

N°d'ordre : 39/2012-M/EL

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté d'Electronique et d'Informatique



MEMOIRE

Pour l'obtention du Diplôme

de MAGISTER en Electronique

Spécialité : Systèmes Radiofréquences et Micro-ondes

Par : Mr GACEB YUCEF

Thème :

**Modélisation des circuits passifs hyperfréquences à
base de substrats à ferrite en configuration
multicouche.**

Soutenu publiquement le 24/05/2012, devant le jury composé de

Mr S. CHITROUB	Professeur	à l'USTHB	Président
Mr M.L. TOUNSI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Directeur de MÉMOIRE
Mr K. MAZIGHI	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur
Mr M. TELLACHE	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur

Sommaire

Sommaire

Table des Matières

Introduction Générale	1
 Chapitre 1 : Propagation des ondes électromagnétiques dans les ferrites	
1.1. Introduction.....	3
1.2. Définition des ferrites	3
1.3. Structure des ferrites	3
1.3.1. Structure spinelle	4
1.3.2 Structure grenat.....	4
1.4. Les différents types des ferrites	5
1.4.1. Les ferrites spinelles	5
1.4.2. Les ferrites grenat	5
1.4.3. Les hexaferrites (hexagonaux ferrimagnétiques)	5
1.5. Fabrication des ferrites.....	6
1.6 Propagation des ondes électromagnétiques dans les ferrites	6
1.6.1 Forme du tenseur de perméabilité	7
1.6.1.1. Cas de la polarisation selon (oz)	7
1.7.2 Phénomènes d'interaction onde-ferrite.....	10
1.7.2.1 L'effet Faraday	10
1.7.2.2 L'effet de déplacement du champ	11
1.8. Propriétés des ferrites.....	11
1.8.1 Propriétés électriques.....	11
1.8.2. Propriétés magnétiques.....	11
1.9. Effet de non réciprocité.....	12
1.10. Application des ferrites dans le domaine des hyperfréquences	12
1.11 Résonance gyromagnétique	13

1.12. Aimantation à saturation	17
1.13. Température de compensation	18
1.14. Température de Curie	18
1.15 Champ d'anisotropie H_a	19
1.16. Pertes dans les ferrites en hyperfréquences	19
1.16.1. Les pertes diélectriques	19
1.16.2. Les pertes magnétiques.....	19
1.16.2.1 Pertes magnétiques à bas niveau de puissance hyperfréquence.....	20
1.16.2.2 Pertes magnétiques à fort niveau de puissance hyperfréquence	20
1.17. Conclusion	20

Chapitre 2 : Analyse des circuits à ferrite par la méthode S.D.A indépendamment de la direction de polarisation du champ magnétique statique

2.1. Introduction.....	21
2.2. Description de la méthode SDA	21
2.3. Structure étudiée	23
2.4. Equations de Maxwell.....	23
2.5. Equations de propagation du champ EM dans la couche à ferrite.....	24
2.5.1. Cas de la polarisation d'un champ magnétique statique selon (ox).....	25
2.5.2. Cas de la polarisation selon (oy)	27
2.5.3. Cas de la polarisation selon (oz).....	29
2.5.4. Résolution des équations d'onde	31
2.6. Equation de propagation dans les couches diélectriques anisotropes.....	31
2.6.1. Axe optique parallèle à (ox)	31
2.6.2. Axe optique parallèle à (oz).....	32
2.6.3. Axe optique parallèle à (oy)	32
2.6.4. Résolution des équations d'onde	33

2.7. Calcul des composantes tangentielles de champ électromagnétique en fonction des composantes normales.....	34
2.7.1. Cas du ferrite	34
2.7.1.1. Cas de la polarisation selon (ox)	34
2.7.1.2. Polarisations selon (oy)	37
2.7.1.3. Polarisations selon (oz)	38
2.7.2. Cas des couches diélectriques anisotropes	40
2.7.2.1. Axe optique parallèle à (ox).....	40
2.7.2.2. Axe optique parallèle à (oy).....	40
2.7.2.3. Axe optique parallèle à (oz)	40
2.8. Processus de calcul des fonctions de Green.....	41
2.8.1. Technique Immittance approach	41
2.8.1.1. Cas du ferrite	42
2.8.1.2. Cas des couches diélectriques anisotropes	42
2.8.2. Calcul des composantes du champ EM dans les nouveaux repères	44
2.8.2.1. Cas des couches diélectriques anisotropes	44
2.8.2.2. Cas de la couche à ferrite	45
2.8.3. Détermination des admittances équivalentes ramenées vers les interfaces diélectriques anisotropes.....	47
2.8.3.1. Axe optique parallèle à (ox) et (oz).....	47
2.8.3.2. Axe optique parallèle à (oy).....	49
2.8.4. Application des conditions de continuité	50
2.9. Evaluation de la matrice de Green	51
2.10. Conclusion	59

Chapitre 3 : Programmation par la méthode SDA : Résultats et Interprétations

3.1. Introduction.....	60
3.2. Détermination de la constante de phase.....	60

3.2.1. Description de programme principal	60
3.2.2. Organigramme global	63
3.2.3. Résultats numériques obtenus et commentaires	64
3.3. Conclusion	71
Conclusion générale	72
Bibliographie.....	73
Annexe A : Fabrication des ferrites	75
Annexe B : Vue d'ensemble sur les notions de magnétisme.....	77
Annexe C : Calcul du Tenseur de perméabilité	88
Annexe D : Expressions des composantes tangentielles de champ EM en fonction des composantes normales	93
Annexe E : Calcul des admittances équivalentes dans les couches diélectriques anisotropes	100
Annexe F : Application de la méthode de Galerkin.....	118

Abréviations

EM	Electromagnétique
L.S.E	Longitudinal Section Electric
L.S.M	Longitudinal Section Magnetic
MADS	Méthode d'Approche dans le Domaine Spectral
MMIC	Monolithic Microwave Integrated Circuits
SDA	Spectral Domain Approach

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1	: Structure spinelle	4
Figure 1.2	: Structure grenat	4
Figure 1.3	: Schéma d'un circulateur à n voies	13
Figure 1.4	: Représentation de l'orientation des vecteurs H_0 , M_s et h	14
Figure 1.5	: Variations des parties, réelle et imaginaire de la perméabilité complexe μ_+ en fonction du champ statique appliqué lorsque la polarisation du champ hyperfréquence est positive	16
Figure 1.6	: Variations des parties réelle et imaginaire de la perméabilité complexe μ_+ en fonction de la fréquence pour un champ statique appliqué $H_0 = fr/\gamma$	16
Figure 1.7	: Comportement des matériaux magnétiques en fonction de la température	18
Figure 1.8	: Champ critique hyperfréquence en fonction du champ statique de polarisation	20
Figure 2.1	: Circuit planaire multicouche incluant une couche à ferrite	23
Figure 2.2	: Repère d'Itoh	41
Figure 2.3	: Surface de séparation entre deux milieux diélectriques	50
Figure 3.1	: Organigramme de calcul du diagramme de dispersion	63
Figure 3.2	: Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x}$ de la couche à ferrite	65
Figure 3.3	: Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{y}$ de la couche à ferrite	66
Figure 3.4	: Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{z}$ de la couche à ferrite	67
Figure 3.5	: Caractéristiques de dispersion d'un guide d'onde chargé de ferrite pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{y}$ de la couche à ferrite	68
Figure 3.6	: Variation des caractéristiques de propagation en fonction de la largeur de fente pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x}$ de la couche à ferrite	69
Figure 3.7	: Variation de la constante de propagation normalisée en fonction de la fréquence pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x}$ de la couche à ferrite	69
Figure 3.8	: Variation de déphasage $\Delta\beta$ en fonction de la fréquence pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x}$ de la couche à ferrite	70

LISTE DES TABLEAUX

Tableau 1.1	: Différentes formes du tenseur de perméabilité	10
--------------------	---	----

Introduction

Introduction générale

Les applications actuelles des micro-ondes ont toujours nécessité le développement de nouveaux systèmes électroniques pour les besoins de la miniaturisation et une augmentation des fonctionnalités afin de satisfaire les demandes de marché (faible coût, meilleure qualité). Ces performances sont atteintes en intégrant l'ensemble des fonctions sur un ou deux circuits intégrés spécifiques. Cela a donné naissance à la technologie MMIC (circuits intégrés monolithiques micro-ondes) constituant l'approche la plus sophistiquée de la microélectronique, son importance économique et industrielle est devenue considérable.

La technologie microélectronique est caractérisée par une augmentation de la complexité pour satisfaire les exigences de qualité et de robustesse des circuits. Les concepteurs sont amenés à augmenter la fréquence afin de permettre la réduction de la taille des composants d'où l'appariation des dispositifs hyperfréquences.

Selon la fonction visée, les dispositifs sont réciproques (filtre, déphaseur pour antenne à balayage, etc) ou non réciproques (circulateur, isolateur, etc) utilisés dans des systèmes de télécommunications. Ces derniers fonctionnent grâce à un substrat à ferrite soumis à un champ magnétique statique ou alternatif. Tenant compte de leurs propriétés physiques et mécaniques uniques et intéressantes, les matériaux à ferrite sont plus utilisés ces dernières années. Des recherches systématiques sur les ferrites ont été menées depuis longtemps. Ces milieux présentent des compositions chimiques diverses, conduisant à des propriétés magnétiques variées, allant de celles des matériaux magnétiques doux à celles des aimants permanents.

Le caractère faiblement conducteur des substances ferrimagnétiques permet une pénétration d'une onde haute fréquence (onde centimétrique ou millimétrique) dans le matériau et autorise une forte interaction entre l'onde et l'aimantation interne à la matière. La possibilité de contrôler la propagation de l'onde dans un tel milieu par l'application d'un champ magnétique statique ou alternatif, a permis la réalisation de plusieurs dispositifs hyperfréquences indispensables à la réalisation de fonctions de traitement du signal, radar, télécommunication par satellites, compatibilité électromagnétique, etc.

De plus, le ferrite peut présenter différentes caractéristiques selon les directions, cette propriété s'appelle l'anisotropie.

La conception et le développement de ces circuits aux hyperfréquences à base de ferrite se heurtent malheureusement à une multitude de problèmes liés à la complexité de leurs structures ainsi à la nature hybride du champ électromagnétique mis en jeu ce qui nécessite de trouver des solutions précises aux caractéristiques de ces circuits.

Plusieurs méthodes numériques sont exploitées dans ce domaine, parmi lesquelles la méthode d'approche dans le domaine spectrale (S.D.A) qui est l'une des plus performantes et très adaptée à l'étude des circuits planaires micro-ondes.

L'objet de ce projet consiste en l'étude en mode hybride de l'influence de l'anisotropie magnétique des ferrites sur les paramètres de dispersion des circuits passifs micro-ondes en configuration multicouche, caractérisés par des tenseurs de perméabilité, variable selon les directions de polarisation du champ magnétique statique (tangentielle ou normale).

Ce manuscrit est composé de trois chapitres :

Le chapitre 1 est dédié à la propagation des ondes électromagnétiques dans les ferrites.

Le chapitre 2 présente l'analyse des circuits à ferrite par la méthode S.D.A indépendamment de la direction de polarisation du champ magnétique statique.

Le chapitre 3 concernera la programmation de la méthode SDA, les résultats obtenus et leurs interprétations.

Chapitre 1
*Propagation des ondes
électromagnétiques dans les ferrites*

1.1. Introduction

Les ferrites ont été étudiés depuis les années 1940, et sans cesse améliorés. C'est à partir de cette année que Louis Néel [1] a commencé à élaborer sa théorie de ferrimagnétisme qu'il a appliqué à l'ensemble des ferrites avec succès. Les ferrites sont les matériaux de référence pour les dispositifs non-réciproques en hyperfréquences.

Ce sont des oxydes magnétiques obtenus par des procédés céramiques, et dont la structure cristalline définit le type. Les différents types de ferrites sont les spinelles, les grenats, et les ferrites hexagonaux (ou hexaferrites). Les ferrites de type grenats sont les plus utilisés en hyperfréquences, leurs pertes magnétiques sont généralement plus faibles que celles des spinelles, mais nécessitent une polarisation externe (aimant ou bobine) pour fonctionner efficacement.

Les principaux inconvénients des ferrites résident dans la mise en œuvre de la technologie céramique, la difficulté d'intégration et dans la nécessité d'une polarisation magnétique extérieure.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les ferrites, leurs propriétés électriques et magnétiques, la propagation des ondes électromagnétique y afférant ainsi que ses applications dans le domaine des hyperfréquences.

1.2. Définition des ferrites

Les ferrites sont des oxydes métalliques complexes ou des oxydes magnétiques constitués d'atomes de fer (Fe) séparés par des atomes d'oxygène (O) de formule chimique générale $M-O(Fe_2O_3)_n$, où n est un entier et M un cation divalent généralement métallique (Zi, Ba, Ni,...). Du point de vue chimique, les ferrites sont des oxydes de fer associés à des oxydes de métaux, tels que le manganèse, le magnésium, le Zinc, le nickel, le cobalt.

Du point de vue électrique, un ferrite est un diélectrique ferromagnétique à faibles pertes, ce qui signifie que les ondes électromagnétiques qui les traversent s'atténuent peu.

1.3. Structure des ferrites

La structure cristalline des ferrites est constituée d'ions d'oxygène et d'ions métalliques. Les ions métalliques ont deux types de distribution correspondant l'une à la structure spinelle, l'autre à la structure antispinelle ou structure inverse. La majorité des ferrites utilisées aux hyperfréquences ont une structure antispinelle.

1.3.1. Structure spinelle

La structure spinelle présente deux types de sites interstitiels : les sites tétraédriques ou sites A dans lesquels le cation est entouré de quatre ions d'oxygène et les sites octaédriques ou sites B dans lesquels le cation est entouré de six ions d'oxygène (voir figure 1.1).

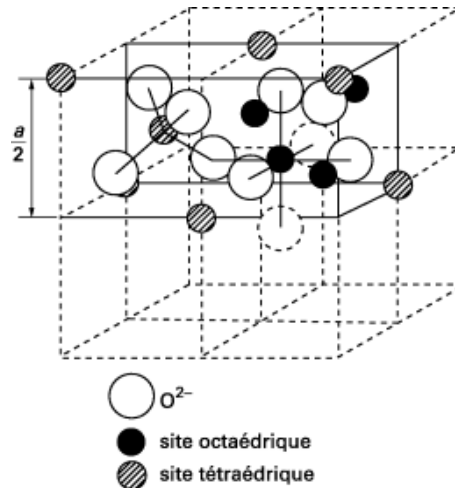


Figure 1.1 Structure spinelle

1.3.2 Structure grenat

La structure cristallographique des grenats est également cubique mais plus complexe que la structure spinelle. Aux sites tétraédriques et octaédriques, il faut ajouter des sites dodécaédriques correspondant à un environnement de 8 ions oxygènes (figure 1.2).

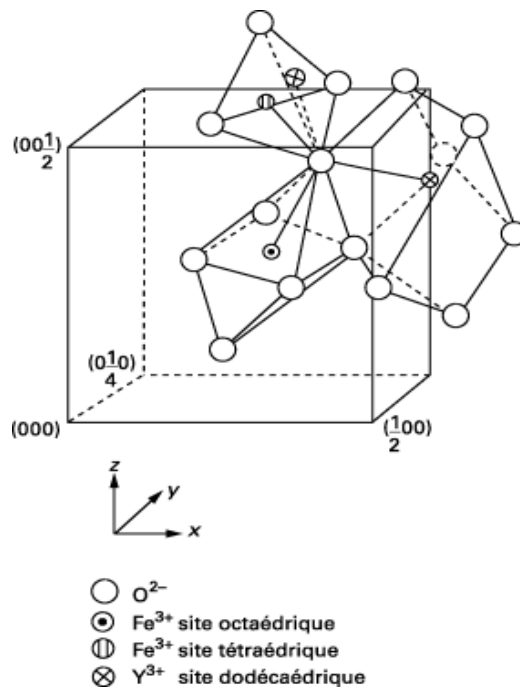


Figure 1.2 Structure grenat

1.4. Les différents types des ferrites

On distingue deux catégories principales de ferrites: les ferrites doux, et les ferrites durs. Les ferrites doux peuvent être classés en deux groupes : les ferrites spinelles et les ferrites grenats.

1.4.1. Les ferrites spinelles

Les ferrites à structure cristalline spinelle, sont principalement employés entre 10KHz à 500MHz. Ils ont pour formule chimique générale $MgAl_2O_4$, où Mg représente un métal de transition divalent ou une combinaison d'ions. Selon la gamme de fréquences, on utilise :

- Des ferrites spinelles de manganèse-zinc (Mn-Zn) de 10KHz à 1MHz. Ces ferrites sont couramment appelés ferrites de puissance car ils sont largement utilisés comme composants inductifs en électronique de puissance (transformateurs ou inductances). Ils ont pour formule chimique $(Mn_xZn_{1-x}Fe_2O_4)$. Leurs aimantations sont parmi les plus élevées des ferrites (jusqu'à $M=0,6$ Tesla), mais leur résistivité électrique est parmi les plus faibles ($\approx 1\Omega m$).
- Des ferrites spinelles de nickel-zinc (Ni-Zn) de 1MHz à 500MHz. Ils ont pour formule chimique $(Ni_yZn_{1-y}Fe_2O_4)$. Leurs aimantations sont faibles par rapport aux ferrites de manganèse-zinc ($M \leq 0,5$ Tesla), mais les résistivités électriques atteignent $10^6 \Omega m$ ce qui en fait des matériaux adaptés pour les radiofréquences.

1.4.2. Les ferrites grenat

Les ferrites à structure grenat sont utilisées entre 0,1GHz à 10GHz. Le plus courant est le grenat d'yttrium-Fer, plus connu sous le nom de YIG (pour Yttrium Iron Garnet), de formule chimique $Y_3Fe_5O_{12}$, où Y_3 est un élément de terres rares. De par leur caractère fortement isolant, ils sont les plus employés pour des applications hyperfréquences malgré leur faible aimantation à saturation, leur faible température de curie et le coût des terres rares. Ils présentent également les plus faibles pertes magnétiques, et supportent des niveaux de puissance élevés. Les ferrites durs contiennent les hexaferrites (hexagonaux ferrimagnétiques).

1.4.3. Les hexaferrites (hexagonaux ferrimagnétiques)

Les hexaferrites sont principalement des matériaux à très fort champ d'anisotropie magnétique intrinsèque, de 100 à 1000 fois supérieures à celui des spinelles et grenat, cette forte valeur du champ d'anisotropie interne conduit à une faible perméabilité initiale mais permet avantageusement leur emploi pour la réalisation de dispositifs en ondes

millimétriques, de 30 GHz jusqu'à environ 100 GHz. En effet, une valeur réduite de champ magnétique extérieur est suffisante pour amener la fréquence de gyrorésonance du matériau dans cette gamme de fréquences.

Le composé hexaferrites de base est le ferrite de Baryum ($\text{Ba Fe}_{12}\text{O}_{19}$) mais de nombreux autres composés hexagonaux ferrimagnétiques à forte anisotropie existent.

1.5. Fabrication des ferrites

Les ferrites sont fabriqués à haute température à partir des oxydes primaires de métaux de transitions. Ainsi, le ferrite de nickel NiFe_2O_4 est synthétisé à partir des oxydes de Nickel (NiO) et de fer (Fe_2O_3). La synthèse des ferrites, conduit soit à des matériaux polycristallins qui représentent aujourd'hui les céramiques magnétiques les plus vendues, soit à des matériaux monocristallins dont l'importance industrielle est moindre. L'annexe A résume les différentes étapes de fabrication des ferrites.

1.6 Propagation des ondes électromagnétiques dans les ferrites

L'interaction des ondes électromagnétiques avec les ferrites s'étudie en analysant l'action du champ alternatif de l'onde sur les particules élémentaires du ferrite. Ces particules prendront un certain mouvement qui en raison des masses relatives, sera négligeable sauf pour les électrons. Les mouvements affectés à un électron sont sous forme d'un moment cinétique $\vec{J}$ dû à la rotation de l'électron sur lui-même et d'un moment magnétique $\vec{M}$ [Annexe B].

Ces deux moments sont colinéaires et en sens opposés et sont liés par le rapport gyromagnétique γ , tel que [2], [3]:

$$\vec{M} = \frac{e}{m} \vec{J} = \gamma \vec{J} \quad (1.1)$$

e et m étant la charge et la masse d'un électron respectivement.

Si nous plaçons cet électron dans un champ magnétique continu $\vec{H}_0$ d'induction magnétique $\vec{B}_0$ tel que :

$$\vec{B}_0 = \mu_0 \vec{H}_0 \quad (1.2)$$

L'équation du mouvement de l'électron est alors :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \mu_0 \vec{M} \wedge \vec{H}_0 \quad (1.3)$$

avec $\vec{M} = \gamma \vec{J}$

On remplace $\vec{M}$ dans l'équation du mouvement, on obtient alors :

$$\frac{d\vec{J}}{dt} = \mu_0 \gamma \vec{J} \wedge \vec{H}_0 \quad (1.4)$$

1.6.1 Forme du tenseur de perméabilité

Dans le cas général, nous pouvons avoir trois cas de figures pour le tenseur de perméabilité μ selon la direction de polarisation x, y ou z du champ magnétique continu (statique) $\vec{H}_0$. Les trois formes de tenseurs de perméabilité $[\mu]$ pour chaque type de polarisation, seront donnés ci-après.

1.6.1.1. Cas de la polarisation selon (ox)

Soit $\vec{H}_0$ le champ magnétique continu et $\vec{M}_0$ le moment magnétique, dirigés suivant l'axe (ox) et soit $\vec{h}$ le champ alternatif de pulsation ω , nous avons alors [2], [3]:

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \vec{H}_0 + \vec{h} e^{j\omega t} & \text{avec} & \quad |\vec{h}| \ll |\vec{H}_0| \\ \vec{M} &= \vec{M}_0 + \vec{M}_1 e^{j\omega t} & \text{avec} & \quad |\vec{M}_1| \ll |\vec{M}_0| \end{aligned}$$

Avec :

$\vec{H}$: Champ magnétique total.

$\vec{h} e^{j\omega t}$: Champ de haute fréquence.

$\vec{M}_1 e^{j\omega t}$: Moment magnétique de haute fréquence.

L'équation du mouvement devient :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \frac{d\vec{J}}{dt} = \mu_0 \gamma \vec{M} \wedge \vec{H} \quad (1.5)$$

En négligeant les composantes alternatives et puisque $\vec{M}_0$ et $\vec{H}_0$ sont alignés, le produit vectoriel est nul ($\vec{M}_0 \wedge \vec{H}_0 = 0$ et $\vec{M}_1 \wedge \vec{h} = 0$), l'équation du mouvement devient alors :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mu_0 \gamma [\vec{M}_1 \wedge \vec{H}_0 + \vec{M}_0 \wedge \vec{h}] \quad (1.6)$$

Cette dernière équation donne alors en régime sinusoïdal :

$$j\omega M_{1x} = \mu_0 \gamma [0] \quad (1.7)$$

$$j\omega M_{1y} = \mu_0 \gamma [M_{1z} H_0 - M_0 h_z] \quad (1.8)$$

$$j\omega M_{1z} = \mu_0 \gamma [-M_{1y} H_0 + M_0 h_y] = 0 \quad (1.9)$$

L'équation (1.9) permet aussi d'écrire :

$$M_{1z} = \frac{\mu_0 \gamma}{j\omega} [-M_{1y} H_0 + M_0 h_y]$$

En remplaçant M_{1z} dans l'équation (1.8), l'on tire :

$$M_{1y} = \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_y - \left[\frac{j\omega \mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_z \quad (1.10)$$

En portant ce résultat dans (1.9), il vient :

$$M_{1z} = \left[\frac{j\mu_0 \gamma M_0 \omega}{(\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2)} \right] h_y + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_z \quad (1.11)$$

Ce qui donne d'après (1.7) :

$$M_{1x} = 0 \quad (1.12)$$

Le champ d'induction magnétique B_I aura donc les composantes :

$$B_{1x} = \mu_0 [h_x + M_{1x}] \quad (1.13)$$

$$B_{1y} = \mu_0 [h_y + M_{1y}] \quad (1.14)$$

$$B_{1z} = \mu_0 [h_z + M_{1z}] \quad (1.15)$$

En portant M_{1x} dans (1.13), il vient :

$$B_{1x} = \mu_0 [h_x + M_{1x}] = \mu_0 [h_x + 0] = \mu_0 h_x$$

$$B_{1x} = \mu_0 h_x \quad (1.16)$$

On remplace M_{1y} dans l'équation (1.14), ce qui donne:

$$B_{1y} = \mu h_y - jk h_z \quad (1.17)$$

avec :

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] \quad \text{et} \quad k = \left[\frac{\omega \mu_0^2 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right]$$

Si on pose de plus: $\omega_0 = \mu_0 |\gamma| H_0 = -\mu_0 \gamma H_0$

$$\text{alors :} \quad \mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0 \gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad \text{et} \quad k = \mu_0 \left[\frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$$

Par ailleurs, en remplaçant M_{1z} dans (1.15), il vient :

$$B_{1y} = jk h_y + \mu h_z \quad (1.18)$$

Donc finalement, en récapitulant, nous obtenons le tenseur de perméabilité suivant pour une polarisation de B_0 selon la direction (ox) :

$$\mu_{(ox)} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk \\ 0 & jk & \mu \end{bmatrix} \quad (1.19)$$

En procédant de la même manière, nous démontrons que pour une polarisation selon (oy), le tenseur de perméabilité s'écrit [Annexe C]:

$$\mu_{(oy)} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & jk \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -jk & 0 & \mu \end{bmatrix}$$

Et selon (oz), il vient [Annexe C] :

$$\mu_{(oz)} = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}$$

Le tableau suivant résume donc la forme du tenseur de perméabilité $[\mu]$ pour chaque type de polarisation de B_0 selon ox , oy et oz :

Type de polarisation	(ox)	(oy)	(oz)
Tenseur $[\mu]$	$\mu_{(ox)} = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk \\ 0 & jk & \mu \end{bmatrix}$	$\mu_{(oy)} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & jk \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -jk & 0 & \mu \end{bmatrix}$	$\mu_{(oz)} = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix}$

Tableau 1.1 Différentes formes du tenseur de perméabilité

avec $\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0 \gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$ et $k = \mu_0 \left[\frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right]$

1.7.2 Phénomènes d'interaction onde-ferrite

Différents phénomènes peuvent exister dans le ferrite lors de l'interaction onde - matière, à savoir l'effet Faraday et l'effet de déplacement du champ.

1.7.2.1 L'effet Faraday

Une onde Transverse Electro-Magnétique (TEM) entrant dans un ferrite aimanté suivant la direction de propagation de l'onde, est décomposée en deux ondes respectivement polarisées circulaire gauche et droite. L'une des ondes polarisées circulairement va évoluer dans le sens de la gyrorésonance, entraînant une forte interaction onde-matière.

L'autre onde évoluera en sens inverse à celui de la gyrorésonance, conduisant à une faible interaction onde-matière. Cette propriété produit une rotation du plan de polarisation de l'onde TEM initiale.

1.7.2.2 L'effet de déplacement du champ

Le déplacement de champ est la variation de la distribution du champ électrique dans la section longitudinale ou transverse, cette variation dépend du sens de propagation de l'onde électromagnétique dans le ferrite.

1.8. Propriétés des ferrites

Nous décrivons ci-dessous les propriétés électriques et magnétiques des ferrites.

1.8.1 Propriétés électriques

Les ferrites sont des diélectriques caractérisés par des constantes diélectriques relatives élevées, plusieurs milliers en basse fréquence et une dizaine à vingtaine en hyperfréquence. A très basse fréquence, les ferrites se comportent comme des diélectriques à très fortes pertes.

En hyperfréquences, les diélectriques présentent généralement des pertes, que l'on introduit en ajoutant une partie complexe à leur permittivité relative. Cette dernière devient :

$$\varepsilon_r = \varepsilon'_r - j\varepsilon''_r$$

La valeur de leur permittivité diélectrique relative, est comprise entre 10 et 15. On introduit la tangente de pertes diélectriques, qui est définie par :

$$\tan \delta = \frac{\varepsilon''_r}{\varepsilon'_r}$$

La valeur de $\tan \delta$ pour les ferrites massifs, est excellente, de l'ordre de 10^{-4} , à la fréquence 10 GHz. La résistivité électrique des ferrites est comprise entre 10^6 et $10^{10} \Omega\text{m}$, ce qui en fait de bons isolants c'est-à-dire que les ondes électromagnétiques peuvent donc s'y propager.

1.8.2. Propriétés magnétiques

Un matériau ferrimagnétique est avant tout un matériau qui, bien que caractérisé par sa perméabilité et permittivité dynamiques [4], possède en l'absence d'excitation externe des propriétés magnétiques permanentes.

Les ferrites se caractérisent par leur perméabilité μ , l'aimantation M_a et le champ magnétique $\vec{H}$. L'aimantation à saturation M_s varie de 0,15 à 0,6 Tesla.

1.9. Effet de non réciprocity

Par définition, ceci signifie, d'une part, qu'aucune amplification du signal n'a lieu et ce, sans modification de fréquence. Et d'autre part, que les propriétés du circuit dépendent de son sens d'insertion dans un dispositif micro-onde. Si ce dernier est fixe, c'est le sens de propagation de l'onde, et donc son vecteur d'onde, qui déterminera le comportement de l'ensemble. C'est cette propriété qui est la plus utilisée dans les dispositifs non-réciproques usuels.

Le phénomène de non réciprocity peut apparaître dans un ferrite aimanté c'est à dire soumis à une polarisation par un champ magnétique statique.

1.10. Application des ferrites dans le domaine des hyperfréquences

Le caractère diélectrique des matériaux ferrimagnétiques permet la transmission d'une onde haute fréquence (bande centimétrique ou millimétrique) dans le matériau.

La possibilité de contrôler la propagation de l'onde dans un tel milieu par l'application d'un champ magnétique (statique ou alternatif) a permis la réalisation de plusieurs dispositifs hyperfréquences indispensables à la réalisation de fonctions de traitement du signal (radar, télécommunications par satellites, compatibilité électromagnétique, etc.).

Les ferrites sont utilisés dans deux types de dispositifs :

- les dispositifs dits non réciproques pour lesquels les ferrites sont pratiquement irremplaçables et qui correspondent à la plus grande part des applications. Ces dispositifs sont le plus souvent des isolateurs et des circulateurs qui sont des composants permettant de diriger une onde électromagnétique dans un circuit.

Ainsi, dans le cas du circulateur à n voies, l'onde électromagnétique entrant par la voie $(n - p)$ ne peut sortir que par la voie $(n - p + 1)$ (voir figure 1.3).

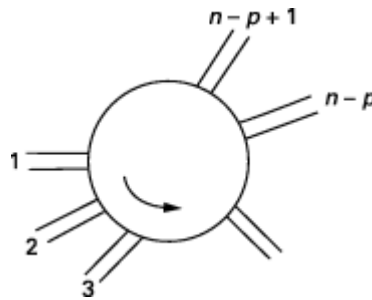


Figure 1.3 Schéma d'un circulateur à n voies

Un isolateur est simplement une section de guide d'onde dans laquelle les ondes électromagnétiques peuvent se propager dans un sens (de l'entrée vers la sortie) sans atténuation notable tandis qu'elles sont très atténuées si elles se propagent dans le sens inverse (sortie vers l'entrée).

Ces types d'appareils permettent ainsi des séparations entre différentes voies d'un circuit hyperfréquence ce qui s'avère indispensable spécialement dans la technique actuelle des radars et des faisceaux hertziens.

- les dispositifs dits réciproques comme les déphaseurs commandables électriquement. Dans ce type de dispositifs, on trouve des solutions concurrentes aux ferrites comme les déphaseurs à diodes semi-conductrices ou les déphaseurs à matériau ferroélectrique.

Dans tous ces dispositifs, le mécanisme exploité est celui de la résonance gyromagnétique qui confère au matériau son aptitude à répondre différemment à une onde électromagnétique selon sa polarisation.

1.11 Résonance gyromagnétique

Le phénomène de résonance gyromagnétique conduit à une forte absorption de l'onde électromagnétique se propageant dans le matériau, lorsqu'un champ magnétique hyperfréquence polarisé elliptiquement est perpendiculaire à la direction de l'aimantation.

Considérons un ellipsoïde d'axes ox , oy et oz constitué d'un matériau magnétique et aimanté à saturation par un champ statique H_0 dirigé selon oz (figure 1.4).

Le champ résultant à l'intérieur se trouve dans la même direction et son intensité vaut [2], [5] :

$$H_{\text{int}} = H_0 - N_z M_s \quad (1.20)$$

où N_z est le coefficient du champ démagnétisant selon oz et M_s l'aimantation à saturation.

On superpose à H_0 un champ magnétique hyperfréquence h qui lui, est perpendiculaire à oz donc situé dans le plan xoy et dont la pulsation vaut ω .

De ce fait, un champ hyperfréquence h_{int} apparaît dans le matériau et son aimantation M_a est alors écartée de l'axe oz :

$$M_a = \chi_{\text{int}} (H_{\text{int}} + h_{\text{int}}) \quad (1.21)$$

où χ_{int} est la susceptibilité magnétique du matériau.

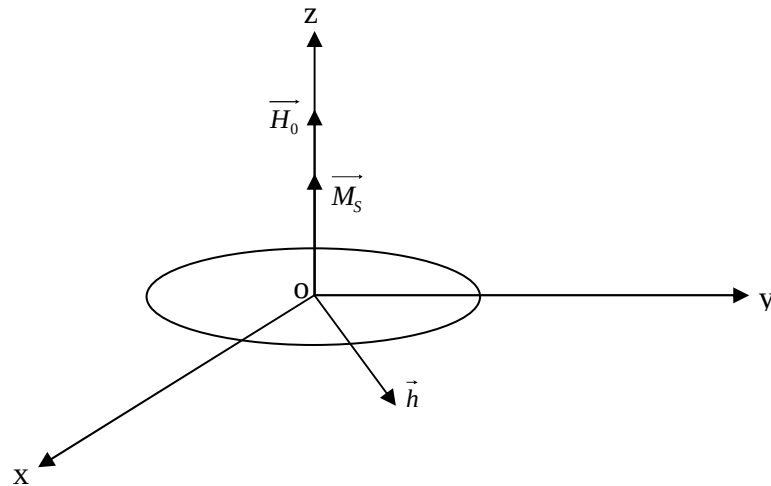


Figure 1.4 Représentation de l'orientation des vecteurs H_0 , M_s et h

En appliquant comme au paragraphe (1.6) le théorème du moment cinétique, on obtient :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \gamma \mu_0 \vec{M} \wedge (\vec{H}_{\text{int}} + \vec{h}_{\text{int}}) + \text{terme d'amortissement} \quad (1.22)$$

γ est le rapport gyromagnétique, c'est-à-dire le rapport entre le moment cinétique et le moment magnétique. On a pratiquement $\gamma = 1,105 \times 10^5 \text{ g}_{\text{eff}} \text{ (m/A-s)}$ tel que g_{eff} est le facteur gyromagnétique égal à 2 pour l'électron libre.

En résolvant simultanément (1.21) et (1.22) et en éliminant les composantes indépendantes du temps, on obtient les relations :

$$\begin{aligned} M_x &= \chi_{xx} h_x + \chi_{xy} h_y \\ M_y &= \chi_{yx} h_x + \chi_{yy} h_y \end{aligned}$$

qui peut s'écrire sous forme matricielle :

$$[M] = [\chi][h] \quad (1.23)$$

$[\chi]$ est appelée tenseur de Polder

Nous trouvons que la valeur de χ dépend de la polarisation de h . En notant les susceptibilités χ_+ et χ_- correspondent respectivement aux sens de rotation du champ hyperfréquence positif et négatif dans le plan xy. La relation (1.23) s'écrit alors :

$$M_+ = \chi_+ \cdot h_+$$

$$M_- = \chi_- \cdot h_-$$

Dans un milieu dissipatif, la susceptibilité s'écrit sous forme complexe :

$$\chi_{\pm} = \chi'_{\pm} - j\chi''_{\pm}$$

On définit aussi la perméabilité correspondante :

$$(\mu_{\pm} = \chi_{\pm} + 1)$$

Lorsque l'on fait varier l'intensité du champ magnétique statique de polarisation pour une onde hyperfréquence de pulsation ω polarisée positivement, on observe les variations de la figure 1.5. Dans le cas où la fréquence varie et le champ est fixe, les variations obtenues sont celles de la figure 1.6.

μ_+ présente un maximum en $H_0 = H_r$ appelé gyrorésonance, H_r est le champ à la résonance. La largeur du pic à mi-hauteur est appelée largeur de raie de gyrorésonance ΔH , elle dépend de la nature du ferrite. f_r appelé la fréquence de gyrorésonance.

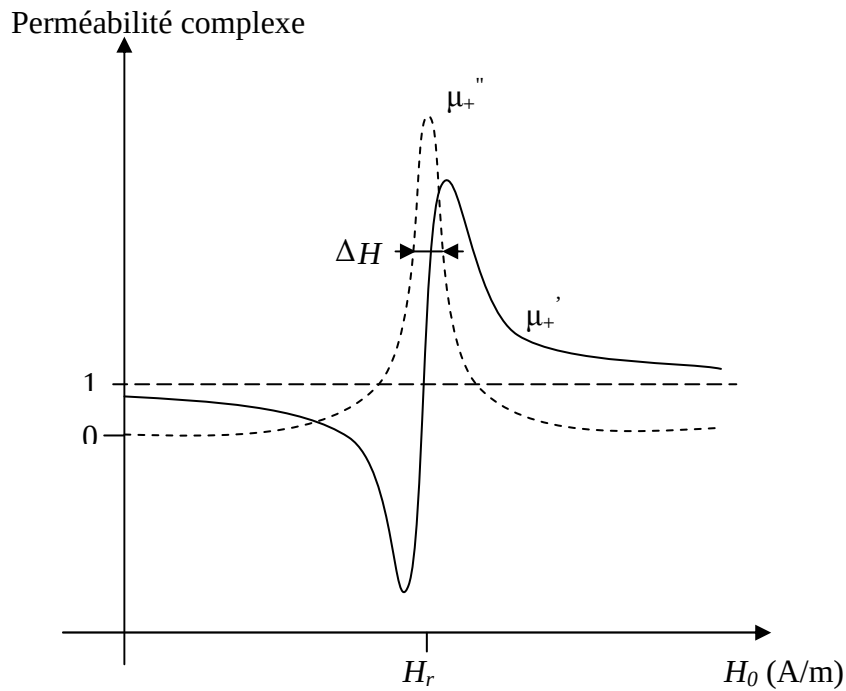


Figure 1.5 Variations des parties, réelle et imaginaire de la perméabilité complexe μ_+ en fonction du champ statique appliqué lorsque la polarisation du champ hyperfréquence est positive

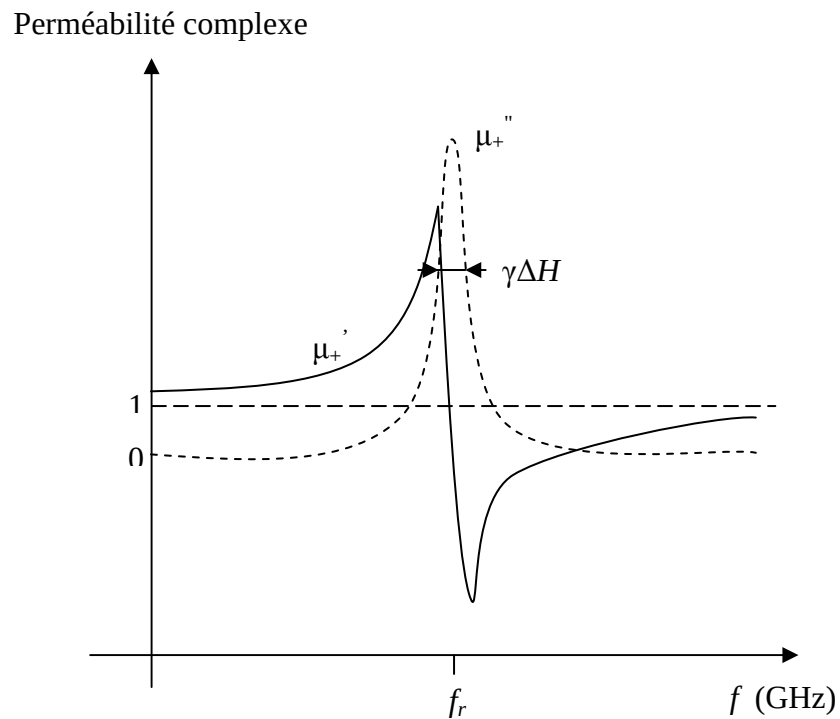


Figure 1.6 Variations des parties réelle et imaginaire de la perméabilité complexe μ_+ en fonction de la fréquence pour un champ statique appliqué $H_0 = f r / \gamma$

La variation de la perméabilité complexe en fonction du champ H_0 (figure 1.5) peut être décrite par une Lorentzienne [2] :

$$\mu_+'(H_0) = 1 + M_s \frac{(H_0 - H_r)}{(H_0 - H_r)^2 + \frac{\Delta H^2}{4}} \quad (1.24.a)$$

$$\mu_+''(H_0) = M_s \frac{\frac{\Delta H}{2}}{(H_0 - H_r)^2 + \frac{\Delta H^2}{4}} \quad (1.24.b)$$

La variation de la perméabilité complexe en fonction de la fréquence pour un champ statique donné H_0 est également une lorentzienne à la différence que μ_+' augmente lorsqu'on s'approche de la résonance avant de chuter (figure 1.6) :

$$\mu_+'(f) = 1 + M_s \frac{(H_r - \frac{f}{\gamma})}{(H_r - \frac{f}{\gamma})^2 + \frac{\Delta H^2}{4}} \quad (1.25.a)$$

$$\mu_+''(f) = M_s \frac{\frac{\Delta H}{2}}{(H_r - \frac{f}{\gamma})^2 + \frac{\Delta H^2}{4}} \quad (1.25.b)$$

La largeur de la raie de résonance ΔH est définie comme la largeur à mi-hauteur de $\mu_+''(H_0)$ ou $\mu_+''(f)$. La fréquence à la résonance est donnée par la formule de Kittel [6]:

$$f_r = \frac{\gamma \mu_0}{2\pi} \sqrt{[(H_r - (N_z - N_x)M_s)(H_r - (N_z - N_y)M_s)]} \quad (1.26)$$

où N_x , N_y , et N_z sont les facteurs démagnétisants de l'ellipsoïde dans les directions ox , oy et oz . Pour une ellipsoïde, $N_x + N_y + N_z = 1$. Pour une sphère, $N_x = N_y = N_z = 1/3$ et $\omega = \gamma \mu_0 H_r$.

Dans la pratique, la relation fréquence-champ s'écrit :

$$f = 224 H_r \quad \text{avec : } f \text{ en MHz et } H_r \text{ en A/m dans le système MKSA}$$

ou bien : $f = 2,8 H_r$ avec : f en MHz et H_r en oersted (Oe) dans le système CGS

1.12. Aimantation à saturation

Les relations (1.24) et (1.25) montrent que la perméabilité complexe est directement proportionnelle à l'aimantation à saturation. Pour une plus grande efficacité, il y a intérêt à

augmenter cette dernière. L'aimantation à saturation doit être ajustée en fonction de la fréquence de fonctionnement. À très haute fréquence, les fonctionnements se font à des champs inférieurs à H_r pour des raisons économiques.

À plus basse fréquence ($f < 1,5$ GHz), cela n'est plus possible même avec des ferrites de faible aimantation à saturation. On choisit alors d'appliquer un champ supérieur au champ de résonance. Pour la réalisation des dispositifs, on choisit de préférence de travailler hors de la résonance.

1.13. Température de compensation

Une température dite de compensation (ou de Néel), à laquelle les aimantations spontanées des sous-réseaux magnétiques sont identiques, peut apparaître. Ceci conduit à l'annulation de l'aimantation résultante du matériau.

L'existence d'une telle température de compensation, inférieure à celle de Curie, peut être intéressante pour une application soumise à des contraintes de stabilité en température, car elle conduit à une valeur quasi-constante de l'aimantation à saturation sur une gamme importante de températures.

1.14. Température de Curie

En mesurant en fonction de la température, la susceptibilité magnétique de différents corps, Pierre Curie a observé plusieurs phénomènes [7], [Annexe B] (figure 1.7).

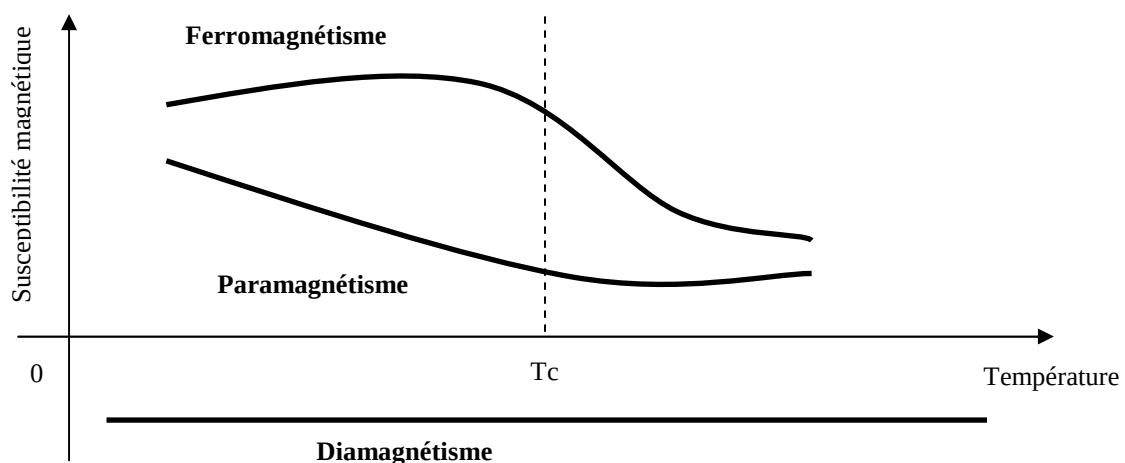


Figure 1.7 Comportement des matériaux magnétiques en fonction de la température
(T_c dépend du type du matériau utilisé)

Le diamagnétisme est insensible à la température et indépendant de l'intensité du champ. Plus la température est élevée, plus la susceptibilité paramagnétique est faible. Au

delà d'une certaine température critique (T_c), les ferromagnétiques perdent leurs propriétés magnétiques caractéristiques et se comportent comme des paramagnétiques.

Ce dernier point peut s'expliquer par le fait que lorsque la température augmente, l'agitation thermique des atomes augmente aussi. Ces atomes deviennent plus mobiles et moins stables. Ainsi, dans les corps ferromagnétiques, les fluctuations des moments magnétiques atomiques sont telles, qu'au delà de la température de Curie, le corps perd toute organisation magnétique et devient aussi désordonné qu'un matériau paramagnétique.

1.15 Champ d'anisotropie H_a

Il caractérise la rigidité avec laquelle l'aimantation est maintenue dans des directions privilégiées du cristal. Plus l'aimantation se déplace facilement sous l'action d'un faible champ magnétique extérieur, plus le matériau a un champ coercitif faible, une perméabilité grande et des pertes faibles si les fréquences d'utilisation ne sont pas trop élevées.

On appelle ferrite dur un ferrite difficile à aimanter présentant des champs coercitifs et d'anisotropie élevés ($H_a > 100$ kA/m). Un ferrite doux est un ferrite facile à aimanter présentant des champs coercitif et d'anisotropie faibles ($H_a < 10$ kA/m).

1.16. Pertes dans les ferrites en hyperfréquences

La réalisation de composants hyperfréquences à base de ferrites nécessite une bonne maîtrise des pertes directes appelées pertes d'insertion. Deux origines de pertes existent: Les pertes diélectriques et les pertes magnétiques.

1.16.1. Les pertes diélectriques

Ils sont minimisées en synthétisant des ferrites homogènes d'un point de vue microstructural (grains fins sans défauts) et chimique (pas de seconde phase et pas de traces de Fe^{2+}). On obtient couramment des tangentes d'angles de pertes comprises entre 1 et 10^{-4} à 10 GHz, pour les ferrites polycristallins préparés par les techniques industrielles conventionnelles.

1.16.2. Les pertes magnétiques

On distingue les pertes magnétiques à bas niveau (faible puissance) et les pertes magnétiques à fort niveau (forte puissance).

1.16.2.1. Pertes magnétiques à bas niveau de puissance hyperfréquence

Les pertes à bas niveau sont représentées par la partie imaginaire de la perméabilité complexe μ'' . Loin de la résonance, la variation de la perméabilité complexe avec le champ appliqué peut être décrite par une lorentzienne (figure 1.5) dont la largeur à mi-hauteur notée ΔH_{eff} indique les performances du matériau (plus ΔH_{eff} est faible, plus le ferrite aura de faibles pertes).

La réalisation des dispositifs non réciproques à faibles pertes conduit à rechercher de faibles ΔH_{eff} et ΔH pour avoir à la fois μ_+'' suffisamment différent de μ_+'' et μ_+'' proche de 0 loin de la résonance.

1.16.2.2. Pertes magnétiques à fort niveau de puissance hyperfréquence

Lorsque la puissance en hyperfréquence augmente, il apparaît des non linéarités ayant pour conséquences des pertes supplémentaires. Le champ hyperfréquence critique h_c pour lequel apparaissent ces pertes dépend du champ statique de polarisation (figure 1.8). h_c passe par un minimum pour un champ de polarisation dit subsidiaire puis augmente très rapidement jusqu'à une valeur de champ limite.

Au-delà, les effets non linéaires sont du deuxième ordre. Dans la pratique, les champs de polarisation utilisés sont plus petits que H_{lim} et les effets de non linéarité observés sont du premier ordre. Les effets non linéaires sont caractérisés par une largeur de raie ΔH_k .

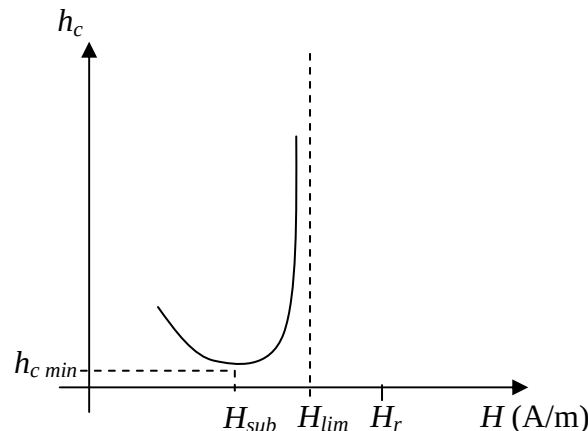


Figure 1.8 Champ critique hyperfréquence en fonction du champ statique de polarisation

En général, on choisira des grenats pour des applications à bas niveau pour leurs faibles ΔH_{eff} et ΔH . Lorsque la puissance crête hyperfréquence devient importante, on leur préférera des ferrites spinelles ou des grenats substitués.

1.17. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les différents types de matériau à ferrite en fonction de leur caractéristique, de leur interaction avec l'onde EM et de leur application notamment dans le domaine des hyperfréquences. Ceci nous a permis de connaître l'aspect théorique et avoir une idée générale de ces matériaux en vue de les exploiter dans notre étude.

Chapitre 2

*Analyse des circuits à ferrite par la
méthode S.D.A indépendamment de la
direction de polarisation du champ
magnétique statique*

2.1. Introduction

L'analyse électromagnétique des circuits intégrés micro-ondes est un sujet attrayant en raison du développement récent et l'utilisation de nouveaux matériaux tels que les matériaux anisotropes magnétiques (ferrite...). Ces matériaux servent notamment à la fabrication des composants micro-ondes (isolateurs, circulateurs, déphaseurs..) utilisés dans des systèmes de télécommunication. La conception de ces dispositifs exige une caractérisation électromagnétique rigoureuse de leurs performances à l'aide des méthodes numériques qui sont actuellement très nombreuses, parmi lesquelles la méthode d'approche dans le domaine spectrale (S.D.A) qui est l'une des plus performantes et très adaptée à l'étude des circuits planaires micro-ondes.

Signalons que les méthodes analytiques, déjà anciennes, ont été historiquement les premières à être proposées pour la modélisation de ces structures qui doivent posséder certaines symétries et dont la géométrie et le modèle de matériau reste simple, ce qui correspond à la plupart des dispositifs de guidage des ondes électromagnétiques.

Néanmoins, pour un certain nombre de problèmes (non linéarité, conditions aux limites, anisotropie...), les méthodes analytiques peuvent devenir trop complexes à mettre en œuvre. Nous faisons alors appel à des méthodes numériques approchées demandant l'aide d'un ordinateur pour effectuer les calculs complexes. Ces méthodes calculent le champ électromagnétique dans le circuit, l'analyse est alors effectuée en mode hybride. L'objectif essentiel de ces méthodes est de permettre la définition des schémas équivalents utilisables avec un temps de calcul raisonnable, pour la conception assistée par ordinateur [8].

Dans ce chapitre sera détaillée l'étude de la méthode d'approche dans le domaine spectral pour l'analyse des circuits micro-ondes planaires multicouches incluant le substrat à ferrite polarisé par un champ statique dans une direction arbitraire (tangentielle ou normale par rapport à la surface du substrat).

La principale difficulté dans cette méthode, plus particulièrement pour des structures complexes est qu'un processus relativement long est nécessaire pour le calcul des fonctions de Green. Afin de palier ce problème, une méthode dite *immittance approach* a été proposée par Itoh [9] pour déterminer les fonctions de Green dyadiques à partir du concept du circuit équivalent inspiré des lignes de transmission transverses.

2.2. Description de la méthode SDA

La méthode d'approche dans le domaine spectral est une technique parfaitement adaptée à l'étude des circuits planaires hyperfréquences. Elle a été introduite dans la littérature par Itoh et Mittra [10] en 1973 pour l'analyse de la ligne microruban.

Cette méthode permet de résoudre les équations de Maxwell par l'outil de la transformée de Fourier. Les composantes du champ électromagnétique peuvent être exprimées soit en terme de spectre continu, soit discret, suivant que l'on étudie des structures ouvertes ou fermées.

Son domaine d'application s'est ensuite étendu à l'analyse des circuits planaires comportant un nombre arbitraire de couches isotropes et un ou plusieurs plans de métallisation. Pour ce qui concerne les circuits passifs à anisotropie non-diagonale tel que les ferrites, la formulation spectrale correspondante n'était pas encore généralisée pour les circuits en configuration multicouche. Cela avait été traité dans quelques particuliers de tenseurs.

L'application de la méthode d'approche dans le domaine spectral pour la modélisation des structures planaires anisotropes multicouches, comporte les étapes suivantes :

- Ecriture des expressions des composantes tangentielles (parallèles à l'interface) du champ électromagnétique en fonction des composantes normales dans toutes les couches diélectriques anisotropes à partir des équations de Maxwell
- Transposition des résultats obtenus dans le domaine spectral
- Changement de repère en vue de séparer les modes LSM ($H_y = 0$) et LSE ($E_y = 0$) dont dérive le champ électromagnétique en mode hybride
- Application des conditions de continuité sur toutes les interfaces diélectriques sous forme des relations de récurrence
- Dédution de la matrice d'admittance de Green reliant, dans le domaine de Fourier les composantes tangentielles du champ électrique ($\tilde{E}_x, \tilde{E}_z$) et celle de la densité de courant ($\tilde{J}_x, \tilde{J}_z$) sur le plan de métallisation. Le symbole “ $\sim$ ” désigne l'opérateur transformée de Fourier
- Application de la méthode des moments (en particulier celle de Galerkin) pour la détermination des inconnues ($\tilde{J}_x, \tilde{J}_z, \tilde{E}_x, \tilde{E}_z$) et la constante de phase β

L'application de cette méthode pour ce calcul passe par un choix particulier des fonctions de base ainsi que par l'annulation du déterminant d'un système matriciel basé sur des équations algébriques inhomogènes.

2.3. Structure étudiée

La structure qu'on désire analyser est représentée par la figure (2.1), il s'agit d'un circuit planaire à (N) couches diélectriques anisotropes incluant un substrat à ferrite d'indice (m) sur lequel, sont gravés un ou plusieurs rubans conducteurs.

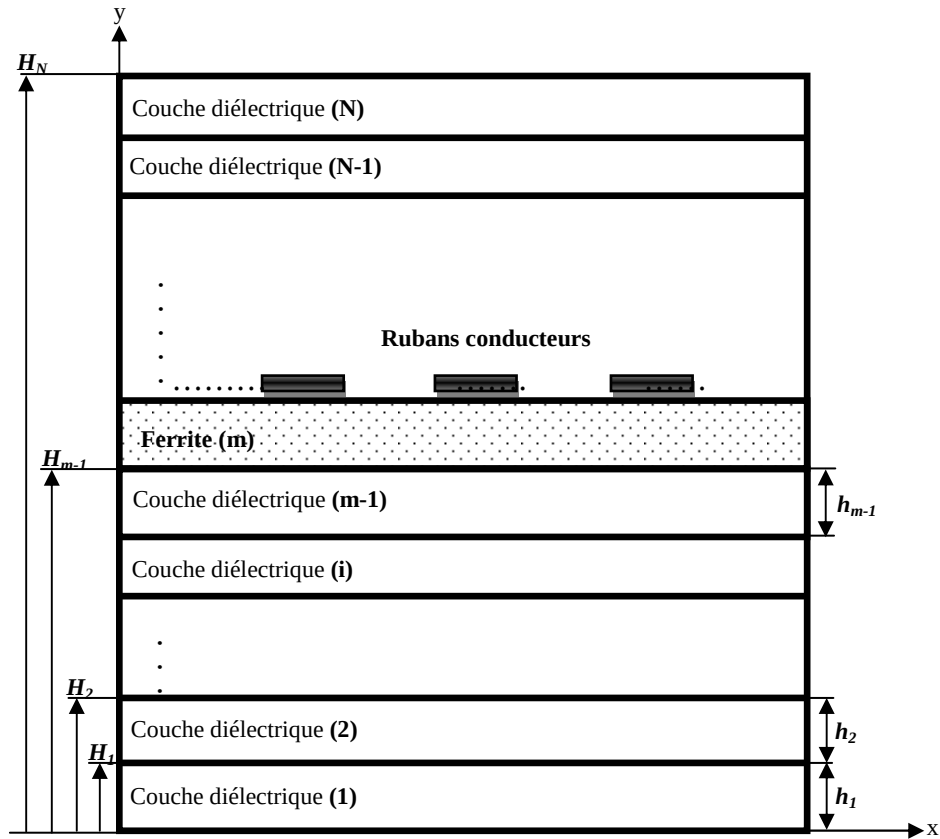


Figure 2.1 Circuit planaire multicouche incluant une couche à ferrite

2.4. Equations de Maxwell

Les équations de Maxwell décrivant la propagation d'une onde électromagnétique dans un milieu diélectrique anisotrope, sont données par :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.4)$$

avec $\vec{B} = [\mu]\vec{H}$ et $\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E}$

où $[\mu]$ et $[\varepsilon]$ sont respectivement les tenseurs de perméabilité et permittivité.

$\vec{E}$, $\vec{H}$, $\vec{D}$ et $\vec{B}$ sont respectivement le champ électrique, le champ magnétique, le déplacement électrique et l'induction magnétique. En considérant le cas particulier des champs variant sinusoïdalement dans le temps avec une pulsation ω , les équations de Maxwell deviennent :

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega[\mu]\vec{H} \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \wedge \vec{H} = j\omega[\varepsilon]\vec{E} \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = 0 \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (2.8)$$

2.5. Equations de propagation du champ EM dans la couche à ferrite

Il y a lieu de déterminer l'équation de propagation dans la couche diélectrique à ferrite à l'aide des équations de Maxwell.

L'équation de Maxwell-Faraday (2.5) peut être réécrite aussi sous la forme:

$$[\mu]^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E} = -j\omega \vec{H} \quad (2.9)$$

En prenant le rotationnel de part et d'autre de cette dernière équation, il vient :

$$\vec{\nabla} \wedge ([\mu]^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}) = -j\omega (\vec{\nabla} \wedge \vec{H}) \quad (2.10)$$

En remplaçant ensuite (2.6) dans l'équation (2.10), nous obtenons:

$$\vec{\nabla} \wedge ([\mu]^{-1} \vec{\nabla} \wedge \vec{E}) - \omega^2 [\varepsilon] \vec{E} = 0 \quad (2.11)$$

➤ Emploi de la transformation de Fourier

La transformée de Fourier est un outil mathématique très efficace qui permet de ramener les problèmes complexes rencontrés dans le domaine spatial conventionnel à des formes simples et faciles à manipuler dans le domaine spectral. Dans notre cas, pour se ramener à des équations à une seule variable en (y), il y a lieu d'appliquer l'outil de la transformée de Fourier par rapport à (x) donnée par la relation suivante :

$$\tilde{f}(\alpha_n, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) \exp(j\alpha_n x) dx$$

sachant que :

$$TF\left[\frac{\partial^m f(x, y)}{\partial x^m}\right] = (-j\alpha_n)^m \tilde{f}(\alpha_n, y)$$

α_n est le paramètre de fourrier. Dans ce qui suit, l'indice ' $\sim$ ' indiquera la transformée de Fourier selon (ox).

2.5.1. Cas de la polarisation d'un champ magnétique statique selon (ox) $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x}$

Comme il a été démontré précédemment, les tenseurs ϵ et μ sont donnés par :

$$[\mu_{(ox)}] = \begin{bmatrix} \mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & -jk \\ 0 & jk & \mu \end{bmatrix} ; \quad [\epsilon_{(ox)}] = \begin{bmatrix} \epsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon & -jl \\ 0 & jl & \epsilon \end{bmatrix}$$

L'équation de propagation dans une couche à ferrite d'indice (m) s'écrit alors selon :

$$\vec{\nabla} \Lambda ([\mu_{(ox)}]^{-1} \vec{\nabla} \Lambda \vec{E}) - \omega^2 [\epsilon_{(ox)}] \vec{E} = 0 \quad (2.12)$$

sachant que:

$$[\mu_{(ox)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\mu_0} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\mu}{D} & \frac{jk}{D} \\ 0 & -\frac{jk}{D} & \frac{\mu}{D} \end{bmatrix} \quad \text{avec } D = \mu^2 - k^2 \quad (2.13)$$

Après avoir posé, $K_y = \frac{\partial}{\partial y}$, l'équation (2.12) peut alors être écrite sous forme matricielle:

$$\begin{bmatrix} (-\mu K_y^2 + \beta^2 \mu - \omega^2 \epsilon_x D) & (j\beta k \alpha_n - j\alpha_n \mu K_y) & (k\alpha_n K_y - \beta \alpha_n \mu) \\ (-j\alpha_n \mu K_y - j\alpha_n k \beta) & \left(\frac{\beta^2 D}{\mu_0} + \alpha_n^2 \mu - \omega^2 \epsilon D\right) & \left(-\frac{j\beta D}{\mu_0} K_y + j\alpha_n^2 k + j\omega^2 l D\right) \\ (-\alpha_n \beta \mu - \alpha_n k K_y) & \left(-j\alpha_n^2 k - \frac{j\beta D}{\mu_0} K_y - j\omega^2 l D\right) & \left(\alpha_n^2 \mu - \frac{D}{\mu_0} K_y^2 - \omega^2 \epsilon D\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Posons:

$$[Q] = \begin{bmatrix} (-\mu K_y^2 + \beta^2 \mu - \omega^2 \epsilon_x D) & (j\beta k \alpha_n - j\alpha_n \mu K_y) & (k\alpha_n K_y - \beta\alpha_n \mu) \\ (-j\alpha_n \mu K_y - j\alpha_n k \beta) & \left(\frac{\beta^2 D}{\mu_0} + \alpha_n^2 \mu - \omega^2 \epsilon D \right) & \left(-\frac{j\beta D}{\mu_0} K_y + j\alpha_n^2 k + j\omega^2 l D \right) \\ (-\alpha_n \beta \mu - \alpha_n k K_y) & \left(-j\alpha_n^2 k - \frac{j\beta D}{\mu_0} K_y - j\omega^2 l D \right) & \left(\alpha_n^2 \mu - \frac{D}{\mu_0} K_y^2 - \omega^2 \epsilon D \right) \end{bmatrix}$$

Pour résoudre le système d'équations (2.14), il faut que le déterminant de la matrice [Q] soit égal à zéro, ce qui aboutit à une équation différentielle d'ordre 4 constituant l'équation d'onde du champ électrique $\vec{E}$:

$$F_1 K_y^4 + F_2 K_y^2 + F_3 = 0 \quad \text{où} \quad K_y^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \quad (2.15)$$

avec :

$$F_1 = -\left(\frac{D^2 \omega^2 \epsilon \mu}{\mu_0} \right)$$

$$F_2 = -\left(\frac{D^2 \omega^2 \epsilon \mu}{\mu_0} \right) \left[-2\beta^2 - \alpha_n^2 \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon} + \frac{\mu_0}{\mu} \right) + \omega^2 \left(\frac{\epsilon_x D}{\mu} + \frac{\mu_0}{\epsilon} (\epsilon^2 - l^2) \right) \right]$$

$$F_3 = -\left(\frac{D^2 \omega^2 \epsilon \mu}{\mu_0} \right) \left[\left(\alpha_n^4 \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{\mu_0}{\mu} + \beta^4 \right) + \beta^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \right) - \omega^2 \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{\mu_0}{\mu} (2\alpha_n^2 (\mu \epsilon + k l) - \omega^2 D (\epsilon^2 - l^2)) \right. \\ \left. - \omega^2 \beta^2 \left(\frac{\mu_0}{\epsilon} (\epsilon^2 - l^2) + \frac{\epsilon_x}{\mu} D \right) \right]$$

Ainsi, l'équation d'onde pour la composante normale $\tilde{E}_y$ devient:

$$\frac{\partial^4 \tilde{E}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.16)$$

sachant que :

$$f_1 = \frac{F_2}{F_1} = -2\beta^2 - \alpha_n^2 \left(\frac{\epsilon_x}{\epsilon} + \frac{\mu_0}{\mu} \right) + \omega^2 \left(\frac{\epsilon_x D}{\mu} + \frac{\mu_0}{\epsilon} (\epsilon^2 - l^2) \right)$$

$$f_2 = \frac{F_3}{F_1} = \left(\alpha_n^4 \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{\mu_0}{\mu} + \beta^4 \right) + \beta^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \right) - \omega^2 \frac{\epsilon_x}{\epsilon} \frac{\mu_0}{\mu} (2\alpha_n^2 (\mu \epsilon + k l) - \omega^2 D (\epsilon^2 - l^2)) - \omega^2 \beta^2 \left(\frac{\mu_0}{\epsilon} (\epsilon^2 - l^2) + \frac{\epsilon_x}{\mu} D \right)$$

De la même façon, nous pouvons déduire l'équation d'onde du champ magnétique $\vec{H}$ à partir de l'équation de Maxwell-Ampère (2.6), ce qui donne l'expression :

$$\vec{\nabla} \Lambda([\epsilon_{(ox)}]^{-1} \vec{\nabla} \Lambda \vec{H}) - \omega^2 [\mu_{(ox)}] \vec{H} = 0 \quad (2.17)$$

En suivant les mêmes étapes relatives à la détermination de l'équation d'onde du champ électrique, ou par une simple permutation ($l \leftrightarrow k ; \mu_0 \leftrightarrow \epsilon_x ; \mu \leftrightarrow \epsilon$), nous obtenons l'équation d'onde de la composante normale $\tilde{H}_y$ du champ magnétique qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^4 \tilde{H}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.18)$$

Les coefficients f_1 et f_2 des équations de propagations $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ sont les mêmes.

2.5.2. Cas de la polarisation selon (oy) $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{y}$

Les tenseurs ϵ et μ sont donnés dans ce cas par :

$$[\mu_{(oy)}] = \begin{bmatrix} \mu & 0 & jk \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -jk & 0 & \mu \end{bmatrix} ; \quad [\epsilon_{(oy)}] = \begin{bmatrix} \epsilon & 0 & jl \\ 0 & \epsilon_y & 0 \\ -jl & 0 & \epsilon \end{bmatrix}$$

De même, nous pouvons déterminer l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ dans la couche à ferrite d'indice m selon l'expression:

$$\vec{\nabla} \Lambda([\mu_{(oy)}]^{-1} \vec{\nabla} \Lambda \vec{E}) - \omega^2 [\epsilon_{(oy)}] \vec{E} = 0 \quad (2.19)$$

sachant que :

$$[\mu_{(oy)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{D} & 0 & -\frac{jk}{D} \\ 0 & \frac{1}{\mu_0} & 0 \\ \frac{jk}{D} & 0 & \frac{\mu}{D} \end{bmatrix} \quad \text{avec } D = \mu^2 - k^2$$

Après le développement de l'expression ci-dessus, il vient :

$$\begin{bmatrix} \left(-\mu K_y^2 + \frac{\beta^2 D}{\mu_0} - \omega^2 \varepsilon D \right) & -(\beta k + j\alpha_n \mu) K_y & \left(jk K_y^2 - \frac{\beta \alpha_n D}{\mu_0} - j\omega^2 l D \right) \\ (\beta k - j\alpha_n \mu) K_y & (\beta^2 \mu + \alpha_n^2 \mu - \omega^2 \varepsilon_y D) & -(j\beta \mu + \alpha_n k) K_y \\ \left(-\left(\frac{\alpha_n \beta D}{\mu_0} + jk K_y^2 \right) + j\omega^2 l D \right) & (-j\beta \mu + \alpha_n k) K_y & \left(\frac{\alpha_n^2 D}{\mu_0} - \mu K_y^2 - \omega^2 \varepsilon D \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalement après l'annulation du déterminant de ce système matriciel, nous pouvons déterminer l'équation d'onde du champ électrique $\vec{E}$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_1 K_y^4 + F_2 K_y^2 + F_3 = 0 \quad \text{où} \quad K_y^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \quad (2.20)$$

avec :

$$F_1 = -(\omega^2 \varepsilon_y D^2)$$

$$F_2 = -\omega^2 \varepsilon_y D^2 \left[-(\alpha_n^2 + \beta^2) \left[\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right] + 2\omega^2 (kl + \mu \varepsilon) \right]$$

$$F_3 = -\omega^2 \varepsilon_y D^2 \left[\frac{\mu}{\mu_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} (\alpha_n^2 + \beta^2)^2 + \omega^4 D (\varepsilon^2 - l^2) - \omega^2 (\alpha_n^2 + \beta^2) \left(\frac{\mu}{\varepsilon_y} (\varepsilon^2 - l^2) + \frac{\varepsilon}{\mu_0} D \right) \right]$$

Ainsi, l'équation d'onde pour la composante normale $\tilde{E}_y$ devient:

$$\frac{\partial^4 \tilde{E}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.21)$$

sachant que :

$$f_1 = -(\alpha_n^2 + \beta^2) \left[\frac{\mu}{\mu_0} + \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} \right] + 2\omega^2 (kl + \mu \varepsilon)$$

$$f_2 = \frac{\mu}{\mu_0} \frac{\varepsilon}{\varepsilon_y} (\alpha_n^2 + \beta^2)^2 + \omega^4 D (\varepsilon^2 - l^2) - \omega^2 (\alpha_n^2 + \beta^2) \left(\frac{\mu}{\varepsilon_y} (\varepsilon^2 - l^2) + \frac{\varepsilon}{\mu_0} D \right)$$

En suivant les mêmes étapes relatives à la détermination de l'équation d'onde du champ électrique, ou par une simple permutation ($l \Leftrightarrow k$; $\mu_0 \Leftrightarrow \varepsilon_y$; $\mu \Leftrightarrow \varepsilon$), nous obtenons l'équation d'onde de la composante normale $\tilde{H}_y$ du champ magnétique qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^4 \tilde{H}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.22)$$

Les coefficients f_1 et f_2 des équations de propagations $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ sont les même.

2.5.3. Cas de la polarisation selon (oz) $\vec{H}_a = H_a \hat{z}$

Les tenseurs ϵ et μ sont donnés dans ce cas par :

$$[\mu_{(oz)}] = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} ; \quad [\epsilon_{(oz)}] = \begin{bmatrix} \epsilon & -jl & 0 \\ jl & \epsilon & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_z \end{bmatrix}$$

De même, nous pouvons déterminer l'équation de propagation du champ $\vec{E}$ dans la couche à ferrite d'indice m selon l'expression:

$$\vec{\nabla} \Lambda([\mu_{(oz)}]^{-1} \vec{\nabla} \Lambda \vec{E}) - \omega^2 [\epsilon_{(oz)}] \vec{E} = 0 \quad (2.23)$$

sachant que:

$$[\mu_{(oz)}]^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{\mu}{D} & \frac{jk}{D} & 0 \\ -\frac{jk}{D} & \frac{\mu}{D} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\mu_0} \end{bmatrix} \quad \text{avec } D = \mu^2 - k^2$$

Après le développement de l'expression ci-dessus, il vient :

$$\begin{bmatrix} \left(-\frac{D}{\mu_0} K_y^2 + \beta^2 \mu - \omega^2 \epsilon D \right) & \left(\frac{-j\alpha_n D}{\mu_0} K_y + j\beta^2 k + j\omega^2 l D \right) & (\beta k K_y - \beta \alpha_n \mu) \\ \left(-j\beta^2 k - \frac{j\alpha_n D}{\mu_0} K_y - j\omega^2 l D \right) & \left(\beta^2 \mu + \frac{\alpha_n^2 D}{\mu_0} - \omega^2 \epsilon D \right) & (-j\beta \mu K_y + j\beta \alpha_n k) \\ (-\alpha_n \beta \mu - \beta k K_y) & (-j\alpha_n \beta k - j\beta \mu K_y) & (\alpha_n^2 \mu - \mu K_y^2 - \omega^2 \epsilon_z D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_y \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Finalement après l'annulation du déterminant de ce système matriciel, nous pouvons déterminer l'équation d'onde du champ électrique $\vec{E}$ qui s'écrit sous la forme suivante :

$$F_1 K_y^4 + F_2 K_y^2 + F_3 = 0 \quad \text{où} \quad K_y^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} \quad (2.24)$$

avec :

$$\begin{aligned} F_1 &= -\left(\frac{D^2 \omega^2 \varepsilon \mu}{\mu_0}\right) \\ F_2 &= -\frac{D^2 \omega^2 \varepsilon \mu}{\mu_0} \left[-2\alpha_n^2 - \beta^2 \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} + \frac{\mu_0}{\mu} \right) + \omega^2 \left(\frac{\varepsilon_z D}{\mu} + \frac{\mu_0}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - l^2) \right) \right] \\ F_3 &= -\frac{D^2 \omega^2 \varepsilon \mu}{\mu_0} \left[\left(\beta^4 \frac{\varepsilon_z \mu_0}{\varepsilon \mu} + \alpha_n^4 \right) + \beta^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \right) - \omega^2 \frac{\varepsilon_z \mu_0}{\varepsilon \mu} (2\beta^2 (\mu \varepsilon + kl) - \omega^2 D (\varepsilon^2 - l^2)) \right. \\ &\quad \left. - \omega^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - l^2) + \frac{\varepsilon_z D}{\mu} \right) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, l'équation d'onde pour la composante normale $\tilde{E}_y$ devient:

$$\frac{\partial^4 \tilde{E}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{E}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.25)$$

sachant que :

$$\begin{aligned} f_1 &= -2\alpha_n^2 - \beta^2 \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} + \frac{\mu_0}{\mu} \right) + \omega^2 \left(\frac{\varepsilon_z D}{\mu} + \frac{\mu_0}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - l^2) \right) \\ f_2 &= \left(\beta^4 \frac{\varepsilon_z \mu_0}{\varepsilon \mu} + \alpha_n^4 \right) + \beta^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\mu} + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon} \right) - \omega^2 \frac{\varepsilon_z \mu_0}{\varepsilon \mu} (2\beta^2 (\mu \varepsilon + kl) - \omega^2 D (\varepsilon^2 - l^2)) - \omega^2 \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_0}{\varepsilon} (\varepsilon^2 - l^2) + \frac{\varepsilon_z D}{\mu} \right) \end{aligned}$$

En suivant les mêmes étapes relatives à la détermination de l'équation d'onde du champ électrique, et par une simple permutation ($l \Leftrightarrow k$; $\mu_0 \Leftrightarrow \varepsilon_z$; $\mu \Leftrightarrow \varepsilon$), nous obtenons l'équation d'onde de la composante normale $\tilde{H}_y$ du champ magnétique qui s'écrit sous la forme suivante :

$$\frac{\partial^4 \tilde{H}_y}{\partial y^4} + f_1 \frac{\partial^2 \tilde{H}_y}{\partial y^2} + f_2 = 0 \quad (2.26)$$

Les coefficients f_1 et f_2 des équations de propagations $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ sont les mêmes.

Finalement, l'équation d'onde des composantes $\tilde{E}_{ym}$ et $\tilde{H}_{ym}$ dans la couche diélectrique anisotrope à ferrite d'indice (m) pour les trois cas de polarisation, se résume par l'équation différentielle :

$$\frac{\partial^4 (\tilde{E}_{ym} \text{ ou } \tilde{H}_{ym})}{\partial y^4} + f_{1m} \frac{\partial^2 (\tilde{E}_{ym} \text{ ou } \tilde{H}_{ym})}{\partial y^2} + f_{2m} = 0 \quad (2.27)$$

Dans laquelle les coefficients f_{1m} et f_{2m} diffèrent selon le type de polarisation du champ magnétique statique

2.5.4. Résolution des équations d'onde

Les solutions des équations d'onde pour les trois cas de polarisation se présentent, dans une couche à ferrite d'indice m , sous la forme suivante :

Pour le mode LSM

$$\tilde{E}_{ym} = A_m^e \sinh(\gamma_m^a (y - H_{m-1})) + B_m^e \cosh(\gamma_m^b (y - H_{m-1})) \quad (2.28)$$

Pour le mode LSE

$$\tilde{H}_{ym} = A_m^h \sinh(\gamma_m^a (y - H_{m-1})) + B_m^h \cosh(\gamma_m^b (y - H_{m-1})) \quad (2.29)$$

avec :

$$\gamma_m^a = \sqrt{\frac{-f_1 - (f_1^2 - 4f_2)^{1/2}}{2}} \quad \text{et} \quad \gamma_m^b = \sqrt{\frac{-f_1 + (f_1^2 - 4f_2)^{1/2}}{2}}$$

2.6. Equation de propagation dans les couches diélectriques anisotropes

2.6.1. Axe optique parallèle à (ox)

Les tenseurs ε et μ sont donnés dans ce cas par :

$$[\mu_{(ox)}] = \begin{bmatrix} \mu_x & 0 & 0 \\ 0 & \mu_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu_c \end{bmatrix} \quad ; \quad [\varepsilon_{(ox)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, on établit les équations de propagation des champs normaux $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ comme suit :

$$K_y^4 + f_1 K_y^2 + f_2 = 0 \quad \text{où} \quad K_y^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} (\tilde{E}_y \text{ ou } \tilde{H}_y) \quad (2.30)$$

avec :

$$f_1 = -2\beta^2 - \alpha_n^2 \left(\frac{\mu_x}{\mu_c} + \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_c} \right) + \omega^2 (\varepsilon_x \mu_c + \varepsilon_c \mu_x)$$

$$f_2 = -2\alpha_n^2 \omega^2 \varepsilon_x \mu_x + \alpha_n^4 \frac{\varepsilon_x \mu_x}{\varepsilon_c \mu_c} + \beta^4 + \alpha_n^2 \beta^2 \left(\frac{\mu_x}{\mu_c} + \frac{\varepsilon_x}{\varepsilon_c} \right) - \beta^2 \omega^2 (\varepsilon_x \mu_c + \varepsilon_c \mu_x) + \omega^4 \varepsilon_c \mu_c \varepsilon_x \mu_x$$

2.6.2. Axe optique parallèle à (oz)

Les tenseurs ε et μ sont donnés dans ce cas par :

$$[\mu_{(oz)}] = \begin{bmatrix} \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & \mu_c & 0 \\ 0 & 0 & \mu_z \end{bmatrix} ; \quad [\varepsilon_{(oz)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_c & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, on établit les équations de propagation des champs normaux $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ comme suit :

$$K_y^4 + f_1 K_y^2 + f_2 = 0 \quad \text{où} \quad K_y^n = \frac{\partial^n}{\partial y^n} (\tilde{E}_y \text{ ou } \tilde{H}_y) \quad (2.31)$$

avec :

$$f_1 = -2\alpha_n^2 - \beta^2 \left(\frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_c} + \frac{\mu_z}{\mu_c} \right) + \omega^2 (\varepsilon_c \mu_z + \varepsilon_z \mu_c)$$

$$f_2 = -2\beta^2 \omega^2 \varepsilon_z \mu_z + \beta^4 \frac{\varepsilon_z \mu_z}{\varepsilon_c \mu_c} + \alpha_n^4 + \alpha_n^2 \beta^2 \left(\frac{\mu_z}{\mu_c} + \frac{\varepsilon_z}{\varepsilon_c} \right) - \alpha_n^2 \omega^2 (\varepsilon_z \mu_c + \varepsilon_c \mu_z) + \omega^4 \varepsilon_c \mu_c \varepsilon_z \mu_z$$

2.6.3. Axe optique parallèle à (oy)

Les tenseurs ε et μ sont donnés dans ce cas par :

$$[\mu_{(oy)}] = \begin{bmatrix} \mu_c & 0 & 0 \\ 0 & \mu_y & 0 \\ 0 & 0 & \mu_c \end{bmatrix} ; \quad [\varepsilon_{(oy)}] = \begin{bmatrix} \varepsilon_c & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_c \end{bmatrix}$$

En utilisant les équations de Maxwell dans le domaine spectral, on établit les équations de propagation des champs normaux E_y et H_y comme suit :

Pour le mode L.S.M

$$\frac{\partial^2 \tilde{E}_{y_i}}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSM})^2 \tilde{E}_{y_i} = 0 \quad (2.32)$$

$$\text{avec : } (\gamma_i^{LSM})^2 = \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{yi}} [(\alpha_n^2 + \beta^2) - \omega^2 \mu_{ci} \varepsilon_{yi}] ; \quad (i \in [1, (m-1)] \cup [(m+1), N])$$

Pour le mode L.S.E

$$\frac{\partial^2 \tilde{H}_{yi}}{\partial y^2} - (\gamma_i^{LSE})^2 \tilde{H}_{yi} = 0 \quad (2.33)$$

$$\text{avec : } (\gamma_i^{LSE})^2 = \frac{\mu_{ci}}{\mu_{yi}} [(\alpha_n^2 + \beta^2) - \omega^2 \varepsilon_{ci} \mu_{yi}] \quad ; \quad (i \in [1, (m-1)] \cup [(m+1), N])$$

2.6.4. Résolution des équations d'onde

Les solutions des équations d'onde pour les deux cas de la polarisation d'un champ magnétique statique selon (ox) et (oz) se présentent, dans une couche diélectrique anisotrope d'indice i , sous la forme suivante :

Pour le mode LSM

$$\tilde{E}_{yi} = A_i^e \sinh(\gamma_i^a (y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^b (y - H_{i-1})) \quad (2.34)$$

Pour le mode LSE

$$\tilde{H}_{yi} = A_i^h \sinh(\gamma_i^a (y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^b (y - H_{i-1})) \quad (2.35)$$

avec :

$$\gamma_i^a = \sqrt{\frac{-f_1 - (f_1^2 - 4f_2)^{1/2}}{2}} \quad ; \quad \gamma_i^b = \sqrt{\frac{-f_1 + (f_1^2 - 4f_2)^{1/2}}{2}} \quad \text{et } i \in [1, (m-1)] \cup [(m+1), N]$$

Pour le cas de la polarisation selon (oy), les solutions des équations d'onde se présentent, dans une couche diélectrique anisotrope d'indice i , sous la forme suivante :

Pour le mode LSM

$$\tilde{E}_{yi} = A_i^e \sinh(\gamma_i^a (y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^a (y - H_{i-1})) \quad (2.36)$$

Pour le mode LSE

$$\tilde{H}_{yi} = A_i^h \sinh(\gamma_i^b (y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^b (y - H_{i-1})) \quad (2.37)$$

$$\text{avec : } (\gamma_i^a)^2 = \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu_{ci} \varepsilon_{yi}] \quad \text{et} \quad (\gamma_i^b)^2 = \frac{\mu_{ci}}{\mu_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{ci} \mu_{yi}]$$

où $i \in [1, (m - 1)] \cup [(m + 1), N]$

2.7. Calcul des composantes tangentielles de champ électromagnétique en fonction des composantes normales:

2.7.1. Cas du ferrite

2.7.1.1. Cas de la polarisation selon (ox)

La décomposition des équations de Maxwell dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega\mu_0 \tilde{H}_x \quad (2.38)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega(\mu \tilde{H}_y - jk \tilde{H}_z) \quad (2.39)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_y + \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = j\omega(jk \tilde{H}_y + \mu \tilde{H}_z) \quad (2.40)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega \epsilon_x \tilde{E}_x \quad (2.41)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega(\epsilon \tilde{E}_y - jl \tilde{E}_z) \quad (2.42)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega(jl \tilde{E}_y + \epsilon \tilde{E}_z) \quad (2.43)$$

$$-j\alpha_n \epsilon_x \tilde{E}_x - j\beta \epsilon \tilde{E}_z + \epsilon \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - jl \frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + \beta l \tilde{E}_y = 0 \quad (2.44)$$

$$-j\alpha_n \mu_0 \tilde{H}_x - j\beta \mu \tilde{H}_z + \mu \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - jk \frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + \beta k \tilde{H}_y = 0 \quad (2.45)$$

On tire $\tilde{H}_x$ à partir de l'équation (2.42)

$$\tilde{H}_x = \frac{\alpha_n}{\beta} \tilde{H}_z - \frac{\omega \epsilon}{\beta} \tilde{E}_y + \frac{j l \omega}{\beta} \tilde{E}_z \quad (2.46)$$

et $\tilde{H}_z$ à partir de l'équation (2.39)

$$\tilde{H}_z = -\frac{j\alpha_n}{\omega k} \tilde{E}_z + \frac{j\beta}{\omega k} \tilde{E}_x - \frac{j\mu}{k} \tilde{H}_y \quad (2.47)$$

On remplace (2.47) dans (2.46), il vient:

$$\tilde{H}_x = \frac{(-j\alpha_n^2 + j l \omega^2 k)}{\beta \omega k} \tilde{E}_z + \frac{j\alpha_n}{\omega k} \tilde{E}_x - \frac{j\mu\alpha_n}{\beta k} \tilde{H}_y - \frac{\omega\epsilon}{\beta} \tilde{E}_y \quad (2.48)$$

On tire $\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y}$ à partir de l'équation (2.44)

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} = -\frac{\alpha_n \epsilon_x}{l} \tilde{E}_x - \frac{\beta \epsilon}{l} \tilde{E}_z - \frac{j\epsilon}{l} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \tilde{E}_y \quad (2.49)$$

En portant (2.48) et (2.49) dans l'équation (2.38), il vient:

$$\frac{\alpha_n(\mu_0 l + \epsilon_x k)}{l k} \tilde{E}_x + \frac{(\mu_0 l(l\omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 k \epsilon)}{\beta k l} \tilde{E}_z + \frac{j\epsilon}{l} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega\mu_0\mu\alpha_n}{\beta k} \tilde{H}_y + \frac{j\omega^2\mu_0\epsilon}{\beta} \tilde{E}_y = 0 \quad (2.50)$$

Après avoir déterminé $\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y}$ à partir de (2.41) et en portant ce résultat ainsi que celui de $\tilde{H}_x$ et $\tilde{H}_z$ dans (2.45), il vient:

$$\frac{(\alpha_n\mu_0(l\omega^2 k - \alpha_n^2) - \beta^2\mu\alpha_n)}{\beta \omega k} \tilde{E}_z + \frac{(\alpha_n^2\mu_0 + \beta^2\mu + k^2\omega^2\epsilon_x)}{\omega k} \tilde{E}_x - \frac{(\alpha_n^2\mu_0\mu + \beta^2\mu^2)}{\beta k} \tilde{H}_y + \frac{j\alpha_n\mu_0\omega\epsilon}{\beta} \tilde{E}_y + \mu \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} = 0 \quad (2.51)$$

Après résolution du système d'équations, (2.50) et (2.51), nous obtenons:

$$\tilde{E}_z = A_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3 \tilde{H}_y + A_4 \tilde{E}_y \quad (2.52)$$

sachant que : $A_1 = \frac{(\alpha_n^2\mu_0 + \beta^2\mu + k^2\omega^2\epsilon_x)j\epsilon}{\omega\alpha_n(\mu_0 l + \epsilon_x k)} \frac{1}{a}$

$$A_2 = -\mu \frac{1}{a}$$

$$A_3 = \left[-\frac{(\alpha_n^2\mu_0 + \beta^2\mu + k^2\omega^2\epsilon_x)l\mu_0\mu}{\beta k(\mu_0 l + \epsilon_x k)} + \frac{\mu(\alpha_n^2\mu_0 + \beta^2\mu)}{\beta k} \right] \frac{1}{a}$$

$$A_4 = \left[\frac{j\omega\mu_0\epsilon l[(\alpha_n^2\mu_0 + \beta^2\mu + k^2\omega^2\epsilon_x)]}{\beta\alpha_n(\mu_0 l + \epsilon_x k)} - \frac{j\alpha_n\omega\mu_0\epsilon}{\beta} \right] \frac{1}{a}$$

et

$$a = \frac{[\alpha_n \mu_0 (l \omega^2 k - \alpha_n^2) - \beta^2 \mu \alpha_n][\alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)] - [(\alpha_n^2 \mu_0 + \beta^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_x)][\mu_0 l (l \omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 \varepsilon k]}{\beta \omega k \alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)}$$

De même pour $\tilde{E}_x$, il vient :

$$\tilde{E}_x = A_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3' \tilde{H}_y + A_4' \tilde{E}_y \quad (2.53)$$

$$\text{avec : } A_1' = \frac{(\mu_0 l (l \omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 k \varepsilon) A_1 - j \varepsilon k \beta}{\beta \alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)}$$

$$A_2' = \frac{(\mu_0 l (l \omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 k \varepsilon)}{\beta \alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)} A_2$$

$$A_3' = \frac{(\mu_0 l (l \omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 k \varepsilon) A_3 + l \omega \mu_0 \mu \alpha_n}{\beta \alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)}$$

$$A_4' = \frac{(\mu_0 l (l \omega^2 k - \alpha_n^2) + \beta^2 k \varepsilon) A_4 - j l k \omega^2 \mu_0 \varepsilon}{\beta \alpha_n (\mu_0 l + \varepsilon_x k)}$$

En substituant ensuite (2.52) et (2.53) dans (2.47), il vient:

$$\tilde{H}_z = B_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3 \tilde{H}_y + B_4 \tilde{E}_y \quad (2.54)$$

$$\text{sachant que : } B_1 = \frac{j(-\alpha_n A_1 + \beta A_1')}{\omega k}$$

$$B_2 = \frac{j(-\alpha_n A_2 + \beta A_2')}{\omega k}$$

$$B_3 = \frac{j(-\alpha_n A_3 + \beta A_3' - \mu \omega)}{\omega k}$$

$$B_4 = -\frac{j(-\alpha_n A_4 + \beta A_4')}{\omega k}$$

De même, en remplaçant (2.52) et (2.53) dans (2.48), il vient:

$$\tilde{H}_x = B_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3' \tilde{H}_y + B_4' \tilde{E}_y \quad (2.55)$$

sachant que : $B_1' = \frac{j[(l\omega^2 k - \alpha_n^2)A_1 + \alpha_n \beta A_1']}{\omega k \beta}$

$$B_2' = \frac{j[(l\omega^2 k - \alpha_n^2)A_2 + \alpha_n \beta A_2']}{\omega k \beta}$$

$$B_3' = \frac{j[(l\omega^2 k - \alpha_n^2)A_3 + \alpha_n \beta A_3' - \mu \alpha_n \omega]}{\omega k \beta}$$

$$B_4' = \frac{j[(l\omega^2 k - \alpha_n^2)A_4 + \alpha_n \beta A_4'] - \omega^2 k \varepsilon}{\omega k \beta}$$

2.7.1.2. Polarisations selon (oy)

Les composantes tangentielles du champ EM s'écrivent selon les équations suivantes [Annexe D] :

$$\tilde{E}_x = \acute{A}_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \acute{A}_3 \tilde{H}_y \quad (2.56)$$

avec $\acute{A}_1 = -j \frac{\alpha_n \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$ et $\acute{A}_3 = j \frac{\omega \mu_0 (l \alpha_n - j \beta \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$

$$\tilde{E}_z = A_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_3 \tilde{H}_y \quad (2.57)$$

sachant que $A_1 = -j \frac{\beta \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$; $A_3 = j \frac{\omega \mu_0 (l \beta + j \alpha_n \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$

$$\tilde{H}_x = \acute{B}_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \acute{B}_4 \tilde{E}_y \quad (2.58)$$

avec $\acute{B}_2 = -j \frac{\mu_0 \alpha_n}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)}$; $\acute{B}_4 = -\omega \varepsilon_y \frac{(j k \alpha_n + \beta \mu)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$

$$\tilde{H}_z = B_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_4 \tilde{E}_y \quad (2.59)$$

avec $B_2 = -j \frac{\mu_0 \beta}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)}$ et $B_4 = \omega \varepsilon_y \frac{(\alpha_n \mu - j k \beta)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)}$

Finalement, en résumant, les composants tangentiels du champ EM sont données selon:

$$\tilde{E}_x = -j \frac{\alpha_n \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + j \frac{\omega \mu_0 (l \alpha_n - j \beta \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{H}_y \quad (2.60)$$

$$\tilde{E}_z = -j \frac{\beta \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + j \frac{\omega \mu_0 (l \beta + j \alpha_n \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{H}_y \quad (2.61)$$

$$\tilde{H}_x = -j \frac{\mu_0 \alpha_n}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \omega \varepsilon_y \frac{(j k \alpha_n + \beta \mu)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{E}_y \quad (2.62)$$

$$\tilde{H}_z = -j \frac{\mu_0 \beta}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \omega \varepsilon_y \frac{(\alpha_n \mu - j k \beta)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{E}_y \quad (2.63)$$

2.7.1.3. Polarisations selon (oz)

Les composantes tangentiels du champ EM s'écrivent selon les équations suivantes :
[Annexe D]

$$\tilde{E}_x = A_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3' \tilde{H}_y + A_4' \tilde{E}_y \quad (2.64)$$

sachant que : $A_1' = \frac{(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) j \varepsilon}{\omega \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \frac{1}{a}$

$$A_2' = -\mu \frac{1}{a}$$

$$A_3' = \left[\frac{(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) (\mu_0 \mu l)}{\alpha_n k (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} - \frac{\mu (\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu)}{\alpha_n k} \right] \frac{1}{a}$$

$$A_4' = \left[\frac{-(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) j l \omega \mu_0 \varepsilon}{\alpha_n \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} + \frac{j \beta \mu_0 \omega \varepsilon}{\alpha_n} \right] \frac{1}{a}$$

et

$$a = \frac{[\beta \mu_0 (l \omega^2 k - \beta^2) - \alpha_n^2 \mu \beta][\beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)] - [\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z][\mu_0 l (l \omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k]}{\alpha_n \omega k \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)}$$

$$\tilde{E}_z = A_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3 \tilde{H}_y + A_4 \tilde{E}_y \quad (2.65)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \frac{-[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_1' + j\alpha_n \varepsilon k]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \\
 A_2 &= -\frac{[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_2']}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \\
 A_3 &= -\frac{[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_3' + \omega \mu_0 \beta \mu l]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \\
 A_4 &= \frac{-[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_4' + jlk\omega^2 \mu_0 \varepsilon]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \\
 \tilde{H}_x &= B_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3' \tilde{H}_y + B_4' \tilde{E}_y
 \end{aligned} \tag{2.66}$$

sachant que : $B_1' = \frac{j(\alpha_n A_1 - \beta A_1')}{k\omega}$

$$B_2' = \frac{j(\alpha_n A_2 - \beta A_2')}{k\omega}$$

$$B_3' = \frac{j(\alpha_n A_3 - \beta A_3' + \mu\omega)}{k\omega}$$

$$B_4' = \frac{j(\alpha_n A_4 - \beta A_4')}{k\omega}$$

$$\tilde{H}_z = B_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3 \tilde{H}_y + B_4 \tilde{E}_y \tag{2.67}$$

sachant que : $B_1 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_1' + \beta\alpha_n A_1]}{\omega k \alpha_n}$

$$B_2 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_2' + \beta\alpha_n A_2]}{\omega k \alpha_n}$$

$$B_3 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_3' + \beta\alpha_n A_3 + \beta\mu\omega]}{\omega k \alpha_n}$$

$$B_4 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_4' + \beta\alpha_n A_4] + \omega^2 \varepsilon k}{\omega k \alpha_n}$$

2.7.2. Cas des couches diélectriques anisotropes

2.7.2.1. Axe optique parallèle à (ox)

Les composantes tangentielles du champ EM s'écrivent selon les équations suivantes :
[Annexe D]

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \varepsilon_c}{\varepsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_x} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\varepsilon_c \beta \omega \mu_c}{\varepsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_x} \tilde{H}_y \quad (2.68)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \varepsilon_c}{\varepsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_x} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_c \varepsilon_x}{\varepsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_x} \tilde{H}_y \quad (2.69)$$

$$\tilde{H}_x = \frac{-j \mu_c \alpha_n}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \mu_c \omega \varepsilon_c}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \tilde{E}_y \quad (2.70)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j \mu_c \beta}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\mu_x \omega \varepsilon_c \alpha_n}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \tilde{E}_y \quad (2.71)$$

2.7.2.2. Axe optique parallèle à (oy)

Les composantes tangentielles du champ EM s'écrivent selon les équations suivantes :
[Annexe D]

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \varepsilon_y}{\varepsilon_c (\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\beta \omega \mu_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{H}_y \quad (2.72)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \varepsilon_y}{\varepsilon_c (\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{H}_y \quad (2.73)$$

$$\tilde{H}_x = \frac{-j \mu_y \alpha_n}{\mu_c (\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \omega \varepsilon_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{E}_y \quad (2.74)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j \mu_y \beta}{\mu_c (\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\omega \varepsilon_y \alpha_n}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{E}_y \quad (2.75)$$

2.7.2.3. Axe optique parallèle à (oz)

Les composantes tangentielles du champ EM s'écrivent selon les équations suivantes :
[Annexe D]

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \varepsilon_c}{\varepsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\varepsilon_z \beta \omega \mu_c}{\varepsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_c} \tilde{H}_y \quad (2.76)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \varepsilon_c}{\varepsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_c \varepsilon_c}{\varepsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \varepsilon_c} \tilde{H}_y \quad (2.77)$$

$$\tilde{H}_x = \frac{-j \mu_c \alpha_n}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \mu_z \omega \varepsilon_c}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \tilde{E}_y \quad (2.78)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j \mu_c \beta}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\mu_c \omega \varepsilon_c \alpha_n}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \tilde{E}_y \quad (2.79)$$

2.8. Processus de calcul des fonctions de Green

2.8.1. Technique *Immittance approach*

Le calcul des fonctions de Green, par la méthode directe basée sur l'application des conditions de continuité à partir de la connaissance des expressions des champs dans le repère cartésien, exige une inversion analytique d'une matrice dont l'ordre est égal à $4x(N-1)$, N étant le nombre total de couches diélectriques, cette difficulté croît avec la complexité de la structure à étudier. Pour palier à cela, une méthode dite *immittance approach* a été proposée dans la littérature par Itoh [11] pour résoudre le problème lié à l'obtention des fonctions de Green pour des structures complexes, notamment les lignes multicouches et multiconductrices. Cette méthode est basée sur la technique des lignes transverses associée à un changement de repère par découplage des modes LSE et LSM.

Dans un souci de simplicité des calculs, un changement de repère adéquat est adopté. Il s'agit d'écrire les conditions aux limites d'une onde plane du spectre du champ électromagnétique, qui ne se propage pas en général, suivant les axes du repère (x,y,z) , puisque les ondes planes considérées ont une incidence variable par rapport à ce repère.

Une telle onde se propage suivant l'axe $\vec{oy}$; on complète alors le repère par deux axes $\vec{ou}$ et $\vec{ov}$ perpendiculaire à $\vec{oy}$. L'axe $\vec{oy}$ est commun aux deux repères. On passe du repère initial au repère d'Itoh par une simple rotation d'angle $\theta = \arccos \left[\frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 + \alpha_n^2}} \right]$ autour de l'axe $\vec{oy}$

(figure 2.2). Une simple rotation d'angle opposé permet de revenir au repère initial.

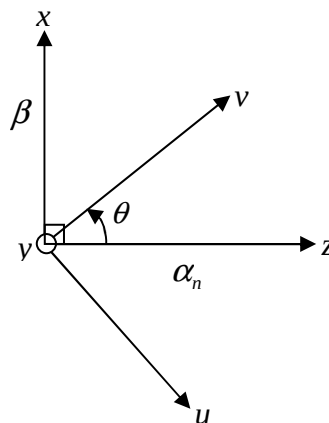


Figure 2.2 Repère d'Itoh

Les composantes du champ EM peuvent être considérées comme la superposition d'ondes inhomogènes en y , se propageant dans la direction θ , par rapport à l'axe y . L'idée maintenant est d'exprimer les nouvelles composantes du champ et les conditions aux limites dans le nouveau repère d'Itoh (v, y, u).

Pour chaque valeur de θ , les champs peuvent être décomposés en modes LSE de composantes ($\tilde{H}_y, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v$) et en mode LSM de composantes ($\tilde{E}_y, \tilde{E}_v, \tilde{H}_u$) dans le système de coordonnées (v, y, u).

2.8.1.1. Cas du ferrite

Le passage du repère cartésien (x, y, z) au repère d'Itoh (v, y, u) se fait au moyen des relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} C_u \\ C_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_x \\ C_z \end{bmatrix} \quad \text{où } C=E \text{ ou } H \quad (2.80)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} : \text{est appelée matrice de passage.}$$

$$\text{avec } \sin\theta = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} \text{ et } \cos\theta = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}}$$

2.8.1.2. Cas des couches diélectriques anisotropes

- **Axe optique parallèle à (ox)**

Le passage du repère cartésien (x, y, z) au repère d'Itoh (v, y, u) se fait au moyen des relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \varepsilon_x \sin\theta & \varepsilon_c \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_u \\ \tilde{H}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \mu_x \sin\theta & \mu_c \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix}$$

Posons :

$$P_{(ox)}^E = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \varepsilon_x \sin\theta & \varepsilon_c \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.81)$$

$$P_{(ox)}^H = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \mu_x \sin\theta & \mu_c \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

$P_{(ox)}^E$ et $P_{(ox)}^H$ sont les nouvelles matrices de passage du repère cartésien (x,y,z) vers (v,y,u) respectivement dans le mode LSE et LSM. Ces nouvelles matrices de passage permettent de faciliter le calcul des composantes du champ EM et d'obtenir un mode transverse dans le nouveau repères

- **Axe optique parallèle à (oz)**

Le passage du repère cartésien (x,y,z) au repère d'Itoh (v,y,u) se fait au moyen des relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u \\ \tilde{E}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \varepsilon_c \sin\theta & \varepsilon_z \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \\ \tilde{E}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{H}_u \\ \tilde{H}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \mu_c \sin\theta & \mu_z \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{H}_x \\ \tilde{H}_z \end{bmatrix}$$

$$P_{(oz)}^E = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \varepsilon_c \sin\theta & \varepsilon_z \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

$$P_{(oz)}^H = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \mu_c \sin\theta & \mu_z \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.84)$$

$P_{(oz)}^E$ et $P_{(oz)}^H$ sont les nouvelles matrices de passage vers le repère (v,y,u) respectivement dans le mode LSE et LSM.

- **Axe optique parallèle à (oy)**

Le passage du repère cartésien (x,y,z) au repère d'Itoh (v,y,u) se fait au moyen des relations suivantes:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u \text{ ou } \tilde{H}_u \\ \tilde{E}_v \text{ ou } \tilde{H}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \text{ ou } \tilde{H}_x \\ \tilde{E}_z \text{ ou } \tilde{H}_z \end{bmatrix}$$

$$P_{(oy)} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.85)$$

Avec : $\sin\theta = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}}$ et $\cos\theta = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}}$

$P_{(oy)}$ représente la matrice de passage.

Nous pourrions alors obtenir les composantes du champ EM dans le nouveau repère (u,y,v) via toutes ces matrices de passage.

2.8.2. Calcul des composantes du champ EM dans les nouveaux repères

2.8.2.1. Cas des couches diélectriques anisotropes

- **Axe optique parallèle à (ox) et (oz)**

Les composantes du champ EM dans le repère (u,y,v) s'écrivent selon les équations suivantes dans lesquels $\rho = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}$:

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_c}{\rho} \tilde{H}_y \quad (2.86)$$

$$\tilde{E}_v = \frac{-j \varepsilon_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (2.87)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega \varepsilon_c}{\rho} \tilde{E}_y \quad (2.88)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (2.89)$$

Pour le mode L.S.E ($\tilde{E}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_c}{\rho} \tilde{H}_y \quad (2.90)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (2.91)$$

Pour le mode L.S.M ($\tilde{H}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_v = \frac{-j \varepsilon_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (2.92)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega \varepsilon_c}{\rho} \tilde{E}_y \quad (2.93)$$

- **Axe optique parallèle à (oy)**

Les composantes du champ EM dans le repère (u,y,v) s'écrivent selon les équations suivantes :

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_y}{\rho} \tilde{H}_y \quad (2.94)$$

$$\tilde{E}_v = \frac{-j \varepsilon_y}{\rho \varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (2.95)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega \varepsilon_y}{\rho} \tilde{E}_y \quad (2.96)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_y}{\rho \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (2.97)$$

Pour le mode L.S.E ($\tilde{E}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_y}{\rho} \tilde{H}_y \quad (2.98)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_y}{\rho \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (2.99)$$

Pour le mode L.S.M ($\tilde{H}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_v = \frac{-j \varepsilon_y}{\rho \varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (2.100)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega \varepsilon_y}{\rho} \tilde{E}_y \quad (2.101)$$

2.8.2.2. Cas de la couche à ferrite

Les composantes du champ EM dans le repère (u,y,v) s'écrivent selon les équations suivantes :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_u \text{ ou } \tilde{H}_u \\ \tilde{E}_v \text{ ou } \tilde{H}_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{E}_x \text{ ou } \tilde{H}_x \\ \tilde{E}_z \text{ ou } \tilde{H}_z \end{bmatrix}$$

$$\text{avec : } \sin \theta = \frac{\alpha_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}} \quad \text{et} \quad \cos \theta = \frac{\beta_n}{\sqrt{\alpha_n^2 + \beta^2}}$$

$$\text{sachant que } \rho = \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$$

Les composantes du champ EM dans le repère (v,y,u) s'écrivent selon les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{um} &= -\tilde{E}_x \cos \theta + \tilde{E}_z \sin \theta \\ \tilde{E}_{vm} &= \tilde{E}_x \sin \theta + \tilde{E}_z \cos \theta \end{aligned}$$

Ce qui donne après avoir remplacé E_x et E_z par (2.64) et (2.65) respectivement :

$$\tilde{E}_{vm} = \left(\dot{A}_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dot{A}_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + \dot{A}_3 H_y + \dot{A}_4 E_y \right) \sin \theta + \left(A_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + A_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + A_3 H_y + A_4 E_y \right) \cos \theta \quad (2.102)$$

$$\tilde{E}_{um} = - \left(\dot{A}_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dot{A}_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + \dot{A}_3 H_y + \dot{A}_4 E_y \right) \cos \theta + \left(A_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + A_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + A_3 H_y + A_4 E_y \right) \sin \theta \quad (2.103)$$

D'autre part, nous avons :

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{um} &= -\tilde{H}_x \cos \theta + \tilde{H}_z \sin \theta \\ \tilde{H}_{vm} &= \tilde{H}_x \sin \theta + \tilde{H}_z \cos \theta \end{aligned}$$

Ce qui donne après avoir remplacé H_x et H_z par (2.66) et (2.67) respectivement :

$$\tilde{H}_{vm} = \left(\dot{B}_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dot{B}_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + \dot{B}_3 H_y + \dot{B}_4 E_y \right) \sin \theta + \left(B_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + B_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + B_3 H_y + B_4 E_y \right) \cos \theta \quad (2.104)$$

$$\tilde{H}_{um} = - \left(\dot{B}_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + \dot{B}_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + \dot{B}_3 H_y + \dot{B}_4 E_y \right) \cos \theta + \left(B_1 \frac{\partial E_y}{\partial y} + B_2 \frac{\partial H_y}{\partial y} + B_3 H_y + B_4 E_y \right) \sin \theta \quad (2.105)$$

Finalement, après avoir remplacé $\tilde{E}_y$ et $\tilde{H}_y$ par leurs expressions selon (2.28) et (2.29), nous obtenons les équations suivantes :

$$\tilde{E}_{vm} = \frac{1}{\rho} \left[\begin{aligned} &A_m^e \left((\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ &+ B_m^e \left((\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \\ &+ A_m^h \left((\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ &+ B_m^h \left((\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \end{aligned} \right] \quad (2.106)$$

$$\tilde{E}_{um} = \frac{1}{\rho} \left[\begin{aligned} &A_m^e \left((-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ &+ B_m^e \left((-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \\ &+ A_m^h \left((-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ &+ B_m^h \left((-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \end{aligned} \right] \quad (2.107)$$

$$\tilde{H}_{vm} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} A_m^e \left((\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ + B_m^e \left((\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \\ + A_m^h \left((\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ + B_m^h \left((\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \end{bmatrix} \quad (2.108)$$

$$\tilde{H}_{um} = \frac{1}{\rho} \begin{bmatrix} A_m^e \left((-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ + B_m^e \left((-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \\ + A_m^h \left((-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + (-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) \sinh(\gamma_m^a h_m) \right) \\ + B_m^h \left((-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) + (-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) \cosh(\gamma_m^b h_m) \right) \end{bmatrix} \quad (2.109)$$

2.8.3. Détermination des admittances équivalentes ramenées vers les interfaces diélectriques anisotropes

La détermination des admittances consiste dans un premier temps à calculer l'admittance équivalente ramenée du plan de masse inférieur jusqu'à l'interface non métallisée H_{m-1} (admittance appelée $\tilde{Y}_{-}^{e ou h}$) et celle ramenée du plan de masse supérieur jusqu'à l'autre interface non métallisée H_{m+1} (admittance appelée $\tilde{Y}_{+}^{e ou h}$).

2.8.3.1. Axe optique parallèle à (ox) et (oz)

A. Cas de la propagation par modes L.S.M

A.1. Détermination de $\tilde{Y}_{-}^e$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m-1)}^e$ calculée à l'interface diélectrique anisotrope d'indice **(m-1)** située *au-dessous* de la couche à ferrite **m** s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, avec j allant de 1 à (m-1) : [Annexe E]

$$\tilde{Y}_j^e = \tilde{Y}_j^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_j^a h_j) + S_j^{LSM} \cosh(\gamma_j^b h_j)}{\gamma_j^a \cosh(\gamma_j^a h_j) + S_j^{LSM} \gamma_j^b \sinh(\gamma_j^b h_j)} \quad (2.110)$$

$$S_j^{LSM} = \frac{B_j}{A_j} = \tilde{Y}_{(j-1)}^e \frac{\gamma_j^a}{\tilde{Y}_j^{LSM}} \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_j^{LSM} = \frac{|H_{uj}|}{|E_{vj}|}$$

A.2. Détermination de $\tilde{Y}_+^e$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m+1)}^e$ calculée à l'interface diélectrique d'indice **(m+1)** située *au-dessus* de la couche à ferrite **m** s'écrit en exécutant le processus itératif suivant avec j allant de N à (m+1) : (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^e = -\tilde{Y}_j^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_j^a h_j) + S_j^{LSM} \cosh(\gamma_j^b h_j)}{\gamma_j^a \cosh(\gamma_j^a h_j) + S_j^{LSM} \gamma_j^b \sinh(\gamma_j^b h_j)} \quad (2.111)$$

$$S_j^{LSM} = \frac{B_j}{A_j} = -\tilde{Y}_{(j+1)}^e \frac{\gamma_j^a}{\tilde{Y}_j^{LSM}} \quad et \quad \tilde{Y}_j^{LSM} = \frac{|H_{u_j}|}{|E_{v_j}|}$$

B. Cas de la propagation par mode L.S.E

B.1. Détermination de $\tilde{Y}_-^h$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m-1)}^h$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m-1)** située *au-dessous* de la couche du ferrite s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, avec j allant de 1 à (m-1): (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^h = \tilde{Y}_j^{LSE} \frac{S_j^{LSE} \gamma_j^a \cosh(\gamma_j^a h_j) + \gamma_j^b \sinh(\gamma_j^b h_j)}{S_j^{LSE} \sinh(\gamma_j^a h_j) + \cosh(\gamma_j^b h_j)} \quad (2.112)$$

$$S_j^{LSE} = \frac{A_j}{B_j} = \frac{\tilde{Y}_{(j-1)}^h}{\gamma_j^a \tilde{Y}_j^{LSE}} \quad et \quad \tilde{Y}_j^{LSE} = \frac{|H_{v_j}|}{|E_{u_j}|}$$

B.2. Détermination de $\tilde{Y}_+^h$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m+1)}^h$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m+1)** située *au-dessus* de la couche du ferrite est s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, dans lequel j varie de N à (m+1): (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^h = -\tilde{Y}_j^{LSE} \frac{S_j^{LSE} \gamma_j^a \cosh(\gamma_j^a h_j) + \gamma_j^b \sinh(\gamma_j^b h_j)}{S_j^{LSE} \sinh(\gamma_j^a h_j) + \cosh(\gamma_j^b h_j)} \quad (2.113)$$

$$S_j^{LSE} = \frac{A_j}{B_j} = \frac{-\tilde{Y}_{(j+1)}^h}{\gamma_j^a \tilde{Y}_j^{LSE}} \quad et \quad \tilde{Y}_j^{LSE} = \frac{|H_{v_j}|}{|E_j|}$$

2.8.3.2. Axe optique parallèle à (oy)

A. Cas de la propagation selon le mode L.S.M

A.1. Détermination de $\tilde{Y}_-^e$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m-1)}^e$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m-1)** située au-dessous de la couche du ferrite s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, dans lequel j varie de 1 à (m-1): (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^e = \tilde{Y}_j^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_j^{LSM} + \tilde{Y}_{(j-1)}^e \coth(\gamma_j^a h_j)]}{[\tilde{Y}_j^{LSM} \coth(\gamma_j^a h_j) + \tilde{Y}_{(j-1)}^e]} \quad (2.114)$$

avec : $\tilde{Y}_j^{LSM} = \frac{|H_{u_j}|}{|E_j|} \frac{1}{\gamma_j^a}$

A.2. Détermination de $\tilde{Y}_+^e$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m+1)}^e$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m+1)** située au-dessus de la couche du ferrite s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, dans lequel j varie de N à (m+1): (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^e = \tilde{Y}_j^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_j^{LSM} + \tilde{Y}_{(j+1)}^e \coth(\gamma_j^a h_j)]}{[\tilde{Y}_j^{LSM} \coth(\gamma_j^a h_j) + \tilde{Y}_{(j+1)}^e]} \quad (2.115)$$

avec : $\tilde{Y}_j^{LSM} = -\frac{|H_{u_j}|}{|E_{v_j}|} \frac{1}{\gamma_j^a}$

B. Cas de la propagation par mode L.S.E

B.1. Détermination de $\tilde{Y}_-^h$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m-1)}^h$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m-1)** située au-dessous de la couche du ferrite s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, dans lequel j varie de 1 à (m-1) : (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^h = \tilde{Y}_j^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_{(j-1)}^h \coth(\gamma_j^b h_j) + \tilde{Y}_j^{LSE}]}{[\tilde{Y}_{(j-1)}^h + \tilde{Y}_j^{LSE} \coth(\gamma_j^b h_j)]} \quad (2.116)$$

avec : $\tilde{Y}_j^{LSE} = \frac{|H_{v_j}|}{|E_{u_j}|} \gamma_j^b$

B.2. Détermination de $\tilde{Y}_+^h$

L'admittance équivalente $\tilde{Y}_{(m+1)}^h$ relative à la couche diélectrique anisotrope d'indice **(m+1)** située au-dessus de la couche du ferrite s'écrit en exécutant le processus itératif suivant, dans lequel j varie de N à (m+1) (voir Annexe E)

$$\tilde{Y}_j^h = \tilde{Y}_j^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_j^{LSE} + \tilde{Y}_{(j+1)}^h \coth(\gamma_j^b h_j)]}{[\tilde{Y}_j^{LSE} \coth(\gamma_j^b h_j) + \tilde{Y}_{(j+1)}^h]} \quad (2.117)$$

avec :

$$\tilde{Y}_j^{LSE} = -\frac{|H_{vj}|}{|E_{uj}|} \gamma_j^b$$

2.8.4. Application des conditions de continuité

Lorsqu'une onde électromagnétique traverse une surface qui limite un corps ou qui sépare un milieu d'un autre, les paramètres ϵ , μ et σ subissent des variations brusques. Il en résulte que les composantes du champ EM subissent des discontinuités sur cette interface de séparation (figure 2.3).

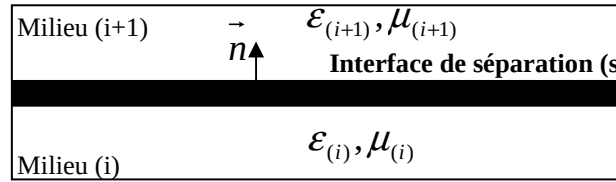


Figure 2.3 Surface de séparation entre deux milieux diélectriques

Les relations de continuité du champ électromagnétique à travers une surface séparant deux milieux, d'indice (i) et (i+1), sont données par :

$$\vec{n} \wedge (\vec{E}_{i+1} - \vec{E}_i) = 0 \quad (2.118)$$

$$\vec{n} \wedge (\vec{H}_{i+1} - \vec{H}_i) = \vec{J}_s \quad (2.119)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_{i+1} - \vec{D}_i) = \rho_s \quad (2.120)$$

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_{i+1} - \vec{B}_i) = 0 \quad (2.121)$$

ρ_s et $\vec{J}_s$ sont respectivement les densités de charges et de courant superficielles susceptibles d'exister sur l'interface. La normale $\vec{n}$ est orientée de (i) vers (i+1).

Afin d'exploiter les relations de continuité, on ne s'intéressera ici qu'aux composantes tangentielles des champs EM dans le domaine spectral, ces relations s'écrivent sous la forme suivante dans le repère cartésien (x,y,z) :

$$\tilde{E}_{z(i+1)} - \tilde{E}_{z(i)} = 0 \quad (2.122)$$

$$\tilde{E}_{x(i+1)} - \tilde{E}_{x(i)} = 0 \quad (2.123)$$

$$\tilde{H}_{z(i+1)} - \tilde{H}_{z(i)} = \tilde{J}_{x(i)}(\alpha_n) \quad (2.124)$$

$$\tilde{H}_{x(i+1)} - \tilde{H}_{x(i)} = -\tilde{J}_{z(i)}(\alpha_n) \quad (2.125)$$

La projection de ces équations dans le repère (v,y,u) donne :

$$\tilde{E}_{u(i+1)} - \tilde{E}_{u(i)} = 0 \quad (2.126)$$

$$\tilde{E}_{v(i+1)} - \tilde{E}_{v(i)} = 0 \quad (2.127)$$

$$\tilde{H}_{u(i+1)} - \tilde{H}_{u(i)} = \tilde{J}_{v(i)}(\alpha_n) \quad (2.128)$$

$$\tilde{H}_{v(i+1)} - \tilde{H}_{v(i)} = -\tilde{J}_{u(i)}(\alpha_n) \quad (2.129)$$

2.9. Evaluation de la matrice de Green

Il s'agit d'établir une relation matricielle qui relie dans le domaine spectral, les composantes tangentielles du courant à celle du champ électrique sur l'interface métallisée.

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}_x(\alpha_n) \\ \tilde{J}_z(\alpha_n) \end{bmatrix} = [Y] \begin{bmatrix} \tilde{E}_x(\alpha_n, y_m) \\ \tilde{E}_z(\alpha_n, y_m) \end{bmatrix}$$

[Y]: représente la matrice d'admittance de Green

Chapitre 2 Analyse des circuits à ferrite par la méthode S.D.A indépendamment de la direction de polarisation du champ magnétique statique

Cette relation tient compte de l'ensemble des conditions des continuités liées au passage d'une couche diélectrique à une autre. Elle rend compte de la géométrie de la structure suivant l'axe de propagation.

Pour parvenir à cette fin, il s'agira de rechercher un processus de récurrence qui puisse faire ressortir des relations itératives permettant de déterminer successivement toutes les admittances ramenées aux différentes interfaces de la structure à analyser. Signalons que les fonctions de Green dyadiques (forme impédance) peuvent alors être ensuite déduites par une simple inversion de la matrice admittance $[Y]$.

Les équations de continuité sur l'interface non métallisée H_{m-1} s'écrivent (à $y = H_{m-1}$):

$$\tilde{H}_{vm} = \tilde{H}_{vm-1} \text{ dans le mode LSE } (\tilde{E}_y = 0) \quad (2.130)$$

$$\tilde{H}_{um} = \tilde{H}_{um-1} \text{ dans le mode LSM } (\tilde{H}_y = 0) \quad (2.131)$$

$$\tilde{E}_{vm} = \tilde{E}_{vm-1} \text{ dans le mode LSM } (\tilde{H}_y = 0) \quad (2.132)$$

$$\tilde{E}_{um} = \tilde{E}_{um-1} \text{ dans le mode LSE } (\tilde{E}_y = 0) \quad (2.133)$$

➤ Cas des modes LSM

L'admittance ramenée vers l'interface $y = H_{m-1}$ s'écrit :

$$Y_{m-1}^e = \frac{\tilde{H}_{um-1}}{\tilde{E}_{vm-1}} \text{ avec } \tilde{E}_{vm} = \tilde{E}_{vm-1}$$

ce qui donne:

$$\tilde{H}_{um-1} = Y_{m-1}^e \tilde{E}_{vm} \text{ sachant que : } \tilde{H}_{um} = \tilde{H}_{um-1}$$

D'où:

$$\tilde{H}_{um} - Y_{m-1}^e \tilde{E}_{vm} = 0 \quad (2.134)$$

➤ Cas des modes LSE

$$Y_{m-1}^h = -\frac{\tilde{H}_{vm-1}}{\tilde{E}_{um-1}} \text{ avec } \tilde{E}_{um} = \tilde{E}_{um-1}$$

ce qui donne:
$$\tilde{H}_{vm-1} = -Y_{m-1}^h \tilde{E}_{um} \quad \text{avec} \quad \tilde{H}_{vm} = \tilde{H}_{vm-1} \quad (2.135)$$

$$\tilde{H}_{vm} + Y_{m-1}^h \tilde{E}_{um} = 0 \quad (2.136)$$

N.B : Posons : $Y_-^{e,h} = Y_{m-1}^{e,h}$,

D'autre part, les équations de continuité sur l'interface métallisée H_m s'écrivent (à $y = H_m$):

➤ *Cas des modes LSM*

$$\tilde{H}_{um} - \tilde{H}_{um+1} = \tilde{J}_v \quad (2.137)$$

$$Y_+^e = -\frac{\tilde{H}_{um+1}}{\tilde{E}_{vm+1}} \quad \text{avec} \quad \tilde{E}_{vm} = \tilde{E}_{vm+1} = \tilde{E}_v \quad (2.138)$$

Ce qui donne

$$\tilde{H}_{um} + Y_+^e \tilde{E}_{vm} = \tilde{J}_v \quad \text{et posons} \quad Y_+^e = Y_{m+1}^e \quad (2.139)$$

➤ *Cas des modes LSE*

$$\tilde{H}_{vm} - \tilde{H}_{vm+1} = -\tilde{J}_u \quad (2.140)$$

Nous avons :

$$Y_+^h = \frac{\tilde{H}_{vm+1}}{\tilde{E}_{um+1}} \quad \text{avec} \quad \tilde{E}_{um+1} = \tilde{E}_{um} \quad (2.141)$$

Ce qui donne

$$\tilde{H}_{vm} - Y_+^h \tilde{E}_{um} = -\tilde{J}_u \quad \text{et posons} \quad Y_+^h = Y_{m+1}^h \quad (2.142)$$

Ainsi en résumant, nous avons les relations suivantes pour les champs sur l'interface métallisée ($y = H_m$):

$$\tilde{H}_{um} - Y_{m-1}^e \tilde{E}_{vm} = 0 \quad (2.143)$$

$$\tilde{H}_{vm} + Y_{m-1}^h \tilde{E}_{um} = 0 \quad (2.144)$$

$$\tilde{H}_{um} + Y_{m+1}^e \tilde{E}_{vm} = \tilde{J}_v \quad (2.145)$$

$$\tilde{H}_{vm} - Y_{m+1}^h \tilde{E}_{um} = -\tilde{J}_u \quad (2.146)$$

Nous remplaçons ensuite $\tilde{E}_v, \tilde{E}_u, \tilde{H}_v$ et $\tilde{H}_u$ selon leurs expressions (2.106) à (2.109) dans (2.143) à (2.146). Nous obtenons alors les équations suivantes (2.147) à (2.150) :

$$\begin{aligned}
 & A_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)] \right) \right] + \\
 & B_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)] \right) \right] + \\
 & A_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)] \right) \right] + \\
 & B_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) - Y_{(m-1)}^e(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)] \right) \right] = 0 \quad (2.147)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)] \right) \right] + \\
 & B_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)] \right) \right] + \\
 & A_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)] \right) \right] + \\
 & B_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) + Y_{(m-1)}^h(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)] \right) \right] = 0 \quad (2.148)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)] \right) \right] + \\
 & B_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_1 + \alpha_n B_1) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_4 + \alpha_n B_4) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)] \right) \right] + \\
 & A_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)] \right) \right] + \\
 & B_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_2 + \alpha_n B_2) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(-\beta \dot{B}_3 + \alpha_n B_3) + Y_{(m+1)}^e(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)] \right) \right] = \tilde{J}_v \quad (2.149)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & A_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)] \right) \right] + \\
 & B_m^e \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_1 + \beta B_1) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_4 + \beta B_4) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)] \right) \right] + \\
 & A_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)] + \frac{1}{\rho} \sinh(\gamma_m^a h_m) [(\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)] \right) \right] + \\
 & B_m^h \left[\frac{1}{\rho} \left(\gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_2 + \beta B_2) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)] + \frac{1}{\rho} \cosh(\gamma_m^b h_m) [(\alpha_n \dot{B}_3 + \beta B_3) - Y_{(m+1)}^h (-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)] \right) \right] = -\tilde{J}_u \quad (2.150)
 \end{aligned}$$

qui peuvent s'écrire aussi sous forme matricielle selon:

$$\begin{bmatrix} A_m^e \\ B_m^e \\ A_m^h \\ B_m^h \end{bmatrix} [C] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_v \\ -\tilde{J}_u \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A_m^e \\ B_m^e \\ A_m^h \\ B_m^h \end{bmatrix} = [B] \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tilde{J}_v \\ -\tilde{J}_u \end{bmatrix}$$

$[B]$ représente la matrice inverse de $[C]$

Ainsi, l'on peut tirer les coefficients:

$$A_m^e = B_{13}\tilde{J}_v - B_{14}\tilde{J}_u \quad (2.151)$$

$$B_m^e = B_{23}\tilde{J}_v - B_{24}\tilde{J}_u \quad (2.152)$$

$$A_m^h = B_{33}\tilde{J}_v - B_{34}\tilde{J}_u \quad (2.153)$$

$$B_m^h = B_{43}\tilde{J}_v - B_{44}\tilde{J}_u \quad (2.154)$$

Les coefficients $B_{13}, B_{14}, B_{23}, B_{24}, B_{33}, B_{34}, B_{43}$ et B_{44} représentent les éléments de la matrice [B].

En remplaçant ensuite A_m^e, B_m^e, A_m^h et B_m^h par leurs expressions dans $\tilde{E}_{vm}$ (2.106) et $\tilde{E}_{um}$ (2.107), on obtient :

$$\tilde{E}_{um} = \tilde{J}_u \begin{bmatrix} \left[-\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)(B_{14} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)(B_{14} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)(B_{34} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)(B_{34} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \end{bmatrix} + \tilde{J}_v \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)(B_{13} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)(B_{13} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)(B_{33} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)(B_{33} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \end{bmatrix} \quad (2.155)$$

Et aussi :

$$\tilde{E}_{vm} = \tilde{J}_u \begin{bmatrix} \left[-\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)(B_{14} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)(B_{14} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)(B_{34} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ \left[-\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)(B_{34} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \end{bmatrix} + \tilde{J}_v \begin{bmatrix} \left[\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)(B_{13} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)(B_{13} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)(B_{33} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \right] \\ + \left[\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)(B_{33} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \right] \end{bmatrix} \quad (2.156)$$

Finalement on trouve le système matriciel:

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{um} \\ \tilde{E}_{vm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11uv} & G_{12uv} \\ G_{21uv} & G_{22uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_u \\ \tilde{J}_v \end{bmatrix} \quad \text{sachant que les éléments } G_{11uv}, G_{12uv}, G_{21uv} \text{ et } G_{22uv} \text{ sont donnés par les équations (2.157) à (2.160)}$$

$[G_{uv}]$: matrice d'impédance de Green dans le nouveau repère (v,y,u) .

$$G_{11uv} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)(B_{14} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \\ -\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)(B_{34} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)(B_{14} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \\ -\frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)(B_{34} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \quad (2.157)$$

$$G_{12uv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_1 + \alpha_n A_1)(B_{13} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \\ \frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_2 + \alpha_n A_2)(B_{33} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_4 + \alpha_n A_4)(B_{13} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \\ \frac{1}{\rho} [(-\beta \dot{A}_3 + \alpha_n A_3)(B_{33} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \quad (2.158)$$

$$G_{21uv} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)(B_{14} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \\ -\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)(B_{34} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)(B_{14} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{24} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \\ -\frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)(B_{34} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{44} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \quad (2.159)$$

$$G_{22uv} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_1 + \beta A_1)(B_{13} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \\ \frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_2 + \beta A_2)(B_{33} \gamma_m^a \cosh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \gamma_m^b \sinh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_4 + \beta A_4)(B_{13} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{23} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \\ \frac{1}{\rho} [(\alpha_n \dot{A}_3 + \beta A_3)(B_{33} \sinh(\gamma_m^a h_m) + B_{43} \cosh(\gamma_m^b h_m))] \end{bmatrix} + \quad (2.160)$$

Chapitre 2 Analyse des circuits à ferrite par la méthode S.D.A indépendamment de la direction de polarisation du champ magnétique statique

Il ne reste plus qu'à revenir au repère initial (cartésien), en effectuant les transformations nécessaires. Pour cela on utilise la matrice de passage P_m telle que :

$$P_m = P_m^{-1} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{xm} \\ \tilde{E}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} G_{11uv} & G_{12uv} \\ G_{21uv} & G_{22uv} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{xm} \\ \tilde{E}_{zm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11xz} & G_{12xz} \\ G_{21xz} & G_{22xz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_x \\ \tilde{J}_z \end{bmatrix}$$

Avec :

$$G_{11xz} = G_{11uv} \cos^2 \theta - (G_{21uv} + G_{12uv}) \cos \theta \sin \theta + G_{22} \sin^2 \theta$$

$$G_{12xz} = (G_{22uv} - G_{11uv}) \cos \theta \sin \theta + G_{21uv} \sin^2 \theta - G_{12uv} \cos^2 \theta$$

$$G_{21xz} = (G_{22uv} - G_{11uv}) \cos \theta \sin \theta + G_{12uv} \sin^2 \theta - G_{21uv} \cos^2 \theta$$

$$G_{22xz} = G_{11uv} \sin^2 \theta + (G_{21uv} + G_{12uv}) \cos \theta \sin \theta + G_{22} \cos^2 \theta$$

Les éléments de la matrice d'admittance $Y(\alpha_n)$ sont alors obtenus par une simple inversion de la matrice d'impédance $G(\alpha_n)$.

2.10. Conclusion

L'application de la méthode S.D.A nous a permis de modéliser les circuits à ferrites en configuration multicouche réalisés sur des couches diélectrique anisotropes indépendamment de la direction de polarisation du champ magnétique statique. Ceci a été rendu possible en associant aux couches anisotropes et la couche à ferrite deux admittances équivalentes à partir d'un schéma équivalent en sources de courants.

Chapitre 3
Programmation par la méthode SDA :
Résultats et Interprétations

3.1. Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons la mise en œuvre numérique de la méthode d'approche dans le domaine spectral pour la modélisation en mode hybride des circuits passifs micro-ondes multicouches réalisés sur des substrats diélectriques anisotropes incluant un substrat à ferrite. Pour ce faire, nous allons élaborer un programme via un logiciel de simulation. Le logiciel de simulation choisi est le MATLAB, qui est un outil de base enrichi par ses nombreuses bibliothèques (ou Toolboxes) qui évitent, dans plusieurs cas, de programmer les techniques numériques les plus courantes. Aussi, la disponibilité de MATLAB est remarquable puisqu'il peut être exécuté sur n'importe quel type d'ordinateur.

L'objectif final du programme étant de calculer la constante de phase et la permittivité effective vis-à-vis de la fréquence pour différents types de structures de transmission à ferrite.

3.2. Détermination de la constante de phase

L'objectif de calcul des éléments de la matrice de Green consiste dans un premier temps à déterminer les valeurs de la constante de phase β dont la connaissance permettrait l'obtention de toutes les autres grandeurs (impédance caractéristique, constante de propagation, permittivité effective...).

La détermination de la constante de phase ne peut se faire que numériquement, car la taille de la matrice considérée (matrice de Green) ne permet pas d'obtenir la solution de façon aisée par des calculs analytiques. Pour y arriver, on utilisera la méthode des moments et plus spécifiquement la méthode de Galerkin (voir Annexe F). L'organigramme de calcul (figure 3.1) peut être résumé par les étapes suivantes :

3.2.1. Description du programme principal

Le programme principal permet de calculer en mode hybride pour les trois cas de polarisation ox , oy et oz , les paramètres caractéristiques des différentes structures planaires anisotropes magnétiques à ferrite en configuration multicouche.

Le programme commence par la lecture des paramètres physiques, électriques et magnétiques des structures à analyser ensuite, il fait appel aux différents sous-programmes afin de générer la matrice globale $C(\beta)$ et calculer son déterminant pour déduire la valeur de la constante de phase β et finalement terminer par l'affichage des résultats numériques.

Le programme principal est constitué de trois sous-programmes :

A. Sous-programme Data

Il contient les données d'entrée utilisée par le programme principal (paramètres physiques, électriques et magnétiques du circuit à analyser). La liste des données est définie comme suit:

- **Données relatives à la couche à ferrite**

exf : permittivité selon la polarisation (ox) ;

eyf : permittivité selon la polarisation (oy);

ezf : permittivité selon la polarisation (oz);

H_a : champ d'anisotropie;

M_s : aimantation à saturation;

h_m : épaisseur de la couche à ferrite;

- **Données relatives aux couches diélectriques**

$[e(i)]$: permittivité de la couche i avec $i \in [1, (m - 1)] \cup [(m + 1), Nc]$;

$[ex(i)]$: permittivité de la couche i selon la polarisation (ox) ;

$[mu(i)]$: perméabilité de la couche i ;

$[mux(i)]$: perméabilité de la couche i selon la polarisation (ox) ;

$[ey(i)]$: permittivité de la couche selon la polarisation (oy) ;

$[muy(i)]$: perméabilité de la couche i selon la polarisation (oy) ;

$[ez(i)]$: permittivité de la couche i selon la polarisation (oz) ;

$[muz(i)]$: perméabilité de la couche i selon la polarisation (oz) ;

$[h(i)]$: épaisseur de la couche i ;

- **Autres données relatives à l'exécution de l'algorithme MADS:**

F : fréquence de fonctionnement;

Nc : nombre de couches diélectriques;

$Ncsup$: nombre de couches au-dessus des plans de métallisations;

Ntf : nombre de terme de Fourier;

Nbf : nombre total de fonction de base (R+M);

$Nech$: nombre d'échantillons sur lequel est définie la constante de phase;

S : largeur de fente;

2a : largeur du plan de masse;

w : largeur des rubans;

STR: permet de choisir le type de modélisation (courant ou champ électrique)

mode : permet de choisir le type de mode de propagation (pair ou impair);

B. Sous-programme Green

Consiste à calculer les éléments de la matrice de Green du mode étudié et les stocke ensuite dans des vecteurs de dimension Ntf.

C. Sous programme Matf

Permet de calculer les éléments de la matrice globale $C(\beta)$. Les paramètres d'entrées de ce sous-programme sont les éléments des fonctions de Green générés par le sous-programme précédent et les transformées de Fourier de fonction de base $\tilde{J}_x$ et $\tilde{J}_z$.

La dimension de la matrice $C(\beta)$ est égale au nombre total de fonctions de base (R+M).

3.2.2. Organigramme global

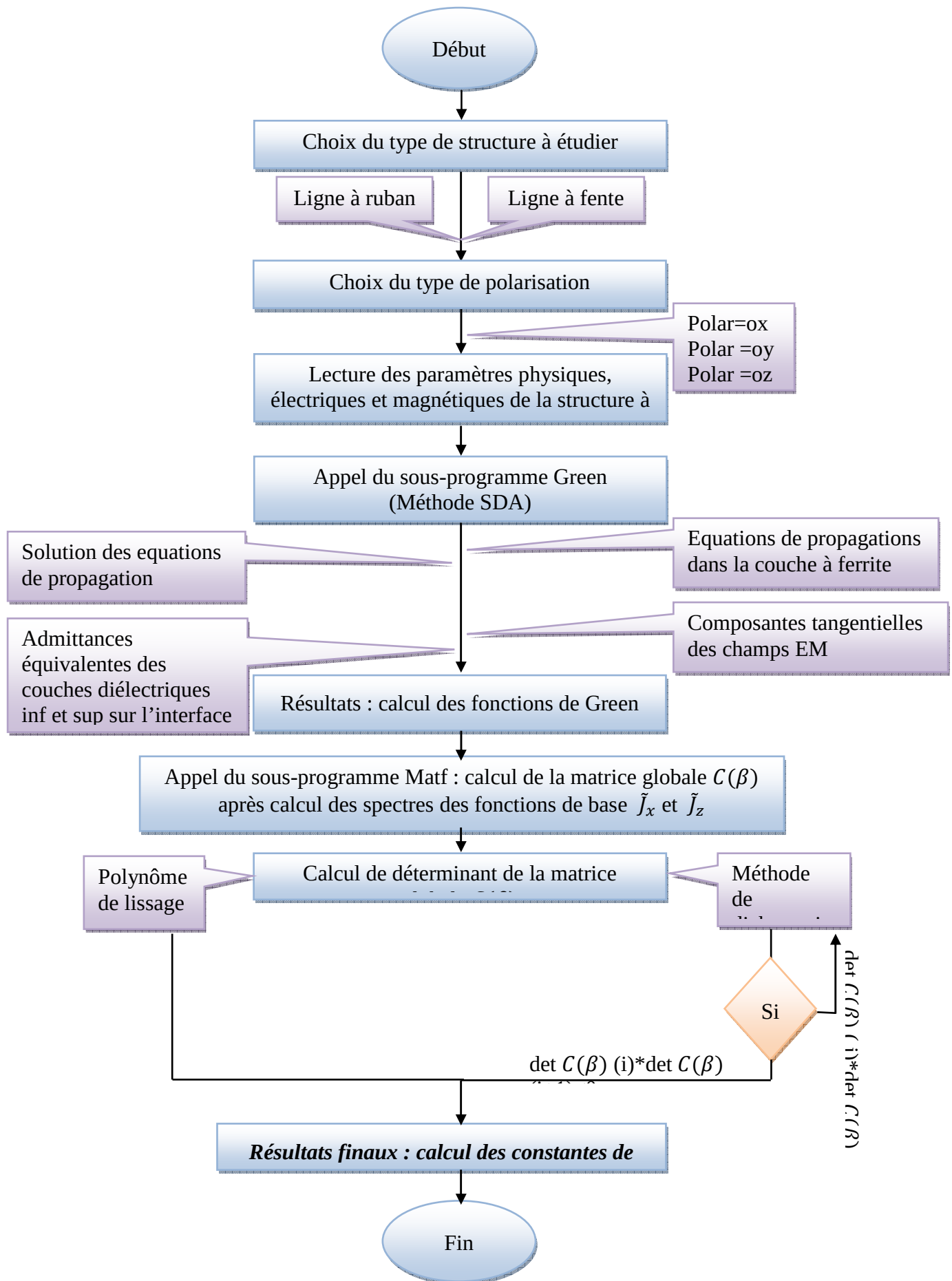


Figure 3.1 Organigramme de calcul du diagramme de dispersion

3.2.3. Résultats numériques obtenus et commentaires

Dans cette phase, il s'agira de valider l'approche théorique développée en la confrontant aux résultats publiés dans la littérature pour des circuits incluant des substrats à ferrite à anisotropie non diagonale et ce, à travers le calcul du diagramme de dispersion. On tiendra compte de la polarisation statique du champ magnétique avec ses deux types : la polarisation normale et tangentielle.

Nous commençons tout d'abord par la polarisation ox (figure 3.2) avec deux configurations de circuits à trois couches : GaAs, ferrite et l'air disposés différemment.

3.2.3.1. Polarisation selon (ox)

Dans les ferrites, les valeurs de μ peuvent dépendre fortement du sens de propagation de l'onde, c'est le phénomène de non réciprocity. Lorsque les ondes se propagent vers le sens croissants (+) et décroissants (-), les valeurs de μ notées, μ^+ et μ^- s'écrivent respectivement :

$$\mu^+ = \mu + k \quad \text{et} \quad \mu^- = \mu - k \quad \text{où :}$$

$$\mu = \frac{M_s}{H_a} \frac{\omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2} + 1$$

$$k = \frac{M_s}{H_a} \frac{\omega \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2}$$

Sur la figure 3.2, nous avons tracé la variation des constantes de phase β^+ et β^- en fonction de la fréquence. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [12], [13], [14].

Pour la première configuration diélectrique – ferrite – air, un bon accord est observé avec ceux obtenus avec le logiciel HFSS [14] qui utilise la méthode des éléments finis. La même remarque peut être formulée pour la deuxième configuration air – ferrite – diélectrique.

Finalement, la constante de phase qui est une valeur réelle dans le cas de propagation sans pertes rapporte deux valeurs pour chaque structure analysée pour une même polarisation (ox) dénotant la propriété de non-réciprocity.

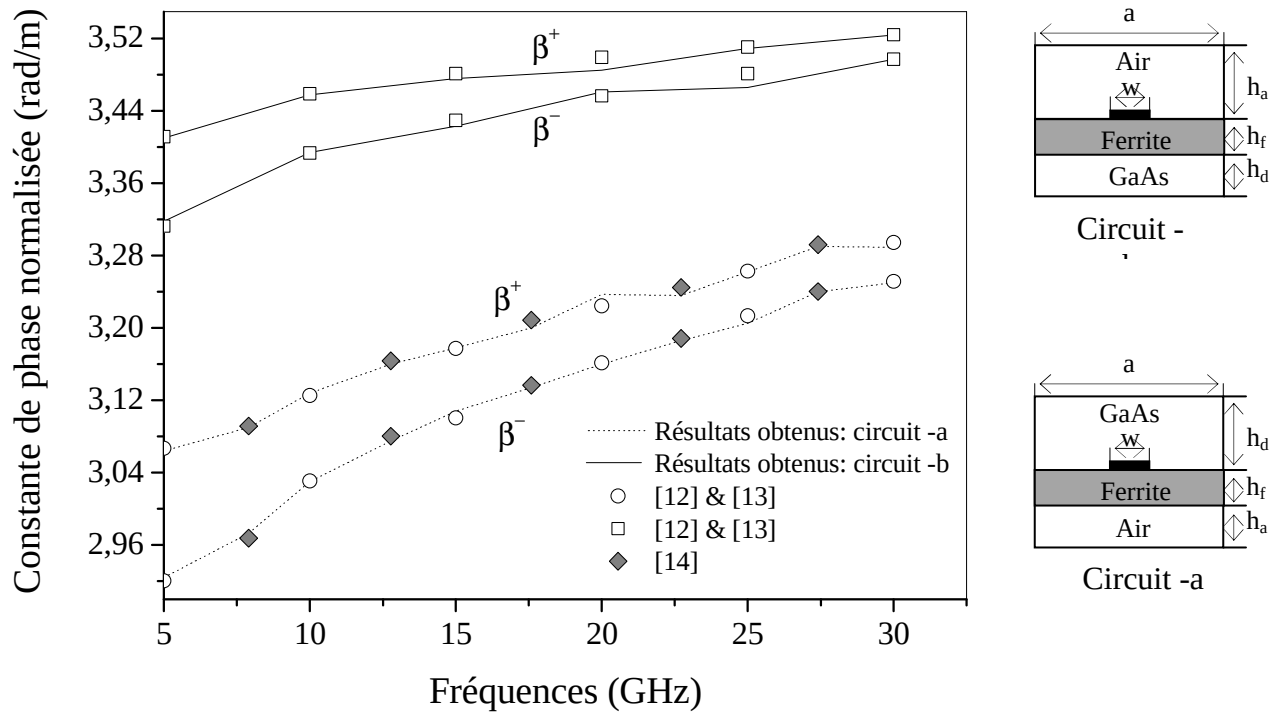


Figure 3.2 Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = H_a \hat{x}$ de la couche à ferrite ($\varepsilon_f = 12.6$, $\varepsilon_{diel} = 12.9$, $B_M = 0.275T$, $h_f = 0.254mm$, $h_d = 0.254mm$, $h_a = 5.08mm$, $w = 1.016mm$, $a = 10.16mm$)

3.2.3.2. Polarisation selon (oy)

Sur la figure 3.3, nous constatons que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [14], [15], [16]. L'erreur moyenne est de l'ordre de 1% dans la gamme de fréquence entre 3 GHz et 8 GHz.

La structure analysée se comporte comme un filtre passe haut si la fréquence de travail est supérieure à la fréquence gyrorésonance $f_0 = 2.8$ GHz et un comportement d'un filtre réjecteur sur la gamme de fréquence 0.5 GHz et 2.8 GHz. La structure présente en outre, un comportement réciproque.

Les valeurs de la constante de phase dans ce cas de polarisation est réelle. Une certaine imprécision se produit par rapport à [15] près de la limite inférieure asymptotique.

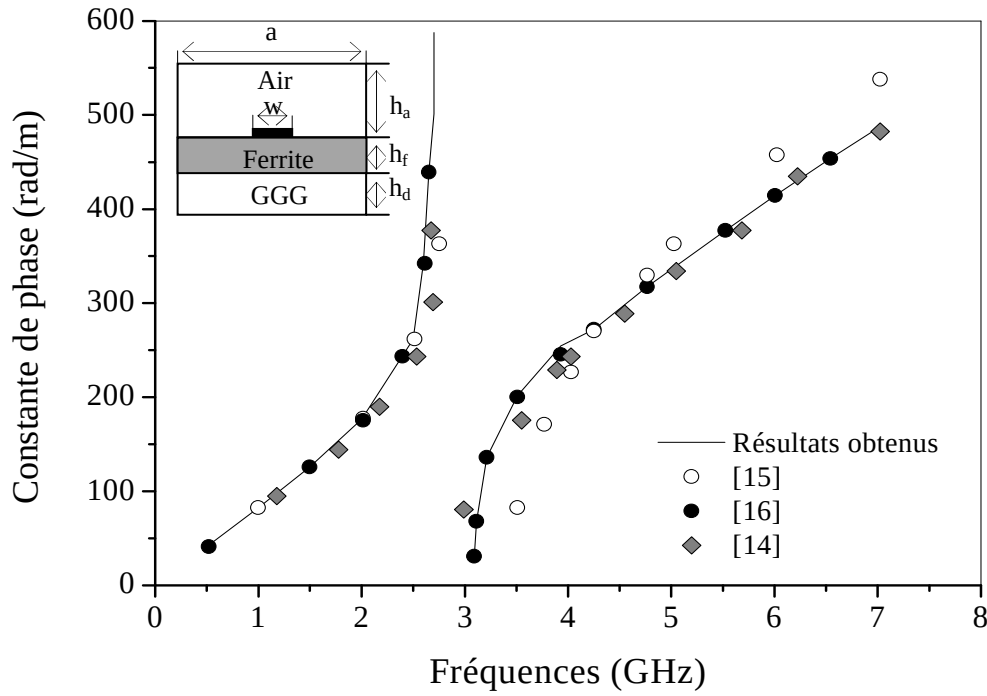


Figure 3.3 Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{y}$ de la couche à ferrite
 $(\varepsilon_f = 15.3, \varepsilon_{diel} = 15.3, B_M = 0.173T, h_f = 0.02mm, h_d = 0.1mm, h_a = 5.88mm,$
 $w = 0.4mm, a = 4mm)$

Une autre déviation significative se produit près de l'asymptote supérieure juste au-dessus de la région de coupure mais qui diminue à mesure que la fréquence augmente. Néanmoins, nos résultats sont en bon accord avec ceux publiés dans [14] et [16], même près des deux limites de la région asymptotique.

3.2.3.3. Polarisation selon (oz)

La figure 3.4, présente la variation de la constante de propagation en présence des pertes magnétiques, ($\gamma = j\beta^* = \alpha + j\beta$). Nous constatons que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [14].

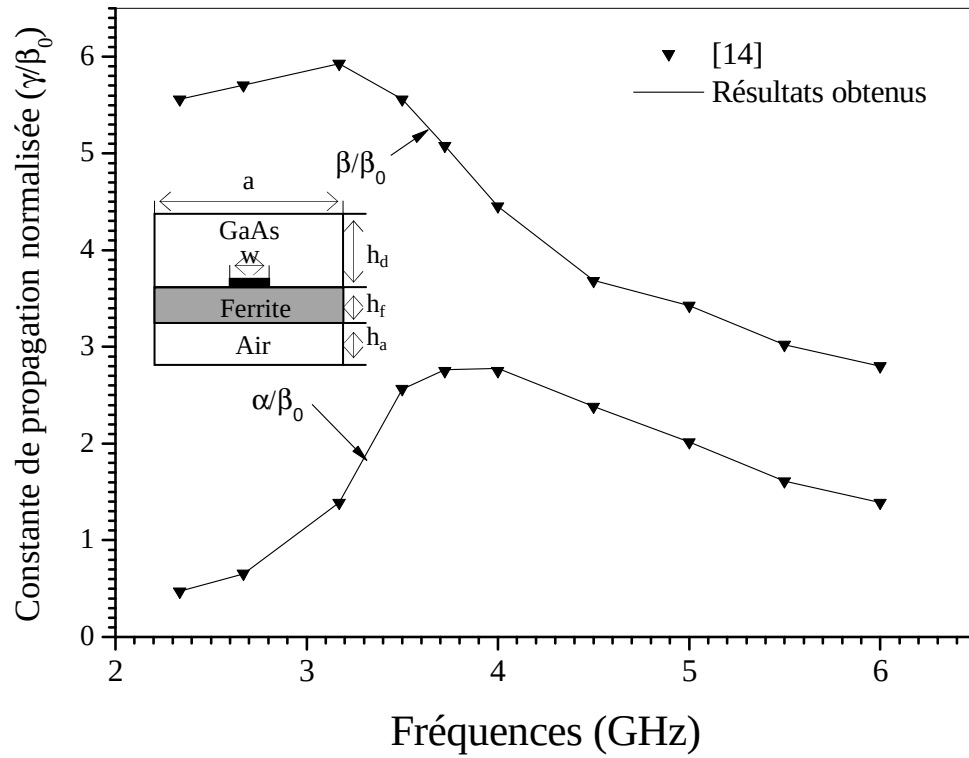


Figure 3.4 Diagramme de dispersion pour la polarisation $\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{z}$ de la couche à ferrite
 $(\epsilon_f = 17.7, \epsilon_{diel} = 10.2, B_M = 0.2267T, h_f = 2.03mm, h_d = 1.27mm, h_a = 33mm,$
 $w = 0.3mm, a = 3mm)$

3.2.3.4. Etude d'un guide d'onde chargé de ferrite

La figure 3.5 illustre la variation de la constante de phase normalisée en fonction de la fréquence. La distribution du champ EM (onde incidente et onde réfléchie) dans un guide d'onde chargé de ferrite polarisée selon la direction (oy) y est aussi représentée. La valeur de la fréquence de résonance est obtenue initialement à $\beta_0 * a \approx 0.94$. Nous constatons que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [17], [18].

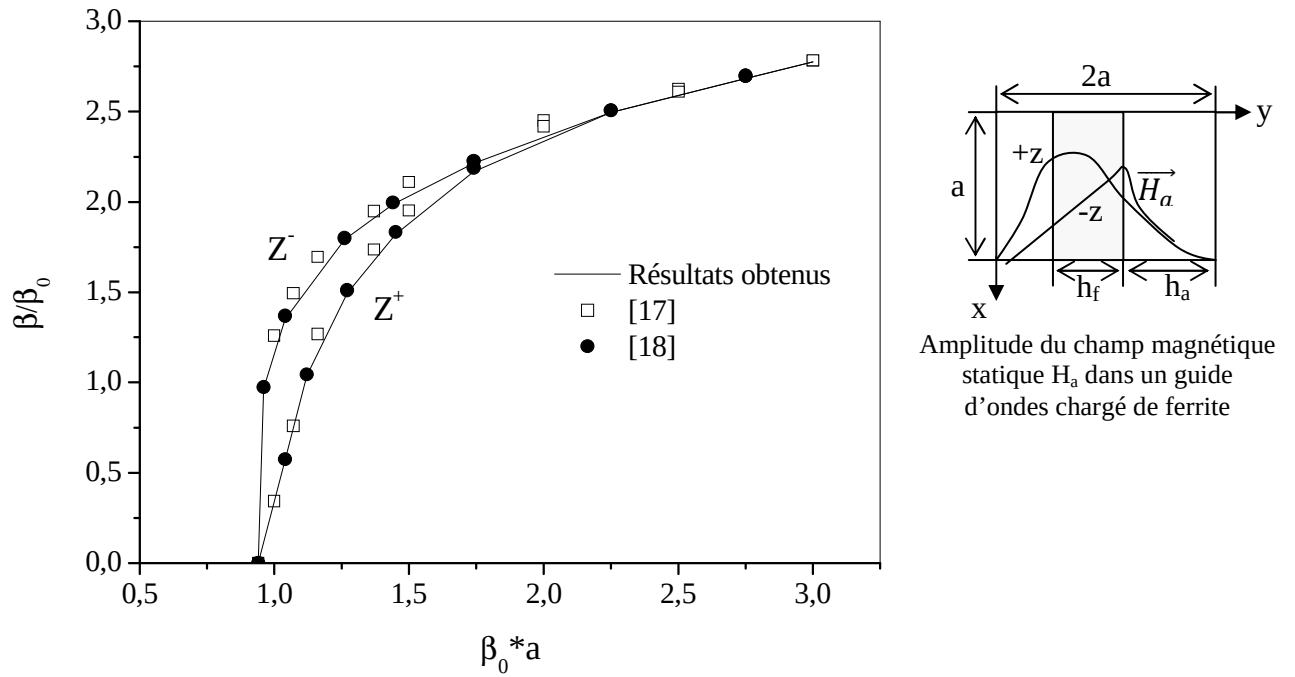


Figure 3.5 Caractéristiques de dispersion d'un guide d'onde chargé de ferrite pour la polarisation $\vec{H}_a = H_a \hat{y}$ de la couche à ferrite ($\varepsilon_f = 10, h_f = 0.25mm, h_f = 0.5mm, h_a = 1.25mm, a = 1mm$)

3.2.3.5. Etude de l'effet de non réciprocité

Dans l'exemple de la figure 3.6, la structure à analyser est une ligne à ailettes pour laquelle l'épaisseur des rubans est négligeable. Les résultats numériques présentés ici convergent partiellement vers ceux d'un guide d'onde chargé de ferrite. Ces résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [19].

La structure analysée dans la figure 3.7 est une ligne à ailettes à quatre couches où l'épaisseur des rubans est négligeable. Cette structure présente un effet de non réciprocité plus important, que dans le cas où l'épaisseur de métallisation est prise en compte. Finalement, nous remarquons que les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [19].

L'une des façons d'exprimer l'effet de non réciprocité consiste à exprimer l'écart de phase $\Delta\beta$ en l'écrivant selon : $\Delta\beta = \beta^+ - \beta^-$ (pour une même valeur de H_a).

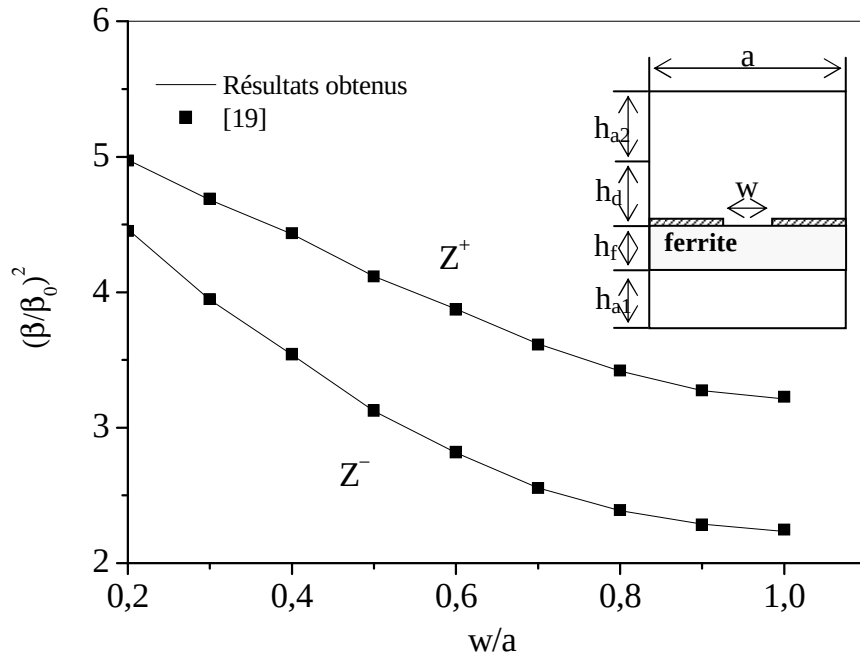


Figure 3.6 Variation des caractéristiques de propagation en fonction de la largeur de fente pour la polarisation $\vec{H}_a = H_a \hat{x}$ de la couche à ferrite ($\epsilon_f = 12.5, 4\pi M_s = 5000G, h_f = 1mm, h_{a1} = 1mm, h_{a2} = 3mm, t = 0, a = 3mm, f = 20GHz$)

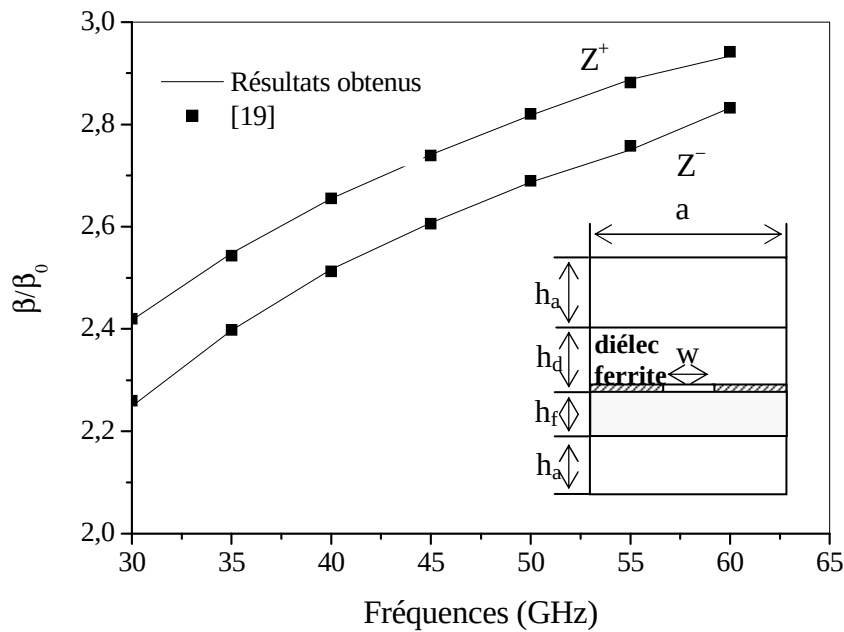


Figure 3.7 Variation de la constante de phase normalisée en fonction de la fréquence pour la polarisation $\vec{H}_a = H_a \hat{x}$ de la couche à ferrite ($\epsilon_f = 12.5, \epsilon_d = 12.5, 4\pi M_s = 5000G, h_f = 0.25mm, h_a = 2.1mm, h_d = 0.25mm, t = 0, a = 2.35mm, w = 1mm$)

La figure 3.8 décrit l'influence de la fréquence sur l'écart de phase $\Delta\beta$ pour différentes valeurs de l'épaisseur diélectrique ' h_d '. Les dimensions du blindage ont été choisies de sorte qu'elles à simuler des structures ouvertes.

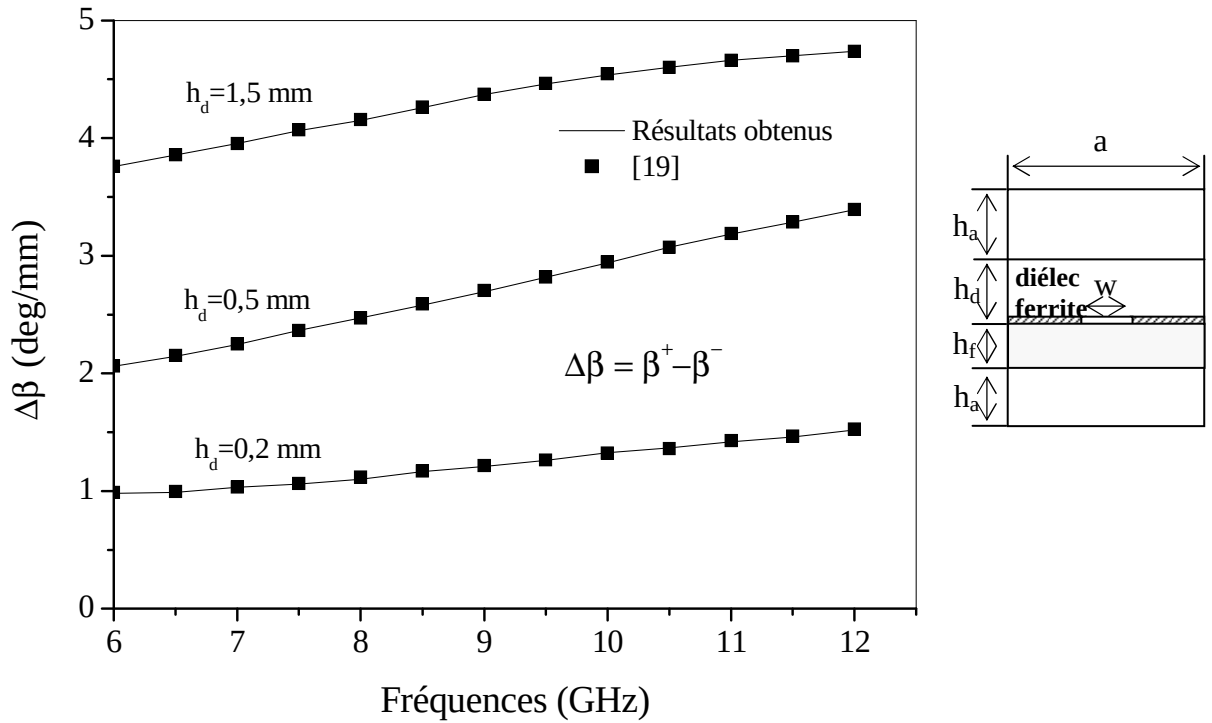


Figure 3.8 Variation de déphasage $\Delta\beta$ en fonction de la fréquence pour la polarisation

$$\vec{H}_a = \vec{H}_a \hat{x} \text{ de la couche à ferrite}$$

$$(\varepsilon_f = 11.6, \varepsilon_d = 20, M_s = 1800 \text{ A/cm}, H_0 = 300 \text{ A/cm}, h_f = 0.635 \text{ mm}, h_a = 10 \text{ mm}, t = 0, a = 20 \text{ mm}, w = 1.27 \text{ mm})$$

Nous constatons ainsi que la non réciprocity est accentuée pour des valeurs élevées de l'épaisseur du diélectrique h_d . L'application dans ce cas, peut être très utile pour les déphaseurs non réciproques. Les résultats obtenus sont en bon accord avec ceux publiés [19]. Il est aussi possible d'augmenter $\Delta\beta$ en utilisant une permittivité diélectrique ε_d plus élevée pour une aimantation saturée M_s . Mais, d'un point de vue pratique, il y a des limites dans le choix de ces paramètres, raison de la présence des transitions et de la diminution de la longueur d'onde.

En outre, il est important d'éviter des espaces d'air entre les substrats (ferrite et diélectrique) en raison de la concentration de champs élevés dans la fente sous peine de

provoquer une forte augmentation de λ_g/λ , l'écart $\Delta\beta$ montre dans ce cas une légère diminution.

3.3. Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présentés les résultats obtenus issus de la modélisation par la méthode SDA. Nous avons constaté à travers ces résultats que l'efficacité des circuits hyperfréquences dépend en grande partie du substrat et, nous avons confirmé que le substrat à ferrite peut présenter différentes caractéristiques selon le type de polarisation de champ magnétique statique, expliquant notamment le phénomène de non réciprocité.

Conclusion

Conclusion générale

La fabrication des circuits planaires miniaturisées est devenue le souci permanent de l'électronicien et plus spécifiquement du concepteur des circuits hyperfréquences. Cependant, il y a nécessité de connaître à priori le comportement de tels circuits. Par conséquent, les concepteurs orientent leurs visions sur l'élément de base essentiel pour la réalisation de ces structures qui est le substrat dont dépend en grande partie l'efficacité des circuits micro-électroniques.

Dans ce cadre le phénomène anisotrope doit absolument être intégré dans le processus de modélisation notamment le substrat de ferrite qui peut présenter différentes caractéristiques selon le type de polarisation. Pour cela, le concepteur a besoin de modèles qui lui permettent de comprendre le comportement des phénomènes physiques au moyen d'équations aux dérivées partielles (équations de Maxwell), tout en prenant en considération la polarisation statique du champ magnétique à savoir, la polarisation normale et tangentielle.

A cet effet, nous avons choisi la méthode d'approche dans le domaine spectral (SDA) qui est basée sur l'écriture des champs en mode hybride et des conditions de continuité aux interfaces, aboutissant à des systèmes généralement traités par la technique de Galerkin.

Tous les calculs ont été élaborés théoriquement selon la méthode SDA en vue de calculer numériquement le diagramme de dispersion. Il est à noter que dans le processus de calcul des fonctions de Green, le passage du repère cartésien au nouveau repère d'Itoh a été effectué via de nouvelles matrices de passage. Ces nouvelles matrices de passage ont permis de faciliter le calcul des composantes du champ électromagnétique et d'obtenir un mode transverse dans le nouveau repère.

Finalement les résultats numériques obtenus ont montré un bon accord par rapport à ceux disponibles dans les revues spécialisées des micro-ondes.

Plusieurs perspectives restent à développer dans le présent travail parmi lesquels : la prise en compte de certains phénomènes perturbateurs tels que : les pertes par rayonnement, les discontinuités, l'épaisseur du ruban ainsi que le caractère asymétrique des circuits.

Nous espérons pour terminer que ce travail servira de base pour de futurs travaux portant sur la modélisation des circuits hyperfréquences notamment ceux réalisés à base de matériaux magnétiques tels que les ferrites.

Bibliographie

Bibliographie

- [1] R. Lebourgeois,, Ferrites faibles pertes pour applications fréquentielles, Collections Techniques de l'ingénieur, E1760, pp 1-20.
- [2] Leo Thourel, Dispositifs à ferrites pour micro-ondes, Edition Masson, 1969.
- [3] M. Beignot Devalmont, Hyperfréquences, Tome II.
- [4] C. Kittel, Physique de l'état solide, Ed. Dunod, 1998.
- [5] F.Bertein, J.Chanv *et al.*, Traité d'électricité, Volume III, L'électricité et la matière, Masson, 1997.
- [6] Shibani K. Koul, Bharathi Bhat, Microwave and millimeter wave phase shifters, Volume I, Dielectric and ferrite phase shifters, Artech House Boston, London.
- [7] Marc Verite, « Etude de dépôts de ferrite pour dispositifs intégrés micro-onde non réciproque », Thèse de Doctorat, Université Limoges, 14 Nov 2002.
- [8] R. Bouchetat, « Caractérisation numérique des structures planaires par application de la méthode des moindres carrés modifiée », Mémoire de magistère, Université de Constantine, Mars 2003.
- [9] Tatsuo Itoh, « Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines », *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech*, vol. 28, N°7, pp. 733-736, July 1980.
- [10] T. Itoh, T.R. Mittra, « A technique for computing dispersion characteristics of shielded microstrip lines », *IEEE Trans on Microwave theory and techniques*, vol. 21, pp. 496-499, 1973.
- [11] T. Itoh, « Spectral domain immittance approach for dispersion characteristics of generalized printed transmission lines », *IEEE Trans. on Microwave Theory and Tech*, vol. 39, pp. 1021-1025, Jun 1991.

- [12] I.Y.Hsia, H.Yang, and N.G.Alexopoulos, « Basic properties of microstrip circuit elements on nonreciprocal substrate–superstrate structures » in *IEEE MTT-S Int. Microwave Symp. Dig*, 1991, pp 665–668.
- [13] Irene Y.Hsia, Hung-Yu Yang and Nicolaos.G, « Basic properties of microstrip circuit elements on nonreciprocal substrate–superstrate structures », *J. Electromagnetic Waves Applicat*, vol 5, pp 465–476, 1991.
- [14] S. Gaglione, private communication, Feb.12, 2001.
- [15] M. Tsutsumi and T. Asahara, « Microstrip lines using yttrium iron garnet film », *IEEE Trans Micro.w Theory Tech.*, vol 38, n°10, pp 1461–1476, Oct.1990.
- [16] C.M. Krowne, « Electromagnetic Distributions Demonstrating Asymmetry Using a Spectral-Domain Dyadic Green’s Function for Ferrite Microstrip Guided-Wave Structures », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 53, n°4, April 2005.
- [17] T. Angkaew, M. Matsuhara and N. Kumagai, « Finite element analysis of waveguide modes: A novel approach that eliminates spurious modes », *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-35, pp. 117-123, Feb. 1987.
- [18] V. J. Brankovic, D. V. Krupezevic, J. Ritter and F. Arndt, « Efficient 2D FD–TD Method for the Rigorous Analysis of Arbitrarily Shaped Guided Wave Structures on General Electrically and Magnetically Anisotropic Substrates ». *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, vol. MTT-S Digest, pp. 1017-1020, 1994.
- [19] Toshihide Kitazawa, « Analysis of Shielded Striplines and Finlines with Finite Metallization Thickness Containing Magnetized Ferrites », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, no. i, January 1991

Annexes

Annexe A : Fabrication des ferrites

Les ferrites sont fabriqués à haute température à partir des oxydes primaires de métaux de transitions. Ainsi, le ferrite de nickel NiFe_2O_4 est synthétisé à partir des oxydes de Nickel (NiO) et de fer (Fe_2O_3). La synthèse des ferrites, conduit soit à des matériaux polycristallins qui représentent aujourd'hui les céramiques magnétiques les plus vendues, soit à des matériaux monocristallins dont l'importance industrielle est moindre.

A.1. Ferrites monocristallins

Les ferrites monocristallins sont synthétisés par différentes méthodes de synthèse hydrothermale, croissance en milieu d'oxydes fondus et synthèse par tirage. C'est cette dernière que l'on utilise pour les monocristaux industriels.

L'avantage de ce type de produits d'avoir un matériau très dense avec un état de surface de très bonne qualité (un polissage est néanmoins nécessaire) et en hyperfréquences, on a une réduction des pertes magnétiques à la résonance. Les inconvénients (plaque ou disque) sont l'usinage délicat et coût élevé. Ces ferrites sont utilisés pour des applications spécifiques comme des têtes d'enregistrement magnétique.

A.2 Ferrites polycristallins

Les ferrites polycristallins industriels sont élaborés selon un procédé céramique conventionnel.

A.2.1 Matière premières

Avant tout, on choisit les matières premières qui sont le plus souvent des oxydes des métaux sous forme de poudre qui constitueront le ferrite. La pureté de matières premières est choisie en fonction des propriétés électromagnétiques souhaitées. En général, on préfère des oxydes à grains fins (autour du micromètre) présentant une dispersion granulométrique réduite, surtout pour l'oxyde de fer qui est majoritaire dans toutes les compositions.

A.2.2 Broyage

Cette opération est essentielle pour l'optimisation des réactions chimiques. Elle permet d'améliorer la finesse des matières premières pour augmenter leur réactivité. Les broyeurs industriels sont en acier inoxydable ce qui oblige le fabricant de ferrites à prendre en compte leur usure pour ajuster précisément la composition finale du matériau.

Le broyage permet aussi le mélange d'oxydes indispensables pour une bonne homogénéité chimique après réaction à haute température.

A.2.3 Chamottage

Après la première opération de mélange – broyage des oxydes de départ, le produit obtenu est porté à haute température (1000 °C à 1200 °C) pour permettre une réaction en phase solide. C'est l'opération de chamottage dont le but est d'obtenir la poudre la plus homogène possible chimiquement sans toutefois que la taille des grains ne soit trop importante pour conserver une bonne réactivité. La poudre chamottée est à nouveau broyée pour diminuer la taille des grains et augmenter sa réactivité.

A.2.4 Mise en forme des pièces

Les formats des noyaux de ferrite sont très variés. Pour les transformateurs, on dispose de noyaux en forme de U ou de E, de pots ou bien des tores. La réalisation de ces noyaux nécessite des moules de même forme dans lesquels sera pressée la poudre de ferrite. Avant cela, il est nécessaire d'incorporer un produit organique qui servira de liant et assurera la cohésion des grains entre eux. On choisit le plus souvent l'alcool polyvinylique.

A.2.5 Frittage

Après le pressage, la pièce dite crue n'a pas une tenue mécanique suffisante, ni même magnétique requise. Il est nécessaire pour cela de la porter à haute température (1250 °C à 1500 °C). Cette opération appelée frittage est de première importance car elle permet à la fois densification du matériau et l'ajustement de la composition chimique. L'objectif étant d'obtenir une céramique la plus dense possible avec la composition chimique souhaitée.

Annexe B : Vue d'ensemble sur les notions de magnétisme

B.1 Introduction

La première mention de phénomènes magnétiques remonte à la découverte de la pierre d'aimant, cette pierre d'aimant était une appellation regroupant vraisemblablement plusieurs types d'oxydes de fer dont le plus célèbre est la magnétite Fe_3O_4 . L'attraction qu'exerce cette pierre sur le fer semble être la première mise en évidence du magnétisme.

Cette annexe consiste à établir quelques notions du magnétisme, ainsi qu'une description des matériaux magnétiques.

B.2 Le magnétisme

La connaissance sur le magnétisme contribue par plusieurs scientifiques; C'est Coulomb (**1736-1806**) qui parla le premier de masses magnétiques à l'origine du magnétisme.

Poisson (**1781-1840**) introduisit la notion de champ magnétique, interaction fictive agissant sur les masses magnétiques évoquées précédemment.

La plus grande avancée est sans conteste l'expérience d'Oersted en **1820**; il montre qu'un courant électrique fait dévier l'aiguille d'une boussole située dans son voisinage immédiat. Cette découverte est révolutionnaire puisqu'elle lie électricité et magnétisme que l'on croyait indépendants l'un de l'autre.

Ampère renouvelle l'expérience avec une boucle de courant et cherche l'origine du magnétisme dans des boucles de courant moléculaires.

Faraday met en évidence, en **1821**, l'induction magnétique: un courant électrique apparaît dans un enroulement si l'on approche un aimant autrement dit la variation de flux magnétique crée donc une force électromotrice (f.e.m).

En **1864**, Maxwell parvient à modéliser la constatation d'Oersted avec quatre équations qui lient champ magnétique et champ électrique dans le cas d'une onde électromagnétique. Les théories actuelles du magnétisme reposent encore sur elles.

Enfin, Curie (**1859-1906**) classe les matériaux en trois catégories : les diamagnétiques, les paramagnétiques et les ferromagnétiques.

B.3 Les matériaux magnétiques

Les matériaux magnétiques sont à la base de nombreux outils usuels. Ils sont présents dans le domaine de l'informatique (disques durs, mémoires...), dans le domaine de la mécanique (moteurs...), ou encore dans le domaine micro onde (circuit passif...). Afin de caractériser les matériaux magnétiques ainsi que leurs effets dans l'espace, plusieurs grandeurs ont été introduites.

B.3.1 Champ magnétique ($\vec{H}$)

Lorsqu'un courant $\vec{I}$ parcourt un conducteur, il engendre un champ magnétique $\vec{H}$. Ce champ s'exprime en Ampère par mètre (A/m); autrement dit la circulation sur une courbe fermée Γ , du champ magnétique $\vec{H}$ créé par un fil conducteur parcouru par un courant d'intensité $\vec{I}$ est égale à :

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} d\vec{\ell} = \vec{I} \quad (\text{B.1})$$

Cette relation appelé théorème d'Ampère.

B.3.2 Induction magnétique ($\vec{B}$)

Le comportement de deux milieux distincts soumis à un même champ magnétique $\vec{H}$ est très différent. Cette réponse est appelée l'induction magnétique $\vec{B}$, exprimée en Teslas (T). Elle peut être rapprochée du vecteur déplacement $\vec{D}$ utilisé dans les milieux diélectriques soumis à un champ électrique.

Biot et Savart ont exprimé l'induction créée en un point M de coordonnées $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$ par un fil conducteur parcouru par un courant par la relation suivante:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \frac{dV}{r^2} \wedge \frac{\vec{r}}{r} \quad (\text{B.2})$$

V est le volume total délimitant la distribution de courant
et $\vec{J}$ représente la densité de courant

B.3.3 Potentiel vecteur ($\vec{A}$)

On dit que l'induction $\vec{B}$ dérive d'un potentiel vecteur $\vec{A}$ si l'on a:

$$\vec{B} = \overrightarrow{\text{rot}} \vec{A} \quad (\text{B.3})$$

Ce qui donne, d'après (B.2):

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \vec{J} \frac{dV}{r} \quad (\text{B.4})$$

B.3.4 Moment magnétique ($\vec{m}$)

Soit une distribution de courants confinés au voisinage de l'origine de l'espace, (O). On montre que le potentiel vecteur, très loin de l'origine vaut:

$$\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi r^3} \vec{m} \wedge \vec{r} \quad (\text{B.5})$$

$\vec{m}$ est appelé moment magnétique. Il s'exprime en fonction de la densité de courant:

$$\vec{m} = \frac{1}{2} \iiint_V \vec{r} \wedge \vec{J}(\vec{r}) dV \quad (\text{B.6})$$

Le moment magnétique n'est rien d'autre que l'analogue mathématique du moment cinétique de la mécanique classique. Dans le cas d'une boucle de courant parcourue par un courant I , le moment magnétique vaut:

$$\vec{m} = I \vec{S} \quad (\text{B.7})$$

$\vec{S}$ étant le vecteur surface

B.3.5 Aimantation d'un matériau ($\vec{M}$)

Il existe une très forte analogie entre les effets que l'on observe au voisinage d'un fil parcouru par un courant et les phénomènes rencontrés dans un corps solide.

Un morceau de matière aimantée crée en son voisinage une induction $\vec{B}$ de la même façon qu'une boucle de courant. La matière est en effet constituée d'une multitude de boucles de courant composées de l'ensemble des électrons en rotation autour de leur noyau, chaque électron portant un moment magnétique $\vec{m}$.

On peut donc, grâce à ce parallèle, définir un vecteur caractérisant un matériau dans un certain état. On appelle aimantation le moment magnétique total d'un corps de volume V ramené à l'unité de volume :

$$\vec{M} = \frac{\sum_i \vec{m}_i}{V} \quad (\text{B.8})$$

Où $\vec{m}_i$ est le moment magnétique de l'atome i

On montre que $\vec{M}$ vérifie la relation:

$$\vec{B} = \mu_0(\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0\vec{H} + \vec{J} \quad (\text{B.9})$$

Où : $\vec{H}$ est le champ extérieur au matériau et $\vec{B}$ l'induction au sein du matériau.

Cette relation montre que $\vec{M}$ s'exprime en Ampères par mètre et $\vec{J}$ en Teslas.

Le moment magnétique atomique a deux origines essentielles:

- Le mouvement orbital de l'électron autour du noyau, qui engendre un moment magnétique orbital $\vec{m}_L$ (Figure B.1).
- Le mouvement de rotation de l'électron sur lui-même, ou spin, qui crée un moment cinétique $\vec{m}_S$.

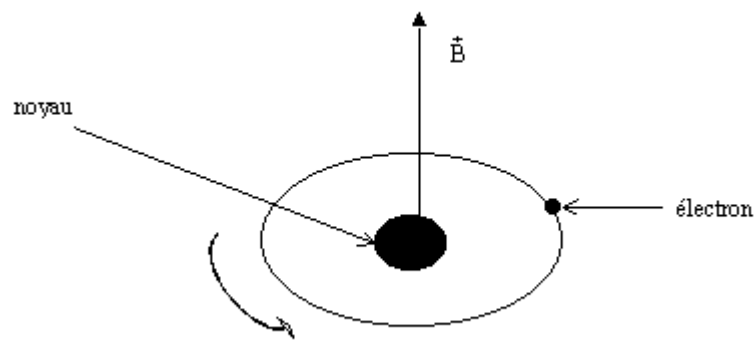


Figure B.1 Création d'une induction $\vec{B}$ à partir de la rotation d'un électron autour de son noyau

B.3.6 Susceptibilité magnétique d'un matériau (χ)

On peut définir la susceptibilité magnétique par unité de volume (χ) pour classer les matériaux magnétiques. La susceptibilité magnétique caractérise la réponse d'un matériau, sa sensibilité à une excitation magnétique extérieure selon la relation:

$$\vec{M} = \chi\vec{H} \quad (\text{B.10})$$

Cette équation signifie qu'un corps peut acquérir une aimantation quand il est plongé dans un champ statique.

B.3.7 Perméabilité magnétique relative d'un matériau (μ_r)

La perméabilité magnétique relative μ_r d'un matériau rend compte des propriétés magnétiques d'un corps sous l'action d'un champ magnétique. Elle est liée à sa susceptibilité par la relation:

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi \quad (\text{B.11})$$

μ et μ_0 sont respectivement les perméabilités magnétiques du matériau et du vide.

μ_0 est une constante égale à $4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹.

B.4 Les différents types de matériaux magnétiques

Dans le système international, nous pouvons écrire, la valeur de l'induction magnétique $\vec{B}$ à l'intérieur d'un matériau en fonction de l'excitation $\vec{H}$ à l'extérieur:

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \chi \vec{H} = \mu_0 \vec{H} \pm \mu_0 |\chi| \vec{H} \quad (\text{B.12})$$

Les différents types de matériaux magnétiques sont habituellement classés en fonction de leur réponse à une excitation extérieure $\vec{H}$, c'est-à-dire par le signe de leur susceptibilité.

B.4.1 Le vide

La susceptibilité magnétique (χ) du vide est nulle. Il en résulte $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$.

B.4.2 Les matériaux diamagnétiques

Les matériaux pour lesquels la susceptibilité magnétique est négative ($\chi < 0$) sont appelés diamagnétiques. La valeur de leur susceptibilité, qui varie très peu en fonction de la température, est le plus souvent voisine de 10^{-5} . Leur aimantation induite par un champ extérieur a un sens opposé à celui du champ inducteur.

L'aimantation et la susceptibilité sont représentées sur la Figure B.2 (a) et (b).

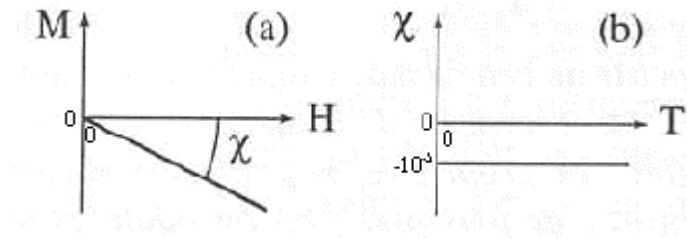


Figure B.2 (a) Evolution de l'aimantation en fonction du champ appliqué
(b) Dépendance de la susceptibilité en fonction de la température pour les corps diamagnétiques

Le phénomène de diamagnétisme caractérise des corps dont les atomes ne sont pas magnétiques mais il existe aussi dans tous les corps possédant des atomes magnétiques à des degrés plus ou moins élevés. Les gaz rares sont diamagnétiques. La plupart des gaz diatomiques et de nombreux solides ioniques le sont également.

Le tableau ci dessous rassemble les susceptibilités de quelques corps diamagnétiques à température ambiante:

Silicium	Argent	Cuivre	Silice
$-0,34.10^{-5}$	$-2,5.10^{-5}$	$-1,18.10^{-5}$	$-1,2.10^{-5}$

Tableau B.1 susceptibilités de quelques corps diamagnétiques à température ambiante

B.4.2.1 Description de diamagnétisme

Chaque électron, de moment magnétique $\vec{m}$ en rotation autour de son noyau devient une spire de courant. Sous l'action d'un champ magnétique $\vec{H}$ perpendiculaire au plan de l'orbite, le courant dans la spire est modifié de manière que la variation de flux magnétique créée par la spire sur elle-même soit égale et opposée au flux créé par l'application du champ: c'est la loi de Lenz utilisée en électromagnétisme. Cette variation de courant induit une variation du moment orbital $\Delta\vec{m}$ toujours opposée au champ appliqué, quel que soit le sens de déplacement de l'électron sur l'orbite (Figure B.3).



Figure B.3 Sens de variation $\Delta\vec{m}$ par rapport au champ magnétique

B.4.3 Les matériaux paramagnétiques

Les matériaux paramagnétiques ont une susceptibilité magnétique positive ($\chi > 0$) qui a la propriété de varier comme l'inverse de la température. Ils possèdent des électrons célibataires. En l'absence d'excitation extérieure, les moments, qui n'interagissent pas entre eux, sont orientés aléatoirement en raison de l'agitation thermique, l'aimantation est alors nulle (Figure B.4 (a)). Sous l'action d'un champ

appliqué $\vec{H}$ et à température non nulle, les moments tendent à s'aligner le long des lignes de champ, dans le sens de $\vec{H}$, mais l'agitation thermique limite cet effet, la susceptibilité magnétique est donc faible (voir tableau B.2).

Aluminium	Potassium	Calcium	Magnésium	Lithium
$2,1 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$2,0 \cdot 10^{-5}$	$0,6 \cdot 10^{-5}$	$1,4 \cdot 10^{-5}$

Tableau B.2 Susceptibilités magnétiques de quelques corps paramagnétiques à température ambiante

On peut écrire dans le système international:

$$\vec{M} = +|\chi|\vec{H} \quad (\text{B.13})$$

Les deux vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{H}$ ont cette fois même sens. La Figure B.4 (b) représente l'évolution de l'aimantation en fonction du champ appliqué pour différentes températures. La forte dépendance à la température apparaît.

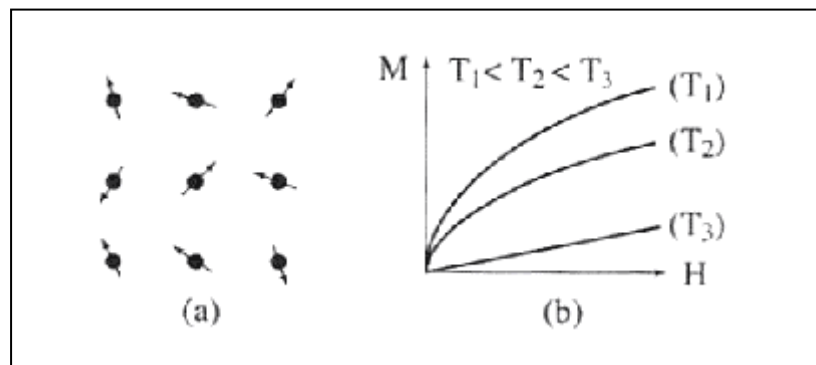


Figure B.4 (a) Isotropie des moments due à l'agitation thermique dans les matériaux paramagnétiques

(b) comportement de l'aimantation sous l'action d'un champ appliqué à différentes températures

B.4.3.1 Loi de Curie

Les corps dits paramagnétiques, ont été caractérisés par Pierre Curie. Ce dernier constata que certains matériaux possèdent deux particularités; leur susceptibilité est positive d'une part et elle varie comme l'inverse de la température d'autre part. Il en déduisit la loi qui porte son nom:

$$\chi = \frac{C}{T} \quad (\text{B.14})$$

T est la température; et C est une constante appelée constante de Curie. La loi de Curie est représentée sur la Figure B.5.



Figure B.5 évolution de l'inverse de la susceptibilité en fonction de la température

B.4.4. Les matériaux ferromagnétiques

Des corps de susceptibilité très supérieure à l'unité seront appelés ferromagnétiques. Le ferromagnétisme pourrait être considéré, avec cette classification par susceptibilités, comme une sous-catégorie du paramagnétisme. On peut imaginer les matériaux ferromagnétiques comme des matériaux paramagnétiques dans lesquels de nombreuses interactions empêcheraient la distribution isotrope des moments magnétiques (Figure B.6 (a)).

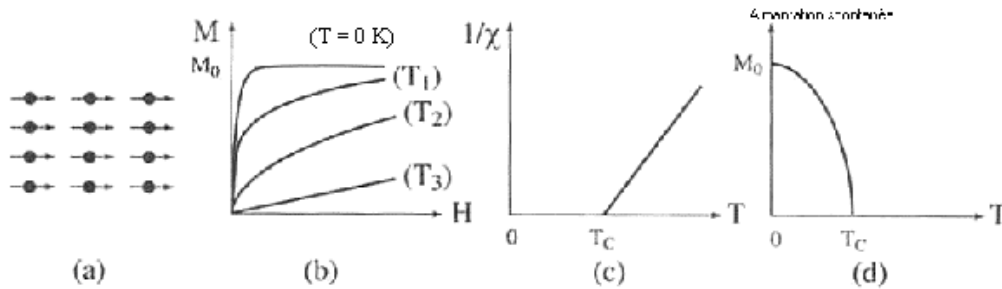


Figure B.6: (a)Alignement des moments magnétiques dans un corps ferromagnétique
 (b)Courbe d'aimantation d'un corps en fonction de champ ($T_1 < T_c < T_2 < T_3$)
 (c)Évolution de l'inverse de la susceptibilité en fonction de la température
 (d)Aimantation spontanée en fonction de la température

Pour les températures supérieures à T_C , les corps ferromagnétiques deviennent paramagnétiques, l'aimantation évolue alors comme dans le cas du paramagnétisme (températures T_2 et T_3 Figure B.6 (b)). A T_C , on ne peut pas tracer la courbe (b) en raison du double comportement du corps (ferromagnétique et paramagnétique).

Contrairement aux matériaux paramagnétiques, la susceptibilité magnétique ne devient pas infinie au zéro absolu. Son évolution met en évidence l'existence d'une température limite, appelée température de Curie, à laquelle la susceptibilité devient infinie (Fig. B.6 (c)). En dessous de cette température, la susceptibilité n'a pas de réalité physique.

Lorsque les corps ferromagnétiques ont été préalablement aimantés, ils possèdent une aimantation spontanée (Figure B.6 (d)). La valeur M_0 à $T = 0$ correspond à l'alignement parfait des moments magnétiques. Au-delà de la température de Curie, les corps ferromagnétiques redeviennent paramagnétiques et suivent donc la loi de Curie.

La plupart des matériaux ferromagnétiques ne sont pas des aimants permanents : c'est le cas du fer, du cobalt ou du nickel. Ces matériaux sont dits doux, ce qui signifie que les interactions des moments magnétiques sont insuffisantes pour maintenir durablement une aimantation spontanée anisotrope. On peut cependant les aimanter préalablement et en faire de piètres aimants provisoires, qui se désaimantent sous l'effet d'un champ magnétique extérieur.

B.4.4.1 Cycle d'hystérésis

Lorsqu'on soumet un matériau ferromagnétique à un champ magnétique alternatif extérieur, sa réponse peut être décrite par une courbe appelée boucle d'hystérésis dont l'allure est donnée sur la Figure B.7.

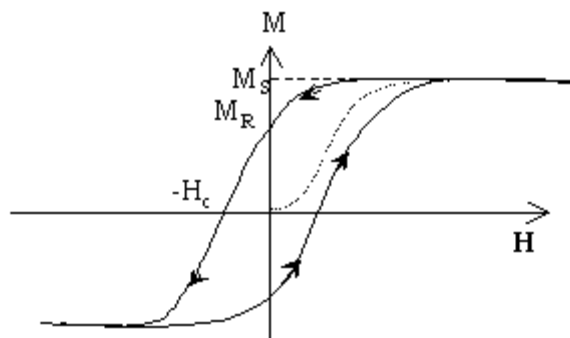


Figure B.7 Boucle d'hystérésis

Le champ coercitif H_C est le champ qui annule l'aimantation après une première aimantation à saturation (appelée courbe de première aimantation, en pointillés sur la Figure B.7). Il caractérise donc l'aptitude d'un aimant à ne pas se désaimanter sous l'action d'un champ magnétique extérieur. Il correspond à l'intersection de la boucle d'hystérésis avec l'axe des abscisses.

Quand H_C est très faible, les matériaux sont dits doux (cas du fer par exemple); si H_C est non nul et suffisamment grand, ils sont dits durs (cas des aimants permanents).

M_S est l'aimantation à saturation du matériau, c'est-à-dire l'aimantation lorsque tous les moments sont alignés avec le champ.

M_R est l'aimantation rémanente, aimantation qui subsiste sans excitation extérieure : c'est cette valeur qui caractérise, en autres, l'effet d'un aimant permanent.

B.4.4.2. Le champ démagnétisant

La forme d'un corps aimanté a une influence très importante sur la valeur du champ magnétique interne du corps. Un champ dit démagnétisant apparaît à l'intérieur du corps, dans le sens opposé à son aimantation.

B.4.5. Les matériaux antiferromagnétiques

Comme dans le cas du paramagnétisme, la susceptibilité des corps antiferromagnétiques est faible et positive. Ces corps sont constitués de deux sous-réseaux de moments magnétiques antiparallèles (Figure B.8 (a)), en dessous d'une température critique dite de Néel, T_N . Les aimantations des deux sous-réseaux sont opposées, de sorte que l'aimantation totale d'un corps antiferromagnétique est toujours nulle.

L'interaction entre les moments, appelée interaction d'échange négative, empêche l'alignement des moments dans un seul sens sous l'action d'un champ externe. Le comportement de la susceptibilité et de l'aimantation des corps antiferromagnétiques est représenté sur les Figures B.8 (b) et (c). A haute température, le comportement est analogue au paramagnétisme.

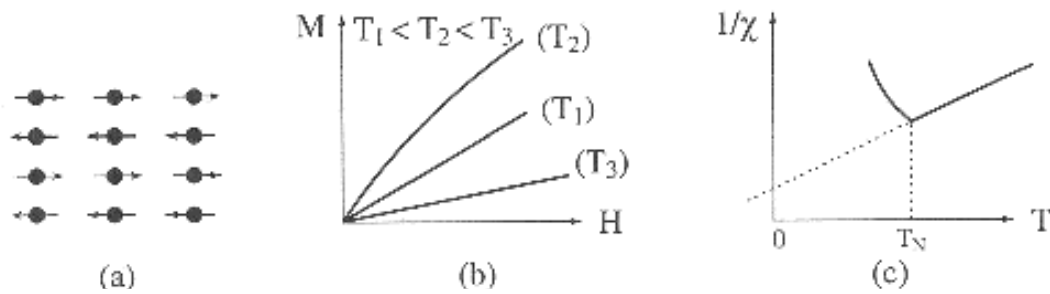


Figure B.8 (a) Arrangement des moments dans les corps antiferromagnétiques
 (b) Évolution de l'aimantation en fonction du champ appliqué à trois températures différentes
 (c) Dépendance de la susceptibilité en fonction de la température

B.4.6. Les matériaux ferrimagnétiques

Les corps ferrimagnétiques sont des corps antiferromagnétiques dans lesquels les deux sous réseaux n'ont pas la même aimantation (Figure B.9 (a)). Il apparaît donc une aimantation spontanée en dessous de la température de Curie T_C (Figure B.9 (d)). Ce comportement rappelle fortement le ferromagnétisme.

Les corps ferrimagnétiques, comme les hexaferrites, présentent donc un fort intérêt macroscopique puisqu'ils induisent un effet magnétique extérieur. Dans de nombreux cas, leur structure cristalline leur confère, de plus, un champ coercitif intéressant. Leur comportement est synthétisé sur les Figures B.9 (b), (c) et (d)

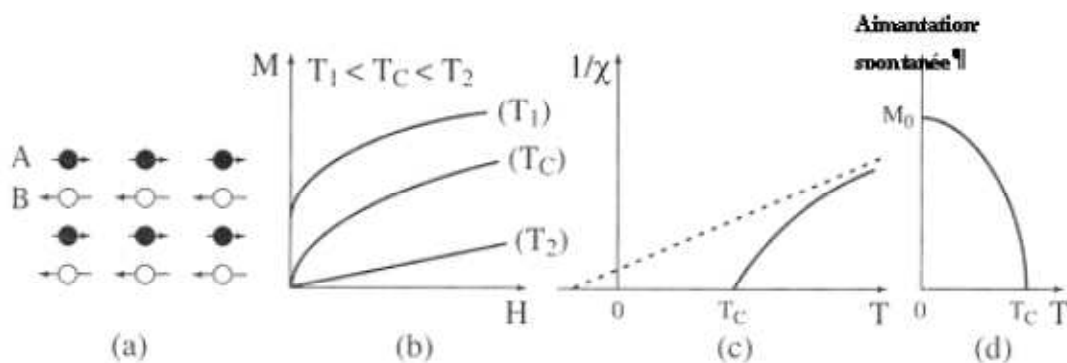


Figure B.9 (a) Arrangement des moments dans les corps ferrimagnétiques
 (b) Évolution de l'aimantation en fonction du champ appliqué à trois températures différentes
 (c) Dépendance de la susceptibilité en fonction de la température
 (d) Existence d'une aimantation spontanée aux températures $T < T_C$

Annexe C : Calcul du Tenseur de perméabilité

C.1. Tenseur de perméabilité pour la polarisation selon (ox)

Soit l'équation du mouvement :

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \mu_0 \gamma [\vec{M}_1 \wedge \vec{H}_0 + \vec{M}_0 \wedge \vec{H}_1] \quad (C.1)$$

Les deux produits vectoriels dans C.1 donnent:

$$\vec{M}_1 \wedge \vec{H}_0 = \begin{bmatrix} M_{1x} \\ M_{1y} \\ M_{1z} \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 \\ H_0 \\ 0 \end{bmatrix} = -M_{1z}H_0 + M_{1x}H_0 \quad (C.2)$$

$$\vec{M}_0 \wedge \vec{H}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ M_0 \\ 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} H_{1x} \\ H_{1y} \\ H_{1z} \end{bmatrix} = M_0H_{1z} - M_0H_{1x} \quad (C.3)$$

L'équation du mouvement devient alors :

$$j\omega M_{1x} = \mu_0 \gamma [-M_{1z}H_0 + M_0H_{1z}] \quad (C.4)$$

$$j\omega M_{1y} = \mu_0 \gamma [0] = 0 \quad (C.5)$$

$$j\omega M_{1z} = \mu_0 \gamma [M_{1x}H_0 - M_0H_{1x}] \quad (C.6)$$

Ce qui donne :

$$M_{1y} = 0 \quad (C.7)$$

$$M_{1z} = \frac{\mu_0 \gamma}{j\omega} [M_{1x}H_0 - M_0H_{1x}] \quad (C.8)$$

On remplace (C.8) dans l'équation (C.4), d'où :

$$M_{1x} = \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1x} + \left[\frac{j\omega \mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \quad (C.9)$$

On remplace (C.9) dans l'équation (C.6), ce qui donne :

$$M_{1z} = \left[\frac{-j\mu_0 \gamma M_0 \omega}{(\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2)} \right] H_{1x} + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \quad (C.10)$$

Finalement :

$$M_{1x} = \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1x} + \left[\frac{j\omega\mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \quad (C.7)$$

$$M_{1y} = 0 \quad (C.9)$$

$$M_{1z} = \left[\frac{-j\mu_0 \gamma M_0 \omega}{(\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2)} \right] H_{1x} + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \quad (C.10)$$

L'induction du champ électromagnétique de haute fréquence s'écrit sous la forme suivante :

$$\vec{B}_1 = \mu_0 [\vec{H}_1 + \vec{M}_1] \quad (C.11)$$

$$B_{1x} = \mu_0 [H_{1x} + M_{1x}] \quad (C.12)$$

$$B_{1y} = \mu_0 [H_{1y} + M_{1y}] \quad (C.13)$$

$$B_{1z} = \mu_0 [H_{1z} + M_{1z}] \quad (C.14)$$

On porte M_{1x} dans (C.12) :

$$B_{1x} = \mu_0 \left[H_{1x} + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1x} + \left[\frac{j\omega\mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \right]$$

qui peut aussi s'écrire :

$$B_{1x} = \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1x} + j \left[\frac{\omega\mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} \quad (C.15)$$

ou encore :

$$B_{1x} = \mu H_{1x} + jkH_{1z} \quad (C.16)$$

avec :

$$\mu = \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] \quad (C.17) \quad \text{et} \quad k = \left[\frac{\omega \mu_0^2 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] \quad (C.18)$$

Posons : $\omega_0 = \mu_0 \gamma |H_0| = -\mu_0 \gamma H_0$

$$\text{Alors : } \mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0 \gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (C.19) \quad \text{et} \quad k = \mu_0 \left[\frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad (C.20)$$

On porte M_{1y} dans l'équation (C.13), il vient alors :

$$B_{1y} = \mu_0 [H_{1y} + M_{1y}] = \mu_0 [H_{1y} + 0] = \mu_0 H_{1y}$$

$$B_{1y} = \mu_0 H_{1y} \quad (C.21)$$

On porte M_{1z} dans l'équation (C.14), il vient :

$$B_{1z} = \mu_0 \left[1 + \frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1z} - j \left[\frac{\omega \mu_0^2 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] H_{1x} \quad (C.22)$$

qui peut s'écrire aussi :

$$B_{1z} = -jkH_{1x} + \mu H_{1z} \quad (C.23)$$

On peut écrire :

$$B_1 = \mu_{(oy)} H_1 \quad (C.24)$$

$\mu_{(oy)}$ est le tenseur de perméabilité suivant la direction (oy) telle que :

$$\mu_{(oy)} = \begin{bmatrix} \mu & 0 & jk \\ 0 & \mu_0 & 0 \\ -jk & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (C.25)$$

C.2. Tenseur de perméabilité pour la polarisation selon (oz)

Le développement des produits vectoriels dans l'équation du mouvement (C.1) donne:

$$j\omega M_{1x} = \mu_0 \gamma [M_{1y} H_0 - M_0 h_y] \quad (C.26)$$

$$j\omega M_{1y} = \mu_0 \gamma [-M_{1x} H_0 + M_0 h_x] \quad (C.27)$$

$$j\omega M_{1z} = \mu_0 \gamma [0] = 0 \quad (C.28)$$

D'où :

$$M_{1z} = 0 \quad (C.29)$$

et

$$M_{1y} = \frac{\mu_0 \gamma}{j\omega} [M_0 h_x - M_{1x} H_0] \quad (C.30)$$

On remplace M_{1y} dans l'équation (C.26), ce qui donne après calculs:

$$M_{1x} = \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_x - \left[\frac{j\omega \mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_{y1z} \quad (C.31)$$

On porte ensuite M_{1x} dans (C.27), d'où:

$$M_{1y} = \left[\frac{j\mu_0 \gamma M_0 \omega}{(\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2)} \right] h_x + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_{y1z} \quad (C.32)$$

Finalement :

$$M_{1x} = \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_x - \left[\frac{j\omega \mu_0 \gamma M_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_{y1z} \quad (C.33)$$

$$M_{1y} = \left[\frac{j\mu_0 \gamma M_0 \omega}{(\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2)} \right] h_x + \left[\frac{\mu_0^2 \gamma^2 M_0 H_0}{\mu_0^2 \gamma^2 H_0^2 - \omega^2} \right] h_{y1z} \quad (C.31)$$

$$M_{1z} = 0 \quad (C.34)$$

L'induction du champ électromagnétique de haute fréquence s'écrit sous la forme suivante :

$$B_1 = \mu_0 [H_1 + M_1] \quad (C.35)$$

$$B_{1x} = \mu_0 [H_{1x} + M_{1x}] \quad (C.36)$$

$$B_{1y} = \mu_0 [H_{1y} + M_{1y}] \quad (C.37)$$

$$B_{1z} = \mu_0 [H_{1z} + M_{1z}] \quad (C.38)$$

On remplace M_{1x} dans l'équation (C.36), ce qui donne:

$$B_{1x} = \mu h_x - jk h_y \quad (C.39)$$

avec :

$$\mu = \mu_0 \left[1 - \frac{\mu_0 \gamma M_0 \omega_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad ; \quad k = \mu_0 \left[\frac{\omega \mu_0 \gamma M_0}{\omega_0^2 - \omega^2} \right] \quad \text{et} \quad \omega_0 = \mu_0 |\gamma| H_0 = -\mu_0 \gamma H_0$$

Par ailleurs, en remplaçant M_{1y} dans (C.37), il vient :

$$B_{1y} = jk h_x + \mu h_y \quad (C.40)$$

En portant M_{1z} dans (C.38), il vient :

$$B_{1z} = \mu_0 [h_z + M_{1z}] = \mu_0 [h_z + 0] = \mu_0 h_z$$

$$B_{1z} = \mu_0 h_z \quad (C.41)$$

$\mu_{(oy)}$ est le tenseur de perméabilité suivant la direction (oz) telle que :

$$\mu_{(oz)} = \begin{bmatrix} \mu & -jk & 0 \\ jk & \mu & 0 \\ 0 & 0 & \mu_0 \end{bmatrix} \quad (C.42)$$

**ANNEXE D : Expressions des composantes tangentielles de champ EM
en fonction des composantes normales:**

A. Cas du ferrite

A.1. Polarisation selon (oz)

La décomposition des équations de Maxwell (2.5)-(2.8) dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega(\mu \tilde{H}_x - jk \tilde{H}_y) \quad (D. 1)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega(jk \tilde{H}_x + \mu \tilde{H}_y) \quad (D. 2)$$

$$-j\alpha_n \tilde{E}_y - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 \tilde{H}_z \quad (D. 3)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega(\epsilon \tilde{E}_x - jl \tilde{E}_y) \quad (D. 4)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega(jl \tilde{E}_x + \epsilon \tilde{E}_y) \quad (D. 5)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega\epsilon_z \tilde{E}_z \quad (D. 6)$$

$$-j\alpha_n \epsilon \tilde{E}_x - \alpha_n l \tilde{E}_y + jl \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} + \epsilon \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \epsilon_z \tilde{E}_z = 0 \quad (D. 7)$$

$$-j\alpha_n \mu \tilde{H}_x - \alpha_n k \tilde{H}_y + jk \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - j\beta \mu_0 \tilde{H}_z = 0 \quad (D. 8)$$

On tire $\tilde{H}_z$ à partir de l'équation (D.5)

$$\tilde{H}_z = \frac{jl\omega}{\alpha_n} \tilde{E}_x + \frac{\omega\epsilon}{\alpha_n} \tilde{E}_y + \frac{\beta}{\alpha_n} \tilde{H}_x \quad (D. 9)$$

et $\tilde{H}_x$ à partir de l'équation (D.2)

$$\tilde{H}_x = \frac{j\alpha_n}{\omega k} \tilde{E}_z - \frac{j\beta}{\omega k} \tilde{E}_x + \frac{j\mu}{k} \tilde{H}_y \quad (D. 10)$$

On remplace (D.10) dans (D.9), il vient:

$$\tilde{H}_z = \frac{j(l\omega^2 k - \beta^2)}{\omega k \alpha_n} \tilde{E}_x + \frac{j\beta}{\omega k} \tilde{E}_z + \frac{\omega\epsilon}{\alpha_n} \tilde{E}_y + \frac{j\beta\mu}{k \alpha_n} \tilde{H}_y \quad (D. 11)$$

On tire $\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y}$ à partir de l'équation (D.7)

$$\frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = \frac{\alpha_n \varepsilon}{l} \tilde{E}_x - j \alpha_n \tilde{E}_y + \frac{j \varepsilon}{l} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\beta \varepsilon_z}{l} \tilde{E}_z \quad (D.12)$$

En portant (D.11) et (D.12) dans l'équation (D.3), il vient:

$$\frac{(\alpha_n^2 k \varepsilon + l \mu_0 (l \omega^2 k - \beta^2))}{l k \alpha_n} \tilde{E}_x + \frac{(\beta \varepsilon_z k + l \mu_0 \beta)}{k l} \tilde{E}_z + \frac{j \varepsilon}{l} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{j \omega^2 \mu_0 \varepsilon}{\alpha_n} \tilde{E}_y + \frac{\omega \mu_0 \beta \mu}{\alpha_n k} \tilde{H}_y = 0 \quad (D.13)$$

Après avoir déterminé $\frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y}$ à partir de (D.6) et en portant ce résultat ainsi que celui de $\tilde{H}_x$ et $\tilde{H}_z$ dans (D.8), il vient:

$$\frac{(\beta \mu_0 (l \omega^2 k - \beta^2) - \alpha_n^2 \mu \beta)}{\omega k \alpha_n} \tilde{E}_x + \frac{(\alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z + \beta^2 \mu_0)}{\omega k} \tilde{E}_z + \frac{(\alpha_n^2 \mu^2 + \beta^2 \mu_0 \mu)}{\alpha_n k} \tilde{H}_y + \mu \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{j \beta \mu_0 \omega \varepsilon}{\alpha_n} \tilde{E}_y = 0 \quad (D.14)$$

Après résolution du système d'équations, (D.13) et (D.14), nous obtenons:

$$\tilde{E}_x = A_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3' \tilde{H}_y + A_4' \tilde{E}_y \quad (D.15)$$

$$\text{sachant que : } A_1' = \frac{(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) j \varepsilon}{\omega \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} \frac{1}{a}$$

$$A_2' = -\mu \frac{1}{a}$$

$$A_3' = \left[\frac{(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) (\mu_0 \mu l)}{\alpha_n k (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} - \frac{\mu (\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu)}{\alpha_n k} \right] \frac{1}{a}$$

$$A_4' = \left[\frac{-(\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z) j l \omega \mu_0 \varepsilon}{\alpha_n \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)} + \frac{j \beta \mu_0 \omega \varepsilon}{\alpha_n} \right] \frac{1}{a}$$

et

$$a = \frac{[\beta \mu_0 (l \omega^2 k - \beta^2) - \alpha_n^2 \mu \beta] [\beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)] - [\beta^2 \mu_0 + \alpha_n^2 \mu + k^2 \omega^2 \varepsilon_z] [\mu_0 l (l \omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k]}{\alpha_n \omega k \beta (\mu_0 l + \varepsilon_z k)}$$

Et aussi pour $\tilde{E}_z$:

$$\tilde{E}_z = A_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + A_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + A_3 \tilde{H}_y + A_4 \tilde{E}_y \quad (D.16)$$

sachant que : $A_1 = \frac{-[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_1' + j\alpha_n \varepsilon k]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon k)}$

$$A_2 = -\frac{[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_2']}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon k)}$$

$$A_3 = -\frac{[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_3' + \omega\mu_0 \beta \mu l]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon k)}$$

$$A_4 = \frac{-[(\mu_0 l(l\omega^2 k - \beta^2) + \alpha_n^2 \varepsilon k)A_4' + jlk\omega^2 \mu_0 \varepsilon]}{\alpha_n \beta(\mu_0 l + \varepsilon k)}$$

En substituant ensuite (D.15), (D.16) dans (D.10), il vient:

$$\tilde{H}_x = B_1' \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2' \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3' \tilde{H}_y + B_4' \tilde{E}_y \quad (D. 17)$$

avec: $B_1' = \frac{j(\alpha_n A_1 - \beta A_1')}{k\omega}$

$$B_2' = \frac{j(\alpha_n A_2 - \beta A_2')}{k\omega}$$

$$B_3' = \frac{j(\alpha_n A_3 - \beta A_3' + \mu\omega)}{k\omega}$$

$$B_4' = \frac{j(\alpha_n A_4 - \beta A_4')}{k\omega}$$

De même, en remplaçant (D.15) et (D.16) dans (D.11), il vient:

$$\tilde{H}_z = B_1 \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + B_2 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + B_3 \tilde{H}_y + B_4 \tilde{E}_y \quad (D. 18)$$

sachant que : $B_1 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_1' + \beta\alpha_n A_1]}{\omega k \alpha_n}$

$$B_2 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_2' + \beta\alpha_n A_2]}{\omega k \alpha_n}$$

$$B_3 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A_3' + \beta\alpha_n A_3 + \beta\mu\omega]}{\omega k \alpha_n}$$

$$B_4 = \frac{j[(l\omega^2 k - \beta^2)A'_4 + \beta\alpha_n A_4] + \omega^2 \varepsilon k}{\omega k \alpha_n}$$

A.2. Polarisation selon (oy)

La décomposition des équations de Maxwell (2.5)-(2.8) dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega(\mu \tilde{H}_x + jk \tilde{H}_z) \quad (D.19)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega \mu_0 \tilde{H}_y \quad (D.20)$$

$$-j\alpha_n \tilde{E}_y - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega(-jk \tilde{H}_x + \mu \tilde{H}_z) \quad (D.21)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega(\varepsilon \tilde{E}_x + j\tilde{E}_z) \quad (D.22)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega \varepsilon_y \tilde{E}_y \quad (D.23)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega(-j\tilde{E}_x + \varepsilon \tilde{E}_z) \quad (D.24)$$

$$-(j\alpha_n \varepsilon + l\beta) \tilde{E}_x + (\alpha_n l - j\beta \varepsilon) \tilde{E}_z + \varepsilon_y \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} = 0 \quad (D.25)$$

$$-(j\alpha_n \mu + k\beta) \tilde{H}_x + (\alpha_n k - j\beta \mu) \tilde{H}_z + \mu_0 \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} = 0 \quad (D.26)$$

A partir des équations (D.20) et (D.25), on obtient :

$$\tilde{E}_x = -j \frac{\alpha_n \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + j \frac{\omega \mu_0 (l\alpha_n - j\beta \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{H}_y \quad (D.27)$$

$$\tilde{E}_z = -j \frac{\beta \varepsilon_y}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + j \frac{\omega \mu_0 (l\beta + j\alpha_n \varepsilon)}{\varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{H}_y \quad (D.28)$$

A partir des équations (D.23) et (D.26), on obtient aussi :

$$\tilde{H}_x = -j \frac{\mu_0 \alpha_n}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \omega \varepsilon_y \frac{(jk\alpha_n + \beta\mu)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{E}_y \quad (D.29)$$

$$\tilde{H}_z = -j \frac{\mu_0 \alpha_n}{\mu(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \omega \varepsilon_y \frac{(\alpha_n \mu - jk\beta)}{\mu \varepsilon(\beta^2 + \alpha_n^2)} \tilde{E}_y \quad (D.30)$$

B. Cas des couches diélectriques anisotropes

B.1. Polarisation selon (ox)

La décomposition des équations de Maxwell (2.5)-(2.8) dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega \mu_x \tilde{H}_x \quad (D.31)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega \mu_c \tilde{H}_y \quad (D.32)$$

$$-j\alpha_n \tilde{E}_y - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_c \tilde{H}_z \quad (D.33)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega \epsilon_x \tilde{E}_x \quad (D.34)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_y \quad (D.35)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_z \quad (D.36)$$

$$-j\alpha_n \epsilon_x \tilde{E}_x + \epsilon_c \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \epsilon_c \tilde{E}_z = 0 \quad (D.37)$$

$$-j\alpha_n \mu_x \tilde{H}_x + \mu_c \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - j\beta \mu_c \tilde{H}_z = 0 \quad (D.38)$$

A partir des équations (D.37) et (D.32), on obtient :

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \epsilon_c}{\epsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_x} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\epsilon_c \beta \omega \mu_c}{\epsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_x} \tilde{H}_y \quad (D.39)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \epsilon_c}{\epsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_x} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_c \epsilon_x}{\epsilon_c \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_x} \tilde{H}_y \quad (D.40)$$

A partir des équations (D.38) et (D.35), on obtient :

$$\tilde{H}_x = \frac{-j\mu_c \alpha_n}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \mu_c \omega \epsilon_c}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \tilde{E}_y \quad (D.41)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j\mu_c \beta}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\mu_x \omega \epsilon_c \alpha_n}{\mu_c \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_x} \tilde{E}_y \quad (D.42)$$

B.2 Polarisation selon (oz)

La décomposition des équations de Maxwell (2.5)-(2.8) dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega \mu_c \tilde{H}_x \quad (D.43)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega \mu_c \tilde{H}_y \quad (D.44)$$

$$-j\alpha_n \tilde{E}_y - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_z \tilde{H}_z \quad (D.45)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_x \quad (D.46)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_y \quad (D.47)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega \epsilon_z \tilde{E}_z \quad (D.48)$$

$$-j\alpha_n \epsilon_c \tilde{E}_x + \epsilon_c \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \epsilon_z \tilde{E}_z = 0 \quad (D.49)$$

$$-j\alpha_n \mu_c \tilde{H}_x + \mu_c \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - j\beta \mu_z \tilde{H}_z = 0 \quad (D.50)$$

A partir des équations (D.49) et (D.44), on obtient :

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \epsilon_c}{\epsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\epsilon_z \beta \omega \mu_c}{\epsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_c} \tilde{H}_y \quad (D.51)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \epsilon_c}{\epsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_c \epsilon_c}{\epsilon_z \beta^2 + \alpha_n^2 \epsilon_c} \tilde{H}_y \quad (D.52)$$

A partir des équations (D.50) et (D.47), on obtient :

$$\tilde{H}_x = \frac{-j\mu_c \alpha_n}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \mu_z \omega \epsilon_c}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \tilde{E}_y \quad (D.53)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j\mu_c \beta}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\mu_c \omega \epsilon_c \alpha_n}{\mu_z \beta^2 + \alpha_n^2 \mu_c} \tilde{E}_y \quad (D.54)$$

B.3 Polarisation selon (oy)

La décomposition des équations de Maxwell (2.5)-(2.8) dans le repère cartésien donne respectivement :

$$\frac{\partial \tilde{E}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{E}_y = -j\omega \mu_c \tilde{H}_x \quad (D. 55)$$

$$j\alpha_n \tilde{E}_z - j\beta \tilde{E}_x = -j\omega \mu_y \tilde{H}_y \quad (D. 56)$$

$$-j\alpha_n \tilde{E}_y - \frac{\partial \tilde{E}_x}{\partial y} = -j\omega \mu_c \tilde{H}_z \quad (D. 57)$$

$$\frac{\partial \tilde{H}_z}{\partial y} + j\beta \tilde{H}_y = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_x \quad (D. 58)$$

$$j\alpha_n \tilde{H}_z - j\beta \tilde{H}_x = j\omega \epsilon_y \tilde{E}_y \quad (D. 59)$$

$$-j\alpha_n \tilde{H}_y - \frac{\partial \tilde{H}_x}{\partial y} = j\omega \epsilon_c \tilde{E}_z \quad (D. 60)$$

$$-j\alpha_n \epsilon_c \tilde{E}_x + \epsilon_y \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - j\beta \epsilon_c \tilde{E}_z = 0 \quad (D. 61)$$

$$-j\alpha_n \mu_c \tilde{H}_x + \mu_y \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - j\beta \mu_c \tilde{H}_z = 0 \quad (D. 62)$$

A partir des équations (D.61) et (D.56), on obtient :

$$\tilde{E}_x = \frac{-j\alpha_n \epsilon_y}{\epsilon_c(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} + \frac{\beta \omega \mu_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{H}_y \quad (D. 64)$$

$$\tilde{E}_z = \frac{-j\beta \epsilon_y}{\epsilon_c(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} - \frac{\omega \alpha_n \mu_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{H}_y \quad (D. 65)$$

A partir des équations (D.62) et (D.59), on obtient :

$$\tilde{H}_x = \frac{-j\mu_y \alpha_n}{\mu_c(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} - \frac{\beta \omega \epsilon_y}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{E}_y \quad (D. 66)$$

$$\tilde{H}_z = \frac{-j\mu_y \beta}{\mu_c(\beta^2 + \alpha_n^2)} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} + \frac{\omega \epsilon_y \alpha_n}{\beta^2 + \alpha_n^2} \tilde{E}_y \quad (D. 67)$$

Annexe E. Calcul des admittances équivalentes dans les couches diélectriques anisotropes

E.1. Axe optique parallèle à (ox) et (oz)

Les composantes du champ EM dans le nouveau repère d'Itoh :

Mode L.S.E ($\tilde{E}_y = 0$)

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega\mu_c}{\rho} \tilde{H}_y \quad (E.1)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j\mu_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (E.2)$$

Mode L.S.M ($\tilde{H}_y = 0$)

$$\tilde{E}_v = \frac{-j\varepsilon_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (E.3)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega\varepsilon_c}{\rho} \tilde{E}_y \quad (E.4)$$

Résolution des équations d'onde (2.30) et (2.31):

- Pour le mode L.S.M :

$$\tilde{E}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i^e \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.5.a)$$

- Pour le mode L.S.E :

$$\tilde{H}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i^h \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.5.b)$$

E.1.1. Cas de la propagation selon le mode L.S.M

$$\tilde{E}_v = \frac{-j\varepsilon_c}{\rho} \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega\varepsilon_c}{\rho} E_y$$

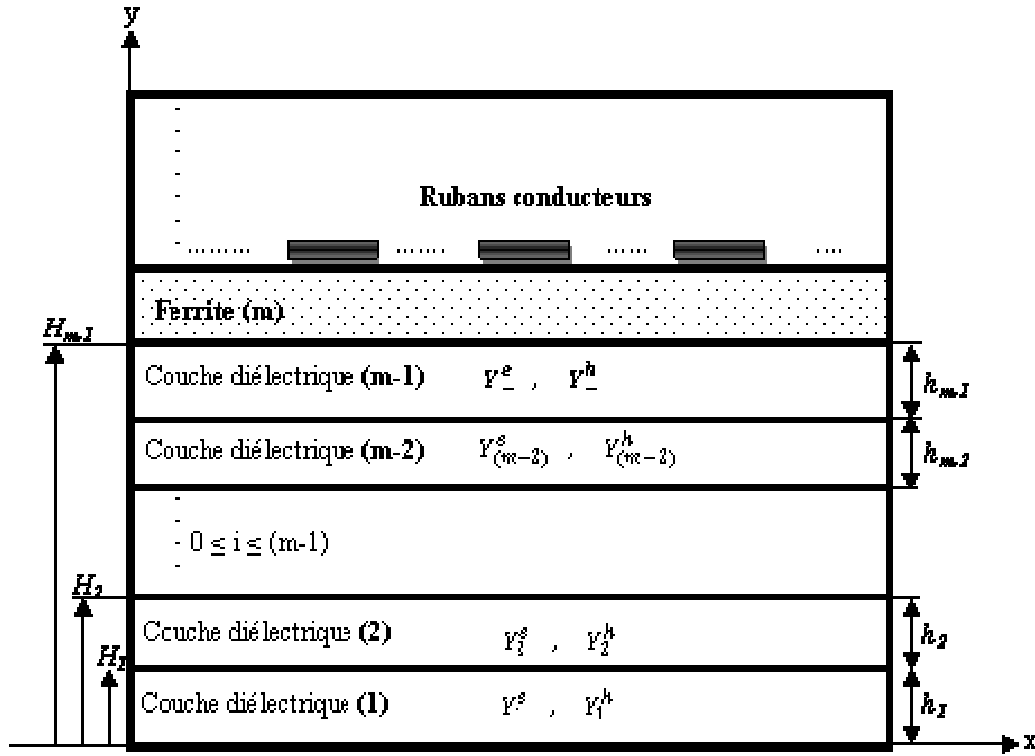
Posons $|E_{v_i}| = -\frac{j\varepsilon_{c_i}}{\rho}$, $|H_{u_i}| = \frac{\omega\varepsilon_{c_i}}{\rho}$, alors :

$$\tilde{E}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.6.a)$$

$$\tilde{E}_{v_i}(\alpha_n, y) = |E_{v_i}| \left[A_i \gamma_i^a \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \gamma_i^b \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.6.b)$$

$$\tilde{H}_{u_i}(\alpha_n, y) = |H_{u_i}| \left[A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.6.c)$$

- Détermination de $\tilde{Y}_-^e$



Dans la couche 1 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{E}_{y_1}(\alpha_n, y) = A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y) \quad (E.7.a)$$

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, y) = |E_{v_1}| [A_1 \gamma_1^a \cosh(\gamma_1^a y) + B_1 \gamma_1^b \sinh(\gamma_1^b y)] \quad (E.7.b)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, y) = |H_{u_1}| [A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y)] \quad (E.7.c)$$

Sur la paroi métallique inférieure (à $y=0$), l'on a :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, y) = B_1 |E_{v_1}| \gamma_1^b \sinh(\gamma_1^b y) \quad (E.8.a)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, y) = B_1 |H_{u_1}| \cosh(\gamma_1^b y) \quad (E.8.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_1$ par :

$$\tilde{Y}_1^e = \frac{H_{u_1}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_1}(\alpha_n, H_1)} = \frac{|H_{u_1}| \cosh(\gamma_1^b H_1)}{|E_{v_1}| \gamma_1^b \sinh(\gamma_1^b H_1)} \quad (E.9.a)$$

$$\tilde{Y}_1^e = \tilde{Y}_1^{LSM} \frac{\coth(\gamma_1^b H_1)}{\gamma_1^b} \quad (E.9.b) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_1^{LSM} = \frac{|H_{u_1}|}{|E_{v_1}|} = j\omega$$

Le paramètre $\tilde{Y}_1^{LSM}$ peut être interprété comme étant l'admittance de mode du mode L.S.M, il joue le rôle de l'impédance caractéristique dans le cas des lignes de transmission.

Dans la couche 2 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{E}_{y_2}(\alpha_n, y) = A_2 \sinh(\gamma_2^a (y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b (y - H_1)) \quad (E.10.a)$$

$$\tilde{E}_{v_2}(\alpha_n, y) = |E_{v_2}| \left[A_2 \gamma_2^a \cosh(\gamma_2^a (y - H_1)) + B_2 \gamma_2^b \sinh(\gamma_2^b (y - H_1)) \right] \quad (E.10.b)$$

$$\tilde{H}_{u_2}(\alpha_n, y) = |H_{u_2}| \left[A_2 \sinh(\gamma_2^a (y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b (y - H_1)) \right] \quad (E.10.c)$$

A $y=H_1$, la continuité des composantes tangentielle impose que :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{E}_{v_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.11.a)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{H}_{u_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.11.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1^e = \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_1)} \quad (E.11.c)$$

$$\text{et} \quad \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_1)} = \tilde{Y}_2^{LSM} \frac{B_2}{A_2 \gamma_2^a} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_2^{LSM} = \frac{|H_{u_2}|}{|E_{v_2}|} = j\omega$$

D'où l'on tire :

$$\frac{B_2}{A_2} = \tilde{Y}_1^e \frac{\gamma_2^a}{\tilde{Y}_2^{LSM}} \quad (E.11.d)$$

On déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_2$:

$$\tilde{Y}_2^e = \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_2)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_2)}$$

Par la formule :

$$\tilde{Y}_2^e = \tilde{Y}_2^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_2^a h_2) + S_2^{LSM} \cosh(\gamma_2^b h_2)}{\gamma_2^a \cosh(\gamma_2^a h_2) + S_2^{LSM} \gamma_2^b \sinh(\gamma_2^b h_2)} \quad (E.11.e) \quad \text{avec} \quad S_2^{LSM} = \frac{B_2}{A_2}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m-1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_-^e$:

$$\tilde{Y}_-^e = \tilde{Y}_{(m-1)}^e = \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)}) + S_{(m-1)}^{LSM} \cosh(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)})}{\gamma_{(m-1)}^a \cosh(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)}) + S_{(m-1)}^{LSM} \gamma_{(m-1)}^b \sinh(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)})} \quad (E.11.f)$$

$$S_{(m-1)}^{LSM} = \frac{B_{(m-1)}}{A_{(m-1)}} = \tilde{Y}_{(m-2)}^e \frac{\gamma_{(m-1)}^a}{\tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM}} \quad (E.11.g) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} = \frac{|H_{u(m-1)}|}{|E_{v(m-1)}|} = j\omega$$

- **Détermination de $\tilde{Y}_+^e$**

Dans la couche (N)

Par ailleurs dans **la couche (N)**, les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{E}_{y_N}(\alpha_n, y) = A_N \sinh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.12.a)$$

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, y) = -|E_{v_N}| \left[A_N \gamma_N^a \cosh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \gamma_N^b \sinh(\gamma_N^b(H_N - y)) \right] \quad (E.12.b)$$

$$\tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, y) = |H_{u_N}| \left[A_N \sinh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \right] \quad (E.12.c)$$

Sur la paroi métallique supérieure (à $y=H_N$), l'on a :

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, H_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_N = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, y) = -B_N |E_{v_N}| \gamma_N^b \sinh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.13.a)$$

$$\tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, y) = B_N |H_{u_N}| \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.13.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$ par :

$$\tilde{Y}_N^e = \frac{H_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \frac{|H_{u_N}| \cosh(\gamma_N^b h_N)}{-|E_{v_N}| \gamma_N^b \sinh(\gamma_N^b h_N)} \quad (E.14.a)$$

$$\tilde{Y}_N^e = -\tilde{Y}_N^{LSM} \frac{\coth(\gamma_N^b h_N)}{\gamma_N^b} \quad (E.14.b) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_N^{LSM} = \frac{|H_{u_N}|}{|E_{v_N}|} = j\omega$$

Dans la couche (N-1)

Les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{E}_{y_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \quad (E.15.a)$$

$$\tilde{E}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = -|E_{v_{(N-1)}}| \left[A_{(N-1)} \gamma_{(N-1)}^a \cosh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \gamma_{(N-1)}^b \sinh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right] \quad (E.15.b)$$

$$\tilde{H}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = |H_{u_{(N-1)}}| \left[A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right] \quad (E.15.c)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait à l'interface $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{E}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.16.a)$$

$$\tilde{H}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.16.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_N^e = \frac{H_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})} \quad (E.16.c)$$

$$\text{et } \frac{H_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = -\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} \frac{B_{(N-1)}}{A_{(N-1)}\gamma_{(N-1)}^a} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} = \frac{|H_{u_{(N-1)}}|}{|E_{v_{(N-1)}}|} = j\omega$$

D'où l'on tire :

$$\frac{B_{(N-1)}}{A_{(N-1)}} = -\tilde{Y}_N^e \frac{\gamma_{(N-1)}^a}{\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM}} \quad (E.16.d)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{Y}_{(N-1)}^e = -\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)}) + S_{(N-1)}^{LSM} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)})}{\gamma_{(N-1)}^a \cosh(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)}) + S_{(N-1)}^{LSM} \gamma_{(N-1)}^b \sinh(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)})} \quad (E.16.e)$$

$$\text{avec} \quad S_{(N-1)}^{LSM} = \frac{B_{(N-1)}}{A_{(N-1)}}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m+1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_+^e$:

$$\tilde{Y}_+^e = \tilde{Y}_{(m+1)}^e = -\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} \frac{\sinh(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)}) + S_{(m+1)}^{LSM} \cosh(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)})}{\gamma_{(m+1)}^a \cosh(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)}) + S_{(m+1)}^{LSM} \gamma_{(m+1)}^b \sinh(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)})} \quad (E.16.f)$$

$$S_{(m+1)}^{LSM} = \frac{B_{(m+1)}}{A_{(m+1)}} = -\tilde{Y}_{(m+2)}^e \frac{\gamma_{(m+1)}^a}{\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM}} \quad (E.16.g) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} = \frac{|H_{u_{(m+1)}}|}{|E_{v_{(m+1)}}|} = j\omega$$

E.1.2. Cas de la propagation par modes L.S.E

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_c}{\rho} \tilde{H}_y$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_c}{\rho} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y}$$

soit :

$$|E_{u_i}| = -\frac{\omega \mu_{c_i}}{\rho}$$

$$|H_{v_i}| = -\frac{j \mu_{c_i}}{\rho}$$

$$\tilde{H}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.17.a)$$

$$\tilde{H}_{v_i}(\alpha_n, y) = |H_{v_i}| \left[A_i \gamma_i^a \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \gamma_i^b \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.17.b)$$

$$\tilde{E}_{u_i}(\alpha_n, y) = |E_{u_i}| \left[A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.17.c)$$

- **Détermination de $\tilde{Y}_-$**

Dans la couche 1 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{H}_{y_1}(\alpha_n, y) = A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y) \quad (E.18.a)$$

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, y) = |H_{v_1}| \left[A_1 \gamma_1^a \cosh(\gamma_1^a y) + B_1 \gamma_1^b \sinh(\gamma_1^b y) \right] \quad (E.18.b)$$

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, y) = |E_{u_1}| \left[A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y) \right] \quad (E.18.c)$$

Sur la paroi métallique inférieure (à $y=0$), l'on a :

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0$$

D'où :

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, y) = A_1 |H_{v_1}| \gamma_1^a \cosh(\gamma_1^a y) \quad (E.19.a)$$

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, y) = A_1 |E_{u_1}| \sinh(\gamma_1^a y) \quad (E.19.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_1$ par :

$$\tilde{Y}_1^h = \frac{H_{v_1}(\alpha_n, H_1)}{E_{u_1}(\alpha_n, H_1)} = \frac{|H_{v_1}|}{|E_{u_1}|} \gamma_1^a \coth(\gamma_1^a H_1) \quad (E.19.c)$$

$$\tilde{Y}_1^h = \tilde{Y}_1^{LSE} \gamma_1^a \coth(\gamma_1^a H_1) \quad (E.19.d) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_1^{LSE} = \frac{|H_{v_1}|}{|E_{u_1}|} = \frac{j}{\omega}$$

Le paramètre $\tilde{Y}_1^{LSE}$ peut être interprété comme étant l'admittance de mode du mode L.S.E, il joue le rôle de l'impédance caractéristique dans le cas des lignes de transmission.

Dans la couche 2 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$H_{y_2}(\alpha_n, y) = A_2 \sinh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b(y - H_1)) \quad (E.20.a)$$

$$\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, y) = |H_{v_2}| \left[A_2 \gamma_2^a \cosh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \gamma_2^b \sinh(\gamma_2^b(y - H_1)) \right] \quad (E.20.b)$$

$$\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, y) = |E_{u_2}| \left[A_2 \sinh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b(y - H_1)) \right] \quad (E.20.c)$$

A $y=H_1$, la continuité des composantes tangentielle impose que :

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.21.a)$$

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.21.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1^h = \frac{\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1)}{\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1)} \quad (E.21.c)$$

$$\text{et } \frac{\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1)}{\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1)} = \tilde{Y}_2^{LSE} \frac{A_2 \gamma_2^a}{B_2} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_2^{LSE} = \frac{|H_{v_2}|}{|E_{u_2}|} = \frac{j}{\omega}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\tilde{Y}_1^h}{\gamma_2^a \tilde{Y}_2^{LSE}} \quad (E.21.d)$$

On déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_2$:

$$\tilde{Y}_2^h = \frac{H_{v_2}(\alpha_n, H_2)}{E_{u_2}(\alpha_n, H_2)}$$

Par la formule :

$$\tilde{Y}_2^h = \tilde{Y}_2^{LSE} \frac{S_2^{LSE} \gamma_2^a \cosh(\gamma_2^a h_2) + \gamma_2^b \sinh(\gamma_2^b h_2)}{S_2^{LSE} \sinh(\gamma_2^a h_2) + \cosh(\gamma_2^b h_2)} \quad (E.21.e) \quad \text{avec} \quad S_2^{LSE} = \frac{A_2}{B_2}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m-1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_-^h$:

$$\tilde{Y}_-^h = \tilde{Y}_{(m-1)}^h = \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE} \frac{S_{(m-1)}^{LSE} \gamma_{(m-1)}^a \cosh(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)}) + \gamma_{(m-1)}^b \sinh(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)})}{S_{(m-1)}^{LSE} \sinh(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)}) + \cosh(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)})} \quad (E.21. f)$$

$$S_{(m-1)}^{LSM} = \frac{A_{(m-1)}}{B_{(m-1)}} = \frac{\tilde{Y}_{(m-2)}^h}{\gamma_{(m-1)}^a \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE}} \quad (E.21. g) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE} = \frac{|H_{v_{(m-1)}}|}{|E_{u_{(m-1)}}|} = \frac{j}{\omega}$$

- **Détermination de $\tilde{Y}_+^h$**

Dans la couche (N)

Par ailleurs dans **la couche (N)**, les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{H}_{y_N}(\alpha_n, y) = A_N \sinh(\gamma_N^a (H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b (H_N - y)) \quad (E.22. a)$$

$$\tilde{H}_{v_N}(\alpha_n, y) = -|H_{v_N}| \left[A_N \gamma_N^a \cosh(\gamma_N^a (H_N - y)) + B_N \gamma_N^b \sinh(\gamma_N^b (H_N - y)) \right] \quad (E.22. b)$$

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, y) = |H_{u_N}| \left[A_N \sinh(\gamma_N^a (H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b (H_N - y)) \right] \quad (E.22. c)$$

Sur la paroi métallique supérieure (à $y=H_N$), l'on a :

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, H_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_N = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, y) = A_N |E_{u_N}| \sinh(\gamma_N^a (H_N - y)) \quad (E.23. a)$$

$$\tilde{H}_{v_N}(\alpha_n, y) = -A_N |H_{v_N}| \gamma_N^a \cosh(\gamma_N^a (H_N - y)) \quad (E.23. b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$ par :

$$\tilde{Y}_N^h = \frac{H_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \frac{-|H_{v_N}| \gamma_N^a \cosh(\gamma_N^a h_N)}{|E_{u_N}| \sinh(\gamma_N^b h_N)} \quad (E.23. c)$$

$$\tilde{Y}_N^h = -\tilde{Y}_N^{LSE} \gamma_N^a \coth(\gamma_N^a h_N) \quad (E.23. d) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_N^{LSE} = \frac{|H_{v_N}|}{|E_{u_N}|} = \frac{j}{\omega}$$

Dans la couche (N-1)

Les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{H}_{y(N-1)}(\alpha_n, y) = A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a (H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b (H_{(N-1)} - y)) \quad (E.24.a)$$

$$\tilde{H}_{v(N-1)}(\alpha_n, y) = -|H_{v(N-1)}| \left[\begin{aligned} &A_{(N-1)} \gamma_{(N-1)}^a \cosh(\gamma_{(N-1)}^a (H_{(N-1)} - y)) \\ &+ B_{(N-1)} \gamma_{(N-1)}^b \sinh(\gamma_{(N-1)}^b (H_{(N-1)} - y)) \end{aligned} \right] \quad (E.24.b)$$

$$\tilde{E}_{u(N-1)}(\alpha_n, y) = |E_{u(N-1)}| \left[\begin{aligned} &A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a (H_{(N-1)} - y)) \\ &+ B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b (H_{(N-1)} - y)) \end{aligned} \right] \quad (E.24.c)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait à l'interface $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{E}_{u(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{E}_{uN}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.25.a)$$

$$\tilde{H}_{v(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{H}_{vN}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.25.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_N^h = \frac{H_{v(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})} \quad (E.25.c)$$

$$\text{et } \frac{H_{v(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = -\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} \frac{A_{(N-1)} \gamma_{(N-1)}^a}{B_{(N-1)}} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} = \frac{|H_{v(N-1)}|}{|E_{u(N-1)}|} = \frac{j}{\omega}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{A_{(N-1)}}{B_{(N-1)}} = \frac{-\tilde{Y}_N^h}{\gamma_{(N-1)}^a \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE}} \quad (2.25.d)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-2)}$:

$$\tilde{Y}_{(N-1)}^h = -\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} \frac{S_{(N-1)}^{LSE} \gamma_{(N-1)}^a \cosh(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)}) + \gamma_{(N-1)}^b \sinh(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)})}{S_{(N-1)}^{LSE} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)}) + \cosh(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)})} \quad (E.25.e)$$

$$\text{avec} \quad S_{(N-1)}^{LSE} = \frac{A_{(N-1)}}{B_{(N-1)}}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m+1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_+^h$:

$$\tilde{Y}_+^h = \tilde{Y}_{(m+1)}^h = -\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} \frac{S_{(m+1)}^{LSE} \gamma_{(m+1)}^a \cosh(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)}) + \gamma_{(m+1)}^b \sinh(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)})}{S_{(m+1)}^{LSE} \sinh(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)}) + \cosh(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)})} \quad (E.25.f)$$

$$S_{(m+1)}^{LSE} = \frac{A_{(m+1)}}{B_{(m+1)}} = \frac{-\tilde{Y}_{(m+2)}^h}{\gamma_{(m+1)}^a \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE}} \quad (E.25.g) \quad \text{et} \quad \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} = \frac{|H_{v(m+1)}|}{|E_{u(m+1)}|} = \frac{j}{\omega}$$

E.2. Axe optique parallèle à (oy)

Les composantes du champ EM dans le nouveau repère d'Itoh :

Pour le mode L.S.E ($\tilde{E}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_y}{\rho} \tilde{H}_y \quad (E.26)$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_y}{\rho \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y} \quad (E.27)$$

Pour le mode L.S.M ($\tilde{H}_y = 0$) :

$$\tilde{E}_v = \frac{-j \varepsilon_y}{\rho \varepsilon_c} \frac{\partial \tilde{E}_y}{\partial y} \quad (E.28)$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega \varepsilon_y}{\rho} \tilde{E}_y \quad (E.29)$$

Résolution des équations d'onde (2.32) et (2.33):

- Pour le mode L.S.M :

$$\tilde{E}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i^e \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i^e \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) \quad (E.30.a)$$

- Pour le mode L.S.E :

$$\tilde{H}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i^h \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) + B_i^h \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.30.b)$$

avec :

$$(\gamma_i^a)^2 = \frac{\varepsilon_{ci}}{\varepsilon_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \mu_{ci} \varepsilon_{yi}] \quad ; \quad (i \in [1, (m-1)] \cup [(m+1), N])$$

$$(\gamma_i^b)^2 = \frac{\mu_{ci}}{\mu_{yi}} [\alpha_n^2 + \beta^2 - \omega^2 \varepsilon_{ci} \mu_{yi}] \quad ; \quad (i \in [1, (m-1)] \cup [(m+1), N])$$

E.2.1. Cas de la propagation selon le mode L.S.M

$$\tilde{E}_v = \frac{-j\varepsilon_y}{\rho\varepsilon_c} \frac{\partial E_y}{\partial y}$$

$$\tilde{H}_u = \frac{\omega\varepsilon_y}{\rho} E_y$$

$$|E_{vi}| = -\frac{j\varepsilon_{yi}}{\rho\varepsilon_{ci}}, \quad |H_{ui}| = \frac{\omega\varepsilon_{yi}}{\rho}$$

$$\tilde{E}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) \quad (E.31.a)$$

$$\tilde{E}_{v_i}(\alpha_n, y) = |E_{vi}| \gamma_i^a [A_i \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1}))] \quad (E.31.b)$$

$$\tilde{H}_{u_i}(\alpha_n, y) = |H_{ui}| [A_i \sinh(\gamma_i^a(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^a(y - H_{i-1}))] \quad (E.31.c)$$

- **Détermination de $\tilde{Y}_-^e$**

Dans la couche 1 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{E}_{y_1}(\alpha_n, y) = A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^a y) \quad (E.32.a)$$

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, y) = |E_{v_1}| \gamma_1^a [A_1 \cosh(\gamma_1^a y) + B_1 \sinh(\gamma_1^a y)] \quad (E.32.b)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, y) = |H_{u_1}| [A_1 \sinh(\gamma_1^a y) + B_1 \cosh(\gamma_1^a y)] \quad (E.32.c)$$

Sur la paroi métallique inférieure (à $y=0$), l'on a :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_1 = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, y) = B_1 |E_{v_1}| \gamma_1^a \sinh(\gamma_1^a y) \quad (E.33.a)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, y) = B_1 |H_{u_1}| \cosh(\gamma_1^a y) \quad (E.33.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_1$ par :

$$\tilde{Y}_1^e = \frac{H_{u_1}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_1}(\alpha_n, H_1)} = \frac{|H_{u_1}| \cosh(\gamma_1^a H_1)}{|E_{v_1}| \gamma_1^a \sinh(\gamma_1^a H_1)} \quad (E.34.a)$$

$$\tilde{Y}_1^e = \tilde{Y}_1^{LSM} \coth(\gamma_1^a H_1) \quad (E.34.b) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_1^{LSM} = \frac{|H_{u_1}|}{|E_{v_1}| \gamma_1^a} = \frac{j\omega\varepsilon_{c1}}{\gamma_1^a}$$

Le paramètre Y_1^{LSM} peut être interprété comme étant l'admittance de mode du mode L.S.M, il joue le rôle de l'impédance caractéristique dans le cas des lignes de transmission.

Dans la couche 2 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{E}_{y_2}(\alpha_n, y) = A_2 \sinh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^a(y - H_1)) \quad (E.35.a)$$

$$\tilde{E}_{v_2}(\alpha_n, y) = |E_{v_2}| \gamma_2^a [A_2 \cosh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \sinh(\gamma_2^a(y - H_1))] \quad (E.35.b)$$

$$\tilde{H}_{u_2}(\alpha_n, y) = |H_{u_2}| [A_2 \sinh(\gamma_2^a(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^a(y - H_1))] \quad (E.35.c)$$

A $y=H_1$, la continuité des composantes tangentielle impose que :

$$\tilde{E}_{v_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{E}_{v_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.36.a)$$

$$\tilde{H}_{u_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{H}_{u_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.36.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1^e = \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_1)} \quad (E.36.c)$$

$$\text{et } \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_1)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_1)} = \tilde{Y}_2^{LSM} \frac{B_2}{A_2} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_2^{LSM} = \frac{|H_{u_2}|}{|E_{v_2}| \gamma_2^a} = \frac{j\omega \epsilon_{c2}}{\gamma_2^a}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{B_2}{A_2} = \frac{\tilde{Y}_1^e}{\tilde{Y}_2^{LSM}} \quad (E.36.d)$$

On déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_2$:

$$\tilde{Y}_2^e = \frac{H_{u_2}(\alpha_n, H_2)}{E_{v_2}(\alpha_n, H_2)}$$

Par la formule :

$$\tilde{Y}_2^e = \tilde{Y}_2^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_2^{LSM} + \tilde{Y}_1^e \coth(\gamma_2^a h_2)]}{[\tilde{Y}_2^{LSM} \coth(\gamma_2^a h_2) + \tilde{Y}_1^e]} \quad (E.36.e)$$

En généralisant à la couche d'indice **(m-1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_-^e$:

$$\tilde{Y}_-^e = \tilde{Y}_{(m-1)}^e = \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} + \tilde{Y}_{(m-2)}^e \coth(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)})]}{[\tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} \coth(\gamma_{(m-1)}^a h_{(m-1)}) + \tilde{Y}_{(m-2)}^e]} \quad (E.36.f)$$

$$\text{avec :} \quad \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSM} = \frac{|H_{u_{(m-1)}}|}{|E_{v_{(m-1)}}| \gamma_{(m-1)}^a} = \frac{j\omega \epsilon_{c(m-1)}}{\gamma_{(m-1)}^a} \quad (E.36.g)$$

- **Détermination de $\tilde{Y}_+^e$**

Dans la couche (N)

Par ailleurs dans **la couche (N)**, les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{E}_{y_N}(\alpha_n, y) = A_N \sinh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^a(H_N - y)) \quad (E.37.a)$$

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, y) = -|E_{v_N}| \gamma_N^a [A_N \cosh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \sinh(\gamma_N^a(H_N - y))] \quad (E.37.b)$$

$$\tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, y) = |H_{u_N}| [A_N \sinh(\gamma_N^a(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^a(H_N - y))] \quad (E.37.c)$$

Sur la paroi métallique supérieure (à $y=H_N$), l'on a :

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, H_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_N = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, y) = -B_N |E_{v_N}| \gamma_N^a \sinh(\gamma_N^a(H_N - y)) \quad (E.38.a)$$

$$\tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, y) = B_N |H_{u_N}| \cosh(\gamma_N^a(H_N - y)) \quad (E.38.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$ par :

$$\tilde{Y}_N^e = \frac{H_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \frac{|H_{u_N}| \cosh(\gamma_N^a h_N)}{-|E_{v_N}| \gamma_N^a \sinh(\gamma_N^a h_N)} \quad (E.39.a)$$

$$\tilde{Y}_N^e = \tilde{Y}_N^{LSM} \coth(\gamma_N^a h_N) \quad (E.39.b) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_N^{LSM} = -\frac{|H_{u_N}|}{|E_{v_N}| \gamma_N^a} = -\frac{j\omega \varepsilon_{cN}}{\gamma_N^a}$$

Dans la couche (N-1)

Les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{E}_{y_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) \quad (E.40.a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = & -|E_{v_{(N-1)}}| \gamma_{(N-1)}^a [A_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) \\ & + B_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y))] \end{aligned} \quad (E.40.b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = & |H_{u_{(N-1)}}| [A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y)) \\ & + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^a(H_{(N-1)} - y))] \end{aligned} \quad (E.40.c)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait à l'interface $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{E}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{E}_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.41.a)$$

$$\tilde{H}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{H}_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.41.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_N^e = \frac{H_{u(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})} \quad (E.41. c)$$

$$\text{et } \frac{H_{u(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{v(N-1)}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} \frac{B_{(N-1)}}{A_{(N-1)}} \quad \text{avec } \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} = -\frac{|H_{u(N-1)}|}{|E_{v(N-1)}| \gamma_{(N-1)}^a} = -\frac{j\omega\epsilon_{c(N-1)}}{\gamma_{(N-1)}^a}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{B_{(N-1)}}{A_{(N-1)}} = \frac{\tilde{Y}_N^e}{\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM}} \quad (E.41. d)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{Y}_{(N-1)}^e = \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} + \tilde{Y}_N^e \coth(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)})]}{[\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} \coth(\gamma_{(N-1)}^a h_{(N-1)}) + \tilde{Y}_N^e]} \quad (E.41. e)$$

$$\text{avec } \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSM} = -\frac{|H_{u(N-1)}|}{|E_{v(N-1)}| \gamma_{(N-1)}^a} = -\frac{j\omega\epsilon_{c(N-1)}}{\gamma_{(N-1)}^a}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m+1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_+^e$:

$$\tilde{Y}_+^e = \tilde{Y}_{(m+1)}^e = \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} \frac{[\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} + \tilde{Y}_{(m+2)}^e \coth(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)})]}{[\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} \coth(\gamma_{(m+1)}^a h_{(m+1)}) + \tilde{Y}_{(m+2)}^e]} \quad (E.41. f)$$

$$\text{avec : } \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSM} = -\frac{|H_{u(m+1)}|}{|E_{v(m+1)}| \gamma_{(m+1)}^a} = -\frac{j\omega\epsilon_{c(m+1)}}{\gamma_{(m+1)}^a} \quad (E.41. g)$$

E.2.2. Cas de la propagation par mode L.S.E

$$\tilde{E}_u = \frac{-\omega \mu_y}{\rho} \tilde{H}_y$$

$$\tilde{H}_v = \frac{-j \mu_y}{\rho \mu_c} \frac{\partial \tilde{H}_y}{\partial y}$$

Soit :

$$|E_{u_i}| = \frac{-\omega \mu_{y_i}}{\rho}$$

$$|H_{v_i}| = \frac{-j \mu_{y_i}}{\rho \mu_{c_i}}$$

$$\tilde{H}_{y_i}(\alpha_n, y) = A_i \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \quad (E.42.a)$$

$$\tilde{H}_{v_i}(\alpha_n, y) = |H_{v_i}| \gamma_i^b \left[A_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) + B_i \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.42.b)$$

$$\tilde{E}_{u_i}(\alpha_n, y) = |E_{u_i}| \left[A_i \sinh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) + B_i \cosh(\gamma_i^b(y - H_{i-1})) \right] \quad (E.42.c)$$

• **Détermination de $\tilde{Y}_-^h$**

Dans la couche 1 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$\tilde{H}_{y_1}(\alpha_n, y) = A_1 \sinh(\gamma_1^b y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y) \quad (E.43.a)$$

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, y) = |H_{v_1}| \gamma_1^b \left[A_1 \cosh(\gamma_1^b y) + B_1 \sinh(\gamma_1^b y) \right] \quad (E.43.b)$$

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, y) = |E_{u_1}| \left[A_1 \sinh(\gamma_1^b y) + B_1 \cosh(\gamma_1^b y) \right] \quad (E.43.c)$$

Sur la paroi métallique inférieure (à $y=0$), l'on a :

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, 0) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_1 = 0$$

D'où :

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, y) = A_1 |H_{v_1}| \gamma_1^b \cosh(\gamma_1^b y) \quad (E.44.a)$$

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, y) = A_1 |E_{u_1}| \sinh(\gamma_1^b y) \quad (E.44.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_1$ par :

$$\tilde{Y}_1^h = \frac{H_{v_1}(\alpha_n, H_1)}{E_{u_1}(\alpha_n, H_1)} = \frac{|H_{v_1}|}{|E_{u_1}|} \gamma_1^b \coth(\gamma_1^b H_1) \quad (E.44.c)$$

$$\tilde{Y}_1^h = \tilde{Y}_1^{LSE} \coth(\gamma_1^b H_1) \quad (E.44.d) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_1^{LSE} = \frac{|H_{v_1}|}{|E_{u_1}|} \gamma_1^b = \frac{j\gamma_1^b}{\omega\mu_{c1}}$$

Le paramètre $\tilde{Y}_1^{LSE}$ peut être interprété comme étant l'admittance de mode du mode L.S.E, il joue le rôle de l'impédance caractéristique dans le cas des lignes de transmission.

Dans la couche 2 :

Les composantes du champ EM s'écrit comme suit :

$$H_{y_2}(\alpha_n, y) = A_2 \sinh(\gamma_2^b(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b(y - H_1)) \quad (E.45.a)$$

$$\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, y) = |H_{v_2}| \gamma_2^b \left[A_2 \cosh(\gamma_2^b(y - H_1)) + B_2 \sinh(\gamma_2^b(y - H_1)) \right] \quad (E.45.b)$$

$$\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, y) = |E_{u_2}| \left[A_2 \sinh(\gamma_2^b(y - H_1)) + B_2 \cosh(\gamma_2^b(y - H_1)) \right] \quad (E.45.c)$$

A $y=H_1$, la continuité des composantes tangentielle impose que :

$$\tilde{E}_{u_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.46.a)$$

$$\tilde{H}_{v_1}(\alpha_n, H_1) = \tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1) \quad (E.46.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_1^h = \frac{\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1)}{\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1)} \quad (E.46.c)$$

$$\text{et } \frac{\tilde{H}_{v_2}(\alpha_n, H_1)}{\tilde{E}_{u_2}(\alpha_n, H_1)} = \tilde{Y}_2^{LSE} \frac{A_2}{B_2} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_2^{LSE} = \frac{|H_{v_2}|}{|E_{u_2}|} \gamma_2^b = \frac{j\gamma_2^b}{\omega\mu_{c2}}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{A_2}{B_2} = \frac{\tilde{Y}_1^h}{\tilde{Y}_2^{LSE}} \quad (E.46.d)$$

On déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_2$:

$$\tilde{Y}_2^h = \frac{H_{v_2}(\alpha_n, H_2)}{E_{u_2}(\alpha_n, H_2)}$$

Par la formule :

$$\tilde{Y}_2^h = \tilde{Y}_2^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_1^h \coth(\gamma_2^b h_2) + \tilde{Y}_2^{LSE}]}{[\tilde{Y}_1^h + \tilde{Y}_2^{LSE} \coth(\gamma_2^b h_2)]} \quad (E.46.e) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_2^{LSE} = \frac{|H_{v_2}|}{|E_{u_2}|} \gamma_2^b = \frac{j\gamma_2^b}{\omega\mu_{c2}}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m-1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_-^h$:

$$\tilde{Y}_-^h = \tilde{Y}_{(m-1)}^h = \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_{(m-2)}^h \coth(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)}) + \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE}]}{[\tilde{Y}_{(m-2)}^h + \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE} \coth(\gamma_{(m-1)}^b h_{(m-1)})]} \quad (E.46.f)$$

$$\text{avec :} \quad \tilde{Y}_{(m-1)}^{LSE} = \frac{|H_{v_{(m-1)}}|}{|E_{u_{(m-1)}}|} \gamma_{(m-1)}^b = \frac{j\gamma_{(m-1)}^b}{\omega\mu_{c(m-1)}} \quad (E.46.g)$$

• Détermination de $\tilde{Y}_+^h$

Dans la couche (N)

Par ailleurs dans **la couche (N)**, les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{H}_{y_N}(\alpha_n, y) = A_N \sinh(\gamma_N^b(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.47.a)$$

$$\tilde{H}_{v_N}(\alpha_n, y) = -|H_{v_N}| \gamma_N^b [A_N \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) + B_N \sinh(\gamma_N^b(H_N - y))] \quad (E.47.b)$$

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, y) = |E_{u_N}| \left[A_N \sinh(\gamma_N^b(H_N - y)) + B_N \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \right] \quad (E.47.c)$$

Sur la paroi métallique supérieure (à $y=H_N$), l'on a :

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, H_N) = 0 \quad \Rightarrow \quad B_N = 0$$

D'où :

$$\tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, y) = A_N |E_{u_N}| \sinh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.48.a)$$

$$\tilde{H}_{v_N}(\alpha_n, y) = -A_N |H_{v_N}| \gamma_N^b \cosh(\gamma_N^b(H_N - y)) \quad (E.48.b)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-1)}$ par :

$$\tilde{Y}_N^h = \frac{H_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \frac{-|H_{v_N}| \gamma_N^b \cosh(\gamma_N^b h_N)}{|E_{u_N}| \sinh(\gamma_N^b h_N)} \quad (E.48.c)$$

$$\tilde{Y}_N^h = \tilde{Y}_N^{LSE} \coth(\gamma_N^b h_N) \quad (E.48.d) \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_N^{LSE} = -\frac{|H_{v_N}|}{|E_{u_N}|} \gamma_N^b = -\frac{j\gamma_N^b}{\omega\mu_{cN}}$$

Dans la couche (N-1)

Les composantes du champ EM s'écrivent comme suit :

$$\tilde{H}_{y_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \quad (E.49.a)$$

$$\begin{aligned} \tilde{H}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = & -|H_{v_{(N-1)}}| \gamma_{(N-1)}^b \left[A_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right. \\ & \left. + B_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right] \end{aligned} \quad (E.49.b)$$

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, y) = & |E_{u_{(N-1)}}| \left[A_{(N-1)} \sinh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right. \\ & \left. + B_{(N-1)} \cosh(\gamma_{(N-1)}^b(H_{(N-1)} - y)) \right] \end{aligned} \quad (E.49.c)$$

Les lois de continuité du champ EM imposent qu'on ait à l'interface $y=H_{(N-1)}$:

$$\tilde{E}_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{E}_{u_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.50.a)$$

$$\tilde{H}_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)}) = \tilde{H}_{v_N}(\alpha_n, H_{(N-1)}) \quad (E.50.b)$$

$$\Rightarrow \tilde{Y}_N^h = \frac{H_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})} \quad (E.50.c)$$

$$\text{et} \quad \frac{H_{v_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})}{E_{u_{(N-1)}}(\alpha_n, H_{(N-1)})} = \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} \frac{A_{(N-1)}}{B_{(N-1)}} \quad \text{avec} \quad \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} = -\frac{|H_{v_{(N-1)}}|}{|E_{u_{(N-1)}}|} \gamma_{(N-1)}^b = -\frac{j\gamma_{(N-1)}^b}{\omega\mu_{c(N-1)}}$$

D'où l'on tire :

$$\frac{A_{(N-1)}}{B_{(N-1)}} = \frac{\tilde{Y}_N^h}{\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE}} \quad (E.50.d)$$

On en déduit alors l'admittance équivalente ramenée au plan $y=H_{(N-2)}$:

$$\tilde{Y}_{(N-1)}^h = \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} + \tilde{Y}_N^h \coth(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)})]}{[\tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} \coth(\gamma_{(N-1)}^b h_{(N-1)}) + \tilde{Y}_N^h]} \quad (E.50.e)$$

$$\text{avec} \quad \tilde{Y}_{(N-1)}^{LSE} = -\frac{|H_{v(N-1)}|}{|E_{u(N-1)}|} \gamma_{(N-1)}^b = -\frac{j\gamma_{(N-1)}^b}{\omega\mu_{c(N-1)}}$$

En généralisant à la couche d'indice **(m+1)**, on obtient le processus de récurrence suivant relatif à $\tilde{Y}_+^h$:

$$\tilde{Y}_+^h = \tilde{Y}_{(m+1)}^h = \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} \frac{[\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} + \tilde{Y}_{(m+2)}^h \coth(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)})]}{[\tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} \coth(\gamma_{(m+1)}^b h_{(m+1)}) + \tilde{Y}_{(m+2)}^h]} \quad (E.50.f)$$

$$\text{avec :} \quad \tilde{Y}_{(m+1)}^{LSE} = -\frac{|H_{v(m+1)}|}{|E_{u(m+1)}|} \gamma_{(m+1)}^b = -\frac{j\gamma_{(m+1)}^b}{\omega\mu_{c(m+1)}} \quad (E.50.g)$$

ANNEXE F :**Application de la méthode de Galerkin****F.1. Description de la méthode de calcul**

La méthode de Galerkin (cas particulier de la méthode des moments) est une technique couramment utilisée pour discrétiser une équation comportant un opérateur continu, comme c'est le cas de l'équation intégrale issue de l'utilisation de la fonction de Green dans l'expression des champs. La fonction inconnue est décomposée en une combinaison linéaire de fonctions de base, de coefficients inconnus et insérée dans l'équation intégrale. On effectue ensuite le produit intérieur de cette dernière par des fonctions test pour obtenir un ensemble d'équations linéaires permettant de calculer les coefficients de la décomposition. Il y a divers choix possibles pour les fonctions de base (et les fonctions tests) dans le cadre de la méthode des moments. Ainsi par exemple, lorsque les fonctions de base sont des impulsions de Dirac, la méthode dite « point-matching » est utilisée. Si les fonctions de base sont identiques aux fonctions tests, on parle alors de la méthode dite de Galerkin.

F.2. Application de la méthode

Nous rappelons la relation qui relie le courant au champ électrique à l'interface métallisée qui est la suivante :

$$\begin{bmatrix} \tilde{E}_{xm}(\alpha_n, H_m) \\ \tilde{E}_{zm}(\alpha_n, H_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(\alpha_n, \beta) & G_{12}(\alpha_n, \beta) \\ G_{21}(\alpha_n, \beta) & G_{22}(\alpha_n, \beta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{J}_{xm}(\alpha_n) \\ \tilde{J}_{zm}(\alpha_n) \end{bmatrix}$$

Les éléments de la matrice $G(\alpha_n, \beta)$ sont obtenus par simple inversion de la matrice des admittances $[Y]$. L'application de la méthode des moments s'effectue en deux étapes:

1^{ère} étape

Dans cette étape, il s'agit de décomposer les densités de courant $\tilde{J}_x(\alpha_n)$ et $\tilde{J}_z(\alpha_n)$ suivant des fonctions de base appropriées, répondant autant que possible aux critères physiques et respectant la géométrie des courants sur la métallisation :

$$\begin{cases} J_x(x) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m J_{xm}(x) \\ J_z(x) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m J_{zm}(x) \end{cases} \quad (F.1)$$

avec :

X_m et Z_m sont des constantes

J_{xm} et J_{zm} sont les fonctions de base

En appliquant la transformée de Fourier, il vient :

$$\begin{cases} \tilde{J}_x(\alpha_n) = \sum_{m=1}^{\infty} X_m \tilde{J}_{xm}(\alpha_n) \\ \tilde{J}_z(\alpha_n) = \sum_{m=1}^{\infty} Z_m \tilde{J}_{zm}(\alpha_n) \end{cases} \quad (F.2)$$

Afin de rendre la résolution numérique plus aisée, il est souhaitable de choisir des fonctions de base qui respectent des critères physiques bien précis et que les transformées de Fourier soient connues analytiquement. On obtient alors le nouveau système fonctionnel :

$$\begin{cases} G_{11}(\alpha_n) \sum_{p=1}^{\infty} X_p \tilde{J}_{xp}(\alpha_n) + G_{12}(\alpha_n) \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \tilde{J}_{zp}(\alpha_n) = \tilde{E}_{x(m+1)}(\alpha_n, H_m) \\ G_{21}(\alpha_n) \sum_{p=1}^{\infty} X_p \tilde{J}_{xp}(\alpha_n) + G_{22}(\alpha_n) \sum_{p=1}^{\infty} Z_p \tilde{J}_{zp}(\alpha_n) = \tilde{E}_{z(m+1)}(\alpha_n, H_m) \end{cases} \quad (F.3)$$

2^{ème} étape :

Dans cette étape, il s'agit de projeter le système fonctionnel sur les fonctions de base des densités de courant à l'aide du produit hermitien défini sur les différentes fonctions de α_n . Il s'agit d'une application de la méthode de Galerkin.

On passe ainsi à un problème où les inconnues sont les familles de coefficients complexes scalaires (X_p) et (Z_q) ainsi que les projections des champs sur les fonctions de base des densités de courant. En pratique cela revient à appliquer la méthode des moments à un problème de propagation guidée. Si l'objectif est de déterminer numériquement la densité de courant qui circule sur le(s) conducteur(s), il faut également calculer la constante de propagation du mode étudié à priori inconnue.

Pour appliquer la technique de Galerkin, nous définissons le produit scalaire de deux fonctions X et Y par :

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a X(x) Y^*(x) dx \quad (F.4)$$

En utilisant l'identité de Parseval, le produit scalaire peut aussi s'écrire comme :

$$\langle X, Y \rangle = \frac{1}{2a} \int_{-a}^a X(x) Y^*(x) dx = \sum_n \tilde{X} \tilde{Y}^* \quad (F.5)$$

L'étape suivante, consiste à appliquer le produit scalaire de part et d'autre des équations (F.3) à l'aide des fonctions tests $\tilde{J}_{z,q}(\alpha_n)$ et $\tilde{J}_{x,p}(\alpha_n)$ (choisies égales aux fonctions de base dans le cadre de technique de Galerkin), ce qui donne :

$$\langle \tilde{E}_x, \tilde{J}_{xp'} \rangle = \langle X_p \sum_{p=1}^R G_{11}(\alpha_n) \tilde{J}_{xp}(\alpha_n) + Z_q \sum_{q=1}^M G_{12}(\alpha_n) \tilde{J}_{zq}(\alpha_n); \tilde{J}_{xp'}(\alpha_n) \rangle; \quad p = 1, 2, 3, \dots, R \quad (F.6.a)$$

$$\langle \tilde{E}_z, \tilde{J}_{zq'} \rangle = \langle X_p \sum_{p=1}^R G_{21}(\alpha_n) \tilde{J}_{xp}(\alpha_n) + Z_q \sum_{q=1}^M G_{22}(\alpha_n) \tilde{J}_{zq}(\alpha_n); \tilde{J}_{zq'}(\alpha_n) \rangle; \quad q = 1, 2, 3, \dots, M \quad (F.6.b)$$

En tenant compte, ensuite de la complémentarité des conditions aux limites du champ et du courant sur l'interface métallisée, il vient :

$$\langle \tilde{E}_x, \tilde{J}_{xp'} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \tilde{E}_z, \tilde{J}_{zq'} \rangle = 0$$

En utilisant ensuite l'identité de Parseval, les équations (F.6) deviennent :

$$\sum_{p=1}^R C_{pp'}^{11}(\beta) X_p + \sum_{q=1}^M C_{qp'}^{12}(\beta) Z_q = 0 \quad ; q = 1, 2, \dots, M$$

$$\sum_{p=1}^R C_{pq'}^{21}(\beta) X_p + \sum_{q=1}^M C_{qq'}^{22}(\beta) Z_q = 0 \quad ; p = 1, 2, \dots, R$$

Sachant que :

$$C_{pp'}^{11}(\omega, \beta) = \sum_n G_{11}(\alpha_n) \tilde{J}_{xp}(x) \tilde{J}_{xp'}^*(x) \quad (F.7.a)$$

$$C_{qp'}^{12}(\omega, \beta) = \sum_n G_{12}(\alpha_n) \tilde{J}_{zq}(x) \tilde{J}_{xp'}^*(x) \quad (F.7.b)$$

$$C_{pq'}^{21}(\omega, \beta) = \sum_n G_{21}(\alpha_n) \tilde{J}_{xp}(x) \tilde{J}_{zq'}^*(x) \quad (F.7.c)$$

$$C_{qq'}^{22}(\omega, \beta) = \sum_n G_{22}(\alpha_n) \tilde{J}_{zq}(x) \tilde{J}_{zq'}^*(x) \quad (F.7.d)$$

Nous obtenons alors un système d'équations algébriques de $(R+M)$ équations linéaires homogènes en fonctions des $(R+M)$ coefficients inconnues X_p et Z_q . Ce système se présente sous forme matricielle:

$$[C(\omega, \beta)] \begin{bmatrix} X \\ Z \end{bmatrix} = 0 \quad (F.8)$$

Les solutions non triviales du système d'équations homogènes (F.8) fournissent à une fréquence donnée f , les constantes de propagation des modes guidés par la structure. Ceci va nous permettre de tracer le diagramme de dispersion. Les solutions non triviales sont obtenues en annulant le déterminant de la matrice $[C(\omega, \beta)]$.

$$\det[C(\omega, \beta)] = 0 \quad (F.9)$$

L'équation (F.9) représente l'équation caractéristique de système. Sa résolution permet de calculer à une fréquence donnée la constante de phase β .