

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE PHYSIQUE**



**Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
en PHYSIQUE**

Specialité : Physique Théorique Des Basses Et Moyennes Énergies

Par

BECHICHE Said

SUJET

**CONTRIBUTION A L'ETUDE DES EFFETS
DE LA ROTATION SUR
LES CORRELATIONS D'APPARIEMENT**

Soutenu publiquement, le 24/06/2007 devant le jury composé de :

Mr.	M. FELLAH	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	M.R. OUDIH	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	M. DJEBARA	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mlle.	N. BENHAMOUDA	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinatrice.
Mr.	A. KELLOU	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur.

Remerciements

C'est une habitude saine que de remercier au début d'un tel travail tous ceux qui, plus ou moins, ont contribué à le rendre possible. Même si dans mon cas, cette liste peut sembler plus longue que de coutûme, c'est avec mon enthousiasme le plus vif et le plus sincère que je voudrais rendre mérite à tous ceux qui (plus ou moins récemment) à leur manière m'ont aidé à mener à bien cette thèse. Je désire leurs exprimer ma profonde gratitude.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Mr. M. R. Oudih mon Directeur de thèse pour avoir accepté de me diriger patiemment, pour son soutien constant pendant la rédaction de cette thèse, mais aussi parce qu'il m'a appris à participer dans des conférences nationales et d'écrire de manière correcte un article. Veuillez accepter encore mes plus vifs remerciements pour votre présence dans ce jury et soyez assuré de tout mon respect et de ma profonde gratitude.

Je pense à présent à deux personnes si précieuses :

M. Fellah Professeur à l'U.S.T.H.B, chef de l'équipe structure nucléaire du laboratoire de physique théorique ; pour le grand honneur qu'il me fait en étant Président de ce jury, mais également pour tous ses conseils toujours pertinents et ses cours d'analyse numérique (en D.E.S.) et de modèles nucléaires (en magister) précieux pour améliorer ma formation magistrale.

Mlle N. H. ALLAL Professeur à l'U.S.T.H.B, Chef du projet de notre équipe ; pour sa disponibilité sa générosité, sa rigueur scientifique, pour ses cours de la fission nucléaire, ses nombreuses aides précieuses dans ma formation magistrale et pour ses conseils importants et judicieux.

Leurs manières d'aborder la discipline et leurs démarche scientifiquement proche, m'ont profondément touché tout au long de mon séjour au laboratoire de Physique Théorique, mais aussi spécialement car, en m'acceptant au sein de leurs laboratoire, ils m'ont permis de sortir d'une "léthargie" mathématique (quantique), physique et numérique. Leurs confiance en moi fait du laboratoire mon deuxième "chez-moi".

A vous, chers professeurs, j'adresse mes sincères reconnaissances.

J'aimerai également remercier particulièrement Mlle N. Benhamouda, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B. pour l'honneur d'être membre de mon jury, et pour m'avoir fait profiter de ses connaissances sur l'analyse numérique et programmation Fortran (en D.E.S).

J'exprime toute ma gratitude à Monsieur A. Djebara, Professeur à l'U.S.T.H.B, pour avoir bien voulu s'intéresser à cette thèse et pour avoir accepté de faire partie de mon jury.

Mes remerciements les plus respectueux vont à Monsieur A. Kellou, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B, qui m'a honoré en acceptant d'être dans ce jury.

Je tiens à remercier vivement mes amis du laboratoire. Ils ont tous, à leurs manières, rendu particulièrement agréable mon séjour dans ce laboratoire, Djamila, Ismahane, Fahima, Slimane, Mohamed. Pour les commentaires scientifiques et aussi pour les conseils amicaux que l'on n'oublie jamais.

J'adresse à Sami un remerciement tout particulièrement ému pour l'honneur qu'il me fait d'échanger notre expérience encyclopédique sur les ouvrages de référence qui ont forgés nos connaissances dans le domaine et pour tout le temps qu'on a passé ensemble.

Je remercie aussi très vivement mon maître, Monsieur B. Babaousmaïl mon enseignant du Français au collège et mon chef au club d'astronomie El-Islah qui m'avait demandé d'aller plus loin dans les études. Sa demande m'a indirectement guidé pour faire de la recherche.

A cette occasion, mes profondes gratitudes exprimées à M. Aouchette, qui m'a donné des soutiens aussi bien financiers que moraux. Cela m'a beaucoup encouragé ; en un mot, merci pour tes aides précieuses.

Je ne pourrais jamais oublier le soutien et l'aide des personnes chères de ma nombreuse et merveilleuse famille, mon père, ma mère, mes frères, Bouaroua et Babeker (Mohammed et Djabir), Rabie. Je leurs dois un grand merci. Particulièrement à mon père qui a montré un profond intérêt pour ma discipline et, grâce à sa confiance, j'ai pu suivre ce chemin difficile. Je ne sais pas si je peux le récompenser de sa longue attente par ces quelques mots de remerciement. J'adresse ensuite un petit mot à mes petits : Mama, Omar-Elfarouk, Selsabile. Ils ont dû supporter cette émigration avec une maman émerveillée qui les espère prendre le même chemin, grâce à elle, toute ma peine pour conclure ce travail a été particulièrement adoucie. Pour l'amour qu'elle porte à celui qui travaille souvent tard le soir....Je te transmets Roukia mes chaleureuses et profondes gratitudees.

Je vous remercie profondément très chère mère pour tout ce que vous avez fait pour moi et que je ne peux pas citer.

Je réserve un remerciement chaleureux à mes amis de campus : Yacine, Djabir et bien d'autres.

Je terminerais ce prologue en m'adressant un remerciement à toutes celles et à tous ceux que j'ai pu oublier dans les pages précédentes (je pense qu'ils se reconnaîtront), qu'ils sachent que cette omission était bien involontaire de ma part et qu'ils ne m'en tiennent pas rigueur.

Dédicace

Je dédie ce travail à mes parents, sans qui je ne serais pas où j'en suis aujourd'hui.
Que notre Bon Dieu le gardes en vie.

Je dédie aussi ce travail à mon épouse et à mes enfants, pour avoir accepté tant de sacrifices durant ces dernières années.

A la mémoire de mon beau-père Kacem, que Dieu ait son âme et l'accueille dans son Paradis.

A ma belle-mère Aziza.

A la mémoire de mon ami Nezar Hafsi, que Dieu l'accueille dans son Paradis.

A toutes celles et ceux qui ont choisi de se consacrer, en physique théorique, au développement de la théorie et aux nouvelles méthodes liées au numérique.

Résumé

Les effets de la rotation du noyau atomique sur les corrélations d'appariement ont été étudiés. Dans un premier temps, la transformation de Goodman a été utilisée afin de diagonaliser à la fois le terme du modèle à particules indépendantes et celui du Cranking. Par cette diagonalisation une nouvelle base a été construite dans laquelle le bon nombre quantique est la signature. L'interaction d'appariement a été introduite par la suite et a été exprimée dans la nouvelle base. Ceci a permis de résoudre l'équation de Schrödinger dans le cadre de la théorie BCS, moyennant certaines approximations.

Les calculs numériques ont été réalisés pour quelques noyaux de la région des terres rares en utilisant un champ moyen de Woods-Saxon à déformation axiale. Le comportement de quelques grandeurs caractéristiques de l'appariement a été étudié en fonction de la vitesse de rotation du noyau atomique.

Mots-clés : Effets d'appariement, Force de Coriolis, Modèle du Cranking, Signature, Terres-rares, Noyaux pairs.

*Soit A un succès dans la vie Alors : $A=x+y+z$,
où $x=Travailler$, $y=S'amuser$ et $z=Se taire$
Albert Einstien*

"Quelqu'un s'est-il jamais réveillé au milieu de la nuit et réalisé qu'il avait tout d'un coup besoin d'un physicien nucléaire de haute volée ? Pensez à toutes les urgences où vous seriez bien plus content d'avoir pour voisin un plombier [...] plutôt qu'un professeur."

Isaac Asimov, *The Recipe*

" Les sciences n'essaient pas d'expliquer, elles essaient à peine d'interpréter, elles font principalement des modèles. Par modèle on entend une construction mathématique qui, par l'addition de quelques interprétations verbales, décrit les phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique est uniquement précisément qu'elle est censée marcher."

John von Neumann

" Peut-être les grandes questions qui agitent actuellement la science - comme l'unification de la physique ou l'hypothèse de Riemann - cesseront-elles un jour de hanter les esprits non parce qu'on les aura résolues, mais parce qu'elles auront disparu du champ intellectuel et paraîtront aussi dépourvues de sens et de pertinence que les questions des scholastiques..."

Didier Nordon, *Pour la Science*, octobre 2000

Table des matières

Introduction	1
1 CHAMP MOYEN DEFORME DE WOODS-SAXON	4
1.1 Introduction	5
1.2 Modèle à particules indépendantes	7
1.2.1 Champ moyen de Woods-Saxon	7
1.2.2 Energies et fonctions d'onde individuelles	11
2 INTERACTION D'APPARIEMENT	15
2.1 Introduction	16
2.2 Hamiltonien du système	17
2.3 Théorie BCS	18
2.4 Equations du gap	21
2.5 Transformation de Bogoliubov-Valatin	23
2.5.1 Représentation quasiparticule	23
2.5.2 Etat fondamental	24
2.5.3 Diagonalisation de l'hamiltonien	25
2.6 Etats excités	27
2.7 Solution triviale	30
3 TRAITEMENT DES NOYAUX EN ROTATION	32
3.1 Hamiltonien du système	33

3.2	Signature	34
3.3	Représentation de Goodman	36
3.3.1	Propriétés des états de Goodman	36
3.4	Expression de l'hamiltonien dans la base de Goodman	38
3.4.1	Éléments de matrice de H_{sp}	38
3.4.2	Éléments de matrice de J_x	39
3.5	Diagonalisation	40
3.6	Inclusion de l'interaction d'appariement	41
3.7	Fonction d'onde	42
3.8	Equations du gap	43
3.9	Transformation de Bogoliubov-Valatin	45
4	RESULTATS ET DISCUSSION	47
4.1	Paramètres du modèle à particules indépendantes	48
4.2	Application à quelques isotopes d'Erbium	48
	CONCLUSION	62
	Annexe A	64

INTRODUCTION

Pour décrire le noyau atomique et prédire ses propriétés, on peut faire appel à plusieurs modèles [1]. Certains décrivent les aspects dynamiques (vibration ou rotation) d'autres fournissent une vision complète de la structure nucléaire. Les modèles utilisés sont plus ou moins élaborés : Certains partent d'interactions microscopiques, d'autres sont phénoménologiques et ont juste pour but de fournir une interprétation simple [2]. Le modèle qui a eu le plus de succès et qui constitue à ce jour la pierre angulaire de toute description microscopique du noyau est le modèle à particules indépendantes[3]. L'idée centrale de cette approche est que tout se passe comme si chaque nucléon se déplaçait dans un certain puits de potentiel (qui le confinerait dans le noyau) indépendamment de la présence des autres nucléons [4].

Quoique cette hypothèse puisse sembler très grossière et parfois trop simplificatrice, elle a connue de grands succès [5]. Il faut également noter qu'elle est assez modulaire, dans le sens qu'on peut aisément décrire certains effets (appariement nucléaire, mouvements collectifs de rotation ou de vibration) en rajoutant dans le formalisme les termes nécessaires [6, 7, 8].

L'un des termes les plus importants est celui correspondant à l'interaction d'appariement [9]. En effet, le fait que les noyaux ayant un nombre pair de nucléons soient systématiquement plus stables que ceux ayant un nombre impair a conduit à l'hypothèse de l'appariement nucléaire [10]. L'idée, fort simple, est que chaque nucléon se lie avec un autre pour former une paire [11]. Lorsque le noyau possède un nombre pair de nucléons, chacun d'entre eux trouve un partenaire [12, 13]. Pour exciter un tel système, il faut alors fournir une énergie au moins égale à l'énergie nécessaire pour briser une paire [14]. Par

contre, dans le cas des noyaux impairs, il existe un nucléon célibataire, qui requiert moins d'énergie pour l'exciter [15, 16].

La première description théorique de l'appariement nucléaire, proposé à la fin des années 50 par Aage Bohr et Ben Mottelson, fut la théorie dite de Bardeen, Cooper et Schrieffer (*BCS*) qui décrit la supraconductivité dans les métaux [17, 18]. Elle permet un traitement mathématique simple et élégant par l'introduction de la notion de quasi-particules qui se meuvent dans un champ moyen [19].

Cependant, ce champ moyen peut changer avec le temps, faisant apparaître des phénomènes collectifs tels que la rotation [20]. Cette dernière réarrange la distribution des nucléons dans le noyau et affecte le champ nucléaire moyen [21].

Il est à noter à ce niveau que, dans une discipline aussi phénoménologique que la physique nucléaire, la rotation peut servir comme un outil universel d'investigation de la structure nucléaire, où le mouvement rotationnel d'un corps et les effets qu'il produit sont probablement parmi les phénomènes les plus intéressants du point de vue interprétation physique [22]. L'influence de la rotation sur le mouvement des nucléons peut varier d'une petite perturbation jusqu'au point où les forces de Coriolis et Centrifuges casse le noyau en morceaux [23]. Le mouvement de rotation pourrait être alors considéré comme un des moyens possibles de l'étude de la structure nucléaire [24, 25].

Les noyaux en rotation ont fait l'objet de nombreuses études théoriques et expérimentales, en particulier depuis la découverte des noyaux super-déformés [26]. L'un des modèles les plus utilisés dans ce cadre, en raison de sa simplicité d'utilisation et de ses nombreux succès, est le modèle du Cranking [27]. Le principe de base du modèle consiste à considérer un système de référence fixe par rapport au potentiel nucléaire et de faire tourner ce potentiel avec une fréquence constante [28]. Le système de coordonnées sera alors en rotation par rapport au système du laboratoire[29].

Malgré le fait que les noyaux en rotation sont étudiés expérimentalement et théoriquement depuis plus de deux décennies, un certain nombre de questions comme, par exemple, les effets de la rotation sur les corrélations d'appariement ne sont toujours pas

entièrement résolues et dépendent certainement des développements des outils théoriques [30].

Dans le but d'étudier ces phénomènes, on se propose dans le présent travail d'étudier les effets de la rotation sur les corrélations d'appariement en utilisant une méthode dont la simplicité est comparable à celle de *BCS* [31, 32].

Dans le premier chapitre de ce mémoire, nous rappellerons la définition et les caractéristiques du potentiel de Woods-Saxon et la paramétrisation correspondante. Un deuxième chapitre sera consacré à l'étude des corrélations d'appariement par la théorie *BCS* [33]. Le but de ce chapitre est d'introduire les concepts les plus importants qui serviront dans les chapitres suivants. La transformation de Goodman sera utilisée au troisième chapitre pour diagonaliser à la fois l'hamiltonien du modèle à particules indépendantes et le terme de Coriolis [34, 35]. Une nouvelle base sera ainsi construite, dans laquelle le bon nombre quantique est la signature. L'interaction d'appariement sera exprimée dans la nouvelle base et de nouvelles équations du gap seront établies par une méthode *BCS* modifiée. Dans le dernier chapitre, les résultats numériques obtenus par la présente méthode seront présentés et discutés. Les conclusions tirées de ce travail seront en fin présentées.

CHAMP MOYEN DEFORME DE WOODS-SAXON

Sommaire

1.1	Introduction	5
1.2	Modèle à particules indépendantes	7
1.2.1	Champ moyen de Woods-Saxon	7
1.2.2	Energies et fonctions d'onde individuelles	11

1.1 Introduction

Le plus grand succès du modèle en couches a été la mise en évidence des nombres magiques. Pour de tels nombres, correspondant à une faible densité de niveaux au voisinage de la surface de Fermi, les effets de couches sont liants. Ces derniers s'ajoutant à l'énergie moyenne de la goutte liquide, stabilisent les noyaux correspondants dans une forme sphérique. En revanche au fur et à mesure que l'on s'éloigne de ces nombres magiques, la densité de niveaux augmente au voisinage de la surface de Fermi, produisant un effet de couches anti-liant. Le noyau devient, graduellement, plus mou envers la déformation ce qui se manifeste par une diminution de la fréquence de vibrations collectives autour d'une forme d'équilibre sphérique. C'est ainsi que le minimum de l'énergie du noyau en fonction de la déformation se déplace vers des déformations non nulles.

Les effets de couches, contrairement au modèle de la goutte liquide, astreint donc certains noyaux à avoir une forme d'équilibre non sphérique. L'idée d'une forme nucléaire implique l'existence d'une forme géométrique du champ moyen. En terme de goutte de matière nucléaire ayant une surface bien définie, les surfaces équipotentielles $R(\theta, \varphi)$ sont définies en fonctions des paramètres de déformations $\alpha_{\lambda\mu}$ par :

$$R(\theta, \varphi) = C(\alpha) R_0 \left[1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \varphi) \right], \quad (1.1.1)$$

où le facteur C est introduit pour satisfaire la condition de conservation du volume qui doit être égal à celui d'une sphère de rayon $R_0 = r_0 A^{\frac{1}{3}}$ et $Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \varphi) = Y_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ représentent les harmoniques sphériques.

L'incompressibilité de la matière nucléaire se traduit par la condition de conservation du volume entouré par une surface Σ , supposé indépendante de la déformation nucléaire :

$$\int_{r \in \Sigma} d^3 r = \frac{4}{3} \pi R_0^3. \quad (1.1.2)$$

La relation ci-dessus définit le facteur $C(\alpha)$:

$$C(\alpha) = \left\{ \frac{4\pi}{\int \left[1 + \sum_{\lambda \geq 2} \sum_{\mu=-\lambda}^{\lambda} \alpha_{\lambda\mu}^* Y_{\lambda}^{\mu}(\theta, \varphi) \right]^3 d\Omega} \right\}^{\frac{1}{3}}. \quad (1.1.3)$$

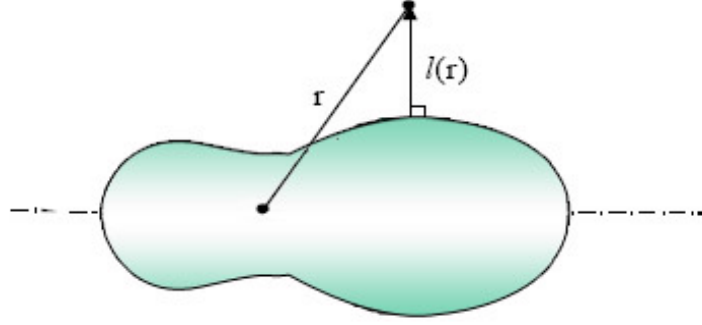


Figure 1.1.1 : Forme générale d'un noyau à symétrie axiale

Dans le présent travail, on se restreint aux noyaux à déformation axiale. Pour ceux-ci l'équation (1.1.1) prend la forme simplifiée :

$$R(\theta, \beta) = C(\beta) R_0 \left[1 + \sum_{\lambda \geq 2}^{\infty} \beta_{\lambda} Y_{\lambda 0}(\cos \theta) \right]. \quad (1.1.4)$$

Donc, dans le cas d'un noyau à symétrie axiale (Figure 1.1.1), les coefficients $\alpha_{\lambda\mu}$ pour lesquels $\mu \neq 0$ sont tous nuls et pour une forme prolata normale (non superdéformée), le développement (1.1.1) est généralement limité aux termes quadrupolaire ($\lambda = 2$) et hexadécapolaire ($\lambda = 4$).

L'expression (1.1.4) devient alors :

$$\begin{aligned} R(\theta) &= CR_0 \left[1 + \sqrt{\frac{2\lambda+1}{4\pi}} \sum_{\lambda=2,4} \beta_{\lambda} P_{\lambda}(\cos \theta) \right] \\ &= CR_0 \left[1 + \sqrt{\frac{5}{4\pi}} \beta_2 P_2(\cos \theta) + \sqrt{\frac{9}{4\pi}} \beta_4 P_4(\cos \theta) \right] \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

où $P_{\lambda}(\cos \theta)$ est le polynôme de Legendre de degré λ . Pour un noyau à déformation axiale seuls les paramètres β_2 et β_4 qui interviennent.

1.2 Modèle à particules indépendantes

La recherche des états propres d'un système comportant plus de deux constituants se heurte au problème à N corps. Pour contourner ce problème, on fait recours généralement à des modèles assez simples pour expliquer une partie plus ou moins importante d'une multitude de résultats expérimentaux. Un des modèles les plus utilisés et ayant le plus de succès est le modèle à particules indépendantes, qui suppose que chaque nucléon dans le noyau se meut dans un potentiel moyen créé par les $(A - 1)$ autres nucléons. Le problème à N corps se voit ainsi ramené à N problèmes à un corps.

Le champ moyen est déterminé en principe par une méthode self-consistante du type Hartree-Fock. Cette méthode permet d'obtenir les énergies et les fonctions d'onde individuelles des nucléons à partir de la donnée d'une interaction nucléon-nucléon ; néanmoins, elle nécessite un calcul assez hardu, en particulier pour les noyaux lourds où l'on est en présence d'un grand nombre de nucléons.

C'est pour cette raison que des champs moyens phénoménologiques comme celui de Nilsson [36], de Woods-Saxon [37] ou de Yukawa [38] sont utilisés. Parmi ces derniers, le potentiel déformé de Woods-Saxon est le plus réaliste puisqu'il rend compte de certaines caractéristiques du noyau, comme l'existence d'une profondeur centrale V_0 presque indépendante du nombre de masse A et d'une allure caractérisée par une surface diffuse [39, 40]. C'est l'ensemble de ces considérations qui nous a amené à adopter le potentiel déformé de Woods-Saxon.

1.2.1 Champ moyen de Woods-Saxon

Le champ de Woods-Saxon dans le cas de la symétrie axiale a été utilisé dans plusieurs travaux, entre autres :

- pour prédire et expliquer la structure des isomères de haut spin [41].
- pour déterminer les énergies de liaison des nucléons [42].
- pour reproduire les moments et les déformations des noyaux à l'équilibre [43].

- pour déterminer les barrières de fission et l'effet des états de particules indépendantes sur les noyaux tournants fortement déformés [44, 45].
- et récemment au sein de notre laboratoire pour déterminer le rayon quadratique moyen des noyaux situés dans la région des terres rares [46].

Il a été également utilisé par notre groupe de recherche dans une multitude de travaux [47, 48, 49].

L'idée assez simple de Woods-Saxon est la suivante : puisque le champ moyen représente la moyenne des interactions à deux corps sur toute la distribution de la matière nucléaire, il est alors tout à fait naturel que ce potentiel ait une intensité de même forme que la densité nucléaire. La diffusion élastique des électrons à haute énergie par le noyau atomique suggère que la densité volumique de charge des noyaux varie approximativement en fonction du rayon r comme une distribution de Fermi :

$$\rho(r) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{r-R_0}{a}\right)} \quad (1.2.1)$$

où ρ_0 est sa densité centrale, R_0 son rayon et a son épaisseur (Figure 1.2.1).

Cette forme a été généralisée aux noyaux déformés en remplaçant l'expression de la distance $(r - R_0)$ par une expression plus générale $l(r, \beta)$. La fonction 'quasi-rayon' $l(r, \beta)$ s'annule au voisinage de la surface et dépend de la déformation de cette dernière. La densité de nucléons s'écrit alors [50] :

$$\rho(r, \beta) = \frac{\rho_0}{1 + \exp\left(\frac{l(r, \beta)}{a}\right)} \quad (1.2.2)$$

$l(r, \beta)$ est égal à la distance (prise avec le signe moins à l'intérieur de la surface) entre le point r et la surface nucléaire représentée par (1.1.5). La constante a est généralement appelée paramètre de diffusivité (Figure 1.2.1).

Le potentiel de Woods-Saxon prend donc la forme (Figure 1.2.2) :

$$V(r, \beta) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{l(r, \beta)}{a}\right)}. \quad \text{avec } V_0 < 0 \quad (1.2.3)$$

Le choix ci-dessus de la forme du potentiel de Woods-Saxon a des conséquences géomé-

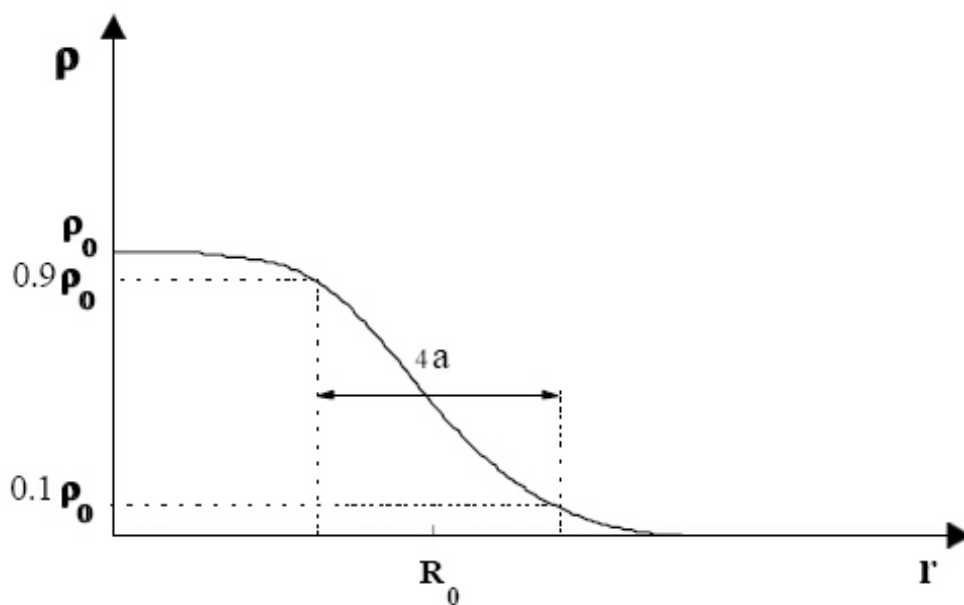


Figure 1.2.1 : Densité de charge nucléaire déterminée par la diffusion d'électrons

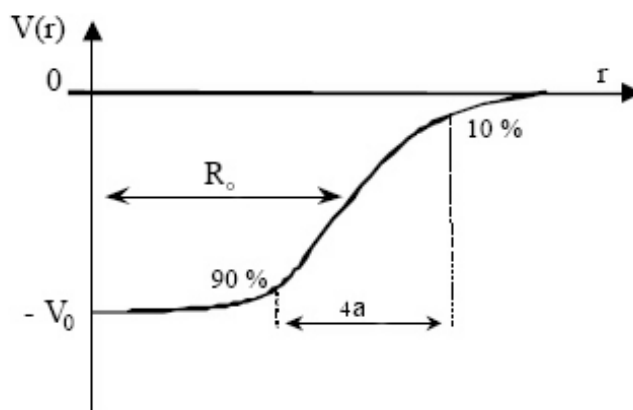


Figure 1.2.2 : Forme générale de l'allure du potentiel de Woods-Saxon

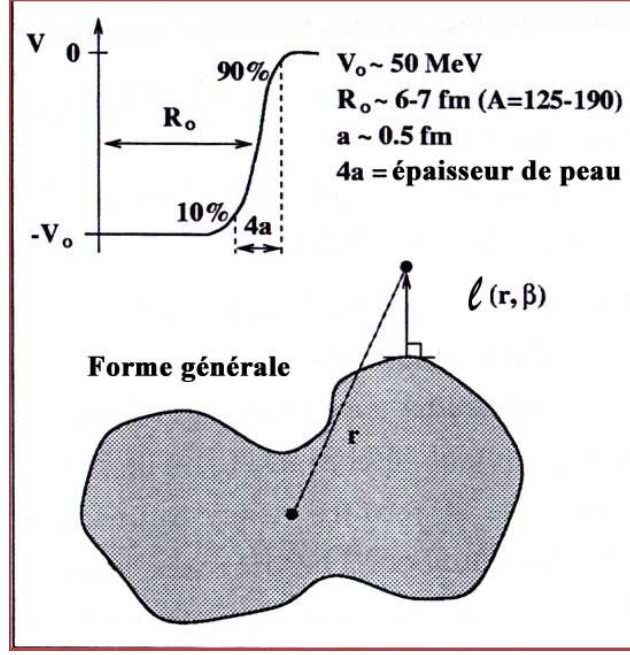


Figure 1.2.3 : Forme générale dans la description du champ moyen de Woods-Saxon

triques. En particulier, l'équation $V(r, \beta) = \text{const}$, qui définit les surfaces équipotentiellles est strictement équivalente à l'équation $l(r, \beta) = \text{const}$. Par exemple, en choisissant la surface $l(r, \beta) = 0$, qui correspond à la surface Σ définie par (1.1.5), on peut voir que la surface de diffusion du potentiel est indépendante de la déformation nucléaire. Dans le cadre du modèle à particules indépendantes, l'hamiltonien décrivant le mouvement d'un nucléon s'écrit :

$$H_{sp} = T + V + V^{so} + (V_c) \quad (1.2.4)$$

où :

- T est l'opérateur énergie cinétique donné par :

$$T = -\frac{\hbar^2}{2M} \Delta \quad (1.2.5)$$

Δ est le Laplacien et M est la masse du nucléon.

- V est le potentiel moyen de Woods-Saxon défini précédemment.

- V^{so} est l'opérateur de couplage spin-orbite défini par :

$$V^{so} = \lambda \left(\frac{\hbar}{2Mc} \right)^2 \vec{\nabla} \left(\frac{V_0}{1 + \exp(l(r, \beta))} \right) \cdot (\vec{\sigma} \wedge \vec{P}) \quad (1.2.6)$$

où λ est l'intensité de l'interaction spin-orbite, M est la masse du nucléon ; l'opérateur vecteur $\vec{\sigma}$ composé de matrices de Pauli est relié à l'opérateur de spin du nucléon par la relation connue $\vec{s} = \frac{1}{2}\vec{\sigma}$, et $\vec{P}$ est l'opérateur quantité de mouvement.

- V_c est l'opérateur énergie coulombienne défini pour la charge nucléaire $(Z - 1)e$. Cette énergie est distribuée uniformément sur la surface Σ et est exprimée en coordonnées cylindriques par [51] :

$$V_c(z, \rho) = \rho_e \int_{z_1}^{z_2} dz' \left\{ [\rho_\Sigma^2 - \rho^2 - (z' - z)^2 - (z' - z) \frac{\partial \rho_\Sigma^2}{\partial z'}] F(a, b) + E(a, b) \right\}, \quad (1.2.7)$$

où $\rho_\Sigma(z)$ est la valeur de la densité de charge ρ en un point de la surface de coordonnée z , et :

$$F(a, b) = a^{-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.2.8)$$

$$E(a, b) = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2} \sin^2 \varphi \right)^{-\frac{1}{2}}, \quad (1.2.9)$$

avec :

$$\begin{aligned} a^2 &= (z' - z)^2 + (\rho' + \rho)^2 \\ b^2 &= (z' - z)^2 + (\rho' - \rho)^2 \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Les valeurs des différents paramètres intervenant dans le calcul du champ moyen seront définies au chapitre 4.

1.2.2 Energies et fonctions d'onde individuelles

Après avoir défini l'hamiltonien de notre modèle, il s'agit maintenant de résoudre le problème aux valeurs propres :

$$H |\Psi_\nu\rangle = \varepsilon_\nu |\Psi_\nu\rangle \quad (1.2.11)$$

où H , $|\Psi_\nu\rangle$ et ε_ν représentent, respectivement, l'hamiltonien, la fonction d'onde et l'énergie individuelle du $\nu^{ème}$ nucléon.

Base de l'oscillateur harmonique déformé

Pour résoudre l'équation de Schrödinger (1.2.11) dans le modèle du champ moyen de Woods-Saxon, on développe ses solutions sur la base de l'oscillateur harmonique déformé (à symétrie axiale) exprimé en coordonnées cylindriques ρ , φ et z qui sont définies par les relations :

$$\begin{cases} x = \rho \cos \varphi \\ y = \rho \sin \varphi \\ z = z \end{cases} \quad (1.2.12)$$

Les fonctions propres en représentation (ρ, z, φ) , qui sont engendrées par les quatres nombres quantiques n_ρ , n_z , Λ et Σ , sont séparables par rapport aux variables ρ , φ , z et le facteur de spin. Nous nous référons ainsi à la base donnée par [52] :

$$\begin{aligned} \Psi_{n_\rho, n_z, \Lambda, \Sigma}(r, z, \varphi) &= \langle \rho, z, \varphi | n_\rho n_z \Lambda \Sigma \rangle \\ &= \Psi_{n_\rho}^\Lambda(\rho) \Psi_{n_z}(z) \Psi_\Lambda(\varphi) \chi(\Sigma) \end{aligned} \quad (1.2.13)$$

avec :

$$\Psi_{n_\rho}^\Lambda(\rho) = N_{n_\rho}^\Lambda \left(\frac{2m\omega_\perp}{\hbar} \right)^{\frac{1}{2}} L_{n_\rho}^{|\Lambda|}(\eta) \eta^{\frac{|\Lambda|}{2}} \exp\left(-\frac{\eta}{2}\right) \quad (1.2.14)$$

$$\Psi_{n_z}(z) = N_{n_z} \left(\frac{m\omega_z}{\hbar} \right)^{\frac{1}{4}} H_{n_z}(\xi) \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \quad (1.2.15)$$

$$\Psi_\Lambda(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(i\Lambda\varphi) \quad (1.2.16)$$

$$\Sigma = 2m_s \quad \chi\left(m_s = \frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad ; \quad \chi\left(m_s = -\frac{1}{2}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (1.2.17)$$

où n_z exprime le nombre de quanta dans la direction oz . Il prend des valeurs entières ≥ 0 et représente l'ordre du polynôme d'Hermite $H_{n_z}(\xi)$. Le nombre quantique n_ρ prend des valeurs entières ≥ 0 et représente l'ordre du polynôme de Laguerre $L_{n_\rho}^{|\Lambda|}(\eta)$.

Les coordonnées sans dimension (η, ξ) sont définies par :

$$\begin{aligned} \eta &= \frac{m\omega_\perp}{\hbar} \rho^2 \\ \xi &= \sqrt{\frac{m\omega_z}{\hbar}} z \\ \rho^2 &= x^2 + y^2. \end{aligned} \quad (1.2.18)$$

et les constantes de normalisation sont données par :

$$\begin{aligned} N_{n_z} &= \frac{1}{\sqrt{2^{n_z} n_z! \sqrt{\pi}}} \\ N_{n_\rho}^\Lambda &= \sqrt{\frac{n_\rho!}{(n_\rho + |\Lambda|)!}}. \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Dans cette dernière expression, il ne faut pas confondre n_ρ avec le nombre quantique $n_\perp$ défini par la relation :

$$n_\perp = 2n_\rho + |\Lambda|, \quad (1.2.20)$$

qui implique que $n_\perp$ et Λ doivent avoir même parité, et donc tous les deux sont pairs ou tous les deux sont impairs. En outre, $n_\rho = \frac{n_\perp - |\Lambda|}{2} \geq 0$ implique que $|\Lambda| \leq n_\perp$. Le nombre quantique Λ prend donc les valeurs suivantes :

$$\Lambda \in \{-n_\perp, -n_\perp + 2, \dots, n_\perp - 2, n_\perp\}. \quad (1.2.21)$$

Dans la base engendrant les état de l'oscillateur harmonique, habituellement on utilise le nombre quantique principal N au lieu de $n_\perp$ ou n_ρ tel que :

$$N = n_\perp + n_z, \quad (1.2.22)$$

et Ω au lieu de Σ , où :

$$\Omega = \Lambda + \Sigma. \quad (1.2.23)$$

Les nombres quantiques Λ et Σ sont, respectivement, les valeurs propres des projections du moment angulaire orbital et du spin sur l'axe de symétrie.

On voit bien que les fonctions d'onde (1.2.13) conservent la parité et sont invariantes par rotation autour de l'axe z [53].

Les trois fonctions dans (1.2.14), (1.2.15) et (1.2.16) sont, respectivement, des fonctions propres des opérateurs :

$$\begin{aligned} l_z &= \hbar \left(x \frac{\partial}{\partial y} - y \frac{\partial}{\partial x} \right) = -i\hbar \frac{\partial}{\partial \varphi} \\ H_z &= -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2 \\ H_\perp &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) + \frac{1}{2} m \omega_\perp^2 (x^2 + y^2) \end{aligned} \quad (1.2.24)$$

avec les valeurs propres :

$$\hbar\Lambda, \quad \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) \quad \text{et} \quad \hbar\omega_{\perp} (2n_{\rho} + |\Lambda| + 1). \quad (1.2.25)$$

En plus des trois fonctions (1.2.14), (1.2.15) et (1.2.16), la fonction (1.2.13) contient le terme de spin $\chi(\Sigma)$, qui est la fonction propre de l'opérateur s_z avec la valeur propre $\hbar\Sigma$.

Les solutions de l'équation (1.2.11) s'écrivent donc :

$$|\nu\rangle \equiv |i\Omega\pi\rangle = \sum_{n_{\rho} \, n_z \, \Lambda\Sigma} a_{n_{\rho} \, n_z \, \Lambda\Sigma}^{i\Omega\pi} |n_{\rho} \, n_z \, \Lambda\Sigma\rangle \quad (1.2.26)$$

où les états $|\nu\rangle$ sont caractérisés par le nombre quantique Ω qui désigne la projection du moment angulaire total, la parité π et un indice supplémentaire i .

Les énergies individuelles et les coefficients $a_{n_{\rho} \, n_z \, \Lambda\Sigma}^{i\Omega\pi}$ sont obtenus en diagonalisant l'hamiltonien (1.2.4) dans la base $|n_{\rho} \, n_z \, \Lambda\Sigma\rangle$.

De ce qui précède et d'après (1.2.25) l'énergie d'un état donné dans cette base est :

$$E_{n_{\rho}, n_z, \Lambda} = \hbar\omega_z \left(n_z + \frac{1}{2} \right) + \hbar\omega_{\perp} (n_{\perp} + 1) \quad (1.2.27)$$

Sommaire

2.1	Introduction	16
2.2	Hamiltonien du système	17
2.3	Théorie BCS	18
2.4	Equations du gap	21
2.5	Transformation de Bogoliubov-Valatin	23
2.5.1	Représentation quasiparticule	23
2.5.2	Etat fondamental	24
2.5.3	Diagonalisation de l'hamiltonien	25
2.6	Etats excités	27
2.7	Solution triviale	30

2.1 Introduction

Les modèles à particules indépendantes ont permis d'expliquer avec succès un certain nombre de phénomènes comme, l'existence des couches et des nombres magiques, la discontinuité de l'énergie de liaison en fonction du nombre de particules (noyaux magiques), le spin ou la parité. Cependant, un grand nombre de propriétés comme les effets pair-impairs et les spectres rotationnels, ne peuvent être prédites dans le seul cadre du modèle à particules indépendantes. Il est donc nécessaire d'aller au delà du champ moyen et de tenir compte de l'interaction résiduelle entre les nucléons. La partie la plus importante de l'interaction résiduelle est celle d'appariement [54, 55].

L'interaction d'appariement justifie l'état fondamental $J^\pi = 0^+$ des noyaux pairs et explique le caractère vibrationnel collectif des premiers états 2^+ des noyaux à couches presque fermées. D'autre part ces corrélations jouent un rôle important dans l'étude de la structure nucléaire et permettent, entre autre, de déterminer une contribution essentielle à :

- L'énergie de liaison [56] .
- L'effet pair-impair [57] .
- Les probabilités d'occupation des états de particules indépendantes [58, 59] .
- Le spectre d'excitation de quasi-particules [60] .
- Les probabilités d'émission bêta [61, 62] .
- Les sections efficaces des réactions de transfert [63] .
- Les modes collectifs à basse énergie [64] .
- Le moment d'inertie [65, 66] .
- Le phénomène de backbending [67, 68] .

Par ailleurs, il est important de noter que seuls les noyaux à couches fermées ne sont pas concernées par l'appariement. Par conséquent, il est nécessaire d'introduire cette interaction résiduelle dans l'étude de la quasi-totalité des des noyaux du tableau périodique.

2.2 Hamiltonien du système

Soit un système de n nucléons. L'hamiltonien qui régit le mouvement d'un tel système est donné par :

$$H = H_{sp} + V \quad (2.2.1)$$

où H_{sp} est le champ moyen du modèle à particules indépendantes (sa valeur moyenne est l'énergie du système en absence des interactions résiduelles). Ce dernier définit une base de représentation dans laquelle l'hamiltonien H_{sp} est *diagonal*. Dans la présente étude, il s'agit de l'hamiltonien de Woods-Saxon introduit dans le premier chapitre.

Dans le formalisme de la seconde quantification, il s'écrit :

$$H_{sp} = \sum_{\nu} \varepsilon_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} \quad (2.2.2)$$

où ε_{ν} est l'énergie d'une particule dans l'état $|\nu\rangle$; $a_{\nu}^{\dagger}$ et a_{ν} sont respectivement les opérateurs de création et d'annihilation correspondants. Ils obéissent aux règles générales d'anti-commutation des fermions :

$$\begin{aligned} \{a_{\nu}^{\dagger}, a_{\mu}^{\dagger}\} &= \{a_{\nu}, a_{\mu}\} = 0 \\ \{a_{\nu}^{\dagger}, a_{\mu}\} &= \delta_{\nu\mu} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

V représente l'ensemble des interactions résiduelles. Dans la même base, les termes complémentaires, qui sont dûs à ces interactions résiduelles à deux corps, s'écrivent en seconde quantification :

$$V = \frac{1}{4} \sum_{klmn} \langle kl | V | mn \rangle a_k^{\dagger} a_l^{\dagger} a_n a_m \quad (2.2.4)$$

où $\langle kl | V | mn \rangle$ sont les éléments de matrices anti-symétrisés de l'ensemble des interactions résiduelles V .

Pour rendre compte de l'effet d'appariement, Belyaev [69] a introduit la notion d'interaction résiduelle entre deux états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps.

Cette force est définie par ses éléments de matrices :

$$\langle kl | V | mn \rangle = -4G \delta_{k\tilde{l}} \delta_{m\tilde{n}} \quad G > 0 \quad (2.2.5)$$

où G est une constante positive appelée : constante d'appariement ou *intensité de la force d'appariement*, faisant ainsi l'hypothèse que la force d'appariement entre les paires (k, l) et (m, n) est insensible au choix de ces paires. Choisir la constante de force G positive signifie que l'ensemble des éléments de matrice sont négatifs ; l'interaction d'appariement étant attractive.

Dans la présente étude, les deux systèmes neutron et proton seront traités séparément, ceci est dû au fait que dans les noyaux lourds, les niveaux de Fermi neutron et proton sont énergétiquement fort distants, de sorte que l'interaction neutron-proton est très faible. On ne tiendra compte, donc, que de l'interaction entre nucléons de même nature [70].

2.3 Théorie BCS

L'interaction d'appariement est souvent prise en compte par la théorie BCS en raison de sa simplicité. Dans cette théorie l'appariement concerne uniquement des états dégénérés en énergie et reliés entre eux par renversement du sens du temps (Figure 2.3.1).

Le mouvement d'un nucléon dans un état $|\nu\rangle$ est complètement déterminé par le mouvement de celui dans l'état conjugué par rapport au sens du temps $|\tilde{\nu}\rangle$. Ceci permet de réduire l'espace des états à particules indépendantes de moitié et de ne considérer que les états correspondant à une valeur positive de la projection du moment angulaire ($\nu > 0$).

Donc, dans le formalisme de la seconde quantification un système de particules appariées est décrit par l'hamiltonien intrinsèque :

$$H = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} \left(a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\nu}} \right) - G \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu}^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (2.3.1)$$

où le premier terme est celui du modèle à particules indépendantes :

$$H_{sp} = \sum_{\nu>0} \varepsilon_{\nu} \left(a_{\nu}^{+} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\nu}} \right) \quad (2.3.2)$$

Quant au second terme dans (2.3.1), c'est celui d'appariement :

$$H_p = -G \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu}^{+} a_{\tilde{\nu}}^{+} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (2.3.3)$$

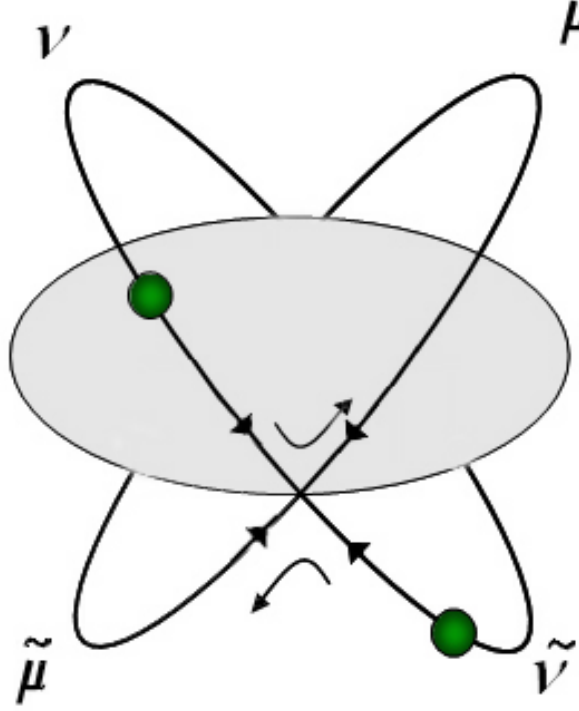


Figure 2.3.1 : Schéma de diffusion des particules d'un état à un autre due à l'interaction d'appariement. Les deux particules représentées sont dans des états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps.

Comme il a été dit précédemment, dans ces expressions, a_{ν}^{+} et $a_{\tilde{\nu}}^{+}$ sont respectivement les opérateurs de création d'une particule dans l'état $|\nu\rangle$ et son renversé par rapport au sens du temps $|\tilde{\nu}\rangle$, ε_{ν} est l'énergie de ce couple d'états individuels. Du fait de la forme particulière de l'interaction (2.3.1), on doit utiliser une forme plus développée qu'un simple déterminant de Slater comme fonction d'onde d'essai pour l'état fondamental. Par ailleurs dans l'esprit de la théorie du champ moyen, cette fonction d'onde doit correspondre à un état de paires de particules indépendantes. De plus, le fait que les nucléons de chaque paire soient corrélés, l'opérateur de création de cette paire ne doit pas être un simple produit de deux opérateurs de création de nucléons. Ces considérations ont conduit Bardeen, Cooper et Schrieffer (BCS) à écrire l'état fondamental correspondant à ce type d'interaction sous

la forme normalisée [71] :

$$|BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \left(u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} \right) |0\rangle, \quad (2.3.4)$$

où la probabilité que la paire spécifique $(\nu, \tilde{\nu})$ soit occupée, v_{ν}^2 , ou vide, u_{ν}^2 , est indépendante des autres paires du système.

La norme de l'état BCS est donnée par :

$$\langle BCS | BCS \rangle = \langle 0 | \prod_{\nu>0} (u_{\nu} + v_{\nu} a_{\tilde{\nu}} a_{\nu}) \prod_{\mu>0} (u_{\mu} + v_{\mu} a_{\mu}^{\dagger} a_{\tilde{\mu}}^{\dagger}) |0\rangle. \quad (2.3.5)$$

En tenant compte des relations d'anti-commutation des fermions, il vient :

$$\langle BCS | BCS \rangle = \prod_{\nu>0} (u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2), \quad (2.3.6)$$

et donc la condition de normalisation exige que :

$$u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2 = 1. \quad (2.3.7)$$

Cet état n'est pas fonction propre de l'opérateur nombre de particules N (brisure implicite de symétrie), ce dernier n'est conservé qu'en moyenne

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = n, \quad (2.3.8)$$

où n est le nombre réel de particules du système. On tient compte de cette contrainte en introduisant un multiplicateur de Lagrange λ , qui représente le potentiel chimique, pour assurer la conservation en moyenne du nombre de particules. Ceci revient à minimiser la valeur moyenne de *l'hamiltonien auxiliaire* :

$$H' = H - \lambda N, \quad (2.3.9)$$

soit :

$$E_0 = \langle BCS | (H - \lambda N) | BCS \rangle. \quad (2.3.10)$$

Sachant que l'opérateur nombre de particules est donné par :

$$N = \sum_{\nu>0} \left(a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}} \right) \quad (2.3.11)$$

On verifie facilement qu'avec l'état BCS, on obtient pour la probabilité d'occupation :

$$\langle BCS | a_\nu^\dagger a_\nu | BCS \rangle = \langle BCS | a_\nu^\dagger a_\nu | BCS \rangle = v_\nu^2, \quad (2.3.12)$$

et pour les éléments de matrice de $a_\nu^\dagger a_\nu^\dagger a_\mu a_\mu$:

$$\langle BCS | a_\nu^\dagger a_\nu^\dagger a_\mu a_\mu | BCS \rangle = \begin{cases} u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu & \text{pour } \nu \neq \mu \\ v_\nu^2 & \text{pour } \nu = \mu \end{cases}, \quad (2.3.13)$$

l'élément de matrice d'appariement prend donc la forme :

$$\langle BCS | \left(-G \sum_{\nu\mu>0} a_\nu^\dagger a_\nu^\dagger a_\mu a_\mu \right) | BCS \rangle = -G \left(\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \right)^2 - G \sum_{\nu>0} v_\nu^4. \quad (2.3.14)$$

L'expression des éléments de matrice de l'hamiltonien réduit devient :

$$\langle BCS | (H - \lambda N) | BCS \rangle = 2 \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \right)^2 - G \sum_{\nu>0} v_\nu^4.$$

La valeur moyenne (2.3.10) s'écrit alors :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu>0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G}{2} v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - G \sum_{\nu\mu>0} u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu, \quad (2.3.15)$$

2.4 Equations du gap

Le choix optimal des paramètres u_ν et v_ν dans (2.3.4) est déterminé par le principe variationnel :

$$\delta \langle BCS | (H - \lambda N) | BCS \rangle = 0,$$

de manière à minimiser E_0 d'une part, et d'autre part à ce que la valeur moyenne de N soit égale à n :

$$\frac{\partial E_0}{\partial u_\nu} = \frac{\partial E_0}{\partial v_\nu} = 0. \quad (2.4.1)$$

Nous tenons compte des conditions (2.3.7) directement en introduisant la dérivée variationnelle :

$$\frac{\delta}{\delta v_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} + \frac{\partial u_\nu}{\partial v_\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu} = \frac{\partial}{\partial v_\nu} - \frac{v_\nu}{u_\nu} \frac{\partial}{\partial u_\nu}. \quad (2.4.2)$$

En introduisant la demi-largeur du gap Δ définie par :

$$\Delta = G \sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu, \quad (2.4.3)$$

la relation (2.4.1) conduit aux équations :

$$2e_\nu u_\nu v_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) = 0, \quad (2.4.4)$$

avec :

$$e_\nu = \varepsilon_\nu - \lambda - G v_\nu^2 \quad (2.4.5)$$

Le dernier terme dans (2.4.5) représente la contribution de l'interaction d'appariement au potentiel qui est contenu dans e_ν . L'effet important de ces interactions s'exprime par le paramètre du gap Δ . La résolution du système (2.4.4) conduit aux équations :

$$\begin{aligned} v_\nu^2 &= \frac{1}{2} \left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{\Delta^2}{e_\nu^2 + \Delta^2}} \right] = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{e_\nu}{\sqrt{e_\nu^2 + \Delta^2}} \right], \\ u_\nu^2 &= 1 - v_\nu^2 \end{aligned} \quad (2.4.6)$$

On constate qu'une ambiguïté de signe apparaît. Cette ambiguïté est éliminée en notant que pour des énergies très grandes ($e_\nu \rightarrow \infty$) des particules indépendantes, les probabilités d'occupation, v_ν^2 , doivent tendre vers zéro. Ceci est réalisé en prenant le signe négatif dans (2.4.6). Ce qui fait que :

$$v_\nu^2 = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{e_\nu}{\sqrt{e_\nu^2 + \Delta^2}} \right], \quad u_\nu^2 = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{e_\nu}{\sqrt{e_\nu^2 + \Delta^2}} \right]. \quad (2.4.7)$$

et l'autre équation du gap est donnée par :

$$\langle BCS | N | BCS \rangle = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 = 2P, \quad (2.4.8)$$

P étant le nombre de paires de particules appariées. Ce sont ces équations qui sont utilisées en pratique. A partir de l'équation (2.4.7), on voit que le paramètre Δ mesure la largeur dans l'espace des énergies ($\varepsilon_\nu - Gv_\nu^2$) autour de λ où les probabilités diffèrent essentiellement de 1 et de 0 (voir Figure 2.7.1). C'est pour les états dans cet intervalle que les produits $u_\nu v_\nu$ sont essentiellement non nuls. Le nombre de ces états détermine la grandeur du gap.

Si l'on néglige le terme en v_ν^4 dans l'expression de E_0 (puisque $v_\nu^2 < 1$ on peut supposer que v_ν^4 est suffisamment petit).

L'expression (2.3.15) devient dans ce cas :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu>0} (\varepsilon_\nu - \lambda) v_\nu^2 - G \left(\sum_{\nu>0} u_\nu v_\nu \right)^2 \quad (2.4.9)$$

et les probabilités d'occupation et d'inoccupation s'écrivent :

$$v_\nu^2 = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \quad (2.4.10)$$

$$u_\nu^2 = 1 - v_\nu^2$$

La seconde condition sur u_ν et v_ν s'écrit alors :

$$n = 2 \sum_{\nu>0} v_\nu^2 \quad (2.4.11)$$

$$n = \sum_{\nu>0} \left\{ 1 - \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\}$$

Les équations du gap sont alors définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2}{G} = \sum_{\nu>0} \frac{1}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}}, \\ n = \sum_{\nu>0} \left\{ 1 \pm \frac{\varepsilon_\nu - \lambda}{\sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right\} \end{array} \right\} \quad (2.4.12)$$

Ainsi, il apparaît que les équations du gap deviennent un système non linéaire de deux équations à deux inconnues : λ et Δ .

2.5 Transformation de Bogoliubov-Valatin

2.5.1 Représentation quasiparticule

Dans le but de diagonaliser H' Bogoliubov et Valatin [72] ont défini *de nouveaux opérateurs* α_ν et α_ν^+ , qui sont combinaisons linéaires des opérateurs de création et d'an-

niihilation de vraies particules, par une transformation canonique :

$$\begin{aligned}\alpha_{\tilde{\nu}}^+ &= u_{\nu} a_{\tilde{\nu}}^+ + v_{\nu} a_{\nu}, \\ \alpha_{\nu} &= -v_{\nu} a_{\tilde{\nu}}^+ + u_{\nu} a_{\nu}.\end{aligned}\tag{2.5.1}$$

Des opérateurs de ce type qui combinent des opérateurs de création et d'annihilation sont appelés des opérateurs de quasiparticules. La quasiparticule créée par $\alpha_{\tilde{\nu}}^+$ est une vraie particule avec une amplitude de probabilité u_{ν} et un vrai trou avec une amplitude de probabilité v_{ν} .

Les paramètres variationnels u_{ν} et v_{ν} sont des nombres positifs qui satisfont aux conditions :

$$u_{\nu} = u_{\tilde{\nu}} \quad \text{et} \quad v_{\nu} = v_{\tilde{\nu}}\tag{2.5.2}$$

Ce qui signifie que l'état $|\tilde{\nu}\rangle$ est occupé ou inoccupé avec la même probabilité que l'état $|\nu\rangle$.

D'autre part, les opérateurs α_{ν} et $\alpha_{\tilde{\nu}}^+$ étant aussi des opérateurs de création et d'annihilation de fermions, on a :

$$\{a_{\nu}^+, a_{\mu}\} = (u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2) \delta_{\nu\mu} = \delta_{\nu\mu}\tag{2.5.3}$$

Ce qui entraîne :

$$u_{\nu}^2 + v_{\nu}^2 = 1\tag{2.5.4}$$

La transformation inverse s'écrit donc :

$$\begin{aligned}a_{\tilde{\nu}}^+ &= u_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}^+ - v_{\nu} \alpha_{\nu}, \\ a_{\nu} &= v_{\nu} \alpha_{\tilde{\nu}}^+ + u_{\nu} \alpha_{\nu}.\end{aligned}\tag{2.5.5}$$

2.5.2 Etat fondamental

La transformation de Bogoliubov-Valatin définit une nouvelle représentation dite *représentation quasi-particule* dont l'état fondamental sera noté $|\psi\rangle$. Il s'avère que cet état défini par la propriété $\alpha_{\nu} |\psi\rangle = 0$, n'est rien d'autre que l'état BCS donné par (2.3.4).

La forme explicite de cet état n'est pas connue, tout ce qu'on sait c'est que $|BCS\rangle$ est un état dans lequel toutes les quasi-particules sont absentes, on peut donc l'écrire :

$$|\psi\rangle \propto \prod_{\nu} \alpha_{\nu} |0\rangle \quad (2.5.6)$$

D'après la transformation (2.5.1) et l'équation (2.5.6) on retrouve l'état normalisé (2.3.4) :

$$|\psi\rangle \equiv |BCS\rangle = \prod_{\nu>0} \left(u_{\nu} + v_{\nu} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} \right) |0\rangle$$

Il est à noter que ce dernier ne peut décrire qu'un système possédant un nombre pair de particules. On remarque par ailleurs que cet état est une superposition d'états correspondants à différents nombres de paires de particules, ce qui représente l'inconvénient de cette théorie. En effet, le produit de l'équation précédente peut être écrit sous la forme :

$$|\psi\rangle \propto \left(\prod_{\nu>0} u_{\nu} \right) \prod_{\nu>0} \left(1 + \frac{v_{\nu}}{u_{\nu}} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} \right) |0\rangle \quad (2.5.7)$$

Ou encore :

$$|\psi\rangle \propto \left(\prod_{\nu>0} u_{\nu} \right) \left[|0\rangle + \sum_{\nu>0} \frac{v_{\nu}}{u_{\nu}} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{\nu\mu>0} \frac{v_{\nu} v_{\mu}}{u_{\nu} u_{\mu}} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\mu}^{\dagger} a_{\tilde{\mu}}^{\dagger} |0\rangle + \dots \right] \quad (2.5.8)$$

L'état $|BCS\rangle$ de Bardeen, Cooper et Schrieffer [71] a été introduit par ces derniers pour décrire la supraconductivité dans les métaux. En physique de l'état solide, la non conservation du nombre de particules n'est pas vraiment gênante car ce nombre est très grand. Par contre, en physique nucléaire, ce défaut est nuisible vu le nombre limité des particules du système et entraîne un certain nombre d'effets non physiques [73].

2.5.3 Diagonalisation de l'hamiltonien

Comme nous venons de le voir dans la section précédente, le nombre de particules n'est pas conservé. Pour tenir compte de cette contrainte, nous utilisons, là aussi, la méthode des multiplicateurs de Lagrange qui conduit à l'hamiltonien auxiliaire :

$$H' = \sum_{\nu>0} (\varepsilon_{\nu} - \lambda) \left(a_{\nu}^{\dagger} a_{\nu} + a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}} \right) - G \sum_{\nu\mu>0} a_{\nu}^{\dagger} a_{\tilde{\nu}}^{\dagger} a_{\tilde{\mu}} a_{\mu} \quad (2.5.9)$$

et par la transformation de Bogoliubov-Valatin, il est possible d'exprimer cet hamiltonien en fonction des nouveaux opérateurs α^+ , α .

En appliquant le théorème de Wick de sorte que les α^+ soient du côté gauche des α (produit normal), l'hamiltonien réduit (2.5.9) s'écrit sous la forme :

$$H' = E_0 + H_{11} + H_2 + H_{resid} \quad (2.5.10)$$

où,

♦ E_0 est une constante qui contient les termes entièrement contractés :

$$E_0 = 2 \sum_{\nu > 0} \left(\varepsilon_\nu - \lambda - \frac{G}{2} v_\nu^2 \right) v_\nu^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (2.5.11)$$

♦ H_{11} contient les produits normaux de deux opérateurs α^+ et α (opérateur de création et d'annihilation respectivement) :

$$H_{11} = \sum_{\nu > 0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \quad (2.5.12)$$

♦ H_2 contient les termes en $\alpha^+ \alpha^+$ et $\alpha \alpha$:

$$H_2 = \sum_{\nu > 0} H_2^\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ + \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu) \quad (2.5.13)$$

♦ H_{resid} contient le produit normale : $a_\nu^+ a_\nu^+ a_{\bar{\mu}} a_\mu$:

$$H_{resid} = H_{22} + H_3 + H_4 \quad (2.5.14)$$

avec,

$$H_{22} = \sum_{\nu \mu > 0} \{ H_{22}^{\nu \mu} \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu + \bar{H}_{22}^{\nu \mu} (\alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_{\bar{\nu}} + \alpha_\nu^+ \alpha_\mu^+ \alpha_\mu \alpha_\nu + 2 \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\nu) \} \quad (2.5.15)$$

$$H_3 = \sum_{\nu \mu > 0} H_3^{\nu \mu} \{ \alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ (\alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}} + \alpha_\mu^+ \alpha_\mu) + (\alpha_\mu^+ \alpha_\mu + \alpha_{\bar{\mu}}^+ \alpha_{\bar{\mu}}) \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu \} \quad (2.5.16)$$

$$H_4 = \sum_{\nu \mu > 0} H_4^{\nu \mu} (\alpha_\nu^+ \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_\mu^+ \alpha_{\bar{\mu}}^+ + \alpha_{\bar{\mu}} \alpha_\mu \alpha_{\bar{\nu}} \alpha_\nu) \quad (2.5.17)$$

et la notation

$$E_\nu = (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) (u_\nu^2 - v_\nu^2) + 2\Delta u_\nu v_\nu \quad (2.5.18)$$

$$H_2^\nu = 2 (\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2) u_\nu v_\nu - \Delta (u_\nu^2 - v_\nu^2) \quad (2.5.19)$$

$$H_{22}^{\nu\mu} = -G (u_\nu^2 v_\mu^2 + v_\nu^2 u_\mu^2) \quad (2.5.20)$$

$$\bar{H}_{22}^{\nu\mu} = -G u_\nu v_\nu u_\mu v_\mu \quad (2.5.21)$$

$$H_3^{\nu\mu} = G (u_\nu^2 - v_\nu^2) u_\mu v_\mu \quad (2.5.22)$$

$$H_4^{\nu\mu} = \frac{G}{2} (u_\nu^2 v_\mu^2 + u_\mu^2 v_\nu^2) \quad (2.5.23)$$

La partie $H_{résid}$ peut être interprétée comme une interaction entre les quasi-particules. L'approximation BCS consiste à négliger $H_{résid}$ et à choisir les paramètres u_ν et v_ν de manière à ce que la partie H_2 s'annule (ce qui est exprimé par l'équation (2.4.4)).

2.6 Etats excités

Un noyau constitué de nucléons appariés peut être excité dans un état vibrationnel. S'il est déformé, il peut être également excité dans un état rotationnel. En dehors de ces deux cas, on peut aussi envisager des états où l'excitation est obtenue par brisure d'une ou plusieurs paires. En effet, on voit à partir de (2.5.11) que l'appariement fournit un gain d'énergie de liaison de $\Delta u_\nu v_\nu$ par paire de nucléons appariés. On peut donc exciter le système en brisant ces paires.

Dans la représentation quasiparticules, les états excités du système sont obtenus en créant des quasiparticules dans le vide $|\psi\rangle$. Par exemple, l'état excité à une quasiparticule est donné par :

$$|\psi_\mu\rangle \equiv \alpha_\mu^+ |\psi\rangle = a_\mu^+ \prod_{\nu>0(\neq\mu)} (u_\nu + v_\nu a_\nu^+ a_\nu^+) |0\rangle. \quad (2.6.1)$$

L'état excité est donc obtenu en remplaçant dans l'état $|\Psi\rangle$ la paire de particules appariées $(\mu, \tilde{\mu})$ par une seule particule dans l'état $|\mu\rangle$. Ainsi, pour tout μ , $\alpha_\mu^+ |\psi\rangle$ est une superposition d'états à nombre impair de nucléons et ne peut convenir que pour la description d'un nombre impair de nucléons de l'espèce considérée.

L'état à deux quasiparticules est obtenu de la même manière mais par la création de deux quasiparticules. Il est donné par :

$$|\psi_{\mu\sigma}\rangle \equiv \alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\sigma}^{+}|\psi\rangle = a_{\mu}^{+}a_{\sigma}^{+} \prod_{\nu>0(\neq\mu\sigma)} (u_{\nu} + v_{\nu}a_{\nu}^{+}a_{\bar{\nu}}^{+})|0\rangle. \quad (2.6.2)$$

Comme l'état BCS, cet état décrit un système à nombre pair de particules appariées sauf deux qui sont dans les états $a_{\mu}^{+}|0\rangle$ et $a_{\sigma}^{+}|0\rangle$.

L'état excité à deux quasiparticules appariées est représentés par :

$$|\psi_{\mu\bar{\mu}}\rangle \equiv \alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\bar{\mu}}^{+}|\Psi\rangle = (v_{\mu} - u_{\mu}a_{\mu}^{+}a_{\bar{\mu}}^{+}) \prod_{\nu>0(\neq\mu)} (u_{\nu} + v_{\nu}a_{\nu}^{+}a_{\bar{\nu}}^{+})|0\rangle. \quad (2.6.3)$$

Puisque $\alpha_{\mu}|\psi\rangle = 0$, pour tout μ , $\alpha_{\mu}^{+}\alpha_{\bar{\mu}}^{+}|\psi\rangle$ est orthogonal à $|\psi\rangle$ comme tous les autres états excités considérés ici.

Une question que l'on se pose lorsqu'on est peu habitué à ce genre de système est : d'où vient la quasiparticule ? et pourquoi n'y-a-t-il pas un terme traduisant l'énergie qu'une des deux particules dans l'état ν vient de quitter ? Il faut bien reconnaître que les ouvrages ne sont pas d'une grande clarté sur ce sujet.

On peut reformuler autrement la question et se demander quel est le coût énergétique de dissociation d'une paire. Le problème est que le nombre de paires n'est pas fixé et que chacune appartient à une combinaison linéaire d'états $|\nu\bar{\nu}\rangle$. On ne peut en aucun cas dire que l'on retire une paire d'un état $|\nu\bar{\nu}\rangle$ et que l'on met les nucléons ailleurs.

La seule chose que l'on peut dire est que l'on retire deux nucléons, on les fixe au sens des quasi-particules (avec leurs trous associés) sur les kets $|\nu\bar{\nu}\rangle$ et $|\mu\bar{\mu}\rangle$. Les états bien identifiés $|\nu\bar{\nu}\rangle$ et $|\mu\bar{\mu}\rangle$ sont retirés des états concernés par l'appariement et le reste des nucléons s'organise à nouveau en paires sur les états disponibles.

Dissocier une paire, c'est créer deux quasi-particules et l'énergie de dissociation ne se réfère pas à la paire mais aux états ν et μ des deux quasi-particules.

Cela redonne tout son sens à la quasi-particule comme excitation d'un système BCS.

Les énergies de ces états à quasi-particules sont obtenues en calculant sur ces derniers la valeur moyenne de $E_0 + H_{11}$:

$$\begin{aligned}
 \langle \psi_\mu | (E_0 + H_{11}) | \psi_\mu \rangle &= \langle \psi | \alpha_\mu \left[E_0 + \sum_{\nu>0} E_\nu (\alpha_\nu^+ \alpha_\nu + \alpha_{\bar{\nu}}^+ \alpha_{\bar{\nu}}) \right] \alpha_\mu^+ | \psi \rangle, \\
 &= E_0 + E_\mu, \\
 &= E_0 + \sqrt{(\varepsilon_\nu - \lambda - Gv_\nu^2)^2 + \Delta^2} \geq E_0 + \Delta. \tag{2.6.4}
 \end{aligned}$$

De la même manière :

$$\langle \psi_{\mu\sigma} | (E_0 + H_{11}) | \psi_{\mu\sigma} \rangle = E_0 + E_\mu + E_\sigma \geq E_0 + 2\Delta, \tag{2.6.5}$$

$$\langle \psi_{\mu\tilde{\mu}} | (E_0 + H_{11}) | \psi_{\mu\tilde{\mu}} \rangle = E_0 + 2E_\mu \geq E_0 + 2\Delta. \tag{2.6.6}$$

On remarque que pour avoir un état excité à une (resp. deux) quasi-particule indépendante, il faut fournir au noyau un minimum d'énergie égale à Δ (resp. 2Δ).

2.7 Solution triviale

En faisant une étude de la variation de Δ en fonction de la constante d'appariement G , on constate que lorsque $G \leq G_c^{(1)}$, Δ s'annule.

La solution triviale donnée par les équations du gap dans ce cas est :

$$\begin{cases} u_\nu^2 = 1, & v_\nu^2 = 0 & \text{si } \varepsilon_\nu > \lambda \\ u_\nu^2 = 0, & v_\nu^2 = 1 & \text{si } \varepsilon_\nu \leq \lambda \end{cases} \quad (2.7.1)$$

et les énergies de quasi-particules deviennent :

$$\begin{aligned} E_\nu &= \varepsilon_\nu - \lambda, \text{ pour les états d'énergies } \varepsilon_\nu > \lambda \\ E_\nu &= -\varepsilon_\nu + \lambda + G, \text{ pour les états d'énergies } \varepsilon_\nu < \lambda \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Créer une quasiparticule revient alors soit à enlever une particule d'un état occupé, soit à mettre une particule dans un état vide.

Dans ce cas λ correspond à l'énergie du *niveau de Fermi* dans le modèle à particules indépendantes et l'énergie du système devient :

$$E_{BCS} (\Delta = 0) = 2 \sum_{\nu}' \varepsilon_\nu - G \sum_{\nu}' 1, \quad (2.7.3)$$

où : $\sum_{\nu}'$ correspond à la sommation sur les niveaux occupés [74].

⁽¹⁾ G_c est une valeur critique de G

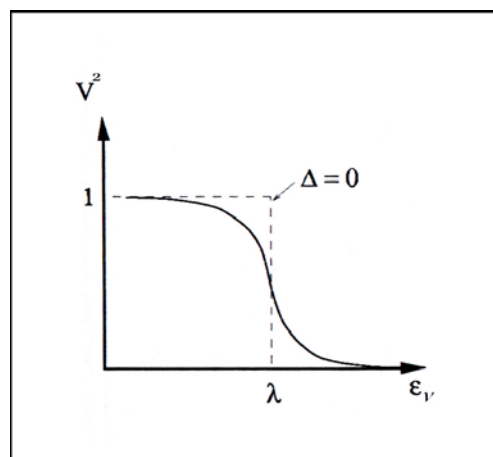


Figure 2.7.1 : Variation de la probabilité d'occupation en fonction de l'énergie en présence ($\Delta \neq 0$) et en absence ($\Delta = 0$) d'appariement.

TRAITEMENT DES NOYAUX EN ROTATION

Sommaire

3.1	Hamiltonien du système	33
3.2	Signature	34
3.3	Représentation de Goodman	36
3.3.1	Propriétés des états de Goodman	36
3.4	Expression de l'hamiltonien dans la base de Goodman	38
3.4.1	Éléments de matrice de H_{sp}	38
3.4.2	Éléments de matrice de J_x	39
3.5	Diagonalisation	40
3.6	Inclusion de l'interaction d'appariement	41
3.7	Fonction d'onde	42
3.8	Equations du gap	43
3.9	Transformation de Bogoliubov-Valatin	45

La méthode du cranking, initialement introduite par Inglis [75], est le traitement microscopique qui a eu le plus de succès dans l'étude des noyaux en rotation. L'idée de cette méthode est d'utiliser un système de référence fixe par rapport au potentiel nucléaire et de faire tourner ce potentiel avec une fréquence constante ω . Le système de coordonnées sera alors en rotation par rapport au système du laboratoire [76]. Tout comme pour un système macroscopique (la terre par exemple) cette transformation d'un système dans un autre fait apparaître des forces de Coriolis et centrifuges qui agissent sur le système en rotation [77].

3.1 Hamiltonien du système

La rotation d'un champ moyen asymétrique par rapport à l'axe de rotation, présente une dépendance explicite du temps dans l'équation de Schrödinger. Celle-ci peut être réduite, cependant, à une équation de mouvement stationnaire quand le référentiel (x, y, z) du laboratoire est transformé en référentiel tournant (x', y', z') [78] :

$$\begin{cases} x' = x \\ y' = y \cos \omega t + z \sin \omega t \\ z' = -y \sin \omega t + z \cos \omega t \end{cases} \quad (3.1.1)$$

Ici $x' = x$, car l'axe x est choisi comme axe de rotation. En effet, nous considérons un noyau à symétrie axiale qui tourne avec une vitesse angulaire ω , l'axe de rotation ox étant perpendiculaire à l'axe de symétrie oz .

L'équation de Schrödinger dépendante du temps s'écrit dans le système du laboratoire [79] :

$$i \frac{\partial}{\partial t} \phi_L = H_L \phi_L \quad (3.1.2)$$

où H_L et ϕ_L sont respectivement l'hamiltonien du système et sa fonction d'onde rapportés au référentiel non tournant du laboratoire au moyen de l'opérateur de rotation :

$$\mathcal{R} = e^{-iJ_x \omega t} \quad (3.1.3)$$

$J_x = J_{x'}$ étant la composante du moment angulaire suivant l'axe x .

Les paramètres intrinsèques sont exprimés dans le système du laboratoire à l'aide de l'opérateur de rotation :

$$\phi_L = \mathcal{R}\phi_{int} , \quad H_L = \mathcal{R} H_{int} \mathcal{R}^{-1} \quad (3.1.4)$$

En substituant (3.1.4) dans (3.1.2), on obtient l'équation de Schrödinger dans le système intrinsèque :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi_{int} = (H - \omega J_x) \phi_{int} = H_\omega \phi_{int} \quad (3.1.5)$$

d'où finalement :

$$i\frac{\partial}{\partial t}\phi_{int} = H_\omega \phi_{int}$$

avec

$$H_\omega = H + H_{Crank} \quad (3.1.6)$$

où

$$H_{Crank} = -\omega J_x$$

est dit *hamiltonien du Cranking*.

Donc, l'hamiltonien d'un système en rotation, constitué de particules appariées, peut s'écrire :

$$H_\omega = H_{sp} + H_{Crank} + H_p \quad (3.1.7)$$

H_{sp} et H_p étant donnés, respectivement, par les relations (2.3.2) et (2.3.3).

3.2 Signature

Pour une vitesse angulaire nulle ($\omega = 0$), la composante $J_z = \sum_\nu (j_z)_\nu$ du moment angulaire est conservée, où $(j_z)_\nu$ est la composante du moment angulaire d'un nucléon suivant l'axe de quantification. Dans ce cas l'état individuel peut être identifié par Ω_ν (la valeur propre de $(j_z)_\nu$) et la parité π_ν ; $K = \sum_\nu \Omega_\nu$ et $\pi = \prod_\nu \pi_\nu$ sont de bons nombres quantiques. L'hamiltonien du système peut être alors diagonalisé dans chaque sous-espace de valeur fixe de K et de π .

Par contre, pour $\omega \neq 0$, J_z n'est plus conservé et les Ω_ν ne peuvent être utilisés pour indexer les différents états individuels. L'hamiltonien intrinsèque reste, toutefois, invariant sous l'effet des trois rotations $\mathcal{R}_k$ d'un angle π autour des trois principaux axes du champ nucléaire [78] :

$$\mathcal{R}_k = \exp(-i\pi J_k) \quad (3.2.1)$$

où k dénote les directions des trois axes x' , y' , et z' . Cependant, l'hamiltonien du Cranking est invariant uniquement par rapport à la rotation autour de l'axe x .

Une rotation de 2π , réalisée par $\mathcal{R}_x^2(\pi)$, laisse invariante la fonction d'onde décrivant un système constitué d'un nombre A pair de nucléons et change le signe d'une fonction d'onde d'un nombre A impair, telle que :

$$\mathcal{R}_x^2(\pi) = (-1)^A$$

Les valeurs propres de $\mathcal{R}_x(\pi)$ sont alors données par :

$$\begin{aligned} r &= \pm 1 & \text{pour} & \quad A \text{ pair} \\ r &= \pm i & \text{pour} & \quad A \text{ impair.} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

On appelle *signature* le nombre quantique α , défini par :

$$r = e^{-i\pi\alpha} \quad (3.2.3)$$

qui a l'avantage d'être additif.

La signature et le moment angulaire totale sont reliés par :

$$\begin{aligned} A \text{ pair} &\implies J \text{ entier} & \begin{cases} \alpha = 0, & r = e^{-i\pi J} = +1, & J = 0, 2, 4, \dots \\ \alpha = 1, & r = e^{-i\pi J} = -1, & J = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \\ A \text{ impair} &\implies J \text{ demi-entier} & \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2}, & r = e^{-i\pi J} = -i, & J = \frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, \dots \\ \alpha = -\frac{1}{2}, & r = e^{-i\pi J} = +i, & J = \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, \frac{11}{2}, \dots \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

A partir de ces relations on en déduit que les valeurs possibles de la signature dans le cas d'un seul nucléon sont $\frac{1}{2}$ et $-\frac{1}{2}$ de sorte que :

$$\begin{aligned} \alpha_{tot} &= \sum_i \alpha_i, \\ r_{tot} &= \prod_i r_i, \end{aligned} \quad (3.2.5)$$

où α_i est la signature du $i^{\text{ème}}$ nucléon.

Les quatre relations de (3.2.4) peuvent être regroupées dans une expression équivalente :

$$J = \alpha \bmod (2) \quad (3.2.6)$$

Puisque

$$[H_\omega, \mathcal{R}_x(\pi)] = 0 \quad (3.2.7)$$

Il convient alors de diagonaliser l'hamiltonien dans le sous-espace de valeur fixe de la signature et de la parité [80].

3.3 Représentation de Goodman

En tenant compte du fait que [81] :

$$[J_z^2, \mathcal{R}_x(\pi)] = 0$$

les états propres de $\mathcal{R}_x(\pi)$ peuvent être exprimés comme combinaisons linéaires des états propres doublement dégénérés de J_z^2 . Afin de tirer profit de ces symétries, Goodman a introduit une nouvelle base dans laquelle l'hamiltonien du système peut être diagonalisé [82] :

$$\begin{aligned} |\nu, \tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-|\nu\rangle + (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\tilde{\nu}\rangle \right] \\ |\nu, -\tfrac{1}{2}\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\nu\rangle + |\tilde{\nu}\rangle \right] \end{aligned} \quad \Omega_\nu > 0. \quad (3.3.1)$$

On peut écrire les équations (3.3.1) sous une forme plus générale :

$$\begin{aligned} |\nu, \alpha\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left(\alpha + \tfrac{1}{2} \right) \left[-|\nu\rangle + (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\tilde{\nu}\rangle \right] \right. \\ &\quad \left. - \left(\alpha - \tfrac{1}{2} \right) \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\nu\rangle + |\tilde{\nu}\rangle \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

3.3.1 Propriétés des états de Goodman

En adoptant une convention de phase [78] telle que :

$$\mathcal{R}_x(\pi) |\nu\rangle = i (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\tilde{\nu}\rangle \quad (3.3.3)$$

et

$$\mathcal{R}_x(\pi) |\tilde{\nu}\rangle = i (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\nu\rangle \quad (3.3.4)$$

Il est facile de montrer que les états de Goodman possèdent les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_x(\pi) \left| \nu, \frac{1}{2} \right\rangle &= -i \left| \nu, \frac{1}{2} \right\rangle \\ \mathcal{R}_x(\pi) \left| \nu, -\frac{1}{2} \right\rangle &= i \left| \nu, -\frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

ou encore :

$$\mathcal{R}_x(\pi) |\nu, \alpha\rangle = e^{-i\pi\alpha} |\nu, \alpha\rangle \quad \alpha = \pm \frac{1}{2} \quad (3.3.6)$$

On montre également que :

$$J_z^2 |\nu, \alpha\rangle = \Omega_\nu^2 |\nu, \alpha\rangle \quad (3.3.7)$$

ce qui signifie que les états $|\nu, \alpha\rangle$ sont simultanément états propres de $\mathcal{R}_x(\pi)$ et J_z^2 .

Par ailleurs, l'action de l'opérateur renversement du sens du temps T sur les états de la nouvelle base est donnée par :

$$\begin{aligned} T \left| \nu, \frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} T |\nu\rangle + T |\tilde{\nu}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\tilde{\nu}\rangle - |\nu\rangle \right] \\ &= \left| \nu, -\frac{1}{2} \right\rangle \\ T \left| \nu, -\frac{1}{2} \right\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-T |\nu\rangle + (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} T |\tilde{\nu}\rangle \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-|\tilde{\nu}\rangle - (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} |\nu\rangle \right] \\ &= - \left| \nu, \frac{1}{2} \right\rangle \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Donc finalement, on a :

$$T |\nu, \alpha\rangle = (-1)^{\frac{1}{2}-\alpha} |\nu, -\alpha\rangle, \quad (3.3.9)$$

Ainsi, on constate que le terme du Cranking détruit la symétrie de renversement du sens du temps, et permet d'introduire un concept similaire qui est la signature [83]. Dans le formalisme de la seconde quantification, les nouveaux états s'écrivent alors comme suit :

$$|\nu, \alpha\rangle = c_{\nu\alpha}^+ |0\rangle. \quad (3.3.10)$$

On définit ainsi les nouveaux opérateurs de création de particules dans la base de Goodman [80] :

$$\begin{aligned} c_\nu^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} a_\nu^+ + a_{\bar{\nu}}^+ \right], \\ c_{\bar{\nu}}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[-a_\nu^+ + (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} a_{\bar{\nu}}^+ \right], \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

où c_ν^+ crée une particule dans un état de signature positive ($|\nu\rangle \equiv |\nu, \frac{1}{2}\rangle$) et $c_{\bar{\nu}}^+$ crée une particule dans un état de signature négative (noté $|\bar{\nu}\rangle \equiv |\nu, -\frac{1}{2}\rangle$).

On peut tirer la transformation inverse des opérateurs de création de Goodman à partir des relations (3.3.11). On obtient alors :

$$a_\nu^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[(-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} c_\nu^+ - c_{\bar{\nu}}^+ \right], \quad (3.3.12)$$

$$a_{\bar{\nu}}^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[c_\nu^+ + (-1)^{\Omega_\nu - \frac{1}{2}} c_{\bar{\nu}}^+ \right]. \quad (3.3.13)$$

3.4 Expression de l'hamiltonien dans la base de Goodman

3.4.1 Éléments de matrice de H_{sp}

Pour tenir compte de l'interaction entre la rotation et la structure intrinsèque du noyau, on commence par diagonaliser la partie à un corps :

$$h_\omega = H_{sp} - \omega J_x \quad (3.4.1)$$

de l'hamiltonien (3.1.7) dans la base des états définis par la transformation de Goodman.

En tenant compte de la propriété :

$$\langle \nu, \alpha | H_{sp} | \nu', \alpha' \rangle = \langle \nu | H_{sp} | \nu' \rangle \delta_{\alpha\alpha'} = \varepsilon_\nu \delta_{\alpha\alpha'}, \quad (3.4.2)$$

on peut écrire les éléments de matrice de H_{sp} dans la base de Goodman comme suit :

$$H_{sp} = \sum_{\nu > 0} \varepsilon_\nu \left(c_\nu^+ c_\nu + c_{\bar{\nu}}^+ c_{\bar{\nu}} \right). \quad (3.4.3)$$

ce qui montre que cette base diagonalise exactement l'hamiltonien à particules indépendantes.

3.4.2 Eléments de matrice de J_x

Pour un noyau déformé, un état $|\nu\rangle$ de la base de Woods-Saxon peut être développé sur la base des états sphériques :

$$|\nu\rangle = \sum_{j_\nu} C_{j_\nu}^\nu |j_\nu \Omega_\nu\rangle \quad (3.4.4)$$

On a :

$$J_x = \frac{1}{2} (J_+ + J_-) \quad (3.4.5)$$

Donc :

$$\langle \nu | J_x | \mu \rangle = \sum_{j_\nu j_\mu} C_{j_\nu}^\nu C_{j_\mu}^\mu \frac{1}{2} \left[\langle j_\nu \Omega_\nu | J_+ | j_\mu \Omega_\mu \rangle + \langle j_\nu \Omega_\nu | J_- | j_\mu \Omega_\mu \rangle \right] \quad (3.4.6)$$

Pour une symétrie axiale, on a alors :

$$\langle \nu | J_x | \mu \rangle = \sum_{j_\nu j_\mu} C_{j_\nu}^\nu C_{j_\mu}^\mu \frac{1}{2} [\delta_{\Omega_\nu \Omega_\mu + 1} + \delta_{\Omega_\nu \Omega_\mu - 1}] \quad (3.4.7)$$

Ces éléments de matrice sont nuls sauf si :

$$\begin{cases} \Omega_\nu = \Omega_\mu + 1 \\ ou \\ \Omega_\nu = \Omega_\mu - 1 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

Il s'en suit que :

$$\langle \nu | J_x | \tilde{\mu} \rangle = \langle \tilde{\nu} | J_x | \mu \rangle \quad pour \quad \Omega_\nu = \Omega_\mu = \frac{1}{2} \quad (3.4.9)$$

Par ailleurs, l'opérateur J_x est impair par renversement du sens du temps ; il vérifie donc les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \langle \nu | J_x | \mu \rangle &= - \langle \tilde{\nu} | J_x | \tilde{\mu} \rangle \\ \langle \nu | J_x | \tilde{\mu} \rangle &= \langle \mu | J_x | \tilde{\nu} \rangle \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

De plus, de l'hermiticité de J_x et du fait que ces éléments de matrice sont réels, on a :

$$\langle \nu | J_x | \mu \rangle = \langle \mu | J_x | \nu \rangle \quad (3.4.11)$$

On en déduit alors que les éléments de matrice de J_x vérifient les propriétés suivantes :

$$\langle \nu, \alpha | J_x | \nu', \alpha' \rangle = \langle \nu, \alpha | J_x | \nu', \alpha \rangle \delta_{\alpha\alpha'}. \quad (3.4.12)$$

$$\begin{aligned} \langle \nu, \frac{1}{2} | J_x | \nu', \frac{1}{2} \rangle &= \begin{cases} -\langle \nu' | J_x | \nu \rangle & \text{si } \Omega_\nu \neq \frac{1}{2} \text{ ou } \Omega_{\nu'} \neq \frac{1}{2} \\ \langle \nu | J_x | \tilde{\nu} \rangle & \text{si } \Omega_\nu = \Omega_{\nu'} = \frac{1}{2} \end{cases} \\ \langle \nu, -\frac{1}{2} | J_x | \nu', -\frac{1}{2} \rangle &= \begin{cases} \langle \nu' | J_x | \nu \rangle & \text{si } \Omega_\nu \neq \frac{1}{2} \text{ ou } \Omega_{\nu'} \neq \frac{1}{2} \\ -\langle \nu | J_x | \tilde{\nu} \rangle & \text{si } \Omega_\nu = \Omega_{\nu'} = \frac{1}{2} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

D'où :

$$\left\langle \nu, -\frac{1}{2} \left| J_x \right| \nu', -\frac{1}{2} \right\rangle = - \left\langle \nu, \frac{1}{2} \left| J_x \right| \nu', \frac{1}{2} \right\rangle \quad (3.4.14)$$

Donc, on aboutit à l'expression du terme de rotation dans la nouvelle représentation :

$$H_{Crank} = -\omega \sum_{\nu\mu>0} \langle \nu, \alpha | J_x | \mu, \alpha \rangle (c_\nu^+ c_\mu - c_\nu^+ c_{\bar{\mu}}) \quad (3.4.15)$$

Finalement notre hamiltonien à diagonaliser est donné par :

$$h_\omega = \sum_{\nu\mu>0} \{ (\varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} - \omega J_x^{\nu\mu}) c_\nu^+ c_\mu + (\varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} + \omega J_x^{\nu\mu}) c_\nu^+ c_{\bar{\mu}} \} \quad (3.4.16)$$

3.5 Diagonalisation

On peut écrire l'hamiltonien (3.4.16) sous la forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} (\varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} - \omega J_x^{\nu\mu}) & 0 \\ 0 & (\varepsilon_\nu \delta_{\nu\mu} + \omega J_x^{\nu\mu}) \end{pmatrix} \quad (3.5.1)$$

Le problème revient alors à diagonaliser deux sous matrices pour obtenir la matrice diagonale suivante :

$$\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} e_k & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} e_{\bar{k}} & & \\ & \ddots & \\ & & \ddots \end{pmatrix} \end{pmatrix} \quad (3.5.2)$$

Dans la nouvelle base l'hamiltonien h_ω s'écrit :

$$h_\omega = \sum_{k>0} (e_k b_k^+ b_k + e_{\bar{k}} b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{k}}) \quad (3.5.3)$$

où e_k est la $k^{ième}$ valeur propre, et les nouveaux opérateurs b_k^+ sont les transformés des opérateurs de création de la base déformée, en rotation, de Woods-Saxon dans le cadre du modèle à particules indépendantes. Ils s'écrivent :

$$\begin{aligned} b_k^+ &= \sum_{\nu>0} A_{\nu k} c_\nu^+ \\ b_{\bar{k}}^+ &= \sum_{\nu>0} \bar{A}_{\nu k} c_\nu^+ \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

où $A_{\nu k}$ est la $\nu^{ième}$ composante du $k^{ième}$ vecteur propre.

3.6 Inclusion de l'interaction d'appariement

Il s'agit maintenant d'inclure les corrélations d'appariement. Pour cela, il est indispensable d'écrire H_p en terme d'opérateurs c_ν^+ et $c_{\bar{\nu}}^+$, qui ne sont pas reliés entre eux par le renversement du sens du temps, nous obtenons ainsi [84] :

$$H_p = -G \sum_{\nu\mu>0} c_\nu^+ c_{\bar{\nu}}^+ c_{\bar{\mu}} c_\mu \quad (3.6.1)$$

où c_ν^+ et $c_{\bar{\nu}}^+$ sont reliés aux opérateurs de la base diagonale par les relations (3.5.4). En utilisant les relations inverses de ces dernières, on peut écrire le terme (3.6.1) comme suit :

$$H_p = -G \sum_{\nu\mu klmn>0} A_{\nu k} \bar{A}_{\nu l} \bar{A}_{\mu m} A_{\mu n} b_k^+ b_l^+ b_{\bar{m}} b_n \quad (3.6.2)$$

qui peut être ramenée à la forme :

$$H_p = -G \sum_{klmn>0} F_{k\bar{l}} F_{n\bar{m}} b_k^+ b_l^+ b_{\bar{m}} b_n \quad (3.6.3)$$

avec :

$$F_{k\bar{l}} = \sum_{\nu>0} A_{\nu k} \bar{A}_{\nu l} \quad (3.6.4)$$

Dans le cas d'un système qui n'est pas en rotation ($\omega = 0$), $F_{k\bar{l}} = \delta_{kl}$, et la théorie BCS habituelle peut être appliquée [85]. Par contre, quand le noyau tourne avec une grande vitesse l'appariement sera complètement détruit dû à la force de Coriolis. Dans ce qui suit, nous considérons un noyau en rotation avec une vitesse assez faible de sorte que les éléments non diagonaux de F soient négligeables ce qui permet de faire l'approximation :

$$H_p = -G \sum_{kl>0} F_{k\bar{k}} F_{l\bar{l}} b_k^+ b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{l}} b_l \quad (3.6.5)$$

Les éléments non diagonaux de F peuvent être traités par la suite comme perturbation [86, 87] .

3.7 Fonction d'onde

La théorie BCS peut être ainsi appliquée à l'hamiltonien :

$$H = \sum_{k>0} \left(e_k b_k^+ b_k + e_{\bar{k}} b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{k}} \right) - G \sum_{kl>0} F_{k\bar{k}} F_{l\bar{l}} b_k^+ b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{l}} b_l \quad (3.7.1)$$

Par analogie avec BCS, on considère un état $|\Psi\rangle$ qui est de la forme :

$$|\Psi\rangle = \prod_{k>0} (u_k + v_k b_k^+ b_{\bar{k}}^+) |0\rangle \quad (3.7.2)$$

Or, là aussi $|\Psi\rangle$ n'est pas fonction propre de l'opérateur nombre de particules $\mathcal{N}$, qui est donné par :

$$\mathcal{N} = \sum_{k>0} (b_k^+ b_k + b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{k}}) \quad (3.7.3)$$

alors que H commute avec $\mathcal{N}$.

Ceci entraîne une résolution approximative du problème, en introduisant un hamiltonien auxiliaire H' tel que :

$$H' = H - \lambda \mathcal{N} \quad (3.7.4)$$

où λ est paramètre de Lagrange. Il est déterminé par la condition de conservation en moyenne du nombre de particules :

$$\langle \Psi | \mathcal{N} | \Psi \rangle = n \quad (3.7.5)$$

Ainsi, on obtient l'expression de H' suivante :

$$H' = \sum_{k>0} \{ (e_k - \lambda) b_k^+ b_k + (e_{\bar{k}} - \lambda) b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{k}} \} - G \sum_{kl>0} F_{k\bar{k}} F_{l\bar{l}} b_k^+ b_{\bar{k}}^+ b_{\bar{l}} b_l \quad (3.7.6)$$

En calculant la moyenne de cet hamiltonien sur l'état $|\Psi\rangle$ on tire l'énergie du système :

$$E = 2 \sum_{k>0} \left(\bar{e}_k - \lambda - \frac{G}{2} F_{k\bar{k}}^2 v_k^2 \right) v_k^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.7.7)$$

avec :

$$\bar{e}_k = \frac{1}{2} (e_k + e_{\bar{k}}) \quad (3.7.8)$$

et la nouvelle demi-largeur du gap Δ , définie par l'expression suivante :

$$\Delta = G \sum_{l>0} F_{l\bar{l}} u_l v_l \quad (3.7.9)$$

3.8 Equations du gap

La détermination des paramètres u_k et v_k s'effectue en utilisant le principe variationnel, c'est à dire en minimisant l'énergie de l'état fondamental du système (3.7.7) par rapport à ces derniers :

$$\frac{\partial E_{sys}}{\partial u_k} = \frac{\partial E_{sys}}{\partial v_k} = 0 \quad (3.8.1)$$

soit :

$$\left(\frac{\partial}{\partial v_k} + \frac{\partial u_k}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial u_k} \right) E_{sys} = 0 \quad (3.8.2)$$

Compte tenu de la condition de normalisation de l'état (3.7.2) :

$$u_k^2 + v_k^2 = 1 \quad (3.8.3)$$

on déduit :

$$\frac{\partial u_k}{\partial v_k} = -\frac{v_k}{u_k} \quad (3.8.4)$$

de là, on aboutit à l'expression suivante :

$$2 \left(\bar{e}_k - \lambda - G F_{k\bar{k}}^2 v_k^2 \right) u_k v_k - \Delta F_{k\bar{k}} \left(u_k^2 - v_k^2 \right) = 0 \quad (3.8.5)$$

Tenant compte de la condition (3.8.3), on pose :

$$\begin{aligned} u_k &= \cos \theta_k \\ v_k &= \sin \theta_k \end{aligned} \quad (3.8.6)$$

L'équation (3.8.5) devient alors :

$$(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2) \sin 2\theta_k = \Delta F_{k\bar{k}} \cos 2\theta_k \quad (3.8.7)$$

soit :

$$\tan 2\theta_k = \frac{\Delta F_{k\bar{k}}}{\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2} \quad (3.8.8)$$

Sachant que :

$$2u_k v_k = \sin 2\theta_k = \frac{\Delta F_{k\bar{k}}}{\sqrt{(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2}} \quad (3.8.9)$$

et

$$u_k^2 - v_k^2 = \cos 2\theta_k = \frac{\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2}{\sqrt{(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2}} \quad (3.8.10)$$

On aboutit ainsi au système suivant :

$$\left. \begin{array}{l} u_k^2 \\ v_k^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left\{ 1 \pm \frac{\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2}{\sqrt{(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2}} \right\} \quad (3.8.11)$$

La condition de conservation du nombre de particules devient :

$$n = 2 \sum_{k>0} v_k^2 \quad (3.8.12)$$

soit :

$$n = \sum_{k>0} \left\{ 1 - \frac{\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2}{\sqrt{(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2}} \right\} \quad (3.8.13)$$

De (3.7.9) et (3.8.9), on trouve :

$$\frac{2}{G} = \sum_{k>0} \frac{F_{k\bar{k}}^2}{\sqrt{(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2}} \quad (3.8.14)$$

Les équations (3.7.9) et (3.8.14) constituent les équations du gap pour un système en rotation ayant un nombre pair de particules appariées [88].

3.9 Transformation de Bogoliubov-Valatin

Dans le but de déterminer les énergies des quasi-particules dans la nouvelle base de Goodman, on utilise la transformation inverse de Bogoliubov Valatin :

$$\begin{aligned} b_k &= u_k \beta_k + v_k \beta_k^+ \\ b_k^+ &= u_k \beta_k^+ + v_k \beta_{\bar{k}} \end{aligned} \quad (3.9.1)$$

pour diagonaliser l'hamiltonien (3.7.6).

A partir du système précédent et en appliquant le théorème de Wick, l'hamiltonien auxiliaire du système (3.7.6) prend la forme :

$$H'_{sys} = E_{sys} + H_{11} + H_{20} + H_{rés} \quad (3.9.2)$$

où le premier terme est celui trouvé dans l'équation (3.7.7) :

$$E_{sys} = 2 \sum_{k>0} \left(\bar{e}_k - \lambda - \frac{G}{2} F_{k\bar{k}}^2 v_k^2 \right) v_k^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (3.9.3)$$

Le terme le plus important dans notre calcul est celui qui fait apparaître les énergies des quasi-particules de signatures positive et négative :

$$\begin{aligned} H_{11} &= \sum_{k>0} \{ (e_k - \lambda) [u_k^2 \beta_k^+ \beta_k - \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}} v_k^2] \\ &\quad + (e_{\bar{k}} - \lambda) [u_{\bar{k}}^2 \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}} - v_{\bar{k}}^2 \beta_k^+ \beta_k] \} \\ &\quad - G \sum_{kl>0} F_{k\bar{k}} F_{l\bar{l}} \{ -u_l v_l u_k v_k (\beta_k^+ \beta_k + \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}}) \\ &\quad + v_k v_l \delta_{kl} (u_k u_l \beta_k^+ \beta_l - v_k v_l \beta_l^+ \beta_{\bar{k}} \delta_{kl}) \\ &\quad - u_l v_l u_k v_k (\beta_l^+ \beta_{\bar{l}} + \beta_l^+ \beta_l) \\ &\quad + v_k v_l \delta_{kl} (u_k u_l \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{l}} - v_k v_l \beta_l^+ \beta_k \delta_{kl}) \} \end{aligned} \quad (3.9.4)$$

après l'arrangement des termes semblables, et en tenant compte des expressions de u_k^2 et v_k^2 données par (3.8.11) on arrive à :

$$\begin{aligned} H_{11} &= \sum_{k>0} \left\{ \left[(\bar{e}_k - \lambda - G F_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \bar{e}'_k \right\} \beta_k^+ \beta_k \\ &\quad + \sum_{k>0} \left\{ \left[(\bar{e}_k - \lambda - G F_{k\bar{k}}^2 v_k^2)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \bar{e}'_k \right\} \beta_{\bar{k}}^+ \beta_{\bar{k}} \end{aligned} \quad (3.9.5)$$

avec :

$$\bar{e}'_k = \frac{1}{2} (e_k - e_{\bar{k}}) \quad (3.9.6)$$

D'où l'expression des énergies des quasi-particules :

$$\begin{aligned} E_k &= \left[\left(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2 \right)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \bar{e}'_k \\ E_{\bar{k}} &= \left[\left(\bar{e}_k - \lambda - GF_{k\bar{k}}^2 v_k^2 \right)^2 + \Delta^2 F_{k\bar{k}}^2 \right]^{\frac{1}{2}} - \bar{e}'_k \end{aligned} \quad (3.9.7)$$

E_k est l'énergie des quasi-particules de signature positive, $E_{\bar{k}}$ celle de signature négative.

RESULTATS ET DISCUSSION

Sommaire

4.1	Paramètres du modèle à particules indépendantes	48
4.2	Application à quelques isotopes d'Erbium	48

Pour effectuer les calculs numériques, un choix doit être fait concernant les valeurs numériques des différents paramètres (quoique des changements légers de leurs valeurs ne changent pas qualitativement les résultats).

4.1 Paramètres du modèle à particules indépendantes

Les différents opérateurs du modèle à particules indépendantes font intervenir plusieurs paramètres. Ces paramètres sont généralement ajustés de façon à reproduire les niveaux d'énergie, déterminés par spectroscopie nucléaire, d'un nombre maximum de noyaux stables. Ainsi, la profondeur du potentiel moyen de Woods-Saxon est donnée par [39] :

$$V_0 = -V_0^0 [1 \pm \kappa I] \quad MeV \quad \text{avec} \quad V_0^0 > 0 \quad (4.1.1)$$

où

$$I = \frac{N - Z}{A} \quad (4.1.2)$$

avec le signe plus pour les protons et le signe moins pour les neutrons.

Concernant les paramètres V_0^0 , κ et λ ainsi que le rayon r_0 et la diffusivité a (exprimés en fermi), plusieurs ensembles de valeurs sont disponibles dans la littérature (voir tableaux 4.1 et 4.2). Pour la présente étude, nous avons adopté les paramètres dits universels [39].

A ce niveau, il faut rappeler que l'on s'est restreint dans le présent travail aux noyaux à symétrie axiale, et que nous avons utilisé les paramètres de déformation β tirés des tables de Möller et al. [89] pour décrire la forme de l'état fondamental de ces noyaux.

Enfin, les constantes d'appariement ont été choisies de façon à reproduire les valeurs expérimentales de la différence de masse pair-impair.

4.2 Application à quelques isotopes d'Erbium

La méthode décrite dans le chapitre précédent a été utilisée pour l'étude de l'effet de la rotation sur les corrélations d'appariement. Dans ce qui suit, nous exposerons les résultats

Paramétrisation	$\lambda(MeV)$	$r_{0-so} (fm)$	$r_0 (fm)$	κ	$V_0^0 (MeV)$	$a(fm)$
Blomqv._Wahlb.	32.0	1.270	1.270	0.67	51.0	0.67
Rost	17.8	0.932	1.275	0.86	49.6	0.70
Chepurnov	calc.	1.240	1.240	0.63	53.3	0.63
"optimale "	dépend de A		1.275	0.86	49.6	0.70
"universelle "	36.0	1.20	1.275	0.86	49.6	0.70

Table 4.1: Ensemble des valeurs des différents paramètres du modèle de Woods-Saxon pour le système Protons.

Paramétrisation	$\lambda(MeV)$	$r_{0-so} (fm)$	$r_0 (fm)$	κ	$V_0^0 (MeV)$	$a(fm)$
Blomqv._Wahlb.	32.0	1.270	1.270	0.67	51.0	0.67
Rost	31.5	1.280	1.347	0.86	49.6	0.70
Chepurnov	calc.	1.240	1.240	0.63	53.3	0.63
"optimale "	dépend de A		1.347	0.86	49.6	0.70
"universelle "	35.0	1.310	1.347	0.86	49.6	0.70

Table 4.2: Même chose que le tableau 4.1 pour le système Neutrons.

obtenus dans le cas des systèmes neutrons et protons de quelques isotopes d'Erbium ($^{162-170}\text{Er}$) pris à titre d'exemple.

Sur les figures 4.2.1 à 4.2.10 sont représentées quelques grandeurs caractéristiques de l'appariement en fonction de la fréquence de rotation ω pour le cas neutrons (figures impaires) et protons (figures paires). Il apparaît de ces figures que le paramètre du gap est très sensible à la rotation du noyau atomique. En effet, il décroît rapidement pour s'annuler à une fréquence critique ω_C . Ce comportement est assez similaire à celui obtenu en réduisant artificiellement la constante d'appariement (voir réf.[70]). Toutefois, dans le présent cas on remarque que la décroissance du paramètre du gap n'est pas monotone. En effet, on constate sur la majorité des figures l'apparition de plusieurs plateaux quand la vitesse de rotation du noyau augmente.

La disparition des corrélations d'appariement dans les noyaux en rotation est due à la force de Coriolis agissant sur deux nucléons dans des états renversés l'un de l'autre par rapport au sens du temps. La force de Coriolis agit dans des directions opposées sur chaque nucléon de la paire et à une fréquence critique les équations BCS ne possèdent que les solutions triviales et les nucléons cessent brusquement d'être appariés ($\Delta = 0$).

On peut alors penser que sur certains intervalles assez restreints, la vitesse de rotation peut augmenter sans briser de paires ou modifier de façon significative l'appariement nucléaire. Ceci explique l'apparition des plateaux sus-cités.

Par ailleurs, la comparaison entre les courbes des figures paires et impaires montre que l'appariement disparaît du système neutrons avant de disparaître du système protons (ω_C de l'ordre de 0.1 MeV dans le cas des systèmes neutrons et de 0.25 MeV dans le cas des systèmes protons). Ceci peut être dû d'une part au fait que les niveaux concernés par l'appariement dans le système neutrons sont plus sensibles à la force de Coriolis que les niveaux du système protons et d'autre part au fait que dans ce dernier le nombre de niveaux qui contribuent à l'appariement est plus important que dans le système neutrons.

Les différentes figures montrent les variations de l'énergie BCS en fonction de la vitesse de rotation. On constate de ces figures que l'augmentation de la vitesse de rotation et

donc des forces de Coriolis et centrifuges fait que le gain d'énergie, dû à l'interaction d'appariement, soit réduit progressivement jusqu'à son annulation.

Le potentiel chimique λ a été de même représenté en fonction de la fréquence de rotation. On a constaté que les forces de Coriolis n'ont pas d'effets remarquables sur le niveau de Fermi pour les deux systèmes.

Les énergies des quasi-particules des états les plus proches du niveau de Fermi ont été également évaluées et tracées en fonction de la fréquence de rotation.

On constate que dès que $\omega > 0$, l'invariance par renversement du sens du temps n'existe plus et les énergies de quasi-particules se scindent en deux correspondant aux deux signes possibles de la signature (voir eq. 3.9.7).

Par ailleurs, d'après la relation (3.5.1), on voit que les états qui ont de grandes valeurs de j_x (grandes valeurs de j et petites valeurs de Ω) sont les plus modifiés par les forces de Coriolis et centrifuges. Ceci est bien illustré sur la figure 4.2.4 , par exemple, qui montre à travers les énergies des quasi-protons que le niveau 36 (correspondant à un moment angulaire $j = 11/2$ et une projection $\Omega = 1/2$) est le plus sensible à la rotation que le niveau 35 ($j = 3/2$ et $\Omega = 1/2$).

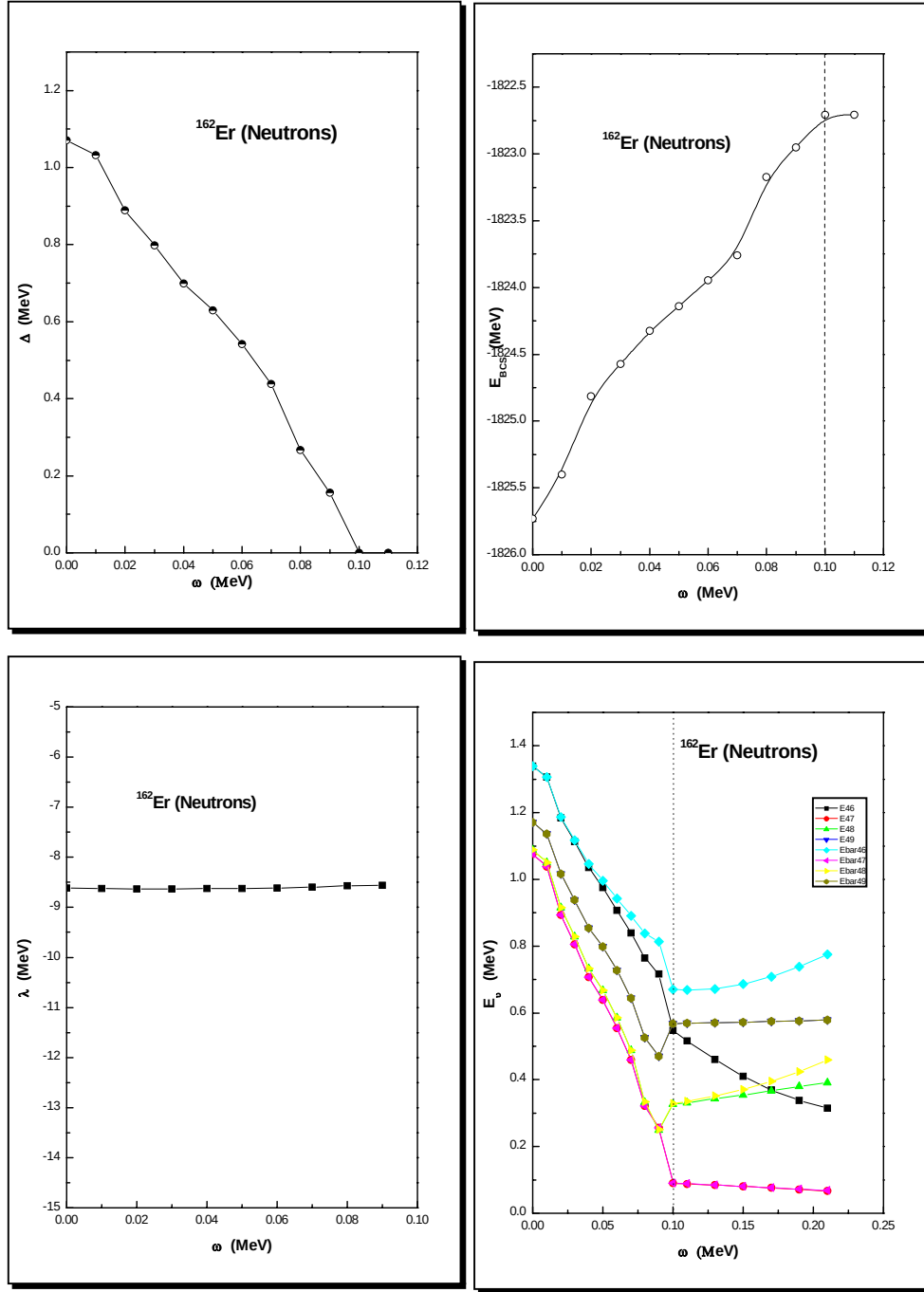


Figure 4.2.1 : Evolution du paramètre du gap Δ , de l'énergie du système E_{BCS} , du potentiel chimique λ et des énergies des quasi-particules E_v en fonction de la fréquence de rotation pour le système neutrons du noyau d' ^{162}Er .

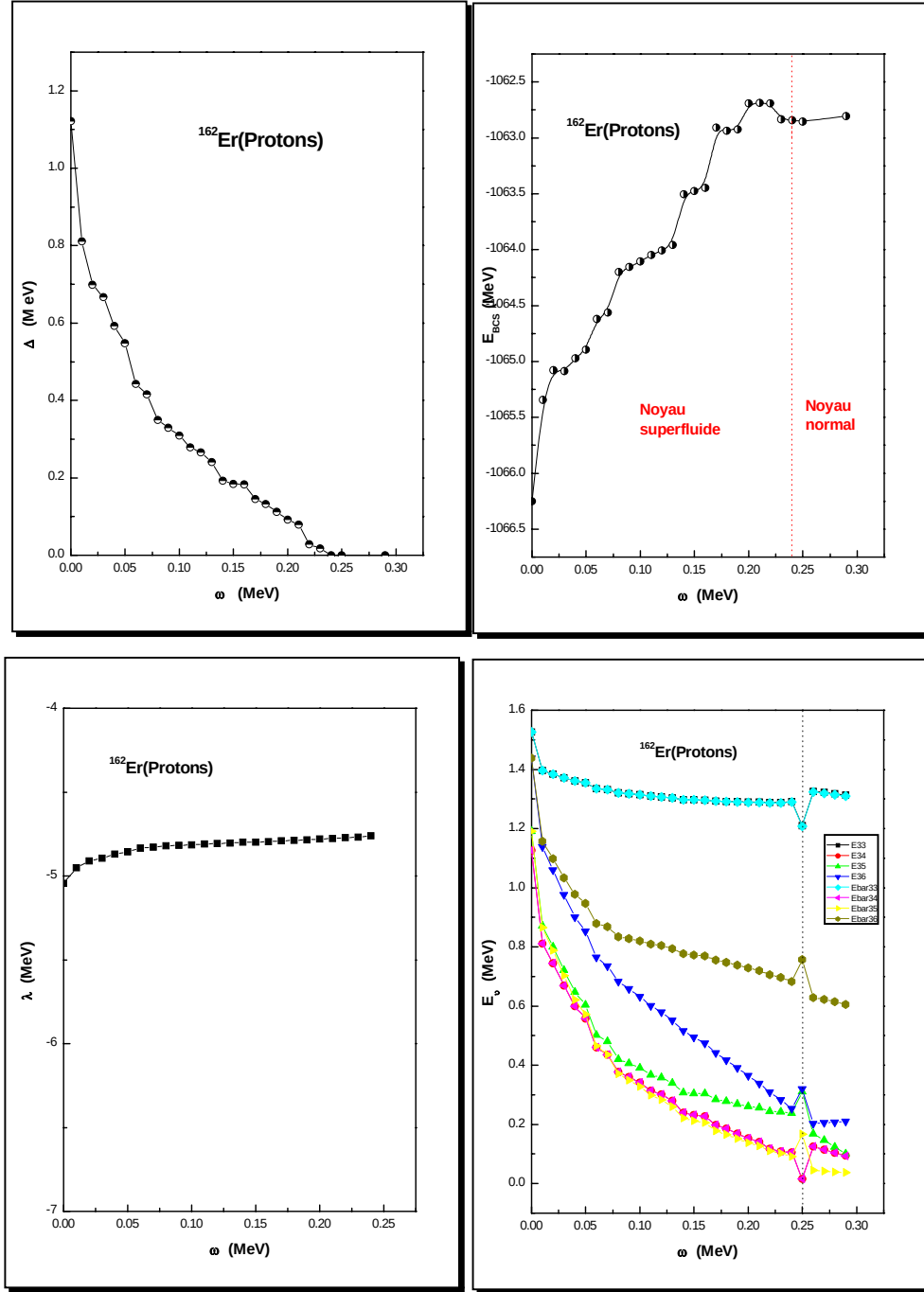


Figure 4.2.2 : Evolution du paramètre du gap Δ , de l'énergie du système E_{BCS} , du potentiel chimique λ et des énergies des quasi-particules E_v en fonction de la fréquence de rotation pour le système protons du noyau d' ^{162}Er .

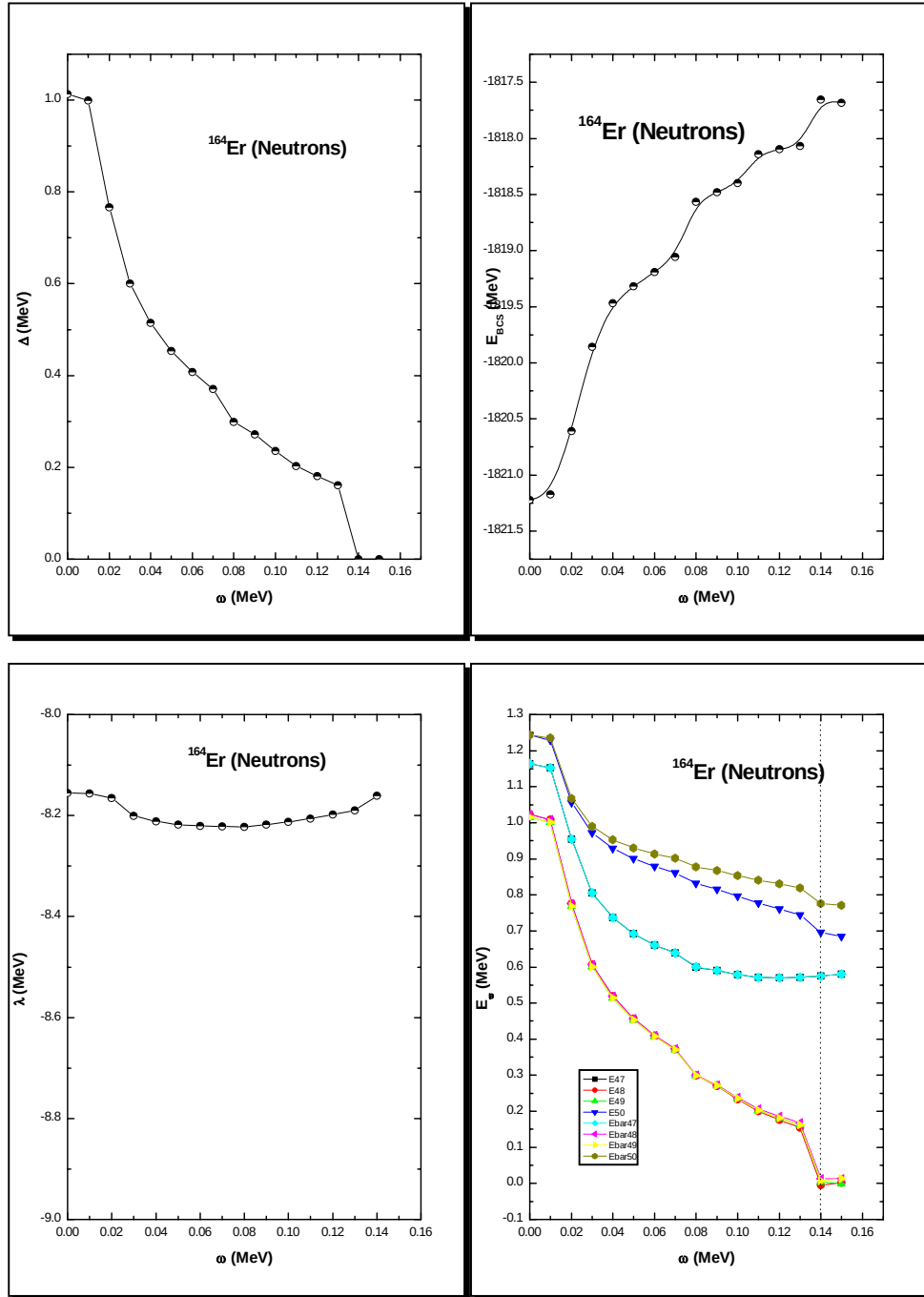


Figure 4.2.3 : Même chose que la figure (4.2.1) pour l' ^{164}Er .

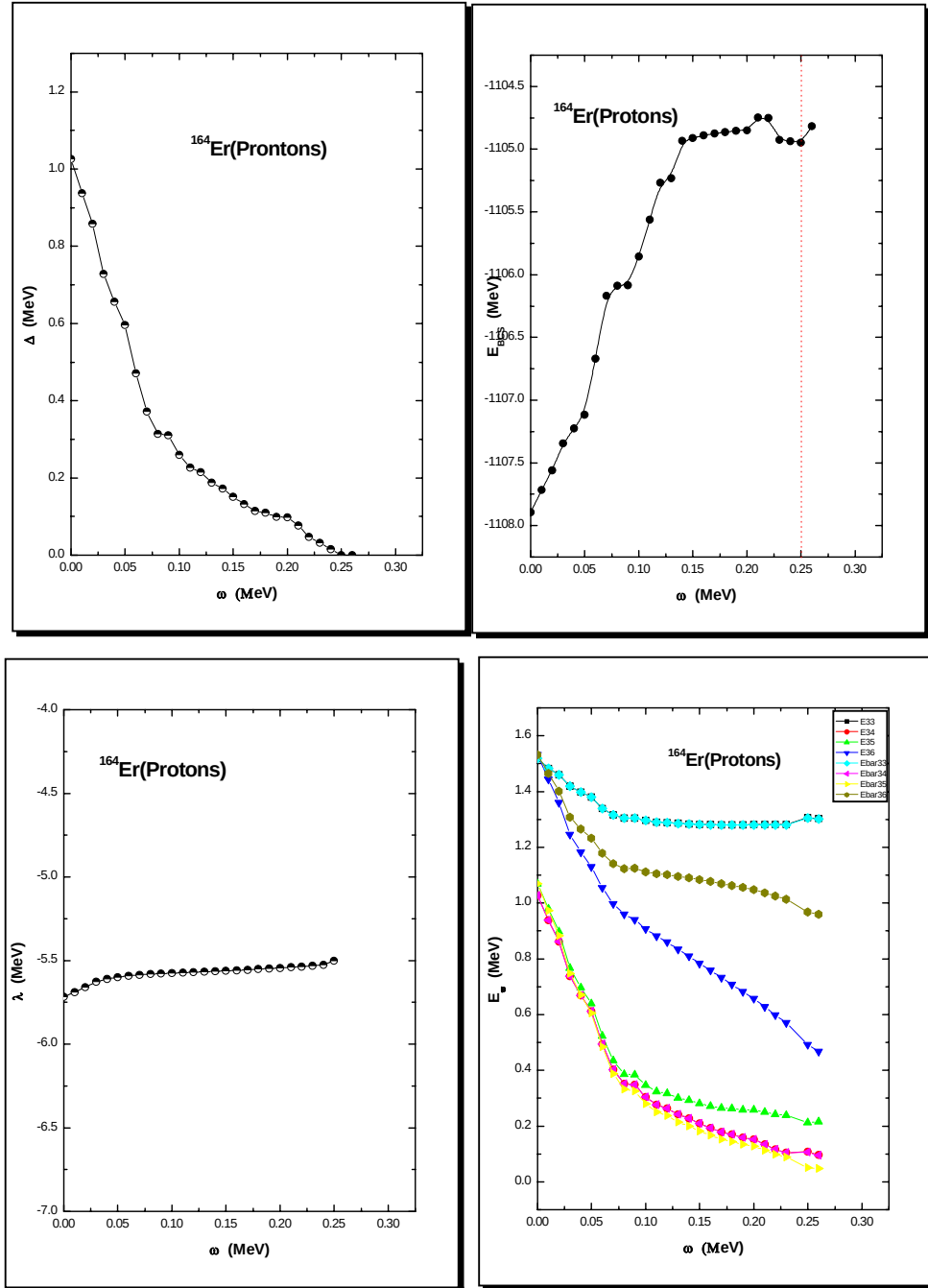
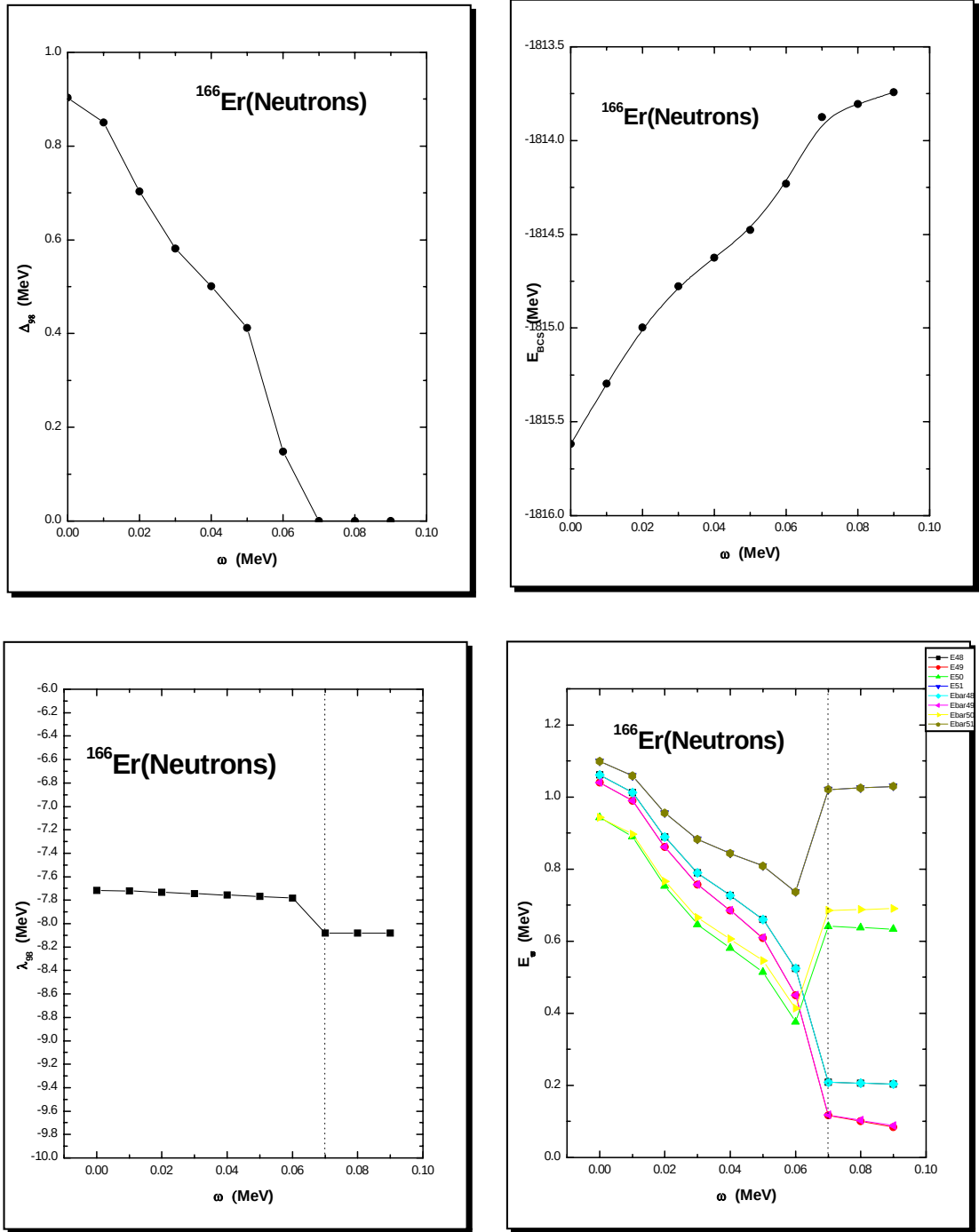


Figure 4.2.4 : Même chose que la figure (4.2.2) pour l' ^{164}Er .


 Figure 4.2.5 : Même chose que la figure (4.2.1) pour l' ^{166}Er .

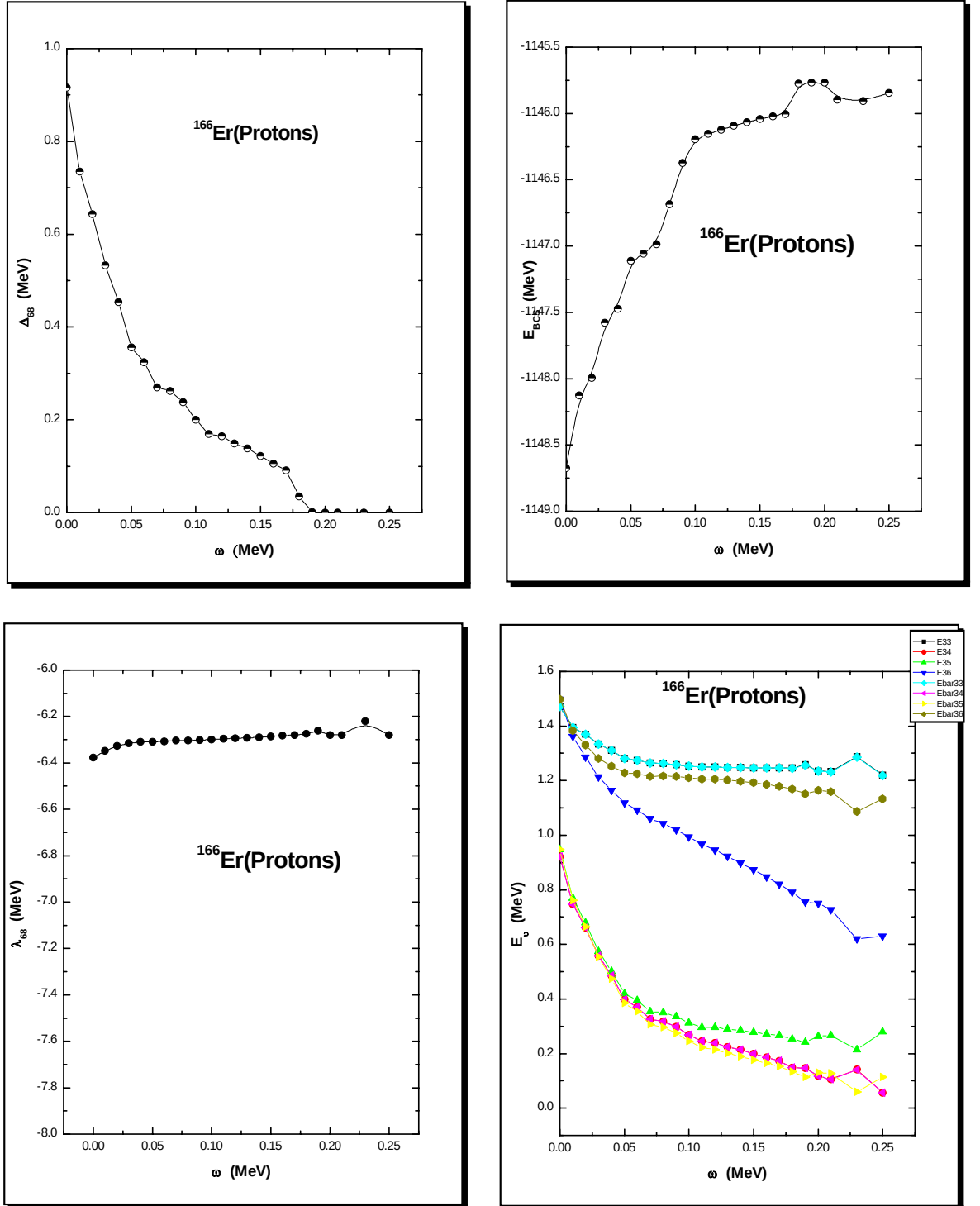


Figure 4.2.6 : Même chose que la figure (4.2.2) pour l' ^{166}Er .

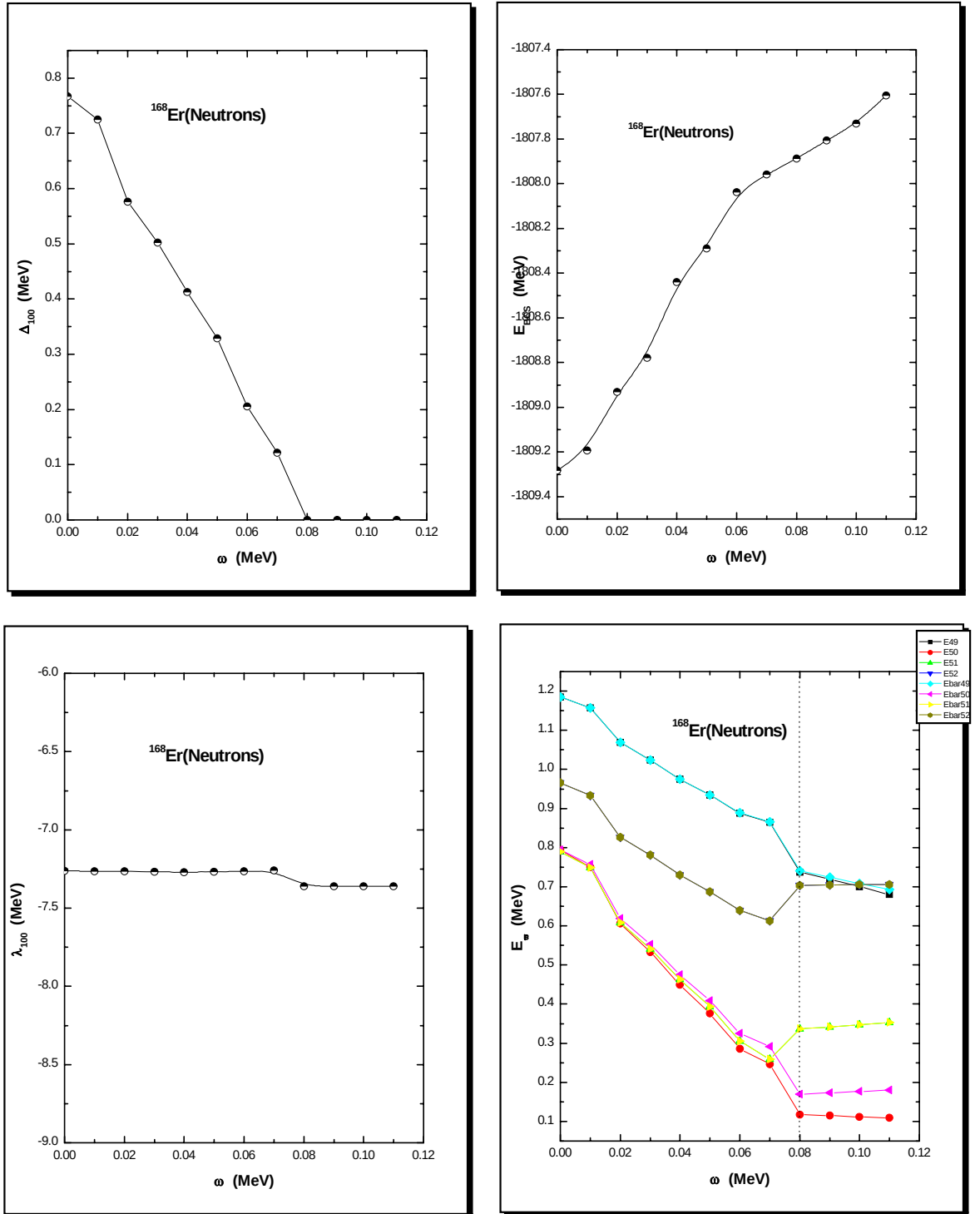


Figure 4.2.7 : Même chose que la figure (4.2.1) pour l' ^{168}Er .

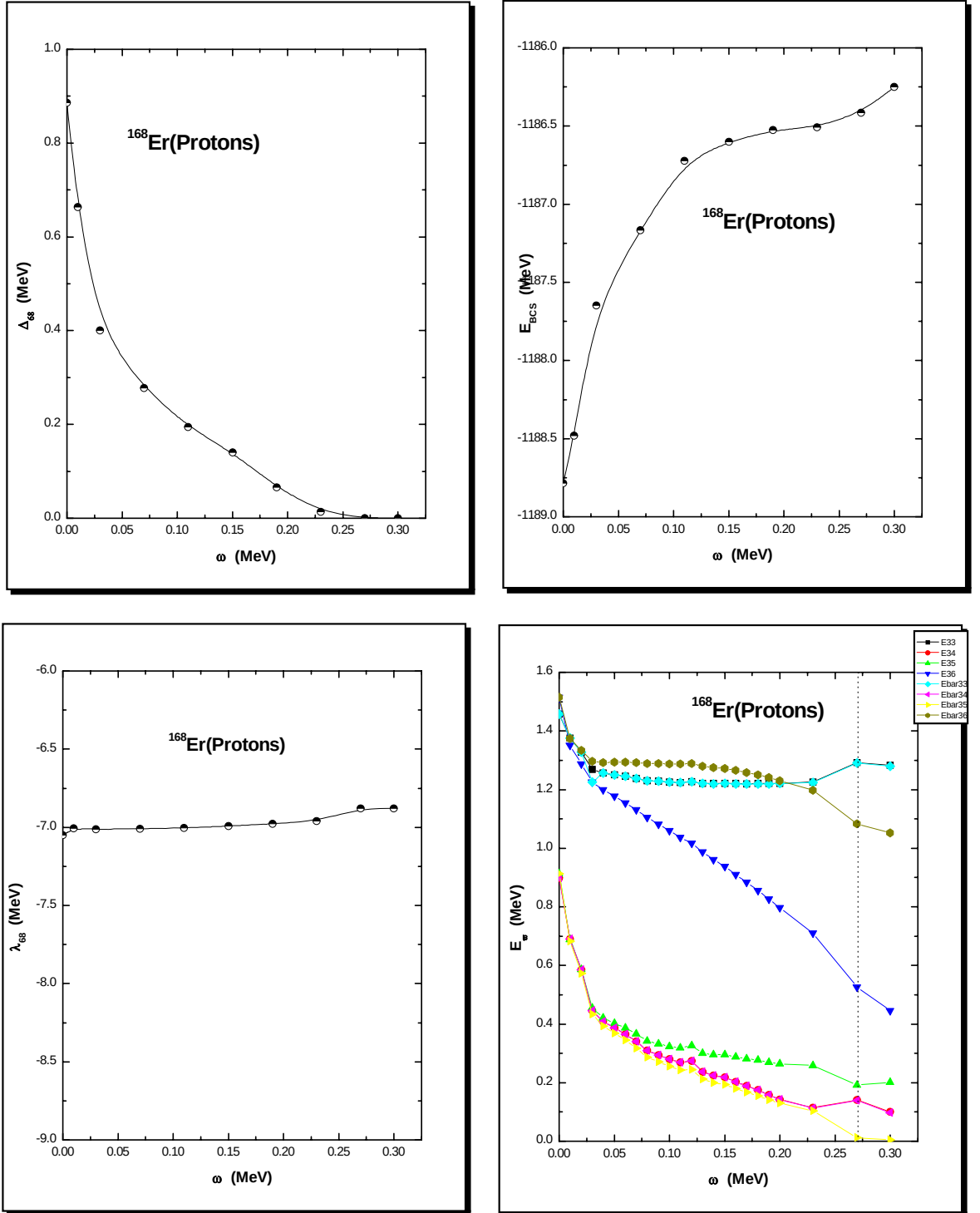


Figure 4.2.8 : Même chose que la figure (4.2.2) pour l' ^{168}Er .

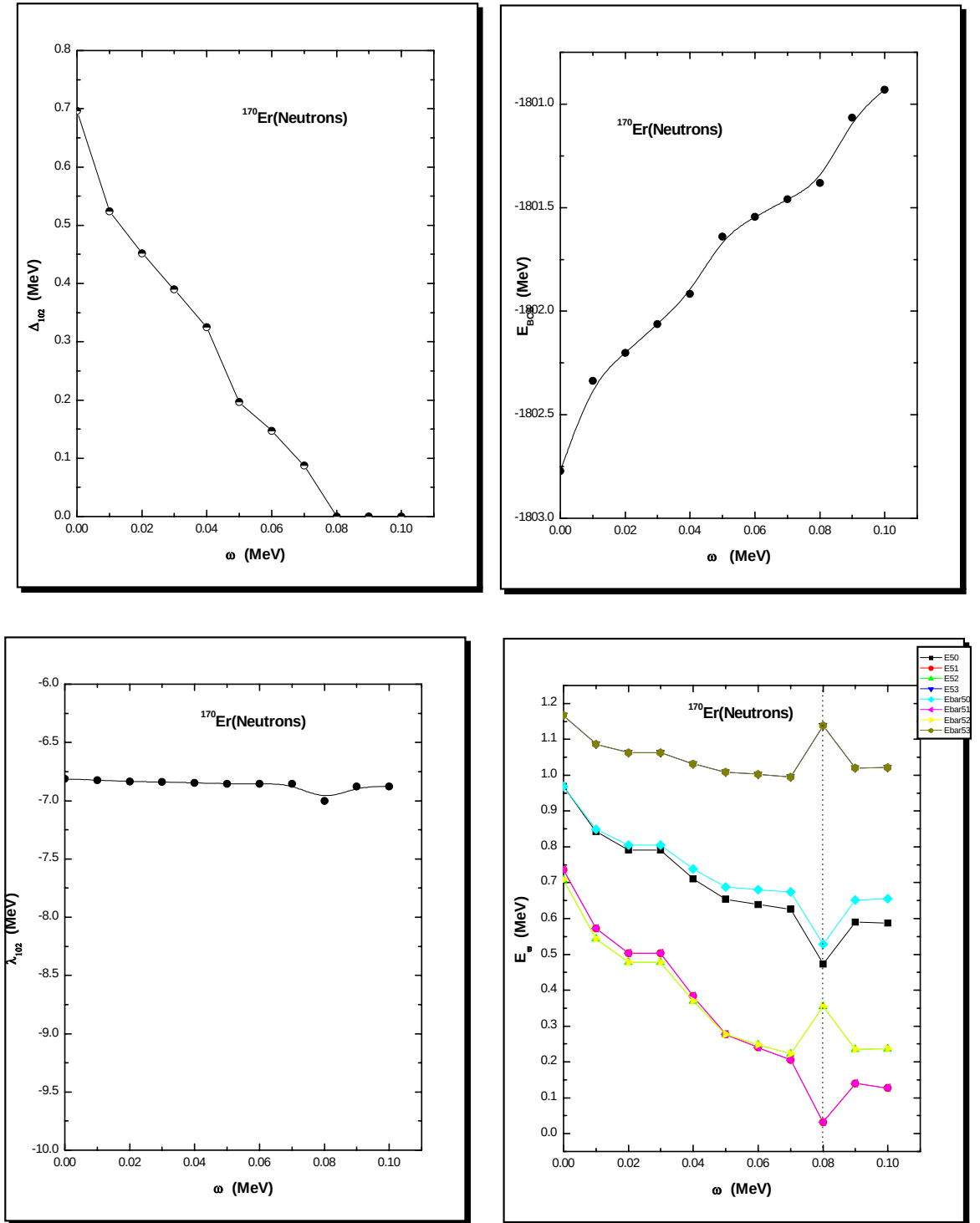


Figure 4.2.9 : Même chose que la figure (4.2.1) pour l' ^{170}Er .

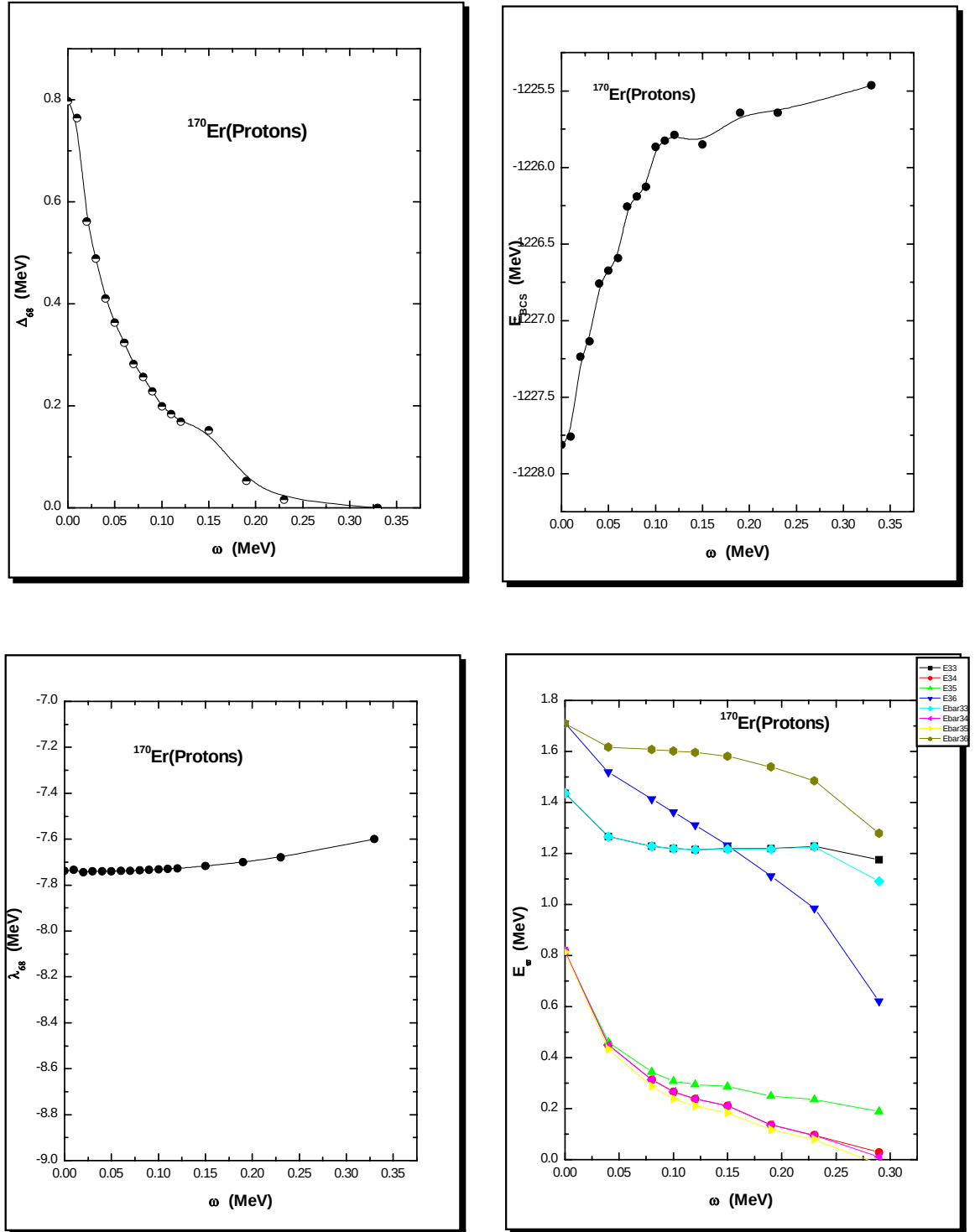


Figure 4.2.10 : Même chose que la figure (4.2.2) pour ^{170}Er .

CONCLUSION

Le présent travail avait essentiellement pour but l'étude de l'influence des forces de Coriolis induites par la rotation du noyau atomique sur les corrélations d'appariement.

Dans un premier temps, le modèle à particules indépendantes a été introduit. Un champ moyen déformé de Woods-Saxon a été adopté, en raison de caractère réaliste et simple, pour l'obtention des énergies et des fonctions d'onde individuelles des nucléons. L'interaction d'appariement, vu son importance dans les noyaux, a été également introduite dans le cadre de la théorie BCS.

Il a été montré par la suite comment introduire les effets de la rotation dans l'hamiltonien du système en partant de l'équation de Schrödinger et en utilisant l'approximation du Cranking.

Une fois l'hamiltonien total établi, la partie à un corps, constituée du terme du modèle à particules indépendantes et de celui du cranking, a été diagonalisée de façon à construire une nouvelle base. Pour cela nous avons utilisé la transformation de Goodman en introduisant la signature comme un nouveau bon nombre quantique. Le terme d'appariement a été écrit par la suite dans la base en rotation, et l'hamiltonien résultant a été traité à la BCS moyennant certaines approximations.

Comme deuxième étape, le comportement de quelques grandeurs caractéristiques de l'appariement a été étudié en fonction de la fréquence de rotation du noyau pour quelques noyaux de la régions des terres rares. Il a été montré que :

1. le paramètre du gap décroît rapidement et s'annule à une valeur critique de la fréquence de rotation.
2. le niveau de Fermi est indépendant de la vitesse de rotation du noyau.
3. l'énergie du système augmente progressivement avec la vitesse de rotation.
4. plusieurs énergies de quasi-particules présentent un dédoublement dès que $\omega > 0$ selon les valeurs de leurs signatures.

Enfin, il a été constaté que les corrélations d'appariement disparaissent de façon brusque à une valeur critique de la fréquence de rotation. Cette transition de phase étant non physique, elle peut être éliminée par l'utilisation d'une méthode qui va au-delà de la théorie BCS en restaurant la symétrie nombre de particules. La présente méthode constituera ainsi une première étape pour une description correcte des corrélations d'appariement dans les noyaux en rotation, en particulier pour l'étude de la structure déformée des noyaux exotiques dont l'instabilité constitue un sérieux handicap pour l'étude expérimentale.

ANNEXE A

Dans le cadre de la rotation avec une vitesse angulaire ω l'hamiltonien du système est :

$$\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + U(r) - \omega \cdot (r \wedge p) \quad (\text{A1})$$

On veut montrer que les forces de Coriolis et centrifuge sont introduites par le terme du Cranking.

Autrement notre hamiltonien peut être écrit comme suit :

$$\hat{H} = \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + U(r_i) - \omega_k (\varepsilon_{ijk} r_i p_j) \quad (\text{A2})$$

Les équations hamiltoniennes du mouvement sont :

$$\begin{aligned} \dot{r}_i &= \frac{p_i}{m} - \omega_k (\varepsilon_{jik} r_j) \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial U}{\partial r_i} + \omega_k (\varepsilon_{ijk} p_j) \end{aligned} \quad (\text{A3})$$

La force agissant sur la particule est :

$$F_i = m \frac{d^2 r_i}{dt^2} = m \frac{d}{dt} \dot{r}_i \quad (\text{A4})$$

Donc finalement la résultante des forces est :

$$F = -\frac{\partial U}{\partial r} - 2m(\omega \wedge V) - m\omega \wedge (\omega \wedge r) - m(\dot{\omega} \wedge r) \quad (\text{A5})$$

De sorte que l'hamiltonien H contient à la fois la force de Coriolis et centrifuge et probablement une force résultante de la dépendance du temps de la vitesse angulaire.

Bibliographie

- [1] P. Ring and P. Schuck, The Nuclear Many-Body Problem, Springer, New York (1980).
- [2] N. El-Aouad, J. Dobaczewski, J. Dudek et al. Nucl. Phys. A **476**, 155 (2000).
- [3] B. Mohammed-Azizi, D. E. Medjadi, Comput. Phys. Com, **176**, 634 (2007).
- [4] X. Li, J. Dudek et P. Romain, Nucl. Phys. B **271**, (1991).
- [5] A. Rios, A. Polls, A. Ramos et I. Vidana, Phys. Rev. C **72**, 024316 (2005).
- [6] R. M. Clark et al. Nucl. Phys. A **787**, 524c (1963).
- [7] P. A. Olivius et R. Bengtsson, Phys. Rev. C **69**, 014310 (2004).
- [8] S. F. Shen et al. Phys. Rev. C **75**, 047304 (2007).
- [9] B. Carter, N. Chamel, P. Haensel, Nucl. Phys. A **759**, 441 (2005).
- [10] A. V. Afanasjev et S. Frauendorf, Nucl.Phys. A **746**, 757c (2004).
- [11] R. M. Diamond and F. S. Stephens, Nucl. Phys. **45**, 632 (1963).
- [12] H. Mütterand, W. H. Dickhoff, Phys. Rev. C **72**, 054313 (2005).
- [13] I. Hamamoto, Phys. Rev. C **73**, 044317 (2006).
- [14] R. K. Sheline, Rev. Mod. Phys. **32**, 1 (1960).
- [15] V. Velazquez, J. G. Hirsch, Y. Sun, Nucl. Phys. A **686**, 129 (2001).
- [16] T. Bhattacharjee et al. Nucl. Phys. A **750**, 199 (2005).
- [17] J. Bardeen, L. N. Cooper, J. R. Schriffer, Phys. Rev. **108**, 1157 (1957).
- [18] A. Bohr, B. Mottelson, D. Pines, Phys. Rev. **110**, 936 (1958).
- [19] A. L. Goodman, Nucl. Phys. A **186**, 475 (1972).

- [20] E. Gueorguieva et al. Phys. Rev. C **69**, 044320 (2004).
- [21] J. Bartel, K. Bencheikh, Eur. Phys. J. A **14**, 179 (2002).
- [22] A. V. Afanasjev and S. Frauendorf, Phys. Rev. A **746**, 575c (2004).
- [23] V. A. Karnaukhov et al. Nucl. Phys. A **780**, 91 (2006).
- [24] S. Kailas, K. Mahata, R. G. Thomas, S. S. Kapoor, Nucl. Phys. A **787**, 259c (2007).
- [25] F. Androozzi et al. Phys. Rev. C **75**, 044312 (2007).
- [26] A. V. Afanasjev, J. König, P. Ring, Phys. Lett. B **367**, 11 (1996).
- [27] A. V. Afanasjev, P. Ring, J. König, Nucl. Phys. A **676**, 196 (2000).
- [28] M. Zalewski et al. Phys. Rev. C **75**, 054306 (2007).
- [29] A. G. Smith et al. Phys. Lett. B **355**, 32 (1995).
- [30] A. V. Afanasjev, D. B. Fossan, G. J. Lane, I. Ragnarsson, Phys. Rep. **322**, 1 (1999).
- [31] N. Schunck, J. Dudek and Frauendorf, Acta Phys. Pol. B **36**, 1071 (2005).
- [32] W. Satula and R. A. Wyss, Rep. Prog. Phys. **68**, 131(2005).
- [33] G. J. Chen, H. C. Song, Y. X. Liu, Chin. Phys. Lett. **22**, 50 (2005).
- [34] S. Wang, H. Hua et al. Phys. Rev. C **72**, 024317 (2005).
- [35] E. Ngijoi-Yogo et al. Phys. Rev. C **75**, 034305 (2007).
- [36] K. Pomorski, P. Ring, G. A. Lalazissis, A. Baran, Z. Lojewski, B. Nerlo-Pomorska, M. Warda, Nucl. Phys. A **624**, 351 (1997).
- [37] E. Garrote, R. Capote, R. Pedrosa, Computer Physics Communications, **92**, 267 (1995).
- [38] H. Yukawa, Proc. Phys. Maths. Soc. Japan **17**, 48 (1935).
- [39] S. Cwiok, J. Dudek, W. Nazarewicz, J. Skalski and T. Werner, Computer Physics Communications, **46**, 379 (1987).
- [40] M. Brack, J. Damgaard, A.S. Jensen, H.C. Pauli, V.M. Strutinsky, and C.Y. Wong, Rev. Mod. Phys. **44**, 320 (1972).

- [41] S. K. Tandel, P. Chowdhry and E. H. Seabury, Phys. Rev. C **73**, 044306 (2006).
- [42] J. Dudek, Acta Phys. Pol. B **9**, 919 (1978).
- [43] K. Hagino, N. W. Lwin, and M. Yamagami, Phys. Rev. C **74**, 017310 (2006).
- [44] F. Garcia and al, Computer Physics Communications. **120**, 57 (1999).
- [45] S. Wang and al, Phys. Rev C **72**, 024317 (2005).
- [46] N. Benhamouda, N. H. Allal, M. Fellah and M. R. Oudih, Int. J. Mod. Phys. E **14**, 197 (2005).
- [47] N.H. Allal and M. Fellah, Phys. Rev. C **43**, 2648 (1991).
- [48] N. Benhamouda, M.R. Oudih, N.H. Allal and M. Fellah, Nucl. Phys. **A 690**, 219c (2001).
- [49] N. Benhamouda, M.R. Oudih, N.H. Allal et M. Fellah, Journées d’Etudes “ Physique et Techniques Nucléaires ”, Alger (1999), p25.
- [50] J. Dudek, A. Majhofer, J. Skalski and al. J. Phys. G **1359** (1979).
- [51] D. L. Hill and J. A. Wheeler, Phys. Rev. **89**, 1102 (1953).
- [52] H. Athimene, Thèse de Magister en Physique Théorique, U.S.T.H.B, 1981.
- [53] J. Y. Zeng, T. H. Jin, and Z. J. Zhao, Phys. Rev. C **50**, 1390 (1994).
- [54] M. R. Oudih, Thèse de doctorat, U.S.T.H.B, (2003).
- [55] N. Pillet, P. Quentin and J. Libert, Nucl. Phys. A **697**, 142 (2002).
- [56] P. H. Heenen, A. Valor, M. Bender, P. Bonche, and H. Flocard, Eur. Phys. J. A **11**, 393 (2001).
- [57] M. Bender, K. Rutz, P. G. Reinhard, and J. A. Maruhn, Eur. Phys. J. A **8**, 59 (2000).
- [58] F. Androzzi, A. Covello, A. Gargano and A. Porrino, Phys. Rev. C **41**, 250 (1990).
- [59] A. Holt, T. Engeland, E. Osnes, M. Hjorth-Jensen and J. Suhonen, Nucl. Phys. A **618**, 107 (1997).
- [60] G. D. Dracoulis, F. G. Kondev, P. M. Walker, Phys. Lett. B **419**, 7 (1998).
- [61] A. A. Raduta and E. Moya de Guerra, Annals of Physics. **284**, 154 (2000).

- [62] R. R. Chasman, Phys. Lett. B **553**, 204 (2003).
- [63] V. M. Maslov, Nucl. Phys. A **743**, 237 (2004).
- [64] A. Holt, T. Engeland, M. Hjorth-Jensen and E. Osnes, Nucl. Phys. A **634**, 41 (1998).
- [65] A. V. Afanasjev and S. Frauendorf, Phys. Rev. C **71**, 064318 (2005).
- [66] A. L. Goodman, Phys. Rev. C **63**, 044325 (2001).
- [67] F. Brandolini, Eur. Phys. J. A **20**, 139 (2004).
- [68] A. Juodagalvis, I. Ragnarsson et S. Aberg, [www. arxiv.org](http://www.arxiv.org) : nuclth-0502057v1.
- [69] S. T. Belyaev, Kgl. Danske Videnskab. Mat. Fys. Medd. **31** : No. 11(1959).
- [70] M. R. Oudih, Thèse de magistère, U.S.T.H.B, (1999).
- [71] J. Bardeen, L. N. Cooper and J.R. Schrieffer, Phys. Rev. **108**, 1175 (1957).
- [72] N.N. Bogoliubov, Nuovo Cimento, **7**, 794 (1958); J.G. Valatin, Nuovo Cimento, **7**, 843 (1958).
- [73] A. L. Goodman, Nucl. Phys. A **230**, 466 (1974).
- [74] P. Magierski, S. Ówiok, J. Dobaczewski and W. Nazarewicz, Phys. Rev. C **48**, 1686 (1993).
- [75] D.R. Inglis, Phys. Rev. **96**, 1059 (1954).
- [76] M. K. Ghosh and S. R. Majumdar, Phys. Rev. C **18**, 1470 (1978).
- [77] D. R. Bés, R. A. Broglia, J. Dudek, W. Nazarewicz and Z. Szymanski, Annals of Physics. **182**, 238 (1988).
- [78] M.J.A. De Voigt, J.Dudek and Z.Szymanski, Rev. Mod. Phys. **55**, 953 (1983).
- [79] D.J.Rowe, *Nuclear Collective Motions*, (Methuen, London,1970).
- [80] T.Mathura and S.Mukherjee, Phys. Rev. C **44**, 909 (1991).
- [81] A.Messiah, *Mécanique Quantique*, Tome 2, (Dunod,Paris,1995).
- [82] A. S. Davydov, *Quantum Mechanics*, (Pergamon Press Ltd, 1976).
- [83] M. R. Ghosh and S. R. Majumdar, Phys. Rev. C **14**, 298 (1976) ; **15**, 1183(E) (1977).

- [84] O. Civitaressé, A. Plastino and A. Faessler, Nucl. Phys. **9**, 1065 (1983).
- [85] O. Civitaressé, A. Plastino and A. Faessler, Nucl. Phys. **9**, 1065 (1983).
- [86] E. R. Marshalek, Phys. Rev. C **15**, 1574 (1977).
- [87] H. Markum, M. E. Faber, A. Ansari, G. Eder and A. Faessler, Nuovo. Cimento. A **70**, 62 (1982b).
- [88] M. Faber, A. Faessler and H. Markum, Nuc. Phys. **9**, 1073 (1983).
- [89] J. Dudek, W. Nazarewicz and P. Olanders, Nucl. Phys. A **420**, 285 (1984).