

N° d'ordre : 12/2014-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Géométrie

Par : DAHMANI Khaled

THÈME

Introduction à la théorie des singularités
des champs de vecteurs et des applications différentiables

Soutenu publiquement, le 05/02/2014, devant le jury composé de :

Mr.	A. KESSI	Professeur,	à l'USTHB	Président
Mr.	B. ABBACI	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mr.	D. BEHLOUL	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur

À mes parents

À. Zineb, Ali Mortadha et Mohamed Ridha

Remerciements

Je remercie vivement mon professeur et maître M. B.ABBACI qui m'a honoré et mis toute sa confiance en moi lors de cet exposé, je lui exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour avoir suscité en moi le goût de la recherche et du savoir comme je le remercie pour sa grande patience à mon égard en lui souhaitant beaucoup de succès et de réussite.

Je voudrais aussi adresser mes plus vifs remerciements à mon professeur M.A.KESSI en tant que président de mon jury, je remercie également M.D.BEHLOUL d'avoir accepté la charge d'être l'examineur de cette thèse.

Je remercie très chaleureusement M.Benaïda Bouamra et sa famille pour son soutien, ses encouragements

Je remercie pour finir tous mes amis, plus particulièrement, M.KRIMI et N.BOUTABA pour leurs encouragements et leurs soutiens.

Résumé

Pour faciliter l'étude des solutions d'une équation différentielle au voisinage d'un point d'équilibre, on peut chercher un changement de variable (défini au voisinage du point singulier), qui ramène cette équation à une forme plus simple dite forme normale

Cette méthode a vraiment commencé à être utilisée et étudiée par Poincaré en 1879 . De nombreux problèmes ont tout de suite été soulevés quant à l'existence, la nature et la classification des différentes forme normales, ainsi que des changements de variable qui nous les procurent.

Ce mémoire est une tentative d'étudier les champs de vecteur en leurs points singuliers et les applications différentiables en leurs points fixes de trouver leur formes normales et d'étudier la question de linéarisation de ces objets (l'existence de changement de variable, qui réduisent le champs de vecteurs à sa partie linéaire ou à une forme polynomiale)

Mots-clés : Singularités de champs de vecteurs et d'application différentiable, formes normales, domaine de Poincaré et Seigle et notions d'hyperbolicité.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Introduction	1
1 Champs de vecteurs et équations différentielles	6
1.1 Champs de vecteurs, trajectoires	6
1.2 Trajectoires maximales, flot intégral	7
1.3 Expression du flot en coordonnées locales	10
1.4 Boîtes de flot	11
1.5 Points singuliers des champs de vecteurs, linéarisation autour d'un point singulier	11
1.6 Stabilité au sens de Liapunov	13
1.7 Points singuliers hyperboliques	15
1.7.1 Le cas linéaire	15
1.7.2 Le cas non-linéaire : le théorème de Grobman-Hartman	16
1.7.3 Le cas non-linéaire : les variétés stables et instables	17
1.8 Exemple : le champ de Rayleigh	20
2 Singularités des applications différentiables	23
2.1 Points critiques et valeurs critiques des applications différentiables	25
2.2 Points fixes hyperboliques	26
2.3 Classification des applications différentiables	26

3	Formes normales	31
3.1	Linéarisation Formelle - Méthode de Poincaré	31
3.1.1	Opérateur homologique	33
3.1.2	Equation homologique	33
3.1.3	Méthode de Poincaré	35
3.2	Domaine de Poincaré et domaine de Siegle	39
3.3	Théorème de Poincaré-Dulac	45
3.4	Théorème de Siegel	64
3.4.1	A : Formulation du théorème	64
3.4.2	B : Construction du changement de variable et présentation de la preuve	65
3.4.3	C : Équation homologique (une propriété fondamentale)	66
3.4.4	D : Ordre des opérateurs	70
3.4.5	E : Majoration du reste	77
3.4.6	F : Convergence des changements de variable et preuve du théorème .	81
3.5	Champs de vecteurs C^∞ ou C^k	86
3.6	Forme normale d'une application au voisinage d'un point fixe	97
3.6.1	Linéarisation formelle	99
3.6.2	Problèmes de convergence.	100
3.6.3	Cas résonnant	101
4	Conclusion	102

Introduction

Considérons le système d'équations différentielles suivant:

$$\dot{X} = f(X) \quad , \quad f(0) = 0 \quad (1)$$

où, à toutes fins pratiques:

- $X \in \mathbb{k}^n, \mathbb{k} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$

- $f : W \subset \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ est une fonction soit différentiable un nombre fini de fois, soit C^∞ , ou encore analytique.

Ce système possède une singularité en 0 (**point d'équilibre**).

Les propriétés des solutions d'un tel système au voisinage du point singulier $X = 0$, en particulier leur comportement qualitatif, sont l'objet d'études intensives depuis plus d'une centaine d'années. Mais, malgré toutes les recherches sur le sujet, une classification complète des singularités de tels systèmes reste encore inachevée. Nous ne savons même pas encore jusqu'à quel point les solutions du système (1) peuvent être compliquées dans le voisinage de $X = 0$, et c'est actuellement le principal sujet d'étude dans la théorie des bifurcations et dans les phénomènes chaotiques.

La principale méthode d'investigation de ces sujets - et la plus fructueuse - consiste, à l'aide d'un changement de variable défini au voisinage de l'origine et laissant celle-ci fixe, à ramener l'équation (1) à une forme plus simple que l'on appelle forme normale.

C'est-à-dire que l'on cherche un changement de variable

$$X = H(Y), \quad H(0) = 0 \quad (2)$$

tel que l'expression de l'équation (1) en les nouvelles variables Y

$$\dot{Y} = DH(Y)^{-1}f(H(Y)) \quad (3)$$

soit la plus simple possible. ($DH(Y)$ est la matrice Jacobienne de H au point Y)

Idéalement, les formes auxquelles on voudrait bien parvenir pour l'équation (3), sont principalement:

- linéarisation:

$$\dot{Y} = Df(0)Y$$

- vecteur polynômial:

$$\dot{Y} = Df(0)Y + P(Y)$$

,où P est un polynôme vectoriel sans termes constants ni linéaires.

On se doute bien que cela ne sera possible que dans certains cas bien précis.

Donc, on se pose principalement les questions suivantes:

1- Quelles sont les formes les plus simples de (3), appelés formes normales, auxquelles peut se ramener le système (1), et ce, à l'aide d'une transformation (2) ?

2- De quelle nature sera la transformation (2) ? C'est-à-dire, par exemple: quand est-ce que le fait que f dans (1) soit analytique, C^∞ ou différentiable un nombre fini de fois, implique que la transformation (2), et donc le second membre de (3), soit analytique, C^∞ ou différentiable un certain nombre de fois ?

Les réponses ne sont pas des plus simples et les techniques utilisées pour résoudre ce problème peuvent différer d'un cas à un autre. Dans le présent texte, nous étudierons principalement le cas où f dans (1) est analytique. La façon de procéder est alors la suivante: on construit un changement de variable sous forme de série formelle - appelée série de Poincaré - en trouvant une suite de transformations qui font disparaître successivement les termes de degré deux, trois, etc...(enfin ceux que l'on peut faire disparaître) dans le développement de Taylor de f au voisinage de l'origine. Il s'agit ensuite de prouver la convergence de cette série formelle.

La première partie de troisième chapitre, celle de la construction formelle, est relativement simple et possible dans la plupart cas. Le problème de la convergence, par contre, est beaucoup plus délicat; celle-ci dépend essentiellement de conditions sur les valeurs propres du linéarisé à l'origine $Df(0)$.

Remarquons cependant que, même dans le cas où il y a divergence, ou encore dans celui où f n'est pas analytique, les premiers pas de l'itération conduisant à la série de Poincaré permettent de s'attaquer à un nombre fini de termes dans le développement de Taylor de f . C'est ce que l'on appelle la méthode de Poincaré. Celle-ci, quoique très simple, s'est avérée un puissant outil en théorie des bifurcations et dans l'étude des phénomènes chaotiques (cf. Arnold[1] et Guckenheimer[3]).

Donnons maintenant un aperçu de l'histoire de la question ainsi que les grandes lignes de son développement. La méthode décrite ci-dessus (construction formelle du changement de variable et ensuite preuve de la convergence) a son origine dans la thèse de Poincaré, présentée en 1879, où il l'utilisait pour prouver le théorème suivant: dans le cas où f est analytique (complexe), il existe un changement de variable de la forme

$$X = Y + h(Y), \quad h(0) = h'(0) = 0$$

analytique en 0, transformant (au voisinage de 0) le système (1) en:

$$\dot{Y} = Df(0)Y$$

ce, à condition que les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $Df(0)$ satisfassent les conditions suivantes:

- 1) Les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont toutes distinctes.
- 2) Considérant les valeurs propres comme des points dans le plan complexe, il existe une droite D passant par l'origine, telle que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous situés d'un même côté de D .
- 3) $\lambda_i \neq m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n, 1 \leq i \leq n$ et pour $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}$ tels que $m_1 + \dots + m_n \geq 2$.

Par la suite, en énoncera la condition 2) en disant que les valeurs propres sont dans le domaine de Poincaré et, dans le cas contraire, dans le domaine de Siegle. La condition 3) s'énoncera en disant que les valeurs propres sont non résonantes et résonantes dans le cas contraire. De plus, pour $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n, m_1 + \dots + m_n \geq 2$ et $1 \leq i \leq n$, fixes, l'équation $\lambda_i = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$, définit un hyperplan de $\mathbb{C}^n$ appelé plan de résonance R_i^m .

Ultérieurement, les développements majeurs et fondamentaux de la théorie furent donnés par Dulac (1912) et Siegle (1952). En 1912, Dulac démontra, en ne retenant que la condition 2) (toujours avec f analytique complexe), qu'il existe un changement de variable en 0, ramenant l'équation (1) (au voisinage de 0) à la forme normale

$$\dot{Y} = Df(0)Y + P(Y), \quad P(0) = P'(0) = 0$$

(on suppose que $Df(0)$ est exprimée sous sa forme de Jordan), où P est un polynôme vectoriel tel que, si $Y_1^{m_1} \dots Y_n^{m_n}$ est monôme de la $i^{\text{ème}}$ coordonnée, alors $\lambda_i = m_1\lambda_1 + \dots + m_n\lambda_n$ (monôme résonant).

La proximité du vecteur des valeurs propres dans $\mathbb{C}^n$ aux différents plans de résonance force les termes du changement de variable formel à être grands, or les plans de résonance sont rares dans le domaine de Poincaré et partout denses dans le domaine de Siegle. On ne

s'étonne donc pas que l'extension du théorème de linéarisation de Poincaré au domaine de Siegle soit plutôt délicate.

Ceci fut accompli par Siegle en 1952, lorsque il démontra (toujours avec f analytique complexe) qu'il existe un changement de variable analytique en 0 transformant l'équation (1) en

$$\dot{Y} = Df(0)Y \quad (\text{linéarisation})$$

sous les conditions suivantes:

- i) $Df(0)$ est diagonalisable.
- ii) $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ étant les valeurs propres de $Df(0)$, il existe un $c \succ 0$ et un $v \geq 0$ tels que pour $\forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}^n, m_1 + \dots + m_n \geq 2$, on ait:

$$|m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n| \geq \frac{c}{(m_1 + \dots + m_n)^v}, \quad 1 \leq i \leq n$$

Cette dernière condition (on dit alors que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont de type multiplication (c, v)) est intéressante, car l'ensemble des vecteurs $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ qui la satisfont est partout dense dans $\mathbb{C}^n$.

Cependant, d'un point de vue pratique, pour l'étude de cas particuliers, le théorème de Siegle n'est pas très utile. (Par exemple, la condition ii) n'est jamais satisfaite pour les systèmes hamiltoniens.) Il l'est beaucoup plus du point de vue théorique, comme théorème d'existence, en particulier comme point de départ pour la théorie de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM).

A part les travaux de Poincaré, Dulac et Siegle, on remarquera, parmi les contributions les plus importantes, celles de Cherry (1927), Birkhoff (1957), qui traite le cas où f est réelle et C^∞ , Chen (1963), Brjuno (1964), Brjuno (1971) qui fait la synthèse tout en apportant des améliorations de tous les résultats obtenus jusqu'à ce moment, et Takens (1973).

Voyons maintenant le plan du présent texte. Le premier chapitre fait un rappel des principales notions et résultats sur les équations différentielles ordinaires. Le second chapitre traite les questions de points critiques d'applications différentiables ainsi que leur classification. Le dernier est dédié à l'objectif du mémoire. Dans la 1^{re} section, on présente les différents aspects de la linéarisation formelle et la méthode de Poincaré, qui sont à la base de la théorie. En particulier, je définis et analyse la notion de résonance, d'opérateur et d'équation homologique.

Dans la 2^e section, on présente les domaines de Poincaré et de Siegle (dans $\mathbb{C}^n$) et leurs propriétés vis-à-vis des vecteurs résonnants, non résonnants et de type multiplicatif (c, v) .

la section 3 est consacré au théorème de Poincaré-Dulac et la section 4, au théorème de Siegle. Les preuve de ces théorèmes font appel à des techniques différentes: la section 3 de chapitre 3 repose sur un théorème d'équations aux dérivées partielles, cité et démontré par Poincaré dans sa thèse, et la section 4 de chapitre 3 introduit la notion d'ordre d'un opérateur de fonction-la quelle notion est des plus intéressantes.

Enfin, dans la section 5 , on fait quelques remarques sur les travaux de Sternbag, qui considère les cas où f est réelle et C^∞ ou C^k , relevant les distinctions entre ce cas et le cas analytique.

1

Champs de vecteurs et équations différentielles

1.1 Champs de vecteurs, trajectoires

Un champ de vecteur X sur une variété M est une fonction:

$$X : M \rightarrow TM$$

telle que $X(m) \in T_m M$ pour tout $m \in M$, autrement dit, à chaque point m on associe un vecteur tangent en m .

Lorsque $\phi: U \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une carte locale de M on obtient une représentation locale Y de X en posant:

$$Y(\phi(m)) = D\phi(m)(X(m)), \quad m \in U$$

Y est un champ de vecteurs défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Ses coordonnées sont notées $(Y^1, \dots, Y^n)$, ce sont les coordonnées locales de X dans la carte (U, ϕ) .

Si M est une variété de classe C^k , on dit que le champ de vecteurs X est de classe C^r , $1 \leq r \leq k$, si ses représentations locales sont de classe C^r quel que soit la carte locale choisie. Tous les champs de vecteurs considérés seront au moins de classe C^1 .

Rappelons qu'une courbe c dans M est une application de classe C^1 , $c : I \rightarrow M$, où I est un intervalle ouvert contenant l'origine : $0 \in I$ (l'usage est de prendre les conditions initiales à l'origine).

Définition 1.1.1 Soit X un champ de vecteurs sur M . Une courbe intégrale de X en $m \in M$ est une courbe c telle que $c(0) = m$ et $\dot{c}(t) = X(c(t))$ pour tout $t \in I$ (dérivée par rapport au temps) $\dot{c}(t) = \frac{dc}{dt}(t)$.

Si l'on introduit une carte locale et la représentation locale de X comme plus haut, on obtient une représentation locale de la courbe intégrale en posant $C = \phi \circ c$. On a

$$\dot{C}(t) = Y(C(t)).$$

En effet

$$\dot{C}(t) = \frac{d}{dt}(\phi \circ c)(t) = D\phi(c(t))\dot{c}(t) = D\phi(c(t))X(c(t)) = Y(C(t)).$$

Si $Y = (Y^1, \dots, Y^n)$ sont les coordonnées locales de X et $C = (C^1, \dots, C^n)$ celles de c , alors c est une courbe intégrale de X lorsque le système suivant est satisfait :

$$\frac{dC^i}{dt}(t) = Y^i(C^1(t), \dots, C^n(t)), \quad 1 \leq i \leq n.$$

Il s'agit là d'un système autonome d'équations différentielles ordinaires auquel on peut appliquer les théorèmes classiques. Puis, revenant à la variété par ϕ^{-1} , on en déduit les résultats suivants :

Théorème 1.1.1 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M .

1. Pour tout $m \in M$ il existe une courbe intégrale c de X telle que $c(0) = m$,
2. Une telle courbe intégrale est de classe C^r ,
3. Si c_1 et c_2 sont deux telles courbes alors $c_1 = c_2$ sur l'intersection de leur domaine.

1.2 Trajectoires maximales, flot intégral

Définition 1.2.1 Soit X un champ de vecteurs sur M . Une courbe intégrale c de X en $m \in M$ définie sur un intervalle ouvert I est maximale si pour toute autre courbe c' en m définie sur un intervalle I' et telle que $I \subset I'$ on a $I' = I$ et $c' = c$.

Définition 1.2.2 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M . Notons $D_X \subset M \times \mathbb{R}$ l'ensemble des $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ tels qu'il existe une courbe intégrale $c : I \rightarrow M$ avec $c(0) = m$ et $t \in I$. On dit que le champ de vecteur X est complet si $D_X = M \times \mathbb{R}$. Un point $m \in M$ est

σ -complet, avec $\sigma = +, -, \pm$ lorsque $D_X \cap (\{m\} \times \mathbb{R})$ contient $\{m\} \times]0, \infty[$, $\{m\} \times]-\infty, 0[$, $\{m\} \times \mathbb{R}$ respectivement.

Théorème 1.2.1 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M . Alors

1. $D_X \supset M \times \mathbb{R}$,
2. D_X est ouvert dans $M \times \mathbb{R}$,
3. Il existe une unique application de classe C^r , $F_X : D_X \rightarrow M$ telle que, pour tout $m \in M$, l'application $t \rightarrow F_X(m, t)$ soit la courbe intégrale maximale passant par m .

Définition 1.2.3 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M . L'application F_X définie ci-dessus est appelée le flot du champ de vecteur X . On le note habituellement

$$F_X(m, t) = F_t(m).$$

Théorème 1.2.2 Soit $c(t)$ la courbe intégrale maximale qui passe par m et soit I son domaine de définition.

1. I est ouvert,
2. Notons $I =]T^-(m), T^+(m)[$, si $T^+(m)$ est fini alors $c(t)$ sort de tout compact de M lorsque $t \rightarrow T^+(m)$ (pour tout compact $K \subset M$ il existe $t < T^+(m)$ tel que $c(t) \notin K$),
3. Idem pour $T^-(m)$,
4. Si, pour tout $t \in]T^-(m), T^+(m)[$, $c(t)$ est contenu dans un compact de M , alors $T^-(m) = -\infty$ et $T^+(m) = \infty$.

Corollaire 1.2.1 Un champ de vecteur sur une variété compacte est complet.

Exemple 1.2.1 (Champ de Rayleigh) Soit A une matrice $n \times n$ symétrique réelle. Considérons le champ de vecteurs sur la sphère unité $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ défini par

$$X(x) = (xx^T - I_n)Ax.$$

Vérifions que $X(x) \in T_x S^{n-1} = x^\perp$. On a

$$\langle X(x), x \rangle = \langle (xx^T - I_n)Ax, x \rangle = \text{Trace}(x^T (xx^T - I_n)Ax) = \text{Trace}(((x^T x)x^T - x^T)Ax) = 0$$

puisque $x^T x = 1$. Considérons une trajectoire $x(t)$ de ce champ de vecteurs. Elle est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ puisque la sphère est compacte.

Exemple 1.2.2 (*Champ gravitationnel*) Le champ de force déterminé par la loi de gravitation de Newton est donné par

$$F(x, y, z) = -\frac{mMG\vec{r}}{r^3}$$

où m est la masse du corps étudié, M la masse du corps central, G la constante de gravitation, $\vec{r}$ le rayon vecteur reliant l'origine 0 au point $q = (x, y, z)$ et $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ le module de ce rayon vecteur. Ce champ est défini sur la variété $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Le mouvement d'une particule de masse m dans ce champ est donné par la seconde loi de Newton

$$m = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = F$$

c'est à dire

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}y$$

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{mMG}{r^3}z$$

Introduisons le moment $p = m \frac{d\vec{r}}{dt}$. Les équations ci-dessus deviennent

$$\frac{dq}{dt} = \frac{p}{m}, \frac{dp}{dt} = F(q)$$

C'est un système d'équations différentielles définies pour $(q, p) \in (\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^3$ qui est une variété de dimension 6 appelée l'espace des phases. Notons que le champ de gravitation dérive du potentiel

$$V(q) = -\frac{mMG}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

c'est à dire, s'écrit $F(q) = -\nabla V(q)$. Introduisons l'énergie du système (énergie cinétique + énergie potentielle) :

$$E(p, q) = \frac{1}{2} \frac{\|p\|^2}{m} + V(q)$$

Cette énergie est une intégrale première du champ de vecteur c'est à dire que

$$\frac{d}{dt}E(p(t), q(t)) = 0$$

pour toute trajectoire de ce champ (cela se vérifie aisément). Il s'ensuit que toute trajectoire $(p(t), q(t))$ est contenue dans un ensemble de niveau de E : il existe λ tel que $E(p(t), q(t)) = \lambda$. Cet ensemble a pour équation

$$\frac{1}{2} \frac{\|p\|^2}{m} - \frac{mMG}{\|q\|} = \lambda.$$

S'il existe des constantes $0 < a < b$ telles que $a \leq \|q(t)\| \leq b$ pour tout t on voit que $V(q(t))$ est borné, donc aussi $p(t)$ et, par le Théorème 1.2.2, cette trajectoire est définie pour tout $t \in \mathbb{R}$.

1.3 Expression du flot en coordonnées locales

Soit X un champ de vecteurs sur M et soit (U, ϕ) une carte locale en $m \in M$. L'expression de X dans ces coordonnées est donné par le champ $Y : \phi(U) \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ défini par :

$$Y(x) = D\phi(p)X(p), \quad x = \phi(p).$$

Notons $F_t(p) = F(t, p)$ le flot associé à X et posons

$$G_t(x) = \phi(F_t(p)), \quad x = \phi(p)$$

ce qui a un sens pourvu que t soit suffisamment petit. On a

$$\frac{d}{dt}G_t(x) = \frac{d}{dt}(\phi(F_t(p))) = D\phi(F_t(p))\frac{d}{dt}F_t(p) = D\phi(F_t(p))X(F_t(p)) = Y(G_t(x)).$$

De plus

$$G_0(x) = \phi(F_0(p)) = \phi(p) = x.$$

Ceci qui prouve que $G_t(x)$ est une courbe intégrale du champ Y passant par x en $t = 0$. $G_t(x)$ est l'expression du flot $F_t(p)$ dans la carte (U, ϕ) .

1.4 Boîtes de flot

Définition 1.4.1 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M . Une boîte de flot de X en $m \in M$ est un triplet (U_0, a, F) où

- U_0 est un ouvert de M contenant m , $a > 0$ ou $a = \infty$,
- $F : U_0 \times]-a, a[\rightarrow M$ est de classe C^r ,
- Pour tout $u \in U_0$, $c_u(t) = F(u, t)$ est une courbe intégrale de X en u ,
- Pour tout $t \in]-a, a[$, $F(t, U_0)$ est un ouvert de M et $F(t, \cdot)$ est un difféomorphisme de U_0 sur $F(t, U_0)$.

Théorème 1.4.1 Soit X un champ de vecteur de classe C^r sur M . Pour tout $m \in M$ il existe une boîte de flot de X en m . Si (U_0, a, F) et (U_0, a', F') sont deux telles boîtes, alors F et F' sont égales sur $(U_0 \cap U'_0) \times (]-a, a[\cap]-a', a'[)$.

1.5 Points singuliers des champs de vecteurs, linéarisation autour d'un point singulier

Définition 1.5.1 On dit que $m \in M$ est un point singulier (on dit encore point critique ou point d'équilibre) d'un champ de vecteur X lorsque $X(m) = 0$.

Remarque 1.5.1 Si l'on note par $F_t(m)$ le flot du champ de vecteur, m est un point critique si et seulement si $F_t(m) = m$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Autrement dit m est une trajectoire constante du champ de vecteur.

Définition 1.5.2 Lorsque m est un point singulier de X , la dérivée de F_t en m est une application linéaire qui envoie $T_m M$ sur lui-même :

$$DF_t(m) : T_m M \rightarrow T_m M.$$

Nous avons donc une application définie sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$:

$$t \in]-\epsilon, \epsilon[\rightarrow \mathcal{L}(T_m M)$$

qui prend ses valeurs dans l'espace des endomorphismes de $T_m M$. La dérivée de cette application en $t = 0$ est une application linéaire que l'on note

$$DX(m) : T_m M \rightarrow T_m M, \quad DX(m) = \frac{d}{dt} DF_t(m) |_{t=0}.$$

$DX(m)$ est la linéarisation de X en m .

Remarque 1.5.2 L'expression de $DX(m)$ dans un système de coordonnées locales se déduit de celle du flot : par dérivation de

$$G_t(y) = \phi(F_t(p)), \quad y = \phi(p)$$

au point critique m avec $\phi(m) = x$ on obtient

$$DG_t(x) = D\phi(m)DF_t(m)D\phi(m)^{-1}$$

de sorte que, par dérivation par rapport au temps,

$$\frac{d}{dt}DG_t(x) \big|_{t=0} = D\phi(m)\frac{d}{dt}DF_t(m) \big|_{t=0} D\phi(m)^{-1}.$$

Comme $\frac{d}{dt}DG_t(x) = DX(x)$ on a prouvé que

$$DX(m) = D\phi(m)^{-1}DY(x)D\phi(m).$$

Ainsi, la matrice de $DX(m)$ dans ce système de coordonnées est $\left(\frac{\partial Y^i}{\partial x_j}(x)\right)$ où les Y^i sont les coordonnées de Y .

Exemple 1.5.1 Linéarisé d'un champ de vecteur défini sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour un champ $X : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ on a par définition du flot

$$\frac{d}{dt}F_t(m) = X(F_t(m))$$

d'où, en le point singulier m ,

$$DX(m) = \frac{d}{dt}DF_t(m) \big|_{t=0} = D\frac{d}{dt}F_t(m) \big|_{t=0}.$$

Ainsi la définition que l'on vient de donner du linéarisé coïncide avec la définition habituelle de sa dérivée.

Exemple 1.5.2 Linéarisé d'un champ de vecteur défini sur une sous-variété de $\mathbb{R}^n$.

Soit $X : M \subset \mathbb{R}^n \rightarrow TM$ où M est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons l'étendre à un voisinage ouvert U de M en un champ $Y : U \rightarrow \mathbb{R}^n$. Le théorème de Cauchy-Lipschitz (Théorème 1.1.1) montre que, pour tout $m \in M$, la trajectoire $F_t(m)$ est la restriction à M de la trajectoire $F_t^V(m)$. Il s'ensuit que la dérivée $DF_t(m)$ est la restriction à $T_m M$ de la dérivée $DF_t^V(m)$ et qu'en un point singulier m de X on a

$$DX(m) = \frac{d}{dt}DF_t(m) \big|_{t=0} = \frac{d}{dt}D^V F_t(m) \big|_{T_m M} \big|_{t=0} = D\frac{d}{dt}F_t^V(m) \big|_{T_m M} \big|_{t=0} = DY(m) \big|_{T_m M}.$$

Ainsi le linéarisé $DX(m)$ est la restriction à $T_m M$ du linéarisé $DY(m)$.

1.6 Stabilité au sens de Liapunov

Définition 1.6.1 *Un point critique m de X est stable au sens de Liapunov si pour tout voisinage U de m il existe un voisinage V de m tel que, pour tout $m' \in V$ la trajectoire $F_t(m')$ est définie pour tout $t > 0$ et $F_t(m') \in U$ pour tout $t > 0$. Nous dirons que m est asymptotiquement stable au sens de Liapunov s'il existe un voisinage V de m tel que, pour tout $m' \in V$, la trajectoire $F_t(m')$ est définie et $F_t(m') \in V$ pour tout $t > 0$ et si $\lim F_t(m') = m$ lorsque $t \rightarrow \infty$.*

Un point critique asymptotiquement stable m est attractif : les trajectoires du champ de vecteur $F_t(p)$ pour tout p proche de m se dirigent vers m .

Un point critique stable qui n'est pas asymptotiquement stable est donné par $(0, 0)$ pour le champ $X(x, y) = (-y, x)$ de $\mathbb{R}^2$.

On définit les critères d'instabilité et d'instabilité asymptotique en "inversant le temps", c'est à dire en prenant $t \rightarrow -\infty$.

Nous allons maintenant donner des critères de stabilité pour les points critiques d'un champ de vecteur; ils sont dus à Liapunov.

Théorème 1.6.1 *(Théorème de stabilité de Liapunov) Si m est un point critique du champ de vecteur X et si le spectre de $DX(m)$ est contenu dans le demi-plan $\Re(z) < 0$ (resp. $\Re(z) > 0$) alors m est asymptotiquement stable (resp. instable).*

Un second critère utilise les "fonctions de Liapunov".

Définition 1.6.2 Si m est un point critique du champ de vecteur X , une fonction $L : U \rightarrow \mathbb{R}$ définie sur un voisinage ouvert U de m est une fonction de Liapunov pour X en m si elle est continue, différentiable sur $U \setminus \{m\}$ et si

1. $L(m) = 0$ et $L(m') > 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$,
2. $DL(m')X(m') \leq 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$.

On dit qu'une fonction de Liapunov est stricte si la seconde condition est stricte : $DL(m')X(m') < 0$ pour tout $m' \in U \setminus \{m\}$.

Théorème 1.6.2 Si m est un point critique du champ de vecteur X et s'il existe une fonction de Liapunov pour X en m alors c'est un point critique stable. S'il existe une fonction de Liapunov stricte alors m est asymptotiquement stable.

Exemple 1.6.1 Cas linéaire : 0 est un point d'équilibre stable pour $\dot{x} = Ax$, $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, lorsque les valeurs propres de A ont des parties réelles négatives.

Exemple 1.6.2 $X(x, y) = (-y - x^5, x - 2y^3)$ sur $\mathbb{R}^2$ possède un point critique à l'origine. Le champ linéarisé a pour spectre $\pm i$ et l'on ne peut rien conclure du Théorème 1.6.1. On cherche alors une fonction de Liapunov du type $L(x, y) = ax^2 + by^2$. On doit avoir $L(x, y) > 0$ si $(x, y) \neq (0, 0)$ et $DL(x, y)X(x, y) = -2ax^6 - 4by^4 + 2(b - a)xy \leq 0$. Il suffit de prendre $a = b = 1$ pour obtenir une fonction de Liapunov stricte.

Exemple 1.6.3 Reprenons l'exemple 1.2.2. Le champ correspondant est donné par

$$X(q, p) = \left(\frac{p}{m}, F(q) \right)$$

avec $F(q) = -\nabla V(q)$. Soit (q_0, p_0) un point d'équilibre. On a $p_0 = 0$ et $\nabla V(q_0) = 0$. On construit une fonction de Liapunov en prenant

$$L(q, p) = E(q, p) - E(q_0, p_0), \quad E(q, p) = \frac{\|p\|^2}{2m} + V(q).$$

Il est clair que $L(q_0, p_0) = 0$ et que $DL(q, p)X(q, p) = 0$ par conservation de l'énergie. L sera une fonction de Liapunov si $V(q) - V(q_0) > 0$ pour tout q dans un voisinage de q_0 c'est-à-dire si q_0 est un minimum local strict de V . Dans ce cas le point d'équilibre est stable.

1.7 Points singuliers hyperboliques

Nous allons étudier une nouvelle catégorie de points singuliers d'un champ de vecteurs qui généralise les catégories "stables" et "instables" étudiées au paragraphe précédent.

Définition 1.7.1 *On dit que m est un zéro (ou point singulier) **hyperbolique** du champ de vecteur X si toutes les valeurs propres de $A = DX(m)$ ont une partie réelle non nulle (on dit que A est une **matrice hyperbolique**) (figure 2.1). En dimension 2, un point singulier est dite **semi-hyperbolique** si A a une valeur propre nulle et une valeur propre (nécessairement réelle) non nulle.*

Figure 2.1. Exemple d'un spectre hyperbolique d'un champ de vecteurs défini sur $\mathbb{R}^4$. Les croix indiquent les valeurs propres.

Si les valeurs propres de m ont une partie réelle négative (resp. positive), on dit que m est asymptotiquement stable (resp. instable) comme conséquence du Théorème 1.6.1. L'exemple 1.6.2 montre qu'un point critique peut être asymptotiquement stable sans être hyperbolique.

1.7.1 Le cas linéaire

Comme le concept d'hyperbolicité est défini à l'aide du linéarisé de X , il est important de bien étudier le cas linéaire. Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Le flot associé au système différentiel $\dot{x} = Ax$ est donné par $F_t(x) = e^{tA}x$. Les valeurs propres de e^{tA} sont $e^{\lambda t}$ où $\lambda = \alpha + i\beta$ est une valeur propre de A . Via une décomposition de Jordan, on voit que

1. $F_t(x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ si et seulement si $\Re(\lambda) < 0$ pour toute valeur propre de A ,

2. $F_t(x) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow -\infty$ si et seulement si $\Re(\lambda) > 0$ pour toute valeur propre de A .

Dans le premier cas $0 \in \mathbb{R}^n$ est un point singulier stable et dans le second 0 est instable.

Définition 1.7.2 *Regroupons les vecteurs propres associés aux valeurs propres λ de A avec $\Re(\lambda) < 0$ et procédons de même avec celles dont $\Re(\lambda) > 0$. Les sous-espaces engendrés sont notés $E_s(A)$ et $E_i(A)$, on les appelle sous-espace stable et sous-espace instable.*

Les sous-espaces E_s et E_i décomposent l'espace en somme directe : $\mathbb{R}^n = E_s \oplus E_i$. Ils sont invariants par A et donc par le flot intégral : si $x \in E_s$ (resp. E_i) alors $\exp(tA)x \in E_s$ (resp. E_i) pour tout $t \in \mathbb{R}$. De plus la restriction de ce flot à E_s (resp. E_i) est le flot associé à la restriction de A à E_s (resp. E_i) ce qui prouve que $0 \in E_s$ est stable et que $0 \in E_i$ est instable.

Table : Endomorphismes hyperboliques du plan.

1.7.2 Le cas non-linéaire : le théorème de Grobman-Hartman

Le cas non-linéaire peut se traiter par linéarisation du champ de vecteur au voisinage du point singulier. On obtient alors une théorie locale. Le théorème de Grobman-Hartman montre que localement le champ de vecteur est topologiquement conjugué à son conjugué.

Théorème 1.7.1 Soit X un champ de vecteur et soit $m \in M$ un point singulier hyperbolique de X . Soit $DX(m) : T_m M \rightarrow T_m M$ le linéarisé de X en m . Il existe des voisinages ouverts U de $m \in M$ et V de $0 \in T_m M$ et un homéomorphisme $h : V \rightarrow U$ tel que

$$F_t \circ h = h \circ \exp(tDX(m)).$$

Autrement dit, pour tout $x \in V$ et $t \in \mathbb{R}$ si $\exp(tDX(m)) \in V$ alors $F_t(h(x))$ est défini et vaut $h(\exp(tDX(m))x)$.

Ce théorème montre que, dans le cas hyperbolique, X et son linéarisé $DX(m)$ ont la même dynamique au voisinage de m . L'homéomorphisme h n'est pas nécessairement de classe C^1 .

1.7.3 Le cas non-linéaire : les variétés stables et instables

Commençons par les définir :

Définition 1.7.3 Soit M une variété différentiable de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$ ou $k = \omega$. Notons X un champ de vecteur de classe C^r , $1 \leq r \leq k$ et soit m un point critique de X .

1. On appelle variété stable en m (ou variété stable globale) l'ensemble

$$V^s(m) = \left\{ p \in M : F_t(p) \text{ est défini pour tout } t \geq 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow \infty} F_t(p) = m \right\}$$

2. La variété instable en m (ou variété instable globale) est l'ensemble

$$V^i(m) = \left\{ p \in M : F_t(p) \text{ est défini pour tout } t \leq 0 \text{ et } \lim_{m \rightarrow -\infty} F_t(p) = m \right\}$$

3. On appelle variété stable locale en m tout ensemble $S \subset M$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) S est une sous-variété différentiable de classe C^r de M et $m \in S$,
- (b) S est tangente en m à $E_s(DX(m))$,
- (c) $F_t(S) \subset S$ pour tout $t \geq 0$,
- (d) $\lim_{m \rightarrow \infty} F_t(p) = m$ pour tout $p \in S$.

4. On appelle variété instable locale en m tout ensemble $I \subset M$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (a) U est une sous-variété différentiable de classe C^r de M et $m \in U$,
- (b) U est tangente en m à $E_i(DX(m))$,
- (c) $F_t(u) \subset U$ pour tout $t \leq 0$,
- (d) $\lim_{m \rightarrow -\infty} F_t(p) = m$ pour tout $p \in U$.

Table : Les variétés stables et instables

La figure ci-dessus montre que la variété stable n'est pas nécessairement une variété différentiable et que l'intersection de la variété stable avec un voisinage de m n'est pas nécessairement une variété stable locale.

Théorème 1.7.2 (*Théorème de la variété stable locale*) Supposons que X soit de classe C^r et que m soit un point singulier hyperbolique. Il existe un voisinage U de m tel que

$$V^s(U) = \{p \in M : F_t(p) \in U \text{ pour tout } t \geq 0\}$$

soit une variété stable locale en m . De même, il existe un voisinage U' de m tel que

$$V^i(U') = \{p \in M : F_t(p) \in U' \text{ pour tout } t \leq 0\}$$

soit une variété instable locale en m .

Passons maintenant à la structure de la variété stable (globale).

Définition 1.7.4 1. On dit qu'une application $g : M \rightarrow N$ est une immersion lorsque $Dg(a) : T_a M \rightarrow T_{g(a)} N$ est injective pour tout $a \in M$.

2. On dit que g est un plongement si $g(M)$ est une sous-variété de N et si $g : M \rightarrow g(M)$ est un difféomorphisme,

3. On dit que $V \subset N$ est une variété immergée si c'est l'image d'une variété différentiable par une immersion.

Contrairement à ce que son nom indique, une variété immergée n'est pas nécessairement une variété différentiable. C'est le cas du lemniscate paramétré par $x(t) = \sin t$, $y(t) = (\sin 2t)/2$, $t \in I =]-\pi, \pi[$ (courbe en huit). L'application $t \in I \rightarrow (x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2$ est une immersion et elle est injective mais ceci n'empêche pas le lemniscate d'avoir un point double.

Toutefois, on a le résultat suivant :

Théorème 1.7.3 *Soit $g : M \rightarrow N$ une immersion et soit $V = g(M)$. Pour tout $m \in M$ il existe un voisinage ouvert U de m tel que la restriction de g à U soit un difféomorphisme de U sur $g(U) \subset V$. Aussi, $g(U)$ est une sous-variété de N (voir la figure ci-dessous).*

Le théorème précédent permet de définir un concept d'espace tangent à une variété immergée mais ce n'est pas un concept géométrique, il dépend de la paramétrisation choisie:

Définition 1.7.5 *Soit $g : M \rightarrow N$ une immersion et soit $V = g(M)$. Pour tout $m \in M$ on définit l'espace tangent à $v = g(m) \in V$ par*

$$T_v V = Dg(m)T_m M.$$

Revenons à la variété stable. Sa structure est donnée par le résultat suivant :

Théorème 1.7.4 *Supposons que X soit de classe C^r et que m soit un point singulier hyperbolique. Soit U un voisinage ouvert de m tel que $V^s(U)$ soit une variété stable locale. Alors*

$$V^s(m) = \bigcup_{t \leq 0} F_t(V^s(U)).$$

De plus, $V^s(m)$ est une variété immergée : il existe une immersion injective : $\phi : E_s(DX(m)) \rightarrow M$ telle que :

1. $V^s(m) = \phi(E_s(DX(m)))$,
2. $\phi(0) = m$ et $\text{Im } D\phi(0) = TmV^s(U) = E_s(DX(m))$.

1.8 Exemple : le champ de Rayleigh

Soit A une matrice $n \times n$ réelle et symétrique. Le champ de Rayleigh (voir Exemple 1.2.1) est défini sur la sphère par

$$X : S^{n-1} \rightarrow TS^{n-1}, \quad X(x) = (xx^T - I_n)Ax.$$

Nous allons étudier ses points singuliers.

1. $X(x) = 0$ si et seulement si x est un vecteur propre de A (remarquer que $I_n - xx^T$ est la projection orthogonale de $\mathbb{R}^n$ sur $x^\perp$).
2. Si nous diagonalisons A en base orthonormée, $A = UDU^T$ avec U orthogonale et $D = \text{Diag}(\lambda_i)$, nous voyons que

$$X(x) = UX_D(y), y = U^T x$$

où X_D est défini par $X_D(y) = (yy^T - I_n)Dy$. Ainsi, les points singuliers de X sont les images par U des points singuliers de X_D .

3. Les linéarisés de X et de X_D sont reliés par

$$DX(x) = UDX_D(U^T x)U^T.$$

Ainsi les valeurs propres de $DX(x)$ et de $DX_D(U^T x)$ sont les mêmes et l'on peut supposer que A est diagonale.

4. Avant de calculer ce linéarisé, donnons l'expression de X dans une carte locale en x .

Une telle carte est donnée par (U, ϕ) avec

$$U = \{y \in S^{n-1} : \langle y, x \rangle > 0\}$$

et

$$\phi : U \rightarrow x^\perp, \quad \phi(y) = \frac{y}{\langle y, x \rangle} - x.$$

Table : Une carte locale pour la sphère

L'application inverse est bien sûr

$$\phi^{-1} : x^\perp \rightarrow U, \quad \phi^{-1}(u) = \frac{u + x}{\|x + u\|}.$$

L'expression de X dans cette carte est donnée par

$$Y : x^\perp \rightarrow x^\perp, \quad Y(u) = D\phi(y)X(y), \quad y = \phi^{-1}(u).$$

Un calcul élémentaire montre que

$$D\phi(y)v = \frac{v \langle y, x \rangle - y \langle v, x \rangle}{|\langle y, x \rangle|^2}, \quad v \in y^\perp,$$

1.

$$D\phi(y)X(y) = \frac{(yx^T - x^T y I_n)Ay}{|\langle y, x \rangle|^2}, \quad y \in U,$$

$$Y(u) = \frac{((u+x)x^T - x^T(u+x)I_n)A(x+u)}{\|x+u\|^2 |\langle y, x \rangle|^2}, \quad u \in x^\perp.$$

5. A étant supposée diagonale, $A = \text{Diag}(\lambda_i)$, nous prenons $x = e_1$ qui est un vecteur propre associé à λ_1 ; $x^\perp$ est engendré par $e_2, \dots, e_n$ et l'expression de Y devient

$$Y \begin{pmatrix} u_2 \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2)u_2 \\ \cdot \\ (\lambda_1 - \lambda_n)u_n \end{pmatrix}.$$

Le linéarisé de Y en e_1 est donc

$$DY(e_1) = \begin{pmatrix} (\lambda_1 - \lambda_2)u_2 & 0 \\ \cdot & \cdot \\ 0 & (\lambda_1 - \lambda_n) \end{pmatrix}.$$

6. Ceci permet de voir que $x = e_1$ est hyperbolique si et seulement si la valeur propre λ_1 est simple et, dans ce cas, que x est stable lorsque λ_1 est la plus petite valeur propre de A et instable si c'est la plus grande.
7. Lorsque les valeurs propres de A sont simples, les sous-espaces stables associés à e_i et à $-e_i$ sont les ensembles

$$V^s(e_i) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ u_i \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_i > 0 \right\}$$

et

$$V^s(-e_i) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \cdot \\ 0 \\ u_i \\ \cdot \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{S}^{n-1} : u_i < 0 \right\}$$

Pour démontrer que l'ensemble ci-dessus est contenu dans la variété stable de e_i il suffit d'utiliser l'expression de X dans la carte locale décrite précédemment. Pour démontrer qu'il y a égalité il suffit de remarquer que la réunion de tous ces ensembles est égale à la sphère.

2

Singularités des applications différentiables

La théorie des singularités des applications différentiables est une ample généralisation de l'étude des maxima et minima des fonctions d'une variable. Les singularités envisagées n'impliquent donc pas l'existence d'une discontinuité ou d'un pôle mais l'annulation d'une dérivée ou d'un jacobien .

Définition 2.0.1 (*Point critique des fonction*) On dit qu'un point x est un point critique d'une fonction f si la dérivée de f en x est égale à 0.

Définition 2.0.2 Soient M une variété C^∞ et $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur M . Un point critique de f est un point $p_0 \in M$ tel que $df_{p_0} \equiv 0$

Définition 2.0.3 On définit la matrice hessienne de f en p_0 comme $H_f(p_0) = (h_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $h_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(p_0)$ par rapport au système de coordonnées $(x_1, \dots, x_n)$.

Exemple 2.0.1 Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned}$$

le point 0 est un point critique de f .

On distingue les points critiques **génériques**, ou **non dégénérés**, et les points critiques **dégénérés**.

Définition 2.0.4 Un point critique p_0 de f est non dégénéré si $\det H_f(p_0) \neq 0$.

Lemme 2.0.1 *La propriété d'un point critique p_0 d'être non dégénéré ne dépend pas du choix du système de coordonnées.*

Définition 2.0.5 *Un point critique d'une fonction différentiable est appelé **non dégénéré** si la différentielle seconde de la fonction en ce point est une forme quadratique non dégénérée.*

Exemple 2.0.2 *Le point critique 0 de la fonction $f(x) = x^2$ est non dégénéré, tandis que le point critique 0 de la fonction $h(x) = x^3$ est dégénéré.*

Définition 2.0.6 (fonction de Morse) *Soit M une variété C^∞ . La fonction $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction de Morse si tous ses points critiques sont non dégénérés.*

Théorème 2.0.1 (théorème de Morse) *Soit M une variété compacte de dimension m ,*

1. *Les applications stables $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ forment un ensemble partout dense dans l'espace des applications différentiables.*
2. *Pour qu'une application f soit stable il faut et il suffit que soient vérifiées les deux conditions suivantes :*
 - (a) *L'application f est stable en tout point (autrement dit, tous les points critiques de la fonction f sont non dégénérés).*
 - (b) *Toutes les valeurs critiques de la fonction f sont distinctes.*
3. *Une application $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}$ est stable en un point x_0 si et seulement si l'on peut introduire dans les voisinages des points $x_0 \in M^m$ et $y_0 = f(x_0) \in \mathbb{R}$ des coordonnées $x_1, \dots, x_m, y$ en lesquelles l'application se laisse mettre sous l'une des $m + 2$ formes suivantes :*
 - (a) $y = x_1$.
 - (b) $y = x_1^2 + \dots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \dots - x_m^2, k = 0, \dots, m$.

Pour la démonstration, voir par exemple [?]. On se demande s'il en est de même dans le cas multidimensionnel, c'est-à-dire pour les applications $f : M^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ avec m et n quelconques.

2.1 Points critiques et valeurs critiques des applications différentiables .

Soit une application différentiable $f : M^m \rightarrow N^n$. Généralisons la notion de point critique. La dérivée de f en x est une application linéaire de l'espace T_x tangent à la variété source en x dans l'espace $T_{f(x)}$ tangent à la variété but en $f(x)$:

$$f_{*x} : T_x M^m \rightarrow T_{f(x)} N^n.$$

Exemple 2.1.1 Soit M^2 la surface d'une sphère dans l'espace tridimensionnel, N^2 un plan, f la projection de la sphère suivant la verticale sur le plan horizontal (voir la fig).

Exemple 2.1.2 L'application linéaire f_{*x} du plan $T_x M$ tangent en un point x à la sphère, dans le plan $T_{f(x)} N$ tangent au plan horizontal, est non dégénérée si x n'appartient pas à l'équateur horizontal de la sphère ; dans le cas contraire le plan tangent en x à la sphère contient la droite verticale, et l'opérateur de projection f_{*x} a le noyau non trivial (sous-espace se réduisant à 0). Le noyau de f_{*x} dans les points de l'équateur est de dimension 1. Le rang de f_{*x} en ces points est 1.

Donnons une définition général:

Définition 2.1.1 Un point x d'une variété M est dit **point critique** de l'application différentiable $f : M \rightarrow N$ si le rang de la dérivée

$$f_{*x} : T_x M \rightarrow T_{f(x)} N$$

en x est inférieur à sa valeur maximale possible, c'est-à-dire, inférieur à la plus petite des dimensions de M et N :

$$\text{rang } f_{*x} \leq \min(\dim M, \dim N).$$

Remarque 2.1.1 Soient $x_1, \dots, x_m$ (resp. $y_1, \dots, y_n$) des coordonnées locales sur un voisinage du point $x \in M$ (resp. de $f(x) \in N$). L'application f se définit en ces coordonnées par n fonction différentiables de m variables :

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, y_n = f_n(x_1, \dots, x_m).$$

La matrice $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)$ est la **matrice jacobienne** de l'application. En ces termes, x **est un point critique** si le rang de la matrice jacobienne en x est non maximal.

Exemple 2.1.3 Pour la projection de la sphère sur le plan horizontal, tout point de l'équateur horizontal est un point critique. En dehors de l'équateur le rang de f_{*x} est 2 aux points de l'équateur ce rang tombe à 1.

L'image d'un point critique s'appelle **valeur critique**.

Exemple 2.1.4 Les valeurs critiques d'une projection sphère sur plan forment un cercle qui correspond au contour apparent de la sphère.

2.2 Points fixes hyperboliques

Pour un difféomorphisme, on peut écrire dans la coordonnée locale x :

$$f(x) = Bx + o(\|x\|)$$

où $B = df(m)$ est un automorphisme linéaire de $\mathbb{R}^n$ (matrice inversible). On a la définition suivante:

Définition 2.2.1 Un point fixe m d'un difféomorphisme f est hyperbolique si toutes les valeurs propres du spectre de l'automorphisme $B = df(m)$ ont une valeur absolue différente de 1. De même, on dira qu'un point m, k -périodique de f , est hyperbolique si m est un point fixe hyperbolique de f^k (puissance d'itération).

2.3 Classification des applications différentiables

Equivalence différentiable

La classification des applications différentiables peut être établie de différentes façons. La plus grossière est probablement la classification topologique : on dit que deux applications

sont **topologiquement équivalentes** s'il existe des homéomorphismes (applications bijectives et bicontinues) des variétés source et but qui transforment une application dans l'autre. Les fonctions $y = x^2$ et $y = x^4$ sont topologiquement équivalentes.

Donc deux applications $f_p : M_P \rightarrow N_P$, $p = 1, 2$, sont topologiquement équivalentes, s'il existe des homéomorphismes $h : M_1 \rightarrow M_2$ et $k : N_1 \rightarrow N_2$ tels que $f_2 = k f_1 h^{-1}$. Autrement dit, l'équivalence topologique est un diagramme commutatif

où les flèches verticales sont des homéomorphismes.

Pour les problèmes d'analyse, l'équivalence topologique s'avère en général trop grossière. Par exemple, la fonction $y = x^4$ présentant une singularité dégénérée instable est topologiquement équivalente à une fonction stable. On se sert donc, en théorie des singularités, d'une notion plus fine d'équivalence différentiable.

Définition 2.3.1 *L'équivalence différentiable des applications différentiables $f_1 : M_1 \rightarrow N_1$, $f_2 : M_2 \rightarrow N_2$ est un diagramme commutatif*

dont les flèches verticales sont des difféomorphismes (applications bijectives différentiables ainsi que leurs inverses)

Remarque 2.3.1 *Dans le langage des coordonnées locales, l'application $y = f(x)$ est une suite finie de fonctions ; le difféomorphisme h , un changement des variables indépendantes x ; le difféomorphisme k , un changement des variables dépendantes y . De ce point de vue, deux applications sont différentiablement équivalentes pour autant que l'on puisse passer de l'une à l'autre par des changements différentiables des variables indépendantes et dépendantes.*

Remarque 2.3.2 Le diagramme commutatif ci-dessus n'est autre que l'identité

$$k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x).$$

Dans cette formule h^{-1} est à droite de f_1 et k , à gauche de f_1 . C'est la raison pour laquelle on appelle les difféomorphismes h^{-1} de l'espace source (et les changements des variables indépendantes x) changement à droite, ou *R-changements*. Dans le même ordre d'idées, les difféomorphismes k des espaces buts (et les changements des variables dépendantes y) sont appelés changements à gauche ou *L-changements*.

Remarque 2.3.3 Une autre façon d'exprimer l'équivalence différentiable consiste en ce qui suit. Soient $\Omega(M, N)$ l'ensemble des applications différentiables de M dans N , $\text{Diff}M$, $\text{Diff}N$ les groupes variété but N sur elle-même respectivement.

Le produit direct des groupes

$$\text{Diff}M \times \text{Diff}N$$

se compose de tous les couples (h, k) de difféomorphismes des espaces source ($h : M \rightarrow M$) et but ($k : N \rightarrow N$).

Le groupe $\text{Diff}M \times \text{Diff}N$ agit sur $\Omega(M, N)$ comme suit : si $f \in \Omega(M, N)$, $h \in \text{Diff}M$ et $k \in \text{Diff}N$, alors $(h, k)f = k \circ f \circ h^{-1}$. On voit sans peine que c'est bien une action, c'est-à-dire que

$$(h_1 h_2, k_1 k_2)f = (h_1, k_1)((h_2, k_2)f).$$

C'est une action à gauche et à droite ou *RL-action* ($\text{Diff}M$ est une action à droite et $\text{Diff}N$ une action à gauche).

En ces termes, la définition de l'équivalence différentiable s'énonce ainsi:

Définition 2.3.2 Deux applications de M dans N sont différentiablement équivalentes si et seulement si elles appartiennent à une même orbite de *RL-action*.

Exemple 2.3.1 Les composantes connexes de l'ensemble de toutes les fonctions de Morse sont des orbites d'une *RL-action* des composantes connexe de $\text{Diff}M \times \text{Diff}N$.

Définition 2.3.3 (Stabilité) Soit une application différentiable $f : M \rightarrow N$ d'une variété fermée M dans une variété N .

On dit que l'application f est **différentiablement stable** (ou d'une façon plus détaillée, **différentiablement stable à gauche et à droite**, en abrégé **RL-différentiablement**

stable, ou enfin stable tout court) si toute application suffisamment proche, c'est-à-dire, suffisamment peu différente de f , à condition de prendre en compte un nombre suffisamment grand de dérivées) de f lui est différentiablement équivalente.

Autrement dit, f est stable si sa RL -orbite est ouverte.

Exemple 2.3.2 La projection sphère sur plan est stable. L'application du cercle $\{x \bmod 2\pi\}$ dans la droite $\{y\}$ définie par $y = \sin 2x$ est stable.

Remarque 2.3.4 Quitte à remplacer «différentiable» par «topologique» dans la définition précédente, on obtient la définition de la **stabilité topologique**.

Exemple 2.3.3 La projection sphère sur plan est topologiquement stable, comme toute application différentiablement stable. Il existe pourtant des applications stables topologiquement mais non différentiablement, mais exhiber un exemple n'est pas chose facile (voir [?]). La formule $y = \sin 2x$ définit une application topologiquement instable d'un cercle dans une droite.

Les notions introduites admettent aussi des variantes locales. Par exemple, la singularité en 0 de la fonction $y = x^2$ est stable et la singularité en 0 de la fonction $y = x^3$ est instable. Pour donner une définition formelle de stabilité d'une application en un point, introduisons quelque termes.

Définition 2.3.4 (germe) On appelle germe d'application $M \rightarrow N$ au point x de M la classe d'équivalence des applications $\Phi : U \rightarrow N$ (dont chacune est définie dans un voisinage particulier) U de $x \in M$; deux applications sont considérées comme équivalentes si elles se confondent dans un voisinage de x (ce dernier voisinage peut être plus petite que l'intersection des voisinage où les deux applications sont définies). Si deux applications appartiennent à une même classe, on dit aussi qu'elles ont un **germe commun en x** .

Autrement dit, le germe d'une application f en un point x est ce qui en reste quand on «réduit indéfiniment son domaine de définition».

Définition 2.3.5 On dit que deux germes d'applications différentiables sont **RL-équivalents**, ou **différentiablement équivalents**, ou **équivalents** tout court s'il existe des germes de difféomorphismes de la source et du but qui font passer du premier germe au second (si le germe de f_1 en x_1 est équivalent à celui de f_2 en x_2 , il existe un germe en x_1 d'un difféomorphisme h de x_1 à x_2 et un germe en $f_1(x_1)$ d'un difféomorphisme k de $f_1(x_1)$ à $f_2(x_2)$, tels que

$$k(f_1(h^{-1}(x))) \equiv f_2(x)$$

dans un voisinage suffisamment petit de x_2 . La classe d'équivalence d'un germe en un point critique s'appelle **singularité**

Définition 2.3.6 Un germe d'application différentiable $f : M \rightarrow N$ en un point x de M est dit **RL-stable**, **différentiablement stable**, ou **stable** tout court si, pour un voisinage aussi petit que l'on veut U de x , il existe un voisinage V de l'application f dans $\Omega(M, N)$ tel que pour toute application $\tilde{f}$ de V dans U il existe un point $\tilde{x}$ tel que le germe de $\tilde{f}$ en $\tilde{x}$ soit équivalent au germe de f en x .

Remarque 2.3.5 Le voisinage d'une application donnée f est l'ensemble de toutes les applications peu différentes de f , à condition de prendre en compte leurs dérivées jusqu'à un certain ordre. Dans le cas local envisagé, on peut admettre que $M \subset \mathbb{R}^m$ et $N \subset \mathbb{R}^n$ sont des parties d'espace euclidiens et que V se définit par les inégalités $\|\tilde{f} - f\|_k < \varepsilon$, où $\|g\|_k = \sup_{|\alpha| \leq k} \left| \frac{\partial^\alpha g}{\partial x^\alpha} \right|$

Il est facile de s'assurer que la stabilité en un point caractérise le germe et non l'application : cette propriété est conservée par toute variation de f où au moins un voisinage de x reste intact.

On définit de même l'**équivalence topologique des germes** et la **stabilité topologique des germes**.

Exemple 2.3.4 Les germes d'applications $y = x^2$ et $y = x^4$ de la droite réelle en 0 sont topologiquement équivalents. Le germe de $y = x^2$ en 0 est topologiquement (et même différentiablement) stable. Le germe de $y = x^4$ en 0 est différentiablement (et même topologiquement) instable.

3

Formes normales

Il est très fécond non pas de résoudre les équations différentielles, mais de les ramener à une forme plus simple. La théorie des formes normales, due à Poincaré, nous indique les formes les plus simples aux quelles se ramène une équation différentielle au voisinage d'une position d'équilibre ou d'un mouvement périodique.

la réduction aux formes normales s'effectue a laide des séries en les écarts par rapport à la position d'équilibre ou au mouvement périodique. Ces séries ne sont pas toujours convergentes. Cependant même dans les cas où les séries sont divergentes, la méthodes des formes normales est un puissant outil d'étude des équations différentielles : les premiers termes de la série fournissent sur le comportement des solutions une in formation suffisante pour leur étude. la méthode des formes normales est aussi le principale outil d'étude de la théorie des bifuraction, où elle s'applique au famille d'équations dépendant des paramètres.

Dans ce paragraphe, on expose les notions fondamentales élémentaires de la méthode des formes normales.

3.1 Linéarisation Formelle - Méthode de Poincaré

Dans cette section, on va décrire les différent aspects de la linéarisation formelle. Nous allons voir de quelle forme sont les termes du second membre d'une équation différentielle, que l'on peut faire disparaître, ainsi que la forme de ceux dont on ne peut se débarrasser, c'est-à-dire les formes normales auxquelles on peut parvenir. Nous allons voir comment construire les changements de variables, ainsi que les conditions de leur existence, nécessaires à cet effet. Dans le cas où le linéarisé à l'origine ($Df(0)$) est diagonalisable, ce sera la méthode de Poincaré.

Nous introduisons, pour ce chapitre, les notations suivantes:

$$P^n = \{p \mid p \text{ est un polynôme vectoriel à coefficient dans } \mathbb{k}, p : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n, p(0) = p'(0) = 0\}$$

$$H_s^n = \{p \in P^n \mid p \text{ est homogène de degré } s\}$$

où H_s^n est défini pour $s \geq 2$. Selon les cas, on aura $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{k} = \mathbb{R}$.

Nous allons voir maintenant une méthode générale permettant de mettre, terme à terme, une équation différentielle sous une forme normale. Considérons une équation différentielle, mise sous la forme:

$$\dot{X} = AX + w_2(X) + \dots + w_s(X) + o(s) = f(X) \quad (1)$$

où $A \in \text{lin}(n, K)$, $w_i \in H_i^n$ et les w_i , pour $i < s$, sont déjà normalisés d'une certaine façon. Nous voulons voir comment on peut modifier le terme w_s , sans toucher aux w_i , $i < s$. Ceci peut se faire en appliquant à l'équation (1) un changement de variable de la forme

$$X = H(Y) = Y + h_s(Y) \quad , \quad \text{où} \quad h_s \in H_s^n \quad (2)$$

En effet, calculons explicitement l'expression de l'équation (1) en les nouvelles variable Y , c'est-à-dire:

$$\dot{Y} = DH(Y)^{-1} f(H(Y)) = (Id + Dh_s(Y))^{-1} f(Y + h_s(Y)). \quad (3)$$

pour ce, faisons les remarques suivantes:

$$1) (Id + Dh_s(Y))^{-1} = Id - Dh_s(Y) + o(s);$$

$$2) w_i(Y + h_s(Y)) = w_i(Y) + o(s);$$

$$3) f(Y + h_s(Y)) = f(Y) + Ah_s(Y) + o(s), \quad \text{par 2);}$$

$$4) Dh_s(Y) f(Y + h_s(Y)) = Dh_s(Y) AY + o(s),$$

car $Dh_s(Y) = o(s-2)$ et AY est le seul terme d'ordre 1 dans $f(Y + h_s(Y))$.

On a donc, à partir de (3):

$$\dot{Y} = (Id - Dh_s(Y))f(Y + h_s(Y)) + o(s), \text{ par 1}$$

$$= f(Y) + Ah_s(Y) - Dh_s(Y)AY + o(s), \text{ par 3 et 4}$$

$$= AY + w_2(Y) + \dots + w_{s-1}(Y) + [w_s(Y) - (Dh_s(Y)AY - Ah_s(Y))] + o(s) \quad (4)$$

On voit bien, alors, que l'expression entre crochets contient seulement tous les termes de degré s de l'équation (degré $(Dh_s(Y)) = s-1$ et degré $(AY) = 1$).

Remarque 3.1.1 : *Un changement de variable de la forme (2) est forcément biholomorphe en 0 et laisse l'origine fixe.*

L'expression entre crochet dans (4) nous amène à la définition suivante:

3.1.1 Opérateur homologique

Soit $A \in gl(n, K)$, alors on définit l'opérateur homologique associé à A :

$$L_A : P^n \rightarrow P^n$$

$$\text{par} \quad L_A h(Y) = Dh(Y)AY - Ah(Y)$$

On peut facilement démontrer les propriétés importantes:

- L_A est linéaire;
- $L_A : H_s^n \rightarrow H_s^n$ pour $\forall s \geq 2$

3.1.2 Equation homologique

La discussion qui précède se résume dans la proposition suivante:

Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction au moins s différentiable et telle que $f(0) = 0$, alors on a:

Proposition 3.1.1 *Le changement de variable $X = Y + h_s(Y)$, où $h_s \in H_s^n$, transforme l'équation:*

$$\dot{X} = f(X) = AX + w_2(X) + \dots + w_s(X) + o(s), \text{ où } A = Df(0) \text{ et } w_i \in H_i^n, \quad (5)$$

en

$$\dot{Y} = f(Y) = AY + w_2(Y) + \dots + w_{s-1}(Y) + [w_s(Y) - L_A h_s(Y)] + o(s)$$

où l'expression entre crochets appartient à H_s^n .

Remarque 3.1.2 : *Bien que le changement de variable $X = Y + h_s(Y)$, $h_s \in H_s^n$, n'affecte pas les termes de degré inférieur à s dans (5), il affecte généralement ceux de degré supérieur*

On voit donc que l'on peut faire disparaître le terme w_s dans (5) (sans toucher aux termes de degré inférieur) si on peut résoudre, par rapport à $h_s \in H_s^n$, l'équation:

$$L_A h_s = w_s$$

appelée équation *homologique*.

D'après ce qui précède et en appliquant plusieurs fois la proposition 3.1.1, le théorème suivant devrait être assez évident. C'est, à ma connaissance, le théorème de normalisation le plus général qui soit.

Théorème 3.1.1 *Soit $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{K}^n$ une fonction C^s telle que $f(0) = 0$, $A = Df(0)$ et $G_i \subset H_i^s$, $2 \leq i \leq s$, tels que*

$$H_i^n = G_i + L_A(H_i^n) \quad 2 \leq i \leq s$$

Alors il existe un changement de variable biholomorphe en 0 (polynômial de la forme $X = Y + h(Y)$ où $h \in P^n$) qui transforme (au voisinage de 0) l'équation:

$$\dot{X} = f(X)$$

$$\text{en } \dot{Y} = AY + g_2(Y) + \dots + g_s(Y) + o(s) \quad \text{où } g_i \in G_i, \quad 2 \leq i \leq s$$

Remarque 3.1.3 : *On essayera de choisir les G_i les plus simples et les plus petites possible.*

Bien que ce théorème puisse s'appliquer dans tous les cas, les calculs nécessaires pour trouver la forme des g_i - essentiellement le calcul de $L_A(H_i^n)$ - peuvent s'avérer très longs et ce, de plus en plus, au fur et à mesure que i augmente.

Exemple 3.1.1 *Voici un exemple dans lequel on applique le théorème 1:*

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ telle que } Df(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } f(0) = 0$$

0 est donc valeur propre double.

Soit $\{e_i\}_{i=1}^6$ la base de H_2^2 donné par:

$$e_1 = \begin{pmatrix} u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} v^2 \\ 0 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} uv \\ 0 \end{pmatrix}, e_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ u^2 \end{pmatrix}, e_5 = \begin{pmatrix} 0 \\ v^2 \end{pmatrix}, e_6 = \begin{pmatrix} 0 \\ uv \end{pmatrix}$$

en effectuant les calculs, on trouve que:

$$L_A(H_2^2) = \langle e_2, e_3, 2e_6 - e_1, e_5 - e_3 \rangle \quad \text{où } A = Df(0).$$

Parmi les complémentaires possibles, on a:

$$H_2^2 = B + L_A(H_2^2) = C + L_A(H_2^2)$$

où $B = \langle e_1, e_4 \rangle$ et $C = \langle e_4, e_6 \rangle$

Donc l'équation $\dot{X} = f(X)$ sera équivalente (biholomorphiquement), au voisinage de 0, à chacune des deux formes suivantes:

$$\dot{u} = v + au^2$$

si on choisit B : $+o(3) \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$\dot{v} = bu^2$$

$$\dot{u} = v$$

si on choisit C : $+o(3) \quad a, b \in \mathbb{R}$

$$\dot{v} = au^2 + buv$$

3.1.3 Méthode de Poincaré

Maintenant, nous considérons le cas suivant:

- $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$, et donc, dans la définition de H_s^n et P^n , on prend $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ (toutefois si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et les valeurs propres de $Df(0)$ sont toutes réelles, on pourra prendre $\mathbb{k} = \mathbb{R}$);

- $A = Df(0)$ est diagonalisable.

Soit donc $\{e_1, \dots, e_n\}$, une base propre de $\mathbb{C}^n$ associée aux valeurs propres $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ de A . On suppose alors que A est exprimé dans cette base, c'est-à-dire sous sa forme diagonale.

La proposition suivante montre alors que L_A prend une forme bien particulière. On commence à voir le lien avec les conditions de non-résonance citées dans l'introduction.

Proposition 3.1.2 *Les valeurs propres et vecteurs propres de L_A sont donnés par:*

$L_A(X^m e_i) = [\langle m, \lambda \rangle - \lambda_i] X^m e_i$, $|m| \geq 2$ où $X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n$, $m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathbb{N}^n$, $\langle m, \lambda \rangle = m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n$, $X^m = X_1^{m_1} \dots X_n^{m_n}$ et $|m| = m_1 + \dots + m_n$.

Preuve. : $L_A(X^m e_i)(X) = D(X^m e_i)(X)AX - A(X^m e_i)$

$$= \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ m_1 X^{m-\delta_1} & \dots & \dots & \dots & m_n X^{m-\delta_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1 X_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_n X_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i X^m \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i^{\text{ème}} \text{ ligne et } \delta_i =$$

$(0, \dots, 1, \dots, 0)$

$$= (m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n) X^m e_i - \lambda_i X^m e_i \quad \blacksquare$$

$$= [\langle m, \lambda \rangle - \lambda_i] X^m e_i$$

ce qui nous amène à préciser les définitions données dans l'introduction

Définition 3.1.1 : Les valeurs propres $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ sont dites *résonnantes*, si il existe une relation de la forme :

$$\langle m, \lambda \rangle = \lambda_i \text{ pour } |m| \geq 2, m \in \mathbb{N}^n$$

une telle relation est appelée *résonance d'ordre* $|m|$.

Définition 3.1.2 : Le monôme vectoriel $X^m e_i$, $|m| \geq 2$, est *résonant d'ordre* $|m|$, si et seulement si :

$$\langle m, \lambda \rangle = \lambda_i$$

Remarque 3.1.4 : La définition 3.1.1 peut s'appliquer à n'importe quel point de $\mathbb{C}^n$, tandis que, dans la définition 3.1.2, est implicite la donnée de $Df(0)$ qui détermine la relation des λ_i aux e_i ; en d'autres mots, un monôme vectoriel peut être résonnant par rapport à une équation et ne pas l'être par rapport à une autre, tandis qu'un point de $\mathbb{C}^n$ est résonant ou pas, indépendamment de toute équation.

ces deux définitions sont possibles même dans le cas où A n'est pas diagonalisable. Dans ce cas, on considère A sous sa forme de Jordan.

Voyons maintenant les conséquences de la proposition 3.1.2.

$\{X^m e_i \mid |m| = s \text{ et } 1 \leq i \leq n\}$, pour $s \geq 2$, est une base de H_s^n , alors d'après la proposition 3.1.2, il est clair que:

$$L_A(H_s^n) = \langle X^m e_i \mid \text{non résonant et } |m| = s \rangle$$

et

(6)

$$H_s^n = L_A(H_s^n) \oplus \langle X^m e_i \mid \text{résonant et } |m| = s \rangle$$

Le sous-espace de H_s^n engendré par les monômes vectoriels résonnant d'ordre s est le choix naturel de G_s dans le théorème 3.1.1.

Il est, donc clair, d'après (6), que, si les valeurs propres de A n'ont pas de résonance d'ordre s , alors:

$$L_A : H_s^n \rightarrow H_s^n \text{ est un isomorphisme}$$

et l'équation homologique

$$L_A h_s = w_s \quad \text{où } w_s \in H_s^n$$

admet une solution unique dans H_s^n ; si on pose:

$$w_s = \sum_{|m|=s_1 \leq i \leq n} v_{m,i} X^m e_i$$

on peut voir que celle-ci sera donnée par:

$$h_s = \sum_{|m|=s_1 \leq i \leq n} h_{m,i} X^m e_i \quad \text{où } h_{m,i} = \frac{v_{m,i}}{\langle m, \lambda \rangle - \lambda_i}$$

D'après la discussion précédente et le théorème 1, et en appliquant plusieurs fois la proposition 1, on a alors:

Théorème 3.1.2 : Si $A = Df(0)$ est diagonale et ses valeurs propres n'ont pas de résonance d'ordre $\leq s$, alors il existe un changement de variable de la forme

$$X = Y + h(Y) \quad , \quad h \in P^n$$

(analytique) transformant (au voisinage de 0) l'équation

$$\dot{X} = f(X) = AX + w_2(X) + \dots + w_s(X) + o(s), \quad w_i \in H_i^n$$

en

$$\dot{Y} = AY + o(s).$$

Théorème 3.1.3 : Si $A = Df(0)$ est diagonale, alors il existe un changement de variables de la forme

$$X = Y + h(Y), h \in P^n$$

(analytique) transformant (au voisinage de 0) l'équation

$$\dot{X} = f(X) = AX + w_2(X) + \dots + w_s(X) + o(s), w_i \in H_i^n$$

en

$$\dot{Y} = AY + \tilde{w}_2(Y) + \dots + \tilde{w}_s(Y) + o(s), \text{ où } \tilde{w}_i \in H_i^s$$

et ne comporte que des monômes vectoriels résonants.

Dans le théorème 3.1.3, pour tuer les monômes non résonant de

$$w_s = \sum_{|m|=s_1 \leq i \leq n} v_{m,i} X^m e_i \in H_s^n$$

on prendra comme changement de variable

$$X = Y + h_s(Y) \text{ où } h_s \in H_s^n$$

est donné par

$$h_s = \sum_{|m|=s, 1 \leq i \leq n} h_{m,i} X^m e_i \text{ où } h_{m,i} = \frac{v_{m,i}}{\langle m, \lambda \rangle - \lambda_i} \text{ si } \langle m, \lambda \rangle \neq \lambda_i$$

$$\text{ou } h_{m,i} = 0 \text{ si } \langle m, \lambda \rangle = \lambda_i$$

Les théorèmes 3.1.2 et 3.1.3 décrivent ce que l'on appelle la méthode de Poincaré. Celle-ci nous permet, lorsque $Df(0)$ est diagonalisable, de normaliser (au voisinage de l'origine et biholomorphiquement) l'équation

$$\dot{X} = f(X) \quad , \quad f(0) = 0$$

jusqu'à un ordre s fini - aussi grand que l'ordre de différentiabilité de f - et ce, seulement en identifiant les relations de résonance, d'ordre inférieur ou égal à s , des valeurs propres de $Df(0)$ (donc un nombre fini de relations).

De plus, la forme normale à laquelle on parvient est, de par sa construction (il suffit de regarder les relations (6)), la plus naturelle qui soit - et donc généralement la plus simple. Comme on le voit bien, la méthode de Poincaré est beaucoup plus directe et facile à appliquer que la méthode décrite dans le théorème 3.1.1; celle-ci en effet demande, pour parvenir aux mêmes résultats (normaliser jusqu'à ordre s), d'effectuer les calculs de $L_A(H_i^n)$ pour $2 \leq i \leq s$, ce qui est beaucoup plus long et fastidieux que de trouver quelques relations de résonance.

Remarquons ensuite qu'il est clair que, dans le théorème 3.1.3, les coefficients des monômes de $\tilde{w}_i$ ne sont pas forcément les mêmes que ceux des monômes résonants correspondants de w_i . Il existe cependant des méthodes pour déterminer ceux-ci seulement d'après la fonction f et sans avoir à effectuer (et calculer) le changement de variables. Ces méthodes sont d'ailleurs aussi valables pour calculer les coefficients des monômes des g_i dans le théorème 3.1.1. Sur ce sujet, et pour plus de références, voir Guckenheimer [3], p.154.

Il est possible de montrer que, même si A n'est pas diagonalisable (on la considère alors sous sa forme de Jordan), les valeurs propres (et non les vecteurs propres) de l'opérateur homologique L_A sont encore celles données par la proposition 3.1.2. On voit donc que si f est analytique ou C^∞ et que les valeurs propres de $Df(0)$ ne sont pas résonantes ou ne possèdent qu'un nombre fini de résonances, on peut, en appliquant un nombre infini de fois le théorème 3.1.1, 2 ou 3, ramener l'équation

$$\dot{X} = f(X) \quad , \quad f(0) = 0$$

à une forme linéaire ou polynômiale à l'aide d'un changement de variable donné par une série formelle. Cette série est appelée série de Poincaré associée à l'équation (et n'est pas forcément unique). Le problème crucial, dont traite essentiellement le reste du présent texte, est celui de la convergence des séries de Poincaré.

Nous terminerons cette section par deux exemples d'application de la méthode de Poincaré:

Exemple 3.1.2 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, une fonction $C^k, k \geq 2$, telle que $f(0) = 0, Df(0)$ est diagonalisable et ses valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ satisfont la relation de résonance $\lambda_1 = 2\lambda_2$ (l'origine est donc un puits ou une source), alors l'équation

$$\dot{X} = f(X) \quad (7)$$

est équivalent (biholomorphiquement) au voisinage de l'origine à

$$\begin{aligned} \dot{X} &= \lambda_1 X + cY^2 + o(k) \\ \dot{Y} &= \lambda_2 Y + o(k) \end{aligned} \quad \text{pour un } c \in \mathbb{R} \text{ dépendant de } f$$

Exemple 3.1.3 Supposons maintenant que, dans l'exemple ci-dessus, f est C^∞ et $\lambda_1 = 0, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0$; on a donc les relations de résonance

$$n\lambda_1 = \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 + n\lambda_1 = \lambda_2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Alors pour $\forall k \in \mathbb{N}$, on a que l'équation (7) est équivalente au voisinage de l'origine à:

$$\begin{aligned} \dot{X} &= a_1 X^2 + a_3 X^3 + \dots + a_k X^k + o(k) \\ \dot{Y} &= \lambda_2 Y + b_2 YX + b_3 YX^2 + \dots + b_k YX^{k-1} + o(k) \end{aligned}$$

où $a_i, b_i \in \mathbb{R}, 2 \leq i \leq k$ et dépendent de f .

Remarque 3.1.5 Si l'équation originale est réelle, mais les valeurs propres du linéarisé à l'origine ne le sont pas, on peut toujours trouver une base de vecteurs propres conjugués complexe. Dans ce cas, Les changements de variable intervenant dans les théorèmes 3.1.2 et 3.1.3 peuvent être choisis réels, c'est-à-dire transformant des vecteurs conjugués complexe en des vecteurs conjugués complexe (cf. Arnold [1], p. 183, ex.2).

3.2 Domaine de Poincaré et domaine de Siegle

Comme nous allons le voir dans les théorème de Poincaré-Dulac et Siegle, la convergence au voisinage de l'origine d'une série de Poincaré associée à l'équation:

$$\dot{X} = f(X), f(0) = 0 \quad (1)$$

dépend étroitement du fait que les valeurs propres de $Df(0)$ sont situées dans le domaine de Poincaré ou dans le domaine de Siegle.

Nous allons donc définir ici ces notions et discuter de leurs propriétés les plus importantes, ainsi que de leurs conséquences.

Définition 3.2.1 - $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$, appartient au domaine de Poincaré, si la fermeture convexe des n points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$ ne contient pas 0.

$-\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ appartient au domaine de Siegle, si 0 est situé à l'intérieur de la fermeture convexe des n points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ dans $\mathbb{C}$.

Remarque 3.2.1 : Pour $n \geq 2$, les domaines de Poincaré et de Siegle sont des ouverts séparés par des cônes.

Pour $n = 2$, le domaine de Poincaré est encore ouvert, mais celui de Siegle est fermé et est de codimension réelle 1 dans $\mathbb{C}^2$.

Définition 3.2.2 Soient $m \in \mathbb{N}^n, |m| = m_1 + \dots + m_n \geq 2$ et $s \in \{1, \dots, n\}$ alors on appelle plan résonant l'hyperplan de $\mathbb{C}^n$ défini par

$$R_s^m = \{\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n \mid \langle m, \lambda \rangle = \lambda_s\}$$

- En variant $m \in \mathbb{N}^n$ et $s \in \{1, \dots, n\}$, on obtient un nombre infini dénombrable de plans résonants.

- On peut dire de façon très heuristique, que l'on aura convergence des séries de Poincaré associées à l'équation (1), si les plans résonants ne s'approchent pas trop près du points $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des valeurs propres de $Df(0)$.

La proposition suivante nous montre que, dans le domaine de Poincaré, les choses sont assez simples.

Proposition 3.2.1 Tout point dans le domaine de Poincaré n'intersecte qu'un nombre fini de plans résonants et possède un voisinage n'intersectant pas les autres.

Preuve. Soit $\lambda^\circ = (\lambda_1^\circ, \dots, \lambda_n^\circ) \in \mathbb{C}^n$ un point dans le domaine de Poincaré. Il existe donc une droite D dans $\mathbb{C}$ séparant 0 de l'ensemble des points $\lambda_1^\circ, \dots, \lambda_n^\circ$. On peut, à toutes

fins pratiques, supposer (en effectuant une rotation) que D est parallèle à l'axe imaginaire et que $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont tous situés à la droite de D .

Dans ce cas, il existe un $\varepsilon > 0$ et un $k > 0$ tels que:

$$0 < \varepsilon < \operatorname{Re} \lambda_i^\circ < k, \quad 1 \leq i \leq n$$

Soient $T = \{Z \in \mathbb{C} \mid \varepsilon < \operatorname{Re} Z < k\}$ et $M \in \mathbb{N}$ tel que $M > \frac{k}{\varepsilon}$.

Donc $\lambda^\circ \in T^n$ et pour $\forall \lambda \in T^n$ et $\forall m \in \mathbb{N}^n$ tel que $|m| \geq M$, on a:

$$\operatorname{Re} \langle m, \lambda \rangle > |m| \varepsilon \geq M \varepsilon > k > \operatorname{Re} \lambda_i \quad 1 \leq i \leq n$$

donc, à plus forte raison, $\langle m, \lambda \rangle \neq \lambda_s, 1 \leq s \leq n$. Ce qui prouve la proposition. ■

Dans le domaine de Siegle, il en va tout autrement.

Proposition 3.2.2 *Les plans résonants sont denses partout dans le domaine de Siegle.*

Preuve. Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ un point dans le domaine de Siegle. La distance de ce point au plan résonant R_s^m est donnée par:

$$\operatorname{dist}(R_s^m, \lambda) = \frac{|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s|}{(m_1^2 + \dots + (m_s - 1)^2 + \dots + m_n^2)^{\frac{1}{2}}} \quad (2)$$

■

cas 1: $n > 2$

Dans ce cas, 0 est au moins situé à l'intérieur d'un triangle formé par trois des points $\lambda_1, \dots, \lambda_n$; supposons que ce sont λ_1, λ_2 et λ_3 . Considérons l'angle de sommet 0 et formé par les multiples réels positifs de λ_1 et λ_2 . Tous les multiples réels négatifs de λ_3 sont à l'intérieur de cet angle. Divisons cet angle en parallélogrammes formés par les combinaisons linéaires entières de λ_1 et λ_2 . Soit d le diamètre de ces parallélogrammes.

Pour $\forall N \in \mathbb{N}$, le point $-N\lambda_3$ est situé dans l'un de ces parallélogrammes, c'est-à-dire que pour $\forall N \in \mathbb{N}, \exists m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$|N\lambda_3 + m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2| \leq d$$

D'après (2), on a donc que la distance de λ au plan résonant

$$m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + (N+1)\lambda_3 = \lambda_3$$

est :

$$\frac{|m_1\lambda_1 + m_2\lambda_2 + N\lambda_3|}{(m_1^2 + m_2^2 + N^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{d}{N}$$

comme d est fixe et N peut être pris arbitrairement grand, ceci prouve la proposition dans le cas $n > 2$.

cas 2: $n = 2$

Dans ce cas, 0 est situé dans le segment de droite compris entre λ_1 et λ_2 . Si on pose $d = |\lambda_1 - \lambda_2|$, alors $\exists p_1, p_2 \in \mathbb{N}$ aussi grands que l'on veut tels que

$$|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2| \leq d$$

Toujours d'après (2), la distance de λ au plan résonant

$$p_1\lambda_1 + (p_2+1)\lambda_2 = \lambda_2$$

est :

$$\frac{|p_1\lambda_1 + p_2\lambda_2|}{(p_1^2 + p_2^2)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{d}{p_1} \text{ ou } \leq \frac{d}{p_2}$$

Là encore, d était fixe et p_1, p_2 arbitrairement grands. Ce qui prouve la proposition dans le cas $n = 2$.

On voit donc que si les valeurs propres de $Df(0)$ ne sont pas dans le domaine de Poincaré, il y a, à priori, peu de chances que pour les séries de Poincaré associées à l'équation (1) convergent. Il faut donc trouver d'autres conditions à imposer sur la proximité des plans résonants aux valeurs propres de $Df(0)$. Celle utilisée dans le théorème de Siegle est donnée dans la définition suivante:

Définition 3.2.3 Soient $c > 0$ et $v \geq 0$. Un point $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ est dit de type multiplicatif (c, v) si, pour $\forall m \in \mathbb{N}^n, |m| \geq 2$ et $\forall s \in \{1, \dots, n\}$, on a:

$$|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s| \geq \frac{c}{|m|^v}$$

L'utilité de cette condition est que presque tous les points de $\mathbb{C}^n$ la satisfont, ce que l'on peut énoncer de la manière suivante:

Proposition 3.2.3 *L'ensemble des points de $\mathbb{C}^n$ qui ne sont pas de type multiplicatif (c, v) pour $\forall c > 0$ est de mesure 0; ce, dans la mesure où $v > \frac{n-2}{2}$*

Preuve. fixon une boule B de rayon 1 dans $\mathbb{C}^n$ et $c, v > 0$; et estimons la mesure de l'ensemble des points de B qui ne sont pas de type multiplicatif (c, v) .

$\lambda \in \mathbb{C}^n$ n'est pas de type multiplicatif (c, v) , s'il existe un $m \in \mathbb{N}^n$, $|m| \geq 2$ et $s \in \{1, \dots, n\}$ tels que

$$|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s| < \frac{c}{|m|^v}$$

et donc:

$$\text{dist}(R_s^m, \lambda) = \frac{|\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s|}{(m_1^2 + \dots + (m_s - 1)^2 + \dots + m_n^2)^{\frac{1}{2}}} < \frac{c_1 c}{|m|^{v+1}}$$

(En effet, il est possible de montrer que pour $\forall m \in \mathbb{N}^n$

$$\left((m_1^2 + \dots + (m_s - 1)^2 + \dots + m_n^2)^{\frac{1}{2}} > \frac{|m|}{c_1} \right)$$

où c_1 est une constante positive de dépendant que de n). On a donc:

$$\begin{aligned} \{\lambda \in B \mid \lambda \text{ n'est pas de type } (c, v)\} &= \cup_{m \in \mathbb{N}_{1 \leq s \leq n}^n} \left\{ \lambda \in B \mid |\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s| < \frac{c}{|m|^v} \right\} \\ &\subseteq \cup_{m \in \mathbb{N}_{1 \leq s \leq n}^n} \left\{ \lambda \in B \mid \text{dist}(R_s^m, \lambda) < \frac{c_1 c}{|m|^{v+1}} \right\} \end{aligned}$$

Comme R_s^m est de codimension réelle 2 dans $\mathbb{C}^n$ et que B est de rayon 1, on a certainement que:

$$\begin{aligned} &\text{Volume} \left\{ \lambda \in B \mid \text{dist}(R_s^m, \lambda) < \frac{c_1 c}{|m|^{v+1}} \right\} \\ &\leq \text{Volume}(\text{boule de rayon 1 dans } \mathbb{C}^{n-1}) \times \text{Volume}(\text{disque dans } \mathbb{C} \text{ de rayon } \frac{c_1 c}{|m|^{v+1}}) \\ &\leq c_2 \left(\frac{c_1 c}{|m|^{v+1}} \right)^2 = c_3 \frac{c^2}{|m|^{2v+2}} \end{aligned}$$

où c_2 est une constante positive ne dépendant que de n , et $c_3 = c_2 c_1^2$. On a donc que:

$$\begin{aligned} V^c &= \text{Volum} \{ \lambda \in B \mid \lambda \text{ n'est pas de type } (c, v) \} \\ &\leq \sum_{m \in \mathbb{N}_{1 \leq s \leq n}^n} c_3 \frac{c^2}{|m|^{2v+2}} = n c_3 c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{|m|=k} \frac{1}{|m|^{2v+2}} \end{aligned}$$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre de $m \in \mathbb{N}^n$ tels que $|m| = k$ est:

$$\binom{k+n-1}{n-1}$$

Il est facile de voir qu'il existe un nombre assez grand $c_4 = c_4(n) > 0$ ne dépendant que de n tel que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad \binom{k+n-1}{n-1} \leq c_4 k^{n-1}$$

On a donc:

$$V^c \leq n c_3 c_4 c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \frac{k^{n-1}}{k^{2v+2}} = c_3 c^2 \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{k}\right)^{2v+3-n}, \text{ où } c_5 = n c_3 c_4$$

Cette série converge, si $2v+3-n > 1$, c'est-à-dire si $v > \frac{n-2}{2}$ et sa somme ne dépend que de v . On a donc:

$$V^c \leq c_6(v) c^2 \quad \forall c > 0$$

où $c_6(v) > 0$ est une constante positive ne dépendant que de v . Comme:

$$c < \tilde{c} \Rightarrow c \{ \lambda \in \mathbb{C}^n \mid \lambda \text{ n'est pas } (c, v) \} \subset \left\{ \lambda \in \mathbb{C}^n \mid \lambda \text{ n'est pas } (\tilde{c}, v) \right\}$$

, on a alors:

$$\begin{aligned} & \text{Volume} \{ \lambda \in \mathbb{C}^n \mid \lambda \text{ n'est pas de type } (c, v) \text{ pour } \forall c > 0 \} \\ & \leq V^c \leq c_6(v) c^2, \quad \forall c > 0 \end{aligned}$$

Ce qui prouve la proposition 3.2.3 ■

Remarque 3.2.2 : (Arnold [1]): Dans le cas réel, on demandera que $v > n-1$ pour prouver la proposition 3

Nous terminerons cette section avec les remarques suivantes:

Tout vecteur non résonant dans le domaine de Poincaré est de type (c, v) pour $c > 0$.

Dans le domaine de Siegle, les ensembles de vecteurs suivants sont partout denses:

- vecteurs de type (c, v)
- vecteurs résonants
- vecteurs non résonants, qui ne sont pas de type (c, v) pour aucun c et aucun v (Arnold [1], p.187)

3.3 Théorème de Poincaré-Dulac

Dans le théorème de Poincaré-Dulac, nous ramenons une équation différentielle à une forme normale polynômiale vectorielle. Ce théorème fut en fait démontré par Dulac en 1912; son nom lui vient du fait que le théorème démontré par Poincaré dans sa thèse, en 1879 (cf. introduction), en est un cas particulier.

Nous introduisons, pour cette section seulement, les notations suivantes:

- $H_k^n = \{f : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ est holomorphe en } 0, f(0) = Df(0) = 0\}$
- $P_k^n = \{p \in H_k^n \mid p \text{ est un polynôme vectoriel}\}$
- $H^n = H_n^n, P^n = P_n^n$
- $[y_1, \dots, y_n]$ est un élément de H_1^n en les variables $y_1, \dots, y_n$.

Théorème 3.3.1 (Poincaré-Dulac)

Soient $f : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ holomorphe et nulle en 0, et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les valeurs propres de $Df(0)$. Alors si λ est dans le domaine de Poincaré, il existe un changement de variable de la forme:

$$Z = Y + h(Y), \quad \text{où } h \in H^n \quad (1)$$

donc biholomorphe et nul en 0, transformant (au voisinage de l'origine) l'équation:

$$\dot{Y} = f(Y) = Df(0)Y + \Psi(Y)$$

où $\Psi \in H^n$ et $Df(0)$ est sous sa forme de Jordan, en

$$\dot{Z} = Df(0)Z + p(Z)$$

où $p \in P^n$ et ne comporte que des monômes vectoriels résonants.

Tout le reste de cette section est consacré à la preuve de ce théorème. La méthode que nous utiliserons est celle donnée par Dulac dans ses travaux (cf. Dulac [2]); celle-ci repose principalement sur un théorème d'équation aux dérivées partielles (théorème 3.3.2 et son corollaire) apparaissant dans la thèse de Poincaré, ainsi que dans les travaux de Picard (cf. Picard [4], tome 3).

Dans ce théorème, on prouve l'existence et on donne la construction d'une solution analytique à un certain type d'équation aux dérivées partielles; ce sont précisément ces solutions que nous utiliserons pour construire le changement de variable (1).

Théorème 3.3.2 Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_1^n$, $s \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que λ est dans le domaine de Poincaré et n'admet pas de résonance de la forme

$$\langle m, \lambda \rangle - \lambda_s = 0, \quad m \in \mathbb{N}^n \text{ et } |m| \geq 2$$

alors l'équation:

$$(\lambda_1 X_1 + \varphi_1(X_1, \dots, X_n)) \frac{\partial f}{\partial X_1} + \dots + (\lambda_n X_n + \varphi_n(X_1, \dots, X_n)) \frac{\partial f}{\partial X_n} = \lambda_s f \quad (2)$$

admet une solution holomorphe et en 0 de la forme:

$$f(X) = X_s + V(X), \quad \text{où} \quad V \in H_1^n \text{ et } X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{C}^n \quad (3)$$

Preuve. Nous introduisons pour la preuve de ce théorème, les notations suivantes:

Si $f = (f_1, \dots, f_n) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$; $p = (p_1, \dots, p_n)$, $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{N}^n$ et

$X = (X_1, \dots, X_n)$, $Y = (Y_1, \dots, Y_n) \in \mathbb{C}^n$, alors on pose:

- $q \leq p \stackrel{\text{déf}}{\Leftrightarrow} q_i \leq p_i \text{ pour } 1 \leq i \leq n$; $\varepsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$

- $\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n X_i Y_i$ (ce n'est pas le produit scalaire de $\mathbb{C}^n$)

- $\frac{\partial^{[p]} f_j}{\partial X^p} = \frac{\partial^{[p]} f_j}{\partial X_1^{p_1} \dots \partial X_n^{p_n}}$

- $\frac{\partial^{[p]} f}{\partial X^p} = \left(\frac{\partial^{[p]} f_1}{\partial X^p}, \dots, \frac{\partial^{[p]} f_n}{\partial X^p} \right)$

De plus, nous aurons besoin des deux lemmes suivants, dont on trouvera la preuve en appendice à cette section: ■

Lemme 3.3.1 Soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ dans le domaine de Poincaré et $s \in \{1, \dots, n\}$, alors il existe un $\varepsilon > 0$ tel que pour $\forall p \in \mathbb{N}^n$, $|p| \geq 2$, on ait:

$$\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s \neq 0 \Rightarrow \frac{|\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s|}{|p| - 1} > \varepsilon$$

Lemme 3.3.2 Si $f, g : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ et $p \in \mathbb{N}^n$, alors:

$$\frac{\partial^{[p]} \langle f, g \rangle}{\partial X^p} = \sum_{q \leq p} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{[q]} f}{\partial X^q}, \frac{\partial^{[p-q]} g}{\partial X^{p-q}} \right\rangle$$

où les constantes $a_q^p \in \mathbb{N}$ ne dépendent que de n et pas de f et g , et:

$$a_q^p = a_0^p = 1, \quad a_{\varepsilon_i}^p = p_i$$

En particulier, si $f(0) = 0$, on aura:

$$\frac{\partial^{[p]} \langle f, g \rangle}{\partial X^p} \Big|_{X=0} = \sum_{q \leq p, |q| \geq 1} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{[q]} f}{\partial X^q}, \frac{\partial^{[p-q]} g}{\partial X^{p-q}} \right\rangle \Big|_{X=0}$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème 3.3.2

On va voir que l'on peut construire terme par terme une série formelle (en calculant successivement les valeurs de $\frac{\partial^{|p|} f}{\partial X^p} |_{X=0}$) satisfaisant (2). il restera à en prouver la convergence.

Il est clair d'après (2) que l'on doit avoir $f(0) = 0$. Pour déterminer les termes d'ordre 1 de f , on applique $\frac{\partial}{\partial X_i}$ dans les deux membres de (2) et on obtient:

$$\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_1} + (\lambda_1 X_1 + \varphi_1) \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_1} \right) + \dots + \lambda_i \frac{\partial f}{\partial X_i} + \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_i} + (\lambda_i X_i + \varphi_i) \frac{\partial^2 f}{\partial X_i^2} \right) + \dots + \left(\frac{\partial \varphi_n}{\partial X_i} \frac{\partial f}{\partial X_n} + (\lambda_n X_n + \varphi_n) \frac{\partial^2 f}{\partial X_i \partial X_n} \right) = \lambda_s \frac{\partial f}{\partial X_i}$$

Comme $\varphi_j \in H_1^n$, $1 \leq j \leq n$, on a en $X = 0$:

$$(\lambda_i - \lambda_s) \frac{\partial f}{\partial X_i} |_{X=0} = 0, \quad 1 \leq i \leq n$$

On voit donc que si $\lambda_i \neq \lambda_s$, on doit prendre $\frac{\partial f}{\partial X_i} |_{X=0} = 0$, tandis que si $\lambda_i = \lambda_s$, on a le choix. On posera alors:

$$\frac{\partial f}{\partial X_i} |_{X=0} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=s \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

On voit que, jusqu'à maintenant, f est bien de la forme (3)- le seul terme linéaire est X_s et il n'y a pas de terme constant.

Il reste à déterminer le terme de degré supérieur à 1, c'est-à-dire V dans (3). En mettant (3) dans (2), on obtient:

$$\lambda_1 X_1 \frac{\partial V}{\partial X_1} + \dots + \lambda_n X_n \frac{\partial V}{\partial X_n} - \lambda_s V = -\varphi_1 \frac{\partial V}{\partial X_1} + \dots + \varphi_n \frac{\partial V}{\partial X_n} - \varphi_s \quad (4)$$

Si on pose:

$$\begin{aligned} \lambda X &= (\lambda_1 X_1, \dots, \lambda_n X_n) \\ \frac{dV}{dX} &= \left(\frac{\partial V}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial V}{\partial X_n} \right) \\ \varphi &= (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \end{aligned}$$

l'équation (4) s'écrit:

$$\left\langle \lambda X, \frac{dV}{dX} \right\rangle - \lambda_s V = - \left\langle \varphi, \frac{dV}{dX} \right\rangle - \varphi_s \quad (5)$$

et on a, d'après le lemme 3.3.2:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^{|p|}}{\partial X^p} \left\langle \lambda X, \frac{dV}{dX} \right\rangle \Big|_{X=0} &= \sum_{q \leq p, |q| \geq 1} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{|q|} \lambda X}{\partial X^q}, \frac{\partial^{|p-q|}}{\partial X^{p-q}} \left(\frac{dV}{dX} \right) \right\rangle \Big|_{X=0} \\
 &= \sum_{i=1}^n p_i \left\langle \frac{\partial \lambda X}{\partial X^{\varepsilon_i}}, \frac{\partial^{|p-\varepsilon_i|}}{\partial X^{p-\varepsilon_i}} \left(\frac{dV}{dX} \right) \right\rangle \Big|_{X=0} = \sum_{i=1}^n \lambda_i p_i \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} \Big|_{X=0}
 \end{aligned}$$

Alors, en appliquant $\frac{\partial^{|p|}}{\partial X^p} \Big|_{X=0}$ aux deux membres de (5), on obtient:

$$(\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s) \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} \Big|_{X=0} = - \sum_{q \leq p, |q| \geq 2} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{|q|} \varphi}{\partial X^q}, \frac{\partial^{|p-q|}}{\partial X^{p-q}} \left(\frac{dV}{dX} \right) \right\rangle \Big|_{X=0} - \frac{\partial^{|p|} \varphi_s}{\partial X^p} \Big|_{X=0} \quad (6)$$

Remarque 3.3.1 Dans le deuxième membre de (6), on somme sur $|q| \geq 2$, car φ commence par des termes de degré 2.

Il en résulte que les dérivées de V apparaissant dans le second membre de (6) sont toutes d'ordre inférieur à $|p|$. On voit donc que l'équation (6) détermine inductivement, de façon unique, tous les termes de la série V .

Nous allons maintenant introduire une fonction V qui sera utilisée dans un test de comparaison, qui prouvera l'analyticité de V en 0.

Soient $r > 0$ et M le module de $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ dans un polydisque de rayon r (autour de 0). Soit $\varepsilon > 0$ tel que pour $\forall p \in \mathbb{N}^n$, $|p| \geq 2$, on ait:

$$\frac{|\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s|}{|p| - 1} > \varepsilon \quad (\text{lemme 3.3.1}) \quad (7)$$

Soit l'équation:

$$\varepsilon \left(X_1 \frac{\partial V}{\partial X_1} + \dots + X_n \frac{\partial V}{\partial X_n} - V \right) = F \left(\frac{\partial V}{\partial X_1} + \dots + \frac{\partial V}{\partial X_n} + 1 \right) \quad (8)$$

où

$$F = M \left(\frac{1}{1 - u/r} - 1 - \frac{u}{r} \right) = M \left(\frac{u^2}{r^2} + \frac{u^3}{r^3} + \dots \right)$$

et $u = X_1 + \dots + X_n$. Donc F est holomorphe pour $|X_1 + \dots + X_n| < r$

L'équation (8) est réelle. Nous allons voir qu'elle admet une solution V , fonction de u , holomorphe en $u = 0$ et telle que $V(0) = 0$:

Si on suppose que V est une fonction de u , on a:

$$\frac{\partial V}{\partial X_i} = \frac{\partial V}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial X_i} = \frac{\partial V}{\partial u}, \quad 1 \leq i \leq n$$

et l'équation (8) s'écrit alors:

$$\varepsilon \left(u \frac{\partial V}{\partial u} - V \right) = F(u) \cdot \left(n \frac{\partial V}{\partial u} + 1 \right)$$

que l'on peut mettre sous la forme:

$$u \frac{\partial V}{\partial u} - V = \frac{\tilde{M} u^2}{r - u} \left(n \frac{\partial V}{\partial u} + 1 \right) \quad \text{où } \tilde{M} = \frac{M}{\varepsilon r}$$

ou encore:

$$\left(u - \frac{n \tilde{M} u^2}{r - u} \right) \frac{dV}{du} - V = \frac{n \tilde{M} u^2}{r - u} \quad (9)$$

L'équation (9) est linéaire du premier ordre. Résolvons d'abord l'équation homogène (second membre nul), celle-ci est singulière en $u = 0$; cependant, en faisant la substitution $V = u\theta(u)$, on obtient pour θ :

$$\left(1 - \frac{n \tilde{M} u}{r - u} \right) \frac{d\theta}{du} - \frac{n \tilde{M}}{r - u} \theta = 0$$

c'est une équation linéaire du premier ordre homogène et non singulière en $u = 0$, donc qui admet une solution θ holomorphe à l'origine telle que $\theta(0) \neq 0$ est arbitraire.

Ensuite l'équation non homogène (9) peut être résolue par variations de paramètres à partir de la solution $u\theta(u)$ de l'équation homogène: en posant $V(u) = C(u)u\theta(u)$ dans (9), on obtient pour C :

$$\frac{dC}{du} = \frac{n \tilde{M}}{\left[r - u(1 + n \tilde{M}) \right] \theta(u)}$$

Comme $\theta(0) \neq 0$, cette équation est non singulière en $u = 0$, alors en intégrant on obtient pour C une fonction holomorphe à l'origine uniquement déterminée par la condition $C(0) = 0$.

On aura alors que $V(u) = C(u)u\theta(u)$ est une solution de (9) (et donc de (8)) holomorphe à l'origine et dont le développement en série commence par un terme en u^2 .

Comme on avait le choix pour la valeur de $\theta(0)$, on aura le choix pour le coefficient du terme en u^2 de V , c'est-à-dire pour:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} \Big|_{u=0} = \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^P} \Big|_{X=0} \quad \text{pour } \forall p \in \mathbb{N}^n, \quad |p| = 2$$

En appliquant $\frac{\partial^{|p|}}{\partial X^p} |_{X=0}$ à (8) et en raisonnant comme pour (4), on a

$$\varepsilon (|p| - 1) \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} |_{X=0} = \sum_{q \leq p, |q| \geq 2} a_q^p \left[\sum_{i=1}^n \frac{Mq!}{r^{|q|}} \frac{\partial^{|p-q|}}{\partial X^{p-q}} \left(\frac{\partial V}{\partial X_i} \right) |_{X=0} \right] + \frac{Mp!}{r^{|p|}} \quad (10)$$

où $p = p_1! \dots p_n!$

En se servant de l'estimation de Cauchy pour les fonctions holomorphes:

$$\left| \frac{\partial^{|q|} \varphi_i}{\partial X^q} |_{X=0} \right| \leq \frac{Mq!}{r^{|q|}}$$

on a à partir de (6) :

$$\left| \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} |_{X=0} \right| \leq |\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s|^{-1} \sum_{q \leq p, |q| \geq 2} a_q^p \left(\sum_{i=1}^n \frac{Mq!}{r^{|q|}} \left| \frac{\partial^{|p-q|}}{\partial X^{p-q}} \left(\frac{\partial V}{\partial X_i} \right) |_{X=0} \right| \right) + \frac{Mp!}{r^{|p|}} \quad (11)$$

On voit d'après (10) que si l'on a choisi $\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} |_{u=0}$ réel et positif, il en sera de même pour:

$$\frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} |_{X=0} \text{ pour } \forall p \in \mathbb{N}^n, \quad |p| \geq 2$$

De plus, si l'on a choisi,

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u^2} |_{u=0} > \left| \frac{\partial^2 V}{\partial X^p} |_{X=0} \right| \quad \text{pour } |p| = 2$$

on voit, en comparant (10) et (11), et en se servant de l'inégalité (7) que l'on a par induction:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} |_{X=0} \right| &\leq \frac{1}{\varepsilon (|p| - 1)} \sum_{q \leq p, |q| \geq 2} a_q^p \left[\sum_{i=1}^n \frac{Mq!}{r^{|q|}} \frac{\partial^{|p-q|}}{\partial X^{p-q}} \left(\frac{\partial V}{\partial X_i} \right) |_{X=0} \right] + \frac{Mp!}{r^{|p|}} \\ &= \frac{\partial^{|p|} V}{\partial X^p} |_{X=0} \text{ pour } \forall p \in \mathbb{N}^n, \quad |p| \geq 2 \end{aligned}$$

On a donc, comme V est holomorphe en 0, que la solution V de (4), construite inductivement par (6), sera une fonction holomorphe en 0.

Ce qui démontre le théorème 3.3.2

C'est en fait le corollaire suivant que nous utiliserons le plus fréquemment par la suite:

Corollaire 3.3.1 Soient $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_1^n$, $s \in \{1, \dots, n\}$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que λ est dans le domaine de Poincaré. (Remarque: Dans ce cas, $\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s = 0$ seulement pour

un nombre fini de $p \in \mathbb{N}^n$, $|p| \geq 2$). Alors, il existe une fonction $F : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$, holomorphe en 0, de la forme:

$$F(X) = X_s + V(X), \quad \text{où } V \in H_1^n$$

et un polynôme Φ de la forme

$$\Phi(X) = \sum_{\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s = 0} b_p X^p \quad \text{où } (X^p = X_1^{p_1} \dots X_n^{p_n})$$

satisfaisant l'équation:

$$(\lambda_1 X_1 + \varphi_1(X)) \frac{\partial F}{\partial X_1} + \dots + (\lambda_n X_n + \varphi_n(X)) \frac{\partial F}{\partial X_n} = \lambda_s F(X) + \Phi(X)$$

Preuve. Si l'on procède comme dans la preuve du théorème 3.3.2 et que l'on veut construire F et $\Phi = \sum_{p \in \mathbb{N}^n} b_p X^p$ de façon inductive, l'analogue de (6) sera:

$$((\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s) \frac{\partial^{[p]} V}{\partial X^p} \Big|_{X=0} = - \sum_{q \leq p, |q| \geq 2} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{[q]} \varphi}{\partial X^q}, \frac{\partial^{[p-q]} (dV)}{\partial X^{p-q}} \right\rangle \Big|_{X=0} - \frac{\partial^{[p]} \varphi_s}{\partial X^p} \Big|_{X=0} + b_p$$

il suffit alors de prendre:

- a) si $\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s = 0 : \frac{\partial^{[p]} V}{\partial X^p} \Big|_{X=0} = 0$ et $b_p = \sum_{q \leq p} a_q^p \left\langle \frac{\partial^{[q]} \varphi}{\partial X^q}, \frac{\partial^{[p-q]} (dV)}{\partial X^{p-q}} \right\rangle \Big|_{X=0} + \frac{\partial^{[p]} \varphi_s}{\partial X^p} \Big|_{X=0}$
- b) si $\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s \neq 0$: on pose alors $b_p = 0$

On peut voir facilement que ces modifications ne changeront rien à la preuve de convergence. ■

Remarque 3.3.2 On peut toujours, si cela est commode, pour un nombre fini d'indices p , déterminer b_p et $\frac{\partial^{[p]} V}{\partial X^p} \Big|_{X=0}$ comme en **a)** même si $\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s \neq 0$.

Nous utiliserons cette dernière remarque à la fin de la preuve du théorème de Poincaré-Dulac.

Avant de commencer la preuve proprement dite du théorème de Poincaré-Dulac, nous pouvons avoir une idée du lien qu'il y a entre la recherche d'une fonction satisfaisant une équation aux dérivées partielles (Théorème 3.3.2) et la simplification d'un flot (Théorème 3.3.1), en donnant la preuve du théorème de Poincaré citée dans l'introduction, lequel s'énonçait comme suit:

Si $\varphi_1, \dots, \varphi_n \in H_1^n$ et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ est dans le domaine de Poincaré et non résonante, il existe un changement de variable de la forme:

$$Z_i = Y_i + V_i(Y) \quad \text{où } V_i \in H_1^n, \quad 1 \leq i \leq n, \quad Y = (Y_1, \dots, Y_n)$$

transformant le système d'équations:

$$\dot{Y} = \lambda_i Y_i + \varphi_i(Y), \quad 1 \leq i \leq n \quad (12)$$

en

$$\dot{Z} = \lambda_i Z_i, \quad 1 \leq i \leq n$$

La preuve se donne comme suit: d'après le théorème 3.3.2, il existe n fonctions $f_1, \dots, f_n$ holomorphe en 0, de la forme:

$$f_s(Y) = Y_s + V_s(Y), \quad V_s \in H_1^n, \quad 1 \leq s \leq n.$$

satisfaisant les équations:

$$(\lambda_1 Y_1 + \varphi_1(Y)) \frac{\partial f_s}{\partial Y_1} + \dots + (\lambda_n Y_n + \varphi_n(Y)) \frac{\partial f_s}{\partial Y_n} = \lambda_s f_s(Y), \quad 1 \leq s \leq n$$

alors si applique le changement de variable

$$Z_s = f_s(Y), \quad 1 \leq s \leq n$$

au système d'équations (12); on obtient, pour $1 \leq s \leq n$:

$$\begin{aligned} \dot{Z} &= \frac{\partial f_s}{\partial Y_1} \dot{Y}_1 + \dots + \frac{\partial f_s}{\partial Y_n} \dot{Y}_n \\ &= (\lambda_1 Y_1 + \varphi_1(Y)) \frac{\partial f_s}{\partial Y_1} + \dots + (\lambda_n Y_n + \varphi_n(Y)) \frac{\partial f_s}{\partial Y_n} = \lambda_s f_s(Y) \\ &= \lambda_s Z_s \end{aligned}$$

Dans le théorème de Poincaré, $Df(0)$ n'est pas supposée diagonale, mais seulement sous sa forme de Jordan, et on admet que ses valeurs propres soient résonantes, ce qui nécessite le développement et l'utilisation de technique moins triviales que celles utilisées ci-dessus (principalement, pour contourner la difficulté amenée par la présence de blocs de Jordan non triviaux). Mais l'idée sous-jacente à la construction du changement de variable reste la même que ci-dessus.

Reprenons maintenant les données de l'énoncé du théorème 3.3.1, nous ne prouverons pas le théorème de Poincaré-Dulac sous cette forme, mais sous une autre à la fois plus générale et plus raffinée, énoncée dans le théorème 3.3.3.

Comme λ est dans le domaine de Poincaré, il existe une droite D dans $\mathbb{C}$ passant par 0, telle que tous les λ_i soient d'un même côté de D , on peut donc supposer satisfaite la condition suivante:

Les λ_i sont rangés de telle sorte que, lorsque l'indice i augmente, la distance de λ_i à D ne diminue pas

$$(13)$$

Comme on a supposé que $Df(0)$ est, dans les variables Y , sous sa forme de Jordan; l'équation:

$$\dot{Y} = f(Y) = Df(0)Y + \Psi(Y), \quad \Psi \in H^n$$

peut aussi s'écrire comme:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_i &= \lambda_i Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y), & 1 \leq i \leq n \\ \text{où} \quad - \varphi_i &\in H_1^n, & 1 \leq i \leq n \\ - b_i &\in \{0, 1\} \text{ et } \lambda_{i-1} \neq \lambda_i \Rightarrow b_i = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Avec les notations précédentes et les mêmes hypothèses que dans l'énoncé du théorème 1, nous allons montrer:

Théorème 3.3.3 *Si les $\lambda_i, 1 \leq i \leq n$, satisfont la condition (13), il existe un changement de variable de la forme*

$$Z = Y + h(Y), \text{ où } h \in H^n$$

donc biholomorphe et nul en 0, transformant le système d'équations (14) en

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= \lambda_i Z_i + b_i Z_{i-1} + \Psi(Z_1, \dots, Z_{i-1}), & 1 \leq i \leq n, \text{ où } \Psi_i \in P_1^{i-1} \\ &\text{et ne comporte que des monômes résonants.} \end{aligned}$$

Remarque 3.3.3 *Le fait que Ψ_i ne dépende que des variables $Z_1, \dots, Z_{i-1}$ rend l'énoncé du théorème 3.3.3 plus précis et plus élégant que celui du théorème 3.3.1.*

Si $\omega \in [0, 2\pi]$, multiplier les λ_j par $e^{i\omega}$ revient à effectuer dans $\mathbb{C}$ une rotation d'angle ω et ne change pas les relations de résonance. Il existe un ω tel que la droite $e^{i\omega}D$ soit l'axe imaginaire et $\operatorname{Re} \lambda_j e^{i\omega} > 0$ pour $1 \leq j \leq n$. De plus, si la condition (13) est satisfaite, les nombres $\operatorname{Re} \lambda_1 e^{i\omega}, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n e^{i\omega}$ seront non décroissants.

Comme multiplier les deux membres de (14) par $e^{i\omega}$ ne change en rien la forme de l'équation et ses solutions, on peut supposer pour la preuve du théorème 3.3.3 que

$$0 < \operatorname{Re} \lambda_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \lambda_n \quad (15)$$

À partir de là, nous allons montrer par induction la proposition suivante, laquelle dans le cas $s = n$ prouve le théorème 3.3.3:

Proposition 3.3.1 *Pour $1 \leq s \leq n$, il existe un changement de variables de la forme:*

$$Z_i = f_i(Y_1, \dots, Y_n) = Y_i + [Y_1, \dots, Y_n]_2, \quad 1 \leq i \leq s \quad (16)$$

donc biholomorphe et nul en 0, transformant l'équation (14) en:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= \lambda_i Z_i + b_i Z_{i-1} + \Psi_i(Z_1, \dots, Z_{i-1}), & 1 \leq i \leq s \\ \dot{Y}_{s+1} &= \lambda_{s+1} Y_{s+1} + b_{s+1} Z_s + h_{s+1}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) \\ \dot{Y}_k &= \lambda_k Y_k + b_k Y_{k-1} + h_k(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n), & s+2 \leq k \leq n \end{aligned}$$

où $\Psi_i \in P_1^{i-1}$, $1 \leq i \leq s$, et ne comporte que des monômes résonants; et $h_k \in H_1^n$, $s+1 \leq k \leq n$.

Preuve. On commence par le cas $s = 1$

Nous allons effectuer un changement de variable, qui va augmenter de 1 le nombre de variables. Le nouveau système, ainsi obtenu à partir de (14), ne sera donc pas équivalent à (14); par contre, et c'est là où réside son avantage, la partie linéaire sera diagonale et une simple application du théorème 3.3.2 nous fournira des fonctions à partir desquelles on construira directement le changement de variable (16) cherché dans la proposition 3.3.1

Faisons donc le changement de variable suivant:

$$t = \log u^r, \quad Y_i = u^{r_i} u_i, \quad 1 \leq i \leq n \quad (17)$$

où $r_i = 2n - i$, $1 \leq i \leq n$ et $r > 0$ est assez grand pour que

$$\begin{aligned} 0 &< \frac{1}{r} < \operatorname{Re} \left(\lambda_i - \frac{r_i}{r} \right) && \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ \frac{n}{r} &\neq \lambda_1 - \frac{r_1}{r} && \text{pour } \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2 \end{aligned} \quad (18)$$

On a alors, d'après (17) :

$$\frac{dY_i}{dt} = \frac{r_i}{r} u^{r_i} u_i + u^{r_i} \frac{du_i}{dt}, \quad 1 \leq i \leq n \text{ et } \quad \frac{du}{dt} = \frac{u}{r}$$

et d'après (14) :

$$\frac{dY_i}{dt} = \lambda_i u^{r_i} u_i + b_i u^{r_{i-1}} u_{i-1} + \varphi_i(u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

en égalisant ces deux expressions pour Y_i , on obtient:

$$\frac{du_i}{dt} = \left(\lambda_i - \frac{r_i}{r} \right) u_i + b_i u^{r_{i-1}-r_i} u_{i-1} + u^{-r_i} \varphi_i(u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n), \quad 1 \leq i \leq n$$

donc le système (14) nous donne le système suivant en u et u_i :

$$\begin{cases} \dot{u} = \frac{u}{r} \\ \dot{u}_i = \mu_i u_i + \tilde{\varphi}_i(u, u_1, \dots, u_n), \end{cases} \quad 1 \leq i \leq n \quad (19)$$

où $\mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r}$ et $\tilde{\varphi}(u, u_1, \dots, u_n) = b_i u_{i-1} u + u^{-r_i} \varphi_i(u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n)$.

Comme $\varphi_i \in H_1^n$, l'exposant de u dans chaque terme de φ_i est plus grand ou égal à $2n$ ($r_i = 2n - 1$) et en multipliant φ_i par u^{-r_i} on obtient des exposants plus grands ou égaux à $2n - (2n - 1) = 1$; on a donc bien

$$\tilde{\varphi}_i \in H_1^{n+1}$$

D'après (13), $(\frac{1}{r}, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ est dans le domaine de Poincaré.

D'après (15) et (18), on a:

$$0 < \frac{1}{r} < \operatorname{Re} \mu_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_n$$

donc pour $\forall (p_0, p_1, \dots, p_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$, $p_0 + p_1 + \dots + p_n \geq 2$, on a:

$$\frac{p_0}{r} + p_1 \mu_1 + \dots + p_n \mu_n \neq \mu_1$$

D'après les remarques précédentes, on voit que l'on peut appliquer le théorème 3.3.2 de la façon suivante: il existe une fonction F holomorphe et nulle en 0 de la forme:

$$F(u, u_1, \dots, u_n) = u_1 + [u, u_1, \dots, u_n]_2$$

vérifiant l'équation:

$$\frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\mu_i u_i + \tilde{\varphi}_i(u, u_1, \dots, u_n) \right) \frac{\partial F}{\partial u_i} = \mu_1 F \quad (20)$$

Ce sont alors les deux propositions suivantes qui vont nous permettre de construire le changement de variable (16) (dans le cas $s = 1$) à partir de F : ■

Proposition 3.3.2 $u^{r_1} F(u, u_1, \dots, u_n) = F(1, Y_1, \dots, Y_n) = f(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1 + [Y_1, \dots, Y_n]_2$

La première ligne nous dit que F multipliée par u^{r_1} est une fonction f en les variables $Y_1, \dots, Y_n$; et la deuxième ligne nous dit que f est une fonction holomorphe et nulle en 0, dont le seul terme de degré 1 est Y_1 .

Preuve. Nous allons montrer la première ligne de la proposition pour chacun des termes de F , par induction sur le degré des monômes:

Le seul terme de degré 1 de F est u_1 et on a bien:

$$u^{r_1}u_1 = Y_1$$

Supposons maintenant que chaque terme de degré plus petit que m de F , multiplié par u^{r_1} , est un terme en $Y_1, \dots, Y_n$.

Soit $ku^{m_0}u^{m_1}\dots u_n^{m_n}$, $|m_0 + m_1 + \dots + m_n| = m$ un terme de degré m de F . Écrivons l'équation (20) sous la forme:

$$\frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \mu_i u_i \frac{\partial F}{\partial u_i} - \mu_1 F = - \sum_{i=1}^n \tilde{\varphi}_i \frac{\partial F}{\partial u_i} \quad (21)$$

Si, dans le premier membre de (21), on ne retient que le monôme $u^{m_0}u^{m_1}\dots u_n^{m_n}$, on aura:

$$\left(\frac{m_0}{r} + \mu_1 m_1 + \dots + \mu_n m_n - \mu_1 \right) ku^{m_0}u^{m_1}\dots u_n^{m_n}$$

ce qui sera égal dans le second membre, comme $\tilde{\varphi}_i$ commence par des termes de degré 2, à un produit de termes de degré inférieur à m .

De plus, remarquons que d'après la construction des équations (19), on a:

$$\tilde{\varphi}_i(u, u_1, \dots, u_n) = u^{-r_i} (b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n)), \quad 1 \leq i \leq n$$

Si $lu^{l_0}u_1^{l_1}\dots u_n^{l_n}$, $|l_0 + l_1 + \dots + l_n| < m$ est un terme de F de degré inférieur à m , alors d'après l'hypothèse d'induction, on a que

$$u^{r_1}lu^{l_0}u_1^{l_1}\dots u_n^{l_n} = lu^{l_0-(l_1r_1+\dots+l_nr_n)+r_1}Y_1^{l_1}\dots Y_n^{l_n}$$

est un terme en $Y_1, \dots, Y_n$. On doit donc avoir:

$$l_0 = l_1r_1 + \dots + l_nr_n - r_1$$

alors la contribution de ce terme dans le second membre de (21) sera:

$$\begin{aligned} & -l \sum_{i=1}^n \frac{b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n)}{u^{r_i}} l_i u^{l_0} u_1^{l_1} \dots u_i^{l_i-1} \dots u_n^{l_n} \\ &= -l \sum_{i=1}^n (b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n)) l_i u^{l_0-(l_1r_1+\dots+l_nr_n)} Y_1^{l_1} \dots Y_i^{l_i-1} \dots Y_n^{l_n} \\ &= -u^{-r_1} l \sum_{i=1}^n (b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y_1, \dots, Y_n)) l_i Y_1^{l_1} \dots Y_i^{l_i-1} \dots Y_n^{l_n} \end{aligned}$$

ce qui montre bien que $u^{r_1} k u^{m_0} u^{m_1} \dots u_n^{m_n}$ est un terme en $Y_1, \dots, Y_n$. ■

Remarque 3.3.4 On a montré que, si $u^{m_0} u^{m_1} \dots u_n^{m_n}$ est un monôme de F , on doit avoir:

$$m_0 = m_1 r_1 + \dots + m_n r_n - r_1 \quad (22)$$

on a donc montré la première ligne de la proposition 3.3.2, voyons maintenant que le seul terme de degré 1 de f est Y_1 :

D'après la première égalité de la proposition 3.3.2, un terme $c_i Y_i$ de f provient d'un terme $c_i u^s u_i$ de F , mais d'après (22), on doit avoir:

$$s = r_i - r_1 = 2n - i - 2n + 1 = 1 - i \quad \text{donc } i = 1 \text{ et } s = 0$$

Comme $F = u_1 + [u, u_1, \dots, u_n]_2$, on a bien :

$$f(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1 + g(Y_1, \dots, Y_n)$$

où g est une série formelle commençant par des termes de degré 2.

Voyons que f est holomorphe en 0 (c'est-à-dire $g \in H_1^n$):

$u^{r_1} F$ est holomorphe en 0, donc il existe un $\varepsilon > 0$ tel que

$$|u|, |u_1|, \dots, |u_n| < \varepsilon \Rightarrow u^{r_1} F(u, u_1, \dots, u_n) \quad \text{converge}$$

Prenons $\tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n \in \mathbb{C}$ tels que $|\tilde{u}| = |\tilde{u}_1| = \dots = |\tilde{u}_n| = \varepsilon$ et posons

$$\tilde{Y}_i = u^{\tilde{r}_i} \tilde{u}_i \quad 1 \leq i \leq n$$

alors on a:

- $|\tilde{Y}_i| = \varepsilon^{r_i+1} \quad 1 \leq i \leq n \quad \text{et}$
- $f(\tilde{Y}_1, \dots, \tilde{Y}_n) = u^{\tilde{r}_1} F(\tilde{u}, \tilde{u}_1, \dots, \tilde{u}_n)$ converge.

Donc, si on pose $f = \sum_{q \in \mathbb{N}^n} \alpha_q Y_1^{q_1} \dots Y_n^{q_n}$, il existe un $M > 0$ tel que

$$\left| \alpha_q Y_1^{q_1} \dots Y_n^{q_n} \right| \leq M \quad \text{pour } \forall q \in \mathbb{N}^n$$

Alors par le théorème d'Abel on a que:

$f(Y_1, \dots, Y_n)$ converge pour $|Y_i| < \min_{1 \leq i \leq n} \{\varepsilon^{r_i+1}\}$, $1 \leq i \leq n$ C'est-à-dire que f est holomorphe en 0. Ce qui achève la démonstration de la proposition 3.3.2

Proposition 3.3.3 *f vérifie l'équation:*

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y)) \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \lambda_1 f \quad (23)$$

Preuve. D'après la proposition 3.3.2, on a:

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} (u^{-r_1} f(u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n)) = u^{r_i - r_1} \frac{\partial f}{\partial Y_i} \quad 1 \leq i \leq n \quad (24)$$

et

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u} (u^{r_1} F(u, u_1, \dots, u_n)) &= \frac{\partial}{\partial u} f(u^{r_1} u_1, \dots, u^{r_n} u_n) \\ r_1 u^{r_1 - 1} F + u^{r_1} \frac{\partial F}{\partial u} &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Y_i} \cdot r_i u^{r_i - 1} u_i \end{aligned}$$

en multipliant les deux membres par $\frac{u}{r}$, on obtient:

$$\frac{r_1 f}{r} + \frac{u^{r_1 + 1}}{r} \frac{\partial F}{\partial u} = \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r} Y_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} \quad (25)$$

en se servant de (24) et en remplaçant les u, u_i par leur valeur en Y_i dans l'équation (20), on obtient:

$$\frac{u}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left(\mu_i u_i + \tilde{\varphi}_i(u, u_1, \dots, u_n) \right) u^{r_i - r_1} \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \mu_1 u^{-r_1} f$$

$$\frac{u^{r_1 + 1}}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n (\mu_i u^{r_i} u_i + u^{r_1} \tilde{\varphi}_i(u, u_1, \dots, u_n)) \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \mu_1 f$$

$$\frac{u^{r_1 + 1}}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n \left[\left(\lambda_i - \frac{r_i}{r} \right) Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y) \right] \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \left(\lambda_1 - \frac{r_1}{r} \right) f$$

$$\frac{u^{r_1 + 1}}{r} \frac{\partial F}{\partial u} + \sum_{i=1}^n (\lambda_i Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y)) \frac{\partial f}{\partial Y_i} + \frac{r_1 f}{r} - \sum_{i=1}^n \frac{r_i}{r} Y_i \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \lambda_1 f$$

Donc, d'après (25), on a bien:

$$\sum_{i=1}^n (\lambda_i Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y)) \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \lambda_1 f$$

ce qui prouve la proposition 3.3.3. ■

On peut maintenant voir, d'après cette proposition, que le changement de variable (16), nous est donné, dans le cas $s = 1$, par:

$$Z_1 = f(Y_1, \dots, Y_n) = Y_1 + [Y_1, \dots, Y_n]_2 \quad (26)$$

En effet, si on l'applique au système (14), on obtient pour la première équation, toujours d'après la proposition 3.3.3:

$$\dot{Z}_1 = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial Y_i} \dot{Y}_i = \sum_{i=1}^n (\lambda_i Y_i + b_i Y_{i-1} + \varphi_i(Y)) \frac{\partial f}{\partial Y_i} = \lambda_1 f(Y_1, \dots, Y_n) = \lambda_1 Z_1$$

D'autre part, le changement de variable (26) est de la forme $Z = Y + h(Y)$ où $h \in H^n$, donc biholomorphe en 0, et son inverse est de la forme $Y = Z + \tilde{h}(Z)$ où $\tilde{h} \in H^n$. On voit donc que les autres équations de (14) deviennent :

$$\begin{aligned} \dot{Y}_2 &= \lambda_2 Y_2 + b_2 Z_1 + h_2(Z_1, Y_2, \dots, Y_n) \\ \dot{Y}_k &= \lambda_k Y_k + b_k Y_{k-1} + h_k(Z_1, Y_2, \dots, Y_n), \quad 3 \leq k \leq n \end{aligned}$$

où $h_k \in H_1^n$ pour $2 \leq k \leq n$

Donc en posant $\Psi_1 \equiv 0$, on voit que l'on a prouvé le cas $s = 1$ de la proposition 3.3.1.

Supposons maintenant que la proposition 3.3.1 est satisfaite pour un $s \in \{1, \dots, n\}$ et montrons qu'elle l'est pour $s + 1$. C'est-à-dire que l'on suppose l'existence d'un changement de variables de la forme:

$$Z_j = f_j(Y_1, \dots, Y_n) = Y_j + [Y_1, \dots, Y_n]_2 \quad 1 \leq j \leq s \quad (27)$$

transformant le système (14) en:

$$\begin{aligned} \dot{Z}_i &= \lambda_i Z_i + b_i Z_{i-1} + \Psi_i(Z_1, \dots, Z_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq s \\ \dot{Y}_{s+1} &= \lambda_{s+1} Y_{s+1} + b_{s+1} Z_s + h_{s+1}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) \\ \dot{Y}_k &= \lambda_k Y_k + b_k Y_{k-1} + h_k(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) \quad s+2 \leq k \leq n \end{aligned} \quad (28)$$

où $\Psi_i \in P_1^{i-1}$, $1 \leq i \leq s$, et ne comporte que des monômes résonants; et $h_k \in H_i^n$, $s+1 \leq k \leq n$.

Faisons alors le changement de variable suivant:

$$\begin{aligned}
 t &= \log u^r \\
 Z_i &= u^{r_i} V_i \quad 1 \leq i \leq s \\
 Y_k &= u^{r_k} u_k \quad s+1 \leq k \leq n
 \end{aligned} \tag{29}$$

où r et les r_i sont définis comme précédemment en (18).

De la même façon que l'on a obtenu les équations (19), on obtient, en appliquant (29) au système (14) :

$$\begin{aligned}
 u &= \frac{u}{r} \\
 V_i &= \mu_i V_i + \tilde{\Psi}_i(u, V_1, \dots, V_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq s \\
 u_k &= \mu_k u_k + \tilde{h}_k(u, V_1, \dots, V_s, u_{s+1}, \dots, u_n), \quad s+1 \leq k \leq n
 \end{aligned} \tag{30}$$

où $\mu_i = \lambda_i - \frac{r_i}{r}$, $1 \leq i \leq n$, et:

$$\begin{aligned}
 \tilde{\Psi}_i &= b_i V_{i-1} u + u^{-r_i} \Psi_i(u^{r_1} V_1, \dots, u^{r_i} V_{i-1}), \quad 1 \leq i \leq s \\
 \tilde{h}_{s+1} &= b_{s+1} V_s u + u^{-r_{s+1}} h_{s+1}(u^{r_1} V_1, \dots, u^{r_s} V_s, u^{r_{s+1}} u_{s+1}, \dots, u^{r_n} u_n) \\
 \tilde{h}_k &= b_k u_{k-1} u + u^{-r_k} h_k(u^{r_1} V_1, \dots, u^{r_s} V_s, u^{r_{s+1}} u_{s+1}, \dots, u^{r_n} u_n) \quad s+2 \leq k \leq n
 \end{aligned} \tag{31}$$

Comme on a vu que, dans les équations (19), $\tilde{\varphi}_i \in H_1^{n+1}$, $1 \leq i \leq n$, on peut voir que

$$\tilde{\Psi}_i \in P_1^i, \quad 1 \leq i \leq s \quad \text{et} \quad \tilde{h}_k \in H_1^{n+1}, \quad s+1 \leq k \leq n$$

Comme on l'a déjà vu, $(\frac{1}{r}, \mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ est dans le domaine de Poincaré et:

$$0 < \frac{1}{r} < \operatorname{Re} \mu_1 \leq \dots \leq \operatorname{Re} \mu_n$$

Donc μ_{s+1} ne peut avoir (qu'un nombre fini) de résonances que de la forme:

$$\mu_{s+1} = m_0/r + m_1 \mu_1 + \dots + m_s \mu_s \quad |m_0 + m_1 + \dots + m_s| \geq 2$$

Nous sommes donc dans la situation du corollaire 3.3.1, C'est-à-dire qu'il existe une fonction

$$\tilde{F}(u, V_1, \dots, V_s, u_{s+1}, \dots, u_n) = u_{s+1} + [u, V_1, \dots, V_s, u_{s+1}, \dots, u_n]_2$$

et un polynôme $\Phi = \Phi(u, V_1, \dots, V_s)$ ne comportant que des monômes résonants, vérifiant l'équation:

$$\frac{u}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} + \sum_{i=1}^s \left(\mu_i V_i + \tilde{\Psi}_i \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial V_i} + \sum_{i=1}^n \left(\mu_k u_k + \tilde{h}_k \right) \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_k} = \mu_{s+1} \tilde{F} + \Phi \quad (32)$$

en réécrivant cette équation sous la forme:

$$\begin{aligned} & \frac{u}{r} \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u} + \sum_{i=1}^s \mu_i V_i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial V_i} + \sum_{i=1}^n \mu_k u_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_k} - \mu_{s+1} \tilde{F} - \Phi \\ &= - \sum_{i=1}^s \tilde{\Psi}_i \frac{\partial \tilde{F}}{\partial V_i} - \sum_{i=1}^n \tilde{h}_k \frac{\partial \tilde{F}}{\partial u_k} \end{aligned}$$

et, en raisonnant comme on l'a fait pour la preuve de la proposition 3.3.2, on peut montrer que

$$\begin{aligned} u^{r_{s+1}} \Phi(u, V_1, \dots, V_s) &= \Phi(1, Z_1, \dots, Z_s) = \varphi(Z_1, \dots, Z_n) \\ u^{r_{s+1}} \tilde{F}(u, V_1, \dots, V_s, u_{s+1}, \dots, u_n) &= \tilde{F}(1, Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) \\ &= \tilde{f}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) \end{aligned} \quad (33)$$

et que $\tilde{f}$ est holomorphe en 0.

Montrons maintenant que les seuls termes de degré 1 de φ et $\tilde{f}$ sont respectivement

$$b_{s+1} Z_s \text{ et } Y_{s+1}$$

On peut voir d'après (33) (comme on l'a fait pour (22)) que si

$$u^{l_0} V_1^{l_1} \dots V_s^{l_s} u_{s+1}^{l_{s+1}} \dots u_n^{l_n} \text{ est un monôme de } \tilde{F}$$

et

$$u^{b_0} V_1^{b_1} \dots V_s^{b_s} \text{ est un monôme de } \Phi$$

On doit avoir:

$$l_0 = l_1 r_1 + \dots + l_n r_n - r_{s+1} \text{ et } b_0 = b_1 r_1 + \dots + b_s r_s - r_{s+1} \quad (34)$$

Toujours d'après (33), on voit qu'un terme $c_i Z_i$ de $\tilde{f}$ ou de φ provient d'un terme $c_i u^k V_i$ de $\tilde{F}$ ou de Φ . On doit donc avoir, d'après (34) :

$$k = r_i - r_{s+1} = 2n - i - 2n + s + 1 = s + 1 - i$$

donc

$$i \leq s + 1$$

Désignons alors respectivement par

$$u_{s+1} + \sum_{i=1}^s c_i u^{s+1-i} V_i \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^s a_i u^{s+1-i} V_i$$

l'ensemble des terme de degré 1 en $V_1, \dots, V_s, u_{s+1}, \dots, u_n$ de $\tilde{F}$ et Φ .

Les identités (31) et l'équation (32) nous fournissent la seule identité que sont assujettis à vérifier les coefficients c_i et a_i :

$$\begin{aligned} & 1/r \sum_{i=1}^s (s+1-i) c_i u^{s+1-i} V_i + \sum_{i=1}^s (c_i \mu_i u^{s+1-i} V_i + c_i b_i V_{i-1} u^{s+1-i} u) \\ & + \mu_{s+1} u_{s+1} + b_{s+1} V_s u - \mu_{s+1} u_s - \sum_{i=1}^s \mu_{s+1} c_i u^{s+1-i} V_i \\ & = \sum_{i=1}^s a_i u^{s+1-i} V_i \end{aligned}$$

et en simplifiant:

$$b_{s+1} V_s u + \sum_{i=1}^s \left(\frac{s+1-i}{r} + \mu_i - \mu_{s+1} \right) c_i u^{s+1-i} V_i + \sum_{i=1}^s c_i b_i u^{s+1-i} V_{i-1} = \sum_{i=1}^s a_i u^{s+1-i} V_i$$

D'après la preuve et la remarque du corollaire 3.3.1, on voit que l'on peut prendre

$$a_s = b_{s+1} \text{ et } c_1 = \dots = c_s = a_1 = \dots = a_{s-1} = 0$$

alors, on a bien

$$\tilde{f}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) = Y_{s+1} + [Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n]_2$$

et

$$\varphi(Z_1, \dots, Z_s) = b_{s+1} Z_s + \tilde{\varphi}(Z_1, \dots, Z_s), \quad \text{où } \tilde{\varphi} \in P_1^s$$

De plus, si $Z_1^{q_1} \dots Z_s^{q_s}$ est un monôme de degré ≥ 2 de φ , celui-ci provient d'un monôme $u^{q_0} V_1^{q_1} \dots V_s^{q_s}$ de Φ ; alors, d'après (34) et le fait que Φ ne comporte que des monômes résonants, on a:

$$q_0 = q_1 r_1 + \dots + q_s r_s \quad \text{et} \quad \mu_{s+1} = q_0/r + q_1 \mu_1 + \dots + q_s \mu_s$$

donc

$$\begin{aligned}\lambda_{s+1} - \frac{r_{s+1}}{r} &= \frac{q_0}{r} + \left(\lambda_1 - \frac{r_1}{r}\right) q_1 + \dots + \left(\lambda_s - \frac{r_s}{r}\right) q_s \\ &\Rightarrow \lambda_{s+1} = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_s q_s + (1/r) (q_0 - (q_1 r_1 + \dots + q_s r_s) + r_{s+1}) \\ &\Rightarrow \lambda_{s+1} = \lambda_1 q_1 + \dots + \lambda_s q_s\end{aligned}$$

On a donc bien que $\tilde{\varphi}$ ne comporte que des monôme résonants.

De la même façon que l'on a prouvé la proposition 3.3.3, on peut montrer que $\tilde{f}$ et φ vérifient l'équation:

$$\begin{aligned}& \sum_{i=1}^s (\lambda_i Z_i + b_i Z_{i-1} + \Psi_i) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Z_i} + (\lambda_{s+1} Y_{s+1} + b_{s+1} Z_s + h_{s+1}) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y_{s+1}} + \sum_{k=s+2}^n (\lambda_k Y_k + b_k Y_{k-1} + h_k) \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y_k} \\ &= \lambda_{s+1} \tilde{f} + \varphi\end{aligned}\tag{35}$$

Maintenant, si on applique le changement de variable

$$Z_{s+1} = \tilde{f}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) = Y_{s+1} + [Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n]_2\tag{36}$$

au système (28), les équations pour $1 \leq j \leq s$ ne change pas, tandis que pour $j = s+1$, on a d'après (35):

$$\begin{aligned}\dot{Z}_{s+1} &= \sum_{i=1}^s \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Z_i} \dot{Z}_i + \sum_{k=s+1}^n \frac{\partial \tilde{f}}{\partial Y_k} \dot{Y}_k = \lambda_{s+1} \tilde{f}(Z_1, \dots, Z_s, Y_{s+1}, \dots, Y_n) + \varphi(Z_1, \dots, Z_s) \\ &= \lambda_{s+1} Z_{s+1} + b_{s+1} Z_s + \tilde{\varphi}(Z_1, \dots, Z_s)\end{aligned}$$

et les équations pour $s+2 \leq k \leq n$ ne change pas de forme:

$$\begin{aligned}\dot{Y}_{s+2} &= \lambda_{s+2} Y_{s+2} + b_{s+2} Z_{s+1} + g_{s+2}(Z_1, \dots, Z_{s+1}, Y_{s+2}, \dots, Y_n) \\ \dot{Y}_k &= \lambda_k Y_k + b_k Y_{k-1} + g_k(Z_1, \dots, Z_{s+1}, Y_{s+2}, \dots, Y_n), \quad s+3 \leq k \leq n\end{aligned}$$

où $g_k \in H_1^n$, $s+2 \leq k \leq n$

Le changement de variable (27), suivi de (36), constitue bien un changement de variable de la forme

$$Z_j = f_j(Y_1, \dots, Y_n) = Y_j + [Y_1, \dots, Y_n]_2, \quad 1 \leq j \leq s+1$$

ce qui achève la preuve par induction de la proposition 3.3.1.

Dans le cas de $s = n$, la proposition nous dit que l'on a un changement de variable de la forme:

$$Z = Y + h(Y), \text{ où } h \in H^n$$

donc biholomorphe et nul en 0, transforment l'équation (14) en:

$$\dot{Z}_j = \lambda_j Z_j + b_j Z_{j-1} + \Psi_j(Z_1, \dots, Z_{j-1}) \quad , \quad 1 \leq j \leq n$$

où $\Psi_j \in P_1^{j-1}$ et ne comporte que des monômes résonants.

Ce qui achève la preuve du théorème 3.33 et, donc, du théorème 3.3.1, celui de Poincaré-Dulac.

3.4 Théorème de Siegel

Pour démontrer le théorème de Siegel, nous adopterons l'ordre de présentation suivant:

- A:** Formulation du théorème
- B:** Construction du changement de variable et présentation de la preuve
- C:** Étude de l'équation homologique - une propriété fondamentale
- D:** Ordre des opérateurs - quelques majorations
- E:** Majoration du reste
- F:** Convergence des changements de variable et preuve du théorème

3.4.1 A: Formulation du théorème

On reprend ici la notation utilisée dans la section 3

$$H^n = \{f : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ est holomorphe en } 0 \text{ et } f(0) = Df(0) = 0\}$$

Théorème 3.4.1 *Théorème de Siegel*

Soient $f : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ une fonction holomorphe et nulle en 0, et $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les valeurs propres de $Df(0)$. Alors, si $Df(0)$ est diagonalisable et λ est de type multiplicatif (c, v) pour un $c > 0$ et un $v > 0$ (cf. section 2), l'équation

$$\dot{Z} = f(Z) = \Lambda Z + a(Z) \tag{1}$$

où $a \in H^n$ et $\Lambda = Df(0)$ est sous sa forme diagonale, est biholomorphiquement équivalente au voisinage de 0, à l'équation

$$\dot{Y} = \Lambda Y$$

et ce, par un changement de variable de la forme:

$$Z = H(Y) = Y + h(Y) \quad , \quad \text{où } h \in H^n \quad (2)$$

3.4.2 B: Construction du changement de variable et présentation de la preuve

Le changement de variable (2) transforme l'équation (1) en:

$$\dot{Y} = DH(Y)^{-1} f(H(Y)) \quad 3$$

Par un calcul similaire à celui effectué pour la proposition 1 de la section 1, on peut voir que (3) peut être mis sous la forme:

$$\dot{Y} = \Lambda Y + [a(Y) - L_\Lambda h(Y)] + R(a, h)(Y) \quad (4)$$

où

$$L_\Lambda h(Y) = Dh(Y)\Lambda Y - \Lambda h(Y)$$

est l'opérateur homologique associé à Λ et l'expression entre crochets contient tous les termes de degré 2. $R(a, h)$ est un «reste» (fonction de a et h) de second ordre par rapport à a et h , dans un sens qui sera précisé plus loin.

Comme λ est non résonante, l'équation homologique:

$$L_\Lambda h = a$$

admet, pour unique solution, une série formelle commençant par des termes de degré 2. Nous allons voir en $\mathbb{C}$ que cette solution est en fait holomorphe à 0, c'est-à-dire dans H^n . Partant de là, si on définit l'opérateur

$$U : H^n \rightarrow H^n$$

par

$$U(a) = h \iff L_\Lambda h = a \quad (5)$$

et que l'on pose:

- $\Re(a) = R(a, U(a))$
- $a_0 = a$, $a_{s+1} = \Re(a_s)$, $h_s = U(a_s)$
- $H_s = Id + h_s$, $\hat{H}_s = H_s \circ H_{s+1} \circ \dots \circ H_0$

On voit d'après (4) que le changement de variable

$$Z = \hat{H}_s(Z_s)$$

transforme l'équation (1) en:

$$\dot{Z}_s = \Lambda Z_s + \Re(a_s) = \Lambda Z_s + a_{s+1}(Z_s)$$

Remarque 3.4.1 On a par induction d'après (4) et (3) que

- $h_s \in H^n \Rightarrow a_{s+1} \in H^n$
- $\hat{H}_s$ est bien de la forme $Id + h$, $h \in H^n$.

Nous allons en **D** définir la notion d'ordre d'un opérateur de fonctions, analogue à la notion d'ordre d'une fonction que l'on connaît déjà, par exemple, $f(x) = 0(|x|^k)$.

Dans ce sens, nous montrerons en **E** que l'opérateur reste $\Re(a)$ est d'ordre 2 par rapport à sa variable $a \in H^n$.

Ceci nous permettra, en **F**, de montrer que la suite

$$\left\{ \hat{H}_s \right\}_{s=0}^{\infty} = \left\{ H_s \circ \dots \circ H_0 \right\}_{s=0}^{\infty}$$

converge uniformément dans un voisinage de l'origine vers une fonction H holomorphe en 0 et que celle-ci est le changement de variable cherché en (2).

3.4.3 C: Équation homologique (une propriété fondamentale)

La proposition 3.4.1, démontrée dans cette section, en plus de montrer que la solution de l'équation homologique est holomorphe, énonce une propriété de l'opérateur homologique - en quelque sorte une borne supérieure pour sa norme -, qui est à la base de toutes les majorations effectuées en **D** et **E**, et donc à celle du reste $\Re(a)$.

C'est en fait seulement pour démontrer la proposition 3.4.1 que nous aurons besoin du fait que $Df(0)$ est diagonalisable.

Donc, à partir de maintenant, nous supposons que les coordonnées Z de départ sont données par une base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de vecteurs propres associés à $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ et donc que

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} \text{ est diagonale} \quad (6)$$

De plus, pour $Z = (Z_1, \dots, Z_n) \in \mathbb{C}^n$, nous prendrons comme norme:

$$|Z| = \max_{1 \leq i \leq n} \{|Z_i|\}$$

Pour démontrer la proposition 3.4.1, nous avons besoin du lemme suivant, qui nous sera, de plus, très utile ultérieurement.

Lemme 3.4.1 *Soient $c, m > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que, pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on ait:*

$$c\delta^{-m} < \delta^{-\alpha}$$

Preuve. $c\delta^{\alpha-m} < c\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-m}$ pour $\alpha > m$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$
 < 1 pour α assez grand. ■

Proposition 3.4.1 *Si $a(Z) \in H^n$ est holomorphe pour $|Z| < r$ et continu pour $|Z| \leq r$ où $r > 0$, alors:*

a) *La solution h de l'équation homologique $L_\Lambda h = a$ est holomorphe pour $|Z| < r$.*

b) $\exists \alpha > 0$ ne dépendant seulement que de Λ et pas de a ou r tel que, pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on ait:

$$\max_{|Z| \leq re^{-\delta}} |h(Z)| \leq \max_{|Z| \leq r} |a(Z)| \cdot \delta^{-\alpha}$$

Remarque 3.4.2 *Si on regarde le rôle joué par le paramètre δ dans **b)**, on a dans le cas extrême $\delta = 0$:*

$$\max_{|Z| \leq r} |h(Z)| \leq \infty$$

C'est-à-dire que pour $|Z| \leq r$, on n'a aucune borne sur h . Cependant, dès que δ est positif, pour un léger accroissement de δ - c'est-à-dire pour une légère réduction du diamètre pour h - on obtient un gros gain de précision sur l'estimation de h ; ce qu'illustre bien le graphe de la fonction $\delta^{-\alpha}$:

Preuve. de la proposition 3.4.1

D'après (6), si on pose:

$$a(Z) = \sum_{p \in \mathbb{N}^n_{|p| \geq 2}} a_p^s Z^p e_s \quad \text{où} \quad Z^p = Z_1^{p_1} \dots Z_n^{p_n}, \quad \text{où} \quad |p| = p_1 + \dots + p_n$$

alors, la solution de $L_\Lambda h = a$ est donnée par:

$$h(Z) = \sum_{p \in \mathbb{N}^n_{|p| \geq 2}} h_p^s Z^p e_s \quad \text{où} \quad h_p^s = \frac{a_p^s}{\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s} \quad (7)$$

Posons $M = \max_{|Z| \leq r} |a(Z)|$, alors, par l'estimation de Cauchy, on a:

$$|a_p^s| \leq \frac{M}{r^{|p|}} \quad (8)$$

et comme λ est de type multiplicatif (C, v) , on a d'après (7) et (8):

$$|h_p^s| = \frac{|a_p^s|}{\langle \lambda, p \rangle - \lambda_s} \leq \frac{M}{C} \frac{|p|^v}{r^{|p|}} \quad (9)$$

Posons $h = (h_1, \dots, h_n)$, alors $h_s(Z) = \sum_{p \in \mathbb{N}^n_{|p| \geq 2}} h_p^s Z^p$

Pour $k \in \mathbb{N}$, le nombre de termes Z^p de degré $|p| = k$ est $\binom{k+n-1}{n-1}$

Il est facile de voir qu'il existe un nombre assez grand $c_1 = c_1(n) > 0$ ne dépendant que de n tel que:

$$\forall k \in \mathbb{N}, k \geq 2 \quad \binom{k+n-1}{n-1} \leq c_1 k^{n-1}$$

on a alors d'après (9):

$$\left| \sum_{|p|=k} h_p^s Z^p \right| \leq c_1 k^{n-1} \cdot \frac{M}{C} \frac{k^v}{r^k} |Z|^k = M c_2 k^m \left(\frac{|Z|}{r} \right)^k \quad (10)$$

où $c_2 = \frac{c_1}{C} > 0$ et $m = v + n - 1 > 0$

La fonction:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^m e^{-x} \end{aligned}$$

a pour maximum $(m/e)^m$

on a donc pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$k^m e^{-\frac{\delta k}{2}} = \left(\frac{2}{\delta}\right)^m \left(\frac{\delta k}{2}\right)^m e^{-\frac{\delta k}{2}} \leq \left(\frac{2}{\delta}\right)^m \left(\frac{m}{e}\right)^m = \delta^{-m} \left(\frac{2m}{e}\right)^m$$

c'est-à-dire:

$$k^m e^{-\frac{\delta k}{2}} \leq c_3 \delta^{-m} \quad \text{où} \quad c_3 = \left(\frac{2m}{e} \right)^m > 0 \quad (11)$$

Pour $|Z| \leq re^{-s}$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a, d'après (10) et (11):

$$\left| \sum_{|p|=k} h_p^s Z^p \right| \leq M c_2 k^m e^{-\delta k} = M c_2 k^m e^{\frac{-\delta k}{2}} \cdot e^{\frac{-\delta k}{2}} \leq M c_2 c_3 \delta^{-m} e^{\frac{-\delta k}{2}}$$

on a donc pour $|Z| \leq re^{-\delta}$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$|h_s(Z)| \leq \sum_{k=2}^{\infty} \left| \sum_{|p|=k} h_p^s Z^p \right| \leq M c_4 \delta^{-m} \left(\sum_{k=2}^{\infty} e^{\frac{-\delta k}{2}} \right) \quad (12)$$

où $c_4 = c_2 c_3 > 0$

Pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a $0 < e^{\frac{-\delta}{2}} < 1$, donc la série entre parenthèse converge. Donc, $h_s(Z)$ est holomorphe pour $|Z| \leq re^{-\delta}$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, c'est-à-dire pour $|Z| < r$. Comme l'inégalité (12) ne dépend pas de s , on a que $h(Z)$ est holomorphe pour $|Z| < r$, ce qui prouve **a)** de la proposition.

D'autre part, on a: $\sum_{k=2}^{\infty} \left(e^{\frac{-\delta}{2}} \right)^k = \frac{1}{1 - e^{\frac{-\delta}{2}}} - 1 - e^{\frac{-\delta}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{\delta}{2}} - e^{\frac{-\delta}{2}}}$

et $e^{\delta} = 1 + \delta + \frac{\delta^2}{2} + \frac{\delta^3}{3!} + \dots$

$$e^{\frac{\delta}{2}} = 1 + \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4 \cdot 2} + \frac{\delta^3}{8 \cdot 3!} + \dots$$

donc $e^{\delta} - e^{\frac{\delta}{2}} = \frac{\delta}{2} + \frac{3\delta^2}{4 \cdot 2} + \frac{7\delta^3}{8 \cdot 3!} + \dots > \frac{\delta}{2}$ pour $\delta > 0$

Donc, d'après (12), on a pour $|Z| \leq re^{-\delta}$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$|h(Z)| = \max_{1 \leq s \leq n} |h_s(Z)| \leq 2M c_4 \delta^{-(m+1)} \quad (13)$$

Comme $2c_4$, $m+1 > 0$ et c_4, m ne dépendent ni de δ, a et r ; par le lemme 3.4.1, il existe un $\alpha > 0$ ne dépendant ni de δ, a et r , tel que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$

$$2c_4 \delta^{-(m+1)} < \delta^{-\alpha}$$

on a alors, d'après (13), pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$

$$\max_{|Z| \leq re^{-\delta}} |h(Z)| \leq M \cdot \delta^{-\alpha} = \max_{|Z| \leq r} |a(Z)| \cdot \delta^{-\alpha}$$

ce qui prouve **b)** de la proposition ■

3.4.4 D: Ordre des opérateurs

Nous introduisons ici les notations utilisées dans les définitions d'ordre d'un opérateur (définition 1)

$$\begin{aligned} C^n &= \{f : W \subset \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n \mid f \text{ est holomorphe en } 0 \text{ et } f(0) = 0\} \\ C_r^n &= \{f \in C^n \mid f \text{ est holomorphe pour } |Z| < r \text{ et continue pour } |Z| \leq r\} \end{aligned}$$

où $r > 0$; alors pour $f \in C_r^n$, on définit:

$$\|f\|_r = \max_{|Z| \leq r} \frac{|f(Z)|}{|Z|}$$

cette norme compare les fonctions $f(Z)$ et Z , c'est-à-dire qu'elle pose une contrainte sur le taux de croissance de f ; or, comme on va itérer des fonctions, on va demander que nos itérations «n'agrandissent pas trop».

Remarque 3.4.3

$$\tilde{r} < r \Rightarrow C_r^n \subseteq C_{\tilde{r}}^n \text{ et } \|f\|_{\tilde{r}} \leq \|f\|_r$$

Si $\Phi : \hat{W} \subset C^n \rightarrow C^n$ est un opérateur de fonction et $d, \alpha, \beta > 0$, alors on a la définition suivante:

Définition 3.4.1 *L'opérateur Φ est d'ordre $(d; \frac{\alpha}{\beta})$ si pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$ et $\forall r \in (0, 1)$, on a:*

$$f \in \hat{W} \cap C_r^n \text{ et } \|f\|_r \leq \delta^\beta \Rightarrow$$

$$1) \Phi(f) \in C_{re^{-\delta}}^n$$

$$2) \|\Phi(f)\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r^d \cdot \delta^{-\alpha}$$

On dit que Φ est d'ordre d , s'il existe $\alpha, \beta > 0$ tel que Φ est d'ordre $(d, \frac{\alpha}{\beta})$ et on écrit: $\Phi(f) \prec f^d$

la notion d'ordre donne une borne sur la taille de $\Phi(f)$ en fonction de f , et cela pour tout rayon r , ce qui nous permet, entre autres, en considérant r petit, de montrer que:

- Si f commence par des termes de degré k et $\Phi(f)$ par des termes de degré j , alors:

$$\begin{aligned} j &\geq (k-1)d + 1 \\ |f'(0)| < k &\Rightarrow |(\Phi(f))'(0)| \leq e^{\frac{-1}{2}} k^d \end{aligned}$$

Les propositions de ce chapitre sont des majorations qui vont nous permettre, en $\mathbf{E}$, de majorer le reste $\Re(a)$.

On avait la proposition 3.4.1:

$$\max_{|Z| \leq re^{-\delta}} |h(Z)| \leq \max_{|Z| \leq r} |a(Z)| \cdot \delta^{-\alpha}$$

la proposition 3.4.2 va nous donner la propriété analogue:

$$\max_{|Z| \leq re^{-\delta}} \frac{|h(Z)|}{|Z|} \leq \max_{|Z| \leq r} \frac{|a(Z)|}{|Z|} \cdot \delta^{-\alpha}$$

Proposition 3.4.2 *L'opérateur $U : H^n \rightarrow H^n$ (défini en (5)) est d'ordre 1:*

$$h = U(a) \prec a$$

Preuve. D'après **a)** de la proposition 3.4.1, il est clair que:

$$\forall r > 0, a \in C_r^n \Rightarrow \forall \delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right), \quad h \in C_{re^{-\delta}}^n$$

et ce, peu importe la grandeur de $\|a\|_r$. Donc **1)** de la définition 3.4.1 est satisfait, il reste à montré **2)**:

Supposons le contraire, c'est-à-dire que pour $\forall \eta > 0$, et en particulier pour $\eta > \alpha$ (où α est le même que celui apparaissant à la proposition 3.4.1), il existe un $r \in (0, 1)$, $a \in C_r^n$ et un $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, tels que

$$\|h\|_{re^{-\delta}} > \|a\|_r \cdot \delta^{-\eta} \quad \text{où} \quad h = U(a) \quad (14)$$

Soit $Z_0, |Z_0| \leq re^{-\delta}$ tel que: $\frac{|h(Z_0)|}{|Z_0|} = \max_{|Z| \leq re^{-\delta}} \frac{|h(Z)|}{|Z|}$;

$$\begin{aligned} \text{on a alors d'après (14): } \frac{|h(Z_0)|}{|Z_0|} &> \frac{|a(Z)|}{|Z|} \cdot \delta^{-\eta} \quad \text{pour } |Z| \leq r \\ &> \frac{|a(Z)|}{|Z_0|} e^{-\delta} \cdot \delta^{-\eta} \quad \text{pour } |Z| \leq |Z_0| e^{\delta} \leq r \end{aligned}$$

donc:

$$|h(Z_0)| > |a(Z)| e^{-\delta} \cdot \delta^{-\eta} \quad \text{pour} \quad |Z| \leq |Z_0| e^{\delta} \quad (15)$$

Remarquons que, comme on a choisi η tel que $\eta - \alpha > 0$, on a pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\delta^{\eta-\alpha} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\eta-\alpha} < \frac{1}{2} < e^{\frac{-1}{2}} < e^{-\delta}$$

C'est-à-dire:

$$e^{-\delta} \delta^{-\eta} > \delta^{-\alpha}$$

Alors, si on pose $\tilde{r} = |Z_0| e^\delta \leq r$, (15) devient:

$$|h(Z_0)| > |a(Z)| \delta^{-\alpha}, \quad \text{pour } |Z| \leq \tilde{r}$$

ou encore:

$$\max_{|Z| \leq \tilde{r} e^{-\delta}} |h(Z)| > \max_{|Z| \leq \tilde{r}} |a(Z)| \cdot \delta^{-\alpha}$$

ce qui contredit la proposition 3.4.1 et prouve donc la proposition 3.4.2 ■

Remarque 3.4.4 On a même prouvé plus que $U(a) \prec a$ On a montré en effet qu'il existe un $\alpha > 0$ tel que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$ et $\forall r \in (0, 1)$, on a:

$$\begin{aligned} a \in C_r^n &\Rightarrow - U(a) \in C_{re^{-\delta}}^n \\ &- \|U(a)\|_{re^{-\delta}} \leq \|a\|_r \cdot \delta^{-\alpha} \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on n'a plus la contrainte $\|a\|_r \leq \delta^\beta$

Pour prouver la prochaine proposition, nous avons besoin des lemmes suivants, lesquels nous seront d'ailleurs utiles par la suite.

Lemme 3.4.2 Si $f \in C_r^n$, alors pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$|Z| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i(Z)}{\partial Z_j} \right| \leq \frac{\|f\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}} \quad 1 \leq i, j \leq n$$

et donc:

$$|Z_1|, |Z_2| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} \Rightarrow |f(Z_1) - f(Z_2)| \leq \frac{c\|f\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}} |Z_1 - Z_2|$$

où $c > 0$ est une constante dépendant de n et de la norme choisie.

Preuve. Soit $M = \max_{|Z| \leq r} |f(Z)|$, alors $\frac{|f(Z)|}{r} \leq \frac{|f(Z)|}{|Z|}$, pour $|Z| \leq r$

$$\text{donc:} \quad \frac{M}{r} \leq \|f\|_r \quad (16)$$

Comme f est holomorphe pour $|Z| < r$, alors pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, l'estimation de Cauchy nous donne:

$$\begin{aligned} |Z| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} &\Rightarrow \left| \frac{\partial f_i(Z)}{\partial Z_j} \right| \leq \frac{M}{r(1-e^{\frac{-\delta}{2}})}, \quad 1 \leq i, j \leq n \\ &\leq \frac{\|f\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}}, \quad \text{par (16)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Corollaire 3.4.1 L'opérateur Id est d'ordre 1: $f \prec f$

Preuve. On va voir, dans la preuve du lemme 3.4.3 a), que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, $1 - e^{\frac{-\delta}{2}} > \frac{\delta}{4}$; on a donc, pour $f \in C_r^n$

$$|f(Z)| \leq 4c\delta^{-1} \|f\|_r |Z| \quad \text{pour } |Z| \leq re^{-\delta} < re^{\frac{-\delta}{2}}$$

c'est-à-dire:

$$\|f\|_{re^{-\delta}} \leq \|f\|_r \cdot \delta^{-\alpha} \quad \text{pour un } \alpha > 0 \text{ par le lemme 3.4.1} \quad \blacksquare$$

Lemme 3.4.3 $\exists \beta_0 > 0$, assez grand, et un $\alpha > 0$ tel que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

- a) $K_\delta = \frac{c\delta^{\beta_0}}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} < 1$
- b) $K_\delta + e^{-\frac{\delta}{2}} < 1$
- c) $\frac{1}{1-K_\delta} \leq \delta^{-\alpha}$

Preuve. a) $e^{-\frac{\delta}{2}} = 1 - \frac{\delta}{2} + \frac{\delta^2}{4.2!} - \frac{\delta^3}{8.3!} + \frac{\delta^4}{16.4!} - \dots$

$$1 - e^{-\frac{\delta}{2}} = \left(\frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{4.2!} \right) + \left(\frac{\delta^3}{8.3!} - \frac{\delta^4}{16.4!} \right) + \dots$$

Pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, chacun des termes entre parenthèses est positif, donc:

$$1 - e^{-\frac{\delta}{2}} > \frac{\delta}{2} - \frac{\delta^2}{4.2} > \left(\frac{\delta}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{8} \right) = \frac{\delta}{4} \quad (17)$$

et $K_\delta = \frac{c\delta^{\beta_0}}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} < 4c\delta^{\beta_0-1} < 4c \left(\frac{1}{2} \right)^{\beta_0-1} < 1$, pour β_0 assez grand;

b) d'après (17), on a pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$e^{-\frac{\delta}{2}} = 1 - \left(1 - e^{-\frac{\delta}{2}} \right) < 1 - \frac{\delta}{4}$$

$$\text{donc, } K_\delta + e^{-\frac{\delta}{2}} < 4c\delta^{\beta_0-1} + 1 - \frac{\delta}{4} \quad (18)$$

Pour β_0 assez grand et pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$c\delta^{\beta_0-2} < c \left(\frac{1}{2} \right)^{\beta_0-2} < \frac{1}{16} \Rightarrow 4c\delta^{\beta_0-1} < \frac{\delta}{4} \Rightarrow 4c\delta^{\beta_0-1} - \frac{\delta}{4} < 0$$

donc, d'après (18): $K_\delta + e^{-\frac{\delta}{2}} < 1$

c) on a $0 < K_\delta < 1 \Rightarrow \frac{1}{1-K_\delta} > 1$;

d'autre part, comme on pouvait prendre β_0 aussi grand que l'on voulait, on peut supposer que $\beta_0 \in \mathbb{N}$; dans ce cas, on vérifie sans peine, à l'aide de la règle de l'Hôpital, que la fonction:

$$\begin{aligned} \left[0, \frac{1}{2} \right] &\rightarrow \mathbb{R} \\ \delta &\mapsto \frac{1}{1-K_\delta} \end{aligned}$$

est continue, et donc bornée par un $M > 0$. Alors si $\alpha > 0$ est assez grand, on a pour $\delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\delta^{-\alpha} > \left(\frac{1}{2} \right)^{-\alpha} = 2^\alpha > M \geq \frac{1}{1-K_\delta} > 1$$

■

Remarque 3.4.5 D'après le lemme 3.4.2, on a donc pour $f \in C_r^n$:

$$\|f\|_r \leq \delta^{\beta_0} \text{ et } |Z_1|, |Z_2| \leq re^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow |f(Z_1) - f(Z_2)| \leq K_\delta |Z_1 - Z_2|$$

et plus particulièrement:

Lemme 3.4.4 Si $f \in C_r^n$, alors pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$\|f\|_r \leq \delta^{\beta_0} \text{ et } |Z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Z \pm f(Z)| \leq re^{-\frac{\delta}{2}}$$

Preuve. $|Z| \leq re^{-\delta} < re^{-\frac{\delta}{2}} \Rightarrow |Z \pm f(Z)| \leq |Z| + |f(Z)| \leq re^{-\delta} + K_\delta re^{-\delta}$ (remarque 3.4.3)
 $\leq re^{-\delta} + K_\delta re^{-\frac{\delta}{2}}$
 $\leq re^{-\frac{\delta}{2}} \left(K_\delta + e^{-\frac{\delta}{2}} \right) \leq re^{-\frac{\delta}{2}}$ (lemme 3.4.3.b)

Soit $h \in H^n$, alors la fonction $H(Z) = Z + h(Z)$ est biholomorphe en 0, et son inverse peut se mettre sous la forme $G(Z) = Z - g(Z)$ (au voisinage de 0) pour un unique $g \in H^n$, on a donc un opérateur:

$$\hat{g} : H^n \rightarrow H^n$$

défini par:

$$\hat{g}(h) = g \Leftrightarrow (Id + h)^{-1} = Id - g$$

■

Remarque 3.4.6 On peut voir facilement que:

$$g = \hat{g}(h) \Leftrightarrow g(Z) = h(Z - g(Z)) \Leftrightarrow h(Y) = g(Y + h(Y))$$

Proposition 3.4.3 L'opérateur

$$\hat{g} : H^n \rightarrow H^n$$

est d'ordre 1: $g \prec h$

Preuve. Pour montrer la proposition, nous allons voir que l'on peut exprimer $\hat{g}(h)$ comme la limite de la suite $\{g_s\}_{s \geq 0}$, définie par:

$$\begin{aligned} g_0(Z) &= 0 \\ g_{s+1}(Z) &= h(Z - g_s(Z)). \end{aligned}$$

■

Affirmation 1:

Soit $r > 0$ et $\delta \in (0, \frac{1}{2})$, alors si $h \in C_r^n$ et $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$ (où β_0 a été fixé dans le lemme 3.4.3), on a:

$$\forall s \geq 0, \quad - \quad g_s \in C_{re^{-\delta}}^n$$

$$- \quad |Z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Z - g_s(Z)| < re^{\frac{-\delta}{2}}$$

Preuve. Par induction

Le cas $s = 0$ est évident. Supposons l'affirmation 1 vérifiée pour s et montrons-la pour $s + 1$:

$$g_{s+1}(Z) = h(Z - g_s(Z)), \text{ donc } g_{s+1} \in C_{re^{-\delta}}^n \text{ car } h \in C_r^n \text{ et}$$

$$|Z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Z - g_s(Z)| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} < r \text{ (par hypothèse).}$$

Si $|Z| \leq re^{-\delta}$, alors:

$$|Z - g_{s+1}(Z)| = |Z - h(Z - g_s(Z))| \leq re^{-\delta} + K_\delta re^{\frac{-\delta}{2}} \quad \text{par hypothèse d'induction et par la remarque 3.4.4}$$

$$\begin{aligned} &\leq \left(K_\delta + e^{\frac{-\delta}{2}}\right) |Z| \leq re^{-\delta} \\ &\leq re^{-\delta} \quad (\text{lemme 3.4.3 b}) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Affirmation 2

Si $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$, $\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} g_s = g = G(h)$ uniformément pour $|Z| \leq re^{-\delta}$

Preuve. $\text{Sup}_{|Z| \leq re^{-\delta}} |g_{s+1}(Z) - g_s(Z)| = \text{Sup}_{|Z| \leq re^{-\delta}} |h(Z - g_s(Z)) - h(Z - g_{s-1}(Z))|$

$$\leq K_\delta \text{Sup}_{|Z| \leq re^{-\delta}} |g_s(Z) - g_{s-1}(Z)|$$

car $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$, par l'affirmation 1 et la remarque 3.4.4

Comme $K_\delta < 1$, la suite $\{g_s\}_{s \geq 0}$ est de Cauchy dans l'espace métrique des fonctions continues pour $|Z| \leq re^{-\delta}$, muni de la norme Sup , lequel est un espace métrique complet. Donc, la suite $\{g_s\}_{s \geq 0}$ converge uniformément pour $|Z| \leq re^{-\delta}$ (l'affirmation 2 est prouvée), et on a:

$$\text{Lim}_{s \rightarrow \infty} g_s(Z) = \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} h(Z - g_{s-1}(Z)) = h(Z - \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} g_s(Z))$$

$$\text{donc, par la remarque 3.4.5:} \quad \text{Lim}_{s \rightarrow \infty} g_s = g = \hat{g}(h).$$

En prenant la limite sur s , l'affirmation 1 nous dit que, si $h \in C_r^n$ et $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$, alors:

$$\begin{aligned} - \quad g = G(h) &\in C_{re^{-\delta}}^n \quad (\text{ce qui montre 1) de la définition 3.4.1}) \\ - \quad |Z| \leq re^{-\delta} &\Rightarrow |Z - g(Z)| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} \end{aligned} \quad (19)$$

on a donc:

$$\begin{aligned} |g(Z)| - |h(Z)| &\leq |g(Z) - h(Z)| = |h(Z - g(Z)) - h(Z)| \\ &\leq K_\delta |g(Z)| \quad \text{pour } |Z| \leq re^{-\delta}, \text{ d'après (19) et la remarque} \end{aligned}$$

3.4.4

$$\text{donc } |g(Z)| \leq (1 - K_\delta)^{-1} |h(Z)| \quad \text{pour } |Z| \leq re^{-\delta},$$

$$\text{et } \|g\|_{re^{-\delta}} \leq (1 - K_\delta)^{-1} \|h\|_{re^{-\delta}} \leq (1 - K_\delta)^{-1} \|h\|_r \leq \|h\|_r \cdot \delta^{-\alpha} \quad \text{pour le } \alpha \text{ du lemme 3.4.3 c)}$$

On a donc bien $g \prec h$, ce qui prouve la proposition 3.4.3 $\blacksquare$

On peut généraliser la définition 3.4.1 aux opérateurs de plusieurs fonctions de la façon suivante:

Si $\Phi : \Omega \subset (C^n)^k \rightarrow C^n$ et $\varphi = \varphi(X_1, \dots, X_k)$ est un polynôme en k variable, alors:

Définition 3.4.2 On note $\Phi(f_1, \dots, f_k) \prec \varphi(f_1, \dots, f_k)$, s'il existe des nombres $\alpha > 0$ et $\beta_i > 0$, $1 \leq i \leq k$, tels que, pour $\forall r \in (0, 1)$ et $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on ait:

$$(f_1, \dots, f_k) \in \Omega \cap (C_r^n)^k \text{ et } \|f_i\|_r \leq \delta^{\beta_i}, 1 \leq i \leq k \Rightarrow$$

$$a) \quad \Phi(f_1, \dots, f_k) \in C_{re^{-\delta}}^n$$

$$b) \quad \|\Phi(f_1, \dots, f_k)\|_{re^{-\delta}} \leq \varphi(\|f_1\|_r, \dots, \|f_k\|_r) \cdot \delta^{-\alpha}$$

Pour nos majorations, nous aurons besoin de la propriété décrite dans la proposition 3.4.4, qui suit, pour la démonstration de laquelle nous utiliserons le lemme suivant:

Lemme 3.4.5 Soit $\eta > 0$, alors $\exists \alpha > 0$ tel que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on ait:

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\eta} < \delta^{-\alpha}$$

Preuve. Pour α assez grand, on a pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$:

$$\delta^{\alpha-\eta} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha-\eta} < 2^{-\eta}$$

donc:

$$\left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\eta} \delta^{\alpha} < 1 \text{ et } \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\eta} < \delta^{-\alpha} \quad \blacksquare$$

La proposition 3.4.4 décrit une certaine forme de transitivité pour la relation $\prec$, c'est-à-dire que, si on compose des opérateurs, alors l'ordre se «compose» aussi de façon naturelle (moyennant quelques restrictions sur les hypothèses de départ).

Proposition 3.4.4 Soient $\Phi : \Omega \subset (C^n)^k \rightarrow C^n$ et $\Psi_i : \Omega_i \subset C^n \rightarrow C^n$, $1 \leq i \leq k$, tels que

$$f_i \in \Omega_i, 1 \leq i \leq k \Rightarrow (\Psi_1(f_1), \dots, \Psi_k(f_k)) \in \Omega$$

alors, si φ est un polynôme en k variables sans terme constant et dont les coefficients sont positifs, on a:

$$\begin{aligned} \Phi(g_1, \dots, g_k) &\prec \varphi(g_1, \dots, g_k) \text{ et } \Psi_i(f_i) \prec f_i, 1 \leq i \leq k \\ \Rightarrow \Phi(\Psi_1(f_1), \dots, \Psi_k(f_k)) &\prec \varphi(f_1, \dots, f_k) \end{aligned}$$

Preuve. Posons $g_i = \Psi_i(f_i)$, $1 \leq i \leq k$, et $\Phi(g_1, \dots, g_k) = \Phi$, alors on a:

1) $\exists \alpha_i, \beta_i > 0, 1 \leq i \leq k$, tels que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$ et $\forall r \in (0, 1)$:

$$f_i \in \Omega_i \cap C_r^n \text{ et } \|f_i\|_r \leq \delta^{\beta_i} \Rightarrow$$

- $g_i \in C_{re^{-\delta}}^n$
- $\|g_i\|_{re^{-\delta}} \leq \|f_i\|_r \cdot \delta^{-\alpha_i}$

2) $\exists \alpha, \gamma_i > 0, 1 \leq i \leq k$, tels que pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$ et $\forall r \in (0, 1)$:

$$(g_1, \dots, g_k) \in \Omega \cap (C_r^n)^k \text{ et } \|g_i\|_r \leq \delta^{\gamma_i}, 1 \leq i \leq k \Rightarrow$$

- $\Phi \in C_{re^{-\delta}}^n$
- $\|\varphi\|_{re^{-\delta}} \leq \varphi(\|g_1\|_r, \dots, \|g_k\|_r) \cdot \delta^{-\alpha}$

Soit $\beta > 0$ tel que $\beta > \beta_i$ et $\beta - \alpha_i > \gamma_i$, $1 \leq i \leq k$. Par le lemme 3.4.4, $\exists \gamma > 0$ tel que, pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$\delta^\gamma < \left(\frac{\delta}{2}\right)^\beta \text{ et aussi } \gamma > \beta$$

alors, pour $f_i \in C_r^n$ et $\|f_i\|_r \leq \delta^\gamma, 1 \leq i \leq k$, on a:

a) $\|f_i\|_r \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^\beta$ et **b)** $\|f_i\|_r \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\beta_i}$, d'après **1)** et **b)**, on a:

$$\begin{aligned} - g_i &\in C_{re^{-\frac{\delta}{2}}}^n \\ - \|g_i\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}} &\leq \|f_i\|_r \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_i} \\ &\leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\beta-\alpha_i} \leq \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\gamma_i} \end{aligned} \quad (20) \quad (\text{d'après a)})$$

alors, comme $re^{-\delta} = \left(re^{-\frac{\delta}{2}}\right)re^{-\frac{\delta}{2}}$, on a, d'après **2)**:

$$\begin{aligned} - \Phi &\in C_{re^{-\delta}}^n \\ - \|\Phi\|_{re^{-\delta}} &\leq \varphi\left(\|g_1\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}}, \dots, \|g_k\|_{re^{-\frac{\delta}{2}}}\right) \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha} \\ &\leq \varphi\left(\|f_1\|_r \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_1}, \dots, \|f_k\|_r \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha_k}\right) \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\alpha} \end{aligned} \quad \text{d'après (20) et les hypothèses}$$

sur φ

$$\begin{aligned} &\leq \varphi(\|f_1\|_r, \dots, \|f_k\|_r) \cdot \left(\frac{\delta}{2}\right)^{-\rho-\alpha} \text{ où } \rho = \min_{1 \leq i \leq k} \{\alpha_i\} \\ &\leq \varphi(\|f_1\|_r, \dots, \|f_k\|_r) \cdot \delta^{-\tau} \text{ pour un } \tau > 0, \text{ par le lemme 3.4.5} \end{aligned}$$

On a donc bien:

$$\Phi(\Psi_1(f_1), \dots, \Psi_k(f_k)) \prec \varphi(f_1, \dots, f_k) \quad \blacksquare$$

3.4.5 E: Majoration du reste

Dans cette section, on va montrer que l'opérateur reste:

$$\begin{aligned} \mathfrak{R} &: H^n \rightarrow H^n \\ a &\mapsto \mathfrak{R}(a) = R(a, U(a)) \end{aligned}$$

défini en $\mathbf{A}$, est d'ordre **2**: $\Re(a) \prec a^2$

Pour ce faire, il s'avère qu'il est beaucoup plus commode d'exprimer le reste comme un opérateur de plusieurs fonctions, ce que nous allons faire immédiatement, et ensuite utiliser la proposition 3.4.4.

D'après (3) et (4) de $\mathbf{A}$, on a (pour a et h quelconques):

$$R(a, h)(Y) = DH(Y)^{-1} f(H(Y)) - \Lambda Y - a(Y) + L_{\Lambda} h(Y),$$

où $H(Y) = Y + h(Y)$ et $f(Y) = \Lambda Y + a(Y)$.

On a: $H^{-1} = (Id + h)^{-1} = (Id - g) = G$

où $g = \hat{g}(h)$, $\hat{g}: H^n \rightarrow H^n$ est défini en C .

Remarque 3.4.7 D'après la remarque 3.4.5, on a: $h = g \circ (Id + h)$,

donc:

$$Dh(Y) - Dg(Y + h(Y)) = Dh(Y) Dg(Y + h(Y)).$$

On a donc:

$$\begin{aligned} R(a, h)(Y) &= DG(H(Y)) f(H(Y)) - \Lambda Y - a(Y) + L_{\Lambda} h(Y) \\ &= (Id - Dg(Y + h(Y))) (\Lambda Y + \Lambda h(Y) + a(Y + h(Y))) - \Lambda Y - a(Y) \\ &\quad + Dh(Y) \Lambda Y - \Lambda h(Y) \\ &= a(Y + h(Y)) - a(Y) + (Dh(Y) - Dg(Y + h(Y))) \Lambda Y \\ &\quad + Dg(Y + h(Y)) (-\Lambda h(Y) - a(Y + h(Y))) \\ &= a(Y + h(Y)) - a(Y) + Dh(Y) Dg(Y + h(Y)) \Lambda Y \\ &\quad + Dg(Y + h(Y)) (-\Lambda h(Y) - a(Y + h(Y))) \quad (\text{remarque 6}) \end{aligned}$$

Donc, si on pose:

$$\acute{R}(a, h, g) = R_1(a, h) + R_2(h, g) + R_3(a, h, g)$$

où $R_1(a, h)(Y) = a(Y + h(Y)) - a(Y)$

$$R_2(h, g)(Y) = Dh(Y) Dg(Y + h(Y)) \Lambda Y$$

$$R_3(a, h, g)(Y) = Dg(Y + h(Y)) (-\Lambda h(Y) - a(Y + h(Y)))$$

alors on a: $R(a, h) = \acute{R}(a, h, \hat{g}(h))$ et $\Re(a) = R(a, U(a)) = \acute{R}(a, U(a), \hat{g}(U(a)))$

Il est donc clair que, si l'on montre que:

$$R_1(a, U(a)) \prec a^2, R_2(U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2 \text{ et } R_3(a, U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2,$$

alors on aura $\Re(a) \prec a^2$

Pour ce faire, nous allons commencer par majorer R_1, R_2 et R_3 par rapport à leurs variables respectives.

Proposition 3.4.5

$$R_1(a, h) \prec ah$$

Preuve. $R_1(a, h)(Y) = a(Y + h(Y)) - a(Y)$

Si $h, a \in C_r^n$ et $\|h\|_r, \|a\|_r \leq \delta^{\beta_0}$, alors, d'après le lemme 3.4.4, on a:

$$|Y| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Y + h(Y)| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} < r \quad (21)$$

donc, certainement $R_1(a, h) \in C_{re^{-\delta}}^n$. Et d'après le lemme 3.4.2 et (21):

$$|Y| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |R_1(a, h)(Y)| \leq C \frac{\|a\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}} |h(Y)| \leq 4C\delta^{-1} \|a\|_r |h(Y)| \quad \text{d'après (17)}$$

donc: $\|R_1(a, h)\|_{re^{-\delta}} \leq 4C\delta^{-1} \|a\|_r \|h\|_{re^{-\delta}} \leq 4C\delta^{-1} \|a\|_r \|h\|_r \leq \|a\|_r \|h\|_r \delta^{-\alpha_1}$ pour un $\alpha_1 > 0$ (lemme 3.4.1)

c'est-à-dire: $R_1(a, h) \prec ah$ ■

Proposition 3.4.6 Soit l'opérateur:

$$\begin{aligned} H^n \times H^n &\rightarrow C^n \\ (g, h) &\mapsto T \end{aligned}$$

défini par $T(Y) = Dg(Y + h(Y)) \Lambda Y$, alors:

$$T \prec g$$

Preuve. $T = (T_1, \dots, T_n)$ et $g = (g_1, \dots, g_n)$; alors, on a:

$$T_i(Y) = \sum_{k=1}^n D_k g_i(Y + h(Y)) \lambda_k y_k \quad (22)$$

Si $g, h \in C_r^n$ et $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$ on a:

$$\begin{aligned} - D_i g &\text{ est holomorphe pour } |Y| < r, \quad 1 \leq i \leq n \\ - |Y| \leq re^{-\delta} &\Rightarrow |Y + h(Y)| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} < r \quad (\text{lemme 3.4.4}) \end{aligned} \quad (23)$$

donc, d'après (22), on a certainement $T \in C_{re^{-\delta}}^n$. De plus, pour $|Y| \leq re^{-\delta}$, on a:

$$\begin{aligned} |T(Y)| &= \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\sum_{k=1}^n D_k g_i(Y + h(Y)) \lambda_k y_k| \} \\ &\leq \max_{1 \leq i \leq n} \{ \sum_{k=1}^n |D_k g_i(Y + h(Y))| |\lambda_k y_k| \} \\ &\leq \frac{nC\|g\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}} \lambda |Y| \quad \text{par le lemme 3.4.2 et (23)} \quad \lambda = \max_{1 \leq i \leq n} \{ |\lambda_k| \} \\ &\leq 4nC\delta^{-1} \lambda \|g\|_r \cdot |Y| \end{aligned}$$

donc $\|T\|_{re^{-\delta}} \leq 4nC\delta^{-1} \lambda \|g\|_r \leq \|g\|_r \delta^{-\alpha_2}$ pour un $\alpha_2 > 0$ (lemme 3.4.1)

c'est-à-dire: $T \prec g$ ■

Proposition 3.4.7

$$R_2(h, g) \prec hg$$

$$\begin{aligned} \textbf{Preuve. } R_2(h, g)(Y) &= Dh(Y) Dg(Y + h(Y)) \Lambda Y \\ &= Dh(Y) T(Y) = (\sum_{k=1}^n D_k h_i(Y) T_i(Y))_{i=1}^n \end{aligned} \quad (24)$$

Si $g, h \in C_r^n$ et $\|h\|_r \leq \delta^{\beta_0}$, alors on a:

- $D_i h = (D_i h_1, \dots, D_i h_n)$ est holomorphe pour $|Y| < r$, $1 \leq i \leq n$
- $T \in C_{re^{-\delta}}^n$ par la proposition 3.4.5

donc, d'après (24), on a certainement $R_2(h, g) \in C_{re^{-\delta}}^n$.

De plus, d'après (24) et le lemme 3.4.2, on a pour $|Y| \leq re^{-\delta} < re^{-\frac{\delta}{2}}$

$$|R_2(h, g)(Y)| \leq \frac{nc\|g\|_r}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} |T(Y)|$$

donc:

$$\begin{aligned} \|R_2(h, g)\|_{re^{-\delta}} &\leq 4nc\delta^{-1} \|h\|_r \|T\|_{re^{-\delta}} \leq 4nc\delta^{-1} \|h\|_r \|g\|_r \cdot \delta^{-\alpha_3} \quad (\text{proposition 3.4.6}) \\ &\leq \|h\|_r \|g\|_r \cdot \delta^{-\alpha_2} \quad \text{pour un } \alpha_3 > 0 \quad (\text{lemme 3.4.1}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$R_2(h, g) \prec hg$$

■

Proposition 3.4.8

$$R_3(a, h, g) \prec g(h + a)$$

$$\begin{aligned} \textbf{Preuve. } R_3(a, h, g)(Y) &= Dg(Y + h(Y)) (-\Lambda h(Y) - a(Y + h(Y))) \\ &= (\sum_{k=1}^n D_k g_i(Y + h(Y)) (-\Lambda h(Y) - a(Y + h(Y))))_{i=1}^n \end{aligned} \quad (25)$$

Si $a, h, g \in C_r^n$ et $\|h\|_r, \|a\|_r \leq \delta^{\beta_0}$ alors:

- $D_i g$ est holomorphe pour $|Y| < r$, $1 \leq i \leq n$
- $|Y| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Y + h(Y)| \leq re^{-\frac{\delta}{2}} < r$ (lemme 3.4.4) (26)

Donc, d'après (25), on a certainement $R_3(a, h, g) \in C_{re^{-\delta}}^n$. De plus, d'après (26) et par le lemme 3.4.2, on a pour $|Y| \leq re^{-\delta}$:

$$\begin{aligned} |R_3(a, h, g)(Y)| &\leq \frac{nc\|g\|_r}{1-e^{-\frac{\delta}{2}}} (|\Lambda h(Y)| + |a(Y + h(Y))|) \\ &\leq 4nc\delta^{-1} \|g\|_r (|\Lambda h(Y)| + 4c\delta^{-1} \|a\|_r (|Y| + |h(Y)|)) \end{aligned}$$

donc (en posant $\lambda = \max_{1 \leq k \leq n} \{|\lambda_k|\}$):

$$\begin{aligned} \|R_3(a, h, g)\|_{re^{-\delta}} &\leq 4nc\delta^{-1} \|g\|_r (\lambda \|h\|_{re^{-\delta}} + 4c\delta^{-1} \|a\|_r (1 + \|h\|_{re^{-\delta}})) \\ &\leq 4nc\delta^{-1} \|g\|_r (\lambda \|h\|_r + 4c\delta^{-1} \|a\|_r) \\ &\leq [\|g\|_r (\|h\|_r + \|a\|_r)] \cdot \delta^{-\alpha_4} \quad \text{pour un } \alpha_4 > 0 \quad (\text{lemme 3.4.1}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire:

$$R_3(a, h, g) \prec g(h + a)$$

■

Proposition 3.4.9 a) $R_1(a, U(a)) \prec a^2$

b) $R_2(U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2$

c) $R_3(a, U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2$

Preuve. On se sert de la proposition 3.4.4 et des majorations précédentes:

a) On a $R_1(a, h) \prec ah$ et $U(a) \prec a$

donc, $R_1(a, U(a)) \prec a^2$

b) On a $R_2(h, g) \prec hg$

$\hat{g}(h) \prec h$ et $U(a) \prec a$, donc, $\hat{g}(U(a)) \prec a$

donc $R_2(U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2$.

c) On a $R_3(a, h, g) \prec g(h + a)$

donc, $R_3(a, U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a(a + a)$

c'est-à-dire $R_3(a, U(a), \hat{g}(U(a))) \prec a^2$. ■

On peut donc maintenant énoncer la proposition 3.4.10, laquelle était le but de cette section:

Proposition 3.4.10

$$\mathfrak{R}(a) \prec a^2$$

3.4.6 F: Convergence des changements de variable et preuve du théorème

Rappelons les notations de la section A:

- $f(Z) = \Lambda Z + a_0(Z)$, $a_0 \in H^n$
- $h_s = U(a_s)$, $a_{s+1} = \mathfrak{R}(a_s)$, $s \geq 0$
- $H_s = Id + h_s$, $\hat{H}_s = H_s \circ \dots \circ H_0$, $s \geq 0$

Le changement de variable $Z = \hat{H}_s(Z)$ transforme l'équation

$$\dot{Z} = f(Z)$$

en

$$\dot{Z}_s = \Lambda Z_s + a_{s+1}(Z_s)$$

Nous introduisons maintenant les suites suivantes:

$$\begin{aligned}
 - \quad \delta_0, \delta_1 &= \delta_0^{\frac{3}{2}}, \dots, \delta_s = \delta_{s-1}^{\frac{3}{2}} = \delta_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} \\
 - \quad M_0 &= \delta_0^N, \quad M_1 = M_0^{\frac{3}{2}}, \dots, M_s = M_{s-1}^{\frac{3}{2}} = \delta_s^N \quad s \geq 0 \\
 - \quad r_0, r_1 &= r_0 e^{-\delta_0}, \dots, r_{s+1} = r_s e^{-\delta_s}
 \end{aligned}$$

Ces suite dépendent du choix initial de δ_0 , N et r_0

L'ensemble des conditions que nous allons poser sur ces trois constantes va nous permettre de montrer d'abord que l'on a:

$$\|a_s\|_r \leq M_s, \quad s \geq 0$$

et, ensuite, en se servant du fait que $h = U(a) \prec a$, que:

- $\hat{H}$ est défini pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$
- la suite $\left\{ \hat{H}_s \right\}_{s \geq 0}$ converge uniformément pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$

Voici l'ensemble de ces conditions:

1) choix de δ_0 : On prend δ_0 tel que

a) $\delta = \sum_{s \geq 0} \delta_s = \sum_{s \geq 0} \delta_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} < \ln 2$; dans ce cas, on a pour $\forall s \geq 0 : e^{\delta_0 + \dots + \delta_s} < e^\delta < 2$ donc:

$$r_{s+1} = e^{-(\delta_0 + \dots + \delta_s)} r_0 > \frac{r_0}{2} \quad (27)$$

b) $\delta^{\frac{1}{2}} < \frac{1}{6}$; dans ce cas, on a:

$$\begin{aligned}
 \delta_0 &> 6\delta_0^{\frac{3}{2}} = 6\delta_1 \quad \text{et pour } \forall s \geq 0 : \\
 \delta_s &= \delta_0^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} > (6\delta_1)^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} > 6\delta_1^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} = 6\delta_{s+1}
 \end{aligned}$$

donc:

$$\frac{\delta_s}{4} > \frac{3\delta_{s+1}}{2} \quad (28)$$

c) $\delta_0 + \delta < \ln 2$; dans ce cas on a pour $\forall s \geq 0$:

$$e^{\delta_0 + \dots + \delta_s} e^{\delta_s} < e^\delta e^{\delta_0} = e^{\delta + \delta_0} < 2$$

donc:

$$r_{s+1} e^{-\delta_s} = e^{-(\delta_0 + \dots + \delta_s)} e^{-\delta_s} r_0 > \frac{r_0}{2} \quad (29)$$

2) choix de N :

On a $\Re(a) \prec a^2$, ou plus précisément, $\Re(a) \prec a^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$ pour un $\alpha > 0$ et un $\beta > 0$ (voir définition 3.4.1). On prend N tel que:

a) $N > \max(\beta, 2\alpha)$; dans ce cas, on a, pour $\forall s \geq 0$:

$$\begin{aligned}
 & - M_s = \delta_s^N \leq \delta_s^\beta \\
 & - \delta_s^{2N-\alpha} \leq \delta_s^{\frac{3N}{2}} = M_{s+1}
 \end{aligned} \tag{30}$$

On a $h = U(a) \prec a$, et même plus, car on a vu (remarque 3.4.3) qu'il existe un $\alpha_1 > 0$ tel que pour $\forall r \in (0, 1)$ et $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$\begin{aligned}
 a \in C_r^n & \Rightarrow - U(a) \in C_{re^{-\delta}}^n \\
 & - \|U(a)\|_{re^{-\delta}} \leq \|a\|_r \cdot \delta^{-\alpha_1}
 \end{aligned} \tag{31}$$

on prend donc N tel que:

b) $N > \alpha_1 + 2\beta_0$, (où β_0 est défini dans le lemme 3.4.3); dans ce cas, on a:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{N-\alpha_1-2\beta_0} < 1$$

Donc, pour $\forall \delta \in (0, \frac{1}{2})$, on a:

$$\delta^{N-\alpha_1-\beta_0} \left(\frac{1}{2}\right)^{-\beta_0} < 1$$

et

$$\delta^{N-\alpha_1} < \left(\frac{\delta}{2}\right)^{\beta_0} < \delta^{\beta_0} \tag{32}$$

Rappel: On a $f \in C_r^n$ et $\|f\|_r \leq \delta^{\beta_0} \Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 \text{i)} \quad & |Z| \leq re^{-\delta} \Rightarrow |Z \pm f(Z)| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} \\
 \text{ii)} \quad & |Z| \leq re^{\frac{-\delta}{2}} \Rightarrow |f(Z)| \leq \frac{c\|f\|_r}{1-e^{\frac{-\delta}{2}}} |Z| \leq 4c\delta^{-1} \|f\|_r |Z|
 \end{aligned} \tag{33}$$

3) choix de r_0 :

Comme $a_0 \in H^n$, il existe un $k > 0$ et un $r_0 > 0$ tel que

$$a_0 \in C_{r_0}^n \quad \text{et} \quad |Z| \leq r_0 \Rightarrow |a_0(Z)| \leq k|Z|^2$$

donc, $\|a_0\|_{r_0} \leq kr_0$

On prend donc r_0 assez petit pour que:

$$\|a_0\|_{r_0} \leq \delta_0^N \tag{34}$$

Proposition 3.4.11 Pour $\forall s \geq 0$, on a $a_s \in C_{r_s}^n$ et $\|a_s\|_{r_s} \leq M_s = \delta_s^N$

Preuve. par induction:

Le cas $s = 0$ est évident d'après (34). Supposons donc la proposition vérifiée pour s et montrons-la pour $s + 1$

Comme $\Re(a) \prec a^2 \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)$, on a:

$$\begin{aligned}
 a_s \in C_{r_s}^n \quad \text{et} \quad \|a_s\|_{r_s} & \leq M_s = \delta_s^N \leq \delta_s^\beta & \text{par (30)} \\
 \Rightarrow a_{s+1} = \Re(a_s) & \in C_{r_s e^{-\delta_s}}^n = C_{r_{s+1}}^n \\
 \text{et} \quad \|a_{s+1}\|_{r_{s+1}} & \leq \|a_s\|_{r_s}^2 \cdot \delta_s^{-\alpha} \leq \delta_s^{2N-\alpha} \leq M_{s+1}
 \end{aligned}$$

par (30) et hypothèse d'induction. ■

Lemme 3.4.6 Pour $\forall s \geq 0$, on a $h_s \in C_{r_{s+1}}^n$ et $\|h_s\|_{r_{s+1}} \leq \left(\frac{\delta_s}{2}\right)^{\beta_0} \leq \delta_s^{\beta_0}$

Preuve. D'après la proposition 3.4.11 et (31), on a:

$$a_s \in C_{r_s}^n \Rightarrow h_s = U(a_s) \in C_{r_s e^{-\delta_s}}^n = C_{r_{s+1}}^n$$

et $\|h_s\|_{r_{s+1}} = \|U(a_s)\|_{r_s e^{-\delta_s}} \leq \|a_s\|_{r_s} \cdot \delta_s^{-\alpha_1} \leq \delta^{N-\alpha_1} \leq \left(\frac{\delta_s}{2}\right)^{\beta_0} < \delta_s^{\beta_0}$ par (32) ■

Lemme 3.4.7 Pour $\forall s \geq 0$, on a:

- $\hat{H}_s$ est défini et holomorphe pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$
- $|Z| \leq \frac{r_0}{2} \Rightarrow \left|\hat{H}_{s-1}(Z)\right| \leq r_{s+1} e^{-\frac{\delta_s}{2}}$

Preuve. par induction:

cas $s = 0$

D'après le lemme 3.4.6, on a $h_0 \in C_{r_1}^n$ et d'après (27), on a $r_1 > \frac{r_0}{2}$;

donc, h_0 et $\hat{H}_0 = Id + h_0$ sont définis et holomorphes pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$.

De plus, toujours d'après le lemme 3.4.6, on a $\|h_0\|_{r_1} \leq \delta_0^{\beta_0}$; alors, d'après (33) i), on a:

$$\begin{aligned} |Z| \leq \frac{r_0}{2} &< r_1 e^{-\delta_s} \quad \text{par (29)} \\ \Rightarrow \left|\hat{H}_0(Z)\right| &= |Z + h_0(Z)| \leq r_1 e^{-\frac{\delta_0}{2}} \leq r_1 e^{-\frac{3\delta_1}{2}} \quad \text{par (28)} \\ &= (r_1 e^{-\delta_1}) e^{-\frac{\delta_1}{2}} = r_2 e^{-\frac{\delta_1}{2}} \end{aligned}$$

cas général

Supposons le lemme vérifié pour $s-1$ et montrons-le pour s :

$$\hat{H}_s = \hat{H}_{s-1} + h_s \circ \hat{H}_{s-1}$$

D'après l'hypothèse d'induction et (33) i), et comme $h_s \in C_{r_{s+1}}^n$ et $r_{s+1} > \frac{r_0}{2}$, on voit que $\hat{H}_s$ est défini et holomorphe pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$.

On a, par hypothèse: $|Z| \leq \frac{r_0}{2} \Rightarrow \left|\hat{H}_{s-1}(Z)\right| \leq r_{s+1} e^{-\frac{\delta_s}{2}}$

Par le lemme 3.4.6, on a : $\|h_s\|_{r_{s+1}} \leq \left(\frac{\delta_s}{2}\right)^{\beta_0} < \delta_s^{\beta_0}$

Donc, par (33) et l'hypothèse d'induction, on a :

$$\begin{aligned} |Z| \leq \frac{r_0}{2} \Rightarrow \left|\hat{H}_s(Z)\right| &= \left|\hat{H}_{s-1}(Z) + h_s\left(\hat{H}_{s-1}(Z)\right)\right| \\ &\leq r_{s+1} e^{-\frac{\delta_s}{4}} \leq r_{s+1} e^{-\frac{3\delta_{s+1}}{4}} \quad \text{par (28)} \\ &= (r_{s+1} e^{-\delta_{s+1}}) e^{-\frac{\delta_{s+1}}{2}} = r_{s+2} e^{-\frac{\delta_{s+1}}{2}} \end{aligned}$$

ce qui prouve le lemme 3.4.7 ■

Proposition 3.4.12 La suite $\left\{\hat{H}_s\right\}_{s \geq 0}$ converge uniformément (vers une fonction $\hat{H}$) pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$.

Remarque 3.4.8 : Comme $\hat{H}_s$ est holomorphe pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}, \forall s \geq 0$, il en est de même pour $\hat{H}$

Preuve. On a: $\hat{H}_s(Z) = \hat{H}_{s-1}(Z) + h_s(\hat{H}_{s-1}(Z))$

et $\hat{H}_s(Z) - \hat{H}_{s-1}(Z) = h_s(\hat{H}_{s-1}(Z))$

Par le lemme 3.4.6, on a: $\|h_s\|_{r_{s+1}} \leq \delta_s^{\beta_0}$

Par le lemme 3.4.7, on a: $|Z| \leq \frac{r_0}{2} \Rightarrow |\hat{H}_{s-1}(Z)| \leq r_{s+1} e^{\frac{-\delta_s}{2}}$

Donc, par (33) ii), on a, pour $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$:

$$\begin{aligned} |\hat{H}_s(Z) - \hat{H}_{s-1}(Z)| &\leq 4c\delta_s^{-1} \|h_s\|_{r_{s+1}} |\hat{H}_{s-1}(Z)| \\ &\leq 4c\delta_s^{\beta_0-1} r_{s+1} e^{\frac{-\delta_s}{2}} \\ &\leq 4c\delta_s^{\beta_0-1} r_{s+1} \\ &\leq 4c\delta_s^\gamma r_0 \quad \text{où } \gamma = \beta_0 - 1 > 1 \end{aligned}$$

si on pose $\varepsilon = \delta_0^\gamma < 1$, alors $\delta_s^\gamma = \varepsilon^{\left(\frac{3}{2}\right)^s} < \left(\varepsilon^{\frac{3}{2}}\right)^s$;

donc:

$$\sum_{s \geq 0} \delta_s^\gamma < \infty$$

ce qui implique que la suite $\left\{ \hat{H}_s \right\}_{s \geq 0}$ est de Cauchy pour la norme $Sup_{|Z| \leq \frac{r_0}{2}}$. Or l'espace métrique des fonctions holomorphes sur le polydisque $|Z| \leq \frac{r_0}{2}$ muni de la norme Sup est un espace métrique complet.

Ce qui prouve la proposition 3.4.12 ■

Lemme 3.4.8 Soit une suite de fonction $\{f_s\}_{s \geq 0}$ telle que $f_s \in C_r^n$ pour $\forall s \geq 0$ et $Lim_{s \rightarrow \infty} \|f_s\|_r = 0$; alors pour $|Z| \leq r$, on a:

$$Lim_{s \rightarrow \infty} f_s(Z) = 0 \quad \text{uniformément pour } |Z| \leq r.$$

Lemme 3.4.9

$$Lim_{s \rightarrow \infty} \|a_s\|_{\frac{r_0}{2}} = 0$$

Preuve. On a $Lim_{s \rightarrow \infty} M_s = 0$ et $\|a_s\|_{\frac{r_0}{2}} \leq \|a_s\|_{r_s} \leq M_s$

On achève ici la preuve du théorème de Siegel:

Le changement de variable

$$Z = \hat{H}(Y) = Lim_{s \rightarrow \infty} \hat{H}_s(Y) \text{ défini pour } |Y| \leq \frac{r_0}{2}$$

transforme l'équation $\dot{Z} = f(Z)$ en:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= D\hat{H}(Y)^{-1} f(\hat{H}(Y)) \\ &= Lim_{s \rightarrow \infty} D\hat{H}_s(Y)^{-1} f(\hat{H}_s(Y)) \\ &= Lim_{s \rightarrow \infty} (\Lambda Y + a_{s+1}(Y)) \\ &= \Lambda Y \quad \text{par les lemmes 3.4.8 et 9} \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\dot{Y} = Df(0)Y. \quad \blacksquare$$

Remarque 3.4.9 $\hat{H}$ est bien de la forme $\hat{H} = Id + h$ où $h \in H^n$, donc biholomorphe en 0

3.5 Champs de vecteurs C^∞ ou C^k

Jusqu'à maintenant, nous avons étudié des formes normales de champs de vecteurs analytiques, et distingué deux phénomènes essentiels:

- les conditions de résonance
- les domaines de Poincaré et Siegle.

On peut maintenant se demander comment cela se traduit dans le cas C^∞ ou C^k . Nous verrons qu'essentiellement les conditions de résonance persistent, mais que l'importance de la distinction entre les domaines de Poincaré et de Siegle devient moindre.

La raison en est la suivante: on obtient les formes normales pour les cas C^∞ ou C^k en deux étapes: on linéarise le champ de vecteurs jusqu'à un certain ordre (c'est alors qu'intervient la non-résonance), et on applique ensuite des arguments de nature géométrique ou d'espace fonctionnel. Cela permet de contourner la difficulté de la convergence de la linéarisation formelle (remarquons qu'à toute série formelle correspond une fonction C^∞ , ayant cette série formelle comme série de Taylor).

Dans cette section, nous donnerons un aperçu de ces résultats, en particulier ceux obtenus par Sternberg, en 1957 et 1959 (cf. [5] et [6]).

Comme il ne s'agit que d'un aperçu, nous ne donnerons pas toutes les preuves et nous nous bornerons à quelques démonstrations relativement simples, pour en donner la saveur.

Nous allons donc étudier le cas d'une équation

$$\dot{X} = f(X) \quad , \quad f(0) = 0$$

où $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction de classe C^k , $0 < k \leq \infty$

Nous ne retiendrons ici que le cas où les valeurs propres de $Df(0)$ sont non résonantes.

Le résultat majeur, contenu dans les articles de Sternberg, est l'analogue, pour le cas réel C^∞ , du théorème de Siegle; à la différence qu'ici la condition d'être de type multiplicatif (c, v) , pour les valeurs propres du linéarisé à l'origine, n'est plus nécessaire. On demande seulement qu'elles ne soient pas résonantes (ce qui, entre autres, dans le cas réel, signifie que l'origine est un point d'équilibre hyperbolique). Ce résultat est le suivant:

Théorème 3.5.1 *Soit $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction C^∞ telle que $f(0) = 0$ et soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les valeurs propres de $Df(0)$. Alors si λ n'est pas résonante et $Df(0)$*

est semi-simple (diagonalisable dans $\mathbb{C}^n$), l'équation

$$\dot{X} = f(X)$$

est équivalente au voisinage de l'origine, par un changement de coordonnées laissant fixe l'origine, à:

$$\dot{Y} = Df(0)Y$$

Nous ne démontrerons pas ce théorème, sa preuve étant assez longue et très technique; cependant, pour avoir une idée de la méthode employée, nous démontrerons un autre théorème, qui est en fait l'analogue, dans le cas réel C^k , du théorème de Poincaré (théorème de Poincaré-Dulac dans le cas résonant).

Remarquons d'abord que, si $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est une fonction différentiable, alors les valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ de $Df(0)$ sont réelles ou conjuguées complexe; donc, demander qu'elles soient dans le domaine de Poincaré équivaut à demander que:

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re} \lambda_i & \quad 1 \leq i \leq n \\ \text{ou} & \\ 0 > \operatorname{Re} \lambda_i & \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \tag{1}$$

c'est-à-dire que l'origine est une source ou un puits pour l'équation $\dot{X} = f(X)$ et son flot y est une contraction ou une expansion.

Le résultat que nous allons démontrer est le suivant:

Théorème 3.5.2 Soit $f : V \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction de classe C^k , $0 < k < \infty$, telle que $f(0) = 0$ et soit $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ les valeurs propres de $Df(0)$. Si λ est non résonante et située dans le domaine de Poincaré (condition (1), si $Df(0)$ est semi-simple et si

$$k > \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} \lambda_i|} \tag{2}$$

alors l'équation

$$\dot{X} = f(X) \tag{3}$$

est équivalente au voisinage de l'origine, par un changement de coordonnées de classe C^k et laissant fixe l'origine, à l'équation

$$\dot{Y} = Df(0)Y$$

Remarque 3.5.1 *La condition (2) est essentielle pour la preuve d'existence du changement de variable.*

Pour la démonstration, nous allons suivre la méthode décrite par Sternberg dans [5]; celle-ci diffère essentiellement des méthodes employées dans le cas analytique par le fait que l'on commence d'abord par linéariser le flot de l'équation (3) et, à partir de là, on linéarise le champ de vecteur donné par f , au lieu de linéariser directement ce dernier, comme on l'a fait pour les théorème de Poincaré-Dulac et Siegle.

Le flot de l'équation (3) est un groupe continu à un paramètre de difféomorphismes de classe C^k , définis au voisinage de l'origine et laissant celle-ci fixe. Introduisons donc tout de suite la notation suivante:

$$T^k = \{T : V \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \mid T \text{ est un difféomorphisme de classe } C^k, \det DT(0) \neq 0 \text{ et } T(0) = 0\}$$

Nous allons d'abord étudier la linéarisation, au voisinage de l'origine, d'éléments de T^k ; c'est-à-dire, qu'étant donné $T \in T^k$, on cherche un $R \in T^k$ tel que

$$RTR^{-1} = DT(0)$$

À partir de là, par un procédé simple, nous linéarisons simultanément un groupe continu à un paramètre d'éléments de T^k .

Les conditions que l'on pose pour la linéarisation de difféomorphismes sont définies de façon similaire à celles concernant les champs de vecteurs: si $T \in T^k$ et $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$ sont les valeurs propres de $DT(0)$, on dit que $s_1, \dots, s_n$ sont non résonantes si:

$$s_i \neq s_1^{m_1} \dots s_n^{m_n}, 1 \leq i \leq n \quad \text{et pour } \forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \quad (4)$$

tels que $m_1 + \dots + m_n \geq 2$

et on dit que $(s_1, \dots, s_n)$ est dans le domaine de Poincaré, si

$$\begin{aligned} 0 < |s_i| < 1, \quad 1 \leq i \leq n \\ \text{ou} \\ 1 < |s_i|, \quad 1 \leq i \leq n \end{aligned} \quad (5)$$

On peut avoir une idée du lien entre ces définitions et celles correspondant pour les champs de vecteurs de la façon suivante: si $\emptyset(t, X)$ est le flot de l'équation (3) et $A = Df(0)$, alors:

$$D\emptyset(t, 0) = e^{At} \quad (6)$$

On voit donc que le lien entre les valeurs propres de $D\emptyset(t, 0)$ et de A (champ de vecteurs) explique les définitions (4) et (5). Nous reviendrons plus en détail là-dessus, au moment de passer de la linéarisation de flot à celle du champ de vecteurs.

L'étude de la linéarisation formelle ou à ordre k d'éléments de T^k étant tout à fait similaire à ce qui a été fait dans la section 1 de chapitre 3 pour les champs de vecteurs, nous nous contenterons d'énoncer, sans le prouver, le résultat suivant:

Proposition 3.5.1 *Soit $T \in T^k$. Si les valeurs propres de $DT(0)$ sont non résonantes (condition (4)) et si $DT(0)$ est semi-simple, alors il existe un $R \in T^k$ tel que:*

$$RTR^{-1}(X) = DT(0)X + o(|X|^k)$$

La proposition suivante (que nous allons démontrer) est le seul résultat concernant la linéarisation d'éléments de T^k , dont nous aurons besoin. C'est en fait l'analogue pour les difféomorphisme du théorème de Poincaré pour les champs de vecteurs.

Proposition 3.5.2 *Soient $T \in T^k, s_1, \dots, s_n \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de $DT(0)$, $s = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i|$ et $S = \max_{1 \leq i \leq n} |s_i|$*

Alors si $DT(0)$ est semi-simple, si $s_1, \dots, s_n$ ne sont pas résonantes (condition (4)) et si

$$0 \leq |s_i| \leq 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (7)$$

$$\text{et} \quad k > \frac{\ln s}{\ln S} \quad (8)$$

il existe un $R \in T^k$ tel que:

$$RTR^{-1} = DT(0)$$

Remarque 3.5.2 *D'après (5), on voit que la condition (7) signifie que $(s_1, \dots, s_n)$ est dans le domaine de Poincaré. On aurait tout aussi bien pu prendre $|s_i| > 1, \quad 1 \leq i \leq n$, et modifier en conséquence la condition (8)*

L'identité (6) explique le lien entre la condition (8) et la condition (2) (dans le cas où $\operatorname{Re} \lambda_i < 0, \quad 1 \leq i \leq n$)

Pour plus de simplicité, nous prouverons la proposition 3.5.2 dans le cas où les valeurs propres de $DT(0)$ sont réelles: $s_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$. Cela va rendre les calculs plus élégants et beaucoup moins lourds. On pourra cependant, après avoir lu cette preuve, avoir une idée de comment elle s'effectue, si on admet des valeurs propres conjuguées complexe, ainsi que des complications que cela apporte.

On peut donc supposer, pour le reste de la preuve de la proposition 3.5.2, que T est exprimée dans un système de coordonnées, tel que

$$L = DT(0)$$

est sous sa forme diagonale. De plus, nous prendrons comme norme sur $\mathbb{R}^n$:

$$\|X\| = \sum_{i=1}^n |X_i| \quad \text{pour } X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{R}^n$$

on aura alors:

$$\begin{aligned} \|DT(0)\| &= \|L\| = \sup_{|X|=1} \|LX\| = S \\ &\text{et donc} \\ \|LX\| &\leq S \|X\| \quad \text{pour } \forall X \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{9}$$

Nous allons prouver la proposition 3.5. 2, en résolvant, par rapport à R , l'équation

$$R = L^{-1}RT \tag{10}$$

par un procédé d'approximations successives. Ce procédé convergera dans la mesure où nous pourrons partir avec un R_0 initial satisfaisant (10) jusqu'à un certain ordre suffisamment grand. L'existence d'un tel R_0 sera assuré par la proposition 3.5.1

Pour formuler la preuve de convergence, il est utile d'introduire les notations suivantes: si $N \subseteq \mathbb{R}^n$ est un voisinage de l'origine, on pose:

$$V_N^k = \left\{ f : N \rightarrow \mathbb{R}^n \mid f \text{ est de classe } C^k \text{ et } f, \text{ ainsi que toutes ses dérivées } \right. \\ \left. \text{partielles d'ordre } \leq k \text{ s'annulent à l'origine} \right\}$$

Donc, $V_{N'}^j \subseteq V_N^k$ pour $N \subseteq N'$ et $k \leq j$. Sur V_N^k , on utilisera la norme suivante: pour $f = (f_1, \dots, f_n) \in V_N^k$, on pose:

$$\|f\|_N^k = \sup_{X \in N} \sum_{i=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f_i(X)}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}} \right|$$

Le lemme suivant est une conséquence des définitions précédentes

Lemme 3.5.1 Soit $\varepsilon > 0$, alors il existe un voisinage de l'origine $N^\varepsilon \subseteq \mathbb{R}^n$ assez petit tel que, pour tout voisinage de l'origine $N' \subset N^\varepsilon$, on ait:

$$\|f\|_{N'}^0 + \|f\|_{N'}^1 \dots + \|f\|_{N'}^{k-1} < \varepsilon \|f\|_{N'}^k \quad \text{pour } \forall f \in V_N^k, \quad \text{où } N^\varepsilon \subseteq N$$

Maintenant, si on définit l'opérateur:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_T &: V_N^k \rightarrow V_N^k \\ f &\mapsto L^{-1} \circ f \circ T \end{aligned}$$

(où T est celui introduit dans l'énoncé de la proposition 3.5.2), alors l'essence même de la preuve de convergence est contenue dans le lemme suivant:

Lemme 3.5.2 Soit $f \in V_N^k$, alors il existe un voisinage N' de l'origine ($N' \subseteq N \subseteq \mathbb{R}^n$) et un $K \in \mathbb{R}, 0 < K < 1$, tel que

$$\|\mathcal{L}_T f\|_{N'}^k < K \|f\|_{N'}^k$$

Preuve. On a:

$$(\mathcal{L}_T f)_i(X) = s_i^{-1} f_i(T(X)) \quad (11)$$

et si on pose $DT(X) = [t_j^i(X)]$, alors on a par la règle de dérivée en chaîne:

$$\frac{\partial^k(f_i \circ T)}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(X) = \sum_{j_1, \dots, j_k} \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}(T(X)) \cdot t_{i_1}^{j_1}(X) \dots t_{i_k}^{j_k}(X) + P \quad (12)$$

où P est un polynôme en les dérivées de f_i d'ordre $< k$ et en les dérivées des $t_i^j(X)$ d'ordre $\leq k$

Comme la fonction $X \mapsto DT(X)$ est continue, on a, d'après (9), que pour $\delta > 0$, il existe un voisinage N_δ de l'origine, tel que :

$$\|DT(X)\| < S + \delta \quad \text{pour } X \in N_\delta \quad (13)$$

de plus, on a:

$$\begin{aligned} & \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}(T(X)) \cdot t_{i_1}^{j_1}(X) \dots t_{i_k}^{j_k}(X) \right| \quad (14) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^n \left[\left| t_{i_1}^{j_1}(X) \dots t_{i_{k-1}}^{j_{k-1}}(X) \right| \times \left(\sum_{i_k=1}^n \sum_{j_k=1}^n \left| t_{i_k}^{j_k}(X) \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}(T(X)) \right| \right) \right] \end{aligned}$$

où l'expression entre parenthèses est la norme du vecteur

$DT(X) \left(\frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_1}}(T(X)), \dots, \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_n}}(T(X)) \right)$, on a donc, d'après (13), que pour $X \in N_\delta$, (14) est

$$\begin{aligned} & \leq \sum_{i_1, \dots, i_{k-1}=1}^n \sum_{j_1, \dots, j_{k-1}=1}^n \left[\left| t_{i_1}^{j_1}(X) \dots t_{i_{k-1}}^{j_{k-1}}(X) \right| \times (S + \delta) \sum_{j_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}(T(X)) \right| \right] \\ & \leq (S + \delta)^k \sum_{j_1, \dots, j_k=1}^n \left| \frac{\partial^k f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_k}}(T(X)) \right| \quad (15) \end{aligned}$$

Revenons maintenant au polynôme P introduit dans (12). Un monôme de P est de la forme:

$$t(X) \frac{\partial^r f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_r}}(X) \dots \frac{\partial^s f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_s}}(X), \quad 0 \leq r, s < k \quad (16)$$

où $t(X)$ dépend de T .

Comme $f \in V_N^k$, il existe un voisinage N_1 de l'origine, tel que pour $\forall r \in \mathbb{N}$, $r < k$, et pour $\forall j_1, \dots, j_r \in \{1, \dots, n\}$, on ait:

$$\left| \frac{\partial^r f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_r}}(X) \right| < 1 \quad \text{pour } \forall X \in N_1 \quad (17)$$

donc, en ne retenant que le dernier terme dans chaque monôme (16), on a, d'après la forme de P et (17), que pour $\forall X \in N_1$:

$$\|P(X)\| \leq M \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{j_1, \dots, j_r=1}^n \left| \frac{\partial^r f_i}{\partial X_{j_1} \dots \partial X_{j_r}}(X) \right| \quad (18)$$

où M est une constante positive dépendant seulement de T, N_1, k et n

Donc, si on désigne par $\sum \|P(X)\|$ la somme de tous les $\|P\|$ définis par (12) pour $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq i_1, \dots, i_k \leq n$, on a, d'après (18):

$$\sup_{X \in N_1} \sum \|P(X)\| \leq AM \left(\|f\|_{N_1}^0 + \dots + \|f\|_{N_1}^{k-1} \right) \quad (19)$$

où $A \in \mathbb{N}$ est une constante dépendant seulement de k et n .

Soit $\varepsilon > 0$, alors, si N^ε est le voisinage de l'origine défini par le lemme 3.5.1, on a, d'après (19):

$$\sup_{X \in N_1 \cap N^\varepsilon} \sum \|P(X)\| \leq AM\varepsilon \|f\|_{N^\varepsilon \cap N_1}^k \quad (20)$$

Maintenant, on a, d'après (11):

$$\|\mathcal{L}_T f\|_N^k = \sup_{X \in N} s^{-1} \sum_{i=1}^n \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n \left| \frac{\partial^k (f_i \circ T)}{\partial X_{i_1} \dots \partial X_{i_k}}(X) \right| \quad (21)$$

d'autre part, d'après (7), T est une contraction; donc, il existe un voisinage N_2 de l'origine, tel que $T(N_2) \subseteq N_2$. ■

Remarque 3.5.3 : On introduit N_2 à cause de la présence de $T(X)$ dans (15)

Alors, si on pose:

$$N' = N^\varepsilon \cap N_1 \cap N_\delta \cap N_2$$

on a, d'après (12), (15), (20) et (21):

$$\|\mathcal{L}_T f\|_{N'}^k \leq s^{-1} \left[(S + \delta)^k + AM\varepsilon \right] \|f\|_{N'}^k \quad (22)$$

de plus, d'après (7) et (8), on a:

$$k > \frac{Lns}{LnS} \Rightarrow kLnS < Lns$$

$$\Rightarrow S^k < s$$

$$\Rightarrow s^{-1}S^k < 1$$

donc, par continuité, il est clair que l'on peut choisir δ et ε assez petit pour que:

$$s^{-1} \left[(S + \delta)^k + AM\varepsilon \right] < 1$$

ce qui, avec (22), prouve le lemme 3.5.2

On est maintenant en mesure de donner la preuve de la proposition 3.5.2

D'après la proposition 3.5.1, il existe un $R_0 \in T^k$, défini dans un voisinage N de l'origine, tel que:

$$R_0 T R_0^{-1}(X) = LX + o(\|X\|^k)$$

en multipliant à gauche par L^{-1} et à droite par R_0 , on a:

$$L^{-1} R_0 T(X) = R_0(X) + o(\|X\|^k)$$

donc:

$$L^{-1} R_0 T - R_0 \in V_N^k$$

alors, d'après le lemme 3.5.2, il existe un voisinage N_1 de l'origine, $N_1 \subseteq N$, et un $K \in \mathbb{R}$, $0 < K < 1$, tels que:

$$\|\mathcal{L}_T(L^{-1} R_0 T - R_0)\|_{N_1}^k < K \|L^{-1} R_0 T - R_0\|_{N_1}^k$$

donc, si on pose, pour $n \in \mathbb{N}$:

$$R_n = L^{-n} R_0 T^n = \sum_{r=0}^{n-1} \mathcal{L}_T^r(L^{-1} R_0 T - R_0) + R_0$$

on a, pour $m, n \in \mathbb{N}, m \geq n$:

$$\begin{aligned} \|R_m - R_n\|_{N_1}^k &< \sum_{r=n+1}^{m-1} K^r \|L^{-1} R_0 T - R_0\|_{N_1}^k \\ &= \frac{K^{n+1} - K^m}{1 - K} \|L^{-1} R_0 T - R_0\|_{N_1}^k \end{aligned}$$

Comme $K < 1$, on a que la suite $\{R_n\}_{n \geq 1}$ est de Cauchy pour la norme $\|\cdot\|_{N_1}^k$.

D'après le lemme 3.5.1, il existe un voisinage N_2 de l'origine, tel que, pour $f \in V_N^k$, on ait:

$$\|f\|_{N_1 \cap N_2}^0 + \dots + \|f\|_{N_1 \cap N_2}^{k-1} < \|f\|_{N_1 \cap N_2}^k$$

On a donc que la suite $\{R_n\}_{n \geq 1}$, ainsi que toutes ses dérivées partielles d'ordre $\leq k$, convergent uniformément sur $N_1 \cap N_2$, c'est-à-dire que la suite $\{R_n\}_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $N_1 \cap N_2$, vers une fonction $R \in T^k$, et on a:

$$\begin{aligned} L^{-1} R T &= L^{-1} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} L^{-1} R_0 T^n \right) T \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} L^{-(n+1)} R_0 T^{n+1} = R \end{aligned}$$

donc $RT R^{-1} = L$

ce qui prouve la proposition 3.5.2

Remarque 3.5.4 : R a été défini sur $N_1 \cap N_2$, cependant, si $N_1 \cap N_2 \subset N_3$ et $T^r(N_1 \cap N_2) \subset N_3$ pour un $r \in \mathbb{N}$, et si on pose $S = L^{-r} R T^r$, alors S est défini sur N_3 et $ST S^{-1} = L$.

Nous sommes maintenant en mesure (sous certaines conditions) de linéariser simultanément le groupe discret $\{Id, T, T^2, T^3, \dots\}$ engendré par un $T \in T^k$. En effet, si

$$RTR^{-1} = DT(0)$$

alors,

$$RT^n R^{-1} = (RTR^{-1})^n = DT(0)^n = D(T^n)(0)$$

Nous allons maintenant passer du cas discret au cas continu par le lemme et la proposition suivants:

Lemme 3.5.3 Soit $\{T_t\}_{t \in I}$ un groupe continu à un paramètre d'éléments de T^k où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle contenant l'origine:

$$T_{s+t} = T_s \circ T_t \quad \text{pour } s, t \in I \text{ et } s+t \in I$$

S'il existe un $t_0 > 0$ tel que $[-2t_0, 2t_0] \subseteq I$ et T_{t_0} est linéaire, alors il existe un $R \in T^k$ tel que

$$RT_t R^{-1} = L_t \quad \text{pour } t \in [-t_0, t_0]$$

où $\{L_t\}_{t \in I}$ est le groupe continu à un paramètre défini par

$$L_t = DT_t(0)$$

Preuve. On peut, sans perte de généralité, supposer que $t_0 = 1$, posons alors:

$$R = \int_0^1 L_{-\alpha} T_\alpha d\alpha \in T^k$$

on a alors, pour $t \in [-1, 1]$:

$$L_t R = \int_0^1 L_{-\alpha+t} T_\alpha d\alpha = \int_{-t}^{1-t} L_{-\alpha} T_{\alpha+1} d\alpha = \int_{-t}^0 L_{-\alpha} T_{\alpha+1} d\alpha + \int_0^{1-t} L_{-\alpha} T_{\alpha+1} d\alpha \quad (23)$$

comme T_1 est linéaire, on a:

$$L_1 = DT_1(0) = T_1 \text{ et } L_{-1} T_1 = Id$$

alors

$$\int_{-t}^0 L_{-\alpha} T_{\alpha+1} d\alpha = \int_{-t}^0 L_{-\alpha} (L_{-1} T_1) T_{\alpha+1} d\alpha = \int_{1-t}^1 L_{-\alpha} T_{\alpha+t} d\alpha$$

donc, d'après (23):

$$L_t R = \int_0^1 L_{-\alpha} T_{\alpha+1} d\alpha = R T_t \quad \text{et} \quad R T_t R^{-1} = L_t$$

ce qui prouve le lemme 3.5.3 ■

Proposition 3.5.3 *Soit $\{T_t\}_{t \in I}$ un groupe continu à un paramètre d'éléments de T^k où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle contenant l'origine. S'il existe un $t_0 > 0$ tel que $[-2t_0, 2t_0] \subseteq I$ et T_{t_0} satisfait les hypothèses de la proposition 3.5.2, alors il existe un $R \in T^k$ tel que:*

$$R T_t R^{-1} = D T_t (0) \quad \text{pour } t \in [-t_0, t_0]$$

Preuve. D'après la proposition 3.5.2, il existe un $R_1 \in T^k$ tel que

$$R_1 T_{t_0} R_1^{-1} = D T_{t_0} (0)$$

donc, si on pose $U_t = R_1 T_t R_1^{-1}$, on a, d'après le lemme 3.5.3, qu'il existe un $R_2 \in T^k$ tel que:

$$\begin{aligned} R_2 U_t R_2^{-1} &= D U_t (0) & \text{pour } t \in [-t_0, t_0] \\ &= D R_1 (0) D T_t (0) D R_1 (0)^{-1} \end{aligned}$$

Alors, si on pose:

$$R = D R_1 (0)^{-1} R_2 R_1 \in T^k$$

on a pour $t \in [-t_0, t_0]$:

$$\begin{aligned} R T_t R^{-1} &= D R_1 (0)^{-1} . R_2 R_1 T_t R_1^{-1} R_2^{-1} D R_1 (0) \\ &= D R_1 (0)^{-1} R_2 U_t R_2^{-1} D R_1 (0) \\ &= D R_1 (0)^{-1} D U_t (0) D R_1 (0) \\ &= D T_t (0) \end{aligned}$$

ce qui prouve la proposition 3.5.3 ■

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer le théorème 3.5.2:

Comme λ est dans le domaine de Poincaré, on peut supposer, d'après (1), que

$$\operatorname{Re} \lambda_1, \dots, \operatorname{Re} \lambda_n < 0 \quad (24)$$

Désignons par $\emptyset(t, X)$ le flot de l'équation (3). Si on pose

$$T_t(X) = \emptyset(t, X)$$

alors $\{T_t\}_{t \in I}$ est un groupe continu à un paramètre d'éléments de T^k défini pour $t \in I$, où $I \subseteq \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert autour de l'origine.

Et on a:

$$DT_t(0) = e^{At} \quad \text{où} \quad A = Df(0)$$

Si on pose $s_i = e^{\lambda_i}$, $1 \leq i \leq n$ les valeurs propres de $DT_t(0)$ sont données par $s_i^t = e^{\lambda_i t}$, $1 \leq i \leq n$. Pour $\forall t$, $DT_t(0) = e^{At}$ est semi-simple et pour $\forall t > 0$, on a, d'après (24):

$$0 < |s_i^t| < 1, \quad 1 \leq i \leq n \quad (25)$$

et d'après (2) et (24):

$$\begin{aligned} k &> \frac{\max_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} t \lambda_i|}{\min_{1 \leq i \leq n} |\operatorname{Re} t \lambda_i|} \\ &= \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} t \lambda_i}{\min_{1 \leq i \leq n} \operatorname{Re} t \lambda_i} \\ &= \frac{\max_{1 \leq i \leq n} \ln |s_i^t|}{\min_{1 \leq i \leq n} \ln |s_i^t|} \\ &= \frac{\ln \max_{1 \leq i \leq n} |s_i^t|}{\ln \min_{1 \leq i \leq n} |s_i^t|} \end{aligned} \quad (26)$$

Considérons maintenant le lemme suivant

Lemme 3.5.4 Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$, des valeurs non résonantes:

$$m_1 \lambda_1 + \dots + m_n \lambda_n \neq \lambda_i, \quad \forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n$$

alors, il existe un ensemble $J \subseteq \mathbb{R}$ partout dense dans $\mathbb{R}$, tel que:

$$\forall t \in J, \quad e^{m_1 t \lambda_1 + \dots + m_n t \lambda_n} \neq e^{t \lambda_i} \quad \text{pour} \quad \forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n$$

il est donc clair, d'après le lemme 3.5.4, qu'il existe un $t_0 > 0$ tel que $[-2t_0, 2t_0] \subseteq I$ et:

$$s_1^{t_0 m_1} \dots s_n^{t_0 m_n} \neq s_i^{t_0}, \quad \forall m_1, \dots, m_n \in \mathbb{N}, m_1 + \dots + m_n \geq 2 \quad \text{et} \quad 1 \leq i \leq n \quad (27)$$

On a alors, d'après (25), (26) et (27), que T_{t_0} satisfait les hypothèses de la proposition 3.5.2; donc, par la proposition 3.5.3, il existe un $R \in T^k$ tel que

$$RT_t R^{-1} = DT_t(0) = e^{At} \quad \text{pour} \quad t \in [-t_0, t_0]$$

Alors, si on applique à l'équation (3) le changement de variable

$$Y = R(X)$$

on obtient:

$$\begin{aligned}
 \dot{Y} &= DR(X) \dot{X} = DR(X) f(X) = DR(X) \frac{d\phi(t, X)}{dt} \Big|_{t=0} \\
 &= DR(R^{-1}Y) \frac{dT_t(R^{-1}Y)}{dt} \Big|_{t=0} = \frac{d(RT_t R^{-1}(Y))}{dt} \Big|_{t=0} \quad \text{car } T_0 = Id \\
 &= \frac{de^{At}Y}{dt} \Big|_{t=0} = Ae^{At}Y \Big|_{t=0} = AY = Df(0)Y
 \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration du théorème 3.5.2.

3.6 Forme normale d'une application au voisinage d'un point fixe

La construction d'un système de coordonnées convenable pour l'application d'espace dans lui-même au voisinage d'un point fixe rappelle la théorie des formes normales des équations différentielles au voisinage de la position d'équilibre. Dans ce paragraphe on indique comment se formulent en conséquence les notions fondamentales de la théorie des formes normales.

On considère l'application de classe $\mathbb{C}^{r+1}$, $F : \Omega \subseteq \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$, où $r \geq 2$ et Ω voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

On suppose que 0 est un point fixe de F c'est-à-dire $F(0) = 0$, Alors : on peut écrire $F(x)$:

$$F(x) = Ax + f^2(x) + f^3(x) + \dots + f^r(x) + O(|x|^{r+1}), x \in \Omega, x \rightarrow 0 \quad 3.1$$

où A une matrice carré constante d'ordre n et $f^k \in H_n^k$ pour $2 \leq k \leq r$, H_n^k l'espace vectoriel des polynôme homogène en x de degré k à coefficient dans $\mathbb{R}^n$.

Si on fait le changement de variable en (3.1) par:

$$x = H(y) = y + h^k(y), \quad y \in \Omega_k \quad 3.2$$

où $h^k \in H_n^k$, $2 \leq k \leq r$ et $\Omega_k \subseteq \Omega$ est un voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$.

L'inverse du changement de variable (3.2) est:

$$y = x - h^k(x) + O(|x|^{k+1}), x \rightarrow 0$$

est difféomorphisme dans Ω_k . Transformation de (3.1), $G = H^{-1} \circ F \circ H$, prendras la forme:

$$G(y) = Ay + f^2(y) + f^3(y) + \dots + f^{k-1}(y) + [f^k(y) + Ah^k(y) - h^k(Ay)] + O(|y|^{k+1}), y \rightarrow 0 \quad 3.3$$

où $G(y)$ définit dans Ω_k .

On définit l'opérateur $L_A^k : H_n^k \rightarrow H_n^k$

$$h(x) \rightarrow L_A^k h(x) = h(Ax) - Ah(x) \quad 3.4$$

Schéma algébrique :

Considérons l'opérateur L_A^k pour tout k , on a $L_A^k(H_n^k) \subset H_n^k$, et il existe donc un supplémentaire G_k de $\text{Im}(L_A^k)$ dans H_n^k :

$$H_n^k = \text{Im}(L_A^k) \oplus G_k \quad 3.5$$

Le choix d'une forme normale dépend donc non seulement du choix de $h \in H_n^k$ pour toute k (à un élément du noyau L_A^k près), mais aussi du choix du supplémentaire G_k . Le cas le plus simple et celui où $L_A^k(H_n^k) = H_n^k$ et où $G_k = \{0\}$ ce qui permet de simplifier les termes de degré k . Dans les autres cas, les termes de G_k sont des termes qu'on ne peut pas simplifier.

Définition 3.6.1 Les éléments de G_k sont les termes **résonants** de degré k .

Théorème 3.6.1 Supposons que la décomposition:

$$H_n^k = \text{Im}(L_A^k) \oplus G_k$$

donné pour $k = 2, 3, \dots, r$. Alors il existe une série de changement de variable tangente à l'identité :

$$x = y + h^k(y), \quad y \in \bar{\Omega}, \quad 2 \leq k \leq r,$$

où $h^k \in H_n^k$ et $\bar{\Omega} \subseteq \Omega$ voisinage de l'origine dans $\mathbb{C}^n$ tel que (3.1) prend la forme:

$$G(y) = Ay + g^2(y) + \dots + g^r(y) + O(|y|^{r+1}), y \in \bar{\Omega} \text{ où } g^k(y) \in G_k, \quad 2 \leq k \leq r \quad 3.6$$

Définition 3.6.2 La forme tronquée de (3.6)

$$G(y) = Ay + g^2(y) + \dots + g^r(y)$$

est appelé : *A-forme normale de (3.1) d'ordre r .*

Définition 3.6.3 Soient $\sigma(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\} \subset \mathbb{C}$, le spectre de A . La relation suivante est appelé **résonance**

$$\lambda^\alpha = \lambda_j, \quad 1 \leq j \leq n \quad (3.7)$$

où :

$$\lambda^\alpha = \lambda_1^{\alpha_1} \dots \lambda_n^{\alpha_n}, |\alpha| \geq 2$$

soient : $(x_1, \dots, x_n)$ les coordonnées dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{C}^n$ dans laquelle la matrice A a une forme normale de Jordan par les éléments diagonales $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. Alors un monôme $x^\alpha e_j$ ($|\alpha| = k \geq 2$ et $1 \leq j \leq n$) est appelé **Monôme résonnant** d'ordre k si seulement si $\lambda^\alpha = \lambda_j$ est vérifiée.

Exemple 3.6.1 Pour $n = 1$ sont résonnantes la valeur 0 et les racines de toute puissance entière de l'unité, sont non résonnantes les autres valeurs λ .

Définition 3.6.4 Une collection de valeurs propres appartient au **domaine de Poincaré** si leurs modules sont tous plus petits ou tous plus grands que l'unité.

Donc, si une application F est telle que les valeurs propres de sa partie linéaire appartiennent au domaine de Poincaré, alors au voisinage de l'origine des coordonnées ou bien elle, ou bien son inverse est contractante selon que $|\lambda| > 1$ ou < 1 .

Définition 3.6.5 Le complément du domaine de Poincaré est le **domaine de Siegel**. Pour $n = 1$ le domaine de Siegel est le cercle unité $|\lambda| = 1$. L'équation de la résonance $\lambda_s = \lambda^m$ définit une hypersurface complexe dans l'espace des valeurs propres $\mathbb{C}^n$, appelée **surface résonnante**. Les surfaces résonnantes sont discrètes dans le domaine de Poincaré. Les points résonnants et les points non résonnants sont partout denses dans le domaine de Siegel.

3.6.1 Linéarisation formelle

On étudie d'abord la forme normale formelle au point fixe d'une application.

Théorème 3.6.2 Si la collection des valeurs propres d'une application F n'est pas résonnante au point fixe de F , alors l'application $x \rightarrow F(x)$ se ramène à sa partie linéaire $x \rightarrow Ax$ par le changement formel de variable $x = f(y) = y + \dots$

$$F \circ f = f \circ A.$$

Preuve. Soit $H(y) = y + h(y)$, où h est un polynôme vectoriel homogène de degré $r \geq 2$. On a

$$H \circ A \circ H^{-1}(x) = Ax + [h(Ax) - Ah(x)] + \dots$$

où les points de suspension désignent les termes d'ordre plus grand que r . L'expression entre crochets est un polynôme vectoriel homogène de degré r , dépendant linéairement de h . L'opérateur linéaire

$$L_A : h(x) \mapsto [h(Ax) - Ah(x)]$$

possède sur l'espace des polynômes vectoriels homogènes les valeurs propres $\lambda^m - \lambda_s$ et les vecteurs propres $h(x) = x^m e_s$ (comme toujours les vecteurs e_k constituent la base propre de l'opérateur A , $x^m = x_1^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, x_k , les coordonnées dans la base $\{e_k\}$; les valeurs propres de l'opérateur, par souci de simplicité, sont supposées distinctes). Nous sommes donc conduits à l'équation homologique

$$L_A h = \dot{v},$$

pour résoudre cette équation il faut diviser les coefficients du développement de v par les nombres $\lambda^m - \lambda_s$. Donc la condition de résonance s'écrit ici $\lambda_s = \lambda^m$. ■

3.6.2 Problèmes de convergence.

Les théorèmes de Poincaré et de Siegel admettent les généralisations suivantes au cas où le temps est discret.

Théorème 3.6.3 (théorème de Poincaré) *Si les valeurs propres d'un difféomorphisme holomorphe en un point fixe sont toutes inférieures (ou supérieures) à l'unité en module et si n'existe pas de résonance, alors cette application se transforme en sa partie linéaire par un difféomorphisme biholomorphe local au voisinage du point fixe.*

Théorème 3.6.4 (théorème de Siegel) *Pour presque toute (au sens de la mesure de Lebesgue) collection des valeurs propres de la partie linéaire d'un difféomorphisme holomorphe en son point fixe, ce difféomorphisme se transforme en sa partie linéaire par un difféomorphisme biholomorphe en ce point.*

Plus exactement, pour qu'un difféomorphisme soit équivalent à sa partie linéaire, il suffit que ses valeurs propres vérifient les inégalités

$$|\lambda_s - \lambda^m| \geq c |m|^{-\nu},$$

pour tous les $s = 1, \dots, n$, $|m| = \sum m_k \geq 2$, $m_k \geq 0$. Les collections de valeurs propres vérifiant cette inégalité sont dites collections de type multiplicatif (c, ν) . L'ensemble des collections de valeurs propres λ qui ne sont pas de type multiplicatif (c, ν) pour aucun c est de mesure nulle si $\nu > \frac{(n-1)}{2}$.

3.6.3 Cas résonnant

A toute résonance $\lambda_s = \lambda^m$ est associé un monôme vectoriel résonant $x^m e_s$ (où e_s est un vecteur de la base propre, $x^m = x^{m_1} \dots x_n^{m_n}$, x_k les coordonnées dans la base propre).

Théorème 3.6.5 (théorème de Poincaré-Dulac) *L'application formelle $x \mapsto Ax + \dots$, où la matrice de l'opérateur A est diagonale, se ramène par le changement de variables formel $x = y + \dots$, à la forme normale $y \mapsto Ay + w(y)$, où la série w est constituée uniquement de monômes résonnants. Si les valeurs propres de la partie linéaire de l'opérateur A sont toutes inférieures (ou toutes supérieures) en module à l'unité, alors l'application holomorphe $x \mapsto Ax + \dots$, se ramène par un changement de variables biholomorphe à une forme normale polynômiale composée uniquement de termes résonnants.*

Dans le cas résonnant la méthode de Poincaré est généralement utilisée pour réduire à la forme normale un nombre fini de termes de la série de Taylor d'une application en son point fixe.

Exemple 3.6.2 *Soit une application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, de point fixe 0, et dont la valeur propre λ est racine n -ième de l'unité. cette application s'écrit dans un système de coordonnées convenable*

$$x \mapsto \lambda x + cx^{n+1} + O(|x|^{2n+1}).$$

Pour $\lambda = -1$ par exemple, cette application devient

$$x \mapsto -x + cx^3 + O(|x|^5).$$

Cette formule permet d'étudier la stabilité du point fixe d'une application réelle.

En effet, le carré de cette application est

$$x \mapsto -x - 2cx^3 + O(|x|^5).$$

Donc, si $c > 0$, le point fixe 0 est stable.

Par la suite, les premiers pas de la méthode de Poincaré permettent d'étudier la stabilité du point fixe dans le cas où l'approximation linéaire est douteuse.

4

Conclusion

Au cours de ce mémoire, nous avons étudié l'équation différentielle

$$\dot{X} = f(X) \quad , \quad f(0) = 0 \tag{1}$$

autour de son point d'équilibre $X = 0$

Dans la section 3.1, nous avons vu que, peu importe la nature de f , nous pouvons, jusqu'à un ordre fini (plus petit ou égal à l'ordre de différentiabilité de f), ramener l'équation (1) à une forme polynômiale (linéaire s'il n'y a pas de résonance) et que, si $Df(0)$ est diagonalisable, les seuls monômes restants sont des monômes résonants.

Pour se débarrasser du reste-aussi petite soit-il-, il nous a fallu raffiner nos hypothèses de départ et ce, plus particulièrement en ce qui concerne la nature des valeurs propres de $Df(0)$.

Dans le cas où f est analytique (complexe ou réelle), on a vu que, si les valeurs propres de $Df(0)$ sont dans le domaine de Poincaré, le théorème de Poincaré-Dulac nous permettait de ramener l'équation (1) à une forme polynômiale comportant seulement des monômes résonants ou linéaires, dans le cas de non-résonance.

Si les valeurs propres de $Df(0)$ ne sont pas dans le domaine de Poincaré, la condition de non-résonance, suffisante pour une linéarisation formelle, s'est avérée insuffisante pour une linéarisation par changement de variable analytique. Ce à quoi nous sommes parvenu par le théorème de Siegle, qui suppose que les valeurs propres de $Df(0)$ sont de type (C, v) et que $Df(0)$ est diagonalisable-cette dernière condition n'étant pas requise pour le théorème Poincaré-Dulac.

L'étude de formes normales autres que linéaires ou polynômiales (toujours dans le cas de f analytique) ainsi que les différentes conditions d'existence de changement de variable

formelle, analytique ou autre, pour y parvenir a été faite dans l'article de Brjuno (1971), cité en référence.

Dans le cas où f est réelle, C^∞ ou C^k , nous avons démontré la linérisation par un changement de variable C^∞ que dans le cas le plus simple: celui où $Df(0)$ est diagonalisable et où ses valeurs propres sont non résonantes et situées dans le domaine de Poincaré. D'autres résultats plus complets, ainsi que leur démonstration (en grandes lignes), sont exposés dans les articles de Sternberg [5] et [6]

Notons pour finir qu'il y a eu différentes études de formes normales pour l'équation (1) dans le cas où la matrice $Df(0)$ a une forme bien précise et une dimension donnée: par exemple, dans l'article de Takens (1973), cité en référence.

Bibliographie

- [Abraham] R. Abraham, J. E. Marsden, T. Ratiu, Manifolds tensor analysis and applications, 2nd edition, Springer-Verlag, 1982.
- [Arnold] V. I. Arnold, Chapitres supplémentaires de la théorie des équations différentielles ordinaires. Edition Mir, Moscou 1984.
- [Arnold] V. I. Arnold, Singularités des applications différentiables. 1^{ère} partie, Edition Mir, Moscou, Traduction française 1986.
- [Birkhoff] ,1927, Dynamical Systems, American Mathematical Society Publications; Providence.
- [Brjuno] , 1964, The Normal Forme of Differential Equations. Soviet Mathematics Dokl. vol 5, pp.1105-1108.
- [Brjuno] , 1971, Analytic Form of Differential Equations. Transactions of the Moscow Mathematical Society, vol 25, pp.131-288.
- [Chen] , 1963, Equivalence and Decomposition of Vector Fields about an Elementary Critical Point. Amercan Journal of Mathematics, vol.85,pp 693-722.
- [Chery] , 1927, On the Solution of Hamiltonian Systems of Differential Equations in the Neighborhood of Singular Point. Proc London Mathematical Society , vol 27, pp 151-170.
- [Dedieu] J. P. Dedieu, Points fixes, zéros et la méthodes de Newton, Springer-Verlag.
- [Demazure] J. Demazur, Catastrophes et Bifuractions, Ellipes, 1982.
- [Die] J. Dieudonné, Eléments d'analyse, Gauthier-Villars, 1968.

- [Dul1] H. Dulac, Recherches sur les points singuliers des équations différentielles, Journal de l'École Polytechnique (1904).
- [Dul2] H. Dulac, Détermination et intégration d'une certaine classe d'équations différentielles, Bulletin des sciences mathématiques (1908).
- [Guckenheimer] H.Dulac, Solution d'un système d'équations différentielles dans le voisinage des valeurs singulières, Bulletin de la société mathématique de France, tome 40; pp. 324-384.
- [Guckenheimer] J.Holmes, Non-lineare Oscillations, Dynamical Systeme and Bifurcations of Vector Fields, Springer Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo,1983.
- [Guillaum] Calcule Molin et théorie des formes normales classiques et renormalisées, Thèse de Doctorat 2010.
- [E.Picard] , Traité d'analyse, vol3, Paris, 1896.
- [Pliss] V.A, 1965, On the Reduction of an Analytic System of Differential Equations to a Linear Form. Differential Equations vol 1, pp 111-118.
- [Poincaré.H] Thèse, Paris; in Œuvres complètes.
- [Siegl] C.L, Über die Normalform analityscher Differentialgleichungen in der Nähe einer Gleichgewichtslösung. Göttinger Nachrichten der Akademie der Wissenschaften, pp.21-30.
- [Sternberg.S] Local Contractions and a Theorem of Poincaré. American Journal of Mathematics, vol 79, pp 809-824. 1957.
- [Sternberg.S] The structure of local Homeomorphisms of Euclidean n-Space II, Amercan Journal of Mathematics, vol.81, pp 578-1958.
- [Takens] 1973, Normal Forme for Certain Singularities of Vector Fields, Annales de l'institut Fourier, vol.23, pp 16.