

N° d'ORDRE : 06/2010-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
"HOUARI BOUMEDIENNE"

FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Pour l'obtention du diplôme de MAGISTERE

En: Système Dynamique et Géométrie

Spécialité: Géométrie

Présenté par: FITTOUHI Yasmine

Sujet

Groupe de Lie-Poisson

Soutenu, publiquement le 21/10/2010 devant le jury composé de :

M. K. BETTINA Professeur à l'USTHB

M. A. AFFANE Maître de conférence/A à l'USTHB

M. B. ABBACI Maître de conférence/A à l'USTHB

M. M. DEFFAF Maître de conférence/B à l'USTHB

Président

Directeur de mémoire

Examineur

Invité

Sommaire

1. Introduction.....	4
2. Variétés de Poisson.....	5
2.1. Crochet de Schouten-Nijenhuis.....	6
2.2. Dérivée intrinsèque.....	11
2.3. Image directe d'un champ de multivecteurs.....	11
2.4. Généralités sur les variétés de Poisson.....	12
2.5. Le tenseur de Poisson.....	17
2.6. Morphisme de Poisson.....	18
2.7. Produit de variétés de Poisson.....	20
3. Groupes de Lie-Poisson.....	22
3.1. Champs tensoriels multiplicatifs.....	22
3.2. Groupes de Lie-Poisson.....	27
3.3. Bialgèbre de Lie.....	28
3.3.1. Equation de Yang-Baxter.....	39
3.3.2. Equation de Yang-Baxter Modifiée (YBM)....	47
4. Groupes de Dirac-Lie.....	55
4.1. Groupoïdes.....	55
4.2. Structure de Dirac.....	58
4.3. Groupes de Dirac-Lie.....	59
5. Compléments.....	59
5.1. Cohomologie d'algèbre de Lie.....	59
5.2. Historique.....	62

6. Supplément théorème de Belavin-Drinfel'd.....	63
6.1. Sous-algèbre de Cartan.....	63
6.1.1. Éléments réguliers.....	63
6.1.2. Sous-algèbre de Cartan.....	64
6.1.3. Système de racines associé à une algèbre de Lie semi-simple.....	64
6.2. Systèmes de racines.....	65
6.2.1. Position relative de deux racines.....	65
6.2.2. Bases.....	66
6.2.3. Générateurs et relations pour les algèbres de Lie semi-simples complexes	67
6.3. Belavin-Drinfel'd.....	67
Référence.....	70

1. INTRODUCTION

La notion de groupe de Lie-Poisson est une conséquence de l'évolution des Groupes Quantiques, elle a été introduite pour la première fois par le mathématicien Vladimir Drinfel'd. Les groupes de Lie-Poisson ont été étudiés et développés largement par le physicien Michael Semenov-Tian-Shansky.

Les groupes quantiques ont été découverts au milieu des années 1980 par Drinfel'd et Jimbo. La structure de base, l'algèbre de Hopf, était connue depuis plusieurs décennies, mais Drinfel'd et Jimbo ont mis en évidence les liens qui existent entre certaines algèbres de Hopf (dites quasi-triangulaires) et des solutions de l'équation de Yang-Baxter que l'on appelle R-matrices. En 1986, Drinfel'd anima un séminaire au congrès international de mathématiques à Berkeley, où il définit le terme « Groupe quantique » en référence à des algèbres de Hopf.

L'équation de Yang-Baxter a une double origine : Yang l'a découverte comme une condition d'intégrabilité lors de l'étude du problème unidimensionnel à plusieurs corps en mécanique quantique. Indépendamment, Baxter l'a faite apparaître comme une condition de commutativité pour les matrices de transfert de certains modèles de physique statistique sur réseaux. Elle est apparue ensuite dans d'autres domaines comme l'étude de la diffusion quantique inverse, l'équation de Yang-Baxter a cependant été écrite pour la première fois par Artin lors de l'étude du groupe des tresses au début du vingtième siècle.

Dans cette thèse, nous allons étudier les groupes de Lie-Poisson et donner quelques unes de leurs remarquables propriétés en les illustrant par des exemples. On débutera par l'étude des variétés de Poisson où l'on introduira le concept du crochet de Schouten-Nijenhuis, ceci nous permettra de donner quelques propriétés des variétés de Poisson. On passera alors aux groupes de Lie-Poisson qui sont des groupes de Lie munis d'une structure additionnelle qui est le crochet de Poisson. Ensuite, on étudiera les bialgèbres de Lie où on rencontrera l'équation de Yang-Baxter. En dernière partie, on introduira la notion de groupoïde où on énoncera la relation entre groupe de Lie-Poisson et groupoïde; ensuite, on abordera la notion de structure de Dirac qui a été introduite par Courant et Weinstein dans le cadre des systèmes mécaniques, qu'on utilisera pour généraliser le concept de groupe de Lie-Poisson en définissant les groupes de Dirac-Lie. Enfin, on exposera quelques résultats remarquables et récents sur les groupes de Dirac-Lie.

2. VARIÉTÉS DE POISSON

Dans tout ce chapitre, M est une variété C^∞ de dimension m . On pose $A^0(M) = C^\infty(M)$ et $\Omega^0(M) = C^\infty(M)$, pour tout entier $p \geq 1$, on désigne par $A^p(M)$ l'espace des champs de tenseurs p fois contravariants et antisymétriques. On note

$$A(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} A^p(M)$$

l'algèbre extérieure des champs de tenseurs contravariants antisymétriques et par $\Omega^q(M)$ l'espace des formes q -multilinéaires alternées sur l'espace tangent, on note

$$\Omega(M) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} \Omega^q(M)$$

des formes q -multilinéaires alternées.

Définition 2.0.1. *Pour toute forme $\alpha \in \Omega^1(M)$ et tout $X \in A^1(M)$, on désigne par $\langle \alpha, X \rangle$ la fonction de $C^\infty(M, \mathbb{R})$ telle que*

$$\langle \alpha, X \rangle(x) = \langle \alpha(x), X(x) \rangle = \alpha(x)(X(x))$$

cette fonction appelée le couplage de $\Omega^1(M)$ et $A^1(M)$.

Cette définition se prolonge, de manière naturelle, en un couplage de $\Omega(M)$ et $A(M)$ c'est à dire en une application $C^\infty(M, \mathbb{R})$ -bilinéaire de $\Omega(M) \times A(M)$ dans $C^\infty(M, \mathbb{R})$ notée

$$(\eta, P) \rightsquigarrow \langle \eta, P \rangle$$

On a déjà défini cette application dans le cas où $\eta \in \Omega^1(M)$ est une 1-forme et $P \in A^1(M)$ un champ de vecteurs. Considérons maintenant le cas où $\eta \in \Omega^q(M)$ et $P \in A^p(M)$ sont des éléments homogènes, de degrés respectifs q et p , décomposables, c'est à dire de la forme

$$\eta = \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_q, \quad P = X_1 \wedge \dots \wedge X_p,$$

où les $\alpha_1 \dots \alpha_q$ sont des 1-formes, $X_1 \dots X_p$ des champs de vecteurs on pose alors

$$\langle \alpha_1 \wedge \dots \wedge \alpha_q, X_1 \wedge \dots \wedge X_p \rangle = \left\{ \begin{array}{l} 0 \text{ si } p \neq q \\ \det(\langle \alpha_i, X_j \rangle) \text{ si } p = q \end{array} \right\}.$$

On sait d'autre part que localement, au voisinage de chaque point, tout p -multivecteur et toute q -forme s'expriment comme des sommes de p -multivecteurs et de q -formes décomposables. On peut donc, de manière unique, étendre par bilinéarité le couplage ci-dessus défini pour les éléments de $A(M)$ et $\Omega(M)$.

2.1. Crochet de Schouten-Nijenhuis.

Proposition 2.1.1. *Il existe une unique application \mathbb{R} -bilinéaire de $A(M) \times A(M)$ dans $A(M)$, appelée crochet de Schouten-Nijenhuis et notée $(P, Q) \mapsto [P, Q]$, vérifiant les propriétés suivantes:*

Propriété 1: Pour f et $g \in A^0(M) = C^\infty(M)$, $[f, g] = 0$,

Propriété 2: Pour un champ de vecteurs $X \in A^1(M)$ et un champ de tenseurs $Q \in A(M)$

$$[X, Q] = \mathcal{L}_X Q$$

$\mathcal{L}_X Q$ étant la dérivée de Lie de Q relativement à X ,

Propriété 3: Pour $P \in A^p(M)$ et $Q \in A^q(M)$,

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P],$$

Propriété 4: Pour $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A(M)$,

$$[P, Q \wedge R] = [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R].$$

Preuve:

Le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ est local (ceci découle de la localité du crochet de Lie). Montrons d'abord que si Q est nul sur un ouvert U alors $[P, Q]$ s'annule aussi sur U . Soit $x \in U$ et U' un ouvert relativement compact dans U tel que $x \in U' \subset U$. On choisit une fonction α dans $C^\infty(M)$ telle que $\alpha \equiv 0$ sur U' et $\alpha = 1$ sur $M - U$. Comme Q est nul sur U alors $Q\alpha = Q$. On a

$$[P, Q](x) = [P, Q\alpha](x) = [P, Q](x)\alpha(x) + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, \alpha](x),$$

mais α et Q s'annulent en x et donc $[P, Q](x) = 0$, d'où

$$[P, Q](x) = (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, \alpha](x),$$

Le caractère local de ce crochet permet d'en définir la restriction à tout ouvert de la variété. Donc nous pouvons travailler sur le domaine d'une carte (U, φ) avec $\{x^i\}$ son système de coordonnées. Deux champs tenseurs contravariants antisymétriques P et Q s'écrivent de manière unique sous la forme suivante

$$P = P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \text{ avec } P^{i_1, \dots, i_p} \in C^\infty(U),$$

et

$$Q = Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \text{ avec } Q^{j_1, \dots, j_q} \in C^\infty(U).$$

En utilisant les Propriétés 3 et 4 et le fait que le crochet de Lie $[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}] = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} [P, Q]|_U &= [P|_U, Q|_U] = \left[P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \right], \\ &= \left[P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, Q^{j_1, \dots, j_q} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& Q^{j_1, \dots, j_q} \left[P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \right], \\
&= -(-1)^{(p-1)} \left[Q^{j_1, \dots, j_q}, P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} - \\
&\quad (-1)^{(p-1)(q-1)} Q^{j_1, \dots, j_q} \left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}, P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right], \\
&= -(-1)^{(p-1)} P^{i_1, \dots, i_p} \left[Q^{j_1, \dots, j_q}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} - \\
&\quad (-1)^{(p-1)(q-1)} Q^{j_1, \dots, j_q} \left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}, P^{i_1, \dots, i_p} \right] \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} - \\
&\quad (-1)^{(p-1)(q-1)} Q^{j_1, \dots, j_p} P^{i_1, \dots, i_p} \left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \right], \\
&= -(-1)^{(p-1)} (-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} - \\
&\quad (-1)^{(p-1)(q-1)} \left(-(-1)^{(q-1)} \right) (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \\
&\quad \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \\
&= -(-1)^{(p-1)} (-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + \\
&\quad (-1)^{p(q-1)} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}.
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
[P, Q]_{|U} &= (-1)^p [(-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + (-1)^{pq} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}],
\end{aligned}$$

d'où l'unicité du crochet de Schouten-Nijenhuis.

Il reste à prouver l'existence, Soient (φ, U) une carte, P et Q deux éléments de $A^p(U)$ et $A^q(U)$ respectivement où

$$P = P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \text{ et } Q = Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}$$

définissons l'application \mathbb{R} -bilinéaire $[\cdot, \cdot]$ de $A(U) \times A(U)$ dans $A(U)$ telle que

$$[P, Q] = 0 \text{ si } P, Q \in C^\infty(U),$$

sinon

$$\begin{aligned} [P, Q]_{|U} &= (-1)^p ((-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\ &\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + (-1)^{pq} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \\ &\frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}). \end{aligned}$$

Vérifions que cette application satisfait les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis: La propriété 1 est satisfaite par définition et la propriété 2 est triviale, montrons la propriété 3

$$\begin{aligned} [P, Q]_{|U} &= (-1)^p ((-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \\ &\wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + \\ &(-1)^{pq} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \\ &\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}), \\ &= (-1)^p (-1)^{pq} ((-1)^{pq} (-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \\ &\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} + \\ &(-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \\ &\widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}), \\ &= \left(-(-1)^{(p-1)(q-1)} \right) (-1)^q ((-1)^{pq} (-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \\ &\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \\ &+ (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}), \end{aligned}$$

d'où

$$[P, Q] = -(-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, P].$$

Reste à prouver la propriété 4: soient P, Q et R s'écrivant sous la forme

$$P = P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}, \quad Q = Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_q}}$$

$$\begin{aligned}
\text{et } R &= R^{j_{q+1}, \dots, j_{q+r}} \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+1}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} \\
[P, Q \wedge R] &= (-1)^p ((-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q} R^{j_{1+q}, \dots, j_{q+r}}}{\partial x^{i_k}} \wedge \\
&\quad \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} + \\
&\quad (-1)^{pq} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}), \\
&= (-1)^p ((-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial Q^{j_1, \dots, j_q}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} + \\
&\quad (-1)^k P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial R^{j_{1+q}, \dots, j_{q+r}}}{\partial x^{i_k}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{i_k}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} + \\
&\quad (-1)^{pq} (-1)^l Q^{j_1, \dots, j_q} \frac{\partial P^{i_1, \dots, i_p}}{\partial x^{j_l}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \wedge \dots \wedge \\
&\quad \widehat{\frac{\partial}{\partial x^{j_l}}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{j_{q+r}}} \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}), \\
[P, Q \wedge R] &= [P, Q] \wedge R + (-1)^{(p-1)q} Q \wedge [P, R]. \spadesuit
\end{aligned}$$

Voici les propriétés essentielles du crochet de Schouten-Nijenhuis données dans [6]:

Corollaire 2.1.1. *Soient $P \in A^p(M)$, $Q \in A^q(M)$ et $R \in A^r(M)$. Le crochet de Schouten-Nijenhuis vérifie l'identité de Jacobi graduée*

$$(-1)^{(p-1)(r-1)} [P, [Q, R]] + (-1)^{(q-1)(p-1)} [Q, [R, P]] + (-1)^{(r-1)(q-1)} [R, [P, Q]] = 0.$$

Preuve:

Si $p = q = r = 1$ on retrouve l'identité de Jacobi, dans le cas général cette identité s'obtient par récurrence sur p , q et r en utilisant les propriétés 3 et 4 du crochet de Schouten-Nijenhuis. ♠

Proposition 2.1.2. *Soient P et Q deux champs de tenseurs contravariants antisymétriques sur la variété M , $[P, Q]$ leur crochet de Schouten-Nijenhuis. Le produit intérieur $i([P, Q])$ s'exprime au moyen de la différentielle extérieure d et du produit intérieur $i(P)$, $i(Q)$, par la formule*

$$i([P, Q]) = [i(P), d], i(Q).$$

Corollaire 2.1.2. *Soient $P \in A^p(M)$, avec $p \geq 1$, et $f \in A^0(M)$. Pour toute forme $\eta \in \Omega^{p-1}(M)$, on a*

$$\langle \eta, [P, f] \rangle = \langle \eta \wedge df, P \rangle.$$

Corollaire 2.1.3. Soit $P \in A^p(M)$, avec $p \geq 1$, et f_1, \dots, f_p des éléments de $A^0(M)$. On a :

$$\langle df_1 \wedge \dots \wedge df_p, P \rangle = [\dots [[P, f_p], f_{p-1}] \dots, f_1].$$

Soit P un élément de $A^2(M)$. Posons, pour tous f et $g \in C^\infty(M)$

$$\{f, g\} = P(df, dg)$$

on remarque que d'après le couplage de $\Omega(M)$ et $A(M)$ on peut aussi l'écrire de cette façon

$$\{f, g\} = \langle df \wedge dg, P \rangle.$$

Nous obtenons ainsi une application \mathbb{R} -bilinéaire de $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$. D'après le corollaire 2.1.3:

$$\{f, g\} = P(df, dg) = [[P, g], f] = -[[P, f], g].$$

Lemme 2.1.1. (*A.Lichnerowicz*) Soient f, g et h trois éléments de $C^\infty(M)$. On a :

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \frac{1}{2} [P, P](df, dg, dh).$$

Preuve:

Pour alléger l'écriture nous posons

$$[P, g] = Y \text{ et } [P, h] = Z.$$

on a

$$\begin{aligned} \{f, \{g, h\}\} &= [[P, [[P, h], g]], f], \\ &= -[[P, [[P, g], h]], f], \\ &= -[[P, [Y, h]], f]. \end{aligned}$$

D'après l'identité de Jacobi graduée on a,

$$\begin{aligned} [P, [Y, h]] &= [Y, [h, P]] + [h, [P, Y]], \\ &= [Y, [P, h]] + [h, [P, Y]], \\ &= [Y, Z] + [h, [P, Y]]; \end{aligned}$$

toujours d'après l'identité de Jacobi graduée,

$$[P, Y] = [P, [P, g]] = -[P, [g, P]] - [g, [P, P]],$$

on a ainsi

$$2[P, Y] = 2[P, [P, g]] = -[g, [P, P]] = [[P, P], g].$$

Par conséquent

$$\{f, \{g, h\}\} = -[[Y, Z], f] - \frac{1}{2} [[[[P, P], g], h], f].$$

De même on a

$$\begin{aligned} \{g, \{h, f\}\} &= [Y, [Z, f]], \\ \{h, \{f, g\}\} &= -\{h, \{g, f\}\} = -[Z, [Y, f]]. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = \\ & (\mathcal{L}_Y \mathcal{L}_Z - \mathcal{L}_Z \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_{[Y, Z]})f - \frac{1}{2}[[[P, P], g], h], f] = \\ & -\frac{1}{2} \langle df \wedge dh \wedge dg, [P, P] \rangle = \frac{1}{2} \langle df \wedge dg \wedge dh, [P, P] \rangle . \spadesuit \end{aligned}$$

Corollaire 2.1.4. (*A.Lichnerowicz*) Soient f, g deux éléments de $C^\infty(M)$ et P un élément de $A^2(M)$, l'application \mathbb{R} -bilinéaire $(f, g) \rightarrow \{f, g\} = P(df, dg)$ vérifie l'identité de Jacobi si et seulement si

$$[P, P] = 0.$$

Preuve:

Cela résulte immédiatement du lemme précédent de A.Lichnerowicz, et du fait que $[P, P]$ est nul si et seulement si, pour tout triplet (f, g, h) d'éléments de $C^\infty(M)$, $\langle df \wedge dg \wedge dh, [P, P] \rangle$ est nul.

2.2. Dérivée intrinsèque. Soit $P \in A^p(M)$, $a \in M$ tel que $P(a) = 0$, $v \in T_a(M)$ et X un champ de vecteurs sur M tel que $X(a) = v$. La valeur au point a de la dérivée de Lie de P selon X , ne dépend que de v et P . En effet, dans un système de coordonnées $\{x^i\}$, P s'écrit

$$P = P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} \text{ avec } P^{i_1, \dots, i_p}(a) = 0,$$

Il s'ensuit que

$$\mathcal{L}_X P(a) = \mathcal{L}_X P^{i_1, \dots, i_p} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}} = d_a P^{i_1, \dots, i_p}(v) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \wedge \dots \wedge \frac{\partial}{\partial x^{i_p}}.$$

On pose alors

$$\mathcal{L}_X P(a) = d_a P(v).$$

D'où la définition suivante

Définition 2.2.1. L'application $v \rightsquigarrow d_a P(v)$ de $T_a M$ dans $\wedge^p(T_a M)$ est appelée *dérivée intrinsèque de P au point a* .

2.3. Image directe d'un champ de multivecteurs. Soit $\phi : M \rightarrow N$ un difféomorphisme de variétés et $P \in A^p(M)$. En posant pour tout $y \in N$ et $\alpha^1, \dots, \alpha^p$ dans $T_y^* N$

$$[\phi_* P]_y(\alpha^1, \dots, \alpha^p) = P_{\phi^{-1}(y)}(\phi^* \alpha^1, \dots, \phi^* \alpha^p)$$

on définit un champ de multivecteurs sur N dit image directe de P par ϕ et notée $\phi_* P$.

2.4. Généralités sur les variétés de Poisson.

Définition 2.4.1. Une structure de Poisson sur une variété différentiable M est la donnée d'une application \mathbb{R} -bilinéaire de $C^\infty(M) \times C^\infty(M)$ dans $C^\infty(M)$ notée $(f, g) \rightarrow \{f, g\}$ vérifiant :

- 1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$ (anticommutativité),
- 2) $\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0$ (identité de Jacobi),
- 3) $\{f, g_1 g_2\} = \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}$ (règle de Leibniz).

Une variété de Poisson est une variété différentiable munie d'une structure de Poisson, le crochet $\{.,.\}$ est appelé crochet de Poisson.

Remarque 2.4.1. L'espace vectoriel $C^\infty(M)$ muni du crochet de Poisson est une algèbre de Lie.

Exemple 2.4.1. Le crochet de Poisson trivial.

Soit M une variété différentiable. Pour tous f et g deux éléments de $C^\infty(M)$ tels que $\{f, g\} = 0$.

Exemple 2.4.2. La structure linéaire de Lie-Poisson.

Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie réelle de dimension finie, et \mathcal{G}^* son dual. On adoptera les notations

$$ad_X Y = [X, Y]$$

et

$$\langle coad_X \alpha, Y \rangle = \langle \alpha, -ad_X Y \rangle = \langle \alpha, [Y, X] \rangle, \text{ avec } X, Y \in \mathcal{G} \text{ et } \alpha \in \mathcal{G}^*.$$

Pour tout couple $(f, g) \in C^\infty(\mathcal{G}^*) \times C^\infty(\mathcal{G}^*)$ et pour tout point $\alpha \in \mathcal{G}^*$, on pose:

$$\{f, g\}(\alpha) = \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g] \rangle.$$

(on note par, $d_\alpha f$ et $d_\alpha g$ les différentielles premières de f et g respectivement au point α et sont considérées comme éléments de \mathcal{G} .) Montrons que $\{, \}$ est bien une structure de Poisson sur \mathcal{G}^* . La \mathbb{R} -bilinéarité et l'anticommutativité sont triviales.

Vérifions la règle de Leibniz: Soient f, g_1, g_2 des éléments de $C^\infty(\mathcal{G}^*)$, et α un élément de \mathcal{G}^* , on a

$$\begin{aligned} \{f, g_1 g_2\}(\alpha) &= \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha(g_1 g_2)] \rangle, \\ &= \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g_1 \cdot g_2(\alpha)] \rangle + \langle \alpha, [d_\alpha f, g_1(\alpha) d_\alpha g_2] \rangle, \\ &= \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g_1] \rangle g_2(\alpha) + g_1(\alpha) \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha g_2] \rangle, \\ &= \{f, g_1\}(\alpha) g_2(\alpha) + g_1(\alpha) \{f, g_2\}(\alpha). \end{aligned}$$

Passons à l'identité de Jacobi. Calculons en premier $d_\alpha \{f, g\}(\beta)$ pour des éléments f, g de $C^\infty(\mathcal{G}^*)$ et α, β dans \mathcal{G}^*

$$\begin{aligned} d_\alpha \{f, g\}(\beta) &= \langle \beta, [d_\alpha f, d_\alpha g] \rangle + \langle \alpha, [d_\alpha^2 f(\beta), d_\alpha g] \rangle + \langle \alpha, [d_\alpha f, d_\alpha^2 g(\beta)] \rangle, \\ &= \langle \beta, [d_\alpha f, d_\alpha g] \rangle + \langle coad_{d_\alpha g} \alpha, d_\alpha^2 f(\beta) \rangle - \langle coad_{d_\alpha f} \alpha, d_\alpha^2 g(\beta) \rangle \end{aligned}$$

(Où $d_\alpha^2 f$ et $d_\alpha^2 g$ sont respectivement les différentielles secondes de f et de g au point α) par bilinéarité et symétrie de $d_\alpha^2 f(\alpha)$ et $d_\alpha^2 g$ on obtient

$$d_\alpha \{f, g\}(\beta) = \langle \beta, [d_\alpha f, d_\alpha g] \rangle + \langle \beta, d_\alpha^2 f(\text{coad}_{d_\alpha g} \alpha) \rangle - \langle \beta, d_\alpha^2 g(\text{coad}_{d_\alpha f} \alpha) \rangle,$$

on peut donc écrire

$$d_\alpha \{f, g\} = [d_\alpha f, d_\alpha g] + d_\alpha^2 f(\text{coad}_{d_\alpha g} \alpha) - d_\alpha^2 g(\text{coad}_{d_\alpha f} \alpha).$$

Alors

$$\begin{aligned} \{\{f, g\}, h\}(\alpha) &= \langle \alpha, [d_\alpha \{f, g\}, d_\alpha h] \rangle \\ &= \langle \alpha, [[d_\alpha f, d_\alpha g], d_\alpha h] \rangle + \langle \alpha, [d_\alpha^2 f(\text{coad}_{d_\alpha g} \alpha), d_\alpha h] \rangle \\ &\quad - \langle \alpha, [d_\alpha^2 g(\text{coad}_{d_\alpha f} \alpha), d_\alpha h] \rangle, \\ &= \langle \alpha, [[d_\alpha f, d_\alpha g], d_\alpha h] \rangle + \langle \text{coad}_{d_\alpha h} \alpha, d_\alpha^2 f(\text{coad}_{d_\alpha g} \alpha) \rangle \\ &\quad - \langle \text{coad}_{d_\alpha h} \alpha, d_\alpha^2 g(\text{coad}_{d_\alpha f} \alpha) \rangle, \\ &= \langle \alpha, [[d_\alpha f, d_\alpha g], d_\alpha h] \rangle + d_\alpha^2 f(\text{coad}_{d_\alpha g} \alpha, \text{coad}_{d_\alpha h} \alpha) \\ &\quad - d_\alpha^2 g(\text{coad}_{d_\alpha f} \alpha, \text{coad}_{d_\alpha h} \alpha). \end{aligned}$$

En faisant la somme des termes obtenus et par permutation circulaire de f, g et h on obtiendra l'identité de Jacobi

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

En effet la somme des termes faisant intervenir $[[d_\alpha f, d_\alpha g], d_\alpha h]$ et les termes qui s'en déduisent par permutation circulaire de $d_\alpha f, d_\alpha g$ et $d_\alpha h$ est nulle car le crochet dans l'algèbre de Lie de \mathcal{G} vérifie l'identité de Jacobi, quant aux autres termes, ils s'annulent par la symétrie de $d_\alpha^2 f, d_\alpha^2 g$ et $d_\alpha^2 h$.

On conclut que le dual de \mathcal{G}^* de l'algèbre de Lie \mathcal{G} possède une structure de Poisson naturelle appelée structure linéaire de Lie-Poisson.

Exemple 2.4.3. *Variété de Poisson sur \mathbb{R}^{2n}*

On sait que \mathbb{R}^2 est une variété différentiable, définissons sur \mathbb{R}^{2n} une structure de Poisson. Soient f et $g \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ telles que

$$\{f, g\} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i}.$$

Vérifions que ce crochet $\{.,.\}$ est bien un crochet de Poisson: La \mathbb{R} -bilinearité et l'anticommutativité sont triviales. Vérifions la règle de Leibniz. Soient f, g_1 et $g_2 \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$

$$\begin{aligned} \{f, g_1 g_2\} &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g_1 g_2}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g_1 g_2}{\partial x^i}, \\ &= \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g_1}{\partial y^i} g_2 - \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g_1}{\partial x^i} g_2 + g_1 \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial g_2}{\partial y^i} - g_1 \frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial g_2}{\partial x^i}, \\ &= \{f, g_1\} g_2 + g_1 \{f, g_2\}. \end{aligned}$$

Il reste à montrer l'identité de Jacobi. Pour f, g et $h \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$, on a

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} =$$

$$\begin{aligned}
& \sum_i \frac{\partial \{f, g\}}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial y^i} - \frac{\partial \{f, g\}}{\partial y^i} \frac{\partial h}{\partial x^i} + \frac{\partial \{g, h\}}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{\partial \{g, h\}}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial x^i} \\
& \quad + \frac{\partial \{h, f\}}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial \{h, f\}}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial x^i} = \\
& \sum_i \sum_j \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial h}{\partial y^i} - \\
& \quad \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial x^j} \frac{\partial g}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial x^j} \right) \frac{\partial h}{\partial x^i} + \\
& \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial h}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial y^i} + \\
& \quad \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial x^j} \frac{\partial h}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial x^j} \right) \frac{\partial f}{\partial x^i} + \\
& \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial y^j} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial h}{\partial y^j} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \right) \frac{\partial g}{\partial y^i} - \\
& \quad \left(\frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^j} - \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial y^j} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial h}{\partial y^j} \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial x^j} \right) \frac{\partial g}{\partial x^i}, \\
& = \left(\frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial y^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial y^i} - \frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial h}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial y^j} \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^2 g}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial f}{\partial y^i} \frac{\partial h}{\partial y^j} - \frac{\partial f}{\partial y^j} \frac{\partial h}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^i \partial y^j} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \frac{\partial h}{\partial x^j} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial x^i} \right) \right) + \\
& \quad \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial y^j} \left(\frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial y^i} - \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial h}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial x^j} \left(\frac{\partial h}{\partial y^j} \frac{\partial g}{\partial x^i} - \frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial h}{\partial y^i} \frac{\partial g}{\partial y^j} - \frac{\partial h}{\partial y^j} \frac{\partial g}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^i \partial y^j} \left(\frac{\partial h}{\partial x^i} \frac{\partial g}{\partial x^j} - \frac{\partial h}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial x^i} \right) \right) + \\
& \quad \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial y^j} \left(\frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial y^i} - \frac{\partial f}{\partial x^j} \frac{\partial g}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial x^j} \left(\frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial y^j} \right) + \right. \\
& \quad \left. \frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^j} \left(\frac{\partial g}{\partial y^i} \frac{\partial f}{\partial y^j} - \frac{\partial g}{\partial y^j} \frac{\partial f}{\partial y^i} \right) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^i \partial y^j} \left(\frac{\partial g}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial x^j} - \frac{\partial g}{\partial x^j} \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) \right) = 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$\{\{f, g\}, h\} + \{\{g, h\}, f\} + \{\{h, f\}, g\} = 0.$$

Proposition 2.4.1. *Pour toute fonction $f \in C^\infty(M)$ l'application $h \rightsquigarrow \{f, h\}$ est une dérivation de l'algèbre $C^\infty(M)$.*

Preuve:

Cette application est linéaire et vérifie la règle de Leibniz car le crochet de Poisson est une application \mathbb{R} -bilinéaire satisfaisant la règle de Leibniz.♠

Il existe donc un unique champ de vecteurs noté X_f tel que, pour toute fonction $h \in C^\infty(M)$ on a

$$\{f, h\} = X_f h = i(X_f)dh.$$

D'où la définition suivante:

Définition 2.4.2. *Le champ de vecteurs associé à f par la proposition précédente est appelé Hamiltonien de f . On le note X_f .*

Proposition 2.4.2. *L'application $f \rightsquigarrow X_f$ est un morphisme de l'algèbre de Lie $C^\infty(M)$ sur $\kappa(M)$.*

Preuve:

Il est clair que cette application est linéaire. Il reste à établir que

$$\{f, g\} \rightsquigarrow [X_f, X_g] \text{ pour tout } f, g \text{ et } h \in C^\infty(M),$$

d'après l'identité de Jacobi nous avons

$$\{\{f, g\}, h\} = \{f, \{g, h\}\} - \{g, \{f, h\}\},$$

$$\{\{f, g\}, h\} = X_f X_g h - X_g X_f h = (X_f X_g - X_g X_f) h = [X_f, X_g] h. \spadesuit$$

Définition 2.4.3. *Une forme symplectique sur une variété différentiable M est une 2-forme différentielle ω fermée (c'est-à-dire vérifiant $d\omega = 0$), partout non dégénérée (c'est-à-dire son rang est égal à la dimension de M). Une variété M munie d'une forme symplectique est appelée variété symplectique, notée (M, ω) .*

Exemple 2.4.4. *Variétés symplectiques.*

Toute variété symplectique (M, ω) est munie d'une structure de Poisson, avec

$$\{f, g\} = \omega(X_f, X_g).$$

La \mathbb{R} -bilinearité, l'anticommutativité et la règle de Leibniz sont triviales. Vérifions l'identité de Jacobi,

La différentielle d'une k -forme β est

$$d\beta(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\beta(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1})) + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} (\beta([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})),$$

avec X_1, \dots, X_{k+1} des champs de vecteurs.

On sait que pour tout X_f, X_g et X_h on a

$$d\omega(X_f, X_g, X_h) = 0$$

$$d\omega(X_f, X_g, X_h) = X_f(\omega(X_g, X_h)) + X_g(\omega(X_h, X_f)) + X_h(\omega(X_f, X_g)) -$$

$$\begin{aligned} & \omega([X_f, X_g], X_h) - \omega([X_g, X_h], X_f) - \omega([X_h, X_f], X_g), \\ & = 3(\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\}). \end{aligned}$$

Donc l'identité de Jacobi est vérifiée.

Lemme 2.4.1. *Soit M une variété de Poisson, $f \in C^\infty(M)$ alors:*

$$\{const, f\} = 0.$$

Preuve:

On sait que

$$\{const, f\} = const \{1, f\},$$

on a d'après la règle de Leibniz

$$\{1, f\} = \{1 \times 1, f\} = \{1, f\} + \{1, f\} = 2\{1, f\},$$

d'où

$$\{1, f\} = 0.$$

Donc

$$\{const, f\} = 0. \spadesuit$$

Proposition 2.4.3. *Si f ou g s'annule sur un ouvert U de M , il en est de même pour leur crochet de Poisson $\{f, g\}$.*

Preuve:

Soient un ouvert U' relativement compact dans U , et α une application $C^\infty(M)$ telle que $\alpha \equiv 0$ sur U' et $\alpha \equiv 1$ sur $M - U$. Supposons que f s'annule sur l'ouvert U alors $f = f\alpha$, et soit $x \in U'$ nous avons:

$$\{f, g\}(x) = \{f\alpha, g\}(x) = \{f, g\}(x)\alpha(x) + f(x)\{\alpha, g\}(x) = 0,$$

d'où $\{f, g\}$ est nulle sur U . \spadesuit

Corollaire 2.4.1. *Le crochet de Poisson est local si f ou g sont constantes sur un ouvert U de M , alors leur crochet de Poisson $\{f, g\}$ est nul.*

Preuve:

Si la fonction f est constante sur l'ouvert U , elle s'écrit sous la forme

$$f = (f - c)\alpha + c.$$

avec c une constante et soit un ouvert U' relativement compact dans U contenant x , et α une application $C^\infty(M)$ telle que $\alpha \equiv 0$ sur U' et $\alpha \equiv 1$ sur $M - U$.

D'après la proposition précédente on a:

$$\begin{aligned} \{f, g\}(x) &= \{(f - c)\alpha + c, g\}(x) = \{(f - c)\alpha, g\}, \\ &= 0. \spadesuit \end{aligned}$$

2.5. Le tenseur de Poisson. A présent nous sommes en mesure de définir la restriction d'une structure de Poisson à un ouvert U de M .

Soit f et $g \in C^\infty(U)$ et $x \in U$; on choisit $\alpha \in \mathcal{D}(U)$ telle que $\alpha \equiv 1$ dans un voisinage de x . alors αf et αg sont dans $C^\infty(M)$. D'après la proposition 2.4.3, le nombre $\{\alpha f, \alpha g\}(x)$ ne dépend que de f et de g . Par ce procédé, on obtient une fonction $\{f, g\}$ dans $C^\infty(U)$. Vérifions que ce crochet définit une structure de Poisson sur U :

La \mathbb{R} -bilinearité et l'anticommutativité sont triviales. Vérifions la règle de Leibniz: Soient f, g_1, g_2 des éléments de $C^\infty(U)$, et x un élément de U :

$$\begin{aligned} \{f, g_1 g_2\}_U(x) &= \{\alpha f, \alpha g_1 \alpha g_2\}_M(x), \\ &= \{\alpha f, \alpha g_1\}_M(x) \alpha g_2(x) + \alpha g_1(x) \{\alpha f, \alpha g_2\}_M(x), \\ &= \{f, g_1\}_U(x) g_2(x) + g_1(x) \{f, g_2\}_U(x). \end{aligned}$$

D'où la règle de Leibniz.

Passons à l'identité de Jacobi, soient f, g, h des éléments de $C^\infty(U)$, et x un élément de U

$$\{\{f, g\}, h\}_U(x) + \{\{g, h\}, f\}_U(x) + \{\{h, f\}, g\}_U(x) =$$

$$\{\{\alpha f, \alpha g\}, \alpha h\}_M(x) + \{\{\alpha g, \alpha h\}, \alpha f\}_M(x) + \{\{\alpha h, \alpha f\}, \alpha g\}_M(x) = 0.$$

ainsi l'identité de Jacobi est satisfaite.

Proposition 2.5.1. *Le crochet de Poisson de f et g , $\{f, g\}$ ne dépend que de df et dg .*

Preuve:

Soient $f \in C^\infty(M)$ et (U, φ) une carte où (U, x^1, \dots, x^n) ses coordonnées locales, (d'après le lemme de Milnor) la formule de Taylor au point $a \in U$:

$$f(x) = f(a) + h_i(x) (x^i - a^i) \text{ avec } h_i(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a),$$

et

$$g(x) = g(a) + l_i(x) (x^i - a^i) \text{ avec } l_i(a) = \frac{\partial g}{\partial x^i}(a).$$

Il s'ensuit que

$$\{f, g\}(a) = \{f(a) + h_i(x) (x^i - a^i), g(a) + l_j(x) (x^j - a^j)\}(a),$$

en utilisant le fait que $\{1, f\} = 0$ et la formule de Leibniz on a

$$\begin{aligned} \{f, g\}(a) &= \{h_i(x) (x^i - a^i), l_j(x) (x^j - a^j)\}(a), \\ &= l_j(a) \{h_i(x) (x^i - a^i), (x^j - a^j)\}(a), \\ &= l_j(a) h_i(a) \{(x^i - a^i), (x^j - a^j)\}(a); \end{aligned}$$

alors

$$\{f, g\}(a) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(a) \frac{\partial g}{\partial x^j}(a) \{x^i, x^j\}(a).$$

Cette égalité ne dépend que de df et dg . ♠

Remarque 2.5.1. Les $P^{ij} = \{x^i, x^j\}$ sont les composantes d'un élément P de $A^2(M)$

$$P = \sum_{i \leq j} P^{ij} \partial_{x^i} \wedge \partial_{x^j}$$

Il est clair que P ainsi défini est bien une application bilinéaire anticommutative alors P est un champ de vecteurs antisymétrique contravariant.

Par conséquent on peut aussi définir une structure de Poisson au voisinage d'un point a de M de la manière suivante:

$$\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} \{x_i, x_j\} = \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial g}{\partial x_j} P^{ij} = P(df, dg).$$

Dans ce cas P est appelé tenseur de Poisson.

Selon ce qui précède on a la proposition suivante:

Proposition 2.5.2. Soit $P \in A^2(M)$ est un tenseur de Poisson si et seulement si $[P, P] = 0$.

Preuve:

la preuve découle directement du corollaire de A Lichberowicz 2.1.4.

2.6. Morphisme de Poisson. Soient $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$ et $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ deux variétés de Poisson avec P_1 et P_2 leurs tenseurs de Poisson respectifs.

Définition 2.6.1. Une application différentiable $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$ est dite application de Poisson ou morphisme de Poisson si pour tout couple de fonctions f et $g \in C^\infty(M_2)$ on a,

$$\{\varphi^* f, \varphi^* g\}_{M_1} = \varphi^* \{f, g\}_{M_2},$$

avec $\varphi^* f = f \circ \varphi$ pour tout $f \in C^\infty(M_2)$

Proposition 2.6.1. Soit une application $\varphi \in C^\infty(M_1, M_2)$ est un morphisme de Poisson si et seulement si

$$P_2 = \varphi_* P_1.$$

Preuve:

Supposons que φ est un morphisme de Poisson. Soient $x_1 \in M_1$, $x_2 = \varphi(x_1)$ et $\alpha, \beta \in TM_{x_2}^*$. Il existe toujours deux fonctions $f, g \in C^\infty(M_2)$ telles que $\alpha = d_{x_2} f$ et $\beta = d_{x_2} g$ alors

$$\begin{aligned} P_2(\alpha, \beta) &= \{f, g\}_{M_2}(x_2) = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_{M_1}(x_1), \\ &= P_1(d_{x_1} f \circ \varphi, d_{x_1} g \circ \varphi) = P_1(\varphi^* \alpha, \varphi^* \beta). \end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que $P_2 = \varphi_* P_1$, soit $f, g \in C^\infty(M_2)$, $x_1 \in M_1$ et $x_2 = \varphi(x_1)$. On a alors

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{M_2}(x_2) &= P_2(df, dg)(x_2) = P_1(\varphi^* df, \varphi^* dg)(x_1), \\ &= P_1(d_{x_1} f \circ \varphi, d_{x_1} g \circ \varphi)(x_1) = \{f \circ \varphi, g \circ \varphi\}_{M_1}(x_1). \spadesuit \end{aligned}$$

Exemple 2.6.1. Algèbres de Lie.

A partir d'un morphisme d'algèbres de Lie, nous allons construire un morphisme de Poisson:

Soient \mathcal{H} et \mathcal{G} deux algèbres de Lie et φ un morphisme d'algèbre de Lie de \mathcal{H} dans \mathcal{G} , alors sa transposée $\varphi^* : \mathcal{G}^* \rightarrow \mathcal{H}^*$ est une application de Poisson où \mathcal{H}^* et \mathcal{G}^* sont munies de la structure linéaire de Lie-Poisson.

Vérifions que φ^* est bien une application de Poisson: φ^* est une application linéaire donc différentiable, il reste à voir que: Pour tout couple de fonctions f et $g \in C^\infty(\mathcal{H}^*)$ et tout point $x \in \mathcal{G}^*$ on ait:

$$\{(\varphi^*)^* f, (\varphi^*)^* g\}_{\mathcal{G}^*}(x) = (\varphi^*)^* \{f, g\}_{\mathcal{H}^*}(x).$$

On sait que $(\varphi^*)^* = \varphi$ et $\langle \varphi^*, f \rangle(y) = \langle f, \varphi(y) \rangle$, comme φ^* est linéaire on a $d_x \varphi^* = \varphi^*$, donc nous devons faire apparaître la formule suivante:

$$\{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathcal{G}^*}(x) = \{f, g\}_{\mathcal{H}^*} \circ \varphi^*(x).$$

En effet cette égalité est satisfaite du fait que

$$\{f, g\}_{\mathcal{H}^*} \varphi^*(x) = \langle \varphi^*(x), [d_{\varphi^*(x)} f, d_{\varphi^*(x)} g] \rangle$$

et

$$\begin{aligned} \{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathcal{G}^*}(x) &= \langle x, [d_x(f \circ \varphi^*), d_x(g \circ \varphi^*)] \rangle, \\ &= \langle x, [d_{\varphi^*(x)} f \circ d_x \varphi^*, d_{\varphi^*(x)} g \circ d_x \varphi^*] \rangle, \\ &= \langle x, [d_{\varphi^*(x)} f \circ \varphi^*, d_{\varphi^*(x)} g \circ \varphi^*] \rangle, \\ &= \langle x, [\varphi(d_{\varphi^*(x)} f), \varphi(d_{\varphi^*(x)} g)] \rangle; \end{aligned}$$

étant donné que φ est un morphisme d'algèbre de Lie on obtient

$$\begin{aligned} \{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathcal{G}^*}(x) &= \langle x, \varphi[(d_{\varphi^*(x)} f), (d_{\varphi^*(x)} g)] \rangle, \\ &= \langle \varphi^*(x), [(d_{\varphi^*(x)} f), (d_{\varphi^*(x)} g)] \rangle; \end{aligned}$$

d'où

$$\{f, g\}_{\mathcal{H}^*} \varphi^*(x) = \{f \circ \varphi^*, g \circ \varphi^*\}_{\mathcal{G}^*}(x).$$

Proposition 2.6.2. Soient $(M_1, \{\cdot, \cdot\}_1)$, $(M_2, \{\cdot, \cdot\}_2)$ et $(M_3, \{\cdot, \cdot\}_3)$ trois variétés de Poisson et deux applications différentiables $\varphi : M_1 \rightarrow M_2$, $\psi : M_2 \rightarrow M_3$:

1) Si φ et ψ sont deux applications de Poisson l'application composée $\psi \circ \varphi$ est une application de Poisson,

2) Si φ et $\psi \circ \varphi$ sont de Poisson, de plus si φ est surjective alors ψ est une application de Poisson.

Preuve:

Commençons par montrer l'assertion 1). L'application $\psi \circ \varphi$ est bien différentiable car φ et ψ le sont. Pour tout $x \in M_1$ on a

$$\begin{aligned} (\psi \circ \varphi)^* \{f, g\}_{M_3}(x) &= \{f, g\}_{M_3} \psi \circ \varphi(x) = \{\psi^* \circ f, \psi^* \circ g\}_{M_2} \varphi(x), \\ &= \{\varphi^* \circ \psi^* \circ f, \varphi^* \circ \psi^* \circ g\}_{M_1}(x) = \{(\psi \circ \varphi)^* f, (\psi \circ \varphi)^* g\}_{M_1}(x); \end{aligned}$$

d'où

$$(\psi \circ \varphi)^* \{f, g\}_{M_3}(x) = \{(\psi \circ \varphi)^* f, (\psi \circ \varphi)^* g\}_{M_1}(x).$$

Montrons l'assertion 2). Comme $\psi \circ \varphi$ et φ sont des applications de Poisson, on a

$$\{f, g\}_{M_3} \psi \circ \varphi(x) = \{f \circ \psi \circ \varphi, g \circ \psi \circ \varphi\}_{M_1}(x) = \{f \circ \psi, g \circ \psi\}_{M_2} \circ \varphi(x).$$

Comme φ est surjective, alors pour tout $y \in M_2$ on a

$$\{f, g\}_{M_3} \psi(y) = \{f \circ \psi, g \circ \psi\}(y). \spadesuit$$

2.7. Produit de variétés de Poisson. Soient M_1 et M_2 deux variétés. Nous savons que $C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$ est totalement dense dans $C^\infty(M_1 \times M_2)$.

On se donne dans cette partie deux variétés de Poisson $(M_1, \{, \}_1)$ et $(M_2, \{, \}_2)$. Soient $f, g \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ et $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$, définissons un crochet sur la variété produit $M_1 \times M_2$

$$\{f, g\}_{M_1 \times M_2}(x_1, x_2) = \{f_{x_2}, g_{x_2}\}_{M_1}(x_1) + \{f_{x_1}, g_{x_1}\}_{M_2}(x_2),$$

avec $f_{x_2} = f(\cdot, x_2)$ et $f_{x_1} = f(x_1, \cdot)$

Proposition 2.7.1. *Ce crochet*

$$\{f, g\}_{M_1 \times M_2}(x_1, x_2) = \{f_{x_2}, g_{x_2}\}_{M_1}(x_1) + \{f_{x_1}, g_{x_1}\}_{M_2}(x_2),$$

est un crochet de Poisson sur $M_1 \times M_2$.

Preuve:

La \mathbb{R} -bilinearité et l'anticommutativité sont claires, vérifions la règle de Leibniz, soient f, g et $h \in C^\infty(M_1 \times M_2)$ et $(x, y) \in M_1 \times M_2$

$$\begin{aligned} \{f, gh\}_{M_1 \times M_2}(x, y) &= \{f_y, g_y h_y\}_{M_1}(x) + \{f_x, g_x h_x\}_{M_2}(y) \\ &= g(x, y) \{f_y, h_y\}_{M_1}(x) + h(x, y) \{f_y, g_y\}_{M_1}(x) \\ &\quad + g(x, y) \{f_y, h_y\}_{M_2}(y) + h(x, y) \{f_y, g_y\}_{M_2}(y), \\ &= g(x, y) \left[\{f_y, h_y\}_{M_1}(x) + \{f_x, h_x\}_{M_2}(y) \right] \\ &\quad + h(x, y) \left[\{f_y, h_y\}_{M_1}(x) + \{f_x, h_x\}_{M_2}(y) \right], \\ &= [g \{f, h\}_{M_1 \times M_2} + h \{f, g\}_{M_1 \times M_2}](x, y). \end{aligned}$$

Il reste à vérifier l'identité de Jacobi pour cela il suffit de le montrer pour les éléments de $C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$. Soient F, G et H des éléments de $C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$ avec $F = f_1 \otimes f_2$, $G = g_1 \otimes g_2$, et $H = h_1 \otimes h_2$, $(x_1, x_2) \in M_1 \times M_2$ on a

$$\{G, H\}(x_1, x_2) =$$

$$g_2(x_2) h_2(x_2) \{g_1, h_1\}(x_1) + g_1(x_1) h_1(x_1) \{g_2, h_2\}(x_2)$$

et

$$\begin{aligned} \{F, \{G, H\}\}(x_1, x_2) &= \\ f_2(x_2) \{f_1, \{G, H\}_{x_2}\}_{M_1}(x_1) &+ f_1(x_1) \{f_2, \{G, H\}_{x_1}\}_{M_2}(x_2), \\ &= f_2(x_2) g_2(x_2) h_2(x_2) \{f_1, \{g_1, h_1\}\}(x_1) + \\ &\quad f_2(x_2) \{g_2, h_2\}(x_2) \{f_1, g_1 h_1\}(x_1) + \end{aligned}$$

$f_1(x_1)\{g_1, h_1\}(x_1)\{f_2, g_2 h_2\}(x_2) + f_1(x_1)g_1(x_1)h_1(x_1)\{f_2, \{g_2, h_2\}\}$,
d'où

$$\begin{aligned} \{F, \{G, H\}\}(x_1, x_2) = & \\ & ((\{f_1, \{g_1, h_1\}\} \otimes (f_2 g_2 h_2)) + [\{f_1, g_1 h_1\} \otimes (f_2 \{g_2, h_2\})]) + \\ & [[f_1 \{g_1, h_1\}] \otimes [\{f_2, g_2 h_2\}]] + [f_1 g_1 h_1 \otimes \{f_2, \{g_2, h_2\}\}]) (x_1, x_2). \end{aligned}$$

En faisant la somme des termes obtenus et par permutation circulaire de F, G et H on obtient

$$\{\{F, G\}, H\} + \{\{G, H\}, F\} + \{\{H, F\}, G\} = 0.$$

En effet la somme des termes faisant intervenir $\{f_i, \{g_i, h_i\}\}$ (avec $i = 1, 2$) et les termes qui s'en déduisent par permutation circulaire de f_i, g_i et h_i est nulle car le crochet de Poisson de M_i vérifie l'identité de Jacobi, quant aux autres termes, ils s'annulent d'après la règle de Leibniz.♠

On en déduit la définition suivante

Définition 2.7.1. *La variété $M_1 \times M_2$ munie de cette structure de Poisson est appelée produit des variétés de Poisson M_1 et M_2 .*

Remarque 2.7.1. *On peut écrire ce crochet de Poisson avec les tenseurs de Poisson*

$$\begin{aligned} \{f, g\}_{M_1 \times M_2}(x_1, x_2) &= \{f_{x_2}, g_{x_2}\}_{M_1}(x_1) + \{f_{x_1}, g_{x_1}\}_{M_2}(x_2), \\ &= P_1(d_1 f, d_1 g)(x_1) + P_2(d_2 f, d_2 g)(x_2). \end{aligned}$$

avec $d_i f$ est la différentielle partielle de f par rapport à la i -ème composante ($i = 1, 2$) au point (x_1, x_2) .

Nous pouvons également définir ce crochet de la manière suivante:

Théorème 2.7.1. *(Drinfel'd) La variété $M_1 \times M_2$ est munie de l'unique structure de Poisson appelée produit des variétés de Poisson M_1 et M_2 , qui vérifie les propriétés suivantes*

- 1) *Les projections $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$ avec $i = 1, 2$ sont des applications de Poisson,*
- 2) *$\{\pi_1^* \varphi, \pi_2^* \psi\}_{M_1 \times M_2} = 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty(M_1)$ et $\psi \in C^\infty(M_2)$.*

Preuve:

Le crochet défini dans la proposition précédente 2.7.1 est un crochet de Poisson sur $M_1 \times M_2$ qui vérifie les deux propriétés. En effet, montrons que $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ est une application de Poisson si nous munissons $M_1 \times M_2$ de ce crochet : Soient $f, g \in C^\infty(M_1)$ on a

$$\begin{aligned} \{f \circ \pi_1, g \circ \pi_1\}_{M_1 \times M_2}(x_1, x_2) &= \{f, g\}_{M_1}(x_1) + \{f(x_1), g(x_1)\}_{M_2}(x_2), \\ &= \{f, g\}_{M_1}(x_1). \end{aligned}$$

d'où

$$\{f \circ \pi_1, g \circ \pi_1\}_{M_1 \times M_2}(x_1, x_2) = \{f, g\}_{M_1} \circ \pi_1(x_1, x_2).$$

De même pour l'application $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$ est une application de Poisson.

Maintenant vérifions la deuxième condition $\{\pi_1^*\varphi, \pi_2^*\psi\} = 0$ pour tout $\varphi \in C^\infty(M_1)$ et $\psi \in C^\infty(M_2)$ on a

$$\{\pi_1^*\varphi, \pi_2^*\psi\}(x_1, x_2) = \{\varphi, \psi(x_2)\}_{M_1} + \{\varphi(x_1), \psi\}_{M_2} = 0.$$

Nous venons de montrer qu'il existe toujours une structure de Poisson vérifiant ces propriétés.

Cette structure de Poisson est unique. En effet vérifions la pour les fonctions séparées en utilisant la règle de Leibniz et les deux propriétés. Soit F et $G \in C^\infty(M_1) \otimes C^\infty(M_2)$ on a $F = f_1 \otimes f_2 = (f_1 \circ \pi_1)(f_2 \circ \pi_2)$ alors

$$\begin{aligned} \{F, G\} &= \{f_1 \otimes f_2, g_1 \otimes g_2\} = \{(f_1 \circ \pi_1)(f_2 \circ \pi_2), (g_1 \circ \pi_1)(g_2 \circ \pi_2)\}, \\ &= (f_1 \circ \pi_1) \{(f_2 \circ \pi_2), (g_1 \circ \pi_1)(g_2 \circ \pi_2)\} + (f_2 \circ \pi_2) \{(f_1 \circ \pi_1), (g_1 \circ \pi_1)(g_2 \circ \pi_2)\}, \\ &= (f_1 \circ \pi_1)[(g_1 \circ \pi_1) \{(f_2 \circ \pi_2), (g_2 \circ \pi_2)\} + (g_2 \circ \pi_2) \{(f_2 \circ \pi_2), (g_1 \circ \pi_1)\}] + \\ &\quad (f_2 \circ \pi_2)[(g_1 \circ \pi_1) \{(f_1 \circ \pi_1), (g_2 \circ \pi_2)\} + (g_2 \circ \pi_2) \{(f_1 \circ \pi_1), (g_1 \circ \pi_1)\}], \\ &= [(f_1 g_1 \circ \pi_1) \{f_2, g_2\}_2 \circ \pi_2] + [(f_2 g_2 \circ \pi_2) \{f_1, g_1\}_1 \circ \pi_1]. \spadesuit \end{aligned}$$

3. GROUPES DE LIE-POISSON

Dans cette partie, G est un groupe de Lie, \mathcal{G} son algèbre de Lie. Nous utiliserons les notations suivantes:

$$L_g(h) = gh, \text{ et } R_g(h) = hg,$$

$$\text{ainsi que } \text{Int}_x(g) = xgx^{-1} = L_x \circ R_{x^{-1}}(g)$$

$$\text{et } d_e \text{Int}_x = \text{Ad}_x, \text{ ad}_X(Y) = [X, Y].$$

On sait aussi que

$$d_e \text{Ad} = \text{ad}.$$

Soit $\{I_\alpha\}$ une base de \mathcal{G} . On note ∂_u (resp ∂'_u) les champs de vecteurs invariants à droite (resp à gauche) induits par cette base. Par construction, on a pour tout $\varphi \in C^\infty(G)$

$$\partial_u \varphi(g) = d_e[\varphi \circ R_g](I_u) \text{ et } \partial'_u \varphi(g) = d_e[\varphi \circ l_g](I_u).$$

3.1. Champs tensoriels multiplicatifs.

Définition 3.1.1. Soit G un groupe de Lie, un champ de tenseurs $P \in A(G)$ est dit multiplicatif s'il vérifie: Pour tous g et $h \in G$,

$$P(gh) = L_{g*}(P(h)) + R_{h*}(P(g)).$$

A un champ de tenseurs $P \in A^p(G)$, on associe les deux applications

$$P_l : G \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{G}) \text{ et } P_r : G \rightarrow \Lambda^p(\mathcal{G}),$$

définies par

$$P_l(g) = (L_{g*})^{-1}(P(g)) \text{ et } P_r(g) = (R_{g*})^{-1}(P(g)).$$

Proposition 3.1.1. *Soit G un groupe de Lie et soit p un entier ≥ 0 tel que $P \in A^p(G)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:*

- 1) *Le champ de tenseurs P est multiplicatif,*
- 2) *L'application P_l vérifie: Pour tous g et $h \in G$,*

$$P_l(gh) = P_l(h) + Ad_{h^{-1}}P_l(g),$$

- 3) *L'application P_r vérifie: Pour tous g et $h \in G$,*

$$P_r(gh) = P_r(g) + Ad_gP_r(h),$$

De plus, ces propriétés équivalentes impliquent:

4) *Le champ de tenseurs P vérifie, $P(e) = 0$. De plus, pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche sur G , alors le champ de tenseurs $\mathcal{L}(X)P$ est aussi invariant à gauche,*

5) *Le champ de tenseurs P vérifie, $P(e) = 0$ et pour tout champ de vecteurs X invariant à droite sur G , le champ de tenseurs $\mathcal{L}(X)P$ est aussi invariant à droite.*

De plus, lorsque le groupe de Lie G est connexe chacune des propriétés 4) et 5) impliquent les propriétés 1), 2) et 3).

Preuve:

- 1) \iff 2). Supposons que P vérifie 2). Comme par définition on a

$$P_l(gh) = P_l(h) + Ad_{h^{-1}}P_l(g) = (L_{gh*})^{-1}(P(gh)),$$

alors

$$\begin{aligned} P_l(gh) &= (L_{h*})^{-1}(P(h)) + Ad_{h^{-1}}(L_{g*})^{-1}(P(g)), \\ &= (L_{h*})^{-1}(L_{g*})^{-1}(L_{g*})(P(h)) + (L_{h*})^{-1}(R_{h*})(L_{g*})^{-1}(P(g)), \\ &= (L_{gh*})^{-1}(L_{g*})(P(h)) + (L_{h*})^{-1}(L_{g*})^{-1}(R_{h*})(P(g)), \\ &= (L_{gh*})^{-1}[L_{g*}(P(h)) + R_{h*}(P(g))] = (L_{gh*})^{-1}(P(gh)); \end{aligned}$$

par conséquent

$$P(gh) = L_{g*}(P(h)) + R_{h*}(P(g)).$$

D'où l'équivalence.

- De même pour 1) \iff 3).

Montrons maintenant que 1) \implies 4). Si P vérifie 1) on a

$$P(gh) = L_{g*}(P(h)) + R_{h*}(P(g)), \text{ pour tous } g \text{ et } h \text{ dans } G,$$

alors pour $g = h = e$ on a

$$\begin{aligned} P(e) &= P(ee) = L_{e*}(P(e)) + R_{e*}(P(e)), \\ &= 2P(e), \end{aligned}$$

d'où

$$P(e) = 0.$$

Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G , la courbe intégrale de X n'est autre que le groupe à un paramètre des translations à droite $\{R_{\exp(tX)}; t \in \mathbb{R}\}$, et soit $g \in G$ alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X P(g) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} P(g \cdot \exp(tX)), \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} (R_{\exp(tX)*} P(g) + L_{g*} P(\exp(tX))), \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} L_{g*} P(\exp(tX)), \\ &= L_{g*} \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} P(\exp(tX)) \right) = L_{g*} (\mathcal{L}_X P(e)); \\ \mathcal{L}_X P(g) &= L_{g*} (\mathcal{L}_X P(e)), \end{aligned}$$

donc $\mathcal{L}_X P$ est invariant à gauche, c'est à dire

$$\mathcal{L}_X P(hg) = L_{h*} [(\mathcal{L}_X P)(g)] \text{ pour tous } g \text{ et } h \in G.$$

d'où 1) implique 4).

Maintenant voyons la réciproque dans le cas où G est connexe. Soit $\mathcal{L}_X P$ un champ de tenseurs invariant à gauche pour tout champ de vecteurs X invariant à gauche on a

$$\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \{ R_{\exp(-tX)*} [P(hg \exp(tX)) - L_{h*} (P(g \exp(tX)))] \} = 0,$$

donc au voisinage de zéro on a

$$R_{\exp(-tX)*} [P(hg \exp(tX)) - L_{h*} (P(g \exp(tX)))] = \text{const} = P(hg) - L_{h*} (P(g)),$$

pour $g = e$ cette égalité devient

$$R_{\exp(-tX)*} [P(h \exp(tX)) - L_{h*} (P(\exp(tX)))] = P(h) - L_{h*} (P(e)),$$

on sait que $P(e) = 0$ donc

$$R_{\exp(-tX)*} [P(h \exp(tX)) - L_{h*} (P(\exp(tX)))] = P(h),$$

d'où

$$P(h \exp(tX)) - L_{h*} (P(\exp(tX))) = R_{\exp(tX)*} P(h),$$

$$P(h \exp(tX)) = L_{h*} (P(\exp(tX))) + R_{\exp(tX)*} P(h).$$

ainsi P est multiplicatif pour t au voisinage de zéro et donc au voisinage de e , mais comme G est connexe et l'on sait que tout voisinage de e engendre G c'est à dire quelque soit g dans G il s'écrit sous la forme $g = \prod_i \exp(t_i X_i)$ avec les t_i au voisinage de zéro et X_i des champs de vecteurs invariants à gauche.

De même pour 1) implique 5) et pour 5) implique 1) dans le cas où G est connexe. ♠

Corollaire 3.1.1. *Soient G un groupe de Lie, un champ de vecteurs invariant à gauche X , et Y un champ de vecteurs invariant à droite. Si P est un champ de tenseurs multiplicatifs alors*

$$\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y P = \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X P = 0.$$

Preuve:

On sait que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_X P(g) &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} P(g \cdot \exp(tX)), \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} R_{\exp(-tX)*} (R_{\exp(tX)*} P(g) + L_{g*} P(\exp(tX))), \\ &= L_{g*} (\mathcal{L}_X P(e)) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{L}_X P(hg) = L_{h*} [(\mathcal{L}_X P)(g)],$$

alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X P(g) &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L_{\exp(-sY)*} \mathcal{L}_X P(\exp(sY) \cdot g), \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L_{\exp(-sY)*} L_{\exp(sY) \cdot g*} (\mathcal{L}_X P(e)), \\ &= \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L_{g*} (\mathcal{L}_X P(e)) = 0. \spadesuit \end{aligned}$$

Corollaire 3.1.2. *Soit G un groupe de Lie, P et $Q \in A(G)$. Si Q est multiplicatif et P invariant à gauche (resp à droite) le crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ est invariant à gauche (resp à droite).*

Preuve:

Quand P est un champ de vecteurs il suffit d'utiliser la propriété 4) (resp 5)) de la proposition précédente. Dans le cas général on sait qu'un champ de tenseurs invariant à gauche (resp à droite) est somme d'un nombre fini de produits extérieurs de champs de vecteurs invariants à gauche (resp à droite), il suffit donc d'utiliser la propriété 4) du crochet de Schouten-Nijenhuis.

Par exemple: Pour X et Y deux champs de vecteurs invariants à gauche, $P \in A^2(M)$ tel que $P = X \wedge Y$:

$$[P, Q] = [X \wedge Y, Q] = X \wedge [Y, Q] + (-1)^{(q-1)} [X, Q] \wedge Y,$$

on a $X \wedge [Y, Q]$ invariant à gauche car X est invariant à gauche et $[Y, Q]$ est invariant à gauche d'après l'assertion 4) de la proposition précédente 3.1.1. ♠

Corollaire 3.1.3. *Soient G un groupe de Lie connexe et $P \in A(G)$ un champ de tenseurs multiplicatifs. Si la dérivée de Lie de P selon tout champ de vecteurs invariant à gauche est nulle, alors P est invariant à droite.*

Preuve:

Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche on a

$$(\mathcal{L}_X P)(g) = \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} R_{\exp(-sX)*} P(g \exp(sX)) = 0,$$

c'est à dire qu'au voisinage de zéro $R_{\exp(-sX)*}P(g \exp(sX))$ est constant alors

$$\begin{aligned} R_{\exp(-sX)*}P(g \exp(sX)) &= P(g), \\ P(g \exp(sX)) &= R_{\exp(+sX)*}P(g); \end{aligned}$$

comme G est un groupe de Lie connexe alors pour tout $h \in G$, h s'écrit sous la forme $h = \Pi_i \exp(s_i X_i)$ avec les s_i au voisinage de zéro et X_i des champs de vecteurs invariants à gauche. D'où le résultat

$$P(gh) = R_{h*}P(g)$$

pour tous g et h de G (c'est à dire P est invariant à droite).♠

Proposition 3.1.2. *Soit G un groupe de Lie connexe.*

- 1) *Si deux champs de tenseurs P et Q sur G sont multiplicatifs, leur crochet de Schouten-Nijenhuis $[P, Q]$ est multiplicatif,*
- 2) *Un champ de tenseurs multiplicatif P sur G dont la dérivée intrinsèque $d_e P$ est nulle, est identiquement nul.*

Preuve:

Commençons par montrer 1). Soient P et Q deux champs de tenseurs multiplicatifs, alors $P(e) = Q(e) = 0$ c'est à dire il existe deux fonctions f et g de $C^\infty(G)$ telles que $P = fP'$ et $Q = gQ'$ avec $f(e) = g(e) = 0$ et P' et Q' sont deux champs de tenseurs, en utilisant les propriétés du crochet de Schouten-Nijenhuis on trouve que:

$$\begin{aligned} [P, Q](e) &= [P'f, gQ'](e) = f(e) [P', gQ'](e) + \\ &(-1)^{(q-1)p} ([f, g] \wedge Q' \wedge P')(e) + g(e) ([f, Q'] \wedge P)(e) = 0. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que si pour tout champ de vecteurs invariant à gauche X , $\mathcal{L}_X([P, Q])$ est invariant à gauche alors $[P, Q]$ est multiplicatif d'après la proposition précédente 3.1.1 (4) \Leftrightarrow 1); on a d'après l'identité Jacobi graduée

$$\mathcal{L}_X [P, Q] = [X, [P, Q]] = -[P, [Q, X]] - (-1)^{(p-1)(q-1)} [Q, [X, P]],$$

de plus d'après le corollaire 3.1.2 et la proposition 3.1.1 on a : $[Q, X]$ et $[X, P]$ sont invariants à gauche et donc on a aussi $[P, [Q, X]]$ et $[Q, [X, P]]$ invariants à gauche d'où $\mathcal{L}_X([P, Q])$ est invariant à gauche.

Passons maintenant à l'assertion 2). Soient P un champ de tenseurs multiplicatifs et supposons que la dérivée intrinsèque $d_e P$ soit nulle. Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G on a

$$\mathcal{L}_X P(e) = d_e P(X(e)) = 0,$$

comme P est multiplicatif alors $\mathcal{L}_X P$ est invariant à gauche et nul en l'élément neutre e , du fait que G soit connexe, P un champ de tenseurs multiplicatifs et puisque la dérivée de Lie de P selon tout champ de vecteurs invariant à gauche étant nulle, alors P est invariant à droite (d'après le corollaire 3.1.3). Donc pour tout $g \in G$

$$P(g) = R_{g*}P(e) = 0 \text{ (car } P(e) = 0),$$

alors P est identiquement nul.

3.2. Groupes de Lie-Poisson.

Définition 3.2.1. *Un groupe de Lie G muni d'une structure de Poisson est appelé groupe de Lie-Poisson si l'application $\mu : G \times G \rightarrow G$, qui pour tout couple $(x, y) \rightsquigarrow \mu(x, y) = xy$ soit une application de Poisson.*

Définition 3.2.2. *Un homomorphisme de groupe de Lie-Poisson est un homomorphisme de groupe de Lie et une application de Poisson.*

Proposition 3.2.1. *Soit G un groupe de Lie muni d'une structure de Poisson P est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si son tenseur de Poisson P est multiplicatif.*

Preuve:

L'application μ est un morphisme de Poisson si et seulement si

$$\{\mu^* f, \mu^* g\}_{G \times G} = \mu^* \{f, g\}_G \text{ pour tous } f \text{ et } g \in C^\infty(G),$$

autrement dit si $\alpha = T_{gh}(f)$ et $\beta = T_{gh}(g)$

$$P(gh)(\alpha, \beta) = \mu^* \{f, g\}_G(g; h)$$

et

$$P_{G \times G}(g, h) \left(T_{(g,h)}^t \mu \alpha, T_{(g,h)}^t \mu \beta \right) = \{\mu^* f, \mu^* g\}_{G \times G}(g, h)$$

alors

$$P_{G \times G}(g, h) \left(T_{(g,h)}^t \mu \alpha, T_{(g,h)}^t \mu \beta \right) = P(gh)(\alpha, \beta), \text{ avec } \alpha, \beta \in T_{gh}^* G.$$

On sait que

$$T_{(g,h)} \mu(u, v) = TR_h u + TL_g v, \text{ avec } (u, v) \in T_{(g,h)}(G \times G) = T_g G \times T_h G,$$

alors

$$T_{(g,h)}^t \mu \alpha = (T^t R_h \alpha, T^t L_g \alpha) \text{ et } T_{(g,h)}^t \mu \beta = (T^t R_h \beta, T^t L_g \beta).$$

En remplaçant $T_{(g,h)}^t \mu \alpha$ et $T_{(g,h)}^t \mu \beta$ on trouve

$$\begin{aligned} P_{G \times G}(g, h) \left(T_{(g,h)}^t \mu \alpha, T_{(g,h)}^t \mu \beta \right) &= \\ P_{G \times G}(g, h) \left((T^t R_h \alpha, T^t L_g \alpha), (T^t R_h \beta, T^t L_g \beta) \right), & \\ = P_G(g) (T^t R_h \alpha, T^t R_h \beta) + P_G(h) (T^t L_g \alpha, T^t L_g \beta), & \\ = [(T_g R_h \otimes T_g R_h) P_G(g) + (T_h L_g \otimes T_h L_g) P_G(h)](\alpha, \beta), & \\ = (R_{h*} (P_G(g)) + L_{g*} (P_G(h))) (\alpha, \beta). & \end{aligned}$$

Donc pour que μ soit une application de Poisson il faut et il suffit que le tenseur de Poisson P soit multiplicatif. ♠

Corollaire 3.2.1. Soit (G, P) un groupe de Lie-Poisson l'application

$$\begin{aligned} i : G &\rightarrow G \\ g &\rightarrow g^{-1} \end{aligned}$$

est une application anti-Poisson c'est à dire

$$\begin{aligned} \{f \circ i, g \circ i\}(x) &= -\{f, g\}(x^{-1}), \\ i_*P(x) &= -P(x^{-1}). \end{aligned}$$

Preuve:

En appliquant le fait que μ est une application de Poisson pour $h = g^{-1}$ et le fait que $P(e) = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} R_{g^{-1}*}(P(g)) + L_{g*}(P(g^{-1})) &= 0, \\ (L_{g*})^{-1} \circ R_{g^{-1}*}(P(g)) &= -P(g^{-1}). \end{aligned}$$

Il est clair que $(L_{g*})^{-1} \circ R_{g^{-1}*}(g) = i_*(g)$ d'où le résultat

$$i_*P(g) = -P(g^{-1}).$$

Exemple 3.2.1. Soit le groupe de Lie \mathbb{R}^{2n} est un groupe de Lie-Poisson avec

$$P(x) = \frac{1}{2} c_k^{ij} x^k \partial_i \wedge \partial_j.$$

où les c_k^{ij} sont les constantes de structure de l'algèbre de Lie de \mathbb{R}^{2n}

Ceci découle du fait que \mathbb{R}^{2n} est connexe et P vérifie la propriété 5) de la proposition 3.1.1 alors P est un champ tensoriels multiplicatif.

Exemple 3.2.2. Le tore $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n$.

la seule et unique structure de Lie-Poisson sur le tore est identiquement nulle car la structure de Lie-Poisson sur \mathbb{R}^{2n} n'est pas périodique et que

$$P(gh) = L_{g*}(P(h)) + R_{h*}(P(g))$$

n'est périodique que s'il est nul.

3.3. Bialgèbre de Lie. Soit G un groupe de Lie-Poisson. Définissons une structure d'algèbre de Lie sur \mathcal{G}^* , φ_i des éléments de $C^\infty(G)$ tels que la différentielle de φ_i au point identité e de G est égale à l_i la base duale de \mathcal{G}^* (notée $d_e\varphi_i = l_i$). On définit

$$[l_1, l_2] = d_e \{ \varphi_1, \varphi_2 \},$$

ce crochet est bien un crochet de Lie, indépendant du choix des φ_i .

Preuve:

En effet, il est \mathbb{R} -bilinéaire et anticommutatif, il reste à vérifier l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned} & [l_i, [l_j, l_k]] + [l_j, [l_k, l_i]] + [l_k, [l_i, l_j]] = \\ & [d_e\varphi_i, [l_j, l_k]] + [d_e\varphi_j, [l_k, l_i]] + [d_e\varphi_k, [l_i, l_j]], \\ & = [d_e\varphi_i, d_e \{ \varphi_j, \varphi_k \}] + [d_e\varphi_j, d_e \{ \varphi_k, \varphi_i \}] + [d_e\varphi_k, d_e \{ \varphi_i, \varphi_j \}], \end{aligned}$$

$$= d_e \{ \varphi_i, \{ \varphi_j, \varphi_k \} \} + d_e \{ \varphi_j, \{ \varphi_k, \varphi_i \} \} + d_e \{ \varphi_k, \{ \varphi_i, \varphi_j \} \} = 0.$$

Ainsi il est indépendant du choix des φ_i car sur la carte (φ, U) avec le système de coordonnées $\{x^i\}$ on a

$$\{ \varphi_i, \varphi_j \} (\cdot) = P (d\varphi_i, d\varphi_j) (\cdot) = \frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} (\cdot) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^l} (\cdot) \{x^k, x^l\} (\cdot),$$

d'où

$$[l_i, l_j] = d_e \{ \varphi_i, \varphi_j \} = d_e (P (d\varphi_i, d\varphi_j)) = d_e \left(\frac{\partial \varphi_i}{\partial x^k} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^l} \{x^k, x^l\} \right),$$

est indépendant du choix des φ_i .

Définissons un crochet de Poisson sur G donné par la formule suivante:

$$\{ \varphi, \psi \} = P (\varphi, \psi) = \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \cdot \partial_\nu \psi,$$

dans ce cas les constantes de structure de \mathcal{G}^* s'écrivent sous la forme

$$f_\lambda^{\mu\nu} = (\partial_\lambda \eta^{\mu\nu}) (e).$$

Preuve:

Pour montrer cette égalité il suffit de remarquer que

$$[l_\mu, l_\nu] = d_e \{ \varphi_\mu, \varphi_\nu \} = d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu \right) = f_\lambda^{\mu\nu} l_\lambda$$

et que

$$[l_\mu, l_\nu] (I_\lambda) = f_\lambda^{\mu\nu}.$$

Comme P est un tenseur de Poisson multiplicatif alors $P(e) = 0$ et donc $\eta^{\alpha\beta}(e) = 0$ d'où le résultat suivant,

$$\begin{aligned} [l_\mu, l_\nu] &= d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu \right), \\ &= \eta^{\alpha\beta} (e) d_e (\partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu) + d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \right) (\partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu) (e), \\ &= d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \right) (\partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu) (e). \end{aligned}$$

On sait aussi que $d_e \varphi_i = l_i$ alors $d_e \varphi_\mu (I_\alpha) = \delta_{\mu\alpha}$ donc

$$\begin{aligned} [l_\mu, l_\nu] (I_\lambda) &= d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \right) (I_\lambda) (\partial_\alpha \varphi_\mu \cdot \partial_\beta \varphi_\nu) (e), \\ &= d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \right) (I_\lambda) \cdot d_e \varphi_\mu (I_\alpha) \cdot d_e \varphi_\nu (I_\beta), \\ &= d_e \left(\eta^{\alpha\beta} \right) (I_\lambda) \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} = d_e (\eta^{\mu\nu}) (I_\lambda) = (\partial_\lambda \eta^{\mu\nu}) (e) = f_\lambda^{\mu\nu}. \text{ C.q.f.d.} \end{aligned}$$

Définition 3.3.1. Soit \mathcal{G} un espace vectoriel de dimension finie, on définit sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* des structures d'algèbre de Lie. On dit que ces deux structures d'algèbre de Lie sont compatibles (équivalentes) si

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{ar}^i f_s^{j\alpha} - c_{ar}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha}.$$

Les c_{rs}^k , et f_k^{ij} sont les constantes de structure de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* respectivement pour les bases respectives de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* où la base de \mathcal{G} est la base duale de \mathcal{G}^* .

D'où la définition suivante,

Définition 3.3.2. \mathcal{G} a une structure de bialgèbre de Lie si \mathcal{G} et \mathcal{G}^* ont des structures d'algèbre de Lie compatibles.

Remarque 3.3.1. On dit aussi que les deux structures d'algèbre de Lie sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont compatibles (ou équivalentes) si et seulement si

$$\begin{aligned} \langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle &= -\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \\ &+ \langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle, \end{aligned}$$

avec $\alpha, \beta \in \mathcal{G}^*$ et $X, Y \in \mathcal{G}$.

Preuve:

On sait que

$$\langle \text{coad}_X Z, Y \rangle = \langle Z, -\text{ad}_X Y \rangle = \langle Z, [Y, X] \rangle,$$

alors

$$\langle \text{coad}_{I_r} l_i, I_x \rangle = \langle l_i, [I_x, I_r] \rangle = c_{rx}^i,$$

d'où

$$\text{coad}_{I_r} l_i = c_{rx}^i l_x,$$

donc pour $\alpha = l_i$, $\beta = l_j$ et $X = I_r$, $Y = I_s$ on obtient

$$\begin{aligned} \langle [l_i, l_j], [I_r, I_s] \rangle &= c_{rs}^k f_k^{ij}, \\ -\langle \text{coad}_{I_r} l_i, \text{coad}_{I_s}^* I_s \rangle &= -\langle c_{rx}^i l_x, f_s^{jy} I_y \rangle = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha}, \\ \langle \text{coad}_{I_r} l_j, \text{coad}_{I_s}^* I_s \rangle &= \langle c_{rx}^j l_x, f_s^{iy} I_y \rangle = -c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha}, \\ \langle \text{coad}_{I_s} l_i, \text{coad}_{I_r}^* I_r \rangle &= \langle c_{sx}^i l_x, f_r^{jy} I_y \rangle = -c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha}, \\ -\langle \text{coad}_{I_s} l_j, \text{coad}_{I_r}^* I_r \rangle &= -\langle c_{sx}^j l_x, f_r^{iy} I_y \rangle = c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha}. \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} &-\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \\ &\langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle = \\ &c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha}. \text{ C.q.f.d.} \end{aligned}$$

Exemple 3.3.1. Si \mathcal{G} est une algèbre de Lie. On obtient une bialgèbre de Lie sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* , si on prend $[l_1, l_2] = 0$ pour tout élément $l_1, l_2 \in \mathcal{G}^*$

En effet comme les constantes de structure $f_\lambda^{\mu\nu} = 0$, donc

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha} = 0.$$

Alors le crochet de Poisson

$$\{\varphi, \psi\} = 0 \quad \forall \varphi, \psi \in C^\infty(G),$$

du fait que $d_e \{\varphi_1, \varphi_2\} = [l_1, l_2] = 0$.

Exemple 3.3.2. $\dim \mathcal{G} = 2$.

Si la $\dim \mathcal{G} = 2$ alors toutes les structures sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont compatibles. Soit $\langle I_1, I_2 \rangle$ et $\langle l_1, l_2 \rangle$ sont les bases de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* respectivement, on a alors

$$c_{12}^k f_k^{12} = c_{12}^1 f_1^{12} + c_{12}^2 f_2^{12} = -c_{21}^2 f_2^{12} - c_{12}^1 f_1^{21}$$

et

$$c_{\alpha 1}^1 f_2^{2\alpha} - c_{\alpha 1}^2 f_2^{1\alpha} - c_{\alpha 2}^1 f_1^{2\alpha} + c_{\alpha 2}^2 f_1^{1\alpha} = -c_{\alpha 1}^2 f_2^{1\alpha} - c_{\alpha 2}^1 f_1^{2\alpha} = -c_{21}^2 f_2^{12} - c_{12}^1 f_1^{21},$$

donc

$$c_{12}^k f_k^{12} = c_{\alpha 1}^1 f_2^{2\alpha} - c_{\alpha 1}^2 f_2^{1\alpha} - c_{\alpha 2}^1 f_1^{2\alpha} + c_{\alpha 2}^2 f_1^{1\alpha},$$

d'où la compatibilité des structures sur \mathcal{G} et \mathcal{G}^* .

Définition 3.3.3. φ est un 1-cocycle d'algèbre de Lie \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ pour la représentation adjointe si

$$\varphi([X, Y]) = ad_X(\varphi(Y)) - ad_Y(\varphi(X)),$$

avec $ad_X = ad_X \otimes id_{\mathcal{G}} + id_{\mathcal{G}} \otimes ad_X$.

Remarque 3.3.2. On observe que

$$coad(I_i)(l_k)(I_j) = \langle l_k, [I_j, I_i] \rangle = c_{ji}^k$$

d'où

$$coad(I_i)(l_k) = c_{ji}^k l_j \text{ et } coad^*(l_i)(I_k) = f_k^{ji} I_j.$$

Soit \mathcal{G} et \mathcal{G}^* munies de deux structures d'algèbre de Lie, définissons un crochet sur $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ tel que pour tout $X \oplus \xi, Y \oplus \eta \in \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ on ait:

$$[X \oplus \xi, Y \oplus \eta] =$$

$$\{[X, Y] + (coad^* \xi)(Y) - (coad^* \eta)(X)\} \oplus \{[\xi, \eta] + (coad X)(\eta) - (coad Y)(\xi)\}.$$

Proposition 3.3.1. le crochet $[X \oplus \xi, Y \oplus \eta]$ est bien un crochet de Lie.

Preuve:

La \mathbb{R} -bilinearité et l'anticommutativité sont triviales. Vérifions l'identité de Jacobi. On sait que pour (X, Y, Z) des éléments de \mathcal{G} et (ξ, η, λ) des éléments de \mathcal{G}^* l'identité de Jacobi est vérifiée car \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont des algèbres de Lie, de ce fait il suffit de montrer l'identité de Jacobi pour tout $(X, Y) \in \mathcal{G}$ et $\xi \in \mathcal{G}^*$ ou bien pour tout $X \in \mathcal{G}$ et $(\xi, \eta) \in \mathcal{G}^*$ mais comme les éléments de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* jouent les mêmes rôles dans ces deux cas, montrons le premier,

$$\begin{aligned} S &= [X, [Y, \xi]] + [Y, [\xi, X]] + [\xi, [X, Y]] = \\ &= [X, \{-coad^* \xi(Y) \oplus (coad Y)(\xi)\}] + [Y, \{(coad^* \xi)(X) \oplus -(coad X)(\xi)\}] \\ &\quad + \{(coad^* \xi)([X, Y]) \oplus -(coad [X, Y])(\xi)\}, \\ &= \{[X, -coad^* \xi(Y)] - (coad^* (coad Y)(\xi))(X)\} \oplus \{(coad X)((coad Y)(\xi))\} + \\ &\quad \{[Y, (coad^* \xi)(X)] - (coad^* - (coad X)(\xi))(Y)\} \oplus \{(coad Y)(-(coad X)(\xi))\} + \\ &\quad \{(coad^* \xi)([X, Y]) \oplus -(coad [X, Y])(\xi)\}, \\ &= ([X, -coad^* \xi(Y)] - (coad^* (coad Y)(\xi))(X) + \\ &\quad [Y, (coad^* \xi)(X)] - (coad^* (-(coad X)(\xi)))(Y) + (coad^* \xi)([X, Y])) \oplus \\ &\quad ((coad X)((coad Y)(\xi)) + (coad Y)(-(coad X)(\xi)) - (coad [X, Y])(\xi)). \end{aligned}$$

Pour faciliter l'étude nous travaillerons que sur les bases de \mathcal{G} et de \mathcal{G}^* , prenons $X = I_s, Y = I_r$, et $\xi = l_i$ ainsi S devient

$$\begin{aligned}
S &= [I_r, [I_s, l_i]] + [I_r, [l_i, I_s]] + [l_i, [I_s, I_r]] = \\
&([I_s, -\text{coad}^* l_i (I_r)] - (\text{coad}^* (\text{coad} I_r) (l_i)) (I_s) + \\
&+ [I_r, (\text{coad}^* l_i) (I_s)] - (\text{coad}^* (- (\text{coad} I_s) (l_i))) (I_r) + (\text{coad}^* l_i) ([I_s, I_r])) \oplus \\
&((\text{coad} I_s) ((\text{coad} I_r) (l_i)) + \\
&+ (\text{coad} I_r) (- (\text{coad} I_s) (l_i)) - (\text{coad} [I_s, I_r]) (l_i)), \\
&= ([I_s, -f_r^{\alpha i} I_\alpha] - (\text{coad}^* c_{\alpha r}^i l_\alpha) (I_s) + \\
&[I_r, f_s^{\alpha i} I_\alpha] - (\text{coad}^* - c_{\alpha s}^i l_\alpha) (I_r) + (\text{coad}^* l_i) (c_{sr}^k I_k)) \oplus \\
&((\text{coad} I_s) (c_{lr}^i l_i) + (\text{coad} I_r) (-c_{ls}^i l_i) - (\text{coad} c_{sr}^l I_l) (l_i)), \\
&= (-c_{s\alpha}^j f_r^{\alpha i} I_j - f_s^{j\alpha} c_{\alpha r}^i I_j + f_s^{\alpha i} c_{r\alpha}^j I_j + f_r^{j\alpha} c_{\alpha s}^i I_j + f_k^{ji} c_{sr}^k I_j) \oplus \\
&(c_{js}^l c_{lr}^i I_j - c_{jr}^l c_{ls}^i I_j - c_{jl}^i c_{sr}^l I_j).
\end{aligned}$$

Remaquons que d'après l'identité de Jacobi sur l'algèbre de Lie \mathcal{G} , on a le second membre nul,

$$c_{js}^l c_{lr}^i I_j - c_{jr}^l c_{ls}^i I_j - c_{jl}^i c_{sr}^l I_j = (c_{js}^l c_{lr}^i - c_{jr}^l c_{ls}^i - c_{jl}^i c_{sr}^l) I_j = 0.$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
&-c_{s\alpha}^j f_r^{\alpha i} I_j - f_s^{j\alpha} c_{\alpha r}^i I_j + f_s^{\alpha i} c_{r\alpha}^j I_j + f_r^{j\alpha} c_{\alpha s}^i I_j + f_k^{ji} c_{sr}^k I_j = \\
&\left(-c_{s\alpha}^j f_r^{\alpha i} - f_s^{j\alpha} c_{\alpha r}^i + f_s^{\alpha i} c_{r\alpha}^j + f_r^{j\alpha} c_{\alpha s}^i + f_k^{ji} c_{sr}^k \right) I_j = 0,
\end{aligned}$$

si et seulement si les structures d'algèbre de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont compatibles.♠

Soit E et F deux espaces vectoriels, soit l'application linéaire $\varphi : E \rightarrow F$ on note par φ^* son application transposée définie par

$$\varphi^* : F^* \rightarrow E^* \text{ telle que } \varphi^*(v) = v \circ \varphi.$$

Théorème 3.3.1. *Supposons que \mathcal{G} et \mathcal{G}^* ont des structures d'algèbre de Lie données. On définit une application linéaire φ de $\mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ dans \mathcal{G}^* telle que pour tout couple $(l_1, l_2) \rightarrow \varphi(l_1, l_2) = [l_1, l_2]$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

- 1) Les structures d'algèbre de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont équivalentes,
- 2) L'application $\varphi^* : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est un 1-cocycle ,
- 3) L'algèbre de Lie sur $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ induite par les structures d'algèbre de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sur laquelle nous définissons une forme bilinéaire $Q : (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*) \times (\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*) \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule

$$Q((x_1 \oplus l_1), (x_2 \oplus l_2)) = l_1(x_2) + l_2(x_1),$$

est invariant par l'adjoint de $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ (le triplet de Manin).

Preuve:

Nous allons commencer par montrer que 1) \Leftrightarrow 2). Observons d'abord que $\forall X_1 \otimes X_2 \in \mathcal{G}^* \otimes \mathcal{G}^*$ on a $\varphi^*(X)(X_1 \otimes X_2) = X \circ \varphi(X_1 \otimes X_2) = [X_1, X_2](X)$, alors

$$\varphi^*(I_i)(l_j \otimes l_k) = [l_j, l_k](I_i) = f_i^{jk},$$

d'où

$$\varphi^*(I_i) = f_i^{jk} I_j \otimes I_k.$$

Calculons,

$$\varphi^*([I_r, I_s])(l_i \otimes l_j) = \langle [I_r, I_s], [l_i, l_j] \rangle = \langle c_{rs}^\alpha I_\alpha, f_\beta^{ij} l_\beta \rangle = c_{rs}^k f_k^{ij}.$$

Si φ est un 1-cocycle d'algèbre de Lie \mathcal{G} à valeurs dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$, pour la représentation adjointe alors

$$\begin{aligned} \varphi^*([I_r, I_s])(l_i \otimes l_j) &= \varphi^*(ad_{I_r} I_s)(l_i \otimes l_j), \\ &= (ad_{I_r} \varphi^*(I_s) - ad_{I_s} \varphi^*(I_r))(l_i \otimes l_j), \\ &= ((ad_{I_r} \otimes id_{\mathcal{G}} + id_{\mathcal{G}} \otimes ad_{I_r}) \varphi^*(I_s) \\ &\quad - (ad_{I_s} \otimes id_{\mathcal{G}} + id_{\mathcal{G}} \otimes ad_{I_s}) \varphi^*(I_r))(l_i \otimes l_j), \\ &= ((ad_{I_r} \otimes id_{\mathcal{G}} + id_{\mathcal{G}} \otimes ad_{I_r}) f_s^{\alpha k} (I_\alpha \otimes I_k) \\ &\quad - (ad_{I_s} \otimes id_{\mathcal{G}} + id_{\mathcal{G}} \otimes ad_{I_s}) f_r^{\alpha k} (I_\alpha \otimes I_k))(l_i \otimes l_j) = \\ &= [(f_s^{\alpha k} (c_{r\alpha}^l I_l \otimes I_k + I_\alpha \otimes c_{rk}^l I_l) \\ &\quad - (f_r^{\alpha k} (c_{s\alpha}^l I_l \otimes I_k + I_\alpha \otimes c_{sk}^l I_l))] (l_i \otimes l_j), \\ &= f_s^{\alpha k} (c_{r\alpha}^l \delta_{li} \delta_{kj} + c_{rk}^l \delta_{\alpha i} \delta_{lj}) - f_r^{\alpha k} (c_{s\alpha}^l \delta_{li} \delta_{kj} + c_{sk}^l \delta_{\alpha i} \delta_{lj}), \\ &= f_s^{\alpha j} c_{r\alpha}^i + f_s^{ik} c_{rk}^j - f_r^{\alpha j} c_{s\alpha}^i + f_r^{ik} c_{sk}^j, \\ &= c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha}. \end{aligned}$$

Nous savons par définition que les structures d'algèbre de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont équivalentes si

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha};$$

d'où les assertions 1) et 2) sont équivalentes.

Montrons que si l'assertion 1) est vérifiée, alors l'assertion 3) l'est aussi. Supposons que nous avons une bialgèbre alors nous avons un crochet de Lie sur $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ d'après la proposition précédente 3.3.1, il reste à montrer que $Q((x_1 \oplus l_1), (x_2 \oplus l_2)) = l_1(x_2) + l_2(x_1)$ est invariant avec la représentation adjointe c'est à dire

$$Q([(x_1 \oplus l_1), (x_3 \oplus l_3)], (x_2 \oplus l_2)) = -Q((x_1 \oplus l_1), [(x_2 \oplus l_2), (x_3 \oplus l_3)]).$$

Pour montrer cette égalité il suffira de montrer l'une des deux égalités suivantes (car les éléments de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* jouent le même rôle)

$$Q([x_1, x_3], l_2) = -Q(x_1, [l_2, x_3]) \text{ ou } Q([l_1, l_3], x_2) = -Q(l_1, [x_2, l_3]).$$

Montrons la première égalité

$$\begin{aligned}
& Q([x_1, x_3], l_2) + Q(x_1, [l_2, x_3]) = \\
& l_2([x_1, x_3]) + Q(x_1, \text{coad}^* l_2(x_3) \oplus -\text{coad} x_3(l_2)), \\
& = l_2([x_1, x_3]) + x_1(-\text{coad} x_3(l_2)), \\
& = l_2([x_1, x_3]) + (-\text{coad} x_3(l_2))(x_1), \\
& = l_2([x_1, x_3]) - l_2([x_1, x_3]) = 0.
\end{aligned}$$

D'où

$$Q([x_1, x_3], l_2) = -Q(x_1, [l_2, x_3]).$$

Passons maintenant à la réciproque, pour avoir l'assertion 3) il faut que le crochet défini sur $\mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$ soit un crochet de Lie et donc qu'il doit vérifier l'identité de Jacobi, ainsi d'après les calculs de la proposition précédente 3.3.1 nous avons

$$\left(-c_{s\alpha}^j f_r^{\alpha i} - f_s^{j\alpha} c_{\alpha r}^i + f_s^{\alpha i} c_{r\alpha}^j + f_r^{j\alpha} c_{\alpha s}^i + f_k^{ji} c_{sr}^k \right) I_j = 0.$$

par conséquent nous avons une bialgèbre de Lie de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* . ♠

Remarque 3.3.3. *On peut exprimer d'une autre manière l'équivalence des deux assertions 1) et 3) du théorème 3.3.1 en introduisant la définition suivante,*

Définition 3.3.4. *Un triplet de Manin de dimension finie est un triplet d'algèbres de Lie de dimensions finies $\{\mathcal{G}, \mathcal{G}^+, \mathcal{G}^-\}$ où \mathcal{G} est munie d'un produit scalaire ad-invariant $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que:*

- i) *Les algèbres \mathcal{G}^+ et \mathcal{G}^- sont des sous-algèbres de Lie de \mathcal{G} de telle manière que $\mathcal{G}^+ \oplus \mathcal{G}^- = \mathcal{G}$ en tant qu'espace vectoriel,*
- ii) *Les sous-algèbres \mathcal{G}^+ et \mathcal{G}^- sont isotropes vis-à-vis du produit scalaire.*

dès lors l'équivalence des deux assertions 1) et 3) du théorème 3.3.1 devient:

Corollaire 3.3.1. *Les structures d'algèbre de Lie \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont équivalentes si et seulement si elles correspondent à un triplet de Manin.*

Preuve:

Pour montrer cette équivalence il suffit de prendre pour le triplet $\{\tilde{\mathcal{G}}, \tilde{\mathcal{G}}^+, \tilde{\mathcal{G}}^-\}$

$$\tilde{\mathcal{G}}^+ = \mathcal{G}, \tilde{\mathcal{G}}^- = \mathcal{G}^* \text{ et } \tilde{\mathcal{G}} = \mathcal{G} \oplus \mathcal{G}^*$$

avec $Q = \langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire. ♠

Remarque 3.3.4. *On peut noter une bialgèbre $(\mathcal{G}, [,], \varphi^*)$.*

Soit un crochet de Poisson sur un groupe de Lie G donné par la formule $\{\varphi, \psi\} = \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi$.

Proposition 3.3.2. *Soit la fonction $\eta : G \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ telle que*

$$\eta(g) = \eta^{uv}(g) I_u \otimes I_v,$$

η est un 1-cocycle si et seulement si $\eta(gh) = Ad_g \eta(h) + \eta(g)$ pour tout $g, h \in G$.

Preuve:

Si η est un 1-cocycle alors,

$$\begin{aligned} d_e \eta(adX(Y)) &= d_e \eta([X, Y]), \\ &= d_e \eta^{uv}(Y)(ad_X \otimes 1 + 1 \otimes ad_X)I_u \otimes I_v \\ &\quad - d_e \eta^{uv}(X)(ad_Y \otimes 1 + 1 \otimes ad_Y)I_u \otimes I_v, \\ &= d_e \eta^{uv}(Y)ad_X I_u \otimes I_v - d_e \eta^{uv}(X)ad_Y I_u \otimes I_v. \end{aligned}$$

Si η s'écrit $\eta(gh) = Ad_g \eta(h) + \eta(g)$ pour tout $g, h \in G$ on a par conséquent,

$$\begin{aligned} \eta(Int_g h) &= \eta(ghg^{-1}) = Ad_g \eta(hg^{-1}) + \eta(g), \\ &= Ad_g(Ad_h \eta(g^{-1}) + \eta(h)) + \eta(g) \end{aligned}$$

et

$$\eta(e) = \eta(ee) = Ad_e \eta(e) + \eta(e) = 0.$$

Donc

$$\begin{aligned} d_{2e} d_{1e}(\eta(Int_g h))(X, Y) &= d_e d_e(Ad_{gh} \eta(g^{-1}))(X, Y) \\ &\quad + d_e d_e(Ad_g \eta(h))(X, Y) + d_e d_e \eta(g)(X, Y), \end{aligned}$$

comme $d_e d_e \eta(g) = 0$ et $\eta(e) = 0$ alors,

$$\begin{aligned} d_{2e} d_{1e}(\eta(Int_g h))(X, Y) &= d_e d_e Ad_{gh} \eta(g^{-1})(X, Y) + d_e d_e Ad_g \eta(h)(X, Y), \\ &= d_e Ad_h d_e \eta(g^{-1})(X, Y) + d_e Ad_g d_e \eta(h)(X, Y), \\ &= -ad_Y d_e \eta(X) + ad_X d_e \eta(Y), \\ &= ad_X d_e \eta(Y) - ad_Y d_e \eta(X), \\ &= d_e \eta^{uv}(Y)ad_X I_u \otimes I_v - d_e \eta^{uv}(X)ad_Y I_u \otimes I_v. \end{aligned}$$

On conclut que

$$d_{2e} d_{1e}(\eta(Int_g h))(X, Y) = d_e \eta(adX(Y))$$

d'où l'équivalence. ♠

Proposition 3.3.3. *Soit un crochet de Poisson sur G donné par la formule $\{\varphi, \psi\} = \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi$ est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si (la fonction $\eta : G \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ telle que pour tout g dans G on a*

$$\eta(g) = \eta^{uv}(g) I_u \otimes I_v,$$

est un 1-cocycle si et seulement si $\eta(gh) = Ad_g \eta(h) + \eta(g)$ pour tout $g, h \in G$.)

Preuve:

On sait que $\{\varphi, \psi\} = \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi$ constitue un groupe de Lie-Poisson si

$$\{\varphi, \psi\}_G \circ \mu = \{\varphi \circ \mu, \psi \circ \mu\}_{G \times G},$$

c'est à dire $\forall g, h \in G$ on a

$$\{\varphi, \psi\}(gh) = \{\varphi \circ L_g, \psi \circ L_g\}(h) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g),$$

par définition on a aussi

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}(g) &= \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi(g), \\ &= \eta^{uv}(g) (d_e(\varphi \circ R_g), d_e(\psi \circ R_g))(I_u \otimes I_v), \\ &= \eta(g) (d_e(\varphi \circ R_g), d_e(\psi \circ R_g)). \end{aligned}$$

On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}(gh) &= \eta(gh) (d_e \varphi \circ R_{gh}, d_e \psi \circ R_{gh}) = \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_{gh}, d_e \psi \circ R_{gh}) Ad_g(I_u \otimes I_v) + \\ &= \eta^{uv}(g) (d_e \varphi \circ R_{gh}, d_e \psi \circ R_{gh})(I_u \otimes I_v), \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ R_g, d_e \psi \circ R_h \circ R_g) Ad_g(I_u \otimes I_v) + \\ &= \eta^{uv}(g) (d_e((\varphi \circ R_h) \circ R_g), d_e((\psi \circ R_h) \circ R_g))(I_u \otimes I_v) \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ R_g, d_e \psi \circ R_h \circ R_g) Ad_g(I_u \otimes I_v) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g), \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ R_g, d_e \psi \circ R_h \circ R_g) d_e Int_g(I_u \otimes I_v) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g), \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ R_g \circ Int_g, d_e \psi \circ R_h \circ R_g \circ Int_g)(I_u \otimes I_v) + \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ R_g \circ L_g \circ R_{g^{-1}}, d_e \psi \circ R_h \circ R_g \circ L_g \circ R_{g^{-1}})(I_u \otimes I_v) + \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ R_h \circ L_g \circ R_g \circ R_{g^{-1}}, d_e \psi \circ R_h \circ L_g \circ R_g \circ R_{g^{-1}})(I_u \otimes I_v) + \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e \varphi \circ L_g \circ R_h, d_e \psi \circ L_g \circ R_h)(I_u \otimes I_v) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g), \\ &= \eta^{uv}(h) (d_e((\varphi \circ L_g) \circ R_h), d_e((\psi \circ L_g) \circ R_h))(I_u \otimes I_v) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g), \\ &= \{\varphi \circ L_g, \psi \circ L_g\}(h) + \{\varphi \circ R_h, \psi \circ R_h\}(g). \text{ C.q.f.d. } \spadesuit \end{aligned}$$

Remarque 3.3.5. Dans l'exemple 3.2.1 le groupe de Lie \mathbb{R}^{2n} est un groupe de Lie-Poisson muni du tenseur

$$P(x) = \frac{1}{2} c_k^{ij} x^k \partial_i \wedge \partial_j.$$

D'après la proposition précédente la fonction $\eta : G \rightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est égale à

$$\eta(g) = c_k^{ij} I_i \otimes I_j.$$

Théorème 3.3.2. 1) Soit G un groupe de Lie-Poisson et \mathcal{G} son algèbre de Lie alors les structures de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont compatibles.

2) Soit \mathcal{G} une bialgèbre de Lie sur \mathbb{R} et soit G un groupe de Lie connexe ou simplement connexe avec \mathcal{G} son algèbre de Lie, alors il existe une seule et unique structure de Poisson qui rend G un groupe de Lie-Poisson.

Preuve:

Le groupe G muni du crochet $\{\varphi, \psi\} = \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi$ est un groupe de Lie-Poisson (car son crochet de Poisson est multiplicatif), d'après la proposition 3.3.3 η est un 1-cocycle . Nous allons utiliser le théorème précédent (1) \Leftrightarrow (2)) en identifiant $d_e \eta$ à φ^* . Ainsi, si $d_e \eta$ est un 1-cocycle alors les structures d'algèbre de Lie de \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont équivalentes.

Passons maintenant à l'assertion 2). On a \mathcal{G} une bialgèbre de Lie c'est à dire \mathcal{G} et \mathcal{G}^* ont des structures compatibles ce qui veut dire que nous connaissons les structures c_{rs}^k et f_k^{ij} et nous devons chercher $\eta^{uv} \in C^\infty(G)$. On sait d'après le paragraphe précédent que $f_\lambda^{uv} = (\partial_\lambda \eta^{uv})(e)$. Donc nous devons montrer qu'il existe une unique fonction $\eta^{uv} \in C^\infty(G)$ telle que $f_\lambda^{uv} = (\partial_\lambda \eta^{uv})(e)$ mais comme G est connexe ou simplement connexe alors la fonction η^{uv} est unique. D'où l'unicité de la structure de Poisson $\{\varphi, \psi\} = \eta^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi$. ♠

Théorème 3.3.3. *Soient \mathcal{G} et \mathcal{G}^* une bialgèbre de Lie il existe un unique groupe de Lie-Poisson connexe et simplement connexe qui donne cette structure.*

Preuve:

D'après le troisième théorème de Lie qui stipule que: Si \mathcal{G} est une algèbre de Lie de dimension finie, alors il existe un groupe de Lie G simplement connexe tel que $T_e G$ soit isomorphe à \mathcal{G} . D'après l'assertion 2) du théorème précédent 3.3.2, on a sur G une seule et unique structure de Poisson qui rend G un groupe de Lie-Poisson. ♠

En utilisant ce dernier théorème nous allons donner quelques exemples

Exemple 3.3.3. $\dim G = 2$.

Tout groupe de Lie G de dimension 2 est un groupe de Lie-Poisson.

Tout algèbre de Lie de dimension 2 est une bialgèbre de Lie.

En effet d'après le théorème 3.3.3 tout algèbre de Lie de dimension 2 admet un unique groupe de Lie-Poisson simplement connexe.

Exemple 3.3.4. $gl^+(2, \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{G} = gl(2, \mathbb{R})$ et soit

$$I_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

sa base on a

$$[I_1, I_2] = I_2, [I_1, I_3] = -I_3, [I_1, I_4] = 0$$

$$[I_2, I_3] = I_1 - I_4, [I_2, I_4] = I_2, [I_3, I_4] = 0.$$

Soit aussi l_i la base duale de \mathcal{G}^* telle que

$$[l_1, l_2] = l_1 - l_4, [l_1, l_3] = 0, [l_1, l_4] = l_3$$

$$[l_2, l_3] = -l_3, \quad [l_2, l_4] = 0, \quad [l_3, l_4] = 0.$$

$\mathcal{G} = gl(2, \mathbb{R})$ est une bialgèbre de Lie si elle vérifie

$$\begin{aligned} \langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle &= -\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \\ &+ \langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle. \end{aligned}$$

Utilisons un tableau pour calculer $\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle$

$\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle$	$[l_1, l_2]$	$[l_1, l_3]$	$[l_1, l_4]$	$[l_2, l_3]$	$[l_2, l_4]$	$[l_3, l_4]$
$[I_1, I_2]$	0	0	0	0	0	0
$[I_1, I_3]$	0	0	-1	1	0	0
$[I_1, I_4]$	0	0	0	0	0	0
$[I_2, I_3]$	2	0	0	0	0	0
$[I_2, I_4]$	0	0	0	0	0	0
$[I_3, I_4]$	0	0	0	0	0	0

de même utilisons un tableau pour calculer

$$-\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle \dots (1)$$

(1)	$\alpha = l_1, \beta = l_2$	$\alpha = l_1, \beta = l_3$	$\alpha = l_1, \beta = l_4$
$X = I_1, Y = I_2$	0	0	0
$X = I_1, Y = I_3$	0	0	-1
$X = I_1, Y = I_4$	0	0	0
$X = I_2, Y = I_3$	2	0	0
$X = I_2, Y = I_4$	0	0	0
$X = I_3, Y = I_4$	0	0	0

$\alpha = l_2, \beta = l_3$	$\alpha = l_2, \beta = l_4$	$\alpha = l_3, \beta = l_4$
0	0	0
1	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0
0	0	0

on remarque que les deux tableaux sont identiques donc $\mathcal{G} = gl(2, \mathbb{R})$ est une bialgèbre de Lie alors le groupe de Lie $Gl(2, \mathbb{R})$ (simplement connexe) de $gl(2, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie-Poisson

Exemple 3.3.5. $Sl(2, \mathbb{R})$.

Soit $\mathcal{G} = sl(2, \mathbb{R})$ avec

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

tels que

$$[I_1, I_2] = I_3, \quad [I_1, I_3] = -2I_1, \quad [I_2, I_3] = 2I_2,$$

et soit l_i la base duale de \mathcal{G}^* telle que

$$[l_1, l_2] = 2l_2, \quad [l_1, l_3] = 2l_3, \quad [l_2, l_3] = 0,$$

verifions que $\mathcal{G} = sl(2, \mathbb{R})$ est une bialgèbre de Lie si elle satisfait

$$\begin{aligned} \langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle &= -\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \\ &+ \langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle; \end{aligned}$$

utilisons un tableau comme l'exemple précédent pour calculer $\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle$

$\langle [\alpha, \beta], [X, Y] \rangle$	$[l_1, l_2]$	$[l_1, l_3]$	$[l_2, l_3]$
$[I_1, I_2]$	0	2	0
$[I_1, I_3]$	0	0	0
$[I_2, I_3]$	4	0	0

de même utilisons un tableau pour calculer

$$-\langle \text{coad}_X \alpha, \text{coad}_\beta^* Y \rangle + \langle \text{coad}_X \beta, \text{coad}_\alpha^* Y \rangle + \langle \text{coad}_Y \alpha, \text{coad}_\beta^* X \rangle - \langle \text{coad}_Y \beta, \text{coad}_\alpha^* X \rangle \dots (1)$$

(1)	$\alpha = l_1, \beta = l_2$	$\alpha = l_1, \beta = l_3$	$\alpha = l_2, \beta = l_3$
$X = I_1, Y = I_2$	0	2	0
$X = I_1, Y = I_3$	0	0	0
$X = I_2, Y = I_3$	4	0	0

on remarque que les deux tableaux sont identiques donc $\mathcal{G} = sl(2, \mathbb{R})$ est une bialgèbre de Lie alors le groupe de Lie $Sl(2, \mathbb{R})$ (simplement connexe) de $sl(2, \mathbb{R})$ est un groupe de Lie-Poisson.

3.3.1. *Equation de Yang-Baxter.* Soit $R \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tel que

$$R = r^{\mu\nu} I_\mu \otimes I_\nu, \quad \text{avec } r^{\mu\nu} = -r^{\nu\mu},$$

soient aussi φ et $\psi \in C^\infty(G)$, on a

$$\{\varphi, \psi\} = r^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \psi \quad \text{et} \quad \{\varphi, \psi\}' = r^{\mu\nu} \partial'_\mu \varphi \partial'_\nu \psi.$$

Définition 3.3.5. R satisfait l'équation Yang-Baxter si

$$[R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}] = 0,$$

avec

$$[R^{12}, R^{13}] = r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} [I_\alpha, I_\mu] \otimes I_\beta \otimes I_\nu, \quad [R^{12}, R^{23}] = r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_\mu] \otimes I_\nu,$$

$$\text{et } [R^{13}, R^{23}] = r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} I_\alpha \otimes I_\mu \otimes [I_\beta, I_\nu].$$

Une solution de l'équation Yang-Baxter dans $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ est appelée R -matrice.

Théorème 3.3.4. Les conditions suivantes sont équivalentes:

- 1) L'application $(\varphi, \psi) \rightarrow \{\varphi, \psi\}$ est un crochet de Poisson,
- 2) L'application $(\varphi, \psi) \rightarrow \{\varphi, \psi\}'$ est un crochet de Poisson,
- 3) R satisfait l'équation Yang-Baxter.

Preuve:

Démontrons que 1) \Leftrightarrow 3) (de même pour 2) \Leftrightarrow 3).). Si l'assertion 3) est satisfaite l'application $(\varphi, \psi) \rightarrow \{\varphi, \psi\}$ est un crochet de Poisson. En effet La \mathbb{R} -bilinearité et l'anticommutativité sont triviales. Vérifions la règle de Leibniz. Soient χ, φ et ψ des éléments de $C^\infty(G)$ on a

$$\{\chi\varphi, \psi\} = r^{uv} \partial_u \chi \varphi \partial_v \psi = r^{uv} \chi \partial_u \varphi \partial_v \psi + r^{uv} \varphi \partial_u \chi \partial_v \psi = \chi \{\varphi, \psi\} + \{\chi, \psi\} \varphi,$$

d'où la règle de Leibniz.

Il reste à montrer l'identité de Jacobi. Soient χ, φ et ψ des éléments de $C^\infty(G)$

$$\begin{aligned} I &= \{\chi, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, \chi\}\} + \{\psi, \{\chi, \varphi\}\}, \\ \{\chi, \{\varphi, \psi\}\} &= r^{\alpha\beta} \partial_\alpha \chi \partial_\beta (r^{uv} \partial_u \varphi \partial_v \psi) = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi (\partial_\beta \partial_u \varphi \partial_v \psi + \partial_u \varphi \partial_\beta \partial_v \psi), \\ I &= r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi (\partial_\beta \partial_u \varphi \partial_v \psi + \partial_u \varphi \partial_\beta \partial_v \psi) + \\ &\quad r^{\alpha'\beta'} r^{u'v'} \partial_{\alpha'} \varphi (\partial_{\beta'} \partial_{u'} \psi \partial_{v'} \chi + \partial_{u'} \psi \partial_{\beta'} \partial_{v'} \chi) + \\ &\quad r^{\alpha''\beta''} r^{u''v''} \partial_{\alpha''} \psi (\partial_{\beta''} \partial_{u''} \chi \partial_{v''} \varphi + \partial_{u''} \chi \partial_{\beta''} \partial_{v''} \varphi), \\ &= \left(r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \partial_u \varphi \partial_v \psi + r^{\alpha''\beta''} r^{u''v''} \partial_{\alpha''} \psi \partial_{u''} \chi \partial_{\beta''} \partial_{v''} \varphi \right) + \\ &\quad + \left(r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_u \varphi \partial_\beta \partial_v \psi + r^{\alpha'\beta'} r^{u'v'} \partial_{\alpha'} \varphi \partial_{\beta'} \partial_{u'} \psi \partial_{v'} \chi \right) + \\ &\quad \left(r^{\alpha''\beta''} r^{u''v''} \partial_{\alpha''} \psi \partial_{\beta''} \partial_{u''} \chi \partial_{v''} \varphi + r^{\alpha'\beta'} r^{u'v'} \partial_{\alpha'} \varphi \partial_{u'} \psi \partial_{\beta'} \partial_{v'} \chi \right). \end{aligned}$$

Notons par $[\partial_\beta, \partial_u]$ le crochet de Lie de $\mathcal{L}(C^\infty(G), C^\infty(G))$ tel que

$$[\partial_\beta, \partial_u] = \partial_\beta \circ \partial_u - \partial_u \circ \partial_\beta.$$

En faisant le changement de variable $\alpha'' \rightarrow v$, $\beta'' \rightarrow u$, $u'' \rightarrow \alpha$ et $v'' \rightarrow \beta$ on obtient

$$\begin{aligned} &\left(r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \partial_u \varphi \partial_v \psi + r^{\alpha''\beta''} r^{u''v''} \partial_{\alpha''} \psi \partial_{u''} \chi \partial_{\beta''} \partial_{v''} \varphi \right) = \\ &= \left(r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_\beta \partial_u \varphi \partial_v \psi - r^{uv} r^{\alpha\beta} \partial_u \psi \partial_\alpha \chi \partial_u \partial_\beta \varphi \right), \\ &= r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_v \psi (\partial_\beta \partial_u \varphi - \partial_u \partial_\beta \varphi) = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_v \psi ([\partial_\beta, \partial_u]) \varphi. \end{aligned}$$

De même pour les deux autres en faisant des changements de variables on obtient

$$\begin{aligned} &\left(r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_u \varphi \partial_\beta \partial_v \psi + r^{\alpha'\beta'} r^{u'v'} \partial_{\alpha'} \varphi \partial_{\beta'} \partial_{u'} \psi \partial_{v'} \chi \right) \\ &= r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_u \varphi ([\partial_\beta, \partial_v]) \psi, \\ &\left(r^{\alpha'\beta'} r^{u'v'} \partial_{\alpha'} \varphi \partial_{u'} \psi \partial_{\beta'} \partial_{v'} \chi + r^{\alpha''\beta''} r^{u''v''} \partial_{\alpha''} \psi \partial_{\beta''} \partial_{u''} \chi \partial_{v''} \varphi \right) \\ &= r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \varphi \partial_v \psi ([\partial_\alpha, \partial_u]) \chi, \\ I &= r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_v \psi ([\partial_\beta, \partial_u]) \varphi + r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \chi \partial_u (\varphi [\partial_\beta, \partial_v]) \psi \\ &\quad + r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \varphi \partial_v \psi ([\partial_\alpha, \partial_u]) \chi. \end{aligned}$$

On rappelle que: $\partial_v \varphi(g) = T_e(\varphi \circ R_g) I_v$ avec $g \in G$ donc $\partial_v \varphi(\cdot) = T_e(\varphi \circ R_\cdot) I_v$ alors

$$I = r^{\alpha\beta} r^{uv} T_e \chi \circ R_\cdot I_\alpha T_e \psi \circ R_\cdot I_v T_e \varphi \circ R_\cdot [I_\beta, I_u] +$$

$$\begin{aligned}
& r^{\alpha\beta} r^{uv} T_e \chi \circ R. I_\alpha T_e \varphi \circ R. I_u T_e \psi \circ R. [I_\beta, I_v] + \\
& r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} T_e \varphi \circ r. I_\beta T_e \psi \circ r. I_v T_e \chi \circ r. [I_\alpha, I_u] \\
& = (r^{\alpha\beta} r^{uv} [I_\alpha, I_u] \otimes I_\beta \otimes I_v + r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_u] \otimes I_v + \\
& r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes I_u \otimes [I_\beta, I_v]) (T_e \chi \circ R., T_e \varphi \circ R., T_e \chi \circ R.).
\end{aligned}$$

On a d'après l'assertion 3)

$$\begin{aligned}
& r^{\alpha\beta} r^{uv} [I_\alpha, I_u] \otimes I_\beta \otimes I_v + r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_u] \otimes I_v + r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes I_u \otimes [I_\beta, I_v] = \\
& [R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}] = 0;
\end{aligned}$$

de ce fait on obtient l'identité de Jacobi

$$I = \{\chi, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, \chi\}\} + \{\psi, \{\chi, \varphi\}\} = 0.$$

Réciproquement, si l'assertion (1) est vérifiée, il suffit de montrer que $([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}])(f, g, h) = 0$ pour toute application f, g, h linéaire de $T_e(G) = \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{R}$, (On sait $\forall f \in T_e^*(G)$ il existe une fonction $\chi \in C^\infty(G)$ telle que $T_e \chi = f.$). On a d'après l'identité de Jacobi

$$\begin{aligned}
& I = \{\chi, \{\varphi, \psi\}\} + \{\varphi, \{\psi, \chi\}\} + \{\psi, \{\chi, \varphi\}\} = \\
& (r^{\alpha\beta} r^{uv} [I_\alpha, I_u] \otimes I_\beta \otimes I_v + r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_u] \otimes I_v + \\
& + r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes I_u \otimes [I_\beta, I_v]) (T_e \chi \circ R., T_e \varphi \circ R., T_e \chi \circ R.) = 0.
\end{aligned}$$

Prenons $\chi, \varphi, \psi \in C^\infty(G)$ telles que $T_e \chi = f, T_e \varphi = g$, et $T_e \psi = h$. et $\chi' = \chi \circ (R.)^{-1}, \psi' = \psi \circ (R.)^{-1}, \varphi' = \varphi \circ (R.)^{-1}$ sous ces conditions on obtient

$$\begin{aligned}
& \{\chi', \{\varphi', \psi'\}\} + \{\varphi', \{\psi', \chi'\}\} + \{\psi', \{\chi', \varphi'\}\} = \\
& ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}])(f, g, h) = 0. \text{ C.q.f.d. } \spadesuit
\end{aligned}$$

Définition 3.3.6. Soit B une forme bilinéaire sur \mathcal{G} est un 2-cocycle si et seulement si

$$B([x, y], z) + B([y, z], x) + B([z, x], y) = 0.$$

Supposons que $r^{uv} = -r^{vu}$ tel que $\det(r^{uv}) \neq 0$ alors sa matrice inverse existe et elle est notée (b_{kl}) telle que

$$(b_{kl})(r^{uv}) = Id \text{ c'est à dire } \sum (r^{uk})(b_{kl}) = \delta_{ul}.$$

Définissons la forme bilinéaire de (b_{kl})

$$B(I_u, I_v) = I_u^t (b_{kl}) I_v = b_{uv}.$$

Corollaire 3.3.2. Soit B une forme bilinéaire sur \mathcal{G} et sa matrice est (b_{kl}) . R satisfait l'équation de Yang-Baxter si et seulement si B est un 2-cocycle.

Preuve:

Commençons par montrer que si R satisfait l'équation de Yang-Baxter alors B est un 2-cocycle. Pour montrer que B soit un 2 cocycle il suffit de le montrer pour les éléments de la base de \mathcal{G} .

$$B([I_i, I_j], I_k) + B([I_j, I_k], I_i) + B([I_k, I_i], I_j) = 0,$$

Comme B est une forme bilinéaire alors $B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j) \in \mathcal{G}^*$, donc

$$\begin{aligned} ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) &= 0. \\ [R^{12}, R^{13}] (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) &= \\ (r^{\alpha\beta} r^{uv} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_u] \otimes I_v) (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)), \\ &= r^{\alpha\beta} r^{uv} B(I_\alpha, I_k) B([I_\beta, I_u], I_i) B(I_v, I_j), \\ &= r^{\alpha\beta} r^{uv} b_{\alpha k} b_{v i} B([I_\beta, I_u], I_i), \\ &= -r^{\beta\alpha} b_{\alpha k} r^{uv} b_{v i} B([I_\beta, I_u], I_i), \\ &= -\delta_{\beta k} \delta_{v i} B([I_\beta, I_u], I_i) = -B([I_k, I_j], I_i); \end{aligned}$$

d'où

$$[R^{12}, R^{13}] (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) = B([I_j, I_k], I_i).$$

De même pour les deux autres

$$[R^{12}, R^{23}] (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) = B([I_j, I_k], I_i),$$

$$[R^{13}, R^{23}] (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) = B([I_k, I_i], I_j);$$

alors ,

$$\begin{aligned} ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B(., I_k), B(., I_i), B(., I_j)) &= \\ B([I_j, I_k], I_i) + B([I_j, I_k], I_i) + B([I_k, I_i], I_j) &= 0; \end{aligned}$$

ainsi

$$B([I_j, I_k], I_i) + B([I_j, I_k], I_i) + B([I_k, I_i], I_j) = 0. \text{ C.q.f.d.}$$

Donc $B([x, y], z) + B([y, z], x) + B([z, x], y) = 0$ pour tout élément $x, y, z \in \mathcal{G}$.

Maintenant montrons la réciproque. Remarquons que l'application $B^b : \mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}^*$ telle que $B^b(x) = B(., x)$ est bijective cela découle du fait que \mathcal{G} et \mathcal{G}^* sont de même dimension et que B^b est injective.

En effet étant donné que B est non dégénérée car pour tout $x \in \mathcal{G}$ on a

$$B(Bx, x) = x^t B^t Bx = \text{norme}(Bx) \text{ alors } Bx = 0 \Leftrightarrow x = 0,$$

ceci résulte du fait que $\det(B) \neq 0$ alors B^b est injective.

Alors la famille $\langle B^b(I_\alpha) \rangle$ forme une base de \mathcal{G}^* (où $\langle I_\alpha \rangle$ est une base de \mathcal{G}).

Pour montrer que

$$([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (f, g, h) = 0 \text{ pour tout } f, g, h \in \mathcal{G}^*,$$

il suffit de montrer que $[R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]$ est nul pour une base de \mathcal{G}^* , choisissons la base $\langle B^b(I_\alpha) \rangle$;

$$\begin{aligned} & ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B^b(I_k), B^b(I_i), B^b(I_j)) = \\ & ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B(\cdot, I_k), B(\cdot, I_i), B(\cdot, I_j)). \end{aligned}$$

D'après les calculs précédents on a

$$\begin{aligned} & ([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B^b(I_k), B^b(I_i), B^b(I_j)) = \\ & B([I_j, I_k], I_i) + B([I_j, I_k], I_i) + B([I_k, I_i], I_j); \end{aligned}$$

cependant comme B est un 2-cocycle,

$$([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]) (B^b(I_k), B^b(I_i), B^b(I_j)) = 0. \text{ C.q.f.d.}$$

Ainsi nous avons $[R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}] = 0. \spadesuit$

Proposition 3.3.4. *Un groupe de Lie-Poisson (G, P) est dit exact si le cocycle p est un cobord c'est à dire $p = \partial Q$ avec $Q \in \wedge^2 \mathcal{G}$. Alors le tenseur P est de la forme*

$$P(x) = L_{x^*}Q - R_{x^*}Q \text{ avec } x \in G.$$

Preuve:

Soit X un champ de vecteurs invariant à gauche sur G

$$\begin{aligned} d_e P(X) &= (\mathcal{L}_X P)(e) = \frac{d}{ds}_{s=0} R_{\exp(-sX)^*} P(\exp(sX)), \\ &= \frac{d}{ds}_{s=0} (R_{\exp(-sX)^*} L_{\exp(sX)^*} Q - Q) = (adX)Q = \partial Q, \end{aligned}$$

ainsi on a

$$d_e P(X) = p = \partial Q,$$

le tenseur P , sous cette forme, est multiplicatif car

$$\begin{aligned} P(gh) &= L_{gh^*}Q - R_{gh^*}Q \\ &= L_{gh^*}Q - L_{g^*}R_{h^*}Q + L_{g^*}R_{h^*}Q - R_{gh^*}Q \\ &= L_{g^*}(P(h)) + R_{h^*}(P(g)). \spadesuit \end{aligned}$$

On adoptera pour la suite les notations suivantes

$$\begin{aligned} L_{x^*}Q &= \tilde{Q} \text{ et } R_{x^*}Q = \bar{Q} \\ P(x) &= L_{x^*}Q - R_{x^*}Q = \tilde{Q} - \bar{Q}. \end{aligned}$$

Proposition 3.3.5. *Soit $Q \in \wedge^2 \mathcal{G}$, alors $P = \tilde{Q} - \bar{Q}$ est un tenseur de Poisson tel que (G, P) soit un groupe de Lie-Poisson si et seulement si le crochet de Schouten-Nijenhuis $[Q, Q]$ est $\text{Ad}G$ invariant.*

Preuve:

On a

$$[P, P] = [\tilde{Q} - \overline{Q}, \tilde{Q} - \overline{Q}] = [\tilde{Q}, \tilde{Q}] + [\overline{Q}, \overline{Q}] - 2[\tilde{Q}, \overline{Q}];$$

on sait que pour tout X et $Y \in \mathcal{G}$ on a $[\tilde{X}, \overline{Y}] = 0$ d'où $[\tilde{Q}, \overline{Q}] = 0$ (d'après la propriété 4) du crochet de Schouten-Nijenhuis) et

$$[\tilde{Q}, \tilde{Q}] = \widetilde{[Q, Q]}, \quad [\overline{Q}, \overline{Q}] = -\overline{[Q, Q]},$$

$$\begin{aligned} [P, P](g) &= \widetilde{[Q, Q]}(g) - \overline{[Q, Q]}(g) = L_{g*}[Q, Q] - R_{g*}[Q, Q] \\ &= R_{g*}((Adg)[Q, Q] - [Q, Q]), \end{aligned}$$

comme P est un tenseur de Poisson si et seulement si

$$[P, P] = 0.$$

alors dans notre cas P est un crochet de Poisson si et seulement si

$$(Adg)[Q, Q] = [Q, Q], \text{ pour tout } g \in G. \text{ C.q.f.d.} \spadesuit$$

D'où la définition suivante:

Définition 3.3.7. *L'équation*

$$(Adg)[Q, Q] = [Q, Q] \text{ pour tout } g \in G.,$$

est appelée Equation Généralisée de Yang-Baxter.

Remarque 3.3.6. *Un groupe de Lie G connexe et simplement connexe, muni d'un tenseur de Poisson P de la forme*

$$P(x) = \tilde{Q} - \overline{Q},$$

est un groupe de Lie-Poisson exact si et seulement si

$$(adg)[Q, Q] = 0 \text{ pour tout } g \in \mathcal{G}.$$

Remarque 3.3.7. *Il est facile de voir que l'équation de Yang-Baxter peut s'exprimer des deux manières suivantes:*

$$[R, R] = 0$$

et

$$[R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}] = 0.$$

Preuve:

Soit $R = r^{uv} \partial_u \wedge \partial_v$ alors

$$[R, R] = r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta, \partial_u \wedge \partial_v],$$

d'après les propriétés 3) et 4) du crochet de Schouten-Nijenhuis on a

$$\begin{aligned} [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta, \partial_u \wedge \partial_v] &= [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta, \partial_u] \wedge \partial_v - \partial_u \wedge [\partial_\alpha \wedge \partial_\beta, \partial_v] \\ &= -[\partial_u, \partial_\alpha \wedge \partial_\beta] \wedge \partial_v + \partial_u \wedge [\partial_v, \partial_\alpha \wedge \partial_\beta], \\ &= -([\partial_u, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta + \partial_\alpha \wedge [\partial_u, \partial_\beta]) \wedge \partial_v + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \partial_u \wedge ([\partial_v, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta + \partial_\alpha \wedge [\partial_v, \partial_\beta]), \\
& = -[\partial_u, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta \wedge \partial_v - \partial_\alpha \wedge [\partial_u, \partial_\beta] \wedge \partial_v \\
& \quad + \partial_u \wedge [\partial_v, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta + \partial_u \wedge \partial_\alpha \wedge [\partial_v, \partial_\beta];
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
[R, R] & = -r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_u, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta \wedge \partial_v - r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \wedge [\partial_u, \partial_\beta] \wedge \partial_v + \\
& \quad r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_u \wedge [\partial_v, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta + r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_u \wedge \partial_\alpha \wedge [\partial_v, \partial_\beta].
\end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned}
& -r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_u, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta \wedge \partial_v = -r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \wedge [\partial_u, \partial_\beta] \wedge \partial_v, \\
& = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_u \wedge [\partial_v, \partial_\alpha] \wedge \partial_\beta = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_u \wedge \partial_\alpha \wedge [\partial_v, \partial_\beta];
\end{aligned}$$

alors

$$[R, R] = 4r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \wedge \partial_\beta \wedge \partial_v,$$

par définition du produit extérieur, on a

$$\begin{aligned}
& r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \wedge \partial_\beta \wedge \partial_v = \\
& r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_\beta \otimes \partial_v - r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_v \otimes \partial_\beta + \\
& r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \otimes \partial_v \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] - r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_v + \\
& r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_v \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_\beta - r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_v \otimes \partial_\beta \otimes [\partial_\alpha, \partial_u].
\end{aligned}$$

Remarquons que le premier et le second terme sont égaux en effet en faisant le changement de variables suivant $\alpha \rightarrow u$ et $\beta \rightarrow v$ sur le second membre, on obtient

$$\begin{aligned}
& -r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_v \otimes \partial_\beta = -r^{\alpha v} r^{u\beta} [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_\beta \otimes \partial_v \\
& = -r^{uv} r^{\alpha\beta} [\partial_u, \partial_\alpha] \otimes \partial_\beta \otimes \partial_v = r^{\alpha\beta} r^{uv} [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_\beta \otimes \partial_v = [R^{12}, R^{13}];
\end{aligned}$$

de même pour le troisième et le sixième terme sont égaux et on a

$$r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \otimes \partial_v \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] = -r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_v \otimes \partial_\beta \otimes [\partial_\alpha, \partial_u],$$

en faisant le changement de variables suivant sur le troisième membre $\alpha \rightarrow \beta$ et $u \rightarrow v$ on a

$$\begin{aligned}
r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \otimes \partial_v \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] & = -r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_v \otimes \partial_\beta \otimes [\partial_\alpha, \partial_u], \\
& = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\alpha \otimes \partial_u \otimes [\partial_\beta, \partial_v] = [R^{13}, R^{23}],
\end{aligned}$$

en renouvelant l'opération pour le quatrième et le cinquième terme, on obtient

$$-r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_\beta \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_v = r^{\alpha\beta} r^{uv} \partial_v \otimes [\partial_\alpha, \partial_u] \otimes \partial_\beta = [R^{12}, R^{23}];$$

d'où

$$[R, R] = 8([R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]).\spadesuit$$

Définition 3.3.8. Soit ω une application bilinéaire de V^* on note par $\#\omega$ l'application linéaire de $V^* \rightarrow V$ telle que

$$\beta \#\omega(\alpha) = \beta(\alpha \#\omega) = \omega(\alpha, \beta).$$

Lemme 3.3.1. *Soit $r \in \wedge^2 \mathcal{G}$, le crochet de Schouten-Nijenhuis de $[r, r]$ peut aussi s'exprimer sous la forme*

$$[r, r](\xi, \eta, \zeta) = -2 \sum_{Cycl.(\xi, \eta, \zeta)} \xi \left(\left[\eta^{\#r}, \zeta^{\#r} \right] \right),$$

avec $\xi, \eta, \zeta \in \mathcal{G}$.

Preuve:

Soit $\{X_i\}$ une base de \mathcal{G} , et $r = \frac{1}{2} r^{ij} X_i \wedge X_j$ on a alors

$$\tilde{r} = \frac{1}{2} r^{ij} \tilde{X}_i \wedge \tilde{X}_j,$$

ainsi

$$\begin{aligned} [\tilde{r}, \tilde{r}] &= \frac{1}{4} r^{ij} r^{hk} \left(- \left[\tilde{X}_i, \tilde{X}_h \right] \wedge \tilde{X}_k \wedge \tilde{X}_j - \tilde{X}_h \wedge \left[\tilde{X}_i, \tilde{X}_k \right] \wedge \tilde{X}_j + \right. \\ &\quad \left. \tilde{X}_i \wedge \left[\tilde{X}_j, \tilde{X}_h \right] \wedge \tilde{X}_k + \tilde{X}_i \wedge \tilde{X}_h \wedge \left[\tilde{X}_j, \tilde{X}_k \right] \right), \\ &= -r^{ij} r^{hk} \left[\tilde{X}_i, \tilde{X}_h \right] \wedge \tilde{X}_k \wedge \tilde{X}_j, \end{aligned}$$

par conséquent

$$[r, r] = -r^{ij} r^{hk} [X_i, X_h] \wedge X_k \wedge X_j.$$

On note par $\{\xi^i\}$ la base duale de \mathcal{G} (c'est à dire $\xi^i(X_j) = \delta_i^j$) alors

$$(\xi^i)^{\#r} = r(\xi^i, \cdot) = r^{ij} X_j,$$

d'où

$$[r, r] = - [\#_r \xi^i, \#_r \xi^j] \wedge X_i \wedge X_j;$$

par conséquent

$$\begin{aligned} [r, r](\xi^a, \xi^b, \xi^c) &= - [\#_r \xi^i, \#_r \xi^j] \wedge X_i \wedge X_j (\xi^a, \xi^b, \xi^c), \\ &= -(\xi^a [\#_r \xi^b, \#_r \xi^c] - \xi^a [\#_r \xi^c, \#_r \xi^b] \\ &\quad + \xi^b [\#_r \xi^c, \#_r \xi^a] - \xi^b [\#_r \xi^a, \#_r \xi^c] \\ &\quad + \xi^c [\#_r \xi^a, \#_r \xi^b] - \xi^c [\#_r \xi^b, \#_r \xi^a]), \\ &= -2 \sum_{Cycl} \xi^a [\#_r \xi^b, \#_r \xi^c], \end{aligned}$$

d'où le résultat

$$[r, r](\xi, \eta, \zeta) = -2 \sum_{Cycl.(\xi, \eta, \zeta)} \xi \left(\left[\eta^{\#r}, \zeta^{\#r} \right] \right). \spadesuit$$

3.3.2. *Equation de Yang-Baxter Modifiée (YBM)*. Soit b une application bilinéaire de \mathcal{G} symétrique non dégénérée et ad -invariant et soit R une application de $\mathcal{G} \rightarrow \mathcal{G}$ définie par $R = \#_r \circ \#_b$.

En adoptant les notations suivantes $\xi = \#_b X$, $\eta = \#_b Y$, et $\zeta = \#_b Z$ on a

$$\begin{aligned} [r, r](\xi, \eta, \zeta) &= -2 \sum_{Cycl.(\xi, \eta, \zeta)} \xi \left([\eta^{\#_r}, \zeta^{\#_r}] \right) \\ &= -2 \sum_{Cycl.(\xi, \eta, \zeta)} \#_b X ([RY, RZ]), \\ [r, r](\xi, \eta, \zeta) &= -2 \sum_{Cycl.(X, Y, Z)} b(X, [RY, RZ]); \end{aligned}$$

comme l'application b est ad -invariant c'est à dire

$$b([U, X], Y) + b(X, [U, Y]) = 0,$$

alors

$$\#_b [U, X] = (coadU)\#_b X,$$

en outre on a

$$\begin{aligned} b(X, RY) &= \#_b X (\#_r \circ \#_b Y), \\ &= -\#_r \circ \#_b X (\#_b Y), \\ b(X, RY) &= -b(RX, Y). \end{aligned}$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} (adU)[r, r](\xi, \eta, \zeta) &= -[r, r](coadU(\xi), \eta, \zeta) - [r, r](\xi, coadU(\eta), \zeta) + \\ &\quad - [r, r](\xi, \eta, coadU(\zeta)), \\ &= 2 \sum_{Cycl.(X, Y, Z)} (b([U, X], [RY, RZ]) + b(Y, [RZ, R[U, X]]) \\ &\quad + b(Z, [R[U, X], RY])), \end{aligned}$$

d'après le fait que

$$b(X, RY) = -b(RX, Y) \text{ et } b([U, X], Y) + b(X, [U, Y]) = 0$$

cette égalité devient

$$\begin{aligned} (adU)[r, r](\xi, \eta, \zeta) &= 2 \sum_{Cycl.(X, Y, Z)} (b([U, X], [RY, RZ]) \\ &\quad - b([U, X], R[RZ, Y]) + b(Z, [R[U, X], RY])). \end{aligned}$$

On note par

$$[R, R](Y, Z) = [RY, RZ] - R[RY, Z] - R[Y, RZ],$$

d'où

$$(adU)[r, r](\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{Cycl.(X, Y, Z)} (b([U, X], [R, R](Y, Z))).$$

Corollaire 3.3.3. *L'équation de Yang-Baxter est équivalente*

$$\sum_{Cycl(X,Y,Z)} [X, [R, R](Y, Z)] = 0 \text{ pour tout } X, Y, Z \in \mathcal{G}.$$

Preuve:

On sait que pour tout $U \in \mathcal{G}$

$$\begin{aligned} (adU)[r, r](\xi, \eta, \zeta) &= 2 \sum_{Cycl(X,Y,Z)} (b([U, X], [R, R](Y, Z))), \\ &= 2 \sum_{Cycl(X,Y,Z)} (b(U, [X, [R, R](Y, Z)])); \end{aligned}$$

comme r vérifie l'équation de Yang-Baxter alors

$$(adU)[r, r](\xi, \eta, \zeta) = 2 \sum_{Cycl(X,Y,Z)} (b(U, [X, [R, R](Y, Z)])) = 0,$$

alors

$$\sum_{Cycl(X,Y,Z)} (b(U, [X, [R, R](Y, Z)])) = 0, \text{ pour tout } U \in \mathcal{G},$$

d'où

$$\sum_{Cycl(X,Y,Z)} [X, [R, R](Y, Z)] = 0. \text{ C.q.f.d. } \spadesuit$$

Définition 3.3.9. *L'équation*

$$[R, R](X, Y) = \alpha[X, Y], \text{ avec } \alpha = const$$

est appelée l'équation de Yang-Baxter modifiée à coefficient α notée YBM_α

Remarque 3.3.8. *l'équation de Yang-Baxter modifiée à coefficient α vérifie l'équation de Yang-Baxter*

Preuve:

Si R vérifie l'équation de Yang-Baxter il faut que pour tout $U \in \mathcal{G}$

$$adU[r, r] = 0,$$

comme

$$\sum_{Cycl(X,Y,Z)} [X, [R, R](Y, Z)] = \sum_{Cycl(X,Y,Z)} [X, \alpha[Y, Z]];$$

d'après l'identité de Jacobi on a

$$\sum_{Cycl(X,Y,Z)} [X, \alpha[Y, Z]] = 0,$$

ainsi on obtient

$$adU[r, r] = 2 \sum_{Cycl(X,Y,Z)} b(U, [X, \alpha[Y, Z]]) = 0. \spadesuit$$

Remarque 3.3.9. Importante

Si on choisit les

$$f_\lambda^{uv} = c_{i\lambda}^u r^{iv} + c_{i\lambda}^v r^{ui},$$

alors la relation

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha},$$

est satisfaite.

Cependant les f_λ^{uv} ainsi définies sont des constantes de structure d'algèbre de Lie si et seulement si $\langle R, R \rangle = [R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]$ est invariant avec la représentation adjointe.

Sous ces hypothèses là le crochet de Poisson sur G (groupe de Lie-Poisson si G est connexe simplement connexe) donné par la formule suivante:

$$\{\varphi, \psi\}_R = r^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi \cdot \partial_\nu \psi - \partial'_\mu \varphi \cdot \partial'_\nu \psi),$$

correspond aux $f_\lambda^{\mu\nu}$.

Preuve:

Commençons par vérifier l'égalité

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha},$$

calculons les $f_k^{ij}, f_s^{j\alpha}, f_s^{i\alpha}, f_r^{j\alpha}$ et $f_r^{i\alpha}$

$$\begin{aligned} f_k^{ij} &= c_{\lambda k}^i r^{\lambda j} + c_{\lambda k}^j r^{i\lambda}, & f_s^{j\alpha} &= c_{\lambda s}^j r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda s}^\alpha r^{j\lambda}, \\ f_s^{i\alpha} &= c_{\lambda s}^i r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda s}^\alpha r^{i\lambda}, & f_r^{j\alpha} &= c_{\lambda r}^j r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda r}^\alpha r^{j\lambda} \\ & & \text{et } f_r^{i\alpha} &= c_{\lambda r}^i r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda r}^\alpha r^{i\lambda}. \end{aligned}$$

Remarquons que

$$[I_\alpha, [I_i, I_k]] = c_{ik}^j c_{\alpha j}^m I_m,$$

alors

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{rs}^k \left(c_{\lambda k}^i r^{\lambda j} + c_{\lambda k}^j r^{i\lambda} \right)$$

et

$$\begin{aligned} & c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha} = \\ &= c_{\alpha r}^i \left(c_{\lambda s}^j r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda s}^\alpha r^{j\lambda} \right) - c_{\alpha r}^j \left(c_{\lambda s}^i r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda s}^\alpha r^{i\lambda} \right) \\ & - c_{\alpha s}^i \left(c_{\lambda r}^j r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda r}^\alpha r^{j\lambda} \right) + c_{\alpha s}^j \left(c_{\lambda r}^i r^{\lambda\alpha} + c_{\lambda r}^\alpha r^{i\lambda} \right), \end{aligned}$$

par conséquent on a

$$\begin{aligned} & -c_{rs}^k f_k^{ij} + c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha} = \\ & r^{i\lambda} \left(-c_{rs}^k c_{\lambda k}^j - c_{\alpha r}^j c_{\lambda s}^\alpha + c_{\alpha s}^j c_{\lambda r}^\alpha \right) + r^{\lambda j} \left(-c_{rs}^k c_{\lambda k}^i - c_{\alpha r}^i c_{\lambda s}^\alpha + c_{\alpha s}^i c_{\lambda r}^\alpha \right) + \\ & + r^{\lambda\alpha} \left(c_{\alpha r}^i c_{\lambda s}^j - c_{\alpha r}^j c_{\lambda s}^i - c_{\alpha s}^i c_{\lambda r}^j + c_{\alpha s}^j c_{\lambda r}^i \right), \\ &= I_i^* r^{i\lambda} \left(-[I_\lambda, [I_r, I_s]] + [I_r, [I_\lambda, I_s]] - [I_s, [I_\lambda, I_r]] \right) + \\ & + I_j^* r^{\lambda j} \left(-[I_\lambda, [I_r, I_s]] + [I_r, [I_\lambda, I_s]] - [I_s, [I_\lambda, I_r]] \right) + \end{aligned}$$

$$+r^{\lambda\alpha} \left(c_{\alpha r}^i c_{\lambda s}^j - c_{\alpha r}^j c_{\lambda s}^i - c_{\alpha s}^i c_{\lambda r}^j + c_{\alpha s}^j c_{\lambda r}^i \right).$$

En faisant le changement de variables $\alpha \rightarrow \lambda$ et $\lambda \rightarrow \alpha$ et sachant que $r^{\lambda\alpha} = -r^{\alpha\lambda}$ ainsi qu'en utilisant l'identité de Jacobi sur \mathcal{G} , on obtient

$$\begin{aligned} -c_{rs}^k f_k^{ij} + c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha} = \\ r^{\lambda\alpha} c_{\alpha r}^i c_{\lambda s}^j - r^{\lambda\alpha} c_{\lambda s}^j c_{\alpha r}^i - r^{\lambda\alpha} c_{\alpha r}^j c_{\lambda s}^i + r^{\lambda\alpha} c_{\lambda s}^i c_{\alpha r}^j = 0, \end{aligned}$$

donc

$$-c_{rs}^k f_k^{ij} + c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha} = 0,$$

alors

$$c_{rs}^k f_k^{ij} = c_{\alpha r}^i f_s^{j\alpha} - c_{\alpha r}^j f_s^{i\alpha} - c_{\alpha s}^i f_r^{j\alpha} + c_{\alpha s}^j f_r^{i\alpha}.$$

Maintenant vérifions que les f_λ^{uv} sont des constantes de structure d'algèbre de Lie si et seulement si $\langle R, R \rangle = [R^{12}, R^{13}] + [R^{12}, R^{23}] + [R^{13}, R^{23}]$ est invariant avec la représentation adjointe.

Montrons que les f_λ^{uv} sont des constantes de structure de l'algèbre de Lie \mathcal{G}^* . Vérifions l'anticommutativité

$$f_\lambda^{uv} = c_{i\lambda}^u r^{iv} + c_{i\lambda}^v r^{ui},$$

par le changement de variable $u \rightarrow v$ et $v \rightarrow u$ on a

$$f_\lambda^{uv} = -c_{i\lambda}^v r^{ui} - c_{i\lambda}^u r^{iv} = -(c_{i\lambda}^v r^{ui} + c_{i\lambda}^u r^{iv}) = -f_\lambda^{vu},$$

Il reste à voir l'identité de Jacobi

$$f_r^{lk} f_k^{ij} + f_r^{ik} f_k^{jl} + f_r^{jk} f_k^{li} = 0,$$

on a

$$\begin{aligned} f_r^{lk} &= c_{\alpha r}^l r^{\alpha k} + c_{\alpha r}^k r^{l\alpha}, \quad f_k^{ij} = c_{\alpha k}^i r^{\alpha j} + c_{\alpha k}^j r^{i\alpha}, \\ f_r^{ik} &= c_{\alpha r}^i r^{\alpha k} + c_{\alpha r}^k r^{i\alpha}, \quad f_k^{jl} = c_{\alpha k}^j r^{\alpha l} + c_{\alpha k}^l r^{j\alpha}, \\ f_r^{jk} &= c_{\alpha r}^j r^{\alpha k} + c_{\alpha r}^k r^{j\alpha}, \quad f_k^{li} = c_{\alpha k}^l r^{\alpha i} + c_{\alpha k}^i r^{l\alpha}, \\ f_r^{lk} f_k^{ij} + f_r^{ik} f_k^{jl} + f_r^{jk} f_k^{li} &= r^{\alpha k} r^{\alpha j} c_{\alpha r}^l c_{\alpha k}^i + r^{i\alpha} r^{\alpha k} c_{\alpha r}^l c_{\alpha k}^j + \\ &\quad r^{l\alpha} r^{\alpha j} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^i + r^{l\alpha} r^{i\alpha} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^j + \\ &\quad r^{\alpha k} r^{\alpha l} c_{\alpha r}^i c_{\alpha k}^j + r^{\alpha k} r^{j\alpha} c_{\alpha r}^i c_{\alpha k}^l + \\ &\quad r^{i\alpha} r^{\alpha l} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^j + r^{i\alpha} r^{j\alpha} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^l + \\ &\quad r^{\alpha k} r^{\alpha i} c_{\alpha r}^j c_{\alpha k}^l + r^{\alpha k} r^{l\alpha} c_{\alpha r}^j c_{\alpha k}^i + \\ &\quad r^{j\alpha} r^{\alpha i} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^l + r^{j\alpha} r^{l\alpha} c_{\alpha r}^k c_{\alpha k}^i \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \langle R, R \rangle &= r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} [I_\alpha, I_\mu] \otimes I_\beta \otimes I_\nu + r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} I_\alpha \otimes [I_\beta, I_\mu] \otimes I_\nu \\ &\quad + r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} I_\alpha \otimes I_\mu \otimes [I_\beta, I_\nu]; \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} ad_{I_r} \langle R, R \rangle &= \\ r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} (c_{\alpha u}^k c_{kr}^m I_m \otimes I_\beta \otimes I_\nu + c_{\alpha u}^k c_{\beta r}^m I_k \otimes I_m \otimes I_\nu + c_{\alpha u}^k c_{vr}^m I_k \otimes I_\beta \otimes I_m) &+ \\ r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} (c_{\alpha r}^m c_{\beta u}^k I_m \otimes I_k \otimes I_\nu + c_{\beta u}^k c_{kr}^m I_\alpha \otimes I_m \otimes I_\nu + c_{\beta u}^k c_{vr}^m I_\alpha \otimes I_k \otimes I_m) &+ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& r^{\alpha\beta} r^{\mu\nu} (c_{\alpha r}^m c_{\beta v}^k I_m \otimes I_\mu \otimes I_k + c_{\beta v}^k c_{ur}^m I_\alpha \otimes I_m \otimes I_k + c_{\beta v}^k I_\alpha \otimes I_\mu \otimes I_m), \\
& ad_{I_r} \langle R, R \rangle (l_i, l_j, l_l) = \\
& r^{\alpha j} r^{\mu l} c_{\alpha u}^k c_{rk}^i + r^{\alpha\beta} r^{\mu l} c_{\alpha u}^i c_{r\beta}^j + r^{\alpha j} r^{\mu\nu} c_{\alpha u}^i c_{rv}^l + \\
& r^{\alpha\beta} r^{\mu l} c_{r\alpha}^i c_{\beta u}^j + r^{i\beta} r^{\mu l} c_{\beta u}^k c_{rk}^j + r^{i\beta} r^{\mu\nu} c_{\beta u}^j c_{rv}^l + \\
& r^{\alpha\beta} r^{jv} c_{r\alpha}^i c_{\beta v}^l + r^{i\beta} r^{\mu\nu} c_{\beta v}^l c_{ru}^j + r^{i\beta} r^{jv} c_{\beta v}^k c_{rk}^l;
\end{aligned}$$

d'après l'identité de Jacobi sur \mathcal{G} on a

$$\begin{aligned}
c_{\alpha u}^k c_{rk}^i &= c_{ur}^k c_{k\alpha}^i + c_{r\alpha}^k c_{ku}^i, \\
c_{\beta u}^k c_{rk}^j &= c_{ur}^k c_{k\beta}^j + c_{r\beta}^k c_{ku}^j, \\
c_{\beta v}^k c_{rk}^l &= c_{vr}^k c_{k\beta}^l + c_{r\beta}^k c_{kv}^l.
\end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned}
& ad_{I_r} \langle R, R \rangle (l_i, l_j, l_l) = \\
& r^{\alpha j} r^{lu} c_{ur}^k c_{k\alpha}^i + r^{\alpha j} r^{lu} c_{r\alpha}^k c_{ku}^i + r^{\alpha\beta} r^{\mu l} c_{\alpha u}^i c_{r\beta}^j + r^{\alpha j} r^{\mu\nu} c_{\alpha u}^i c_{rv}^l + \\
& r^{\alpha\beta} r^{\mu l} c_{r\alpha}^i c_{\beta u}^j + r^{i\beta} r^{\mu l} c_{ur}^k c_{k\beta}^j + r^{i\beta} r^{\mu l} c_{r\beta}^k c_{ku}^j + r^{i\beta} r^{\mu\nu} c_{\beta u}^j c_{rv}^l + \\
& r^{\alpha\beta} r^{jv} c_{r\alpha}^i c_{\beta v}^l + r^{i\beta} r^{\mu\nu} c_{\beta v}^l c_{ru}^j + r^{i\beta} r^{jv} c_{vr}^k c_{k\beta}^l + r^{i\beta} r^{jv} c_{r\beta}^k c_{kv}^l,
\end{aligned}$$

par des changements de variables on obtient

$$ad_{I_r} \langle R, R \rangle (l_i, l_j, l_l) = f_r^{lk} f_k^{ij} + f_r^{ik} f_k^{jl} + f_r^{jk} f_k^{li},$$

donc les f_r^{lk} forment une algèbre Lie si et seulement si $ad_{I_r} \langle R, R \rangle = 0$ pour tout I_r . D'où l'équivalence. C.q.f.d.

Dans ce cas là le crochet de Poisson sur G correspondant aux $f_\lambda^{\mu\nu}$ est donné par la formule suivante

$$\{\varphi, \psi\}_R = r^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi \cdot \partial_\nu \psi - \partial'_\mu \varphi \cdot \partial'_\nu \psi).$$

En effet il suffit de voir que

$$d_e \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\} I_\lambda = f_\lambda^{\mu\nu} \text{ où } d_e \varphi_i = l_i,$$

on sait que:

$$d_e \varphi_i I_j = l_i I_j = \delta_{ij}$$

et

$$\partial'_u \varphi_i = d_e \varphi_i \circ L.I_u, \text{ où } \partial'_u \varphi_i e = d_e \varphi_i \circ L_e I_u = d_e \varphi_i I_u = l_i I_u = \delta_{iu},$$

de même on sait que

$$d_e d_e \text{Int}_x = d_e (R \cdot d_e L - L \cdot d_e R) = d_e R \cdot d_e L - d_e L \cdot d_e R.$$

et

$$L_g h = L_g \circ R_h (e),$$

alors

$$\begin{aligned}
d_e \{\varphi_i, \varphi_j\} I_\lambda &= d_e (r^{\mu\nu} (\partial_\mu \varphi_i \cdot \partial_\nu \varphi_j - \partial'_\mu \varphi_i \cdot \partial'_\nu \varphi_j)) I_\lambda, \\
&= (r^{\mu\nu} d_e \partial_\mu \varphi_i \partial_\nu \varphi_j (e) + r^{\mu\nu} d_e \partial_\nu \varphi_j \partial_\mu \varphi_i (e) \\
&\quad - (r^{\mu\nu} d_e \partial'_\mu \varphi_i \partial'_\nu \varphi_j (e) + r^{\mu\nu} d_e \partial'_\nu \varphi_j \partial'_\mu \varphi_i (e))) I_\lambda,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= (r^{\mu\nu} d_e \partial_\mu \varphi_i \delta_{vj} + r^{\mu\nu} d_e \partial_\nu \varphi_j \delta_{\mu i} - (r^{\mu\nu} d_e \partial'_\mu \varphi_i \delta_{vj} + r^{\mu\nu} d_e \partial'_\nu \varphi_j \delta_{\mu i})) I_\lambda, \\
&= (r^{\mu j} d_e \partial_\mu \varphi_i + r^{iv} d_e \partial_\nu \varphi_j - (r^{\mu j} d_e \partial'_\mu \varphi_i + r^{iv} d_e \partial'_\nu \varphi_j)) I_\lambda, \\
&= (r^{\mu j} (d_e \partial_\mu \varphi_i - d_e \partial'_\mu \varphi_i) + r^{iv} (d_e \partial_\nu \varphi_j - d_e \partial'_\nu \varphi_j)) I_\lambda, \\
&= r^{\mu j} (d_e (d_e (\varphi_i \circ L.) R. (e) - d_e (\varphi_i \circ R.) L. (e))) (I_\mu, I_\lambda) + \\
&\quad + r^{iv} (d_e (d_e (\varphi_j \circ L.) R. (e) - d_e (\varphi_j \circ R.) L. (e))) (I_\nu, I_\lambda), \\
&= (r^{\mu j} (d_e d_e (\varphi_i \circ Int.)) (I_\mu, I_\lambda) + r^{iv} (d_e d_e (\varphi_j \circ Int.)) (I_\nu, I_\lambda)), \\
&= r^{\mu j} d_e \varphi_i \circ ad (I_\mu, I_\lambda) + r^{iv} d_e \varphi_j \circ ad (I_\nu, I_\lambda), \\
&= r^{\mu j} l_i \circ ad (I_\mu, I_\lambda) + r^{iv} l_j \circ ad (I_\nu, I_\lambda), \\
&= r^{\mu j} l_i (c_{\mu\lambda}^m I_m) + r^{iv} l_j (c_{\nu\lambda}^m I_m), \\
&= r^{\mu j} c_{\mu\lambda}^i + r^{iv} c_{\nu\lambda}^j;
\end{aligned}$$

par les changements de variables $\mu \rightarrow i$, $i \rightarrow \mu$, $j \rightarrow v$; et $v \rightarrow i$, $j \rightarrow v$, $i \rightarrow \mu$ on obtient

$$d_e \{\varphi_\mu, \varphi_\nu\} I_\lambda = r^{iv} c_{i\lambda}^\mu + r^{\mu i} c_{i\lambda}^\nu = f_\lambda^{\mu\nu}. \spadesuit$$

Exemple 3.3.6. $Gl(2, \mathbb{R})^+$.

D'après l'exemple 3.3.4 on sait que $gl(2, \mathbb{R})$ munie de cette structure est une bialgèbre de Lie. Nous allons définir le crochet de Poisson correspondant à cette bialgèbre sur $Gl(2, \mathbb{R})^+$.

En utilisant la remarque 3.3.9 nous allons définir R conformément à l'exemple 3.3.4 on a

c_{ij}^k	1	2	3	4
1, 2	0	1	0	0
1, 3	0	0	-1	0
1, 4	0	0	0	0
2, 3	1	0	0	-1
2, 4	0	1	0	0
3, 4	0	0	0	0

 ;

et

f_k^{ij}	1, 2	1, 3	1, 4	2, 3	2, 4	3, 4
1	1	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	1	-1	0	0
4	-1	0	0	0	0	0

 ;

Nous allons chercher les r^{ij} à l'aide de la formule

$$f_\lambda^{uv} = c_{i\lambda}^u r^{iv} + c_{i\lambda}^v r^{ui}.$$

On trouve

$$\begin{aligned}
f_1^{12} &= c_{i1}^1 r^{i2} + c_{i1}^2 r^{i1} & f_2^{12} &= c_{i2}^1 r^{i2} + c_{i2}^2 r^{i1} \\
1 &= -r^{12} & 0 &= -r^{32} - r^{14} \\
f_3^{12} &= c_{i3}^1 r^{i2} + c_{i3}^2 r^{i1} & f_4^{12} &= c_{i4}^1 r^{i2} + c_{i4}^2 r^{i1} \\
0 &= 0 & -1 &= r^{12}
\end{aligned} \quad ,$$

$$\begin{array}{ll}
f_1^{13} = c_{i1}^1 r^{i3} + c_{i1}^3 r^{1i} & f_2^{13} = c_{i2}^1 r^{i3} + c_{i2}^3 r^{1i} \\
0 = r^{13} & 0 = 0 \\
f_3^{13} = c_{i3}^1 r^{i3} + c_{i3}^3 r^{1i} & f_4^{13} = c_{i4}^1 r^{i3} + c_{i4}^3 r^{1i} \quad , \\
0 = r^{23} & 0 = 0 \\
f_1^{14} = c_{i1}^1 r^{i4} + c_{i1}^4 r^{1i} & f_2^{14} = c_{i2}^1 r^{i4} + c_{i2}^4 r^{1i} \\
0 = 0 & 0 = -r^{34} + r^{13} \\
f_3^{14} = c_{i3}^1 r^{i4} + c_{i3}^4 r^{1i} & f_4^{14} = c_{i4}^1 r^{i4} + c_{i4}^4 r^{1i} \quad , \\
1 = r^{24} - r^{12} & 0 = 0 \\
f_1^{23} = c_{i1}^2 r^{i3} + c_{i1}^3 r^{2i} & f_2^{23} = c_{i2}^2 r^{i3} + c_{i2}^3 r^{2i} \\
0 = -r^{23} + r^{23} & 0 = -r^{43} + r^{13} \\
f_3^{23} = c_{i3}^2 r^{i3} + c_{i3}^3 r^{2i} & f_4^{23} = c_{i4}^2 r^{i3} + c_{i4}^3 r^{2i} \quad , \\
-1 = -r^{21} & 0 = r^{23} \\
f_1^{24} = c_{i1}^2 r^{i4} + c_{i1}^4 r^{2i} & f_2^{24} = c_{i2}^2 r^{i4} + c_{i2}^4 r^{2i} \\
0 = 0 & 0 = -r^{14} + r^{23} \\
f_3^{24} = c_{i3}^2 r^{i4} + c_{i3}^4 r^{2i} & f_4^{24} = c_{i4}^2 r^{i4} + c_{i4}^4 r^{2i} \quad , \\
0 = 0 & 0 = r^{24} \\
f_1^{34} = c_{i1}^3 r^{i4} + c_{i1}^4 r^{3i} & f_2^{34} = c_{i2}^3 r^{i4} + c_{i2}^4 r^{3i} \\
0 = r^{34} & 0 = 0 \\
f_3^{34} = c_{i3}^3 r^{i4} + c_{i3}^4 r^{3i} & f_4^{34} = c_{i4}^3 r^{i4} + c_{i4}^4 r^{3i} \quad ; \\
0 = -r^{14} - r^{32} & 0 = r^{24}
\end{array}$$

par conséquent

$$R = -I_1 \otimes I_2 + I_2 \otimes I_1 = -I_1 \wedge I_2.$$

Donc le crochet de Poisson sur $Gl(2, \mathbb{R})$ (groupe de Lie-Poisson) donné par la formule suivante:

$$\begin{aligned}
\{\varphi, \psi\}_R &= -(\partial_1 \varphi \cdot \partial_2 \psi - \partial_1' \varphi \cdot \partial_2' \psi) + \partial_2 \varphi \cdot \partial_1 \psi - \partial_2' \varphi \cdot \partial_1' \psi \\
&= \partial_1' \varphi \cdot \partial_2' \psi - \partial_1 \varphi \cdot \partial_2 \psi + \partial_2 \varphi \cdot \partial_1 \psi - \partial_2' \varphi \cdot \partial_1' \psi \quad ,
\end{aligned}$$

correspond à cette bialgèbre $gl(2, \mathbb{R})$, son tenseur de Poisson est donné par

$$\begin{aligned}
P(x) &= L_{x^*} R - R_{x^*} R \\
&= L_{x^*} (-I_1 \wedge I_2) - R_{x^*} (-I_1 \wedge I_2) \\
&= R_{x^*} (I_1 \wedge I_2) - L_{x^*} (I_1 \wedge I_2).
\end{aligned}$$

Exemple 3.3.7. $Sl(2, \mathbb{R})$.

D'après l'exemple 3.3.5 on sait que $sl(2, \mathbb{R})$ munie de cette structure est une bialgèbre de Lie. Nous allons définir le crochet de Poisson correspondant à cette bialgèbre sur $Sl(2, \mathbb{R})$.

En procédant de la même manière que l'exemple précédent c'est à dire en utilisant la remarque 3.3.9 nous allons définir R conformément à l'exemple 3.3.4 on a

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
c_{ij}^k & 1 & 2 & 3 \\
\hline
1, 2 & 0 & 0 & 1 \\
\hline
1, 3 & -2 & 0 & 0 \\
\hline
2, 3 & 0 & 2 & 0 \\
\hline
\end{array} \quad ;$$

et

f_k^{ij}	1, 2	1, 3	2, 3
1	0	0	0
2	2	0	0
3	0	2	0

Nous allons définir les r^{ij} à l'aide de la formule

$$f_{\lambda}^{uv} = c_{i\lambda}^u r^{iv} + c_{i\lambda}^v r^{ui}.$$

on a

$$\begin{aligned} f_1^{12} &= c_{i1}^1 r^{i2} + c_{i1}^2 r^{1i} & f_2^{12} &= c_{i2}^1 r^{i2} + c_{i2}^2 r^{1i} \\ 0 &= 2r^{32} & 2 &= -2r^{13} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^{12} &= c_{i3}^1 r^{i2} + c_{i3}^2 r^{1i} \\ 0 &= -2r^{12} + 2r^{12}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^{13} &= c_{i1}^1 r^{i3} + c_{i1}^3 r^{1i} & f_2^{13} &= c_{i2}^1 r^{i3} + c_{i2}^3 r^{1i} \\ 0 &= -r^{12} & 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^{13} &= c_{i3}^1 r^{i3} + c_{i3}^3 r^{1i} \\ 2 &= -2r^{13}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_1^{23} &= c_{i1}^2 r^{i3} + c_{i1}^3 r^{2i} & f_2^{23} &= c_{i2}^2 r^{i3} + c_{i2}^3 r^{2i} \\ 0 &= 0 & 0 &= r^{21} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_3^{23} &= c_{i3}^2 r^{i3} + c_{i3}^3 r^{2i} \\ 0 &= -2r^{23}, \end{aligned}$$

par conséquent

$$R = -I_1 \otimes I_3 + I_3 \otimes I_1 = -I_1 \wedge I_3.$$

Donc le crochet de Poisson sur $Sl(2, \mathbb{R})$ (groupe de Lie-Poisson) donné par la formule suivante:

$$\begin{aligned} \{\varphi, \psi\}_R &= -(\partial_1 \varphi \cdot \partial_3 \psi - \partial_1' \varphi \cdot \partial_3' \psi) + \partial_3 \varphi \cdot \partial_1 \psi - \partial_3' \varphi \cdot \partial_1' \psi \\ &= \partial_1' \varphi \cdot \partial_3' \psi - \partial_1 \varphi \cdot \partial_3 \psi + \partial_3 \varphi \cdot \partial_1 \psi - \partial_3' \varphi \cdot \partial_1' \psi, \end{aligned}$$

correspond à cette bialgèbre $sl(2, \mathbb{R})$, son tenseur de Poisson est donné par

$$\begin{aligned} P(x) &= L_{x^*} R - R_{x^*} R \\ &= R_{x^*} (I_1 \wedge I_3) - L_{x^*} (I_1 \wedge I_3). \end{aligned}$$

Remarque 3.3.10. Dans les deux exemples précédents les R satisfont l'équation de Yang-Baxter c'est à dire que

$$[I_1 \wedge I_2, I_1 \wedge I_2] = 0$$

et

$$[I_1 \wedge I_3, I_1 \wedge I_3] = 0.$$

4. GROUPES DE DIRAC-LIE

4.1. Groupoïdes.

Définition 4.1.1. Un groupoïde est formé par deux espaces G et M appelés respectivement le groupoïde et la base, doté de deux applications $\alpha : G \rightarrow M$ et $\beta : G \rightarrow M$ appelées source et but respectivement, d'une application $1 : x \rightsquigarrow 1_x, M \rightarrow G$ nommée inclusion et d'une loi de composition multiplicative $(h, g) \rightarrow hg$ de G définie sur l'espace $G * G = \{(h, g) \in G \times G \mid \alpha(h) = \beta(g)\}$, vérifiant les conditions suivantes:

- 1) $\alpha(hg) = \alpha(g)$ et $\beta(hg) = \beta(h)$ pour tout $(h, g) \in G * G$,
- 2) $j(hg) = (jh)g$ pour tout $j, h, g \in G$ tels que $\alpha(j) = \beta(h)$ et $\alpha(h) = \beta(g)$,
- 3) $\alpha(1_x) = \beta(1_x) = x$ pour tout $x \in M$,
- 4) $g1_{\alpha(g)} = g$ et $1_{\beta(g)}g = g$ pour tout $g \in G$,
- 5) $g \in G$ admet un inverse g^{-1} si $\alpha(g^{-1}) = \beta(g)$, $\beta(g^{-1}) = \alpha(g)$ et $g^{-1}g = 1_{\alpha(g)}$, $gg^{-1} = 1_{\beta(g)}$.

On note groupoïde sur G de base M par $G \rightrightarrows M$.

Définition 4.1.2. Soient G et M deux variétés différentiables. Un groupoïde de Lie est un groupoïde G de base M tel que les applications $\alpha, \beta : G \rightarrow M$ soient des submersions surjectives, l'application inclusion soit de classe C^∞ et que la loi de composition multiplicative soit elle aussi de classe C^∞ .

Exemple 4.1.1. Toute Variété différentiable est un groupoïde de Lie.

Pour cela il suffit de prendre $\alpha = \beta = Id_M$.

Exemple 4.1.2. $T^*G \rightrightarrows \mathcal{G}^*$.

Soit G un groupe de Lie, \mathcal{G} son algèbre de Lie. Déterminons une structure de groupoïde sur T^*G de base \mathcal{G}^* comme suit, pour tout $\theta \in T_g^*G$ on définit

$$\alpha(\theta) = \theta \circ T(L_g) \text{ et } \beta(\theta) = \theta \circ T(R_g),$$

les applications source et but avec R_g et L_g les translations à droite et à gauche de G . D'après la définition du groupoïde, on peut définir la multiplication; pour $\theta \in T_g^*G$ et $\varphi \in T_h^*G$

$$\varphi \bullet \theta = \varphi \circ T(R_{g^{-1}}) = \theta \circ T(L_{h^{-1}}).$$

En effet, $\varphi \bullet \theta$ est défini si et seulement si

$$\alpha(\varphi) = \beta(\theta),$$

$$\varphi \circ T(L_h) = \theta \circ T(R_g),$$

alors

$$\varphi \circ T(R_{g^{-1}}) = \theta \circ T(L_{h^{-1}}),$$

on sait aussi que

$$\alpha(\varphi \bullet \theta) = \alpha(\theta) \text{ et } \beta(\varphi \bullet \theta) = \beta(\varphi),$$

$$X \circ T(L_{hg}) = \theta \circ T(L_g) \text{ et } X \circ T(R_{hg}) = \varphi \circ T(R_h),$$

donc

$$X = \theta \circ T(L_{h^{-1}}) \text{ et } X = \varphi \circ T(R_{g^{-1}}).$$

Avec l'application inclusion

$$1 : \mathcal{G}^* \rightarrow T^*G,$$

$$\theta \rightsquigarrow 1_\theta = (e, \theta).$$

Montrons que ces applications vérifient les cinq propriétés pour que T^*G devienne un groupoïde de base \mathcal{G}^* : Par définition de la multiplication, il est clair que les deux premières conditions sont satisfaites. Montrons la 3^{ème} propriété, pour tout $\theta \in \mathcal{G}^*$ on a

$$\alpha(1_\theta) = \alpha((e, \theta)) = \theta \circ T(L_e) = \theta,$$

$$\beta(1_\theta) = \beta((e, \theta)) = \theta \circ T(R_e) = \theta.$$

Démontrons la 4^{ème} propriété, pour tout $(g, \theta) \in T^*G$ on a

$$1_{\alpha(\theta)} = \theta \circ T(L_g) \in T_e^*G \text{ et } 1_{\beta(\theta)} = \theta \circ T(R_g) \in T_e^*G$$

$$\theta \bullet 1_{\alpha(\theta)} = \theta \circ T(R_{e^{-1}}) = 1_{\alpha(\theta)} \circ T(L_{g^{-1}}) = \theta,$$

$$1_{\beta(\theta)} \bullet \theta = 1_{\beta(\theta)} \circ T(R_{g^{-1}}) = \theta \circ T(L_{e^{-1}}) = \theta.$$

Il nous reste à vérifier la dernière propriété, tout élément $(g, \theta) \in T^*G$ admet un inverse $(g^{-1}, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g)) \in T^*G$. En effet on a

$$\begin{aligned} \beta((g^{-1}, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g))) &= \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g) \circ T(R_{g^{-1}}), \\ &= \theta \circ T(L_g) = \alpha(g, \theta), \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \alpha((g^{-1}, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g))) &= \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g) \circ T(L_{g^{-1}}), \\ &= \theta \circ T(R_g) = \beta(g, \theta), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} (g^{-1}, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g)) \bullet (g, \theta) &= \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g) \circ T(R_{g^{-1}}) \\ &= \theta \circ T(L_g) = 1_{\alpha(\theta)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (g, \theta) \bullet (g^{-1}, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g)) &= \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g) \circ T(L_{h^{-1}}) \\ &= \theta \circ T(R_g) = 1_{\beta(\theta)}. \end{aligned}$$

Par conséquent $T^*G \rightrightarrows \mathcal{G}^*$ est bien un groupoïde.

Exemple 4.1.3. $TG \rightrightarrows \{a\}$.

Soit G un groupe de Lie. Construisons une structure de groupoïde sur TG de base un espace à un élément $\{a\}$. Définissons les applications α, β

$$\alpha, \beta : TG \rightarrow \{a\}$$

$$X \rightsquigarrow \alpha(X) = \beta(X) = a$$

la multiplication pour tout $X \in T_gG$ et $Y \in T_hG$

$$X * Y = L_{h*}X + R_{g*}Y,$$

avec l'application inclusion

$$\begin{aligned} 1 : \{a\} &\rightarrow TG, \\ a &\rightsquigarrow 1_a = 0. \end{aligned}$$

Aussi, on a pour tout élément $(g, X) \in TG$ un inverse égal à $(g^{-1}, -R_{g^{-1}*} \circ L_{g^{-1}*} X)$. Il est clair que $TG \rightrightarrows \{\cdot\}$ est un groupoïde.

Exemple 4.1.4. $\mathbb{T}G = TG \oplus T^*G \rightrightarrows \mathcal{G}^*$.

Soit G un groupe de Lie, \mathcal{G} son algèbre de Lie. Définissons une structure de groupoïde sur $\mathbb{T}G$ de base \mathcal{G}^* telle que: Pour tout $(X, \theta) \in \mathbb{T}_g G$ on définit les applications source et but

$$\beta(X, \theta) = \theta \circ T(R_g), \text{ et } \alpha(X, \theta) = \theta \circ T(L_g),$$

pour tout $(X, \theta) \in \mathbb{T}_g G$ et $(Y, \varphi) \in \mathbb{T}_h G$, on déduit des deux exemples précédents la multiplication,

$$(X, \theta) \circ (Y, \varphi) = (X * Y, \theta \bullet \varphi)$$

$$(X, \theta) \circ (Y, \varphi) = (T(L_h)X + T(R_g)Y, \varphi \circ T(R_{g^{-1}}) = \theta \circ T(L_{h^{-1}})),$$

avec l'application inclusion

$$\begin{aligned} 1 : \mathcal{G}^* &\rightarrow \mathbb{T}G \\ \theta &\rightsquigarrow 1_\theta = (e, 0, \theta). \end{aligned}$$

On a également pour tout élément $(g, X, \theta) \in \mathbb{T}G$ un inverse égal à $(g^{-1}, -R_{g^{-1}*} \circ L_{g^{-1}*} X, \theta \circ T(L_g) \circ T(R_g))$. Il est aisé de voir que $TG \oplus T^*G$ est bien un groupoïde de base \mathcal{G}^* .

Définition 4.1.3. Soient G et G' deux groupoïdes sur M et M' respectivement. Un morphisme de groupoïde de $G \rightarrow G'$ est la donnée d'une paire d'applications $F : G \rightarrow G'$ et $f : M \rightarrow M'$ telle que $\alpha' \circ F = f \circ \alpha$, $\beta' \circ F = f \circ \beta$ et $F(hg) = F(h)F(g)$, pour tout $(h, g) \in G * G$.

Remarque 4.1.1. Si G et G' sont des groupoïdes de Lie, alors (F, f) est un morphisme de groupoïdes de Lie si F et f sont de classe C^∞ .

Définition 4.1.4. Soit G un groupoïde de Lie de base M . Un sous-groupoïde de Lie de G est un groupoïde de Lie G' de base M' , avec les deux immersions $i : G' \rightarrow G$ et $i_\circ : M' \rightarrow M$, telles que (i, i_\circ) soit un morphisme de groupoïdes de Lie.

Nous allons énoncer un théorème qui mettra en évidence la liaison entre les groupes de Lie-Poisson et les groupoïdes;

Théorème 4.1.1. Soient G un groupe de Lie et P un tenseur de Poisson sur G . Alors (G, P) est un groupe de Lie-Poisson si et seulement si l'application $P^\# : T^*G \rightarrow TG$ est un morphisme de groupoïde (avec groupoïde T^*G de base \mathcal{G}^* et le groupoïde $TG \rightrightarrows \{\cdot\}$)

Corollaire 4.1.1. (G, P) est un groupe de Lie-Poisson alors le graphe de l'application $P^\#$ est un sous-groupoïde de $TG \oplus T^*G$.

4.2. Structure de Dirac.

Définition 4.2.1. Soient V un espace vectoriel réel de dimension fini m , V^* son dual et $\mathcal{V} = V \oplus V^*$. Une structure de Dirac linéaire (SDL) sur V est un sous-espace vectoriel L de \mathcal{V} de dimension m isotrope pour la forme bilinéaire

$$\langle (X, \omega), (Y, \eta) \rangle = \frac{1}{2}(\omega(Y) + \eta(X)), \text{ avec } (X, \omega), (Y, \eta) \in \mathcal{V}.$$

Exemple 4.2.1. *Forme anticommutative bilinéaire.*

Si (π^*) une forme anticommutative bilinéaire sur V (resp forme π anticommutative bilinéaire sur V^*), alors $L = \text{graph}((\pi^*)^\#) \subset \mathcal{V}$ est une structure de Dirac linéaire (resp $L = \text{graph}(\pi^\#) \subset \mathcal{V}$ est une (SDL)). En effet, la $\dim L = m$ et pour tout $X \in V$ on a

$$\begin{aligned} \langle (X, (\pi^*)^\#(X)), (Y, (\pi^*)^\#(Y)) \rangle &= \frac{1}{2}((\pi^*)^\#(X)(Y) + (\pi^*)^\#(Y)(X)) \\ &= \frac{1}{2}((\pi^*)(X, Y) + (\pi^*)(Y, X)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

On notera respectivement ρ et ρ^* les projections de \mathcal{V} sur V et V^* . A une structure de Dirac linéaire L sur V , on associe deux formes bilinéaires alternées π sur $\rho(L)$ et π^* sur $\rho^*(L)$ définies par

$$\pi(u, v) = \alpha(v) \text{ dès que } (u, \alpha) \in L, \pi(\alpha, \beta) = \beta(u) \text{ dès que } (u, \alpha) \in L.$$

On a alors les deux caractérisations

$$L = \{(u, \alpha) \in \rho(L) \times V^* \mid \alpha(v) = \pi(u, v) \forall v \in \rho(L)\};$$

$$L' = \{(u, \alpha) \in V \times \rho^*(L) \mid \beta(u) = \pi^*(\alpha, \beta) \forall \beta \in \rho^*(L)\}.$$

Soient L et L' deux SDL sur V et V' respectivement, Soit une application $\phi \in \mathcal{L}(V, V')$, on construit les SDL données sur V et V' par

$$\mathcal{B}\phi(L') = \{(u, \phi^*(\theta)) \mid u \in V, \theta \in V'^*, (\phi(u), \theta) \in L'\};$$

$$\mathcal{F}\phi(L) = \{(\phi(u), \theta) \mid u \in V, \theta \in V'^*, (u, \phi^*(\theta)) \in L\}.$$

Définition 4.2.2. Une application $\phi \in \mathcal{L}(V, V')$ est dite *morphisme de Dirac de type forward* (resp. *backward*) si $L' = \mathcal{F}\phi(L)$ (resp. $L = \mathcal{B}\phi(L')$).

Définition 4.2.3. Un *fibré de Dirac* est un couple (M, L) où M est une variété de classe C^∞ et L un sous-fibré du grand fibré tangent

$\mathbb{T}M = TM \oplus T^*M$ tel qu'en tout point $x \in M$, la fibre L_x soit une structure de Dirac linéaire sur T_xM .

Définition 4.2.4. Le couple (M, L) est une *variété de Dirac*, lorsque l'espace des sections $\Gamma(L)$ est stable par le crochet de Courant

$$[(X, \omega), (Y, \eta)] = ([X, Y], L_X\eta - L_Y\omega + \frac{1}{2}d[\omega(Y) - \eta(X)]).$$

4.3. Groupe de Dirac-Lie. Dans ce paragraphe nous allons énoncer des résultats importants, récemment trouvés, sur les groupes de Dirac-Lie.

Définition 4.3.1. Une structure de Dirac L d'un groupe de Lie G est dite *multiplicative* si L est un sous-groupe de $\mathbb{T}G$.

Définition 4.3.2. Un groupe de Lie muni d'une structure de Dirac multiplicative est appelé *groupe de Dirac-Lie*.

Exemple 4.3.1. Groupe de Lie-Poisson.

D'après le corollaire 4.1.1, tout groupe de Lie-Poisson est un groupe de Dirac-Lie.

Théorème 4.3.1. Soient L une structure de Dirac multiplicative sur G , $\lambda : G' \rightarrow G$ une submersion surjective. Alors $L' = \mathcal{B}(\lambda)L$ est une structure de Dirac multiplicative sur G' .

Si (G, L) est un groupe de Dirac-Lie, alors (G', L') l'est aussi. De plus, L' est non triviale si L l'est.

On note par $\ker L = L \cap TG$, si $\ker(L)$ est de rang constant, alors il est intégrable, on note par \mathcal{K} son feuilletage.

Théorème 4.3.2. Soit G un groupe de Lie muni d'une structure multiplicative $L \subseteq TG \oplus T^*G$, si \mathcal{K}_e est fermé, alors l'espace G/\mathcal{K} muni de la structure de Poisson induite par L est un groupe de Lie-Poisson.

D'après ce théorème on déduit le corollaire suivant:

Corollaire 4.3.1. Soit G un groupe de Lie et \mathcal{G} son algèbre de Lie. Si G est muni d'une structure multiplicative $L \subseteq \mathbb{T}G$, alors $\mathfrak{l} = \ker(L)_e$ est un idéal de \mathcal{G} , le quotient \mathcal{G}/\mathfrak{l} hérite de la structure de bialgèbre de Lie.

Réciproquement,

Corollaire 4.3.2. Si G est connexe et simplement connexe, $\mathfrak{l} \subseteq \mathcal{G}$ un idéal tel que \mathcal{G}/\mathfrak{l} est une bialgèbre de Lie, alors il existe une unique structure de Dirac multiplicative sur G intégrant \mathcal{G}/\mathfrak{l} .

Théorème 4.3.3. Tout groupe de Lie réel G simplement connexe et de dimension au moins 2, a une structure de Dirac multiplicative non triviale.

5. COMPLÉMENTS

5.1. Cohomologie d'Algèbre de Lie. Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie et \mathfrak{m} un espace vectoriel. L'espace vectoriel des endomorphismes $End(\mathfrak{m})$ de \mathfrak{m} peut être muni d'une structure d'algèbre de Lie, en posant

$$[A, B] = AB - BA.$$

Une représentation de \mathcal{G} est un morphisme d'algèbre de Lie $\rho : \mathcal{G} \rightarrow End(\mathfrak{m})$. Autrement dit, ρ est une application linéaire qui vérifie également

$$\rho([g, h]) = \rho(g)\rho(h) - \rho(h)\rho(g).$$

Soit \mathfrak{m} un \mathcal{G} -module, on définit l'espace $C(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m})$ avec

$$C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = \text{hom}(\wedge^p \mathcal{G}, \mathfrak{m}) \cong \wedge^p \mathcal{G}^* \otimes \mathfrak{m}.$$

On définit la fonction $\partial_p : C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{G}; \mathfrak{m})$ comme suit:

- 1) Pour tout $m \in \mathfrak{m}$, on a $\partial m(X) = \rho(X)m$ pour tout $X \in \mathcal{G}$,
 - 2) Pour tout $\alpha \in \mathcal{G}^*$, on a $\partial \alpha(X, Y) = -\alpha([X, Y])$ pour tout $X, Y \in \mathcal{G}$,
- Par extension aux éléments de $\wedge \cdot \mathcal{G}^*$ on obtient

$$\partial(\alpha \wedge \beta) = \partial \alpha \wedge \beta + (-1)^{|\alpha|} \alpha \wedge \partial \beta,$$

enfin par extension sur $\wedge \cdot \mathcal{G}^* \otimes \mathfrak{m}$ on a

$$\partial(\omega \otimes m) = \partial \omega \otimes m + (-1)^{|\omega|} \omega \wedge dm.$$

Nous pouvons aussi définir la fonction ∂ de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \partial_p f(x_1 \wedge \dots \wedge x_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1} (-1)^{i+1} x_i \cdot f(x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge x_{p+1}) + \\ &\sum_{i \not\leq j} (-1)^{i+j} f([x_i, x_j] \wedge x_1 \wedge \dots \wedge \widehat{x}_i \wedge \dots \wedge \dots \wedge \widehat{x}_j \wedge \dots \wedge x_{p+1}). \end{aligned}$$

Proposition 5.1.1. $(C(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = \bigoplus_{p \in \mathbb{N}} C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}), d)$ est un complexe.

Preuve:

Vérifions que $d^2 = 0$. Pour $m \in \mathfrak{m}$ on a

$$\begin{aligned} d^2 m(X, Y) &= [X, Y]m - \rho(X)dm(Y) + \rho(Y)dm(X), \\ [X, Y]m - \rho(X)\rho(Y)m + \rho(Y)\rho(X)m &= 0. \end{aligned}$$

Il est clair que pour $\omega \in \wedge \cdot \mathcal{G}^*$

$$d^2 \omega = 0,$$

alors

$$d^2(\omega \otimes m) = d^2 \omega \otimes m + (-1)^{|\omega|+1} d\omega \otimes dm + (-1)^{|\omega|} d\omega \otimes dm + (-1)^{|\omega|} \omega \otimes dm = 0. \spadesuit$$

Ainsi on a un complexe

$$\dots \rightarrow C^{p-1}(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow \dots$$

appelé le complexe Chevalley–Eilenberg de \mathcal{G} évalué sur \mathfrak{m} de cohomologie

$$H^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = \frac{\ker d : C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow C^{p+1}(\mathcal{G}; \mathfrak{m})}{\text{imd} : C^{p-1}(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \rightarrow C^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m})}$$

appelé la cohomologie d'algèbre de Lie de \mathcal{G} évaluée dans \mathfrak{m} . Les éléments de $\ker d$ sont nommés cocycles et les éléments de imd sont appelés cobords.

On remarque facilement que

$$H^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}) \cong H^p(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \oplus H^p(\mathcal{G}; \mathfrak{n}).$$

Lemme 5.1.1. (*Whitehead*) Si \mathcal{G} une algèbre de Lie semi-simple alors

$$H^1(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = 0$$

pour tout \mathfrak{m} de dimension finie.

Preuve:

Il suffit de le montrer pour $\dim \mathfrak{m} = 1$ c'est à dire $\mathfrak{m} = \langle v \rangle$. Soit $X, Y \in \mathcal{G}$ et $m \in \mathfrak{m}$ on a $\rho(X)v = cv$ alors

$$\rho([X, Y])v = (\rho(X)\rho(Y) - \rho(Y)\rho(X))v = 0$$

comme \mathcal{G} est semi-simple on sait que $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] = \mathcal{G}$ alors $\rho(X)v = 0$.

Pour tout $n \in \mathfrak{m}^*$ on a

$$d\alpha \otimes m(X, Y, n) = \alpha([X, Y])m(n) = 0,$$

alors

$$\alpha([X, Y]) = 0 \text{ si et seulement si } \alpha = 0$$

donc

$$H^1(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = 0. \spadesuit$$

Remarque 5.1.1. On remarque que

$$H^1(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) \cong \mathcal{G}/[\mathcal{G}, \mathcal{G}].$$

On a alors le corollaire suivant

Corollaire 5.1.1. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie semi-simple si et seulement si $H^1(\mathcal{G}; \mathfrak{m}) = 0$.

Dans ce qui précède nous avons pris

$$\mathfrak{m} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{G} \text{ et } \rho = ad$$

Il est aisé de vérifier que φ^* du Théorème 3.3.1 employé dans Remarque 3.3.9 est un 1-cobord, c'est à dire il existe un élément dans $m \in \mathfrak{m} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ tel que $dm = \varphi^*$.

Remarque 5.1.2. Dans la Remarque 3.3.9 on a

$$m = R = r^{uv} I_u \otimes I_v.$$

Preuve:

En effet on sait que

$$\varphi^*(I_\lambda) = f_\lambda^{jk} I_j \otimes I_k,$$

cependant

$$\begin{aligned} dR(I_\lambda) &= ad_{I_i}(r^{uv} I_u \otimes I_v), \\ &= r^{uv} [I_\lambda, I_u] \otimes I_v + r^{uv} I_u \otimes [I_\lambda, I_v], \\ &= r^{iv} c_{i\lambda}^u I_u \otimes I_v + r^{ui} c_{i\lambda}^v I_u \otimes I_v = \varphi^*(I_\lambda). \text{ C.q.f.d.} \end{aligned}$$

5.2. Historique. C'est Siméon Denis Poisson (1781–1840) qui a découvert le crochet de Poisson sur une variété symplectique particulière, l'espace des mouvements d'un système mécanique. Cependant, il n'a considéré que le crochet de deux fonctions coordonnées, pas de deux fonctions différentiables quelconques.

Carl Gustav Jacobi (1804–1851) a considéré le crochet de Poisson de deux fonctions différentiables quelconques (toujours sur une variété symplectique) et découvert l'identité qui porte son nom. Cette dernière a joué un rôle fondamental car c'est un ingrédient essentiel de la théorie des groupes et des algèbres de Lie, développées par Marius Sophus Lie (1842–1899).

L'idée de structures de Poisson plus générales que celles associées à une structure symplectique est implicite dans les travaux de Sophus Lie. Plus récemment, sous le nom de structures Hamiltoniennes dans les travaux de divers auteurs, notamment Andrei Iacob, Shlomo Sternberg, Boris Kupershmidt et Yuri Ivanovich Manin.

André Lichnerowicz (1915–1998) et Alexander Kirillov ont indépendamment étudié systématiquement ces structures, et en ont découvert de nombreuses propriétés, notamment leur décomposition en feuilles symplectique.

La structure de Poisson canonique sur le dual d'une algèbre de Lie est mentionnée implicitement dans les travaux de Sophus Lie. Elle a été redécouverte par Jean-Marie Souriau, Alexander Kirillov et Bertram Kostant.

Vladimir Drinfel'd a introduit la notion de groupes de Lie-Poisson qui ont été largement développés par le physicien Michael Semenov-Tian-Shansky.

Alan Weinstein a utilisé les notions de groupoïdes et algébroïdes de Lie en géométrie de Poisson et renouvelé l'intérêt pour l'étude de ces structures. Indépendamment, Mickael Karasev et Stanislas Zakrzewski ont également vu l'intérêt de ces structures en relation avec la quantification. Belavin-Drinfel'd

6. Supplément théorème de Belavin-Drinfel'd

6.1. Sous-algèbre de Cartan. Dans cette partie quelques résultats seront énoncés (on peut retrouver leurs démonstrations dans le livre [8]).

6.1.1. Éléments réguliers. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension finie. Pour $X \in \mathcal{G}$, on note

$$P_X(T) = \det(T - \text{ad}X).$$

Supposons que $\dim \mathcal{G} = n$ et que (X_1, \dots, X_n) soit une base de \mathcal{G} et si $X = x_1X_1 + \dots + x_nX_n$ on aura $P_X(T) = \det(T - x_1\text{ad}X_1 - \dots - x_n\text{ad}X_n)$. Donc $P_X(T)$ est un polynôme homogène de degré n et de variables T, X_1, \dots, X_n , s'écrivant sous la forme suivante :

$$P_X(T) = a_i(X)T^i,$$

avec les $a_i(X)$ sont des polynômes homogènes de degré $n - i$ de variables X_1, \dots, X_n .

Définition 6.1.1. Le rang de \mathcal{G} est le plus petit entier l tel que a_l ne soit pas le polynôme nul. Un élément $X \in \mathcal{G}$ est dit régulier si $a_l(X) \neq 0$.

Remarque 6.1.1. 1) On a $a_n = 1$ et donc $l \leq n$,

2) On a $l = n$ si et seulement si $P_X(T) = T^n$ si et seulement si $\text{ad}X$ est nilpotent pour tout $X \in \mathcal{G}$ si et seulement si \mathcal{G} est nilpotente,

3) Si $\mathcal{G} \neq 0$, on a $a_0(X) = 0$ car pour tout X , $\text{ad}X$ n'est pas inversible ($\text{ad}X(X) = 0$) ainsi $l \geq 1$.

Proposition 6.1.1. L'ensemble \mathcal{G}_r des éléments réguliers de \mathcal{G} est un ouvert dense et connexe de \mathcal{G} pour la topologie de Zariski.

Preuve:

Posons $V = \mathcal{G} - \mathcal{G}_r$ l'ensemble des zéros du polynômes a_l et donc il est fermé et \mathcal{G}_r est ouvert. D'autre part si V était d'intérieur non vide, a_l s'annulerait sur un ouvert et serait donc nul, ce qui est faux. Ainsi \mathcal{G}_r est bien dense.

Montrons que \mathcal{G}_r est connexe par arcs. Soient X et Y deux éléments de \mathcal{G}_r et soit D la droite complexe passant par X et Y . Alors $\mathcal{G}_r \cap D$ est un plan réel privé d'un nombre fini de points et est donc connexe par arcs. ♠

Définition 6.1.2. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie de dimension finie sur \mathbb{C} . Soient $X \in \mathcal{G}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$ on définit l'espace caractéristique associé à λ :

$$\mathcal{G}_X^\lambda = \{Y \in \mathcal{G} \mid \exists n \ (\text{ad}X - \lambda)^n(Y) = 0\}.$$

Remarque 6.1.2. 1) On a la décomposition $\mathcal{G} = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{C}} \mathcal{G}_X^\lambda$,

2) Pour λ et μ complexes, on a $[\mathcal{G}_X^\lambda, \mathcal{G}_X^\mu] = \mathcal{G}_X^{\lambda+\mu}$. En particulier, \mathcal{G}_X^0 est une sous-algèbre de Lie de \mathcal{G} .

6.1.2. Sous-algèbre de Cartan.

Définition 6.1.3. Une sous-algèbre de Cartan de \mathcal{G} est une sous-algèbre \mathcal{H} de \mathcal{G} nilpotente et égale à son normalisateur

$$n_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \{Y \in \mathcal{G} \mid \forall H \in \mathcal{H}, [H, Y] \in \mathcal{H}\}.$$

Nous allons énoncer quelques résultats remarquables des sous-algèbres de Cartan

Théorème 6.1.1. (existence des sous-algèbres de Cartan). Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie. Si $X \in \mathcal{G}$ est régulier, alors \mathcal{G}_X^0 est une sous-algèbre de Cartan, sa dimension est égale au rang de \mathcal{G} .

Théorème 6.1.2. Toute sous-algèbre de Cartan de \mathcal{G} est de la forme \mathcal{G}_X^0 pour un certain élément régulier $X \in \mathcal{G}$. En particulier, sa dimension vaut le rang de \mathcal{G} .

Proposition 6.1.2. Soit \mathcal{H} une sous-algèbre de Cartan d'une algèbre semi-simple \mathcal{G} . Alors:

- 1) \mathcal{H} est abélienne,
- 2) \mathcal{H} est égale à son centralisateur

$$c_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \{Y \in \mathcal{G} \mid \forall H \in \mathcal{H}, [H, Y] = 0\},$$

- 3) Tout élément de \mathcal{H} est semi-simple,
- 4) La restriction de la forme de Killing $K_{\mathcal{G}}$ à $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est non dégénérée.

6.1.3. Système de racines associé à une algèbre de Lie semi-simple. On prend toujours $k = \mathbb{C}$ et on considère \mathcal{G} une algèbre de Lie semi-simple sur \mathbb{C} . Soit \mathcal{H} une sous-algèbre de Cartan de \mathcal{G} , On note $\mathcal{H}^* = \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathcal{H}, \mathbb{C})$.

Définition 6.1.4. Pour $\alpha \in \mathcal{H}^*$, on appelle espace de poids α et on note :

$$\mathcal{G}^{\alpha} = \{X \in \mathcal{G} \mid \forall H \in \mathcal{H}, [X, H] = \alpha(H)X\}.$$

Remarque 6.1.3. On a $\mathcal{G}^0 = c_{\mathcal{G}}(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$

Définition 6.1.5. Une forme $\alpha \in \mathcal{H}^*$ non nulle est une racine de \mathcal{G} par rapport à \mathcal{H} si $\mathcal{G}^{\alpha} \neq 0$. On note $R = R(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ l'ensemble des racines. Le couple (\mathcal{H}^*, R) s'appelle le système de racines (complexes) associé à \mathcal{G} .

Théorème 6.1.3. On a la décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathcal{G}^{\alpha}$.

Preuve:

On sait que les adH , $H \in \mathcal{H}$, sont semi-simples et commutent entre eux d'après la proposition 6.1.2. Ils sont donc simultanément diagonalisables, d'où le résultat. ♠

6.2. Systèmes de racines. Soient $k = \mathbb{R}$ et V un espace vectoriel de dimension finie sur \mathbb{R} .

Définition 6.2.1. Soit $\alpha \in V$ non nul. Une symétrie par rapport à α est un automorphisme $s : V \rightarrow V$ tel que:

- 1) $s(\alpha) = -\alpha$,
- 2) L'ensemble H des points fixes de s est un hyperplan de V .

Remarque 6.2.1. Soit $V^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, \mathbb{R})$ et $\alpha^* \in V^*$ tel que $\alpha^*|_H = 0$ et $\alpha^*(\alpha) = 2$. Alors pour tout $v \in V$, $s(v) = v - \alpha^*(v)\alpha$, d'après l'isomorphisme

$$\text{End}_{\mathbb{R}}(V) \xrightarrow{\sim} V^* \otimes V,$$

on peut aussi noter $s = \text{Id}_V - \alpha^* \otimes \alpha$. Réciproquement, si $\alpha \in V$ et $\alpha^* \in V^*$ sont tels que $\alpha^*(\alpha) = 2$, alors la formule précédente définit une symétrie par rapport à α .

Lemme 6.2.1. Soient $\alpha \in V$ non nulle et $R \subset V$ une partie finie qui engendre V . Alors il existe au plus une symétrie s par rapport à α telle que $s(R) \subset R$.

Preuve:

Supposons que s_1 et s_2 soient deux telles symétries. L'endomorphisme $s_1 s_2$ induit donc une permutation des éléments de R . Comme R est fini, il existe un entier N tel que $(s_1 s_2)^N = \text{Id}_V$. Ainsi $s_1 s_2$ est diagonalisable. D'autre part, on a $s_1 s_2(\alpha) = \alpha$ et $s_1 s_2$ induit l'identité dans $V/\mathbb{R}\alpha$. Ainsi toutes les valeurs propres de $s_1 s_2$ sont égales à 1 et $s_1 = s_2$. ♠

Définition 6.2.2. Un sous espace R de V est dit un système de racines dans V s'il satisfait les conditions suivantes:

- 1) R est une partie finie qui engendre V , et ne contenant pas 0,
- 2) Pour tout $\alpha \in R$, la symétrie s_α par rapport à α laisse invariant R c'est à dire $s_\alpha(R) \subset R$ (voir le Lemme précédent 6.2.1),
- 3) Pour tout $\alpha, \beta \in R$, $s_\alpha(\beta) - \beta \in \alpha\mathbb{Z}$.

La dimension de V est appelée le rang de R , les éléments de R sont appelés les racines de V .

Remarque 6.2.2. Si $\alpha \in R$ d'après les propriétés 2) et 3) on a

$$-\alpha = s_\alpha(\alpha) \in R.$$

Définition 6.2.3. Soit R un système de racines dans V . le groupe de Weyl de R est le groupe W de $GL(V)$ engendré par les symétries $s_\alpha, \alpha \in R$.

6.2.1. Position relative de deux racines. Soit R un système de racines de V et (\cdot, \cdot) un produit scalaire W -invariant. Soient α et β deux racines, on pose

$$n(\alpha, \beta) = \alpha^*(\beta) = 2 \frac{(\alpha, \beta)}{(\alpha, \alpha)} \in \mathbb{Z}.$$

On définit également $|\alpha| = \sqrt{(\alpha, \alpha)}$. Notons par φ l'angle entre α et β . On a alors $(\alpha, \beta) = |\alpha| |\beta| \cos \varphi$, d'où:

$$n(\alpha, \beta) = \alpha^*(\beta) = 2 \frac{|\beta|}{|\alpha|} \cos \varphi$$

et

$$n(\alpha, \beta)n(\beta, \alpha) = 4 \cos^2 \varphi \in \mathbb{Z}.$$

Ainsi les seules valeurs possibles pour $\cos^2 \varphi$ sont $0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ et 1 ; dans le dernier cas α et β sont proportionnels. Nous remarquons que nous avons sept possibilités pour $n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha), \varphi$, et $\frac{|\beta|}{|\alpha|}$ que nous allons expliciter par un tableau

$4 \cos^2 \varphi$	0	1	1	2	2	3	3
$n(\alpha, \beta)$	0	1	-1	1	-1	1	-1
$n(\beta, \alpha)$	0	1	-1	2	-2	3	-3
φ	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
$\frac{ \beta }{ \alpha }$?	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

on remarque que l'angle φ détermine l'ensemble $\{n(\alpha, \beta), n(\beta, \alpha)\}$ et aussi l'ensemble $\{\frac{|\beta|}{|\alpha|}, \frac{|\alpha|}{|\beta|}\}$ que si $\varphi \neq \frac{\pi}{2}$.

Proposition 6.2.1. *Si α et β sont deux racines et que $n(\beta, \alpha) \not\equiv 0$ (c'est à dire φ est un angle aigu), alors $\alpha - \beta$ est encore une racine.*

Preuve:

D'après le tableau précédent, on doit avoir $n(\beta, \alpha) = 1$ ou $n(\alpha, \beta) = 1$. Dans le premier cas, on écrit

$$s_\beta(\alpha) = \alpha - n(\alpha, \beta)\beta = \alpha - \beta = \alpha - \beta,$$

d'où le résultat $\alpha - \beta \in R$. De même pour le deuxième cas

$$\alpha - \beta = -s_\alpha(\beta) \in R. \spadesuit$$

6.2.2. Bases.

Définition 6.2.4. *Une partie S de R est une base du système de racines R si elle vérifie les conditions suivantes:*

- 1) S est une base de V ,
- 2) Tout $\beta \in R$ peut s'écrire comme combinaison linéaire

$$\beta = \sum_{\alpha \in S} m_\alpha \alpha,$$

où tous les m_α sont de même signe.

Théorème 6.2.1. *Tout système de racines admet une base.*

6.2.3. *Générateurs et relations pour les algèbres de Lie semi-simples complexes.* Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie semi-simple complexe. Soient \mathcal{H} une sous-algèbre de Cartan de \mathcal{G} et $R = R(\mathcal{G}, \mathcal{H})$ le système de racines associé. On a alors la décomposition :

$$\mathcal{G} = \mathcal{H} \oplus \bigoplus_{\alpha \in R} \mathcal{G}^\alpha,$$

on note par

$$R^+ = \left\{ \sum_{\alpha \in S} c_\alpha \alpha, c_\alpha \in \mathbb{N} \right\} \cap R,$$

$$R^- = R - R^+,$$

et

$$\mathcal{N}^\pm = \bigoplus_{\alpha \in R^\pm} \mathcal{G}^\alpha,$$

une autre écriture de la décomposition \mathcal{G}

$$\mathcal{G} = \mathcal{N}^+ \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}^-$$

Soit S une base de R . Notons $S = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$. Pour tout i , posons $H_i = H_{\alpha_i}$ et on choisit $X_i \in \mathcal{G}^{\alpha_i}$ et $Y_i \in \mathcal{G}^{-\alpha_i}$ tels que $[X_i, Y_i] = H_i$.

On pose $n(i, j) = \alpha_j(H_i) = \alpha_j^*(\alpha_i)$ qui est un entier négatif ou nul si $i \neq j$.

Théorème 6.2.2. *\mathcal{G} est engendré en tant qu'algèbre de Lie par les H_i , X_i et Y_i appelés générateurs de Chevalley. Ces éléments vérifient les relations de Weyl :*

$$\begin{aligned} [H_i, H_j] &= 0, \\ [X_i, Y_i] &= H_i, \\ [X_i, Y_j] &= 0 \text{ si } i \neq j, \\ [H_i, X_j] &= n(i, j)X_j, \\ [H_i, Y_j] &= -n(i, j)Y_j; \end{aligned}$$

et les relations de Serre:

$$\begin{aligned} (ad X_i)^{-n(i, j)+1}(X_j) &= 0 \text{ si } i \neq j, \\ (ad Y_i)^{-n(i, j)+1}(Y_j) &= 0 \text{ si } i \neq j. \end{aligned}$$

6.3. **Belavin-Drinfel'd.** On rappelle deux résultats standards sur les algèbres de Lie simples :

Théorème 6.3.1. (*Whitehead*). Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie simple et V un \mathcal{G} -module de dimension finie. Alors,

$$H^1(\mathcal{G}, V) = H^2(\mathcal{G}, V) = 0.$$

Théorème 6.3.2. Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie simple sur \mathbb{C} et soit $\Omega \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ l'élément de Casimir (la forme de Killing vu comme un élément de $\mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$, appelé abusivement élément de Casimir) associé à une forme non dégénérée invariante sur \mathcal{G} . Alors,

$$(\Lambda^3 \mathcal{G})^{\mathcal{G}} = \mathbb{C}Z, \quad Z = [\Omega_{12}, \Omega_{23}].$$

Proposition 6.3.1. *Soit $(\mathcal{G}, [,], \delta)$ une bialgèbre de Lie où \mathcal{G} est simple. Alors, $(\mathcal{G}, [,], \delta)$ est quasi-triangulaire et admet deux et seulement deux structures quasi-triangulaires \overline{R}_1 et \overline{R}_2 .*

Preuve:

Par le théorème 6.3.1 de Whitehead, $H^1(\mathcal{G}, \Lambda^2 \mathcal{G}) = 0$. Ainsi $\delta : \mathcal{G} \rightarrow \Lambda^2 \mathcal{G}$ est une structure de cobord c'est à dire $\delta = \partial R$ avec $R \in \Lambda^2 \mathcal{G}$, ce R est unique. De plus, d'après le théorème 6.3.2 on a $[R, R] \in (\Lambda^2 \mathcal{G})^{\mathcal{G}} = \mathbb{C}[\Omega_{12}, \Omega_{23}]$. Alors, il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $(\mathcal{G}, [,], \delta)$ admet deux structures quasi-triangulaires données par

$$\overline{R}_1 = R + \lambda \Omega \text{ et } \overline{R}_2 = R - \lambda \Omega. \spadesuit$$

En d'autres termes, la classification des structures de bialgèbres de Lie sur \mathcal{G} simple se réduit à la classification des R -matrices satisfaisant $R + R_{21} \in \mathbb{C}\Omega$.

Soient \mathcal{G} une algèbre de Lie simple, et \langle, \rangle une forme invariante non dégénérée sur \mathcal{G} . Soit $\mathcal{H} \subset \mathcal{G}$ une sous algèbre de Cartan, $R \in \mathcal{H}^*$ le système de racines associé et $S \subset R^+$ une base du système de racines R . Soit aussi (X_i, H_i, Y_i) les générateurs de Chevalley. Enfin, soit $\Omega \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ l'élément de Casimir associé à \langle, \rangle et $\Omega_0 \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ sa partie de Cartan.

Nous cherchons les R -matrices $R \in \mathcal{G} \otimes \mathcal{G}$ telles que

$$R + R_{21} = \varepsilon \Omega, \text{ avec } \varepsilon \neq 0.$$

Pour la suite, on prendra $\varepsilon = 1$. L'ensemble des solutions est classifié par la structure suivante :

Définition 6.3.1. *Un triplet de Belavin-Drinfel'd (S_1, S_2, τ) consiste en deux sous-ensembles S_1 et S_2 de S , et une bijection $\tau : S_1 \rightarrow S_2$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

1) τ préserve le produit scalaire, c'est à dire $\langle \tau(\alpha), \tau(\beta) \rangle = \langle \alpha, \beta \rangle$ pour tout $\alpha, \beta \in S_1$,

2) τ est nilpotent, c'est à dire $\forall \lambda_1 \in S_1, \exists n \neq 0$ tel que $\tau^n(\lambda_1) \in S_2/S_1$.

Théorème 6.3.3. *(Belavin-Drinfel'd 1982). Soit \mathcal{G} une algèbre de Lie simple munie d'une forme invariante non-dégénérée \langle, \rangle . Soit $\mathcal{G} = \mathcal{N}^+ \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}^-$ une décomposition triangulaire de \mathcal{G} et (S_1, S_2, τ) un triplet de Belavin-Drinfel'd. Supposons que $R_0 \in \mathcal{H} \otimes \mathcal{H}$ satisfasse:*

$$R_0 + R_{0_{21}} = \Omega_0,$$

$$(\tau\alpha \otimes 1)R_0 + (1 \otimes \tau\alpha)R_0 = 0 \text{ pour tout } \alpha \in S_1.$$

Définissons

$$R = R_0 + \sum_{\alpha \in R_+} x_{-\alpha} \otimes x_{\alpha} + \sum_{\substack{\alpha, \beta \in R_+ \\ \alpha \preceq \beta}} x_{-\alpha} \otimes x_{\beta}.$$

Alors

1) R est une R -matrice satisfaisant $R + R_{21} = \Omega$,

2) *Tout R -matrice satisfaisant $R + R_{21} = \Omega$ est de la forme précédemment exposée (pour une décomposition $\mathcal{G} = \mathcal{N}^+ \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{N}^-$ et un choix de base (x_α) adéquat).*

Preuve:

se trouve dans le livre [2]

REFERENCES

- [1] A.Affane, *Characterization and existence of multiplicative Dirac structures*, Novembre 2009.
- [2] P. Etingof and O. Schiffman, *Lectures on quantum groups*, International Press, 1998.
- [3] H. Bursztyn, O.Radko, *Gauge Equivalence of Dirac Structures and Symplectic Groupoids*, Ann. Inst. Fourier, 53, 309-337, (2003).
- [4] V.G.Drinfel'd, *Hamiltonian structures on Lie groups, Lie bialgebras, and the geometric meaning of the classical Yang-Baxter equation*, Soviet Math. Doklady 27(1) (1983), 68-71.
- [5] K.Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note Serie 213, Cambridge University Press, 2005.
- [6] C. M. MARLE, *Variétés symplectiques et variétés de Poisson*, Cours de DEA, Année universitaire 1998-1999.
- [7] C.Ortiz, *Multiplicative Dirac structures on Lie groups*, arXiv :0906.2373v1, 12 Jun 2009.
- [8] J-P Serre *Complex Semisimple Lie Algebras*, Springer-Verlag New York, Berlin Heidelberg, London, Paris, Tokyo.
- [9] I.Vaisman, *Lectures on the Geometry of Poisson Manifolds*, Progress in Math, Birkhauser Verlag, Basel, 1994.

E-mail address: \ddot{y}