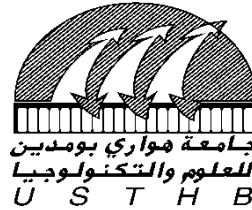


N° d'ordre : 49/2016-C/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT 3^{ème} Cycle**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : SYSTEMES DYNAMIQUES

Par : AMAR CHIDOUH

Sujet

L'existence de la solution de quelques équations
différentielles fractionnaires

Soutenue publiquement le 23/10/2016, devant le jury composé de :

M. Omar Kessab	Professeur à l'USTHB	Président
Mme. Assia Guezane-Lakoud	Professeur à l'université d'Annaba	Directrice de thèse
M. Rachid Bebbouchi	Professeur à l'USTHB	Co- Directeur de thèse
M. Rabeh Khaldi	Professeur à l'université d'Annaba	Examineur 1
M. Delfim. F. M. Torres	Professeur à l'université d'Aveiro	Examineur 2
M. Benmazai Abdelhamid	Professeur à l'USTHB	Examineur 3

Remerciements

Je tiens à remercier avant tout **Allah** qui m'a donné la volonté et le courage pour réaliser ce travail.

Je tiens à remercier sincèrement **Pr. R. Bebbouchi** et **Pr. A. Guezane-Lakoud**, qui – en tant que Directeurs de thèse – se sont toujours montrés à l'écoute et très disponibles tout au long de la réalisation de cette thèse, ainsi pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'ils ont bien voulu me consacrer.

Je remercie vivement monsieur le **Pr. Delfim F. M. Torres** qui m'a fait l'honneur d'être un membre de jury, je le remercie également pour ces orientations et sa contribution à ma formation à l'université d'Aveiro au Portugal.

Je tiens à exprimer aussi mes sincères remerciements au **Pr. O. Kassab** qui m'a fait l'honneur de présider le jury ainsi **Pr. R. Khaldi** et **Pr. A. Benmezai** qui ont accepté de faire partie du jury.

Mes remerciements s'adressent également aux **Pr. Bouras Seddik** et **Pr. Souahi Abdelhamid**, directeur du laboratoire "Systèmes et Matériaux Avancés" où j'ai mené ma thèse de doctorat dans de bonnes conditions.

المخلص

في السنوات الاخيرة أصبحت المعادلات التفاضلية ذات المشتقات الكسرية تجلب الكثير من الاهتمام وذلك راجع للتطور المكثف للاشتقاق الكسري نفسه وكذا تطبيقاته في مختلف مجالات العلوم مثل الريولوجيا، الميكانيك، الفيزياء، ... الخ.

مؤخرا هناك العديد من النتائج الخاصة بدراسة المعادلات ذات المشتقات الكسرية والتي تعتمد أساسا على استعمال تقنيات التحليل غير الخطي.

موضوع هذه الأطروحة هو دراسة بعض المسائل التي تنمذجها معادلات تفاضلية ذات مشتقات كسرية والمرفقة بشروط ابتدائية مختلفة أما طريقة حل هذه المسائل عادة ما تتبع طبيعة المسألة نفسها حيث سنعتمد على تقنية النقط الصامدة مع تطبيق طريقة التقريبيات المتعاقبة كما سيتم إدراج طريقة الحلول التحتية والفقوية.

Abstract

In recent years, fractional differential equations have attracted more attention, this is due both to the intensive development of fractional calculus itself and their applications in various fields of science such as rheology, viscoelasticity, electrochemistry, ... etc.

Recently, many results regarding the solvability of fractional problems, using the techniques of nonlinear analysis. The aim of this thesis is the study of some problems governed by differential equations of fractional order joined by different types of conditions. The resolution follows the nature of the problem, we apply the fixed point theory, the method of successive approximations and the method of the lower and upper solutions.

Résumé

Au cours de ces dernières années, les équations différentielles fractionnaires ont attiré davantage l'attention ; cela est dû à la fois au développement intensif du calcul fractionnaire et à leurs applications dans divers domaines des sciences tels que la rhéologie, la viscoélasticité, l'électrochimie, . . . etc.

Récemment, de nombreux résultats concernant la résolution des problèmes fractionnaires sont apparus, en utilisant les techniques de l'analyse non linéaire. La résolution de tels problèmes étant d'actualité, le sujet de cette thèse de doctorat concerne l'étude de quelques problèmes engendrés par des équations différentielles d'ordre fractionnaire auxquelles sont joints différents types de conditions.

Pour leur résolution et suivant la nature du problème posé, on appliquera la théorie du point fixe, la méthode des approximations successives et la méthode des sous et sur solutions.

Table des matières

1	Préliminaires	10
1.1	Rappels et Compléments sur la théorie du point fixe	10
1.2	Fonctions spéciales	13
1.2.1	Les fonctions Gamma et Beta	13
1.2.2	Fonctions de Mittag-Leffler	15
1.3	Transformée de Laplace	17
1.3.1	Transformée de Laplace de la fonction $z^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm \omega z^\alpha)$. .	18
1.3.2	Convolution et transformée de Laplace	20
1.3.3	Exemple d'équation intégrale d'Abel	21
1.4	Intégrale et dérivée fractionnaires	23
1.4.1	Dérivation d'ordre un demi	23
1.4.2	Propriétés de la demi-dérivée	26
1.4.3	Formule intégrale de Riemann-Liouville	27
1.4.4	Dérivations d'ordre α	30
1.4.5	Propriétés et compositions des opérateurs fractionnaires . . .	32
1.4.6	Fonctions absolument continues	32
1.4.7	Propriétés	33
1.4.8	La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville	35

<i>TABLE DES MATIÈRES</i>	6
1.4.9 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo	36
1.5 Conclusion	37
2 Solutions positives de l'équation d'oscillation	38
2.1 Exemple d'une équation différentielle d'oscillation	39
2.2 Equation d'oscillation fractionnaire	40
2.3 Unicité de la solution	42
2.4 Existence de la solution positive	43
3 Fluage et relaxation fractionnaires	50
3.1 Equation de fluage	50
3.1.1 La représentation intégrale du modèle rhéologique linéaire de Voigt	52
3.1.2 Le modèle fractionnaire non linéaire de Voigt	55
3.2 Equation de relaxation	60
4 L'inégalité de Lyapunov pour ...	71
4.1 Quelques résultats d'existence concernant l'inégalité de Lyapunov . .	73
4.2 Généralisation de l'inégalité de Lyapunov	78

Introduction

Récemment un grand débat concernant la notion de dérivation fractionnaire est apparu bien que le sujet semble être aussi ancien que le calcul différentiel, et remonte à Leibniz et L'Hospital à la fin du 17^{ème} siècle. Le calcul fractionnaire étant généralisation de l'intégration et la dérivation à l'ordre arbitraire i.e. non entier, il est considéré d'une grande signification dans les dernières décennies en raison à la fois du développement intensif de la théorie du calcul fractionnaire lui-même et leurs applications dans différents domaines. Le principe de causalité en physique signifie que l'état présent du processus f " démarre " à l'instant $t = a$, i.e. les valeurs de f (dans le présent) dépendent de tous les états précédents (dans le passé). Comme on n'est pas informé de la dépendance de l'état présent de n'importe quel processus sur les résultats de son évolution dans le futur, seules les dérivées à gauche seront considérées.

L'étude de l'existence et l'unicité a été un domaine de recherche très actif en mathématiques, et pour les équations différentielles fractionnaires on ne fait pas l'exception. Ceci est également expliqué par le développement d'autres domaines de recherche, tels que la physique, la mécanique et la biologie. De nombreuses méthodes sont utilisées pour prouver l'existence et l'unicité de la solution, comme les techniques du point fixe, pour lesquelles plusieurs théories sont disponibles. Un des objectifs de notre thèse est d'exposer la méthode de point fixe, d'expliquer par des exemples concrets ses applications et illustrer quelques avantages en appliquant le principe de l'application contractante et le théorème de point fixe de Guo-Krasnosel'skii pour établir l'existence de solutions de certaines équations différentielles fractionnaires.

Le chapitre 1 est divisé en deux parties. Dans la première partie nous commençons par rappeler quelques notions sur la théorie du point fixe, montrer l'utilité de théo-

rème de Guo-Krasnosel'skii, traiter les fonctions de Mittag-Leffler et se concentrer sur certaines propriétés de ces fonctions qui apparaissent naturellement lorsque nous résolvons les équations différentielles linéaires fractionnaires. Cette résolution nous oblige à introduire les transformations intégrales comme la transformée de Laplace. La deuxième partie du chapitre sera consacrée aux éléments de base du calcul fractionnaire, un rappel historique et quelques concepts préliminaires seront introduits pour faire deux approches (Riemann-Liouville et Caputo) à la généralisation des notions de dérivation.

Dans le chapitre 2, nous considérons l'existence et l'unicité de la solution de l'équation fractionnaire d'oscillation avec second membre non linéaire. Le résultat d'existence est basé sur l'application contractante et le théorème de Guo-Krasnosel'skii. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, and R. Bebbouchi. Positive solutions for an oscillator fractional initial value problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, in press. DOI :10.1007/s12190-016-0996-9.

Dans le chapitre 3, nous allons considérer l'existence de la solution positive de l'équation de fluage fractionnaire selon deux approches. En utilisant la même analyse que dans le chapitre précédent, on conclut l'existence de solutions. Puis, par la méthode de sur et sous solutions qui a été appliquée avec succès pour établir l'existence et la multiplicité de solutions pour les problèmes aux conditions initiales et aux limites, on obtient quelques résultats d'existence concernant l'équation de relaxation. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet des publications :

A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, and R. Bebbouchi. Positive solutions of the fractional relaxation equation using lower and upper solutions. *Vietnam Journal of Mathematics*, in press. DOI :10.1007/s10013-016-0192-0.

A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, R. Bebbouchi, A. Bouaricha and D. F. M. Torres Linear and nonlinear fractional Voigt models. *Theory and Applications of Non-integer Order Systems*. Springer International Publishing, 2017. 157-167.

Dans le chapitre 4, on s'intéresse à l'inégalité de Lyapunov considérant sa généralisation dans le cas fractionnaire. Les résultats obtenus dans ce chapitre ont fait l'objet de la publication :

A. Chidouh and D. F. M. Torres. A generalized lyapunov's inequality for a fractional boundary value problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 312 (2017), 192–197..

Nous terminons notre travail par une conclusion générale et des perspectives.

Chapitre 1

Préliminaires

1.1 Rappels et Compléments sur la théorie du point fixe

On doit le premier embryon de la théorie du point fixe au mathématicien français H. Poincaré (1854 – 1912). Il fut le premier à avoir utilisé une approche du point fixe. Poincaré a aussi prévu l'importance et l'avenir prometteur du point fixe dans les problèmes de l'analyse mathématique. Aujourd'hui la théorie du point fixe est rencontrée pratiquement dans tous les domaines de la recherche en mathématiques.

Définition 1.1.1. (Point fixe) Soit A une application d'un ensemble X dans lui-même. On appelle point fixe de A tout point y tel que $Ay = y$. S'il existe un tel y on dit que A possède un point fixe, ce qui est équivalent à dire que l'équation $Ay - y = 0$ possède une solution.

Définition 1.1.2. Étant donnés deux espaces métriques (X, d) et (Y, ρ) et une application $A : X \rightarrow Y$. Alors

- (i) A est k -lipschitzienne si $\forall y, v \in X, \rho(A(y), A(v)) \leq k.d(y, v)$,
- (ii) si $k = 1$, A est dite *non-expansive*,
- (iii) si $k < 1$, A est dite *contractante*,
- (iv) A est *contractive* si $\forall y, v \in X, y \neq v, \rho(A(y), A(v)) < d(y, v)$.

On a les implications suivantes :

$$\begin{aligned}
A \text{ contractante sur } X &\Rightarrow A \text{ contractive sur } X \Rightarrow \\
A \text{ non-expansive sur } X &\Rightarrow A \text{ 1-lipschitzienne sur } X \Rightarrow \\
A \text{ uniformément continue sur } X &\Rightarrow A \text{ continue sur } X.
\end{aligned}$$

Théorème 1.1.3

(Théorème du point fixe de Banach) Soit X un espace métrique complet, soit S une partie fermée de X , et soit $A : S \rightarrow S$ une application contractante de constante $0 \leq k < 1$. On a :

- (i) Existence et unicité : il existe $y \in S$ un point fixe unique de A , i.e., $A(y) = y$.
- (ii) Algorithme de calcul : la suite $(y_n)_{n \geq 0}$ de points de S telle que $y_{n+1} = A(y_n)$ converge vers le point fixe de A sachant que $y_0 \in X$ (choisi arbitrairement), avec $A^0 = Id_X$, $A^n = A \circ A \circ \dots \circ A$ (n itéré de A), et $y_{n+1} = A^n(y_0)$.
- (iii) Estimations de l'erreur : $\forall n \geq 0$, on a :
 - (iii – 1) Estimation a priori : $d(y_n, y) \leq \frac{k^n}{1-k} d(y_0, y_1)$.
 - (iii – 2) Estimation a posteriori : $d(y_{n+1}, y) \leq \frac{k}{1-k} d(y_n, y)$.
- (iv) Vitesse de convergence : $d(y_{n+1}, y) \leq k \cdot d(y_n, y)$.

Remarque 1.1.4. Ce résultat est parfois appelé *théorème de point fixe des contractions*, on trouve également dans la littérature : *théorème de Banach-Picard*, *théorème de Banach-Caccioppoli*,...

Remarque 1.1.5. Ce théorème représente en quelque sorte un idéal du point de vue de l'analyse numérique. En effet, on a l'existence et l'unicité et un algorithme de calcul stable qui donne la solution (unique). De plus, on dispose de deux majorations, a priori et a posteriori, de l'erreur et de la vitesse de convergence.

Théorème 1.1.6

(Schauder) Soit X un espace de Banach, et M une partie non vide, convexe, bornée et fermée de X . Alors toute application compacte $M \rightarrow M$ admet un point fixe.

Théorème 1.1.7

Soit X un espace normé, $\emptyset \neq M \subset X$ convexe et $V \subset X$ relativement compacte. Alors toute application continue $M \rightarrow V$ admet un point fixe.

Définition 1.1.8. Soit (E, d) un espace métrique. On dit que (E, d) est *précompact* (ou bien : *totalelement borné*) si : pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un recouvrement fini de E par des parties finies de E dont le diamètre est inférieur à ε . Une partie A de E sera dite *précompacte* dans (E, d) si le sous-espace métrique $(A, d_{A \times A})$ est précompact.

Définition 1.1.9. Soit (E, d) un espace métrique. Une partie A de E sera dite *relativement compacte* dans (E, d) si la fermeture \bar{A} de A est compacte.

Proposition 1.1.10

Soit A un sous-ensemble d'un espace métrique X . Alors :

- (a) Si A est relativement compact, A est précompact.
- (b) Si A est précompact et X est complet, A est relativement compact.

Définition 1.1.11. Une application continue $T : \Omega \subset X \rightarrow Y$ est dite compacte si $T(\bar{\Omega})$ est relativement compacte. Elle est dite complètement continue, si l'image de tout sous ensemble borné B de Ω est relativement compacte.

Dans le cas particulier où $X = C([a; b])$, le théorème suivant d'Arzela-Ascoli est généralement utilisé pour prouver la compacité de T .

Théorème 1.1.12

(Arzelà-Ascoli) Soit $X = C[a, b]$ $\infty < a < b < \infty$, muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$, $M \subset X$. Si M est

- (i) uniformément borné, i.e., $\exists r \geq 0$ tq $\|u\|_\infty \leq r \forall u \in M$,
- (ii) équicontinu, i.e., $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tel que

$$|x - y| < \delta \text{ et } u \in M \Rightarrow |u(x) - u(y)| < \varepsilon,$$

alors M est totalelement borné (précompact).

L'un des théorèmes qui sont d'une importance pour la théorie de point fixe est le théorème de Guo-Krassnosel'skii sur le cône qui a été utilisés pour étudier l'existence de solutions non triviales, voir [1, 9, 23, 41, 46, 50].

Définition 1.1.13. Soit X est un espace de Banach. Un ensemble non vide convexe et fermé $P \subset X$ est appelé cône s'il satisfait les deux conditions suivantes :

(i) $x \in P$, $\lambda \geq 0$ implique $\lambda x \in P$.

(ii) $x \in P$, $-x \in P$ implique $x = 0$.

Théorème 1.1.14 (Guo-Krasnoselskii, [46])

soit X un espace de Banach et $K \subset X$ un cône. Ω_1, Ω_2 sont deux ouverts de X avec $0 \in \Omega_1 \subset \overline{\Omega_1} \subset \Omega_2$.

Soit $\mathcal{A} : K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1) \rightarrow K$ un opérateur complètement continu tel que :

(i) $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$, ou bien

(ii) $\|\mathcal{A}u\| \leq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_1$ et $\|\mathcal{A}u\| \geq \|u\|$ pour tout $u \in K \cap \partial\Omega_2$.

Alors \mathcal{A} possède un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$.

1.2 Fonctions spéciales

Les deux premières fonctions abordées dans cette section sont d'une grande importance historique, elles ont été introduites en 1729 par Euler. Historiquement et théoriquement, l'étude de ces fonctions et de leurs propriétés a donné un élan considérable à l'étude et la compréhension des aspects fondamentaux de l'analyse mathématique, y compris les limites, produits infinis, et prolongement analytique. Elles ont également motivé le progrès de la théorie des fonctions complexes, comme les théorèmes de Weierstrass et de Mittag-Leffler sur les représentations des fonctions entières et méromorphes.

1.2.1 Les fonctions Gamma et Beta

Définition 1.2.1. La fonction Gamma est une fonction qui prolonge naturellement la factorielle aux nombres complexes. Pour $z \in \mathbb{C}$ tel que $\text{Re}(z) > 0$, on définit la fonction Gamma par

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt. \quad (1.1)$$

En intégrant par parties dans (1.1), on montre que

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \operatorname{Re}(z) > 0. \quad (1.2)$$

La propriété (1.2) permet d'établir que

$$\Gamma(n+1) = n!, n \in \mathbb{N}. \quad (1.3)$$

La fonction Gamma peut être représentée ainsi :

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{(z+1)\dots(z+n)}, \operatorname{Re}(z) > 0.$$

Exemple 1.2.2. Cherchons $(-\frac{1}{2})!$. Par définition

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t} t^{-1/2} dt.$$

Posons $t = y^2$, on aura

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-y^2} \frac{1}{y} 2y dy = 2 \int_0^\infty e^{-y^2} dy = \sqrt{\Pi},$$

ainsi

$$\left(-\frac{1}{2}\right)! = \sqrt{\Pi}.$$

En utilisant la fonction Gamma, on peut aussi définir la fonction causale $H_\alpha(t)$ comme suit

$$H_\alpha(t) := \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} H(t), \quad (1.4)$$

avec H étant la fonction de Heaviside. Cette fonction (1.4) est utilisée pour donner un sens alternatif aux deux concepts ; la dérivation et l'intégration fractionnaires.

Définition 1.2.3. La fonction Beta est une intégrale d'Euler définie pour tous complexes z et s par

$$B(z,s) = \int_0^1 t^{z-1} (1-t)^{s-1} dt, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.5)$$

Elle est liée à la fonction Gamma par la relation suivante :

$$B(z, s) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(s)}{\Gamma(z+s)}, \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.6)$$

Il s'ensuit de (1.6) que

$$B(z, s) = B(s, z), \operatorname{Re}(z) > 0, \operatorname{Re}(s) > 0.$$

1.2.2 Fonctions de Mittag-Leffler

Définition 1.2.4. Une fonction à deux paramètres de type Mittag-Leffler est définie par la série :

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + \beta)}, \quad (\alpha > 0, \beta > 0, z \in \mathbf{C}). \quad (1.7)$$

Pour $\beta = 1$, on obtient la fonction de Mittag-leffler à un seul paramètre :

$$E_{\alpha, 1}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\Gamma(\alpha n + 1)} \equiv E_{\alpha}(z). \quad (1.8)$$

La fonction Mittag-Leffler fournit un moyen simple pour la généralisation de la fonction exponentielle en raison de la substitution de $n! = \Gamma(n + 1)$ avec $(\alpha n)! = \Gamma(\alpha n + 1)$. On a aussi des cas particuliers de (1.7) représentant des fonctions élémentaires

$$E_{1,1}(z) = e^z, \quad E_{1,2}(z) = \frac{e^z - 1}{z}, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (1.9)$$

$$E_{2,1}(+z^2) = \cosh z, \quad E_{2,1}(-z^2) = \cos z, \quad z \in \mathbf{C}. \quad (1.10)$$

$$E_{1/2,1}(\pm z^{1/2}) = e^z [1 + \operatorname{erf}(\pm z^{1/2})], \quad z \in \mathbf{C}. \quad (1.11)$$

où

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-t^2} dt.$$

Prabhakar a étudié quelques propriétés de la fonction Mittag-Leffler généralisée (1.7) et de l'opérateur intégrale

$$(\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}\varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t) dt, \quad (x > a), \quad (1.12)$$

avec $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}(\alpha), \operatorname{Re}(\beta) > 0$). Il a appliqué les résultats obtenus pour prouver l'existence et l'unicité de la solution pour l'équation intégrale correspondante

$$\int_a^x (x-t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t) dt = f(x) \quad (1.13)$$

sur l'intervalle finie $[a, b]$.

Théorème 1.2.5 ([27])

Soit $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega z^\alpha)\right) = z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\omega z^\alpha). \quad (1.14)$$

Preuve. En utilisant la définition de la fonction de Mittag-Leffler (1.7) et on dérive terme par terme sous le signe de sommation, on aura

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(z^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega z^\alpha)\right) &= \left(\frac{d}{dz}\right)^n \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{d}{dz}\right)^n \left(\frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta)}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\omega^k z^{\alpha k + \beta - n - 1}}{\Gamma(\alpha k + \beta - n)} \\ &= z^{\beta-n-1} E_{\alpha,\beta-n}(\omega z^\alpha), \end{aligned}$$

qui prouve (1.14). □

Corollaire 1.2.6

Soit $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\alpha > 0$, $\operatorname{Re}\beta > 0$). Alors

$$\int_0^z t^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega t^\alpha) dt = z^\beta E_{\alpha,\beta+1}(\omega z^\alpha). \quad (1.15)$$

Théorème 1.2.7

Soit $\alpha, \beta, \omega \in \mathbb{C}$ ($\operatorname{Re}\alpha > 0, \operatorname{Re}\beta > 0$) et $b > a$, alors l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}$ est borné sur l'espace $C[a, b]$ des fonctions continues et

$$\|\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}\varphi\|_C \leq B \|\varphi\|_C,$$

où

$$B = (b-a)^{\operatorname{Re}(\beta)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|\omega(b-a)^{\operatorname{Re}(\alpha)}|^k}{|\Gamma(\alpha k + \beta)| (\operatorname{Re}(\alpha)k + \operatorname{Re}(\beta))} \quad (1.16)$$

Preuve. Pour tout $x \in [a, b]$ et $\varphi \in C[a, b]$, on a

$$\begin{aligned} |(\mathbb{E}_{\alpha,\beta,\omega;a}\varphi)(x)| &\leq \int_a^x |(x-t)^{\beta-1} E_{\alpha,\beta}(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t)| dt \\ &\leq \|\varphi\|_C \int_a^x |s^{\operatorname{Re}(\beta)-1} E_{\alpha,\beta}(\omega s^\alpha)| ds. \end{aligned}$$

L'intégrale sur le côté droit est inférieur ou égal à B et le théorème est prouvé. \square

1.3 Transformée de Laplace

La transformée de Laplace appartient à la famille très vaste des transformées intégrales, qui établissent une relation entre une fonction f et sa transformée F sous la forme :

$$F(s) = \int_I K(s,t) f(t) dt$$

Une transformée particulière nécessite donc la définition du noyau $K(s,t)$ et de l'intervalle d'intégration I .

Puisque s est complexe, la transformation de Laplace peut être vue comme une généralisation de la transformation de Fourier, restreinte aux fonctions définies sur

\mathbb{R}^+ . Il en résulte qu'un grand nombre de fonctions admettent une transformée de Laplace, ce qui n'est pas le cas des transformées de Fourier.

La transformée de Laplace est un outil très simple d'emploi pour résoudre les problèmes d'évolution (équations différentielles, équations aux dérivées partielles, équations intégrales). Par cette transformée, les équations différentielles deviennent des équations algébriques, tandis que les équations aux dérivées partielles se transforment en des équations différentielles. Il en résulte une simplification efficace des problèmes qui permet souvent leur résolution analytique.

La fonction $F(s)$ de la variable complexe s définie par

$$F(s) = \mathcal{L}\{f; s\} = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1.17)$$

est appelée la transformée de Laplace de la fonction f , laquelle est appelée l'originelle.

Pour l'existence de l'intégrale (1.17), la fonction f doit être d'ordre exponentiel α , ce qui veut dire qu'il existe deux constantes positives M et α telles que

$$|f(t)| \leq Me^{\alpha t} \text{ pour tout } t > T.$$

En d'autres termes, la fonction f ne doit pas "croître ou décroître" plus vite qu'une certaine fonction exponentielle quand $t \rightarrow \infty$. L'originelle f peut être reconstituée à partir de la transformée de Laplace F à l'aide de la transformée de Laplace inverse

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F; t\} = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{st} F(s) ds, \quad c = \operatorname{Re}(s) > c_0, \quad (1.18)$$

où c_0 réside dans le demi-plan droit de la convergence absolue de l'intégrale de Laplace (1.17)

Le calcul direct de la transformée de Laplace inverse en utilisant la formule (1.18) est "souvent compliqué"; cependant, parfois elle donne une information utile sur le comportement de l'inconnue originelle f qu'on cherche.

1.3.1 Transformée de Laplace de la fonction $z^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm \omega z^\alpha)$

On considère une fois pour toute, en tant qu'exemple, la transformée de Laplace de la fonction $t^{\alpha \gamma + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm \omega t^\alpha)$ qui ressemble à la transformée de Laplace de la plupart

des fonctions usuelles et spéciales :

$$t^{\alpha k + \beta - 1} E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm \omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{k! s^{\alpha - \beta}}{(s^\alpha \mp \omega)^{k+1}}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}, \quad (1.19)$$

où

$$E_{\alpha, \beta}^{(k)}(\pm \omega t^\alpha) \equiv \frac{d^k}{dt^k} E_{\alpha, \beta}(\pm \omega t^\alpha).$$

Cas particuliers :

1. Si $k = 0$ et $\beta = \alpha$, on aura la fonction α -fonction exponentielle $t \rightarrow t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\lambda t^\alpha)$

$$t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{1}{(s^\alpha - \omega)}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}. \quad (1.20)$$

2. Si $k = 0$ et $\beta = 1$, on aura la fonction de Mittag-Leffler d'un seul paramètre $t \rightarrow E_\alpha(\omega t^\alpha)$.

$$E_\alpha(\pm \omega t^\alpha) \Leftrightarrow \frac{s^{\alpha-1}}{(s^\alpha \mp \omega)}, \operatorname{Re}(s) > |\omega|^{1/\alpha}. \quad (1.21)$$

3. Si $k = 0$ et $\alpha = \omega = \beta = 1$, on aura la fonction exponentielle $t \rightarrow e^t$.

$$e^t \Leftrightarrow \frac{1}{s-1}, \operatorname{Re}(s) > 1. \quad (1.22)$$

4. Si $\omega = 0$, $\alpha = \beta = 1$ et $k = n \in \mathbb{N}$, on aura la fonction puissance $t \rightarrow t^n$.

$$t^n \Leftrightarrow \frac{n!}{s^{n+1}}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.23)$$

5. Si $k = \omega = 0$ et $\alpha = \beta = 1$, on aura la fonction de Heaviside H .

$$H(t) \Leftrightarrow \frac{1}{s}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.24)$$

6. Si $k = \omega = 0$ et $\alpha = \beta = 1/2$, on aura la fonction $t \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

$$\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \Leftrightarrow \frac{1}{s^{1/2}}, \operatorname{Re}(s) > 0. \quad (1.25)$$

1.3.2 Convolution et transformée de Laplace

Les trois théorèmes suivants sont d'importantes applications de la transformée de Laplace pour la résolution des équations différentielles et intégrales.

Théorème 1.3.1

Soit f est une fonction continue sur \mathbb{R}^+ , sauf éventuellement en $t = 0$ où $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t) \equiv f(0^+)$ existe. On suppose en outre que f' est une fonction continue par morceaux qui admet une transformée de Laplace. Alors :

$$\mathcal{L}\{f', s\} = sF(s) - f(0^+). \quad (1.26)$$

Ce résultat se généralisé par récurrence pour les dérivées d'ordres supérieurs n :

$$\mathcal{L}\{f^{(n)}, s\} = s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0). \quad (1.27)$$

Ainsi, prendre la transformée de Laplace d'une dérivée revient essentiellement à multiplier par s . On ne sera pas surpris du résultat réciproque : une division par s correspond à une intégration de la fonction

Théorème 1.3.2

Soit g la primitive de f qui s'annule en 0, alors

$$\mathcal{L}\{g, s\} = \mathcal{L}\left\{\int_0^t f(r)dr, s\right\} = \frac{F(s)}{s}.$$

Venons en maintenant au propriétés liées au produit de convolution.

Définition 1.3.3. On appelle convolution des deux fonctions f et g la fonction h définie par l'intégrale :

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(s)g(t-s)ds = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t-s)g(s)ds.$$

Soit la notation :

$$h = f * g = g * f. \quad (1.28)$$

Proposition 1.3.4

L'existence de la fonction h (1.28) est assurée dans les cas suivants :

1. f et g sont localement intégrables et nulles en dehors d'un intervalle fini ;
2. $|f|$ est intégrable sur \mathbb{R} et $|g|$ est bornée ;
3. f et g sont à carré intégrable sur \mathbb{R} ;
4. f et g sont localement intégrables et nulles pour $t < 0$. Alors $g(x - t)$ est nulle pour $t > x$, et il reste :

$$(f * g)(x) = \int_0^x f(t)g(x - t)dt. \quad (1.29)$$

Théorème 1.3.5

Soient f et g deux fonctions causales qui admettent des transformées de Laplace ; alors :

$$\mathcal{L}\{f * g; s\} = F(s)G(s). \quad (1.30)$$

1.3.3 Exemple d'équation intégrale d'Abel

L'équation intégrale d'Abel est bien étudiée et il existe de nombreuses sources consacrées à ses applications dans différents domaines. Traitons à titre d'exemple le cas de l'inversion d'Abel qui va être une bonne introduction à la dérivation fractionnaire à travers la transformée de Laplace.

On considère l'équation intégrale suivante :

$$\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} y(s) ds = f(t). \quad (1.31)$$

Supposons que y et f sont des fonctions continues qui admettent des transformées de Laplace Y et F respectivement. L'intégrale (1.31) peut s'écrire comme un produit de convolution :

$$\frac{1}{\sqrt{t}} H(t) * y(t) = f(t).$$

En appliquant la transformée de Laplace à la convolution ci-dessus, on aura

$$F(s) = \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot Y(s) \Leftrightarrow Y(s) = \sqrt{\frac{s}{\pi}} \cdot F(s).$$

On remarquera que la fonction $s \rightarrow \sqrt{s}$ ne tend pas vers 0 lorsque $s \rightarrow +\infty$, elle ne peut donc pas être la transformée de Laplace d'une fonction. Cependant, en divisant par s , on aura :

$$\frac{Y(s)}{s} = \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \cdot F(s) = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\pi}{s}} \cdot F(s).$$

En utilisant à nouveau la transformée de Laplace d'un produit de convolution, on aura :

$$\int_0^t y(s) ds = \frac{1}{\pi} \frac{H(t)}{\sqrt{t}} * H(t)f(t) = \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

En dérivant par rapport à t pour obtenir y :

$$y(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

On peut aller un peu plus loin si f est dérivable. Comme la fonction $t \rightarrow (t-s)^{-1/2}$ est singulière pour $t=s$, il convient d'abord d'intégrer par parties. Posons

$$I(t) = \int_0^t \frac{f(s)}{\sqrt{t-s}} ds;$$

on trouve

$$I(t) = 2\sqrt{t}f(0) + 2 \int_0^t \sqrt{t-s} f'(s) ds,$$

puis en dérivant cette expression :

$$I'(t) = \frac{f(0)}{\sqrt{t}} + 2 \lim_{s \rightarrow t} \sqrt{t-s} f'(s) + \int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

Finalement, on a

$$y(t) = \frac{f(0)}{\pi\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{f'(s)}{\sqrt{t-s}} ds.$$

1.4 Intégrale et dérivée fractionnaires

1.4.1 Dérivation d'ordre un demi

La notion de dérivation d'ordre un demi remonte à Leibniz et Hopital à la fin du 17^{ème} siècle . On pourrait penser que cette recherche de semi dérivation est une question de mathématiques pures sans intérêt pour l'ingénieur. Cependant, on peut donner un exemple simple de mécanique des fluides qui montre bien comment la dérivée d'ordre un demi apparaît tout naturellement quand on veut expliciter un flux de chaleur sortant latéralement d'un écoulement fluide en fonction de l'évolution temporelle de la source interne.

En effet, considérons le problème de la chaleur suivant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(t), t > 0, x \geq 0 \quad (1.32)$$

$$u(0, t) = u(x, 0) = 0 \quad (1.33)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(t, x) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty. \quad (1.34)$$

Le flux de la chaleur $\phi(t)$ à travers une surface, d'après la loi de Fourier, est donné par la formule suivante :

$$\phi(t) = -\mu \frac{\partial u}{\partial x}(0, t), t > 0.$$

En utilisant la transformée de Laplace, on aura

$$\phi(t) = -\sqrt{\mu}(\rho * f)(t), \quad (1.35)$$

où

$$\rho(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} H(t),$$

avec H étant la fonction de Heaviside.

En effet. Soit $U(x,s)$ la transformée de Laplace de la solution $u(x,t)$. D'après la formule (1.26), la dérivée en temps est donnée par :

$$\mathcal{L}\left\{\frac{\partial u}{\partial t}, s\right\} = sU(x,s) - u(x,0).$$

Alors le problème (1.32)-(1.34) s'écrit simplement :

$$sU - \mu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = F \quad (1.36)$$

$$U(0,s) = 0 \quad (1.37)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(s,x) \rightarrow 0 \text{ si } x \rightarrow +\infty, \quad (1.38)$$

où F est la transformée de Laplace de f . La solution du système ci-dessus est donnée par :

$$U(x,s) = \frac{1}{s}F(s) + \eta_1 \exp\left(\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right) + \eta_2 \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right).$$

En tenant compte des conditions aux limites $x = 0$ et x en ∞ , cette dernière ne permet pas l'existence d'une solution exponentiellement croissante en x , donc on a nécessairement $\eta_1 = 0$. Finalement, on a

$$U(x,s) = \frac{1}{s}F(s) \left[1 - \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right)\right].$$

On peut alors dériver cette expression par rapport à x :

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,s) = \frac{1}{\sqrt{\mu s}}F(s) \exp\left(-\sqrt{\frac{s}{\mu}}x\right).$$

Si on met $x = 0$, on aura

$$\mathcal{L}(\phi, s) = -\sqrt{\frac{\mu}{s}} F(s). \quad (1.39)$$

En utilisant la transformée de Laplace d'un produit de convolution on aura

$$\phi(t) = -\sqrt{\mu}(\rho * f)(t),$$

où

$$\rho(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{\sqrt{s}}, t \right\} = \frac{H(t)}{\sqrt{\pi t}}.$$

Nous écrivons le flux ϕ ;

$$\phi(t) = -\sqrt{\mu} \int_0^t \frac{(t-s)^{1/2-1}}{\Gamma(1/2)} f(s) ds.$$

Définition 1.4.1. Soit f une fonction définie sur $[0, \infty)$, On appelle intégrale d'ordre un demi et on note $I^{1/2}f$ la fonction causale définie par

$$(I^{1/2}f)(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s) ds, \text{ si } t > 0. \quad (1.40)$$

Maintenant, d'après ce qu'ont proposé Riemann et Liouville à la fin du XIX^{ième} siècle, si on dérive l'intégrale d'ordre un demi (1.40), on obtient une demi dérivée :

$$\begin{aligned} D^{1/2}f(t) &= \frac{d}{dt}(I^{1/2}f)(t) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s) ds \right), \text{ si } t > 0. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Proposition 1.4.2

Soit f une fonction causale dérivable sur $]0, +\infty[$, alors

$$D^{1/2}f(t) = \frac{f(0^+)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{df}{ds}(s) \frac{ds}{\sqrt{\pi(t-s)}}.$$

Preuve. La règle bien connue de la différenciation d'une intégrale dépendant d'un paramètre avec la limite supérieure dépendant du même paramètre est donnée par :

$$\frac{d}{dt} \int_0^t G(t,s) ds = \int_0^t \frac{\partial G(t,s)}{\partial t} ds + G(t,t) \quad (1.42)$$

En utilisant cette formule (1.42) et à partir de (1.41), on aura :

$$\begin{aligned} D^{1/2}f(t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{t-s}} f(s) ds \right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{s}} f(t-s) ds \right) \\ &= \frac{f(0^+)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{\pi s}} \frac{\partial}{\partial t} (f(t-s)) ds \\ &= \frac{f(0^+)}{\sqrt{\pi t}} + \int_0^t \frac{df}{ds}(s) \frac{ds}{\sqrt{\pi(t-s)}} \end{aligned}$$

□

Nous remarquons que, si f est une fonction dérivable sur $]0, +\infty[$ et $f(0^+) = 0$, on peut remplacer $D^{1/2}f(t)$ par $\left(\int_0^t \frac{df}{ds}(s) \frac{ds}{\sqrt{\pi(t-s)}} \right)$. D'ailleurs, si f est une fonction constante, le terme $D^{1/2}f$ se réduit à zéro, une propriété qu'on est en droit de l'attendre d'une semi-dérivée, ce qui n'est pas le cas pour la définition de Riemann et Liouville parce qu'on aurait alors $D^{1/2}f(t) = \frac{f(0^+)}{\sqrt{\pi t}}$. Caputo [3] a proposé une nouvelle façon de semi-dérivée donnée par :

$${}^c D^{1/2}f(t) = \int_0^t \frac{df}{ds}(s) \frac{ds}{\sqrt{\pi(t-s)}}. \quad (1.43)$$

1.4.2 Propriétés de la demi-dérivée

Nous considérons seulement les fonctions causales, dérivables sur $]0, +\infty[$ qui sont nulles au point zéro et vérifient

$$D^{1/2}f = {}^c D^{1/2}f.$$

1. Quelques dérivées d'ordre un demi de la fonction Heaviside.

$$D^{1/2}(tH(t)) = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}H(t).$$

$$D^{1/2}(\sqrt{t}H(t)) = \frac{\sqrt{t}}{2}H(t).$$

2. La dérivée d'ordre un demi est l'inverse de l'intégrale d'ordre un demi.

$$[(I^{1/2} \circ D^{1/2})u](t) = [(D^{1/2} \circ I^{1/2})u](t) = u(t).$$

3. La dérivée d'ordre un demi est une racine carrée de la dérivée usuelle.

$$[(D^{1/2} \circ D^{1/2})u](t) = \frac{du}{dt}(t).$$

1.4.3 Formule intégrale de Riemann-Liouville

Pour les fonctions causales nulles en 0, l'inverse de l'opérateur de dérivation $D = \frac{d}{dt}$ est l'opérateur d'intégration I :

$$Df(t) = \frac{df}{dx}(t) = g(t) \text{ avec } f(0) = 0 \Leftrightarrow f(t) = Ig(t) = \int_0^t g(s)ds. \quad (1.44)$$

De même, pour les fonctions causales avec des conditions initiales nulles, l'inverse de la dérivation $n^{\text{ième}}$ est définie par le n itéré de l'opérateur I précédent. Ainsi la fonction f_2 telle que $f_2(0) = f_2'(0) = 0$ avec $f_2'' = g$ est définie par

$$f_2(t) = I^2g(t) = \int_0^t \left(\int_0^s g(x)dx \right) ds. \quad (1.45)$$

En permutant l'ordre d'intégration, on obtient :

$$I^2g(t) = \int_0^t g(x) \left(\int_x^t ds \right) dx = \int_0^t (t-x)g(x)dx.$$

Plus généralement on montre que le $n^{\text{ième}}$ itéré de l'opérateur I peut s'écrire à l'aide de la formule intégrale de Cauchy :

$$I^n g(t) = \int_0^t \frac{(t-x)^{n-1}}{(n-1)!} g(x) dx. \quad (1.46)$$

Ainsi la fonction f_n telle que $f_n(0) = f'_n(0) = \dots = f_n^{(n-1)}(0) = 0$ avec $f_n^{(n)} = g$ est définie par

$$f_n(t) = I^n g(t). \quad (1.47)$$

Cette formule peut être interprétée par le produit de convolution de la fonction causale g avec la fonction causale

$$H_n(t) = \frac{t_+^{n-1}}{(n-1)!} = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} H(t)$$

Pour $n = 0$ ou 1 , on a $H_0 = \delta$ alors que δ est la distribution de Dirac en 0 et H_1 n'est autre que la fonction de Heaviside. En utilisant la fonction Gamma, on a

$$H_n(t) = \frac{t_+^{n-1}}{\Gamma(n)} \text{ pour } t > 0 \quad (1.48)$$

et

$$I^n g = H_n * g.$$

Définition 1.4.3. Soit $n \in \mathbb{N}$. L'intégrale à gauche d'ordre n de g , que l'on note $I^n g$ est défini par

$$(I^n g)(t) = (H_n * g)(t) \text{ pour tout } t > 0.$$

Comme la fonction Gamma peut être prolongée à l'ensemble du plan complexe privé des nombres entiers négatifs, on peut définir une fonction causale $H_\alpha(t)$ par

$$H_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} \text{ pour } \alpha > 0. \quad (1.49)$$

Il est alors naturel de définir une intégrale d'ordre α de g .

Définition 1.4.4. Soit g une fonction causale et α un réel strictement positif. On appelle intégrale d'ordre α et on note $I^\alpha g$ la fonction définie par

$$(I^\alpha g)(t) = (H_\alpha * g)(t) \text{ pour tout } t > 0. \quad (1.50)$$

Quand α tend vers 0, on aura d'après la limite au sens distribution :

$$(I^0 g)(t) = (\delta * g)(t).$$

Proposition 1.4.5

Soit $\alpha, \beta > 0$ et g une fonction causale intégrable. Alors,

$$I^\alpha(I^\beta g) = I^\beta(I^\alpha g) = I^{\alpha+\beta} g. \quad (1.51)$$

Preuve. Nous avons par définition :

$$\begin{aligned} I^\alpha(I^\beta g) &= H_\alpha * (I^\beta g) \\ &= H_\alpha * (H_\beta * g). \end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des fonctions spéciales, on peut déduire d'après la relation (1.6) que :

$$I^\alpha(I^\beta g) = I^{\alpha+\beta} g. \quad (1.52)$$

car

$$H_\alpha * H_\beta = H_{\alpha+\beta}.$$

D'où, on a (1.51). □

Proposition 1.4.6

Soit $\alpha > 0, n \in \mathbb{N}$ et g est une fonction causale intégrable. Alors

$$\frac{d^n}{dt^n}(I^\alpha g)(t) = (I^{\alpha-n} g)(t). \quad (1.53)$$

Preuve. En utilisant la définition de l'intégrale d'ordre α , on aura pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dt^n}(I^\alpha g)(t) &= \frac{d^n}{dt^n}(H_\alpha * g)(t) \\ &= \left(\frac{d^n}{dt^n} H_\alpha * g\right)(t) \\ &= (H_{\alpha-n} * g)(t) \\ &= (I^{\alpha-n} g)(t). \end{aligned}$$

D'où la conclusion de la preuve. □

Prenons l'équation (1.53) pour $\alpha = 0$. On sait que dans toute algèbre de convolution, la distribution de Dirac joue le rôle d'élément unité, i.e.

$$\langle T * \delta, \varphi \rangle = \langle T(x), \langle \delta(y), \varphi(x+y) \rangle \rangle = \langle T(x), \varphi(x) \rangle,$$

et d'une façon générale, on a :

$$T * \delta^{(n)} = T^{(n)}, \quad n \in \mathbb{N}. \quad (1.54)$$

Sachant que la dérivée $n^{\text{ième}}$ au sens distribution est donnée par la formule suivante :

$$\langle T^{(n)}, \varphi \rangle = (-1)^n \langle T, \varphi^{(n)} \rangle.$$

Par conséquent,

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = g^{(n)}(t) = H_{-n}(t) * g(t), \quad (1.55)$$

où $H_{-n}(t)$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la distribution de Dirac

$$H_{-n}(t) = \frac{t_+^{-n-1}}{\Gamma(-n)} = \delta^{(n)}(t),$$

ou bien

$$\frac{d^n}{dt^n} g(t) = \int_0^t \delta^{(n)}(t-s) g(s) ds, \quad t > 0.$$

1.4.4 Dérivations d'ordre α

On aimerait pouvoir dire que les dérivées d'ordre $\alpha \in \mathbb{R}^+$ sont obtenues par une convolution avec $H_{-\alpha}$:

$$D^\alpha g(t) := H_{-\alpha}(t) * g(t) = \frac{1}{\Gamma(-\alpha)} \int_0^t \frac{g(s)}{(t-s)^{\alpha+1}} ds, \quad \alpha \in \mathbb{R}^+, \quad (1.56)$$

où

$$D^0 g(t) := \delta(t) * g(t) = g(t).$$

Mais au voisinage $t = 0$, la fonction $H_{-\alpha}(t) = \frac{t_+^{-\alpha-1}}{\Gamma(-\alpha)}$ n'est pas intégrable quand $\alpha \geq 0$. Donc pour obtenir une définition de la dérivée fractionnaire qui est toujours valable pour les fonctions classiques, nous devons régulariser l'intégrale divergente (1.56) d'une certaine façon. A cet effet, nous considérons le nombre entier n ;

$$n = [\alpha] + 1 \text{ si } \alpha \notin \mathbb{N} \text{ et } n = \alpha \text{ si } \alpha \in \mathbb{N}, \quad (1.57)$$

et écrivons d'après la Proposition 1.4.6 :

$$\begin{aligned} H_{-\alpha}(t) * g(t) &= [H_{-n}(t) * H_{n-\alpha}(t)] * g(t) \\ &= H_{-n}(t) * [H_{n-\alpha}(t) * g(t)] \\ &= D^n I^{n-\alpha} g(t). \end{aligned} \quad (1.58)$$

$$\begin{aligned} H_{-\alpha}(t) * g(t) &= [H_{-n}(t) * H_{n-\alpha}(t)] * g(t) \\ &= H_{n-\alpha}(t) * [H_{-n}(t) * g(t)] \\ &= I^{n-\alpha} D^n g(t). \end{aligned} \quad (1.59)$$

En conséquence, nous avons obtenu deux définitions régulières alternatives pour D^α :

Définition 1.4.7. La dérivée au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha, n - 1 < \alpha \leq n$ est définie par

$$D^\alpha g(t) = D^n I^{n-\alpha} g(t) = \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} g(s) ds. \quad (1.60)$$

Définition 1.4.8. La dérivée au sens de Caputo d'ordre $\alpha, n - 1 < \alpha \leq n$ est définie par

$${}^c D^\alpha g(t) = I^{n-\alpha} D^n g(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n g}{dt^n}(s) ds. \quad (1.61)$$

En utilisant la commutativité du produit de convolution et en dérivant sous le signe intégral on obtient :

$$D^\alpha g = {}^c D^\alpha g + \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(0^+) H_{k+1-\alpha} \text{ pour } n-1 < \alpha \leq n, \quad (1.62)$$

Remarquons dans le cas où g n'est pas nulle en 0, la dérivation au sens de Riemann-Liouville fait intervenir une fonction $H_{n-\alpha}$ qui tend vers l'infini en $t = 0$. Par contre pour g a n -dérivées continue au voisinage de 0, la dérivée au sens de Caputo [4] est continue en 0 et tend vers 0 en $t = 0$, ce qui nous amène à dire que la définition 1.4.8 est plus appropriée pour des problèmes d'intérêt physique où les conditions initiales classiques sont exprimées en termes de dérivés d'ordre entiers.

1.4.5 Propriétés et compositions des opérateurs fractionnaires

Parmi les avantages du calcul fractionnaire, on généralise certaines propriétés des dérivées et intégrales classiques, par exemple la linéarité des opérateurs d'intégration et de dérivation usuelle s'étend au cas fractionnaire. Jusqu'à présent, nous avons considéré les intégrations et les dérivées fractionnaires avec la borne inférieure 0. Cependant, il est aussi possible de considérer des dérivées fractionnaires avec une borne inférieure a fixée et varier la borne supérieure t ($a < t$).

Remarque 1.4.9. Supposons que la fonction f est définie dans l'intervalle $[a, b]$, où a et b peuvent éventuellement être infinies. Alors la dérivée fractionnaire avec la borne inférieure à l'extrémité gauche de l'intervalle $[a, b]$, ${}_a D_t^\alpha f$ est appelée la dérivée fractionnaire à gauche et la dérivée fractionnaire avec la borne supérieure à l'extrémité droite de l'intervalle $[a, b]$, ${}_t D_b^\alpha f$ est appelée la dérivée fractionnaire à droite.

1.4.6 Fonctions absolument continues

Définition 1.4.10. On note par $AC[a, b]$, l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f qui sont des primitives de fonctions Lebesgue-sommables i.e.

$$f \in AC[a, b] \Leftrightarrow \exists \varphi \in L^1(a, b) \text{ telle que } f = c + \int_a^t \varphi(s) ds.$$

Définition 1.4.11. On note par $AC^n[a, b]$, $n \in \mathbb{N}^*$, l'espace des fonctions absolument continues sur $[a, b]$ constitué des fonctions f à valeurs dans \mathbb{C} qui ont des dérivées continues sur $[a, b]$ jusqu'à l'ordre $n - 1$ et telle que $f^{(n-1)} \in AC[a, b]$ i.e.

$$AC^n[a, b] = \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f^{(k)} \in C[a, b], k = 0 \dots n - 1, f^{(n-1)} \in AC[a, b] \right\}.$$

Théorème 1.4.12 ([28])

Soit $\alpha > 0$ et soit n donné par (1.57). Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire de Caputo existe presque partout sur $[a, b]$.

Théorème 1.4.13 ([28])

Soit $\alpha > 0$ et soit n donné par (1.57). Si $f \in AC^n[a, b]$, alors la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville existe presque partout sur $[a, b]$ et elle est représentée sous la forme

$$({}_a D_t^\alpha f)(t) = \int_0^t \frac{(t-s)^{n-\alpha-1}}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n f}{dt^n}(s) ds + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\alpha}$$

1.4.7 Propriétés

1. Soit $\alpha > 0, \beta > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors :

$${}_a I_t^\alpha ({}_a I_t^\beta f) = {}_a I_t^{\alpha+\beta} f, \text{ voir Proposition 1.4.5.}$$

2. Soit $\alpha > 0$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f) = f.$$

3. Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et $f \in AC^n([a, b])$. Alors :

$${}_a I_t^\alpha ({}_a^c D_t^\alpha f)(t) = f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t-a)^k}{k!} f^{(k)}(a).$$

4. Soit $0 < \alpha < 1$ et $f \in AC([a, b])$. Alors :

$${}_a I_t^\alpha ({}_a D_t^\alpha f) = {}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\alpha f) = f.$$

5. Soit $0 < \alpha < \beta$ et $f \in L^1([a, b])$. Alors :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a I_t^\beta f) = {}_a I_t^{\beta-\alpha} f.$$

6. Soit $\alpha > 0, n = [\alpha] + 1$ et si $p \in \mathbb{N}$. Alors :

$$\frac{d^p}{dt^p} {}_a D_t^\alpha = {}_a D_t^{\alpha+p}.$$

De même,

$${}_c D_t^\alpha \frac{d^p}{dt^p} = {}_c D_t^{\alpha+p}.$$

7. Soit $\alpha > 0, \beta > 0, m = [\alpha] + 1, n = [\beta] + 1$ et $p = [\alpha + \beta] + 1$. Si $f \in C_+^p([a, b])$, alors :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\beta f) = {}_a D_t^{\alpha+\beta} f.$$

De même,

$${}_c D_t^\alpha ({}_c D_t^\beta f) = {}_c D_t^{\alpha+\beta} f.$$

8. Soit $0 < \alpha < 1, k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C_+^k([a, b])$. Alors :

$$({}_a D_t^\alpha)^k f = {}_a D_t^{\alpha k} f.$$

9. Soit Si $0 < \alpha < 1/2$ et $f \in AC^2([a, b])$. Alors :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\alpha f) = {}_a D_t^{2\alpha} f.$$

10. Soit Si $\alpha = 1/2$ et $f \in AC^2([a, b])$. Alors :

$${}_a D_t^{1/2} ({}_a D_t^{1/2} f) = f'.$$

11. Soit Si $1/2 < \alpha < 1$ et $f \in AC^2([a, b])$. Alors :

$${}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^\alpha f)(t) = ({}_a D_t^{2\alpha} f)(t) + \frac{(t-a)^{1-2\alpha}}{\Gamma(2-2\alpha)} f'(a).$$

Toutes les démonstrations se trouvent dans [28].

1.4.8 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville

Nous allons commencer avec la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ de Riemann-Liouville définie par (1.50)

$$(I^\alpha f)(t) = f(t) * H_\alpha(t), \quad (1.63)$$

où la transformée de Laplace de la fonction H_α est

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}; s\right\} = s^{-\alpha}. \quad (1.64)$$

Par conséquent, si nous utilisons la transformée de Laplace du produit de convolution (1.30), nous obtiendrons la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville

$$\mathcal{L}\{I^\alpha f; s\} = s^{-\alpha}F(s). \quad (1.65)$$

Passons maintenant à l'évaluation de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire Riemann-Liouville. A cette fin, nous l'écrivons sous la forme

$${}_0D_t^\alpha f(t) = g^{(n)}(t), \quad (1.66)$$

$$g(t) = f(t) * H_{n-\alpha}(t), \quad n-1 \leq \alpha \leq n, \quad (1.67)$$

La transformée de Laplace de cette dernière est déterminée par (1.65) :

$$G(s) = s^{-(n-\alpha)}F(s). \quad (1.68)$$

En utilisant la transformée de Laplace pour une dérivée d'ordre entier, nous obtenons :

$$\mathcal{L}\{g^{(n)}; s\} = s^n G(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k g^{(n-k-1)}(0). \quad (1.69)$$

D'après la définition de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura

$$g^{(n-k-1)}(t) = \frac{d^{n-k-1}}{dt^{n-k-1}} I^{n-\alpha} f(t) = {}_0 D_t^{\alpha-k-1} f(t). \quad (1.70)$$

En substituant (1.68) et (1.70) dans (1.69), nous obtenons l'expression finale suivante pour la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha > 0$:

$$\mathcal{L}\{{}_0 D_t^\alpha f; s\} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k [D_{0+}^{\alpha-k-1} f(t)]_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha \leq n. \quad (1.71)$$

Cette transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Riemann-Liouville est bien connue, voir [38, 39] . Cependant, son application pratique est limitée par l'absence de l'interprétation physique des valeurs limites des dérivées fractionnaires en la borne inférieure $t = 0$.

1.4.9 La transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire au sens de Caputo

Afin d'établir la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo, écrivons la dérivée de Caputo (1.61) sous la forme suivante :

$${}_0^c D_t^\alpha f(t) = I^{n-\alpha} g(t), \quad g(t) = f^{(n)}(t), \quad n-1 < \alpha \leq n.$$

En utilisant la formule (1.65) de la transformée de Laplace de l'intégrale fractionnaire de Riemann-Liouville, on aura

$$\mathcal{L}\{{}_0^c D_t^\alpha f; s\} = s^{-(n-\alpha)} G(s) \quad (1.72)$$

où

$$\begin{aligned} G(s) &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{n-k-1} f^{(k)}(0) \\ &= s^n F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^k f^{(n-k-1)}(0), \end{aligned} \quad (1.73)$$

d'après (1.27). En introduisant (1.73) dans (1.72), on arrive à la formule de la transformée de Laplace de la dérivée fractionnaire de Caputo :

$$\mathcal{L}\{ {}_0^c D_t^\alpha f; s \} = s^\alpha F(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), n-1 < \alpha \leq n. \quad (1.74)$$

Comme cette formule de la transformée de Laplace de la dérivée de Caputo induit les valeurs de la fonction f et ses dérivées en la borne inférieure $t = 0$, pour laquelle une certaine interprétation physique existe (par exemple, $f(0)$ est la position initiale, $f'(0)$ est la vitesse initiale, $f''(0)$ est l'accélération initiale), on peut espérer qu'elle pourrait être utile pour la résolution des problèmes appliqués conduisant aux équations différentielles fractionnaires à coefficients constants accompagnées de conditions initiales dans leur forme traditionnelle.

1.5 Conclusion

En pratique la dérivation fractionnaire est le plus souvent utilisée pour des fonctions causales. On a vu que la convolution avec la fonction $H_\alpha(t) = \frac{t_+^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$ pour $\alpha > 0$ correspond à une intégration d'ordre α . Il serait mieux d'écrire la dérivée d'ordre $\alpha > 0$ sous la forme :

$$({}_a D_t^\alpha g)(t) = (H_{-\alpha} * g)(t), t \geq a. \quad (1.75)$$

Mais malheureusement, la singularité de la fonction $H_{-\alpha}$ nous empêche de définir un produit de convolution au sens des fonctions. Cependant dans le cadre des distributions on peut définir la dérivation d'ordre $\alpha > 0$ par un produit de convolution au sens des distributions où $H_{-\alpha}$ définit une distribution singulière.

Pour $\alpha = n$ entier positif, on a $H_{-n} = \delta_a^{(n)}$ où $\delta_a^{(n)}$ est la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la distribution de Dirac en a . A partir de la formule (1.62) si $\alpha \rightarrow n$, on obtient

$${}_a D_t^n g = \frac{d^n g}{dt^n} + \sum_{k=0}^{n-1} g^{(k)}(a^+) \delta_a^{(n-k)}.$$

La formule ci-dessus est la dérivation au sens des distributions d'une fonction causale, n fois dérivable sur $[a, +\infty[$. En résumé, à partir de ce développement, on conclut que la dérivation au sens de Riemann-Liouville d'une fonction causale n'est autre qu'une généralisation de la dérivée aux sens des distributions tandis que la dérivation de Caputo est plutôt une généralisation de la dérivation ordinaire.

Chapitre 2

Solutions positives de l'équation d'oscillation

Au cours de ces dernières années, il y a eu une étude approfondie sur l'existence des solutions multiples concernant les problèmes aux limites pour les équations différentielles que ce soit avec des conditions aux limites locales ou non locales.

De nombreux articles comme [18, 51] ont considéré l'existence, la multiplicité et les résultats de non-existence concernant le problème périodique suivant

$$u''(t) - \omega^2 u(t) = \lambda g(t)f(u(t)), \quad u(a) = u(b), \quad u'(a) = u'(b), \quad (2.1)$$

en fonction du paramètre $\lambda > 0$. Les auteurs cherchent des solutions via l'opérateur intégral de Hammerstein.

$$u(t) = \lambda \int_a^b G(t,s)g(s)f(u(s))ds, \quad (2.2)$$

où le noyau G est la fonction de Green associée à l'opérateur différentiel $\left(\frac{d^2}{dt^2} - \omega^2 I\right)$ avec les conditions aux limites données, I étant l'opérateur identité. Nous soulignons que la fonction de Green G n'a pas de zéro pour tous $t \in [a, b]$ dans ce type de problèmes aux limites, par exemple la fonction de Green associée au (2.1) est strictement positive et cette propriété aide les auteurs à définir un cône typique ainsi caractérisé par

$$\beta_1 = \min_{a \leq s \leq b, a \leq t \leq b} G(t,s) > 0, \quad (2.3)$$

ensuite établir l'existence de solutions sur ce cône. John R. Graef et al. dans [19] ont considérés le problème périodique suivant :

$$u''(t) + a(t)u(t) = g(t)f(u(t)), u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi), \quad (2.4)$$

associé à une fonction de Green nulle sur un ensemble de mesure nulle, les auteurs exigent :

$$\beta_2 = \min_{a \leq s \leq b} \int_a^b G(t,s)dt > 0 \quad (2.5)$$

pour définir un nouveau cône.

2.1 Exemple d'une équation différentielle d'oscillation

Considérons le problème périodique suivant :

$$\begin{cases} u''(t) + \omega^2 u(t) = f(t, u(t)), 0 \leq t \leq 2\pi, \\ u(0) = u(2\pi), u'(0) = u'(2\pi), \end{cases} \quad (2.6)$$

où ω est une constante, si $\omega \notin \mathbb{N}^*$ alors la fonction de Green du problème (2.6) est donnée par

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{\sin \omega(t-s) + \sin \omega(2\pi - t + s)}{2\omega(1 - \cos 2\omega\pi)}, 0 \leq s \leq t \leq 2\pi, \\ \frac{\sin \omega(s-t) + \sin \omega(2\pi - s + t)}{2\omega(1 - \cos 2\omega\pi)}, 0 \leq t \leq s \leq 2\pi. \end{cases} \quad (2.7)$$

Rechercher la solution de (2.6) revient à chercher un point fixe de l'opérateur suivant :

$$Tu(t) = \int_0^{2\pi} G(t,s)f(s,u(s))ds.$$

Nous montrons avec le principe de contraction de Banach l'unicité de la solution. Si f est k -lipschitzienne, alors (2.6) a une seule solution si $k < \frac{1}{\gamma}$ où

$$\gamma = \max_{0 \leq t \leq 2\pi} \int_0^{2\pi} G(t,s)ds.$$

Soit

$$\widehat{G}(x) = \frac{\sin \omega x + \sin \omega(2\pi - x)}{2\omega(1 - \cos 2\omega\pi)}, x \in [0, 2\pi].$$

Alors, \widehat{G} est croissante sur $[0, \pi]$, décroissante sur $[\pi, 2\pi]$ et $G(t,s) = \widehat{G}(|t-s|)$. D'où

$$\frac{\sin 2\omega\pi}{2\omega(1 - \cos 2\omega\pi)} = \widehat{G}(0) \leq G(t,s) \leq \widehat{G}(\pi) = \frac{\sin \omega\pi}{\omega(1 - \cos 2\omega\pi)}, t,s \in [0, 2\pi].$$

De plus, $G(t, s)$ est positive sur $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ pour $0 < \omega < 1/2$ et lorsque la fonction de Green est positive, on peut toujours trouver son minimum β_1 et son maximum M . Définissons un cône K comme suit

$$K = \left\{ u \in C[0, 2\pi], \min_{0 \leq t \leq 2\pi} u(t) \geq \frac{\beta}{M} \|u\| \right\}. \quad (2.8)$$

Ensuite, par les théorèmes de point fixe, nous pouvons établir l'existence et la multiplicité de solutions positives sur K , voir-[1, 9, 23, 41, 46, 50]. Cependant, si $\omega = 1/2$, alors la fonction de Green est nulle pour $t = s$; $\beta_1 = 0$ va nous empêcher de définir le cône K donné par (2.8).

En résumé, dans le cas où la fonction de Green associée au problème posé est nulle sur un ensemble de mesure nulle, on ne peut pas travailler sur le cône K . Cependant, (2.5) est vérifiée, ce qui nous amène à définir le cône E ,

$$E = \left\{ u \in C[0, 2\pi], \int_0^{2\pi} u(t) \geq \frac{\beta_2}{M} \|u\| \right\},$$

dans lequel on peut appliquer les théorèmes de point fixe où

$$M = \max_{0 \leq s \leq 2\pi, 0 \leq t \leq 2\pi} G(t, s)$$

et β_2 est donnée par (2.5), voir-[19].

2.2 Equation d'oscillation fractionnaire

Les processus impliquant les phénomènes de base de la relaxation, la diffusion, les oscillations et la propagation des ondes sont d'une grande pertinence en physique ; d'un point de vue mathématique, ils sont connus pour être régis par des équations différentielles simples d'ordre 1 et 2 dans le temps. L'introduction aux dérivées fractionnaires d'ordre $\alpha \in (0, 1]$ ou $\alpha \in (1, 2]$ nous amène à des processus que nous pouvons comparer dans la physique mathématique à des phénomènes fractionnaires. Notre objectif est de fournir une description générale de ces phénomènes pour adopter une approche mathématique dans le cadre du calcul fractionnaire. L'analyse est effectuée par la transformée de Laplace et conduit à certaines fonctions spéciales à une seule variable, qui généralisent de façon directe les caractéristique des fonctions des phénomènes de base, à savoir l'exponentielle et la gaussienne.

La décomposition en éléments simples de la fonction de transfert d'un système linéaire à coefficients constants fait apparaître en parallèle des composants de deux types :

1. Relaxation :

$$u' + \omega u = q(t).$$

2. Oscillation :

$$u'' + \omega u = q(t).$$

On pourra aussi parler de

$$D^\alpha u + \omega u = q(t) \begin{cases} \text{Relaxation fractionnaire si } 0 < \alpha \leq 1 \\ \text{Oscillation fractionnaire si } 1 < \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Considérons le l'équation fractionnaire d'oscillation suivante :

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha u(t) - \omega^2 u(t) = F(t, u(t)), 0 < t \leq 1, \omega \in \mathbb{R}, \\ {}_0D_t^{\alpha-i} u(t)|_{t=0} = 0, i = 1, 2. \end{cases}, \quad (2.9)$$

où $F(t, u) : [0, 1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et ${}_0D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann-Liouville d'ordre $\alpha \in (1, 2)$. Ces équations sont des équations d'oscillation fractionnaires et généralisent beaucoup d'équations différentielles non linéaires étudiées par de nombreux chercheurs comme J. R. L Webb et M. Zima dans [48].

Lorsque nous inversons les équations (2.9) sous forme d'un opérateur intégral de Hammerstein (2.2), nous obtenons une fonction de Green nulle sur un certain ensemble et perdons les propriétés (2.3), (2.5). En raison de ce fait l'étude de l'existence avec l'opérateur de Hammerstein devient plus compliquée. Pour ce faire, nous utilisons certains des résultats sur les problèmes aux conditions initiales et définissons un opérateur de type Hammerstein-Volterra $\mathbb{E}_{\alpha, \omega; a}$, cas particulier de l'opérateur donné par (1.12),

$$(\mathbb{E}_{\alpha, \omega; a} \varphi)(x) = \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega(x-t)^\alpha) \varphi(t) dt, \quad (x > a), \quad (2.10)$$

pour établir nos résultats.

2.3 Unicité de la solution

Dans cette section, on va démontrer l'unicité de la solution via le Théorème de contraction de Banach. Tout d'abord, on considère le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha u(t) - \omega^2 u(t) = y(t), 0 < t \leq 1, \omega \in \mathbb{R}^*, \\ {}_0D_t^{\alpha-i} u(t)|_{t=0} = 0, i = 1, 2. \end{cases}, \quad (2.11)$$

En appliquant la formule de Laplace (1.71) à les équations (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} s^\alpha U(s) - \omega^2 U(s) &= Y(s) \\ &\Downarrow \\ (s^\alpha - \omega^2)U(s) &= Y(s) \\ &\Downarrow \\ U(s) &= Y(s) \times \frac{1}{(s^\alpha - \omega^2)} \end{aligned}$$

Par la transformée de Laplace inverse, on obtient

$$u(t) = \phi_\alpha(t) * y(t), 0 \leq t \leq 1,$$

où $\phi_\alpha(t)$ est une fonction causale, définie comme suit

$$\phi_\alpha(t) := t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2 t^\alpha) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{(s^\alpha - \omega^2)}; t \right\}.$$

Ainsi, la solution de (2.11) est donnée par

$$u(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2 (t-s)^\alpha) y(s) ds, 0 \leq t \leq 1. \quad (2.12)$$

Dans [29], par l'application de la méthode des approximations successives, A. Kilbas et al. ont prouvé que pour $y \in C[0,1]$, le problème fractionnaire aux conditions initiales (2.11) a une seule solution $u \in C[0,1]$ donnée par l'équation intégrale de type Volterra (2.12).

Soit $X = C[0,1]$ et on définit l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0} : X \rightarrow X$ comme suit :

$$(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0} u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2 (t-s)^\alpha) F(s, u(s)) ds. \quad (2.13)$$

De là, nous voyons que, résoudre le problème fractionnaire (2.9), revient à prouver que l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2,0}$ admet un point fixe dans X . Prenons en considération que la fonction de Mittag-Leffler est continue sur $[0,1]$. Alors il existe un réel positif L tel que

$$\left| E_{\alpha,\alpha}(\omega^2 t^\alpha) \right| \leq L \text{ pour tout } t \in [0,1]. \quad (2.14)$$

Théorème 2.3.1

Supposons qu'il existe $\mu > 0$, tel que

$$\|F(\cdot, u_1(\cdot)) - F(\cdot, u_2(\cdot))\| \leq \mu \|u_1 - u_2\|, \text{ pour tout } u_1, u_2 \in X, \quad (2.15)$$

où

$$\frac{\mu L}{\alpha} < 1, \quad (2.16)$$

alors le problème (2.9) a une solution unique u dans X .

Preuve. Nous allons prouver que l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2,0}$ défini par (2.13) est une contraction dans X .

En effet, pour tout $u_1, u_2 \in X$, et en tenant compte (2.15) et (2.14), on a :

$$\begin{aligned} |(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2,0}u_1)(t) - (\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2,0}u_2)(t)| &= \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) F(s, u_1(s)) ds \right. \\ &\quad \left. - \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) F(s, u_2(s)) ds \right| \\ &\leq \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) \|F(\cdot, u_1(\cdot)) - F(\cdot, u_2(\cdot))\| ds \\ &\leq \frac{\mu L}{\alpha} \|u_1 - u_2\|. \end{aligned}$$

D'après (2.16), l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2,0}$ est une contraction. Ainsi, par le principe de contraction de Banach, on conclut que le problème (2.9) a une solution unique u dans X . \square

2.4 Existence de la solution positive

Récemment, les cas sous linéaire et super linéaire ont été utilisés pour étudier l'existence de solutions, voir-[18, 20, 49, 51]. Dans cette section, le cas sous linéaire sera

notre outil pour établir l'existence de solutions positives non triviales. Les hypothèses utilisées dans cette section sont les suivantes :

- (a) $F(t, u) = g(t)f(u)$; $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et $g \in C([0, 1], \mathbb{R}_+^*)$.
- (b) f est une fonction convexe décroissante avec $f(0) \neq 0$.

L'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} : X \rightarrow X$ devient

$$(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0}u)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous introduisons la notation suivante :

$$f_0 := \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(u)}{u} \quad \text{et} \quad f_\infty := \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f(u)}{u}.$$

Le cas :

1. $f_0 = \infty$ et $f_\infty = 0$ est appelé le cas sous linéaire.
2. $f_0 = 0$ et $f_\infty = \infty$ est appelé le cas super linéaire.

Théorème 2.4.1

Supposons que les hypothèses (a) et (b) sont vérifiées. Alors le problème fractionnaire (2.9) a au moins une solution positive u appartenant à X dans le cas sous linéaire.

Dans le reste nous considérons le cône K défini comme suit :

$$K = \{u \in X : u(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Lemme 2.4.2

$\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Preuve. Comme f et g sont continues et positives, on obtient que $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0}(K) \subset K$ et $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} : K \rightarrow K$ est continue.

Soit $M \subset K$ un ensemble borné i.e. il existe une constante l positive telle que $\|u\| \leq l$ pour tout $u \in M$ et soit aussi $\rho = \max_{0 \leq u \leq l} f(u)$, alors pour tout $u \in M$ on a,

$$\begin{aligned}
 |(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)(t)| &= \left| \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \right| \\
 &\leq \rho \|g\| L \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} ds \\
 &\leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha} t^\alpha.
 \end{aligned}$$

D'où,

$$\|(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)\| \leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha}.$$

Par conséquent, $(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0})(M)$ est uniformément borné.

Maintenant, on prouve que l'ensemble $(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0})(M)$ est équicontinu. Soit $\delta = \frac{1}{2} \left(\frac{\alpha \varepsilon}{\rho \|g\| L} \right)^{\frac{1}{\alpha}}$, alors pour tout $u \in M$, $\varepsilon > 0$, et quand $(t_2 - t_1) < \delta$, $0 < t_1 < t_2 < 1$. On a

$$\begin{aligned}
 |(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)(t_2) - (\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)(t_1)| &= \left| \int_0^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t_2-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(\omega^2(t_1-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \right| \\
 &\leq \rho \|g\| L \left(\int_0^{t_1} (t_2-s)^{\alpha-1} ds - \int_0^{t_1} (t_1-s)^{\alpha-1} ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^{t_2} (t_2-s)^{\alpha-1} ds \right) \\
 &\leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha} (t_2^\alpha - (t_2 - t_1)^\alpha - t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha) \\
 &\leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha} (t_2^\alpha - t_1^\alpha).
 \end{aligned}$$

On divise la preuve en deux parties :

Partie 1. $0 \leq t_1 < \delta$, $t_2 < 2\delta$

$$\begin{aligned}
 |(\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)(t_2) - (\mathbb{E}_{\alpha,\omega^2;0}u)(t_1)| &\leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha} t_2^\alpha \\
 &\leq \frac{\rho \|g\| L}{\alpha} (2\delta)^\alpha \\
 &\leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Partie 2. $\delta \leq t_1 < t_2 < 1$

$$\begin{aligned}
 |(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)(t_2) - (\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)(t_1)| &\leq \frac{\rho \|g\|_L}{\alpha} (t_2^\alpha - t_1^\alpha) \\
 &\leq \frac{\rho \|g\|_L}{\delta^{1-\alpha}} (t_2 - t_1) \\
 &\leq \rho \|g\|_L \delta^\alpha \\
 &\leq \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Par conséquent, l'ensemble $(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0})(M)$ est équicontinu. Par le Théorème de Arzela-Ascoli, on conclut que l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0}$ est complètement continu. \square

On a besoin aussi des lemmes suivants :

Lemme 2.4.3 (Inégalité de Jensen, voir [43])

Soient μ une mesure positive et Ω un ensemble mesurable avec $\mu(\Omega) = 1$. Soit I un intervalle et supposons que u est une fonction réelle dans $L^1(\Omega)$ avec $u(t) \in I$ pour tout $t \in \Omega$. Si f est convexe sur I , alors

$$f\left(\int_{\Omega} u(t) d\mu(t)\right) \leq \int_{\Omega} (f \circ u)(t) d\mu(t). \quad (2.17)$$

L'inégalité est dans l'ordre inverse si f est concave sur I .

Comme f est une fonction continue sur \mathbb{R}^+ , on peut définir la fonction suivante :

$$f^*(u) = \max_{0 \leq z \leq u} \{f(z)\}.$$

Soit,

$$f_0^* = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f^*(u)}{u} \text{ et } f_\infty^* = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{f^*(u)}{u}.$$

Lemme 2.4.4 ([47])

Si f est continue, alors $f_0^* = f_0$ et $f_\infty^* = f_\infty$.

Preuve du Théorème 2.4.1. D'après le Lemme 2.4.2, on sait que $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Considérons le cas sous linéaire. Soit

$$\Omega_{r_i} = \{u \in X : \|u\| < r_i\}.$$

Comme $f_0 = \infty$, on peut choisir $r_1 > 0$ suffisamment petit pour que

$$f(u) \geq \theta u \text{ pour } u \leq r_1,$$

où θ satisfait

$$\frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\} \theta}{\Gamma(\alpha + 2)} \geq 1.$$

Nous allons montrer que

$$\|\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u\| \geq \|u\| \text{ pour tout } u \in \partial\Omega_{r_1}. \quad (2.18)$$

On a :

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)\| &\geq \int_0^1 (\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)(t) dt \\ &\geq \int_0^1 \left(\int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \right) dt \\ &\geq \int_0^1 g(s) f(u(s)) \left(\int_s^1 (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega^2(t-s)^\alpha) dt \right) ds. \end{aligned}$$

Par conséquent, en utilisant l'inégalité de Jensen, on obtient d'après le Corollaire 1.2.6 :

$$\begin{aligned} \|(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)\| &\geq \int_0^1 (1-s)^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\omega^2(1-s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \\ &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\}}{\Gamma(\alpha + 1)} \int_0^1 (1-s)^\alpha f(u(s)) ds \\ &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\}}{\Gamma(\alpha + 2)} \int_0^1 (\alpha + 1)(1-s)^\alpha f(u(s)) ds \\ &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\}}{\Gamma(\alpha + 2)} f \left(\int_0^1 (\alpha + 1)(1-s)^\alpha u(s) ds \right). \end{aligned}$$

En tenant compte que f est décroissante, on a :

$$\begin{aligned}
 \|(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)\| &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\}}{\Gamma(\alpha + 2)} f \left(\int_0^1 (\alpha + 1)(1 - s)^\alpha r_1 ds \right) \\
 &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\}}{\Gamma(\alpha + 2)} f(r_1) \\
 &\geq \frac{\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\} \theta}{\Gamma(\alpha + 2)} r_1.
 \end{aligned}$$

D'ou (2.18).

Comme $f_\infty = 0$; par le Lemme 2.4.4, on a :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} f^*(u)/u = 0.$$

Donc il existe $r_2 \in (r_1, \infty)$ tel que

$$f^*(r_2) \leq \frac{1}{M \|g\|} r_2,$$

où

$$M = \max_{0 \leq z \leq 1} z^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\omega^2 z^\alpha)$$

Nous montrons que

$$\|(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)\| \leq \|u\| \text{ pour tout } u \in \partial\Omega_{r_2}. \quad (2.19)$$

Nous avons d'après le Corollaire 1.2.6,

$$\begin{aligned}
 \|(\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0} u)\| &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega^2 (t - s)^\alpha) g(s) f(u(s)) ds \\
 &\leq \|g\| \max_{0 \leq u \leq r_2} f(u) \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^t (t - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(\omega^2 (t - s)^\alpha) ds \\
 &\leq \|g\| f^*(r_2) \sup_{0 \leq t \leq 1} \left\{ t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(\omega^2 t^\alpha) \right\} \\
 &\leq M \|g\| f^*(r_2) \leq r_2.
 \end{aligned}$$

D'ou (2.19).

D'après le Théorème de Guo-Krassnosel'skii 1.1.14, $\mathbb{E}_{\alpha, \omega^2; 0}$ a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega}_{r_2} \setminus \Omega_{r_1})$, alors le problème (2.9) a au moins une solution positive non triviale $u \in X$. \square

Exemple 2.4.5. Considérons le problème fractionnaire non linéaire suivant :

$$\begin{cases} D_0^{\frac{3}{2}} u - u = \frac{1+t}{2(1+u)}, & 0 < t \leq 1, \\ D^{\frac{1}{2}} u(t) |_{t=0} = I^{\frac{1}{2}} u(t) |_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

$F : [0, 1] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction continue, définie par

$$F(t, u) = \frac{1+t}{2(1+u)},$$

alors que

1. $f(u) = \frac{1}{1+u} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, convexe, décroissante avec $f(0) = 1 \neq 0$.
2. $g(t) = \frac{1+t}{2} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$ est continue, $\min_{0 \leq z \leq 1} \{g(z)\} = \frac{1}{2}$.

On a :

$$f_0 = \infty \text{ et } f_\infty = 0, u \in K.$$

On est dans le cas sous linéaire et les hypothèses (a) et (b) sont vérifiées. Par le Théorème 2.4.1, le problème fractionnaire aux conditions initiales (3.41) a au moins une solution positive non triviale $u \in C[0, 1]$.

Chapitre 3

Fluage et relaxation fractionnaires

Dans ce chapitre, nous fournissons une petite enquête sur certains modèles viscoélastiques définis par des équations différentielles fractionnaires. Après avoir utilisé la transformée de Laplace et transformer les modèles rhéologiques sous forme d'une équation intégrale, on compte sur l'approche du point fixe pour établir l'existence et l'unicité de la solution, en utilisant les techniques de l'analyse non linéaire, la méthode des approximations successives et la méthode du sous et sur solutions.

3.1 Equation de fluage

Récemment, le calcul fractionnaire est devenu un outil très important dans l'analyse des phénomènes viscoélastiques, telles que les relations contraintes-déformations dans les matériaux polymères. Quand on étudie le comportement des matériaux viscoélastiques, on utilise des modèles rhéologiques qui peuvent être de Voigt ou de Maxwell ou des combinaisons entre ces modèles de base [36]. Le phénomène classique de fluage dans sa forme la plus simple est représenté par une équation différentielle ordinaire linéaire d'ordre un, à savoir le modèle de Voigt

$$\eta \frac{d\epsilon(t)}{dt} + E\epsilon(t) = \sigma(t), \quad (3.1)$$

où η est le coefficient de viscosité et E est le module d'élasticité. Pour σ une contrainte donnée, la solution de l'équation (3.1) est donnée par la représentation intégrale suivante :

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta} \int_{t_0}^t e^{-\frac{t-s}{\tau}} \sigma(s) ds, \quad \tau = \frac{\eta}{E}, \quad (3.2)$$

où t_0 doit être choisi, tel que $t < t_0$ la où le matériau est au repos i.e. sans contrainte et déformation. La constante τ est appelée temps de retard et analogue à celle du temps de relaxation : une estimation du temps nécessaire pour que le procédé de fluage soit achevé. Nous pouvons voir également que le terme

$$k(t - t_0) = \frac{1}{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{t - t_0}{\tau}\right) \right), t \geq t_0. \quad (3.3)$$

est la fonction de fluage. Dans cette section, on examinera l'équation de fluage fractionnaires impliquant la dérivée au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in (0, 1)$, qui a une utilité majeure pour traiter les problèmes aux conditions initiales concernant les applications physiques où les conditions initiales sont généralement exprimés en termes des dérivées d'ordre entier. Précisément, nous commençons par examiner dans la sous-section 1 l'extension suivante de (3.1)

$$\begin{cases} \eta^\alpha ({}^c D_t^\alpha \epsilon)(t) + E^\alpha \epsilon(t) = \sigma(t), & 0 < t \leq 1 \text{ pour tout } E, \eta > 0 \\ \epsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.4)$$

La solution du problème (3.4) est une équation intégrale de type Volterra dont le noyau est exprimé par les fonctions de Mittag-Leffler qui apparaissent naturellement lors de la résolution des équations différentielles fractionnaires linéaires. Récemment, F. Mainardi dans [33] a considéré l'équation linéaire fractionnaire de diffusion, il a également travaillé sur les phénomènes de relaxation et d'oscillation. Il a fait plusieurs ouvrages sur le même thème [16, 17, 32, 34, 35]. La solution de l'équation (3.1) est décrite par la fonction exponentielle alors que la solution des équations (3.4) est exprimée en termes de fonction de Mittag-Leffler.

Nous allons nous concentrer sur le modèle fractionnaire de Voigt (3.4) où nous essayerons de donner une interprétation physique dans le cadre du phénomène de fluage et trouver la fonction de fluage correspondante, puis sous certaines hypothèses sur le terme σ et sa dépendance par rapport à ϵ , dans la sous-section 2 nous étudierons l'existence et l'unicité de solutions qui contribuent également à l'interprétation physique.

3.1.1 La représentation intégrale du modèle rhéologique linéaire de Voigt

Les relations viscoélastiques peuvent être exprimées dans les deux formes, des équations intégrales et différentielles. Les équations différentielles sont liés à des modèles rhéologiques qui fournissent une interprétation physique plus directe d'un comportement viscoélastique. Les équations intégrales sont très générales et appropriées pour le travail théorique. Nous avons décrit le modèle de Voigt, déduit ses équations différentielles fractionnaires et en les résolvant, nous avons trouvé la représentation intégrale correspondante.

Théorème 3.1.1 (La déformation fractionnaire)

Supposons que la contrainte σ du problème initial fractionnaire (3.4) est une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(- \left(\frac{t-s}{\tau} \right)^\alpha \right) \sigma(s) ds, \quad (3.5)$$

est la déformation fractionnaire et la solution continue de (3.4).

Preuve. Comme σ est une fonction continue sur $[0, 1]$. Alors, d'après [28, Théorème 3.24] le problème (3.4) est équivalent dans $C[0, 1]$ à l'équation intégrale de type Volterra de deuxième espèce suivante :

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds - \frac{1}{\tau^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \epsilon(s) ds. \quad (3.6)$$

Nous appliquons la méthode des approximations successives pour résoudre l'équation (3.6). Soit

$$\epsilon_0(t) = \frac{1}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sigma(s) ds, \quad (3.7)$$

Donc, nous substituons (3.7) dans (3.6), on obtient

$$\begin{aligned}\epsilon_1 &= \frac{1}{\eta^\alpha} I^\alpha \sigma - \frac{1}{\tau^\alpha} I^\alpha \epsilon_0 \\ &= \frac{1}{\eta^\alpha} I^\alpha \sigma - \frac{1}{\eta^\alpha} \frac{1}{\tau^\alpha} I^{2\alpha} \sigma.\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\epsilon_2 &= \frac{1}{\eta^\alpha} I^\alpha \sigma - \frac{1}{\tau^\alpha} I^\alpha \epsilon_1 \\ &= \frac{1}{\eta^\alpha} I^\alpha \sigma - \frac{1}{\eta^\alpha} \frac{1}{\tau^\alpha} I^{2\alpha} \sigma + \frac{1}{\eta^\alpha} \frac{1}{\tau^{2\alpha}} I^{3\alpha} \sigma.\end{aligned}$$

En poursuivant ce processus, nous trouvons :

$$\begin{aligned}\epsilon_m(t) &= \frac{1}{\eta^\alpha} \frac{1}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \int_0^t (t-s)^{k\alpha + \alpha - 1} \sum_{k=0}^m \left(-\frac{1}{\tau^\alpha}\right)^k \sigma(s) ds. \\ &= \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^m \frac{(t-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha}\right)^k \sigma(s) ds\end{aligned}$$

En passant à la limite $m \rightarrow \infty$, nous aurons :

$$\begin{aligned}\epsilon(t) &= \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-s)^{k\alpha}}{\Gamma(k\alpha + \alpha)} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha}\right)^k \sigma(s) ds \\ &= \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} (t-s)^\alpha\right) \sigma(s) ds\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

Théorème 3.1.2 (La fonction de fluage fractionnaire)

La fonction de fluage associée au problème fractionnaire (3.4) est donnée par :

$$k_\alpha(t) = - \left(\frac{\tau}{\eta}\right)^\alpha \left(E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha\right) - 1\right). \quad (3.8)$$

Preuve. Cherchons la fonction de fluage $k_\alpha(t)$ en utilisant l'expression alternative de (3.5)

$$\epsilon(t) = \int_0^t k_\alpha(t-s) d\sigma(s), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.9)$$

Considérons l'équation intégrale suivante,

$$\epsilon(t) = \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (3.10)$$

En intégrant l'équation intégrale ci-dessus par parties, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \epsilon(t) &= \frac{1}{\eta^\alpha} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(0) \\ &\quad + \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) d\sigma(s), \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

La déformation est linéaire par rapport à la contrainte et la fonction de fluage est :

$$k_\alpha(t) = \frac{1}{\eta^\alpha} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right). \quad (3.11)$$

Évaluons (3.11) en utilisant la définition de la fonction de Mittag-Leffler :

$$\begin{aligned} k_\alpha(t) &= \frac{1}{\eta^\alpha} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1} \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right) \\ &= \frac{1}{\eta^\alpha} t^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + \alpha + 1)} \\ &= -\frac{\tau^\alpha}{\eta^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\left(\frac{t}{\tau}\right)^{\alpha n}}{\Gamma(\alpha n + 1)} \\ &= -\frac{\tau^\alpha}{\eta^\alpha} \left(E_\alpha \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^\alpha \right) - 1 \right). \end{aligned}$$

D'où (3.8). □

Si on prends $\alpha = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} k_1(t) &= \frac{\tau}{\eta} \left(1 - E_1 \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right) \right) \right) \\ &= \frac{1}{E} \left(1 - \exp \left(-\left(\frac{t}{\tau}\right) \right) \right). \\ &= k(t - t_0) \text{ pour } t_0 = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, nous pouvons conclure que le problème (3.4) n'est autre qu'une généralisation de l'équation de fluage (3.1), alors que la fonction de fluage $k(t)$ est un cas particulier de $k_\alpha(t)$. Maintenant, nous allons discuter l'existence de solutions positives qui peuvent être exploitées en physique.

3.1.2 Le modèle fractionnaire non linéaire de Voigt

En utilisant la méthode des approximations successives, nous avons montré dans la sous-section 1 que le problème fractionnaire (3.4) est équivalent dans $C[0,1]$ à l'équation intégrale (3.5).

Maintenant, considérons le problème non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \eta^\alpha ({}^c D_t^\alpha \epsilon)(t) + E^\alpha \epsilon(t) = \sigma(\epsilon(t)), & 0 < t \leq 1 \text{ pour tout } E, \eta > 0 \\ \epsilon(0) = 0. \end{cases} \quad (3.12)$$

Dans cette sous-section, nous allons établir l'existence et l'unicité de la solution du problème (3.12). Notre analyse se base principalement sur la monotonie de la fonction de Mittag-Leffler prouvée par Schneider dans [44]. La fonction généralisée de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\beta}(-t)$ avec $t \geq 0$ est complètement monotone si et seulement si $0 < \alpha \leq 1$ et $\beta \geq \alpha$. En d'autres termes,

$$(-1)^n \frac{d^n}{dt^n} E_{\alpha,\beta}(-t) \geq 0,$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ si $0 < \alpha \leq 1$ et $\beta \geq \alpha$.

Soit $X = C[0,1]$ l'espace de Banach de toutes les fonctions continues définies sur $[0,1]$ avec la norme suivante :

$$\|u\| = \sup_{t \in [0,1]} |u(t)|.$$

Définissons l'équation de point fixe suivante :

$$\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon = \epsilon, \quad \epsilon \in X,$$

où l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} : X \rightarrow X$ est défini comme suit :

$$(\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon)(t) = \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(\epsilon(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (3.13)$$

Théorème 3.1.3 (Unicité de la solution de (3.12))

S'il existe $\mu > 0$, telle que

$$\|\sigma(\epsilon_1) - \sigma(\epsilon_2)\| \leq \mu \|\epsilon_1 - \epsilon_2\|, \text{ pour tout } \epsilon_1, \epsilon_2 \in X, \quad (3.14)$$

où

$$\frac{\mu}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} < 1, \quad (3.15)$$

alors le problème (3.12) a une solution unique ϵ dans X .

Preuve. On va prouver que l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0}$ défini par (3.13) est une contraction dans X .

En effet, pour tout $\epsilon_1, \epsilon_2 \in X$, on a

$$\begin{aligned} & \left| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon_1)(t) - (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon_2)(t) \right| \\ &= \left| \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) [\sigma(\epsilon_1(s)) - \sigma(\epsilon_2(s))] ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) |\sigma(\epsilon_1(s)) - \sigma(\epsilon_2(s))| ds, \end{aligned}$$

En tenant compte de (3.14), nous obtenons

$$\begin{aligned} \left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon_1) - (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon_2) \right\| &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \frac{t^\alpha}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \|\sigma(\epsilon_1) - \sigma(\epsilon_2)\| \\ &\leq \frac{\mu}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} \|\epsilon_1 - \epsilon_2\|. \end{aligned}$$

De (3.15), l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0}$ est une contraction. Donc, par le principe de contraction de Banach, on conclut que le problème (3.12) a une solution unique ϵ dans X . \square

Théorème 3.1.4 (Existence de la solution positive de (3.12))

Supposons que $\sigma : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue, convexe et décroissante avec $\sigma(0) \neq 0$. Si $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\epsilon} = \infty$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\epsilon} = 0$, alors le problème (3.12) a au moins une solution positive et non triviale $\epsilon \in X$.

Pour prouver le Théorème 3.1.4, on va utiliser le théorème de Guo-Krasnosel'skii. Soit

$$K = \{\epsilon \in X : \epsilon(t) \geq 0, 0 \leq t \leq 1\}.$$

Lemme 3.1.5

L'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} : K \rightarrow K$ est complètement continu.

Preuve. L'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} : K \rightarrow K$ est continu en considération de la continuité et la positivité de σ et en tant compte aussi la monotonicité de la fonction de Mittag-Leffler prouvée par Schneider [44].

Soit $B \subset K$ un ensemble borné tel que

$$B := B(0, \eta_0) = \{\epsilon \in K : \|\epsilon\| \leq \eta_0\}, \eta_0 > 0,$$

et soit $\rho = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \epsilon \leq \eta_0} \sigma(\epsilon(t))$, alors pour tout $\epsilon \in B$, on a

$$\begin{aligned} \left| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon)(t) \right| &= \left| \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(\epsilon(s)) ds \right| \\ &\leq \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) |\sigma(\epsilon(s))| ds \\ &\leq \frac{1}{\eta^\alpha} \frac{\rho}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t z^{\alpha-1} dz \\ &\leq \frac{\rho}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \Rightarrow \left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon) \right\| \leq \frac{\rho}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha+1)}. \end{aligned}$$

Donc, $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0}(B)$ est uniformément borné.

Maintenant, nous allons prouver que l'ensemble $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0}(B)$ est equicontinu.

Pour $\epsilon \in B$, $\varepsilon > 0$, $0 < t_1 < t_2 < 1$, soit $\delta = \left(\frac{\eta^\alpha \Gamma(\alpha+1) \varepsilon}{2\rho}\right)^{\frac{1}{\alpha}}$. Alors quand $|t_2 - t_1| < \delta$, on aura

$$\begin{aligned}
 & \left| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon)(t_1) - (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon)(t_2) \right| \\
 &= \left| \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^{t_1} (t_1 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t_1 - s}{\tau}\right)^\alpha \right) g(s) \sigma(\epsilon(s)) ds \right. \\
 &\quad \left. - \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t_2 - s}{\tau}\right)^\alpha \right) g(s) \sigma(\epsilon(s)) ds \right| \\
 &\leq \frac{\rho}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha)} \left(\int_0^{t_1} ((t_1 - s)^{\alpha-1} - (t_2 - s)^{\alpha-1}) ds + \int_{t_1}^{t_2} (t_2 - s)^{\alpha-1} ds \right) \\
 &\leq \frac{\rho}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} (t_1^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha - t_2^\alpha + (t_2 - t_1)^\alpha) \\
 &\leq \frac{2\rho}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha + 1)} (t_2 - t_1)^\alpha = \varepsilon
 \end{aligned}$$

Par conséquent, $(\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0})(B)$ est équicontinu.

D'après le Théorème de Arzela-Ascoli, on en déduit que l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0}$ est compact. \square

Preuve de Théorème 3.1.4. Soit

$$\Omega_{r_i} = \{\epsilon \in X : \|\epsilon\| < r_i\}.$$

Lorsque $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\epsilon} = \infty$, on peut choisir $r_1 > 0$ suffisamment petit de tel que

$$\sigma(\epsilon) \geq \omega \epsilon \text{ pour } \epsilon \leq r_1,$$

où ω satisfait $\left(\omega \frac{E_{\alpha, \alpha}(-\frac{1}{\tau^\alpha})}{\eta^\alpha \alpha (\alpha + 1)} \right) \geq 1$.

Maintenant, montrons que

$$\left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon) \right\| \geq \|\epsilon\| \text{ pour tout } \epsilon \in K \cap \partial \Omega_{r_1}. \quad (3.16)$$

Nous avons,

$$\begin{aligned}
 \left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon) \right\| &\geq \int_0^1 (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon)(t) dt \\
 &\geq \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(\epsilon(s)) ds dt \\
 &\geq \frac{1}{\eta^\alpha} E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right) \int_0^1 \sigma(\epsilon(s)) \left(\int_s^1 (t-s)^{\alpha-1} dt \right) ds \\
 &\geq \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha} \int_0^1 (1-s)^\alpha \sigma(\epsilon(s)) ds \\
 &\geq \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha (\alpha+1)} \int_0^1 (\alpha+1)(1-s)^\alpha \sigma(\epsilon(s)) ds.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, on aura

$$\begin{aligned}
 \left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon) \right\| &\geq \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha (\alpha+1)} \sigma \left(\int_0^1 (\alpha+1)(1-s)^\alpha \epsilon(s) ds \right) \\
 &\geq \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha (\alpha+1)} \sigma \left(\int_0^1 (\alpha+1)(1-s)^\alpha r_1 ds \right) \\
 &\geq \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha (\alpha+1)} \sigma(r_1) \\
 &\geq \omega \frac{E_{\alpha, \alpha} \left(-\frac{1}{\tau^\alpha} \right)}{\eta^\alpha \alpha (\alpha+1)} r_1 \geq r_1.
 \end{aligned}$$

D'ou (3.16).

Maintenant, on va démontrer que

$$\left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha; 0} \epsilon) \right\| \leq \|\epsilon\| \text{ pour tout } \epsilon \in K \cap \partial\Omega_{r_2} \quad (3.17)$$

Comme $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\epsilon} = 0$, Lemme 2.4.4 implique $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma^*}{\epsilon} = 0$ avec $\sigma^*(r) = \max_{0 \leq z \leq r} \{\sigma(z)\}$.

Donc, il existe $r_2 \in (r_1, \infty)$ tel que

$$\sigma^*(r_2) \leq \eta^\alpha \Gamma(\alpha+1) r_2$$

Par Conséquent, on a

$$\begin{aligned}
 \left\| (\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha, 0} \epsilon) \right\| &= \sup_{t \in [0,1]} \frac{1}{\eta^\alpha} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} \left(-\left(\frac{t-s}{\tau}\right)^\alpha \right) \sigma(\epsilon(s)) ds \\
 &\leq \frac{1}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \max_{0 \leq \epsilon \leq r_2} \sigma(\epsilon) \\
 &\leq \frac{1}{\eta^\alpha \Gamma(\alpha+1)} \sigma^*(r_2) \leq r_2.
 \end{aligned}$$

D'où (3.17).

Ainsi, à partir du Théorème de Guo-Krassnosel'skii 1.1.14, $\mathbb{E}_{\alpha, -(\frac{1}{\tau})^\alpha, 0}$ a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega}_{r_2} \setminus \Omega_{r_1})$.

Par conséquent, le problème (3.4) a au moins une solution positive non-triviale $\epsilon \in X$. \square

Exemple 3.1.6. Nous considérons le problème suivant

$$\begin{cases}
 ({}^C D_0^{\frac{1}{2}} \epsilon)(t) + \epsilon(t) = \frac{\sqrt{2}}{2+2\epsilon}, & 0 < t \leq 1 \\
 \epsilon(0) = 0,
 \end{cases} \quad (3.18)$$

On a

$$\sigma(\epsilon) = \frac{1}{1+\epsilon} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$$

est une fonction continue, convexe, décroissante $\sigma(0) \neq 0$.

On a $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma}{\epsilon} = \infty$ et $\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \frac{\sigma}{\epsilon} = 0$, alors du Théorème 3.1.4, le problème (3.18) a au moins une solution positive non-triviale $\epsilon \in C[0,1]$.

Pour l'unicité, on a besoin de vérifier que la condition (3.15) du Théorème 3.1.3. Donc, avec le choix ci-dessus du terme nonlineaire σ , on a la condition (3.15) qui est vérifiée. Par conséquent, le problème (3.18) a une seule solution positive non-triviale $\epsilon \in C[0,1]$.

3.2 Equation de relaxation

Dans cette section, nous considérons l'équation fractionnaire de relaxation suivante :

$$\begin{cases}
 {}_0^c D_t^\alpha \sigma(t) + \omega \sigma(t) = \epsilon(t, \sigma(t)), & t, \omega > 0; \\
 \sigma(0) = \sigma_0 > 0
 \end{cases} \quad (3.19)$$

où $\epsilon : [0,1] \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue et ${}^c D_t^\alpha$ est la dérivée au sens de Caputo d'ordre $\alpha \in (0,1)$. L'analyse utilisé dans cette section est différente de ce qu'on a vu précédemment. Nous utiliserons la méthode du sous et sur solutions pour établir l'existence de la solution et essayerons d'approximer cette solution par la méthode des approximations successives.

Inversons les équations ci-dessus par la transformée de Laplace, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \end{aligned} \quad (3.20)$$

En effet, considérons le problème linéaire suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha \sigma(t) + \omega \sigma(t) = \epsilon(t), 0 < t < 1, \omega > 0; \\ \sigma(0) = \sigma_0 > 0. \end{cases} \quad (3.21)$$

Quand on applique la transformée de Laplace (la formule (1.74)) à les équations (3.21), on aura

$$s^\alpha \sigma(s) - s^{\alpha-1} \sigma_0 + \omega \sigma(s) = \epsilon(s),$$

Par conséquent,

$$\sigma(s) = \sigma_0 \frac{s^{\alpha-1}}{s^\alpha - \omega} + \frac{1}{s^\alpha - \omega} \cdot \epsilon(s),$$

et par la transformée de Laplace inverse en utilisant les formules (1.30), (1.21) et (1.20), on obtient :

$$\sigma(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega t^\alpha) * \epsilon(t)$$

D'où

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s) ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Définissons l'opérateur $P : X \rightarrow X$ comme suit :

$$P\sigma(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + (\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0}\sigma)(t), \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (3.22)$$

où l'opérateur $\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0} : X \rightarrow X$ est défini comme suit :

$$(\mathbb{E}_{\alpha,-\omega;0}\sigma)(t) = \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Nous considérons le cône E des fonctions continues positives sur $[0,1]$ utilisé dans la section précédente et nous donnons le Lemme suivant :

Lemme 3.2.1

L'opérateur $P : E \rightarrow E$ est complètement continu.

La démonstration de ce lemme est basée sur le Théorème de Arzella-Ascoli comme on a vu dans la section précédente, en tenant compte la continuité de la fonction de Mittag-Leffler sur $[0,1]$.

Maintenant pour tout $\sigma \in [a,b] \subset \mathbb{R}^+$, on définit respectivement les sous et sur fonctions de contrôle comme suit :

$$H(t, \sigma) = \sup_{a \leq \eta \leq \sigma} \epsilon(t, \eta), \quad h(t, \sigma) = \inf_{\sigma \leq \eta \leq b} \epsilon(t, \eta).$$

Définition 3.2.2. Soit $\bar{\sigma}, \underline{\sigma} \in E$, $a \leq \underline{\sigma} \leq \bar{\sigma} \leq b$, satisfaisant

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \underline{\sigma}(t) &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &\quad + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) h(s, \underline{\sigma}(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$

Alors $\bar{\sigma}$ et $\underline{\sigma}$ sont appelées respectivement sur et sous solutions de (3.19).

Théorème 3.2.3

Supposons que $\epsilon : [0,1] \times [0, +\infty)$ soit continue. Si le problème (3.19) admet des sous et sur solutions, alors il a au moins une solution positive.

Preuve. Soit

$$K = \{\sigma \in E, \underline{\sigma}(t) \leq \sigma(t) \leq \bar{\sigma}(t), t \in [0,1]\},$$

Comme $K \subset E$ et K est un ensemble convexe fermé. Pour démontrer le Théorème 3.2.3 ci-dessus, il suffit de prouver que P est stable dans K .

Pour tout $\sigma \in K$, on a $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$, alors

$$\begin{aligned} P\sigma(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds \\ &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds \\ &\leq \bar{\sigma}(t) \end{aligned} \tag{3.23}$$

et

$$\begin{aligned} P\sigma(t) &= \sigma_0 t E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) \epsilon(s, \sigma(s)) ds \\ &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) h(s, \underline{\sigma}(s)) ds \\ &\geq \underline{\sigma}(t) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Donc, de (3.23) et (3.24), on obtient que $P : K \rightarrow K$ est un opérateur compact. Selon le Théorème de point fixe de Schauder, P admet un point fixe dans K . Par conséquent le problème (3.19) a au moins une solution positive σ dans X . \square

Corollaire 3.2.4

Supposons que $\epsilon : [0,1] \times [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ soit continue, et qu'il existe $\lambda_1, \lambda_2 \geq 0$ tel que

$$\lambda_1 \leq \epsilon(t, l) \leq \lambda_2, (t, l) \in [0,1] \times [0, \infty) \tag{3.25}$$

alors, le problème (3.19) a au moins une solution positive $\sigma \in X$. De plus

$$\sigma(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha), \quad (3.26)$$

et

$$\sigma(t) \leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha) \quad (3.27)$$

Preuve. De (3.25) et la définition des fonctions de contrôle, on a :

$$\lambda_1 \leq h(t,l) \leq H(t,l) \leq \lambda_2 \quad (3.28)$$

Considérons le problème suivant :

$$D^\alpha \bar{\sigma}(t) + \omega \bar{\sigma}(t) = \lambda_2, \bar{\sigma}(0) = \sigma_0. \quad (3.29)$$

En utilisant le Corollaire 1.2.6, nous montrons que le problème (3.29) a une solution positive donnée par :

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha), \end{aligned}$$

en tenant compte (3.28), on a

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_2 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &\geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds. \end{aligned}$$

Evidemment, $\bar{\sigma}$ est sur solution de (3.19).

Maintenant, tournons-nous vers le problème suivant :

$$D^\alpha \underline{\sigma}(t) + \omega \underline{\sigma}(t) = \lambda_1, \underline{\sigma}(0) = \sigma_0. \quad (3.30)$$

qui a également une solution positive

$$\begin{aligned}\underline{\sigma}(t) &= \sigma_0 t E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) ds \\ &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \lambda_1 t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)\end{aligned}$$

Par (3.28) et de la même manière que nous avons utilisé pour chercher la sur solution, on conclut que $\underline{\sigma}$ est la sous solution de (3.19). Donc, d'après le Théorème 3.2.3, on confirme que le problème (3.19) a au moins une solution positive $\sigma \in X$ qui vérifie les inégalités (3.26) et (3.27). \square

Corollaire 3.2.5

Supposons que $\epsilon : [0,1] \times [0,\infty) \rightarrow [a,\infty)$ soit continue avec a est une constante positive. Si,

$$0 < \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \epsilon(t,\sigma) < +\infty \quad (3.31)$$

alors le problème (3.19) a au moins une solution positive.

Preuve. D'après (3.31), il existe deux constantes positives N et R telles que

$$\epsilon(t,\sigma) \leq N \text{ pour tout } \sigma \geq R, t \in [0,1]. \quad (3.32)$$

soit $C = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \sigma \leq R} \epsilon(t,\sigma)$. Alors, par (3.32) on a :

$$a \leq \epsilon(t,\sigma) \leq N + C \text{ pour tout } \sigma \geq 0, t \in [0,1].$$

Par conséquent, d'après le Corollaire 3.2.4, le problème (3.19) a au moins une solution positive σ dans X qui satisfait les inégalités suivantes

$$\sigma(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + a t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha),$$

et

$$\sigma(t) \leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + (N + C) t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha)$$

\square

Corollaire 3.2.6

Supposons que $\epsilon : [0,1] \times [0,\infty) \rightarrow [a,\infty)$ soit continue, a est une constante positive, s'il existe, $c > 0, d > 0$, tels que

$$\max\{\epsilon(t,\sigma) : (t,\sigma) \in [0,1] \times [0,d]\} \leq c\Gamma(\alpha + 1) - \sigma_0 \quad (3.33)$$

alors, le problème (3.19) a au moins une solution positive σ dans X .

Preuve. D'après (3.33), on a :

$$a \leq \epsilon(t,\sigma) \leq c\Gamma(\alpha + 1) - \sigma_0 \text{ pour tout } (t,\sigma) \in [0,1] \times [0,d].$$

Donc, d'après le Corollaire 3.2.4, on conclut directement que le problème (3.19) a au moins une solution positive σ dans X satisfait

$$0 \leq \|\sigma\| \leq c$$

□

Proposition 3.2.7

Supposons que $\epsilon : [0,1] \times [0,\infty) \rightarrow [a,\infty)$ soit continue où a est constante positive telle que

$$a < \lim_{\sigma \rightarrow +\infty} \max_{0 \leq t \leq 1} \frac{\epsilon(t,\sigma)}{\sigma} < +\infty \quad (3.34)$$

alors le problème (3.19) a une solution positive borné σ dans X .

Preuve. Comme (3.34) est vérifiée, il existe deux constantes positives M et R telles que

$$\epsilon(t,\sigma) \leq M\sigma \text{ pour tout } \sigma \geq R, t \in [0,1]. \quad (3.35)$$

Soit $C = \max_{0 \leq t \leq 1, 0 \leq \sigma \leq R} \epsilon(t,\sigma)$ et par (3.35) on obtient

$$a \leq \epsilon(t,\sigma) \leq M\sigma + C \text{ pour tout } \sigma \geq 0, t \in [0,1].$$

Alors, on a :

$$H(t, \sigma) \leq M\sigma + C \text{ pour tout } \sigma \geq 0, t \in [0, 1]. \quad (3.36)$$

Maintenant, on considère le problème suivant,

$$D^\alpha \bar{\sigma}(t) + \omega \bar{\sigma}(t) = M\sigma + C, \bar{\sigma}(0) = \sigma_0, \quad (3.37)$$

qui a la solution positive suivante

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) (M\bar{\sigma}(s) + C) ds. \end{aligned}$$

Définissons l'opérateur $A : E \rightarrow E$ comme suit :

$$\begin{aligned} A\bar{\sigma}(t) &= \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) \\ &+ \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) (M\bar{\sigma}(s) + C) ds, \end{aligned} \quad (3.38)$$

ce qui est complètement continu d'après le Lemme 3.2.1.

Notons

$$\Omega_r = \{ \sigma \in E \mid \|\sigma - v_0\| \leq r < \infty \},$$

où $v_0(t) = Ct^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-\omega t^\alpha)$ et r satisfait

$$r \geq \frac{\sigma_0 \Gamma(\alpha + 1)^2 + MC}{\Gamma(\alpha + 1)(\Gamma(\alpha + 1) - M)}$$

Pour tout $\sigma \in \Omega_r$, on a

$$\|\sigma\| \leq r + \frac{C}{\Gamma(\alpha + 1)}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 |A\sigma(t) - v_0(t)| &= \left| \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) M\sigma(s) ds \right| \\
 &\leq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + M \|\sigma\| t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha) \\
 &\leq \sigma_0 + \frac{M(r + \frac{C}{\Gamma(\alpha+1)})}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha.
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \|A\sigma - v_0\| &\leq \sigma_0 + \frac{Mr}{\Gamma(\alpha+1)} + \frac{MC}{\Gamma(\alpha+1)^2} \\
 &\leq r
 \end{aligned}$$

D'après le Théorème de point fixe de Schauder, l'opérateur A admet un point fixe dans Ω_r . Donc, le problème (3.37) a au moins une solution positive $\bar{\sigma}$ dans Ω_r . D'autre part, d'après (3.36) on a

$$\bar{\sigma}(t) \geq \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) H(s, \bar{\sigma}(s)) ds, \quad \bar{\sigma} \in \Omega_r.$$

Evidemment, $\bar{\sigma}$ est une sur solution de (3.19) et par le Corollaire 3.2.4, on conclut également que

$$\underline{\sigma}(t) = \sigma_0 E_\alpha(-\omega t^\alpha) + at^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha),$$

est sous solution de (3.19). D'après le Théorème 3.2.3, le problème (3.19) a au moins une solution positive σ dans X . \square

Théorème 3.2.8

Supposons qu'il existe $\mu > 0$, tel que

$$\|\epsilon(\cdot, \sigma_1(\cdot)) - \epsilon(\cdot, \sigma_2(\cdot))\| \leq \mu \|\sigma_1 - \sigma_2\| \text{ pour tout } \sigma_1, \sigma_2 \in X, \quad (3.39)$$

si

$$\frac{\mu}{\Gamma(\alpha+1)} < 1, \quad (3.40)$$

alors le problème (3.19) a une solution unique $\sigma \in X$.

Preuve. Il suffit de démontrer que l'opérateur P défini par (3.22) est une contraction dans X . En effet, pour tout $\sigma_1, \sigma_2 \in X$, et (3.39) est vérifiée, alors on a :

$$\begin{aligned}
 \|P(\sigma_1) - P(\sigma_2)\| &= \sup_{t \in [0,1]} |P(\sigma_1)(t) - P(\sigma_2)(t)| \\
 &\leq \sup_{t \in [0,1]} \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\omega(t-s)^\alpha) |\epsilon(s, \sigma_1(s)) - \epsilon(s, \sigma_2(s))| ds \\
 &\leq \sup_{t \in [0,1]} t^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-\omega t^\alpha) \|\epsilon(\cdot, \sigma_1(\cdot)) - \epsilon(\cdot, \sigma_2(\cdot))\| \\
 &\leq \sup_{t \in [0,1]} \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \mu \|\sigma_1 - \sigma_2\|. \\
 &\leq \frac{\mu}{\Gamma(\alpha+1)} \|\sigma_1 - \sigma_2\|
 \end{aligned}$$

Ainsi, quand (3.40) est vérifiée, l'opérateur P est une contraction.

Donc, d'après le principe de contraction de Banach le problème (3.19) a une seule solution $\sigma \in X$. □

Exemple 3.2.9. Considérons l'équation non linéaire de relaxation suivante :

$$\begin{cases} D^{1/2}\sigma(t) + \sigma(t) = \frac{0.5}{1+\sigma(t)}, 0 < t < 1 \\ \sigma(0) = 1 \end{cases} \quad (3.41)$$

Le Théorème 3.2.8 et le Corollaire 3.2.4 entraînent que l'équations (3.41) ont une seule solution positive σ dans X . De plus, $\underline{\sigma} \leq \sigma \leq \bar{\sigma}$, où $\bar{\sigma}(t) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t}) + \frac{1}{2}\sqrt{t}E_{\frac{1}{2},\frac{3}{2}}(-\sqrt{t})$ et $\underline{\sigma}(t) = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t})$ sont respectivement les sous et sur solutions de l'équation (3.41).

Il existe des méthodes pour calculer la solution approchée du problème (3.41), voir [10, 11, 13]. On va utiliser le schéma Bashfort-Moulton de correction de prédiction comme dans [12].

$$x_{n+1} = E_{\frac{1}{2}}(-\sqrt{t}) + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{E_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}(-\sqrt{t-s})}{\sqrt{t-s}} \frac{ds}{1+x_n} \quad (3.42)$$

La figure 3.1 montre que la solution approximative est située entre les sur et sous solutions mentionnées précédemment.

Notons que la décroissance des solutions caractérise bien la relaxation.

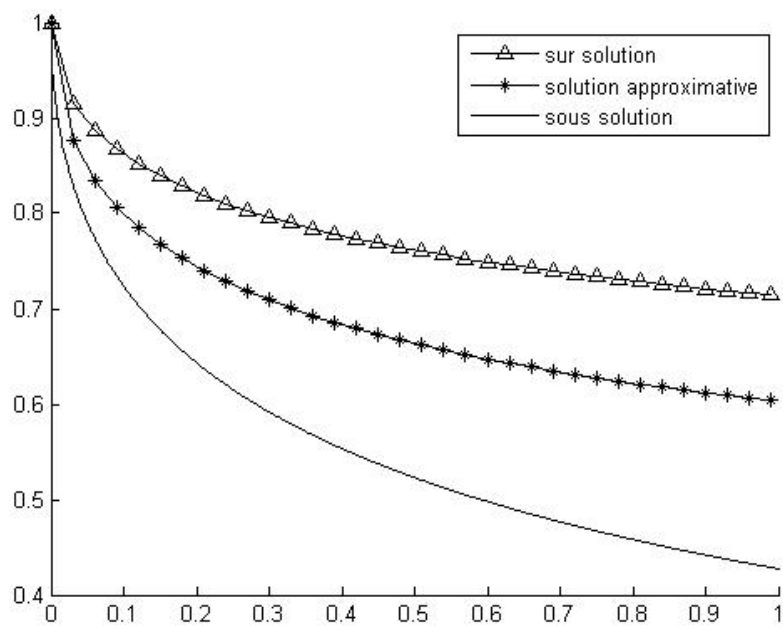


FIGURE 3.1 – Solution Approximative

Chapitre 4

L'inégalité de Lyapunov pour un problème fractionnaire aux limites

L'inégalité de Lyapunov est un résultat en mathématiques avec de nombreuses applications - voir [22, 45]. Le résultat a été prouvé par Lyapunov en 1907 [31] et a affirmé que si $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction continue et le problème aux limites suivant

$$\begin{cases} y'' + qy = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

a une solution non triviale, alors

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4}{b-a}. \quad (4.2)$$

L'inégalité de Lyapunov (4.2) a pris de nombreuses formes, y compris les versions dans le contexte du calcul fractionnaire où la dérivée de second ordre dans (4.1) est substituée par un opérateur fractionnaire d'ordre α .

Considérons le problème aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}_a D_t^\alpha y(t) + q(t)y(t) = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (4.3)$$

${}_a D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens de Riemann Liouville d'ordre $\alpha \in (1, 2]$.

Théorème 4.0.10 ([15])

Si le problème aux limites (4.3) a une solution non triviale, où q est une fonction réelle continue, alors

$$\int_a^b |q(s)| ds > \Gamma(\alpha) \left(\frac{4}{b-a} \right)^{\alpha-1}. \quad (4.4)$$

Par une application directe du Théorème 4.0.10, R. A. C. Ferreira a pu déterminer des intervalles pour les zéros réels de la fonction de Mittag-Leffler dans le théorème suivant :

Théorème 4.0.11 ([15])

Soit $1 < \alpha \leq 2$. Alors, la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(z)$ n'a pas des zéros réels pour $|z| \leq \Gamma(\alpha)4^{\alpha-1}$.

Preuve. Considérons le problème fractionnaire de Sturm-Liouville suivant :

$$\begin{cases} D_0^\alpha y(t) + \lambda y(t) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous résolvons l'équation (4.5) en utilisant la transformée de Laplace, on obtient

$$y(t) = t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha), \quad t \in [0,1], \quad (4.6)$$

qui nous amène à montrer que les valeurs propres $\lambda \in \mathbb{R}$ du problème (4.5) sont les solutions de l'équation :

$$E_{\alpha,\alpha}(-\lambda) = 0, \quad (4.7)$$

sachant que les fonctions propres correspondantes sont données par (4.6).

D'après le Théorème 4.0.10, si $\lambda \in \mathbb{R}$ est une valeur propre du problème (4.5), i.e. λ est un zéro de l'équation (4.7), alors

$$|\lambda| > \Gamma(\alpha)4^{\alpha-1}.$$

D'où, on conclut que la fonction de Mittag-Leffler $E_{\alpha,\alpha}(z)$ n'a pas des zéros réels pour $|z| \leq \Gamma(\alpha)4^{\alpha-1}$. \square

Une inégalité fractionnaire de Lyapunov (4.1) peut également être obtenue aussi en considérant la dérivée fractionnaire au sens de Caputo au lieu de Riemann - Liouville. Considérons le problème aux limites (4.3) en appliquant l'opérateur de dérivation de Caputo. Soit le problème fractionnaire aux limites suivant :

$$\begin{cases} {}^c D_t^\alpha y(t) + q(t)y(t) = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0. \end{cases} \quad (4.8)$$

${}^c D_t^\alpha$ est la dérivée fractionnaire au sens Caputo d'ordre $\alpha \in (1,2]$.

Théorème 4.0.12 ([14])

Si le problème aux limites (4.8) a une solution non triviale, où q est une fonction réelle continue, alors

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{\alpha \Gamma(\alpha)}{((\alpha - 1)(b - a))^{\alpha-1}}. \quad (4.9)$$

4.1 Quelques résultats d'existence concernant l'inégalité de Lyapunov

Motivés par [24–26, 40] et les résultats ci-dessus, ainsi que des résultats d'existence sur les solutions positives [2, 30, 37, 49], qui sont souvent utiles dans les applications, plus récemment, Rong et Bai ont obtenu une inégalité de Lyapunov-type pour une équation différentielle fractionnaire, mais avec des conditions aux limites fractionnaires [42]. Nous considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_a D_t^\alpha y + q(t)f(y) = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

Lemme 4.1.1

y est une solution du problème ci-dessus (4.10) si, et seulement si, y satisfait l'équation intégrale suivante :

$$y(t) = \int_a^b G(t,s)q(s)f(y(s))ds,$$

où

$$G(t,s) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \frac{(t-a)^{\alpha-1}(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} - (t-s)^{\alpha-1}, & a \leq s \leq t \leq b, \\ \frac{(t-a)^{\alpha-1}(b-s)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}, & a \leq s \leq t \leq b, \end{cases} \quad (4.11)$$

est la fonction de Green associée au problème (4.10).

Preuve. De la même façon que dans [15]. □

Lemme 4.1.2

La fonction de Green G définie par (4.11) satisfait les propriétés suivantes :

1. $G(t,s) \geq 0$ pour tout $a \leq t, s \leq b$;
2. $\max_{t \in [a,b]} G(t,s) = G(s,s)$, $s \in [a,b]$;
3. $G(s,s)$ a un seul maximum donné par

$$\max_{s \in [a,b]} G(s,s) = \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{4^{\alpha-1}\Gamma(\alpha)}.$$

4. Il existe une fonction positive $\varphi \in C(a,b)$ telle que

$$\min_{t \in [\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3}]} G(t,s) \geq \varphi(s)G(s,s), \text{ for } a < s < b. \quad (4.12)$$

Preuve. D'abord, on définit ces deux fonctions

$$g_1(t,s) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1}, \quad a \leq s \leq t \leq b,$$

et

$$g_2(t,s) = \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}, \quad a \leq t \leq s \leq b.$$

Il est clair que $g_2(t,s) \geq 0$. Maintenant, on traite g_1 , on a

$$\begin{aligned}
g_1(t,s) &= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} - (t-s)^{\alpha-1} \\
&= \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1} \\
&\quad - \frac{(t-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}} \left(b - \left(a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a} \right) \right)^{\alpha-1}.
\end{aligned}$$

Nous voyons que

$$a + \frac{(s-a)(b-a)}{t-a} \geq s,$$

qui implique

$$a(t-b) + s(b-t) \geq 0 \Leftrightarrow s \geq a.$$

Donc, on a $g_1(t,s) \geq 0$, d'où la preuve de la propriété 1. Pour prouver la 2^{ème} propriété, nous avons besoin de dériver g_1 par rapport à t qui nous amène à conclure que la fonction g_1 est décroissante par rapport à t pour tout s fixé. Évidemment, g_2 est une fonction croissante par rapport à t . Finalement, soit

$$f(s) = G(s,s) = \frac{(s-a)^{\alpha-1}}{(b-a)^{\alpha-1}}(b-s)^{\alpha-1}, s \in [a,b],$$

alors pour $s \in (a,b)$ on a

$$f'(s) = (\alpha-1) \frac{(s-a)^{\alpha-2}(b-s)^{\alpha-2}}{(b-a)^{\alpha-1}}(-2s+a+b),$$

qui implique que $f'(s) = 0$ seulement pour $s = \frac{a+b}{2}$, $f'(s) > 0$ pour $s < \frac{a+b}{2}$ et $f'(s) < 0$ pour $s > \frac{a+b}{2}$.

Maintenant, on prouve la quatrième propriété, on a $G(t,s) > 0$ pour $t,s \in (a,b)$; la où on peut chercher le minimum dans un intervalle de la forme $[a + \frac{b-a}{n}, b - \frac{b-a}{n}]$, $n \geq 3$ est naturel. Par conséquent, pour $t \in [\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3}]$,

$$\begin{aligned}
 \min_{t \in \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right]} G(t, s) &= \begin{cases} g_1\left(\frac{2b-a}{3}, s\right), & s \in \left(a, \frac{2a+b}{3}\right], \\ \min\left\{g_1\left(\frac{2b-a}{3}, s\right), g_2\left(\frac{2a+b}{3}, s\right)\right\}, & s \in \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3}\right], \\ g_2\left(\frac{2a+b}{3}, s\right), & s \in \left[\frac{2b-a}{3}, b\right), \end{cases} \\
 &= \begin{cases} g_1\left(\frac{2b-a}{3}, s\right), & s \in (a, \lambda], \\ g_2\left(\frac{2a+b}{3}, s\right), & s \in [\lambda, b), \end{cases} \\
 &= \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \begin{cases} \left(\frac{(2b-4a)(b-s)}{3(b-a)}\right)^{\alpha-1} - \left(\frac{2b-a}{3} - s\right)^{\alpha-1}, & s \in (a, \lambda], \\ \left(\frac{b-s}{3}\right)^{\alpha-1}, & s \in [\lambda, b), \end{cases}
 \end{aligned}$$

où $\frac{2a+b}{3} < \lambda < \frac{2b-a}{3}$ est la seule solution de l'équation suivante :

$$g_1\left(\frac{2b-a}{3}, s\right) = g_2\left(\frac{2a+b}{3}, s\right).$$

Par conséquent, en mettant

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{\left(\frac{(2b-4a)(b-s)}{3}\right)^{\alpha-1} - (b-a)^{\alpha-1} \left(\frac{2b-a}{3} - s\right)^{\alpha-1}}{\left((s-a)(b-s)\right)^{\alpha-1}}, & s \in (a, \lambda], \\ \left(\frac{b-a}{3(s-a)}\right)^{\alpha-1}, & s \in [\lambda, b), \end{cases} \quad (4.13)$$

La preuve est complète. □

Soit $X = C[a, b]$ et définissons $T : X \rightarrow X$ comme suit :

$$Ty(t) = \int_a^b G(t, s) q(s) f(y(s)) ds, \quad y \in X. \quad (4.14)$$

Pour prouver l'existence de la solution non triviale positive de (4.10), nous considérons les hypothèses suivants :

$$(H1) \quad f(y) \geq \gamma^* r_1 \text{ pour } y \in [0, r_1],$$

$$(H2) \quad f(y) \leq \gamma r_2 \text{ pour } y \in [0, r_2],$$

où $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue. Dans la suite, on prend

$$\gamma := \left(\int_a^b G(s,s)q(s)ds \right)^{-1} \quad \text{et} \quad \gamma^* := \left(\int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{2b-a}{3}} G(s,s)\varphi(s)q(s)ds \right)^{-1}.$$

où $q : [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction non triviale intégrable au sens de Lebesgue.

Théorème 4.1.3

Supposons qu'il existe deux constantes positives $r_2 > r_1 > 0$ telles que les hypothèses (H1) et (H2) sont vérifiées. Alors le problème aux limites fractionnaire (4.10) a au moins une solution positive non triviale y dans X telle que $r_1 \leq \|y\| \leq r_2$.

Concernant la preuve du Théorème 4.1.3 nous utilisons le Théorème 1.1.14 de Krasnosels'kii sur le cône K donné par

$$K := \{y \in X : y(t) \geq 0, a \leq t \leq b\}.$$

Preuve du Théorème 4.1.3. En utilisant le Théorème de Arzela–Ascoli, nous montrons que l'opérateur $T : K \rightarrow K$ est complètement continu. Soit,

$$\Omega_i = \{y \in K : \|y\| \leq r_i\}.$$

De (H1) et à l'aide du Lemme 4.1.2, on a pour $t \in \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3} \right]$ et $y \in K \cap \partial\Omega_1$

$$\begin{aligned} (Ty)(t) &\geq \int_a^b \min_{t \in \left[\frac{2a+b}{3}, \frac{2b-a}{3} \right]} G(t,s)q(s)f(y(s))ds \\ &\geq \gamma^* \left(\int_a^b G(s,s)\varphi(s)q(s)ds \right) r_1 \\ &\geq \gamma^* \left(\int_{\frac{2a+b}{3}}^{\frac{2b-a}{3}} G(s,s)\varphi(s)q(s)ds \right) r_1 = \|y\|. \end{aligned}$$

Par conséquent, on obtient $\|Ty\| \geq \|y\|$ pour $y \in K \cap \partial\Omega_1$. Maintenant, nous prouvons que $\|Ty\| \leq \|y\|$ pour tout $y \in K \cap \partial\Omega_2$. De (H2), il en résulte que

$$\|Ty\| = \max_{t \in [a,b]} \int_a^b G(t,s)q(s)f(y(s))ds \leq \gamma \left(\int_a^b G(s,s)q(s)ds \right) r_2 = \|y\|$$

pour $y \in K \cap \partial\Omega_2$. Ainsi, d'après le Théorème 1.1.14, on conclut que l'opérateur T défini par (4.14) a un point fixe dans $K \cap (\overline{\Omega_2} \setminus \Omega_1)$. Par conséquent, le problème aux limites fractionnaire (4.10) a au moins une solution positive non triviale y dans X telle que $r_1 \leq \|y\| \leq r_2$. \square

Exemple 4.1.4. Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_0D^{3/2}y + te^y = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases} \quad (4.15)$$

D'abord, on calcule les valeurs de γ et γ^* . Ici,

$$\varphi(s) = \begin{cases} \frac{\sqrt{\frac{2(1-s)}{3}} - \sqrt{\frac{2}{3} - s}}{\sqrt{s(1-s)}}, & s \in (0, \lambda], \\ \frac{1}{\sqrt{3s}}, & s \in [\lambda, 1), \end{cases}$$

où $\lambda \simeq 0.64645$. Donc, on obtient

$$\gamma^* \simeq 26.459 \text{ et } \gamma \simeq 4.514. \quad (4.16)$$

On choisit $r_1 = \frac{1}{27}$ et $r_2 = 1$. Alors on obtient

1. $f(y) = e^y \geq \gamma^* r_1$ pour $y \in [0, \frac{1}{27}]$;
2. $f(y) = e^y \leq \gamma r_2$ pour $y \in [0, 1]$.

Par conséquent, de Théorème 4.1.3, le problème (4.15) admet au moins une solution positive non triviale y dans X telle que $\frac{1}{27} \leq \|y\| \leq 1$.

4.2 Généralisation de l'inégalité de Lyapunov

Le resultat suivant généralise le Théorème 4.0.10 : en choisissant $f(y) = y$ dans le Théorème 4.2.1, l'inégalité (4.17) se réduit à (4.4). Notons que $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est une fonction concave et non décroissante.

Théorème 4.2.1

Soit q une fonction réelle non triviale intégrable (au sens Lebesgue). Supposons que $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est une fonction concave non décroissante. Si le problème aux limites fractionnaire (4.10) a une solution non triviale y , alors

$$\int_a^b |q(t)| dt > \frac{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \eta}{(b-a)^{\alpha-1} f(\eta)}, \quad (4.17)$$

où $\eta = \max_{t \in [a,b]} y(t)$.

Preuve. Nous commençons en utilisant le Lemme 4.1.1. On a

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \int_a^b G(t,s) |q(s)| f(y(s)) ds, \\ \|y\| &\leq \int_a^b G(s,s) |q(s)| f(y(s)) ds \\ &< \frac{(b-a)^{\alpha-1}}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_a^b |q(s)| f(y(s)) ds. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen (2.17), et en tenant compte du fait que f est concave et non décroissante, nous obtenons

$$\begin{aligned} \|y\| &< \frac{(b-a)^{\alpha-1} \|q\|_L}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} \int_a^b \frac{|q(s)| f(y(s)) ds}{\|q\|_L} \\ &< \frac{(b-a)^{\alpha-1} \|q\|_L}{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha)} f(\eta), \end{aligned}$$

où $\eta = \max_{t \in [a,b]} y(t)$. Ainsi,

$$\int_a^b |q(s)| ds > \frac{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) \eta}{(b-a)^{\alpha-1} f(\eta)}.$$

Ceci conclut la preuve. □

Corollaire 4.2.2

Considérons le problème aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_a D_t^\alpha y + q(t)f(y) = 0, & a < t < b, \\ y(a) = y(b) = 0, \end{cases}$$

où $f \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ est une fonction concave non décroissante et $q \in L([a, b], \mathbb{R}_+^*)$. S'il existe deux constantes positives $r_2 > r_1 > 0$ telles que $f(y) \geq \gamma^* r_1$ pour $y \in [0, r_1]$ et $f(y) \leq \gamma r_2$ pour $y \in [0, r_2]$, alors

$$\int_a^b q(t) dt > \frac{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) r_1}{(b-a)^{\alpha-1} f(r_2)}.$$

Exemple 4.2.3. considérons le problèmes aux limites fractionnaire suivant :

$$\begin{cases} {}_0 D_t^{3/2} y + t \ln(2+y) = 0, & 0 < t < 1, \\ y(0) = y(1) = 0. \end{cases}$$

Nous avons

- (i) $f(y) = \ln(2+y) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est continue, concave et non décroissante ;
- (ii) $q(t) = t : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction intégrable au sens Lebesgue avec $\|q\|_L = 1 > 0$.

Nous avons calculé les valeurs γ et γ^* dans (4.16). Choisisant $r_1 = 1/40$ et $r_2 = 1$, on obtient

1. $f(y) = \ln(2+y) \geq \gamma^* r_1$ pour $y \in [0, 1/40]$;
2. $f(y) = \ln(2+y) \leq \gamma r_2$ pour $y \in [0, 1]$.

Par conséquent, d'après le Corollaire 4.2.2, on obtient

$$\int_0^1 q(t) dt > \frac{4^{\alpha-1} \Gamma(\alpha) r_1}{(b-a)^{\alpha-1} f(r_2)} \simeq 4.0334 \times 10^{-2}.$$

Ceci explique le Corollaire 4.2.2.

Conclusion générale

Le calcul fractionnaire est devenu un outil très efficace pour modéliser quelques phénomènes en biologie, en mécanique...etc. D'un point vue mathématique l'opérateur fractionnaire est une équation intégrale avec noyau faiblement singulier qui représente un certain retard (convolution). Dans ce travail, on a essayé d'étudier l'existence de la solution de quelques équations fractionnaires (équations d'oscillation et de relaxation); l'analyse est faite par la méthode du point fixe en utilisant l'analyse non linéaire. La résolution des équations fractionnaires abordées est basée sur la transformée de Laplace en inversant l'équation différentielle fractionnaire vers une équation intégrale pour permettre l'application de la technique de point fixe. Les résultats obtenus ont fait l'objet de publications [5–8] et une autre soumise.

Les équations étudiées ici peuvent être généralisées. Les théorèmes d'existence obtenus sont locaux (la solution est définie sur un intervalle fini). Il reste à considérer le cas d'un intervalle du type $[0, \infty)$.

Notons aussi que l'analyse présentée dans cette thèse peut être appliquée avec certaines modifications pour le cas d'équations aux dérivées partielles fractionnaires .

Beaucoup de chercheurs ont considéré l'existence, la non existence et la stabilité de l'équation :

$$D^\alpha u = f(t, u, \Lambda u),$$

avec Λ un opérateur d'ordre fractionnaire. A chaque cas, ils établissent la solution avec une méthode appropriée et dans l'espace le plus adéquat, voir par exemple [21]. Il serait intéressant de regarder nos équations de relaxation et d'oscillation en ajoutant le terme Λu .

Bibliographie

- [1] F. M. Atici and G. S. Guseinov. On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 132(2) :341–356, 2001.
- [2] Z. Bai and H. Lü. Positive solutions for boundary value problem of nonlinear fractional differential equation. *J. Math. Anal. Appl.*, 311(2) :495–505, 2005.
- [3] M. Caputo. Linear models of dissipation whose q is almost frequency independent-ii. *Geophysical Journal International*, 13(5) :529–539, 1967.
- [4] M. Caputo. Elasticità e dissipazione (elasticity and anelastic dissipation). *Zanichelli Publisher, Bologna*). Michele Caputo CAPUTO, M.(1997) : *Rigorous time domain responses of polarizable media. I*, *Ann. Geofis*, 40(2) :423–434, 1969.
- [5] A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, and R. Bebbouchi. Positive solutions for an oscillator fractional initial value problem. *Journal of Applied Mathematics and Computing*, pages 1–12, 2016.
- [6] A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, and R. Bebbouchi. Positive solutions of the fractional relaxation equation using lower and upper solutions. *Vietnam Journal of Mathematics*, pages 1–10, 2016.
- [7] A. Chidouh, A. Guezane-Lakoud, R. Bebbouchi, A. Bouaricha, and D. F. Torres. Linear and nonlinear fractional voigt models. In *Theory and Applications of Non-integer Order Systems*, pages 157–167. Springer, 2017.
- [8] A. Chidouh and D. F. Torres. A generalized lyapunov’s inequality for a fractional boundary value problem. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, pages 192–197., 2017.

- [9] J. Daqing. On the existence of positive solutions to second order periodic bvps. *Acta Math. Sci*, 1, 1998.
- [10] K. Diethelm. An algorithm for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Electron. Trans. Numer. Anal.*, 5(Mar.) :1–6 (electronic), 1997.
- [11] K. Diethelm, N. J. Ford, and A. D. Freed. A predictor-corrector approach for the numerical solution of fractional differential equations. *Nonlinear Dynam.*, 29 (1-4) :3–22, 2002. Fractional order calculus and its applications.
- [12] K. Diethelm and A. D. Freed. The fracpece subroutine for the numerical solution of differential equations of fractional order. *Forschung und wissenschaftliches Rechnen : Beitrage zum Heinz- Billing-Preis 1998*, pages 57–71, 1999.
- [13] K. Diethelm and G. Walz. Numerical solution of fractional order differential equations by extrapolation. *Numer. Algorithms*, 16(3-4) :231–253 (1998), 1997.
- [14] R. A. Ferreira. On a lyapunov-type inequality and the zeros of a certain mittag-leffler function. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 412(2) :1058–1063, 2014.
- [15] R. A. C. Ferreira. A Lyapunov-type inequality for a fractional boundary value problem. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 16(4) :978–984, 2013.
- [16] R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin. *Mittag-Leffler functions, related topics and applications*. Springer Monographs in Mathematics. Springer, Heidelberg, 2014. ISBN 978-3-662-43929-6 ; 978-3-662-43930-2. xiv+443 pp.
- [17] R. Gorenflo and F. Mainardi. Fractional calculus : integral and differential equations of fractional order. In *Fractals and fractional calculus in continuum mechanics (Udine, 1996)*, volume 378 of *CISM Courses and Lectures*, pages 223–276. Springer, Vienna, 1997.
- [18] J. R. Graef, L. Kong, and H. Wang. Existence, multiplicity, and dependence on a parameter for a periodic boundary value problem. *J. Differential Equations*, 245 (5) :1185–1197, 2008.
- [19] J. R. Graef, L. Kong, and H. Wang. A periodic boundary value problem with vanishing Green’s function. *Appl. Math. Lett.*, 21(2) :176–180, 2008.

- [20] A. Guezane-Lakoud. Initial value problem of fractional order. *Cogent Mathematics*, 2(1) :1004797, 2015.
- [21] A. Guezane-Lakoud and A. Ashyralyeva. Pure and applied mathematics letters.
- [22] M. Hashizume. Minimization problem related to a Lyapunov inequality. *J. Math. Anal. Appl.*, 432(1) :517–530, 2015.
- [23] D. Jiang, J. Chu, D. O’Regan, and R. P. Agarwal. Multiple positive solutions to superlinear periodic boundary value problems with repulsive singular forces. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 286(2) :563–576, 2003.
- [24] M. Jleli, L. Ragoub, and B. Samet. A Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation under a Robin boundary condition. *J. Funct. Spaces*, pages Art. ID 468536, 5, 2015.
- [25] M. Jleli and B. Samet. Lyapunov-type inequalities for a fractional differential equation with mixed boundary conditions. *Math. Inequal. Appl.*, 18(2) :443–451, 2015.
- [26] M. Jleli and B. Samet. Lyapunov-type inequalities for fractional boundary-value problems. *Electron. J. Differential Equations*, pages No. 88, 11, 2015.
- [27] A. A. Kilbas, M. Saigo, and R. Saxena. Generalized mittag-leffler function and generalized fractional calculus operators. *Integral Transforms and Special Functions*, 15(1) :31–49, 2004.
- [28] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. ISBN 978-0-444-51832-3 ; 0-444-51832-0. xvi+523 pp.
- [29] A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo. *Theory and applications of fractional differential equations*, volume 204 of *North-Holland Mathematics Studies*. Elsevier Science B.V., Amsterdam, 2006. ISBN 978-0-444-51832-3 ; 0-444-51832-0. xvi+523 pp.

- [30] N. Li and C. Wang. New existence results of positive solution for a class of nonlinear fractional differential equations. *Acta Math. Sci. Ser. B Engl. Ed.*, 33(3) : 847–854, 2013.
- [31] A. Liapounoff. Problème général de la stabilité du mouvement. *Ann. Fac. Sci. Toulouse Sci. Math. Sci. Phys. (2)*, 9 :203–474, 1907.
- [32] Y. Luchko, F. Mainardi, and S. Rogosin. Professor Rudolf Gorenflo and his contribution to fractional calculus. *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 14(1) :3–18, 2011.
- [33] F. Mainardi. Fractional relaxation-oscillation and fractional diffusion-wave phenomena. *Chaos Solitons Fractals*, 7(9) :1461–1477, 1996.
- [34] F. Mainardi. *Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity*. Imperial College Press, London, 2010. ISBN 978-1-84816-329-4 ; 1-84816-329-0. xx+347 pp. An introduction to mathematical models.
- [35] F. Mainardi, A. Mura, G. Pagnini, and R. Gorenflo. Time-fractional diffusion of distributed order. *J. Vib. Control*, 14(9-10) :1267–1290, 2008.
- [36] S. P. C. Marques and G. J. Creus. *Computational viscoelasticity*. Springer Briefs in Applied Sciences and Technology. Springer, Heidelberg, 2012. ISBN 978-3-642-25310-2 ; 978-3-642-25311-9. xii+124 pp.
- [37] F. Merdivenci Atici and G. S. Guseinov. On the existence of positive solutions for nonlinear differential equations with periodic boundary conditions. *J. Comput. Appl. Math.*, 132(2) :341–356, 2001.
- [38] K. S. Miller and B. Ross. An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations. 1993.
- [39] K. B. Oldham and J. Spanier. The fractional calculus, vol. 111 of mathematics in science and engineering, 1974.
- [40] D. O'Regan and B. Samet. Lyapunov-type inequalities for a class of fractional differential equations. *J. Inequal. Appl.*, pages 2015 :247, 10, 2015.
- [41] D. O'Regan and H. Wang. Positive periodic solutions of systems of second order ordinary differential equations. *Positivity*, 10(2) :285–298, 2006.

- [42] J. Rong and C. Bai. Lyapunov-type inequality for a fractional differential equation with fractional boundary conditions. *Adv. Difference Equ.*, pages 2015 :82, 10, 2015.
- [43] W. Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill Book Co., New York, third edition, 1987. ISBN 0-07-054234-1. xiv+416 pp.
- [44] W. R. Schneider. Completely monotone generalized Mittag-Leffler functions. *Exposition. Math.*, 14(1) :3–16, 1996.
- [45] T. Sun and J. Liu. Lyapunov inequality for dynamic equation with order $n + 1$ on time scales. *J. Dyn. Syst. Geom. Theor.*, 13(1) :95–101, 2015.
- [46] P. J. Torres. Existence of one-signed periodic solutions of some second-order differential equations via a krasnoselskii fixed point theorem. *Journal of Differential Equations*, 190(2) :643–662, 2003.
- [47] H. Wang. On the number of positive solutions of nonlinear systems. *J. Math. Anal. Appl.*, 281(1) :287–306, 2003.
- [48] J. R. L. Webb and M. Zima. Multiple positive solutions of resonant and non-resonant nonlocal boundary value problems. *Nonlinear Anal.*, 71(3-4) :1369–1378, 2009.
- [49] X. Zhang, L. Wang, and Q. Sun. Existence of positive solutions for a class of nonlinear fractional differential equations with integral boundary conditions and a parameter. *Appl. Math. Comput.*, 226 :708–718, 2014.
- [50] Z. Zhang and J. Wang. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second order differential equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 281(1) :99–107, 2003.
- [51] Z. Zhang and J. Wang. On existence and multiplicity of positive solutions to periodic boundary value problems for singular nonlinear second order differential equations. *J. Math. Anal. Appl.*, 281(1) :99–107, 2003.