: $y' = y$, $y(0) = 0$

Conséquences

A partir des travaux de Cauchy-Lipschitz et Osgood, on peut conclure quelques résultats.

Corollaire 3.4.1 Soit f une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et ne s'annule pas sur un intervalle $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}^+$,

Si f est lipschizienne alors: $\exists \alpha_0 \in]0, a]$, $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{f(r)} = \infty$.

Preuve. f est continue et lipschizienne.

On associe à f le problème de Cauchy:

$$y' = f(y), \quad y(0) = 0,$$

D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il y a unicité à l'origine, en passant par Osgood on déduit que: $\exists \alpha_0 \in]0, a]$, $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{f(r)} = \infty$. ■

Le théorème d'Osgood a servi pour déterminer la nature de l'intégrale, finie ou infinie, de certaines fonctions, par exemple:

Corollaire 3.4.2 $\forall \alpha_0 \in \mathbb{R}$, $0 < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}$, $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{r \sin(r)} < \infty$,

Preuve. Considérons le problème de Cauchy suivant:

$$y' = y \sin(y), \quad y(0) = 0.$$

La fonction $f(x) = x \sin(x)$ est continue, ne s'annule pas sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{4}]$ et vérifie $f(0) = 0$.

Les solutions du système sont données par: $y_1 = \sin(y) - x \cos(y)$ et $y_2 = 0$.

il y a non unicité, d'après Osgood, $\forall \alpha_0, 0 < \alpha_0 \leq \frac{\pi}{4}, \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dr}{r \sin(r)} < \infty$. ■

3.4.2 Version non standard

On va citer la version non standard du critère d'Osgood.

Soit le système autonome suivant :

$$y' = f(y), y(0) = 0 \quad , \quad (C0)$$

où f est une fonction *standard*, continue et vérifie $f(0) = 0$ et ne s'annule pas sur $]0, a]$, a réel *appréciable*.

Théorème 3.4.2 *Il y a unicité de la solution triviale à l'origine ssi $\exists \beta < a : \forall \alpha$ i.p, $0 < \alpha < \beta \implies \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$ est i.g.*

Preuve. montrons l'implication :

$(\exists \beta < a : \forall \alpha$ i.p, $0 < \alpha < \beta \implies \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$ est i.g.) \implies (Il y a unicité de la solution triviale à l'origine)

En utilisant la contraposée:

(non unicité des solutions à l'origine) \implies ($\forall \beta < a, \exists \alpha$ i.p : $0 < \alpha < \beta$ et $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$ est *limitée*).

Supposons qu'il existe une solution y_1 non nulle sauf en 0 de (C0) ie:

$$\frac{dy_1}{dt} = f(y_1) \quad , \quad y_1(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{donc } \frac{dy_1}{f(y_1)} = dt &\implies \forall \beta < a, \exists \alpha \text{ i.p} : 0 < \alpha < \beta \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{f(y_1)} = \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \\ &\implies \forall \beta < a, \exists \alpha \text{ i.p} : 0 < \alpha < \beta \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{f(y_1)} = \beta - \alpha \end{aligned}$$

Alors: $\forall \beta < a, \exists \alpha$ i.p : $0 < \alpha < \beta$ et $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy_1}{f(y_1)}$ est limitée.

On va montrer la deuxième implication:

(Il y a unicité de la solution triviale à l'origine) $\Rightarrow (\exists \beta < a, \forall \alpha \text{ i.p.}, 0 < \alpha < \beta : \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$

est *i.g.*)

En utilisant la contraposée:

$(\forall \beta < a, \exists \alpha \text{ i.p.} : 0 < \alpha < \beta \text{ et } \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)} \text{ est limitée}) \Rightarrow (\text{non unicité des solutions à l'origine}).$

Soit: $u(s) = \int_{\alpha}^s \frac{dr}{f(r)}$

u est bien définie (l'intégrale est limitée).

Et en plus de ça :

$$u'(s) = \frac{1}{f(s)} \neq 0, \quad \forall s > 0$$

Donc, la fonction réciproque $u^{-1} = y$ de u est bien définie. De plus, elle n'est pas nulle.

On a :

$$y' = f(y), \quad y \text{ est différente de } 0 \text{ et } y(\alpha) = 0.$$

On prend $y_0 = \text{ombre de } y$.

Comme f est standard et limitée, donc de classe S^0 et alors y est de classe S^1 , On a:

$$(y_0)' = \circ(y') = \circ(f(y)) = f(y_0).$$

Alors: y_0 est solution et $y_0(0) = 0$ et $y_0 \neq 0$.

donc il y a non unicité des solutions à l'origine.

La démonstration est achevée. ■

Exemple 3.4.4 *Traitons le problème suivant:*

$$y' = y \log |y|, \quad y(0) = 0.$$

On a :

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{y \log |y|} \\ &= [\log |\log y|]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \log(|\log \beta|) - \log(|\log \alpha|). \\ &= \log\left(\left|\frac{\log \beta}{\log \alpha}\right|\right) \end{aligned}$$

Pour β appréciable, $\beta = \frac{1}{2}$, $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$ est i.g. pour tout α i.p., $\alpha > 0$. D'après Osgood il y a unicité des solutions à l'origine.

Exemple 3.4.5 Pour le problème:

$$y' = y^k \quad 0 < k < 1, \quad k \text{ standard}, \quad y(0) = 0$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{y^k} \\ &= \left[\frac{1}{1-k} y^{1-k} \right]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \frac{1}{1-k} [\beta^{1-k} - \alpha^{1-k}] \text{ avec } k < 1. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale est limitée. D'après Osgood il n'y a pas d'unicité à l'origine.

Effectivement, le problème précédent admet deux solutions: $y = 0$ et $y = \sqrt[1-k]{(1-k)t}$.

Exemple 3.4.6 Soit le problème de Cauchy suivant :

$$y' = y \quad , \quad y(0) = 0$$

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{y} \\ &= [\log y]_{\alpha}^{\beta} \\ &= \log \beta - \log \alpha \end{aligned}$$

Pour β appréciable, $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)}$ est i.g., pour tout α i.p. D'après Osgood il y a unicité à l'origine.

3.5 Les travaux de Tamarkine

3.5.1 Version classique

Le théorème suivant dû à Tamarkine assure l'unicité de la solution d'une équation différentielle ordinaire non autonome.

Soit l'équation différentielle suivante:

$$y' = f(x, y) \quad (EN)$$

Théorème 3.5.1 (Voir [15])

Soit (x_0, y_0) un point du plan et $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [y_0 - b, y_0 + b]$ un rectangle voisinage du point (x_0, y_0) .

Supposons que f satisfasse aux deux conditions suivantes:

(i)- f continue sur R .

(ii)- Pour tous (x, y_1) et (x, y_2) points de R , $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|)$ avec φ fonction continue, positive, croissante de la variable positive u et telle que $\varphi(0) = 0$.

Alors, si $\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)}$, ($0 < u < u_0$) diverge quand u tend vers 0, la courbe intégrale de (EN) qui passe par (x_0, y_0) est unique.

Preuve. (Voir [15])

Supposons, sans restreindre la généralité, que $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

Supposons l'existence de deux solutions y_1 et y_2 telles que:

$$y_1(0) = y_2(0) = 0 \text{ et } y_1' = f(x, y_1) \text{ et } y_2' = f(x, y_2).$$

Posons : $v(x) = |y_2(x) - y_1(x)|$ donc $v(0) = 0$.

On déduit de l'hypothèse (ii) que:

$$v(x) = \left| \int_0^x [f(\zeta, y_2) - f(\zeta, y_1)] d\zeta \right| \leq \int_0^x \varphi(v(\zeta)) d\zeta$$

$$\text{et } 0 \leq \frac{dv}{dx}(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{v(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^x \varphi(v(\zeta)) d\zeta}{x} = \varphi(0) = 0. \text{ Donc: } \frac{dv}{dx}(0) = 0.$$

Soit p_h une solution de l'équation $\frac{dp_h}{dx} = \varphi(p_h)$ et $p_h(0) = h$, h étant un nombre positif donné à l'avance.

$$p_h \text{ est positive et croissante et } p_h(x) = h + \int_0^x \varphi(p_h(\zeta)) d\zeta$$

On en déduit dans R :

$$0 \leq v(x) < p_h(x) \quad \dots(T1)$$

En effet:

$$[p_h - v](x) \geq h + \int_0^x [\varphi(p_h) - \varphi(v)](\zeta) d\zeta \quad \dots(T2)$$

$$[p_h - v](0) = h; \quad \frac{d(p_h - v)}{dx}(0) = \varphi(h) > 0, \text{ car: } \frac{dp_h}{dx}(0) = \varphi(h) \text{ et } \frac{dv}{dx}(0) = 0.$$

Ceci nous montre que la différence $p_h - v$ est positive et croissante pour les valeurs de x assez petites.

L'inégalité (T1) est ainsi démontré.

Observons maintenant que p_h est une fonction croissante de x pour h donné et une fonction croissante de h pour x donné, définie par l'équation:

$$\int_h^{p_h} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} = x$$

La quantité p_h tend donc, pour $h \rightarrow 0$, vers une limite déterminée $p_0(x)$ pour chaque valeur de x dans l'intervalle $(0, a)$, et l'on a en outre :

$$p_h(x) > p_0(x) \quad (h > 0).$$

Or $p_0(x)$ ne peut qu'être identiquement nulle, car on aurait dans le cas contraire pour $h < p_0(x)$:

$$\int_h^{p_0(x)} \frac{d\zeta}{\varphi(\zeta)} < x$$

Ce qui est impossible pour h assez petit, l'intégrale dans le premier membre étant divergente pour $h \rightarrow 0$. On a donc:

$$0 \leq v(x) \leq \lim_{h \rightarrow 0} p_h(x) = p_0(x) = 0. \quad \blacksquare$$

3.5.2 Version non standard

Soit (x_0, y_0) un point standard du plan et $R = [x_0 - a, x_0 + a] \times [x_0 - b, x_0 + b]$ un rectangle standard voisinage du point (x_0, y_0) .

Théorème 3.5.2 *supposons que f est une fonction standard, satisfasse aux deux conditions suivantes:*

(i)- f continue sur R .

(ii)- pour tout (x, y_2) et (x, y_1) points standard de R , $|f(x, y_2) - f(x, y_1)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|)$ avec φ fonction standard continue, positive telle que $\varphi(0) = 0$.

Alors, si: $\exists u_0, u_0 > 0 : \forall u \text{ i.p.}, 0 < u < u_0 \implies \int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)}$ est i.g., la courbe intégrale de (EN) qui passe par (x_0, y_0) est unique.

Preuve. Supposons, sans restreindre la généralité, que $(x_0, y_0) = (0, 0)$.

$(\exists u_0 > 0, \forall u \text{ i.p.}, 0 < u < u_0 : \int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \text{ i.g.}) \implies$ (Unicité de la solution qui passe par

l'origine).

Par contraposée, il suffit de montrer:

(non unicité à l'origine) $\implies (\forall u_0, u_0 > 0, \exists u \text{ i.p.} : 0 < u < u_0 \text{ et } \int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \text{ soit limitée}).$

Soit y_1, y_2 deux solutions différentes du problème.

Supposons sans restreindre la généralité que $y_1(x) > y_2(x)$ et $y_1'(x) > y_2'(x), \forall x \neq 0$ et $y_1(0) = y_2(0) = 0$, donc:

$$y_1' = f(x, y_1), y_1(0) = 0 \text{ et } y_2' = f(x, y_2), y_2(0) = 0$$

Alors,

$$|y_1' - y_2'| = |f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq \varphi(|y_1 - y_2|)$$

Soit: $u = y_1 - y_2$.

$$\text{Alors, } u' \leq \varphi(u) \implies \frac{du}{\varphi(u)} \leq dt$$

$$\implies \forall u_0, u_0 > 0, \exists u \text{ i.p.} : 0 < u < u_0 \text{ et } \int_u^{u_0} \frac{dr}{\varphi(r)} \leq \int_u^{u_0} dt.$$

$$\implies \forall u_0, u_0 > 0, \exists u \text{ i.p.} : 0 < u < u_0 \text{ et } \int_u^{u_0} \frac{dr}{\varphi(r)} \leq u_0 - u.$$

$$\implies \forall u_0, u_0 > 0, \exists u \text{ i.p.} : 0 < u < u_0 \text{ et } \int_u^{u_0} \frac{dr}{\varphi(r)} \text{ soit limitée. } \blacksquare$$

Remarque 3.5.1 Ce critère consiste à comparer la fonction f du (EN) à une fonction positive φ , et à dire que, si l'équation $y' = \varphi(y)$ admet 0 comme solution unique (en passant à Osgood), alors le système (EN) admet une solution unique passant par le point (x_0, y_0) .

3.6 Lien entre le critère d'Osgood et le critère de Tamarkine

Théorème 3.6.1 *Si le test de Tamarkine est vérifié pour un système autonome admettant $y = 0$ comme solution, alors le test d'Osgood sera vrai.*

$$\left(\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \text{ i.g. } \right) \implies \left(\int_u^s \frac{dy}{f(y)} \text{ i.g. } \right).$$

Preuve. Supposons que le test de Tamarkine est vérifié,

$$\left(\int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \text{ i.g. } \right)$$

On a:

$$\text{pour tout } y_2 \text{ et } y_1 \text{ points de } R, |f(y_2) - f(y_1)| \leq \varphi(|y_2 - y_1|)$$

Soit $y_1, y_2 : y_1(x) \geq 0$.

Alors pour y_1 et $y_2 = 0$, on a:

$$\begin{aligned} f(y_1) \leq |f(y_1)| \leq \varphi(y_1) &\implies \frac{1}{f(y_1)} \geq \frac{1}{\varphi(y_1)} \\ &\implies \int_u^{u_0} \frac{dy}{f(y)} \geq \int_u^{u_0} \frac{du}{\varphi(u)} \\ &\implies \int_u^{u_0} \frac{dy}{f(y)} \text{ est i.g.} \end{aligned}$$

Et on a le test d'Osgood. ■

Remarque 3.6.1 *On remarque qu'il y a une similitude entre le critère d'Osgood et celui de Tamarkine, publiés presque en même temps. Mais ils ont trouvé séparément leurs résultats à cause du manque de communications au 19 siècle entre la Russie et le monde occidental. Et comme dira J. Tamarkine, "Nous devons ajouter que l'article de M. Painlevé dans 'Encyklopadie der Mathem. Wissenschaften', II. A. 4a, pp. 197-198, contient une citation brève du théorème de M. Osgood concernant le même sujet que notre théorème, démontré en début de la note. Mais le théorème de M. Osgood est beaucoup moins général, que le notre, dont il n'est qu'un cas particulier [pour $\varphi(u) = ku |\log u|$, $ku |\log u| \log |\log u|$, ...] et la méthode même de M. Osgood nous est tout à fait inconnue, les bibliothèques de Pétrograd ne possédant pas les 'Monatshefte f. Math. u. Phys.9' (1898) où le mémoire de M. Osgood est inséré". (Eingegangen am 27. August 1921).*

3.7 Conclusion

Le premier intérêt de l'intégrale d'Osgood a été de prouver l'unicité d'une solution d'une équation différentielle. Ce critère d'unicité, élargi aux équations non autonomes par Tamarkine, est plus général que le théorème de Cauchy-Lipschitz, puis qu'il s'applique à des équations dont le second membre n'est pas lipschitzien comme: $y' = y \log |y|$ et $y' = y \log |\log |y||$.

Chapitre 4

Critère de prolongement

4.1 Introduction

L'extensibilité des solutions des équations différentielles ordinaires est une propriété fondamentale et importante. Dans ce chapitre on va voir l'utilisation de l'intégrale d'Osgood pour déterminer, en premier lieu, l'extensibilité des solutions d'une équation différentielle ordinaire à partir des travaux de Hartman, en deuxième lieu, le prolongement des solutions d'une équation différentielle perturbée en regardant les travaux de Bernfeld, et enfin une généralisation du test d'Osgood faite par trois chercheurs mexicains en 2011.

4.2 Les travaux de Hartman

4.2.1 Théorème d'extension

W désigne un ouvert non vide de \mathbb{R}^d ($d \in \mathbb{N}$), et I un intervalle non vide de \mathbb{R} , non borné à droite.

Soit $f : I \times W \longrightarrow \mathbb{R}^d$ une fonction continue, et soit y une solution de:

$$(EN) \quad y' = f(t, y)$$

sur un intervalle $J \subset I$. L'intervalle J s'appelle intervalle d'existence maximal à droite pour y s'il n'y a aucune extension de y sur un intervalle $J_1 \subset I$, J_1 contenant J , de sorte que y reste une solution de (EN), et J, J_1 ont différents points de terminaison droites. De

la même manière on définit l'intervalle maximal à gauche. Un intervalle maximal est un intervalle maximal à droite et à gauche.

Théorème 4.2.1 (d'Arzela Péano), (Voir([12]))

On considère le système (EN). Alors, par tout point $(t_0, y_0) \in I \times W$ passe au moins une solution $y(t, t_0, y_0)$ définie sur $J \subset I$, qui n'est pas prolongeable sur un intervalle contenant J .

Théorème 4.2.2 (Voir ([12])).

Soit f une fonction continue sur un ensemble ouvert: $E = I \times W \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ et soit y une solution de (EN) sur un intervalle. Alors y peut être étendue (en tant que solution) sur un intervalle maximal d'existence $] \omega_-, \omega_+[$. Egalement, si $] \omega_-, \omega_+[$ un intervalle maximal d'existence, alors y tend vers la frontière ∂W de W quand $t \rightarrow \omega_-$ et $t \rightarrow \omega_+$.

Considérons le problème à valeur initiale suivant:

$$(PVI) \quad y' = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0$$

Corollaire 4.2.1 Soit f une fonction continue sur $\{t_0 \leq t \leq t_0 + a, (< \infty), y \in \mathbb{R}^d\}$. Soit y une solution de (PVI) sur un intervalle maximal à droite J . Alors soit $J = [t_0, t_0 + a]$ soit $J = [t_0, \delta[$, $\delta < t_0 + a$, et $|y(t)| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \delta$. Dans le dernier cas on dit que la solution explose.

Généralement,

Corollaire 4.2.2 Soit f une fonction continue sur l'adhérence \bar{E} d'un ensemble ouvert E et supposons que y est une solution de (PVI) sur un intervalle maximal à droite J . Alors soit: $J = [t_0, +\infty[$, soit $J = [t_0, \delta[$ avec $\delta < \infty$ et $(\delta, y(\delta)) \in \partial E$, soit $J = [t_0, \delta[$ avec $\delta < \infty$ et $|y(t)| \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow \delta$.

4.2.2 Solution maximale et solution minimale

Soit U une fonction continue sur un ensemble E . Une solution maximale $u^0(t)$ du système:

$$(3.2.1) \quad u' = U(t, u), \quad u(t_0) = u^0$$

est une solution de (3.2.1) sur un intervalle maximal d'existence telle que si $u(t)$ est une solution de (3.2.1), alors l'inégalité:

$$(3.2.2) \quad u(t) \leq u^0(t).$$

est vérifiée sur l'intervalle commun d'existence de $u(t)$ et $u^0(t)$.

Une solution minimale $u_0(t)$ a une définition similaire.

Théorème 4.2.3 (Voir ([12])).

Soit $u^0(t)$ la solution maximale du système:

$$(3.2.3) \quad u' = U(t, u), \quad u(t_0) = u^0$$

et $u_0(t)$ la solution minimale du système:

$$(3.2.4) \quad u' = -U(t, u), \quad u(t_0) = u_0.$$

Soit y une fonction de classe C^1 sur $[t_0, t_0 + \alpha]$ telle que:

$$u_0(t) \leq |y(t_0)| \leq u^0(t), \quad (t, |y(t)|) \in E \text{ et:}$$

$$(3.2.5) \quad |y'(t)| \leq U(t, |y(t)|)$$

sur $[t_0, t_0 + \alpha]$.

Alors l'inégalité:

$$(3.2.6) \quad u_0(t) \leq |y(t)|$$

est valable sur chaque intervalle commun d'existence de $u_0(t)$ et y .

Idem pour:

$$(3.2.7) \quad |y(t)| \leq u^0(t)$$

sur chaque intervalle commun d'existence de $u^0(t)$ et y .

Théorème 4.2.4 (Voir ([12])).

Soit ψ une fonction continue et positive sur $[0, +\infty[$, telle que:

$$(3.2.8) \quad \int_0^{\infty} \frac{du}{\psi(u)} = \infty.$$

et soit $u^0(t)$ la solution maximale de:

$$u' = \psi(u), \quad u(t_0) = u^0$$

avec $u^0 \geq 0$, qui existe sur $[t_0, t_0 + a]$,

Soit f une fonction continue sur $[t_0, t_0 + a] \times \mathbb{R}$, qui vérifie:

$$(3.2.9) \quad |f(t, y)| \leq \psi(|y|).$$

Alors les solutions du système:

(PVI) $y' = f(t, y)$, $y(t_0) = y_0$,
avec $|y_0| \leq u^0$, sont globales.

Preuve. La propriété (3.2.9) implique l'inégalité:

$$(3.2.5) \quad |y'(t)| \leq \psi(|y|)$$

sur n'importe quel intervalle sur lequel y existe. Ainsi par le théorème précédent, l'inégalité (3.2.7) est valable dans cet intervalle.

On va montrer que la solution maximale de:

$$(3.2.10) \quad u' = \psi(u), \quad u(t_0) = u_0 (\geq 0),$$

existe sur $[t_0, t_0 + a]$ quand la condition (3.2.8) est vérifiée.

Comme $\psi > 0$, le système (3.2.10) implique que pour toute solution $u(t)$,

$$(3.2.11) \quad t - t_0 = \int_{t_0}^t \frac{u'(s) ds}{\psi(u(s))} = \int_{u_0}^{u(t)} \frac{du}{\psi(u)}.$$

Notons que $\psi > 0$ implique que $u'(t) > 0$ et $u(t) > 0$ pour $t > t_0$.

Par le corollaire (3.2.1), si la solution $u(t)$ n'existe pas sur $[t_0, t_0 + a]$, c'est qu'il existe un intervalle $[t_0, \delta[$ tel que $u(t) \rightarrow \infty$ quand $t \rightarrow \delta (< a)$. Dans ce dernier cas (3.2.11) donne une contradiction, donc $u(t)$ existe sur $[t_0, t_0 + a]$. ■

Corollaire 4.2.3 *Sous les conditions du théorème précédent, et si on suppose que f est continue sur $[t_0, +\infty[$, alors les solutions existent dans $[y_0, +\infty[$, ie elles sont prolongeables.*

Preuve. On utilise les mêmes techniques dans la preuve précédente, et le résultat suit du corollaire (3.2.2). ■

4.3 Les travaux de Bernfeld

4.3.1 Equations différentielles perturbées

L'auteur [4] va donner des conditions suffisantes sur une classe de fonctions de perturbation ϕ pour assurer que les solutions de:

$$(3.3.1) \quad y' = \gamma(y) + \phi(y)$$

$\gamma : [0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ et $\phi : [0, \infty[\rightarrow]0, \infty[$ sont deux fonctions continues,

sont globales (n'explosent pas), chaque fois que les solutions de:

$$(3.3.2) \quad , \quad y' = \gamma(y)$$

sont globales.

Il va montrer, en plus, que les fonctions de perturbation ϕ , de cette classe, dépendent des fonctions γ .

D'autre part, considérons le problème non autonome suivant: supposons que toutes les solutions de:

$$(EN) \quad , \quad y' = f(t, y),$$

où $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est continue,

sont globales; alors pour quelle classe de fonctions $g(t, y)$, toutes les solutions de:

$$(EP) \quad , \quad y' = f(t, y) + g(t, y).$$

sont globales?

Nous allons imposer une condition sur f en exigeant l'existence d'une fonction continue $\gamma : [0, \infty[\longrightarrow]0, \infty[$ telle que:

$$(3.3.3) \quad , \quad |f(t, y)| \leq \gamma(|y|) \text{ pour tout } t \in \mathbb{R}, \text{ et } \int \frac{dr}{\gamma(r)} = \infty.$$

Cette condition (ie si $\int \frac{dr}{\gamma(r)} = \infty$), est suffisante pour que toutes les solutions de (EN) sont globales (voir les travaux de Hartman [12]). Nous disons que γ est liée à f si (3.3.3) est satisfaite.

Des résultats pour les systèmes (EN) et (EP) peuvent être obtenus, en supposant $|f(t, y)| \leq \gamma(|y|)$ et $|g(t, y)| \leq \phi(|y|)$, où les fonctions γ et ϕ satisfont à certaines hypothèses.

4.3.2 Prolongement des solutions d'une équation différentielle perturbée

Théorème 4.3.1 *Supposons que toutes les solutions de (3.3.2) sont globales. Alors toutes les solutions de (3.3.1) sont globales, pour n'importe quelle fonction ϕ satisfaisant la condition suivante:*

$$(3.3.4) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} (\sup \frac{\phi(r)}{\gamma(r)}) < \infty.$$

Preuve. les solutions de (3.3.2) sont globales; alors $\int \frac{dr}{\gamma(r)} = \infty$. De (3.3.4) il existe N

et k satisfaisant à:

$$\frac{\phi(r)}{\gamma(r)} < k \text{ pour } r > N.$$

$$\phi(r) + \gamma(r) \leq (1+k)\gamma(r) \text{ pour } r > N \implies \frac{1}{\phi(r)+\gamma(r)} \geq \frac{1}{(1+k)\gamma(r)} \text{ pour } r > N.$$

$$\text{comme } \int \frac{dr}{\gamma(r)} = \infty \text{ et } \frac{1}{(1+k)} \int \frac{dr}{\gamma(r)} = \infty,$$

$$\text{On a: } \int \frac{dr}{\phi(r)+\gamma(r)} = \infty.$$

Et toutes les solutions de (3.3.1) sont globales. ■

$$\text{Notons que: } \lim_{r \rightarrow \infty} (\inf \frac{\phi(r)}{\gamma(r)}) > 0 \implies \lim_{r \rightarrow \infty} (\sup \frac{\gamma(r)}{\phi(r)}) < \infty.$$

Le théorème dual suivant est obtenu par changement du rôle de γ et ϕ .

Théorème 4.3.2 *Supposons que les solutions de $r' = \phi(r)$ sont globales. Alors toutes les solutions de (3.3.1) sont globales pour toute fonction γ satisfaisant à:*

$$\lim_{r \rightarrow \infty} (\inf \frac{\phi(r)}{\gamma(r)}) > 0.$$

Corollaire 4.3.1 *Supposons que γ est bornée. Si ϕ est continue, croissante et $\int \frac{dr}{\phi(r)} = \infty$*

alors toutes les solutions de (3.3.1) sont globales.

Preuve. La limite de $\phi(r)$ quand $r \rightarrow \infty$ existe ou est égale à $+\infty$. Comme γ est bornée il existe $C > 0$ telle que $\gamma(r) < C$.

$$\text{on a: } \frac{\phi(r)}{\gamma(r)} > \frac{\phi(r)}{C} \implies \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{\phi(r)}{\gamma(r)} \geq \lim_{r \rightarrow \infty} \inf \frac{\phi(r)}{C} > 0.$$

Le résultat est une conséquence du théorème précédent. ■

Corollaire 4.3.2 *Supposons que toutes les solutions de $r' = \lambda(t)\gamma(r)$ sont globales, avec λ continue. Alors toutes les solutions de $r' = \lambda(t)\gamma(r) + \chi(t)\phi(r)$ sont globales pour χ continue, et pour ϕ satisfaisant à: $\lim_{r \rightarrow \infty} (\sup \frac{\phi(r)}{\gamma(r)}) < \infty$.*

Preuve. Supposons que les solutions de:

$$(3.3.5) \quad , \quad r' = \lambda(t)\gamma(r) + \chi(t)\phi(r)$$

ne sont pas globales. Alors il existe r_0, t_0, \hat{t} et une solution r de (3.3.5) tels que:

$r(t, t_0, r_0) \longrightarrow \infty$ quand $t \longrightarrow \widehat{t}, \widehat{t} > t_0$.

Sur l'ensemble compact $[t_0, \widehat{t}]$ il existe $B > 0, T > 0$ tels que $\lambda(t) \leq B$ et $\chi(t) \leq T$.

Considérons l'équation:

$$(3.3.6) \quad s' = B\gamma(s) + T\phi(s).$$

$B\gamma$ et $T\phi$ satisfont $\lim_{r \rightarrow \infty} (\sup \frac{T\phi(r)}{B\gamma(r)}) < \infty$. Alors d'après le théorème précédent, toutes les solutions de (3.3.6) sont globales. En particulier, toutes les solutions de (3.3.6) sont bornées sur $[t_0, \widehat{t}]$ ce qui implique que toutes les solutions de (3.3.5) sont bornées sur $[t_0, \widehat{t}]$, d'où la contradiction, ce qui prouve le résultat. ■

Un résultat dual peut être obtenu en utilisant $\lim_{r \rightarrow \infty} (\inf \frac{\phi(r)}{\gamma(r)}) > 0$ au lieu de $\lim_{r \rightarrow \infty} (\sup \frac{\gamma(r)}{\phi(r)}) < \infty$.

4.4 Le prolongement en Analyse Non Standard

4.4.1 Critère de prolongement

Par définition, une solution y d'une équation différentielle n'est pas prolongeable à l'infini si on peut trouver un point limité x tel que $y(x)$ soit *i.g.*.

Nous avons le théorème suivant:

Théorème 4.4.1 *Soit $y' = f(y)$ une équation différentielle telle que f soit standard, continue et strictement positive.*

*Toutes ses solutions sont prolongeables à l'infini ssi $\exists A > 0 : \forall \omega$ *i.g.*, $\omega > 0 \implies \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)}$ soit *i.g.*.*

Preuve. *Condition suffisante:*

Supposons qu'il existe $A > 0 : \forall \omega$ *i.g.*, $\omega > 0 \implies \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)}$ est *i.g.*

Soit y une solution standard de l'équation $y' = f(y)$.

$u = y^{-1}$ vérifie :

$$u(y) = \int_{y_0}^y \frac{dt}{f(t)} + u(y_0)$$

Comme f est strictement positive, u existe à partir d'un réel y_0 . (Supposons sans restreindre la généralité que $y_0 = A$).

Si y n'est pas prolongeable à l'infini, on peut trouver t_1 limité tel que $y_1 = y(t_1)$ soit *i.g.*.

Mais $t_1 = u(y_1) = \int_A^{y_1} \frac{dt}{f(t)} + u(A)$ est *i.g.* d'après l'hypothèse, d'où la contradiction.

Condition nécessaire:

Supposons que toutes les solutions sont prolongeables à l'infini.

Supposons que: $\forall A > 0, \exists \omega$ *i.g.* : $\omega > 0$ et $\int_A^\omega \frac{dt}{f(t)}$ soit limité.

Soit θ *i.g.* : $0 < \theta < \omega$ et $\int_\theta^\omega \frac{dt}{f(t)} = r$.

Posons: $u(y) = \int_y^\omega \frac{dt}{f(t)}$.

On a: $u(\theta) = r$.

Soit y la fonction réciproque de u ; $y = u^{-1}$.

On a:

$y' = \frac{1}{u'(y)} = \frac{1}{\frac{1}{f(y)}} = f(y)$, et: $y(r) = \theta$.

D'où y est une solution qui n'existe pas dans le futur, contradiction. ■

4.4.2 Prolongement des solutions d'une équation différentielle perturbée

Proposition 4.4.1 *Si toutes les solutions de l'équation $y' = f(y)$ sont prolongeables à l'infini, il en est de même pour celles de l'équation $y' = f(y) + g(y)$ pourvu que $\frac{g}{f}$ soit borné à l'infini, g et f étant des fonctions standard, continues et positives.*

Preuve. Montrons l'implication suivante:

$(\exists A > 0 : \forall \omega$ *i.g.* , $\omega > 0 \implies \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)}$ est *i.g.* et $\frac{g}{f}$ est bornée) $\implies (\exists A > 0 : \forall \omega$ *i.g.*,

$\omega > 0 \implies \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)}$ est *i.g.*).

Si on prend la contraposée, on a:

$(\forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)} \text{ est limitée}) \implies (\forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : (\omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)} \text{ est limitée) ou } (\frac{g}{f} \text{ est bornée})).$

On suppose que: $\forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)} \text{ est limitée, et que } \frac{g}{f} \text{ est bornée.}$

On va monter alors que : $\forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : (\omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)} \text{ est limitée.}$

$$\forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)} = \int_A^\omega \left(\frac{1}{1+\frac{g}{f}(r)}\right) \times \frac{dr}{f(r)}.$$

Soit $m = \min\left(\frac{1}{1+\frac{g}{f}(r)}\right)$

$$\text{Donc : } \forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)} \geq m \times \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)}.$$

$$\text{Alors : } \forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)} \leq \frac{\int_A^\omega \frac{dr}{f(r)+g(r)}}{m}.$$

$$\text{D'où : } \forall A > 0, \exists \omega \text{ i.g} : \omega > 0 \text{ et } \int_A^\omega \frac{dr}{f(r)} \text{ est limitée.}$$

Et la démonstration est achevée. ■

4.5 Les travaux de Ceballos-Lira, Macias-Diaz et Villa

4.5.1 Introduction

Soit y_0 un nombre réel positif, et f une fonction réelle strictement positive définie sur $[0, +\infty]$. Supposons que y est une fonction réelle étendue strictement positive (peut prendre la valeur $+\infty$) qui a le même domaine de définition que f .

Dans cette section, nous donnons un critère qui caractérise l'explosion d'une solution d'une équation différentielle ordinaire de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(y) & , \quad t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.5.1)$$

Plus précisément, le temps d'explosion de la solution de ce problème est le nombre réel positif étendu (peut prendre la valeur $+\infty$): $t_e = \sup \{t \geq 0, y(t) < \infty\}$.

On a vu que t_e est fini ssi $\int_{y_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)} < \infty$. Dans ce cas, $t_e = \int_{y_0}^{\infty} \frac{ds}{f(s)}$.

4.5.2 Test d'Osgood

Soit $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ l'ensemble des réels. On définit $h, f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, deux fonctions continues, $g : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction continue et bornée, $Y : [0, +\infty] \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}_*^+$ une fonction continue. Les auteurs [6] établissent des conditions selon lesquelles la solution de l'équation:

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t h(s)f(Y(s))ds + g(t), \quad t \geq 0 \quad (3.5.2)$$

explose en temps fini. Plus précisément, ils définissent le temps d'explosion de Y par le nombre réel positif $T_e^Y = \sup \{t \geq 0, Y(t) < \infty\}$.

Donc, ils donnent des conditions dans lesquelles le temps d'explosion de Y est un nombre réel fini.

Soit $X(t) = Y(t) - g(t)$. On voit que le problème considéré est équivalent à la détermination du temps d'explosion de la solution X de l'équation:

$$X(t) = y_0 + \int_0^t h(s)f(X(s) + g(s))ds, \quad t \geq 0 \quad (3.5.3)$$

Et on a: $T_e^Y = T_e^X$, car g est bornée.

Remarque 4.5.1 L'équation (3.5.3) peut être représentée par le problème de Cauchy suivant:

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = h(t)f(X(t) + g(t)), & t \geq 0 \\ X(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

où f est localement lipschitzienne et h est continue. Donc l'existence et l'unicité sont garanties (Voir ([11-(10.4.6)]))

On définit les fonctions $H : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ et $V : [y_0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ par:

$$H(t) = \int_0^t h(s)ds \quad \text{et} \quad V(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{f(s)}$$

Chacune de ces fonctions est positive, strictement croissante et continue, donc inversible.

Proposition 4.5.1 *le problème suivant :*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = h(t)f(y(t)), t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

admet une unique solution donnée par: $y(t) = V^{-1}(H(t))$, pour $t < H^{-1}(V(\infty))$. Cette solution explose en temps fini ssi $V(\infty) < H(\infty)$. Dans ce cas $T_e^y = H^{-1}(V(\infty))$.

Preuve. La fonction $y(t) = V^{-1}(H(t))$ est une solution de (3.5.5), car:

$$\frac{y'(s)}{f(y(s))} = h(s).$$

Intégrons les deux membres en $[0, t]$; en substituant, on trouve $V(y(t)) = H(t)$, donc $y(t) = V^{-1}(H(t))$, et l'unicité est vérifiée. En plus de ça, $y(t)$ est finie ssi $t < H^{-1}(V(\infty))$.

Si la solution de (3.5.5) explose en temps $T_e^y < \infty$, alors $V(\infty) = H(T_e^y) < H(\infty)$.

Inversement, le nombre $H^{-1}(V(\infty))$ est réel, donc :

$$V(y(H^{-1}(V(\infty)))) = H(H^{-1}(V(\infty))) = V(\infty).$$

Ceci implique que $T_e^y \leq H^{-1}(V(\infty))$, et cela assure que la solution de (3.5.5) existe pour $t < H^{-1}(V(\infty))$.

En conséquence, la solution de (3.5.5) est positive, continue et croissante sur $[0, T_e^y]$, et a un inverse sur $[y_0, +\infty]$. ■

Soit la fonction $\bar{V} : [y_0, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$, donnée par la formule:

$$\bar{V}(y) = \int_{y_0}^y \frac{ds}{f(s+g(Y^{-1}(s)))},$$

\bar{V} est positive, continue et strictement croissante.

Corollaire 4.5.1 *La solution de (3.5.4) peut être représentée par $Y_t = \bar{V}^{-1}(A(t))$, pour tout $t < H^{-1}(\bar{V}(\infty))$.*

Preuve. La solution $Y_t = \bar{V}^{-1}(A(t))$ est évidemment une solution de (3.5.4), car l'expression de l'équation différentielle dans (3.5.4) est $\frac{Y'_s}{f(Y_s+g(s))} = h(s)$, intégrons les deux membres en $[0, t]$, en substituant, on trouve $\bar{V}(Y_t) = H(t)$, dont l'unicité est vérifiée. Et plus de ça, Y_t est réelle ssi $t < H^{-1}(\bar{V}(\infty))$. ■

4.5.3 Version non standard

Soit le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = h(t)f(y(t)), t \geq 0 \\ y(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.5.5)$$

Où, $h, f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, deux fonctions standard et continues, et y_0 un réel standard.

Proposition 4.5.2 *Le problème (3.5.5) admet une unique solution standard donnée par: $y(t) = V^{-1}(H(t))$, tel que: $\forall \omega$ i.g : $t < H^{-1}(V(\omega))$. Cette solution explose en temps limité ssi $\exists \theta$ i.g : $V(\theta) < H(\theta)$.*

Preuve. Il est facile de voir que $y(t) = V^{-1}(H(t))$ est une solution du problème (3.5.5). Cette solution est bien définie, ie limitée, si $\forall \omega$ i.g : $y(t) < \omega$, donc $V^{-1}(H(t)) < \omega$.

Cette solution explose en temps limité (ie $\exists T_e^y > 0, T_e^y$ est limité: y est globale sur $[0, T_e^y]$) si $\exists \theta$ i.g. : $y(T_e^y) = \theta$, alors: $\exists \theta$ i.g. : $V(\theta) = H(T_e^y) < H(\theta)$, car H est strictement croissante. ■

Considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX(t)}{dt} = h(t)f(X(t) + g(t)), \quad t \geq 0 \\ X(0) = y_0 \end{cases} \quad (3.5.4)$$

Où, $h, f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}_*^+$, deux fonctions standard et continues, $g : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}^+$ une fonction standard, continue et bornée et y_0 un réel standard.

Proposition 4.5.3 *La solution de (3.5.4) est standard et peut être représentée par $Y_t = \bar{V}^{-1}(A(t))$, tel que: $\exists \theta$ i.g. : $t < H^{-1}(\bar{V}(\theta))$.*

Preuve. On utilise les mêmes techniques de la preuve précédente. ■

4.6 Conclusion

Le deuxième intérêt de l'intégrale d'Osgood est de tester le prolongement ou l'explosion d'une solution d'une équation différentielle ordinaire. Initialement, Hartman a cité un critère pour le prolongement des solutions d'une équation différentielle ordinaire. Après, Bernfeld a utilisé ce critère pour les équations différentielles perturbées, et enfin les trois chercheurs mexicains ont généralisé le critère pour déterminer le temps d'explosion d'une solution d'une équation différentielle ordinaire.

Chapitre 5

Caractérisation d'une solution singulière

5.1 Introduction

Une solution d'une équation différentielle est appelée singulière, si elle se présente comme *l'enveloppe* de la famille des courbes intégrales de la solution générale de cette équation différentielle.

Une solution singulière d'une équation différentielle n'est pas décrite par l'intégrale générale, *ie* on ne peut pas la déduire de la solution générale par une valeur particulière de la constante d'intégration C .

La solution singulière est alors une solution d'une équation différentielle dont l'unicité de la solution n'a pas lieu à chacun de ses points dans le domaine de l'équation. Géométriquement, ceci signifie que plus d'une courbe intégrale passe par chaque point de cette solution.

Nous illustrons cela par l'exemple suivant:

Soit l'équation suivante: $(y')^2 - 4y = 0$.

Il est facile de voir que la solution générale de l'équation est donnée par la fonction $y = (x + C)^2$. Graphiquement, elle est représentée par une famille de paraboles (Figure 1).

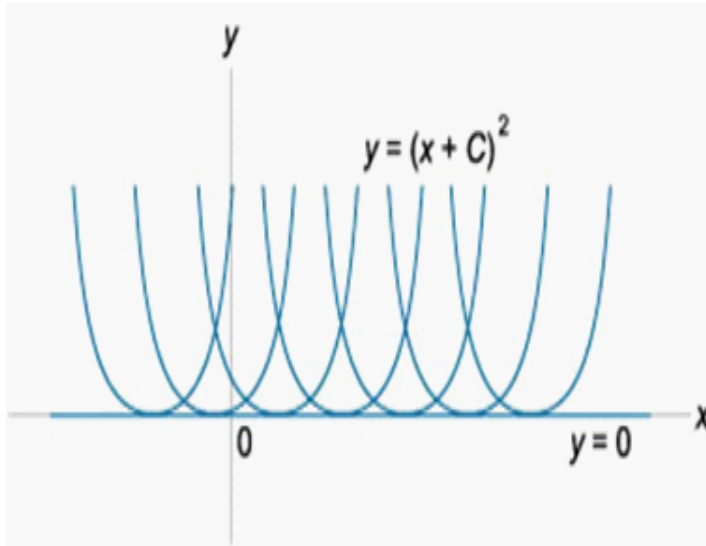


Figure 1. Graphe des solutions de: $(y')^2 - 4y = 0$.

En outre, la fonction $y = 0$ satisfait également à l'équation différentielle, mais n'est pas une solution particulière, et plus d'une courbe intégrale passe par chaque point de la droite $y = 0$. L'unicité de la solution n'a pas lieu sur cette droite. C'est donc une solution singulière de l'équation différentielle.

5.2 Caractérisation des intégrales singulières d'une EDO

On veut obtenir une intégrale singulière de l'équation différentielle:

$$(EN) \quad y' = f(x, y)$$

Comme les solutions de (EN) peuvent être soit des intégrales singulières soit des intégrales particulières, il faudra trouver un moyen de distinguer ces deux types. Dans le cas où nous n'avons pas la forme explicite de l'intégrale générale, on essaie d'avoir un critère d'existence.

Proposition 5.2.1 $y = \mathcal{F}(x)$ est une intégrale particulière (resp singulière) de l'équation (EN) , si $\eta = 0$ est une intégrale particulière (resp singulière) de l'équation:

$$(4.1) \quad \eta' = f[x, \mathcal{F}(x) + \eta] - f[x, \mathcal{F}(x)].$$

Preuve. En effet, $y = \mathcal{F}(x)$, par hypothèse, vérifie l'équation (EN) . On a:

$$(4.2) \quad \mathcal{F}' = f(x, \mathcal{F})$$

Soit:

$$(4.3) \quad F(x, y) = \varsigma.$$

l'intégrale générale de l'équation (EN). Si on pose dans l'équation (4.3):

$$(4.4) \quad y = \mathcal{F}(x) + \eta.$$

et d'après la formule (4.2), on obtient l'équation (4.1), laquelle est vérifiée en prenant $\eta = 0$.

et qui a pour intégrale générale:

$$(4.5) \quad F(x, \mathcal{F}(x) + \eta) = \varsigma$$

$y = \mathcal{F}(x)$ sera une intégrale particulière de l'équation (EN) lorsque $\eta = 0$ sera une intégrale particulière de l'équation (4.1), et réciproquement . ■

Ainsi la question peut toujours être ramenée au cas où l'on aurait identiquement:

$$\mathcal{F}(x) = 0.$$

Théorème 5.2.1 (dû à Cauchy [5]).

Soit f une fonction continue qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R} \times [\alpha, \beta]$, α, β i.p et $f(x, 0) = 0$.

$y = 0$ est une intégrale singulière de l'équation $y' = f(x, y)$ ssi l'intégrale définie par:

$$(4.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} \quad \text{est i.p.}$$

Preuve. (\implies)

$$(y = 0 \text{ est une solution singulière de l'équation (EN)}) \implies \left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} \text{ est i.p.} \right).$$

Représentons toujours par la formule (4.3) l'intégrale générale de l'équation (EN); et soient:

$$\phi(x, y), \psi(x, y)$$

les deux dérivées partielles de la fonction $F(x, y)$ par rapport aux deux variables x et y .

On a:

$$F(x, y) = \varsigma.$$

En dérivant les deux membres, on obtient:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \frac{dy}{dx} = 0 &\implies \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \frac{dx}{dy} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ &\implies \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \frac{1}{f(x, y)} = -\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \\ &\implies \frac{1}{f(x, y)} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}. \end{aligned}$$

Alors:

$$(4.7) \quad \psi(x, y) = -\frac{\phi(x, y)}{f(x, y)}$$

Si on intègre les deux membres par rapport à la variable y , entre les limites $y = \alpha$, $y = \beta$, on trouve:

$$(4.8) \quad F(x, \beta) - F(x, \alpha) = - \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x, y) \frac{dy}{f(x, y)}$$

Soit ε i.p, tel que: $\alpha \leq \varepsilon \leq \beta$; en appliquant le théorème de la moyenne de Cauchy, on

a:

$$(4.9) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \phi(x, y) \frac{dy}{f(x, y)} = \phi[x, \varepsilon] \cdot \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)};$$

Alors,

$$(4.10) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} = \frac{F(x, \alpha) - F(x, \beta)}{\phi[x, \varepsilon]}$$

De plus $y = 0$, étant, par hypothèse, une solution singulière de l'équation (EN), ne vérifie pas l'équation (4.3). En d'autres termes, l'expression $F(x, 0)$ ne pourra pas obtenir une valeur finie et constante, ou bien une valeur constamment infinie. Donc $F(x, 0)$ devra être nécessairement une fonction finie de la variable x , et sa dérivée:

$$\phi(x, 0) = \frac{dF(x, 0)}{dx}$$

est elle-même une fonction finie de x , ou, tout au plus, si la fonction $F(x, 0)$ est linéaire, à une constante finie différente de zéro.

Par suite, le rapport:

$$\frac{F(x, \alpha) - F(x, \beta)}{\phi[x, \varepsilon]}$$

est i.p, en admettant la continuité des fonctions $F(x, y)$ et $\phi(x, y)$, d'où on conclut que

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} \text{ est i.p.}$$

(\Leftarrow)

$$\left(\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} \text{ est i.p.} \right) \implies (y = 0 \text{ est une solution singulière de l'équation (EN)}).$$

Supposons que:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x, y)} \text{ est i.p.}$$

Soit $F(x, y) = \zeta$ l'intégrale générale de l'équation (EN).

On a:

$$\frac{1}{f(x, y)} = \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x, y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x, y)}.$$

Si on intègre, on trouve:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x,y)} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{-\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)} dy \\ &= \frac{1}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varepsilon)} \int_{\alpha}^{\beta} -\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) dy \\ &= \frac{F(x,\alpha) - F(x,\beta)}{\frac{\partial F}{\partial x}(x,\varepsilon)} \end{aligned}$$

Par l'absurde, supposons que $y = 0$ est une solution particulière de (EN) .

Alors, $\exists C \in \mathbb{R} : F(x, 0) = C \implies \frac{\partial F}{\partial x}(x, 0) = 0$.

Alors:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x, \varepsilon) \simeq 0.$$

Et donc $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x,y)}$ peut devenir appréciable ou *i.g.* Contradiction.

Donc $y = 0$, ne pourra être qu'une solution singulière. ■

Corollaire 5.2.1 *Pour décider si $y = 0$ est une intégrale singulière ou particulière de l'équation (EN) , il suffit d'examiner si la valeur de l'intégrale:*

$$(4.6) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x,y)},$$

est ou n'est pas une quantité i.p.

Exemple 5.2.1 *Soit l'équation différentielle suivante:*

$$y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$$

On a:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left(\frac{y}{x}\right)^{-\frac{1}{2}} dy = 2x^{\frac{1}{2}} [y^{\frac{1}{2}}]_{\alpha}^{\beta}$$

$$= 2x^{\frac{1}{2}} (\beta^{\frac{1}{2}} - \alpha^{\frac{1}{2}}) \simeq 0, \forall x \text{ limité.}$$

Alors $y = 0$ est une solution singulière de $y' = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$.

Exemple 5.2.2 *Examinons si $y = 0$ est solution singulière ou particulière de:*

$$y' = y \ln(y).$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y \ln(y)} = \ln \left[\frac{\ln(\beta)}{\ln(\alpha)} \right].$$

α Pour $\beta = \alpha^2$, on a:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{y \ln(y)} = \ln 2.$$

L'intégrale précédente diverge, alors $y = 0$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

Théorème 5.2.2 $y = \mathcal{F}(x)$ est une intégrale singulière (resp particulière) de l'équation (EN), si la valeur de l'intégrale:

$$(4.11) \quad \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\mu}{f[x, \mathcal{F}(x)+\mu] - f[x, \mathcal{F}(x)]}$$

est ou n'est pas une valeur infiniment petite.

Corollaire 5.2.2 On peut citer une autre version du théorème précédent, en substituant l'intégrale précédente (4.11) par:

$$(4.12) \quad \int_{\mathcal{F}(x)+\alpha}^{\mathcal{F}(x)+\beta} \frac{dy}{f[x, y] - f[x, \mathcal{F}(x)]}.$$

Exemple 5.2.3 Soit l'équation différentielle suivante:

$$y' = 1 - y$$

Examinons si $y = 1$ est une solution singulière ou particulière.

Il suffit d'examiner l'intégrale:

$$\int_{1+\alpha}^{1+\beta} \frac{dy}{f[x, y] - f[x, 1]}.$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{1+\alpha}^{1+\beta} \frac{dy}{f[x, y] - f[x, 1]} &= \int_{1+\alpha}^{1+\beta} \frac{dy}{1-y} \\ &= [\log |1-y|]_{1+\alpha}^{1+\beta} \\ &= \log\left(\frac{\beta}{\alpha}\right) \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 2 \times \beta$ l'intégrale n'est pas i.p., alors $y = 1$ est une solution particulière.

Effectivement, $y = 1$ est une solution particulière car:

l'intégrale générale de cette équation est:

$$y = k \times \exp(-t) + 1.$$

Pour $k = 0$, on trouve la solution particulière $y = 1$.

Remarque 5.2.1 Si on essaie d'appliquer le test de Cauchy sur l'équation:

$$y' = \varepsilon\sqrt{y}, \quad \varepsilon \text{ i.p.}$$

On a:

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x,y)} &= \int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{\varepsilon\sqrt{y}} \\ &= \frac{2}{\varepsilon} [\sqrt{y}]_{\alpha}^{\beta} \end{aligned}$$

Pour: $\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = \sqrt{\varepsilon}$, on trouve que: $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dy}{f(x,y)} = \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}$ i.g., bien que la solution $y = 0$ soit singulière, car l'intégrale générale de cette équation est: $\sqrt{y} = \frac{\varepsilon}{2}t$, ie, $y = \pm(\frac{\varepsilon^2}{4}t^2 + C)$.

Il est donc nécessaire d'améliorer le théorème de Cauchy.

Théorème 5.2.3 $y = 0$ est une solution singulière ssi $\forall \beta$ i.p., $\beta > 0$, $\exists \alpha$ i.p., $0 < \alpha < \beta$:

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{dr}{f(r)} \text{ est limitée.}$$

Preuve. Ce résultat est la contraposée du théorème d'Osgood. ■

5.3 Conclusion

Avant la découverte de l'intégrale d'Osgood par Osgood lui-même, Cauchy utilise cette intégrale comme technique de calcul pour caractériser les solutions singulières d'une équation différentielle ordinaire. On voit que cette intégrale nous aide à examiner si une solution est une intégrale particulière ou singulière pour une équation différentielle ordinaire sans connaître l'intégrale générale de cette équation.

Chapitre 6

Généralisation du test d'Osgood

6.1 Introduction

En vertu des trois problèmes (unicité, prolongement, solutions singulières) que l'intégrale d'Osgood peut aider à résoudre, on va donner ici des liens entre les trois résultats précédents.

6.2 Lien entre l'unicité et la caractérisation des solutions singulières

Soit f une fonction continue telle que $f(0) = 0$ et ne s'annule pas sur $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}_*^+$.

Considérons le système différentiel suivant:

$$(C0) \quad y' = f(y), \quad y(0) = 0.$$

Corollaire 6.2.1 *Si $y = 0$ est une solution singulière de (C0) alors $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)}$ est i.p. (α_0 i.p.), donc limitée, d'où il y a non unicité à l'origine.*

Preuve. Ce résultat est immédiatement obtenu à partir des critères de Cauchy et d'Osgood. ■

L'exemple suivant illustre la contraposée de l'implication précédente:

Exemple 6.2.1 Soit l'exemple d'Osgood:

$$y' = y \ln(y) \quad , \quad y(0) = 0.$$

On a vu dans le deuxième chapitre que la solution triviale est l'unique solution qui vérifie ce système, ainsi $y = 0$ est une solution particulière pour le critère de Cauchy.

6.3 Lien entre l'unicité et le prolongement

Soit f une fonction continue strictement positive sur $]0, a]$, $a \in \mathbb{R}_*^+$, et $f(0) = 0$.

Considérons le système différentiel suivant:

$$(C0) \quad y' = f(y) \quad , \quad y(0) = 0.$$

Corollaire 6.3.1 *Si l y a unicité à l'origine de la solution triviale alors toutes les solutions de $y' = f(y)$ sont prolongeables à l'infini.*

Preuve. Supposons qu'il y a unicité à l'origine alors $\int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} = \infty$.

Soit:

$$u(t) = \int_{0^+}^t \frac{dy}{f(y)}.$$

La fonction u est strictement croissante, car $u' = \frac{1}{f} > 0$.

$$\text{Donc } \infty = \int_{0^+}^{\alpha_0} \frac{dy}{f(y)} < \int_{0^+}^{\infty} \frac{dy}{f(y)}.$$

D'après les travaux de Hartman, toutes les solutions de $y' = f(y)$ sont prolongeables à l'infini. ■

Conclusion générale

En conclusion, il apparaît évident que l'intégrale d'Osgood joue un rôle très important dans le domaine des équations différentielles ordinaires.

Son utilisation par Osgood a permis d'élargir le théorème d'existence et d'unicité des solutions de Cauchy-Lipschitz avec des seconds membres non lipschitziens.

Bien avant Osgood, Cauchy avait utilisé la même intégrale pour un critère de distinction entre les solutions particulières et les solutions singulières.

Enfin, Hartman, Bernfeld et Ceballos-Diaz-Villa utilisent la même intégrale pour avoir un critère d'explosion d'une solution. L'ANS nous a permis d'améliorer les différents critères.

D'autre part, on peut espérer approfondir et penser à d'autres utilisations.

A titre d'exemple, on peut généraliser les résultats à des fonctions S-continues mais pas nécessairement continues, des équations du type:

$$y' = f(t, y) + \varepsilon g(t, y).$$

à des inclusions différentielles particulières:

$$y' \in \text{halo}(f(t, y)).$$

Et parler d'unicité ou prolongement des solutions.

Annexe : Un peu d'histoire

6.4 Cauchy Augustin Louis (1789-1857)



Augustin Louis, baron Cauchy, né à Paris le 21 août 1789 et mort à Sceaux (Hauts-de-Seine) le 23 mai 1857, est un mathématicien français. Fervent catholique, royaliste légitimiste, sa position politique et religieuse lui a valu nombre d'oppositions.

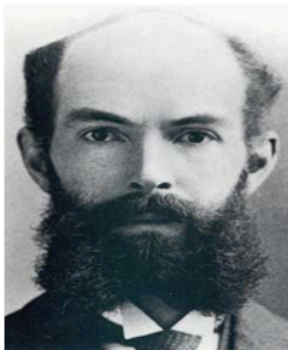
D'abord élève à l'École Polytechnique, puis pendant quelques années ingénieur des Ponts et Chaussées, il se consacre entièrement aux mathématiques pures à partir de 1813. Il est remarqué par Lagrange et Laplace, amis de sa famille. Professeur à l'École Polytechnique et à la Sorbonne, membre de l'Académie des sciences depuis 1816, Cauchy a refusé de prêter serment à Louis-Philippe en 1830 et s'est exilé d'abord à Turin, où fut créée pour lui une chaire de physique mathématique, il est ensuite appelé pendant quelque temps à donner des leçons au duc de Bordeaux, prétendant légitime au trône, avant de regagner enfin Paris en 1838, où on lui permit, en le dispensant du serment, de reprendre sa chaire à l'École Polytechnique; il y enseigne jusqu'à sa mort.

Il fut l'un des mathématiciens les plus prolifiques, avec près de 800 parutions et sept ouvrages; sa recherche couvre l'ensemble des domaines mathématiques de l'époque. On lui doit notamment en analyse l'introduction des fonctions holomorphes et des critères de

convergence des suites et des séries entières. Ses travaux sur les permutations ont été les prémisses de la théorie des groupes. En optique, on lui doit des travaux sur la propagation des ondes électromagnétiques.

Cauchy a cependant été le maître incontesté de l'analyse dans la première moitié du XIX^e siècle. Son œuvre a fortement influencé le développement des mathématiques. La négligence dont fit preuve Cauchy envers les travaux d'Évariste Galois et de Niels Abel en perdant leurs manuscrits, a cependant entaché son prestige.

6.5 Osgood William Fogg (1864-1943)



Mathématicien américain, né à Boston et mort à Belmont (Massachusetts), William Fogg Osgood a joué un rôle important dans le développement de la recherche aux États-Unis. Osgood est entré au collège de Harvard en 1882 et, à l'exception de quelques années passées dans les universités allemandes, il y fera toute sa carrière. Au départ, il fut surtout influencé par les professeurs de physique théorique B. O. Peirce et F. N. Cole. Cole avait suivi le cours de théorie des fonctions de F. Klein. Il enseigna cette matière à Harvard dans l'esprit de Klein. Osgood partit en 1887 à Göttingen pour suivre à son tour l'enseignement de Klein. Sous l'influence de ce dernier, Osgood acquit l'esprit de rigueur et se consacra à l'étude de la théorie des fonctions. Il passa l'année 1889-1890 à Erlangen, où il obtint son doctorat avec une thèse sur les intégrales abéliennes de première, seconde et troisième espèce, reposant sur des travaux antérieurs de F. Klein et de M. Noether. En 1890, il revint à Harvard où il fut, avec Maxime Bôcher, le principal artisan du profond renouveau des études mathématiques aux États-Unis, mettant l'accent sur un établissement rigoureux de

nombreux concepts. Son influence s'exerça non seulement à travers ses publications, mais aussi à travers son enseignement, où il habitua ses étudiants à une pensée claire et précise.

Le premier mémoire important d'Osgood traite de la convergence non uniforme et de l'intégration des séries terme par terme. On y trouve des idées proches de celles qui allaient conduire à la définition de mesure de Borel.

Osgood s'est aussi intéressé au problème de l'existence d'une application conforme d'un domaine plan simplement connexe sur un disque (conjecture de Riemann): il répondit par la négative, en indiquant un contre-exemple, à la question de savoir si une courbe simple de Jordan peut être incluse dans une aire arbitrairement petite.

Osgood fit également des recherches sur le calcul des variations, sur les courbes gauches et sur le mouvement du gyroscope. Pour l'Enzyklopädie der mathematischen Wissenschaften, F. Klein demanda à Osgood d'écrire un article sur la théorie des fonctions. Cette rédaction lui permit d'acquérir des connaissances très étendues dans ce domaine (1901). La même année, il commença à écrire son livre *Lehrbuch der Funktionentheorie* (publié en 1907), qui allait devenir un ouvrage de référence. Il n'existait pas alors de traité global employant rigoureusement tous les outils de l'analyse moderne. Osgood rassemblait, structurait et exposait clairement les matériaux; il comblait maintes lacunes en démontrant des théorèmes nouveaux, en particulier sur les fonctions méromorphes.

Après sa retraite de Harvard, en 1933, Osgood donna pendant deux ans des cours à l'université de Pékin.

6.6 Tamarkine Yakov Davidovitch (1888-1945)



Yakov Davidovitch Tamarkine est un mathématicien Russo-Américain, né le 28 Juin 1888 à Tchernigov en Ukraine (partie de l'Empire russe), et mort le 18 Novembre 1945 à Washington aux Etats-Unis.

Il est diplômé du 2ème lycée de Saint-Pétersbourg, où il a étudié dans la même classe que A. Friedman. Il a étudié la Physique et les Mathématiques à l'Université de St. Petersburg. Après, il a été retenu pour se préparer à un poste de professeur. Sa formation a été dirigée par Vladimir Steklov. Il a enseigné à l'Institut des ingénieurs des chemins de fer dans les instituts polytechniques. En 1914, il publia le livre "Le cours d'analyse", et sa thèse intitulée «Certains problèmes généraux de la théorie des équations différentielles ordinaires linéaires et l'extension des fonctions arbitraires en série» a été soutenue en Juillet 1917. En 1919-1920 il a été chef de Département de Mathématiques de l'Institut polytechnique de Petrograd. Aux Etats-Unis depuis 1925, il a enseigné à Dartmouth College dans le Rhode Island, en tant que professeur invité. A partir de 1927 il est professeur à l'Université Brown. Il a fait beaucoup pour le développement des mathématiques aux Etats-Unis, en tant que co-éditeur et rédacteur en chef de grandes revues américaines de mathématiques, tels que les actes de l'American Mathematical Society (dès 1928). En 1942-1943, il est vice-président de l'American Mathematical Society.

6.7 Bernfeld Stephen R (1945 - 2003)



Bernfeld est un mathématicien américain, né le 21 Janvier 1945 et mort le 15 Janvier 2003, à 58 ans. Bernfeld a obtenu son baccalauréat du Rensselaer Polytechnic Institute en 1965 et son doctorat de l'Université du Maryland en 1969. Il a rejoint la faculté de Mathématiques de l'Université de Texas à Arlington en 1975 comme professeur agrégé de mathématiques et y est devenu professeur titulaire en 1979. Il est spécialiste des équations différentielles.

Bibliographie

- [1] **BEBBOUCHI. R.**, Equations différentielles ordinaires: existence, unicité et analyse non standard. OPU, Oran (1985).
- [2] **BEBBOUCHI. R.**, Equations différentielles perturbées et analyse non standard. OPU, Oran (1990).
- [3] **BEBBOUCHI. R.**, Equations différentielles ordinaires. OPU, Alger (1995).
- [4] **BERNFELD. S. R.**, The extendability and uniqueness of solutions of ordinary differential equations. Pacific J. Math 69 (1977) N° 2 pp 307-315.
- [5] **CAUCHY. A. L.**, Equations différentielles ordinaires, cours inédit, co-publication CNRS. coll. Academic Press (1981).
- [6] **CEBALLOS-LIRA. M. J, MACIAS-DIAZ. J. E, VILLA. J.**, A generalization of Osgood's test and a comparison criterion for integral equations with noise. EJDE, Vol. 2011 (2011), N° 05 pp. 1-8.
- [7] **DELEDICQ. A** et **DIENER. M.**, Leçon de calcul infinitésimal. Edition ARMAND COLIN, Paris (1989).
- [8] **DIENER. F.**, Cours d'analyse non standard. OPU, Oran (1983).
- [9] **DIENER. F** et **DIENER. M.**, Nonstandard analysis in practice. Edition SPRINGER, Nice (1995).
- [10] **DIENER. F** et **REEB. G.**, Analyse non standard. Edition HERMANN, Paris (1989).

- [11] **DIEUDONNE. J**, Foundations of Modern Analysis, 2nd Edition, Pure and Applied Mathematics, Academic Press, Inc., New York, 1969.
- [12] **HARTMAN. P**, Ordinary Differential Equations - Second Edition. Edition SIAM, Philadelphia (2002).
- [13] **OSGOOD. W. F**, Beweis der Existenz einer Lösung der differentialgleichungen $dy/dx = f(x, y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung. Monatsch. Math. Phys. 9 (1898) pp 331-345.
- [14] **REINHARD. H**, Equations différentielles: Fondements et applications - 2^e Edition. Edition DUNOD, Paris (1989).
- [15] **TAMARKINE. Y. D**, Sur le théorème d'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires, Pétrograd, Bulletin de l'Académie des sciences de Russie, Eingegangen am 27 August 1921.