

N° d'ordre : 04/2014 - C/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

## FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



## THÈSE

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur

En : Mathématiques

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et applications

Par : **OUZZANE Hadjer**

**Inégalités de Carleman ; applications aux problèmes inverses et au contrôle de quelques problèmes d'évolution**

Soutenue publiquement le 22 Juin 2014, devant le jury composé de :

|                 |                         |                         |               |
|-----------------|-------------------------|-------------------------|---------------|
| D. TENIOU       | Professeur              | à l'USTHB               | Président     |
| F. AMMAR-KHODJA | Maître de Conférences/A | à l'U. de Franche-Comté | Examinateur   |
| A. BENABDALLAH  | Professeur              | à l'U. d'Aix Marseille  | Examinatrice  |
| M. MOUSSAOUI    | Professeur              | à l'ENS de Kouba        | Examinateur   |
| P. GAITAN       | Professeur              | à l'U. d'Aix Marseille  | Directrice    |
| O. ZAIR         | Professeur              | à l'USTHB               | Co-Directrice |

## REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont à mes deux directrices de thèse, Patricia Gaitan et Ouahiba Zair. Je leur suis infiniment reconnaissante pour la confiance qu'elles m'ont témoignée dès le début de la thèse. Je les remercie de m'avoir soumis des sujets passionnants et de m'avoir encouragée tout au long de cette aventure. Merci pour votre patience et votre indulgence face à mes moments de doute.

Je remercie très chaleureusement Farid Ammar-Khodja et Mohand Moussaoui d'avoir accepté la tâche de rapporter ce manuscrit, ce dont je suis très honorée. Je suis également très reconnaissante à Assia Benabdallah et Djamel Teniou de constituer mon jury de thèse. Je voudrais en profiter pour remercier profondément Assia Benabdallah pour les discussions et conseils avisés au cours de ces trois années de thèse. Disponible et bienveillante, je la remercie pour ses qualités professionnelles et humaines extraordinaires.

Au cours de la thèse, j'ai eu le plaisir de collaborer avec Tarik Aliziane que je souhaite remercier. Il m'a expliqué beaucoup de résultats basiques et m'a donné de nombreux conseils.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à Mohand Moussaoui, un chercheur exceptionnel mais aussi une personne formidable. Je le remercie pour sa disponibilité, son soutien et ses encouragements permanents.

Un grand merci aux laboratoires dans lesquels j'ai passé ces trois années : Le AMNEDP de l'USTHB, je me dois de remercier son directeur Djamel Teniou qui n'a ménagé aucun effort pour nous offrir de bonnes conditions de travail. Je le remercie également pour l'intérêt qu'il porte à nos travaux ainsi que pour ses nombreux conseils. Le LATP(I2M) d'Aix Marseille Université m'a accueillie dès le premier jour, je remercie tous ses membres et employés pour l'ambiance de travail chaleureuse qui règne dans les lieux, en particulier Franck Boyer pour les discussions mathématiques. Je remercie aussi Yavar Kian et Eric Soccorsi du CPT.

Merci à tous mes enseignants qui m'ont guidée dans l'apprentissage des mathématiques, beaucoup m'ont fortement marquée. Je pense à Djamila Hamroune pour sa rigueur et à mes directeurs de mémoire de Licence et de Master, Keddour Lemrabet et Rachida Djouadi. Je remercie également Djamel Smai pour les discussions scientifiques que nous avons eues.

Avec Rokia Kechkar, Fatima Arab, Asma Louardani, nous avons partagé les bons et mauvais moments des années d'université. Je vous remercie infiniment pour votre présence et pour l'amitié que vous m'avez témoignée. Je pense aussi à mes collègues et amis Djamel Ait Akli et Walid Merniz, merci pour vos encouragements et pour votre soutien. Sans oublier Asma Boumesbah, Isma Kaddouri, Sihem Seghour ainsi que tous les autres thésards, courage à vous tous pour la suite. Un énorme merci à mes amies de toujours qui m'ont

toujours encouragée : Soumeya, Melissa, Nawel, Nina. Et merci, Ilyes, du fond du coeur.

Un remerciement particulier va à Tata Louisa, sa présence indéfectible et son écoute m'ont permis de tenir. Je la remercie pour tout le bonheur qu'elle m'apporte.

J'exprime aussi mes remerciements à toute ma famille, particulièrement à mon grand père Rabah pour sa foi en moi, à Fella pour son soutien inconditionnel, à l'ensemble de mes oncles et tantes ainsi que leurs enfants.

La préparation d'une thèse est parfois une épreuve pénible, par leurs présences permanentes, mes parents, ma soeur et mes deux frères ont su en atténuer l'affliction. Merci de tout coeur, merci pour tout ! Votre amour et votre soutien égayent ma vie.

**Titre** : Inégalités de Carleman ; applications aux problèmes inverses et au contrôle de quelques problèmes d'évolution

**Résumé** : Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'application des inégalités de Carleman pour des problèmes inverses et des problèmes de contrôle.

La première partie est consacrée à l'étude d'un problème inverse pour un système couplé hyperbolique-parabolique. Nous démontrons tout d'abord l'existence et l'unicité des solutions du système considéré dans des espaces adaptés. Nous prouvons ensuite des inégalités de Carleman qui nous permettront d'établir un résultat de stabilité Lipschitz pour la reconstruction de deux des coefficients avec l'observation d'une seule des deux composantes sur un sous domaine et la donnée des deux composantes à un instant fixé.

La deuxième partie concerne l'étude de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes. Ce type de conditions fait apparaître des comportements singuliers de la solution. Nous rappelons d'abord quelques notions sur la théorie du contrôle ainsi que certains problèmes présentant des singularités. Nous démontrons par la suite une inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur avec des conditions mixtes. Grâce à cette inégalité, nous établissons un résultat de contrôlabilité à zéro dans un cas linéaire.

**Mots clés** : Inégalités de Carleman, systèmes hyperboliques-paraboliques, problèmes inverses, stabilité, contrôle, singularités.

**Title** : Carleman estimates ; applications to inverse problems and control of some evolution problems.

**Abstract** : In this thesis, we are interested in the use of Carleman estimates in inverse problems and control problems.

The first part is devoted to the study of an inverse problem for a coupled hyperbolic-parabolic system. We first prove the existence and the uniqueness of solutions of our system in suitable spaces. Next, we prove Carleman estimates which will allow us to establish a Lipschitz stability result for the reconstruction of two coefficients of the system with the observation of one of the two components on a subdomain and the data of the two components at a fixed time.

The second part concerns the study of null controllability for the heat equation with mixed boundary conditions. Such conditions bring up singular behavior of the solution. We first recall some notions of control theory and some problems with singularities. Next, we prove a Carleman estimate for the heat equation with mixed conditions. Thanks to this inequality, we establish a null controllability result for a linear problem.

**Keywords** : Carleman estimates, hyperbolic-parabolic systems, inverse problems, stability, control, singularities.

# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Notations</b>  | <b>1</b>  |
| <b>Introduction générale</b>  | <b>2</b>  |
| <b>I Problème inverse pour un système hyperbolique-parabolique couplé</b>               | <b>8</b>  |
| <b>1 Introduction</b>   | <b>9</b>  |
| <b>2 Problème direct</b>  | <b>13</b> |
| 2.1 Existence et régularité . . . . .   | 13        |
| 2.2 Positivité de la solution . . . . .   | 20        |
| <b>3 Problème inverse pour une équation de transport</b>                                | <b>21</b> |
| 3.1 Introduction . . . . .  | 21        |
| 3.2 Inégalités de Carleman . . . . .  | 24        |
| 3.3 Résultat de stabilité . . . . .   | 27        |
| <b>4 Problème inverse pour un système hyperbolique-parabolique</b>                      | <b>35</b> |
| 4.1 Introduction . . . . .  | 35        |
| 4.2 Inégalités de Carleman . . . . .  | 36        |
| 4.3 Preuve des Théorème 4.2.1 et Théorème 4.2.2 . . . . .                               | 37        |
| 4.3.1 Inégalités de Carleman associées à l'opérateur de transport . . . . .             | 37        |
| 4.3.2 Inégalités de Carleman associées à l'opérateur parabolique . . . . .              | 39        |
| 4.4 Résultat de stabilité . . . . .   | 41        |
| 4.5 Annexe . . . . .  | 57        |
| <b>II Contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes</b> | <b>61</b> |
| <b>5 Introduction</b>   | <b>62</b> |
| <b>6 Résultats préliminaires</b>  | <b>66</b> |
| 6.1 Existence et unicité . . . . .  | 66        |

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>7</b> | <b>Inégalité de Carleman</b>  | <b>69</b> |
| 7.1      | Fonctions poids . . . . .   | 69        |
| 7.2      | Preuve du Théorème 7.1.1 . . . . .  | 70        |
| 7.2.1    | Régularisation en temps . . . . .   | 70        |
| 7.2.2    | Approximation du domaine . . . . .  | 72        |
| 7.2.3    | Mise en oeuvre de l'inégalité de Carleman . . . . .   | 72        |
| 7.2.4    | Termes de bord et passage à la limite en $\varepsilon$ . . . . .                            | 82        |
| 7.2.5    | Conclusion . . . . .  | 86        |
| <b>8</b> | <b>Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes</b> | <b>88</b> |
|          | <b>Conclusion générale</b>  | <b>93</b> |

# Notations

$|\cdot| : |x| = \left( \sum_{i=1}^N |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$ , pour tout  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ .

$\partial\Omega$  : frontière d'un domaine  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ . On note  $x$  ou  $\sigma$  les éléments de  $\partial\Omega$ .

$\nu$  : normale extérieure au domaine  $\Omega$ .

$\frac{\partial f}{\partial t}$  : dérivée de  $f(x, t)$  par rapport à  $t$ . On utilise aussi les notations  $\partial_t f$ ,  $f_t$ .

$supp$  :  $supp(u)$  désigne le support d'une fonction  $u$ .

$\Delta$  : opérateur de Laplace.

$\nabla$  : gradient.

$C(\Omega)$  : ensemble des fonctions  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  continues.

$C(\bar{\Omega})$  : ensemble des fonctions  $y : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  uniformément continues.

$C_c^\infty(\Omega)$  : ensemble des fonctions  $y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  sur  $\Omega$  et à support compact dans  $\Omega$  (dit aussi ; espace des fonctions test).

$\mathcal{D}'(\Omega)$  : dual topologique de  $\mathcal{D}(\Omega)$  ou espace des distributions.

$\mathcal{L}(E, F)$  : ensemble des applications linéaires continues  $L : E \rightarrow F$  entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$ .

$C([0, T]; H)$  : ensemble des fonctions continues sur  $[0, T]$  à valeurs dans un espace de Hilbert  $H$ .

$L^2(0, T; H)$  : espace des classes de fonctions de carré intégrable (au sens de Bochner) de  $[0, T]$  dans un espace de Hilbert  $H$ .

$1_X$  : fonction caractéristique de l'ensemble  $X$ .

$\Lambda(M) = \{u \in L^\infty(\Omega); \|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leq M\}$  où  $M$  est une constante positive donnée.

# **Introduction générale**

Dans cette thèse, nous abordons des travaux autour de deux thématiques principales : d'une part l'étude de problèmes inverses de détermination de certains coefficients d'un système d'équations aux dérivées partielles issu de la biologie et d'autre part, l'étude de la contrôlabilité de l'équation de la chaleur en présence de singularités. Les inégalités de Carleman sont les principaux outils utilisés dans cette thèse. Ces estimations sont un moyen pour démontrer des résultats de stabilité Hölder et Lipschitz pour l'identification de coefficients et de termes sources. Mais aussi, pour prouver des inégalités d'observabilité qui conduisent à des résultats de contrôlabilité.

Avant de donner quelques résultats de l'utilisation de ces estimations, nous rappelons pour commencer certaines définitions.

Rappelons tout d'abord la définition d'une fonction pseudo-convexe.

**Définition 0.0.1.** Soit  $P(x, D)$  un opérateur différentiel d'ordre  $m$  tel que  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ . Notons son symbole principal par  $p_m(x, \xi) = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x) \xi^\alpha$ . Soit  $\varphi \in C^2(\bar{\Omega}, \mathbb{R})$ , on dit que la fonction  $\varphi$  est pseudo-convexe en  $x \in \Omega$  par rapport à  $p_m$  si  $\nabla \varphi \neq 0$  et si  $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$$p_m(x, \xi) = 0 \text{ et } \{p_m, \varphi\}(x, \xi) = 0 \Rightarrow \operatorname{Re}\{\bar{p}_m, \{p_m, \varphi\}\}(x, \xi) > 0.$$

où  $\{, \}$  désigne le crochet de Poisson :

$$\{f, g\} = \sum_j \left( \frac{\partial f}{\partial \xi_j} \frac{\partial g}{\partial x_j} - \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial g}{\partial \xi_j} \right).$$

Si une telle fonction existe, on peut alors établir une inégalité de Carleman de la forme suivante :

$$\sum_{|\alpha| < m} \tau^{2(m-|\alpha|)-1} \int_{\Omega} |D^\alpha u|^2 e^{2\tau\varphi} dx \leq C \int_{\Omega} |P(x, D)u|^2 e^{2\tau\varphi} dx, \quad \tau > 1, \quad u \in C_c^\infty(\Omega).$$

Les inégalités de Carleman ont été initialement proposées par T. Carleman en 1939 dans [23] pour répondre aux questions d'unicité pour des problèmes de Cauchy. Le résultat fondamental de cette théorie, demeure le théorème de Hörmander, cf. [47], qui établit l'unicité en supposant que le symbole principal de l'opérateur est réel et que la surface initiale est fortement pseudo-convexe. Rappelons schématiquement ce résultat.

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^{n+1}$  et  $P(x, D)$  un opérateur différentiel du second ordre à coefficients  $C^1(\Omega)$ , de symbole principal  $p(x, \xi)$  réel. Soit  $\varphi \in C^2(\Omega)$  une fonction réelle,  $x_0 \in \Omega$  et  $\Sigma$  une hypersurface orientée définie par  $\Sigma = \{x \in \Omega, \varphi(x) = \varphi(x_0)\}$  avec  $\nabla \varphi \neq 0$  sur  $\Sigma$ .

Considérons les bicaractéristiques réelles de  $P$  issues de  $x_0$  et tangentes à  $\Sigma$  (les zéros réels doubles du symbole principal de l'opérateur) :

$$\begin{cases} p(x_0, \xi_0) = 0, \\ \{p, \varphi\}(x_0, \xi_0) = \sum_j \frac{\partial p}{\partial \xi_j} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}(x_0, \xi_0) = 0. \end{cases}$$

Si ces bicaractéristiques sont convexes et toutes tournées vers la région  $\{x \in \Omega, \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$  (c'est à dire  $\{p, \{p, \varphi\}\} > 0$ ), alors une solution  $u$  de  $Pu = 0$ , nulle sur  $\{x \in \Omega, \varphi(x) \geq \varphi(x_0)\}$ , est nulle au voisinage de  $x_0$  sur  $\{x \in \Omega, \varphi(x) \leq \varphi(x_0)\}$ . Ces conditions sur la fonction  $\varphi$

sont les conditions de pseudo-convexité.

Au cours des dernières années, le domaine d'applications des inégalités de Carleman a été étendu, essentiellement, à l'étude des problèmes inverses, à des problèmes de stabilisation et à la théorie du contrôle. Ces inégalités sont des estimations de type Sobolev de la solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) avec des normes à poids, en fonction d'une observation localisée de la solution sur un sous-domaine ou sur une partie de la frontière. L'information connue sur un sous-domaine va se propager le long des courbes intégrales du gradient des fonctions poids (lignes de gradient). Ces fonctions poids sont donc essentielles. Elles peuvent être choisies de différentes manières, mais sont toujours liées à l'EDP et au domaine considéré. Nous renvoyons à l'article de Le Rousseau et Lebeau dans [62] pour une introduction plus récente des inégalités de Carleman.

Prenons par exemple l'équation des ondes dans un domaine borné  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$  :

$$\begin{cases} Lv := \partial_t^2 v - \Delta v & \text{dans } \Omega \times (-T, T), \\ v = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (-T, T), \\ v(\cdot, -T) = v(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega, \\ \partial_t v(\cdot, -T) = \partial_t v(\cdot, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Pour  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$ , nous introduisons les fonctions poids  $\psi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0$ , avec  $0 < \beta < 1$  et  $M_0$  est choisie de telle sorte que

$$\forall (x, t) \in \Omega \times (-T, T), \psi(x, t) \geq 1 \quad \text{et} \quad \varphi(x, t) = e^{\lambda\psi(x, t)}.$$

Si  $\Gamma_0 = \{x \in \partial\Omega, \nu(x) \cdot (x - x_0) > 0\}$ , nous avons le résultat suivant démontré dans [68] :

**Théorème 0.0.1.** *S'il existe  $x_0 \in \mathbb{R}^n \setminus \bar{\Omega}$  tel que  $\Gamma_0 \subset \partial\Omega$ , alors il existe  $\lambda_0 > 0$ ,  $s_0 > 0$  et  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, \beta, x_0)$  tels que  $\forall \lambda > \lambda_0$  et  $\forall s > s_0$ , on ait*

$$\begin{aligned} & s\lambda \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi (|\partial_t v|^2 + |\nabla v|^2) \varphi e^{2s\varphi} dx dt + s^3 \lambda^3 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi^3 |v|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq Cs\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma_0} |\partial_\nu v|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt + C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Lv|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

pour tout  $v \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$  tel que  $Lv \in L^2(-T, T; L^2(\Omega))$  et  $v = 0$  sur  $\partial\Omega \times (-T, T)$ .

Cette inégalité permet de donner un résultat de continuation unique mais aussi d'obtenir des résultats de contrôlabilité ou encore de donner des résultats de stabilité pour résoudre des problèmes inverses.

Citons à présent quelques résultats de l'utilisation de ces estimations dans l'étude de problèmes inverses et des problèmes de contrôlabilité.

L'utilisation des inégalités de Carleman dans le domaine des problèmes inverses a été introduite par Bukhgeim et Klivanov dans [20] et Klivanov dans [21, 53, 54]. Les techniques

utilisées sont présentées par Klivanov et Timonov dans [57] pour la reconstruction de coefficients pour des équations aux dérivées partielles linéaires et non linéaires. Ces méthodes donnent des résultats de stabilité Lipschitz locale autour d'une solution connue. Citons aussi quelques revues récentes sur les problèmes inverses et les inégalités de Carleman : Choulli [25], Klivanov [52] et Yamamoto [74].

Du point de vue de la contrôlabilité, beaucoup de travaux ont été faits dans ce cadre là, nous nous référons par exemple à [8, 39, 40, 70]. Concernant les équations paraboliques, en 1971 et 1974 Fattorini et Russel ont prouvé, dans [36, 37], les premiers résultats liés à la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur en dimension une. Par la suite, ce résultat a été prouvé dans le cas général d'une part par Lebeau et Robbiano dans [61] et d'autre part par Fursikov et Imanuvilov dans [41] en utilisant une méthode reposant sur des inégalités de Carleman globales. Nous renvoyons à l'article de Ammar-Khodja, Benabdallah, González-Burgos, de Teresa dans [3] pour les résultats les plus récents sur la contrôlabilité des problèmes paraboliques.

Dans ce contexte, le travail de cette thèse est divisé en deux parties. En effet, grâce aux inégalités de Carleman que l'on établit dans chacun des cas, on donne un résultat de stabilité dans la première partie et un résultat de contrôlabilité dans la seconde.

## **Première partie : Problème inverse pour un système hyperbolique-parabolique couplé**

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude d'un problème inverse pour un système couplé d'équations aux dérivées partielles hyperbolique-parabolique issu de la biologie. Ce système décrit un processus d'angiogénèse tumorale. Ce processus permet à la tumeur de se développer ; il est initié et contrôlé par un composé chimique de diffusion, connu sous le nom de « Tumor Angiogenesis Factor » (TAF). Ce dernier est libéré par la tumeur dans le tissu environnant et va accélérer la croissance des vaisseaux qui vont vasculariser la tumeur et donc lui permettre de se développer.

L'objectif est de reconstruire deux des coefficients des termes de réaction en fonction de l'observation d'une seule des deux composantes ainsi que la donnée des deux composantes à un instant fixé.

Nous introduisons tout d'abord les motivations de l'étude de ce système en lien avec le problème physique. Dans le chapitre 2, nous donnons un résultat d'existence et de régularité des solutions. La positivité de ces solutions de ce système couplé est aussi donnée. Le chapitre 3 porte plus précisément sur l'équation hyperbolique pour laquelle nous établissons une estimation de Carleman ainsi qu'un résultat de stabilité. Le chapitre 4 présente le résultat principal de cette partie : un résultat de stabilité Lipschitz pour deux des coefficients du système avec l'observation d'une seule des deux composantes sur un sous domaine et la donnée des deux composantes à un instant fixé. Ce résultat est établi grâce à une inégalité de Carleman adaptée au système couplé hyperbolique-parabolique.

## **Deuxième partie : Contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes.**

Nous nous intéressons dans cette partie à la contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes.

Dans l'introduction, nous commençons par rappeler quelques éléments de théorie sur la contrôlabilité des équations aux dérivées partielles ainsi que quelques résultats concernant des problèmes qui présentent différentes singularités. En particulier, nous spécifierons le comportement des solutions dans ce cas là. Le chapitre 6 donne des résultats préliminaires sur l'existence et l'unicité des solutions de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes. Dans le chapitre 7, nous démontrons une inégalité de Carleman pour le problème considéré avec des fonctions poids adaptées. Le chapitre 8 consiste à établir un résultat de contrôlabilité à zéro, en utilisant cette dernière inégalité de Carleman, dans un cas linéaire.

## **Première partie**

# **Problème inverse pour un système hyperbolique-parabolique couplé**

# Chapitre 1

## Introduction

Nous nous intéressons à un système couplé d'équations aux dérivées partielles, de type hyperbolique-parabolique issu d'un modèle qui correspond au processus de l'angiogénèse tumorale, voir [43]. Ce processus permet à la tumeur de progresser et est initié et contrôlé par un composé chimique de diffusion, connu sous le nom de « Tumeur Angiogenesis Factor »(TAF). Ce dernier est libéré par les cellules tumorales dans le tissu environnant. Ce modèle est décrit par un système d'équations aux dérivées partielles en temps et en espace dans lequel  $u(x, t)$  représente la densité des cellules endothéliales (cellules des vaisseaux sanguins) et  $v(x, t)$  la concentration du TAF.

Nous considérons le modèle en temps  $t \in [0, T]$ ,  $T$  fini dans un domaine borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Nous supposons, par ailleurs, une frontière régulière  $\Gamma$  de  $\Omega$  qui se décompose en deux parties disjointes, fermées et non vides  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ . La partie du bord non vascularisée est  $\Gamma_2$  et  $\Gamma_1$  est la partie de la frontière à travers laquelle les cellules endothéliales se dirigent vers les zones de plus forte concentration de TAF.

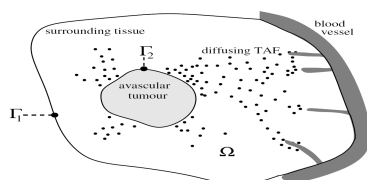


FIGURE 1.1 – Le processus de l'angiogénèse tumorale

Les équations pour  $u$  et  $v$  vérifient le système quasi-linéaire suivant (cf. [43] et leurs références) :

$$\begin{cases} \partial_t u + \nabla v \cdot \nabla u + (\Delta v)u = F(u, v) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ \partial_t v - \Delta v = G(u, v) & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ v(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

Nous choisissons dans un premier temps de traiter un système hyperbolique-parabolique linéaire simplifié. En effet, nous omettons le couplage sur les termes d'ordre un dans le système (1.1) c'est à dire à la place du terme  $\nabla v \cdot \nabla u$ , nous prenons  $A(x) \cdot \nabla u$  où  $A$  est

un champ de vecteurs donné, réel sur  $\Omega$  indépendant du temps.

Nous avons par ailleurs effectué un changement dans la géométrie du domaine en considérant dans notre modèle simplifié un ouvert  $\Omega$  simplement connexe. En effet, nous verrons plus loin que notre choix de fonctions poids va nous conduire à des observations sur une partie de la frontière. Dans le cas où  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, l'observation sera aussi sur la frontière interne, ce qui est d'un point de vue pratique non accessible.

Nous reviendrons dans la conclusion de cette thèse sur les différentes voies pour traiter le système (1.1).

Le nouveau modèle simplifié que l'on considère est le suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u + A(x) \cdot \nabla u = F(u, v) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ \partial_t v - \Delta v = G(u, v) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{sur } \Sigma_T^- = \Gamma_- \times (0, T), \\ v(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (1.2)$$

où  $N \in \mathbb{N}$ ,  $\Omega$  un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^N$  à frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  de classe  $C^2$  et tel que l'on ait la partition de  $\Gamma$  suivante :

$$\begin{aligned} \Gamma_- &= \{x \in \partial\Omega, \quad A(x) \cdot \nu(x) < 0\}, \\ \Gamma_+ &= \{x \in \partial\Omega, \quad A(x) \cdot \nu(x) > 0\}, \\ \Gamma_0 &= \{x \in \partial\Omega, \quad A(x) \cdot \nu(x) = 0\}, \end{aligned} \quad (1.3)$$

avec  $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_+ \cup \Gamma_0$ . Le champ de vecteurs  $A$  est supposé dans  $(W^{1,\infty}(\Omega))^N$ , ce qui revient à dire que  $A$  est (globalement) Lipschitzien avec une constante Lipschitz  $C > 0$  (cf. [34], Théorème 4, p.279) i.e.

$$|A(x_1) - A(x_2)| \leq C|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in \Omega.$$

Les ensembles  $\Gamma_-$ ,  $\Gamma_+$  et  $\Gamma_0$  désignent respectivement les parties du bord où le champ de vecteurs  $A$  est rentrant, sortant ou tangent.

Les termes de réaction  $F$  et  $G$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$F(u, v) = \mu(x)v - \gamma(x)u, \quad G(u, v) = \delta(x)u - k(x)v,$$

où  $\mu, \gamma, \delta, k$  sont des coefficients indépendants du temps.

Les paramètres intervenant dans des phénomènes modélisés par des systèmes d'équations aux dérivées partielles ne sont pas toujours bien connus. Des mesures expérimentales sont alors nécessaires à leur détermination. La notion de problème inverse consiste en la possibilité de retrouver un paramètre à partir de mesures sur la solution du système considéré.

Le problème inverse auquel nous nous intéressons dans cette partie concerne le système (1.2). Il s'agit précisément de démontrer un résultat de stabilité pour les coefficients  $\mu$  et  $\delta$  en fonction d'une mesure intérieure d'une composante et la donnée des deux composantes à un instant fixé. La méthode utilisée est celle de Bukheim et Klivanov, cette méthode est

remarquable pour obtenir des inégalités de stabilité à partir d'estimations de Carleman. Son principe est simple : prenons l'exemple de détermination d'un potentiel  $p$  dans une équation de la chaleur linéaire en  $u$  avec un terme source  $f$  ainsi qu'une condition au bord de type Dirichlet homogène et une donnée initiale  $u_0$ . Nous introduisons  $q(x) = \tilde{p}(x) - p(x)$  et nous écrivons l'équation satisfaite par  $v = \partial_t(u - \tilde{u})$  :

$$\begin{cases} \partial_t v - \Delta v + pv = q\partial_t \tilde{u} & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ v(x, t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ v(x, 0) = qu_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases}$$

Nous remarquons que le coefficient  $q$  apparaît à la fois dans la donnée initiale et dans la source de l'équation. Il suffit alors d'appliquer l'inégalité de Carleman à la nouvelle fonction  $v$  pour obtenir le résultat de stabilité.

Nous citons à présent quelques travaux autour des problèmes inverses et inégalités de Carleman.

Concernant les équations paraboliques, Benabdallah, Gaitan et Le Rousseau dans [15] considèrent l'équation de la chaleur avec un coefficient de diffusion discontinu et démontrent des résultats d'unicité et de stabilité pour le coefficient de diffusion et la donnée initiale à partir d'une mesure de la solution sur une partie de la frontière et à un instant fixé. Imanuvilov et Yamamoto dans [49] démontrent un résultat de stabilité Lipschitz globale pour un terme source d'une équation parabolique avec des conditions au bord de type Fourier en utilisant des observations sur un sous domaine arbitraire. Yuan et Yamamoto dans [75] déterminent les coefficients de la partie principale d'une équation parabolique à partir d'observations frontières.

Pour les équations de transport, citons Machida et Yamamoto dans [64] ; les auteurs donnent un résultat de stabilité Lipschitz pour la reconstruction d'un coefficient à partir d'observations sur le bord. Klibanov et Pamyatnykh dans [55, 56], démontrent un résultat de stabilité Lipschitz pour l'équation de transport non-stationnaire. Gaitan et Ouzzane dans [42] prouvent un résultat de stabilité pour un coefficient d'absorption avec une seule observation sur une partie de la frontière.

Par ailleurs, il existe quelques travaux sur les problèmes inverses pour des systèmes paraboliques couplés, nous nous référons à Cristofol, Gaitan et Ramoul dans [28] où les auteurs donnent un résultat de stabilité simultanément pour un coefficient et une condition initiale avec une observation agissant sur un sous domaine. Dans [29], Cristofol, Gaitan, Ramoul et Yamamoto considèrent un système parabolique non linéaire avec deux composantes et démontrent un résultat de stabilité Lipschitz pour déterminer deux coefficients du système à partir de la donnée d'une des deux composantes. Benabdallah, Cristofol, Gaitan et Yamamoto dans [14] donnent un résultat de stabilité pour la reconstruction de coefficients dans un système de réaction-diffusion-convection  $2 \times 2$  et  $3 \times 3$ .

Pour des systèmes hyperboliques-paraboliques, par exemple en thermoélasticité, nous citons le travail de Bellassoued et Yamamoto dans [13], Wu et Liu dans [73], Albano

et Tataru dans [1]. Pour l'élasticité, nous nous référons à Isakov et Kim dans [51] et Imanuvilov, Isakov et Yamamoto dans [48].

À notre connaissance, il n'existe aucun résultat en ce sens sur les systèmes hyperboliques-paraboliques où l'équation hyperbolique est d'ordre un.

Dans le chapitre 2, nous établissons l'existence et la régularité des solutions du système (1.2). La positivité des solutions de ce système linéaire couplé est aussi donnée. Le chapitre 3 porte plus précisément sur une équation de transport pour laquelle une estimation de Carleman ainsi qu'un résultat de stabilité sont prouvés. Le chapitre 4 donne le résultat principal de cette partie : un résultat de stabilité Lipschitz pour deux des coefficients du système (1.2) avec l'observation d'une seule des composantes sur un sous domaine.

# Chapitre 2

## Problème direct

On se propose de donner un sens aux solutions du système (1.2), présenté dans le chapitre 1, dans des espaces adaptés qui permettront d'établir les inégalités de Carleman ainsi que le résultat de stabilité, ce sera l'objet de la première section de ce chapitre. Dans la seconde section, on démontrera un résultat de positivité de ces solutions.

### Notations de quelques espaces :

Soient  $\mathcal{W}_2$ ,  $H^{2,1}(\Omega_T)$ ,  $H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T)$  les espaces définis respectivement comme suit :

$$\mathcal{W}_2 = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^2(\Omega \times (0, T)), \partial_t u + A \cdot \nabla u \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ u(\cdot, 0) \in L^2(\Omega), u|_{\Gamma_- \times (0, T)} \in L^2(\Gamma_- \times (0, T)) \end{array} \right\},$$

$$H^{2,1}(\Omega_T) = L^2(0, T; H^2(\Omega)) \cap H^1(0, T; L^2(\Omega)),$$

$$H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T) = L^2(0, T; H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)) \cap H^{\frac{3}{4}}(0, T; L^2(\Gamma)).$$

Tout au long de cette présentation,  $C$  désignera une constante générique positive.

## 2.1 Existence et régularité

Afin de démontrer l'existence et l'unicité des solutions du système (1.2), on va procéder en trois parties : d'abord on relève les conditions au bord, ensuite on démontre l'existence et l'unicité du système obtenu après le relèvement. Finalement, on déduit le résultat d'existence et d'unicité du système (1.2). La quatrième partie de cette section donne des résultats de régularité pour le système (1.2).

### Partie I : Relèvement des conditions au bord.

Soient  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  telles que  $\tilde{u} = Rh$  relèvement de  $h$ ,  $h$  donnée dans  $L^2(\Sigma_T^-)$ ,

et  $\tilde{v} = Rg$  relèvement de  $g$ ,  $g$  donnée dans  $H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,

où  $h$ ,  $g$  et  $u_0$ ,  $v_0$  vérifient la relation de compatibilité suivante :

$$g(x, 0) = v_0|_{\Gamma}, \tag{2.1}$$

avec  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $v_0 \in H^1(\Omega)$ .

La relation de compatibilité (2.1) est exactement la condition nécessaire et suffisante pour assurer l'existence de tels relèvements et on a

$$\begin{aligned} \tilde{u} &\text{ dans } \mathcal{W}_2 \text{ avec } \tilde{u} = h \text{ sur } \Gamma_-, \\ \tilde{v} &\text{ dans } H^{2,1}(\Omega_T) \text{ avec } \tilde{v} = g \text{ sur } \Gamma. \end{aligned}$$

([63], Vol 2, Remarque 4.1, Théorème 4.3, p.30).

Le système (1.2) se transforme alors, par le changement de fonctions :

$$w_1 = u - \tilde{u}, \quad w_2 = v - \tilde{v}$$

en :

$$\begin{cases} \partial_t w_1 + A \cdot \nabla w_1 + \gamma w_1 = \mu w_2 + \tilde{q}_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t w_2 - \Delta w_2 + k w_2 = \delta w_1 + \tilde{q}_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ w_1(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ w_2(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ w_1(x, 0) = w_1^0(x), w_2(x, 0) = w_2^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \tilde{q}_1 &= \mu \tilde{v} - (\partial_t \tilde{u} + A \cdot \nabla \tilde{u} + \gamma \tilde{u}), \quad \tilde{q}_2 = \delta \tilde{u} - (\partial_t \tilde{v} - \Delta \tilde{v} + k \tilde{v}), \\ \text{et } w_1^0 &= u_0 - \tilde{u}, w_2^0 = v_0 - \tilde{v}. \end{aligned}$$

### Partie II : Existence et unicité des solutions du système (2.2).

La résolution du système (2.2) est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.1.** *Sous les hypothèses suivantes*

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,
2.  $\gamma, \mu, \delta, k \in L^\infty(\Omega)$ ,
3.  $\tilde{q}_1, \tilde{q}_2 \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,
4.  $w_1^0 \in L^2(\Omega), w_2^0 \in H_0^1(\Omega)$ ,

le problème aux limites (2.2) admet une solution unique  $(w_1, w_2)$  telle que

$$\begin{aligned} w_1 &\in \mathcal{W}_2 \text{ et } w_1 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ w_2 &\in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

### Preuve du Théorème 2.1.1 :

La preuve de ce théorème se fait en plusieurs étapes.

**Étape A.** On commence par remarquer que pour toute constante  $M \in \mathbb{R}$ ,  $(w_1, w_2)$  est solution faible de (2.2) si et seulement si  $Y = (y_1, y_2) = e^{-Mt}(w_1, w_2)$  est solution faible de

$$\begin{cases} \partial_t y_1 + A \cdot \nabla y_1 + (\gamma - M)y_1 = \mu y_2 + e^{-Mt} \tilde{q}_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t y_2 - \Delta y_2 + (k - M)y_2 = \delta y_1 + e^{-Mt} \tilde{q}_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ y_1(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ y_2(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ y_1(x, 0) = w_1^0(x), y_2(x, 0) = w_2^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

**Étape B.** Soit  $X = (L^2(0, T; L^2(\Omega)))^2 = L^2(\Omega_T)^2$ . C'est un espace de Banach. On considère l'application  $\mathcal{L}$  définie par  $Y \in X \rightarrow \mathcal{L}(Y) := Z$  avec  $Z = (z_1, z_2)$  est solution faible de

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + A \cdot \nabla z_1 + (\gamma - M)z_1 = \mu z_2 + e^{-Mt} \tilde{q}_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t z_2 - \Delta z_2 + (k - M)z_2 = \delta y_1 + e^{-Mt} \tilde{q}_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ z_1(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ z_2(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z_1(x, 0) = w_1^0(x), z_2(x, 0) = w_2^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.4)$$

Il faut montrer tout d'abord que l'application  $\mathcal{L}$  est bien définie. Ceci revient à justifier l'existence de  $Z \in X$  solution de (2.4), ce qui découle des résultats d'existence de solutions d'équations paraboliques avec un second membre dans  $L^2(\Omega_T)$  (ici  $\delta y_1 + e^{-Mt} \tilde{q}_2$ ). Ceci donnera l'existence de  $z_2$  et par conséquent l'existence de solutions d'équations de transport dont le champ de vecteurs  $A$  est dans  $W^{1,\infty}$  et le second membre (ici  $\mu z_2 + e^{-Mt} \tilde{q}_1$ ) dans  $L^2(\Omega_T)$ .

Considérons d'abord le problème aux limites pour l'équation parabolique, à savoir

$$\begin{cases} \partial_t z_2 - \Delta z_2 + (k - M)z_2 = f_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ z_2(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ z_2(x, 0) = w_2^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.5)$$

avec  $f_2 = \delta y_1 + e^{-Mt} \tilde{q}_2$ .

La proposition suivante donne un résultat d'existence et d'unicité pour le système (2.5) (cf. [34]) :

**Proposition 2.1.1.** *Pour  $f_2 \in L^2(\Omega \times (0, T))$ ,  $w_2^0 \in H_0^1(\Omega)$  et  $k(x) \in L^\infty(\Omega)$ , il existe une unique solution  $z_2$  de (2.5) telle que*

$$z_2 \in L^2(0, T; H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \cap C([0, T]; H_0^1(\Omega)) \quad \text{et} \quad \frac{dz_2}{dt} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)).$$

Passons au problème aux limites pour l'équation de transport :

$$\begin{cases} \partial_t z_1 + A \cdot \nabla z_1 + (\gamma - M)z_1 = f_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ z_1(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ z_1(x, 0) = w_1^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.6)$$

avec  $f_1 = \mu z_2 + e^{-Mt} \tilde{q}_1$ .

La résolution du problème (2.6) est donnée par la proposition suivante (cf. [18], la démonstration repose sur l'ajout d'un terme de viscosité dans la première équation du problème (2.6) ensuite faire un passage à la limite).

**Proposition 2.1.2.** *Sous les hypothèses suivantes*

1.  $(\gamma - M) \in L^\infty(\Omega)$ ,
2.  $f_1 \in L^2(\Omega \times (0, T))$ ,
3.  $w_1^0 \in L^2(\Omega)$ ,
4.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,

il existe une unique solution  $z_1 \in \mathcal{W}_2$  au problème (2.6) et on a  $z_1 \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

**Remarque 2.1.1.** Les propositions précédentes donnent l'existence et l'unicité des solutions  $z_1$  et  $z_2$  ainsi que la régularité nécessaire pour les estimations d'énergie qui suivent.

### Étape C.

#### Existence :

On veut à présent appliquer le théorème de point fixe de Banach à l'application  $\mathcal{L}$  dans l'espace  $X = (L^2(0, T; L^2(\Omega)))^2$ . Soit  $Y_1, Y_2 \in X$ , on note  $H = (h_1, h_2) = \mathcal{L}(Y_1) - \mathcal{L}(Y_2)$ ,  $Y_1 = (y_1^1, y_1^2)$  et  $Y_2 = (y_2^1, y_2^2)$ . On veut montrer que l'application  $\mathcal{L}$  est contractante, c'est à dire

$$\|h_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq C_{\mathcal{L}}(\|y_1^1 - y_2^1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|y_1^2 - y_2^2\|_{L^2(\Omega_T)}^2)$$

où  $C_{\mathcal{L}} < 1$ .

On rappelle les notations suivantes  $z_i = (z_1^i, z_2^i)$ ,  $h_i = z_i^1 - z_i^2$  pour  $i = 1, 2$  alors  $h_1$  et  $h_2$  sont solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t h_1 + A \cdot \nabla h_1 + (\gamma - M)h_1 = \mu h_2 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t h_2 - \Delta h_2 + (k - M)h_2 = \delta(y_1^1 - y_1^2) & \text{dans } \Omega_T, \\ h_1(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ h_2(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ h_1(x, 0) = 0, h_2(x, 0) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (2.7)$$

En faisant le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$  de la première équation par  $h_1$  et de la seconde par  $h_2$  et en additionnant le résultat, cela nous permet d'obtenir les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot A |h_1|^2 dx - \int_{\partial\Omega} A \cdot \nu |h_1|^2 d\sigma - \int_{\Omega} (\gamma - M) |h_1|^2 dx \\ & - \int_{\Omega} |\nabla h_2|^2 dx - \int_{\Omega} (k - M) |h_2|^2 dx + \int_{\Omega} \mu h_1 h_2 dx + \int_{\Omega} \delta (y_1^1 - y_1^2) h_2 dx. \end{aligned} \quad (2.8)$$

De l'inégalité de Young et de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \mu h_1 h_2 dx \right| &\leq \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty} \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty} \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \\ \left| \int_{\Omega} \delta (y_1^1 - y_1^2) h_2 dx \right| &\leq \frac{1}{4T} \|y_1^1 - y_1^2\|_{L^2(\Omega)}^2 + T \|\delta\|_{L^\infty} \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned}$$

En reportant ceci dans (2.8), on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) \\
& \leq - \int_{\Gamma_+} A \cdot \nu |h_1|^2 d\sigma - \int_{\Gamma_-} A \cdot \nu |h_1|^2 d\sigma \\
& - \left( -M - \frac{1}{2} \|\operatorname{div}(A)\|_{L^\infty(\Omega)} + \inf_{x \in \Omega} |\gamma(x)| - \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} \right) \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& - \left( -M + \frac{1}{C_p} + \inf_{x \in \Omega} |k(x)| - \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} - T \|\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right) \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{4T} \|y_1^1 - y_1^2\|_{L^2(\Omega)}^2
\end{aligned} \tag{2.9}$$

où  $C_p$  est la constante de Poincaré. On choisit alors  $M$  telle que :

$$M \leq \min \left\{ \inf_{x \in \Omega} |\gamma(x)| - \frac{1}{2} \|\operatorname{div} A\|_{L^\infty(\Omega)} - \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)}, + \frac{1}{C_p} + \inf_{x \in \Omega} |k(x)| - \frac{1}{2} \|\mu\|_{L^\infty(\Omega)} - T \|\delta\|_{L^\infty(\Omega)}^2 \right\}.$$

En intégrant l'inégalité (2.9) sur  $(0, s)$ ,  $0 \leq s \leq T$  et en tenant compte du fait que  $h_1$  est nulle sur  $\Gamma_-$ , que  $A \cdot \nu > 0$  sur  $\Gamma_+$  et que les conditions initiales sont nulles, on obtient

$$\|h_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq -C \left( \int_0^s \|h_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega)}^2 dt \right) + \frac{1}{2T} \int_0^s \|(y_1^1 - y_1^2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt.$$

Ce qui donne

$$\|h_1(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|h_2(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{2T} \int_0^s \|(y_1^1 - y_1^2)(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt. \tag{2.10}$$

On intègre de nouveau (2.10) sur  $(0, T)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
\|h_1\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|h_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 & \leq \frac{1}{2} \|y_1^1 - y_1^2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|y_1^1 - y_1^2\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \frac{1}{2} \|y_2^1 - y_2^2\|_{L^2(\Omega_T)}^2.
\end{aligned}$$

C'est à dire

$$\|H\|_{L^2(\Omega_T)}^2 \leq \frac{1}{2} \|Y_1 - Y_2\|_{L^2(\Omega_T)}^2.$$

L'application  $\mathcal{L}$  est donc une contraction, le théorème du point fixe de Banach nous conduit à l'existence et l'unicité d'un point fixe  $Y$  de  $\mathcal{L}$ .

■

### Partie III : Existence et unicité des solutions du système (1.2).

En tenant compte des hypothèses du Théorème 2.1.1 et du fait que

$$u = w_1 + \tilde{u}, \quad v = w_2 + \tilde{v},$$

l'existence et l'unicité des solutions du système (1.2) est donnée par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2.** *Sous les hypothèses suivantes :*

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,
2.  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $v_0 \in H^1(\Omega)$ ,
3.  $h \in L^2(\Sigma_T^-)$ ,  $g \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,
4.  $k, \delta, \gamma, \mu \in L^\infty(\Omega)$ ,

et où  $h, g, u_0, v_0$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$h(x, 0) = u_0|_{\Gamma^-}, \quad g(x, 0) = v_0|_{\Gamma},$$

le problème aux limites (1.2) admet une solution unique  $(u, v)$  telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}_2 \text{ et } u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ v &\in H^{2,1}(\Omega_T). \end{aligned}$$

**Partie IV : Régularité des solutions du système (1.2).**

Dans cette partie, il s'agit d'améliorer la régularité en temps des solutions du système (1.2). Pour ce faire, nous dérivons en temps ce dernier d'une manière formelle en posant  $u_1 := \partial_t u$  et  $v_1 := \partial_t v$ . Alors,  $u_1$  et  $v_1$  sont solutions du système suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_1 + A \cdot \nabla u_1 + \gamma u_1 = \mu v_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t v_1 - \Delta v_1 + k v_1 = \delta u_1 & \text{dans } \Omega_T, \\ u_1(x, t) = h_1 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ v_1(x, t) = g_1 & \text{sur } \Sigma_T, \\ u_1(x, 0) = u_1^0(x), \quad v_1(x, 0) = v_1^0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (2.11)$$

avec  $h_1(x, t) = \partial_t h(x, t)$ ,  $g_1(x, t) = \partial_t g(x, t)$ ,

$u_1(x, 0) = \partial_t u(x, 0) = -A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0$ ,  $v_1(x, 0) = \partial_t v(x, 0) = \Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0$ .

En appliquant le Théorème 2.1.2 au système (2.11), sous les hypothèses suivantes :

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,
2.  $u_1^0 \in L^2(\Omega)$ ,  $v_1^0 \in H^1(\Omega)$ ,
3.  $h_1 \in L^2(\Sigma_T^-)$ ,  $g_1 \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,
4.  $k, \delta, \gamma, \mu \in L^\infty(\Omega)$ ,

où  $h_1, g_1, u_1^0, v_1^0$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$h_1(x, 0) = u_1^0|_{\Gamma^-}, \quad g_1(x, 0) = v_1^0|_{\Gamma},$$

il existe une solution  $(u_1, v_1)$  telle que

$$\begin{aligned} u_1 &\in \mathcal{W}_2 \text{ et } u_1 \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \\ v_1 &\in H^{2,1}(\Omega_T). \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.3.** *Sous les hypothèses suivantes :*

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,
2.  $u_0 \in H^1(\Omega)$ ,  $v_0 \in H^3(\Omega)$ ,
3.  $\partial_t h \in L^2(\Sigma_T^-)$ ,  $\partial_t g \in H^{\frac{3}{2},\frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,

4.  $k, \delta \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma, \mu \in L^\infty(\Omega)$ ,

où  $h, g, u_0, v_0$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla u_0 + \gamma u_0 - \mu v_0 &= 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\}, \\ \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta v_0 + k v_0 - \delta u_0 &= 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\}, \end{aligned}$$

le problème aux limites (1.2) admet une solution unique  $(u, v)$  telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}_2, u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \partial_t u \in \mathcal{W}_2, \\ v &\in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t v \in H^{2,1}(\Omega_T). \end{aligned}$$

**Remarque 2.1.2.** En dérivant de façon itérée le système (2.11) par rapport au temps, on déduit les propositions qui suivent :

**Proposition 2.1.4.** Sous les hypothèses suivantes :

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N \cap H^1(\Omega)^N$ ,
2.  $u_0 \in H^3(\Omega)$ ,  $v_0 \in H^5(\Omega)$ ,
3.  $\partial_t^2 h \in L^2(\Sigma_T^-)$ ,  $\partial_t^2 g \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,
4.  $k, \delta \in H^3(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma, \mu \in H^1(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,

où  $h, g, u_0, v_0$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$(i) \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla u_0 + \gamma u_0 - \mu v_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\},$$

$$(ii) \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta v_0 + k v_0 - \delta u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\},$$

$$(iii) \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) + \gamma(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) - \mu(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\},$$

$$(iv) \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) + k(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) - \delta(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\},$$

le problème aux limites (1.2) admet une solution unique  $(u, v)$  telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}_2, u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \partial_t u \in \mathcal{W}_2, \partial_t^2 u \in \mathcal{W}_2, \\ v &\in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t v \in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t^2 v \in H^{2,1}(\Omega_T). \end{aligned}$$

**Proposition 2.1.5.** Sous les hypothèses suivantes :

1.  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N \cap H^2(\Omega)^N$ ,
2.  $u_0 \in H^5(\Omega)$ ,  $v_0 \in H^7(\Omega)$ ,
3.  $\partial_t^3 h \in L^2(\Sigma_T^-)$ ,  $\partial_t^3 g \in H^{\frac{3}{2}, \frac{3}{4}}(\Sigma_T)$ ,
4.  $k, \delta \in H^5(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,  $\gamma, \mu \in H^3(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ ,

et où  $h, g, u_0, v_0$  vérifient les relations de compatibilité suivantes :

$$(i) \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla u_0 + \gamma u_0 - \mu v_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\},$$

$$(ii) \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta v_0 + k v_0 - \delta u_0 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\},$$

$$(iii) \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) + \gamma(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) - \mu(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\},$$

$$(iv) \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) + k(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) - \delta(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\},$$

$$(v) \partial_t h(x, t)|_{t=0} + A \cdot \nabla \zeta_1 + \gamma \zeta_1 - \mu \zeta_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_- \times \{t = 0\},$$

$$(vi) \partial_t g(x, t)|_{t=0} - \Delta \zeta_2 + k \zeta_2 - \delta \zeta_1 = 0 \text{ sur } \Gamma \times \{t = 0\},$$

le problème aux limites (1.2) admet une solution unique  $(u, v)$  telle que

$$\begin{aligned} u &\in \mathcal{W}_2, u \in C([0, T]; L^2(\Omega)), \partial_t u \in \mathcal{W}_2, \partial_t^2 u \in \mathcal{W}_2, \partial_t^3 u \in \mathcal{W}_2, \\ v &\in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t v \in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t^2 v \in H^{2,1}(\Omega_T), \partial_t^3 v \in H^{2,1}(\Omega_T). \end{aligned}$$

Avec

$$\zeta_1 := -A \cdot \nabla(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) - \gamma(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0) + \mu(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0),$$

$$\zeta_2 := \Delta(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) - k(\Delta v_0 - k v_0 + \delta u_0) + \delta(-A \cdot \nabla u_0 - \gamma u_0 + \mu v_0).$$

## 2.2 Positivité de la solution

Dans cette section, donnons un résultat de positivité des solutions du système (1.2). Pour la démonstration, on peut se référer à l'article de [43].

Introduisons tout d'abord les hypothèses suivantes :

### Hypothèses 2.2.1.

$$(i) u_0 \geq 0, h \geq 0 \text{ et } F(0, \eta) \geq 0 \forall (0, \eta) \in V, \eta \geq 0.$$

$$(ii) v_0 \geq 0, g \geq 0 \text{ et } G(\xi, 0) \geq 0 \forall (\xi, 0) \in V, \xi \geq 0.$$

où  $V$  est un ouvert dans  $\mathbb{R}^2$  tel que  $\{u_0(x), v_0(x), x \in \bar{\Omega}\} \subset V$ .

**Proposition 2.2.1.** *Sous les hypothèses 2.2.1,  $u, v \geq 0$  sur  $\bar{\Omega} \times [0, T]$ .*

# Chapitre 3

## Problème inverse pour une équation de transport

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'identification d'un coefficient d'absorption pour une équation de transport dans un domaine borné en utilisant des inégalités de Carleman. Cette étude est une première étape dans l'étude du problème inverse de reconstruction de coefficients pour le système (1.2).

### 3.1 Introduction

Soit  $\Omega$  un ouvert borné simplement connexe de  $\mathbb{R}^N$  à frontière  $\partial\Omega = \Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^2$ . Soit  $u(x, t) \in \mathbb{R}$  la densité de cellules au temps  $t > 0$  et à la position  $x \in \mathbb{R}^N$  dont la vitesse est  $A = A(x)$ . On définit  $\Gamma^\pm$  comme suit :

$$\Gamma^+ = \{x \in \partial\Omega; \nu(x) \cdot A > 0\} \text{ et } \Gamma^- = \{x \in \partial\Omega; \nu(x) \cdot A \leq 0\}.$$

Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u + A(x) \cdot \nabla u + p(x)u = 0 & \text{dans } \Omega_T := \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{sur } \Gamma^- \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

La condition aux limites pour l'équation de transport prescrite uniquement sur  $\Gamma_-$  conduit à un problème bien posé. Pour s'en convaincre, prenons l'exemple suivant :

**Exemple 3.1.1.** *l'équation de transport unidimensionnelle à vitesse constante  $C > 0$*

$$\begin{cases} \partial_t u + C\partial_x u = 0 & \text{dans } (0, L) \times (0, T), \\ u(0, t) = f(t) & \text{sur } \{0\} \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } (0, L), \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $u_0 \in L^2(0, L)$ .

*Ce problème est bien posé car la vitesse est positive et on fixe la condition sur le bord de gauche (en  $x = 0$ ) par lequel les données entrent. La solution de ce problème est donnée par*

$$u(x, t) = \begin{cases} u_0(x - Ct) & \text{si } x > Ct, \\ f(t - \frac{x}{C}) & \text{si } x < Ct. \end{cases} \quad (3.3)$$

Notons aussi, que contrairement à l'équation de la chaleur, il n'y a aucun effet régularisant de la donnée initiale, la solution  $u$  ne peut pas être plus régulière que  $u_0$ .

Les équations de transport sont aussi qualifiées d'hyperboliques car elles font apparaître une notion de propagation à vitesse finie. Pour l'étude des équations de transport avec « un champ de vitesse variable (en temps et en espace) », on est amené à étudier une équation différentielle ordinaire. Les conditions d'existence et d'unicité qui portent sur ce champ de vitesse sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

Nous constatons que malgré l'extrême simplicité apparente de l'équation de transport, les problèmes de conditions aux limites sont des problèmes délicats dans le cas général. Ces équations jouent un rôle important en physique. Elle comprennent des domaines tels que le transport des neutrons, l'imagerie médicale et la tomographie optique (cf. par exemple [7], [24], [32], [60]).

L'étude mathématique du problème direct associé à (3.1) a été développée largement dans la littérature. Nous citons par exemple [9], [31], [59]. Introduisons les hypothèses suivantes :

**Hypothèses 3.1.1.**

- (i)  $p \in \Lambda(M)$ ,
- (ii)  $A \in (W^{1,\infty}(\Omega))^N$ ,
- (iii)  $(h, u_0)$  dans  $L^2(\Gamma^- \times (0, T)) \times L^2(\Omega)$ .

Sous les Hypothèses 3.1.1, le problème (3.1) admet une unique solution qui appartient à l'espace

$$\mathcal{W} = \left\{ u \in L^2(\Omega \times (0, T)); \frac{\partial u}{\partial t} + A \cdot \nabla u \in L^2(\Omega \times (0, T)) \right\}.$$

et on a  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ .

De plus, si  $u_0 \in C^1(\Omega)$ ,  $h \in C^1([0, T]; L^2(\Gamma^-))$  sont tels que l'on ait les relations de compatibilité suivantes :

$$u_0 = h|_{t=0}, \quad \partial_t h|_{t=0} + A \cdot \nabla u_0 + p u_0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma^-,$$

alors

$$u \in C^1([0, T]; L^2(\Omega)), \quad A \cdot \nabla u \in C([0, T]; L^2(\Omega)).$$

Notons que  $u \geq 0$  si  $u_0 \geq 0$  et  $h \geq 0$ . (cf. [31]).

Il y a de nombreux résultats dans l'étude de problèmes inverses pour l'équation de transport avec un terme intégral. Dans [26], Choulli et Stefanov déterminent un coefficient d'absorption à partir de la connaissance de l'opérateur d'Albedo qui donne une relation entre les deux quantités  $u|_{\Gamma^+}$  et  $u|_{\Gamma^-}$ . Leur approche est basée sur l'étude des singularités du noyau de cet opérateur.

L'existence et l'unicité dans la reconstruction de coefficients particuliers pour l'équation

de transport non stationnaire a été obtenue par Prilepko et Ivankov dans [67]. Des résultats sur les problèmes inverses surdéterminés pour l'équation de transport peuvent être trouvés dans les travaux de Tamasan [72] et Stefanov [69].

La stabilité dans le problème inverse de reconstruction de coefficients est prouvée par Bal et Jolivet en introduisant la moyenne angulaire de l'opérateur d'Albedo dans [6] et par la connaissance de ce même opérateur dans [5]. Dans ces travaux, les auteurs doivent faire un nombre infini de mesures ; les données et les mesures sont prises sur le bord et la donnée initiale peut être nulle. Bal dans [4] et Stefanov dans [69] ont donné une revue des résultats récents sur l'étude d'un problème inverse pour l'équation de transport linéaire. Différentes reconstructions sont considérées ; l'unicité et la stabilité sont prouvées dans le cas stationnaire et non-stationnaire.

L'approche de Klibanov et Pamyatnykh dans [56] est différente de celle de [6], [5] ; en effet, ils mesurent une seule composante sur  $\Gamma^+ \times (0, T)$  avec une donnée initiale et une donnée au bord sur  $\Gamma^- \times (0, T)$ .

Le problème inverse dans la reconstruction d'un coefficient d'absorption pour l'équation de transport à partir de mesures sur le bord en utilisant des inégalités de Carleman a été étudié par Klibanov et Pamyatnykh dans [56] et Machida et Yamamoto dans [64]. Contrairement à [64], nous considérons dans notre travail le cas d'une vitesse qui dépend de la variable spatiale  $x$ . Aussi, nous utilisons deux paramètres au lieu d'un dans l'inégalité de Carleman ainsi que des estimations d'énergie dans la preuve du résultat de stabilité.

Un résultat de stabilité Lipschitz pour l'équation de transport a aussi été établi par Klibanov et Pamyatnykh dans [55] où les auteurs donnent une inégalité de Carleman ponctuelle. En théorie du contrôle, de telles estimations ont été utilisées pour obtenir la contrôlabilité exacte par Klibanov et Yamamoto dans [58].

Notre problème peut être formulé de la manière suivante :

Est-il possible, sous les hypothèses précédentes, de reconstruire le coefficient d'absorption  $p(x)$  à partir des mesures de  $(\partial_t u)|_{\Gamma^+ \times (0, T)}$  ?

**Notre résultat principal est le suivant :**

Il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|(p - \tilde{p})(x)\|_{L^2(\Omega)} \leq C \|(\partial_t u - \partial_t \tilde{u})(x, t)\|_{L^2(\Gamma^+ \times (0, T))}.$$

où  $u$  (resp.  $\tilde{u}$ ) est une solution de (3.1) associée à  $(p, h, u_0)$  (resp.  $(\tilde{p}, h, u_0)$ ).

Plus précisément, cf. Théorème 3.3.1, Section 3.3.

On établit tout d'abord une inégalité de Carleman globale adaptée à notre problème et on démontre des estimations d'énergie. Ensuite on donne le résultat de stabilité pour le coefficient d'absorption  $p$ .

## 3.2 Inégalités de Carleman

Dans cette section, nous allons démontrer deux inégalités de Carleman, une pour le problème direct (3.1) et l'autre pour le problème rétrograde associé.

Soit  $\psi$  une fonction dans  $C^2(\overline{\Omega_T})$  qui vérifie les hypothèses suivantes :

### Hypothèses 3.2.1.

- (i)  $\psi(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (-T, T)$ ,
- (iv)  $\partial_t \psi + A(x) \cdot \nabla \psi < 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (-T, T)$ ,
- (v)  $\psi(x, t) = \psi(x, -t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$ .

**Remarque 3.2.1.** *Nous avons choisi une fonction poids qui vérifie certaines hypothèses qui ne sont pas forcément nécessaires dans cette partie. Néanmoins, ce choix a été étudié dans l'objectif de l'utiliser dans le chapitre suivant, qui étudie un couplage de l'équation de transport avec une équation parabolique. Cependant, on peut traiter cette équation de transport en utilisant une fonction poids explicite à savoir*

$$\psi(x, t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2$$

avec  $\beta > 0$  sous réserve d'imposer au champ de vecteurs  $A(x)$  de satisfaire la condition  $\|A\|_{L^\infty(\Omega)}^2 - |\operatorname{div} A|_{L^\infty(\Omega)}^2 > \beta$ .

Nous démontrons à présent l'inégalité de Carleman associée au problème direct, qui est donnée dans la proposition suivante :

**Proposition 3.2.1.** *Soit  $p \in \Lambda(M)$  et  $\psi$  la fonction poids qui vérifie (3.2.1). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  telle que pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$*

$$\begin{aligned} & \|P_1(e^{s\varphi}v)\|_{L^2(\Omega_T)} + s\lambda^2 \int_0^T \int_\Omega \varphi |v|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \int_0^T \int_\Omega |Lv|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} \varphi |v|^2 A \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt, \end{aligned} \quad (3.4)$$

pour tout  $v$  tel que  $v \in L^2(\Omega \times (0, T))$  vérifiant  $Lv := \partial_t v + A \cdot \nabla v \in L^2(\Omega \times (0, T))$ ,  $v|_{\Gamma^-} = 0$  et  $v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) = 0$ , où  $P_1$  est définie par (3.5) et (3.6).

### Preuve de la Proposition 3.2.1 :

On pose, pour  $s > 0$ , le changement de fonction  $w(x, t) = e^{s\varphi(x, t)}v(x, t)$  et on introduit l'opérateur

$$Pw = e^{s\varphi}L(e^{-s\varphi}w).$$

Alors on obtient

$$Pw = \partial_t w + A \cdot \nabla w - s\lambda\varphi(\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi)w := P_1w + P_2w \quad (3.5)$$

où

$$P_1w = \partial_t w + A \cdot \nabla w \quad \text{et} \quad P_2w = -s\lambda\varphi(\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi)w. \quad (3.6)$$

Alors

$$\|Pw\|_{L^2(\Omega_T)}^2 = \|P_1w\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + \|P_2w\|_{L^2(\Omega_T)}^2 + 2(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)}. \quad (3.7)$$

L'objectif est d'estimer inférieurement le produit scalaire  $2(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)}$ . Nous utilisons essentiellement des intégrations par parties et le fait que  $w(\cdot, 0) = w(\cdot, T) = 0$  et  $w|_{\Gamma^-} = 0$ .

$$\begin{aligned} 2(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)} &= 2 \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t w + A \cdot \nabla w)(-s\lambda\varphi(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi)w) dx dt \\ &= -2s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} w \partial_t w \varphi(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi) dx dt - 2s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} w \nabla w \cdot A \varphi(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi) dx dt \\ &= -s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} \partial_t(w^2) \varphi(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi) dx dt - s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} \nabla(w^2) \cdot A \varphi(\partial_t\psi + A \cdot \nabla\psi) dx dt \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Un calcul direct nous permet d'avoir

$$\begin{aligned} I_1 &= s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi \partial_t \psi (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) dx dt + s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi \partial_t (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) dx dt. \\ I_2 &= s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \nabla \psi \cdot A (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) w^2 dx dt + s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} \varphi \nabla (A (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi)) w^2 dx dt \\ &\quad - s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) \varphi d\sigma dt. \end{aligned}$$

En rassemblant les termes d'ordre supérieur et d'ordre inférieur selon les puissances de  $s$  et de  $\lambda$ , on trouve

$$\begin{aligned} &s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi)^2 dx dt - s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) \varphi d\sigma dt \\ &+ s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi \left( \partial_t^2 \psi + 2A \cdot \nabla \partial_t \psi + |A|^2 \Delta \psi + \nabla \cdot A (\partial_t \psi + A \cdot \nabla \psi) \right) dx dt = 2(P_1w, P_2w)_{L^2(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

A présent, nous nous intéressons au terme dominant, c'est à dire celui qui porte les puissances les plus élevées en  $s$  et  $\lambda$ ; nous le voulons positif. En utilisant les hypothèses

sur  $\psi$  et  $A$  on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |P_1 w|^2 dx dt + s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \varphi w^2 dx dt &\leq C s \lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu \varphi d\sigma dt \\ &+ C \int_0^T \int_{\Omega} |P w|^2 dx dt + C s \lambda \int_0^T \int_{\Omega} \varphi w^2 dx dt. \end{aligned}$$

Pour tout  $s$  et  $\lambda > 0$  grands, la dernière intégrale du membre de droite est absorbée par le terme dominant en  $s\lambda^2$  du membre de gauche, il vient

$$\int_0^T \int_{\Omega} |P_1 w|^2 dx dt + s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi dx dt \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |P w|^2 dx dt + C s \lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu \varphi d\sigma dt.$$

En remplaçant  $w$  par son expression, on conclut la preuve de la Proposition 3.2.1. ■

Nous démontrons ensuite une inégalité de Carleman pour le problème rétrograde :

**Proposition 3.2.2.** *Soit  $p \in \Lambda(M)$ . Soit  $\psi$  la fonction poids vérifiant (3.2.1). Il existe  $s_0$ ,  $\lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  tels que pour tout  $s > s_0$ ,  $\lambda > \lambda_0$*

$$\begin{aligned} s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} \varphi |v|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} |L_{back} v|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C s \lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} \varphi |v|^2 A \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt, \end{aligned} \tag{3.8}$$

pour tout  $v$  tel que  $v \in L^2(\Omega \times (0, T))$  vérifiant  $L_{back} v := -\partial_t v + A \cdot \nabla v \in L^2(\Omega \times (0, T))$ ,  $v|_{\Gamma^-} = 0$  et  $v(\cdot, 0) = v(\cdot, T) = 0$ .

**Preuve de la Proposition 3.2.2 :**

De même que pour la Proposition 3.2.1, en conjuguant  $L_{back}$  à gauche par  $e^{s\varphi}$  et à droite par  $e^{-s\varphi}$ , nous définissons l'opérateur  $P_{back}$  que l'on va décomposer en  $P_{1,back}$  et  $P_{2,back}$ . Nous estimons le produit scalaire  $(P_{1,back} w, P_{2,back} w)_{L^2(\Omega_T)}$ . On obtient

$$\begin{aligned} 2(P_{1,back} w, P_{2,back} w)_{L^2(\Omega_T)} &= s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi (\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi)^2 dx dt \\ &+ s\lambda \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi \left( \partial_t^2 \psi - 2A \cdot \nabla \psi + |A|^2 \Delta \psi - \nabla \cdot A (\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi) \right) dx dt \\ &+ s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu (\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi) \varphi d\sigma dt. \end{aligned}$$

Dans ce cas, nous ne connaissons pas le signe de  $\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi$ , nous pouvons uniquement dire que,  $\partial_t \psi - A \cdot \nabla \psi \neq 0$ . On a donc l'estimation suivante :

$$s\lambda^2 \int_0^T \int_{\Omega} w^2 \varphi dx dt \leq \int_0^T \int_{\Omega} |P_{back} w|^2 dx dt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma^+} w^2 A \cdot \nu \varphi d\sigma dt.$$

En remplaçant  $v$  par son expression, on trouve (3.8). ■

Nous présentons maintenant l'estimation de Carleman que l'on utilisera dans le résultat de stabilité. Pour ce faire, prolongeons d'abord le champ de vecteurs  $A$  de la manière suivante :

$$\widehat{A}(x, t) = \begin{cases} A(x) & \text{si } t \in (0, T), \\ -A(x) & \text{si } t \in (-T, 0). \end{cases} \quad (3.9)$$

Alors, en combinant les deux inégalités de Carleman (3.4) et (3.8), nous obtenons la proposition suivante :

**Proposition 3.2.3.** *Soient  $p \in \Lambda(M)$ ,  $\widehat{A}$  défini par (3.9) et  $\psi$  la fonction poids définie par (??), qui vérifie (??). Alors, il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  telle que pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$*

$$\begin{aligned} \|P_1(e^{s\varphi} v)\|_{L^2(\Omega \times (-T, T))} + s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |v|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Lv|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ +Cs\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} \varphi |v|^2 \widehat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt, & \end{aligned} \quad (3.10)$$

pour tout  $v$  tel que  $v \in L^2(\Omega \times (-T, T))$  vérifiant  $Lv := \partial_t v + \widehat{A} \cdot \nabla v \in L^2(\Omega \times (-T, T))$ ,  $v|_{\Gamma^-} = 0$  et  $v(\cdot, -T) = v(\cdot, T) = 0$ .

### 3.3 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous donnons un résultat de stabilité pour le coefficient d'absorption  $p(x)$ . De tels problèmes sont généralement mal posés et c'est la raison pour laquelle les résultats de stabilité sont importants en vue d'implémentations de méthodes de reconstructions numériques.

Afin de prouver notre résultat principal, nous utilisons des inégalités de Carleman locales et globales ainsi que des estimations d'énergie. De telles estimations d'énergie ont été démontré dans [10] pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

**Théorème 3.3.1.** *Soit  $u$  (resp.  $\tilde{u}$ ) une solution de (3.1) associée à  $(p, h, u_0)$  (resp.  $(\tilde{p}, h, u_0)$ ). Alors, il existe une constante positive  $C > 0$  telle que*

$$\int_{\Omega} |(p - \tilde{p})(x)|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma^+} |(\partial_t u - \partial_t \tilde{u})(x, t)|^2 d\sigma dt.$$

**Preuve du Théorème 3.3.1 :**

Nous démontrons ce théorème en plusieurs étapes.

**Étape 1.** Nous commençons par linéariser le problème en posant  $U = u - \tilde{u}$ . Nous prolongeons ensuite  $\partial_t U$  comme suit :

$$Y(x, t) = \begin{cases} \partial_t U(x, t) & t > 0, \\ \partial_t U(x, -t) & t < 0. \end{cases}$$

Alors  $Y$  est solution de

$$\begin{cases} \partial_t Y + \hat{A}(x, t) \cdot \nabla Y + p(x)Y = (\tilde{p} - p)(x)\partial_t \tilde{u} & \text{dans } \Omega \times (-T, T), \\ Y(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma^- \times (-T, T), \\ Y(x, 0) = (\tilde{p} - p)(x)u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $\hat{A}$  est défini par (3.9).

**Étape 2.** La fonction  $Y$  ne satisfait pas les hypothèses  $Y(\cdot, -T) = Y(\cdot, T) = 0$ . Afin de pouvoir appliquer la Proposition 3.2.3, nous introduisons une fonction de troncature  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $0 \leq \chi \leq 1$ . On choisit  $\eta \in (0, T)$  tel que  $\psi(x, t) \leq C \leq \psi(x, 0)$ ,  $\forall t \in (-T, -T + \eta) \cup (T - \eta, T)$  et on définit

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } -T + \eta \leq t \leq T - \eta, \\ 0, & \text{si } t \leq -T \text{ ou } t \geq T. \end{cases}$$

Posons  $\tilde{Y} = \chi Y$ , nous pouvons appliquer l'inégalité de Carleman (3.10) à  $\tilde{Y}$  qui est solution de

$$\begin{cases} \partial_t \tilde{Y} + \hat{A}(x, t) \cdot \nabla \tilde{Y} + p(x)\tilde{Y} = \chi LY + Y \partial_t \chi & \text{dans } \Omega \times (-T, T), \\ \tilde{Y}(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma^- \times (-T, T), \\ \tilde{Y}(x, -T) = \tilde{Y}(x, T) = 0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.12)$$

Nous obtenons donc l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \|P_1(e^{s\varphi}\tilde{Y})\|_{L^2(\Omega \times (-T, T))} + s\lambda^2 \int_{-T}^T \int_{\Omega} \varphi |\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |\chi LY + Y \partial_t \chi|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ Cs\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} \varphi |\tilde{Y}|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned}$$

Notons que  $\text{supp } \partial_t \chi \subset (-T, -T + \eta) \cup (T - \eta, T)$ , ce qui donne l'estimation suivante pour  $Y$  :

$$\begin{aligned} \|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega \times (-T+\eta, T-\eta))} + s\lambda^2 \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_0^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ + Cs\lambda \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} \varphi |\tilde{Y}|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt + C \int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt &+ C \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (3.13)$$

**Étape 3.** Dans cette étape, nous donnons une estimation des deux dernières intégrales du membre de droite de l'inégalité (3.13) en fonction de l'intégrale du membre de gauche en  $s\lambda^2$  de cette même inégalité. L'objectif est d'absorber les deux derniers termes du membre de droite de (3.13) par le terme du membre de gauche, pour  $s$  assez grand. Pour ce faire, nous allons établir des estimations d'énergie. Tout d'abord, nous fixons  $\lambda = \lambda_0$  et nous utilisons le fait que  $\varphi$  est minorée par 1 et majorée par une constante qui dépend de  $\lambda$  (fixé). On définit alors l'énergie à poids suivante :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

• **Estimation de**  $\int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt$

Nous calculons

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} |Y| \partial_t Y e^{2s\varphi} dx \\ &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} (LY - \hat{A} \cdot \nabla Y) Y e^{2s\varphi} dx. \end{aligned}$$

Alors, on a

$$\frac{dE}{dt} - s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} \hat{A} \cdot \nabla (|Y|^2) dx = \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt} - s \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + \nabla \varphi \cdot \hat{A}) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma \\ = \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot \hat{A} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx. \end{aligned} \tag{3.14}$$

De plus, pour tout  $s > 0$  grand, comme  $-(\partial_t \varphi + \nabla \varphi \cdot \hat{A}) \geq c > 0$ , on obtient

$$\frac{dE}{dt} + sc \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx \leq \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx. \tag{3.15}$$

En utilisant la formule  $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$  avec  $\varepsilon = sc$ , nous estimons le membre de droite comme suit :

$$\left| \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx \right| \leq \frac{1}{2} sc \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

En substituant cette estimation dans (3.15), on trouve

$$\frac{dE}{dt} + scE(t) \leq \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

Par ailleurs, pour  $t \in (T - \eta, T)$ , en utilisant le lemme de Gronwall, il vient

$$\begin{aligned}
E(t) &\leq e^{\int_{T-\eta}^t -csd\tau} \left( E(T - \eta) + \int_{T-\eta}^t \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau \right) \\
&\leq e^{-sc(t-(T-\eta))} E(T - \eta) + \frac{e^{sc(T-t-\eta)}}{2sc} \int_{T-\eta}^t \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau \\
&\leq e^{-sc(t-(T-\eta))} E(T - \eta) + \frac{1}{2sc} \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

En intégrant cette relation pour  $t$  entre  $T - \eta$  et  $T$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{T-\eta}^T E(t) dt &\leq E(T - \eta) \int_{T-\eta}^T e^{-sc(t-(T-\eta))} dt + \int_{T-\eta}^T \frac{1}{2sc} \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau dt \\
&\leq E(T - \eta) \int_{T-\eta}^T e^{-sc(t-(T-\eta))} dt + \frac{\eta}{2sc} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

et donc

$$\int_{T-\eta}^T E(t) dt \leq \frac{C}{s} E(T - \eta) + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt. \quad (3.16)$$

Maintenant, nous estimons  $E(T - \eta)$  par  $E(\tau)$  pour  $\tau \in (\eta, T - \eta)$ . Nous utilisons (3.14) et intégrons par parties entre  $\tau$  et  $T - \eta$ , ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{T-\eta} \frac{dE}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt &= \int_{\tau}^{T-\eta} s \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + \hat{A} \cdot \nabla \varphi) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
+ \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} \nabla \cdot \hat{A} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} Y LY e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{\tau}^{T-\eta} \frac{dE}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt \\
\leq Cs \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{1}{2} sc \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{1}{2sc} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Il vient alors, l'estimation suivante

$$E(T - \eta) - E(\tau) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

En intégrant la dernière inégalité entre  $\eta$  et  $T - \eta$ , on obtient, pour  $s > 0$  assez grand,

$$E(T - \eta) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} E(t) dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \quad (3.17)$$

Finalement, grâce à (3.16) et (3.17), on obtient

$$\int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt. \quad (3.18)$$

• **Estimation de**  $\int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt$

Soit  $t \in (-T, -T + \eta)$ , nous effectuons le changement de variables  $t \rightarrow -t$ , en introduisant  $Y_{back}(x, t) = Y(x, -t)$ , et nous appliquons les estimations ci-dessus à  $Y_{back}$ . Par conséquent, (3.16) et (3.17) coïncident avec les estimations suivantes :

$$\int_{-T}^{-T+\eta} E(t) dt \leq \frac{C}{s} E(-T + \eta) + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt. \quad (3.19)$$

$$E(-T + \eta) \leq Cs \int_{-T+\eta}^{T-\eta} E(t) dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \quad (3.20)$$

Finalement, grâce à (3.19) et (3.20), on obtient

$$\int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{-T+\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{-T}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt. \quad (3.21)$$

En reportant (3.18) et (3.21) dans (3.13), on trouve :

$$s \int_{-T+\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} |Y|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt. \quad (3.22)$$

Nous concluons de (3.17), (3.18), (3.22), l'estimation de Carleman suivante pour  $Y$

$$\begin{aligned} & \|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega \times (-T+\eta, T-\eta))} + s \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} |Y|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.23)$$

**Remarque 3.3.1.** Dans (3.23), on obtient une borne inférieure de  $\|e^{s\varphi}P_1Y\|_{L^2(\Omega \times (-T+\eta, T-\eta))}$  mais celle ci peut être obtenue dans  $(\Omega \times (-T, T))$ . Comme  $P_1Y = \partial_t Y + \hat{A} \cdot \nabla Y = -pY - (p - \tilde{p})\partial_t \tilde{u}$ , on a

$$\int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |P_1Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{-T}^{-T+\eta} \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

et aussi

$$\int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |P_1Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

Finalement, (3.23) mène à l'estimation suivante

$$\begin{aligned} & \|P_1(e^{s\varphi}Y)\|_{L^2(\Omega \times (-T, T))} + s \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & \leq C \int_{-T}^T \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} |Y|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.24)$$

#### Étape 4. Résultat de stabilité

Soit  $W = e^{s\varphi}\tilde{Y}$ . Rappelons que  $P_1W = \partial_t W + \hat{A} \cdot \nabla W$  et considérons l'intégrale suivante

$$\mathcal{I} = \int_{-T}^0 \int_{\Omega} P_1W.W dx dt.$$

Suivant la méthode introduite dans [11], nous donnons une majoration de  $\mathcal{I}$  en utilisant l'inégalité de Carleman.

$$|\mathcal{I}| = \left| \int_{-T}^0 \int_{\Omega} P_1W.W dx dt \right| \leq s^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{-T}^0 \int_{\Omega} |P_1W|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( s \int_{-T}^0 \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on trouve

$$|\mathcal{I}| \leq s^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{-T}^T \int_{\Omega} |P_1 W|^2 dx dt + s \int_{-T}^T \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right).$$

En utilisant (3.24), on obtient

$$|\mathcal{I}| \leq C s^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{-T}^T \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 dx dt + s \int_{\Gamma^+} \int_{-T}^T |Y|^2 \hat{A} \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt \right). \quad (3.25)$$

Maintenant, calculons  $\mathcal{I}$ . Une intégration par parties nous permet d'obtenir l'égalité suivante

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |Y(x, 0)|^2 e^{2s\varphi(x, 0)} dx = \mathcal{I} + \frac{1}{2} \int_{-T}^0 \int_{\Omega} (\nabla \cdot \hat{A}) |\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} dx dt - \int_{-T}^0 \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt.$$

De (3.25) et (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |Y(x, 0)|^2 e^{2s\varphi(x, 0)} dx &\leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1}) \left\{ \int_{-T}^T \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right\} \\ &\quad + C(s^{\frac{1}{2}} + 1) \int_{\Gamma^+} \int_{-T}^T \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$Y(x, 0) = \partial_t U(x, 0) = -(p - \tilde{p})(x) \tilde{u}(x, 0).$$

En substituant  $Y$  dans la dernière inégalité, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |(p - \tilde{p})(x) \tilde{u}(x, 0)|^2 e^{2s\varphi(x, 0)} dx &\leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1}) \int_{-T}^T \int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C(s^{\frac{1}{2}} + 1) \int_{\Gamma^+} \int_{-T}^T \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt. \end{aligned} \quad (3.26)$$

**Remarque 3.3.2.** Rappelons que  $x_0 \notin \bar{\Omega}$ , donc par construction  $\varphi$  est strictement minorée. De plus,  $e^{2s\varphi(x, t)} \leq e^{2s\varphi(x, 0)}$  pour tout  $x \in \Omega$  et  $t \in (-T, T)$ . Comme  $\tilde{u} \in W^{1,2}(-T, T; L^\infty(\Omega))$ , alors

$$\exists k_0 \in L^2(-T, T), |\partial_t \tilde{u}(x, t)| \leq k_0(t) |\tilde{u}(x, 0)|, \quad \forall x \in \Omega, t \in (-T, T).$$

En utilisant la remarque précédente, il vient de l'estimation (3.26)

$$\left(\frac{1}{2} - C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1})\right) \int_{\Omega} |(p - \tilde{p})(x)|^2 |\tilde{u}(x, 0)|^2 e^{2s\varphi(x, 0)} dx \leq C(s^{\frac{1}{2}} + 1) \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt.$$

Par conséquent, pour  $s$  assez grand, nous concluons qu'il existe une constante  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma) > 0$  telle que

$$\int_{\Omega} |(p - \tilde{p})(x)|^2 |\tilde{u}(x, 0)|^2 e^{2s\varphi(x, 0)} dx \leq C \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} \hat{A} \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt.$$

Sous les hypothèses satisfaites par  $\psi$ ,  $\hat{A}$ , notons que  $\hat{A} \cdot \nu$  et  $e^{2s\varphi}$  sont bornés sur  $(-T, T) \times \Gamma^+$ . En effet, posons

$$a = \min_{\Omega} [\exp(s\varphi(x, 0))],$$

$$b = \max_{\bar{\Omega} \times [0, T]} [\exp(s\varphi(x, t))].$$

Alors, comme  $|\tilde{u}(x, 0)| \geq r_0 > 0$  dans  $\bar{\Omega}$ , nous obtenons l'inégalité de stabilité suivante

$$\int_{\Omega} |(p - \tilde{p})(x)|^2 dx \leq C \int_{-T}^T \int_{\Gamma^+} |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt.$$

où  $C = C(\frac{b}{a}, s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$ .

Comme  $Y$  est un prolongement de  $\partial_t U := \partial_t u - \partial_t \tilde{u}$  pour  $t < 0$ , on a

$$\int_{\Omega} |p - \tilde{p}|^2 dx \leq C \int_0^T \int_{\Gamma^+} |\partial_t u - \partial_t \tilde{u}|^2 d\sigma dt$$

et la preuve du Théorème 3.3.1 est achevée. ■

# Chapitre 4

## Problème inverse pour un système hyperbolique-parabolique

Nous présentons dans ce chapitre l'article soumis pour publication dans *Inverse Problems*. Il s'agit du résultat principal de cette partie : l'étude d'un problème inverse de détermination de deux coefficients dépendant de la variable spatiale uniquement pour le système (1.2) en utilisant les observations suivantes : une mesure intérieure d'une seule composante et la donnée des deux composantes à un instant fixé sur tout le domaine spatial. Un résultat de stabilité est démontré en utilisant des inégalités de Carleman.

### 4.1 Introduction

Rappelons le système que l'on considère :

$$\begin{cases} \partial_t u + A(x) \cdot \nabla u = F(u, v) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ \partial_t v - \Delta v = G(u, v) & \text{dans } \Omega_T = \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = h(x, t) & \text{sur } \Sigma_T^- = \Gamma_- \times (0, T), \\ v(x, t) = g(x, t) & \text{sur } \Sigma_T = \Gamma \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.1)$$

L'objectif de ce chapitre est de reconstruire les deux coefficients  $\mu$  et  $\delta$  du système (4.1) à partir d'une mesure intérieure d'une composante et la donnée des deux composantes à un instant fixé  $\theta \in (0, T)$ , à savoir

$$v|_{\omega \times (0, T)} \quad \text{et} \quad (u, v)|_{\Omega \times \{\theta\}},$$

où  $\omega$  est un sous domaine de  $\Omega$  telle que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ .

Plus précisément, cf. Théorème 4.4.1, Section 4.4.

Dans ce travail, nous allons tout d'abord établir des inégalités de Carleman associées au système (4.1) avec des fonctions poids appropriées. Le choix de telles fonctions est imposé par l'équation de transport. Nous démontrons ensuite le résultat de stabilité en établissant des estimations d'énergie. Ces estimations nécessiteront la mise en oeuvre d'inégalités de Carleman pour le système rétrograde associé au système (4.1).

On supposera tout le long de ce chapitre que les coefficients  $\mu$  et  $\delta$  sont dans  $\Lambda(M)$ .

## 4.2 Inégalités de Carleman

Dans cette section, nous donnons les inégalités de Carleman associées au système (4.1). Pour ce faire, nous introduisons tout d'abord les fonctions poids appropriées.

On suppose qu'il existe une fonction  $\psi$  dans  $C^2(\overline{\Omega_T})$  qui vérifie les propriétés suivantes :

### Hypothèses 4.2.1.

- (i)  $\psi(x, t) > 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$ ,
- (ii)  $|\nabla\psi| \geq c > 0 \quad \forall x \in \overline{\Omega}$ ,
- (iii)  $\partial_\nu\psi < 0 \quad \text{sur } \Gamma_-$ ,
- (iv)  $\partial_t\psi + A(x) \cdot \nabla\psi < 0 \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$ ,
- (v)  $\psi(x, t) = \psi(x, T - t) \quad \forall (x, t) \in \Omega \times (0, T)$ .

Soit  $\lambda > 0$  un paramètre, nous définissons la fonction poids  $\varphi(x, t)$  par

$$\varphi(x, t) = e^{\lambda\psi(x, t)}. \quad (4.2)$$

Nous signalons que le choix de telles fonctions poids conduit à une observation agissant sur une partie  $\Gamma_+$  de la frontière  $\Gamma$  dans le membre de droite de l'inégalité.

Nous utiliserons tout au long de ce chapitre les notations suivantes :

$$I_1(q, \Omega_T) = \int_{\Omega_T} s\lambda^2\varphi|q|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

$$I_2(q, \Omega_T) = \int_{\Omega_T} (s\varphi)^{-1}(|\partial_t q|^2 + |\Delta q|^2) e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} s\lambda^2\varphi|\nabla q|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} s^3\lambda^4\varphi^3|q|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

À présent, nous établissons deux inégalités de Carleman : une associée au système (4.1) (cf. Théorème 4.2.1) et l'autre associée au système rétrograde correspondant à (4.1) (cf. Théorème 4.2.2).

**Théorème 4.2.1.** *Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que*

$$I_1(q_1, \Omega_T) + I_2(q_2, \Omega_T) \leq C \int_{\Omega_T} |Lq_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |Pq_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt$$

$$+ Cs^2\lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_1, q_2$  vérifiant

$$\begin{cases} Lq_1 := \partial_t q_1 + A(x) \cdot \nabla q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ q_1|_{\Gamma_-} = 0, & q_1(\cdot, 0) = q_1(\cdot, T) = 0, \\ Pq_2 := \partial_t q_2 - \Delta q_2 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_2 \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ q_2(\cdot, 0) = q_2(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

**Théorème 4.2.2.** *Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une positive constante  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que*

$$\begin{aligned} I_1(q_1, \Omega_T) + I_2(q_2, \Omega_T) &\leq C \int_{\Omega_T} |L_{back} q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |P_{back} q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} \varphi |A(x) \cdot \nabla q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_1, q_2$  vérifiant

$$\begin{cases} L_{back} q_1 := -\partial_t q_1 + A(x) \cdot \nabla q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ q_1|_{\Gamma_-} = 0, & q_1(\cdot, 0) = q_1(\cdot, T) = 0, \\ P_{back} q_2 := -\partial_t q_2 - \Delta q_2 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_2 \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ q_2(\cdot, 0) = q_2(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

### 4.3 Preuve des Théorème 4.2.1 et Théorème 4.2.2

Afin de démontrer le Théorème 4.2.1, nous établissons tout d'abord deux inégalités de Carleman, une associée à l'opérateur de transport et l'autre, associée à l'opérateur parabolique et ce, en utilisant la même fonction poids. Nous obtenons alors des inégalités de Carleman avec des observations agissant sur  $\Gamma_+$ .

Ensuite, nous déduisons à partir des inégalités précédentes des estimations de Carleman avec des observations localisées sur un sous domaine  $\omega$ . Ces deux estimations vont nous permettre d'obtenir une inégalité de Carleman pour le système avec l'observation d'une seule des deux composantes.

La preuve du Théorème 4.2.2 est similaire à celle du Théorème 4.2.1.

#### 4.3.1 Inégalités de Carleman associées à l'opérateur de transport

Ici, nous énonçons les inégalités de Carleman pour les deux opérateurs de transport direct et rétrograde, dans les lemmes suivants :

**Lemme 4.3.1.** *Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  tels que*

$$I_1(q_1, \Omega_T) \leq C \int_{\Omega_T} |Lq_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \quad (4.3)$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_1$  vérifiant

$$\begin{cases} Lq_1 := \partial_t q_1 + A(x) \cdot \nabla q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ q_1|_{\Gamma_-} = 0, & q_1(\cdot, 0) = q_1(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

**Lemme 4.3.2.** Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  tels que

$$\begin{aligned} I_1(q_1, \Omega_T) &\leq C \int_{\Omega_T} |L_{back} q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi |q_1|^2 A(x) \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt, \end{aligned} \quad (4.4)$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_1$  vérifiant

$$\begin{cases} L_{back} q_1 := -\partial_t q_1 + A(x) \cdot \nabla q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ q_1|_{\Gamma_-} = 0, & q_1(\cdot, 0) = q_1(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

Pour la preuve du Lemme 4.3.1 (resp. Lemme 4.3.2), nous suivons pas à pas la preuve de la Proposition 3.2.1 (resp. Proposition 3.2.2) en remplaçant dans ce cas l'hypothèse (??) par l'item (iv) des Hypothèses 4.2.1.

Nous allons démontrer dans la suite, en utilisant le Lemme 4.3.2, une inégalité de Carleman avec une seule observation agissant sur un sous domaine  $\omega$  de  $\Omega$ , tel que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ .

**Lemme 4.3.3.** Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que

$$\begin{aligned} I_1(q_1, \Omega_T) &\leq C \int_{\Omega_T} |L_{back} q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2\lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C \int_{\omega_T} \varphi |A(x) \cdot \nabla q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_1$  vérifiant

$$\begin{cases} L_{back} q_1 := -\partial_t q_1 + A(x) \cdot \nabla q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_1 \in L^2(\Omega \times (0, T)), \\ q_1|_{\Gamma_-} = 0, & q_1(\cdot, 0) = q_1(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

**Preuve du Lemme 4.3.3 :**

On choisit une fonction  $\rho \in C^2(\overline{\Omega}; [0, 1])$  vérifiant

$$\begin{cases} \rho(x) = 1 & x \in \omega', \\ \rho(x) = 0 & x \in \overline{\Omega} \setminus \omega, \end{cases} \quad (4.5)$$

où  $\omega' \subset \omega$  et  $\partial\omega' \supset \Gamma_+$ . Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \rho \varphi |q_1|^2 A(x) \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt &\leq s\lambda \int_{\omega_T} \rho \varphi A(x) \cdot \nabla (|q_1|^2) e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ s\lambda \int_{\omega_T} \nabla \cdot (A(x) \rho \varphi e^{2s\varphi}) |q_1|^2 dx dt := Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

En utilisant (4.5), une intégration par parties et l'inégalité de Carleman, nous obtenons les estimations suivantes

$$Q_2 \leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi \rho |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} \varphi \rho |A(x) \cdot \nabla q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \quad (4.6)$$

et

$$\begin{aligned} Q_1 &= s\lambda \int_{\omega_T} (\lambda \rho \varphi \nabla \psi \cdot A(x) + \varphi \nabla \rho \cdot A(x) + \rho \varphi \nabla \cdot A(x)) |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ 2s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 A(x) \cdot \nabla \psi |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &\leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Par conséquent, en utilisant les inégalités (4.6) et (4.7), il vient

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi |q_1|^2 A(x) \cdot \nu e^{2s\varphi} d\sigma dt &\leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C \int_{\omega_T} \varphi |A(x) \cdot \nabla q_1|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve du Lemme 4.3.3 en utilisant la dernière inégalité dans (4.4). ■

### 4.3.2 Inégalités de Carleman associées à l'opérateur parabolique

Ici, nous rappelons la forme générale des inégalités de Carleman pour des opérateurs paraboliques, plus particulièrement  $Pq = \pm \partial_t q - \Delta q$ , cf. [74, 75].

**Lemme 4.3.4.** *Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \Gamma)$  tels que*

$$I_2(q_2, \Omega_T) \leq C \int_{\Omega_T} |Pq_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_0^T \int_{\Gamma_+} s\lambda \varphi |\partial_\nu q_2|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt, \quad (4.8)$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_2$  vérifiant

$$\begin{cases} Pq_2 = \pm \partial_t q_2 - \Delta q_2 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_2 \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ q_2(\cdot, 0) = q_2(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

En utilisant les lemmes précédents, nous démontrons maintenant une inégalité de Carleman avec une seule observation agissant sur un sous domaine  $\omega$  de  $\Omega$ , tel que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ .

**Lemme 4.3.5.** Soit  $\varphi$  définie par (4.2). Il existe  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que

$$\begin{aligned} I_2(q_2, \Omega_T) &\leq C \int_{\Omega_T} |P q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &\quad + C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned}$$

pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$  et tout  $q_2$  vérifiant

$$\begin{cases} P q_2 = \pm \partial_t q_2 - \Delta q_2 \in L^2(\Omega \times (0, T)), & q_2 \in L^2((0, T); H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \\ q_2(\cdot, 0) = q_2(\cdot, T) = 0. \end{cases}$$

L'idée de la preuve est inspirée de [73].

**Preuve du Lemme 4.3.5 :**

Soit  $\rho$  définie par (4.5). Considérons la fonction suivante :

$$g_0 \in C^1(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n) \text{ tel que } g_0(x) = \nu(x) \text{ sur } \Gamma_+, \quad (4.9)$$

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi \rho |\partial_\nu q_2|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt &\leq s\lambda \int_{\omega_T} \varphi \rho (\nabla q_2 \cdot g_0) e^{2s\varphi} \Delta q_2 dx dt \\ &\quad + s\lambda \int_{\omega_T} \nabla(\varphi \rho (\nabla q_2 \cdot g_0) e^{2s\varphi}) \cdot \nabla q_2 dx dt := Q_1 + Q_2. \end{aligned}$$

En utilisant la définition des fonctions  $\rho$  et  $g_0$ , avec l'inégalité de Young, nous estimons  $Q_1$  et  $Q_2$ .

D'une part, notons que

$$|s\lambda \rho \varphi (\nabla q_2 \cdot g_0) e^{s\varphi}| |e^{s\varphi} \Delta q_2| \leq C s^2 \lambda^2 \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} + C |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi}.$$

Alors

$$Q_1 \leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \quad (4.10)$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} Q_2 &= s\lambda \int_{\omega_T} (\nabla q_2 \cdot g_0) (\rho \lambda \varphi \nabla \psi + \varphi \nabla \rho + 2s\lambda \rho \varphi^2 \nabla \psi) \cdot \nabla q_2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &\quad + s\lambda \int_{\omega_T} \varphi \rho \nabla(\nabla q_2 \cdot g_0) \cdot \nabla q_2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &\leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Par conséquent, des inégalités (4.10) et (4.11), nous obtenons l'estimation suivante

$$s\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_+} \varphi |\partial_\nu q_2|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt \leq C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta q_2|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

En utilisant la dernière inégalité dans (4.8), on conclut la preuve.

■

Finalement, pour démontrer le Théorème 4.2.1 (resp. Théorème 4.2.2), il suffit d'ajouter les estimations du Lemme 4.3.1 et du Lemme 4.3.5 (resp. les estimations du Lemme 4.3.3 et 4.3.5).

## 4.4 Résultat de stabilité

Dans cette section, nous appliquons l'inégalité de Carleman du Théorème 4.2.1 afin de démontrer le résultat de stabilité suivant :

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $\omega$  une partie de  $\Omega$  telle que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ . Nous supposons que les hypothèses et les relations de compatibilité de la Proposition 2.1.5 ainsi que les Hypothèses 4.2.1 et les Hypothèses 2.2.1 sont vérifiées. Soit  $(u, v)$  (resp.  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ ) une solution du système (4.1) associée à  $(\mu, \gamma, \delta, k, u_0, v_0, h, g)$  (resp.  $(\tilde{\mu}, \gamma, \tilde{\delta}, k, u_0, v_0, h, g)$ ). Alors, il existe une constante  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  telle que*

$$\begin{aligned} & \|\mu - \tilde{\mu}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\delta - \tilde{\delta}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|\partial_t^2(v - \tilde{v})\|_{L^2((0,T);H^2(\omega))}^2 \right. \\ & \left. + \|\partial_t(v - \tilde{v})\|_{L^2((0,T);H^2(\omega))}^2 + \|\partial_t(v - \tilde{v})\|_{L^2(\omega_T)}^2 + \|\partial_t^3(v - \tilde{v})\|_{L^2(\omega_T)}^2 \right) \\ & + C \left( \|\Delta(v - \tilde{v})(x, \theta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(v - \tilde{v})(x, \theta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(u - \tilde{u})(x, \theta)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right. \\ & \left. + \|A(x) \cdot \nabla(u - \tilde{u})(x, \theta)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\partial_t(u - \tilde{u})(x, \theta)\|_{L^2(\omega)}^2 \right). \end{aligned}$$

### Preuve du Théorème 4.4.1 :

La preuve se fera en plusieurs étapes.

#### Étape 1.

Posons  $U = u - \tilde{u}$ ,  $V = v - \tilde{v}$ ,  $Y = \partial_t U$  et  $Z = \partial_t V$ , alors  $Y$  et  $Z$  sont solutions de

$$\begin{cases} \partial_t Y + A(x) \cdot \nabla Y = (\mu - \tilde{\mu})\partial_t \tilde{v} + \mu Z - \gamma Y & \text{dans } \Omega_T, \\ \partial_t Z - \Delta Z = (\delta - \tilde{\delta})\partial_t \tilde{u} + \delta Y - kZ & \text{dans } \Omega_T, \\ Y(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T^-, \\ Z(x, t) = 0 & \text{sur } \Sigma_T, \\ Y(x, 0) = (\mu - \tilde{\mu})v_0(x), \quad Z(x, 0) = (\delta - \tilde{\delta})u_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (4.12)$$

#### Étape 2. Application de l'estimation de Carleman du Théorème 4.2.1.

Nous introduisons une fonction de troncature  $\chi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$ ,  $0 \leq \chi \leq 1$ , telle que

$$\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } \eta \leq t \leq T - \eta, \\ 0, & \text{si } t \leq 0 \text{ ou } t \geq T. \end{cases} \quad (4.13)$$

On pose  $\tilde{Y} = \chi Y$ ,  $\tilde{Z} = \chi Z$ , dans  $\Omega \times (0, T)$ .

Donc,  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{Z}$  satisfont les hypothèses  $\tilde{Y}(\cdot, 0) = \tilde{Y}(\cdot, T) = \tilde{Z}(\cdot, 0) = \tilde{Z}(\cdot, T) = 0$  dans  $\Omega$ .

Par conséquent, nous pouvons appliquer l'inégalité de Carleman du Théorème 4.2.1 à  $\tilde{Y}$  et  $\tilde{Z}$ , il vient :

$$\begin{aligned} I_1(\tilde{Y}, \Omega_T) + I_2(\tilde{Z}, \Omega_T) &\leq C \int_{\Omega_T} |L\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |P\tilde{Z}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla \tilde{Z}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta \tilde{Z}|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned} \quad (4.14)$$

où  $L\tilde{Y} = \chi LY + Y \partial_t \chi$  et  $P\tilde{Z} = \chi PZ + Z \partial_t \chi$ , dans  $\Omega \times (0, T)$ .

Posons  $\Omega_\eta = \Omega \times (\eta, T - \eta)$ . Comme  $\partial_t \chi$  a un support compact dans  $(0, \eta) \cup (T - \eta, T)$ , d'après (4.14), nous déduisons l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} I_1(Y, \Omega_\eta) + I_2(Z, \Omega_\eta) &\leq C \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C \int_0^\eta \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_0^\eta \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Dans la suite, nous allons fixer  $\lambda = \lambda_0$  et utiliser le fait que  $\varphi$  est minorée par 1 et majorée par une constante qui dépend de  $\lambda$  (fixé). Nous utiliserons les notations suivantes :

$$\begin{aligned} J_1(q, \Omega_T) &= \int_{\Omega_T} s |q|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \\ J_2(q, \Omega_T) &= \int_{\Omega_T} (s)^{-1} (|\partial_t q|^2 + |\Delta q|^2) e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} s |\nabla q|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} s^3 |q|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned}$$

En utilisant (4.15), on obtient l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} J_1(Y, \Omega_\eta) + J_2(Z, \Omega_\eta) &\leq C \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C s^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_0^\eta \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ &+ C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_0^\eta \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

### Étape 3. Estimations d'énergie.

Ici, nous donnons une estimation des quatre dernières intégrales du membre de droite de l'inégalité (4.16) notées :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &:= \int_0^\eta \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt, & \mathcal{M}_2 &:= \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \\ \mathcal{M}_3 &:= \int_0^\eta \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt, & \mathcal{M}_4 &:= \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt.\end{aligned}\tag{4.17}$$

L'objectif est d'absorber  $\mathcal{M}_1$ ,  $\mathcal{M}_2$ ,  $\mathcal{M}_3$  et  $\mathcal{M}_4$  par les termes du membre de gauche dans l'inégalité (4.16). Pour ce faire, nous introduisons les énergies à poids suivantes :

$$E_1(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} dx, \quad E_2(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

Le lemme suivant donne une estimation de  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_4$  :

**Lemme 4.4.1.** *Soient  $\mathcal{M}_2$  et  $\mathcal{M}_4$  définis par (4.17), nous avons les estimations suivantes :*

$$\mathcal{M}_2 \leq C \int_\eta^{T-\eta} \int_\Omega |Y|^2 dx dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt.\tag{4.18}$$

$$\mathcal{M}_4 \leq C \int_\eta^{T-\eta} \int_\Omega |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_\Omega |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt.\tag{4.19}$$

#### Preuve du Lemme 4.4.1 :

La preuve est basée sur des estimations d'énergie, elle est donnée en Annexe. Les outils essentiels sont des intégrations par parties, le lemme de Gronwall et l'inégalité de Young.

■

Soit  $t \in (0, \eta)$ , nous effectuons le changement de variable  $t \rightarrow T - t$  et nous introduisons les fonctions  $Y_{back}(x, t) = Y(x, T - t)$  et  $Z_{back}(x, t) = Z(x, T - t)$ .

$Y_{back}$  et  $Z_{back}$  satisfont le système rétrograde associé à (4.12) tel que

$$L_{back} Y_{back} := -\partial_t Y_{back} + A(x) \cdot \nabla Y_{back},$$

$$P_{back} Z_{back} := -\partial_t Z_{back} - \Delta Z_{back}.$$

Le lemme suivant donne une estimation de  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_3$  :

**Lemme 4.4.2.** *Soient  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_3$  définis par (4.17), nous avons les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1 &\leq C \int_\eta^{T-\eta} \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |L_{back} Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \\ \mathcal{M}_3 &\leq C \int_\eta^{T-\eta} \int_\Omega |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |P_{back} Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.\end{aligned}$$

**Preuve du Lemme 4.4.2 :**

Posons  $\tilde{Y}_{back} = \chi Y_{back}$  et  $\tilde{Z}_{back} = \chi Z_{back}$  dans  $\Omega \times (0, T)$  et appliquons l'inégalité de Carleman du Théorème 4.2.2 à  $\tilde{Y}_{back}$  et  $\tilde{Z}_{back}$ . Tout comme pour  $Y$  et  $Z$ , nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& J_1(Y_{back}, \Omega_\eta) + J_2(Z_{back}, \Omega_\eta) \leq C \int_{\Omega_T} |L_{back} Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |P_{back} Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_0^\eta \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_0^\eta \int_\Omega |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.20}$$

Nous définissons maintenant  $\mathcal{M}_{1,back}$ ,  $\mathcal{M}_{2,back}$ ,  $\mathcal{M}_{3,back}$ , et  $\mathcal{M}_{4,back}$  comme suit :

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{1,back} &= \int_0^\eta \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt, & \mathcal{M}_{2,back} &= \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \\
\mathcal{M}_{3,back} &= \int_0^\eta \int_\Omega |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt, & \mathcal{M}_{4,back} &= \int_{T-\eta}^T \int_\Omega |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Si on pose  $E_{1,back}(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx$  alors comme pour  $E_1$ , on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{dE_{1,back}}{dt} - s \int_\Omega (\partial_t \varphi + \nabla \varphi \cdot A(x)) |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} A(x) \cdot \nu |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} d\sigma \\
& = \int_\Omega Y_{back} L_{back} Y_{back} e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_\Omega \nabla \cdot A(x) |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx.
\end{aligned} \tag{4.21}$$

De l'item (iv) des Hypothèses 4.2.1, pour tout  $s > 0$  assez grand, nous obtenons

$$\frac{dE_{1,back}}{dt} + sc \int_\Omega |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx \leq \int_\Omega Y_{back} L_{back} Y_{back} e^{2s\varphi} dx.$$

**Remarque 4.4.1.** Notons que, le changement de variables  $t \rightarrow T-t$  exige la mise en oeuvre de toutes les estimations avec  $\varphi(\cdot, T-t)$ . Par conséquent, l'item (v) des Hypothèses 4.2.1 est nécessaire pour avoir l'item (iv) dans (4.21).

Par ailleurs, nous estimons  $\mathcal{M}_{2,back}$  (resp.  $\mathcal{M}_{4,back}$ ) de la même manière que  $\mathcal{M}_2$  (resp.  $\mathcal{M}_4$ ), il vient

$$\mathcal{M}_{2,back} \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |L_{back} Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

et

$$\mathcal{M}_{4,back} \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |P_{back} Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

D'autre part, notons que  $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_{2,back}$ ,  $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}_{1,back}$ ,  $\mathcal{M}_3 = \mathcal{M}_{4,back}$  et  $\mathcal{M}_4 = \mathcal{M}_{3,back}$ . Alors, on déduit les estimations suivantes :

$$\mathcal{M}_1 \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |L_{back} Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

$$\mathcal{M}_3 \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |P_{back} Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

$$\mathcal{M}_{1,back} \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt,$$

$$\mathcal{M}_{3,back} \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

Ceci conclut la preuve du Lemme 4.4.2. ■

#### Étape 4. Inégalité de Carleman avec deux observations.

Dans cette étape, nous démontrons l'inégalité de Carleman suivante en utilisant le Lemme 4.4.1 et le Lemme 4.4.2.

**Proposition 4.4.1.** *Soit  $\omega$  une partie de  $\Omega$  telle que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ . Nous supposons que les hypothèses et les relations de compatibilité de la Proposition 2.1.5 ainsi que les Hypothèses 4.2.1 sont vérifiées. Il existe deux réels  $s_0$ ,  $\lambda_0$  et  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que  $\forall s > s_0$ ,  $\forall \lambda > \lambda_0$*

$$\begin{aligned} & s \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s \int_{\Omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & + C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\ & + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \end{aligned} \tag{4.22}$$

pour tout  $Y, Z$  solutions de (4.12).

**Preuve de la Proposition 4.4.1 :**

Utilisant (4.16) et (4.20), pour tout  $s > 0$  assez grand, nous obtenons

$$\begin{aligned}
& J_1(Y, \Omega_\eta) + J_1(Y_{back}, \Omega_\eta) + J_2(Z, \Omega_\eta) + J_2(Z_{back}, \Omega_\eta) \leq C \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega_T} |L_{back} Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |P_{back} Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y_{back}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Comme  $Y_{back}(x, t) = Y(x, T - t)$  et  $\varphi(x, t) = \varphi(x, T - t)$ ,  $\forall t \in (0, T)$ , on déduit l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
J_1(Y, \Omega_\eta) + J_2(Z, \Omega_\eta) & \leq C \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

En utilisant les estimations de  $\mathcal{M}_i$  et  $\mathcal{M}_{i,back}$  pour  $i = 1, \dots, 4$ , nous trouvons l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
& s \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s \int_{\Omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \quad (4.23) \\
& + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Notons que l'on a

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt,
\end{aligned} \tag{4.24}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_T} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt &\leq C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\Omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.25}$$

En substituant les inégalités (4.24) et (4.25) dans (4.23), on conclut la preuve de la Proposition 4.4.1 pour tout  $s > 0$  assez grand.

■

**Remarque 4.4.2.** Dans (4.22), nous obtenons une borne inférieure de  $\|e^{s\varphi} L_1 Y\|_{L^2(\Omega \times (\eta, T-\eta))}^2$  mais nous pouvons l'obtenir dans  $(\Omega \times (0, T))$ . En effet, on a

$$\begin{aligned}
&s \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |L_1 Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s \int_{\Omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&\leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C s^2 \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C s^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.26}$$

### Étape 5. Inégalité de Carleman avec une seule observation

Dans cette étape, nous démontrons une inégalité de Carleman avec une seule observation de  $Z$  agissant sur  $\omega$  ainsi que la donnée de  $Y$  à un instant fixé  $\theta$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.4.3.**

$$\int_{\Omega_T} \left| \int_{\theta}^t q(x, \tau) d\tau \right|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq \frac{C}{s^2} \int_{\Omega_T} |q(x, t)|^2 e^{2s\varphi} dx dt, \quad \forall s > 0.$$

La démonstration de ce résultat est donnée dans [25, 57].

**Proposition 4.4.2.** *Soit  $\omega$  une partie de  $\Omega$  telle que  $\partial\omega \supset \Gamma_+$ . Nous supposons que les hypothèses et les relations de compatibilité de la Proposition 2.1.5 ainsi que les Hypothèses 4.2.1 sont vérifiées. Il existe deux réels  $s_0, \lambda_0$  et  $C = C(s_0, \lambda_0, \Omega, T, \omega)$  tels que  $\forall s > s_0, \forall \lambda > \lambda_0$*

$$\begin{aligned}
& s \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |L_1 Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s \int_{\Omega} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 (|\partial_t \tilde{u}|^2 + |\partial_t^2 \tilde{u}|^2) e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\omega_T} (|Z|^2 + s^2 |\nabla Z|^2 + |\Delta Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt,
\end{aligned} \tag{4.27}$$

pour tout  $Y, Z$  solutions de (4.12).

**Preuve de la Proposition 4.4.2 :**

On pose  $\mathcal{K} = s^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt$  et  $\mathcal{K}' = \int_{\omega_T} |A(x) \cdot \nabla Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt$ .

L'objectif est d'estimer  $\mathcal{K}$  et  $\mathcal{K}'$  en terme d'observations distribuées de  $Z$  sur  $\omega \times (0, T)$ . D'une part, en appliquant le Lemme 4.4.3 à  $\partial_t Y$  dans  $\omega \times (0, T)$ , nous trouvons

$$\int_{\omega_T} \left| \int_{\theta}^t \partial_t Y(x, \tau) d\tau \right|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq \frac{C}{s^2} \int_{\omega_T} |\partial_t Y(x, t)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

Ce qui donne

$$\int_{\omega_T} |Y(x, t)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq \frac{C}{s^2} \int_{\omega_T} |\partial_t Y(x, t)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

Donc, il vient

$$s^2 \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\omega_T} |\partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

D'autre part, nous avons

$$\delta \partial_t Y = \partial_t^2 Z - \Delta(\partial_t Z) - (\delta - \tilde{\delta}) \partial_t^2 \tilde{u} + k \partial_t Z.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
& \int_{\omega_T} |\partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\omega_T} |\partial_t^2 Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} &\leq C \int_{\omega_T} |\partial_t^2 Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.28}$$

De plus, nous avons

$$A(x) \cdot \nabla Y = (\mu - \tilde{\mu}) \partial_t \tilde{v} + \mu Z - \gamma Y - \partial_t Y.$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}' &= \int_{\omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t \tilde{v} + \mu Z - \gamma Y - \partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&\leq C \int_{\omega_T} |\partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Finalement, les inégalités (4.28) et (4.29) conduisent à l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathcal{K} + \mathcal{K}' &\leq Cs^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\partial_t^2 Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\omega_T} |\Delta(\partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\omega_T} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ C \int_{\omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

En substituant ceci dans l'inégalité (4.26), nous concluons la preuve de la Proposition 4.4.2. ■

### Étape 6. Résultat de stabilité.

Ce résultat est obtenu en deux parties. Dans la première partie, nous démontrons une inégalité de stabilité pour  $\mu$  en utilisant la méthode introduite dans [11]. Dans la seconde partie, nous établirons une inégalité de stabilité pour  $\delta$  en utilisant la méthode introduite

dans [75]. Finalement, nous combinerons les deux inégalités pour obtenir notre résultat de stabilité.

Partie 1 : Soit  $\theta$  dans  $(\eta, T-\eta)$  et  $W = e^{s\varphi}\tilde{Y}$ . On définit  $L_1$  comme suit  $L_1W = \partial_t W + A(x) \cdot \nabla W$  et on considère l'intégrale suivante  $\mathcal{I} = \int_0^\theta \int_\Omega L_1W \cdot W \, dx \, dt$ .

Nous donnons une majoration de  $\mathcal{I}$  en utilisant l'inégalité de Carleman (4.27).

$$|\mathcal{I}| = \left| \int_0^\theta \int_\Omega L_1W \cdot W \, dx \, dt \right| \leq s^{-\frac{1}{2}} \left( \int_0^\theta \int_\Omega |L_1W|^2 \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}} \left( s \int_0^\theta \int_\Omega |Y|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Appliquons l'inégalité de Young, il vient

$$|\mathcal{I}| \leq s^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega_T} |L_1W|^2 \, dx \, dt + s \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt \right).$$

En utilisant (4.27), on obtient

$$\begin{aligned} |\mathcal{I}| &\leq Cs^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 (|\partial_t \tilde{u}|^2 + |\partial_t^2 \tilde{u}|^2) e^{2s\varphi} \, dx \, dt \right. \\ &\quad + \int_{\omega_T} (|Z|^2 + s^2 |\nabla Z|^2 + |\Delta Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} \, dx \, dt \\ &\quad \left. + s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt \right\}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Maintenant, calculons  $\mathcal{I}$ . Après une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_0^\theta \int_{\Gamma_+} A(x) \cdot \nu |\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} \, d\sigma \, dt + \frac{1}{2} \int_\Omega |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} \, dx \\ &= \mathcal{I} + \frac{1}{2} \int_0^\theta \int_\Omega \nabla \cdot A(x) |\tilde{Y}|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Comme  $A(x) \cdot \nu > 0$  sur  $\Gamma_+$ , il vient

$$\int_\Omega |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} \, dx \leq \mathcal{I} + C \int_{\Omega_T} |Y|^2 e^{2s\varphi} \, dx \, dt.$$

En utilisant de nouveau (4.27) et l'estimation de  $\mathcal{I}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \leq s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1}) \left( \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 (|\partial_t \tilde{u}|^2 + |\partial_t^2 \tilde{u}|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right. \\
& \left. + \int_{\omega_T} (|Z|^2 + s^2 |\nabla Z|^2 + |\Delta Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right).
\end{aligned}$$

De plus, l'équation en  $Y$  nous permet d'écrire l'égalité suivante :

$$Y(x, \theta) = \partial_t U(x, \theta) = -A(x) \cdot \nabla U(x, \theta) + (\mu - \tilde{\mu})(x) \tilde{v}(x, \theta) + \mu(x) V(x, \theta) - \gamma(x) U(x, \theta).$$

En reportant ceci dans la dernière inégalité, nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |(\mu - \tilde{\mu}) \tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1}) \left\{ \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right. \\
& + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 (|\partial_t \tilde{u}|^2 + |\partial_t^2 \tilde{u}|^2) e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\omega_T} (|Z|^2 + s^2 |\nabla Z|^2 + |\Delta Z|^2 \\
& \left. + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt + s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right\} \quad (4.31) \\
& + C \int_{\Omega} |A(x) \cdot \nabla U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx.
\end{aligned}$$

Partie 2 : Soit  $\theta$  dans  $(\eta, T - \eta)$  et  $\mathcal{J} = \int_{\Omega} |Z(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx$ . On a

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |Z(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx = \int_{\Omega} |\chi(\theta) Z(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& = \int_0^{\theta} \partial_t \left( \int_{\Omega} |\chi(t) Z(x, t)|^2 e^{2s\varphi(x, t)} dx \right) dt \\
& \leq \int_{\Omega_T} 2\chi \partial_t \chi |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} 2|\chi|^2 Z \partial_t Z e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} 2s \partial_t \varphi |\chi Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C \int_{\Omega_T} |\chi \partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C(1 + s) \int_{\Omega_T} |\chi Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt
\end{aligned} \quad (4.32)$$

Le lemme suivant donne des inégalités de Carleman pour  $\chi Z$  et  $\chi \partial_t Z$ .

**Lemme 4.4.4.** *Soit  $Z$  une des solutions du système (4.12). Nous avons les inégalités de Carleman :*

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} |\chi \partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^{-1} \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-3} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt,
\end{aligned} \tag{4.33}$$

et

$$\begin{aligned}
& s \int_{\Omega_T} |\chi Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\omega_T} |\nabla(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

**Preuve du Lemme 4.4.4 :**

Tout d'abord, nous avons

$$L(\chi \partial_t Y) = \chi(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t^2 \tilde{v} + \mu \chi \partial_t Z - \gamma \chi \partial_t Y + \partial_t \chi \partial_t Y,$$

et

$$P(\chi \partial_t Z) = \chi P(\partial_t Z) + \partial_t \chi \partial_t Z = \chi(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t^2 \tilde{u} + \chi \delta \partial_t Y - \chi k \partial_t Z + \partial_t \chi \partial_t Z.$$

De plus,  $\chi \partial_t Y(x, 0) = \chi \partial_t Y(x, T) = \chi \partial_t Z(x, 0) = \chi \partial_t Z(x, T) = 0$  dans  $\Omega$ . Nous pouvons donc appliquer le Théorème 4.2.1 à  $\chi \partial_t Y$  et  $\chi \partial_t Z$ , il vient

$$\begin{aligned}
& I_1(\chi \partial_t Y, \Omega_T) + I_2(\chi \partial_t Z, \Omega_T) \leq C \int_{\Omega_T} |L(\chi \partial_t Y)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega_T} |P(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^2 \lambda^2 \int_{\omega_T} \varphi^2 |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Fixons  $\lambda = \lambda_0$ , nous majorons et minorons  $\varphi$  comme précédemment, il vient alors

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} s |\chi \partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} s^3 |(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |L(\chi \partial_t Y)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega_T} |P(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^2 \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Alors, pour tout  $s$  assez grand, on obtient

$$\begin{aligned}
& s \int_{\Omega_T} |\chi \partial_t Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s^3 \int_{\Omega_T} |\chi \partial_t Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

De la même façon que pour  $\chi \partial_t Z$ , démontrons une inégalité de Carleman pour  $\chi Z$

$$\begin{aligned}
& s \int_{\Omega_T} |\chi Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + s^3 \int_{\Omega_T} |\chi Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^2 \int_{\omega_T} |\nabla(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\Delta(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.36}$$

D'après (4.35) et (4.36), nous concluons la preuve du Lemme 4.4.4. ■

En utilisant le Lemme 4.4.4, l'inégalité (4.32) devient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |Z(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \leq Cs^{-3} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^{-3} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-2} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu}) \partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^{-2} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta}) \partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^{-1} \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-3} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\nabla(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^{-2} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.37}$$

De plus, on a

$$Z(x, \theta) = \partial_t V(x, \theta) = \Delta V(x, \theta) + (\delta - \tilde{\delta}) \tilde{u}(x, \theta) + \delta(x) U(x, \theta) - k(x) V(x, \theta).$$

Si on reporte  $Z$  dans la dernière inégalité, on trouve

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |(\delta - \tilde{\delta})\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \leq C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu})\partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta})\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu})\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta})\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-1} \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^{-3} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\omega_T} |\nabla(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\Omega} |\Delta V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx.
\end{aligned} \tag{4.38}$$

En rassemblant (4.31) et (4.38), il vient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& \leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1}) \left\{ \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 (|\partial_t \tilde{u}|^2 + |\partial_t^2 \tilde{u}|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right. \\
& \left. + \int_{\omega_T} \left( |Z|^2 + s^2 |\nabla Z|^2 + |\Delta Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2 \right) e^{2s\varphi} dx dt + s^2 \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right\} \\
& + C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu})\partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-3} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta})\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\mu - \tilde{\mu})\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C s^{-2} \int_{\Omega_T} |(\delta - \tilde{\delta})\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-1} \int_{\omega_T} |\nabla(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-3} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi \partial_t Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + C \int_{\omega_T} |\nabla(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C s^{-2} \int_{\omega_T} |\Delta(\chi Z)|^2 e^{2s\varphi} dx dt + C \int_{\Omega} |\Delta V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + C \int_{\Omega} |A(x) \cdot \nabla U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx.
\end{aligned} \tag{4.39}$$

Comme  $\nabla(\chi Z) = \chi \nabla Z$  et  $\Delta(\chi \partial_t Z) = \chi \Delta \partial_t Z$ , alors pour tout  $s$  assez grand, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& \leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} + s^{-2}) \left\{ \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \right\} \\
& + C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} + s^{-3}) \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + Cs^{-3} \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\omega_T} (|Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right\} + C \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-1} \left\{ \int_{\omega_T} (|\Delta Z|^2 + |\nabla(\partial_t Z)|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right\} + C \int_{\Omega} |\Delta V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + C \int_{\Omega} |A(x) \cdot \nabla U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + Cs^{\frac{3}{2}} \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned} \tag{4.40}$$

**Remarque 4.4.3.** *Nous avons les estimations suivantes :*

$$\begin{aligned}
& \exists k_1 \in L^2(0, T), |\partial_t \tilde{u}(x, t)| \leq k_1(t) |\tilde{u}(x, \theta)|, \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T), \\
& \exists k_2 \in L^2(0, T), |\partial_t \tilde{v}(x, t)| \leq k_2(t) |\tilde{v}(x, \theta)|, \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T), \\
& \exists k_3 \in L^2(0, T), |\partial_t^2 \tilde{u}(x, t)| \leq k_3(t) |\tilde{u}(x, \theta)|, \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T), \\
& \exists k_4 \in L^2(0, T), |\partial_t^2 \tilde{v}(x, t)| \leq k_4(t) |\tilde{v}(x, \theta)|, \quad \forall x \in \Omega, t \in (0, T).
\end{aligned}$$

(Pour la preuve, nous renvoyons à [74]).

Dans la suite, on pose  $\theta = \frac{T}{2}$ , alors  $e^{2s\varphi(x, t)} \leq e^{2s\varphi(x, \theta)}$  pour tout  $x \in \Omega, t \in (0, T)$ . En utilisant la remarque précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& \leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} |k_2|^2 dx dt + C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} |k_1|^2 dx dt, \\
& \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\partial_t^2 \tilde{v}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} |k_4|^2 dx dt,
\end{aligned}$$

et

$$\int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\partial_t^2 \tilde{u}|^2 e^{2s\varphi} dx dt \leq C \int_{\Omega_T} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} |k_3|^2 dx dt.$$

Comme  $k_1, k_2, k_3, k_4$  sont dans  $L^2(0, T)$ , alors de l'inégalité (4.40), il vient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& \leq C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} + s^{-2}) \left\{ \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \right\} \\
& + C(s^{-\frac{1}{2}} + s^{-1} + s^{-3}) \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + Cs^{-3} \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + Cs^{-\frac{1}{2}} \left\{ \int_{\omega_T} (|Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right\} + C \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-1} \left\{ \int_{\omega_T} (|\Delta Z|^2 + |\nabla(\partial_t Z)|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right\} + \int_{\Omega} |\Delta V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + \int_{\Omega} |A(x) \cdot \nabla U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + Cs^{\frac{3}{2}} \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Finalement, pour tout  $s$  assez grand, nous déduisons le résultat suivant

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} |\mu - \tilde{\mu}|^2 |\tilde{v}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + \int_{\Omega} |\delta - \tilde{\delta}|^2 |\tilde{u}(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& \leq +Cs^{-\frac{1}{2}} \left( \int_{\omega_T} (|Z|^2 + |\Delta(\partial_t Z)|^2 + |\partial_t^2 Z|^2 + |\partial_t Z|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right) + C \int_{\omega_T} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
& + Cs^{-1} \left( \int_{\omega_T} (|\Delta Z|^2 + |\nabla(\partial_t Z)|^2) e^{2s\varphi} dx dt \right) + \int_{\Omega} |\Delta V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |V(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx \\
& + \int_{\Omega} |A(x) \cdot \nabla U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + C \int_{\Omega} |U(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi(x, \theta)} dx + Cs^{\frac{3}{2}} \int_{\omega_T} |Y(x, \theta)|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

D'après la section 2.2, il existe  $\theta$ , tel que  $|\tilde{u}(x, \theta)| \geq r_1 > 0$  et  $|\tilde{v}(x, \theta)| \geq r_2 > 0$ . Comme  $e^{2s\varphi(x, \theta)}$  est borné dans  $\Omega \times (0, T)$  et  $e^{2s\varphi(x, \theta)} \geq c > 0$ ,  $\forall x \in \Omega$ , nous concluons la preuve. ■

**Remarque 4.4.4.** Notons qu'il reste à s'assurer de l'existence d'une fonction  $\psi$  qui vérifie les hypothèses 4.2.1.

## 4.5 Annexe

### Preuve du Lemme 4.4.1 :

Commençons par  $\mathcal{M}_2$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} |Y| \partial_t Y e^{2s\varphi} dx \\ &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} (LY - A(x) \cdot \nabla Y) Y e^{2s\varphi} dx. \end{aligned}$$

Alors, on obtient

$$\frac{dE_1}{dt} - s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} e^{2s\varphi} A(x) \cdot \nabla (|Y|^2) dx = \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx.$$

Après une intégration par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{dE_1}{dt} - s \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + \nabla \varphi \cdot A(x)) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_+} A(x) \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma \\ = \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot A(x) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx. \end{aligned} \tag{4.41}$$

De plus, pour tout  $s > 0$  grand, en utilisant l'hypothèse (iv), on obtient

$$\frac{dE_1}{dt} + sc \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx \leq \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx. \tag{4.42}$$

En utilisant la formule  $2ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{\varepsilon}$  avec  $\varepsilon = sc$ , nous estimons le membre de droite comme suit :

$$\left| \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx \right| \leq \frac{1}{2} sc \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx + \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

En substituant cette estimation dans (4.42), nous trouvons

$$\frac{dE_1}{dt} + scE_1(t) \leq \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx.$$

D'autre part, pour  $t \in (T - \eta, T)$ , en utilisant le lemme Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
E_1(t) &\leq e^{\int_{T-\eta}^t -csd\tau} \left( E_1(T-\eta) + \int_{T-\eta}^t \frac{1}{2sc} \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau \right) \\
&\leq e^{-sc(t-(T-\eta))} E_1(T-\eta) + \frac{e^{sc(T-t-\eta)}}{2sc} \int_{T-\eta}^t \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau \\
&\leq e^{-sc(t-(T-\eta))} E_1(T-\eta) + \frac{1}{2sc} \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau.
\end{aligned}$$

En intégrant cette inégalité pour  $t$  entre  $T-\eta$  et  $T$ , on aura

$$\begin{aligned}
\int_{T-\eta}^T E_1(t) dt &\leq E_1(T-\eta) \int_T^{T-\eta} e^{-sc(t-(T-\eta))} dt + \int_{T-\eta}^T \frac{1}{2sc} \int_{T-\eta}^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi(\tau)} |LY(\tau)|^2 dx d\tau dt \\
&\leq E_1(T-\eta) \int_T^{T-\eta} e^{-sc(t-(T-\eta))} dt + \frac{\eta}{2sc} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt \\
&\leq \frac{C}{s} E_1(T-\eta) + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{4.43}$$

Maintenant, nous estimons  $E_1(T-\eta)$  par  $E_1(\tau)$  pour  $\tau \in (\eta, T-\eta)$ . Nous utilisons (4.41) et intégrons entre  $\tau$  et  $T-\eta$

$$\begin{aligned}
&\int_{\tau}^{T-\eta} \frac{dE_1}{dt} dt + \frac{1}{2} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Gamma_+} A(x) \cdot \nu |Y|^2 e^{2s\varphi} d\sigma dt \\
&= \int_{\tau}^{T-\eta} s \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + \nabla \varphi \cdot A(x)) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \nabla \cdot A(x) |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} YLY e^{2s\varphi} dx dt \\
&\leq Cs \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{1}{2} sc \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt \\
&+ \frac{1}{2sc} \int_{\tau}^{T-\eta} \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt.
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$E_1(T - \eta) - E_1(\tau) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt.$$

En intégrant entre  $\eta$  et  $T - \eta$ , nous obtenons, pour  $s > 0$  suffisamment grand,

$$E_1(T - \eta) \leq Cs \int_{\eta}^{T-\eta} E_1(t) dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} |LY|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \quad (4.44)$$

Finalement, grâce aux inégalités (4.44) et (4.43), nous obtenons

$$\int_{T-\eta}^T E_1(t) dt \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} E_1(t) dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt.$$

Ce qui donne

$$\mathcal{M}_2 \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Y|^2 dx dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |LY|^2 dx dt. \quad (4.45)$$

Ensuite, nous estimons  $\mathcal{M}_4$ . Nous aurons besoin du lemme suivant :

**Lemme 4.5.1.** *Il existe deux réels  $s_0 > 0$  et  $C > 0$  tels que,  $\forall s \geq s_0$  et  $\forall Z \in H_0^1(\Omega)$ ,*

$$s^2 \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Z|^2 dx \leq C \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |\nabla Z|^2 dx.$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [48].

On a

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Z|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} |Z| \partial_t Z e^{2s\varphi} dx \\ &= s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Z|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} (PZ + \Delta Z) Z e^{2s\varphi} dx. \end{aligned}$$

Alors

$$\frac{dE_2}{dt} - s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Z|^2 e^{2s\varphi} dx - \int_{\Omega} Z \Delta Z e^{2s\varphi} dx = \int_{\Omega} Z P Z e^{2s\varphi} dx.$$

Une intégration par parties donne

$$\begin{aligned} \frac{dE_2}{dt} - s \int_{\Omega} \partial_t \varphi |Z|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx \\ + 2s \int_{\Omega} e^{2s\varphi} Z \nabla Z \cdot \nabla \varphi dx = \int_{\Omega} Z P Z e^{2s\varphi} dx. \end{aligned} \quad (4.46)$$

D'autre part, nous avons

$$\left| 2s \int_{\Omega} e^{2s\varphi} Z \nabla Z \cdot \nabla \varphi dx \right| \leq C \int_{\Omega} s |\nabla \varphi| e^{2s\varphi} |Z|^2 dx + Cs \int_{\Omega} |\nabla \varphi| e^{2s\varphi} |\nabla Z|^2 dx.$$

Donc

$$\begin{aligned} & \frac{dE_2}{dt} - Cs \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + |\nabla \varphi|) |Z|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx \\ & \leq Cs \int_{\Omega} |\nabla \varphi| |\nabla Z|^2 e^{2s\varphi} dx + \int_{\Omega} Z P Z e^{2s\varphi} dx. \end{aligned}$$

Appliquons le Lemme 4.5.1 à la dernière inégalité, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \frac{dE_2}{dt} - Cs \int_{\Omega} (\partial_t \varphi + |\nabla \varphi|) e^{2s\varphi} |Z|^2 dx \\ & + Cs^2 \int_{\Omega} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx + Cs^3 \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Z|^2 dx \leq \int_{\Omega} Z P Z e^{2s\varphi} dx. \end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\frac{dE_2}{dt} + cs^3 \int_{\Omega} e^{2s\varphi} |Z|^2 dx \leq \int_{\Omega} Z P Z e^{2s\varphi} dx. \quad (4.47)$$

De la même façon que  $E_1$ , on obtient

$$\mathcal{M}_4 \leq C \int_{\eta}^{T-\eta} \int_{\Omega} |Z|^2 e^{2s\varphi} dx dt + \frac{C}{s} \int_0^T \int_{\Omega} |PZ|^2 e^{2s\varphi} dx dt. \quad (4.48)$$

■

## **Deuxième partie**

### **Contrôlabilité de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes**

# Chapitre 5

## Introduction

Nous commençons par donner quelques éléments sur les notions introduites dans le cadre de cette partie, à savoir, le contrôle et les singularités des équations aux dérivées partielles.

L'objet de la théorie du contrôle est de chercher à étudier la possibilité d'agir sur un système afin de l'amener à un état donné. En effet, les problèmes dit de contrôlabilité ont pour objectif d'atteindre sur un temps  $T$  donné, une cible (notion de contrôlabilité exacte) ou de s'en approcher autant qu'on le désire (notion de contrôlabilité approchée), à l'aide d'un contrôle.

Nous décrivons tout d'abord ces différentes notions classiques de contrôlabilité dans le cadre suivant : Soient  $T$  un temps positif fixé et  $X$  et  $Y$  deux espaces de Hilbert séparables munis des produits scalaires et des normes respectivement notés par  $\langle \cdot, \cdot \rangle_X$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ ,  $\|\cdot\|_X$  et  $\|\cdot\|_Y$ .

Considérons le problème de contrôle suivant :

$$\begin{cases} u' = Au + Bv \text{ dans } (T_0, T), \\ u(T_0) = u_0 \in X, \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $T_0 \in (0, T)$ ,  $A$  et  $B$  sont des opérateurs non bornés et  $v \in L^2(0, T; Y)$  est le contrôle. Notons par  $u(t; T_0, u_0, v) \in X$  la solution du système (5.1) et par  $u(t; u_0, v) = u(t; 0, u_0, v)$ . On dit que le système (5.1) est :

1. Exactement contrôlable au temps  $T$  si pour tout  $(u_0, u_1) \in X \times X$ , il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T; Y)$  tel que la solution de (5.1) satisfasse

$$u(T; u_0, v) = u_1.$$

2. Contrôlable aux trajectoires au temps  $T$  si pour tout  $(u_0, \hat{u}_0) \in X \times X$  et  $\hat{v} \in L^2(0, T; Y)$ , il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T; Y)$  tel que la solution de (5.1) satisfasse

$$u(T; u_0, v) = u(T; \hat{u}_0, \hat{v}).$$

3. Contrôlable à zéro au temps  $T$  si pour tout  $u_0 \in X$ , il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T; Y)$  tel que la solution de (5.1) satisfasse

$$u(T; u_0, v) = 0.$$

4. Approximativement contrôlable au temps  $T$  si pour tout  $(u_0, u_1) \in X \times X$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe un contrôle  $v \in L^2(0, T; Y)$  tel que la solution de (5.1) satisfasse

$$\|u(T; u_0, v) - u_1\|_X \leq \varepsilon.$$

Le premier résultat dans les problèmes de contrôle concerne la notion de contrôlabilité approchée, en particulier dans le cas parabolique, qui revient essentiellement à démontrer des résultats d'unicité. Les notions de contrôlabilité exacte et de contrôlabilité aux trajectoires se sont ensuite développées dans les années 70', en particulier autour des systèmes hyperboliques conservatifs, pour la première et des problèmes paraboliques, pour la seconde.

Dans ce travail, nous nous intéresserons à l'étude de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur, avec des conditions au bord mixtes. Les premiers résultats de la contrôlabilité pour l'équation de la chaleur en une dimension d'espace sont essentiellement dûs à Fattorini et Russel dans [36, 37] (ou en dimension quelconque mais avec un contrôle sur tout le bord dans [70]). Par la suite, Lebeau et Robbiano ont démontré dans [61] la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur à travers une inégalité spectrale obtenue grâce à des inégalités de Carleman locales, moyennant un contrôle agissant sur un sous domaine. Fursikov et Imanuvilov dans [41] démontrent le même résultat pour une équation parabolique générale en utilisant des inégalités de Carleman globales qui impliquent en particulier l'observabilité du problème adjoint associé. Nous précisons ce résultat un peu plus loin. Nous citons aussi les travaux de [41] pour des conditions aux limites de type Neumann et ceux de [38] pour des conditions aux limites de type Fourier.

Les conditions au bord mixtes font apparaître des comportements singuliers de la solution. En effet, l'étude des singularités de solutions d'équations aux dérivées partielles est un sujet largement étudié, nous nous référons par exemple à [30, 44, 45]. Ces singularités peuvent être dues au fait que les équations sont posées dans des domaines à frontière non régulière (frontières présentant des coins, polygones, polyèdres), ou bien au fait que les données sont singulières (masses concentrées en des points), ou encore à des changements brusques de conditions aux limites (problèmes mixtes) ou de coefficients (problèmes de transmission). Concernant les domaines non réguliers, certains résultats de contrôlabilité ont été établis pour l'équation des ondes par la méthode des multiplicateurs ([44, 46]). Nous citons aussi [66] où l'auteur étudie le contrôle pour l'équation des ondes dans le cas d'une structure de dimension  $N$  et [16] où la stabilisation en présence de singularités est étudiée. Par ailleurs, la contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes dans des ouverts contenant des coins a été démontré à travers des techniques microlocales dans [22]. Dans le cas d'un domaine avec un coin dont l'angle intérieur est plus petit que  $\pi$ , Bourgeois démontre une inégalité de Carleman dans [17] pour des équations elliptiques d'ordre deux. Pour l'équation de la chaleur, une inégalité de Carleman et un résultat de contrôlabilité à zéro dans un domaine plan avec un coin rentrant ainsi que dans un domaine fissuré sont démontrés dans [12].

Dans ce travail, nous nous intéresserons uniquement aux singularités liées aux conditions mixtes. De façon plus précise, la difficulté essentielle dans ce type de problèmes vient du fait que la dérivée normale de la solution n'est pas de carré intégrable, même pour des données très régulières.

Afin de saisir cette difficulté, présentons le problème suivant qui fut introduit par Shamir [71] : Soit  $\Omega$  le demi-disque unité décrit en coordonnées polaires par

$$\Omega = \{(r, \theta), 0 < r < 1, 0 < \theta < \pi\},$$

et  $\Gamma$  sa frontière. Soit  $\Gamma_0 = \{(r, \pi), 0 < r < 1\}$  et  $\Gamma_1 = \Gamma \setminus \overline{\Gamma_0}$ .

On considère dans  $\Omega$  le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_1, \\ \partial_\nu u = 0 & \text{sur } \Gamma_0, \end{cases} \quad (5.2)$$

où  $f \in L^2(\Omega)$ .

Il est bien connu, que la solution de (5.2) n'est pas dans  $H^2(\Omega)$ . En effet, la fonction  $u$  est donnée en coordonnées polaires par :

$$u(r, \theta) = r^{\frac{1}{2}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \chi(r),$$

avec  $\chi \in \mathcal{D}([0, 1])$  valant 1 près de 0 et 0 près de 1.

On peut montrer que  $u \in H^s(\Omega)$  tel que  $s < \frac{3}{2}$ , que  $-\Delta u \in L^2(\Omega)$  et que  $u$  satisfait les conditions aux limites du problème (5.2). Mais que  $\frac{\partial u}{\partial \nu}$  n'est pas dans  $L^2(\Gamma_1)$ .

Dans Grisvard [44], nous avons une formule plus précise de la solution de (5.2). On introduit pour cela la fonction  $S^*(r, \theta) = \frac{1}{\pi}(r^{-\frac{1}{2}} - r^{\frac{1}{2}})\sin(\frac{\theta}{2})$  qui est dans  $L^2(\Omega)$ . Pour  $f \in L^2(\Omega)$ , la solution  $u$  du problème (5.2) s'écrit de la manière suivante :

$$u = u_R + cu_S, \quad (5.3)$$

avec  $u_R \in H^2(\Omega)$  et  $c = \int_{\Omega} f S^*$ .

Cette deuxième partie de la thèse concerne l'étude de la contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur avec des conditions mixtes dans un cas linéaire. Pour cela, considérons le problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) = v(x, t)1_\omega & \text{dans } Q_T = \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D = \Gamma_D \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N = \Gamma_N \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné connexe de  $\mathbb{R}^2$ , à frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^2$ .  $\Gamma_D$  et  $\Gamma_N$  sont deux sous ensembles de  $\Gamma$  tels que :  $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ ,  $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$ ,  $\overline{\Gamma_D} \cap \overline{\Gamma_N} = \{S_1, S_2\}$ .

Ici,  $u(x, t)$  représente l'état et  $v = v(x, t)$  est le contrôle. La fonction caractéristique de  $\omega$  est  $1_\omega$ , où  $\omega$  est un sous domaine de  $\Omega$ . On suppose que l'on peut agir sur le système uniquement à travers  $\omega \times (0, T)$ . On suppose aussi que  $a$  est dans  $L^\infty(Q_T)$ .

Le problème de contrôle que l'on se pose peut être formulé de la manière suivante : Existe-t-il un contrôle  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  qui amène la solution  $u$  au repos au temps  $T$ , c'est à dire

$$u(T) = 0, \quad \text{dans } \Omega \quad ?$$

Ce résultat de contrôlabilité à zéro est équivalent à l'observabilité de l'état adjoint associé (cf. [39]). En effet, dans le cas d'un contrôle, une inégalité d'observabilité mesure la proportion d'énergie de la solution qui va passer par la zone  $\omega$ . Plus précisément, pour tout  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ , considérons le problème adjoint associé à (5.4) :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi(x, t) - \Delta \varphi(x, t) + a(x, t) \varphi(x, t) = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ \varphi(x, T) = \varphi_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (5.5)$$

Dans ce cas, (5.4) est contrôlable à zéro si et seulement si, il existe une constante  $C > 0$  telle que

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|\varphi\|_{L^2(\omega \times (0, T))}^2, \quad \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega), \quad (5.6)$$

où  $\varphi$  est solution de (5.5).

Dans le premier chapitre de cette partie, nous présentons quelques résultats d'existence et de régularité pour le problème mixte pour l'équation de la chaleur.

Le second chapitre consiste à établir une inégalité de Carleman pour l'équation de la chaleur rétrograde suivante :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(x, t) + \Delta \varphi(x, t) = f(x, t) & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ \varphi(x, T) = \varphi_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (5.7)$$

où  $T$  est un temps positif fixé,  $f \in L^2(Q_T)$ ,  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ .

Cette estimation de Carleman est le principal outil qui nous permet d'obtenir l'inégalité d'observabilité (5.6).

À notre connaissance, très peu de résultats sur les inégalités de Carleman en présence de singularités ont été établis. On peut citer [17] pour l'équation de Laplace dans un domaine avec un coin, [12] pour l'équation de la chaleur dans un domaine singulier et [27] pour l'équation des ondes avec des conditions mixtes en utilisant une approche microlocale. La méthode utilisée ici est dans le même esprit que [12, 38, 41].

# Chapitre 6

## Résultats préliminaires

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence et l'unicité des solutions du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) = f(x, t) & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (6.1)$$

où la donnée initiale  $u_0$  et le second membre  $f$  sont supposés être respectivement dans les espaces  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(Q_T)$ . Nous donnerons aussi quelques résultats de régularité.

### 6.1 Existence et unicité

On souhaite appliquer la théorie de Hille-Yoshida dans l'espace  $H = L^2(\Omega)$ . Pour cela, on introduit l'espace  $V = \{u \in H^1(\Omega); u = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  et on définit l'opérateur linéaire non-borné  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  par

$$\begin{cases} D(A) = \{u \in V; \Delta u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma_N\} \\ Au = -\Delta u \end{cases}$$

On peut maintenant établir la proposition suivante :

**Proposition 6.1.1.** *Pour  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ , le système (6.1) admet une unique solution  $u$  dans l'espace  $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T); D(A)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ .*

**Preuve de la Proposition 6.1.1 :**

Suivant la définition de l'opérateur  $A$ , nous pouvons interpréter (6.1) sous la forme abstraite du problème de Cauchy non homogène suivant :

$$\begin{cases} \frac{du}{dt}(t) + Au(t) = f(t) & \text{sur } [0, T], \\ u(0) = u_0. \end{cases} \quad (6.2)$$

Montrons d'abord ce résultat pour  $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  et  $u_0 \in D(A)$ .

Vérifions que l'opérateur  $A$  est maximal monotone et auto-adjoint dans l'espace de Hilbert  $L^2(\Omega)$  :

(i)  $A$  est monotone. En effet, si  $u \in D(A)$  on a

$$(Au, u)_{L^2} = \int_{\Omega} (-\Delta u)u dx = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \geq 0.$$

(ii)  $A$  est maximal montone. Il suffit de démontrer que  $Im(I + A) = L^2(\Omega)$  : Soit  $f \in L^2(\Omega)$ , on cherche  $u \in D(A)$  solution de l'équation  $u - \Delta u = f$ .

Ce problème relève du théorème de Lax-Milgram dans l'espace  $V$  avec la forme bilinéaire continue et coercive

$$B(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx + \int_{\Omega} uv dx$$

et la forme linéaire continue

$$L(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Par conséquent, on a bien dans ce contexte, existence et unicité de  $u \in V$  tel que  $B(u, v) = L(v)$ ,  $\forall v \in V$ . En utilisant des fonctions tests  $v \in \mathcal{D}(\Omega)$  ensuite  $v \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}) \cap V$ , on obtient  $u \in D(A)$ .

(iii)  $A$  est auto-adjoint. Il suffit de montrer qu'il est symétrique car on vient de voir qu'il est maximal monotone. Soient  $u, v \in D(A)$ , on a

$$\langle Au, v \rangle = \int_{\Omega} (-\Delta u)v dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx,$$

$$\langle u, Av \rangle = \int_{\Omega} u(-\Delta v) dx = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx.$$

Le théorème de Hille-Yoshida nous fournit l'existence et l'unicité d'une solution  $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$  au problème de Cauchy (6.2).

En particulier, pour toute donnée initiale  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et pour tout  $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$  on a existence et unicité d'une solution  $u \in C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^1((0, T); D(A)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$  car l'opérateur  $A$  est auto-adjoint. On appellera ces solutions « des solutions faibles » par opposition à des solutions fortes i.e. telles que  $u_0 \in D(A)$ ,  $f \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  et qui vérifient  $u \in C([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; L^2(\Omega))$ . Notons que, en utilisant la densité de  $D(A)$  dans  $L^2(\Omega)$  et la densité de  $C([0, T]; L^2(\Omega))$  dans  $L^2((0, T); L^2(\Omega))$ , une solution faible peut toujours être approchée par une solution forte.

■

### Remarque 6.1.1.

1. Le domaine  $D(A)$  n'est pas contenu dans  $H^2(\Omega)$  (La régularité de  $\Delta u$  n'assure pas la régularité de  $u$ ).
2. Le résultat de singularité est complètement indépendant de la régularité des données  $f$  et  $u_0$ . Même pour des données très régulières, la solution de (6.1) n'est pas régulière au voisinage de  $S_1$  et  $S_2$ . Par ailleurs, plus de régularité des données initiales implique plus de régularité en temps pour la solution mais pas en espace.

**Remarque 6.1.2.** Notons que toute solution  $u \in D(A)$  du système (6.1) peut s'écrire sous la forme, cf. [65],

$$u(x, t) = u_R(x, t) + C(t)u_S(x),$$

où  $C(t) \in C^\sigma([0, T])$  pour tout  $\sigma < \frac{1}{2}$  et  $u_R \in C^0([0, T]; H^2(\Omega))$ .

On énonce maintenant le résultat de régularité suivant :

**Théorème 6.1.1.** (cf.[19]) Si  $u_0 \in D(A^k)$  pour  $k \geq 1$  alors la solution  $u$  de (6.2) vérifie  $u \in C^{k-j}([0, +\infty), D(A^j))$  pour tout  $j = 0, 1, \dots, k$ .

Rappelons que les puissances entières d'un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow H$  sont définies de la façon suivante :

**Définition 6.1.1.** Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , l'opérateur  $A^k : D(A^k) \subset H \rightarrow H$  est défini par

1.  $D(A^k) = \{x \in D(A^{k-1}); Ax \in D(A^{k-1})\}$ ,
2.  $\forall x \in D(A^k), A^k x = A^{k-1}(Ax)$ .

Introduisons maintenant le problème adjoint suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \varphi(x, t) + \Delta \varphi(x, t) = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ \varphi(x, T) = \varphi_T(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (6.3)$$

En définissant l'adjoint  $A^*$  de  $A$ , on peut montrer, de la même manière que précédemment (section 6.1), que le problème (6.3) peut être écrit sous la forme abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\varphi}{dt}(t) + A^* \varphi(t) = 0 & \text{sur } [0, T], \\ \varphi(T) = \varphi_T. \end{cases} \quad (6.4)$$

L'opérateur adjoint  $A^*$  est aussi maximal monotone à domaine  $D(A^*)$ . Par conséquent, pour toute donnée initiale  $\varphi_T \in L^2(\Omega)$ , nous avons existence et unicité d'une solution  $\varphi \in C([0, T]; L^2(\Omega))$  de (6.3).

En particulier, à partir des résultats précédents, nous pouvons établir le corollaire suivant :

**Corollaire 6.1.1.** Pour tout  $u_0 \in L^2(\Omega)$ ,  $a \in L^\infty(Q_T)$  et  $f \in L^2(Q_T)$  il existe une unique solution  $u$  au problème

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u = f(x, t) & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (6.5)$$

dans l'espace  $C([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C((0, T); D(A)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ .

**Remarque 6.1.3.** Comme  $a \in L^\infty(Q_T)$ , en considérant le terme d'ordre inférieur  $a(x, t)u$  dans le membre de droite de la première équation du problème (6.5) alors la solution de ce dernier s'écrit de la même manière que celle du problème (6.1).

# Chapitre 7

## Inégalité de Carleman

Dans ce chapitre, nous démontrons une inégalité de Carleman pour le problème (5.7) qui a été présenté dans l'introduction. Dans la section 7.1, nous présentons tout d'abord les fonctions poids que l'on utilise et dans la section 7.2, nous prouvons le résultat principal en plusieurs étapes. Ce chapitre a fait l'objet d'une publication d'une note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, [2], avec Tarik Aliziane et Ouahiba Zair.

### 7.1 Fonctions poids

Définissons les fonctions poids suivantes. On pose, pour  $k = 0, 1$ ,

$$\xi_k(x, t) = \frac{e^{(-1)^k \lambda \beta(x)}}{t(T-t)}, \quad \alpha_k(x, t) = \frac{e^{2\lambda \|\beta\|_\infty} - e^{(-1)^k \lambda \beta(x)}}{t(T-t)}. \quad (7.1)$$

Ici,  $\lambda \geq 1$  est un paramètre et  $\beta = \beta(x)$  est une fonction telle que

$$\beta \in C^2(\overline{\Omega}), \quad \beta(x) > 0 \text{ dans } \Omega, \quad \beta(x) = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \quad |\nabla\beta| > 0 \text{ sur } \overline{\Omega} \setminus \omega', \quad (7.2)$$

tel que  $\omega' \subset\subset \omega$ . L'existence d'une telle fonction  $\beta$  est prouvée dans [41].

L'inégalité de Carleman est donnée pour  $\alpha = \alpha_0$  et  $\xi = \xi_0$ .

**Théorème 7.1.1.** *Soit  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ . Il existe deux réels  $s_0, \lambda_0$  et une constante positive  $C = C(\Omega, \omega, T, s_0, \lambda_0)$  tels que pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$ , la solution de (5.7) vérifie*

$$I(\varphi, \xi, \alpha, Q_T) \leq C \left( \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0, T)} \xi^3 e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 dx dt \right), \quad (7.3)$$

où

$$I(\varphi, \xi, \alpha, Q_T) = \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \left( (s\xi)^{-1} (|\partial_t \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) + s\lambda^2 \xi |\nabla \varphi|^2 + s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 \right) dx dt. \quad (7.4)$$

## 7.2 Preuve du Théorème 7.1.1

La preuve de ce théorème se décompose en plusieurs étapes.

### 7.2.1 Régularisation en temps

La régularité de la solution  $\varphi$  en temps n'est pas suffisante pour effectuer certaines intégrations par parties. Nous approchons donc  $\varphi$  par une suite de fonctions régulières  $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$  en utilisant la densité des espaces  $D(-\Delta)$  et  $D((-\Delta)^2)$  dans  $L^2(\Omega)$ . Par conséquent, pour  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$  et  $f \in L^2((0, T); L^2(\Omega))$ , il existe des suites  $(\varphi_n^0)_n \subset D((-\Delta)^2)$  et  $(f_n)_n \subset C^1((0, T); D(-\Delta))$  telles que  $(\varphi_n^0)_n$  converge vers  $\varphi_0$  dans  $L^2(\Omega)$  et  $(f_n)_n$  converge vers  $f$  dans  $L^2((0, T); L^2(\Omega))$ .

On considère alors le problème suivant associé à la donnée initiale  $\varphi_n^0 \in D((-\Delta)^2)$

$$\begin{cases} \partial_t \varphi_n(x, t) + \Delta \varphi_n(x, t) = f_n(x, t) & \text{dans } Q_T, \\ \varphi_n = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial \varphi_n}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ \varphi_n(x, 0) = \varphi_n^0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.5)$$

Le problème (7.5) admet une unique solution  $\varphi_n$  dans l'espace (cf. Théorème 6.1.1)

$$C^2((0, T); L^2(\Omega)) \cap C^1([0, T]; D(-\Delta)).$$

Nous avons le résultat suivant :

**Lemme 7.2.1.** *Pour  $k = 0, 1$ , on pose :*

$\psi_{n,k}(x, t) = e^{-s\alpha_k(x,t)} \varphi_n(x, t)$  et  $\psi_k(x, t) = e^{-s\alpha_k(x,t)} \varphi(x, t)$ . Alors

1.  $(\varphi_n)_n$  converge vers  $\varphi$  dans  $L^2(0, T; V)$ ,
2.  $(\Delta \psi_{n,k})_n$  converge vers  $(\Delta \psi_k)$  dans  $L^2(Q_T)$ .

**Preuve du Lemme 7.2.1 :**

L'idée est prise de l'article de [12].

1. Soit  $v_n = \varphi_n - \varphi$  et  $g_n = f_n - f$ , on a

$$\begin{cases} \partial_t v_n + \Delta v_n = g_n & \text{dans } Q_T, \\ v_n = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial v_n}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ v_n(\cdot, 0) = v_n^0 = \varphi_n^0 - \varphi_0 & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (7.6)$$

Comme  $v_n^0 \in L^2(\Omega)$  alors  $v_n \in C^0([0, T]; L^2(\Omega)) \cap C^0([0, T[; D(A)) \cap C^1((0, T); L^2(\Omega))$ . On multiplie la première équation de (7.6) par  $v_n$  et on intègre par parties sur  $\Omega$ , on trouve

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |v_n|^2 dx + \int_{\Omega} |\nabla v_n|^2 dx = \int_{\Omega} g_n v_n dx. \quad (7.7)$$

On utilise l'inégalité de Young pour estimer le membre de droite, il vient de l'inégalité (7.7)

$$\frac{d}{dt} \|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C \|g_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2. \quad (7.8)$$

Maintenant, on pose

$$\eta_1(t) := \|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et

$$\eta_2(t) := \|g_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Alors (7.8) implique

$$\eta_1'(t) \leq C\eta_1(t) + C\eta_2(t)$$

pour  $0 \leq t \leq T$ . Donc, La forme différentielle de l'inégalité de Gronwall implique l'estimation suivante :

$$\eta_1(t) \leq e^{Ct} \left( \eta_1(0) + C \int_0^t \eta_2(s) ds \right) \quad (0 \leq t \leq T),$$

i.e

$$\|v_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|v_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g_n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right).$$

Cela entraîne la convergence de la suite  $(v_n)_n$  vers 0 dans  $L^2((0, T); L^2(\Omega))$ .

D'autre part, on a

$$\|\nabla v_n\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C \left( \|v_n(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|g_n(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \right) + C \|g_n(t)\|_{L^2(\Omega)}^2.$$

Donc, on obtient

$$v_n \rightarrow 0 \quad \text{in} \quad H^1(\Omega).$$

Ce qui donne la convergence de la suite  $(v_n)_n$  vers 0 dans  $L^2(0, T; V)$ .

2. Soit  $\phi_{p,q} = \psi_p - \psi_q$ ,  $f_{p,q} = f_p - f_q$ . On a alors

$$\partial_t \phi_{p,q} + \Delta \phi_{p,q} = g_{p,q} \quad (7.9)$$

où

$$g_{p,q} = f_{p,q} e^{-s\alpha} + (-s\alpha_t - s\Delta\alpha + s^2|\nabla\alpha|^2)\phi_{p,q} - 2s\nabla\alpha \cdot \nabla\phi_{p,q}$$

On multiplie l'équation (7.9) par  $\Delta\phi_{p,q}$  et on intègre sur  $Q_T$ , on obtient

$$\frac{1}{2} \int_{Q_T} \frac{d}{dt} (\nabla\phi_{p,q})^2 dx dt + \int_{Q_T} |\Delta\phi_{p,q}|^2 dx dt = \int_{Q_T} g_{p,q} \Delta\phi_{p,q} dx dt,$$

Comme  $\phi_{p,q}(\cdot, 0) = \phi_{p,q}(\cdot, T) = 0$ , on aura

$$\int_{Q_T} |\Delta\phi_{p,q}|^2 dx dt = \int_{Q_T} g_{p,q} \Delta\phi_{p,q} dx dt, \quad (7.10)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, (7.10) devient

$$\| \Delta \phi_{p,q} \|_{L^2(Q_T)} \leq \| g_{p,q} \|_{L^2(Q_T)} \cdot$$

Comme  $\beta \in W^{2,\infty}(\Omega)$ , en utilisant l'inégalité de Young, on déduit l'existence d'une constante  $C > 0$ , qui dépend de  $s$ , telle que

$$\| \Delta \phi_{p,q} \|_{L^2(Q_T)} \leq C \| \phi_{p,q} \|_{L^2(0,T;H^1(\Omega))} + C \| f_{p,q} \|_{L^2(Q_T)} \cdot$$

Par conséquent, la suite  $(\Delta \psi_n)_n$  est de Cauchy dans  $L^2(Q_T)$ . Elle converge donc vers une limite que l'on note  $\widehat{\psi}$ . Par ailleurs, grâce à l'item (1) du Lemme 7.2.1, on déduit que  $(\psi_n)_n$  converge vers  $\psi$  dans  $L^2(Q_T)$  alors  $(\Delta \psi_n)_n$  converge vers  $\Delta \psi$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ . L'unicité de la limite implique que  $\widehat{\psi} = \Delta \psi$ . ■

Dans la suite, pour simplifier on omettra l'indice  $n$ .

## 7.2.2 Approximation du domaine

Pour remédier au manque de régularité de la solution au voisinage des points  $S_1$  et  $S_2$ , on pose, pour  $\varepsilon > 0$

$$\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \bigcup_{l=1}^2 B(S_l, \varepsilon), \quad \partial \Omega_\varepsilon = \Gamma_D^\varepsilon \cup \Gamma_N^\varepsilon \cup C_\varepsilon^1 \cup C_\varepsilon^2, \quad C_\varepsilon^l = \partial B(S_l, \varepsilon) \cap \Omega, \quad Q_{\varepsilon,T} = \Omega_\varepsilon \times (0, T),$$

$$\Sigma_{\varepsilon,T} = \partial \Omega_\varepsilon \times (0, T), \quad \Sigma_{\varepsilon,T}^D = \Gamma_D^\varepsilon \times (0, T), \quad \Sigma_{\varepsilon,T}^N = \Gamma_N^\varepsilon \times (0, T), \quad C_{\varepsilon,T}^l = C_\varepsilon^l \times (0, T),$$

où  $B(S_l, \varepsilon)$  est la boule de rayon  $\varepsilon$  centrée en  $S_l$ , pour  $l = 1, 2$ .

## 7.2.3 Mise en oeuvre de l'inégalité de Carleman

Nous effectuons le changement de fonction suivant  $\psi_k(x, t) = e^{-s\alpha_k(x,t)}\varphi(x, t)$ , pour  $k = 0, 1$ , où  $\alpha_k$  est définie par (7.1). Notons, que grâce à la définition de  $\alpha_k$ , on a

$$\psi_k(\cdot, 0) = \psi_k(\cdot, T) = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

Par ailleurs, on introduit les deux opérateurs  $P\varphi = -\partial_t \varphi - \Delta \varphi$  et  $L\psi_k = e^{-s\alpha_k} P(e^{s\alpha_k} \psi_k)$ . L'objectif est alors d'obtenir une estimation inférieure de  $\|L\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2$ ; une manière de faire est de décomposer l'opérateur  $L$  en une partie symétrique que l'on note  $M_2$  et en une partie anti-symétrique que l'on note  $M_1$ . Un calcul direct donne

$$L\psi_k = M_1\psi_k + M_2\psi_k = F_k,$$

où

$$\begin{cases} M_1\psi_k = 2s\lambda^2\xi_k|\nabla\beta|^2\psi_k + 2(-1)^k s\lambda\xi_k\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k - \partial_t\psi_k, \\ M_2\psi_k = -s^2\lambda^2|\nabla\beta|^2\xi_k^2\psi_k - \Delta\psi_k - s\partial_t\alpha_k\psi_k, \\ F_k = e^{-s\alpha_k}f - (-1)^k s\lambda\xi_k\Delta\beta\psi_k + s\lambda^2\xi_k|\nabla\beta|^2\psi_k. \end{cases}$$

Pour  $1 \leq i, j \leq 3$ , on note

$$\mathbf{I}_{ij,k} = \langle (M_1\psi_k)_i, (M_2\psi_k)_j \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon,T})},$$

où  $(M_1\psi_k)_i, (M_2\psi_k)_j$  sont respectivement le  $i$ -ème et  $j$ -ième terme de  $M_1\psi_k$  et  $M_2\psi_k$ .

On a

$$\|M_1\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|M_2\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \langle (M_1\psi_k)_i, (M_2\psi_k)_j \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon,T})} = \|F_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2. \quad (7.11)$$

**Lemme 7.2.2.** *Il existe  $s_0, \lambda_0$  et  $C = C(\Omega, \omega)$  tels que pour tout  $s > s_0, \lambda > \lambda_0$ ,*

$$\begin{aligned} & I(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, Q_{\varepsilon,T}) + J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon,T}) \\ & \leq C \left( \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt \right), \end{aligned}$$

où  $I(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, Q_{\varepsilon,T})$  est donné par (7.4),

$$\begin{aligned} J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma) &= 2(-1)^{k+1} \left( (-1)^k 2s\lambda^2 \int_{\Sigma} \xi_k \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} |\nabla\beta|^2 \psi_k d\sigma dt \right. \\ &+ (-1)^k \int_{\Sigma} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \partial_t \psi_k d\sigma dt - s\lambda \int_{\Sigma} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 (\nabla\beta \cdot \nu) d\sigma dt - s^2\lambda \int_{\Sigma} \xi \alpha_t \nabla\beta \cdot \nu |\psi|^2 d\sigma dt \\ &\left. + 2s\lambda \int_{\Sigma} \xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} d\sigma dt + s^3\lambda^3 \int_{\Sigma} \xi_k^3 |\nabla\beta|^2 \nabla\beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma dt \right), \end{aligned}$$

et

$$J(\cdot, \cdot, \cdot, \Sigma_{\varepsilon,T}) = J(\cdot, \cdot, \cdot, \Sigma_{\varepsilon,T}^D) + J(\cdot, \cdot, \cdot, \Sigma_{\varepsilon,T}^N) + J(\cdot, \cdot, \cdot, C_{\varepsilon,T}^1) + J(\cdot, \cdot, \cdot, C_{\varepsilon,T}^2).$$

**Preuve du Lemme 7.2.2 :**

Nous allons estimer les termes  $\mathbf{I}_{ij,k}$ .

On a

$$\mathbf{I}_{11,k} = -2s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^4 \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt,$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{21,k} &= -(-1)^k 2s^3 \lambda^3 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k^3 (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \psi_k \, dx \, dt \\ &= -(-1)^k s^3 \lambda^3 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k^3 \nabla\beta \cdot \nabla(\psi_k)^2 \, dx \, dt. \end{aligned}$$

En faisant une intégration par parties, on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbf{I}_{21,k} &= 3s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^4 \xi_k^3 |\psi_k|^2 \, dx \, dt + (-1)^k s^3 \lambda^3 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k^3 \Delta\beta |\psi_k|^2 \, dx \, dt \\ &\quad + (-1)^k 2s^3 \lambda^3 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \sum_{1 \leq i,j \leq 2} |\psi_k|^2 \xi_k^3 \frac{\partial\beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial\beta}{\partial x_j} \, dx \, dt \\ &\quad - (-1)^k s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\nabla\beta|^2 \nabla\beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt \\ &= I_{21,k}^1 + I_{21,k}^2 + I_{21,k}^3 + I_{21,k}^4. \end{aligned}$$

Notons que,  $I_{11,k} + I_{21,k}^1 \geq 0$ . En utilisant les propriétés (7.2) de  $\beta$ , on obtient

$$s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\nabla\beta|^4 |\psi_k|^2 \, dx \, dt \geq C s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 \, dx \, dt - C s^3 \lambda^4 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 \, dx \, dt$$

où  $C = C(\Omega, \omega)$ .

On garde la première de ces deux dernières intégrales à gauche, la seconde passe à droite.

On a aussi

$$\mathbf{I}_{31,k} = s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k^2 \partial_t \psi_k \psi_k \, dx \, dt = \frac{1}{2} s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k^2 (\psi_k^2)_t \, dx \, dt.$$

Après une intégration par parties, on obtient

$$\mathbf{I}_{31,k} = -s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \partial_t \xi_k \xi_k \psi_k^2 \, dx \, dt.$$

De plus, on a  $\partial_t \xi_k = \frac{2t-T}{t^2(t-T)^2} e^{(-1)^k \lambda \beta(x)} \leq T \xi_k^2$ , alors

$$\mathbf{I}_{31,k} \leq CT s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 \, dx \, dt.$$

Par conséquent, on trouve pour  $\lambda \geq 1$  et  $s \geq C(\Omega, \omega)T$

$$\begin{aligned}
\langle M_1 \psi_k, (M_2 \psi_k)_1 \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon, T})} &= \mathbf{I}_{11, k} + \mathbf{I}_{21, k} + \mathbf{I}_{31, k} \\
&\geq s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt - C s^3 \lambda^4 \int_{\omega' \times (0, T)} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt \\
&\quad - (-1)^k s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}} \xi_k^3 |\nabla \beta|^2 \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma dt.
\end{aligned} \tag{7.12}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{12, k} &= -2s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} |\nabla \beta|^2 \xi_k \Delta \psi_k \psi_k dx dt \\
&= 2s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \nabla(|\nabla \beta|^2 \xi_k \psi_k) \cdot \nabla \psi_k dx dt - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma dt \\
&= 2s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} |\nabla \beta|^2 \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt + 4s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \psi_k \xi_k \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} dx dt \\
&\quad + (-1)^k 2s\lambda^3 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k |\nabla \beta|^2 \psi_k \nabla \beta \cdot \nabla \psi_k dx dt - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma dt \\
&= I_{12, k}^1 + I_{12, k}^2 + I_{12, k}^3 + I_{12, k}^4.
\end{aligned}$$

On a aussi

$$s\lambda^2 \xi_k \psi_k \frac{\partial \beta}{\partial x_i} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \leq C s \lambda^4 \xi_k |\psi_k|^2 + C s \xi_k \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial x_j} \right|^2.$$

Alors

$$I_{12, k}^2 \leq C s \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt + C s \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k \psi_k^2 dx dt,$$

$$I_{12, k}^3 \leq C s^2 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k^2 \psi_k^2 dx dt + C \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} |\nabla \psi_k|^2 dx dt.$$

Par suite, en prenant  $s > CT^2$ , on trouve que

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{12, k} &= I_{12, k}^1 + I_{12, k}^2 + I_{12, k}^3 + I_{12, k}^4 \geq 2s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} |\nabla \beta|^2 \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt - C s^2 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k^2 \psi_k^2 dx dt \\
&\quad - C \int_{Q_{\varepsilon, T}} (s\xi_k + \lambda^2) |\nabla \psi_k|^2 dx dt - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma dt.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{22,k} &= -(-1)^k 2s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \Delta\psi_k \, dx \, dt \\
&= -(-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \, d\sigma \, dt + (-1)^k 2s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \nabla(\xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k)) \cdot \nabla\psi_k \, dx \, dt \\
&= -(-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \, d\sigma \, dt + (-1)^k 2s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \frac{\partial^2\beta}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial\psi_k}{\partial x_i} \frac{\partial\psi_k}{\partial x_j} \, dx \, dt \\
&\quad + 2s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt + (-1)^k s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \nabla\beta \cdot \nabla|\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt \\
&= I_{22,k}^1 + I_{22,k}^2 + I_{22,k}^3 + I_{22,k}^4.
\end{aligned}$$

Notons que  $I_{22,k}^3 \geq 0$  et  $|I_{22,k}^2| \leq Cs\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt$ .

Une intégration par parties dans  $I_{22,k}^4$  conduit aux estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
I_{22,k}^4 &= (-1)^k s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 (\nabla\beta \cdot \nu) \, d\sigma \, dt - (-1)^k s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\psi_k|^2 \nabla \cdot (\xi_k \nabla\beta) \, dx \, dt \\
&= (-1)^k s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 (\nabla\beta \cdot \nu) \, d\sigma \, dt - s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt \\
&\quad - (-1)^k s\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \Delta\beta \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt \\
&= I_{22,k}^{41} + I_{22,k}^{42} + I_{22,k}^{43}.
\end{aligned}$$

De plus, nous avons l'estimation suivante  $|I_{22,k}^{43}| \leq Cs\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt$ .

Par conséquent, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{22,k} &= I_{22,k}^1 + I_{22,k}^2 + I_{22,k}^3 + I_{22,k}^4 \\
&\geq -Cs\lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt - s\lambda^2 \int_{Q_{\hat{a}\hat{\lambda}\hat{\varepsilon},T}} |\nabla\beta|^2 \xi_k |\nabla\psi_k|^2 \, dx \, dt \\
&\quad - s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 (\nabla\beta \cdot \nu) \, d\sigma \, dt - (-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k) \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \, d\sigma \, dt.
\end{aligned}$$

Aussi, on trouve que

$$\mathbf{I}_{32,k} = - \int_{Q_{\varepsilon,T}} \nabla(\partial_t\psi_k) \cdot \nabla\psi_k \, dx \, dt + \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \partial_t\psi_k \, d\sigma \, dt = \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \partial_t\psi_k \, d\sigma \, dt.$$

On pose  $\mathbf{I}_{32,k}^1 = \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \partial_t \psi_k d\sigma dt$ .

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
& \langle M_1 \psi_k, (M_2 \psi_k)_2 \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon,T})} \\
&= \mathbf{I}_{12,k} + \mathbf{I}_{22,k} + \mathbf{I}_{32,k} \\
&\geq -(-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} d\sigma dt + (-1)^k s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 (\nabla \beta \cdot \nu) d\sigma dt \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma dt + \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \partial_t \psi_k d\sigma dt + Cs\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt \\
&\quad - Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt - Cs^2\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^2 \psi_k^2 dx dt - C \int_{Q_{\varepsilon,T}} (s\lambda \xi_k + \lambda^2) |\nabla \psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Pour  $s \geq CT^2$  and  $\lambda \geq 1$ , on trouve que

$$\begin{aligned}
& \langle M_1 \psi_k, (M_2 \psi_k)_2 \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon,T})} \\
&\geq -(-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} d\sigma dt + (-1)^k s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 (\nabla \beta \cdot \nu) d\sigma dt \\
&\quad - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma dt + \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \partial_t \psi_k d\sigma dt + Cs\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt \quad (7.13) \\
&\quad - Cs^2\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^2 \psi_k^2 dx dt - Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Considérons à présent le terme  $\mathbf{I}_{13,k}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{13,k} &= -2s^2\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} |\nabla \beta|^2 \partial_t \alpha_k \xi_k |\psi_k|^2 dx dt \\
&\leq CTs^2\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Ce terme sera absorbé par le terme en  $s^3\lambda^4$  si l'on prend  $\lambda \geq 1$  et  $s \geq CT$ .

De plus, une intégration par parties donne

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_{23,k} &= -(-1)^k 2s^2 \lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \partial_t \alpha_k \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \psi_k \, dx \, dt = -(-1)^k s^2 \lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nabla (|\psi_k|^2) \, dx \, dt \\
&= (-1)^k s^2 \lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \psi_k^2 \nabla \cdot (\partial_t \alpha_k \xi_k \nabla \beta) \, dx \, dt - (-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt \\
&= -(-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt + s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \partial_t \alpha_k |\nabla \beta|^2 \xi_k \psi_k^2 \, dx \, dt \\
&+ (-1)^k s^2 \lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \psi_k^2 \nabla \partial_t \alpha_k \cdot \nabla \beta \, dx \, dt + (-1)^k s^2 \lambda \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \psi_k^2 \partial_t \alpha_k \Delta \beta \, dx \, dt.
\end{aligned}$$

Comme  $\partial_t \alpha_k \leq C \xi_k^2 T$  et  $|\nabla \partial_t \alpha_k| \leq C \lambda T \xi_k^2$ , alors

$$\mathbf{I}_{23,k} \geq -C s^2 \lambda^2 T \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 \, dx \, dt - (-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt.$$

On pose  $\mathbf{I}_{23,k}^1 = -(-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt$ .

Finalement, on trouve

$$\mathbf{I}_{33,k} = s \int_{Q_{\varepsilon,T}} \partial_t \alpha_k \partial_t \psi_k \psi_k \, dx \, dt = -\frac{1}{2} s \int_{Q_{\varepsilon,T}} \partial_{tt} \alpha_k \psi_k^2 \, dx \, dt.$$

Comme  $\partial_{tt} \alpha_k \leq C \xi_k^3 T^2$ , alors

$$|\mathbf{I}_{33,k}| \leq C s T^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 \, dx \, dt.$$

Nous déduisons, pour  $s \geq CT$  et  $\lambda \geq C$ , l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
\langle M_1 \psi_k, (M_2 \psi_k)_3 \rangle_{L^2(Q_{\varepsilon,T})} &= \mathbf{I}_{13,k} + \mathbf{I}_{23,k} + \mathbf{I}_{33,k} \\
&\geq -(-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 \, d\sigma \, dt - C s^2 \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 \, dx \, dt.
\end{aligned} \tag{7.14}$$

De (7.12), (7.13) et (7.14), on obtient

$$\begin{aligned}
(M_1\psi_k, M_2\psi_k)_{L^2(Q_{\varepsilon,T})} &\geq Cs^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + Cs\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt \\
&- (-1)^k s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\nabla\beta|^2 \nabla\beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma dt - 2s\lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} |\nabla\beta|^2 \psi_k d\sigma dt \\
&- (-1)^k 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \nabla\beta \cdot \nabla\psi_k \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} d\sigma dt + (-1)^k s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \nabla\beta \cdot \nu |\nabla\psi_k|^2 d\sigma dt \\
&+ \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \frac{\partial\psi_k}{\partial\nu} \partial_t \psi_k d\sigma dt - (-1)^k s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon,T}} \xi_k \partial_t \alpha_k \nabla\beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma dt \\
&- Cs^3\lambda^4 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt - Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

Moyennant l'inégalité (7.11), on trouve

$$\begin{aligned}
&\|M_1\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|M_2\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt \\
&+ 2\left(\mathbf{I}_{21,k}^4 + \mathbf{I}_{12,k}^4 + \mathbf{I}_{22,k}^1 + \mathbf{I}_{22,k}^{41} + \mathbf{I}_{32,k}^1 + \mathbf{I}_{23,k}^1\right) \\
&\leq C\left(\|F_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s^3\lambda^3 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + s\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt\right) \\
&\leq C \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt + Cs^2\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^2 |\psi_k|^2 dx dt + Cs^3\lambda^4 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt \\
&+ Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
&\|M_1\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + \|M_2\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt \\
&+ 2\left(\mathbf{I}_{21,k}^4 + \mathbf{I}_{12,k}^4 + \mathbf{I}_{22,k}^1 + \mathbf{I}_{22,k}^{41} + \mathbf{I}_{32,k}^1 + \mathbf{I}_{23,k}^1\right) \leq C \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt \\
&+ Cs^3\lambda^4 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi |\nabla\psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned}$$

(7.15)

Il nous faut une estimation des intégrales de  $|\Delta\psi_k|^2$  et  $|\partial_t\psi_k|^2$  dans le membre de gauche de la dernière inégalité. Pour cela, revenons à la définition de  $M_1\psi_k$  et  $M_2\psi_k$

$$\begin{cases} \partial_t\psi_k &= -M_1\psi_k + 2s\lambda^2 |\nabla\beta|^2 \xi_k\psi_k + (-1)^k 2s\lambda\xi_k (\nabla\beta \cdot \nabla\psi_k), \\ \Delta\psi_k &= -M_2\psi_k - s^2\lambda^2 |\nabla\beta|^2 \xi_k^2\psi_k - s\partial_t\alpha_k\psi_k. \end{cases}$$

En intégrant sur  $Q_{\varepsilon,T}$  et en tenant compte que  $\|s^{-1}\xi_k^{-1}\|_{\infty} \leq 1$  pour  $s \geq CT^2$ , on montre que

$$\begin{aligned} s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t\psi_k|^2 dx dt &\leq C(\|M_1\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt + s\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k \psi_k^2 dx dt), \\ s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\Delta\psi_k|^2 dx dt &\leq C(\|M_2\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt + sT^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt). \end{aligned}$$

Ou encore

$$\begin{aligned} s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t\psi_k|^2 dx dt &\leq C(\|M_1\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt), \\ s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\Delta\psi_k|^2 dx dt &\leq C(\|M_2\psi_k\|_{L^2(Q_{\varepsilon,T})}^2 + s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt). \end{aligned} \tag{7.16}$$

En combinant (7.16) avec (7.15), on obtient

$$\begin{aligned} &s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t\psi_k|^2 dx dt + s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\Delta\psi_k|^2 dx dt + s^3\lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt \\ &+ s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt + 2\left((-1)^k \mathbf{I}_{21}^4 + \mathbf{I}_{12}^4 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^{41} + \mathbf{I}_{32}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{23}^1\right) \\ &\leq C \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt + Cs^3\lambda^4 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt + Cs\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt \end{aligned} \tag{7.17}$$

pour  $\lambda > C(\Omega, \omega')$  et  $s > CT^2$ .

Nous éliminons maintenant la dernière intégrale de l'inégalité (7.17). Pour ce faire, nous introduisons une fonction  $\theta = \theta(x)$  telle que

$$\theta \in C_c^2(\omega), \theta \equiv 1 \text{ dans } \omega' \text{ et } 0 \leq \theta \leq 1.$$

On a alors

$$s\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt \leq s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \theta \xi_k |\nabla\psi_k|^2 dx dt.$$

En intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt &\leq -s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \theta \xi_k \Delta \psi_k \psi_k dx dt - s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k (\nabla \theta \cdot \nabla \psi_k) \psi_k dx dt \\
-s\lambda^3 \int_{\omega \times (0,T)} \theta \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \psi_k dx dt. &
\end{aligned} \tag{7.18}$$

En utilisant l'inégalité de Young, on obtient pour  $\varepsilon = \varepsilon(\Omega, \omega) > 0$  et  $\lambda \geq 1$

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \theta \xi_k \Delta \psi_k \psi_k dx dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} s^{-1} \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^{-1} |\Delta \psi_k|^2 dx dt + Cs^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt, \\
s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k (\nabla \theta \cdot \nabla \psi_k) \psi_k dx dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt + Cs\lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k |\psi_k|^2 dx dt, \\
s\lambda^3 \int_{\omega \times (0,T)} \theta \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \psi_k dx dt &\leq \frac{\varepsilon}{2} s\lambda^2 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt + Cs\lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k |\psi_k|^2 dx dt.
\end{aligned} \tag{7.19}$$

En choisissant  $\varepsilon$  assez petit, nous obtenons des inégalités (7.18) et (7.19), l'inégalité suivante

$$\begin{aligned}
s\lambda^2 \int_{\omega' \times (0,T)} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt &\leq \varepsilon \cdot s^{-1} \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^{-1} |\Delta \psi_k|^2 dx dt + C(s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt \\
&\quad + s\lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k |\psi_k|^2 dx dt).
\end{aligned}$$

Nous remplaçons ceci dans (7.17), il vient

$$\begin{aligned}
&s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt + s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\Delta \psi_k|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt \\
&+ s\lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt + 2 \left( (-1)^k \mathbf{I}_{21}^4 + \mathbf{I}_{12}^4 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^{41} + \mathbf{I}_{32}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{23}^1 \right) \\
&\leq C \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt + Cs^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{7.20}$$

pour  $\lambda > C(\Omega, \omega)$  et  $s > C(\Omega, \omega)T^2$ .

Nous concluons la preuve en posant

$$\begin{aligned}
I(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, Q_{\varepsilon, T}) &= s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k^{-1} (|\partial_t \psi_k|^2 + |\Delta \psi_k|^2) dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k^3 \psi_k^2 dx dt \\
&\quad + s \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon, T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt, \\
J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon, T}) &= 2 \left( (-1)^k \mathbf{I}_{21}^4 + \mathbf{I}_{12}^4 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{22}^{41} + \mathbf{I}_{32}^1 + (-1)^k \mathbf{I}_{23}^1 \right).
\end{aligned}$$

■

## 7.2.4 Termes de bord et passage à la limite en $\varepsilon$

Dans ce paragraphe, nous allons démontrer que toutes les intégrales sur  $\Sigma_{\varepsilon, T}$  peuvent être simplifiées. Nous traiterons tout d'abord les termes du bord Dirichlet et Neumann en utilisant les propriétés de  $\beta$  et les conditions au bord de  $u$  sur  $\Gamma_D^\varepsilon$  et  $\Gamma_N^\varepsilon$ . Ensuite, nous examinerons les termes sur  $C_\varepsilon^l$ ,  $l = 1, 2$  en utilisant un argument de densité.

(i) **Termes sur  $\Sigma_{\varepsilon, T}^D$  et  $\Sigma_{\varepsilon, T}^N$ .**

Comme  $\beta$  est nulle sur  $\Gamma$  alors  $\alpha_0 = \alpha_1$ ,  $\xi_0 = \xi_1$  et  $\psi_0 = \psi_1$ . Nous déduisons donc les relations suivantes sur  $\Gamma_D^\varepsilon$  et  $\Gamma_N^\varepsilon$  :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \quad \text{sur } \Gamma_D^\varepsilon, \\
\frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} &= -\frac{\partial \psi_1}{\partial \nu}, \quad |\nabla \psi_0| = |\nabla \psi_1| \quad \text{sur } \Gamma_N^\varepsilon.
\end{aligned} \tag{7.21}$$

Par conséquent, en utilisant les relations (7.21), on obtient

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^1 J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon, T}^D) \\
&= 4s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \left( -\xi_0 (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} + \xi_1 (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \right) d\sigma dt \\
&\quad + 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \nabla \beta \cdot \nu (\xi_0 |\nabla \psi_0|^2 - \xi_1 |\nabla \psi_1|^2) d\sigma dt \\
&= 4s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \left( -\xi_0 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right|^2 + \xi_1 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \right|^2 \right) d\sigma dt \\
&\quad + 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \frac{\partial \beta}{\partial \nu} (\xi_0 \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right|^2 - \xi_1 \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \right|^2) d\sigma dt \\
&= -2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \xi_0 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left| \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt + 2s\lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^D} \xi_1 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left| \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \right|^2 d\sigma dt \\
&= 0,
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^1 J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, \Sigma_{\varepsilon, T}^N) \\
= & 2s^3 \lambda^3 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} (-\xi_0^3 |\psi_0|^2 + \xi_1^3 |\psi_1|^2) |\nabla \beta|^2 \nabla \beta \cdot \nu d\sigma dt \\
+ & 4s \lambda^2 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} (-\xi_0 \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} |\psi_0| - \xi_1 \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} |\psi_1|) |\nabla \beta|^2 d\sigma dt \\
+ & 2s \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} (\xi_0 |\nabla \psi_0|^2 - \xi_1 |\nabla \psi_1|^2) (\nabla \beta \cdot \nu) d\sigma dt \\
+ & 4s \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} \left( -\xi_0 (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_0) \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} + \xi_1 (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_1) \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \right) d\sigma dt \\
+ & 2 \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} \left( \frac{\partial \psi_0}{\partial \nu} \partial_t \psi_0 + \frac{\partial \psi_1}{\partial \nu} \partial_t \psi_1 \right) d\sigma dt \\
- & 2s^2 \lambda \int_{\Sigma_{\varepsilon, T}^N} (\xi_0 |\psi_0|^2 \partial_t \alpha_0 - \xi_1 |\psi_1|^2 \partial_t \alpha_1) \nabla \beta \cdot \nu d\sigma dt \\
= & 0.
\end{aligned}$$

(ii) **Termes sur  $C_{\varepsilon, T}^l$ .** Les fonctions singulières sont définies comme suit : Au point  $S_k$ , nous définissons des coordonnées locales tel que le demi-axe  $Ox$  soit tangent à  $\Gamma$  dans le sens positif et le demi-axe  $Oy$  rentre dans  $\Omega$ . En effet,  $S_1$  (resp.  $S_2$ ) représente le point d'intersection associé au passage du bord  $\Gamma_D$  (resp.  $\Gamma_N$ ) au bord  $\Gamma_N$  (resp.  $\Gamma_D$ ) conformément à la figure suivante :

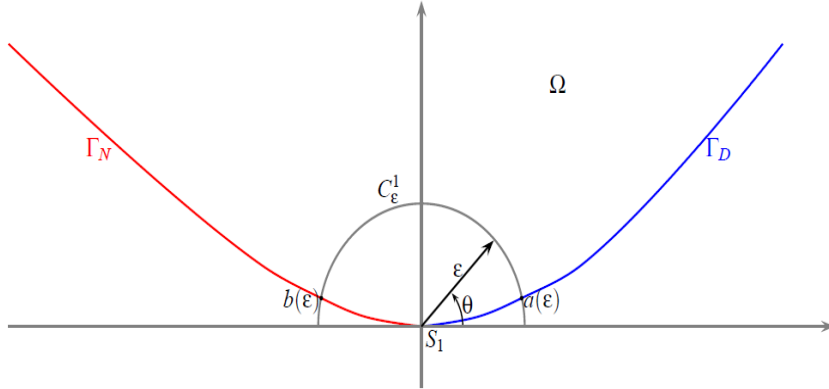


FIGURE 7.1 –

Notons que lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0,  $a(\varepsilon)$  tend vers 0 et  $b(\varepsilon)$  tend vers  $\pi$  et on a

$$u_{S_1} = \sqrt{r_1} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right), \quad u_{S_2} = \sqrt{r_2} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right).$$

Nous utiliserons le résultat de densité suivant, cf. [44] :

**Lemme 7.2.3.** *L'espace  $D(-\Delta) \cap C^1(\overline{\Omega}) \oplus \text{span}\{r^{\frac{1}{2}} \sin \frac{\theta}{2}, r^{\frac{1}{2}} \cos \frac{\theta}{2}\}$  est dense dans  $D(-\Delta)$ .*

Cela veut dire que l'on peut approcher toute fonction  $u \in D(-\Delta)$  par des fonctions de la forme

$$u = u_R + C u_S \quad \text{où} \quad u_R(\cdot, t) \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \text{pour tout} \quad t \in (0, T).$$

L'avantage de ce dernier résultat est que le gradient de  $u_R$  est borné dans  $\overline{\Omega}$ . Par conséquent, pour tout  $t \in [0, T]$ , nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} u_R(\cdot, t) &= O(1), \quad |\nabla u_R| = O(1), \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}. \\ u_S(\cdot, t) &= O(\sqrt{r}), \quad |\nabla u_S| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}. \end{aligned}$$

On déduit que pour tout  $t \in [0, T]$

$$u(\cdot, t) = O(\sqrt{r}), \quad |\nabla u| = O\left(\frac{1}{\sqrt{r}}\right), \quad \text{dans} \quad \overline{\Omega}.$$

En utilisant le lemme précédent et la continuité de  $\alpha_k$  et  $\xi_k$ , nous démontrons que tous les termes sur  $C_\varepsilon^l$ ,  $l = 1, 2$  tendent vers zéro.

Les coordonnées polaires locales nous permettent d'écrire les égalités suivantes : on a pour  $l = 1, 2$

$$\int_{C_\varepsilon^l} \xi_k^3 |\nabla \beta|^2 \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon \xi_k^3 |\nabla \beta|^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} |\psi_k|^2 d\theta.$$

Comme  $\xi_k^3 |\nabla \beta|^2 \frac{\partial \beta}{\partial r} |\psi_k|^2 = O(1)$  alors  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k^3 |\nabla \beta|^2 \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma = 0$ .

$$\int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma = \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial r} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\theta.$$

Comme  $\frac{\partial \psi_k}{\partial r} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right)$ ,  $\psi_k = O(1)$  et  $\xi_k |\nabla \beta|^2 = O(1)$  alors

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} |\nabla \beta|^2 \psi_k d\sigma = 0.$$

Avec des arguments similaires, on obtient

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^l} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \partial_t \psi_k d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon \frac{\partial \psi_k}{\partial r} \partial_t \psi_k d\theta = 0.$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \alpha_t \nabla \beta \cdot \nu |\psi_k|^2 d\sigma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a(\varepsilon)}^{b(\varepsilon)} \varepsilon \xi_k \alpha_t \frac{\partial \beta}{\partial r} |\psi_k|^2 d\theta = 0.$$

Les deux termes restants dans  $\sum_{k=0}^1 J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, C_{\varepsilon, T}^l)$ ,  $l = 1, 2$ , demandent plus d'attention.

En effet,  $|\nabla \psi_k|^2 = O(\frac{1}{\varepsilon})$  et  $(\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} = O(\frac{1}{\varepsilon})$ . Par conséquent, nous ne pouvons pas passer à la limite en  $\varepsilon$ . Nous procédons donc de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
& 2(-1)^{k+1} \left( 2s\lambda \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k (\nabla \beta \cdot \nabla \psi_k) \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} d\sigma - s\lambda \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 (\nabla \beta \cdot \nu) d\sigma \right) \\
&= 2(-1)^{k+1} s\lambda \left( 2 \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \left( \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right|^2 + \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right) d\sigma - \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left( \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right|^2 + \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right|^2 \right) d\sigma \right) \\
&= 2(-1)^{k+1} s\lambda \left( \int_{C_\varepsilon^l} \xi_k \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left( \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} \right|^2 - \left| \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \right|^2 \right) + 2\xi_k \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_k}{\partial \tau} \frac{\partial \psi_k}{\partial \nu} d\sigma \right) \\
&= s\lambda L_\varepsilon(\psi_k, \psi_k).
\end{aligned}$$

Pour  $k = 0, 1$ , posons  $\psi_k = \psi_{k,R} + c\psi_{k,S}$  et considérons  $L(\psi_k, \psi_k)$  comme étant une forme quadratique en  $\psi_k$ . Il vient

$$L_\varepsilon(\psi_k, \psi_k) = L_\varepsilon(\psi_{k,R}, \psi_{k,R}) + 2cL_\varepsilon(\psi_{k,R}, \psi_{k,S}) + c^2L_\varepsilon(\psi_{k,S}, \psi_{k,S}).$$

En utilisant le Lemme 7.2.3, on peut vérifier que

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(\psi_{k,R}, \psi_{k,R}) = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(\psi_{k,R}, \psi_{k,S}) = 0.$$

Il reste à calculer, pour  $k = 0, 1$

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(\psi_{k,S}, \psi_{k,S}).$$

On a

$$L_\varepsilon(\psi_{k,S}, \psi_{k,S}) = 2(-1)^{k+1} \left( \int_{C_\varepsilon^l} e^{-s\alpha_k} \xi_k \left\{ \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left( \left| \frac{\partial u_S}{\partial \nu} \right|^2 - \left| \frac{\partial u_S}{\partial \tau} \right|^2 \right) + 2 \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \frac{\partial u_S}{\partial \tau} \frac{\partial u_S}{\partial \nu} \right\} d\sigma \right).$$

Soit  $l = 1$  alors  $u_S = \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}$ .

Nous estimons explicitement la quantité à intégrer sur  $C_\varepsilon^1$ , à savoir

$$\begin{aligned}
Q &= 2 \frac{\partial \beta}{\partial \nu} \left( \left| \frac{\partial u_S}{\partial \nu} \right|^2 - \left| \frac{\partial u_S}{\partial \tau} \right|^2 \right) + 4 \frac{\partial \beta}{\partial \tau} \frac{\partial u_S}{\partial \tau} \frac{\partial u_S}{\partial \nu} \\
&= 2 \frac{\partial \beta}{\partial r} \left( \left| \frac{\partial u_S}{\partial r} \right|^2 - \left| \frac{1}{r} \frac{\partial u_S}{\partial \theta} \right|^2 \right) + 4 \frac{1}{r^2} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \frac{\partial u_S}{\partial \theta} \frac{\partial u_S}{\partial r}.
\end{aligned}$$

Un calcul direct nous permet d'avoir le résultat suivant

$$\begin{cases} \frac{\partial u_S}{\partial r} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \sin \theta/2, \\ r^{-1} \frac{\partial u_S}{\partial \theta} &= \frac{1}{2\sqrt{r}} \cos \theta/2. \end{cases}$$

Par suite, on obtient

$$\begin{aligned}
Q &= -\frac{1}{2r} \left( \frac{\partial \beta}{\partial r} \cos \theta - \frac{1}{r} \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \sin \theta \right) = -\frac{1}{2r^2} \left( r \frac{\partial \beta}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial \beta}{\partial \theta} \sin \theta \right) \\
&= -\frac{1}{2r^2} \left( r \frac{\partial \beta}{\partial x} \cos^2 \theta + r \frac{\partial \beta}{\partial y} \cos \theta \sin \theta + r \frac{\partial \beta}{\partial x} \sin^2 \theta - r \frac{\partial \beta}{\partial y} \cos \theta \sin \theta \right) \\
&= -\frac{1}{2r} \frac{\partial \beta}{\partial x}.
\end{aligned}$$

De la même façon, pour  $l = 2$  i.e  $u_S = \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}$ , on montre que  $Q = -\frac{1}{2r} \frac{\partial \beta}{\partial x}$ .  
Par conséquent, on trouve

$$\begin{aligned}
L_\varepsilon(\psi_{k,S}, \psi_{k,S}) &= -\frac{(-1)^{k+1}}{2\varepsilon} \left( \int_{C_\varepsilon^l} e^{-s\alpha_k} \xi_k \frac{\partial \beta}{\partial x} d\sigma \right) \\
&= \frac{1}{2\varepsilon} \int_{C_\varepsilon^l} \frac{\partial \beta}{\partial x} (e^{-s\alpha_0} \xi_0 - e^{-s\alpha_1} \xi_1) d\sigma.
\end{aligned}$$

À la limite, on aura

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} L_\varepsilon(\psi_{k,S}, \psi_{k,S}) = \int_0^\pi \frac{\partial \beta}{\partial x} (e^{-s\alpha_0} \xi_0 - e^{-s\alpha_1} \xi_1) d\theta = 0$$

car

$$(e^{-s\alpha_0} \xi_0 - e^{-s\alpha_1} \xi_1) \rightarrow 0 \text{ quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Finalement, on conclut que  $\sum_{k=0}^1 J(\psi_k, \xi_k, \alpha_k, C_{\varepsilon,T}^l) \rightarrow 0$ , quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

## 7.2.5 Conclusion

Les étapes ci-dessus et l'inégalité (7.20) entraînent l'estimation suivante

$$\begin{aligned}
&s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt + s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\Delta \psi_k|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt \\
&+ s \lambda^2 \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k |\nabla \psi_k|^2 dx dt \leq C \int_{Q_{\varepsilon,T}} e^{-2s\alpha_k} |f|^2 dx dt + C s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi_k^3 |\psi_k|^2 dx dt,
\end{aligned} \tag{7.22}$$

pour  $\lambda > C(\Omega, \omega)$  et  $s > C(\Omega, \omega)T^2$ .

Par ailleurs, on a

$$s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt = s^{-1} \int_{Q_T} 1_{\Omega_\varepsilon} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt.$$

Comme  $\xi_k \in W^{2,\infty}(Q_T)$ , d'après le théorème de Lebesgue, nous pouvons obtenir par passage à la limite :

$$s^{-1} \int_{Q_{\varepsilon,T}} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt \rightarrow s^{-1} \int_{Q_T} \xi_k^{-1} |\partial_t \psi_k|^2 dx dt \quad \text{quand } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Tous les termes restants dans l'inégalité (7.22) sont traités comme précédemment. Finalement, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} & s^{-1} \int_{Q_T} (\xi_0^{-1} |\partial_t \psi_0|^2 + \xi_1^{-1} |\partial_t \psi_1|^2) dx dt + s^{-1} \int_{Q_T} (\xi_0^{-1} |\Delta \psi_0|^2 + \xi_1^{-1} |\Delta \psi_1|^2) dx dt \\ & + s^3 \lambda^4 \int_{Q_T} (\xi_0^3 \psi_0^2 + \xi_1^3 \psi_1^2) dx dt + s \lambda^2 \int_{Q_T} (\xi_0 |\nabla \psi_0|^2 + \xi_1 |\nabla \psi_1|^2) dx dt \\ & \leq C \int_{Q_T} (e^{-2s\alpha_0} + e^{-2s\alpha_1}) |f|^2 dx dt + C s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} (\xi_0^3 |\psi_0|^2 + \xi_1^3 |\psi_1|^2) dx dt \end{aligned}$$

pour  $\lambda > C(\Omega, \omega)$  et  $s > C(\Omega, \omega)T^2$ .

Par définition, on a  $\xi_1 \leq \xi_0$ ,  $e^{-2s\alpha_1} \leq e^{-2s\alpha_0}$ . On note  $\psi_0$ ,  $\xi_0$  et  $\alpha_0$  respectivement par  $\psi$ ,  $\xi$  et  $\alpha$ , on conclut la preuve et on obtient l'inégalité de Carleman souhaitée :

$$\begin{aligned} & s^{-1} \int_{Q_T} \xi^{-1} |\partial_t \psi|^2 dx dt + s^{-1} \int_{Q_T} \xi^{-1} |\Delta \psi|^2 dx dt + s^3 \lambda^4 \int_{Q_T} \xi^3 \psi^2 dx dt + s \lambda^2 \int_{Q_T} \xi |\nabla \psi|^2 dx dt \\ & \leq C \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} |f|^2 dx dt + C s^3 \lambda^4 \int_{\omega \times (0,T)} \xi^3 |\psi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

■

## Chapitre 8

# Contrôlabilité à zéro de l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes

Ce chapitre concerne l'étude de la contrôlabilité à zéro, par un contrôle localisé sur un sous domaine  $\omega$ , de l'équation de la chaleur linéaire. Pour démontrer ce résultat, on utilise l'inégalité de Carleman donnée par le Théorème 7.1.1.

Nous nous intéressons au problème de contrôlabilité à zéro suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) - \Delta u(x, t) + a(x, t)u(x, t) = v(x, t)1_\omega & \text{dans } Q_T, \\ u = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (8.1)$$

avec  $a \in L^\infty(Q_T)$ ,  $u_0 \in L^2(\Omega)$ . Pour cela, nous introduisons le système adjoint qui lui est associé, à savoir :

$$\begin{cases} -\partial_t \varphi(x, t) - \Delta \varphi(x, t) + a(x, t)\varphi(x, t) = 0 & \text{dans } Q_T, \\ \varphi = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ \varphi(x, T) = \varphi_0(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (8.2)$$

La proposition suivante donne une inégalité d'observabilité pour le système (8.2) :

**Proposition 8.0.1.** *Supposons que  $a \in L^\infty(Q_T)$  et  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ . Il existe une constante positive  $C$  qui dépend uniquement de  $\Omega$ ,  $\omega$ ,  $a$ ,  $T$  telle que*

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq K \int_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt, \quad (8.3)$$

où  $K = \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + T\|a\|_\infty\right)\right]$  et  $\varphi$  est la solution du système (8.2).

**Preuve de la Proposition 8.0.1 :**

Le Théorème 7.1.1 fournit une première estimation du type (7.3), avec  $f$  remplacée par  $a\varphi$  à droite, i.e

$$C \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} |a\varphi|^2 dx dt.$$

Mais ce terme peut être absorbé par le membre de gauche en prenant  $s$  assez grand. Donc, en choisissant  $s \geq C(\Omega, \omega)T^2 \|a\|_\infty^{2/3}$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} (s\xi)^{-1} (|\partial_t \varphi|^2 + |\Delta \varphi|^2) + \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} s\lambda^2 \xi |\nabla \varphi|^2 dx dt + \int_{Q_T} e^{-2s\alpha} s^3 \lambda^4 \xi^3 |\varphi|^2 dx dt \\ & \leq C \int_{\omega \times (0, T)} s^3 \lambda^4 \xi^3 e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Si on fixe  $\lambda = \lambda_0$  dans l'inégalité ci-dessus, on obtient

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha} s^3 \xi^3 |\varphi|^2 dx dt \leq C \int_{\omega \times (0, T)} s^3 \xi^3 e^{-2s\alpha} |\varphi|^2 dx dt.$$

Nous allons procéder en deux parties.

**Partie 1.** D'une part, nous avons pour tout  $(x, t) \in Q_T$ ,

$$\xi^3(x, t) \geq \frac{1}{t^3(T-t)^3} \quad \text{et} \quad \xi(x, t) \leq \frac{e^{2\lambda m \|\beta\|_\infty}}{t(T-t)}.$$

Il existe donc une constante  $C = C(\Omega, \omega) > 0$  telle que

$$\int_{Q_T} e^{-2s\alpha} \frac{|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} dx dt \leq C \int_{\omega \times (0, T)} e^{-2s\alpha} \frac{|\varphi|^2}{t^3(T-t)^3} dx dt. \quad (8.4)$$

D'autre part, il existe deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que

$$c_1 \leq e^{2\lambda m \|\beta\|_\infty} - e^{\lambda(m\|\beta\|_\infty + \beta(x))} \leq c_2,$$

il vient alors

$$\frac{-2s_1 c_2}{t(T-t)} \leq -2s_1 \alpha \leq \frac{-2s_1 c_1}{t(T-t)}.$$

De plus, on a

$$\begin{aligned} \frac{16}{9T^2} & \leq \frac{1}{t(T-t)} \leq \frac{16}{T^2} \quad \text{pour} \quad t \in (T/4, 3T/4), \\ \frac{1}{t(T-t)} & \geq \frac{1}{2T^2} \quad \text{pour} \quad t \in ]0, T[. \end{aligned}$$

On peut maintenant déduire les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} e^{-2s_1 \alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} & \geq \frac{1}{T^6} \exp\left(-2C(\Omega, \omega)\left(1 + \frac{1}{T}\right)\right) \quad \text{dans} \quad (T/4, 3T/4) \times \Omega, \\ e^{-2s_1 \alpha} t^{-3} (T-t)^{-3} & \leq \frac{1}{T^6} \exp\left(-2C(\Omega, \omega)\left(1 + \frac{1}{T}\right)\right) \quad \text{dans} \quad (0, T) \times \Omega. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Nous combinons (8.4) et (8.5) pour obtenir

$$\int_{\Omega \times (T/4, 3T/4)} |\varphi|^2 dx dt \leq C(\Omega, \omega, T, a) \int_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt, \quad (8.6)$$

où  $C(\Omega, \omega, T, a)$  est de la forme  $\exp\left(C(\Omega, \omega)\left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3}\right)\right)$ .

**Partie 2.** Le caractère dissipatif de  $\varphi$  donne l'inégalité

$$\|\varphi(\cdot, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \exp(CT\|a\|_\infty) \|\varphi(\cdot, t)\|_{L^2(\Omega)}^2, \quad \forall t \in (T/4, 3T/4). \quad (8.7)$$

Finalement, grâce aux inégalités (8.6) et (8.7) combinées, on obtient l'inégalité d'observabilité souhaitée. ■

**Théorème 8.0.1.** *L'observabilité du système (8.2) implique la contrôlabilité à zéro du système (8.1).*

**Preuve du Théorème 8.0.1 :** Nous allons procéder en deux étapes. D'abord, on construit un contrôle  $v_\varepsilon \in L^2(\omega \times (0, T))$  avec  $\varepsilon > 0$ , ce qui conduit à la contrôlabilité approchée de (8.1). Ensuite, on passe à la limite lorsque  $\varepsilon$  tend vers zéro. En d'autres termes, nous démontrons la contrôlabilité approchée avec des estimations uniformes sur le contrôle approché lorsque  $\varepsilon$  tend vers 0, ce qui va entraîner la contrôlabilité à zéro.

**Étape 1 : Résultat de contrôlabilité approchée.**

Soit  $u_0 \in L^2(\Omega)$  et  $\varepsilon > 0$  donné. On définit la fonctionnelle  $J$  suivante :

$$J : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$J(\varphi_0) = \frac{1}{2} \int_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt + \varepsilon \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), u_0)_{L^2(\Omega)}, \quad (8.8)$$

où  $\varphi$  est la solution du problème adjoint (8.2) avec la donnée initiale  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ .

On vérifie aisément que  $\varphi_0 \mapsto J(\varphi_0)$  est continue et strictement convexe dans  $L^2(\Omega)$ . De plus,  $J$  est coercive. En effet, on montre que

$$\liminf_{\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_0)}{\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \varepsilon.$$

Pour ce faire, on procède comme [35]. Soit  $\{\varphi_j^0\}$  dans  $L^2(\Omega)$  avec  $\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ . On pose

$$\widehat{\varphi}_j^0 = \frac{\varphi_j^0}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}}, \quad \widehat{\varphi}_j = \frac{\varphi_j}{\|\varphi_j\|_{L^2(\Omega)}}.$$

$\widehat{\varphi}_j$  est la solution de (8.2) avec la donnée initiale normalisée  $\widehat{\varphi}_j^0$ .

On a

$$\frac{J(\varphi_j^0)}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} = \frac{\|\varphi_j^0\|}{2} \int_{\omega \times (0, T)} |\widehat{\varphi}_j|^2 dx dt + \varepsilon \|\widehat{\varphi}_j^0\|_{L^2(\Omega)} + (\widehat{\varphi}_j(0), u_0)_{L^2(\Omega)}. \quad (8.9)$$

On distingue les deux cas suivants :

$$\text{Cas 1 : } \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega \times (0, T)} |\widehat{\varphi}_j|^2 dx dt > 0.$$

$$\text{Cas 2 : } \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega \times (0, T)} |\widehat{\varphi}_j|^2 dx dt = 0.$$

Dans le premier cas, comme  $\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)} \rightarrow \infty$ , le premier terme dans (8.9) tend vers  $+\infty$  et les deux autres sont bornés. Par conséquent,

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_j^0)}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} = +\infty.$$

On analyse maintenant le second cas. On a

$$\int_{\omega \times (0, T)} |\varphi|^2 dx dt \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} \int_{\omega \times (0, T)} |\widehat{\varphi}_j|^2 dx dt = 0.$$

Donc, de l'inégalité d'observabilité (8.3), on déduit que  $\varphi(0) = 0$ . Par conséquent,  $\widehat{\varphi}_j(0) \rightarrow 0$  faiblement dans  $L^2(\Omega)$  alors  $\int_{\Omega} \widehat{\varphi}_j(0) u_0 dx$  tends aussi vers zéro.

Comme  $\|\widehat{\varphi}_j^0\|_{L^2(\Omega)} = 1$  alors

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \frac{J(\varphi_j^0)}{\|\varphi_j^0\|_{L^2(\Omega)}} \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} [\varepsilon + \int_{\Omega} \widehat{\varphi}_j(0) u_0 dx] = \varepsilon.$$

Ce qui conclut la preuve.

Par conséquent,  $J$  atteint son minimum en un unique  $\varphi_\varepsilon^0 \in L^2(\Omega)$  que l'on associe à la solution  $\varphi_\varepsilon$  i.e

$$\begin{cases} J(\varphi_\varepsilon^0) = \min_{\varphi_0 \in L^2(\Omega)} J(\varphi_0). \\ J(\varphi_\varepsilon^0) < J(\varphi_0), \quad \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega), \varphi_0 \neq \varphi_\varepsilon^0. \end{cases}$$

Ce minimum donne un contrôle  $v_\varepsilon$  pour notre problème tel que  $v_\varepsilon = \varphi_\varepsilon 1_\omega$ . Soit  $u_\varepsilon$  la solution de (8.1) associée au contrôle  $v_\varepsilon$

Soit  $u_1$  l'état final de la solution de (8.1) avec un contrôle nul. Notons que l'unique cas intéressant est quand  $\|u_1\|_{L^2(\Omega)} > \varepsilon$ , ce qui est équivalent à  $\varphi_\varepsilon^0 \neq 0$ . En effet, lorsque  $\|u_1\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$ , on peut prendre  $u = 0$  pour obtenir la contrôlabilité approchée de (8.1) avec un contrôle nul (cf. Proposition 3.1, Remark 3.1, [35]).

Sous ces hypothèses, on peut dériver la fonctionnelle  $J$  en  $\varphi_\varepsilon^0$  et obtenir une condition nécessaire pour que  $J$  atteigne un minimum en  $\varphi_\varepsilon^0$ , à savoir

$$\int_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi dx dt + \varepsilon \left( \frac{\varphi_\varepsilon^0}{\|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi_0 \right)_{L^2(\Omega)} + (\varphi(0), u_0)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad (8.10)$$

pour tout  $\varphi_0 \in L^2(\Omega)$ .

En utilisant ce dernier résultat et (8.3) pour  $\varphi_0 = \varphi_\varepsilon^0$ , on obtient l'estimation suivante :

$$\|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq \sqrt{C} \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

Soit maintenant  $u_\varepsilon$  solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon + a(x, t)u_\varepsilon = v_\varepsilon 1_\omega & \text{dans } Q_T, \\ u_\varepsilon = 0 & \text{sur } \Sigma_T^D, \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \nu} = 0 & \text{sur } \Sigma_T^N, \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (8.11)$$

Montrons que  $\|u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon$ .

En multipliant la première équation de (8.11) par  $\varphi$  et en intégrant par parties, on trouve

$$\int_{Q_T} \partial_t u_\varepsilon \varphi dx dt - \int_{Q_T} \Delta u_\varepsilon \varphi dx dt + \int_{Q_T} a u_\varepsilon \varphi dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} v_\varepsilon \varphi dx dt$$

Ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [u_\varepsilon(T)\varphi(T) - u_\varepsilon(0)\varphi(0)] dx - \int_{Q_T} u_\varepsilon \partial_t \varphi dx dt - \int_{Q_T} u_\varepsilon \Delta \varphi dx dt \\ & + \int_{Q_T} a u_\varepsilon \varphi dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} v_\varepsilon \varphi dx dt. \end{aligned}$$

Ou encore

$$(u_\varepsilon(T), \varphi_0)_{L^2(\Omega)} - (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)} + \int_{Q_T} u_\varepsilon (-\partial_t \varphi - \Delta \varphi + a \varphi) dx dt = \int_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi dx dt.$$

On obtient donc l'égalité suivante

$$(u_\varepsilon(T), \varphi_0)_{L^2(\Omega)} - (u_0, \varphi(0))_{L^2(\Omega)} = \int_{\omega \times (0, T)} \varphi_\varepsilon \varphi dx dt.$$

En utilisant (8.10), on aura

$$(u_\varepsilon(T), \varphi_0)_{L^2(\Omega)} = -\varepsilon \left( \frac{\varphi_\varepsilon^0}{\|\varphi_\varepsilon^0\|_{L^2(\Omega)}}, \varphi_0 \right)_{L^2(\Omega)}.$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz nous permet de déduire l'inégalité suivante

$$\left| (u_\varepsilon(T), \varphi_0)_{L^2(\Omega)} \right| \leq \varepsilon \|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall \varphi_0 \in L^2(\Omega).$$

Finalement, comme on a

$$\|u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{\varphi_0 \neq 0} \frac{|(u_\varepsilon(T), \varphi_0)_{L^2(\Omega)}|}{\|\varphi_0\|_{L^2(\Omega)}} \leq \varepsilon$$

Alors on déduit que

$$\|u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \varepsilon. \quad (8.12)$$

**Étape 2 : Passage à la limite et résultat de contrôlabilité à zéro.**

Comme la suite  $\{v_\varepsilon\}$  est bornée dans  $L^2(\omega \times (0, T))$ , on peut en extraire une sous suite, que l'on note encore  $\{v_\varepsilon\}$ , faiblement convergente vers un certain  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$ . Comme  $u_\varepsilon$  vérifie (8.11), nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} \max_{t \in (0, T)} \|u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \|u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} &\leq C \left( \|v_\varepsilon\|_{L^2(\omega \times (0, T))} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq C \|u_0\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Grâce à ces estimations, on peut supposer, après extraction éventuelle d'une sous suite que,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ faiblement dans } L^2(0, T; H^1(\Omega)) \cap H^1(0, T; H^{-1}(\Omega)), \quad (8.13)$$

Donc, on a, pour tout  $\Psi \in H^1(\Omega)$

$$\begin{aligned} (u_\varepsilon, \Psi) &\rightarrow (u, \Psi) \\ (\nabla u_\varepsilon, \nabla \Psi) &\rightarrow (\nabla u, \nabla \Psi) \\ \left\langle \frac{du_\varepsilon}{dt}, \Psi \right\rangle_{H^{-1}, H^1} &\rightarrow \left\langle \frac{du}{dt}, \Psi \right\rangle_{H^{-1}, H^1}. \end{aligned}$$

Par passage à la limite, on obtient que

$$\left\langle \frac{du}{dt}, \Psi \right\rangle_{H^{-1}, H^1} + \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \Psi dx + \int_{\Omega} au\Psi dx = \int_{\omega} v\Psi dx.$$

donc  $u$  est solution du problème (8.1).

Finalement,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon(T)\|_{L^2(\Omega)} \leq 0$$

ce qui donne  $u(T) = 0$ .

■

Le théorème suivant donne le résultat de contrôlabilité à zéro de (8.1).

**Théorème 8.0.2.** *Le système (8.1) est contrôlable à zéro avec un contrôle  $v \in L^2(\omega \times (0, T))$  qui vérifie*

$$\|v\|_{L^2(\omega \times (0, T))} \leq C(\Omega, \omega, T, a) \|u_0\|_{L^2(\Omega)},$$

où  $C(\Omega, \omega, T, a) = \exp\left[C\left(1 + \frac{1}{T} + \|a\|_\infty^{2/3} + T\|a\|_\infty\right)\right]$ .

## **Conclusion générale**

Faisons tout d'abord une synthèse de cette initiation à la recherche.

D'un point de vue personnel, je pense que cette thèse m'a permis de développer des compétences scientifiques et techniques spécifiques au sujet qui m'a été proposé, mais également de développer des compétences plus globales telles que l'autonomie, l'adaptabilité et l'esprit d'analyse.

D'un point de vue plus technique, les deux parties ont été pour moi l'occasion de bien m'immerger dans les inégalités de Carleman mais aussi d'approfondir les outils d'analyse fonctionnelle nécessaires.

Dans la première partie, la problématique était de démontrer un résultat de stabilité Lipschitz pour deux coefficients d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles.

Nous avons tout d'abord démontré l'existence et l'unicité des solutions pour le système d'équations aux dérivées partielles dont on a étudié, par la suite, le problème inverse. Dans le chapitre 3, nous avons démontré un résultat de stabilité pour l'une des équations du système considéré, il s'agit de l'équation de transport. Cela nous a essentiellement permis d'identifier les fonctions poids avec lesquelles il faut établir les inégalités de Carleman. Celles-ci ne peuvent pas être singulières en temps. Ce choix là nous a mené à effectuer une troncature en temps lors de l'étude du problème inverse et ainsi à considérer des hypothèses de régularité fortes.

Cependant de nombreuses questions concernant les systèmes d'équations aux dérivées partielles restent ouvertes, notamment sur les systèmes hyperboliques-paraboliques. Toutefois, il est clair que notre méthodologie révèle certaines limites et ne s'applique pas au système initial quasi-linéaire. En effet, dans le système considéré, le champ de vecteurs  $A$  ne dépend que de la variable spatiale et une des hypothèses sur la fonction poids est liée à ce champ de vecteurs. On ne peut donc pas envisager d'utiliser cette méthode pour le système initial quasi-linéaire. Une des voies possibles pour traiter le système initial est de se ramener à un système parabolique en rajoutant un terme de diffusion en  $\varepsilon \Delta u$  dans l'équation hyperbolique. Dans ce cas, il faut établir des inégalités de Carleman pour ce nouveau système, où les fonctions poids introduites dépendront bien sûr de  $\varepsilon$ . En suivant la dépendance des constantes en  $\varepsilon$ , il faudra ensuite passer à la limite.

D'autres perspectives sont envisageables d'un point de vue numérique. En effet, il serait intéressant de mettre en place une méthode de reconstruction de coefficients, basée sur le résultat de stabilité.

Concernant la seconde partie, il s'agissait de démontrer un résultat de contrôlabilité à zéro pour l'équation de la chaleur avec des conditions au bord mixtes à travers une inégalité de Carleman. Comme on l'a mentionné dans l'introduction, ce type de conditions génère un comportement singulier de la solution. De ce fait, nous avons tout d'abord présenté des résultats préliminaires sur l'existence et l'unicité de cette solution. Par ailleurs, la connaissance explicite des singularités permet, par la suite, de traiter les intégrales de bord de l'inégalité de Carleman. Le chapitre 8 donne le résultat principal de la deuxième partie. Les techniques utilisées sont très fréquentes dans l'étude de la contrôlabilité à zéro pour les équations paraboliques linéaires. Des perspectives sont envisageables dans le

cadre de cette partie. En premier lieu, ce résultat ouvre une porte à une généralisation à la dimension supérieure. Il serait aussi intéressant de prouver les résultats de cette partie dans le cas d'un polygone convexe avec des conditions au bord Neumann ou mixtes.

# Bibliographie

- [1] P. ALBANO, D. TATARU, *Carleman estimates and boundary observability for a coupled parabolic-hyperbolic system*, Electron. J. Differ. Equ. (22), pp. 1-15, 2000.
- [2] T. ALI ZIANE, H. OUZZANE, O. ZAIR, *A Carleman estimate for the two dimensional heat equation with mixed boundary conditions*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I, 2013.
- [3] F. AMMAR-KHODJA, A. BENABDALLAH, M. GONZÁLEZ-BURGOS, L. DE TERESA, *Recent results on the controllability of coupled parabolic problems : A survey*, AIMS' Journals, 2013.
- [4] G. BAL, *Inverse Transport Theory and Applications*, Inverse Problems 25, 053001, 48 pp, 2009.
- [5] G. BAL, A. JOLIVET, *Stability for time-dependent inverse transport*, SIAM J. Math. Anal. 42, 679-700, 2010.
- [6] G. BAL, A. JOLIVET, *Time-dependent angularly averaged inverse transport*, Inverse Problems 25, 053001, 2009.
- [7] G. BAL, K. REN, A. H. HIELSCHER, *Transport- and diffusion-based optical tomography in small domains : A comparative study*, Appl. Optics, 27, pp. 6669-6679, 2007.
- [8] V. BARBU, *Controllability of parabolic and Navier-Stokes equations*, Sci. Math. Jpn, 56 :143-211, (2002).
- [9] C. BARDOS, *Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels ; théorèmes d'approximation ; application à l'équation de transport*, Ann. scient. Éc. Norm. Sup., série. 4, t. 3, p. 185 à 233, 1970.
- [10] L. BAUDOIN, M. DE BUHAN, S. ERVEDOZA, *Global Carleman estimates for waves and application*, Preprint, <http://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00633562/fr/>, 2011.
- [11] L. BAUDOIN, J. P. PUEL, *Uniqueness and stability in an inverse problem for the Schrödinger equation*, Inverse Problems 18 1537-1554, 2002.
- [12] A. H. BELGHAZI, F. SMADHI, N. ZAIDI, O. ZAIR, *Carleman inequalities for the two-dimensional heat equation in singular domains*, Mathematical Control and Related Fields., 2(4) ;331-359, 2012.
- [13] M. BELLASSOUED, M. YAMAMOTO, *Carleman estimate with second large parameter for second order hyperbolic operators in a Riemannian manifold and applications in thermoelasticity cases*, Applicable Analysis, Vol. 91, No. 1, 35-67, 2012.
- [14] A. BENABDALLAH, M. CRISTOFOL, P. GAITAN, M. YAMAMOTO, *Inverse problem for a parabolic system with two components by measurements of one component*, Applicable Analysis, 1-28, 2008.

- [15] A. BENABDALLAH, P. GAITAN, J. LE ROUSSEAU, *Stability of discontinuous diffusion coefficients and initial conditions in an inverse problem for the heat equation*, SIAM J. Control Optim., 46, 1849-1881, 2007.
- [16] R. BEY, J. P. LOHÉAC, M. A. MOUSSAOUI, *Singularities of the solution of a mixed problem for a general second order elliptic equation and boundary stabilization of the wave equation*, J.Math. Pures Appl., 78,1043-1067, 1999.
- [17] L. BOURGEOIS, *A stability estimate for ill-posed elliptic Cauchy problems in a domain with corners*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser I., 345 :385-390, 2007.
- [18] F. BOYER, P. FABRIE, *Mathematical tools for the study of the incompressible Navier-Stokes equations and related models*, Applied Mathematical Sciences, vol. 183, Springer, 2013.
- [19] H. BRÉZIS, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Masson, 1987.
- [20] A. L. BUKHGEIM, *Volterra equations and inverse problems*, Inverse and Ill-Posed Problems Series (Utrecht :VSP), 1999.
- [21] A. L. BUKHGEIM, M. V. KLIBANOV, *Uniqueness in the large of a class of multidimensional inverse problems*, Soviet Math. Dokl. 17 244, 1981.
- [22] N. BURQ, *Contrôle de l'équation des ondes dans des ouverts contenant des coins*, Bull. Soc. math/ Franc, 126, 601-637, 1998.
- [23] T. CARLEMAN, *Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux dérivées partielles à deux variables indépendantes*, Ark. Mat., Astr. Fys. 26, no. 17, 9 pp, 1939.
- [24] K. M. CASE, P.F. ZWEIFEL, *Linear Transport Theory*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1967.
- [25] M. CHOULLI, *Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques*, Mathématiques et Applications, Vol. 65, Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [26] M. CHOULLI, P. STEFANOV, *Inverse scattering and inverse boundary value problems for the linear Boltzmann equation*, Comm. P. D. E. 21, 763-785, 1996.
- [27] P. CORNILLEAU, L. ROBBIANO, *Carleman estimates for the zaremba boundary condition and stabilization of waves*, arXiv :1110.5164v2., 1-37, 2012.
- [28] M. CRISTOFOL, P. GAITAN, H. RAMOUL, *Inverse problems for a 2X2 reaction-diffusion system using a Carleman estimate with one observation*, Inverse Problems, 22, 1561-1573, 2006.
- [29] M. CRISTOFOL, P. GAITAN, H. RAMOUL, M. YAMAMOTO, *Identification of two coefficients with data of one component for a nonlinear parabolic system*, Applicable Analysis, 1-9, 2012.
- [30] M. DAUGE, *Régularités et singularités des solutions des problèmes aux limites elliptiques sur des domaines singuliers de type à coin (Thèse d'état, Nantes, 1986)*.
- [31] R. DAUTRAY, J. L. LIONS, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol.9, Springer Verlag, Berlin, 1993.
- [32] B. DAVISON, J. B. SYKES, *Neutron Transport Theory*, Oxford University Press, 1957.

- [33] A. DUBOVA, A. OSSES, J. P. PUEL, *Exact controllability to trajectoires for semilinear heat equations with discontinuous diffusion coefficients*, (French) [ESAIM Control Optim. Calc. Var.], 8, 621-661, 2002.
- [34] C. EVANS, *Partial differential equations, Graduate Studies in Mathematics*, 19, AMS, 1998.
- [35] C. FABRE, J.P. PUEL, E. ZUAZUA, *Approximate controllability of the semilinear heat equation*, Proc. Royal Soc. Edinburgh, 125A, 31-61, 1995.
- [36] H. O. FATTORINI, D. L. RUSSELL, *Exact controllability theorems for linear parabolic equations in one space dimension*, Arch. Rational Mech. Anal., 43 :272-292, 1971.
- [37] H. O. FATTORINI, D. L. RUSSELL, *Uniform bounds on biorthogonal functions for real exponentials with an application to the control theory of parabolic equations*, Quart. Appl. Math., 32 :45-69, 1974/75.
- [38] E. FERNANDEZ-CARA, M. GONZALEZ-BURGOS, S. GUERRERO, J. P. PUEL, *Null controllability of the heat equation with boundary Fourier conditions : the linear case*, ESAIM Control Optim. Calc. Var., 12(3) :442-465, 2006.
- [39] E. FERNANDEZ-CARA, S. GUERRERO, *Global Carleman inequalities for parabolic systems and applications to controllability*, SIAM J. CONTROL OPTIM., 45, No. 4 :1395-1446, 2006.
- [40] E. FERNANDEZ-CARA, E. ZUAZUA, *The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case*, Adv. Diff. Equ, 5 :456-514, 2000.
- [41] A. V. FURSIKOV, O. IMANUVILOV, *Controllability of evolution equations. Lecture Notes Series*, 34, Seoul National University, Research Institute of Mathematics, Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [42] P. GAITAN, H. OUZZANE, *Inverse problem for a free transport equation using Carleman estimates*, Applicable Analysis, <http://dx.doi.org/10.1080/00036811.2013.816686>, 2013.
- [43] A. GERISCH, M. KOTSCHOTE, R. ZACHER, *Well-posedness of a quasilinear hyperbolic-parabolic system arising in mathematical biology*, Nonlinear differ. equ. appl. 14, 5934, 2007.
- [44] P. GRISVARD, *Contrôlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités*, J.Math. Pures Appl., 68(2) : 215-259, 1989.
- [45] P. GRISVARD, *Singularities in boundary value problems*, Springer-Verlag, 1992.
- [46] A. HEIBIG, M. A. MOUSSAOUI, *Exact controllability of the wave equation for domains with slits and for mixed boundary conditions*, Discrete and continuous dynamical systems, 2, 367-386, 1996.
- [47] L. HÖRMANDER, *The analysis of linear partial differential operators*, volume IV. Springer-Verlag, 1985.
- [48] O. YU. IMANUVILOV, V. ISAKOV, M. YAMAMOTO, *An inverse problem for the dynamical Lamé system with two sets of boundary data*, Comm. Pure Appl. Math., 56, 1366-1382, 2003.
- [49] O. YU. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO, *Lipschitz stability in inverse parabolic problems by the Carleman estimate*, Inverse Problems, 14, 1229-1245, 1998.

- [50] O. YU. IMANUVILOV, M. YAMAMOTO, *Global Lipschitz stability in an inverse hyperbolic problem by interior observations*, Inverse Problems, 17, 717-728, 2001.
- [51] V. ISAKOV, N. KIM, *Carleman estimates with second large parameter for second order operators*, in Sobolev Spaces in Mathematics. III : Applications in Mathematical Physics, V. Isakov, ed., Springer-Verlag, New York, NY, pp. 135-159, 2009.
- [52] M. V. KLIBANOV, *Carleman estimates for global uniqueness, stability and numerical methods for coefficient inverse problems*, accepted by J. Inverse and Ill-Posed Problems, available online of this journal as Ahead of Print, DOI 10.1515/jiip-2012-0072.
- [53] M. V. KLIBANOV, *Inverse problems in the large and Carleman bounds*, English translation, Differential Equations, 20, 755-760, 1984.
- [54] M. V. KLIBANOV, *Inverse problems and Carleman estimates*, Inverse Problems 8, 575-596, 1992.
- [55] M. V. KLIBANOV, S. E. PAMYATNYKH, *Lipschitz stability of a non-standard problem for the non-stationary transport equation via Carleman estimate*, Inverse Problems, 22, pp. 881-890, 2006.
- [56] M. V. KLIBANOV, S. E. PAMYATNYKH, *Global uniqueness for a coefficient inverse problem for the non-stationary transport equation via Carleman estimate* J. Math. Anal. Appl. 343, 352, 2008.
- [57] M. V. KLIBANOV, A. A. TIMONOV, *Carleman estimates for coefficient inverse problems and numerical applications*, Inverse and Ill-Posed Problems Series (Utrecht : VSP), 2004.
- [58] M. V. KLIBANOV, M. YAMAMOTO, *Exact controlability for the non stationary transport equation*, SIAM J. Control and Optimization, 46, 2071-2195, 2007.
- [59] M. KHARROUBI, *Mathematical Topics in Neutron Transport Theory*, World Scientific, Singapore, 1997.
- [60] L. D. LANDAU, E. M. LIFSHITZ, *Course of Theoretical Physics*, Volume 10. Physical Kinetics, Pergamon Press, New York, 1981.
- [61] G. LEBEAU, L. ROBBIANO, *Contrôle exacte de l'équation de la chaleur* (French), *Comm. Partial Differ. Equat.*, 20 :335-356, 1995.
- [62] J. LE ROUSSEAU, G. LEBEAU, ON CARLEMAN ESTIMATIONS FOR ELLIPTIC AND PARABOLIC OPERATORS. APPLICATIONS TO UNIQUE CONTINUATION AND CONTROL OF PARABOLIC EQUATIONS.
- [63] J. L. LIONS, E. MAGENES, *Problèmes aux limites non homogènes*, (3 Volumes), Dunod, 1968.
- [64] M. MACHIDA, M. YAMAMOTO, *The Lipschitz stability for a coefficient inverse problem for the radiative transport equation*, <http://arxiv.org/abs/1212.6730>, 2012.
- [65] M. A. MOUSSAOUI, B. K. SADALLAH, *Régularité des coefficients de propagation de singularités pour l'équation de la chaleur dans un ouvert plan polygonal*, C. R. Acad. Sc. Paris, t. 293, Série I- 297, 1981.
- [66] S. NICAISE, *Exact controllability of a pluridimensional coupled problem*, Rev. Math. Univ. Complut. Madrid, 5, 91-135, 1992.

- [67] A. I. PRILEPKO, A. L. IVANKOV, *Inverse problems for the determination of a coefficient and the right side of a non-stationary multivelocity transport equation with overdetermination at a point* Diff. Eqns 21 88, 1985.
- [68] J. P. PUEL, M. YAMAMOTO, *Smoothing property in multidimensional inverse hyperbolic problem : applications to uniqueness and stability*, J. Inverse and Ill-Posed Problems 4, 283-296, 1996.
- [69] P. STEFANOV, *Inverse Problems in Transport Theory, in Inside out : inverse problems and applications*, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 47, Cambridge Univ. Press, Cambridge, pp.111-131, 2003.
- [70] D. L. RUSSEL, *A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations*, Studies Appl.Math, 52 : 189-211, 1973.
- [71] E. SHAMIR, *Regularity of mixed second order elliptic problems*, Israel Math, J., 6 :150-168, 1968.
- [72] A. TAMASAN, *An inverse boundary value problem in two-dimensional transport. Inverse Problems*, v. 18, No. 1, pp. 209-219, 2002.
- [73] B. WU, J. LIU, *Conditional stability and uniqueness for determining two coefficients in a hyperbolic parabolic system*, Inverse Problems, 27 075013, 2011.
- [74] M. YAMAMOTO, *Carleman estimates for parabolic equations and applications*, Inverse Problems, 25, 2009.
- [75] G. YUAN, M. YAMAMOTO, *Lipschitz stability in the determination of the principal part of a parabolic equation*, ESAIM : Control Optim.Calc.Var 15 525-54, 2009.
- [76] X. ZHANG, *Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities*, SIAM J. Control Optim., 39 (3), 812-834 electronic, 2000.
- [77] E. ZUAZUA, *Finite dimensional null controllability for the semilinear heat equation*, J. Math. pures et appl., 76, 570-594, 1997.
- [78] E. ZUAZUA, *Approximate controllability of the semilinear heat equation : boundary control in Computational Science for the 21st Century*, M. O. Bristeau et al. eds, John Wiley and Sons, pp. 738-747, 1997.