

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**

**HOUARI BOUMEDIENNE**

**FACULTE DE PHYSIQUE**



**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER**

**En : PHYSIQUE**

**Spécialité : Physique Théorique des Basses et Moyennes Energies**

**Par : FELTANE FOUJIL**

**Thème**

**Effets de la Longueur Minimale en Mécanique Quantique  
Relativiste**

Soutenu publiquement, le 04 / 11 / 2014, devant le jury composé de :

M. A. CHOUCHAOUI	Professeur, à l'USTHB	Président
M. K. NOUCER	Professeur, à l'Univ. Jijel	Directeur de mémoire
M. M. BENTAIBA	Professeur, à l'Univ. Blida	Examineur
M. M. DJEBLI	Professeur, à l'USTHB	Examineur
M. O.CHERBAL	Maitre de conférences/A, à l'USTHB	Examineur

# Remerciements

*Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique Théorique (LPTh) de Jijel.*

*Je remercie Dieu le tout Puissant pour la volonté, la patience et l'intuition qu'il m'a donné pour faire ce mémoire.*

*Je tiens à exprimer sincèrement ma gratitude et mes remerciements à mon encadreur Mr Nouicer Kh. Professeur à l'université de Jijel, pour m'avoir choisi un sujet qui répondait parfaitement à mes penchants scientifiques et pour l'aide et le temps qu'il a bien voulu me consacrer et pour ses critiques et ses recommandations insistantes qui m'ont poussé à découvrir des résultats très intéressants.*

*Mes sincères remerciements à Mr. M. Chouchaoui Professeur à l'université de USTHB pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.*

*Je remercie, également et sincèrement Mr. M. Bentaïba, professeur à l'université de Blida, Mr. O. Cherbal, Maître de Conférences à l'université de USTHB, et Mr. M. Djebli, professeur à l'université de USTHB, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce modeste travail en acceptant de le juger.*

*J'exprime ma gratitude à tous les gens qui m'ont aidé de près ou de loin dans la préparation de mon mémoire.*

*Je remercie également tous les enseignants de la post-graduation de Physique Théorique Des Basse et Moyennes Energies 2009 /2010 qui ont contribué à notre formation scientifique et je remercie fortement tous mes collègues qui étaient toujours prêts à m'aider, sans oublier bien sûr de remercier tous les membres de ma famille qui ont accepté de faire beaucoup de sacrifices pour que je réussisse dans cette aventure scientifique.*

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>2</b>	<b>Algèbres généralisées</b>	<b>8</b>
2.1	Principe d'incertitude généralisé . . . . .	8
2.2	Relations de commutation relativistes . . . . .	11
<b>3</b>	<b>Equation relativiste généralisée de Klein-Gordon</b>	<b>15</b>
3.1	Equation généralisée de Klein-Gordon . . . . .	15
3.2	Densité de probabilité et de courant modifiés . . . . .	16
3.3	Les solutions de l'équation généralisée de Klein-Gordon . . . . .	17
<b>4</b>	<b>Equation relativiste généralisée de Dirac</b>	<b>20</b>
4.1	Equation de Dirac . . . . .	20
4.1.1	La forme covariante de l'équation de Dirac . . . . .	22
4.2	Equation généralisée de Dirac . . . . .	22
4.2.1	Densité de probabilité et densité du courant de probabilité . . . . .	23
4.2.2	Fonctions d'onde . . . . .	24
4.2.3	Solutions des particules libres . . . . .	25
4.2.4	Spin de la particule libre . . . . .	31
<b>5</b>	<b>Paradoxe de Klein et particule dans une boîte de potentiel</b>	<b>38</b>
5.1	Paradoxe de Klein pour les particules de spin-0 . . . . .	38
5.2	Une particule dans un puits à une dimension . . . . .	46

**6 Conclusion**

**54**

**Bibliographie**

**56**

# Chapitre 1

## Introduction

Le principe d'incertitude généralisée (GUP) est une caractéristique commune à tous les candidats les plus prometteurs de la gravitation quantique. En effet, la théorie des cordes, la gravitation quantique à boucles, la physique des trous noirs, et la géométrie non commutative (basée sur une compréhension plus profonde de la nature de l'espace-temps à l'échelle de Planck) convergent toutes vers la nécessité d'une modification du principe standard de Heisenberg, et par conséquent vers l'introduction d'une longueur minimale de l'ordre de la longueur de Planck. Il a été montré que les mesures en gravitation quantique doivent être régies par un principe d'incertitude généralisée [1 – 11].

En mécanique quantique habituelle, les observables physiques sont décrites par des opérateurs agissant sur l'espace des états de Hilbert. Les plus fondamentales, l'opérateur de position  $X$  et l'opérateur d'impulsion  $P$  vérifient la relation de commutation canonique  $[X, P] = i\hbar$ , où  $\hbar$  est la constante de Planck. Discutons maintenant comment introduire une longueur minimale dans la mécanique quantique standard. Les travaux originaux sur cette approche sont dûs à Kempf et ses collaborateurs [12, 13] sachant qu'en mécanique quantique ordinaire, le principe d'incertitude de Heisenberg (HUP) est donné par  $\Delta X \Delta P \geq \frac{\hbar}{2}$ . En mécanique quantique généralisée la relation de commutation canonique prend la forme  $[X, P] = i\hbar f(P)$ , où  $f(P)$  est une fonction arbitraire de  $P$ . En assumant une situation isotrope et l'exigence de protéger l'algèbre standard de Heisenberg au plus bas en  $P^2$ , la version la plus simple d'une algèbre déformée capable de produire une longueur minimale est [12] :

---

$$[X, P] = i\hbar(1 + \beta P^2 + \dots). \quad (1.1)$$

L'existence de la longueur minimale signifie qu'il n'y a aucune possibilité de mesurer la position avec un ordre de précision plus petit que la longueur minimale. En outre la notion de localisation est aussi perdue, ce qui induit un grand changement dans la façon de construire un espace de Hilbert des états acceptable physiquement.

Dans le chapitre 2 on étudiera avec détails les relations de commutation déformées non covariante et covariante et on déduira dans chaque cas la longueur minimale. Dans le chapitre 3, nous allons étudier l'équation de Klein-Gordon dans le cadre du principe d'incertitude généralisé. Grâce à une représentation des opérateurs position et impulsion généralisé nous déduisons l'équation modifiée de Klein-Gordon en utilisant l'algèbre déformée invariante de Lorentz développée par Quesne et Tkachuk [14, 15]. Nous étudierons différentes propriétés et nous déduirons particulièrement la densité de probabilité ainsi que la densité du courant de probabilité de la particule de Klein-Gordon. Ensuite, nous étendrons notre étude à une particule spinorielle en étudiant la généralisation de l'équation de Dirac en présence de la longueur minimale. Dans ce chapitre, nous obtiendrons le spineur de Dirac pour une particule libre, ainsi que la densité de probabilité et la densité du courant de probabilité. Dans les deux cas, particule de Klein-Gordon et particule de Dirac nous montrerons que les masses physiquement acceptables n'existent que si le paramètre de déformation vérifie la contrainte  $\beta < \frac{1}{8m^2c^2}$ . Le chapitre 5, qui constitue l'essentiel de ce mémoire est consacré à l'étude du paradoxe de Klein pour une particule scalaire et au calcul des fonctions d'onde et spectre d'énergie d'une particule de Dirac confiné dans une boîte de potentiel unidimensionnel. Enfin, dans le chapitre réservé à la conclusion, nous discuterons des résultats obtenus ainsi que de leur validation.

# Chapitre 2

## Algèbres généralisées

### 2.1 Principe d'incertitude généralisé

Toutes les théories et approches candidats potentiels pour une théorie quantique de la gravitation prédisent l'existence d'une longueur minimale au-dessous de laquelle on ne peut plus sonder les particules à cause des effets gravitationnels forts qui se feraient sentir à très petites distances et déformeraient l'espace-temps [1, 2, 4, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Un prototype de longueur minimale est donné par la relation [12]

$$l_{\min} = \hbar\sqrt{\beta}, \quad (2.1)$$

où  $\beta$  est un paramètre petit et positif. Cette relation redonnerait aux particules leur vraie nature d'être non ponctuelles et débarrasserait la théorie quantique du lourd fardeau qu'est l'énergie infinie du vide ou la catastrophe Ultra-Violette. Une des approches théoriques pour exploiter cette longueur minimale est de l'intégrer dans la théorie quantique, a été investi par Achim Kempf et ses collaborateurs [12] en proposant une mécanique quantique déformée basée sur une généralisation non triviale de la relation de commutation canonique entre les opérateurs position et impulsion  $X$  et  $P$ . La première mission théorique de cette relation de commutation généralisée [12, 13, 24, 25, 26] est d'aboutir au moins à une incertitude minimale non nulle sur la longueur et/ou sur l'impulsion.

La plus simple version de la relation de commutation généralisée est donnée par [12] :

$$[X, P] = i\hbar (1 + \beta P^2), \quad (2.2)$$

avec  $P^2 = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2$ . Le membre à droite de (2.2) pourrait être une fonction beaucoup plus compliquée de  $P$  et de  $X$ . Une généralisation possible en est la suivante :

$$[X, P] = i\hbar (1 + f(P^2)). \quad (2.3)$$

Où  $f(P^2)$  est une fonction de  $P^2$  afin d'assurer l'invariance par rotation, et qu'il est naturelle de retrouver la relation de commutation standard à basses énergies,  $f(P) \rightarrow 1$  pour  $P \rightarrow 0$ .

Dans la cadre de ces hypothèses, on peut développer  $f$  autour de  $P = 0$  :

$$f(P) = 1 + \beta P^2 + o(P^4), \quad (2.4)$$

ce qui permet d'obtenir au premier ordre en  $\beta$  le principe d'incertitude généralisé (GUP) :

$$\Delta X \Delta P \geq \frac{1}{2} \hbar (1 + \beta \Delta P^2). \quad (2.5)$$

De cette relation on déduit l'incertitude sur la position

$$\Delta X \geq \frac{1}{2} \hbar \left( \frac{1}{\Delta P} + \beta \Delta P \right). \quad (2.6)$$

Comme on peut le voir sur la (2.1). Les valeurs possibles de  $\Delta X$  et  $\Delta P$  sont situées au-dessus de la courbe rouge. On peut voir qu'à basse énergie on retrouve l'incertitude habituelle sur la position

$$\Delta X \gtrsim \frac{\hbar}{2 \Delta P}, \quad (2.7)$$

alors qu'à haute énergie l'incertitude sur la position se comporte comme

$$\Delta X \gtrsim \frac{\hbar}{2} \beta \Delta P. \quad (2.8)$$

Cette dernière relation exprime un mélange entre le secteur  $IR$  et le secteur  $UV$ . Ce mélange  $UV/IR$  a été déjà trouvée dans plusieurs contextes tels que : la théorie non commutative des champs [28, 29, 30], la correspondance Ads/CFT [6, 27], la gravitation quantique [1, 2, 4, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23].

Revenons à la relation (2.6). Prenons l'égalité et dérivons par rapport à  $\Delta P$  :

$$\frac{\partial \Delta X}{\partial \Delta P} = \frac{\hbar}{2} \left( -\frac{1}{\Delta P^2} + \beta \right) = 0. \quad (2.9)$$

Cette équation conduit naturellement à la définition d'une longueur fondamentale minimale donnée par

$$(\Delta X)_{\min} = \hbar \sqrt{\beta}. \quad (2.10)$$

Enfin, pour terminer cette section nous compléterons la nouvelle algèbre par les relations de commutations suivantes :

$$[P_i, P_j] = 0, \quad (2.11)$$

et

$$[X_i, X_j] = 2i\hbar\beta (P_i X_j - P_j X_i). \quad (2.12)$$

Dans cette algèbre les opérateurs du moment angulaire sont alors définis par

$$L_{ij} = \frac{P_i X_j - P_j X_i}{(1 + \beta \vec{P}^2)}, \quad (2.13)$$

Comme on peut le constater, l'existence d'une longueur minimale implique que la notion de localisation dans l'espace des positions est complètement perdue. Cette constatation a d'énormes répercussions sur la façon de définir l'espace de Hilbert des états physiques. Pour y remédier à cette situation on peut chercher ce qu'on appelle des états de localisation maximale qui protègent la longueur minimale [12, 31].

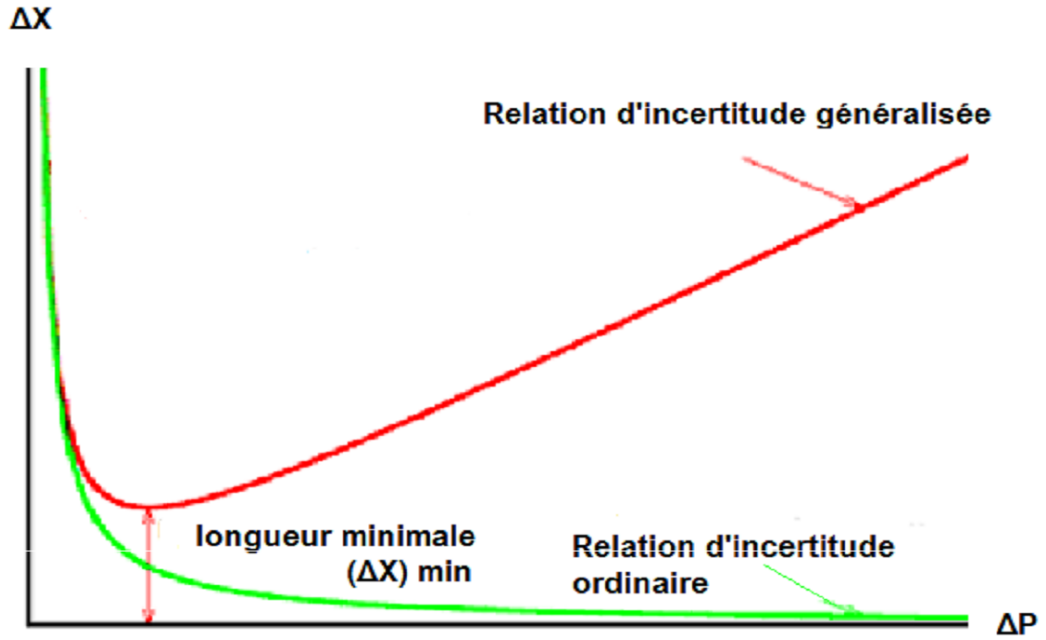


FIGURE 2.1 - Les lignes rouge et verte sont respectivement l'évolution de l'incertitude sur la position avec l'énergie dans le cas du principe d'incertitude de Heisenberg et dans le cas du principe d'incertitude généralisé, respectivement. Comme on peut le remarquer, le dernier cas implique l'existence d'une longueur minimale au dessous de laquelle la matière est insondable.

## 2.2 Relations de commutation relativistes

En 2006, une version covariante de l'algèbre déformée de Kempf a été introduite par Quesne et ses collaborateurs [14, 15]. Dans cette algèbre les quadri-opérateurs position  $X^\mu$  et les quadri-opérateurs impulsions  $P^\nu$  vérifient les relations de commutation suivantes :

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar \left[ (1 - \beta P^\rho P_\rho) g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu \right], \quad (2.14)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = i\hbar \frac{2\beta - \beta' - (2\beta + \beta') \beta P_\rho P^\rho}{(1 - \beta P_\rho P^\rho)} (P^\mu X^\nu - P^\nu X^\mu), \quad (2.15)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0, \quad (2.16)$$

où  $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$  et  $\beta, \beta'$  sont deux paramètres de déformation qui sont supposés positifs ( $\beta, \beta' \geq 0$ ). En termes de la longueur  $L$ , la masse  $M$  et temps  $T$  les paramètres de déformation  $\beta$  et  $\beta'$  ont les dimensions  $M^{-2}L^{-2}T^{-2}$ .

Quand on utilise la métrique de Minkowski, on prend la convention

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1). \quad (2.17)$$

Comme on sait qu'en mécanique quantique, deux opérateurs canoniques  $\hat{A}$  et  $\hat{B}$  vérifient la relation [32]

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[ \hat{A}, \hat{B} \right] \right\rangle \right|. \quad (2.18)$$

On peut écrire pour  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  :

$$(\Delta X)(\Delta P) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle \left[ \hat{X}, \hat{P} \right] \right\rangle \right|. \quad (2.19)$$

Au premier ordre du paramètre  $\beta$ , cette relation prend la forme :

$$(\Delta X^i)(\Delta P^i) \geq \frac{1}{2} \left| \left\langle -i\hbar \left[ (1 - \beta P^\rho P_\rho) - \beta' (P^i)^2 \right] \right\rangle \right|, \quad (2.20)$$

$$\geq \frac{\hbar}{2} \left| \left\langle \left[ 1 - \beta (P_0 P^0 + P_j P^j) - \beta' (P^i)^2 \right] \right\rangle \right|, \quad (2.21)$$

$$\geq \frac{\hbar}{2} \left| 1 - \beta \left\{ \langle (P^0)^2 \rangle - \sum_{j=1}^3 \langle (P^j)^2 \rangle \right\} - \beta' \langle (P^i)^2 \rangle \right|. \quad (2.22)$$

En utilisant la définition de l'écart quadratique moyen :  $(\Delta P)^2 = \langle P^2 \rangle - \langle P \rangle^2$ , on peut écrire :

$$(\Delta X^i)(\Delta P^i) \geq \frac{\hbar}{2} \left| 1 - \beta \left\{ \langle (P^0)^2 \rangle - \sum_{j=1}^3 \left[ (\Delta P^j)^2 + \langle P^j \rangle^2 \right] \right\} - \beta' \left[ (\Delta P^i)^2 + \langle P^i \rangle^2 \right] \right|. \quad (2.23)$$

En supposant que  $\Delta P^i$  est isotrope ( $\Delta P^i = \Delta P$ ,  $i = 1, 2, 3$ ), on obtient :

$$(\Delta X^i)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} \left| 1 - \beta \left\{ \langle (P^0)^2 \rangle - \sum_{j=1}^3 \langle P^j \rangle^2 \right\} + \beta' \langle P^i \rangle^2 + (3\beta + \beta') (\Delta P)^2 \right|. \quad (2.24)$$

Finalement on aboutit à une équation quadratique donnée par :

$$(\Delta X^i)(\Delta P) \geq \frac{\hbar}{2} (3\beta + \beta') (\Delta P)^2 + \frac{\hbar}{2} \left( 1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + \gamma \right), \quad (2.25)$$

avec  $\gamma$  est une constante positive qui dépend de la valeur moyenne de l'impulsion :

$$\gamma = \beta' \langle P^i \rangle^2 + \beta \sum_{j=1}^3 \langle P^j \rangle^2. \quad (2.26)$$

Pour un  $(\Delta X)$  fixe, l'inégalité (2.23) est satisfaite dans l'intervalle  $[\Delta P_-, \Delta P_+]$  où :

$$\Delta P_{\pm} = \frac{(\Delta X^i)}{\hbar(3\beta + \beta')} \pm \sqrt{\frac{(\Delta X^i)^2}{\hbar^2(3\beta + \beta')^2} - \frac{(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + \gamma)}{(3\beta + \beta')}}. \quad (2.27)$$

La plus petite valeur de  $(\Delta X)$  est celle qui correspond à une racine double, c.-à-d.,  $\Delta P_- = \Delta P_+$ , soit :

$$\frac{((\Delta X^i)_0)^2}{\hbar^2(3\beta + \beta')^2} - \frac{(1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle + \gamma)}{(3\beta + \beta')} = 0.$$

De cette équation on tire

$$(\Delta X^i)_{\min} = \hbar \sqrt{(3\beta + \beta') \{1 - \beta [\langle (P^0)^2 \rangle - \sum \langle P^j \rangle^2] + \beta' \langle P^i \rangle^2\}}. \quad (2.28)$$

La valeur minimale  $(\Delta X)_{\min}$ , correspond à  $(\langle P^j \rangle = \langle P^i \rangle = 0)$ . Alors :

$$(\Delta X)_{\min} = (\Delta X^i)_{\min} = \hbar \sqrt{(3\beta + \beta') [1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle]}, \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (2.29)$$

Par rapport au résultat de Kempf [24], il y a un facteur additionnel  $\sqrt{1 - \beta \langle (P^0)^2 \rangle}$  réduisant ainsi  $(\Delta X)_{\min}$ . Pour  $\beta' = 2\beta$  la longueur minimale isotrope devient  $(\Delta X^i)_{\min} \simeq \hbar \sqrt{5\beta}$ .

Nous pourrions aussi formellement utiliser la relation d'incertitude de Heisenberg pour le temps et l'énergie et examiner l'existence possible d'une incertitude non nulle. Nous allons, cependant, s'abstenir de le faire, parce que pour le couple temps-énergie l'incertitude a un statut particulier dans la mécanique quantique. Il ne découle pas de la relation de commutation de deux opérateurs, mais exige une recherche plus soignée et plus détaillée, ce qui nous semble en dehors du cadre de ce mémoire.

Dans le cas particulier  $\beta' = 2\beta$ , les opérateurs de position  $X^\mu$  commutent au premier ordre de  $\beta$ , c.-à-d.,  $[X^\mu, X^\nu] = 0$ . Dans une telle approximation linéaire, l'algèbre déformée de Lorentz-covariante donnée par

$$[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar (g^{\mu\nu} (1 - \beta P_\rho P^\rho) - 2\beta P^\mu P^\nu), \quad (2.30)$$

$$[X^\mu, X^\nu] = 0, \quad (2.31)$$

$$[P^\mu, P^\nu] = 0. \quad (2.32)$$

Dans l'espace des positions, où  $X^\mu$  et  $P^\mu$  agissent sur les fonctions  $\psi(x) = \langle x | \psi \rangle$ . Ces opérateurs peuvent être considérés comme des fonctions des anciens opérateurs  $x^\mu$  et  $p^\mu$ , qui

vérifient la relation de commutation canonique :

$$[x^\mu, p^\nu] = -i\hbar g^{\mu\nu}, \quad [x^\mu, p_\nu] = -i\hbar \delta_\nu^\mu . \quad (2.33)$$

Alors on peut trouver une représentation de  $X^\mu$  et  $P^\mu$  qui vérifie la relation de commutation modifiée (2.2) et vérifient les équations (2.30) et (2.32)

$$X^\mu = x^\mu, \quad (2.34)$$

$$P^\mu = (1 - \beta p^2) p^\mu, \quad (2.35)$$

où  $x^\mu, p^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial x^\mu} = i\hbar \partial^\mu$  et  $p^2 = p_\alpha p^\alpha = (p^0)^2 - \vec{p} \cdot \vec{p}$ .

# Chapitre 3

## Equation relativiste généralisée de Klein-Gordon

ce chapitre est en partie basé sur la référence [33].

### 3.1 Equation généralisée de Klein-Gordon

L'équation de Klein-Gordon pour une particule de spin 0 et masse  $m$  au repos est donnée par [35]

$$\left( \square + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0. \quad (3.1)$$

Où  $\square$  est l'opérateur d'alembertien,  $\square = \partial_\mu \partial^\mu = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta$ , qui est un invariant scalaire.

Le quadri-opérateur d'impulsion est défini par :

$$\hat{p}^\mu = \left( \frac{i\hbar}{c} \frac{\partial}{\partial t}, -i\hbar \vec{\nabla} \right) = i\hbar \partial^\mu, \quad (3.2)$$

ce qui permet d'écrire

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - m^2 c^2) \phi(x) = 0. \quad (3.3)$$

L'équation de Klein-Gordon se généralise à toutes les particules de spin entier, les bosons, qu'elle décrit d'ailleurs correctement. Par contre, elle n'est pas applicable aux particules de spin demi-entier.

Dans la suite on va généraliser l'équation de Klein-Gordon dans le cas où l'opérateur d'impulsion  $\hat{p}^\mu$  est remplacé par l'opérateur d'impulsion déformé  $\hat{P}^\mu$  donné par (2.35), en effectuant

la substitution  $\hat{p}^\mu \longrightarrow \hat{P}^\mu$  dans (3.3) on obtient

$$[(1 - \beta p^2) \hat{p}_\mu (1 - \beta p^2) \hat{p}^\mu - m^2 c^2] \phi(x) = 0. \quad (3.4)$$

En négligeant les termes d'ordre  $\beta^2$ , on obtient

$$(\hat{p}_\mu \hat{p}^\mu - 2\beta \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \hat{p}_\nu \hat{p}^\nu - m^2 c^2) \phi(x) = 0. \quad (3.5)$$

ou bien

$$\left( \partial_\mu \partial^\mu + 2\beta \hbar^2 (\partial_\nu \partial^\nu) (\partial_\mu \partial^\mu) + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0. \quad (3.6)$$

Ainsi l'équation généralisée de Klein-Gordon prend la forme

$$\left( \square + 2\beta \hbar^2 \square^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \phi(x) = 0, \quad (3.7)$$

où le terme  $2\beta \hbar^2 \square^2$  dans (3.7) est considéré comme une correction gravitationnelle due à une théorie de la gravitation quantique.

L'équation d'onde (3.7) est une équation d'onde relativiste de quatrième-ordre qui dans la limite  $\beta \longrightarrow 0$  reproduit l'équation ordinaire de Klein-Gordon.

## 3.2 Densité de probabilité et de courant modifiés

Nous allons déterminer la densité de probabilité et la densité du courant de probabilité de l'équation de Klein-Gordon généralisée en présence d'un potentiel scalaire  $V(\vec{r}) = V_0$ . Récrivons d'abord l'équation standard de Klein-Gordon (3.1) en présence d'un potentiel

$$\left[ \left( i\hbar \frac{\partial}{\partial t} - V_0 \right)^2 + c^2 \hbar^2 \nabla^2 \right] \phi = m^2 c^4 \phi. \quad (3.8)$$

En effectuant la substitution  $\hat{p}^\mu \longrightarrow \hat{P}^\mu = (1 - \beta p^2) \hat{p}^\mu$ , dans (3.8) on obtient

$$- (1 + 2\beta \hbar^2 \square) \partial_0^2 \phi + (1 + 2\beta \hbar^2 \square) \nabla^2 \phi - \frac{2i}{\hbar c} V_0 (1 + \beta \hbar^2 \square) \partial_0 \phi + \frac{V_0^2}{c^2 \hbar^2} \phi = k_c^2 \phi, \quad (3.9)$$

où  $k_c = \frac{mc}{\hbar}$  est le vecteur d'onde de Compton.

Prenons le conjugué complexe de (3.9)

$$- (1 + 2\beta \hbar^2 \square) \partial_0^2 \phi^* + (1 + 2\beta \hbar^2 \square) \nabla^2 \phi^* + \frac{2i}{\hbar} V_0 (1 + \beta \hbar^2 \square) \partial_0 \phi^* + \frac{V_0^2}{c^2 \hbar^2} \phi^* = k_c^2 \phi^*, \quad (3.10)$$

et multiplions (3.9) à gauche par  $\phi^*$  et (3.10) à droite par  $\phi$ , et faisons la différence. Il vient alors

$$\begin{aligned}
 & -\phi^* (1 + 2\beta\hbar^2\Box) \partial_0^2\phi + \phi (1 + 2\beta\hbar^2\Box) \partial_0^2\phi^* - \phi (1 + 2\beta\hbar^2\Box) \nabla^2\phi^* + \phi^* (1 + 2\beta\hbar^2\Box) \nabla^2\phi \\
 & \quad - \frac{2i}{\hbar c} V_0 [\phi^* (1 + \beta\hbar^2\Box) \partial_0\phi + \phi (1 + \beta\hbar^2\Box) \partial_0\phi^*] = 0.
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

En effectuant quelques manipulations et en comparant avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \Rightarrow \partial_\mu j^\mu = 0, \tag{3.12}$$

où

$$j^\mu = (c\rho, \vec{j}), \tag{3.13}$$

on déduit la densité de probabilité

$$\begin{aligned}
 \rho = & \frac{i\hbar}{2mc} \left\{ (\phi^* \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi - \phi \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi^*) + \frac{2i}{c\hbar} V_0 |\phi|^2 \right. \\
 & + 2\beta\hbar^2 \left[ \phi^* \frac{\partial^3}{\partial(ct)^3}\phi - \phi \frac{\partial^3}{\partial(ct)^3}\phi^* + 2 \left( \nabla\phi^* \nabla \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi - \nabla\phi \nabla \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi^* \right) \right. \\
 & + \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi^* - \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi^* \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi \\
 & \left. \left. + \frac{iV_0}{c\hbar} \left( \phi^* \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi + \phi \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi^* - \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi^* + \nabla\phi \nabla\phi^* \right) \right] \right\}, \tag{3.14}
 \end{aligned}$$

et la densité du courant de probabilité

$$\begin{aligned}
 \vec{j} = & \frac{i\hbar}{2m} \left\{ (\phi \nabla\phi^* - \phi^* \nabla\phi) \right. \\
 & - 2\beta\hbar^2 \left[ \phi \nabla^3\phi^* - \phi^* \nabla^3\phi + \nabla\phi^* \nabla^2\phi - \nabla\phi \nabla^2\phi^* - 2 \left( \phi \nabla \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi^* - \phi^* \nabla \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2}\phi \right) \right. \\
 & \left. \left. + \frac{iV_0}{c\hbar} \left( \phi \nabla \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi^* + \phi^* \nabla \frac{\partial}{\partial(ct)}\phi \right) \right] \right\}. \tag{3.15}
 \end{aligned}$$

Il est facile de voir que la limite  $\beta \rightarrow 0$ , reproduit les expressions standards de la densité de probabilité et de la densité du courant de probabilité.

### 3.3 Les solutions de l'équation généralisée de Klein-Gordon

L'équation généralisée de Klein-Gordon pour une particule libre est donnée par (3.7)

$$\left[ (\partial_\mu \partial^\mu) + 2\beta\hbar^2 (\partial_\mu \partial^\mu) (\partial_\nu \partial^\nu) + \left( \frac{mc}{\hbar} \right)^2 \right] \phi = 0. \tag{3.16}$$

Nous allons chercher des solutions sous la forme d'ondes planes :

$$\phi = A \exp(-ikx), \quad (3.17)$$

où  $A \neq 0$  est une constante complexe.

En substituant (3.17) dans (3.7) on obtient

$$\left(2\beta\hbar^2 (k^2)^2 - k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2}\right) = 0, \quad (3.18)$$

où

$$k^2 = k_\mu k^\mu = \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 - \vec{k} \cdot \vec{k}. \quad (3.19)$$

En résolvant l'équation (3.18) par rapport à  $k^2$  on obtient deux solutions

$$k_+^2 = \frac{\left[(1 + 2\sqrt{2\beta}mc) + (1 - 2\sqrt{2\beta}mc) + 2(1 - 8\beta m^2 c^2)^{\frac{1}{2}}\right] c^2}{8\beta\hbar^2 c^2}, \quad (3.20)$$

et

$$k_-^2 = \frac{\left[(1 + 2\sqrt{2\beta}mc) + (1 - 2\sqrt{2\beta}mc) - 2(1 - 8\beta m^2 c^2)^{\frac{1}{2}}\right] c^2}{8\beta\hbar^2 c^2}. \quad (3.21)$$

Il est utile maintenant d'introduire la masse à travers le vecteur d'onde de Compton :

$$k_+^2 = \left(\frac{m_+ c}{\hbar}\right)^2, \quad (3.22)$$

$$k_-^2 = \left(\frac{m_- c}{\hbar}\right)^2. \quad (3.23)$$

où les masses effectives non dégénérées  $m_+$  et  $m_-$  sont données par les relations suivantes :

$$m_+ = \frac{(1 + 2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}} + (1 - 2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\beta}c}, \quad (3.24)$$

et

$$m_- = \frac{(1 + 2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}} - (1 - 2\sqrt{2\beta}mc)^{\frac{1}{2}}}{2\sqrt{2\beta}c}. \quad (3.25)$$

Du point de vue de la mécanique quantique, les équations (3.24) et (3.25) indiquent que le champ de Klein-Gordon est associé à des particules ayant les masses efficaces  $m_+$  et  $m_-$ . Pour éviter que des particules de masse complexe apparaissent, on impose la condition

$$\beta < \frac{1}{8m^2 c^2}. \quad (3.26)$$

En restaurant les unités  $\hbar$  et  $c$ , cette relation s'écrit

$$(\Delta X)_{\min} < \frac{\hbar c}{2\sqrt{2}mc^2}. \quad (3.27)$$

Il faut noter que pour  $(\Delta X)_{\min} = \frac{\hbar c}{2\sqrt{2}mc^2}$  les masses effectives sont égales,  $m_+ = m_- = \sqrt{2}m$ . En utilisant les équations (3.19), (3.22) et (3.23). On obtient les relations de dispersion suivantes

$$\left(\hbar\omega_k^{(+)}\right)^2 = m_+^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{k}. \quad (3.28)$$

$$\left(\hbar\omega_k^{(-)}\right)^2 = m_-^2 c^4 + c^2 \hbar^2 \vec{k} \cdot \vec{k}. \quad (3.29)$$

Avec  $E_p^{(\pm)} = \hbar\omega_k^{(\pm)}$  et  $\hbar \vec{k} = |\vec{p}|$ , les relations (3.28) et (3.29) s'écrivent comme :

$$E_p^{(+)^2} = m_+^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2, \quad (3.30)$$

$$E_p^{(-)^2} = m_-^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2. \quad (3.31)$$

En faisant un développement au premier ordre en  $\beta$  on obtient :

$$m_+ = \frac{1}{\sqrt{2\beta c}} - \frac{m^2 \sqrt{2\beta c}}{2}, \quad (3.32)$$

et

$$m_- = m (1 + \beta m^2 c^2). \quad (3.33)$$

Par conséquent, dans la région asymptotique  $\beta \rightarrow 0$  la masse effective  $m_-$  dans l'équation (3.33) se réduit à la masse ordinaire  $m$ . L'insertion de (3.33) dans l'équation (3.31) donne

$$E_p^{(-)^2} = m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2 + 2\beta m^4 c^6. \quad (3.34)$$

Quand  $\beta = 0$ , l'équation (3.34) devient la relation bien connue d'impulsion-énergie d'Einstein de la relativité. D'autre part, la masse effective  $m_+$  diverge pour  $\beta$  petit dans l'équation (3.32).

# Chapitre 4

## Equation relativiste généralisée de Dirac

ce chapitre est en partie basé sur la référence [34].

### 4.1 Equation de Dirac

L'équation de Dirac est une équation formulée par Adrian P. Dirac en 1928 dans le cadre de la mécanique quantique relativiste de l'électron. Il s'agit au départ d'une tentative pour incorporer la relativité restreinte dans la théorie quantique, avec une écriture linéaire entre la masse et l'impulsion,

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = H_D\psi(\vec{r}, t), \quad (4.1)$$

où l'Hamiltonien de Dirac pour une particule libre est :

$$H_D = c\vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}mc^2, \quad (4.2)$$

où  $m$  est la masse de la particule,  $c$  la vitesse de la lumière,  $\hbar$  la constante de Planck réduite,  $\vec{r}$  et  $t$  sont les coordonnées de l'espace-temps, et  $\psi(\vec{r}, t)$  une fonction d'onde à quatre composantes (La fonction d'onde doit être formulée par un spineur à quatre composantes, du fait des exigences de la relativité restreinte).

Pour une particule de spin  $\frac{1}{2}$ , les matrices  $\alpha_x$ ,  $\alpha_y$ ,  $\alpha_z$  et  $\hat{\beta}$  sont des matrices  $4 \times 4$  agissant sur le spineur  $\psi$ , et appelées matrices de Dirac. Qu'on peut aussi exprimer en termes des matrices

de Pauli. Dans la représentation de Dirac (d'autres représentations sont aussi possibles, comme la représentation de Weyl et la représentation de Majorana), on a :

$$\alpha_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.3)$$

et

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.4)$$

En notation compacte on a :

$$\hat{\beta} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (4.5)$$

où les  $\hat{\sigma}_i$  sont les "matrices de Pauli", est  $\mathbf{1}$  la matrice unité définie par :

$$\hat{\sigma}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{\sigma}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \hat{\mathbf{1}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.6)$$

Dans la représentation des coordonnées on a  $\vec{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ , et dans ce cas l'équation de Dirac s'écrit :

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = c \left[ -i\hbar\vec{\alpha} \cdot \vec{\nabla} + \hat{\beta}mc \right] \psi(\vec{r}, t). \quad (4.7)$$

Dans ce cas la fonction d'onde dans (4.7) doit être généralement un 4-vecteur donné par

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) e^{-\frac{i}{\hbar}Et} = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}) \\ \psi_2(\vec{r}) \\ \psi_3(\vec{r}) \\ \psi_4(\vec{r}) \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar}Et}, \quad (4.8)$$

la substitution de ce vecteur dans (4.7) donne

$$E\psi(\vec{r}, t) = (c\vec{\alpha}\vec{p} + \hat{\beta}mc^2)\psi(\vec{r}, t), \quad (4.9)$$

qui est l'équation relativiste stationnaire de Dirac pour une particule libre.

### 4.1.1 La forme covariante de l'équation de Dirac

Dans le but d'écrire l'équation de Dirac sous une forme explicitement covariante, on introduit les matrices de Dirac  $\gamma^\mu$  :

$$\hat{\beta} = \gamma^0 = \begin{pmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{I} \end{pmatrix}, \quad \gamma^i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \sigma_i \\ -\sigma_i & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad \hat{\alpha}^i = \hat{\beta}\gamma^i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (4.10)$$

Partons de l'équation

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{r}, t) = -i\hbar c \alpha^i \frac{\partial \psi(\vec{r}, t)}{\partial x^i} + mc^2 \hat{\beta} \psi(\vec{r}, t), \quad (4.11)$$

et posons  $ct = x^0$ , on obtient

$$i\hbar(\partial_0 + \alpha^i \partial_i) \psi(\vec{r}, t) - mc \hat{\beta} \psi(\vec{r}, t) = 0, \quad (4.12)$$

et en multipliant à gauche par  $\hat{\beta}$  on a :

$$i\hbar(\hat{\beta} \partial_0 + \hat{\beta} \alpha^i \partial_i) \psi(\vec{r}, t) - mc \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.13)$$

En utilisant les propriétés suivantes :

$$\gamma^0 = \gamma^{0+}, \quad \gamma^{i+} = \alpha \hat{\beta}^+ = \alpha^i \hat{\beta} = -\gamma^i, \quad (4.14)$$

$$(\gamma^0)^2 = 1, \quad (\gamma^i)^2 = -1, \quad (4.15)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2g^{\mu\nu} \mathbf{1}, \quad (4.16)$$

où le « slash » de Feynman est défini par  $\not{a} = \gamma^\mu a_\mu$ , on aboutit à l'équation de Dirac covariante :

$$(i\hbar \gamma^\mu \partial_\mu - mc) \psi(\vec{r}, t) \equiv (i\hbar \not{\partial} - mc) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.17)$$

## 4.2 Equation généralisée de Dirac

La généralisation de l'équation de Dirac dans la mécanique quantique relativiste en présence d'une longueur minimale se fait en substituant  $\hat{p}^\mu \longrightarrow \hat{P}^\mu = (1 - \beta p^2) \hat{p}^\mu$ . Dans l'espace des positions, l'opérateur d'impulsion  $\hat{P}^\mu$  agit comme

$$\hat{P}^\mu = (1 - \beta p^2) i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu}, \quad (4.18)$$

et l'opérateur des positions  $\hat{X}^\mu$  agit comme :

$$\hat{X}^\mu = \hat{x}^\mu, \quad (4.19)$$

où l'on a :

$$\begin{aligned} \hat{p}^\mu \psi(x) &= i\hbar \frac{\partial}{\partial x_\mu} \psi(x), \\ \hat{x}^\mu \psi(x) &= x^\mu \psi(x). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Ce qui finalement donne l'équation de Dirac modifiée

$$(\gamma^\mu (1 - \beta \hat{p}_\nu \hat{p}^\nu) \hat{p}_\mu - mc) \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.21)$$

### 4.2.1 Densité de probabilité et densité du courant de probabilité

Ecrivons d'abord l'équation de Dirac généralisée avec un potentiel scalaire défini  $V(\vec{r}) = V_0$  :

$$i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi = -i\hbar (1 - \beta p^2) \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi - \hat{\beta} mc \psi + \frac{V(\vec{r})}{c} \psi. \quad (4.22)$$

Maintenant, nous voulons construire le quadri-vecteur densité de courant et l'équation de continuité.

Utilisons  $p^2 = -\hbar^2 \square$ . et multiplions (4.22) par  $\psi^\dagger$ , et nous obtenons :

$$i\hbar \psi^\dagger (1 + \beta \hbar^2 \square) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi = -i\hbar \psi^\dagger (1 + \beta \hbar^2 \square) \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi - \psi^\dagger \hat{\beta} mc \psi + \psi^\dagger \frac{V(\vec{r})}{c} \psi, \quad (4.23)$$

on prend la forme adjointe de (4.22) :

$$-i\hbar (1 + \beta \hbar^2 \square) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger = i\hbar (1 + \beta \hbar^2 \square) \vec{\nabla} \psi^\dagger (\vec{\alpha})^+ - mc \psi^\dagger \hat{\beta} + \frac{V(\vec{r})}{c} \psi^\dagger, \quad (4.24)$$

que l'on multiplie à droite par  $\psi$ . comme  $(\vec{\alpha})^+ = \vec{\alpha}$  et  $\hat{\beta}^\dagger = \hat{\beta}$ , on obtient :

$$-i\hbar (1 + \beta \hbar^2 \square) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger = i\hbar (1 + \beta \hbar^2 \square) \vec{\nabla} \psi^\dagger (\vec{\alpha})^+ - mc \psi^\dagger \hat{\beta} + \frac{V(\vec{r})}{c} \psi^\dagger, \quad (4.25)$$

en soustrayant (4.23) de (4.25), il vient :

$$\begin{aligned} & \left[ \psi^\dagger (1 + \beta \hbar^2 \square) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi + \left( (1 + \beta \hbar^2 \square) \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger \right) \psi \right] \\ &= - \left[ \psi^\dagger \left( \vec{\alpha} (1 + \beta \hbar^2 \square) \vec{\nabla} \psi \right) + \left( (1 + \beta \hbar^2 \square) \vec{\nabla} \psi^\dagger \right) \vec{\alpha} \psi \right]. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Explicitant l'invariant de Lorentz  $\square = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2$ , pour obtenir :

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial(ct)} \left[ \psi^\dagger \psi + \beta \hbar^2 \left( \psi^\dagger \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} \psi + \left( \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} \psi^\dagger \right) \psi - \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi \right. \right. \\
& \left. \left. + \psi^\dagger \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \psi + \left( \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \psi^\dagger \right) \vec{\alpha} \psi + \vec{\nabla} \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \right) \right] \\
& = -\vec{\nabla} \left[ \psi^\dagger \vec{\alpha} \psi - \beta \hbar^2 \left( \psi^\dagger \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi + \left( \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger \right) \psi + \psi^\dagger \vec{\alpha} \nabla^2 \psi + (\nabla^2 \psi^\dagger) \vec{\alpha} \psi \right. \right. \\
& \left. \left. - \vec{\nabla} \psi^\dagger \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi + \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi \right) \right]. \tag{4.27}
\end{aligned}$$

En comparant cette équation avec l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0, \tag{4.28}$$

on déduit la densité de probabilité

$$\begin{aligned}
\rho = & \left[ \psi^\dagger \psi + \beta \hbar^2 \left( \psi^\dagger \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} \psi + \left( \frac{\partial^2}{\partial(ct)^2} \psi^\dagger \right) \psi - \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi^\dagger \frac{\partial}{\partial(ct)} \psi \right. \right. \\
& \left. \left. + \psi^\dagger \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \psi + \left( \frac{\partial}{\partial(ct)} \vec{\nabla} \psi^\dagger \right) \vec{\alpha} \psi + \vec{\nabla} \psi^\dagger \vec{\nabla} \psi \right) \right], \tag{4.29}
\end{aligned}$$

et la densité de courant de probabilité de l'équation déformé de Dirac

$$\begin{aligned}
\vec{j} = & \left[ \psi^\dagger c \vec{\alpha} \psi - \beta \hbar^2 \left( \psi^\dagger \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \psi + \left( \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \right) \psi + \psi^\dagger c \vec{\alpha} \nabla^2 \psi + (\nabla^2 \psi^\dagger) c \vec{\alpha} \psi \right. \right. \\
& \left. \left. - \vec{\nabla} \psi^\dagger c \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi + \frac{\partial}{\partial t} \psi^\dagger \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \psi \right) \right]. \tag{4.30}
\end{aligned}$$

On peut aussi écrire ces deux relations sous la forme

$$\rho = \rho_0 + \rho_G, \quad \vec{j} = \vec{j}_0 + \vec{j}_G, \tag{4.31}$$

où  $\rho_G, \vec{j}_G$  sont des corrections dues à la gravitation à travers le couplage  $\beta$ .

## 4.2.2 Fonctions d'onde

Rappelant que l'équation modifiée de Dirac pour une particule libre donné par

$$(\gamma^\mu (1 - \beta p_\nu p^\nu) p^\mu - mc) \psi(\vec{r}, t) = 0. \tag{4.32}$$

Nous savons que la solution générale de l'équation précédente doit être une superposition d'ondes planes, et que ces solutions doivent être des fonctions propres de l'opérateur d'impulsion

$$\vec{p}\psi(\vec{r}, t) = p\psi(\vec{r}, t). \quad (4.33)$$

Ici  $\vec{p}$  est seulement le vecteur d'impulsion, un ensemble de trois nombres. Pour décrire une particule libre, nous recherchons une solution de (4.21)

$$\psi(\vec{r}, t) = U(\vec{p}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - Et) \right], \quad (4.34)$$

où  $U(\vec{p})$  est une quantité à quatre dimensions.

### 4.2.3 Solutions des particules libres

Dans la suite nous allons substituer (4.34) dans l'équation de Dirac modifié pour déterminer  $U(\vec{p})$ , et quelles contraintes doivent être placées sur  $U$  et  $\vec{p}$  pour s'assurer que l'équation de Dirac modifié soit toujours satisfaite.

Nous allons faire ceci pour un cas très spécifique. Une particule libre se déplace avec une vitesse constante sur un chemin droit. La géométrie de référence est telle que la particule se déplace dans le plan  $xy$ , et l'axe des  $z$  est perpendiculaire à la direction du mouvement.

On a :

$$\begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{i \vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right], \quad (4.35)$$

que nous allons substituer dans l'Hamiltonien de l'équation de Dirac modifié,

$$(\gamma^\mu (1 - \beta p_\nu p^\nu) p_\mu - mc) \psi(\vec{r}) = 0, \quad (4.36)$$

avec

$$p_\mu \psi(\vec{r}) = \frac{\hbar}{i} U(\vec{p}) \frac{\partial}{\partial r^\mu} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu \right] \psi(\vec{r}). \quad (4.37)$$

En mécanique quantique relativiste on définit le 4-vecteur énergie-impulsion par  $p^\mu = (\frac{E}{c}, \vec{p})$

et donc :

$$p_\nu p^\nu = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2, \quad \text{avec } \mu, \nu = 0, 1, 2, 3. \quad (4.38)$$

En remplaçant dans l'équation (4.21), on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ (\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \vec{p}) - \beta \left( \gamma^0 \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_0 + \gamma^1 \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \gamma^2 \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_2 + \gamma^3 \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_3 \right) - mc \right] \psi(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Dans le plan  $(x, y)$ , l'équation (4.39) s'écrit sous forme :

$$\begin{aligned} & [(\gamma^0 p^0 - \vec{\gamma} \vec{p}) \\ & - \beta \left( \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \gamma^0 p_0 + \gamma^1 p_1 \frac{E^2}{c^2} - \gamma^1 p_1 \vec{p}^2 + \gamma^2 p_2 \frac{E^2}{c^2} - \gamma^2 p_2 \vec{p}^2 \right) - mc] \psi(\vec{r}, t) = 0. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En posant  $\vec{\gamma} = \gamma^0 \vec{\alpha}$  et  $p^0 = \frac{E}{c}$ , on obtient la forme de l'équation de Dirac modifié s'écrit dans l'espace des positions,

$$\left[ \gamma^0 \left( \frac{E}{c} - (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y) \right) - \beta \left[ \gamma^0 \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \left( \frac{E}{c} - (\alpha_x p_x + \alpha_y p_y) \right) \right] - mc \right] \psi(\vec{r}, t) = 0. \quad (4.41)$$

Nous allons chercher des solutions de la forme (4.41). Avec la représentation de Pauli-Dirac nous obtenons

$$\begin{aligned} & \left\{ \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right. \\ & \left. \begin{pmatrix} \frac{E}{c} & 0 & 0 & -(p_x - ip_y) \\ 0 & \frac{E}{c} & -(p_x + ip_y) & 0 \\ 0 & -(p_x - ip_y) & \frac{E}{c} & 0 \\ -(p_x + ip_y) & 0 & 0 & \frac{E}{c} \end{pmatrix} \right. \\ & \left. - mc \mathbf{1} \right\} \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{r}, t) \\ \psi_2(\vec{r}, t) \\ \psi_3(\vec{r}, t) \\ \psi_4(\vec{r}, t) \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (4.42)$$

En développant les calculs, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right) \psi_1(\vec{r}, t) - (p_x - ip_y) \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) \psi_4(\vec{r}, t) = 0, \\ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right) \psi_2(\vec{r}, t) - (p_x + ip_y) \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) \psi_3(\vec{r}, t) = 0, \\ -\frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right) \psi_3(\vec{r}, t) + (p_x - ip_y) \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) \psi_2(\vec{r}, t) = 0, \\ -\frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right) \psi_4(\vec{r}, t) + (p_x + ip_y) \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) \psi_1(\vec{r}, t) = 0. \end{cases} \quad (4.43)$$

Pour un électron libre, nous savons que la solution est donnée par (4.43). Dans notre cas on a :

$$\psi_k = U_k \exp \left( i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right) \exp \left( -i \frac{Et}{\hbar} \right), \quad k = 1, 2, 3, 4 \quad (4.44)$$

avec  $U_k$  les composantes du bispineur de Dirac.

En calculant leurs dérivées par rapport à  $t$  :

$$i\hbar \partial_t \psi_k = i\hbar \partial_t U_k \exp \left( i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right) \exp \left( -i \frac{Et}{\hbar} \right), \quad (4.45)$$

$$= EU_k \exp \left( i \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{\hbar} \right) \exp \left( -i \frac{Et}{\hbar} \right), \quad (4.46)$$

et avec

$$p_{\pm} = p_x \pm ip_y, \quad (4.47)$$

il vient

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 & -C \\ 0 & A & -D & 0 \\ 0 & C & -B & 0 \\ D & 0 & 0 & -B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{r} \right] = 0, \quad (4.48)$$

où

$$A = \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right], \quad (4.49)$$

$$B = \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right], \quad (4.50)$$

$$C = \left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_-, \quad (4.51)$$

$$D = \left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+. \quad (4.52)$$

Ou d'une manière équivalente :

$$\left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{P}^2 \right) - mc \right] U_1 - \left[ p_- - \beta p_- \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] U_4 = 0, \quad (4.53)$$

$$\left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right] U_2 - \left[ p_+ - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_+ \right] U_3 = 0, \quad (4.54)$$

$$\left[ (p_-) - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_- \right] U_2 - \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right] U_3 = 0, \quad (4.55)$$

$$\left[ p_+ - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) p_+ \right] U_1 - \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right] U_4 = 0. \quad (4.56)$$

Nous pouvons combiner (4.53) et (4.56) pour obtenir :

$$\frac{U_1}{U_4} = \frac{\left[ 1 - \beta p_- \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_-}{\left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right]} = \frac{\left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right]}{\left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+}, \quad (4.57)$$

à partir de laquelle on déduit :

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+ \left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_- \\ &= \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - mc \right] \left[ \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) + mc \right]. \end{aligned} \quad (4.58)$$

Au premier ordre en paramètre  $\beta$ , on obtient

$$\begin{aligned} & \left[ 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+ p_- \\ &= \left[ \left( \frac{E}{c} - \beta \frac{E}{c} \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right)^2 - m^2 c^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.59)$$

De cette équation on tire,

$$\left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \left( 1 - 2\beta \left( \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) - m^2 c^2 = 0, \quad (4.60)$$

avec :

$$p_\mu p^\mu = p_0^2 - \vec{p}^2 = \left( \frac{\hbar \omega}{c} \right)^2 - \hbar \vec{k} \cdot \hbar \vec{k} = \hbar^2 \left( \left( \frac{\omega}{c} \right)^2 - \vec{k} \cdot \vec{k} \right) = \hbar^2 k_\mu k^\mu = \hbar^2 k^2. \quad (4.61)$$

En remplaçant (4.61) dans (4.60), on obtient :

$$2\beta \hbar^2 (k^2)^2 - k^2 + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} = 0. \quad (4.62)$$

Nous observons que pour  $\beta \longrightarrow 0$ , l'équation (4.62) conduit au résultat classique,

$$E^2 = c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4, \quad (4.63)$$

de solutions

$$E = \pm E_p, \quad E_p = \sqrt{c^2 \vec{p}^2 + m^2 c^4}. \quad (4.64)$$

Comme il devrait l'être. Les deux signes du facteur d'évolution de temps dans (4.64) correspondent aux solutions d'énergies positives et négatives de l'équation de Dirac ordinaire.

Mais pour le cas  $\beta \neq 0$ , nous avons deux ensembles de solutions

$$E_- = \pm E_p^{(-)}, \quad E_p^{(-)} = c \sqrt{\vec{p}^2 + m_-^2 c^2}. \quad (4.65)$$

$$E_+ = \pm E_p^{(+)}, \quad E_p^{(+)} = c \sqrt{\vec{p}^2 + m_+^2 c^2}. \quad (4.66)$$

L'équation (4.62) est de deuxième ordre en  $k^2$ , dont les solutions sont données par :

$$k_+^2 = \frac{\left[ (1 + 2\sqrt{2\beta}mc) + (1 - 2\sqrt{2\beta}mc) + 2(1 - 8\beta m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \right] c^2}{8\beta \hbar^2 c^2}, \quad (4.67)$$

$$k_-^2 = \frac{\left[ (1 + 2\sqrt{2\beta}mc) + (1 - 2\sqrt{2\beta}mc) - 2(1 - 8\beta m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} \right] c^2}{8\beta \hbar^2 c^2}, \quad (4.68)$$

ou bien sous la forme :

$$k_+^2 = \left( \frac{m_+ c}{\hbar} \right)^2, \quad (4.69)$$

$$k_-^2 = \left( \frac{m_- c}{\hbar} \right)^2, \quad (4.70)$$

où les masses effectives non dégénérées  $m_+$  et  $m_-$  sont données par :

$$m_+ = \frac{1}{2\sqrt{2\beta}c} \left[ \sqrt{1 + 2\sqrt{2\beta}mc} + \sqrt{1 - 2\sqrt{2\beta}mc} \right], \quad (4.71)$$

et

$$m_- = \frac{1}{2\sqrt{2\beta}c} \left[ \sqrt{1 + 2\sqrt{2\beta}mc} - \sqrt{1 - 2\sqrt{2\beta}mc} \right]. \quad (4.72)$$

Ces relations (4.71) et (4.72) indiquent que le spineur modifié est associé aux particules ayant les masses effectives  $m_-$  et  $m_+$ . Pour éviter des particules de masse complexe, l'équation (4.71) et (4.72) imposent que

$$\beta < \frac{1}{8m^2 c^2}, \quad (4.73)$$

qui est la même contrainte trouvée précédemment lors de l'étude de l'équation de Klein-Gordon.

De même on note que pour  $\beta = \frac{1}{8m^2c^2}$ , les masses effectives sont égales,  $m_+ = m_- = \sqrt{2}m$ .

Au premier ordre en  $\beta$  on obtient aussi :

$$m_- = m (1 + \beta m^2 c^2). \quad (4.74)$$

Insérant (4.74) dans (4.65), et nous déduisons la relation de dispersion suivante :

$$E_p^{(-)2} = c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4 + 2\beta m^4 c^6. \quad (4.75)$$

ce qui est une modification de relation d'Einstein pour une particule libre dans la relativité restreinte.

Comme on vient de la voir, il y a deux solutions indépendantes de l'équation modifiée de Dirac. Cela est évident du fait que, dans (4.53) et (4.56) nous avons seulement des conditions sur les paires ;  $U_2$  et  $U_3$  sont découplées de  $U_1$  et  $U_4$ . Ceci est dû au fait que nous avons contraint la particule à se déplacer dans le plan  $xy$ . Si nous avons permis à la particule de se déplacer dans la direction  $z$ , les mathématiques du problème seraient devenues un peu plus difficiles.

Notons les deux solutions indépendantes avec les indices (+) et (-) :

$$\begin{aligned} \psi^{(+)}(\vec{r}, t) &= U^{(+)}(\vec{p}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu \right] = U^{(+)}(\vec{p}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right], \\ &\propto \begin{pmatrix} \left[ \frac{E_p^{(-)}}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) + mc \right] \\ 0 \\ 0 \\ \left[ 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+ \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right], \end{pmatrix} \quad (4.76) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(\vec{r}, t) &= U^{(-)}(\vec{p}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu \right] = U^{(-)}(\vec{p}) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right], \\ &\propto \begin{pmatrix} 0 \\ \left[ \frac{E_p^{(-)}}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) + mc \right] \\ \left[ 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_- \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right]. \end{pmatrix} \quad (4.77) \end{aligned}$$

Bien sûr, à ce stade ces solutions ne sont pas normalisées.

Ces fonctions propres du Hamiltonien sont également des fonctions propres de l'opérateur impulsion :

$$p_\mu \psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{i} \begin{pmatrix} \left[ \frac{E_p^{(-)}}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right) + mc \right] \\ 0 \\ 0 \\ \left[ 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2 \right) \right] p_+ \end{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu \right]. \quad (4.78)$$

Comme  $x^\mu$  apparaît seulement dans l'exponentiel, on obtient :

$$p_\mu \psi^{(+)}(\vec{r}, t) = p_\mu \psi^{(+)}(\vec{r}, t), \quad (4.79)$$

et le même résultat si nous appliquons l'opérateur d'impulsion à  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$ .

#### 4.2.4 Spin de la particule libre

Nous avons trouvé les deux solutions linéairement indépendantes de l'équation de Dirac modifiée dans l'espace libre. Il doit exister un certain opérateur qui permet de distinguer entre eux (Feynman, 1962). Cet opérateur doit commuter avec l'opérateur d'impulsion. Cet opérateur est l'orientation du spin. Parce que la particule se déplace dans le plan  $xy$ , nous pouvons prendre l'axe de la quantification comme direction de  $z$ . Le spin total de la particule est  $\frac{1}{2}$ , mais la composante suivant  $z$  peut prendre deux valeurs possibles. Il est simple de trouver les valeurs propres de la composante  $z$  de l'opérateur de spin

$$\hat{S}_z = \frac{\hbar}{2} \tilde{\sigma}_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (4.80)$$

Maintenant, nous allons considérer cet opérateur agissant sur les fonctions d'onde (4.76) et (4.77) dans le cadre de la particule au repos, lorsque  $p_x = p_y = 0$ . En outre, dans le référentiel au repos on a  $E_p^{(-)} = \pm (m^2 c^4 + 2\beta m^4 c^6)^{\frac{1}{2}}$ .

Nous devons avoir  $E_p^{(-)} = (m^2 c^4 + 2\beta m^4 c^6)^{\frac{1}{2}}$  dans ce cas parce que sinon les fonctions d'onde (4.76) et (4.77) disparaîtraient pour la particule au repos. Donc, les équations (4.76) et

(4.77) devient

$$\psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} \left[ \frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta \frac{E_p^{(-)3}}{c^3} + mc \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar} \right]. \quad (4.81)$$

En remplaçant  $E_p^{(-)}$  par sa valeur, l'équation précédente s'écrit

$$\psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{\sqrt{m^2c^4 + 2\beta m^4c^6}}{c} \begin{pmatrix} \left[ 1 - \beta \frac{(m^2c^4 + 2\beta m^4c^6)}{c^2} + mc \right] \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar} \right]. \quad (4.82)$$

Au premier ordre de  $\beta$ , la relation (4.82) aura la forme suivante

$$\psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 2mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left( \frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar} \right). \quad (4.83)$$

On a aussi :

$$\psi^{(-)}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[ \frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta \frac{E_p^{(-)3}}{c^3} + mc \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left( \frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar} \right). \quad (4.84)$$

En remplaçant  $E_p^{(-)}$  dans l'expression de  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$ , on obtient

$$\psi^{(-)}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \left[ \frac{(mc^2 + \beta m^3c^4)}{c} - \beta \frac{(mc^2 + \beta m^3c^4)(m^2c^4 + 2\beta m^4c^6)}{c^3} + mc \right] \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp \left( \frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar} \right). \quad (4.85)$$

On peut éliminer les termes à l'ordre  $\beta^2$ , on trouve :

$$\psi^{(-)}(\vec{r}, t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 2mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar}\right). \quad (4.86)$$

On remarque que les effets de la longueur minimale ne se font pas sentir à l'ordre linéaire en  $\beta$ . Ces fonctions d'onde représentent tous les deux des particules (à cause de  $E_p^{(-)} = (m^2c^4 + 2\beta m^4c^6)^{\frac{1}{2}}$ ), mais nous pouvons différencier entre eux en opérant avec (4.80) sur chacun.

En effet :

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \psi^{(+)}(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar}{2} \tilde{\sigma}_z \psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2mc \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{-iE_p^{(+)}t}{\hbar}\right], \\ &= \frac{\hbar}{2} \psi^{(+)}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.87)$$

D'autre part on a

$$\begin{aligned} \hat{S}_z \psi^{(-)}(\vec{r}, t) &= \frac{\hbar}{2} \tilde{\sigma}_z \psi^{(-)}(\vec{r}, t) = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2mc \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \exp\left[\frac{-iE_p^{(-)}t}{\hbar}\right] \\ &= -\frac{\hbar}{2} \psi^{(-)}(\vec{r}, t). \end{aligned} \quad (4.88)$$

Ainsi nous pouvons maintenant entièrement interpréter ces fonctions d'onde de particules libres. Elles sont les deux états d'énergie positifs, mais  $\psi^{(+)}(\vec{r}, t)$  est un état de la rotation de la particule vers le haut et  $\psi^{(-)}(\vec{r}, t)$  est un état de la rotation de la particule vers le bas. Bien que cet opérateur différencié entre les deux états propres, notons que ces fonctions d'onde sont seulement des fonctions propres de la composante  $z$  de la rotation dans le référentiel au repos.

Il s'avère que si la particule se déplace il est seulement possible de quantifier la rotation clairement, en utilisant l'opérateur (4.80), dans la direction du mouvement. Une forme plus générale de l'opérateur de spin.

L'étape suivante est d'écrire les équations (4.53), (4.54), (4.55) et (4.56) sous forme de matrice  $2 \times 2$ . Rappelant que  $p_z = 0$ , nous pouvons écrire :

$$\left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} = \begin{pmatrix} 0 & -\left[1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right] p_- \\ -\left[1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right] p_+ & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.89)$$

Et ainsi les équations (4.53), (4.54), (4.55) et (4.56) deviennent :

$$\left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc\right] \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix}, \quad (4.90)$$

et

$$\left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} = \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) - mc\right] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \quad (4.91)$$

Nous pouvons éliminer  $U_3$  et  $U_4$  dans (4.90) et (4.91),

$$\begin{aligned} & \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc\right]^{-1} \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} \\ &= \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) - mc\right] \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (4.92)$$

Considérons les solutions (4.76) et (4.77). Elles ne sont pas normalisées, ainsi nous pouvons multiplier par une constante arbitraire. Nous multiplions chacune d'elles par

$$\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta\frac{E_p^{(-)}}{c}\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right) + mc\right]^{-1} :$$

$$\psi^{(+)}(\vec{r}, t) = U^{(+)}(\vec{p}) \exp\left[\frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu\right] = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\left[1 - \beta\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right] p_+}{\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta\frac{E_p^{(-)}}{c}\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right) + mc\right]} \end{pmatrix} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t)\right]. \quad (4.93)$$

Avec les spineurs  $\chi_m$  :

$$\chi^{1/2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \chi^{-1/2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (4.94)$$

On écrit alors

$$\psi^{(+)}(\vec{r}, t) = \left( \begin{array}{c} \chi^{\frac{1}{2}} \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta \frac{E_p^{(-)}}{c} \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right) + mc\right] \chi^{-\frac{1}{2}} \end{array} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right]. \quad (4.95)$$

De la même manière on a :

$$\begin{aligned} \psi^{(-)}(\vec{r}, t) &= U^{(-)}(\vec{p}) \exp \left( \frac{i}{\hbar} p_\mu r^\mu \right) = \left( \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ \left[1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right] p_- \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta \frac{E_p^{(-)}}{c} \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right) + mc\right] \\ 0 \end{array} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right], \\ &= \left( \begin{array}{c} \chi^{-\frac{1}{2}} \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} - \beta \frac{E_p^{(-)}}{c} \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right) + mc\right] \chi^{\frac{1}{2}} \end{array} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - E_p^{(-)} t) \right]. \end{aligned} \quad (4.96)$$

On procède maintenant à la normalisation de ces fonctions propres. L'exponentielle est normalisée de la façon standard. Ensuite, nous avons de  $\chi^{m\dagger} \chi^m = 1$ . Ecrivons d'abord :

$$\psi_{p\lambda}^{(\mp)}(\vec{r}, t) = \frac{N^{(\mp)}}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \left( \begin{array}{c} \chi^{\mp\frac{1}{2}} \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) \vec{\sigma} \cdot \vec{p} \\ \left[\frac{E_p^{(\mp)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc\right] \chi^{\pm\frac{1}{2}} \end{array} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - \lambda E_p^{(\mp)} t) \right]. \quad (4.97)$$

Ici  $\lambda = \pm 1$  caractérise les solutions d'énergie positives et d'énergie négatives avec les facteurs d'évolution avec le temps  $E_{(\mp)} = \lambda E_p^{(\mp)}$ . Les facteurs de normalisation  $N^{(\mp)}$  dans (4.97) sont déterminés à partir de la condition de normalisation :

$$\int \psi_{p\lambda}^{(\mp)+}(\vec{r}, t) \psi_{p'\lambda'}^{(\mp)}(\vec{r}, t) d^3r = \delta_{\lambda\lambda'} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (4.98)$$

En remplaçant (4.97) dans l'équation (4.98), on obtient :

$$\begin{aligned} & \frac{|N^{(\mp)}|^2}{(2\pi\hbar)^3} \left[ 1 + \left( \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right)}{\left[\frac{\lambda E_p^{(\mp)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc\right]} \right) \left( \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{P}^2\right)\right)}{\left[\frac{\lambda E_p^{(\mp)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{P}^2\right)\right) + mc\right]} \right) \right) \\ & (\vec{\sigma} \cdot \vec{p})(\vec{\sigma} \cdot \vec{p}) \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} (\lambda E_p^{(\mp)} - \lambda E_p^{(\mp)}) t \right] \int \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}') \vec{r} \right] d^3r \\ & = \delta_{\lambda\lambda} \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \end{aligned} \quad (4.99)$$

où on a utilisé le fait que

$$\chi^{(\mp\frac{1}{2})\dagger} \chi^{(\mp\frac{1}{2})} = 1. \quad (4.100)$$

Grâce aux relations

$$(\vec{\sigma} \cdot \vec{A})(\vec{\sigma} \cdot \vec{B}) = \vec{A} \cdot \vec{B} I + i \vec{\sigma} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}), \quad (4.101)$$

$$\int \exp \left[ \frac{-i}{\hbar} (\vec{p} - \vec{p}') \vec{r} \right] d^3r = (2\pi\hbar)^3 \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (4.102)$$

on obtient

$$|N^{(\mp)}|^2 \left[ \frac{\left[ \lambda E_p^{(\mp)} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc^2 \right]^2 + c^2 \vec{p}^2 \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right)^2}{\left[ \lambda E_p^{(\mp)} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(\mp)2}}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc^2 \right]^2} \right] = 1. \quad (4.103)$$

A partir de cette équation on extrait la constante de normalisation :

$$N^{(\mp)} = \left[ \frac{\left[ \lambda E_p^{(\mp)} \left(1 - \beta m_{\pm}^2 c^2\right) + mc^2 \right]^2}{\left[ \lambda E_p^{(\mp)} \left(1 - \beta m_{\pm}^2 c^2\right) + mc^2 \right]^2 + c^2 \vec{p}^2 \left(1 - \beta m_{\pm}^2 c^2\right)^2} \right]^{1/2}, \quad (4.104)$$

qui donne finalement le spineur modifiée de Dirac  $\psi_{p\lambda}^{(-)}(\vec{r}, t)$  :

$$\begin{aligned} \psi_{p\lambda}^{(-)}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\left[ \lambda E_p^{(-)} \left(1 - \beta (m + \beta m^3 c^2)^2 c^2\right) + mc^2 \right]^2}{\left[ \lambda E_p^{(-)} \left(1 - \beta (m + \beta m^3 c^2)^2 c^2\right) + mc^2 \right]^2 + c^2 \vec{p}^2 \left(1 - \beta (m + \beta m^3 c^2)^2 c^2\right)^2}} \\ & \left( \frac{\chi^{-1/2}}{\lambda E_p^{(-)} \left(1 - \beta \left(\frac{m^2 c^4 + c^2 |\vec{p}|^2 + 2\beta m^4 c^6}{c^2} - \vec{p}^2\right)\right) + mc^2} \right) \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \vec{r} - \lambda E_p^{(-)} t) \right]. \end{aligned} \quad (4.105)$$

A la limite  $\beta \rightarrow 0$ , on obtient le résultat standard [35],

$$\psi_{p\lambda}(\vec{r}, t) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \psi_{p\lambda}^{(-)}(\vec{r}, t) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\lambda E_p + mc^2}{2\lambda E_p}} \begin{pmatrix} \chi^{-1/2} \\ \frac{c\vec{\sigma} \cdot \vec{p}}{\lambda E_p + mc^2} \chi^{-1/2} \end{pmatrix} \exp \left[ \frac{i}{\hbar} (\vec{p} \cdot \vec{r} - \lambda E_p t) \right]. \quad (4.106)$$

Pour  $\beta$  petit la masse effective  $m_+$  dans (4.71) réduit à

$$m_+ = \frac{1}{\sqrt{2\beta}c} - \frac{m^2 \sqrt{2\beta}c}{2}, \quad (4.107)$$

ce qui diverge pour  $\beta \rightarrow 0$ .

Ainsi, nous avons deux particules massives, l'un avec la masse habituelle  $m$  ( $\lim_{\beta \rightarrow 0} m_-$ ) et l'autre est une particule de masse  $m_+$ . Cette dernière conduit à une métrique indéfinie. Le spineur généralisé de Dirac  $\psi_{p\lambda}^{(+)}(\vec{r}, t)$  dans (4.97) qui décrit une particule avec la masse effective  $m_+$  est entièrement nouveau et n'a pas des contre-partie dans l'équation «classique» de Dirac. La caractéristique essentielle qui est responsable de l'existence du spineur généralisé de Dirac  $\psi_{p\lambda}^{(+)}(\vec{r}, t)$  est que l'équation de Dirac modifié (4.21) est du troisième ordre dans les dérivés d'espace-temps, sachant que l'équation ordinaire de Dirac est seulement de premier ordre dans les dérivés d'espace-temps.

Avant de clore cette équation nous allons dériver à titre d'exemple la densité du courant de probabilité dans la direction  $x$ . Sachant que la densité du courant de probabilité modifié de Dirac est définie par l'équation (voir 4.30) :

$$\vec{j} = \left[ \psi^{(-)\dagger} c \vec{\alpha} \psi^{(-)} - \beta \hbar^2 \left( \psi^{(-)\dagger} \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(-)} + \left( \vec{\nabla} \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(-)\dagger} \right) \psi^{(-)} + \psi^{(-)\dagger} c \vec{\alpha} \nabla^2 \psi^{(-)} \right. \right. \\ \left. \left. + (\nabla^2 \psi^{(-)\dagger}) c \vec{\alpha} \psi^{(-)} - \vec{\nabla} \psi^{(-)\dagger} c \vec{\alpha} \vec{\nabla} \psi^{(-)} + \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(-)\dagger} \vec{\alpha} \frac{\partial}{\partial t} \psi^{(-)} \right) \right]. \quad (4.108)$$

Après un calcul long et fastidieux on obtient :

$$j_x = \frac{c^2 p_x}{\lambda E_p^{(-)}} \left[ 1 - \beta \left( \frac{1}{c^2} \frac{(1 - \beta m^2 c^2)}{\lambda E_p^{(-)} (1 - \beta m^2 c^2) + mc^2} \lambda E_p^{(-)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{(1 - \beta m^2 c^2)}{\lambda E_p^{(-)} (1 - \beta m^2 c^2) + mc^2} \lambda E_p^{(-)} p_x^2 - 2p_x^2 - p_x + \frac{E_p^{(-)2}}{c} \right) \right]. \quad (4.109)$$

# Chapitre 5

## Paradoxe de Klein et particule dans une boîte de potentiel

### 5.1 Paradoxe de Klein pour les particules de spin-0

Nous allons étudier la diffusion d'une particule d'énergie  $E$  et d'impulsion  $p$  par une barrière de potentiel électrostatique «échelon». C'est un problème classique en mécanique quantique non relativiste. En mécanique quantique relativiste, la solution de ce problème conduit à un «paradoxe» appelé «paradoxe de Klein» et qui survient quand le potentiel est fort.

Mathématiquement la fonction échelon du potentiel électromagnétique s'écrit

$$\vec{A} = 0 \quad \text{et} \quad A_0 = V(z) = \text{const.} \quad (5.1)$$

Pour simplifier le problème, nous allons choisir un potentiel électrostatique constant de la forme

$$\begin{cases} V(z) = 0, & \text{pour } z < 0, \\ V(z) = V_0, & \text{pour } z > 0. \end{cases} \quad (5.2)$$

Les équations dynamiques seront étudiées dans deux régions,  $z < 0$  (région I) et  $z > 0$  (la région II), et ont la forme :

$$\square\phi(z) + 2\beta\hbar^2\square^2\phi(z) + \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi(z) = 0 \quad \text{pour } z < 0, \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned} ((i\partial_t - V_0)^2 + c^2\nabla^2)\phi(z) + 2\beta\hbar^2((i\partial_t - V_0)^2 + c^2\nabla^2)\phi(z) \\ - \left(\frac{mc}{\hbar}\right)^2\phi(z) = 0 \quad \text{pour } z > 0. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Dans l'espace des positions, le problème des valeurs propres de l'opérateur  $P^\mu$  s'écrit :

$$i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial x_\mu} \phi_p(z) = p^\mu \phi_p(z), \quad (5.5)$$

où  $\psi_p(z) = \langle z | p \rangle$ .

Dans la mécanique quantique déformée la fonction d'onde libre des particules  $\phi_p(z)$  est défini comme fonction propre de l'opérateur d'impulsion  $P^\mu$

$$P^\mu \phi_p(z) = p^\mu \phi_p(z), \quad (5.6)$$

où  $p^\mu$  est sa valeur propre. L'opérateur d'impulsion modifiée dans la représentation des positions est donné par

$$P^\mu = i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial z_\mu}, \quad (5.7)$$

ce qui conduit à l'équation

$$i\hbar (1 - \beta p^2) \frac{\partial}{\partial z_\mu} \phi_p(z) = p^\mu \phi_p(z), \quad (5.8)$$

dont la solution est

$$\phi_p(z) = A(p) \exp\left(\frac{-i}{\hbar(1 - \beta p^2)} p_\mu z^\mu\right), \quad (5.9)$$

ou bien

$$\phi_p(z) = A(p) \exp\left(\frac{-i(Et - pz)}{\hbar(1 - \beta p^2)}\right), \quad (5.10)$$

La constante de l'intégration est déterminée à partir

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \phi_p^*(z) \phi_p(\hat{z}) d^3p = \delta(z - \hat{z}). \quad (5.11)$$

En effet on a :

$$|A(p)|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{-ip(z - \hat{z})}{\hbar(1 - \beta p^2)}\right) d^3p = \delta(z - \hat{z}). \quad (5.12)$$

En intégrant on obtient :

$$A(p) = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta p^2)(2\pi\hbar)^3}}, \quad (5.13)$$

et par conséquent les ondes planes de l'équation de Klein-Gordon modifiée s'expriment par :

$$\phi_p(z) = \sqrt{\frac{1}{(1 - \beta p^2)(2\pi\hbar)^3}} \exp\left(\frac{-i(Et - pz)}{\hbar(1 - \beta p^2)}\right). \quad (5.14)$$

Considérons un faisceau d'énergie positive incident sur la barrière ( $z = -\infty$ ) de la forme  $e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{1}{(1-\beta p^2)} (E_p^{(-)} t - pz)}$ . Nous allons chercher alors des solutions de la forme :

$$\phi_I^{(-)} = e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t - pz)}{(1-\beta p^2)}} + R e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t + pz)}{(1-\beta p^2)}}, \quad \text{pour } z < 0, \quad (5.15)$$

$$\phi_{II}^{(-)} = T e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t - pz)}{(1-\beta p^2)}}, \quad \text{pour } z > 0, \quad (5.16)$$

où  $R$  et  $T$  sont les amplitudes des flux réfléchis et transmis, respectivement, et  $p, p'$  sont les impulsions dans les régions I et II, respectivement. En reportant ces solutions dans l'équation de Klein-Gordon on obtient :

$$\begin{aligned} E_p^{(-)} &= \sqrt{c^2 |\vec{p}|^2 + m^2 c^4 + 2\beta m^4 c^6} = 0, \\ \Rightarrow cp &= \sqrt{E_p^{(-)2} - m^2 c^4 (1 + \beta m^2 c^2)^2} \quad \text{pour } z < 0. \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} E_p^{(-)2} + V_0^2 - 2E_p^{(-)}V_0 - m^2 c^4 - c^2 |\vec{p}|^2 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2 &= 0. \\ \Rightarrow cp' &= \pm \sqrt{\left( E_p^{(-)} - V_0 \right)^2 - m^2 c^4 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2} \quad \text{pour } z > 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

On choisit la solution positive de la racine carrée dans la région I comme cela est imposé par les conditions initiales représentant à un faisceau entrant d'énergie positive. Le signe dans la région II reste arbitraire. En effet on remarque que  $p'$  peut être réel, ou imaginaire selon l'amplitude du potentiel  $V_0$ . Alors, dans la région II il y a trois cas distincts dépendants de l'amplitude du potentiel :

- **Potentiel faible** : Dans la relation (5.18) on prend  $p'$  réel. Ceci correspond à un potentiel de hauteur donnée par :

$$V_0 < E_p^{(-)} - \sqrt{m^2 c^4 + 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2}. \quad (5.19)$$

- **Potentiel intermédiaire** : Dans ce cas  $p'$  est imaginaire, et on a :

$$|E_p^{(-)} - V_0| < \sqrt{m^2 c^4 + 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2}. \quad (5.20)$$

- **Potentiel fort** : Dans ce cas  $p'$  réel, et on a :

$$V_0 > E_p^{(-)} + \sqrt{m^2 c^4 + 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2}. \quad (5.21)$$

Dans la région de potentiel fort, l'énergie cinétique  $\left[ \frac{E_p^{(-)}}{c^2} - \frac{V_0}{c^2} \right]$  est négative, La vitesse de groupe donnée par

$$v_{group} = \left[ \frac{\partial E_p^{(-)}}{\partial p'} \right] = - \frac{c^2 p'}{2 \left( V_0 - E_p^{(-)} \right) + 3V_0 \beta \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2}, \quad (5.22)$$

est dirigée dans le sens contraire à l'impulsion  $p'$  dans cette région, si nous choisissons  $p' > 0$ . Comme la vitesse de groupe est la vitesse du paquet d'onde, c'est comme si le paquet d'onde transmis venait de  $+\infty$ ; ceci est en contradiction avec la condition autorisant seulement un paquet d'onde entrant, venant de  $z = -\infty$ . Nous devons donc choisir  $p' < 0$  (c.à.d. le signe négatif pour la racine carrée de l'équation (5.18)) dans le cas d'un potentiel fort :

$$c p' = - \sqrt{\left( E_p^{(-)} - V_0 \right)^2 - m^2 c^4 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} + \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2}. \quad (5.23)$$

Remarquons que cette condition est imposée par les conditions physiques aux limites, et pas par l'équation de Klein-Gordon.

Imposons comme conditions aux limites que  $\phi^{(-)}$  et  $\partial_z \phi^{(-)}$  soient continués à  $z = 0$ , cela donne :

$$e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{E_p^{(-)} t}{(1-\beta p'^2)}} + R e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{E_p^{(-)} t}{(1-\beta p'^2)}} = T e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{E_p^{(-)} t}{(1-\beta p'^2)}}, \quad (5.24)$$

ou bien

$$1 + R = e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{(1-\beta p'^2)} - \frac{1}{(1-\beta p'^2)} \right) E_p^{(-)} t} T, \quad (5.25)$$

et

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{i}{\hbar} \frac{p}{(1-\beta p'^2)} e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t - p z)}{(1-\beta p'^2)}} \right. \\ & \left. - \frac{i}{\hbar} \frac{p}{(1-\beta p'^2)} R e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t + p z)}{(1-\beta p'^2)}} \right] \\ & = \frac{i}{\hbar} \frac{p'}{\left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2 \right) \right)} T e^{\frac{-i}{\hbar} \frac{(E_p^{(-)} t - p' z)}{\left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2 \right) \right)}}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

pour  $z = 0$ , cette équation devient :

$$1 - R = \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p} e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)} \right) E_p^{(-)t}} T. \quad (5.27)$$

En résolvant pour  $R$  et  $T$  nous obtenons

$$T = \left( \frac{2 \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'} \right) \times e^{-\frac{i E_p^{(-)t}}{\hbar} \left( \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)} \right)}, \quad (5.28)$$

et

$$R = \frac{\left[1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right] p - \left[1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right] p' e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)} \right) E_p^{(-)t}}}{\left[1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right] p + \left[1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right] p' e^{\frac{i}{\hbar} \left( \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)} \right) E_p^{(-)t}}}. \quad (5.29)$$

Rappelons nous que la densité du courant de probabilité de l'équation de Klein-Gordon est définie par

$$\begin{aligned} \vec{j} = & \frac{i\hbar}{2m} \{(\phi \nabla \phi^* - \phi^* \nabla \phi) \\ & - 2\beta \hbar^2 \left[ \phi \nabla^3 \phi^* - \phi^* \nabla^3 \phi + \nabla \phi^* \nabla^2 \phi - \nabla \phi \nabla^2 \phi^* - 2 \left( \phi \nabla \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \phi^* - \phi^* \nabla \frac{\partial^2}{\partial (ct)^2} \phi \right) \right. \\ & \left. + \frac{iV_0}{c\hbar} \left( \phi \nabla \frac{\partial}{\partial (ct)} \phi^* + \phi^* \nabla \frac{\partial}{\partial (ct)} \phi \right) \right] \}, \end{aligned} \quad (5.30)$$

nous déduisons que pour le paquet d'ondes incident on a :

$$j_{in} = \frac{p}{m(1 - \beta p^2)} \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)}{(1 - \beta p^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2 (1 - \beta p^2)} \right) \right]. \quad (5.31)$$

Et pour le paquet d'ondes réfléchi :

$$j_{ref} = \frac{-p |R|^2}{m(1-\beta p^2)} \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right]. \quad (5.32)$$

Le courant résultant à gauche de la barrière de potentiel est :

$$j_{<} = \frac{p}{m(1-\beta p^2)} \left( 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right) (1 - |R|^2), \quad (5.33)$$

alors que le courant résultant à droite de la barrière de potentiel est donné par :

$$j_{tr} = \begin{cases} \frac{p'}{m(1-\beta p'^2)} \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2 \right)}{(1-\beta p'^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p'^2)} \right) \right] |T|^2 & \text{pour } p' \text{ réel,} \\ 0 & \text{pour } p' \text{ imaginaire.} \end{cases} \quad (5.34)$$

Alors, le coefficient de transmission et le coefficient de réflexion s'expriment comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \frac{j_{in} - j_{<}}{j_{in}} = \frac{\frac{p|R|^2}{m(1-\beta p^2)} \left( 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^2}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right)}{\frac{p}{m(1-\beta p^2)} \left( 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^2}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right)}, \\ &= |R|^2. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Et

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \frac{j_{tr}}{j_{in}} = \frac{m(1-\beta p^2)}{2p \left( 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right)} \\ &\left\{ \left( \frac{p'^*}{(1-\beta p'^*2)} + \frac{p'}{(1-\beta p'^2)} \right) - 2\beta \left[ \left( -\frac{p'^*3}{(1-\beta p'^*2)^3} \right) - \left( \frac{p'^3}{(1-\beta p'^2)^3} \right) \right] \right. \\ &- \left( \frac{p'^2 p'^*}{(1-\beta p'^2)^3} \right) - \left( \frac{p' p'^*2}{(1-\beta p'^*2)^3} \right) + 2 \left( \frac{p'^* E_p^{(-)2}}{c^2(1-\beta p'^*2)^3} + \frac{p' E_p^{(-)2}}{c^2(1-\beta p'^2)^3} \right) \\ &\left. - \frac{V_0}{c} \left( \frac{p'^* E_p^{(-)}}{c(1-\beta p'^*2)^2} + \frac{p' E_p^{(-)}}{c(1-\beta p'^2)^2} \right) \right\} |T|^2 e^{\frac{i}{\hbar} \frac{(p'-p'^*)z}{(1-\beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2 \right))}}. \end{aligned} \quad (5.36)$$

En utilisant la relation donnant  $|R|^2$ , on trouve

$$\mathbf{R} = \left| \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p' e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)}\right) E_p^{(-)t}}}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p' e^{\frac{i}{\hbar} \left(\frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)} - \frac{1}{1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)}\right) E_p^{(-)t}} \right|^2. \quad (5.37)$$

Dans le cas du potentiel faible ( $p'$  réel), les coefficients de transmission et de réflexion sont alors donnés par :

$$\mathbf{R} = \left( \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'} \right)^2, \quad (5.38)$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{\frac{p'}{m(1-\beta p'^2)} \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2 \right)}{(1-\beta p'^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p'^2)} \right) \right]}{\frac{p}{m(1-\beta p^2)} \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{2 \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2 \right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p^2)} \right) \right]} |T|^2. \quad (5.39)$$

Il est facile d'avoir :

$$\begin{aligned} \mathbf{R} + \mathbf{T} &= \left( \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'} \right)^2 \\ &\quad + \frac{4pp' \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) \left(1 + 4\beta \frac{\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)}{(1-\beta p'^2)^2} + 2\beta \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta p'^2)}\right)}{\left(\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p'^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) p'\right)^2 \left(1 + 4\beta \frac{\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)}{(1-\beta p^2)^2} + 2\beta \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2(1-\beta p^2)}\right)}. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Il est facile de voir que dans la limite  $\beta \rightarrow 0$  on obtient

$$\mathbf{R} + \mathbf{T} = \left( \frac{p - p'}{p + p'} \right)^2 + \frac{4pp'}{(p + p')^2} = 1. \quad (5.41)$$

Dans le cas du potentiel intermédiaire (*p' imaginaire*), les coefficients de transmission et de réflexion sont

$$\mathbf{R} = \left| \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} + |p'|^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) i |p'|}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} + |p'|^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) i |p'|} \right|^2 = 1, \quad (5.42)$$

et

$$\mathbf{T}=0, \quad (5.43)$$

et donc

$$\mathbf{R} + \mathbf{T} = 1. \quad (5.44)$$

Il y a réflexion totale du faisceau, rien n'est transmis. Ceci est semblable aux résultats obtenus dans le cas ordinaire de la mécanique quantique standard. La dernière expression montre que la probabilité totale est conservée.

Dans le cas du potentiel fort (*p' réel et négatif*), les coefficients de transmission et de réflexion sont

$$\mathbf{R} = \frac{\left[\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - |p'|^2\right)\right) p + \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) |p'|\right]^2}{\left[\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - |p'|^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) |p'|\right]^2} > 1, \quad (5.45)$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{-4p |p'| \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - |p'|^2\right)\right) \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) \left[1 - 2\beta \left(\frac{2\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - |p'|^2\right)}{(1-\beta|p'|^2)^2} - \frac{V_0 E_p^{(-)}}{c^2(1-\beta|p'|^2)}\right)\right]}{\left(\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - |p'|^2\right)\right) p - \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)\right) |p'|\right)^2 \left[1 - 2\beta \left(\frac{2\left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p^2\right)}{(1-\beta p^2)^2} - \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2(1-\beta p^2)}\right)\right]}, \quad (5.46)$$

Vu la complexité de cette relation, il est difficile de déterminer son signe. A la limite  $\beta \rightarrow 0$  on obtient les coefficients de transmission et de réflexion dans le cas standard :

$$\mathbf{T} = \frac{-4p |p'|}{(p - |p'|)^2} < 0, \quad \mathbf{R} = \frac{(p + |p'|)^2}{(p - |p'|)^2} > 1, \quad (5.47)$$

et

$$\mathbf{T} = \frac{-4p|p'|}{(p - |p'|)^2} < 0, \quad (5.48)$$

La probabilité est toujours conservée mais au prix d'un coefficient de transmission négatif et d'un coefficient de réflexion qui est supérieur à 1. Il semble que le potentiel fort soulève un paradoxe. Il n'y a pas de paradoxe si nous considérons que dans le cas du potentiel fort, il est suffisamment fort pour créer une paire particule-antiparticule. Les antiparticules sont attirées par le potentiel et génèrent un courant négatif se déplaçant vers la droite. C'est l'explication du coefficient de transmission négatif. Les particules de leur côté sont repoussées par la barrière, et en se combinant avec le faisceau incident de particules (qui est complètement réfléchi) elle génère un courant chargé positivement, vers la gauche avec une amplitude supérieure à celle du faisceau incident.

Dans le cas qui nous intéresse, en présence d'une longueur minimale, nous n'avons pas pu poursuivre l'étude en déterminant le signe du coefficient de transmission afin de savoir si le paradoxe de Klein pour une particule scalaire est résolu ou non.

## 5.2 Une particule dans un puits à une dimension

Dans cette section, nous allons déterminer les fonctions d'ondes propres et le spectre d'énergie d'une particule de Dirac dans un potentiel à une dimension (voir Figure 3).

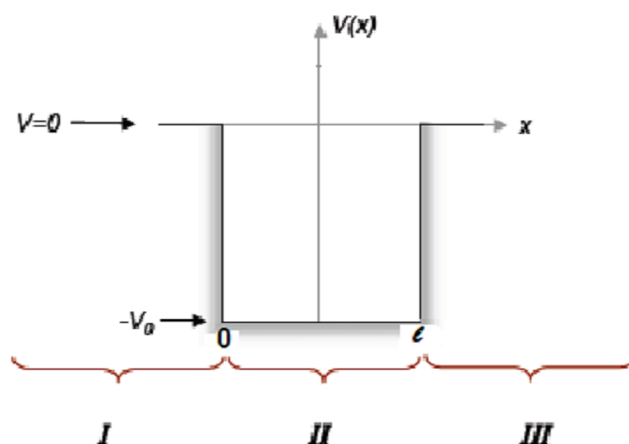


FIGURE 3 :Le puits de potentiel à une dimension

On définit les régions suivantes :

$$\begin{array}{lll}
 \text{Region I} & V = 0 & x < 0 \\
 \text{Region II} & V = -V_0 & 0 < x < l \\
 \text{Region III} & V = 0 & x > l
 \end{array} \tag{5.49}$$

où  $V_0$  est un nombre réel positif. Dans les régions I et III, les fonctions d'onde représentent une particule libre de Dirac dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Dirac

$$(\gamma^\mu (1 - \beta p^2) P_\mu - mc) \psi(x) = 0. \tag{5.50}$$

Ce cas a été résolu pour les particules libres dans le plan  $xy$ , et le cas discuté ici est juste une classe restreinte de ces solutions. Donc le spineur  $\psi$  est seulement une fonction de  $x$ ,  $\psi = \psi(x)$ .

Dans la région II l'équation de Dirac modifiée prend la forme :

$$\left( \gamma^\mu (1 - \beta p^2) p_\mu - mc + \gamma^0 \frac{V_0}{c} \right) \psi(x) = 0. \tag{5.51}$$

Cherchons des solutions de la forme :

$$\psi(\vec{r}, t) = \psi(\vec{r}) \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right) = \begin{pmatrix} \psi_1(\vec{x}) \\ \psi_2(\vec{x}) \\ \psi_3(\vec{x}) \\ \psi_4(\vec{x}) \end{pmatrix} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} Et\right), \tag{5.52}$$

où bien

$$\psi(\vec{r}, t) = U(\vec{p}) \exp\left(\frac{i}{\hbar}(\vec{p} \cdot \vec{r} - Et)\right). \tag{5.53}$$

Dans la représentation de Dirac, on obtient :

$$\begin{pmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & A & 0 & -C \\ C & 0 & B & 0 \\ 0 & -C & 0 & B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \end{pmatrix} \exp\left(\frac{i}{\hbar} p_2 x\right) = 0, \tag{5.54}$$

où

$$\begin{aligned}
 A &= \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) - mc + \frac{V_0}{c}, \\
 B &= -\frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) - mc - \frac{V_0}{c}, \\
 C &= \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2.
 \end{aligned}$$

On a alors le système d'équations suivant avec les inconnues  $U_1, U_2, U_3, U_4$  :

$$\left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) - mc + \frac{V_0}{c} \right] U_1 + \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 U_3 = 0. \quad (5.55)$$

$$\left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) - mc + \frac{V_0}{c} \right] U_2 - \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 U_4 = 0. \quad (5.56)$$

$$\left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 U_1 - \left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + mc + \frac{V_0}{c} \right] U_3 = 0. \quad (5.57)$$

$$- \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 U_2 - \left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + mc + \frac{V_0}{c} \right] U_4 = 0, \quad (5.58)$$

on combine (5.56) et (5.58) pour avoir :

$$\frac{U_2}{U_4} = \frac{\left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2}{\left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + \frac{V_0}{c} - mc \right]} = \frac{\left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + \frac{V_0}{c} + mc \right]}{\left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2}. \quad (5.59)$$

Nous aurons des solutions non toutes nulles si et seulement si le déterminant des coefficients du système est nul et donc une infinité de solutions (pour les composantes du spineur de Dirac) possibles. Soit :

$$\begin{vmatrix} A & 0 & C & 0 \\ 0 & A & 0 & -C \\ C & 0 & B & 0 \\ 0 & -C & 0 & B \end{vmatrix} = 0, \quad (5.60)$$

ce qui donne

$$\begin{vmatrix} \left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + \frac{V_0}{c} - mc \right]^2 & - \left[ \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 \right]^2 \\ - \left[ \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 \right]^2 & \left[ \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + \frac{V_0}{c} + mc \right]^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (5.61)$$

En résolvant le déterminant précédent, il vient

$$\left[ \left( \frac{E}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + \frac{V_0}{c} \right)^2 - m^2 c^2 \right]^2 = \left[ \left[ \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) p_2 \right]^2 \right]^2. \quad (5.62)$$

D'où la relation suivante :

$$\left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \left[ 1 - 2\beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right] + 2 \frac{E}{c} \frac{V_0}{c} \left( 1 - \beta \left( \frac{E^2}{c^2} - p_2^2 \right) \right) - m^2 c^2 + \frac{V_0^2}{c^2} = 0. \quad (5.63)$$

En solutionnant par rapport à  $p_2$  on obtient :

$$c^2 p_2^2 = (E_p^{(-)} + V_0)^2 - m^2 c^4 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{3 E_p^{(-)} V_0}{2 c^2} \right)^2. \quad (5.64)$$

Nous pouvons limiter notre discussion aux solutions avec le spin vers le bas, les solutions générales de l'équation de Dirac modifiée (5.51) sont ainsi données par

**La région I :**

$$\psi_I^{(-)}(x) = A_I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) p_1 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) + mc\right] \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} p_1 x} + A_{II} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) p_1 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) + mc\right] \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 x}, \quad (5.65)$$

avec

$$c^2 p_1^2 = E_p^{(-)2} - m^2 c^4 - 2\beta m^4 c^6, \quad x < 0. \quad (5.66)$$

**La région II**

$$\psi_{II}^{(-)}(x) = B_I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) p_2 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) + \frac{V_0}{c} + mc\right] \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} p_2 x} + B_{II} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) p_2 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) + \frac{V_0}{c} + mc\right] \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 x}, \quad (5.67)$$

avec

$$c^2 p_2^2 = E_p^{(-)2} - m^2 c^4 + 2V_0^2 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{3}{2} \frac{E_p^{(-)} V_0}{c^2} \right)^2. \quad (5.68)$$

**La région III**

$$\psi_{III}^{(-)}(x) = C_I \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_3^2\right)\right) p_3 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_3^2\right)\right) + mc\right] \end{pmatrix} e^{\frac{i}{\hbar} p_3 x} + C_{II} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_3^2\right)\right) p_3 \\ \left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_3^2\right)\right) + mc\right] \end{pmatrix} e^{-\frac{i}{\hbar} p_3 x}, \quad (5.69)$$

avec

$$c^2 p_3^2 = c^2 p_1^2 = E_p^{(-)2} - m^2 c^4 - 2\beta m^4 c^6, \quad x > l. \quad (5.70)$$

Nous savons qu'aux frontières du puits la fonction d'onde doit être continue (en raison de la conservation courante  $\partial_\mu j^\mu$ ). Donc nous imposons les conditions aux limites suivantes :

$x = 0$  :

$$\psi_I^{(-)}(0) = \psi_{II}^{(-)}(0), \quad \frac{d}{dx} \psi_I^{(-)}(0) = \frac{d}{dx} \psi_{II}^{(-)}(0). \quad (5.71)$$

$x = l$  :

$$\psi_{II}^{(-)}(l) = \psi_{III}^{(-)}(l), \quad \frac{d}{dx} \psi_{II}^{(-)}(l) = \frac{d}{dx} \psi_{III}^{(-)}(l). \quad (5.72)$$

Ainsi la solution du problème revient à trouver l'ensemble de constantes  $A_I, A_{II}, B_I, B_{II}, C_I$  et  $C_{II}$  qui remplissent ces conditions de frontière.

On montre alors que :

$x = 0$  :

$$A_I + A_{II} = B_I + B_{II}, \quad (5.73)$$

$$\frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) p_1}{\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) + mc\right]} (A_I - A_{II}) = \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) p_2}{\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) + mc + \frac{V_0}{c}\right]} (B_I - B_{II}), \quad (5.74)$$

$x = l$  :

$$B_I e^{\frac{i}{\hbar} p_2 l} + B_{II} e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 l} = C_I e^{\frac{i}{\hbar} p_1 l} + C_{II} e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 l}, \quad (5.75)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) p_2}{\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) + mc + \frac{V_0}{c}\right]} \left(B_I e^{\frac{i}{\hbar} p_2 l} - B_{II} e^{-\frac{i}{\hbar} p_2 l}\right) \\ &= \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) p_1}{\left[\frac{E_p^{(-)}}{c} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) + mc\right]} \left(C_I e^{\frac{i}{\hbar} p_1 l} - C_{II} e^{-\frac{i}{\hbar} p_1 l}\right). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Introduisons la quantité sans dimension  $\zeta$  :

$$\zeta = \frac{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) c p_1 \left[E_p^{(-)} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) + mc^2 + V_0\right]}{\left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2\right)\right) c p_2 \left[E_p^{(-)} \left(1 - \beta \left(\frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2\right)\right) + mc^2\right]}, \quad (5.77)$$

que nous allons employer pour simplifier les équations précédentes. En effet on a :

$$A_I = \frac{1}{2\zeta} [(1 + \zeta) B_I + (\zeta - 1) B_{II}], \quad (5.78)$$

et

$$A_{II} = \frac{1}{2\zeta} [(\zeta - 1) B_I + (\zeta + 1) B_{II}]. \quad (5.79)$$

En mettant ces deux équations sous forme matricielle on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_I \\ A_{II} \end{pmatrix} = \frac{1}{2\zeta} \begin{pmatrix} (1 + \zeta) & (\zeta - 1) \\ (\zeta - 1) & (\zeta + 1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_I \\ B_{II} \end{pmatrix}. \quad (5.80)$$

D'outre coté on a :

$$\begin{pmatrix} B_I \\ B_{II} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (\zeta + 1) e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} & (1 - \zeta) e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} \\ (1 - \zeta) e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} & (1 + \zeta) e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix}. \quad (5.81)$$

En substituant (5.81) dans (5.80) on obtient :

$$\begin{pmatrix} A_I \\ A_{II} \end{pmatrix} = \frac{(1 - \zeta^2)}{4\zeta} \begin{pmatrix} \frac{(\zeta+1)}{(1-\zeta)} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} - \frac{(1-\zeta)}{(1+\zeta)} e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} & e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} - e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} \\ -e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} + e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} & \frac{(1+\zeta)}{(1-\zeta)} e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} - \frac{(1-\zeta)}{(1+\zeta)} e^{\frac{-i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix}, \quad (5.82)$$

En définissant  $q = p_1 - p_2$  et  $k = p_1 + p_2$  dans (5.82) il vient :

$$\begin{pmatrix} A_I \\ A_{II} \end{pmatrix} = \frac{(1 - \zeta^2)}{4\zeta} \begin{pmatrix} \frac{(\zeta+1)}{(1-\zeta)} e^{\frac{i}{\hbar}ql} - \frac{(1-\zeta)}{(1+\zeta)} e^{\frac{i}{\hbar}kl} & e^{\frac{-i}{\hbar}kl} - e^{\frac{-i}{\hbar}ql} \\ e^{\frac{i}{\hbar}kl} - e^{\frac{i}{\hbar}ql} & \frac{(1+\zeta)}{(1-\zeta)} e^{\frac{-i}{\hbar}ql} - \frac{(1-\zeta)}{(1+\zeta)} e^{\frac{-i}{\hbar}kl} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_I \\ C_{II} \end{pmatrix}. \quad (5.83)$$

On vient de réduire le nombre d'inconnues à quatre. On peut encore en éliminer une en assumant qu'il n'y a aucun faisceau incident venant de la droite. Dans ce cas  $C_{II} = 0$ , où nous pouvons utiliser la normalisation

$$\int \psi^{(-)\dagger}(x) \psi^{(-)}(x) dx = 1. \quad (5.84)$$

Ce qui nous permet de fixer des inconnus si les autres sont trouvés. Avant la marche à suivre il est utile de renvoyer à l'équation (5.66). Il est facile de voir cela, si  $|E_p^{(-)}| > mc^2(1 + \beta m^2 c^2)$ , l'impulsion est réelle avant et après. Des fonctions d'onde qui répondent à ce critère s'appellent dispersion de stat. Si  $|E_p^{(-)}| < mc^2(1 + \beta m^2 c^2)$ , l'impulsion en dehors du puits doit être une quantité complexe, et ces stat s'appellent les états attachés.

Pour  $p_1$  imaginaire, les équations (5.65), (5.67) et (5.69) sont seulement des fonctions d'onde pour lesquelles on a  $A_I = C_{II} = 0$ , sinon les fonctions d'onde divergent pour  $x \rightarrow \pm\infty$  et par

conséquent ne sont pas normalisés. Ceci conduit à une simplification de (5.83) :

$$\frac{1}{4\zeta} \left( (\zeta + 1)^2 e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 - p_2)l} + (1 - \zeta)(\zeta - 1) e^{\frac{i}{\hbar}(p_1 + p_2)l} \right) C_I = 0, \quad (5.85)$$

$$\frac{1}{4\zeta} \left( (\zeta + 1)^2 e^{\frac{-i}{\hbar}p_2l} - (1 - \zeta)^2 e^{\frac{i}{\hbar}p_2l} \right) e^{\frac{i}{\hbar}p_1l} C_I = 0. \quad (5.86)$$

Maintenant  $C_I = 0$  est une solution triviale. La solution qui, est intéressante du point de vue physique est celle pour laquelle on a :

$$\left( (\zeta + 1)^2 e^{\frac{-i}{\hbar}p_2l} - (1 - \zeta)^2 e^{\frac{i}{\hbar}p_2l} \right) = 0, \quad (5.87)$$

$$(\zeta + 1)^2 e^{\frac{-i}{\hbar}p_2l} = (1 - \zeta)^2 e^{\frac{i}{\hbar}p_2l}, \quad (5.88)$$

ce qui donne

$$\left( \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right) e^{\frac{-i}{\hbar}p_2l} = \left( \frac{1 - \zeta}{1 + \zeta} \right) e^{\frac{i}{\hbar}p_2l}. \quad (5.89)$$

A partir de (5.77), on voit que si  $p_2$  est réel,  $\zeta$  est imaginaire, et le côté gauche de (5.89) est le conjugué complexe du côté droit. Et par conséquent :

$$\left( \frac{1 + \zeta}{1 - \zeta} \right) e^{\frac{-i}{\hbar}p_2l} = 0. \quad (5.90)$$

Si nous définissons  $\zeta = i\Xi$  avec  $\Xi$  réel nous pouvons réarranger (5.89) :

$$(1 - \Xi^2 + 2i\Xi) \left( \cos \frac{p_2l}{\hbar} - i \sin \frac{p_2l}{\hbar} \right) = (1 - \Xi^2 - 2i\Xi) \left( \cos \frac{p_2l}{\hbar} + i \sin \frac{p_2l}{\hbar} \right). \quad (5.91)$$

En rassemblant tous les termes, on obtient

$$\tan \frac{p_2l}{\hbar} = \frac{2\Xi}{1 - \Xi^2}. \quad (5.92)$$

En termes des anciennes variables, il est facile d'aboutir à l'équation suivante :

$$\tan \frac{p_2l}{\hbar} = -i \frac{2(cp_1)(cp_2)ACBD}{[(cp_2BD)^2 + (cp_1AC)^2]}. \quad (5.93)$$

Avec

$$\begin{aligned} A &= \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2 \right) \right), \\ B &= \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2 \right) \right), \\ C &= \left( E_p^{(-)} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_2^2 \right) \right) + mc^2 + V_0 \right), \\ D &= \left( E_p^{(-)} \left( 1 - \beta \left( \frac{E_p^{(-)2}}{c^2} - p_1^2 \right) \right) + mc^2 \right), \end{aligned}$$

et

$$c^2 p_2^2 = (E_p^{(-)} + V_0)^2 - m^2 c^4 - 2\beta c^2 \left( m^2 c^2 - \frac{V_0^2}{c^2} - \frac{3 E_p^{(-)} V_0}{2 c^2} \right)^2, \quad (5.94)$$

$$c^2 p_1^2 = (E_p^{(-)} + mc^2 (1 + \beta m^2 c^2)) (E_p^{(-)} - mc^2 (1 + \beta m^2 c^2)). \quad (5.95)$$

C'est une équation très compliquée, et qu'il est impossible d'obtenir une solution analytique donnant les niveaux d'énergie. Par contre une solution numérique est possible et permet la visualisation de la distribution des niveaux d'énergie avec le nombre quantique  $n$ .

# Chapitre 6

## Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons étudié les effets d'un principe d'incertitude généralisé récemment proposé sur les équations de la mécanique quantique relativiste. Le principe d'incertitude généralisé est compatible avec différentes théories candidates pour la construction d'une théorie de la gravitation quantique, en débouchant sur l'apparition d'une longueur minimale de l'ordre de l'échelle de Planck au dessous de laquelle la matière devient insondable. En mécanique quantique ordinaire  $\beta \rightarrow 0$ ,  $\Delta X$  peut être arbitrairement petit si  $\Delta P$  est suffisamment grand, alors que l'introduction d'une longueur minimale conduit à l'apparition d'un phénomène nouveau qui mélange la physique dans le secteur  $IR$  avec la physique dans le secteur  $UV$ .

Nous avons présenté les outils fondamentaux du formalisme de la mécanique quantique non relativiste et relativiste en présence d'une longueur élémentaire, introduite en modifiant la relation d'incertitude de Heisenberg. Ceci équivaut à modifier les relations de commutation entre les quadri-vecteurs position  $X^\mu$  et les quadri-vecteurs impulsions  $P^\nu$  sous la forme  $[X^\mu, P^\nu] = -i\hbar [(1 - \beta P^\rho P_\rho) g^{\mu\nu} - \beta' P^\mu P^\nu]$ , ce qui conduit à une algèbre non commutative des opérateurs de position ( $[X^\mu, X^\nu] \neq 0$ ). Les nouveaux opérateurs de position et d'impulsion sont en général considérés comme des fonctions des anciens opérateurs  $x^\mu$  et  $p^\nu$  satisfaisant aux relations de commutation canoniques de la mécanique quantique ordinaire. Dans ce mémoire nous avons appliqué la version de l'algèbre modifiée à l'étude des équations relativistes de la mécanique quantique, l'équation de Klein-Gordon et l'équation de Dirac. Les résultats obtenus montrent un profond changement en comparaison avec le traitement standard surtout pour des valeurs du paramètre de déformations non nulles. On a vu l'apparition d'état quantique nouveau de masse

$m_+$  et qu'il faut interpréter. En outre, avons montrés que les états quantiques de la mécanique quantique relativistes n'existent que si  $\beta < \frac{1}{8m^2c^2}$ . Ensuite, nous avons étudié le paradoxe de Klein pour une particule scalaire. Nous n'avons pas pu dire si le paradoxe est résolu ou pas avec l'introduction de la longueur minimale, et ceci est dû à la complexité des relations obtenues. est extrêmement intéressant ce problème par d'autres méthodes.

# Bibliographie

- [1] D. J. Gross and P. F. Mende. Nucl. Phys. B 303, 407 (1988).
- [2] D. Amati, M. Cialfaloui, and G. Veneziano. Phys. Lett. B 216, 41 (1989).
- [3] T. Yoneya, Mod. Phys. Lett. A 4, 1578 (1989).
- [4] K. Konishi, G. Paffh uti, P. Provero, Phys. Lett. B 23-4, 276 (1990).
- [5] C. Rovelli, Living Rev. Rel. 1, 1 (1998).
- [6] M. R. Douglas and N. A. Nekrasov, Rev. Mod. Phys. 73, 977 (2001).
- [7] T. Thiemann, Lect. Notes Phys. 631, 41 (2003).
- [8] A. Perez, Class. Quant. Grav. 20, R43 (2003).
- [9] A. Ashtekar and J. Lewandowski, Class. Quant. Grav. 21, R53 (2004).
- [10] F. Girelli, E. R. Livine and D. Oriti, Nucl. Phys. B 708, 411 (2005).
- [11] G. Veneziano, Europhys. Lett. 2, 199 (1986) ; D. Amati, M. Ciafaloni, and G. Veneziano, Phys. Lett. B 197, 81 (1987) ; Int. J. Mod. Phys. A 3, 1615 (1988) ; Phys. Lett. B 216, 41 (1989) ; Nucl. Phys. B 347, 530 (1990) ; D. J. Gross and P. F. Mende, Phys. Lett. B 197, 129 (1987) ; Nucl. Phys. B 303, 407 (1988) ; K. Konishi, G. Pa uti, and P. Provero, Phys. Lett. B 234, 276 (1990) ; R. Guida, K. Konishi, and P. Provero, Mod. Phys. Lett. A 6, 1487 (1991) ; L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A 10, 145 (1995).

- [12] A. Kempf, G. Mangano, R. B. Mann, Phys. Rev. D 52, 1108 (1995); A. Kempf ,  
Uncertainty relation in quantum mechanics with quantum group symmetry, J. Math.  
Phys. 35 (1994), 4483-4496, hep-th/9311147; H. Hinrichsen, A. Kempf, J. Math. Phys.  
37, 2121 (1996); A. Kempf, Quantum field theory with nonzero minimal uncertainties  
in position and momentum, hep-th/9405067.
- [13] A. Kempf and G. Mangano, Phys. Rev. D 55, 7909 (1997).
- [14] C. Quesne and V. M. Tkachuk, J. Phys. A : Math. Gen. 39, 10909 (2006).
- [15] C. Quesne and V. M. Tkachuk, Czech. J. Phys. 56, 1269 (2006).
- [16] P.K. Townsend, Phys. Rev. D 15, 2795 (1976).
- [17] M. J. Jackel, S. Reyman, Phys. Lett. A 185, 143 (1994).
- [18] M. Maggiore, Phys. Lett. B 319, 83 (1993).
- [19] F. Lizzi, N. E. Mavromatos, Preprint OUTP -96-66-P, DSF 53/96, hep-th/9611040.
- [20] L. J. Garay, Int. J. Mod. Phys. A 10, 145 (1995).
- [21] E. Witten, Phys. Today 49 (4), 24 (1996).
- [22] G. Amelino-Camelia, J. Ellis, N. E. Mavromatos, and D. V. Nanopoulos, Mod. Phys. Lett.  
A 12, 2029 (1997).
- [23] S. Haro, JHEP 10, 023 (1998).
- [24] A. Kempf, J. Phys. A : Math. Gen. 30, 2093 (1997).
- [25] H. Hinrichsen and A. Kempf, J. Math. Phys. 37, 2121 (1996).
- [26] R. Brout, C. Gabeil, M. Lubo, and P. Spindel, Phys. Rev. D 59, 044005 (1999).
- [27] Susskind L and Witten E O 1998 Preprint hep-th/9805114  
Polchinski A W and Polchinski J 1999 Phys. Rev. D 59, 065011.
- [28] Szabo Richard, J. Phys. Rev. 378207-99 (2003).
- [29] Polchinski A W and Polchinski J, Phys. Rev. D 59, 065011 (1999).
- [30] S. Minwalla, Van Raamsdouw and N. Seiberg.
- [31] Kh. Nouicer, J. Phys. A : Math. Gen. 38, 10027 (2005).

- 
- [32] K. Gottfried, Quantum Mechanics, Vol. 1 : Fundamentals, (Academic Press Inc, New York, 1966), p. 213.
- [33] S. K. Moayedi, M. R. Setare and H. Moayeri, Quantum gravitational corrections to the real Klein-Gordon field in the presence of a minimal length, arXiv :1004.0563v1 [hep-th].
- [34] S. K. Moayedi, M. R. Setare and H. Moayeri, Formulation of the spinor field in the presence of a minimal length based on the Quesne-Tkachuk algebra, arXiv :1105.1900v1 [hep-th].
- [35] W.Greiner, Relativistic Quantum Mechanics : Wave Equations, 3rd edn. Springer, Berlin (2000).