

N=° d'ordre : 31/2012/-M/MT

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET
POPULAIRE**

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR
ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »**

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Probabilités et Statistiques

Par : KADEM Souad

Sujet

UNE ÉTUDE EXPLORATOIRE DES OPTIONS EN FINANCE

Soutenu publiquement le 25/02/2012 devant le jury composé de :

A. TATACHAK	Maître de conférence A / à l'USTHB	Président.
K. BOUKHETALA	Professeur à l'USTHB	Directeur de Mémoire.
K. KHALDI	Maître de conférence A / à l'UMBB	Examineur.
R. OUAFI	Maître de conférence A / à l'USTHB	Examineur.

DÉDICACES

À mes parents

À la mémoire de ma grand-mère

À mes enfants

À mes frères et sœurs

À tous ceux qui me sont chers

REMERCIEMENTS

Au terme de ce travail, je suis particulièrement ravie de témoigner ma gratitude aux personnes qui m'ont permis de concrétiser cette thèse.

Ce travail a été fait sous la supervision du Professeur Kamal BOUKHETALA, je lui suis reconnaissante de m'avoir fait l'honneur d'accepter la direction de cette thèse et de m'avoir donné l'opportunité de faire cette recherche. Je le remercie également, pour m'avoir fait part de son savoir et sa connaissance et pour son aide et sa patience tout au long de l'élaboration de ce travail.

Ma reconnaissance s'adresse aussi aux membres du Jury : Monsieur A. TATACHAK, Monsieur R. OUAFI et Monsieur K. KHALDI. Je suis très honoré de l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail et de leur présence au sein de ce Jury.

Une pensée reconnaissante également à Mme Ourida SADKI pour son soutien moral, ses conseils prodigieux et l'infinie patience dont a fait preuve à mon égard.

Je voudrais aussi remercier ma famille pour son soutien et ses encouragements, particulièrement, ma mère qui a tant fait pour me procurer tout le confort possible durant l'élaboration des programmes informatiques et la rédaction de cette thèse. Je suis infiniment reconnaissante à mes parents de tous les sacrifices qu'ils ont consentis pour que j'arrive à ce niveau d'étude.

Une sincère gratitude à toutes les personnes qui m'ont aidé à réintégrer le domaine de la recherche en me permettant de réaliser cette thèse, je cite Mr K. BOUKHETALA, Mme O. SADKI, Mr M. AIDER, Mme D. BELMILOUDE et finalement tout le corps du département de Probabilités et Statistiques de la Faculté des Mathématiques de l'USTHB.

Je ne peux toutefois finir sans mentionner mes amies Fahima, Yasmina, Rachida et Faiza qui ont participé indirectement à l'aboutissement de ce travail.

RÉSUMÉ

Le caractère erratique des rendements des cours boursiers constitue un enjeu majeur qui mène les analystes à chercher la modélisation qui se rapproche le plus possible de la réalité des marchés financiers. Cette thèse naît de la volonté d'adresser à partir d'une étude comparative de différents modèles, une réponse aux problématiques liées à l'évaluation des options. L'étude empirique menée sur l'indice boursier S&P500 a révélé que la modélisation de Black & Scholes est loin de reproduire la dynamique des cours boursiers présentant ainsi une asymétrie et un excès de kurtosis pour la distribution empirique des rendements et un effet smile pour la volatilité. Ainsi, les modèles à volatilité stochastique nous paraissent mieux adhérer à la réalité des cours boursiers. Néanmoins, ces derniers sont beaucoup plus complexes et ne peuvent être résolus que par voie numérique. Nous avons choisi d'implémenter trois méthodes différentes pour l'évaluation d'une option européenne : la méthode des fonctions caractéristiques, l'algorithme de la transformée de Fourier rapide FFT (Fast Fourier Transform) et la méthode de Monte Carlo (MC) et de faire la comparaison avec des données réelles du marché afin de juger de la précision de la méthode sans oublier pour autant son coût de calcul. Ainsi, l'évaluation sera faite avec la méthode choisie pour le modèle à pure volatilité stochastique SV et le modèle à volatilité stochastique avec des sauts dans le processus du cours de l'actif sous jacent SVJ. Les résultats obtenus et comparés à des primes d'options observées sur le marché boursier vont permettre de tester l'impact d'une modélisation de la variance par un processus stochastique et l'introduction d'une composante de saut sur l'évaluation d'options européennes par rapport à celles fournies par le modèle BS dont la distribution des rendements est supposée être gaussienne et dont la variance est constante.

Mots clés : évaluation d'options européennes, modèle à volatilité stochastique (SV), modèle à sauts et à volatilité stochastique (SVJ), modèle BS, la méthode des fonctions caractéristiques, l'algorithme de la transformée Fourier rapide (FFT), la méthode de Monte Carlo (MC).

ABSTRACT

The erratic nature of the stock market returns constitutes a major stake which leads the analysts to approach modeling as close as possible to the financial market reality. The aim of this thesis is, starting from a comparative analysis of the different models, to answer to problems linked to the European options pricing. The empirical study carried out on the S & P500 stock index revealed that the Black-Scholes model is far from reproducing the dynamics of stock prices, presenting skewness and excess kurtosis in the empirical distribution of returns and a smile effect for the volatility purpose. Thus, the stochastic volatility models seem to adhere better to the reality of stock prices. However, they are much more complex and can be solved numerically only. We have selected to implement three different methods for the evaluation of a European option : the method of characteristic functions, the algorithm of Fast Fourier Transform (FFT) and Monte Carlo (MC) and to compare with actual market data to assess the accuracy of the method without forgetting its computational cost. Thus, the assessment be carried out with the method chosen for the pure stochastic volatility model (SV) and the stochastic volatility model with jumps in the process of the stock market of the underlying asset (SVJ). The results obtained and compared with observed option premiums in the stock market will allow us to test the impact of modeling the variance by a stochastic process and the introduction of a jump component on the assessment of European options with respect to those provided by the BS model in which the distribution of returns is assumed to be Gaussian and constant variance.

Keywords : European options evaluation, stochastic volatility models (SV), stochastic volatility models with jumps (SVJ), BS model, characteristic functions method, FFT algorithm, MC method.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION GÉNÉRALE	1
CHAPITRE 1 : LES FONDEMENTS DE LA VALEUR D'UNE OPTION ET CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÉ À LA FINANCE	4
Partie I : Les fondements de la valeur d'une option et ses déterminants	4
I. Introduction	4
II. Définitions générales	4
III. Les stratégies élémentaires	5
III.1 L'option d'achat « le <i>Call</i> »	5
A. L'achat d'une option d'achat	5
B. La vente d'une option d'achat	6
III.2 L'option de vente « le <i>Put</i> »	7
A. L'achat d'une option de vente	7
B. La vente d'une option de vente	7
IV. La valeur de l'option et ses déterminants	8
IV.1 Les déterminants exogènes de la valeur d'une option	8
IV.1.1 Les caractéristiques de l'actif sous-jacent	8
a. Le cours de l'actif sous-jacent	8
b. La volatilité	10
c. Les dividendes	11
IV.1.2 Le taux d'intérêt à court terme	11
IV.2 Les déterminants endogènes de la valeur d'une option	12
IV.2.1 Le prix d'exercice	12
IV.2.2 La durée de vie l'option	13
V. Les mesures de sensibilité « les grecques »	13
Partie II : Calcul stochastique appliqué à la finance	15
I. Formalismes et concepts généraux	15
I.1 Les actifs financiers	15
I.2 Les stratégies	15
I.3 Les stratégies admissibles et arbitrage	17
II. Martingale et arbitrage	18
II.1 Martingales et transformées de martingales	18
II.2 Marchés financiers viables	19

III.	Marchés complets et probabilité risque-neutre	20
III.1	Les marchés complets	20
III.2	probabilité risque-neutre	20
 CHAPITRE 2 : UTILISATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DANS LE CALCUL DES OPTIONS		22
Partie I : Processus stochastiques en temps continu		23
I.	Introduction	23
II.	Caractéristiques générales	23
II.1	Processus stochastique, filtration, processus adapté et prévisible	23
II.1.1	Définition d'un processus stochastique	23
II.1.2	Définition d'une trajectoire	23
II.1.3	Définition d'une filtration	23
II.1.4	Définition d'un processus adapté	23
II.1.5	Définition d'un processus prévisible	24
II.2	Processus de diffusion	24
II.2.1	Processus de Markov	24
II.2.2	Processus de diffusion et processus d'Itô	25
II.3	Martingales	27
III.	Le mouvement brownien	28
III.1	Introduction	28
III.2	Construction du mouvement brownien	28
III.3	Définition et propriétés générales	32
III.4	Processus de Wiener général	35
 Partie II : Intégrales Stochastiques et lemme D'Itô		38
I.	Introduction	38
II.	L'intégrale stochastique	38
II.1	Construction intuitive	38
II.2	Contre exemple	40
II.3	Définition et propriétés de l'intégrale stochastique	41
II.4	Règles de calcul	43
III.	Le lemme D'Itô	44
III.1	La formule de Taylor, approche intuitive du lemme d'Itô	44
III.2	Le lemme d'Itô	47
III.3	Applications élémentaires	47
IV.	Théorème de GIRSANOV	47
V.	Équations différentielles stochastiques	50

CHAPITRE 3 : PROBLEMATIQUE ET THÉORIE DE L'ÉVALUATION D'INSTRUMENTS OPTIONNELS EN FINANCE 54

Partie I : Présentation des modèles d'évaluation d'options et étude empirique des propriétés des rendements 55

I.	Le modèle fondateur : modèle de Black & Scholes	55
II.	Étude empirique des rendements d'une série financière et de sa volatilité	57
II.1	Limites de la loi gaussienne	58
II.1.1	Skewness et excès de kurtosis	58
II.1.2	Le tracé des quantiles (qq-plot)	59
II.2	Le phénomène de "clustering" de la volatilité	59
II.3	La volatilité implicite	60
II.3.1	Concept de la volatilité implicite	61
II.3.2	Smile de volatilité	61
II.3.3	La structure par termes de volatilité	62
II.3.4	La surface de volatilité	62
III.	Présentation des modèles à volatilité stochastique	62
III.1	Le modèle de Hull & White	63
III.2	Le modèle de Heston	64
III.3	Le modèle de Bates	65

Partie II : Méthodes d'évaluation d'options à volatilité stochastique 67

I.	Introduction	67
II.	Évaluation par les fonctions caractéristiques	67
II.1	La formule de Heston	67
II.2	La formule de Bates	68
III.	L'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT)	69
IV.	Évaluation par la simulation de Monte Carlo	72

CHAPITRE 4 : ÉVALUATION DES OPTIONS EUROPÉENNES EN PRÉSENCE D'UNE VOLATILITÉ STOCHASTIQUE ET D'UNE COMPOSANTE DE SAUT 74

I.	Introduction	74
II.	Influence des paramètres du modèle à volatilité stochastique sur les primes des Calls	74
II.1	Influence de la vitesse de retour à la moyenne κ sur les calls	75
II.2	Influence de la volatilité de la variance σ sur les calls	77

II.3	Influence de la corrélation entre le cours du sous jacent et sa variance sur les calls	79
III.	Extraction et signification de la surface de volatilité implicite	80
III.1	Influence des paramètres du modèle SV sur le comportement de la volatilité implicite	80
III.1.1	Effet de la volatilité de la variance σ	81
III.1.2	Effet de la vitesse de retour à la moyenne κ	81
III.1.3	Effet de la variance à long terme θ	82
III.1.4	Effet de la variance initiale V_0	83
III.1.5	Effet de la corrélation ρ	83
III.2	Effet de la maturité sur la forme du smile	84
III.3	La surface de volatilité	84
IV.	Comparaison de différentes méthodes d'évaluation d'un Call européen	86
IV.1	Évaluation par les fonctions caractéristiques	87
IV.2	Évaluation par la transformée de Fourier rapide "FFT "	88
IV.3	Évaluation par la méthode de Monte Carlo "MC "	88
IV.4	Résultats numériques : comparaison et discussion	88
V.	Évaluation d'un Call européen avec les modèles B&S, SV et SVJ	90
VI.	Conclusion	93
	CONCLUSION GÉNÉRALE	95
	ANNEXES	97
A.	Les EDP des modèles SV et SVJ	97
	BIBLIOGRAPHIE	99

TABLE DES FIGURES

1.1	Pertes et profits de l'acheteur et du vendeur d'une option d'achat	í í í í	6
1.2	Pertes et profits de l'acheteur et du vendeur d'une option de vente	í í í í í í	7
1.3	Évolution du prix de l'option d'achat en fonction du cours du sous-jacent	í í í	9
1.4	Évolution du prix de l'option de vente en fonction du cours du sous-jacent	í í í	10
1.5	Évolution du prix d'une option d'achat en fonction de la volatilité	í í í í í í	11
1.6	Évolution du prix d'une option d'achat en fonction du taux d'intérêt	í í í í í	12
1.7	Évolution du prix d'une option d'achat en fonction de son prix d'exercice	í í í í	12
1.8	Évolution du prix d'une option d'achat en fonction de son échéance	í í í í	13
3.1	Mouvement brownien géométrique	í í í í í í í í í í í í í í í í	57
3.2	Évolution du cours de l'indice S&P500 du 02/01/1970 au 28/05/2004	í í í í í	57
3.3	Distribution empirique des rendements de l'indice S&P500 du 02/01/1970 au 28/05/2004 contre une loi normale	í í í í í í í í í í í í í í í í	59
3.4	Tracé du qq-plot des rendements de l'indice S&P500 contre une loi normale	í í	59
3.5	Évolution des rendements de l'indice S&P500 du 02/01/1970 au 28/05/2004	í í	60
3.6	Accroissements du mouvement brownien géométrique (Bruit blanc gaussien)	í í	60
3.7	Smile de volatilité	... í	61
3.8	Surface de volatilité implicite	... í	62
4.1	Différence de primes des <i>Calls</i> entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de κ	í ...	76
4.2	Différence de primes de <i>Calls</i> entre les modèles SV et BS en fonction de la moneyness et de la maturité pour $\kappa = 2, 1$ et $0,05$	í í í í í í í í í í í í	76
4.3	Différence de primes des <i>Calls</i> entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de σ	í ...	77
4.4	Différences de primes de <i>Calls</i> entre les modèles SV et BS en fonction de la Moneyness et de la maturité pour $\kappa = 0,05, 0,35$ et $0,5$	í í í í í í í í í í	78
4.5	Différence de primes des <i>Calls</i> entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de ρ	í ...	79
4.6	Influence de la volatilité de la variance sur la forme du smile	. í í í í í í	81
4.7	Influence de la vitesse de retour à la moyenne sur la forme du smile	í í í í	81
4.8	Influence de la variance à long terme (σ^2) sur le smile	í í í í í í í í í í	82
4.9	Influence de la variance initiale sur le smile	... í í í í í í í í í í í í	83
4.10	Influence de la corrélation ρ sur l'allure du smile	í í í í í í í í í í í í	83
4.11	Influence de la maturité T sur l'allure du smile	... í í í í í í í í í í í í	84
4.12	Surface de volatilité implicite ($\rho = -0,5$)	í í í í í í í í í í í í í í	85
4.13	Surface de volatilité implicite ($\rho = 0$)	í í í í í í í í í í í í í í	85
4.14	Surface de volatilité implicite ($\rho = +0,5$)	í í í í í í í í í í í í í í	86
4.15	Prix de <i>Calls</i> européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance courte)	í í	91
4.16	Prix de <i>Calls</i> européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance moyenne)	í	91
4.17	Prix de <i>Calls</i> européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance longue)	í í	92

Introduction générale

Le modèle d'évaluation d'options développé par Fisher Black et Myron Scholes en 1973 a révolutionné le monde des produits dérivés. Cette formule a littéralement fait exploser le commerce des options et lui a donné des proportions gigantesques. Lorsqu'on pense à l'impact mais surtout à l'immensité des sommes d'argent impliquées, on conçoit aisément que cette formule est probablement la plus utilisée et il ne est pas étonnant de voir que ces deux chercheurs se soient vu décerner le prix Nobel d'économie en 1992, dès lors, au moyen d'une formule standard, il devient plus facile d'évaluer et donc de transiger des options.

Bien que depuis la publication de leur article, les marchés financiers ont abondamment utilisé le modèle de Black et Scholes. Cependant, les constats empiriques faits à partir des données de marchés montrent que contrairement à ce qui est prévu par ce modèle, la volatilité n'est pas constante. Sa courbe présente une convexité par rapport au prix d'exercice des options, un phénomène connu classiquement sous le nom de smile de volatilité. Par ailleurs, les lois des rendements présentent une asymétrie à gauche et des queues de distribution plus épaisses que celles d'une loi normale.

L'hypothèse de la distribution gaussienne proposée par Black et Scholes est donc très contraignante et reflète mal la réalité empirique, car au niveau des moments d'ordre supérieur, on est à même de voir la violation de leur hypothèse en ce qui a trait à la distribution des prix. Le coefficient d'asymétrie (skewness) est significativement négatif alors que le coefficient d'aplatissement (kurtosis) est quant à lui beaucoup plus supérieur à trois, ce qui implique que la distribution est leptokurtique, c'est-à-dire qu'il y a plus de rendements anormaux que le permettrait une distribution normale.

Pour corriger ces lacunes et depuis plus de vingt ans, le monde des options a été témoin d'un développement effréné de nouveaux modèles. Chaque modèle avait pour but de relaxer une des hypothèses du modèle de Black & Scholes. Nous citons bien sûr les modèles à volatilité stochastiques. Ce type de modèles va apparaître réellement en 1987, où la modélisation de la volatilité stochastique va faire l'objet de plusieurs publications, notamment par Hull & White (1987) et Heston (1993).

Ces modèles supposent un processus stochastique pour la volatilité et évaluent, dans ce cadre, le prix d'une option européenne. Depuis, ce thème a fait l'objet de nombreux travaux, dus essentiellement aux raisons suivantes : les modèles à volatilité stochastique permettent de décrire, avec plus de précision que le modèle normal, la distribution réelle des rendements. Cette distribution est plus leptokurtique que la distribution normale avec un effet d'asymétrie. Ces modèles permettent d'expliquer les biais liés au modèle de Black & Scholes.

Une autre catégorie populaire de modèles à volatilité stochastique utilise la diffusion avec les sauts. En effet, Bates explique les mouvements infinitésimaux du sous-jacent à travers une distribution normale et les mouvements plus grands et plus brusques par des sauts.

Ces modèles ont, cependant, l'inconvénient de ne pas donner une solution analytique au problème de l'évaluation d'une option. Un recours à des simulations est donc nécessaire pour obtenir le prix de l'option.

Cependant, des auteurs comme Heston et Bates ont fait apparaître des solutions quasi-analytiques avec des fonctions caractéristiques qui ne sont tout de même pas résolues de façon analytique. Des méthodes de résolution numériques sont alors nécessaires pour aboutir à la prime de l'option.

Dans cette étude, nous cherchons donc dans un premier temps à trouver la méthode la plus adaptée pour l'évaluation d'une option européenne. Dans un second temps nous l'évaluerons avec différents modèles à savoir celui de Black & Scholes (BS), de Heston (SV) et celui de Bates (SVJ) pour voir et tester les performances de ces derniers à évaluer une option européenne.

Le second objectif de cette thèse est de tester l'impact d'une modélisation de la variance par un processus stochastique et l'introduction d'une composante de saut sur l'évaluation d'une option européenne.

Pour fonder l'axe de cette thèse, nous proposons de traiter le sujet en quatre chapitres. Le premier présente les fondements de la valeur d'une option et ses déterminants. Nous exposerons aussi quelques concepts sur la théorie des marchés financiers.

Pour bien comprendre les modèles financiers qui deviennent de plus en plus complexes chaque jour, nous avons besoin de présenter les outils mathématiques nécessaires à l'évaluation des options. C'est l'objectif du deuxième chapitre qui traitera l'utilisation des équations différentielles stochastiques dans le calcul des options.

À partir du troisième chapitre, nous nous orienterons dans sa première partie vers une étude empirique basée sur l'indice S&P500 pour essayer de cerner les lacunes et insuffisances du modèle fondateur de Black & Scholes, nous présenterons ensuite les modèles alternatifs, à savoir ceux de Hull & White (1987), Heston (1993) et Bates (1996). La seconde partie est consacrée à la présentation des méthodes que nous avons implémentées pour aboutir à la prime de l'option. Ces méthodes sont la résolution par les fonctions caractéristiques, l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier transform) et la méthode de Monte Carlo (MC).

Dans la première section du dernier chapitre, nous allons voir de quelle façon les paramètres du modèle SV vont influencer les primes de Calls européens par rapport à celles évalués par le modèle BS, nous verrons aussi l'influence de ces mêmes paramètres sur la forme du smile généré par le modèle SV.

Nous présenterons ensuite des résultats numériques issus de trois méthodes différentes appliquées au modèle SV (fonctions caractéristiques, FFT et MC) afin de comparer entre elles et choisir la meilleure au sens de précision et de cout de calcul.

Quant à la dernière section, elle sera consacrée à l'évaluation des options avec les modèles BS, SV et SVJ ; les résultats obtenus seront comparés à des observations réelles des prix d'options obtenus par les marchés financiers.

CHAPITRE 1 :

LES FONDEMENTS DE LA VALEUR D'UNE OPTION ET CALCUL STOCHASTIQUE APPLIQUÉ À LA FINANCE.

Partie I : Les fondements de la valeur d'une option et ses déterminants.

I. INTRODUCTION :

Les actifs financiers sont régis par des comportements aléatoires qui traduisent la complexité du monde financier et économique. La mesure et la gestion des risques sont ainsi devenues des enjeux majeurs pour les opérateurs des marchés financiers, et intéressent les chercheurs du laboratoire de probabilités et modèles aléatoires. Les outils mathématiques que ces derniers développent offrent une modélisation et des méthodes quantitatives adaptées à la description et au contrôle des risques financiers, en particulier ceux liés aux problèmes des options.

Figurant parmi les objets fétiches de la finance moderne, les options ont à la fois suscité un nombre considérable d'études théoriques et connu un développement prodigieux sur certains marchés financiers. Les deux principales caractéristiques des options, qui en conditionnent la modélisation, sont :

- la nature intrinsèque : car l'option en tant que titre financier, n'a de sens que dans un univers aléatoire ;
- l'existence d'un actif sous-jacent : par construction, les options constituent des titres conditionnels, dont l'existence et la valeur sont liées à l'évolution d'un actif sous-jacent ; ce dernier peut être de nature très diverse, mais doit présenter un caractère incertain quant à son évolution future ; on parle ainsi d'options sur actions, sur obligations, sur taux d'intérêt, sur devises, ...

Toute modélisation en matière d'option reposera donc au préalable et fondamentalement, sur le choix d'une modélisation stochastique adéquate de l'actif sous-jacent.

II. DÉFINITIONS GÉNÉRALES :

Nous présentons ici quelques notions de base liées aux options.

Une option est un contrat conférant le droit d'acheter ou de vendre une quantité spécifiée d'un actif à un prix déterminé d'avance, tout au long d'un intervalle fixé ou à une échéance fixée.

On parlera d'*option d'achat* ou d'*option de vente* selon qu'il s'agit d'acheter l'actif

ou de le vendre.

On parlera d'*option américaine* lorsque l'option peut être exercée tout au long de l'intervalle fixé ; lorsqu'elle ne peut être exercée qu'à une échéance fixée on parlera alors d'*option européenne*.

L'actif lié au contrat d'option est généralement appelé *actif sous-jacent* ; le prix auquel, suivant le cas, peut être acheté ou vendu, et qui est fixé lors de l'émission de l'option est appelé *prix d'exercice*.

L'option implique un droit et non une obligation d'acheter ou de vendre et les deux parties contractantes de l'option sont l'émetteur de l'option et le détenteur de l'option, ce dernier peut exercer le droit à charge de l'émetteur ; on dit dans ce cas que l'option est exercée.

III. LES STRATEGIES ÉLÉMENTAIRES :

Il est utile de définir les conditions dans les quelles l'acheteur et le vendeur d'une option retireront un gain de leur opération. Les opérations traitées sont supposées être de type européen.

Dans ce qui suivra, un certain nombre de symboles dont il importe de préciser la signification, seront fréquemment utilisés.

C : prix de l'option d'achat (prime ou premium).

P : prix de l'option de vente (prime ou premium).

K : prix d'exercice.

S^* : cours de l'actif sous-jacent à l'échéance.

R : taux d'intérêt sans risque.

T : date d'échéance.

σ : écart type des return de l'actif sous-jacent.

$T - t$: temps restant à courir jusqu'à l'échéance de l'option.

Il faudra veiller à ce que R , $(T-t)$ et σ soient toujours exprimés sur la même base, soit annuelle, mensuelle ou encore journalière.

Quatre opérations seront passées en revue. Il s'agit de l'achat d'une option d'achat ou de vente, puis de la vente des deux mêmes options.

III.1 L'option d'achat " le Call " :

A. L'achat d'une option d'achat :

L'achat d'une telle option correspond à une démarche de spéculation à la hausse de l'actif sous-jacent. L'acheteur de l'option espère en effet que, d'ici l'échéance du contrat, le cours de l'actif va dépasser le prix d'exercice d'un montant au moins égal à la prime qu'il a payé pour acquérir l'option. C'est à dire que l'acheteur n'enregistrera un gain que si le prix d'achat de l'option est inférieur à l'excédent du cours de l'actif à la date d'échéance sur le prix d'exercice. Ainsi trois cas de figure se présentent :

- Si, à l'échéance, le cours de l'actif S^* est inférieur à K , le détenteur de l'option d'achat doit renoncer à exercer son option, et l'opération se soldera pour lui par une perte égale au montant de la prime. Il perdra, en fait, 100% de ce qu'il a investi.
- Si, à l'échéance, le cours de l'actif S^* est supérieur à K , mais inférieur au prix d'exercice augmenté de la prime payée ($K < S^* < K+C$), l'opération se soldera par une perte partielle. Le détenteur d'option a intérêt à exercer, sinon il abandonnera sa prime et aura une perte totale comme dans le cas précédent.
- Si, à l'échéance, le cours de l'actif S^* est supérieur à $K + C$, l'opération deviendra bénéficiaire. Le détenteur de l'option achètera au prix d'exercice K , et revendra immédiatement à S^* . Mais comme il a payé une prime pour réaliser cette opération, son prix de revient est de $K+C$ et son gain est de $[S^* - (K+C)]$.

B. La vente d'une option d'achat :

Le vendeur d'une option d'achat espère que, pendant la durée de vie de l'option, le cours de l'actif ne va pas augmenter ou que, tout du moins, sa hausse sera inférieure au montant de la prime.

En cas de baisse du cours de l'actif sous-jacent, l'option n'est pas exercée par son détenteur et l'émetteur de l'option d'achat (vendeur) enregistrera ainsi son gain maximum qui est représenté par l'intégralité du prix de cette option (prime). Par contre si le cours du l'actif augmente et dépasse K , le gain du vendeur sera $C - (S^* - K)$.

Les pertes et profits de l'acheteur et du vendeur de l'option d'achat sont illustrés de la façon suivante :

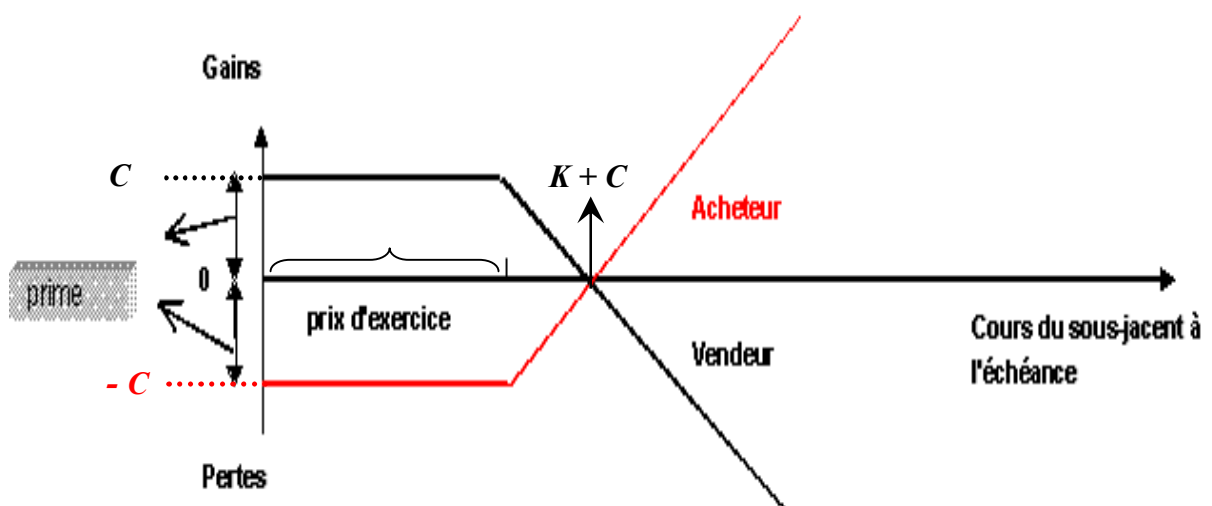


Figure 1.1 : Pertes et profits de l'acheteur et du vendeur d'une option d'achat.

III.2 L'option de vente " le put "

A. L'achat d'une option de vente :

L'achat d'une telle option correspond à une démarche de spéculation à la baisse du cours de l'actif sous-jacent. Le détenteur de l'option de vente (l'acheteur) espère que, d'ici l'échéance, le cours de l'actif diminuera de telle sorte qu'il puisse exercer son droit de vente de l'actif à un prix supérieur à celui du marché, augmenté de la prime payée. L'acheteur de l'option de vente n'exercera donc que si le cours de l'actif est à l'échéance S^* est inférieur au prix d'exercice, mais il n'enregistrera un gain que si $P < (K - S^*)$.

Tant que le cours de l'actif sous-jacent restera supérieur ou égal à K , l'acheteur de l'option n'exercera pas son droit de vente et perdra la totalité de son investissement. Il faudra que le cours descende en dessous du prix d'exercice diminué du coût de l'option ($S^* < K - P$) pour que l'acheteur considéré commence à enregistrer un gain positif.

B. La vente d'une option de vente :

L'opération anticipe une hausse du cours de l'actif sous-jacent. Si cela se vérifie, l'option vendue n'est pas exercée par son acheteur. Cependant quelle que soit l'importance de la hausse, le bénéfice de l'opération se limitera à la prime. C'est-à-dire que le gain du vendeur de l'option de vente restera à son niveau maximum - la prime P - aussi longtemps que le cours de l'actif restera supérieur au prix d'exercice. Il diminuera à partir du moment où l'option sera exercée et le résultat du vendeur deviendra négatif si le cours vient à descendre en dessous du prix d'exercice diminué de la prime P .

Les pertes et profits de l'acheteur et du vendeur de l'option de vente sont illustrés de la façon suivante :

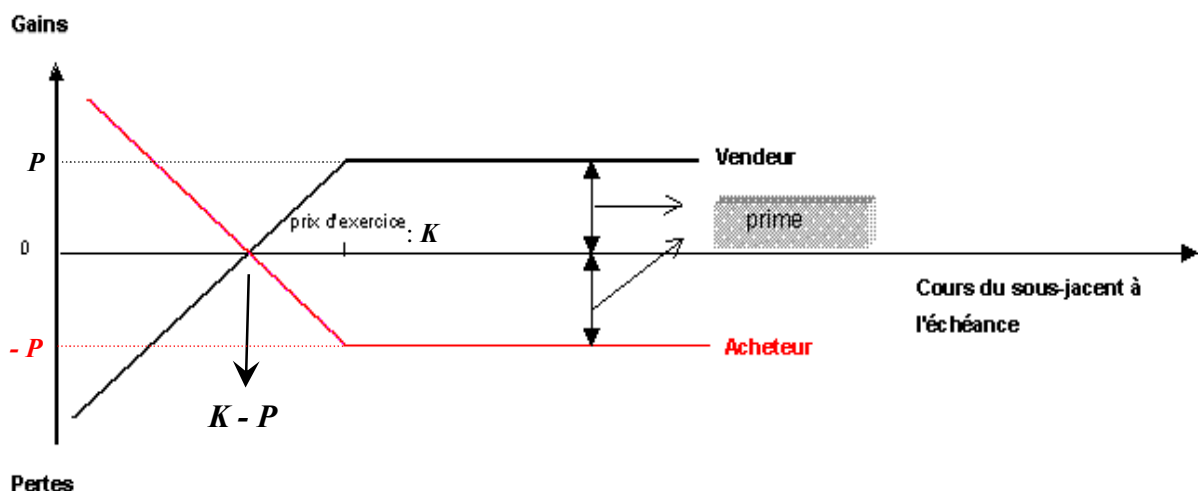


Figure 1.2 : Pertes et profits de l'acheteur et du vendeur d'une option de vente.

IV. LA VALEUR DE L'OPTION ET SES DÉTERMINANTS :

De façon classique, on décompose la valeur d'une option en une *valeur intrinsèque* dite de parité et en une valeur temporelle dite *valeur temps* ou encore *surcote*.

La valeur de l'option est influencée par de nombreux facteurs, on peut en distinguer six qui sont des caractéristiques soit, de l'actif sous-jacent qui représentent les déterminants exogènes, soit des caractéristiques de l'option elle-même qui représentent les déterminants endogènes.

IV.1 Les déterminants exogènes de la valeur d'une option :

La valeur d'une option est soumise à deux facteurs exogènes, les caractéristiques de l'actif sous-jacent d'abord et la valeur du taux d'intérêt à court terme ensuite.

IV.1.1 Les caractéristiques de l'actif sous-jacent :

Il est vrai que la valeur de la prime dépend principalement du cours de l'actif sous-jacent, mais aussi de sa volatilité et des dividendes distribués.

a. Le cours de l'actif sous-jacent :

La *valeur intrinsèque* d'une option d'achat est toujours positive ou nulle et ne diffère de zéro que si le cours de l'actif sous-jacent est supérieur au prix d'exercice. Dans ce cas, elle est égale au cours de l'actif diminué du prix d'exercice, l'option est dite alors en dedans de la monnaie ou « in the money ». Si le cours de l'actif est égal au prix d'exercice, l'option ne présenterait aucun intérêt ; sa valeur intrinsèque est nulle et elle est dite : à parité, à la monnaie ou « at the money ». La valeur intrinsèque sera également nulle si le cours de l'actif est inférieur au prix d'exercice ; on dit alors que l'option est en dehors de la monnaie ou « out of the money ».

A l'inverse, la valeur intrinsèque d'une option de vente n'est différente de zéro que si le cours de l'actif est inférieur au prix d'exercice. Elle est égale au prix d'exercice diminué du cours de l'actif sous-jacent.

La *valeur intrinsèque* de l'option évolue donc avec le cours de l'actif sous-jacent.

La *valeur temps* ou *surcote* représente le surplus de valeur de cette dernière par rapport à sa valeur intrinsèque, étant donné le temps qui lui reste à courir.

Lorsque le cours de l'actif sous-jacent est plus bas que le prix d'exercice, l'option ne peut être exercée toute suite. Cependant d'ici son échéance, le cours de l'actif peut s'élever et, le cas échéant, dépasser le prix d'exercice. Ainsi tant qu'il existe un espoir de pouvoir exercer l'option et, par là même réaliser un bénéfice, les investisseurs sont prêts à payer une surcote pour détenir le contrat. Bien entendu, lorsque le cours de l'actif est très largement inférieur au prix d'exercice, la probabilité de pouvoir lever l'option est extrêmement faible et la surcote se trouve avoir une valeur proche de zéro. Par contre, dès que le cours de l'actif s'élève et se rapproche du prix d'exercice, les chances de pouvoir exercer l'option s'accroissent. De façon progressive, les opérateurs acceptent de payer alors une surcote de plus en plus importante.

Quand le cours de l'actif vient à dépasser le prix d'exercice, la surcote commence à décroître. En effet, plus le cours de l'actif augmente et plus il devient probable que celui-ci, d'ici l'échéance du contrat, ne redescendra pas en dessous du prix d'exercice, et donc que l'option sera exercée.

En fait, la **valeur totale** de l'option " la prime " ne peut jamais être inférieure à sa valeur intrinsèque. La valeur temps de l'option est donc toujours positive ou éventuellement nulle.

Pour le cas d'une option de vente, lorsque le cours de l'actif est nettement supérieur au prix d'exercice de l'option, il existe une faible probabilité pour que, d'ici l'échéance du contrat, celle-ci puisse être exercée. La valeur de la surcote est alors nulle. Elle augmente progressivement dès que le cours de l'actif commence à décroître et se rapproche du prix d'exercice.

Quand le cours de l'actif devient inférieur au prix d'exercice de l'option, la surcote de cette dernière commence à décroître. A la limite, lorsque le cours de l'actif est très largement inférieur au prix d'exercice, il est presque certain que l'option pourra être exercée.

La **valeur totale** de l'option est donc égale à la somme de sa **valeur intrinsèque** et de sa **valeur temporelle** ; cette dernière tend évidemment à s'annuler au fur et à mesure que l'option se rapproche de son échéance.

L'évolution du prix d'une option d'achat et celle du prix d'une option de vente en fonction du cours de l'actif sous-jacent sont représentées par les graphiques suivants :

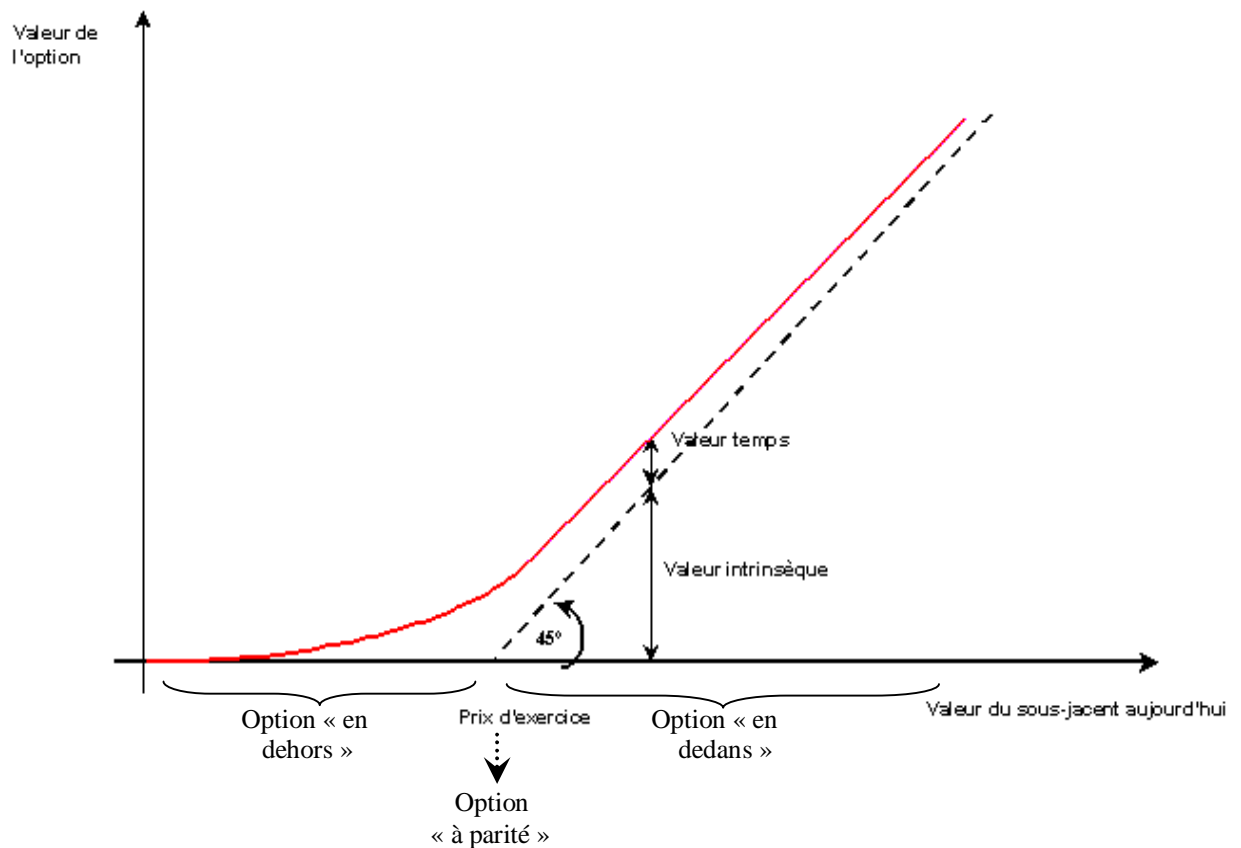


Figure 1.3 : Evolution du prix de l'option d'achat en fonction du cours du sous-jacent

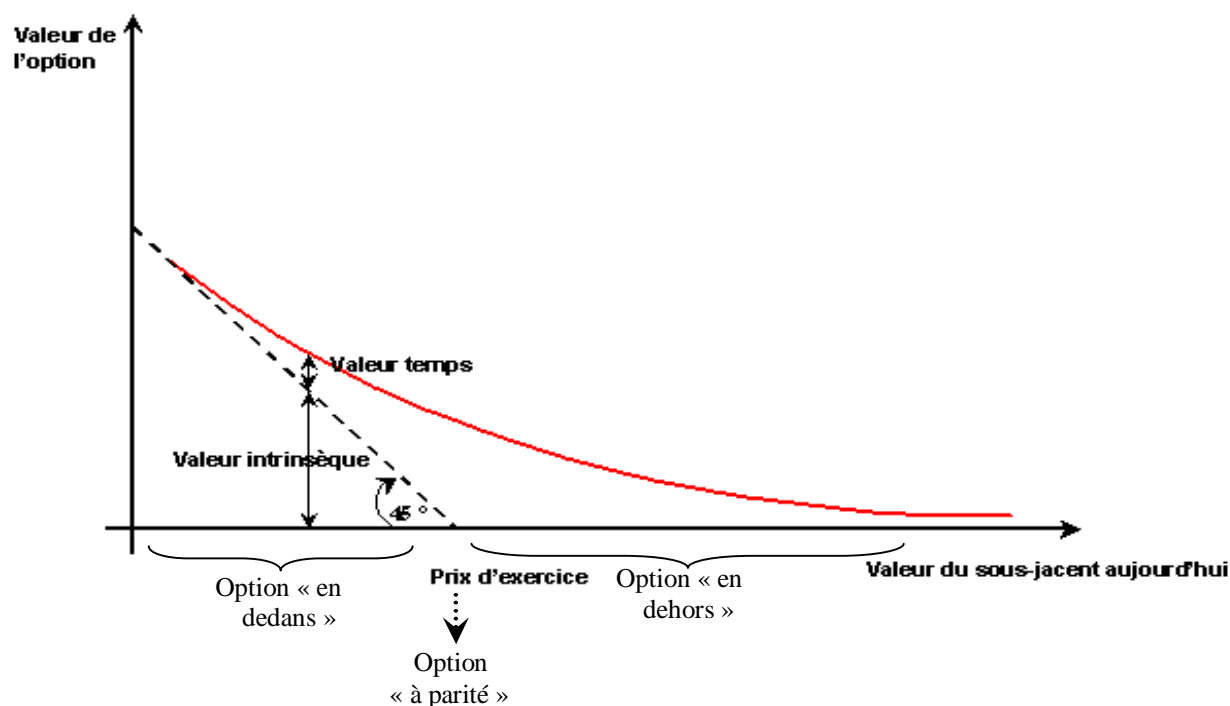


Figure 1.4 : Evolution du prix de l'option de vente en fonction du cours du sous-jacent

b. La volatilité :

Comme déjà indiqué précédemment, l'acheteur d'une option est un spéculateur à la hausse (option d'achat) ou à la baisse (option de vente) du cours de l'actif sous-jacent. Aussi est-il prêt à acquitter une prime d'autant plus élevée que l'amplitude des fluctuations de l'actif est importante et, donc, que son option a des chances d'être exercée.

En cas d'évolution défavorable du cours de l'actif, la perte de l'acheteur d'option est, de toute manière, limitée au montant de la prime, et ce, quelle que soit l'amplitude de la variation du cours de l'actif sous-jacent. Si, par contre, le cours de l'actif évolue favorablement, le profit de l'acheteur est d'autant plus important que l'amplitude de la variation est elle-même grande. Les intervenants sur un marché d'options doivent donc s'efforcer d'anticiper l'amplitude des fluctuations du cours des actifs faisant l'objet de contrats. Il est d'usage d'exprimer l'anticipation de ces fluctuations à l'aide de la variance ou de l'écart type des rendements de l'actif.

En d'autres termes, plus le cours d'un actif est volatil, plus la probabilité qu'une hausse ou une baisse importante du cours se réalise avant l'échéance est élevée. C'est une de ces deux éventualités que recherche tout détenteur d'option, sachant en outre que sa perte éventuelle restera limitée au prix de l'option.

Il est donc évident que le prix de l'option est une fonction croissante de la volatilité du cours de l'actif sous-jacent.

L'évolution du prix d'une option d'achat en fonction de la volatilité du cours de l'actif sous-jacent est représentée par le graphique suivant :

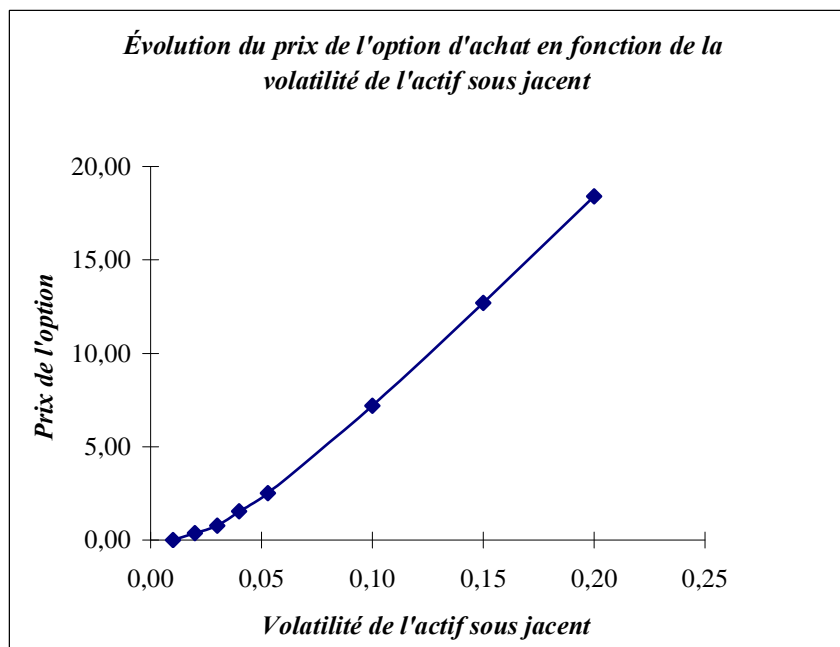


Figure 1.5 : Évolution du prix de l'option d'achat en fonction de la volatilité

c. Les dividendes :

Le prix de l'option tiens compte de l'éventualité du paiement d'un dividende. Une distribution attendue exercera un effet négatif sur la valeur d'une option d'achat et une influence positive sur la valeur d'une option de vente.

IV.1.2 Le taux d'intérêt à court terme :

Si l'on considère l'opération d'achat d'une option d'achat, celle-ci exige moins de capitaux que l'achat direct de l'actif sous-jacent. Les capitaux qu'elle permet d'épargner provisoirement peuvent, par exemple, être investis dans l'actif sans risque pendant toute la durée du contrat de l'option d'achat. L'avantage de l'option sur l'achat direct de l'actif lui-même est, par conséquent, d'autant plus important que le taux d'intérêt de l'actif sans risque est élevé. On peut donc dire que les opérateurs seront prêts à payer une prime d'autant plus importante que le taux d'intérêt à court terme est élevé.

Si l'on considère l'achat d'une option de vente, on peut comparer cette opération à celle impliquant la vente directe de l'actif sous-jacent, l'achat d'une option de vente a pour conséquence de retarder l'encaissement du prix de vente. On peut donc, penser que le prix de l'option de vente soit d'autant plus faible que le taux d'intérêt à court terme est élevé.

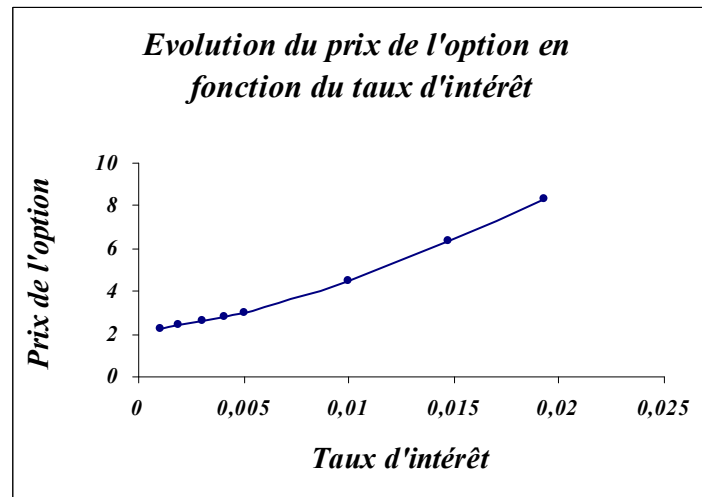


Figure 1.6 : Évolution du prix de l'option d'achat en fonction du taux d'intérêt.

IV.2 Les déterminants endogènes de la valeur d'une option :

Il existe deux facteurs qui peuvent différencier les valeurs d'options, il s'agit d'une part, du prix d'exercice et, d'autre part, de la date d'échéance (qui détermine la durée de vie de l'option).

IV.2.1 Le prix d'exercice :

Une option d'achat a une probabilité d'autant plus forte de pouvoir être exercée avec profit que son prix d'exercice est faible. C'est pourquoi la valeur de la prime d'une telle option apparaît être une fonction décroissante de son prix d'exercice.

L'évolution de la valeur de la prime d'une option de vente en fonction de son prix d'exercice se trouve être exactement symétrique de celle de la valeur de la prime d'une option d'achat. La relation entre la prime d'une option de vente et son prix d'exercice est un fonction croissante. C'est-à-dire qu'on aura d'autant plus de chances d'exercer une option de vente avec profit que son prix d'exercice est élevé.

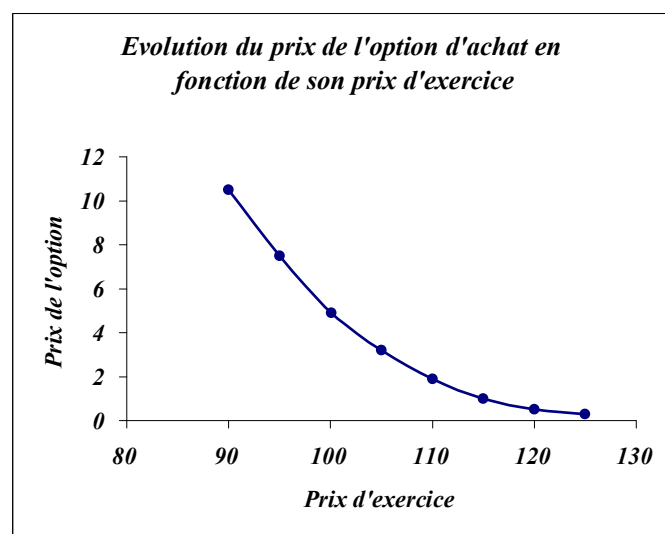


Figure 1.7 : Évolution du prix de l'option d'achat en fonction du prix d'exercice.

IV.2.2 La durée de vie l'option :

La hausse du cours qu'espère l'acheteur d'une option d'achat aura d'autant plus de chances de se réaliser que l'échéance du contrat est éloignée. Le prix de l'option d'achat sera donc une fonction croissante de sa durée de vie. En ce qui concerne l'option de vente, la probabilité de pouvoir l'exercer avec profit est d'autant plus importante que son échéance est éloignée.

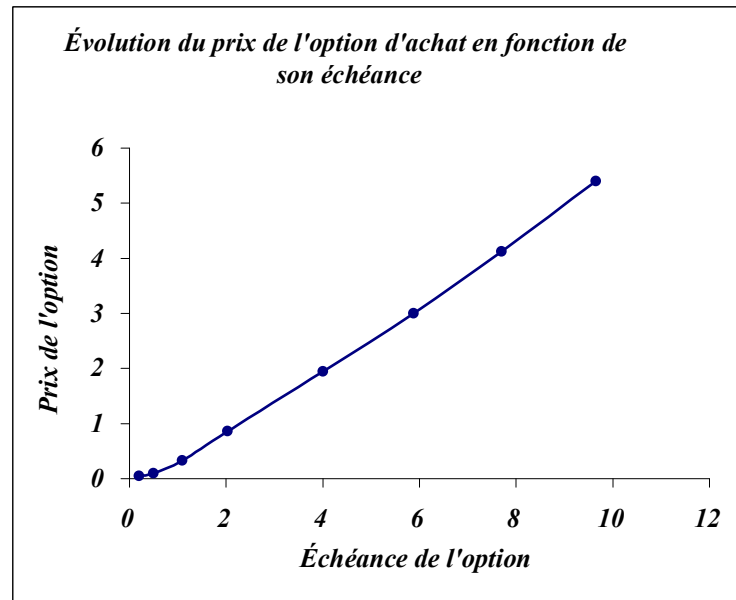


Figure 1.8 : Évolution du prix de l'option d'achat en fonction de son échéance.

V. LES MESURES DE SENSIBILITÉ « LES GRECQUES » :

Les options sont des instruments volatils et dangereux. Le lien qu'il existe entre la théorie des probabilités et le risque d'investissement nous donne la possibilité de quantifier le risque des options d'une façon précise. *Tout changement d'une des variables de nos modèles d'évaluation (le taux d'intérêt sans risque, la volatilité du sous-jacent, le temps avant expiration, ...) a une influence directe sur le prix de l'option. La sensibilité de la valeur de la prime à une variation des variables est une mesure de risque. C'est ce qu'on appelle généralement les 'grecques'.*

V.1 Le risque DELTA :

Le risque delta mesure la sensibilité de la prime de l'option C ou P à une fluctuation du prix de l'actif sous-jacent S .

$\Delta = (\text{variation de la prime}) / (\text{variation d'une unité de l'actif sous-jacent})$

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \text{ pour un Call et } \Delta = \frac{\partial P}{\partial S} \text{ pour un Put.}$$

Le coefficient Δ varie entre 0 et 1 dans le cas d'une option d'achat et entre 0 et -1 dans le cas d'une option de vente.

Cet indicateur nous renseigne sur la *vitesse de réaction* de la prime. Une option fortement dans la monnaie aura généralement un delta proche de 1 pour un call (-1 pour un put). Une option fortement en dehors de la monnaie aura un delta proche de zéro. Et le delta d'une option à la monnaie sera proche de 0,5 pour un call (-0,5 pour un put).

V.2 Le risque GAMMA :

Comme le risque delta n'est pas une constante, on peut aussi mesurer *la vitesse de réaction du risque delta* à une variation d'une unité de l'actif sous-jacent, c'est ce qu'on appelle le risque *gamma*. Gamma peut tout aussi bien être positif que négatif. Les plus grandes valeurs de gamma se trouvent lorsque le prix du sous-jacent est proche du prix d'exercice de l'option.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{(\partial S)^2} = \frac{\partial^2 P}{(\partial S)^2}.$$

V.3 Le risque THETA :

Le risque thêta mesure la variation de la prime de l'option par rapport au temps, il est d'autant plus sensible que l'échéance est proche et plus la valeur de l'option diminue. Ainsi, chaque jour écoulé diminue la valeur de l'option.

Le temps a donc un effet négatif sur la position acheteuse d'options et un effet positif sur une position vendeuse d'options.

$$\theta = -\frac{\partial C}{\partial \tau} \text{ pour un Call et } \theta = \frac{\partial P}{\partial \tau} \text{ pour un Put (} \tau : \text{ temps restant jusqu'à l'échéance).}$$

V.4 Le risque VÉGA / KAPPA :

La prime de l'option est aussi affectée par une variation de la volatilité implicite. C'est ce que mesure le risque véga ou kappa.

V.5 Le risque RHO :

La dernière variable du modèle de Black et Scholes est le taux d'intérêt sans risque. La variation de la prime de l'option suite à une variation de ce taux est appelée le risque rhô.

Partie II : Calcul stochastique appliqué à la finance

I. Formalismes et concepts généraux :

Le but de cette partie est de présenter les principales idées de la théorie des options dans le cadre mathématique très simple des modèles discrets.

La théorie financière élémentaire suppose que les marchés financiers sont efficaces, c'est-à-dire que les prix des titres reflètent à chaque instant toutes les informations pertinentes disponibles. Sur un tel marché, toute nouvelle information est instantanément incorporée dans les prix. Ceci veut dire que l'anticipation d'un événement futur fait bouger les prix des actifs financiers à l'instant où cette anticipation apparaît, et non à l'instant où l'événement se réalise.

Il est donc totalement impossible de prévoir les variations futures du prix d'un actif financier, puisque ces variations dépendent de modifications, inconnues aujourd'hui, des informations qui concourent à la formation de ce prix. Si ces modifications étaient connues, elles seraient déjà incorporées dans le prix des actifs, et ne pourraient donc pas le faire bouger dans le futur.

Ceci implique que les prix des actifs financiers suivent des marchés au hasard, c'est-à-dire que l'espérance mathématique (la meilleure prévision) du prix futur est le prix observé maintenant.

I.1 Les actifs financiers :

Un modèle de marché financier discret est construit sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathcal{F}, P) , muni d'une filtration, c'est-à-dire d'une suite croissante de sous tribus de \mathcal{F} . $\mathcal{F} : \mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_N$; \mathcal{F}_n représente les informations disponibles à l'instant n et est appelée, « tribu des événements antérieurs à l'instant n ». N sera le plus souvent dans la pratique la date d'échéance des options.

On supposera dans la suite que $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_N = \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) > 0$. On suppose qu'il y a sur le marché $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant n sont donnés par des variables aléatoires $S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d$ à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu \mathcal{F}_n (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs). Le vecteur $S_n = (S_n^0, S_n^1, \dots, S_n^d)$ est le prix à l'instant n . L'actif numéroté 0 représente « les placements sans risque » et on posera $S_0^0 = 1$. Si le taux d'intérêt des placements sans risque sur une période est constant et égale à r , on aura $S_n^0 = (1+r)^n$. Le coefficient $\beta_n = 1/S_n^0$ apparaît comme le coefficient d'actualisation (de la date n à la date 0) : c'est la somme d'argent qui, investie à l'instant 0 dans l'actif sans risque, permet de disposer d'une (1) unité monétaire à l'instant n . Les actifs numérotés de 1 à d seront appelés actifs « à risque ».

I.2 Les stratégies :

Une stratégie de gestion est définie par un processus (simplement une suite dans le cas discret) aléatoire $\phi = (\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ à valeurs dans \mathbf{R}^{d+1} , donnant à chaque

instant n les quantités $\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$ des divers actifs, détenues en portefeuille. Le processus ϕ doit être prévisible au sens suivant :

$$\forall i \in \{0, 1, \dots, d\} \left\{ \begin{array}{l} \phi_0^i \text{ est } \mathcal{F}_0 \text{ mesurable} \\ \text{et, pour } n \geq 1 : \\ \phi_n^i \text{ est } \mathcal{F}_{n-1} \text{ mesurable.} \end{array} \right.$$

La signification de cette hypothèse est la suivante : le portefeuille à la date n ($\phi_n^0, \phi_n^1, \dots, \phi_n^d$) est constitué au vu des informations disponibles à la date $(n-1)$ et conservé tel quel au moment des cotations à la date n .

La valeur du portefeuille à l'instant n est donnée par le produit scalaire :

$$V_n(\phi) = \phi_n \cdot S_n = \sum_{i=0}^d \phi_n^i S_n^i,$$

La valeur actualisée est :

$$\tilde{V}_n(\phi) = \beta_n(\phi_n \cdot S_n) = \phi_n \cdot \tilde{S}_n.$$

Où $\beta_n = 1/S_n^0$ et $\tilde{S}_n = (1, \beta_n \cdot S_n^1, \dots, \beta_n \cdot S_n^d)$ est le vecteur des prix actualisés.

On dira qu'une stratégie est *autofinancée* si la relation suivante est réalisée pour tout $n \in \{0, 1, \dots, N-1\}$

$$\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$$

Cette relation s'interprète de la façon suivante : à l'instant n , après avoir pris connaissance des cours S_n^0, \dots, S_n^d , l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_n à la composition ϕ_{n+1} , le réajustement se faisant aux cours de la date n en réinvestissant la valeur totale du portefeuille et rien de plus. Il n'y a donc ni apports, ni retraits de fonds (en particulier, il n'y a pas de consommation).

Remarque :

L'égalité $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ est évidemment équivalente à

$$\phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} \text{ ó } S_n) = \phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_n \cdot S_n,$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1} \cdot (S_{n+1} \text{ ó } S_n).$$

A l'instant $n+1$, la valeur du portefeuille est $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1}$ et la différence $\phi_{n+1} \cdot S_{n+1} - \phi_{n+1} \cdot S_n$ représente le gain (net) dus à l'agitation du cours.

La proposition suivante permet de préciser cette remarque en termes de quantités actualisées.

Proposition 1 :

Les conditions suivantes sont équivalentes :

- i. La stratégie ϕ est autofinancée.
- ii. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, $V_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta S_j$, où ΔS_j est le vecteur $S_j - S_{j-1}$.

- iii. Pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$, $\tilde{V}_n(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{j=1}^n \phi_j \cdot \Delta \tilde{S}_j$,
où $\Delta \tilde{S}_j$ est le vecteur $\tilde{S}_j - \tilde{S}_{j-1} = \beta_j S_j - \beta_{j-1} S_{j-1}$.

En effet :

L'équivalence entre i. et ii. résulte de la remarque précédente. L'équivalence entre i. et iii. s'obtient en remarquant que $\phi_n \cdot S_n = \phi_{n+1} \cdot S_n$ si et seulement si $\phi_n \cdot \tilde{S}_n = \phi_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$.

Cette proposition montre que pour une stratégie autofinancée, la valeur actualisée (et donc, la valeur tout court) du portefeuille est complètement déterminée par la richesse initiale et le processus $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ de quantités d'actifs à risque détenues (cela vient simplement du fait que $\Delta \tilde{S}_j^0 = 0$). On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 2 :

Pour tout processus prévisible $(\phi_n^1, \dots, \phi_n^d)_{0 \leq n \leq N}$ et pour toute variable $V_0 \in \mathcal{F}_0$ \mathcal{F}_0 mesurable, il existe un et un seul processus prévisible $(\phi_n^0)_{0 \leq n \leq N}$ tel que la stratégie $\phi = (\phi^0, \phi^1, \dots, \phi^d)$ soit autofinancée et de valeur initiale V_0 .

En effet :

La condition d'autofinancement entraîne :

$$\begin{aligned} \tilde{V}_n(\phi) &= \phi_n^0 + \phi_n^1 \tilde{S}_n^1 + \dots + \phi_n^d \tilde{S}_n^d \\ &= V_0 + \sum_{j=1}^n (\phi_j^1 \cdot \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \cdot \Delta \tilde{S}_j^d) \end{aligned}$$

Ce qui détermine ϕ_n^0 . La seule chose à vérifier est la prévisibilité de ϕ^0 , qui est immédiate à partir de l'égalité :

$$\phi_n^0 = V_0 + \left[\sum_{j=1}^{n-1} (\phi_j^1 \Delta \tilde{S}_j^1 + \dots + \phi_j^d \Delta \tilde{S}_j^d) \right] + (\phi_n^1 (-\tilde{S}_{n-1}^1) + \dots + \phi_n^d (-\tilde{S}_{n-1}^d)).$$

1.3 Les stratégies admissibles et arbitrage :

Le fait de ne pas avoir imposé de condition sur les signes des quantités ϕ_n^i c'est dire que si $\phi_n^0 < 0$, signifie que l'on a emprunté la quantité $|\phi_n^0|$ sur le marché des placements sans risques. Et dire que $\phi_n^i < 0$ pour un $i \geq 1$ signifie qu'on a des dettes libellées en actifs à risques (par suite de vente à découvert). Les emprunts et les ventes à découvert sont donc permis, mais nous imposerons à la valeur du portefeuille d'être positive ou nulle à tout instant.

Définition :

Une stratégie ϕ est dite *admissible* si elle est autofinancée et si $V_n(\phi) \geq 0$ pour tout $n \in \{1, \dots, N\}$.

L'investisseur doit être donc en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

La notion d'arbitrage (réalisation d'un profit sans prendre de risques) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition :

Une *stratégie d'arbitrage* est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle.

La plupart des modèles excluent toute possibilité d'arbitrage et l'objet de ce qui va suivre est de donner une caractérisation de ces modèles grâce à la notion de martingale.

II. Martingale et arbitrage :

II.1 Martingales et transformées de martingales :

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité fini, avec $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et $\forall \omega \in \Omega P(\{\omega\}) > 0$, muni d'une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, on dira que la suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires est *adaptée* à la filtration si pour tout n , X_n est \mathcal{F}_n -mesurable.

Définition :

Une suite adaptée $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ de variables aléatoires réelles est :

- une martingale si $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) = M_n$ pour tout $n \leq N-1$.
- une surmartingale si $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \leq M_n$ pour tout $n \leq N-1$.
- une sousmartingale si $E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) \geq M_n$ pour tout $n \leq N-1$.

Dans un modèle financier, dire que le cours $(S_n^i)_{0 \leq n \leq N}$ de l'actif i est une martingale revient à dire que, à tout instant n , la meilleure estimation (au sens des moindres carrés) que l'on puisse faire de S_{n+1}^i , à partir des informations disponibles à la date n , est donnée par S_n^i .

Les propriétés suivantes se déduisent aisément de la définition qui précède :

1. $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale si et seulement si :
$$E(M_{n+j} / \mathcal{F}_n) = M_n \quad \forall j \geq 0.$$
2. Si $(M_n)_{n \geq 0}$ est une martingale, on a pour tout n :
$$E(M_n) = M_0.$$
3. La somme de deux martingales est une martingale.
4. On a des propriétés analogues pour les surmartingales et les sousmartingales.

Proposition 3 :

Soit $(M_n)_{0 \leq n \leq N}$ une martingale et soit $(H_n)_{0 \leq n \leq N}$ une suite prévisible par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$, on pose :

$$\Delta M_n = M_n - M_{n-1}$$

la suite $(X_n)_{0 \leq n \leq N}$ définie par :
$$\begin{cases} X_0 = H_0 M_0. \\ X_n = H_0 M_0 + H_1 \Delta M_1 + H_2 \Delta M_2 + \dots + H_n \Delta M_n, \forall n \geq 1. \end{cases}$$
 est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$.

(X_n) est appelée « transformée de la martingale (M_n) par la suite (H_n) ».

Une conséquence de cette proposition et de la proposition 1 est que, dans les modèles financiers où les prix actualisés des actifs sont des martingales, toute stratégie autofinancée conduit à une valeur finale actualisée égale, en moyenne, à la richesse initiale.

En effet,

Il est clair que (X_n) est une suite adaptée, de plus, pour $n \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) &= E[H_{n+1} (M_{n+1} - M_n) / \mathcal{F}_n] \\ &= H_{n+1} E[(M_{n+1} - M_n) / \mathcal{F}_n] \quad (H_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}). \\ &= H_{n+1} [E(M_{n+1} / \mathcal{F}_n) - E(M_n / \mathcal{F}_n)] \\ &= H_{n+1} (M_n - M_n) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'où : $E(X_{n+1} - X_n / \mathcal{F}_n) = 0 \Leftrightarrow$

$$E(X_{n+1} / \mathcal{F}_n) = E(X_n / \mathcal{F}_n) = X_n.$$

Ce qui prouve que X_n est une martingale.

Proposition 4 :

Une suite adaptée de variables aléatoires réelles (M_n) est une martingale si et seulement si pour toute suite prévisible (H_n) , on a :

$$E\left(\sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n\right) = 0.$$

En effet,

Si (M_n) est une martingale, il en est de même par la proposition précédente, de la suite (X_n) définie par $X_0 = 0$ et $\forall n \geq 1, X_n = \sum_{n=1}^N H_n \Delta M_n$, pour toute suite prévisible (H_n) on a donc $E(X_n) = E(X_0) = 0$.

II.2 Marchés financiers viables :

Définition :

On dit que le marché est viable s'il n'existe pas de stratégie d'arbitrage.

Théorème :

Le marché est viable si et seulement s'il existe une probabilité P^* équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

(Deux probabilités P_1 et P_2 sont équivalentes si et seulement si, pour tout événement A , $P_1(A) > 0 \Leftrightarrow P_2(A) > 0$. Ici, P^* équivalente à P signifie simplement que pour tout $\omega \in \Omega$, $P^*(\{\omega\}) > 0$.)

III Marchés complets et probabilité risque-neutre :

III.1 Les marchés complets :

Soit h la variable aléatoire représentant le profit que permet l'exercice d'une option européenne \mathcal{F}_N -mesurable, d'échéance N , de prix d'exercice K , on a $h = (S_N - K)_+$ pour une option d'achat et $h = (K - S_N)_+$ pour une option de vente où S_N est le cours de l'actif à l'échéance, h est donc une fonction de S_N seulement.

Définition :

On dit que l'option européenne h est **simulable** s'il existe une stratégie admissible ϕ dont la valeur à l'instant N est égale à h c'est-à-dire $V_N(\phi) = h$.

Remarque :

Dans un marché viable, pour que l'option h soit simulable, il suffit qu'il existe une stratégie autofinancée de valeur égale à h à l'instant N .

Définition :

On dit qu'un marché financier est **complet** si toute option est simulable.

L'intérêt des marchés complets est qu'ils se prêtent à une théorie très simple de l'évaluation et de la couverture des actifs conditionnels. Le théorème suivant donne une caractérisation des marchés viables et complets.

III.2 Probabilité risque-neutre :

Si ϕ est une stratégie autofinancée telle que $V_N(\phi) = h \geq 0$, il existe une probabilité P^* équivalente à P telle que $\tilde{V}_n(\phi)$ est une martingale, on a donc pour $n \in \{0, 1, \dots, N\}$

$$\tilde{V}_n(\phi) = E^*(\tilde{V}_N(\phi) / \mathcal{F}_n) = \beta_n E^*(h / \mathcal{F}_n) \geq 0.$$

il est clair alors que, si $\tilde{V}_N(\phi) \geq 0$ (en particulier si $V_N(\phi) = h$), la stratégie ϕ est admissible.

Théorème :

Un marché viable est complet si et seulement si, il existe une seule probabilité P^* équivalente à P sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales.

On suppose le marché viable et complet et P^* l'unique probabilité sous laquelle les prix actualisés des actifs sont des martingales. Soit un actif défini par une variable aléatoire \mathcal{F}_N -mesurable, $h \geq 0$ et soit ϕ une stratégie admissible simulant h , c'est-à-dire $V_N(\phi) = h$.

La suite $(\tilde{V}_n)_{0 \leq n \leq N}$ est une martingale sous P^* et par conséquent $V_0(\phi) = E^*[\tilde{V}_N(\phi)]$,

d'où $V_0(\phi) = E^*(\beta_N h) = E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$ « car $(\tilde{V}_N(\phi) = \beta_N h = \frac{1}{S_N^0} h)$ » et plus généralement :

$$V_n(\phi) = S_n^0 E^*\left(\frac{h}{S_N^0} / \mathcal{F}_n\right), \quad n = 0, 1, \dots, N.$$

La valeur à tout instant de toute stratégie admissible simulant h est donc complètement déterminée par h . Il est naturel d'appeler $V_n(\phi)$ la valeur de l'option : c'est la richesse qui, détenue à l'instant n , permet en suivant la stratégie ϕ à partir de l'instant n , de produire exactement la richesse h à l'instant N . Si, à l'instant 0, un investisseur vend l'option au prix $E^*\left(\frac{h}{S_N^0}\right)$, il aura la possibilité, en suivant une stratégie simulante ϕ , de restituer la richesse promise h à l'instant N ; c'est-à-dire qu'il peut se couvrir parfaitement.

Remarque :

D'après le théorème précédent, sous \mathbf{P}^* , la valeur actualisée de l'actif risqué est une martingale, c'est pourquoi on dit que \mathbf{P}^* est une probabilité martingale.

La constance de l'espérance de cette martingale s'écrit : $\forall 1 \leq n \leq N$

$$E^*(S_n) = (1+r)^n S_0.$$

C'est-à-dire que sous \mathbf{P}^* , l'actif risqué rapporte en moyenne que l'actif sans risque. En ce sens, il est indifférent (ou neutre) d'investir en actif sans risque ou en actif risqué, c'est pourquoi on dit également que \mathbf{P}^* est une probabilité neutre au risque.

On peut donc dire que l'une des conséquences des hypothèses de non arbitrage et de complétude des marchés est l'existence et l'unicité à équivalence près d'une mesure de probabilité dite *probabilité martingale* ou « probabilité risque-neutre » telle que le processus des prix actualisés des actifs ayant une source de risque commune est une martingale sous cette probabilité. Cette probabilité peut s'interpréter comme celle qui régirait le processus de prix des sous-jacents de ces actifs si l'espérance du taux de rendement de ceux-ci était le taux d'intérêt sans risque (d'où le terme risque-neutre: aucune prime n'est attribuée à la prise de risque).

CHAPITRE 2 :

UTILISATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES DANS LE CALCUL DES OPTIONS

INTRODUCTION :

Pour bien comprendre les modèles financiers de plus en plus complexes (options, produits de taux d'intérêt, \dots), les spécialistes de la finance utilisent des outils mathématiques de plus en plus sophistiqués (tels que les martingales, les intégrales stochastiques, les browniens, les équations différentielles stochastiques, \dots) pour décrire les phénomènes existant ainsi que la mise en oeuvre des méthodes de calculs.

C'est donc sur ce sujet qu'est concentré le second chapitre. Le but de ce dernier est de présenter les principales idées de la théorie des équations différentielles stochastiques et de montrer son utilité dans la construction des modèles en finance.

PARTIE 1 : PROCESSUS STOCHASTIQUES EN TEMPS CONTINU

I. INTRODUCTION

Nous présentons dans un premier temps le concept général de processus en temps continu (peu différent de l'équivalent en temps discret pour ce qui est de la formulation); nous décrivons ensuite les propriétés des trajectoires les plus couramment rencontrées dans la littérature financière ainsi que les notions de filtration, processus adapté et processus prévisible. Nous abordons ensuite les processus de Markov et les processus de diffusion avant de présenter en détail la construction du mouvement brownien (ou processus de Wiener).

II CARACTÉRISTIQUES GÉNÉRALES :

II.1 Processus stochastique, filtration, processus adapté et prévisible :

II.1.1 Définition d'un processus stochastique :

Un processus stochastique est un phénomène dépendant du hasard et du temps.

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, on appelle processus stochastique toute famille de variables aléatoires $X = (X_t, t \in \mathcal{T})$ à valeurs dans (R, B_R) , $\mathcal{T} = [0, T] \subseteq R^+$ ou $\mathcal{T} \subseteq N$.

II.1.2 Définition d'une trajectoire :

Les applications $t \rightarrow X_t(\omega)$ pour ω fixé dans Ω sont appelées trajectoires du processus X .

II.1.3 Définition d'une filtration :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace de probabilité, on appelle filtration sur Ω , toute famille croissante (au sens de l'inclusion) $\mathcal{F} = \{ \mathcal{F}_t, t \in \mathcal{T} \}$ de sous tribus de \mathcal{A} .

La tribu \mathcal{F}_t représente l'information fournie par le processus jusqu'à l'instant t . De façon plus précise, une filtration indexée par \mathcal{T} est une famille $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathcal{T}}$, de sous tribus de \mathcal{F} c'est-à-dire $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}$, possédant la propriété de croissance suivante :

$$s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

II.1.4 Définition d'un processus adapté :

Un processus $X = (X_t, t \in \mathcal{T})$ est adapté à une filtration \mathcal{F} si pour tout t , X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

On appelle filtration naturelle d'un processus X et l'on note \mathcal{F}^X la plus petite filtration par rapport à laquelle X est adapté ; en d'autres termes, pour tout t , \mathcal{F}_t^X est la tribu engendrée par les variables $X_s, s \leq t$.

Une filtration \mathcal{F}_t est plus fine que la filtration naturelle associée à (X_s) . Pratiquement, dans de nombreux cas, cela correspond à la situation suivante : on observe un phénomène aléatoire dépendant du temps ; alors (\mathcal{F}_t) correspond à l'information contenue dans tout le \mathcal{F}_t ce phénomène.

II.1.5 Définition d'un processus prévisible :

X est un processus prévisible s'il est adapté à \mathcal{F} et si ses trajectoires sont continues à gauche⁽¹⁾.

Si une fonction f est continue à gauche en x_0 , on a :

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Par conséquent si f est connue pour toutes les valeurs inférieures à x_0 , elle est connue en x_0 . De la même façon, lorsque les trajectoires sont continues à gauche, connaître les valeurs prises par le processus aux dates strictement inférieures à t revient à connaître X_t , d'où le qualificatif de prévisible.

II.1.6 Définitions :

Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$;

1. X est à accroissements indépendants si pour tout n-uple (t_1, \dots, t_n) tel que $t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_n$, les variables $X_{t_j} - X_{t_{j-1}}$ sont indépendantes.
2. X est à accroissements stationnaires si pour tout $t \in \mathcal{T}$ et tout $h > 0$, la loi de $X_{t+h} - X_t$ ne dépend⁽²⁾ que de h .

Lorsque X_t est le logarithme du prix d'un actif financier, les différences $X_t - X_s$ sont les rentabilités sur les intervalles du type $[s ; t]$. L'hypothèse d'indépendance des accroissements de X est alors à relier à celle d'efficience du marché. En effet, elle signifie que la loi de probabilité de $X_t - X_s$ ne dépend pas des rentabilités antérieures ou en d'autres termes que toute l'information est contenue dans X_s indépendamment de la trajectoire suivie par le prix jusqu'à la date s . Quant à l'hypothèse de stationnarité, elle est utilisée, au moins implicitement, lorsque l'on estime une variance de rentabilité à partir d'une série temporelle puisque les rentabilités journalières sont assimilées à des réalisations d'une même variable aléatoire.

II.2 Processus de diffusion :

II.2.1 Processus de Markov :

Définition :

Soit X un processus défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$; X est un processus de Markov si pour

tout $(B_1, \dots, B_n) \in \mathcal{B}_R^n$ et tout $(t_1, \dots, t_n) \in \mathcal{T}^n$ tel que $t_1 < \dots < t_n$, on a :

(1) Voir [18] Duffie, *Dynamic Asset Pricing Theory*, 2001.

(2) Cette définition n'a de sens que pour les valeurs de t et h telles que $t+h \in \mathcal{T}$

$$p(X_{t_n} \in B_n / X_{t_j} \in B_j, j = 1, \dots, n-1) = p(X_{t_n} \in B_n / X_{t_{n-1}} \in B_{n-1})$$

On retrouve ici une interprétation du même type que celle donnée plus haut dans le cas des accroissements indépendants. En effet, l'information apportée par la connaissance des $X_s, s < t_{n-1}$ est la même que celle apportée uniquement par $X_{t_{n-1}}$. C'est pourquoi on qualifie les processus markoviens de processus sans mémoire. En d'autres termes, les trajectoires suivies pour arriver en un point de B_{n-1} à la date t_{n-1} n'influencent pas la loi de probabilité de l'accroissement $X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$, seul l'état atteint en t_{n-1} est important.

II.2.2 Processus de diffusion et processus d'Itô

II.2.2.1 Processus de diffusion :

Définition :

On appelle processus de diffusion tout processus markovien à trajectoires continues. Précisons ceci sur un exemple.

Soit X_t la coordonnée d'une petite particule en suspension dans un liquide à l'instant t . On peut admettre que le déplacement de la particule est la résultante de deux composantes :

1. Un déplacement dû à la vitesse macroscopique du liquide.
2. Les fluctuations provoquées par l'agitation thermique chaotique des molécules du milieu.

Soit $a(t, x)$ la vitesse du mouvement macroscopique du liquide au point \tilde{x} et à l'instant \tilde{t} . La fluctuation est supposée comme variable aléatoire avec une répartition qui dépend de la position \tilde{x} , de l'instant \tilde{t} et de l'intervalle de temps Δt pendant lequel est effectué le déplacement, ce dernier s'écrit approximativement alors :

$$X_{t+\Delta t} - X_t = a(t, X_t)\Delta t + \varepsilon_{t,x,\Delta t} \quad \text{où } \varepsilon_{t,x,\Delta t} \text{ est une perturbation aléatoire.}$$

Le processus est homogène, puisque qu'il semble naturel d'admettre que de petites variations de t et de x sont pratiquement sans effet sur les propriétés du milieu. On supposera par conséquent que $\varepsilon_{t,x,\Delta t} = \sigma(t, x) \times \varepsilon_{t,\Delta t}$ où $\sigma(t, x)$ caractérise les propriétés du milieu au point x et à l'instant t et $\varepsilon_{t,\Delta t}$ est la valeur de l'accroissement en milieu homogène (sachant que $\sigma(t, x) = 1$).

De là, $\varepsilon_{t,\Delta t}$ est un processus à accroissement du mouvement brownien ⁽¹⁾ (la différence entre deux états du processus du mouvement brownien). On écrit :

$W(t+\Delta t) - W(t)$. L'accroissement du déplacement du processus de diffusion s'écrit :

$$X_{t+\Delta t} - X_t \approx a(t, X_t)\Delta t + \sigma(t, x) \times [W(t+\Delta t) - W(t)]$$

Pour que cette formule ait un sens, on remplace les accroissements par des différentielles, on obtient la forme suivante :

(1) voir page 28

$$dX_t = a(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) \times dW(t)$$

Il faut noter que cette dernière équation ne peut être interprétée de façon stricte. En effet, la quantité $\frac{W(t + \Delta t) - W(t)}{\Delta t}$, ou $W(t)$ admet une répartition normale d'espérance mathématique nulle et de variance $\frac{1}{\Delta t}$, donc elle ne possède aucune limite probabiliste (quand $\Delta t \rightarrow 0$). Comme $W(t)$ ne possède pas de différentielle, la définition $dW(t)$ n'a plus de sens. Le processus $W(t)$ a des trajectoires qui sont, presque toutes, à variation infinie : en terme intuitif, sur tout intervalle, si petit soit-il, la fonction $t \rightarrow W(t)$ varie beaucoup, presque sûrement.

La dernière équation sera donc rigoureusement justifiée, grâce la notion "intégrale stochastique" (ou différentielle stochastique) qu'on verra ultérieurement.

II.2.2.2 Processus d'Itô :

Un processus X est appelé processus d'Itô si X est un processus de diffusion et s'il existe deux fonctions μ et σ définies sur $\mathbb{R} \times \mathcal{T}$ à valeurs respectivement dans \mathbb{R} et \mathbb{R}_+ définies par :

$$\mu(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{E[X_{t+h} - X_t / X_t = x]}{h} \quad \text{et} \quad \sigma^2(x, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{V[X_{t+h} - X_t / X_t = x]}{h}$$

Pour interpréter μ et σ , il est bon de se référer au cas où X_t est le logarithme du prix de date t d'un actif financier ; dans ce cas $X_{t+h} - X_t$ est la rentabilité de l'actif sur l'intervalle $[t, t+h]$.

$\mu(x, t)$ est alors la rentabilité espérée instantanée en t lorsque le processus X est dans l'état x . La division par h implique que μ est exprimée "par unité de temps". μ est une mesure de tendance du processus mais on garde en général l'appellation anglo-saxonne *drift*. σ^2 est, de la même façon, la variance instantanée de la rentabilité, mesurée par unité de temps. Dans la littérature financière on fait rarement la distinction entre processus de diffusion et processus d'Itô car c'est toujours cette dernière catégorie qui est utilisée. Aussi, lorsque l'on suppose qu'un processus de prix suit une diffusion, il est sous-entendu que μ et σ existent et qu'il s'agit en fait d'un processus d'Itô. Comme nous le verrons plus loin, la dynamique de tels processus s'écrit sous forme d'une différentielle stochastique faisant intervenir μ et σ .

Les processus d'Itô sont relativement bien adaptés à la description de l'évolution des prix des rentabilités ou des taux d'intérêt. Toutefois, la continuité des trajectoires de ces processus limite parfois leur adéquation aux dynamiques observées, en particulier dans les périodes agitées pendant lesquelles on constate de fortes variations dans des intervalles de temps très courts. Il est par ailleurs important de noter que sur les marchés réels les prix n'évoluent jamais en temps continu ; tout d'abord, comme il existe des règles institutionnelles qui définissent les variations minimales (tick ou échelon de cotation) et des imperfections de marché comme les coûts de transaction, il est naturel qu'à certains instants il n'y ait pas de transactions ; de plus les prix changent seulement lorsque des transactions sont réalisées, c'est-à-dire à des instants formant un sous-ensemble discret de T . En conséquence, il est difficile de caractériser en pratique une discontinuité ; à partir de quelle variation doit-on considérer qu'il y a un saut dans le processus de cours ? Quelle que

soit la réponse donnée à cette question, elle comporte une part d'arbitraire non négligeable. De ce fait, sur des marchés liquides fonctionnant (potentiellement) en continu, l'hypothèse d'un processus d'Ito pour les prix est une approximation satisfaisante, conduisant à une formulation élégante de nombreux problèmes.

II.3 Martingales :

Comme dans les modèles en temps discret, les martingales jouent un rôle important dans l'évaluation des actifs lorsque les prix évoluent en temps continu et les principes économiques sous-jacents sont identiques. La définition est donc peu différente de celle donnée du cas discret.

II.3.1 Historique :

La notion de martingale évoque chez beaucoup de gens l'idée d'un système permettant de gagner aux jeux de hasards. Ce n'est qu'au 18^{ème} siècle que Abraham de Moivre définit la stratégie de martingale comme étant toute stratégie permettant de gagner à coup sûr dans un jeu équitable (exemple : jeu de pile ou face). Dès lors ce concept a occupé une place très importante dans la théorie de la probabilité et la formulation mathématique moderne date de ce siècle grâce aux contributions de Paul Lévy et Jean Ville. Aujourd'hui, les martingales concernent bien d'autres domaines que les jeux de hasard, comme la finance par exemple.

Afin d'illustrer la notion de martingale, nous proposons l'exemple ci-dessous relatif à la stratégie dite de D'Alembert :

Exemple :

Un joueur parie toujours sur pile et cesse dès qu'il a gagné. Il double sa mise à chaque fois qu'il perd. Ceci est une stratégie de martingale. Autrement dit, nous avons une variable aléatoire $Y_n = \pm m_n$, représentant le gain (ou la perte) lors du jeu n avec une probabilité associée de $1/2$. Nous considérons également la variable aléatoire $X_n = \sum_{i=1}^n Y_i$, représentant les pertes (gains) accumulées jusqu'au jet n avec comme valeur de départ $X_0 = 0$.

\mathcal{F}_{n-1}^Y est une suite dont les éléments sont constitués par les différentes valeurs de $Y_n = \pm m_n$.

Application :

$\mathcal{F}_{n-1}^Y = (-1; -2; -4; -8; \dots)$. On vérifie que $E[Y_n / \mathcal{F}_{n-1}^Y] = 0$ et qui n'est rien d'autre que la définition d'une martingale. En effet nous avons une chance sur deux de gagner un franc et la même probabilité de perdre le même montant. Par suite, $E[X_n / \mathcal{F}_{n-1}^Y] = X_{n-1}$ et donc (X_n, \mathcal{F}_n^X) est bien une martingale.

Si nous appelons T le premier instant où la pièce tombe sur pile, T est le temps d'arrêt et $X_T = 1$ presque sûrement, alors que $E[X_0] = 0$ par hypothèse. Dans la pratique, une stratégie développée dans notre exemple n'est pas si facile à adopter, car le joueur a besoin d'un capital suffisant pour supporter des pertes pouvant être grandes. Ainsi cette stratégie n'est faite que pour les infiniment riches !

Conclusion : Pour un jeu équitable et dans un intervalle de temps borné, il n'existe pas de stratégie qui permette de gagner à coup sûr.

Lien avec la finance : Un investisseur doit essayer de trouver une stratégie lui permettant de se procurer un gain avec une grande probabilité.

II.3.2 Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ un espace probabilisé filtré ; on appelle (X_t, \mathcal{F}_t) martingale tout processus X_t adapté à \mathcal{F}_t , intégrable tel que :

$$\forall (s, t) \in \mathcal{T}, s \leq t \Rightarrow E[X_t / \mathcal{F}_s] = X_s$$

On parle de :

Sur-martingale lorsque $E[X_t / \mathcal{F}_s] \geq X_s$

Sous-martingale lorsque $E[X_t / \mathcal{F}_s] \leq X_s$

III LE MOUVEMENT BROWNIEN :

III.1 Introduction :

Comme le rappelle son nom, le mouvement brownien a été découvert en 1827 par le botaniste britannique Robert Brown (1773-1858). C'est en observant sous un microscope du pollen dispersé dans de l'eau qu'il remarqua que les grains microscopiques le constituant étaient soumis à un mouvement continu et irrégulier. Il crut, à l'époque, qu'il avait découvert la molécule primitive responsable de la vie. Il s'aperçut plus tard que l'on pouvait observer ce même phénomène avec toutes sortes de particules de taille suffisamment petite.

Lorsqu'une particule, de taille suffisamment grande pour être observée sous un microscope (à partir du dixième de micromètre avec des microscopes modernes), est plongée dans un liquide moléculaire (eau, solvant organique, ...), on peut observer très clairement le mouvement brownien. Celui-ci résulte de l'ensemble des chocs exercés par les molécules de solvant sur la particule observée. On peut facilement imaginer suivre, lors d'un match de football, la balle sans voir les joueurs. On aura la même impression de mouvement erratique sans forcément en comprendre les raisons. Dans le cas du mouvement brownien, c'est en fait le déséquilibre entre tous les chocs sur la surface de la particule qui la propulse tantôt dans une direction, tantôt dans une autre. La particule effectue alors une marche aléatoire.

Les propriétés de la marche aléatoire font qu'en moyenne la particule reste centrée sur son point de départ mais, qu'avec le temps, elle peut explorer (c'est-à-dire passer par) des points de plus en plus éloignés. D'un point de vue mathématique, la valeur moyenne du déplacement est nulle ; c'est le carré du déplacement qui augmente linéairement avec le temps.

III.2 Construction du mouvement brownien :

Le mouvement brownien, encore appelé processus de Wiener, est l'un des plus importants des processus stochastiques, en finance. Il est à la théorie des processus stochastiques ce que la loi normale est à la théorie des probabilités. C'est pourquoi nous

allons consacrer quelques pages à sa construction en nous appuyant sur les marches aléatoires, (nous rappelons qu'une marche aléatoire est un processus X défini par :

$$\begin{aligned} X_0 &= a \\ X_t &= X_{t-1} + Y_t \end{aligned}$$

où a est une constante et les Y_t sont supposées indépendantes) c'est-à-dire sur une approche en temps discret, plus pédagogique. Le principe est toutefois simple. Si un horizon T est fixé, on divise la durée T en N sous périodes et l'on fait tendre N vers l'infini. Le processus obtenu comme limite sera un processus en temps continu.

Nous supposons donc pour le moment que $\mathcal{T} = \{ 0, 1, \dots, N \}$.

Proposition 1 :

Soit X une marche aléatoire dans laquelle les Y_t prennent les valeurs σ et $-\sigma$ avec une probabilité $p = 1/2$:

1. X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires
2. $Cov(X_t, X_s) = \sigma^2 \min(t, s)$

Preuve :

Le point 1 est immédiat puisque les accroissements de X sont les variables Y_t qui sont indépendantes et de même loi.

Pour montrer le second point, supposons que $s < t$; on peut écrire :

$$\begin{aligned} Cov(X_t, X_s) &= Cov\left(X_s + \sum_{u=s+1}^t Y_u, X_s\right) \\ &= V(X_s) + \sum_{u=s+1}^t Cov(Y_u, X_s) \end{aligned}$$

Les covariances sont nulles puisque les Y_t sont indépendantes et que :

$$X_s = X_0 + \sum_{u=1}^s Y_u$$

De plus

$$V(X_s) = \sum_{u=1}^s V(Y_u) = s \sigma^2$$

Bien évidemment, si $t < s$, on obtient $Cov(X_t, X_s) = V(X_t) = t \sigma^2$.

Supposons maintenant que X est le processus du logarithme du prix d'un actif financier avec la convention $X_0 = 0$, de sorte que X_t est la rentabilité cumulée de ce titre sur l'intervalle $[0, t]$. L'ensemble $\mathcal{T} = \{ 0, 1, \dots, N \}$ définit les dates de transaction pendant une période fixe $[0, T]$ ⁽¹⁾ ; supposer que N augmente et tend vers l'infini revient à envisager que le fonctionnement du marché s'approche de celui d'un marché continu. Si sur un marché de ce type, la rentabilité cumulée en T est notée Λ_T , on a :

$$\Lambda_T = \lim_{N \rightarrow +\infty} X_N.$$

(1) T peut être l'échéance d'un contrat d'option que l'on cherche à évaluer.

Il est clair que σ , représentant l'écart-type des rentabilités dans la définition de la marche aléatoire ci-dessus, doit dépendre de la durée d'une sous-période. En effet, si T correspond à une période de trois mois, on peut avoir $N = 13$ avec des données hebdomadaires ou $N = 91$ avec des données journalières et la volatilité hebdomadaire est différente de la volatilité journalière. Il faut alors répondre à la question suivante : quel type de dépendance doit-on introduire entre σ et N pour obtenir un modèle cohérent.

Notons maintenant $(Y_t^N, t = 1, \dots, N)$ les accroissements de la marche aléatoire lorsque $\mathcal{T} = \{0, 1, \dots, N\}$; on notera $h = \frac{T}{N}$ l'intervalle de temps entre deux transactions et σ_h l'écart type des Y_t^N . L'idée intuitive pour décrire en continu la rentabilité sur l'intervalle $[0, T]$ est de définir $X_N = X_0 + \sum_{t=1}^N Y_t^N$. Il est important de noter que pour tout N , $X_N - X_0$ définit la rentabilité cumulée sur la période $[0, T]$, soit Λ_T . Par conséquent, en faisant tendre N vers l'infini, et donc h vers 0, on doit aboutir à une description d'un processus continu des rentabilités.

III.2.1 Les hypothèses :

Faire tendre N vers l'infini impose cependant certaines précautions pour garder une modélisation cohérente. C'est pourquoi, plusieurs hypothèses sont nécessaires quant à l'évolution des paramètres quand la valeur de N change. Nous introduisons alors, suivant en cela Merton (1982), trois hypothèses "raisonnables" sur le comportement des cours.

1. Il existe une constante $A_1 > 0$, indépendante de N , telle que :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad V(X_t) \geq A_1$$

2. Il existe $A_2 > 0$, indépendante de N , telle que :

$$V(X_N) \leq A_2$$

3. Il existe A_3 , indépendante de N , telle que pour tout $t \in \mathcal{T}$, on ait :

$$\frac{V(Y_t)}{\max_{s=1}^N V(Y_s)} \geq A_3$$

Commentaires :

L'hypothèse 1 signifie que, quel que soit le découpage temporel adopté, l'incertitude ne disparaît pas. Même avec des intervalles de temps très court entre deux cotations, la rentabilité cumulée entre 0 et t reste une variable aléatoire.

L'hypothèse 2 est en quelque sorte symétrique de la première. Elle spécifie que la variance de la rentabilité cumulée reste bornée sur l'ensemble de l'intervalle $[0, T]$ indépendamment de la façon dont le découpage temporel est réalisé.

L'hypothèse 3 a, quant à elle, une signification très particulière. Dire que la variance sur chaque sous-période reste supérieure à une certaine proportion du maximum de variance sur l'ensemble des sous-périodes signifie que l'on rejette les situations dans lesquelles le risque est concentré à certains moments du temps. Un exemple permet

d'illustrer ce point. Si un individu achète une grille de loto national le lundi alors que le tirage a lieu le mercredi soir, son ticket ne peut être considéré comme un actif risqué au sens de l'hypothèse 3 ; en effet il n'y a aucune incertitude jusqu'au moment du tirage du premier numéro et une évolution de la valeur du ticket ne peut apparaître que pendant les quelques instants du tirage, selon que les numéros tirés sont ou non sur la grille jouée. L'interprétation alternative de l'hypothèse 3 consiste à remarquer que sur un marché continu, des informations nouvelles sont susceptibles d'arriver à tout instant, entraînant une évolution des prix et conduisant à l'existence de risque à tout moment. Dans le cas de la grille de loto achetée le lundi, il n'y aura presque sûrement aucune information susceptible d'affecter la valeur du ticket avant le mercredi soir et l'hypothèse 3 n'est pas vérifiée.

Dans le cas d'un processus à accroissements stationnaires, cette hypothèse est vérifiée puisque la variance sur une sous-période ne dépend pas de la sous-période particulière considérée mais seulement de sa durée. Dans le cas de la marche aléatoire décrite plus haut, on pourra donc choisir $A_3 = 1$.

Ces trois hypothèses, naturelles dans leur interprétation économique, permettent de préciser quels sont les processus raisonnables permettant la description de l'évolution des rentabilités et des prix sur un marché.

Proposition 2 :

On a les résultats suivants :

$$\sigma_h^2 = O(h) \text{ et } \sigma_h^2 \neq o(h)$$

où $O(h)$ et $o(h)$ désignent les notations de Landau.

On rappelle que les notations de Landau sont définies pour deux fonctions f et g , où l'on écrit :

$$f(h) = O(g(h)) \text{ si } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(h)}{g(h)} \right| < +\infty \text{ et } f(h) = o(g(h)) \text{ si } \lim_{h \rightarrow 0} \left| \frac{f(h)}{g(h)} \right| = 0$$

Preuve :

$$V(X_N) = \sum_{t=1}^N V(Y_t^N) = N \sigma_h^2$$

Cette égalité est la conséquence immédiate de l'indépendance des Y_t^N . L'hypothèse 2 implique que $N \sigma_h^2 \leq A_2$ ou encore, en remplaçant N par $\frac{T}{h}$, $\sigma_h^2 \leq \frac{A_2}{T} h$ traduisant le fait que $\sigma_h^2 = O(h)$. De même l'hypothèse 1 implique que $N \sigma_h^2 \geq A_1$ ou encore $\sigma_h^2 \geq \frac{A_1}{T} h$ montrant ainsi que $\sigma_h^2 \neq o(h)$.

Si la variance des Y_t est de l'ordre de h , les deux valeurs prises par Y_t s'écrivent $c\sqrt{h}$ et $-c\sqrt{h}$ où c est une constante positive. En d'autres termes la rentabilité sur une période de durée h est de l'ordre de \sqrt{h} .

Considérons le cas particulier $c=1$; le processus X peut s'écrire :

$$X_t = X_{t-1} + \epsilon_t \sqrt{h}$$

où les δ_t sont des variables centrées indépendantes prenant les valeurs +1 et -1.

On peut maintenant définir $\Lambda_t = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \delta_t}$ où les δ_t sont indépendantes et prennent les valeurs +1 et -1 avec des probabilités $\frac{1}{2}$. Le théorème central limite permet alors de conclure que Λ_T suit une loi normale centrée d'écart type \sqrt{T} . Dans ces conditions, la notion de convergence stochastique utilisée est une convergence en loi.

Si l'on considère deux dates T et T' avec $T < T'$, il est clair que $\Lambda_{T'} - \Lambda_T$ suit une loi normale centrée d'écart type $\sqrt{T' - T}$ et que $\Lambda_{T'} - \Lambda_T$ est indépendant de $\Lambda_T - \Lambda_0$.

On peut maintenant, à la suite de cette construction intuitive, présenter formellement le mouvement brownien.

III.3 Définition et propriétés générales :

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé, on appelle mouvement brownien (ou processus de Wiener) standard un processus Z vérifiant :

1. $Z_0 = 0$ \mathcal{P} . p.s
2. Z est à accroissements indépendants et stationnaires.
3. $\forall (s, t) \in \mathbf{R}_+ \times \mathbf{R}_+, s < t, Z_t - Z_s \sim N(0, \sqrt{t-s})$.
4. Z est à trajectoires continues \mathcal{P} p.

L'idée intuitive qui conduit au mouvement brownien est la même qui rend la loi normale aussi importante en statistique ; en termes non techniques, lorsqu'un phénomène résulte de l'addition d'un grand nombre de causes indépendantes, sa mesure suivra une loi normale du fait du théorème central limite. L'interprétation financière est que, sur un marché continu, les variations de prix sont causées par un flot incessant d'informations qui sont reflétées immédiatement dans les prix. En conséquence, une évolution de prix entre deux instants s et t est indépendante des évolutions précédentes car, si ce n'était pas le cas, les opérateurs en tiendraient compte dans leurs offres et demandes, ce qui aurait pour conséquence d'annuler cet effet de mémoire.

La construction à partir des marches aléatoires a permis d'illustrer que la variation de Z entre deux instants t et $t+h$ est de l'ordre de \sqrt{h} qui est infiniment grand devant h (au sens des notations de Landau). Par conséquent, les trajectoires apparaissent très abruptes « heurtées » et, de fait, il est impossible de tracer une vraie trajectoire du mouvement brownien, à cause de la proposition suivante.

Proposition 3 :

Les trajectoires du processus Z sont continues sur \mathbf{R} mais ne sont dérivables en aucun point.

La plupart des propriétés des marches aléatoires présentées plus haut se transposent sans difficulté au processus de Wiener.

Proposition 4 :

1. Le processus Z est markovien
2. Z est une martingale par rapport à sa filtration naturelle.
3. $Cov(Z_t, Z_s) = \min(t, s)$

Preuve :

Le point (1) découle immédiatement de l'indépendance des accroissements. Pour montrer le point (2), notons s et t deux dates telles que $s < t$ et \mathcal{F}^Z la filtration naturelle de Z . on peut écrire :

$$\begin{aligned} E[Z_t / \mathcal{F}_s^Z] &= E[Z_t - Z_s + Z_s / \mathcal{F}_s^Z] \\ &= E[Z_t - Z_s / \mathcal{F}_s^Z] + E[Z_s / \mathcal{F}_s^Z] \end{aligned}$$

Le premier terme du membre de droite est nul à cause de l'indépendance de $Z_t - Z_s$; en effet, $E[Z_t - Z_s / \mathcal{F}_s^Z] = E[Z_t - Z_s] = 0$ car les accroissements sont centrés. Comme de plus, Z est adapté à sa filtration naturelle Z_s et \mathcal{F}_s^Z est mesurable et $E[Z_s / \mathcal{F}_s^Z] = Z_s$.

Pour le point (3), le même "truc" est utilisé (on suppose $s < t$) :

$$\begin{aligned} Cov(Z_t, Z_s) &= Cov(Z_t - Z_s + Z_s, Z_s) \\ &= Cov(Z_t - Z_s, Z_s) + V(Z_s) \\ &= Cov(Z_t - Z_s, Z_s - Z_0) + s \\ &= s \end{aligned}$$

Ici encore, les accroissements étant indépendants, la covariance entre $Z_t - Z_s$ et $Z_s - Z_0$ est nulle puisqu'elle est égale au produit des espérances et que le mouvement brownien (donc ses accroissements) est centré. Il est clair que si $t < s$, c'est Z_s qu'on décompose en $Z_s - Z_t + Z_t$.

Si l'on se réfère à la section II.2 (*Processus de diffusion*), il apparaît que le processus de Wiener standard est un processus de Itô dont le drift est nul et dont le coefficient de diffusion est constant égal à 1.

Certaines fonctions du mouvement brownien restent des martingales ; les deux exemples les plus simples sont résumés dans la proposition suivante.

Proposition 5 :

Soit X et Y deux processus définis par :

$$\begin{aligned} X_t &= Z_t^2 - t \\ Y_t &= \exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \end{aligned}$$

où λ est un réel quelconque. X et Y sont des martingales par rapport à \mathcal{F}^Z .

Preuve : Z est de carré intégrable donc X_t est intégrable ; de même, Z_t suit une loi normale donc Y_t suit une loi log-normale. Les deux processus sont donc intégrables.

$$\begin{aligned} E(X_t / \mathcal{F}_s^Z) &= E(Z_t^2 / \mathcal{F}_s^Z) - t \\ &= E((Z_t - Z_s)^2 + 2Z_t Z_s - Z_s^2 / \mathcal{F}_s^Z) - t \end{aligned}$$

On utilise alors la linéarité de l'espérance conditionnelle, puis le fait que Z_s est \mathcal{F}_s^Z -mesurable, ensuite la propriété de martingale de Z et enfin le fait que $Z_t - Z_s$ est indépendant de \mathcal{F}_s^Z . On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E(X_t / \mathcal{F}_s^Z) &= E((Z_t - Z_s)^2) + 2E(Z_t Z_s / \mathcal{F}_s^Z) - Z_s^2 - t \\ &= (t - s) + 2Z_s E(Z_t / \mathcal{F}_s^Z) - Z_s^2 - t \\ &= Z_s^2 - s = X_s \end{aligned}$$

Montrons maintenant que Y est une martingale.

$$\begin{aligned} E(Y_t / \mathcal{F}_s^Z) &= \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) E(\exp(\lambda Z_t) / \mathcal{F}_s^Z) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) E(\exp(\lambda(Z_t - Z_s)) \exp(\lambda Z_s) / \mathcal{F}_s^Z) \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2 t}{2}\right) E(\exp(\lambda(Z_t - Z_s))) \exp(\lambda Z_s) \end{aligned}$$

La dernière égalité résulte ici encore de l'application des propriétés du mouvement brownien et des espérances conditionnelles. Il reste alors à remarquer que $\exp(\lambda(Z_t - Z_s))$ suit une loi log-normale de paramètres 0 et $\lambda\sqrt{t-s}$. Par conséquent⁽¹⁾

$E(\exp(\lambda(Z_t - Z_s))) = \frac{\lambda^2(t-s)}{2}$. En remplaçant dans la dernière égalité obtenue on obtient :

$$E(Y_t / \mathcal{F}_s^Z) = \exp\left(\lambda Z_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right) = Y_s$$

ce qui achève la démonstration.

Remarque :

Les processus X et Y de la proposition précédente sont en fait tous deux des transformés du mouvement brownien par les fonctions suivantes :

$$\begin{aligned} (x, t) &\rightarrow f(x, t) = x^2 - t \\ (x, t) &\rightarrow g(x, t) = \exp\left(\lambda x - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \end{aligned}$$

Notons $z(x, t)$ la densité de Z_t définie par :

$$z(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{2t}\right)$$

On remarque alors que les fonctions f et g sont solution de l'équation générale :

$$h(0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u, t+s) z(u, t) du$$

(1) Propriété de la loi log-normale.

En effet, pour f , on a : $f(0, s) = -s$; le membre de droite s'écrit :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, t+s) z(u, t) du = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} (u^2 - (t+s)) \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du$$

Le terme $\frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2 \exp\left(-\frac{u^2}{2t}\right) du$ est en fait en fait égal à la variance de Z_t , c'est - à - dire t .

En ce qui concerne g , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, t+s) z(u, t) du &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda u - \frac{\lambda^2(t+s)}{2} - \frac{u^2}{2t}\right) du \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2(t+s)}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\lambda u - \frac{u^2}{2t}\right) du \end{aligned}$$

On transforme alors l'intégrale selon le procédé classique du début du développement d'un carré :

$$\exp\left(\lambda u - \frac{u^2}{2t}\right) = \exp\left(-\frac{1}{2t}(u - \lambda t)^2 + \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

Ce qui conduit à :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} g(u, t+s) z(u, t) du &= \exp\left(-\frac{\lambda^2 s}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{1}{2t}(u - \lambda t)^2\right) du \\ &= \exp\left(-\frac{\lambda^2 s}{2}\right) = g(0, s) \end{aligned}$$

III.4 Processus de Wiener général :

Le processus de Wiener standard vérifie $E(Z_t) = 0$ et $V(Z_t) = t$; l'espérance et la variance sont donc normalisées au sens où il s'agit d'un processus d'ô de paramètres 0 et 1. La généralisation naturelle consiste à introduire des paramètres μ et σ , μ représentant le drift, c'est-à-dire l'espérance de variation par unité de temps et σ^2 la variance de cette variation par unité de temps.

Définition :

Un processus W est appelé mouvement brownien général de paramètres μ et σ si W_t s'écrit :

$$\begin{aligned} W_0 &= 0 \\ W_t &= \mu t + \sigma Z_t \end{aligned}$$

Les propriétés de W se déduisent directement de celles de Z .

Proposition 6 :

1. W est un processus à accroissements indépendants et stationnaires, à trajectoires continues mais non dérivables en aucun point.
2. Pour $s < t$, $W_t - W_s \sim N\left(\mu(t-s), \sigma\sqrt{t-s}\right)$.
3. $\text{Cov}(W_t, W_s) = \sigma^2(t-s)$
4. W est une sous (sur)-martingale par rapport à sa filtration naturelle si $\mu > (<) 0$.

Si W_t représente la rentabilité cumulée d'un actif financier sur l'intervalle $[0 ; t]$, $\mu > 0$ signifie que l'espérance de rentabilité est positive. S'il existe un actif sans risque de rentabilité r , l'aversion au risque des agents économiques se traduira alors par $\mu > r$.

Remarque :

Considérons un réel positif h proche de 0 ; la variation de W sur $[t ; t + h]$ s'écrit :

$$W_{t+h} - W_t = \mu h + \sigma(Z_{t+h} - Z_t)$$

En se référant à la construction de Z à l'aide de marches aléatoires, on constate que $Z_{t+h} - Z_t$ est de l'ordre de grandeur de \sqrt{h} , c'est-à-dire très grand par rapport à h lorsque h est proche de 0. Ceci signifie que même si W présente une tendance à "long terme" par l'intermédiaire de μ , on ne peut prévoir ses variations sur le court terme car le terme $\sigma(Z_{t+h} - Z_t)$ est plus grand en valeur absolue que μh .

Il faut toutefois être méfiant par rapport aux intuitions que l'on peut avoir sur le mouvement brownien. Supposons par exemple $\mu = 0$, correspondant à un processus sans tendance ; il paraît naturel de penser que les trajectoires vont se promener de part et d'autre de 0 au gré du processus de Wiener standard Z . Pourtant les trajectoires de ce processus sortent de n'importe quel intervalle $[a ; b]$ en un temps moyen fini. Avant de montrer cette proposition, il est nécessaire de présenter la notion de temps d'arrêt dans un modèle en temps continu.

III.4.1 Temps d'arrêt

Définition :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ un espace probabilisé filtré ; on appelle temps d'arrêt toute variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathcal{T} \cup \{+\infty\}$ telle que pour tout t , l'événement $\{\tau \leq t\}$ est dans la tribu \mathcal{F}_t .

Une définition du temps d'arrêt pour les processus en temps discret peut être donnée sous une forme presque analogue, la seule différence que l'événement considéré est $\{\tau = t\}$ au lieu $\{\tau \leq t\}$

Dans l'ensemble des valeurs possibles d'un temps d'arrêt, nous avons ajouté $+\infty$ il s'agit là d'une convention pour traiter certains cas particuliers ; pour l'option américaine, il s'agit de prendre en compte la situation dans laquelle il n'est jamais optimal d'exercer l'option prématurément (si elle reste en dehors jusqu'à l'échéance par exemple pour ne citer qu'un cas trivial).

Proposition 7 :

Soient τ et τ' deux temps d'arrêt par rapport à une filtration \mathcal{F} ; $\tau + \tau'$, $\min(\tau, \tau')$, $\max(\tau, \tau')$ sont des temps d'arrêt.⁽¹⁾

(1) Il est courant de noter $\min(\tau, \tau') = \tau \wedge \tau'$ et $\max(\tau, \tau') = \tau \vee \tau'$.

Des temps d'arrêt du type $\min(\tau, \tau')$ et $\max(\tau, \tau')$ interviennent par exemple dans certains contrats d'assurance décès. Si τ et τ' désignent les dates de décès d'un mari et de son épouse, la compagnie devra payer sa prestation au temps $\min(\tau, \tau')$ si le contrat sur deux têtes stipule que le capital doit être versé au dernier survivant. Par contre, il sera versé à la date $\max(\tau, \tau')$ si le contrat bénéficie aux héritiers au dernier des deux décès.

Proposition 8 :

Soit τ un temps d'arrêt et X un processus

1. τ est \mathcal{F}_τ -mesurable.
2. Si τ est borné et X adapté à \mathcal{F} , alors X_τ est \mathcal{F}_τ -mesurable.
3. Si τ et τ' sont deux temps d'arrêt tels que $\tau \leq \tau'$, alors $\mathcal{F}_\tau \subseteq \mathcal{F}_{\tau'}$.

PARTIE 2 : INTÉGRALES STOCHASTIQUES ET LEMME D'ITÔ

I. INTRODUCTION

Nous avons présenté précédemment le mouvement brownien ; la construction que nous avons exposée était fondée sur des marches aléatoires particulières dont les accroissements Y_t prenaient deux valeurs seulement et vérifiaient $E(Y_t) = 0$. Nous avons ensuite déduit une formulation du processus de Wiener général en autorisant une espérance non nulle pour ces accroissements ainsi qu'une variance proportionnelle à la durée séparant deux dates. Toutefois, les paramètres d'espérance et de variance par unité de temps sont constants dans le mouvement brownien. Ceci constitue une restriction importante lorsque l'on cherche par exemple à modéliser la dynamique des taux d'intérêt dans laquelle il semble raisonnable, au vu des constatations empiriques, d'introduire une force de rappel induisant une espérance de variation négative quand les taux sont élevés et une espérance de variation positive quand ils sont faibles. De la même façon, pour ce qui concerne la variance par unité de temps, il est difficile de la supposer indépendante du niveau des taux. En particulier, lorsque les taux sont très faibles, on s'attend à observer une variance plus faible que quand ces taux sont très élevés.

La définition d'un processus d'Itô suppose l'existence de fonctions $\mu(x, t)$ et $\sigma(x, t)$ qui dépendent à la fois du niveau atteint par le processus considéré et de la date considérée. Il s'agit donc de bons candidats pour modéliser les dynamiques des variables financières comme les prix, les rentabilités, les taux d'intérêt et les taux de change. Il est toutefois important de noter que le mouvement brownien général est un cas particulier de processus d'Itô.

Nous présentons maintenant la construction de l'intégrale stochastique et le lemme d'Itô, encore appelé théorème fondamental du calcul stochastique nécessaire à la résolution des problèmes financiers les plus usuels comme l'évaluation des options.

II. L'INTÉGRALE STOCHASTIQUE

II.1 Construction intuitive :

Nous adoptons ici le schéma déjà utilisé pour la construction intuitive du mouvement brownien. Nous fixons donc une fois pour toutes un intervalle $[0, T]$ divisé en N sous périodes de longueur h .

Soit X le processus défini par :

$$\begin{aligned} X_0 &= 0 \\ X_n &= X_{n-1} + Y_n \end{aligned}$$

pour $n \in \mathcal{T} = \{ 1, \dots, N \}$. Cette notation signifie en fait que $X_n(\omega)$ est la valeur prise par le processus X à l'instant nh dans l'état ω puisque h est le délai supposé entre deux cotations si, comme précédemment, X est le logarithme du prix d'un titre.

Y_n est défini comme suit :

$$Y_n = \mu_{n-1} h + \sigma_{n-1} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h}) \quad (I)$$

où Z est le mouvement brownien standard et μ_{n-1} , σ_{n-1} sont des variables aléatoires $\mathcal{F}_{(n-1)h}$ -mesurables. L'intérêt de cette formulation provient de sa généralité. μ_{n-1} est l'espérance conditionnelle de variation de X sur l'intervalle de temps $[(n-1)h ; nh]$ alors que $\sigma_{n-1}\sqrt{h}$ est l'écart-type conditionnel de cette variation, le conditionnement ayant lieu par rapport à la tribu $\mathcal{F}_{(n-1)h}$. En effet, σ_{n-1} et $Z_{nh} - Z_{(n-1)h}$ sont indépendantes et $V(Z_{nh} - Z_{(n-1)h}) = h$.

Les hypothèses de Merton (1982) concernant le processus X décrites précédemment sont supposées vérifiées pour les processus X et Y envisagés ici.

Notons Λ_T la rentabilité cumulée de l'actif considéré ; il s'agit d'écrire Λ_T comme la limite de X_N quand N tend vers l'infini. On a donc :

$$X_N = \sum_{n=1}^N Y_n = h \sum_{n=1}^N \mu_{n-1} + \sum_{n=1}^N \sigma_{n-1} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})$$

En remplaçant h par T/N , on obtient :

$$\begin{aligned} X_N &= \sum_{n=1}^N Y_n = T \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu_{n-1} \right) + \sum_{n=1}^N \sigma_{n-1} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h}) \\ &= A_N + B_N \end{aligned}$$

avec $A_N = T \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mu_{n-1} \right)$ et $B_N = \sum_{n=1}^N \sigma_{n-1} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})$

Pour obtenir un modèle continu, il faut donc définir précisément $A = \lim_{N \rightarrow +\infty} A_N$ et $B = \lim_{N \rightarrow +\infty} B_N$

Soit α^N un processus continu défini par :

$$\alpha_s^N = \mu_{n-1} \quad \text{si } s \in [(n-1)h, nh[$$

On peut alors écrire pour tout état ω :

$$A_N(\omega) = \int_0^T \alpha_s^N(\omega) ds$$

où l'intégrale est une intégrale de Riemann pour chaque état. Lorsque N tend vers l'infini, on peut sans difficulté définir pour chaque état ω , $A(\omega)$ comme :

$$A(\omega) = \int_0^T \alpha_s(\omega) ds$$

où $\alpha_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \alpha_s^N(\omega)$.

En fait, les fonctions α^N sont des fonctions en escalier (par rapport à s). Ces processus sont appelés processus simples puisque leurs trajectoires sont constantes sur des sous intervalles de longueur h .

Il est clair qu'on ne peut s'appuyer sur la même approche pour définir la limite de B_N . En effet, B_N fait intervenir les variables aléatoires $(Z_{nh} - Z_{(n-1)h})$ qui est de l'ordre de \sqrt{h} .

Si σ et Z étaient des fonctions au lieu de processus, on aboutirait à une écriture du type :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} B_N = \int_0^T \sigma_s dZ_s$$

en utilisant une intégrale de Stieltjes classique. L'exemple qui suit montre pourquoi cette approche ne peut être utilisée.

II.2 Contre exemple :

Soit C_N et D_N définis par :

$$C_N = \sum_{n=1}^N Z_{nh} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})$$

$$D_N = \sum_{n=1}^N Z_{(n-1)h} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})$$

où Z est le mouvement brownien standard. Si Z n'était pas une fonction aléatoire, on aurait alors :

$$\lim_{N \rightarrow +\infty} C_N = \lim_{N \rightarrow +\infty} D_N = \int_0^T Z_s dZ_s = \frac{Z_T^2 - Z_0^2}{2}$$

Or on montre facilement que C_N et D_N convergent vers des limites différentes. En effet, on a :

$$E(C_N) = E\left(\sum_{n=1}^N Z_{nh} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})\right) \quad (II)$$

$$= E\left(\sum_{n=1}^N (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})(Z_{nh} - Z_{(n-1)h})\right) + E\left(\sum_{n=1}^N Z_{(n-1)h} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})\right)$$

$$= \sum_{n=1}^N E((Z_{nh} - Z_{(n-1)h})^2) + \sum_{n=1}^N E((Z_{(n-1)h} - Z_0)(Z_{nh} - Z_{(n-1)h}))$$

Nous pouvons maintenant utiliser les propriétés du mouvement brownien.

Comme

$Z_{nh} - Z_{(n-1)h}$ est centré, on a :

$$E((Z_{nh} - Z_{(n-1)h})^2) = V(Z_{nh} - Z_{(n-1)h}) = nh - (n-1)h = h$$

Le premier terme de (II) est de ce fait égal à $Nh = T$. Pour le second, on utilise l'indépendance

des accroissements pour écrire :

$$\sum_{n=1}^N E(Z_{(n-1)h} (Z_{nh} - Z_{(n-1)h})) = \sum_{n=1}^N E(Z_{(n-1)h}) E(Z_{nh} - Z_{(n-1)h}) \quad (III)$$

$$= 0$$

On aboutit alors au résultat suivant :

$$E(C_N) = T$$

qui est indépendant de la façon dont l'intervalle $[0, T]$ est découpé, c'est-à-dire indépendant de N . La limite de C_N aura donc T comme espérance.

On remarque par ailleurs que $E(D_N)$ a déjà été calculé dans l'équation (III) et que son espérance est nulle. Les deux suites ne peuvent donc converger (en moyenne quadratique) vers la même variable.

Cette remarque implique que l'on peut définir au moins deux intégrales stochastiques (en fait une infinité).

Maintenant, pour obtenir une limite qui soit de carré intégrable, il faut supposer que les B_N sont de carré intégrable or :

$$\begin{aligned} E(B_N^2) &= E((B_N - B_{N-1} + B_{N-1})^2) \\ &= E((B_N - B_{N-1})^2) + E(B_{N-1}^2) + 2E(B_{N-1}(B_N - B_{N-1})) \\ &= E(\sigma_{N-1}^2 (Z_{Nh} - Z_{(N-1)h})^2) + E(B_{N-1}^2) + 2E(B_{N-1})E(B_N - B_{N-1}) \\ &= hE(\sigma_{N-1}^2) + E(B_{N-1}^2) \end{aligned}$$

Le dernier terme du membre de droite de l'avant dernière équation est nul du fait de l'indépendance des accroissements de B ; de plus $(Z_{Nh} - Z_{(N-1)h})$ est indépendant de σ_{N-1}^2 et $E((Z_{nh} - Z_{(n-1)h})^2) = h$. Par récurrence, on obtient alors :

$$E(B_N^2) = T \left(\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N E(\sigma_{n-1}^2) \right)$$

On peut alors remarquer que si Y^N est un processus défini sur $[0 ; T]$ par :

$$Y_s^N = \sigma_{n-1} \text{ pour } s \in [(n-1)h, nh[$$

on a alors :

$$E(B_N^2) = E\left(\int_0^T Y_s^N ds\right)$$

La suite de processus Y^N converge alors vers un processus que l'on notera naturellement σ . L'égalité précédente montre que pour avoir une limite de B_N de carré intégrable, il faut que :

$$E\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right) < +\infty$$

On peut donc maintenant définir l'intégrale stochastique d'un processus par rapport au mouvement brownien au sens de la moyenne quadratique.

II.3 Définition et propriétés de l'intégrale stochastique :

Définition :

Soit Z le mouvement brownien standard défini sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}^Z, \mathcal{P})$ et σ un processus adapté à \mathcal{F}^Z ; on suppose que σ vérifie :

$$E\left(\int_0^T \sigma_s^2 ds\right) < +\infty \quad (IV)$$

On appelle alors intégrale stochastique d'Itô sur $[0 ; T]$ de σ par rapport à Z et l'on note $\int_0^T \sigma_s dZ_s$ la variable aléatoire définie par :

$$\int_0^T \sigma_s dZ_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^N \sigma_{t_{n-1}} (Z_{t_n} - Z_{t_{n-1}})$$

où la limite est en moyenne quadratique.

Il est important de noter que dans le membre de droite de l'équation précédente, l'indice n est discret et correspond au découpage de $[0 ; T]$ en N sous périodes. Une formulation alternative équivalente consisterait en la division de $[0 ; T]$ en sous intervalles $[t_i, t_{i+1}[$ en écrivant la limite sous la forme :

$$\int_0^T \sigma_s dZ_s = \lim_{N \rightarrow +\infty} \sum_{i=1}^N \sigma_{t_{i-1}} (Z_{t_i} - Z_{t_{i-1}})$$

avec $\max(t_i - t_{i-1})$ tendant vers 0 quand $N \rightarrow +\infty$. De plus, la construction faite ci-dessus est valide pour n'importe quel horizon jusqu'à T . Par conséquent la famille de variables aléatoires

$\int_0^u \sigma_s dZ_s, u \in \mathcal{T}$ est un processus stochastique que l'on note parfois $(I_u(\sigma), u \in \mathcal{T})$.

De la même façon, si σ est prévisible, on peut remplacer $\sigma_{t_{i-1}}$ par σ_{t_i} dans la définition précédente.

Proposition :

Soient X et Y deux processus adaptés tels que $\int_0^t X_s dZ_s$ et $\int_0^t Y_s dZ_s$ existent pour tout $t \leq T$ et sont de carré intégrable (voir la définition précédente) ; on a alors :

1. $\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2, \int_0^t (aX_s + bY_s) dZ_s = a \int_0^t X_s dZ_s + b \int_0^t Y_s dZ_s$
2. $\forall (t, u) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, t < u, \int_0^u X_s dZ_s = \int_0^t X_s dZ_s + \int_t^u X_s dZ_s$
3. $\forall (t, u) \in \mathcal{T} \times \mathcal{T}, t < u, E\left(\int_0^u X_s dZ_s \mid \mathcal{F}_t\right) = \int_0^t X_s dZ_s$
4. $\forall t \in \mathcal{T}, E\left(\left(\int_0^u X_s dZ_s\right)^2\right) = E\left(\int_0^t X_s^2 ds\right)$

Le point (1) traduit le fait que l'application associant à un processus X son intégrale stochastique est une application linéaire. Le point (2) est une propriété usuelle des intégrales qui est immédiate compte tenu de la définition. Le point (3) est très important pour les applications financières puisqu'il montre que $\int_0^u X_s dZ_s, u \in \mathcal{T}$ est une martingale. Enfin le dernier point est l'illustration du fait que $\int_0^t X_s dZ_s$ dans L^2 , compte tenu des hypothèses faites dans la définition.

Rappelons que cette construction avait pour but de définir une limite en temps continu du processus :

$$X_0 = 0$$

$$X_n = X_{n-1} + Y_n = X_{n-1} + \mu_{n-1} h + \sigma_{n-1} (Z_{Nh} - Z_{(N-1)h})$$

On a donc au terme de cette construction une expression pour le processus limite (qu'on notera encore X pour ne pas multiplier les notations :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dZ_s \quad (V)$$

Lorsque l'intégrale stochastique peut être définie, le processus X obtenu est un processus d'Ito tel qu'il a été défini dans la partie précédente. On écrit en général $\mu_s = \mu(X_s, s)$ et $\sigma_s = \sigma(X_s, s)$. L'équation (V) est alors notée sous forme différentielle :

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t$$

Il est important de garder à l'esprit qu'il s'agit d'une **notation** pour exprimer que X s'écrit en fait comme une intégrale stochastique. Il n'est bien sûr pas question d'interpréter dZ_t comme une différentielle classique puisque les trajectoires du mouvement brownien, bien que continues, ne sont dérivables en aucun point.

Si $X = W$ est le mouvement brownien général de paramètres (constants) μ et σ , on a :

$$dW_t = \mu dt + \sigma dZ_t$$

et l'on retrouve bien la formulation donnée dans la partie précédente en écrivant :

$$\begin{aligned} \int_0^t dW_s &= W_t = \int_0^t \mu_s ds + \int_0^t \sigma_s dZ_s \\ &= \mu \int_0^t ds + \sigma \int_0^t dZ_s \\ &= \mu t + \sigma Z_t \end{aligned}$$

puisque, par convention $Z_0 = 0$.

II.4 Règles de calcul :

La proposition suivante résume les règles de calcul appliquées aux accroissements du mouvement brownien dZ_t . Afin d'éviter les complications techniques, nous interprétons dZ_t comme la différence $Z_{t+dt} - Z_t$ où dt est une durée infinitésimale⁽¹⁾. L'idée générale est que les termes d'ordre supérieur à 1 par rapport à dt sont négligés dans les développements puisque, sur un marché fonctionnant en continu, ces termes seront infiniment petits devant dt .

Proposition :

1. $E(dZ_t) = 0$ et $V(dZ_t) = dt$
2. $V(dZ_t^2) = o(dt)$
3. $dZ_t \cdot dt = o(dt)$
4. $E(dZ_{t_1} dZ_{t_2}) = 0$ pour $t_1 \neq t_2$
5. Si Z et Z^* sont deux processus de Wiener, on a :

(1) Cette interprétation est une approximation qui permet une présentation relativement intuitive des résultats.

$$E(dZ_t dZ_t^*) = r_t dt$$

$$V(dZ_t dZ_t^*) = o(dt)$$

Le point (1) est immédiat si l'on identifie dZ_t à $Z_{t+dt} - Z_t$ puisque le mouvement brownien standard est centré et $V(Z_t \text{ ó } Z_s) = t \text{ ó } s$ pour $t > s$.

Le point (2) exprime le fait que $(dZ_t)^2$ n'est en fait pas aléatoire ou plus précisément que sa variance est négligeable. En effet, si l'on se réfère à la construction en temps discret, sur une durée dt , l'accroissement de Z prend les valeurs \sqrt{dt} et $-\sqrt{dt}$ avec des probabilités $\frac{1}{2}$. En conséquence, $(dZ_t)^2$ est constant et est égal à dt . Concernant le point (3),

en tenant compte du fait que $dZ_t = O(\sqrt{dt})$ on a $dZ_t \cdot dt = O\left(dZ_t^{\frac{3}{2}}\right) = o(dt)$.

Dès que $t_1 \neq t_2$, dZ_{t_1} et dZ_{t_2} sont indépendants du fait de l'indépendance des accroissements de Z , ce qui montre le point (4). Enfin, le dernier point définit r_t comme le coefficient de corrélation entre les accroissements des deux browniens. Comme chacun des deux est de l'ordre de \sqrt{dt} , le produit est de l'ordre de grandeur de dt . De même, la variance du produit est de l'ordre de dt^2 donc négligeable devant dt .

Ces règles de calcul sont très utiles pour comprendre le lemme d'Itô que nous présentons ci-après.

III. LE LEMME D'ITÔ :

De nombreux problèmes d'évaluation d'actifs financiers conduisent à s'interroger sur la dynamique de la transformée d'un processus d'Itô par une fonction régulière.

L'exemple le plus classique est celui de l'évaluation d'un call européen d'échéance T et de prix d'exercice K . Le paiement terminal d'une telle option s'écrit $C_T = \max(X_T - K; 0)$ et le problème de l'évaluation consiste à déterminer le processus $C = (C_t, t \in \mathcal{T})$ de prix de l'option pendant sa durée de vie et en particulier C_0 si l'évaluation a lieu en date 0. De manière générale, on peut écrire $C_t = g(X_t, t)$ où g est une fonction définie sur $\mathbb{R}^+ \times \mathcal{T}$ à valeurs dans \mathbb{R}^+ . Si X est un processus d'Itô, le problème consiste à caractériser le processus C ?

Le même type de question se pose pour passer d'un processus de rentabilités à un processus de prix (et *vice-versa*). Si X est un processus d'Itô traduisant la rentabilité cumulée d'un actif financier, quel est le processus de prix associé défini par $Y_t = \exp(X_t)$?

En toute généralité, la dynamique des prix est une fonction d'une famille de processus de taux correspondant aux différentes maturités. Les modèles utilisés en pratique sont une simplification de cette réalité complexe.

III.1 La formule de Taylor, approche intuitive du lemme d'Itô :

Soit f une fonction définie sur \mathbb{R}^2 à valeurs dans \mathbb{R} supposée posséder des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2 ; le développement en série de Taylor de cette fonction au voisinage de (x_0, t_0) s'écrit :

$$\begin{aligned}
 f(x, t) = & f(x_0, t_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0)(t - t_0) \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0)(x - x_0)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_0, t_0)(t - t_0)^2 \\
 & + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_0, t_0)(x - x_0)(t - t_0) + o(\varepsilon(x_0, t_0))
 \end{aligned} \tag{VI}$$

où $\varepsilon(x_0, t_0) \sim o((x - x_0)^2 + (t - t_0)^2)$. La condition sur ε montre que les termes d'ordre 3 et plus peuvent être négligés par rapport aux termes d'ordre 1 figurant dans le développement. Le plus souvent en économie, on utilise un développement à l'ordre 1, c'est-à-dire la première ligne de l'équation ci-dessus puisque en effet les termes d'ordre 2 sont aussi négligeables devant ceux d'ordre 1 lorsque t tend vers t_0 . On peut donc a priori les négliger. Toutefois, si x est un processus d'Ito, il s'écrit comme une intégrale stochastique faisant intervenir le mouvement brownien. Or la variation de ce dernier sur une durée $t - t_0$ est de l'ordre de $\sqrt{t - t_0}$. Par conséquent, le terme d'ordre 2 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0)(x - x_0)^2$ est de l'ordre de $t - t_0$. En conséquence, il ne peut être négligé puisqu'il a le même ordre de grandeur que $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)(x - x_0)$.

Adoptons maintenant les notations $df(x_0, t_0) = f(x, t) - f(x_0, t_0)$; $t - t_0 = dt$ et $x - x_0 = dx$; on écrit alors l'expression (VI) sous la forme :

$$\begin{aligned}
 df(x_0, t_0) = & \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, t_0)dx + \frac{\partial f}{\partial t}(x_0, t_0)dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, t_0)(dx)^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(x_0, t_0)(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}(x_0, t_0)dxdt + o(dx, dt)
 \end{aligned} \tag{VII}$$

Remplaçons maintenant x par X_t où X est un processus caractérisé par :

$$dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t$$

L'équation (VII), en supprimant les arguments des dérivées partielles pour alléger les notations, s'écrit pour le couple (X_t, t) :

$$\begin{aligned}
 df(X_t, t) = & \frac{\partial f}{\partial x}[\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t] + \frac{\partial f}{\partial t}dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t]^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}(dt)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}[\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t] + o(dt)
 \end{aligned}$$

Si l'on applique maintenant les règles de calcul définies dans la proposition précédente, on constate que les termes en facteur de $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial t}$ sont négligeables devant dt . Il vient alors :

$$\begin{aligned}
 df(X_t, t) = & \frac{\partial f}{\partial x}[\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t] + \frac{\partial f}{\partial t}dt \\
 & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}[\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t]^2 + o(dt)
 \end{aligned}$$

où $o(dt) = o(dt)$.

La seconde remarque a trait au facteur de $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$. Lorsqu'il est développé, il fait apparaître un terme en dt^2 qui est négligeable, un terme en $dZ_t dt$ qui est lui aussi négligeable et enfin un terme en dZ_t^2 qui est de l'ordre de dt et de variance négligeable. Par conséquent, après simplification, il reste :

$$df(X_t, t) = \frac{\partial f}{\partial x} (\mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t) + \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t)dt + o(dt)$$

avec $o(dt)$. On peut maintenant écrire le processus $f(X_t, t)$ sous forme d'une différentielle stochastique en regroupant les termes en dt et ceux en dZ_t sous la forme :

$$df(X_t, t) = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mu(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) \right) dt + \sigma(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} dZ_t + o(dt)$$

Cette présentation sommaire donne l'intuition du résultat mais une démonstration rigoureuse nécessite plus de prudence; en effet, les termes (X_t, t) sont stochastiques et il faut donner une signification précise à l'énoncé " $o(dt)$ est négligeable devant dt ". Nous renvoyons le lecteur aux ouvrages spécialisés pour trouver une démonstration rigoureuse⁽¹⁾ qui ne présente cependant pas un intérêt majeur pour les applications financières.

III.2 Le lemme d'Itô :

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le lemme d'Itô qui n'est autre, comme nous venons de l'illustrer, qu'une formule de Taylor dans un environnement stochastique particulier.

Proposition :

Soit X un processus d'Itô caractérisé par $dX_t = \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t$ et soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction possédant des dérivées partielles continues jusqu'à l'ordre 2. Le processus Y défini par $Y_t = f(X_t, t)$ est un processus d'Itô dont la différentielle stochastique s'écrit :

$$dY_t = \left(\frac{\partial f}{\partial x} \mu(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) \right) dt + \sigma(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} dZ_t$$

Si l'on écrit la différentielle stochastique de Y sous la forme générale :

$$dY_t = \mu_Y(Y_t, t)dt + \sigma_Y(Y_t, t)dZ_t$$

on a :

$$\begin{aligned} \mu_Y(Y_t, t) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mu(X_t, t) + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2(X_t, t) \\ \sigma_Y(Y_t, t) &= \sigma(X_t, t) \frac{\partial f}{\partial x} \end{aligned}$$

(1) Kartazas (1991).

III.3 Applications élémentaires :

1. Soit W un processus de Wiener de paramètres μ , (qui sont dans ce cas des constantes) et Y un processus défini par $Y_t = f(W_t) = \exp(W_t)$; on peut alors écrire :

$$\frac{\partial f}{\partial x} \mu + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \sigma^2 = \exp(W_t) \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)$$

$$\sigma \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma Y_t$$

ou encore :

$$\frac{dY_t}{Y_t} = \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma Y_t dZ_t$$

2. Symétriquement, soit Y un processus de prix caractérisé par⁽¹⁾

$$Y_0 = 1$$

$$dY_t = \mu Y_t dt + \sigma Y_t dZ_t$$

et définissons X par $X_t = g(Y_t) = \ln(Y_t)$. Dans ce cas, on obtient :

$$\frac{\partial g}{\partial x} \mu(Y_t, t) + \frac{\partial g}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2(Y_t, t) = \frac{\partial g}{\partial x} \mu Y_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \sigma^2 Y_t$$

$$= \mu - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\sigma Y_t \frac{\partial g}{\partial x} = \sigma$$

Ces relations conduisent à :

$$dX_t = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) dt + \sigma dZ_t$$

IV. THÉORÈME DE GIRSANOV :

IV.1 Préliminaires :

Soit W un mouvement brownien général de paramètres (μ, σ) défini sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P}, \mathcal{F})$ où \mathcal{F} est la filtration naturelle de W , donc de Z , si $W_t = \mu t + \sigma Z_t$; supposons pour l'interprétation que W_t s'écrit $\ln(S_t)$ où S_t est le prix d'un actif financier à la date t , de façon qu'un accroissement $W_t - W_s$ soit la rentabilité (logarithmique) du titre sur l'intervalle $[s, t]$. Désignons par r le taux sans risque supposé constant ; l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage et l'existence d'une probabilité risque-neutre signifient (intuitivement) qu'il existe une probabilité Q sous laquelle le processus W a un drift égal à r .

Le théorème de Girsanov donne l'outil technique qui permet la transformation d'un processus de drift donné μ en un processus de drift $r = \mu$.

(1) Ce processus est appelé mouvement brownien géométrique ; c'est le processus classique pour modéliser les prix d'actifs financiers, en particulier dans le modèle de Black et Scholes (1973) d'évaluation d'options.

Afin d'introduire progressivement ce résultat, nous présentons tout d'abord la transformation qui permet de changer la moyenne d'une variable gaussienne.

Lemme :

Soit $X \sim N(0, 1)$ sur un espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$; soit Q l'application définie par :

$$\forall A \in \mathcal{A}, Q(A) = E_P \left[1_A \exp \left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right]$$

Q est une probabilité équivalente à P sous laquelle $X \sim N(\alpha, 1)$.

Démonstration :

comme $E_P \left[\exp \left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = \exp \left(\frac{-\alpha^2}{2} \right) E_P [\exp(\alpha X)]$ et que $\exp(\alpha X)$ est lognormale de paramètre $(0, \alpha)$, les propriétés de la loi log-normale impliquent que $E_P [\exp(\alpha X)] = \exp \left(\frac{\alpha^2}{2} \right)$

et donc $Q(A) = E_P \left[\exp \left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} \right) \right] = 1$. L'équivalence des deux probabilités est immédiate car la transformation est exponentielle et prend toujours des valeurs strictement positives. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} E_Q[X] &= \int_{-\infty}^{+\infty} X dQ = \int_{-\infty}^{+\infty} X \exp \left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} \right) dP \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp \left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} \right) f_X(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp \left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} \right) \exp \left(-\frac{x^2}{2} \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp \left(-\frac{1}{2}(x - \alpha)^2 \right) dx = \alpha \end{aligned}$$

où f_X est la densité de X sous P . La variable X est donc bien, sous la probabilité Q , une variable gaussienne d'espérance α et de variance 1. La variable aléatoire $\exp \left(\alpha X - \frac{\alpha^2}{2} \right)$ est donc la dérivée de Radon-Nikodym de Q par rapport à P , notée $\frac{dP}{dQ}$.

Dans une seconde étape, nous pouvons introduire une transformation plus sophistiquée en considérant une variable $X_t \sim N(\mu t, \sigma^2 t)$ où $\mu t = E_P(X_t)$ et $\sigma^2 t = V_P(X_t)$. Supposons que l'on cherche à transformer X_t en une variable gaussienne vérifiant $\mu t = E_Q(X_t)$ et $\sigma^2 t = V_Q(X_t)$; il s'agit de la problématique financière de passage d'une économie dans laquelle les agents ont de l'aversion pour le risque à une économie de neutralité au risque dans laquelle les espérances de rentabilité sont égales au taux sans risque. On peut écrire :

$$X_t = \mu t + \sigma Z_t = \mu t + \sigma \sqrt{t} Y_t$$

où Z est le mouvement brownien standard et $Y_t \sim N(0, 1)$. Pour obtenir le résultat voulu, il faut transformer Y_t en une variable suivant $N(\alpha, 1)$ avec un coefficient α à déterminer mais comme l'on cherche Q telle que :

$$E_Q[X] = \mu t + \sigma \sqrt{t} \alpha = rt$$

on en déduit :

$$\alpha = \frac{(r - \mu)\sqrt{t}}{\sigma}$$

Il faut donc opérer, en fonction du lemme précédent, la transformation suivante :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp \left[\frac{(r - \mu)\sqrt{t}}{\sigma} Y_t - \frac{1}{2} \left(\frac{(r - \mu)\sqrt{t}}{\sigma} \right)^2 \right] = \exp \left[-\frac{(\mu - r)}{\sigma} Z_t - \frac{t}{2} \left(\frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 \right]$$

IV.2 Enoncé du théorème :

Soit $\lambda = (\lambda_t, t \in [0; T])$ un processus adapté à la filtration \mathcal{F} , filtration naturelle du mouvement brownien Z , et $L = (L_t, t \in [0; T])$ le processus défini par :

$$L_t \exp \left(-\int_0^t \lambda_s dZ_s - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda_s^2 ds \right)$$

Définition :

Le processus λ satisfait la condition de Novikov si et seulement si :

$$E_P \left[\exp \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T \lambda_s^2 ds \right\} \right] < +\infty$$

Théorème :

Si λ satisfait la condition de Novikov, on a :

1. Le processus L est une P -martingale
2. Le processus Z^* défini par :

$$Z_t^2 = Z_t + \int_0^t \lambda_s ds$$

est un mouvement brownien sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, Q)$ où Q est caractérisée par :

$$\frac{dQ}{dP} = L_T$$

On peut remarquer que si λ est constant, la propriété de martingale pour L a déjà été démontrée précédemment. En effet, dans ce cas, on a :

$$L_t = \exp \left(-\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2} t \right)$$

dont nous avons pu montrer aisément qu'il s'agissait d'une martingale.

IV.3 Application :

L'application la plus classique du théorème de Girsanov consiste dans l'évaluation d'une option européenne par cette technique de changement de probabilité. Dans le cadre du modèle de Black et Scholes, la dynamique des prix du support de l'option s'écrit :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t$$

ce qui conduit à :

$$S_t = S_0 \exp \left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma Z_t \right]$$

L'hypothèse d'absence d'arbitrage implique que le processus de prix actualisé au taux sans risque est une martingale sous la probabilité risque-neutre. Or, ce prix actualisé s'écrit :

$$\exp(-rt)S_t = S_0 \exp \left(\left(\mu - r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma Z_t \right)$$

On transforme alors, par le théorème de Girsanov, ce processus de prix sous la forme :

$$S_t = S_0 \exp(\sigma Z_t^*)$$

Il suffit ici de définir $Z_t^* = Z_t + \left(\frac{\mu - r - \frac{\sigma^2}{2}}{\sigma} \right) t$.

V. ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES STOCHASTIQUES :

V.1 Existence de solutions :

Nous avons montré en construisant l'intégrale stochastique que, sous certaines conditions, un processus pouvait s'écrire comme une telle intégrale. La question symétrique consiste à s'interroger sur les hypothèses que doivent vérifier des fonctions μ et σ pour qu'une différentielle stochastique fondée sur μ et σ correspond bien à un processus qui s'écrit comme une intégrale stochastique.

Dans ce qui va suivre, il est supposé que sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$, la filtration \mathcal{F} est celle engendrée par le mouvement brownien standard Z .

Définition :

On appelle équation différentielle stochastique la donnée d'une différentielle stochastique assortie d'une condition aux bornes, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} X_0 &= c \\ dX_t &= \mu(X_t, t)dt + \sigma(X_t, t)dZ_t \end{aligned} \tag{VIII}$$

Dans cette définition, c peut être une variable aléatoire; cependant dans les modèles financiers, il s'agit le plus souvent d'une constante, égale au prix initial de l'actif considéré si X est un processus de prix ou au taux de date 0 dans un modèle de taux d'intérêt.

Définition :

Un processus X est solution de l'équation (VIII) sur l'intervalle $[0, T]$ si :

1. X est adapté à \mathcal{F} .

2. Les fonctions μ et σ vérifient :

$$\int_0^T |\mu(X_t, t)| dt < +\infty \quad \text{et} \quad \int_0^T \sigma^2(X_t, t) dt < +\infty$$

3. X vérifie :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) dt + \int_0^t \sigma(X_s, s) dZ_s$$

La proposition qui suit donne les conditions sur μ et σ pour qu'une équation différentielle stochastique admette une solution.

Proposition :

Si les conditions (a) et (b) citées ci-après sont vérifiées, l'équation (VIII) admet comme solution unique, presque sûrement, un processus X adapté à \mathcal{F} , à trajectoires continues vérifiant $E_p \left(\int_0^T X_t^2 dt \right) < +\infty$.

a. Il existe $m > 0$ tel que $\forall t \in [0, T] \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\max \left(|\mu(x, t) - \mu(y, t)|; |\sigma(x, t) - \sigma(y, t)| \right) \leq m|x - y|$$

$$\mu(x, t)^2 + \sigma(x, t)^2 \leq m(1 + x^2) \text{ pour tout couple } (x, t)$$

b. La variable X_0 est de carré intégrable et indépendante de \mathcal{F}_t pour tout t .

La condition apparaissant dans la première partie du point (a) de cette proposition est appelée condition de Lipschitz. Elle limite de fait les pentes des fonctions μ et σ qui doivent rester finies et majorées par une constante indépendante de t . Cette condition est habituelle dans la résolution des équations différentielles classiques. La seconde partie de la condition (a) est une condition de restriction sur la croissance ; comme μ est l'espérance instantanée de variation de X , cela signifie que ce terme doit être de l'ordre de $(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$. En d'autres termes, la tendance ne doit pas être explosive; en effet, si cette condition n'était pas vérifiée, on pourrait obtenir des processus dont le drift augmente trop rapidement avec le niveau du processus, comme par exemple si $\mu(x, t) = \exp(x)$.

Il faut toutefois préciser que la solution donnée dans cette proposition est appelée solution forte car le processus de Wiener Z est donné ainsi que la filtration associée. Si l'on recherche le couple (X, Z) à partir des fonctions μ et σ , on parle alors de solution faible (Karatzas-Shreve, chap 5).

Dans la suite, nous noterons toujours X_t une solution de l'équation (VIII) en supposant que les conditions d'existence et d'unicité sont vérifiées.

Proposition :

1. Le processus X , solution de l'équation (VIII) est un processus de Markov dont la loi initiale est celle de c .
2. Si μ et σ sont des fonctions continues de t alors X est un processus d'Itô de paramètres μ et σ .

V.2 Cas particulier : les équations linéaires :

Une équation différentielle stochastique (EDS dans la suite) est dite linéaire si elle s'écrit sous la forme :

$$X_0 = c$$

$$dX_t = a X_t dt + \sigma_t dZ_t$$

où a est une constante.

La solution de cette équation peut dans ce cas être écrite sous la forme :

$$X_t = c \exp(at) + \int_0^t \exp[a(t-s)] \sigma_s dZ_s \mu(X_s, s) \quad (IX)$$

En effet, l'équation (IX) peut encore s'écrire :

$$X_t \exp(-at) = c + \int_0^t \exp(-as) \sigma_s dZ_s$$

Le processus Y apparaissant dans le membre de droite de cette équation admet la représentation :

$$Y_0 = c$$

$$dY_t = \exp(-at) \sigma_t dZ_t$$

Si l'on écrit $\exp(at)Y_t = f(Y_t, t)$; les dérivées partielles de f sont données par :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \exp(at) Y_t$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_t} = \exp(at)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2} = 0$$

Le lemme d'Itô permet alors d'écrire :

$$df(Y_t, t) = a \exp(at) Y_t dt + \exp(at) \exp(-at) \sigma_t dZ_t = a \exp(at) Y_t dt + \sigma_t dZ_t$$

En remplaçant alors Y_t par $\exp(-at)X_t$, on obtient :

$$dX_t = a X_t dt + \sigma_t dZ_t$$

qui est bien la différentielle stochastique initiale.

De manière plus générale, l'EDS suivante :

$$X_0 = c$$

$$dX_t = a(t) X_t dt + \sigma_t dZ_t$$

admet pour solution le processus X défini par :

$$X_t = \gamma_t \left[c + \int_0^t \gamma_s^{-1} \sigma_s dZ_s \right]$$

où la fonction γ est solution de l'équation différentielle :

$$f'(t) = a(t) f(t)$$

V.2.1 Exemple d'application :

Soit Y un processus d'Ornstein Uhlenbeck caractérisé par :

$$Y_0 = y_0$$

$$dY_t = \alpha (\beta - Y_t) dt + \sigma dZ_t$$

Soit $X_t = (Y_t - \beta) \exp(\alpha t) = f(Y_t, t)$; les dérivées partielles de f s'écrivent :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a \exp(\alpha t)(Y_t - \beta)$$

$$\frac{\partial f}{\partial Y_t} = \exp(\alpha t)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial Y_t^2} = 0$$

Le lemme d'Itô conduit alors à :

$$\begin{aligned} dX_t &= [\alpha(Y_t - \beta) \exp(\alpha t) + \exp(\alpha t) \alpha (\beta - Y_t)] dt + \sigma \exp(\alpha t) dZ_t \\ &= \sigma \exp(\alpha t) dZ_t \end{aligned}$$

Il s'ensuit que, comme $X_0 = y_0 - \beta$, on a :

$$X_t = y_0 - \beta + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s) dZ_s$$

En écrivant la relation entre X et Y sous la forme :

$$Y_t = \beta + X_t \exp(-\alpha t)$$

on aboutit à :

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta + \exp(-\alpha t) \left[y_0 - \beta + \sigma \int_0^t \exp(\alpha s) dZ_s \right] \\ &= \beta(1 - \exp(-\alpha t)) + y_0 \exp(-\alpha t) + \sigma \int_0^t \exp(-\alpha(t-s)) dZ_s \end{aligned}$$

Les lois des variables Y_t sont donc gaussiennes et vérifient :

$$E_P[Y_t | Y_0 = y_0] = \beta(1 - \exp(-\alpha t)) + y_0 \exp(-\alpha t)$$

$$\begin{aligned} V_P[Y_t | Y_0 = y_0] &= \sigma^2 \int_0^t \exp(-2\alpha(t-s)) ds \\ &= \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - \exp(-2\alpha t)) \end{aligned}$$

CHAPITRE 3 :

PROBLÉMATIQUE ET THÉORIE DE L'ÉVALUATION D'INSTRUMENTS OPTIONNELS EN FINANCE

Introduction :

Les économistes Black & Sholes (1973) ont été parmi les premiers à utiliser, en finance le calcul stochastique, en faisant l'hypothèse d'un mouvement Brownien géométrique pour l'évolution du cours des actions avec une volatilité constante, Black & Sholes (1973) ont proposé leur formule d'évaluation d'une option d'achat de type européen ne versant pas de dividende sur action en utilisant un argument d'arbitrage.

Cependant, l'hypothèse de la constance de la volatilité dans la formule de Black & Sholes (1973) a été rejetée vu que la distribution empirique des rendements présentait des caractéristiques différentes de celle d'une loi gaussienne. Ceci a donné naissance à une nouvelle classe de modèles connus sous le nom de modèles à volatilité stochastique.

Le présent chapitre est partagé en deux parties dont l'objectif principal de la première est de présenter en premier lieu le modèle qui a servi à l'émergence de différents modèles beaucoup plus complexes, à savoir celui de Black & Sholes (1973). Nous allons ensuite mener une étude empirique sur des données historiques de l'indice S&P500 sur une période allant du 02/01/1970 au 28/05/2004 pour essayer de cerner les différentes lacunes et insuffisances du modèle de Black & Sholes. D'autres modèles seront présentés dont celui de Hull & White (1987) qui propose de modéliser la variance par un processus non corrélé avec celui du cours de l'actif, hypothèse levée cependant par Heston (1993) qui a modélisé le cours de l'actif par une diffusion à incréments corrélés avec celui de la variance. Quant à Bates (1996), il reprend la modélisation de Heston en rajoutant cependant une composante de saut au processus du cours.

La seconde partie est réservée aux différentes méthodes que nous avons implémentées pour l'évaluation des options, à savoir les solutions analytiques basées sur les fonctions caractéristiques et la méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform) élaborée par Carr & Maddan (1999) et la méthode de Monte Carlo.

Partie I : Présentation des modèles d'évaluation d'options et étude empirique des propriétés des rendements.

I. Le modèle fondateur : modèle de Black & Scholes

La théorie de l'évaluation des options est devenue un domaine riche en modélisations depuis le célèbre modèle fondateur de Black & Scholes (1973), où les auteurs délivrent une formule d'évaluation donnant le prix (*prime ou premium*) d'une option européenne ne versant pas de dividende. Jouissant d'un caractère analytique d'une simplicité notable lui conférant une praticabilité certaine mais également d'une précision convenable sous certaines conditions, cette formule reste très largement utilisée par les praticiens des marchés d'options.

Ce modèle postule les hypothèses suivantes :

- le marché est supposé parfait c'est-à-dire qu'il n'y a pas de coût de transaction ou d'information, ni d'impôts, ni de restriction sur les ventes à découvert et que les titres sont parfaitement divisibles.
- il est possible d'emprunter ou de prêter à un taux sans risque égal au taux d'intérêt.
- les options sont européennes.
- il n'y a pas de dividendes durant la vie de l'option.
- Le cours de l'actif S , obéit au processus d'évolution stochastique continu de Wiener

défini par l'équation différentielle :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dZ_t \quad (3.1)$$

μ est l'espérance des rendements de l'actif et σ est la volatilité du cours de l'actif.

Notons f le prix d'une option d'achat lié à l'actif dont le cours est S . f est alors une fonction de S et t . D'après le lemme d'Itô, nous déduisons la relation suivante :

$$\partial f = \left(\frac{\partial f}{\partial S} \mu S + \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt + \frac{\partial f}{\partial S} \sigma S dZ \quad (3.2)$$

Où ∂S et ∂f représentent les variations de S et f pendant un instant très court égal à dt .

dZ est un processus standard de Gauss Wiener. La distribution de dZ est une loi normale de moyenne nulle et de variance égale à dt . En d'autres termes, les $dZ = \varepsilon \sqrt{dt}$ avec $\varepsilon \sim N(0,1)$ des équations (3.1) et (3.2) sont identiques. Ainsi, en choisissant un portefeuille composé d'une action et de l'un de ses produits dérivés, la composante aléatoire peut être éliminée.

Un portefeuille approprié peut être défini de la façon suivante :

- vente d'une unité du produit dérivé,

- achat de $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions.

Le détenteur du portefeuille est alors en position courte (vendeur) sur le produit dérivé et en position longue (acheteur) sur $\frac{\partial f}{\partial S}$ actions. La valeur du portefeuille notée π , s'écrit alors :

$$\pi = -f + \frac{\partial f}{\partial S} S \quad (3.3)$$

La variation $d\pi$ de la valeur du portefeuille au cours d'un intervalle de temps dt est donné par :

$$d\pi = -df + \frac{\partial f}{\partial S} dS \quad (3.4)$$

En substituant df et dS , dans l'équation (4) par leurs valeurs données en (3.1) et (3.2), nous obtenons :

$$d\pi = \left(-\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt \quad (3.5)$$

Puisque cette équation ne comporte pas l'expression dZ , le portefeuille doit être sans risque pendant l'intervalle de temps dt . Un tel portefeuille doit procurer un rendement égal au taux sans risque. Nous pouvons donc écrire :

$$d\pi = r\pi dt \quad (3.6)$$

où r représente le taux sans risque. Si nous remplaçons les termes π et $d\pi$ dans l'équation (3.6) par leurs expressions données dans les équations (3.3) et (3.5), nous obtenons :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} \sigma^2 S^2 \right) dt = r \left(f - \frac{\partial f}{\partial S} S \right) dt$$

et donc :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + rS \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = rf \quad (3.7)$$

L'équation (3.7) est l'équation aux dérivées partielles de Black & Scholes. Cette équation a une solution correspondant au produit dérivé qui peut avoir S comme actif sous-jacent. La solution de l'équation dépend alors des conditions aux bornes qui caractérisent le produit dérivé considéré. Par exemple, dans le cas d'un call européen, la condition aux bornes est :

$$f = \max(S - K, 0), \text{ quand } t = T$$

Dans le cas d'un put européen, elle s'écrit :

$$f = \max(K - S, 0), \text{ quand } t = T$$

La résolution de l'équation aux dérivées partielles (3.7) nous permet de calculer, à la date zéro, la valeur d'un call européen ($f = C$) ou d'un put européen ($f = P$) sur une action qui ne verse pas de dividende :

$$C^{BS} = S_0 \Phi(d_1) - Ke^{-rT} \Phi(d_2) \quad (3.8)$$

$$P^{BS} = Ke^{-rT} \Phi(-d_2) - S_0 \Phi(-d_1) \quad (3.9)$$

Avec :

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

La fonction $\Phi(\cdot)$ est la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite.

II. Etude empirique des rendements d'une série financière et de sa volatilité :

La littérature associée à la théorie de la valorisation d'actifs financiers s'est développée de façon spectaculaire depuis les travaux de Black et Scholes (1973), (modèle exposé précédemment), leur modèle représente la référence de base en matière d'évaluation d'options. Toutefois, les hypothèses de ce modèle sont inadéquates et largement rejetées par les données car sa formulation initiale suppose que la volatilité des rendements de l'actif sous-jacent est constante. Ceci n'est pas vérifié empiriquement, de plus, le rendement est supposé suivre une distribution normale. Or, l'hypothèse de normalité est largement contestée, voire rejetée, notamment parce qu'elle sous-estime la fréquence des événements extrêmes.

Nous verrons dans ce qui suit que l'étude empirique menée sur des données historiques de l'indice S&P500 confirme bien ces contestations.

Nous avons étudié les rendements de l'indice Standard & Poor's 500, de janvier 1970 à mai 2004, soit une série de 8976 cotations quotidiennes (Figure 3.2). Cet indice est une moyenne des cours de 500 plus grosses capitalisations cotées à la bourse COBE et représente un des indicateurs financiers les plus regardés par les marchés.

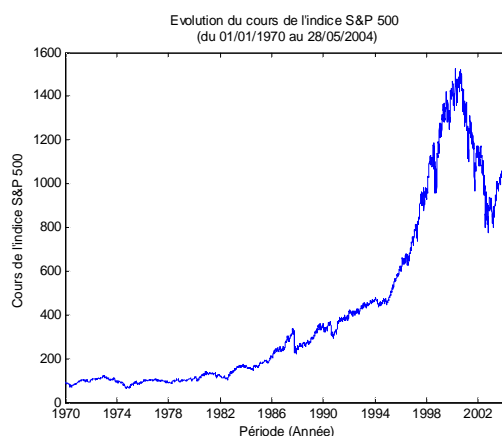
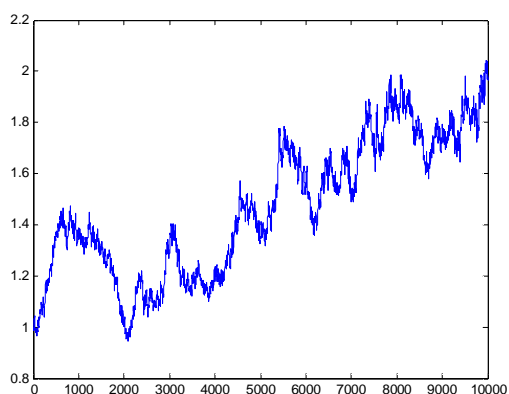


Figure 3.1: mouvement brownien géométrique Figure 3.2 : Evolution du cours de l'indice S&P500 du 02/01/1970 au 28/05/2004

La trajectoire du mouvement brownien peut, à priori passer pour un cours financier. Nous verrons dans ce qui suit que cette hypothèse est très restrictive.

II.1 Limites de la loi gaussienne :

La recherche d'un modèle de spécification est souvent guidée par des faits caractéristiques empiriques. La capacité d'un modèle de reproduire de tels faits est une caractéristique souhaitable et son incapacité de la faire est souvent un critère d'élimination d'une spécification, même si on n'essaye pas de reproduire ou d'expliquer toutes les régularités empiriques possibles en même temps avec un seul modèle.

Dans cette section, nous présentons un résumé de faits caractéristiques concernant la distribution des rendements et la volatilité.

II.1.1 Skewness et excès de kurtosis :

La kurtosis indique la forme de la courbe de distribution. Une distribution normale a une kurtosis de 3. Si la distribution possède une kurtosis supérieure, elle est dite leptokurtique c'est-à-dire que la probabilité d'être très proche de la moyenne est élevée (forme de pic laissant apparaître une pente plus raide de la courbe) et elle est également forte dans les extrêmes. Par contre, la probabilité baisse rapidement en s'éloignant de la moyenne.

La skewness indique l'asymétrie d'une distribution, par opposition à une distribution gaussienne dont la skewness est égale à 0 et donc symétrique autour de la moyenne. Dans ce cas, on note l'existence de queues longues « fat tails » à gauche ou à droite. La skewness est positive lorsque la distribution est graphiquement plus longue à droite de la moyenne. Elle est négative lorsque la courbe est plus longue à gauche de la moyenne.

Dans le modèle de Black & Scholes, l'hypothèse de du mouvement brownien géométrique pour le processus des cours est équivalent à l'hypothèse gaussienne pour la distribution des rendements, ayant $\mu_3 = 0$ pour moment d'ordre 3 (ou skewness) et $\mu_4 = 3$ pour moment d'ordre 4 (ou kurtosis).

En 1962 Mandelbrot constate que les données financières ont des queues de distribution plus épaisses que celles d'une loi normale, c'est-à-dire que les valeurs loin de la moyenne apparaissent avec des probabilités plus élevées que pour une loi normale. Selon cet auteur, vu l'importance de l'information contenue dans les queues de distribution, il serait inconvenable de négliger, comme il était alors d'usage, les valeurs "extrêmes".

En effet; l'étude empirique que nous avons mené sur des données journalières de l'indice S&P500 montre bien qu'il y a une divergence significative entre les propriétés de la distribution empirique et la distribution théorique de la loi normale :

- La distribution empirique présente des queues de distribution plus épaisses que les queues de distribution de la loi gaussienne : les rendements élevés (positifs ou négatifs) sont observés plus souvent que prévu par la distribution gaussienne. La valeur du coefficient d'aplatissement (ou *kurtosis*) est ainsi supérieure à 3 (voir Tableau 3.1), qui est celle d'une loi normale. La distribution est aussi plus pointue en zéro avec des queues épaisses (voir Figure 3.3). En conséquence, la probabilité théorique de survenance d'une valeur extrême est sous-estimée lorsque la distribution des rendements est supposée gaussienne.
- La distribution empirique n'est pas symétrique contrairement à la distribution gaussienne: les rendements négatifs sont observés plus souvent que ce que prévoit la distribution gaussienne (voir Figure 3.3). Le coefficient d'asymétrie (ou *skewness*) est

négatif pour la distribution empirique contrairement à celui de la loi gaussienne qui est égal à zéro, (voir tableau 3.1) traduisant ainsi, une queue plus longue sur la gauche.

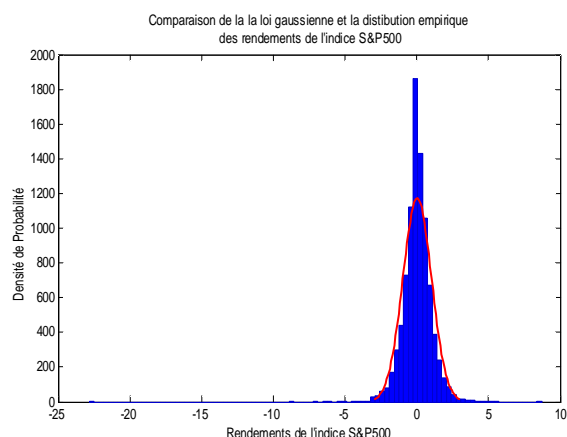


Figure 3.3 : Distribution empirique des rendements l'indice S&P500 allant du 02/01/1970 28/05/2004 contre une loi normale

	Distribution empirique	Distribution théorique
Moyenne	0,0003	0,0003
Ecart-type	0,01	0,01
Skewness	-1.3730	0
Kurtosis	37.1478	3

Tableau 3.1 : Valeurs des moments d'ordre 1, 2, 3 et 4 de la distribution empirique des rendements de l'indice S&P500 et de la loi gaussienne

II.1.2 Le tracé des quantiles (qq-plot) :

Une autre façon de tester, visuellement, l'adéquation ou non des rendements avec une distribution gaussienne est de faire une analyse des quantiles, en traçant les quantiles empiriques contre les quantiles d'une loi normale (qq-plot). Si les distributions sont identiques, le tracé doit être approximativement linéaire. Si au contraire elles sont différentes, on doit observer des déviations. Dans la figure 3.4, le tracé pour les rendements cesse très vite d'être linéaire et présente de fortes déviations tant pour les queues positives que négatives.

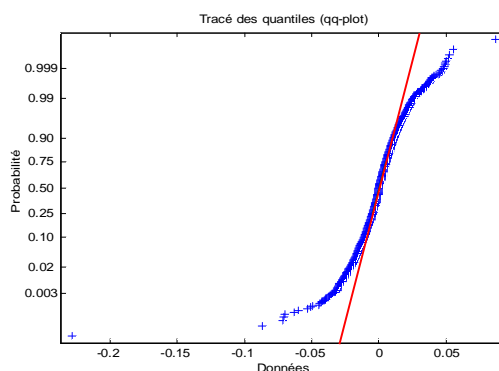


Figure 3.4 : tracé du qq-plot des rendements contre une loi normale

II.2. Le phénomène de "clustering" de la volatilité :

Mandelbrot (1963) fait observer une caractéristique de la volatilité qu'il résume par une remarque célèbre "i large changes tend to be followed by large changes – of either sign - and small changes tend to be followed by small changes", c'est-à-dire que les fortes (faibles) variations de la variance sont suivis par d'autres fortes (faibles) variations mais dont le signe n'est pas prévisible. Ce phénomène connu sous le nom de regroupement de la volatilité "volatility clustering " ne saurait être traduit correctement par un seul processus de wiener standard. Ce phénomène peut être illustré à travers les rendements historiques de l'indice S&P500 par la figure 3.5 où l'on peut observer que les périodes de forte volatilité alternent avec les périodes de faible volatilité.

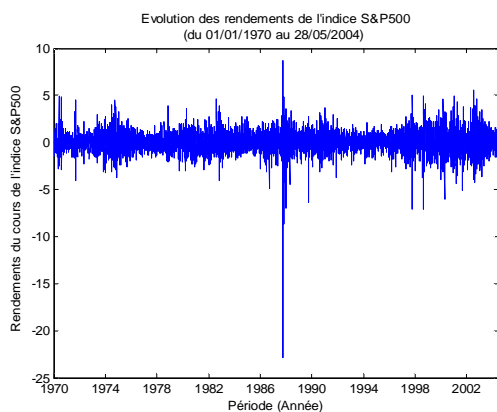


Figure 3.5 : Evolution des rendements de l'indice S&P500 du 02/01/1970 au 28/05/2004

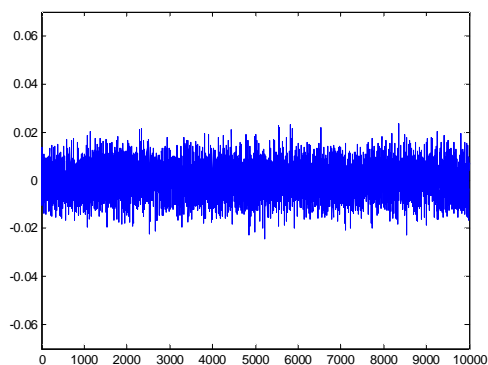


Figure 3.6 : accroissements du mouvement brownien géométrique (Bruit blanc gaussien).

Dans la figure 3.6, nous pouvons noter l'extrême régularité de l'aléa gaussien et la différence est frappante avec la figure 3.5 car les rendements de l'indice paraissent beaucoup plus sauvages que le bruit blanc. En premier lieu, les données réelles peuvent atteindre des niveaux très importants qui ne sont jamais approchés par des tirages gaussiens. Par ailleurs, contrairement au bruit gaussien qui donne l'impression d'une certaine uniformité, la variabilité de l'indice change au cours du temps. En effet, les rendements sont très fluctuants autour de leur valeur moyenne et peuvent prendre des valeurs très faibles comme des valeurs très grandes. En outre, des cycles se forment : il y a des périodes pendant lesquelles les rendements en valeur absolue, sont très élevés et d'autres pendant lesquelles ils demeurent beaucoup plus sages.

Les éléments d'étude que nous avons proposés (densité empirique, tracé des quantiles, calcul des cumulants : kurtosis et skewness) vont tous dans le même sens : l'existence d'un excès de kurtosis et d'une asymétrie nous pousse à conclure à la non normalité des rendements.

II.3 La volatilité implicite :

Le concept de volatilité d'un titre financier revêt une importance capitale au sein des marchés financiers, car il permet de mesurer le degré de dépendance de ce titre par rapport aux fluctuations du marché, mais il n'est pas évident de définir ce qu'est la volatilité d'une série de rendement. Traditionnellement, la déviation standard des rendements a été utilisée comme mesure de la volatilité. Cette mesure est facile à interpréter tant qu'elle reste constante. Malheureusement, la déviation standard des rendements d'un actif financier n'est pas constante. Le niveau de volatilité d'aujourd'hui peut être différent de celui d'hier, ce qui nous pousse à penser à une manière de mesurer cette volatilité instantanée.

Dans le contexte de la théorie de l'évaluation de l'option, la volatilité prend deux formes principales et bien distinctes :

- La volatilité réelle qui mesure la dispersion effective des rendements d'un actif financier, soit sur une période antérieure (volatilité historique), soit à l'instant courant (volatilité instantanée).
- La volatilité implicite (appelée aussi volatilité de marché) quantité qui est entrée par les opérateurs dans un modèle d'évaluation d'options.

II.3.1 Concept de la volatilité implicite :

Si le modèle de Black & Scholes présenté précédemment est si populaire c'est qu'il permet de calculer un grand nombre de prix d'options européennes classiques. Cependant, l'hypothèse de volatilité constante n'est pas cohérente avec les prix observés sur le marché.

La valeur C d'une option d'achat est donnée en fonction de plusieurs paramètres, dont la volatilité est le seul paramètre qui ne soit pas directement observable. Si on connaît C , on peut calculer le prix de l'option. Inversement si on connaît la valeur de l'option, on peut déduire la valeur de σ ; car il existe une seule valeur de σ telle que la valeur théorique de l'option soit égale à la valeur réelle sur le marché de cette même option. La valeur trouvée, est ce qu'on appelle la volatilité implicite.

Plus précisément, supposons que le taux sans risque r soit fixe et que l'on observe les prix C_i de call européens de maturité T_i et de prix d'exercice K_i , $i = 1, \dots, N$, écrits sur le même sous-jacent S de prix S_0 aujourd'hui. On doit alors avoir :

$$C_i = C^{BS}(0, S_0, K_i, T_i, \sigma_i) \text{ pour tout } i = 1, \dots, N,$$

Où σ_i est la volatilité et $C^{BS}(t, S_t, K_i, T_i, \sigma_i)$ est le prix dans le modèle de Black & Scholes d'une option d'achat sur S à la date t de maturité T et de prix d'exercice K .

En particulier, on peut retrouver le paramètre de volatilité σ_i en inversant par rapport à cette variable la formule de Black & Scholes, c'est-à-dire chercher σ_i tel que :

$$C_i = C^{BS}(0, S_0, K_i, T_i, \sigma_i) \quad (3.10)$$

On appelle volatilité implicite la solution $\sigma_{imp}(T_i, K_i)$ de cette équation.

II.3.2 Smile de volatilité :

Dans le modèle de Black & Scholes, la volatilité implicite (extraite de l'équation 3.10) ne doit évidemment pas dépendre de K_i . Or, ceci n'est pas vérifié en pratique. Typiquement, on observe que, pour une même maturité, la volatilité implicite est non constante en fonction du prix d'exercice. Elle a souvent une forme de sourire (forme en U), et est appelé "smile" de volatilité.

Pour établir le "smile", il faut disposer des prix observés d'une option sur le même actif sous-jacent qui ne diffèrent que par les prix d'exercice. On peut alors avoir la relation entre la volatilité et le prix d'exercice en injectant les prix d'options observés dans la formule de Black & Scholes, ceci devra donner lieu à une forme de "smile" (voir figure 3.7).

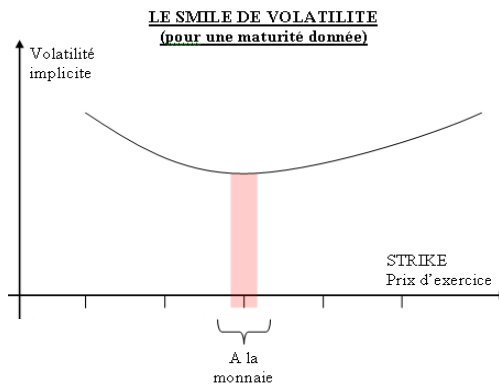


Figure 3.7 : Smile de volatilité

II.3.3 La structure par termes de volatilité :

Pour tout prix d'exercice K , $K > 0$, la fonction $\sigma_i(\cdot, T)$ de la volatilité implicite pour des maturités T , est appelée structure par termes de volatilités implicites pour le prix d'exercice K . Cette fonction fait appel à une autre forme d'allure. K est habituellement choisi pour être le prix d'exercice "à la monnaie". Cette volatilité tend à être une fonction croissante de la maturité lorsque les volatilités historiques à court terme sont faibles. Cela traduit que les opérateurs anticipent une hausse de la volatilité. Symétriquement, la volatilité tend à être une fonction décroissante de la maturité qui se traduit également par une anticipation d'une baisse de la volatilité par les opérateurs.

II.3.4 La surface de volatilité :

Lorsque la structure par terme et la courbe du "smiling" de la volatilité sont combinées, elles produisent une surface de la volatilité. Celle-ci définit la volatilité implicite comme une fonction à la fois du prix d'exercice et de la durée de vie de l'option.

La surface de volatilité est souvent présentée sous la forme d'un tableau donnant les volatilités implicites en fonction du prix d'exercice et de la durée de vie des options (voir Figure 3.8 provenant de [16]).

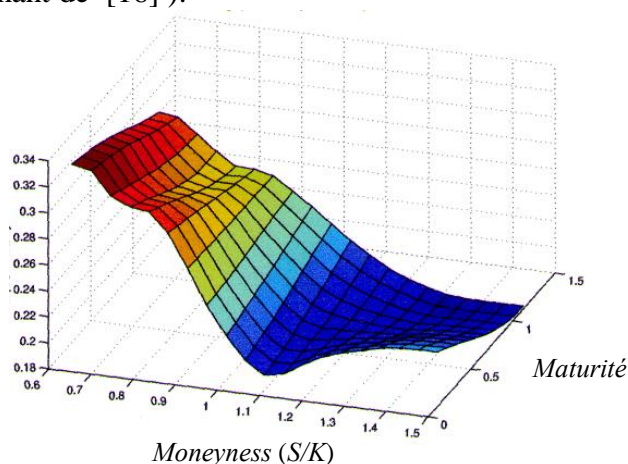


Figure 3.8 : Surface de volatilité implicite

III. Présentation des modèles à volatilité stochastique :

Le formidable développement qu'on connaît les marchés de produits dérivés depuis plus de trente ans n'aurait probablement pas été possible sans la publication en 1973 de l'article présentant un modèle d'évaluation d'options, il s'agit bien sûr du modèle de Black & Scholes. Néanmoins, les fluctuations boursières ont permis de cerner les insuffisances de leur choix du mouvement brownien géométrique pour le processus du cours de l'actif sous-jacent.

En effet, les rendements des actifs financiers démontrent un effet leptokurtique, une asymétrie (voir figure 3.3 et tableau 3.1) et une hétéroscédasticité (voir Figure 3.5) connu sous le nom de regroupement de la volatilité, ces faits stylisés sont dissimulés avec le modèle de Black & Scholes.

L'hypothèse de la constance de la volatilité a été rejetée depuis longtemps et surtout depuis le crash boursier de 1987, qui a mis en évidence l'effet "smile" de la volatilité. Ces

constatations nous poussent à considérer la volatilité comme un processus de diffusion. C'est ainsi que sont nés les modèles à volatilité stochastique.

III.1 Le modèle de Hull & White (1987) :

Le modèle de Hull & White (1987) à pure volatilité stochastique reprend les mêmes hypothèses que le modèle de Black & Scholes (1974) en levant cependant celle de la constance de la volatilité du cours de l'actif sous-jacent. Les auteurs suggèrent de modéliser le processus de la variance par un mouvement brownien géométrique à incréments non corrélés avec le cours du sous-jacent. Leur modèle est défini par :

$$\begin{aligned} dS_t &= \phi S_t dt + \sigma_t S_t dW_t \\ dV_t &= \mu V_t dt + \xi V_t dZ_t \end{aligned}$$

Où

- S_t et V_t ($V_t = \sigma_t^2$) représentent respectivement le cours de l'actif sous-jacent et sa variance instantanée.
- dW_t et dZ_t sont deux processus de Wiener non corrélés ($\rho = 0$)
- μ et ξ sont des constantes et représentent l'espérance mathématique et la volatilité de la variance des rendements de l'actif sous-jacent.

Hull & White (1987) ont utilisé l'équation différentielle de Garman (1976) pour déduire une solution sous forme sérielle du prix d'une option d'achat européenne sur un actif avec une volatilité qui n'est pas corrélée avec le prix de l'actif sous-jacent. Ils ont montré que pour un tel actif, le prix déduit de la formule de Black-Scholes sur-évalue les options en jeu (at-the-money) et sous-évalue les options "in" et "out-of-the-money". Ils ont montré que la formule de Black-Scholes donne une bonne évaluation dans le cas où le prix de l'option se trouve dans un intervalle de 10% du prix d'exercice.

Formule de Hull & White :

Soit C^{BS} le premium calculé à l'aide du modèle de Black & Scholes d'une option d'achat de type européen ne versant pas de dividende. Soit \bar{V} la variance moyenne sur la période $[0, T]$, c'est-à-dire $\bar{V} = \frac{1}{T} \int_0^T V_\tau d\tau$. Le premium de Hull & White (1987), noté C^{HW} , s'exprime comme l'espérance mathématique du premium de Black & Scholes, conditionnelle à la variance instantanée des rendements du cours de l'actif sous-jacent :

$$C^{HW}(S_t, V_t, r, \tau, K) = E(C^{BS}(S_t, \bar{V}, r, \tau, K) / V_t),$$

où r désigne le taux d'intérêt (supposé constant) et V_t la variance instantanée (supposée stochastique) des rendements de l'actif sous-jacent.

Le calcul de C^{HW} nécessite la connaissance analytique de $f(\bar{V}/V)$. Pour ce faire, on doit approcher la forme de la distribution de la variance moyenne conditionnelle à la variance instantanée en calculant ses moments. Un développement en série de Taylor de $C^{BS}(\cdot)$ autour de la variance espérée moyenne $\bar{V}_m \equiv E(\bar{V}/V_t)$ est possible, et s'écrit

$$C^{BS}(S_t, \bar{V}, r, \tau, K) \approx C^{BS}(S_t, \bar{V}_m, r, \tau, K) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (\bar{V} - \bar{V}_m)^n \frac{\partial^n C^{BS}(S_t, \bar{V}, r, \tau, K)}{\partial \bar{V}^n} / \bar{V}_m.$$

Finalement,

$$C^{HW}(S_t, V_t, r, \tau, K) \approx C^{BS}(S_t, \bar{V}_m, r, \tau, K) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n C^{BS}(S_t, \bar{V}, r, \tau, K)}{\partial \bar{V}^n} / \bar{V}_m \int_{\bar{V}} (\bar{V} - \bar{V}_m)^n f(\bar{V}/V) d\bar{V}.$$

Comme il a été montré par Hull & White (1988) et confirmé par Ball & Roma (1994) qu'en absence de corrélation entre le processus du cours de l'actif sous-jacent et celui de la variance, une approximation précise du prix d'une option peut être obtenue en remplaçant dans la formule de Black & Scholes (1973), la variance par :

$$\bar{V}_m = E \left[\frac{1}{T-t} \int_t^T \sigma_\tau^2 d\tau \right].$$

III.2. Le modèle de Heston (1993) :

L'hypothèse de non corrélation entre les chocs de volatilité et le cours du sous-jacent est non-conforme avec la réalité, en effet, des études empiriques ont montré que la volatilité est corrélée négativement avec le cours de l'actif sous-jacent (voir Cont 2001).

Pour remédier à ce problème, Heston (1993) a proposé pour la variance un processus de diffusion à retour à la moyenne de type racine-carré à chocs corrélés avec le cours de l'actif sous-jacent. Ce modèle a permis de combler des lacunes dans le modèle de Black & Scholes. En effet, ce dernier ne prend en considération que les deux premiers moments de la distribution des rendements de l'actif sous-jacent, alors que les travaux de Heston ont montré que la corrélation entre la variance et le prix de l'actif est nécessaire pour générer l'asymétrie (moment d'ordre 3) dans la distribution des rendements. En présence d'une volatilité stochastique, le coefficient d'asymétrie (ou skewness) affecte l'évaluation des options dans la "monnaie" sans affecter pour autant l'évaluation des options " en dehors de la monnaie". En l'absence d'une corrélation entre la variance et le prix de l'actif, la volatilité stochastique agit uniquement sur les queues de distribution des rendements (la kurtosis).

Le modèle de Heston s'écrit donc :

$$\begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^s \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_t^v \\ dZ_t^s dZ_t^v = \rho dt \end{cases}$$

où

μ est l'espérance des rendements de l'actif sous-jacent,

κ est la vitesse de retour au niveau moyen,

θ est le niveau moyen à long terme de la variance

σ est la volatilité de la variance,

ρ est le coefficient de corrélation entre le prix et la variance de l'actif sous-jacent.

Z^s et Z^v sont deux mouvements browniens corrélés.

Le paramètre de la volatilité de la variance σ augmente l'asymétrie dans la distribution des rendements lorsqu'il n'est pas nul. Par contre si ρ est égal à zéro, l'augmentation de σ fera augmenter l'asymétrie de la distribution des rendements et non pas les queues de la distribution.

L'idée principale de la modélisation de Heston (1993) est d'introduire une corrélation non nulle entre les chocs du cours de l'actif sous-jacent et de la variance, il montre ainsi qu'une corrélation négative impliquera qu'une hausse du prix de l'actif entraînera une variance moins élevée et ceci élargira la queue à gauche de la densité de probabilité. Sans épaissir tout autant celle de droite. Ceci conduira à réduire les prix des options "en dehors de la monnaie" et à faire augmenter celui des options "dans la monnaie" par rapport aux évaluations fournies par le modèle de Black et Scholes. Lorsque la corrélation est positive, l'effet inverse est observé, c'est-à-dire que cette corrélation va faire augmenter le prix des options "en dehors de la monnaie" et réduire celui des options "dans de la monnaie".

III.3. Le modèle de Bates (1996) :

Il est incontestable que les modèles à pure volatilité stochastique présentés offrent des formules performantes pour l'évaluation des options, cependant, l'efficacité est, a priori, grevée du fait qu'ils ne tiennent pas compte de toute la skewness négative et de l'excès de kurtosis dans la distribution des rendements de l'actif sous-jacent. En effet, comme le fait remarquer Bates (1996), une distribution affichant une skewness négative peut provenir, non seulement d'une corrélation négative entre les chocs de volatilité et les rendements de l'actif sous-jacent, mais également de la présence de sauts non reflétée dans le processus de prix. De même, l'excès de kurtosis peut très bien provenir de l'existence de sauts dans le processus du cours de l'actif sous-jacent. L'importance de l'intégration du caractère aléatoire de la volatilité et de la présence de sauts est inversement proportionnelle à la période de détention de l'option : plus la période de détention est courte, plus la nécessité de prendre en considération les deux effets (volatilité stochastique et sauts de rendement), s'imposent. Merton (1976) avait déjà introduit des sauts de nature poissonnienne, orientant ainsi vers un processus mixte. En effet, son modèle explique les mouvements infinitésimaux des rendements par une distribution normale et les mouvements plus grands et plus brusques par des sauts, mais son travail était dans un contexte d'environnement à volatilité déterministe. Bates (1996) a donc donné une généralisation en modélisant le cours comme étant un processus mixte (diffusion et saut) en intégrant une volatilité stochastique, ainsi le modèle est défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dS_t}{S_t} = (\mu - \lambda \bar{j})dt + \sqrt{V_t} dZ_t^s + j dq \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma \sqrt{V_t} dZ_t^v \\ dZ_t^s dZ_t^v = \rho dt \end{array} \right.$$

où μ , σ , θ , et ρ s'interprètent de la même façon que dans le modèle de Heston (1993). dq désigne un incrément poissonnien de paramètre λ , tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} Pr(dq = 1) = \lambda dt \\ Pr(dq = 0) = 1 - \lambda dt. \end{array} \right.$$

L'amplitude du saut, lorsque celui-ci survient, est telle que $\ln(1 + j)$ est une loi normale de paramètres $\ln(1 + \bar{j}) - \frac{\delta^2}{2}$ et δ^2 :

$$\ln(1 + j) \sim N\left(\ln(1 + \bar{j}) - \frac{\delta^2}{2}, \delta^2\right)$$

D'après l'analyse de Bates (1996), l'asymétrie (skewness) de la distribution des rendements est due, soit à l'existence d'une corrélation non nulle entre le cours et la volatilité de l'actif sous-jacent, ou soit à la moyenne des sauts $\left(\ln(1 + \bar{j}) - \frac{\delta^2}{2}\right)$ qui diffèrent de zéro. Quant au coefficient d'aplatissement (kurtosis), il augmente quand le paramètre de la volatilité de la variance augmente ou la composante de saut \bar{j} augmente.

Dans ce qui a précédé, nous avons présenté quelques caractéristiques des séries de rendements dont on retrouve l'excès du coefficient d'aplatissement (kurtosis), le coefficient d'asymétrie (skewness) ainsi que le phénomène de regroupement de la volatilité. Comme nous avons introduit les modèles utilisés pour décrire l'évolution des actifs financiers, en particulier le modèle de Black & Scholes qui reste le plus utilisé dans le domaine de l'ingénierie financière, ainsi que les modèles connus sous le nom de modèle à pure volatilité stochastique, et ceux dont le cours est un processus mixte (diffusion et sauts) et dont la volatilité est stochastique.

Partie II : Méthodes d'évaluation d'options à volatilité stochastique

I. Introduction :

Initialement conçu pour évaluer des options européennes sur actions, le modèle de Black & Scholes (1973) présente des formules simples et attrayantes comme nous l'avons présenté dans le chapitre précédent. L'intégration d'un processus stochastique suivi par la volatilité dans la description du comportement des rendements du cours de l'actif sous-jacent constitue une des innovations majeures de la théorie des options depuis le modèle fondateur de Black & Scholes (1973). Parmi ces développements, les plus importants sont le modèle de Hull & White (1987), le modèle SV de Heston (1993) et le modèle SVJ de Bates (1996).

Dans un univers à volatilité stochastique, Hull & White (1987) ont eu recours à des simulations de Monte Carlo pour l'évaluation des options européennes. Quant à Heston (1993), il propose une solution analytique basée sur des fonctions caractéristiques pour évaluer le même type d'options. Carr & Madan suggèrent pour le même modèle une méthode plus rapide et plus efficace à savoir la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier Transform). Dans la classe des modèles "mixtes" à sauts et à volatilité stochastique, Bates (1996) développe la solution analytique de Heston (1993).

Dans notre étude, toutes les approches d'évaluation d'options européennes à volatilité stochastique seront basées soit sur la méthode de simulations de Monte Carlo, soit sur les solutions fondées sur les fonctions caractéristiques ou bien sur l'algorithme de la transformée de Fourier rapide. Nous présenterons dans ce qui suit ces différentes méthodes de résolution.

II. Évaluation par les fonctions caractéristiques :

II.1 La formule de Heston :

Les travaux de Heston (1993) ont apporté une grande contribution à la recherche, car il a dévoilé une nouvelle méthode d'intégration et de résolution du caractère stochastique de la volatilité. En effet, il fournit ainsi une solution analytique exacte (formule fermée : The closed-form solution). Nous allons dans ce qui suit développer cette solution.

Soit une option d'achat européenne, de prix d'exercice K et de durée de vie résiduelle $\tau = T - t$, portant sur un actif sous-jacent ne versant pas de dividende. Le *premium* ou la *prime* de Heston, noté C^H de cette option et donné par :

$$C^H(S_t, V_t, r, \tau, K) = S_t P_1 - K P_2 e^{-r\tau} \quad (3.11)$$

où $P_j, j=1, 2$ désignent les mesures de probabilités risque-neutre et se définissent comme suit :

$$P_j(x, V_t, r, \tau, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, V_t, r, \tau, \phi)}{i\phi} \right) d\phi \quad (3.12)$$

$$x = \ln(S_t)$$

où

$$f_j(x, V_t, r, \tau, \phi) = \exp\{C(\tau, \phi) + D(\tau, \phi)V_t + i\phi x\} \quad (3.13)$$

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\},$$

$$D(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right]$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

Pour $j = 1, 2$, on a :

$$u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \kappa\theta, b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, b_2 = \kappa + \lambda.$$

Sous la probabilité risque neutre, nous avons quelques simplifications :

$$a^* = \kappa^* \theta^*, b_1 = \kappa^* - \rho\sigma, b_2 = \kappa^* \text{ où } \kappa^* = \kappa + \lambda, \theta^* = \frac{\kappa\theta}{\kappa + \lambda}$$

II.2 La formule de Bates :

Bates (1996) a repris le travail de Heston (1993), en autorisant cependant, au processus du cours de l'actif sous-jacent à avoir des sauts expliquant ainsi les variations brusques relatives à la vie économique (crash boursier, crise économique í)

La solution analytique du modèle de Bates est basée sur les fonctions caractéristiques.

Soit C^{Bt} la prime de Bates d'une option d'achat de type européen, sur action ne versant pas de dividende sur la durée de vie du contrat, elle est donnée par :

$$C^{Bt}(S_t, V_t, r, \tau, K) = S_t P_1 - K P_2 e^{-r\tau} \quad (3.14)$$

Bakshi & Madan (2000) montrent que les probabilités P_1 et P_2 s'écrivent sous la forme suivante :

$$P_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iuk} \phi_T(u-i)}{iu \phi_T(-i)} \right] du$$

$$P_2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left[\frac{e^{-iuk} \phi_T(u)}{iu} \right] du$$

Où

$k = \ln(K)$, K étant le prix d'exercice

$\phi_T(\cdot)$ est la fonction caractéristique du logarithme du cours de l'actif sous-jacent.

Schoutens et al., (2004) montrent que ϕ s'écrit sous la forme :

$$\phi_{Bates} = e^{A+B+C+D} \quad (3.15)$$

Où

$$A = iux_0 + iu r \tau$$

$$x_0 = \ln(S_0)$$

$$B = \frac{\theta \kappa}{\sigma^2} \left((\kappa - \rho \sigma iu - d)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{-d\tau}}{1 - g} \right) \right)$$

$$C = \frac{V_0}{\sigma^2} (\kappa - \rho \sigma iu - d)(1 - e^{-d\tau})$$

$$1 - ge^{-d\tau}$$

$$D = -\lambda \bar{j} iu \tau + \lambda \tau \left((1 + \bar{j})^{iu} e^{\frac{1}{2} \delta^2 iu(iu-1)} - 1 \right)$$

$$d = \sqrt{(\rho \sigma iu - \kappa)^2 + \sigma^2(iu + u^2)}$$

$$g = \frac{\kappa - \rho \sigma iu - d}{\kappa - \rho \sigma iu + d}$$

III. L'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT) :

Pour évaluer les options européennes avec le modèle de Heston (1993), la méthode FFT a été introduite par Carr & Madan (1999). L'idée de base de la méthode consiste à développer l'expression de la transformée de Fourier du prix de l'option pour avoir le prix par inversion.

Définition (transformée de Fourier) :

La transformée de Fourier ($F\{.\}$) et l'inverse de la transformée de Fourier ($F^{-1}\{.\}$) de la fonction intégrable $f(x)$, sont :

$$F\{f(x)\} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi x} f(x) dx = F(\phi)$$

$$F^{-1}\{f(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int e^{-i\phi x} F(\phi) d\phi = f(x)$$

$f(x)$ représente la fonction de densité sous la probabilité risque neutre des rendements et $F(\phi)$ est appelée fonction caractéristique de $f(x)$.

L'algorithme FFT est une méthode numérique efficace pour calculer des sommes sous la forme suivante :

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j) \quad (3.16)$$

Cette équation est une approximation discrète de la transformée de Fourier.

Soit $x_t = \ln(S_t)$ et $k = \ln(K)$, où K est le prix d'exercice de l'option. La valeur d'un call européen, avec une maturité T , en fonction de k est :

$$C_T(k) = e^{-rT} \int_k^{\infty} (e^{x_T} - e^k) f_T(x_T) dx_T \quad (3.17)$$

où $f_T(\cdot)$ est la fonction de densité risque-neutre.

Comme $C_T(k)$ n'est pas de carré intégrable, Carr & Madan (1999) ont défini le call modifié $c_T(k)$ tel que :

$$c_T(k) = e^{\alpha k} C_T(k), \quad \alpha > 0. \quad (3.18)$$

Carr et Madan (1999) considèrent que $c_T(k)$ est doublement intégrable pour des valeurs positives de α (facteur d'amortissement). La transformée de Fourier et l'inversion de la transformée de Fourier de $c_T(k)$ sont :

$$F_{c_T}(\phi) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\phi k} c_T(k) dk \quad (3.19)$$

$$c_T(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi k} F_{c_T}(\phi) d\phi \quad (3.20)$$

En remplaçant (3.20) dans (3.18), nous retrouvons la forme de $C_T(k)$:

$$\begin{aligned} C_T(k) &= e^{-\alpha k} c_T(k) \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\phi k} F_{c_T}(\phi) d\phi \\ &= \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\phi k} F_{c_T}(\phi) d\phi \end{aligned} \quad (3.21)$$

En remplaçant (3.17) et (3.18) dans (3.19) $F_{c_T}(\phi)$ devient comme suit :

$$\begin{aligned} F_{c_T}(\phi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\phi k} \int_k^{\infty} e^{\alpha k} e^{-rT} (e^{x_T} - e^k) f_T(x_T) dx_T dk \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-rT} f_T(x_T) \int_{-\infty}^{x_T} (e^{x_T + \alpha k} - e^{(\alpha+1)k}) e^{i\phi k} dk dx_T \\ &= \frac{e^{-rT}}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+1+i\phi)x_T} f_T(x_T) dx_T \\ &= \frac{e^{-rT} F_{C_T}(\phi - (\alpha+1)i)}{\alpha^2 + \alpha - \phi^2 + i(2\alpha + 1)\phi} \end{aligned}$$

où $F_{C_T}(\phi)$ est la fonction caractéristique de x_T , sous la probabilité risque neutre, donné par (Hong 2004) :

$$F_{C_T}(\phi) = e^{A(\phi) + B(\phi) + C(\phi)}$$

$$A(\phi) = i\phi(x_0 + rT)$$

$$B(\phi) = \frac{\mathfrak{W}(\phi)(1 - e^{-\Psi(\phi)T})V_0}{2\Psi(\phi) - (\Psi(\phi) - \Gamma(\phi))(1 - e^{-\Psi(\phi)T})}$$

$$C(\phi) = -\frac{\kappa\theta}{\sigma^2} \left[2 \log \left(\frac{2\Psi(\phi) - (\Psi(\phi) - \Gamma(\phi))(1 - e^{-\Psi(\phi)T})}{2\Psi(\phi)} \right) + (\Psi(\phi) - \Gamma(\phi))T \right]$$

$$\omega(\phi) = -\frac{1}{2}(\phi^2 + i\phi)$$

$$\Psi(\phi) = \sqrt{\Gamma(\phi)^2 - 2\alpha\omega(\phi)}$$

$$\Gamma(\phi) = \kappa - \rho\sigma\phi i$$

Sachant que $C_T(k)$ s'écrit sous la forme :

$$C_T(k) = \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-i\phi k} F_{c_T}(\phi) d\phi$$

Et que l'algorithme FFT calcule les sommes de la forme :

$$w(k) = \sum_{j=1}^N e^{-i\frac{2\pi}{N}(j-1)(k-1)} x(j), \quad k = 1, \dots, N. \quad (3.22)$$

où N désigne typiquement une puissance de 2. De point de vue complexité algorithmique, la FFT permet de passer de N^2 opérations à $Mn(N)$ opérations.

Carr & Madan approximent $C_T(k)$ en utilisant la méthode des trapèzes relative à l'intégration, et en posant $\phi_j = \eta(j-1)$ par :

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j k} F_{c_T}(\phi_j) \eta \quad (3.23)$$

On sait que l'algorithme FFT va renvoyer N valeurs pour k : pour obtenir une maille régulière de k , il faut définir λ tel que :

$$k_u = -b + \lambda(u-1), \quad u = 1, \dots, N \quad (3.24)$$

ceci nous donne des logarithme des prix d'exercice k de $-b$ à b , où

$$b = \frac{N\lambda}{2}$$

En injectant 3.24 dans 3.23, il vient :

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\phi_j[-b+\lambda(u-1)]} F_{c_T}(\phi_j) \eta, \quad u = 1, \dots, N. \quad (3.25)$$

Comme $\phi_j = \eta(j-1)$, (3.25) peut s'écrire :

$$C_T(k) \approx \frac{e^{-\alpha k}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i\lambda\eta(j-1)(u-1)} e^{ib\phi_j} F_{c_T}(\phi_j) \eta \quad (3.26)$$

Pour appliquer la FFT, c'est-à-dire la formule (3.22), il convient de prendre :

$$\lambda = \frac{2\pi}{\eta N} = \frac{2b}{N}$$

Il faut noter que le choix de la valeur η n'est jamais optimal, car, il est vrai qu'une faible valeur de η permet d'obtenir une subdivision fine de l'intervalle d'intégration et par conséquent une approximation d'autant meilleure, mais d'un autre coté, elle conduit à des

primes de calls de prix d'exercice e^k trop espacés. Pour remédier à cela, il est possible de pondérer les éléments de la sommation au sens de la règle de Simpson, on obtient ainsi :

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N}(j-1)(u-1)} \underbrace{e^{ib\phi_j} F_{c_T}(\phi_j) \frac{\eta}{3} [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}]}_{\{(x(j) \text{ dans (3.22)}\}} \quad (3.27)$$

où

δ_n l'indice de Kronecker défini par :

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La formule (3.27) est une FFT prête à être implémentée.

IV. Évaluation par la simulation de Monte Carlo :

Le calcul du prix d'une option revient à la solution d'une équation différentielle qui peut être représentée par une espérance mathématique ou autrement dit une intégrale. Et c'est justement l'un des principaux objectifs de la simulation de Monte Carlo que d'estimer une intégrale. On comprend dès lors le lien très étroit qui existe entre les prix des produits dérivés et la simulation de Monte Carlo. Nous utiliserons cette technique afin d'estimer la valeur de $E[e^{-rT}(S(T) - K)]$ et par la suite obtenir la valeur du call européen. Dans cette formule, le taux sans risque r le prix d'exercice K et la maturité de l'option T sont des variables connues.

Les méthodes de Monte Carlo sont basées sur la loi des grands nombres : lorsqu'on veut approcher l'espérance d'une variable, $E[Y]$, on simule un grand nombre de variables aléatoires indépendantes et de même loi, $(Y_n)_{n \geq 1}$ de même loi que Y , on

prend ensuite la moyenne des valeurs prises, $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N Y_n$, et on obtient une approximation de $E[Y]$.

Pour mieux cerner la résolution des équations différentielles stochastiques par les méthodes de Monte Carlo, nous avons besoin de faire un rappel du schéma d'Euler de discrétisation numérique des équations différentielles stochastiques.

IV.1 Le schéma d'Euler :

La simulation Monte Carlo a la particularité d'être simple à utiliser dans l'évaluation des produits dérivés. Cette méthode consiste à générer de nombreuses trajectoires possibles de l'actif sous-jacent, calculer les valeurs terminales du produit dérivé pour chaque trajectoire, prendre leur moyenne et l'actualiser. Ainsi, la simulation Monte Carlo, consiste à générer une trajectoire de l'actif sous-jacent dans le monde risque neutre, ensuite calculer à partir de cette trajectoire la valeur du produit dérivé, répéter ces étapes un certain nombre de fois, et enfin calculer la moyenne du produit dérivé et l'actualiser.

La simulation d'un processus d'Itô pourra être effectuée directement (sans erreur de discrétisation) dès lors que celui-ci admet une discrétisation exacte. Un processus X admet une discrétisation exacte dès lors que l'on peut résoudre

explicitement l'équation différentielle stochastique (EDS) qui lui est associée. C'est notamment le cas du mouvement Brownien géométrique retenu par Black & Scholes (1973) pour modéliser le cours d'une action ou encore celui du processus racine carré retenu pour la modélisation de la volatilité. Lorsque la discrétisation exacte n'existe pas, il convient de se tourner vers des approximations discrètes du processus du sous-jacent, en temps continu. Le schéma d'Euler est le procédé de discrétisation le plus répandu. C'est un développement d'Itô-Taylor d'ordre 1.

Dans notre cas, le procédé de discrétisation d'Euler consiste en l'approximation du système d'équations stochastiques du modèle SV :

$$dS_t = rS_t dt + \sqrt{V_t} S_t dW_t^1 \quad (3.28)$$

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t) dt + \sigma \sqrt{V_t} dW_t^2 \quad (3.29)$$

Où $S(t)$ et $V(t)$ sont respectivement, le cours et la variance de l'actif support à la date t . Le paramètre r représente le taux d'intérêt sans risque, κ est la vitesse du retour vers la moyenne de la variance, θ est le niveau moyen à long terme de la variance et σ est la volatilité du processus de la variance. W_t^1 et W_t^2 sont deux mouvements browniens corrélés.

Notre objectif est l'évaluation du call européen d'échéance T . Bien entendu, il est nécessaire pour cela de discrétiser l'équation différentielle stochastique : on note $N \in \mathbb{N}^*$ le nombre de pas de temps, $\Delta t = T/N$ le pas de discrétisation et pour $k \in \{1, \dots, N\}$, $t_k = k\Delta t$ le $k^{\text{ième}}$ instant de discrétisations.

Afin de simuler S_t et V_t aux dates $t = t_1, \dots, t_N$, nous procédons à une « discrétisation » des équations (3.28) et (3.29) qui conduit à :

$$S_t = S_{t-1} + r S_{t-1} \Delta t + \sqrt{V_{t-1}} S_{t-1} \sqrt{\Delta t} Z_t^1 \quad (3.30)$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) \Delta t + \sigma \sqrt{V_{t-1}} \sqrt{\Delta t} Z_t^2 \quad (3.31)$$

Où Z^1 et Z^2 sont deux variables normales, centrées, réduites et de corrélation ρ . Le problème de ce schéma est que le processus de discrétisation de la variance V peut devenir négatif ce qui implique l'impossibilité de déterminer les valeurs de \sqrt{V} . Pour remédier à ce problème, nous prenons $|V|$.

Cette procédure est répétée autant de fois qu'il est jugé nécessaire d'obtenir des trajectoires différentes : S_1, S_2, \dots, S_M , où M est le nombre de trajectoires simulées.

Ces simulations de Monte Carlo permettent d'avoir la prime du Call européen de prix d'exercice K et d'échéance T , en actualisant au taux d'intérêt r comme la moyenne empirique du payoff :

$$C = e^{-rT} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i(T) - K \right] \quad (3.32)$$

CHAPITRE 4

ÉVALUATION DES OPTIONS EUROPÉENNES EN PRÉSENCE D'UNE VOLATILITE STOCHASTIQUE ET D'UNE COMPOSANTE DE SAUT

I. Introduction :

La volatilité joue un rôle déterminant dans l'évaluation précise et dans la couverture des options sur actifs puisque celle-ci mesure les variations de prix de l'actif qui sont elles mêmes considérées comme l'expression du risque de marché. En effet, la volatilité mesure le risque de marché associé à l'actif considéré dans la mesure où elle renseigne sur l'amplitude des gains que le porteur du titre ou le vendeur à découvert peut espérer recevoir. En particulier, un actif pourvu d'une volatilité élevée a une probabilité élevée de voir son prix dépasser temporairement un certain seuil. Par ailleurs, la volatilité est telle qu'un acheteur d'option rationnel accepte de payer son option d'autant plus cher qu'elle lui donne un espoir de gain plus élevé ou qu'elle le protège d'une perte plus grande. C'est ainsi que les modèles d'évaluation d'options proposés dans la littérature ouvrent dans cette optique pour l'amélioration des techniques d'évaluation.

Comme les premières modélisations se fondent sur un paramètre de volatilité constant, et par souci de mieux prendre en compte la réalité et de mieux appréhender l'incertitude inhérente au marché financier, nous essayerons de voir si le fait de permettre à la volatilité d'évoluer au cours du temps ou encore le fait d'introduire une composante de saut dans le processus de prix de l'actif sous-jacent va améliorer la qualité de l'évaluation.

Dans la première section de ce chapitre nous étudierons l'influence des paramètres du modèle SV sur les primes de Calls européens, nous verrons aussi de quelle façon ces mêmes paramètres peuvent modifier la forme du smile généré par le modèle SV.

La seconde section est consacrée à l'élaboration des codes pour l'évaluation d'un Call européen et ceci par trois méthodes différentes à savoir la méthode de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier transform), la méthode de la fonction caractéristique et enfin la méthode de Monte Carlo (MC). Nous utiliserons le modèle SV pour notre étude comparative des trois méthodes d'évaluation.

La dernière section sera réservée au pricing des Calls européens avec les modèles B&S, SV et SVJ, nous comparerons les résultats obtenus avec des données de marchés financiers.

II. Influence des paramètres du modèle à volatilité stochastique sur les primes des Calls :

Les modèles SV font intervenir un processus stochastique pour la volatilité qui est bien distinct de celui du cours de l'actif sous-jacent, il s'agit alors dans cette partie, à travers une comparaison avec le modèle à volatilité constante de Black & Scholes, d'étudier l'influence des divers paramètres (notamment κ : la vitesse de retour à la

moyenne, σ : la volatilité de la variance et ρ : la corrélation entre les chocs de variance et les rendements du cours de l'actif sous jacent) sur les primes de calls européens.

Avant d'entamer notre analyse sur la sensibilité des prix d'options européennes due à la variation des paramètres du modèle à volatilité stochastique SV, il est nécessaire de rappeler la formulation de ce dernier :

$$(SV) \begin{cases} dS_t = \mu S_t dt + \sqrt{V_t} S_t dZ_t^s & (4.1) \\ dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dZ_t^v & (4.2) \\ dZ_t^s dZ_t^v = \rho dt \end{cases}$$

où

μ est l'espérance des rendements de l'actif sous jacent,
 κ est la vitesse de retour au niveau moyen,
 θ est le niveau moyen à long terme de la variance
 σ est la volatilité de la variance,
 ρ est le coefficient de corrélation entre le prix et la variance de l'actif sous-jacent.
 Z^s et Z^v sont deux mouvements browniens corrélés.

Dans ce contexte, les questions qui nous viennent en esprit sont :

- quel est l'impact des paramètres κ , σ et ρ sur les primes des *Calls*?
- la variabilité de la maturité a-t-elle un quelconque effet sur cette influence?
- quel est l'impact de la maturité sur les primes des *Calls*?

Nous essayerons de répondre à ces questions par voie numérique, pour ce faire, nous avons établi des codes écrits sous MATLAB permettant de générer des courbes et des surfaces représentant la différence des primes de *Calls* européens de deux modèles, le premier est à volatilité stochastique (SV) et le deuxième est à volatilité constante de Black & Scholes (BS).

II.1 Influence de la vitesse de retour à la moyenne κ sur les calls :

En se basant sur l'allure de la courbe donnée par le graphique 4.1 il en ressort les observations suivantes :

- les deux modèles SV et BS convergent en primes lorsque les *Calls* sont très en dehors ($M < 0,55$) ou très en dedans de la monnaie ($M > 1,8$), c'est-à-dire que ces primes ont la même valeur quelle que soit la modélisation utilisée.
- les *Calls* en dehors de la monnaie et à la monnaie $0,55 \leq M \leq 1,05$ sont sous-évalués par rapport au modèle BS. Cette sous-évaluation est fonction décroissante du paramètre κ .
- les *Calls* en dedans de la monnaie $1,05 < M \leq 1,8$ sont surévalués par rapport au modèle BS, cette surévaluation est fonction décroissante du paramètre κ .

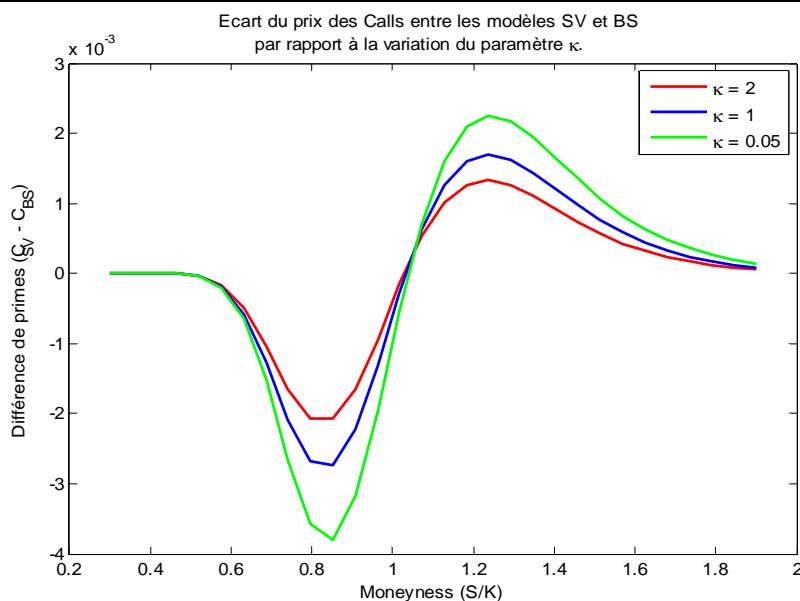


Figure 4.1 : différence de primes des *Calls* entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de κ .

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$ $\kappa = \{0.05, 1, 2\}$. La volatilité dans le modèle de BS est égale à 0.2.

La figure 4.1 correspond au plan de coupe $T = 1$ dans les figures suivantes :

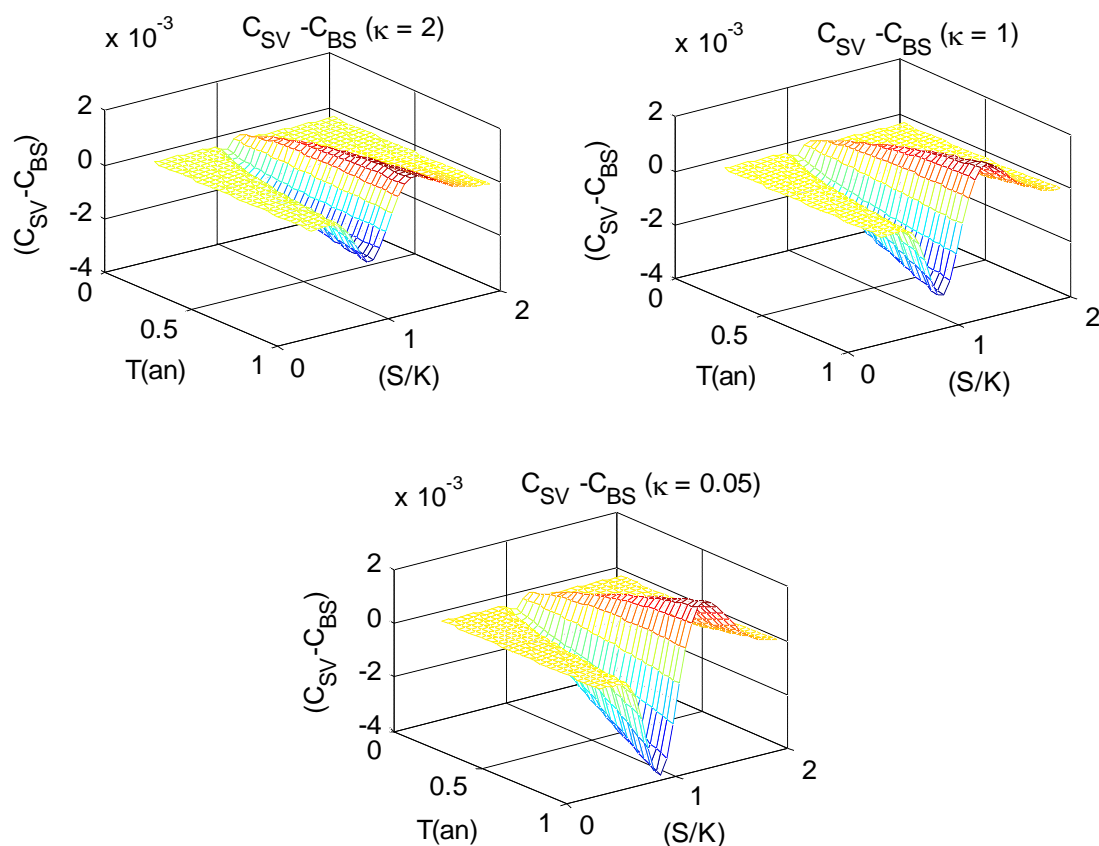


Figure 4.2 : différence de primes de *Calls* entre les modèles SV et BS en fonction de la moneyness et de la maturité pour $\kappa = 2, 1$ et 0,05.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = [1/12, 1]$, $S_0 = 1$ $\kappa = \{0.05, 1, 2\}$. La volatilité dans le modèle de BS est égale à 0.2.

Les surfaces illustrées dans la figure 4.2 permettent de capter l'évolution de l'influence de la vitesse de retour de la variance à son niveau moyen dans le temps :

- Toutes les observations précédentes sont d'autant plus vérifiées que la maturité est grande et l'influence du paramètre κ est d'autant plus significative que la maturité est plus élevée.
- L'écart entre les primes des Calls évaluées par le modèle SV et le modèle BS semble s'accroître de façon non linéaire avec la maturité.

Nous pouvons conclure donc que plus la valeur de la vitesse de retour à la moyenne du processus de la variance augmente, moins est l'écart entre les primes des Calls évaluées par le modèle SV et celles évaluées par le modèle BS, cette constatation concerne toutes les options d'achat à l'exception de celles qui sont très en dedans ou très en dehors de la monnaie car elles ne sont pas influencées par une variation de σ ou le sont "très faiblement", c'est le cas aussi des options ayant une courte maturité. (SV é BS).

II.2 Influence de la volatilité de la variance σ sur les calls :

La méthodologie précédente est répétée pour étudier l'impact de la volatilité de la variance. On trace pour plusieurs valeurs de σ , la courbe représentant la différence des primes $C_{SV} - C_{BS}$ des Calls entre les modèles SV et BS en fonction de la Moneyness S/K .

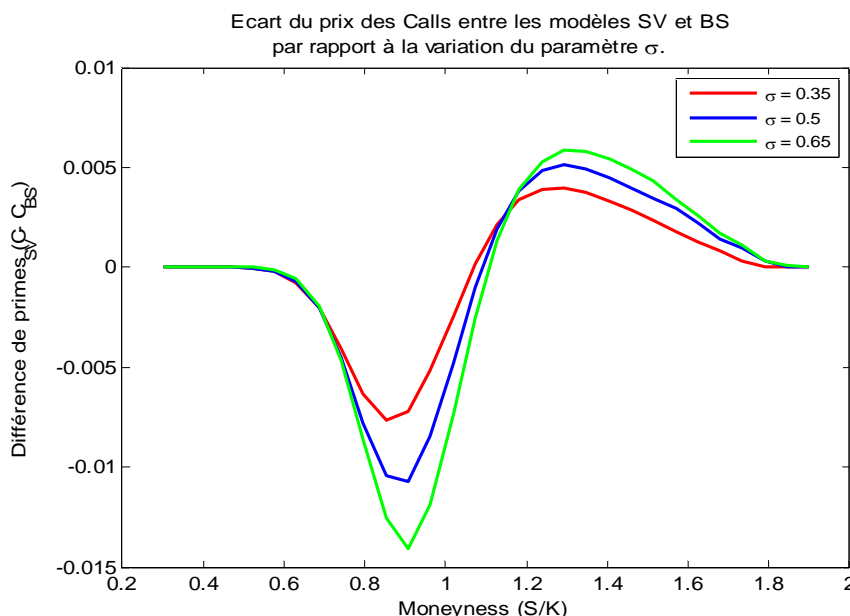


Figure 4.3 : différence de primes des *Calls* entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de σ .

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\kappa = 2$, $\sigma = \{0.35, 0.5, 0.65\}$. La volatilité dans le modèle de BS est égale à 0.2.

À partir du graphique 4.3, plusieurs observations peuvent être faites :

- les *Calls* très en dehors de la monnaie ($M \leq 0,55$) ou très en dedans de la monnaie ($M \geq 1,85$) convergent en primes c'est-à-dire que quelle que soit la modèle utilisé, la variation de la volatilité de la variance σ n'a aucun effet sur les prix des *Calls* puisque la différence $C_{SV} - C_{BS}$ est nulle.
- les *Calls* en dehors de la monnaie et à la monnaie $0,55 < M < 1,1$ sont sous-évalués avec le modèle SV par rapport au modèle BS.
- les *Calls* en dedans de la monnaie $1,1 \leq M < 1,85$ sont surévalués avec le modèle SV par rapport à leurs valeurs avec le modèle BS.
- l'écart des prix entre les deux modèles SV et BS pour tous les *Calls* excepté ceux qui sont très en dehors ou très en dedans de la monnaie est une fonction croissante de la volatilité de la variance σ . Cet écart est le plus élevé lorsque les *Calls* sont proches de la monnaie ($M = 0,9$).

Les courbes bleu et rouge représentées dans la figure 4.3 correspondent à l'intersection entre le plan $T = 1$ an et les surfaces décrites par la figure 4.4 pour les valeurs $\sigma = 0,35$ et $\sigma = 0,5$. En effet, en traçant la différence des primes des *Calls* entre les modèles SV et BS ($C_{SV} - C_{BS}$) en fonction de la Moneyness S/K et de la maturité, on obtient :

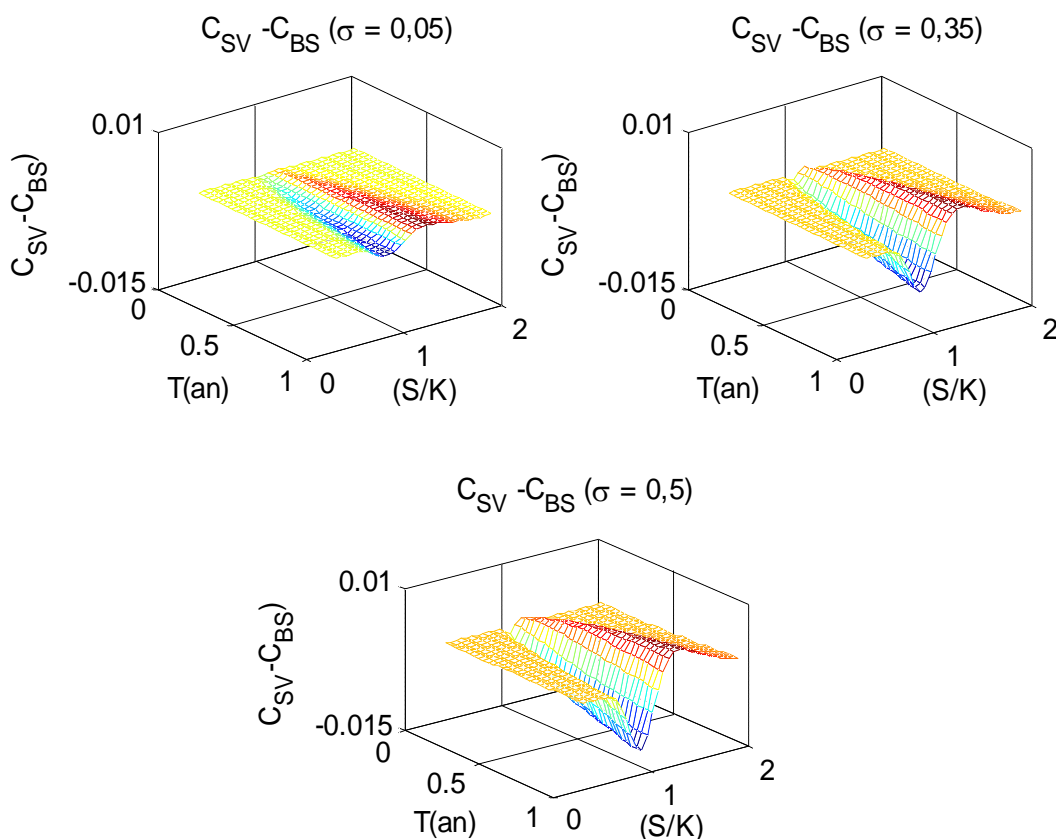


Figure 4.4 : différences de primes de *Calls* entre les modèles SV et BS en fonction de la Moneyness et de la maturité pour $\sigma = 0.05$, 0.35 et 0.5 .

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $S_0 = 1$, $T = [1/12, 1]$, $\kappa = 2$ et $\sigma = \{ 0.05, 0.35, 0.5 \}$. La volatilité dans le modèle de BS est égale à 0.2 .

À partir de ces surfaces nous pouvons conclure que :

- l'effet de la volatilité de la variance σ sur les *Calls* est d'autant plus significatif que la maturité est grande, lorsque celle-ci tend vers zéro, l'écart des primes $C_{SV} - C_{BS}$ tend à s'estomper et lorsqu'elle augmente, l'écart augmente.
- pour la première surface où $\sigma = 0.05$, que le *Call* soit en dehors, proche ou dans la monnaie l'écart est nul ou l'est presque. De ce fait, nous déduisons que lorsque la volatilité du processus de la variance tend vers 0, cette variance stochastique tend à devenir déterministe et les rendements du cours de l'actif sous jacent tendent à décrire une distribution log-normale.

II.3 Influence de la corrélation entre le cours du sous jacent et sa variance sur les calls :

Le coefficient de corrélation entre le cours de l'actif sous jacent et sa volatilité affecte de façon significative l'asymétrie de la distribution des rendements. Ainsi, une corrélation négative (positive) crée une queue de distribution plus épaisse à gauche (à droite) et une queue plus mince à droite (à gauche) que dans le cas d'une distribution gaussienne.

Le graphique 4.5 montre l'allure de la différence de primes $C_{SV} - C_{BS}$ des modèles SV et BS pour $\rho = 0,5$ et $\rho = -0,5$.

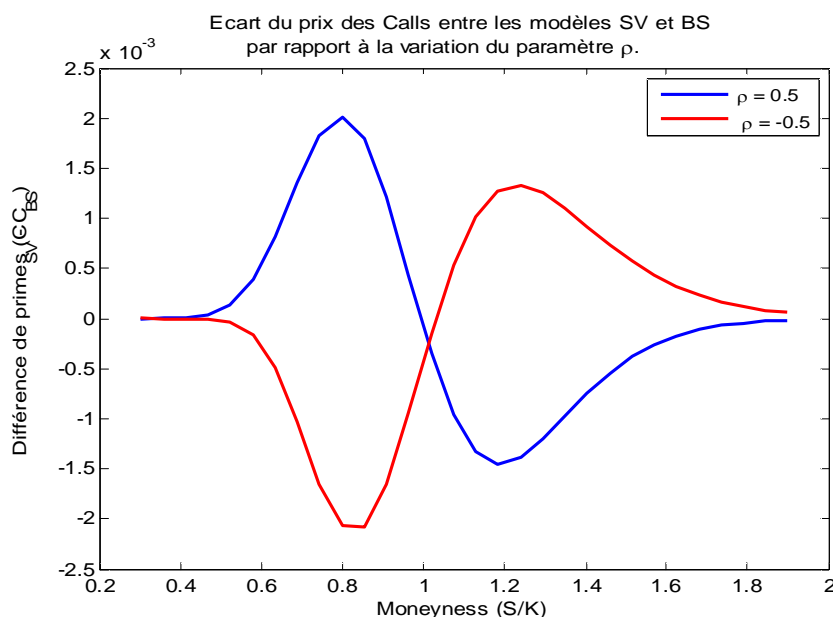


Figure 4.5 : différence de primes des *Calls* entre les modèles SV et BS par rapport à la variation de ρ .

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $\theta = 0.04$, $\sigma = 0.1$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\rho = \{-0.5, 0.5\}$. La volatilité dans le modèle de BS est égale à 0.2.

Nous pouvons constater qu'une corrélation négative dans le modèle SV a pour effet de diminuer (augmenter) les primes de *Calls* en dehors de la monnaie (dans la monnaie) et inversement pour une corrélation positive.

Tout au long de cette étude, nous avons démontré que les paramètres du processus stochastique de la variance (κ , σ et ρ) ont une grande influence sur l'évaluation des options européennes. Dans la prochaine section, nous nous consacrerons à l'extraction de la surface de la volatilité implicite du modèle et à l'effet *smile* du modèle SV.

III. Extraction et signification de la surface de volatilité implicite :

La volatilité est concrètement définie comme la quantité de variabilité dans le rendement d'un actif particulier. La volatilité réalisée, également appelée la volatilité historique, correspond au mouvement effectivement expérimenté par le marché. Nous savons que le modèle de Black-Scholes fournit une formule très pratique pour calculer les prix d'options européennes. La volatilité implicite est la volatilité obtenue à partir des prix des options du marché en inversant la formule de Black-Scholes. Si le marché était en accord avec les hypothèses du modèle de Black-Scholes, alors la volatilité implicite serait la même pour toutes les options. En pratique, ce n'est pas le cas, puisque visiblement la volatilité implicite varie aussi bien avec la maturité qu'avec le prix d'exercice : cette surface est couramment nommée le *smile* de volatilité. Ce *smile* de volatilité est apparu la première fois durant le crash d'Octobre 1987, qui montra qu'un grand marché pouvait baisser de 20% en une seule journée. Il vient du fait que les événements de probabilité faible ont lieu en fait plus souvent que prévu, et que la distribution de probabilité du marché n'est en fait pas log-normale : les rendements effectifs apparaissent plus leptokurtiques que ce qui est assumé par une distribution log-normale.

Le *smile* représente donc la volatilité qui découle de la formule de Black & Scholes lorsqu'on connaît le prix de l'option :

$$\sigma = f(S, K, T, r, C_{\text{observé}}) \quad (4.3)$$

Le *smile* de volatilité peut être construit en utilisant du "smile", et du "skew". Le terme "smile" est utilisé quand on parle de structures de volatilité qui ont une valeur minimum autour du prix d'exercice égale au cours de l'actif sous-jacent. Dans le cas du terme "skew" (ou asymétrie), il s'agit par exemple de structures dont les volatilités implicites correspondant à des prix d'exercice petits sont plus élevées que les volatilités implicites correspondant à des prix d'exercice élevés.

III.1 Influence des paramètres du modèle SV sur le comportement de la volatilité implicite :

Nous nous intéressons ici à l'influence des paramètres du modèle SV sur la forme du *smile*. Nous allons ainsi faire varier un paramètre du modèle, les autres étant constants et regarder l'effet de cette variation sur le *smile* de volatilité. Pour ce faire, des codes écrits sous Matlab sont établis à cet effet.

III.1.1 Effet de la volatilité de la variance σ :

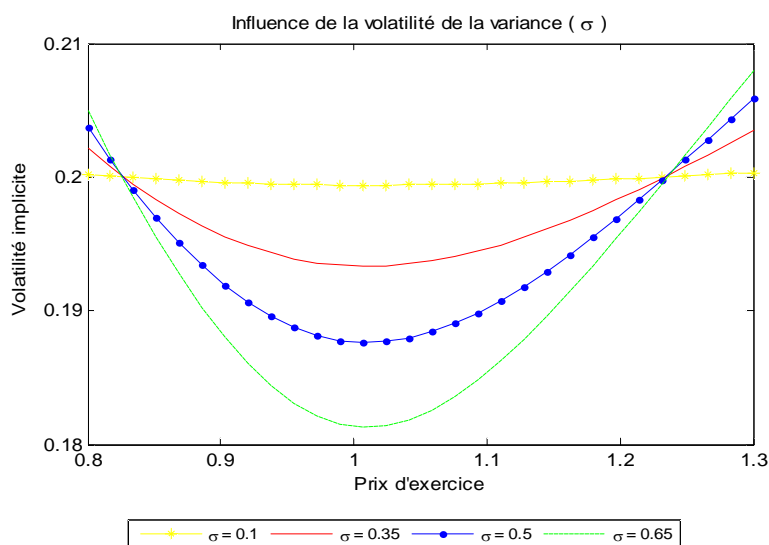


Figure 4.6 : Influence de la volatilité de la variance sur la forme du smile

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\kappa = 2$, $\sigma = \{0.1, 0.35, 0.5, 0.65\}$.

Nous remarquons d'après le graphique 4.6 que la courbe est presque plate pour $\sigma = 0.1$, le smiling n'existe presque pas et la volatilité implicite s'approche de la forme d'une droite horizontale. D'ailleurs, plus la valeur de σ augmente plus la convexité de la courbe augmente. Nous pouvons donc conclure qu'augmenter la volatilité de la variance à pour effet d'augmenter la convexité du smile, intuitivement, augmenter σ revient à augmenter la variance du processus de la variance augmentant ainsi la variance de l'actif sous jacent. Ceci donne plus de probabilité à des mouvements extrêmes, ce qui augmente le prix des options très en dehors ou très en dedans de la monnaie. La volatilité implicite est donc plus élevée, ceci à pour effet de créer plus de convexité dans le smile.

III.1.2 Effet de la vitesse de retour à la moyenne κ :

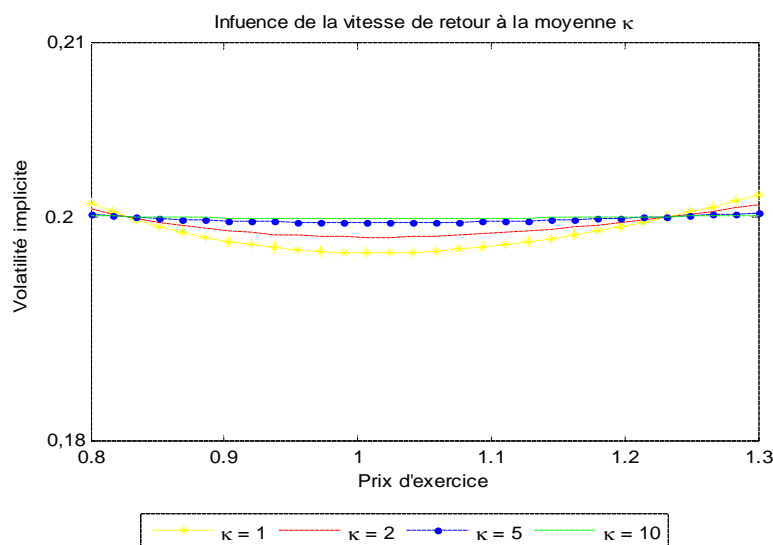


Figure 4.7 : Influence de la vitesse de retour à la moyenne κ sur la forme du smile.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\theta = 0.04$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0.1$, $\kappa = \{1, 2, 5, 10\}$.

Augmenter la vitesse de retour à la moyenne revient à concentrer plus fortement la variance autour de sa moyenne de long terme et donc à diminuer la variance du processus de variance. Intuitivement diminuer doit donc augmenter la convexité du smile. Il est à noter que et agissent en sens opposé sur la convexité. Et comme le montre la figure suivante que même sur des fourchettes de valeurs de la volatilité implicite égales, l'effet de la variation de sur la convexité du smile est beaucoup bien moindre que l'effet de la variation de .

III.1.3 Effet de la variance à long terme θ :

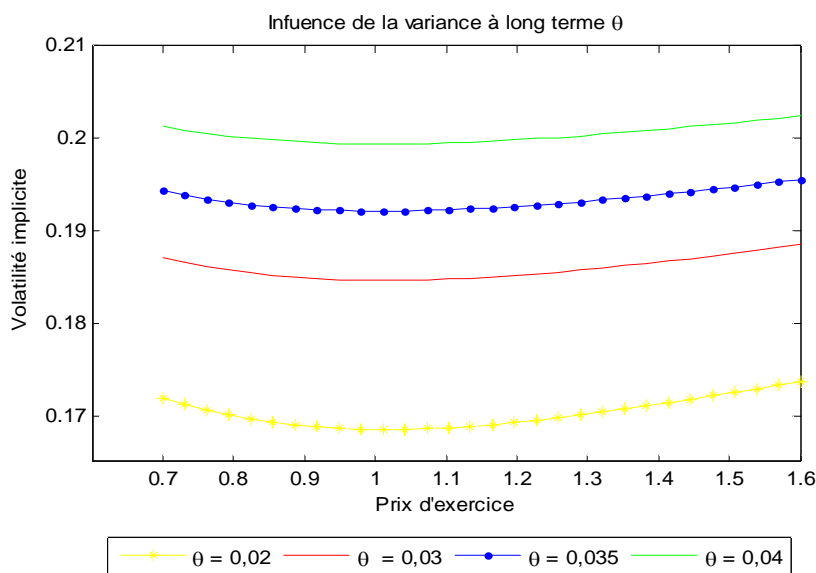


Figure 4.8 : Influence de la variance à long terme (θ) sur le smile.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $\rho = -0.5$, $V_0 = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0.1$, $\theta = \{0.02, 0.03, 0.035, 0.04\}$.

D'après le graphique 4.8, nous observons un léger effet de convexité et nous constatons que la variation de la variance de long terme n'agit pas sur la forme du smile mais par contre, définit un nouveau niveau de volatilité implicite pour chaque valeur du paramètre et que plus ce dernier augmente plus le niveau de la volatilité implicite augmente.

III.1.4 Effet de la variance initiale V_0 :

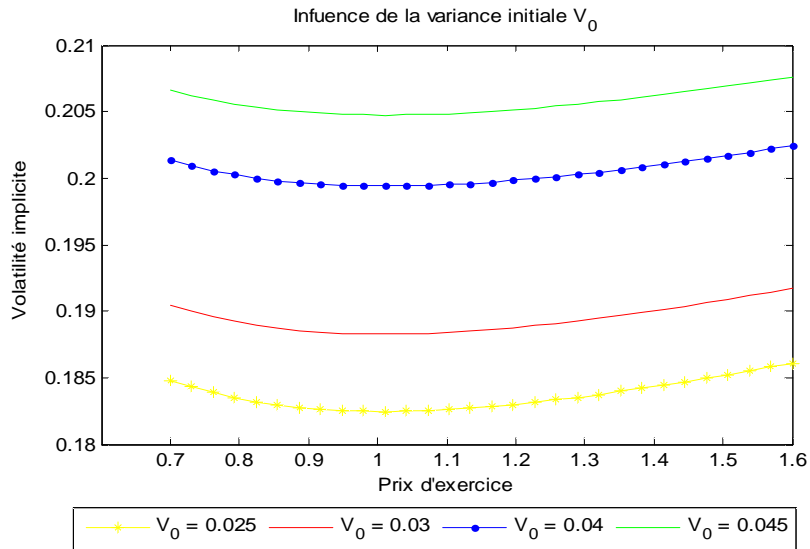


Figure 4.9 : Influence de la variance initiale sur le smile.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $\rho = -0.5$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0.1$, $V_0 = \{0.025, 0.03, 0.04, 0.045\}$.

Concernant l'impact de la variance initiale, V_0 , ce dernier a les mêmes effets sur l'allure du smile de volatilité que θ .

III.1.5 Effet de la corrélation ρ :

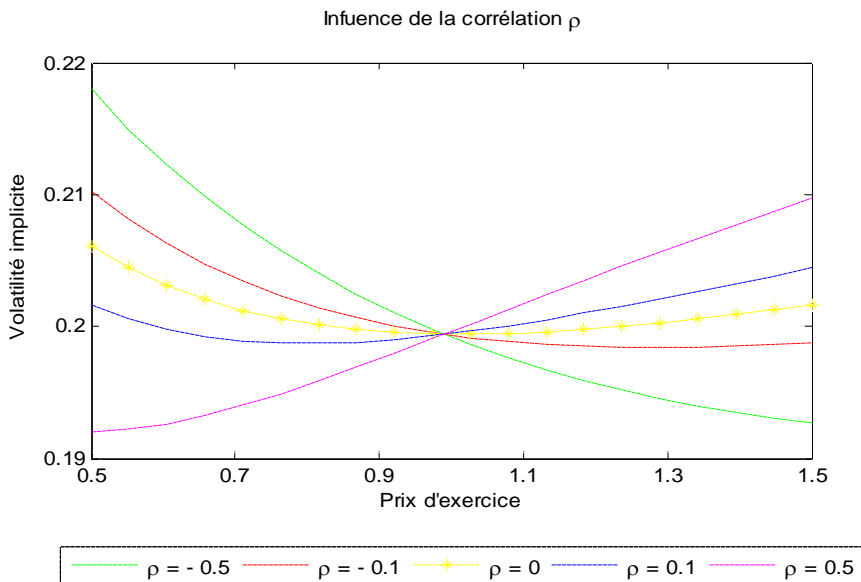


Figure 4.10 : Influence de la corrélation ρ sur l'allure du smile.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $V_0 = 0.04$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $T = 1$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0.1$, $\rho = \{-0.5, -0.1, 0, 0.1, 0.5\}$.

Enfin, pour interpréter l'influence de la corrélation, ρ , sur le smile de volatilité, le graphique 4.10 montre que pour une corrélation égale à zéro, la courbe du smile à une tangente horizontale au point d'abscisse 1, ceci explique la quasi symétrie de cette courbe centrée sur la zone des options à la monnaie. Ce n'est pas une symétrie parfaite, mais par rapport aux autres valeurs de ρ , nous remarquons que faire varier ρ revient à changer le degré d'asymétrie.

Les cinq derniers graphiques illustrent le rôle de différents paramètres du modèle de Heston pour la description du smile de volatilité implicite. On voit que les paramètres κ et θ déterminent la convexité du smile à une maturité donnée, et σ et V_0 déterminent le niveau de la volatilité implicite, tandis que ρ détermine la pente du smile de volatilité.

Nous allons maintenant voir l'effet de la maturité sur la forme du smile de volatilité.

III.2 Effet de la maturité sur la forme du smile :

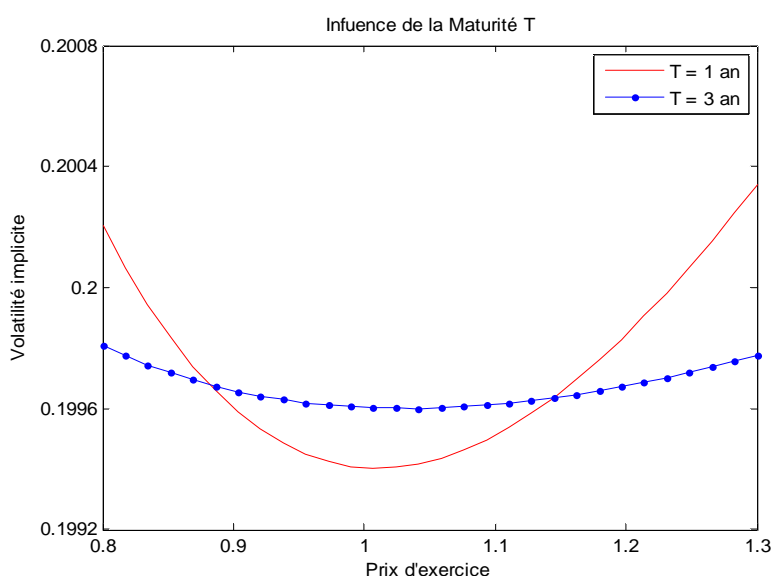


Figure 4.11 : Influence de la maturité T sur l'allure du smile.

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $V_0 = 0.04$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $\rho = -0.5$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0.1$, $T = \{1 \text{ an}, 3 \text{ an}\}$.

Nous pouvons noter que le smile de volatilité dépend bien des maturités des options car la forme du "smiling" de volatilité est plus prononcée avec les options à courte maturité. L'effet de convexité s'estompe donc avec les options à grande maturité.

III.3 La surface de volatilité :

La surface de volatilité est présentée sous la forme d'un tableau donnant les volatilités implicites en fonction du prix d'exercice et de la durée de vie des options.

Dans ce qui suit, nous nous intéresserons particulièrement au coefficient de corrélation entre les rendements et la volatilité de l'actif sous jacent. Au vu des simulations

des figures 4.12, 4.13, et 4.14, nous montrons l'effet de la corrélation en fonction du prix d'exercice et de la maturité sur la forme de la surface de volatilité.

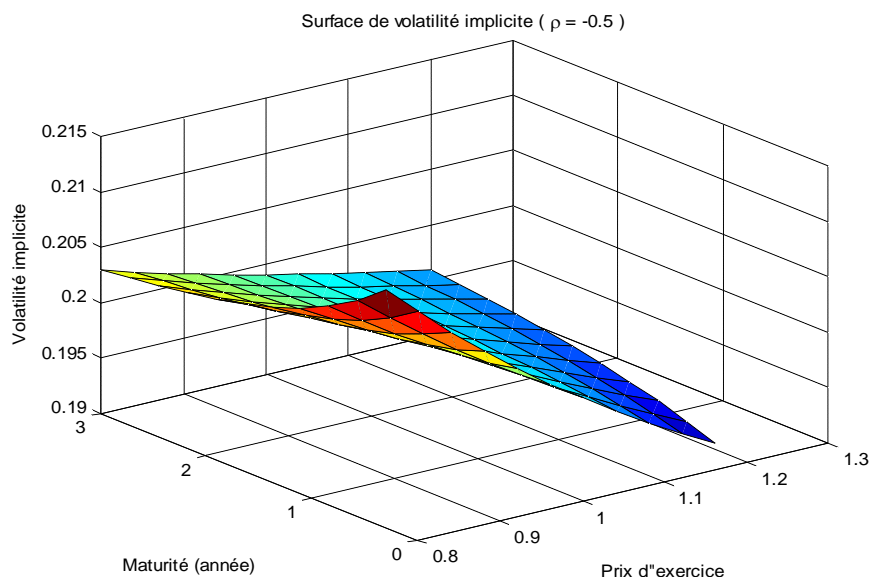


Figure 4.12 : surface de volatilité implicite ($\rho = -0,5$)

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $V_0 = 0.04$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $\rho = -0.5$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0,1$.

Le coefficient de corrélation entre le prix et la volatilité de l'actif sous jacent joue un rôle primordial dans l'explication du phénomène du smile. En effet, une corrélation négative reflète une queue à gauche épaisse de la courbe de distribution de la probabilité, ceci est de nature à réduire le prix des options en dehors de la monnaie et à augmenter celui des options dans la monnaie par rapport aux évaluations fournies par le modèle de Black & Scholes. Nous remarquons d'après le graphique 4.12 que pour une maturité donnée, le smile est une fonction décroissante du prix d'exercice concave vers le haut.

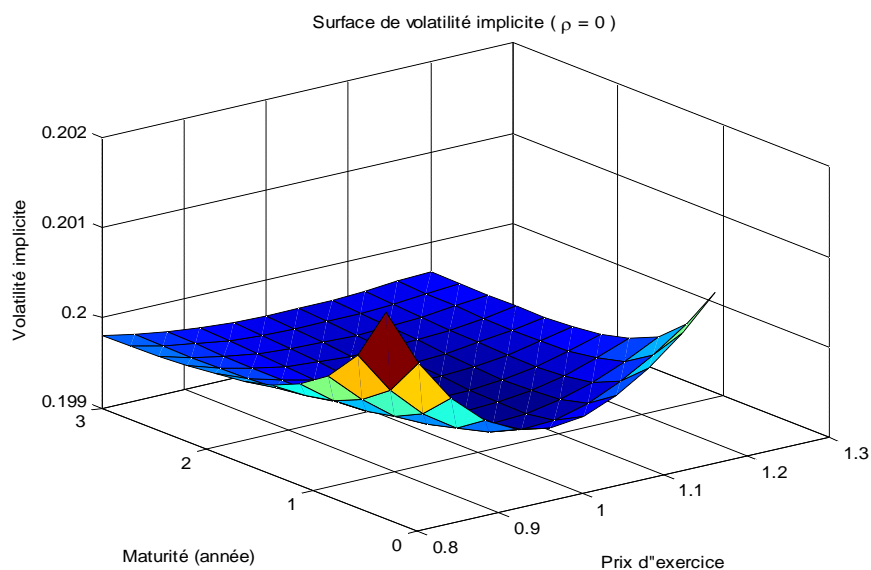


Figure 4.13 : surface de volatilité implicite ($\rho = 0$)

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $V_0 = 0.04$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $\rho = 0$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0,1$.

D'après le graphique 4.13, où la corrélation est nulle, nous avons une forme de smile bien prononcée avec une symétrie remarquée au point relatif aux calls à la monnaie.

Quant à la structure par terme de la volatilité, la fonction est décroissante par rapport à la maturité des options.

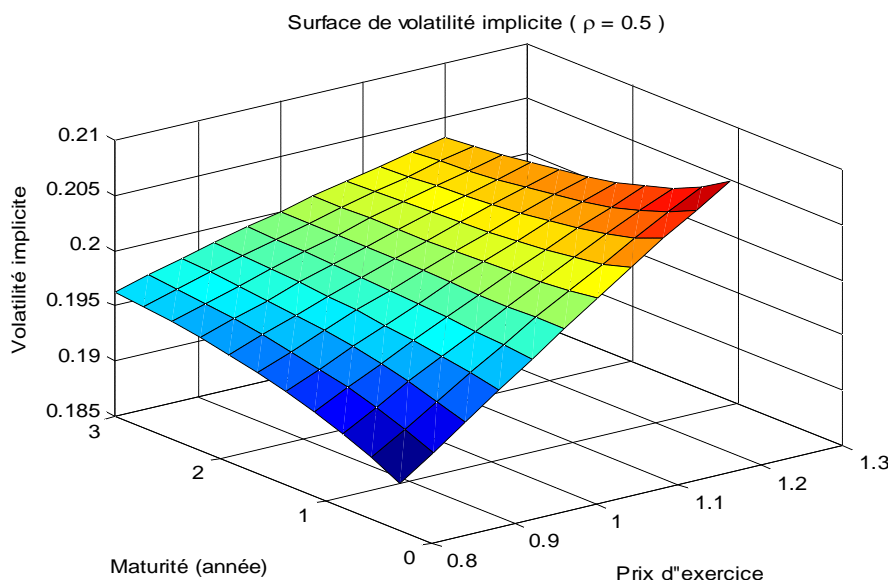


Figure 4.14 : surface de volatilité implicite ($\rho = 0,5$)

Note : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $\kappa = 2$, $V_0 = 0.04$, $\theta = 0.04$, $r = 0.01$, $\rho = 0.5$, $S_0 = 1$, $\sigma = 0,1$.

Enfin, dans le cas où ρ est positif, comme le présente le graphique 4.14, la surface de volatilité est dominée par une forme de skew quelle que soit la maturité des options. En effet, les volatilités implicites des options "dans la monnaie" sont plus élevées par rapport aux options "en dehors de la monnaie". Quant à la structure par terme de volatilité, le graphique 4.14 montre que c'est une fonction croissante de la maturité concave vers le bas des options "en dehors de la monnaie", alors qu'elle est décroissante concave vers le haut pour les options "en dedans de la monnaie".

IV. Comparaison de différentes méthodes d'évaluation d'un Call européen :

Il s'agit dans cette section de faire l'évaluation avec le modèle SV en utilisant trois méthodes différentes : à savoir la méthode des fonctions caractéristiques, la méthode FFT (Fast Fourier Transform) et la méthode de Monte Carlo (méthodes présentées dans le chapitre précédent). Nous choisirons ainsi la meilleure méthode au sens de précision et de coût pour faire l'évaluation avec les autres modèles.

IV.1 Évaluation par les fonctions caractéristiques :

Dans le but d'implémenter n'importe quel modèle, nous avons besoin d'être capable de calculer le prix de l'option qui lui est relatif. Ainsi, la formule fermée d'un Call européen donnée par le modèle SV de Heston est :

$$C^H(S_t, V_t, r, \tau, K) = S_t P_1 - K P_2 e^{-r\tau} \quad (4.4)$$

Où

$$P_j(x, V_t, r, \tau, K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re} \left(\frac{e^{-i\phi \ln(K)} f_j(x, V_t, r, \tau, \phi)}{i\phi} \right) d\phi \quad (4.5)$$

$$x = \ln(S_t)$$

$$f_j(x, V_t, r, \tau, \phi) = \exp\{C(\tau, \phi) + D(\tau, \phi)V_t + i\phi x\}$$

$$C(\tau, \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\sigma^2} \left\{ (b_j - \rho\sigma\phi i + d)\tau - 2 \ln \left[\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right] \right\},$$

$$D(\tau, \phi) = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{\sigma^2} \left[\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right]$$

$$g = \frac{b_j - \rho\sigma\phi i + d}{b_j - \rho\sigma\phi i - d}$$

$$d = \sqrt{(\rho\sigma\phi i - b_j)^2 - \sigma^2(2u_j\phi i - \phi^2)}$$

Pour $j = 1, 2$, on a :

$$u_1 = \frac{1}{2}, \quad u_2 = -\frac{1}{2}, \quad a = \kappa\theta, \quad b_1 = \kappa + \lambda - \rho\sigma, \quad b_2 = \kappa + \lambda.$$

Une telle formule peut paraître intimidante à implémenter mais en réalité, la seule difficulté est dans l'intégral de la formule (4.5) car malgré la solution exacte fournie par Heston, l'intégral de la fonction de probabilité P_j , $j = 1, 2$ ne pourrait être calculée de façon analytique, mais ceci peut être fait numériquement en utilisant une technique d'intégration numérique. Pour une lecture plus détaillée, nous renvoyons à Heath (2005, chap. 8), Trefethen (2008) et Davis et Rabinowitz (2007) qui donnent une discussion détaillée. Nous avons utilisé la quadrature de Gauss-Lobatto pour le calcul numérique de cet intégral afin d'écrire le code pour l'évaluation d'un call européen.

IV.2 Évaluation par la transformée de Fourier rapide "FFT" :

La formule de la transformée de Fourier rapide à implémenter est donné par :

$$C_T(k_u) \approx \frac{e^{-\alpha k_u}}{\pi} \sum_{j=1}^N e^{-i \frac{2\pi}{N} (j-1)(u-1)} \underbrace{e^{ib\phi_j} F_{c_T}(\phi_j) \frac{\eta}{3} [3 + (-1)^j - \delta_{j-1}]}_{\{(x(j) \text{ dans (3.22)}\}} \quad (4.6)$$

où⁽¹⁾

$$\phi_j = \eta(j-1)$$

$$\eta = \frac{c}{N}$$

$$c = 600$$

$$N = 4096$$

$$b = \frac{\pi}{\eta}$$

$$\lambda = \frac{2b}{N}$$

$$k_u = -b + \lambda(u-1) \text{ où } u = 1, 2, \dots, N+1.$$

IV.3 Évaluation par la méthode de Monte Carlo "MC" :

La prime du Call européen de prix d'exercice K et d'échéance T simulée par la méthode de Monte Carlo est donnée par la formule suivante :

$$C = e^{-rT} \left[\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M S_i(T) - K \right] \quad (4.7)$$

où $S_i(T)$ est la valeur finale de la $i^{\text{ème}}$ trajectoire simulée. Pour ce faire, nous avons besoin de discrétiser les processus du prix de l'actif sous jacent et celui de la volatilité données par équations (4.1) et (4.2), ceci conduit à :

$$S_t = S_{t-1} + r S_{t-1} \Delta t + \sqrt{V_t} S_{t-1} \sqrt{\Delta t} Z_t^1 \quad (\mu = r) \quad (4.8)$$

$$V_t = V_{t-1} + \kappa(\theta - V_{t-1}) \Delta t + \sigma \sqrt{V_t} \sqrt{\Delta t} Z_t^2 \quad (4.9)$$

Où Z^1 et Z^2 sont deux variables normales, centrées, réduites et de corrélation ρ .

IV.4 Résultats numériques : comparaison et discussion

Cette partie a pour but de présenter les différents résultats numériques obtenus par le pricing d'un Call européen avec le modèle SV à l'aide des trois méthodes citées ci-dessus.

(1) Voir Carr et Madan (1999) pour le choix des paramètres.

Pour ce faire, nous avons implémenté ces trois approches dans un langage efficace à savoir le langage Matlab et ceci afin d'optimiser le temps de calcul et le gain de mémoire.

Une fois la programmation terminée, les résultats obtenus sont présentés dans le tableau 4.1.

METHODE UTILISÉE	PRIME DE L'OPTION	PRIX DU MARCHÉ	ÉCART DES PRIX (EN)	COÛT DE CALCUL (SECONDES)
FFT	1,8535	1,8526	0,0009	0,0401 (0,0033)*
Fonctions caractéristiques	1.8536	1,8526	0,0010	0,1175 (0,0021)*
Monte Carlo	1,6491	1,8526	0,2035	7,8871 (0,0134)*

Tableau 4.1 : comparaison entre les primes de Calls obtenues à l'aide de différentes méthodes.

(* les résultats du cout de calcul sont des moyennes de 1000 itérations et les valeurs entre parenthèses représentent les écarts type)

Note⁽¹⁾ : les paramètres utilisés dans cette simulation sont : $S_0 = 9.49$; $\kappa = 0.2097$; $\theta = 0.1258$; $\sigma = 0.1711$; $\rho = -0.5371$; $V_0 = 0.1659$; $r=0.03$; $T = 1$; $K = 9$;

En comparant les prix obtenus par la simulation avec le prix du marché, nous constatons que la meilleure méthode est celle de l'algorithme FFT. En effet, ce dernier présente un résultat plus proche de celui du marché avec un écart de 0,0009 contre 0,001 avec la méthode des fonctions caractéristiques et de 0,2035 avec la méthode de Monte Carlo.

La méthode Monte Carlo est la moins efficace car non seulement elle fournie un résultat considérablement loin de la réalité, mais encore, prends plus de 67 fois le temps que demande la méthode des fonctions caractéristiques et plus de 196 fois que nécessite l'algorithme FFT.

Nous remarquons aussi que la différence entre les prix fournis par les deux premières méthodes est vraiment minime, par contre, le coût du calcul est sensiblement différent : 0,1175 secondes pour la méthode des fonctions caractéristiques contre 0,0401 seconde pour la FFT, représentant ainsi $\frac{1}{3}$ du temps nécessaire à la première méthode.

Vu ce qui précède, nous concluons que l'algorithme FFT est la meilleure méthode pour l'évaluation du Call européen qu'il s'agisse de la précision ou du temps de calcul.

Dans ce qui suit, nous allons évaluer un Call européen avec les modèles B&S, SV et SVJ.

(1) Voir [1].

V. Évaluation d'un Call européen avec les modèles B&S, SV et SVJ :

La modélisation log normale de l'actif sous jacent dans le modèle B&S est biaisée puisque les événements rares (comme les crashes boursiers) ne sont pas pris en compte. Si on retient ces événements particuliers, on peut alors montrer que les prix des options incluant ces chocs (avec le modèle SVJ) sont bien différents de ceux évalués par le modèle B&S. De la même manière, nous verrons que l'hypothèse de la constance de la volatilité est bien restrictive et empêche la bonne évaluation de la prime de l'option.

L'objet de cette partie est donc d'évaluer un Call européen avec les modèles de Black & Scholes (modèle à volatilité constante), de Heston (modèle à volatilité stochastique SV) et celui de Bates (modèle à volatilité stochastique incluant des sauts).

Cette étude comparative sera basée sur un échantillon de Calls européens de l'actif sous jacent S&P500. Ces données sont résumées dans le tableau suivant.

		ÉCHEANCE			TOTAL
		≤ 2 mois	2-6 mois	< 6 mois	
OTM	≤ 0,94	0,09 \$ {263}	1,17 \$ {1142}	10,85 \$ {673}	{2078}
	- 0,94 ó 0,97	0,83 \$ {213}	8,30 \$ {702}	30,47 \$ {207}	
ATM	0,97 ó 1,00	14,48 \$ {294}	28,92 \$ {916}	57,94 \$ {287}	{1497}
	- 1,00 ó 1,03	35,22 \$ {162}	55,67 \$ {453}	85,41 \$ {79}	
ITM	1,03 ó 1,06	65,39 \$ {175}	79,84 \$ {354}	109,45 \$ {33}	{562}
	- < 1,06	146,81 \$ {263}	177,14 \$ {431}	165,47 \$ {116}	
Total		{1370}	{3998}	{1395}	{6763}

Tableau 4.2 : Propriétés de l'échantillon des calls européens sur l'indice S&P500 ⁽¹⁾.

Ces Calls sont répartis en trois catégories selon leur échéance : Calls à échéance courte (ayant une maturité inférieur ou égale à 2 mois), Calls à échéance moyenne (ayant une maturité entre 2 et 6 mois) et des Calls à échéance longue (ayant une maturité supérieure à 6 mois).

(1) Voir [1].

Les graphiques suivants présentent les différents prix de Calls européens sur l'indice S&P500 pour différentes maturités.

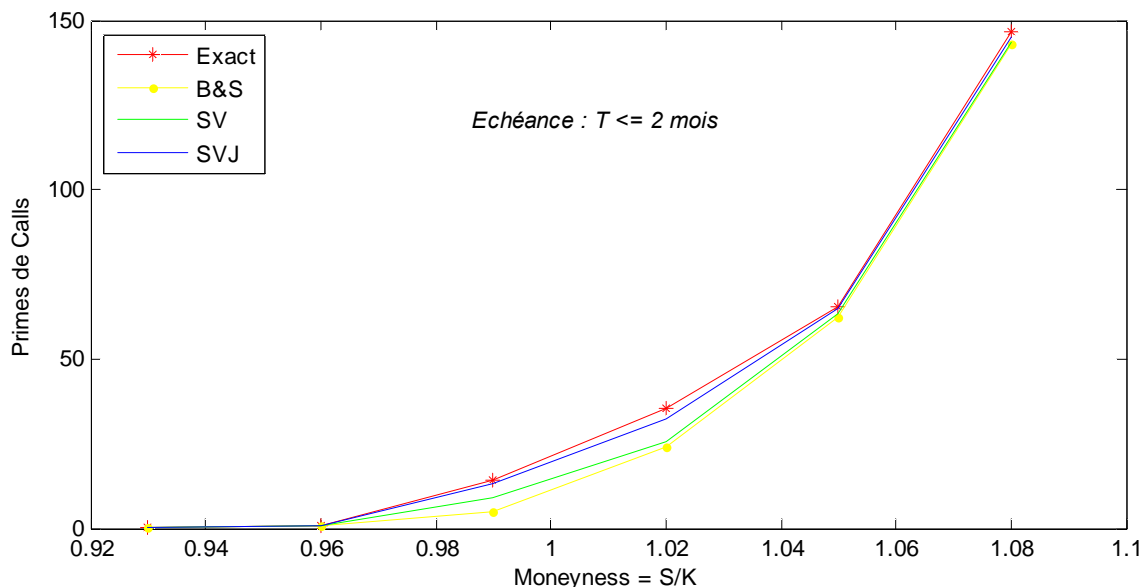


Figure 4.15 : Prix de Calls européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance courte).

L'analyse visuelle du graphique 4.15 montre que tous les modèles ont tendance à sous évaluer les prix observés sur le marché.

Nous pouvons remarquer aussi que les prix des options en dehors et dans la monnaie calculés avec les différents modèles sont très proches de ceux du marché tandis que l'écart entre eux est considérable pour les options à et proches de la monnaie. Cependant, le modèle SVJ représente l'écart le plus petit entre les prix théoriques et les prix du marché et reste ainsi le meilleur modèle pour calculer les prix des options à court terme.

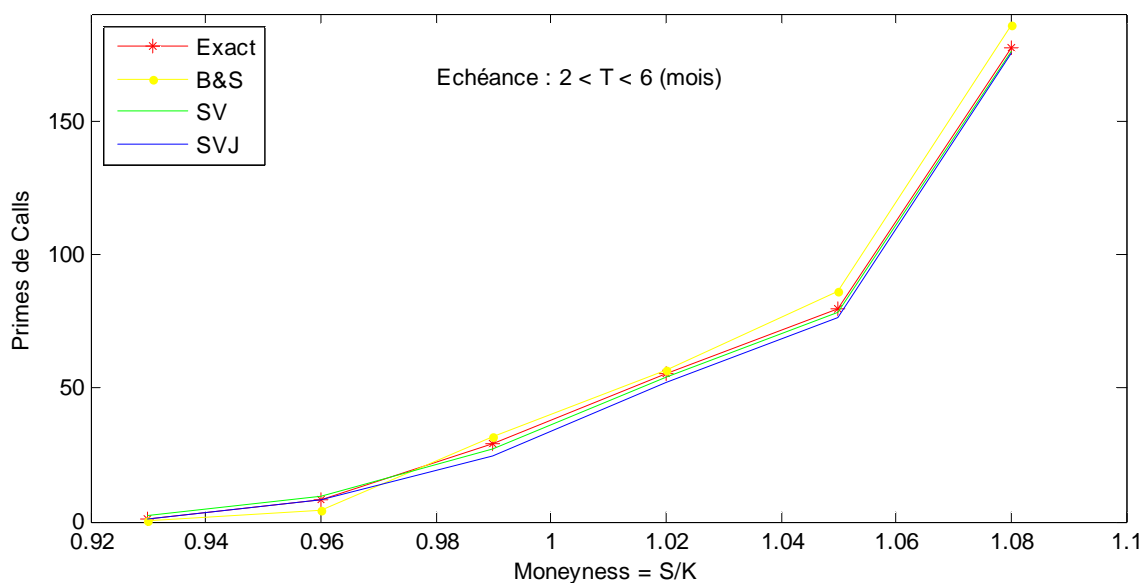


Figure 4.16 : Prix de Calls européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance moyenne).

Concernant les options de moyenne maturité, nous pouvons constater que la sous-évaluation apparaît avec tous les modèles sauf pour les options dans la monnaie qui sont sur-évaluées avec le modèle B&S et dans une moindre mesure celles proches et à la monnaie, ainsi que les options en dehors de la monnaie qui sont sur-évaluées avec le modèle SV.

Nous remarquons aussi que l'écart entre les prix observés sur le marché et les prix calculés est moindre pour le modèle SVJ des options en dehors de la monnaie et pour le modèle SV pour les Calls proches et dans la monnaie.

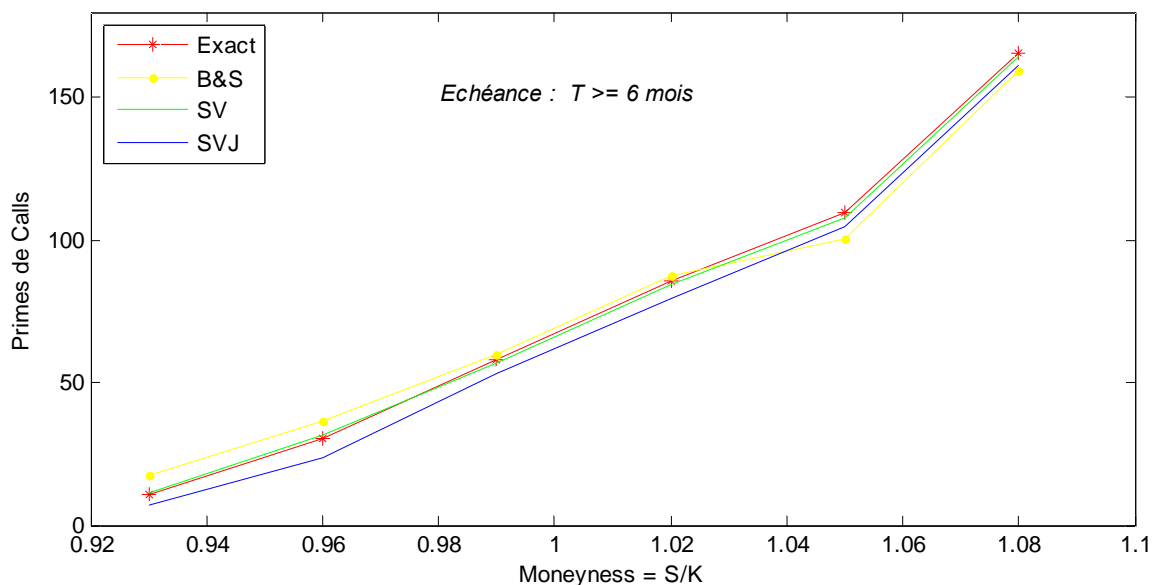


Figure 4.17 : Prix de Calls européens avec les modèles B&S, SV et SVJ (échéance longue).

D'après le graphique 4.17, il est évident que le modèle SV est le plus pertinent pour l'évaluation des options européennes du fait qu'il présente les valeurs de primes les plus proches de ceux observées sur le marché.

Ce graphe montre aussi que le modèle SVJ sous-évalue tous les types d'options tandis que le modèle B&S sur-évalue les options en dehors et proches de la monnaie et sous-évalue les options dans la monnaie.

VI. Conclusion :

Depuis le rejet de l'hypothèse de la constance de la volatilité proposée par Black & Scholes, les modèles à volatilité stochastique n'ont cessé de se développer. Ces modèles ont cependant l'inconvénient de ne pas donner de solutions analytiques aux problèmes d'évaluation d'options, ou même si ces solutions existent, elle ne sont calculées que par voie numérique. C'est pour cela que nous avons cherché quel est le moyen le plus efficace pour le faire sans perdre ni en précision, ni en temps de calcul.

Pour commencer, nous avons étudié l'influence de chaque paramètre du modèle SV sur les primes des Calls européens par rapport à leurs valeurs avec le modèle BS. Nous pouvons prétendre que les paramètres κ , σ et ρ permettent l'ajustement de la sous-évaluation ou la sur-évaluation des primes calculées avec le modèle BS.

En conclusion, nous pouvons dire que :

- les Calls très en dehors et très en dedans de la monnaie ne sont influencés par aucune variation des trois paramètres κ , σ et ρ .
- la vitesse du retour à la moyenne permet d'ajuster la sous-évaluation des Calls en dehors et proche de la monnaie par rapport modèle BS, et permet aussi d'ajuster la sur-évaluation des Calls dans la monnaie.
- la volatilité de la variance stochastique σ permet l'ajustement de la sous-évaluation des Calls en dehors et proche de la monnaie par rapport au modèle BS.
- une corrélation non nulle influe fortement sur les Calls en dehors de la monnaie et dans la monnaie.
- l'influence de la vitesse de retour à la moyenne et de la volatilité de la variance croît de façon non linéaire avec la maturité.
- une corrélation négative permet d'ajuster la sous-évaluation des Calls en dehors de la monnaie et la sur-évaluation des Calls dans la monnaie par rapport au modèle BS et inversement pour une corrélation positive.
- l'écart des prix des Calls ($C_{SV} - C_{BS}$) entre les modèles SV et BS est au maximum pour les Calls proche de la monnaie quelque soit les valeurs de κ , σ et ρ .

Par la suite, nous avons généré des surfaces de volatilité pour le modèle SV nous pouvons conclure aussi pour n'importe quelle valeur de κ que :

- l'allure du smile n'est pas figée dans le temps ;
- l'effet smile semble affecter davantage les options à maturité faible que les options à maturité longue où l'effet tend à s'estomper.

Finalement, nous avons construit trois codes avec différentes méthodes d'évaluation (FFT, MC et les fonctions caractéristiques) appliqués au modèle SV et nous avons comparé avec des données observées sur le marché boursier. Le meilleur résultat a été fourni par l'algorithme de la transformée de Fourier rapide (FFT : Fast Fourier transform).

Cet algorithme a été donc utilisé pour l'évaluation d'une option d'achat européenne avec le modèle SV et SVJ pour voir quelle est l'étendue de l'amélioration apporté au modèle B&S en les comparants avec des valeurs observées sur le marché financier, et nous pouvons dire que la modélisation de la variance par un processus stochastique (modèle SV) a amélioré la qualité du pricing de façon significative pour les options ATM et OTM à maturité moyennes et surtout pour les options de longue maturité.

Il est nécessaire aussi de dire que l'ajout d'une composante de saut dans le processus du prix de l'actif sous jacent (modèle SVJ) donne de meilleurs résultats pour les options de courtes maturité et pour les options OTM de maturité moyenne.

Conclusion générale

Au terme de cette étude, plusieurs constats peuvent être faits. L'objectif principal était de comparer différentes méthodes et modèles pour l'évaluation d'une option d'achat européenne.

Pour atteindre cet objectif, nous avons commencé par présenter quelques concepts sur la notion des options et ses facteurs déterminants, les stratégies et sur les marchés financiers.

Pour bien comprendre les modèles d'évaluation, nous avons été obligé de passer par la théorie des équations différentielles stochastiques où nous avons énoncé le lemme d'Itô, le théorème de Girsanov, les intégrales stochastiques et les équations différentielles stochastiques.

Dans le troisième chapitre, nous nous sommes intéressés au problème fondamental qui réside dans la capacité du modèle de Black & Scholes à bien évaluer une option européenne. Nous avons montré à travers une étude empirique de l'indice S&P500 que le modèle de Black & Scholes (qui quantifie le risque à travers un paramètre de volatilité constante) n'est plus suffisant pour rendre compte des phénomènes des marchés modernes, spécialement depuis le crash de 1987.

En effet, nous avons montré que le modèle de Black & Scholes introduit un biais systématique dans les prix évalués, ce qu'on appelle l'effet smile, et que la série des rendements démontre un effet leptokurtique, un coefficient d'asymétrie et une hétéroscédasticité conditionnelle dans la forme du regroupement de la volatilité (phénomène connu sous le nom de volatility clustering). Toutes ces caractéristiques sont en désaccord avec les hypothèses de Black & Scholes.

Pour toutes ces raisons, nous avons été amenés à chercher dans la littérature des modèles alternatifs qui modifient la spécification de la volatilité et ce en la considérant comme un processus stochastique, car il est bien évident que les modèles à volatilité stochastique aboutissent à une meilleure description de la dynamique suivie par le cours de l'actif sous-jacent sur lequel repose l'option que le modèle conventionnel à volatilité constante de Black & Scholes. De ce fait, les modèles alternatifs à ce modèle de référence peuvent prétendre à une évaluation plus fidèle des primes d'options. Pour cela, nous avons exposé les principaux modèles à volatilité stochastique d'évaluations d'options. Tous ces derniers rejettent l'hypothèse de la constance de la volatilité exigée par Black & Scholes et tiennent compte même de l'existence d'une corrélation entre le cours de l'actif et sa variance.

Néanmoins, il faut garder à l'esprit que relâcher une hypothèse complexifie grandement le modèle et alourdit le processus de traitement de l'information. Sur le parquet de la bourse, les traitements se font presque instantanément et un modèle simple mais convivial sera préféré à un modèle plus précis mais impraticable. Le gain en précision d'un modèle doit donc être non seulement statistiquement, mais économiquement significatif. C'est ainsi que nous avons voulu faire l'évaluation avec une méthode qui nous permettrait de gagner en précision et en temps de calcul. Pour ce faire, nous avons appliqué trois méthodes différentes au modèle SV. Les méthodes utilisées dans cette étude comparative sont l'évaluation par les fonctions caractéristiques, la méthode FFT et la méthode MC. Le but étant d'améliorer ces méthodes pour pouvoir relever le défi de la précision et de la rapidité.

Les résultats obtenus montrent que la méthode MC est à éliminer, car non seulement elle est gourmande en temps de calcul mais elle donne des résultats beaucoup plus éloignés que ceux observés sur le marché financiers par rapport aux autres méthodes. Concernant les deux autres méthodes, à savoir l'évaluation par les fonctions caractéristiques et la FFT, nous pouvons dire que les valeurs des primes calculées par ces deux méthodes sont très proches mais qu'il y a cependant une importante différence dans le coup du calcul, ceci nous pousse à conclure que finalement la méthode FFT est meilleure que les autres.

Quant aux résultats de l'évaluation, l'étude empirique que nous avons menée sur la base de l'indice S&P500 a permis de montrer que la modélisation de la volatilité par un processus stochastique à retour vers la moyenne améliore la qualité d'évaluation des options à maturité longue et les options ATM et OTM de moyenne maturité, tandis que l'introduction d'une composante de saut améliore la qualité des options à maturité courte et pour les options OTM à maturité moyenne. Cependant, l'effet escompté par cette composante de saut disparaît pour les options de longue maturité et les options ATM et ITM de maturité moyenne.

Finalement, nous pouvons dire que les mathématiques financières est probablement la discipline la plus empirique de toutes les sciences. Ce qui la distingue des autres branches des mathématiques c'est la présence centrale de l'incertitude, sans cette caractéristique, les problèmes financiers se réduiraient à de simples questions d'optimisation. Aussi, le bruit relié à l'incertitude est tellement important qu'il rarement possible d'aboutir à des conclusions explicites.

Nous terminons par dire que la détermination de la loi sous jacente est un enjeu majeur de l'industrie financière et que l'apparition de bases de données gigantesques et de la puissance accrue des ordinateurs ont fortement contribué à développer ce secteur de recherche. Nous pensons aussi que même si les faits stylisés que nous avons déjà présenté sont aujourd'hui bien connus, leur origine reste pour la plus part inconnue, ce qui explique sans doute qu'à ce jour aucun modèle ne soit réellement imposé à tous.

Annexes

Annexe A

Les EDP des modèles SV et SVJ

Il faut d'abord voir que le modèle SVJ englobe le modèle SV et que la solution de ce dernier n'est que le cas particulier où $\lambda = 0$. Selon le principe de dérivation du portefeuille sans risque, l'équation différentielle stochastique est donnée par :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} VS^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + [r - \lambda \bar{J}] S \frac{\partial C}{\partial S} + \rho \sigma VS \frac{\partial^2 C}{\partial S \partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 C}{\partial V^2} + [\kappa(\theta - V)] \frac{\partial C}{\partial V} - \frac{\partial C}{\partial t} - rC \\ & + \lambda E\{C(t, T, S(1 + J), r, V) - C(t, T, S, r, V)\} \end{aligned} \quad (1)$$

En appliquant la transformation $L(t) = \ln[S_t]$ et $k = \ln[K]$, et $\tau = (T - t)/360$ et en insérant la solution de l'équation de prix on obtient les équations différentielles partielles pour les probabilités risque-neutre Π_j pour $j = 1, 2$:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial L^2} + \left(r - \lambda \bar{J} + \frac{1}{2} V\right) \frac{\partial \Pi_1}{\partial L} + \rho \sigma V \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial L \partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 \Pi_1}{\partial V^2} + [\kappa(\theta - V)] \frac{\partial C}{\partial V} - \frac{\partial \Pi_1}{\partial t} \\ & + \lambda E_Q\{\Pi_1(1 + \ln(1 + J), r, V) \Pi_1(t, T, L + (1 + J), r, V) - \Pi_1(t, T, L, r, V)\} \end{aligned} \quad (2)$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} V \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial L^2} + \left(r - \lambda \bar{J} + \frac{1}{2} V\right) \frac{\partial \Pi_2}{\partial L} + \rho \sigma V \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial L \partial V} + \frac{1}{2} \sigma^2 V \frac{\partial^2 \Pi_2}{\partial V^2} + [\kappa(\theta - V)] \frac{\partial C}{\partial V} - \frac{\partial \Pi_2}{\partial t} \\ & + \lambda E_Q\{\Pi_2(t, T, L + (1 + J), r, V) \Pi_2(t, T, L, R, V)\} \end{aligned} \quad (3)$$

L'idée est donc de trouver des mesures de probabilité $\Pi_j (j = 1, 2)$ satisfaisant la solution de cette équation différentielle. Sachant que les mêmes conditions s'appliquent aux équations caractéristiques respectives, il est possible d'exprimer la fonction caractéristique sous une forme pour obtenir la solution du système.

$$f_1(t, T, S_t, r, V_t; \phi) = \exp\{u(\tau) + x_v(\tau)V_t + i\phi \ln(S_t)\} \quad (4)$$

$$f_2(t, T, S_t, r, V_t; \phi) = \exp\{z(\tau) + y(\tau)V_t + i\phi \ln(S_t) - \ln(B(t, T))\} \quad (5)$$

$$B(t, T) = e^{-r(T-t)/360} = e^{-r\tau}$$

En résolvant simultanément le système d'équations différentielles avec :

$u(0) = x_v(0) = z(0) = z(0) = 0$ et $B(t + \tau, 0) = 1$, on obtient les fonctions caractéristiques suivantes :

$$f_1 = \{exp - i\phi \ln[B(t, T)] + A + B + C + D\} \quad (6)$$

$$A = -\frac{\theta}{\kappa\sigma^2} \left[2\ln \left(1 - \frac{[\xi - \kappa + (1 + i\phi)\rho\sigma](1 - e^{-\xi\tau})}{2\xi} \right) \right] \quad (7)$$

$$B = \frac{\theta}{\kappa\sigma^2} [\xi - \kappa + (1 + i\phi)\rho\sigma] \tau + i\phi \ln(S_t) \quad (8)$$

$$C = \lambda(1 + \bar{j})\tau [(1 + \bar{j})^{i\phi} e^{(i/2)(1+i)\delta^2} - 1] - \lambda i\phi \bar{j}\tau \quad (9)$$

$$D = \frac{i(1 + i)(1 - e^{-\xi\tau})}{2\xi - [\xi - \kappa + (1 + i)\rho\sigma](1 - e^{-\xi\tau})} V_t \quad (10)$$

et

$$f_2 = \{exp - i\phi \ln[B(t, T)] + A + B + C + D\} \quad (11)$$

$$A = -\frac{\theta}{\kappa\sigma^2} \left[2\ln \left(1 - \frac{[\zeta - \kappa + (1 + i\phi)\rho\sigma](1 - e^{-\zeta\tau})}{2\zeta} \right) \right] \quad (12)$$

$$B = \frac{\theta}{\kappa\sigma^2} [\zeta - \kappa + (1 + i\phi)\rho\sigma] \tau + i\phi \ln(S_t) \quad (13)$$

$$C = \lambda\tau [(1 + \bar{j})^{i\phi} e^{(i/2)(1+i)\delta^2} - 1] - \lambda i\phi \bar{j}\tau \quad (14)$$

$$D = \frac{i(1 + i)(1 - e^{-\zeta\tau})}{2\zeta - [\zeta - \kappa + (1 + i)\rho\sigma](1 - e^{-\zeta\tau})} V_t \quad (15)$$

où

$$\xi = \sqrt{[\kappa - (1 + i\phi)\rho\sigma]^2 - i\phi(1 + i\phi)\sigma^2} \quad (16)$$

$$\zeta = \sqrt{[\kappa - i\phi\rho\sigma]^2 - i\phi(i\phi - 1)\sigma^2} \quad (17)$$

Bibliographie

- [1] AMMRAOUI, M. Le marché financier sous la dynamique de la volatilité stochastique, thèse de Doctorat, université PANTHEON-ASSAS (PARIS II), (2008).
- [2] AUGROS, J.C., ET NAVATTE, P., Bourse : les options négociables, *Vuibert gestion*, (1987).
- [3] ANDERSEN, L. Simple and efficient simulation on the Heston stochastic volatility model, *Journal of Computational Finance* 11(3), (2008), 1-42.
- [4] ATTARI, M. Option pricing using Fourier transforms : A numerically efficient simplification, *working paper series : Banc of America securities*. (2004)
- [5] BAKSHI, G., CAO, C., AND CHEN, Z. Empirical performance of alternative option pricing models, *The Journal of Finance* 5 (1997). 2003-2049.
- [6] BAKSHI, G. AND MADAN, D., Spanning and derivative-security valuation, *Journal of Financial Economics*, 55, (2000). 205–238.
- [7] BALL, C., AND ROMA, A. Stochastic volatility option pricing. *Journal of Financial and Qualitative Analysis* 29 (1994), 598-607.
- [8] BATES, D. Jump and stochastic volatility : exchange rate processes implicit in deutsche mark options, *Review of Financial Studies* 9 (1996). 69-107.
- [9] BLACK, F. AND SCHOLES, M. The pricing of options and corporate liabilities, *Journal of Political Economy* 81 (1973). 637–659.
- [10] BORAK, S., DETLEFSEN, K., AND HÄRDLE, W. FFT based option pricing, *Statistical Tools for Finance and Insurance, Springer, Berlin*. (2004).
- [11] BRIANI, M., NATALINI, R., PAPI, M., AND FERRERI, F. The Bates volatility model. *Premia Project* (9).
- [12] CARR, P., AND MADAN, D. Option valuation using the Fast Fourier Transform, *Journal of Computational Finance* 2 (1999), 61–73.
- [13] CIŽEK, P., HÄRDLE, W. AND WERON, R. Statistical Tools for Finance and Insurance *Springer-Verlag Berlin Heidelberg* (2005). (Chap 7 et 8).
- [14] CHOURDAKIS, K., Financial Engineering : A brief introduction using the Matlab system, *Fall* (2008).

- [15] CONT, R., Empirical properties of assets returns : Stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance 1* (2001), 1-14.
- [16] CONT, R. AND FONSECA, J. Dynamics of implied volatility surface, *Quantitative Finance 2* (2002). 45-60
- [17] CONT, R., And TANKOV, P. Financial Modelling with Jump Processes, *Chapman & Hall/CRC*, (2004).
- [18] DAVALOS, D., Le modèle d'Heston et ses extensions, (2007).
- [19] DAVIS, P.J., AND RABINOWITZ, P. Methods of Numerical Integration, *Dover*, 2nd edition, (2007).
- [20] DUFFIE, D. Dynamic Asset Pricing Theory, *Princeton University Press* 2001.
- [21] DUMAS, B., FLEMING, J. AND Whaley, R.E., Implied volatility functions : empirical tests. *The Journal of Finance 53(6)*, (1998). 2059-2106.
- [22] FAMA, E., The behavior of stock market prices. *Journal of Business 38* (1965), 34-105.
- [23] GANDER, W., AND GAUTSCHI, W. Adaptive quadrature - revisited, *Technical report, Departement Informatik, ETH Zürich*. (1998).
- [24] GARMAN, Mark B., Market microstructure, *Journal of Financial Economics, 3(3)*, (1976). 257–275.
- [25] GLASSERMAN, P. Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer-Verlag, New-York. (2004).
- [26] HALE, N., AND TREFETHEN, L.N. New quadrature formulas from conformal maps. *Siam Journal of Numerical Analysis, 46(2)* (2008), 930–948.
- [27] HEATH, M.T., Scientific Computing : An Introductory Survey, *McGraw-Hill*, 2nd edition, (2005).
- [28] HESTON, S. A closed-form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies 6* (1993), 327-343.
- [29] HONG, G. Forward smile and derivative pricing. (2004).
- [30] HULL, J., AND WHITE, A. The pricing of options with stochastic volatilities. *Journal of Finance 42* (1987), 281-300.
- [31] JONDEAU, E., HUANGPOON, S., AND RODINGER, M. Financial modeling under non Gaussian distributions, *SPRINGER Finance*, (2007).

- [32] KARATZAS, I., AND Shreve, S., Brownian motion and Stochastic Calculus. *Springer-Verlag*, (1991).
- [33] MANDELBROT, B. Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèles basé sur les processus stables additifs non gaussien de Paul Lévy. *Comptes rendus à l'Académie des Sciences 254* (1962).
- [34] MANDELBROT, B. New methods in statistical economics. *Journal of Political Economy 71* (1963), 421-440.
- [35] MANDELBROT, B. The variation of certain speculative prices. *Journal of Business 36* (1963), 348-419.
- [36] MERTON, R. Option pricing when the underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics 4* (1976), 125-144.
- [37] MOODLEY, N., The Heston model : A practical approach, *An Honours Project, University of Johannesburg, South Africa*, (2005).
- [38] NEGREA, B., Evaluation des options par la transformée de Fourier (2001)
- [39] PHILIP, J.D., AND RABINOWITZ, P. Methods of numerical integration. *Dover*, (2007).
- [40] RAMAPRASAD, B., AND SHIGEYUKI, H. Empirical techniques in finance, *SPRINGER Finance*, (2005)
- [41] SCHOUTENS, W., SIMONS, E., AND TISTAERT, J. A perfect calibration ! Now What ? *Wilmott*, 66–78, (2004).
- [42] SOUKPRASONG SY, A. La volatilité stochastique des marchés financiers : une application aux modèles d'évaluation d'instruments optionnels en temps continu, *thèse de Doctorat, École Doctorale des sciences Économiques et de Gestion d'Aix-Marseille*, (2003).
- [43] TREFETHEN, L.N., AND HALE, N. New quadrature formulas from conformal maps. *SIAM Journal of Numerical Analysis*, 46(2), (2008). 930–948.
- [44] XU, J. Pricing and hedging under stochastic volatility, Master's thesis, Peking University, China. (2003).