

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
(ALGER)

FACULTE DE MATHÉMATIQUES



**THÈSE**

**Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT**

en : **MATHÉMATIQUES**

Spécialité : **RECHERCHE OPÉRATIONNELLE :**

**Mathématiques de Gestion**

Par : **Kahina MESLEM**

Sujet :

***PRESERVATION DE LA DISTANCE DANS  
LES GRAPHERS, ET EXTENSIONS***

Soutenue le 14 Décembre 2008, devant un jury composé de :

BERRACHEDI Abdelhafid	Professeur, USTHB	Président.
AÏDER Méziane	Professeur, USTHB	Directeur de thèse
GRAVIER Sylvain	Directeur de recherche, IJF. Grenoble	Co-directeur de thèse
BLIDIA Mostafa	Professeur, USD Blida	Examineur
PAYAN Charles	Directeur de recherche, IJF. Grenoble	Examineur
SEMRI Ahmed	Maître de Conférence, USTHB	Examineur

# Remerciements

Je tiens d'abords à adresser mes vifs remerciements à mes deux encadreurs qui m'ont aidé, m'ont orienté et m'ont guidé afin de réussir cette modeste contribution.

A Monsieur Méziane Aïder, mon directeur de thèse, permettez-moi d'exprimer ma profonde gratitude pour votre aide et vos conseils si précieux durant les moments opportuns.

Recevez, Monsieur Sylvain Gravier, mes plus sincères remerciements pour m'avoir accueilli dans votre laboratoire durant mes stages. Je tiens également à vous exprimer toute ma reconnaissance pour ces trois périodes de thèse que j'ai passées à vos côtés. Au cours de ces dernières, votre grande disponibilité, votre rigueur scientifique, votre enthousiasme et vos précieux conseils m'ont permis de travailler dans les meilleures conditions. Permettez moi de vous adresser toute mon estime et de mon profond respect.

A Laurent Beaudou, thésard à l'institut Fourier de Grenoble ;  
Je tiens à te remercier pour ta disponibilité et ta coopération. Le travail collectif et les nombreuses discussions qu'on avait m'ont permis d'avancer et de mieux voir les différentes facettes du problème en question. Permetts moi ainsi d'exprimer ma gratitude, Laurent.

A Messieurs Berrachedi Abdelhafid, professeur à USTHB, Charles Payan, directeur de recherche et membre du CNRS à Grenoble, Blidia Mostefa, professeur à l'université de USD.Blida, Semri Ahmed, Maître de conférence à l'USTHB :

Je suis très touchée de l'honneur que vous me faites en acceptant de juger ce travail. Je vous remercie pour vos conseils et vos suggestions qui ont permis l'amélioration de ce manuscrit. Veuillez accepter mes plus sincères remerciements pour votre présence dans ce jury et soyez assurés de tout mon respect et de ma profonde gratitude.

A la fin, malgré leur anonymat, je tiens à adresser mes remerciements aux référés des revues scientifiques dont le travail a été soumis. Leurs remarques pertinentes ainsi que leurs conseils judicieux m'ont permis d'améliorer le travail et le rendre plus valeureux.

A mes très chers parents,  
A mes adorables soeurs et frère,  
A mon cousin préféré et à mes grands parents,  
A mon aimable famille,  
A tous mes très chers amis,

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Définitions et notations</b>	<b>9</b>
1.1	Introduction . . . . .	9
1.2	Graphes, Sous-graphes . . . . .	10
1.2.1	Définitions préliminaires sur les graphes . . . . .	10
1.3	Homomorphisme, Isomorphisme . . . . .	12
1.4	Chaînes, cycles, connexité . . . . .	13
1.4.1	Chaînes . . . . .	13
1.4.2	Cycles . . . . .	13
1.4.3	Connexité . . . . .	14
1.5	Distances . . . . .	15
1.6	Intervalles . . . . .	16
1.7	Opérations dans les graphes . . . . .	17
1.7.1	L'union disjointe et le graphe joint . . . . .	17
1.7.2	Le produit cartésien de graphes . . . . .	17
1.7.3	Le produit cartésien de plusieurs facteurs . . . . .	18
1.8	Graphes particuliers . . . . .	19
1.8.1	Les graphes bipartis . . . . .	19
1.8.2	Les hypercubes . . . . .	19
1.8.3	Les graphes de Hamming . . . . .	21
1.9	Complexité algorithmique . . . . .	22
<b>2</b>	<b>Les cubes partiels</b>	<b>24</b>
2.1	Caractérisations des cubes partiels . . . . .	25
2.1.1	Les relations Djoković-Winkler . . . . .	25
2.1.2	La convexité et les cubes partiels . . . . .	29
2.1.3	L'expansion . . . . .	30
2.2	Applications . . . . .	31
2.2.1	Les graphes benzenoïdes . . . . .	32

2.3	Sous-classes des cubes partiels . . . . .	33
2.3.1	Les graphes semi-médians . . . . .	34
2.3.2	Les graphes presque médians . . . . .	35
2.3.3	Les graphes médians . . . . .	36
2.4	La reconnaissance des cubes partiels . . . . .	39
2.4.1	Le plongement isométrique canonique . . . . .	39
<b>3</b>	<b>Les cubes partiels et les subdivisions des graphes</b>	<b>43</b>
3.1	La subdivision de $K_{2,3}$ . . . . .	44
3.2	Définitions et notations . . . . .	44
3.3	Les roues . . . . .	46
3.4	Les fans . . . . .	48
3.4.1	Le diamant . . . . .	48
3.4.2	Les fans . . . . .	49
3.5	L'enveloppe . . . . .	50
3.6	Plongements isométriques des subdivisions d'un graphe complet	52
3.6.1	Le graphe complet $K_5$ . . . . .	52
3.6.2	Les graphes complets $K_n$ . . . . .	56
3.7	Enveloppes généralisées . . . . .	68
3.8	La subdivision du $K_{2,3}$ et les cubes partiels . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Les graphes de Hamming partiels et les subdivisions</b>	<b>84</b>
4.1	Introduction . . . . .	84
4.2	Les plongements isométriques dans les graphes de Hamming .	85
4.2.1	Le plongement canonique . . . . .	85
4.2.2	Caractérisation des graphes de Hamming partiels . . .	86
4.2.3	Les graphes de Hamming partiels et l'étiquetage des arêtes . . . . .	88
4.3	Les subdivisions des graphes et les graphes de Hamming partiels	90
4.3.1	Les graphes complets . . . . .	90
4.3.2	Les roues . . . . .	93
4.3.3	Les fans . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Les graphes distance héréditaire</b>	<b>99</b>
5.1	Graphes distance héréditaire . . . . .	100
5.2	Caractérisations des graphes $dh$ . . . . .	101
5.3	Optimisation dans les graphes $dh$ . . . . .	104
5.4	Sous-classes des graphes $dh$ . . . . .	105

5.4.1	Les cographes . . . . .	105
5.4.2	Les graphes $dh$ bipartis . . . . .	106
5.4.3	Les graphes ptolémaïques . . . . .	107
5.4.4	Les graphes blocs . . . . .	108
5.5	Extension des graphes $dh$ . . . . .	108
5.5.1	Les graphes de parité . . . . .	108
5.6	Vers une généralisation paramétrique des graphes $dh$ . . . . .	110
<b>6</b>	<b>Vers une généralisation des graphes distance héréditaire</b>	<b>111</b>
6.1	Définitions et résultats préliminaires . . . . .	111
6.2	Les graphes presque distance héréditaire . . . . .	112
6.3	Les graphes 2-distance héréditaire . . . . .	113
6.4	Caractérisations des graphes $DH(k, +)$ . . . . .	114
<b>7</b>	<b>Conclusion générale</b>	<b>126</b>

# Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute avec les travaux d'Euler au 18<sup>ème</sup> siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tels que celui des ponts de Königsberg : les habitants de Königsberg se demandaient s'il était possible, en partant d'un quartier quelconque de la ville, de traverser tous les ponts sans passer deux fois par le même et de revenir à leur point de départ, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes.

La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie (isomères), la biologie, les sciences sociales (réseaux de transports), gestion de projets, informatique (topologie des réseaux, complexité algorithmique, protocoles de transferts), etc.

Depuis le début du 20<sup>ème</sup> siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux de König, Menger, Cayley puis de Berge et d'Erdős. De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments. Tel est le cas des réseaux de communication, des réseaux routiers, et des circuits électriques. Ils sont des objets mathématiques étranges : plutôt simples de prime abord, ils se montrent vite d'une complexité insoupçonnée et nous réservent bientôt des surprises. Toutefois, ils font preuve d'une souplesse qui incite à leur utilisation dans nombre d'applications pratiques et théoriques : modélisation de flux économiques entre régions géographiques, de molécules chimiques, élaboration d'horaires soumis à diverses contraintes, modélisation de structures architecturales...

Dès que nous nous intéressons à un problème où apparaissent des relations (quantifiables ou non) entre un nombre fini de constituants, nous envisageons bien leur utilisation.

Une des notions les plus répandues dans la théorie des graphes est bien la distance. Souvent utilisée dans les tests d'isomorphisme, les opérations dans

les graphes, les problèmes d'hamiltonicité, et les problèmes de convexité, elle est définie comme étant la longueur de la plus courte chaîne dans le graphe. Comme plusieurs algorithmes dépendent de l'idée de trouver une collection de chaînes et optimiser sa longueur, la notion de distance a été très envahissante vu le nombre de travaux établis dans ce sens.

Cette thèse s'intéresse à la préservation de la distance dans un graphe  $G$  soit en plongeant  $G$  dans un autre graphe ayant une structure bien définie, soit en gardant les mêmes distances de  $G$  dans les sous-graphes induits connexes. Après avoir introduit les notions de base dans un graphe au cours du premier chapitre, nous parlerons de la classe des hypercubes, ou plus généralement celle des graphes de Hamming issue directement du produit cartésien des graphes. Les cubes partiels sont des graphes pouvant être plongés dans l'hypercube de façon que la distance dans de tels graphes est la même dans l'hypercube. Ainsi, nous consacrons le second chapitre à un survey sur cette classe de graphes tout en exposant les propriétés caractéristiques, le problème de reconnaissance, et certaines sous-classes de ces graphes. Puis, nous étudions, durant le chapitre 3, l'aspect structurel des cubes partiels en les déterminant parmi toutes les subdivisions d'un graphe donné ou d'une classe de graphes en général. Voulant bien généraliser ces plongements, dits isométriques, tout en les appliquant dans les graphes de Hamming, nous étudions des subdivisions des graphes comme sous-graphes isométriques des graphes de Hamming dans le chapitre 4.

Dans le second contexte de la préservation des distances dans les graphes, les graphes distance héréditaire sont ceux dont la distance est préservée dans chaque sous-graphe induit connexe. Durant le cinquième chapitre, nous citerons les travaux faits dans cette classe de graphes puis nous focalisons notre travail sur une caractérisation d'une classe de graphes formant une extension paramétrique des graphes distance héréditaire. Cette caractérisation sera donnée sous forme de sous-graphes induits interdits dans le chapitre 6.

A la fin, nous clôturons notre travail par une conclusion générale tout en exposant les problèmes ouverts dans les deux directions de recherches englobant bien la distance et sa préservation dans les graphes.

# Chapitre 1

## Définitions et notations

### 1.1 Introduction

Les graphes constituent une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et des arêtes. Les derniers travaux en théorie des graphes sont souvent effectués par des informaticiens, du fait de l'importance qu'y revêt l'aspect algorithmique. Effectivement, il s'agit essentiellement de modéliser des problèmes. Nous exprimons le problème en termes de graphes et ensuite il devient un problème de la théorie des graphes que nous savons le plus souvent résoudre car il rentre dans une catégorie de problèmes connus. Il suffit d'avoir parcouru des connaissances dans la théorie des ensembles, d'algèbre linéaire ainsi que de topologie pour être à l'aise avec les différentes définitions. Nous allons introduire le vocabulaire de base de la théorie des graphes utilisé dans ce manuscrit. Les termes employés sont ceux du langage commun de la géométrie euclidienne.

Ainsi, ce chapitre est destiné principalement au lecteur non familier avec les concepts de la théorie des graphes, et la notion de la distance dans les graphes, en particulier. Nous commencerons d'abord par des notions théoriques de graphe en général, puis certains invariants, et les hypercubes. Sachant bien que la terminologie utilisée est celle des ouvrages de Berge [13] de Buckley et Harary [23] et de Imrich et Klavžar [57].

## 1.2 Graphes, Sous-graphes

### 1.2.1 Définitions préliminaires sur les graphes

La définition des graphes correspond uniquement à celle des graphes finis, non orientés.

**Définition 1.2.1.** Un graphe  $G$  consiste en un ensemble fini non vide  $V = V(G)$  de  $n$  éléments appelés **sommets** et un ensemble  $E = E(G)$  de  $m$  paires de sommets de  $V$ .

Le graphe  $G$  est, ainsi, dit d'**ordre**  $n$  et de **taille**  $m$ . La paire de sommets  $e = \{u, v\}$  reliant un sommet  $u$  à un autre sommet  $v$  est dite **arête** de  $G$ . Elle est notée  $uv$ .

Une représentation du graphe s'effectue à l'aide d'une figure géométrique dans laquelle les sommets sont des points et toute arête  $e = uv$  est une ligne joignant les points  $u$  et  $v$ .

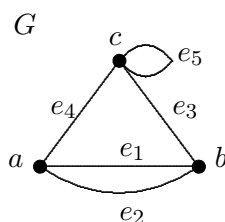


FIG. 1.1 –

Dans le graphe  $G$  de la figure. 1.1, nous avons :

- L'arête  $e_1 = ab$  relie les **extrémités**  $a$  et  $b$ . Ces sommets sont donc **adjacents** (ou nous dirons que c'est des sommets **voisins**).
- L'arête  $e_1$  a  $b$  comme une de ses deux extrémités. Nous dirons ainsi que  $e_1$  est **incidente** à  $b$ .
- L'arête  $e_1$  et  $e_3$  ont une extrémité commune  $b$ . Ces arêtes sont dites **adjacentes**. Dans le cas contraire, elles sont dites **disjointes**.
- L'arête  $e_5$  relie deux sommets confondus. Une telle arête est dite **boucle**.
- Si plusieurs arêtes relient la même paire de sommets, ces arêtes sont dites **parallèles**. Les arêtes  $e_1$  et  $e_2$  sont des arêtes parallèles.

Tout au long de ce travail, nous considérons uniquement les graphes simples, c'est à dire les graphes sans boucles et sans arêtes parallèles.

**Définition 1.2.2.** Soient  $G$  un graphe et  $v$  un sommet de  $G$ .

- L'ensemble des voisins d'un sommet  $v$  dans  $G$  est noté  $N_G(v)$  et est appelé **voisinage** de  $v$ .
- Le **degré** du sommet  $v$  dans  $G$ , noté  $d_G(v)$ , est le nombre d'arêtes incidentes à  $v$ .
- Un **voisinage fermé** de  $v$ , que nous notons  $N_G[v]$ , l'ensemble des voisins de  $v$  union  $v$  i.e.  $N_G[v] = N_G(v) \cup \{v\}$ .
- Si le sommet  $v$  n'a pas de voisin dans  $G$  (i.e.  $N_G(v) = \emptyset$ ) alors il est dit **isolé**.
- Si le sommet  $v$  possède un unique voisin (i.e.  $|N_G(v)| = 1$ ) alors il est dit **pendant**.
- Deux sommets distincts ayant le même voisinage (resp. le même voisinage fermé) sont dits **faux jumeaux** (resp. **vrais jumeaux**). Voir la figure. 1.2.

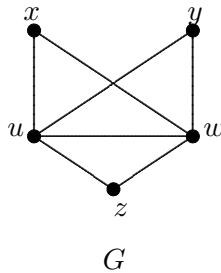


FIG. 1.2 – Les sommets  $x$  et  $y$  (resp.  $u$  et  $w$ ) sont des faux jumeaux (resp. vrais) jumeaux puisque  $N_G(x) = N_G(y)$  (resp.  $N_G[u] = N_G[w]$ ).

Si aucune confusion ne peut avoir lieu, nous noterons  $N(v)$ ,  $N[v]$  et  $d(v)$  au lieu de  $N_G(v)$ ,  $N_G[v]$  et  $d_G(v)$ .

**Théorème 1.2.1.** [13] *La somme des degrés des sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre de ses arêtes.*

Ce théorème est appelé 'le premier théorème de la théorie des graphes'. Il implique que le nombre de sommets de degré impair est pair.

Un graphe dont chaque sommet est de degrés  $r$  est dit  **$r$ -régulier**. Un graphe 3-régulier est aussi dit **cubique**. D'après le théorème 1.2.1, chaque graphe cubique a un nombre pair de sommets.

**Définition 1.2.3.** *Soit  $G$  un graphe.*

Le **graphe complémentaire** de  $G$  est un graphe  $\overline{G}$  ayant  $V$  comme ensemble de sommets et tel que deux sommets sont adjacents dans  $\overline{G}$  si et seulement s'ils ne le sont pas dans  $G$ .

**Définition 1.2.4.** Soit  $G$  un graphe.

- Un **sous-graphe**  $H$  de  $G$  est un graphe ayant tous ses sommets et ses arêtes dans  $G$ .
- Si  $H$  a le même ensemble de sommets que  $G$ , le sous-graphe  $H$  est dit **partiel**.
- Pour tout ensemble  $S \subset V(G)$ , le **sous-graphe induit** (**engendré**) par  $S$ , noté  $\langle S \rangle$ , est le sous-graphe maximal suivant l'ensemble de sommets (i.e. contient toutes les arêtes de  $G$  reliant tous les sommets de  $H$ ).

Le terme sous-graphe est généralement utilisé pour désigner un sous-graphe induit.

**Exemple 1.2.1.** Soient  $G = (V, E)$  un graphe,  $X \subset V$ ,  $Y \subset E$ ,  $x \in V$  et  $e \in E$ .

Le sous-graphe (resp. sous-graphe partiel) induit par  $V \setminus X$  (resp.  $E \setminus Y$ ) est noté  $G \setminus X$  (resp.  $G \setminus Y$ ).

Lorsque  $X = \{x\}$ ,  $G - \{x\}$  est noté  $G \setminus x$ .

Le graphe partiel résultant suite à la suppression de l'arête  $e$  est noté  $G - e$  i.e.  $(G - e = (V, E \setminus e))$ .

L'ensemble  $X$  est dit **stable** ou **indépendant** de  $G$  si le sous-graphe  $\langle X \rangle$  ne contient aucune arête.

L'ensemble  $X$  est dit **clique** d'un graphe  $G$  si tous deux sommets distincts de  $X$  sont reliés par une et une seule arête.

Un ensemble d'arêtes deux à deux disjointes est dit **couplage**.

## 1.3 Homomorphisme, Isomorphisme

Un graphe est complètement défini à partir d'une paire d'ensembles  $V$  et  $E$ . Cependant, nous notons que la représentation d'un même graphe peut se faire d'une manière différente :

**Définition 1.3.1.** Soient  $G_1 = (V_1, E_1)$ ;  $G_2 = (V_2, E_2)$  deux graphes et  $f$  une application tels que :  $f : V_1 \rightarrow V_2$

- L'application  $f$  est un **homomorphisme** de  $G_1$  dans  $G_2$  si :  $uv \in E_1$  alors  $f(u)f(v) \in E_2$ .
- L'application  $f$  définit un **isomorphisme** de  $G_1$  dans  $G_2$  si l'homomorphisme  $f$  est bijectif et l'application  $f^{-1}$  est un homomorphisme. Ainsi,  $G_1$  et  $G_2$  sont **isomorphes**.



FIG. 1.3 –

Dans la figure. 1.3, les graphes  $G$  et  $H$  sont isomorphes.

Un graphe  $G$  est **planaire** s'il peut être dessiné dans le plan de façon à ce que les arêtes ne se croisent pas (il admet une représentation planaire). Dans cette dernière représentation, le graphe  $G$  divise le plan en régions appelées **faces** qui sont limitées par les arêtes du graphe.

## 1.4 Chaînes, cycles, connexité

### 1.4.1 Chaînes

Une séquence  $P = u_0, u_1, \dots, u_k$  de sommets distincts de  $G = (V, E)$ , telle que pour tout  $i = 1, \dots, k - 1$ , les sommets consécutifs  $u_i$  et  $u_{i+1}$  sont adjacents est appelée  $u_0u_k$ -**chaîne** de longueur  $k$  et d'ordre  $k + 1$  (notée  $P(u_0, u_k)$  ou  $P_{k+1}$ ).

Ainsi cette chaîne  $P(u_0, u_k)$  relie les sommets  $u_0$  et  $u_k$  en passant par les sommets  $u_1, u_2, \dots, u_{k-1}$ . Ces derniers sont appelés des **sommets internes** de la chaîne. Pour tous indices  $r$  et  $s$  tels que  $0 \leq r < s \leq k$ ,  $P(u_r, u_s) = u_r, u_{r+1}, \dots, u_s$  est dite **sous-chaîne** de  $P$ .

### 1.4.2 Cycles

Un **cycle** de longueur  $n$ , noté  $C_n$ , est une chaîne  $u_1, u_2, \dots, u_n$  avec une arête reliant les extrémités  $u_1$  et  $u_n$ .

Un cycle est dit **pair** (resp. **impair**) si sa longueur est paire (resp. impaire).

Une **corde** d'un cycle  $C_n$  ( resp. chaîne  $P$  ) est une arête reliant deux sommets non consécutifs de  $C_n$  (resp. de  $P$ ).

Une chaîne  $P$  ( resp. cycle  $C_n$  ) n'ayant aucune corde est dit(e) chaîne (resp. cycle) **élémentaire**(e).

Une chaîne élémentaire est aussi dite **induite**.

Une plus courte  $uv$ -chaîne induite i.e. de longueur minimum est une  **$uv$ -géodésique**.

### 1.4.3 Connexité

Un graphe  $G = (V, E)$  est **connexe** si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $V$ , il existe une chaîne reliant  $u$  à  $v$ .

Nous notons que la relation de connexité ( $u\mathcal{R}v$  ssi  $u = v$  ou  $\exists$  une  $uv$ -chaîne dans  $G$ ) est une relation d'équivalence.

Les classes d'équivalence correspondantes sont appelées **composantes connexes**. Celles-ci sont des sous-graphes connexes maximaux. Ainsi, lorsque  $G$  contient au moins deux composantes connexes, il est dit non connexe.

De ce fait, nous précisons que les graphes que nous traitons sont des graphes connexes (une unique classe d'équivalence suivant  $\mathcal{R}$ ). Parmi les

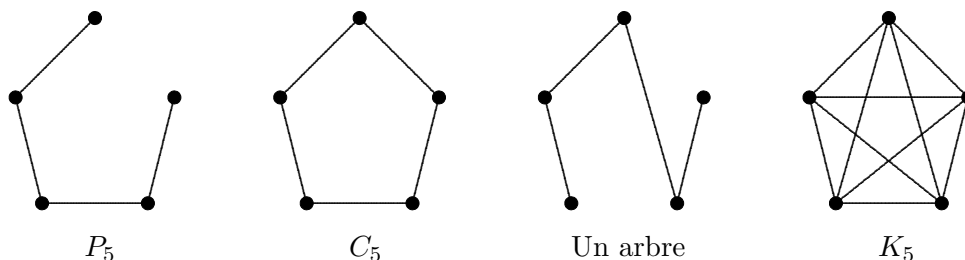


FIG. 1.4 – Des graphes simples et connexes d'ordre 5.

graphes simples connexes les plus particuliers, nous pouvons citer la chaîne  $P_n$  d'ordre  $n$ , le cycle élémentaire  $C_n$  de longueur  $n$ , l'**arbre** (graphe connexe sans cycle induit) et le **graphe complet**  $K_n$  (graphe d'ordre  $n$  où toute paire de sommets distincts est reliée par une arête). Voir la figure. 1.4.

Un **point d'articulation** d'un graphe  $G$  est un sommet  $v$  de  $G$  dont la suppression (i.e.  $G - v$ ) augmente le nombre de composantes connexes. Un **isthme**  $e$  est une arête de  $G$  telle que le graphe  $G - e$  a un nombre de composantes connexes plus grand d'une unité par rapport à celui du graphe  $G$ .

**Définition 1.4.1.** Soit  $G$  un graphe.

- **La connectivité**  $k(G)$  est le nombre minimum de sommets dont la suppression déconnecte le graphe  $G$  ou le réduit à un sommet isolé.
- Le graphe  $G$  est dit  **$h$ -connexe** si sa connectivité  $k(G)$  est supérieure ou égale à  $h$ .
- Un **bloc** est un ensemble de sommets  $A$  ( $A \subseteq V$ ) dont le sous-graphe engendré est connexe sans points d'articulation, et maximal avec cette propriété. Autrement dit,  $\langle A \rangle$  est soit 2-connexe si  $|A| \geq 3$ , soit un isthme si  $|A| = 2$ , soit un point isolé ( $|A| = 1$ ).

## 1.5 Distances

**Définition 1.5.1.** Soient  $G$  un graphe et  $u, v$  deux sommets de  $G$ .

La fonction **distance**  $d_G$  est définie comme suit :

$$d_G : V \times V \rightarrow \mathbb{N}$$

$(u, v) \mapsto d_G(u, v)$  où  $d_G(u, v)$  est la longueur d'une plus courte  $uv$ -chaîne dans  $G$ .

L'ensemble de sommets de  $V$  muni de cette fonction est un espace métrique fini (au sens topologique). En effet, pour tout triplet de sommets  $\{u, v, w\}$  de  $G$ ,  $d_G$  satisfait les trois axiomes de la distance :

1.  $d_G(u, v) \geq 0$  et  $d_G(u, v) = 0$  ssi  $u = v$  ;
2.  $d_G(u, v) = d_G(v, u)$  ;
3.  $d_G(u, v) \leq d_G(u, w) + d_G(w, v)$ .

L'axiome 3. est connu sous le nom d'**inégalité triangulaire**.

L'**excentricité** d'un sommet  $u$  d'un graphe  $G$ , notée  $e_G(u)$ , est la longueur d'une plus grande chaîne élémentaire issue de  $u$ .

Le **diamètre** d'un graphe  $G$ , noté  $diam(G)$ , est la plus grande excentricité dans  $G$ .

Pour tout sommet  $v$ ,  $N_i(v)$  est l'ensemble des sommets à distance  $i$  de  $v$ . Ainsi  $N_0(v) = \{v\}$  et  $N_1(v) = N(v)$ .

Une **décomposition en couches (niveaux)** des sommets de  $G$  relative au sommet  $v$  est une partition de l'ensemble des sommets  $V(G)$  en  $k = e(v) + 1$  parties disjointes  $N_0(v), N_1(v), N_2(v), \dots, N_k(v)$ . La **partie horizontale**  $H(G, v)$  de  $G = (V, E)$  relativement au sommet  $v$  est le graphe partiel  $(V, F)$  de  $G$  tel que  $F$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  reliant les sommets de la même couche et la **partie verticale** de  $G$  notée  $V(G, v)$  est le graphe partiel complémentaire de  $H(G, v)$  dans  $G$ .

**Définition 1.5.2.** *Un sous-graphe  $H$  de  $G$  est dit **isométrique** si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $H$  :  $d_H(u, v) = d_G(u, v)$ .*

**Proposition 1.5.1.** *[57] Soient  $G$  un graphe et  $C$  un plus petit cycle ou un plus petit cycle impair de  $G$ . Alors  $C$  est isométrique dans  $G$ .*

En effet, si  $C$  est le plus petit cycle impair dans  $G$  non isométrique, il existe une plus courte chaîne reliant deux sommets de  $C$ . Celle-ci crée avec le cycle  $C$  un cycle impair d'ordre plus petit que celui de  $C$ . Contradiction. Par conséquent, si  $C$  est le plus petit cycle dans  $G$ , il ne peut pas être impair. En supposant qu'il est pair non isométrique,  $C$  contient deux sommets dont la géodésique n'est pas dans le cycle. Cette chaîne crée un cycle plus petit que  $C$ . Contradiction avec les hypothèses.

## 1.6 Intervalles

**Définition 1.6.1.** *Pour toute paire  $\{u, v\}$  de sommets de  $G$ , l'**intervalle** entre  $u$  et  $v$ , noté  $I_G(u, v)$ , est l'ensemble des sommets de  $G$  qui sont sur une plus courte  $uv$ -chaîne.*

Un sommet  $w$  appartient à l'intervalle  $I_G(u, v)$  ssi  $d_G(u, v) = d_G(u, w) + d_G(w, v)$ .

La fonction intervalle  $I_G$  est définie comme suit :

$$I_G : V \times V \rightarrow \mathcal{P}(V)$$

$$(u, v) \mapsto I_G(u, v) \text{ où } \mathcal{P}(V) \text{ est l'ensemble des sous-ensembles de } V.$$

Dans tout ce qui suit, nous notons  $d_G$  et  $I_G$  par  $d$  et  $I$  sauf si une confusion est à craindre.

Dans la proposition suivante, nous avons cité certaines principales propriétés de la fonction d'intervalle :

**Proposition 1.6.1.** *[66] Soit  $G$  un graphe de fonction intervalle  $I$ . Alors pour tous  $u, v, x, y$  sommets de  $G$ , nous avons :*

- $u, v \in I(u, v)$  ;
- $I(u, v) = I(v, u)$  ;
- Si  $x \in I(u, v)$  alors  $I(u, x) \subset I(u, v)$  ;
- Si  $x \in I(u, v)$  alors  $I(u, x) \cap I(x, v) = \{x\}$  ;
- Si  $x \in I(u, v)$  et  $y \in I(u, x)$  alors  $x \in I(y, v)$ .

Un sous-graphe  $H$  d'un graphe  $G$  est dit **convexe** si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $H$  l'intervalle  $I_G(u, v)$  est dans  $H$ .

Un graphe  $G$  est dit **intervalle monotone** si tous ces intervalles sont convexes.

## 1.7 Opérations dans les graphes

Il est plutôt commode d'exprimer la structure d'un graphe donné en termes de graphes plus simples ou à l'aide de graphes de taille petite. Cela permet d'utiliser des preuves par décomposition. Et comme conséquence, des algorithmes efficaces peuvent être déduits. Une telle expression se fait généralement à l'aide d'opérations classiques dans les graphes. Pour définir certaines de ces opérations, considérons  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes ayant l'ensemble des sommets  $V_1$  et  $V_2$  et l'ensemble des arêtes  $E_1$  et  $E_2$  respectivement :

### 1.7.1 L'union disjointe et le graphe joint

L'**union disjointe** de  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe  $G = (V, E) = G_1 \cup G_2$  où  $V = V_1 \cup V_2$  et  $E = E_1 \cup E_2$ . Voir la figure. 1.5.

Le graphe **joint** défini par Zykov [78], noté  $G_1 + G_2$  où  $V_1 \cup V_2$  est l'ensemble de sommets et  $E_1 \cup E_2 \cup E'$  est ensemble d'arêtes avec  $E'$  est l'ensemble de toutes les arêtes joignant les éléments de  $V_1$  et  $V_2$ . Voir la figure. 1.5.

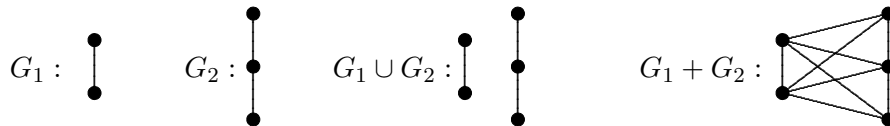


FIG. 1.5 – L'union disjointe de  $G_1$  et  $G_2$  et le graphe joint  $G_1 + G_2$ .

### 1.7.2 Le produit cartésien de graphes

Le **produit cartésien** de  $G_1$  et  $G_2$  est le graphe  $G_1 \square G_2$  tel que  $V(G_1 \square G_2) = V(G_1) \times V(G_2)$ .

L'arête  $(u_1, u_2)$  est adjacente à l'arête  $(v_1, v_2)$  si et seulement si :

$$u_1 = v_1 \text{ et } u_2v_2 \in E(G_2) \text{ ou bien}$$

$$u_2 = v_2 \text{ et } u_1v_1 \in E(G_1).$$

Voir la figure. 1.6 où le graphe est le produit cartésien de deux graphes complets  $K_2$  et  $K_3$ .

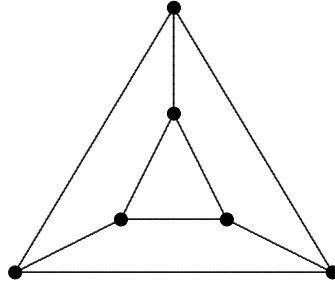


FIG. 1.6 –  $K_2 \square K_3$

Le produit cartésien a été longuement utilisé en littérature et des propriétés algébriques en découlent de cette opération :

- Le graphe  $K_1$  est l'élément neutre suivant cette opération puisque :  $K_1 \square G = G \square K_1 = G$  pour tout graphe  $G$ .
- L'application  $\phi : V(G \square H) \rightarrow V(H \square G)$   
 $(u, v) \mapsto \phi(u, v) = (v, u)$   
est un isomorphisme. Ainsi, le produit cartésien est commutatif.
- De plus, nous avons la proposition suivante :

**Proposition 1.7.1.** [57] *Le produit cartésien est associatif dans l'ensemble des graphes.*

Une des propriétés du produit cartésien est qu'il préserve les structures d'espaces métriques.

**Corollaire 1.7.1.** [57] *Soient  $(u, v)$  et  $(x, y)$  deux sommets arbitraires d'un produit cartésien  $G_1 \square G_2$ . Alors :*

$$d_{G_1 \square G_2}((u, v)(x, y)) = d_{G_1}(u, x) + d_{G_2}(v, y)$$

### 1.7.3 Le produit cartésien de plusieurs facteurs

Pour  $k > 2$ , soient  $G_1, G_2, \dots, G_k$  des graphes ayant  $V_1, V_2, \dots, V_k$  et  $E_1, E_2, \dots, E_k$  ensemble de sommets et ensemble d'arêtes respectivement. D'après

la proposition 1.7.1, le produit cartésien des  $G_i$  ( $i = 1, \dots, k$ ) sera noté :  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$ .

Pour tout  $i = 1, \dots, k$ , les applications  $p_i$  définies comme suit :

$$p_i : V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \rightarrow V_i$$

$$(u_1, u_2, \dots, u_k) \mapsto u_i$$

sont appelées **projections**.

**Lemme 1.7.1.** [57] Soient  $G = G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  et  $u, v \in G$ . Alors :

$$d_G(u, v) = \sum_{i=1}^k d_{G_i}(p_i(u), p_i(v))$$

## 1.8 Graphes particuliers

### 1.8.1 Les graphes bipartis

- Le graphe  $G = (V, E)$  est dit **biparti** si  $V$  peut être partitionné en deux stables  $V_1$  et  $V_2$ . Ainsi, deux sommets sont voisins s'il appartiennent à des stables différents.
- Un graphe  $G = (V_1 \cup V_2, E)$  biparti est dit **biparti complet** si un quelconque sommet de  $V_1$  est adjacent à un quelconque sommet de  $V_2$ . Il est dans ce cas noté  $K_{n_1, n_2}$  où  $n_1 = |V_1|$  et  $n_2 = |V_2|$ . Voir l'exemple du graphe biparti complet  $K_{3,3}$  donné dans la figure. 1.7.
- Un graphe  $G$  est dit  **$p$ -parti** ( $p \geq 2$ ) si  $V$  peut être partitionné en  $p$  stables  $V_1, V_2, \dots, V_p$ .
- Le graphe  $G$  est dit  **$p$ -parti complet** si  $G$  est  $p$ -parti ( $p \geq 2$ ) et chaque sommet de  $V_i$  est adjacent à chacun des sommets de  $V_j, \forall i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$  et  $i \neq j$ .  
Le graphe  $G$  est noté  $K_{v_1, v_2, \dots, v_p}$  où  $v_j = |V_j|, \forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Voir la figure. 1.7 où le graphe multiparti complet  $K_{1,1,2}$  est isomorphe à  $K_4 - e$ . Une telle configuration est dite **diamant**. L'arête  $xy$  de la figure 1.7 (a) est dite **corde** du diamant.

**Proposition 1.8.1.** [13] Un graphe  $G$  est biparti si et seulement s'il n'a pas de cycle ou tous ces cycles sont de longueur

### 1.8.2 Les hypercubes

Les **hypercubes** constituent la plus simple classe de graphes issue des produits cartésiens des graphes. Ils sont connus sous le nom de  **$n$ -cube**. Ils

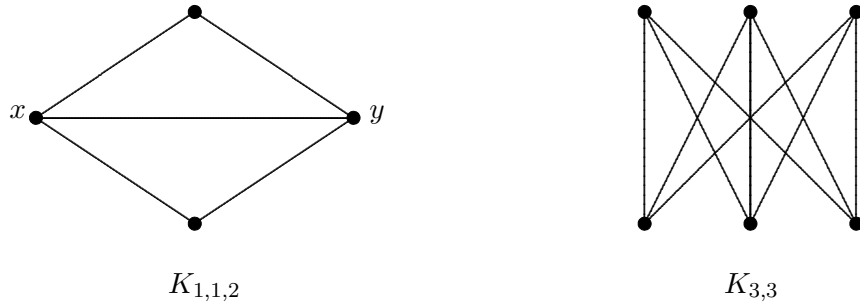


FIG. 1.7 –

sont définis comme suit :

- L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $Q_n$  est le graphe dont les sommets représentent les  $n$ -uplets de  $\{0, 1\}^n$ . Deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une composante.
- Un sommet  $x$  de  $Q_n$  sera noté  $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$  où  $x^i$  est la  $i$ -ème composante du  $n$ -uplet correspondant au sommet  $x$ .
- Nous notons que les  $n$ -uplets représentent des vecteurs caractéristiques d'un sous-ensemble de  $n$  éléments. Le graphe de la figure. 1.8 en est un exemple. A gauche, les sommets sont étiquetés par des 3-uplets où deux sommets sont adjacents s'il diffèrent d'une composante. A droite, chacun de ces uplets représente un vecteur caractéristique d'un sous-ensemble de  $\{1, 2, 3\}$ . Par exemple  $\{2, 3\}$  correspond à 011. Deux sommets sont adjacents si la différence symétrique des sous-ensembles correspondants est réduite à un seul élément.
- Les hypercubes sont obtenus à partir d'un produit cartésien appliqué au graphe complet  $K_2$ . En fait,  $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$  pour  $n \geq 0$  avec  $Q_0 = K_1$ .

**Proposition 1.8.2.** *Soit  $Q_n$  un hypercube. Alors :*

- i). L'hypercube  $Q_n$  est connexe et biparti,  $n$ -régulier et a un diamètre égal à  $n$  ;*
- ii). L'hypercube  $Q_n$  satisfait :  $|V(Q_n)| = 2^n$  et  $E(Q_n) = n2^{n-1}$  ;*
- iii). Pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  dans  $Q_n$ , le sous-graphe induit par  $I(u, v)$  est un hypercube de dimension  $d(u, v)$ .*

Pour tout sommet  $v$  de l'hypercube  $Q_n$ , nous notons par  $Q_n^-$  le sous-graphe de  $Q_n$  induit par tous ses sommets excepté  $v$ .

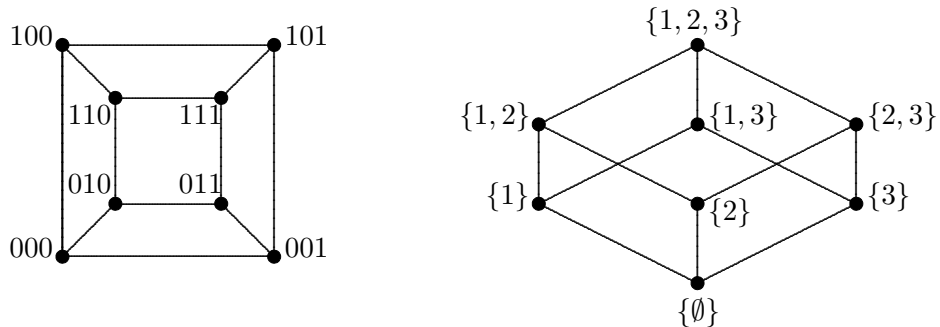


FIG. 1.8 –

### 1.8.3 Les graphes de Hamming

La définition de l'hypercube peut être généralisée comme suit.

- Ainsi un graphe  $G$  est dit de **Hamming** s'il peut être formulé comme suit :

$$G = \underbrace{K_{k_1} \square K_{k_1} \square \dots \square K_{k_1}}_{d \text{ fois}} \text{ avec } k_i \geq 1 \ i = 1, \dots, d \text{ et } d \geq 2.$$

- Un graphe **de Hamming généralisé** est le graphe obtenu comme suit :

$$G = \underbrace{K_{k_1} \square K_{k_1} \square \dots \square K_{k_1}}_{d_1 \text{ fois}} \square \underbrace{K_{k_2} \square K_{k_2} \square \dots \square K_{k_2}}_{d_2 \text{ fois}} \square \dots \square \underbrace{K_{k_r} \square K_{k_r} \square \dots \square K_{k_r}}_{d_r \text{ fois}}.$$

$$k_i \geq 1 \ i = 1, \dots, r \text{ et } d \geq 2.$$

- Dans ce manuscrit, nous utilisons les deux types de graphes de Hamming. Comme aucune des confusions est risquée d'apparaître, nous employerons la terminologie "graphe de Hamming" pour ces deux types des graphes.
- Le graphe de la figure. 1.6 est de Hamming puisqu'il est isomorphe à  $K_2 \square K_3$ .
- Un graphe de Hamming est un hypercube si et seulement si  $k_i = 2$  pour tout  $i$ . De plus, les hypercubes sont les seuls graphes de Hamming bipartis.
- Par ailleurs, d'après la proposition 1.8.2 l'intervalle  $I(u, v)$  entre deux sommets  $u$  et  $v$  dans un hypercube induit un  $d(u, v)$ -cube. Cette proposition se généralise dans la classe des graphes de Hamming :

**Proposition 1.8.3.** Soient  $u$  et  $v$  deux sommets à distance  $r$  dans un graphe de Hamming. Alors,  $I(u, v)$  induit un hypercube de dimension  $r$ .

## La distance de Hamming

Définie par Richard Hamming, cette distance est utilisée en informatique et dans les réseaux de télécommunications. Elle joue un rôle important en théorie algorithmique et celle des codes correcteurs. Elle permet de quantifier la différence entre deux séquences de symboles :

- Un ensemble de symboles ou lettres est dit **alphabet** et est noté  $\Sigma$ .
- Pour un alphabet fini  $\Sigma$ , une séquence finie de lettres est dite **mot**. Si cette séquence contient uniquement des lettres de l'alphabet  $\{0, 1\}$ , le mot sera dit **binnaire**.
- Pour deux uplets de même longueur  $w_1$  et  $w_2$  ayant des éléments dans  $\Sigma$ , la **distance de Hamming** est le nombre de positions pourquels  $w_1$  et  $w_2$  sont différents.
- Les sommets de l'hypercube  $Q_n$  représentent l'ensemble des mots de longueur  $n$  sur l'alphabet  $\{0, 1\}$ . La distance entre deux sommets quelconques dans  $Q_n$  correspond à la distance de Hamming entre les mots correspondants.

## 1.9 Complexité algorithmique

La théorie de la complexité algorithmique s'intéresse à l'estimation de l'efficacité des algorithmes. Elle s'attache à la question suivante : "Entre différents algorithmes réalisant une même tâche, quel est le plus rapide et dans quelles conditions?"

Dans les années soixante et au début des années soixante dix, alors que des algorithmes fondamentaux (tels que les algorithmes de Kruskal ou de Prim) ont été trouvés, on ne mesurait pas leur efficacité. On se contentait de dire qu'un algorithme se réalise en un temps donné en utilisant un langage précis. Une telle démarche rendait difficile la comparaison des algorithmes entre eux. La complexité d'un algorithme a donc permis de mesurer les performances des algorithmes. Elle évalue un majorant du nombre d'opérations élémentaires maximum que nous devons effectuer pour obtenir le résultat cherché.

Un algorithme est dit **polynomial** s'il existe un polynôme  $p$  tel que le nombre d'instructions exécutées par le processus soit au plus  $p(n)$ , où le maximum est pris sur toutes les données d'entrée de taille  $n$ . Ceci dit, un problème est polynomial s'il peut être résolu par un algorithme formalisé en termes de machine de Turing (modèle formel mais universel de calculateur)

en temps polynomial par rapport à la taille des données.

Un **problème de décision** est celui dont le résultat binaire est soit "oui" ou "non". Autrement dit la question du problème se formalise comme suit : "La donnée d'entrée possède-t-elle la propriété suivante?"

L'ensemble des problèmes de décision polynomiaux constitue **la classe  $\mathcal{P}$** . Les problèmes d'optimisation combinatoire dans les graphes dont le résultat est plus complexe, comme ceux ayant réponse à la question suivante : "Trouver un sous-ensemble de  $E$  qui satisfait une condition  $F$  et tel qu'une valeur de  $F$  soit maximale" se ramènent souvent à des problèmes de décision. Comme dire par exemple : "Existe-t il un sous-ensemble de  $E$  qui satisfait une condition  $F$  et tel que la valeur de  $F$  soit majorée?". Mais cela reste toujours à trouver des sous-ensembles en question.

Un problème est  $\mathcal{NP}$  s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

On conjecture qu'il existe des problèmes de type  $\mathcal{NP}$  qui n'ont pas d'algorithme polynomial. Cette conjecture a été classée comme l'un des principaux problèmes des mathématiques lors d'un récent Congrès Mondial des Mathématiques.

Les problèmes  $\mathcal{NP}$ -**complets** sont les plus difficiles de la classe  $\mathcal{NP}$ . La notion de problèmes  $\mathcal{NP}$ -complet est basée sur celle de la réduction polynômiale définie comme suit. Un problème de reconnaissance ( $P_1$ ) se réduit polynomialement à un autre ( $P_2$ ), s'il existe un algorithme pour ( $P_1$ ) qui fait appel à un algorithme de résolution pour ( $P_2$ ) et si cet algorithme de résolution de ( $P_1$ ) est polynômial lorsque la résolution de ( $P_2$ ) est considérée comme une opération élémentaire. Un problème  $\mathcal{NP}$ -complet est un problème de  $\mathcal{NP}$  en lequel se réduit polynomialement tout autre problème de  $\mathcal{NP}$ .

Un problème est **co- $\mathcal{NP}$  complet** si le problème complémentaire est  $\mathcal{NP}$ -complet.

Signalons que le terme  $\mathcal{NP}$ -**difficile** est différent du terme  $\mathcal{NP}$ -complet. En effet, un problème d'optimisation combinatoire est  $\mathcal{NP}$ -difficile si le problème de reconnaissance associé est  $\mathcal{NP}$ -complet. Un problème  $\mathcal{NP}$ -complet appartient à la classe  $\mathcal{NP}$ -difficile et à la classe  $\mathcal{NP}$ .

# Chapitre 2

## Les cubes partiels

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes. L'application  $f : V(G) \rightarrow V(H)$  est un **plongement isométrique** si  $d_H(f(u), f(v)) = d_G(u, v)$  pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $V(G)$ .

- Une chaîne de longueur 3 ne peut pas être plongeable dans un cycle  $C_5$  de façon isométrique.
- Si  $f$  est un plongement isométrique alors  $f$  est injective.
- Un graphe  $G$  qui admet un plongement isométrique dans un hypercube est dit **cube partiel**.
- Un cube partiel est un graphe qui admet un étiquetage de ses sommets en  $p$ -uplets ( $p$  fixé) parcourant deux valeurs tel que la distance entre deux sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  correspond à la distance de Hamming de  $u$  et  $v$ .
- Le graphe de la figure. 2.1 est un plongement isométrique dans  $Q_6$ . L'étiquetage de ses sommets en vecteurs binaires satisfait la propriété suivante : "la distance entre deux sommets est la distance de Hamming entre les labels correspondants à ces sommets".

La classe des cubes partiels possède une structure très riche en théorie de graphes, du point de vue métrique, algorithmique, et combinatoire. Elle a été introduite durant les années soixante dix en modélisant une famille de réseaux de communication. Un peu plus tard, on commençait à s'intéresser à cette structure en formulant des caractérisations sous différents aspects :

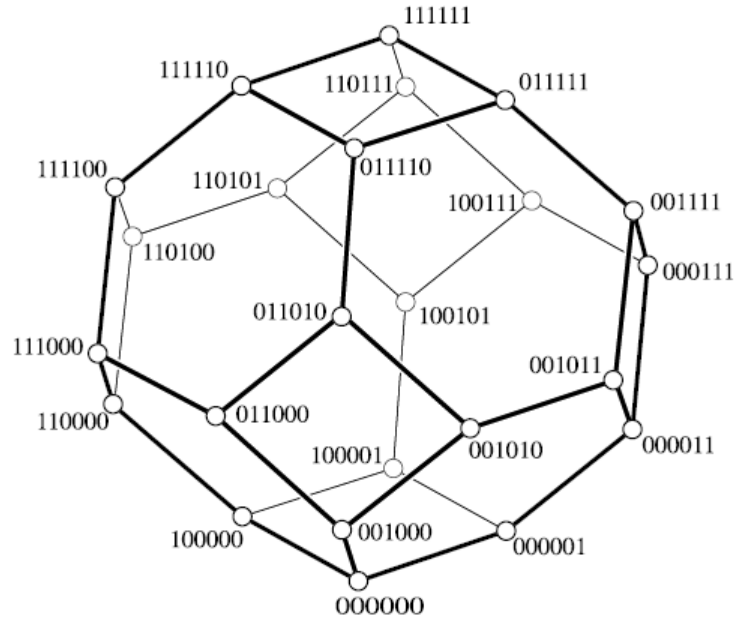


FIG. 2.1 –

## 2.1 Caractérisations des cubes partiels

### 2.1.1 Les relations Djoković-Winkler

La caractérisation des cubes partiels établie par Djoković [40] en 1973 et Winkler [76] une dizaine d'années plus tard dépend d'une relation définie sur l'ensemble des arêtes d'un graphe. Etant définie sur un cube partiel, chacune de ces relations est d'équivalence. Cependant, même si les relations de Winkler et de Djoković peuvent être différentes suite à leur application dans un graphe arbitraire, elles s'avèrent identiques dans les cubes partiels.

Initialement introduite par Djoković [40], la relation ' $\sim$ ' dépend de ces sous-ensembles :

**Définition 2.1.1.** Soient  $G$  un graphe et  $ab$  une arête de  $G$  :

$$W_{ab} = \{x \in V(G) / d(x, a) < d(x, b)\}$$

$$U_{ab} = \{x \in W_{ab} : x \text{ a un voisin dans } W_{ba}\}$$

$$F_{ab} = \{xy \in E(G) / x \in U_{ab} \text{ } y \in U_{ba}\}$$

D'après la définition 2.1.1,  $W_{ab}$  est l'ensemble des sommets les plus proches

de  $a$  que de  $b$  dans  $G$ . L'ensemble  $U_{ab}$  est le "**bord**" de  $W_{ab}$  et  $F_{ab}$  est la "**coupe**" liant les deux bords de  $W_{ab}$  et de  $W_{ba}$ .

Par abus de langage,  $W_{ab}$  et  $U_{ab}$  désignent le sous-graphe induit par les sommets constituant ces sous-ensembles respectivement.

**Définition 2.1.2.** Soient  $xy$  et  $ab$  deux arêtes de  $G$  :

$$xy \sim ab \text{ si } x \in W_{ab} \text{ et } y \in W_{ba}$$

Il est à noter que les arêtes de  $F_{ab}$  forment précisément l'ensemble des arêtes de  $G$  qui sont en relation avec l'arête  $ab$  suivant ' $\sim$ '.

La relation ' $\sim$ ' est réflexive puisque  $a \in W_{ab}$  et  $b \in W_{ba}$ . Autrement dit, si  $xy \sim ab$  alors  $xy \in F_{ab} = F_{ba}$ .

Pour toutes deux arêtes  $ab, uv$  de  $G$ , nous avons :

$$uv \sim ab \implies u \in U_{ab}, v \in U_{ba} \implies a \in U_{uv}, b \in U_{vu} \implies ab \sim uv$$

D'où, ' $\sim$ ' est symétrique.

Cependant, la relation ' $\sim$ ' n'est pas transitive en général. Dans la figure. 2.2, l'arête  $ax$  est en relation avec  $yb$  et  $zb$  suivant ' $\sim$ ' (les arêtes en gras), mais  $yb \not\sim zb$ .

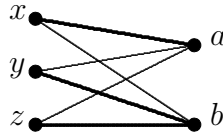


FIG. 2.2 –  $K_{2,3}$ .

**Remarque 2.1.1.** Si  $G$  n'est pas biparti, alors les ensembles  $W_{ab}$  et  $W_{ba}$  ne couvrent pas l'ensemble des sommets  $V(G)$  en général.

En effet, dans un cycle isométrique impair  $C$  (il suffit de prendre le plus petit d'après la proposition 1.5.1) contenant une arête  $ab$ , il existe un sommet  $c$  de  $C$  tel que  $d(a, c) = d(b, c)$ . D'où,  $c \notin W_{ab}$  et  $c \notin W_{ba}$ .

Djoković [40] a caractérisé les cubes partiels comme suit :

**Théorème 2.1.1.** [40] Soit  $G$  un graphe biparti. Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si ' $\sim$ ' est une relation d'équivalence dans l'ensemble des arêtes de  $G$ .

Par ailleurs, la relation  $\theta$ , introduite par Winkler [76], est définie comme suit :

**Définition 2.1.3.** Soient  $G$  un graphe et  $uv, xy$  deux arêtes de  $G$ .

$$uv \theta xy \iff d(u, x) + d(v, y) \neq d(u, v) + d(v, x)$$

Dans la littérature, la relation  $\theta$  est la plus répandue et vu que celle-ci est équivalente à la relation ' $\sim$ ' dans les cubes partiels, elle est donc appelée **relation Djoković-Winkler**.

### Propriétés de la relation $\theta$

#### (a). Dans un graphe quelconque.

- Il est clair que  $\theta$  est reflexive et symétrique.
- Nous notons par  $\theta^*$  la fermeture transitive de  $\theta$ . Autrement dit, c'est la plus petite relation transitive contenant  $\theta$ .
  - Si  $G$  est isomorphe à un cycle pair élémentaire  $C_{2p}$  ( $p \geq 2$ ), alors chaque arête de  $G$  est en relation avec une arête opposée (la plus éloignée) suivant  $\theta$  (voir la figure. 2.3 (a)). Ainsi,  $\theta^*$  contient  $p$  classes d'équivalence et  $\theta = \theta^*$ .
  - Par contre, si  $G$  est un cycle impair élémentaire  $C_{2p+1}$  ( $p > 1$ ), toute arête fixée  $e$  dans le cycle,  $e$  est en relation avec deux arêtes adjacentes à distance  $p - 1$  (voir la figure. 2.3 (b)). Dans ce cas,  $\theta^*$  contient uniquement une classe d'équivalence.
  - En particulier, les arêtes d'un triangle appartiennent à la même  $\theta^*$ -classe.
- Dans une  $uy$ -géodésique, aucune arête n'est en relation avec une autre de la géodésique suivant la relation  $\theta$ . Voir la figure. 2.4 (a) où  $uv \not\theta xy$  puisque les sommes  $d(u, x) + d(v, y)$  et  $d(u, y) + d(v, x)$  sont égales à  $2(l - 1)$  où  $l = d(u, y)$ .

#### (b). Dans un graphe biparti.

- Si  $G$  est biparti et  $e = uv, f = xy$  deux arêtes de  $G$  alors les notations des sommets de  $e$  et  $f$  peuvent être choisies de telle sorte que :

$$d(u, x) = d(v, y) = d(u, y) - 1 = d(v, x) - 1 \dots (*)$$

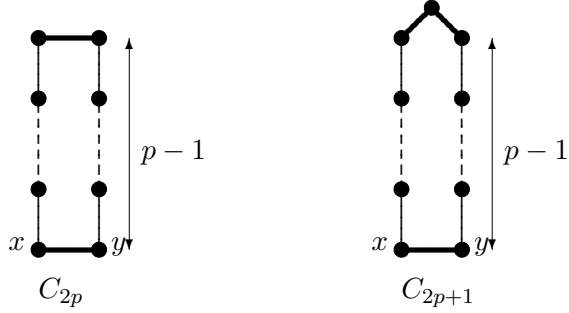


FIG. 2.3 – L'arête  $xy$  est en relation avec une seule arête (l'arête en gras) dans un cycle isométrique pair suivant  $\theta$  par contre elle est en relation avec deux arêtes adjacentes dans un cycle impair.

Si  $d(u, x) = d(u, y)$  alors  $G$  contient un cycle de longueur  $2l + 1$  où  $d(u, x) = l$ , contradiction. D'où  $d(u, x) \neq d(u, y)$ . D'autre part comme  $x$  et  $y$  sont adjacents, alors  $l - 1 \leq d(u, y) \leq l + 1$ . Posons, alors  $d(u, y) = l + 1$ . Parallèlement, si  $d(v, x) = d(v, y)$  alors  $G$  contient un cycle impair de longueur  $2k + 1$  où  $d(v, y) = k$ , contradiction. Voir la figure. 2.4(b). Donc  $d(v, x) \neq d(v, y)$ . De plus, comme  $u$  et  $v$  sont adjacents alors  $k - 1 \leq d(v, x) \leq k + 1$ . Cependant, si  $d(v, x) = k - 1$  alors  $d(u, x) + d(v, y) = l + k = d(u, y) + d(v, x)$ . Or  $xy \theta uv$ , contradiction. D'où  $d(v, x) = k + 1$ . Donc, nous avons :

$$\begin{aligned} k &= d(v, y) = d(v, x) - 1 \leq d(v, u) + d(u, x) - 1 = l \\ l &= d(u, x) = d(u, y) - 1 \leq d(u, v) + d(v, y) - 1 = k \end{aligned}$$

D'où l'égalité (\*) est vérifiée.

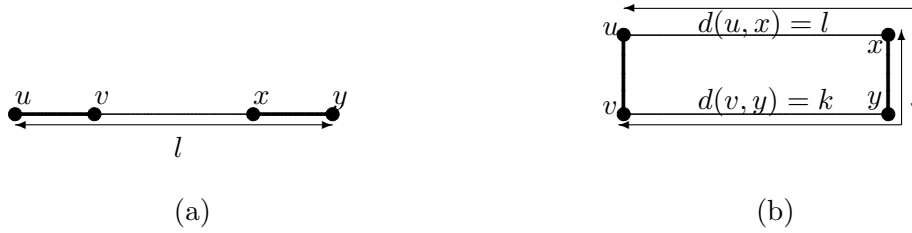


FIG. 2.4 –

- Ainsi une arête  $uv$  d'un graphe biparti  $G$  est en relation avec une arête  $xy$  si et seulement si un des sommets  $u$  et  $v$  parcourt une géodésique pour atteindre  $x$  en passant par  $y$ .
- L'introduction de la relation  $\theta$  dans les graphes bipartis permet de dégager pas mal de propriétés dans ces graphes. En s'appuyant sur certaines de ces dernières tout en rajoutant des conditions, des caractérisations des cube partiels ont été établies. Tel est le cas pour cette propriété :

**Proposition 2.1.1.** [57] *Soit  $e = uv$  une arête d'un graphe  $G$  biparti et  $F = \{f / f \in E(G) ; e\theta f\}$ . Alors,  $G \setminus F$  a exactement deux composantes connexes. De plus elles sont  $W_{uv}$  et  $W_{vu}$  respectivement. Par ailleurs, chaque géodésique  $P$  reliant  $u$  à  $v$  dans  $W_{uv}$  est contenue dans  $W_{uv}$ .*

### Caractérisation

En 1984, Winkler [76] a caractérisé les cubes partiels comme suit :

**Théorème 2.1.2.** [76] *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est biparti et  $\theta$  est transitive dans l'ensemble des arêtes de  $G$ .*

De plus, nous avons la caractérisation suivante :

**Proposition 2.1.2.** [57] *Soit  $G$  un graphe biparti et  $E_1, E_2, \dots, E_k$  les classes d'équivalence de  $E(G)$  suivant  $\theta^*$ . Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si chaque sous-graphe partiel  $G_i = G \setminus E_i$  a exactement deux composantes connexes.*

Par ailleurs, nous avons les remarques suivantes :

Soit  $G$  un cube partiel.

- Pour toute arête  $ab$  de  $G$ , l'ensemble des arêtes  $F_{ab}$  est un couplage et induit un isomorphisme entre  $U_{ab}$  et  $U_{ba}$ . Voir la figure. 2.5 où  $U_{ab} = \{a_i : 0 \leq i \leq p\}$  et  $U_{ba} = \{b_i : 0 \leq i \leq p\}$ .
- Le graphe  $G$  admet un étiquetage de ses sommets en uplets binaires tout en conservant la distance de Hamming. Pour chaque arête  $ab$  de  $G$ , la classe associée à  $ab$  suivant  $\theta$  déconnecte le graphe en deux composantes connexes  $W_{ab}$  et  $W_{ba}$  qui seront dits **semi-cubes**. Comme  $ab \in G$ , alors  $a$  et  $b$  diffèrent d'une composante, soit la  $k$ -ème composante. Si la classe de  $ab$  est l'ensemble  $\{ab, a_1b_1, a_2b_2, \dots, a_pb_p\}$   $a^k = 0, b^k = 1$ ;  $a_j \in W_{ab}$   $b_j \in W_{ba}$  alors  $a_j^k = 0$  et  $b_j^k = 1$  pour  $j = 1, \dots, p$ . Voir la figure. 2.5.

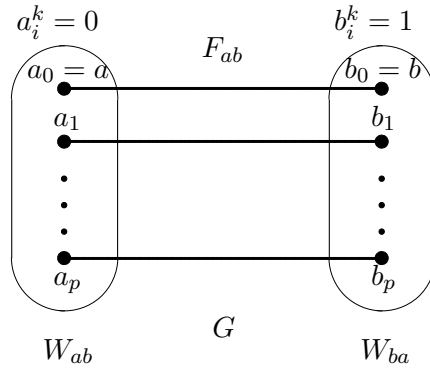


FIG. 2.5 –

- Ainsi chaque classe de  $\theta$  occupe une dimension de l'hypercube du plongement.

Plus précisément si  $n$  la plus petite dimension de l'hypercube dont  $G$  peut être plongé isométriquement, alors  $n$  est le nombre des classes d'équivalence de la relation  $\theta$  définie dans l'ensemble des arêtes de  $G$ .

### 2.1.2 La convexité et les cubes partiels

La première caractérisation des cubes partiels fut élaborée par Djoković en 1973 en utilisant le concept de la convexité dans un graphe :

**Théorème 2.1.3.** [40] *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est biparti et  $W_{ab}$  est convexe pour toute arête  $ab$  dans  $G$ .*

### 2.1.3 L'expansion

Une autre caractérisation des cubes partiels fondée sur une opération constructive d'un graphe, a été révélée quelques années plus tard. Cette opération appelée **expansion**, est définie comme suit (voir la figure. 2.6) :

**Définition 2.1.4.** *Soit  $G$  un graphe. Un **recouvrement propre** de  $G$  est  $\{G_1, G_2\}$  où  $G_1$  et  $G_2$  sont des sous-graphes isométriques de  $G$  tels que :*

- $V(G_1) \cup V(G_2) = V(G)$
- $V_0 = V(G_1) \cap V(G_2) \neq \emptyset$  appelé **intersection du recouvrement**.

**Définition 2.1.5.** Soient  $G'$  un graphe et  $\{G'_1, G'_2\}$  un recouvrement propre de  $G'$ .

- L'expansion de  $G'$  suivant le recouvrement  $\{G'_1, G'_2\}$  est le graphe  $G$  obtenu comme suit :
  - Soit  $G_i$  la copie de  $G'_i$  dans  $G$  et pour tout sommet  $u'$  dans  $V_0$ ,  $u_i$  est le sommet correspondant dans  $G_i$  où  $i = 1, 2$ .
  - Le graphe  $G$  est l'union disjointe de  $G_1 \cup G_2$  où les sommets  $u_1$  et  $u_2$  sont reliés par une arête.
- L'expansion de  $G'$  suivant  $\{G'_1, G'_2\}$  est dite **connexe** ou **isométrique** ou **convexe** si le sous-graphe induit par l'intersection du recouvrement est connexe ou isométrique ou convexe.

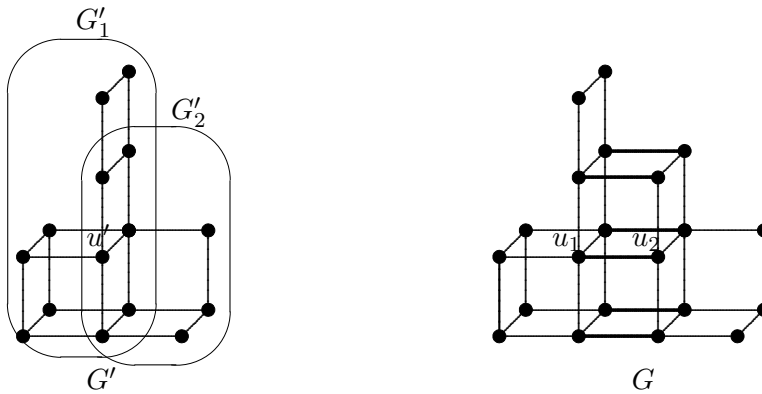


FIG. 2.6 – Le graphe  $G$  est l'expansion de  $G'$  suivant  $G'_1$  et  $G'_2$ .

Chepoi [25] a proposé en 1988 cette caractérisation des cubes partiels :

**Théorème 2.1.4.** [25] Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est obtenu à partir d'un sommet par une séquence d'expansions.

- L'opération inverse de l'expansion est dite **contraction**.
- Contracter un ensemble d'arêtes d'un graphe  $G$  consiste à supprimer chacune de ces arêtes en réduisant les extrémités associées à un seul sommet qui préserve l'adjacence de l'arête supprimée.

- Contracter des arêtes reliant les copies des sommets  $u'$  de l'intersection du recouvrement (les arêtes en gras du graphe  $G$  de la figure. 2.6) nous permet d'obtenir le graphe  $G'$ .
- L'expansion appliquée à un cube partiel est un nouveau plongement isométrique dans un hypercube qui augmente la dimension de l'hypercube du plongement d'une unité, et donc qui crée une nouvelle classe de  $\theta$ .
- La contraction de toutes les arêtes appartenant à une classe donnée de  $\theta$  d'un cube partiel est un cube partiel.

## 2.2 Applications

La première motivation exprimée pour étudier les cubes partiels est due à Graham et Pollack [45] durant les années soixante dix. Ils ont proposé, en fait, un modèle des réseaux de communication permettant de plonger les graphes qui modélisent ces réseaux dans l'hypercube, ou un graphe de Hamming en général, tout en gardant bien les distances. Un peu plus tard, d'autres applications ont été données pour cette classe de graphes telles que les arrangements dans les hyperplans [71], les permutations dans un ensemble d'ordre linéaire [43].

### 2.2.1 Les graphes benzenoïdes

Ces graphes modélisent la structure (liaison des atomes) des hydrocarbures benzenoïdes, une famille des composés de la chimie organique qui renferme dans leur squelette carboné l'enchaînement du noyau benzénique. Parmi les hydrocarbures benzenoïdes nous pouvons en compter près de mille les plus connus. Et certains d'entre eux jouent un rôle majeur dans l'industrie chimique. Pour plus de détails concernant la structure chimique de ces composants, voir le livre [48].

Un *graphe benzenoïde* est un graphe planaire où chaque face interne est un hexagone régulier unitaire au sens géométrique. Voir la figure. 2.7.

La structure d'un tel graphe permet de le plonger isométriquement dans l'hypercube. Ceci a été initialement trouvé dans [61] :

Un graphe benzenoïde est biparti. Pour montrer qu'un tel graphe est un cube partiel, nous utilisons cette définition qui contient des notions liées à la

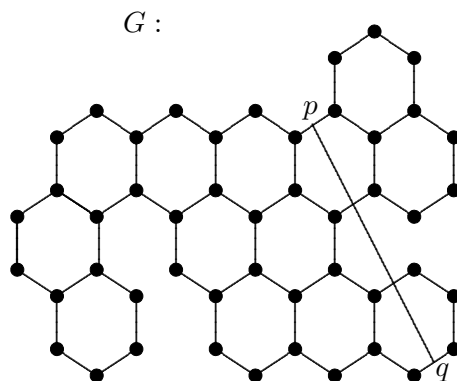


FIG. 2.7 – Le graphe benzenoïde  $G$ .

géométrie euclidienne :

**Définition 2.2.1.** Soit un graphe benzenoïde  $G$  et  $p$  et  $q$  deux points appartenant à deux arêtes parallèles (au sens géométrique) du graphe  $G$ . Le **segment déconnecteur**  $S$  est la droite d'extrémité  $p$  et  $q$  vérifiant :

- La droite  $S$  est orthogonale à chacune des arêtes de la même direction que celles contenant  $p$  et  $q$  respectivement ;
- $p$  et  $q$  sont respectivement le centre d'une arête au sens géométrique ;
- Le graphe obtenu à partir de  $G$  en supprimant les arêtes que  $S$  intersecte contient deux composantes connexes.

Dans la figure. 2.7, un segment déconnecteur du graphe benzenoïde  $G$  a été tracé pour une direction des arêtes de l'hexagone. Ce segment traverse les arêtes d'une coupe de  $G$ .

Nous remarquons qu'un ensemble d'articulation du graphe benzenoïde  $G$  n'est autre que l'ensemble des arêtes dont un segment déconnecteur intersecte.

Soit  $e = uv$  une arête du graphe  $G$ . La suppression des arêtes de l'ensemble d'articulation du graphe  $G$  contenant  $e$  induit deux composantes connexes. Celles-ci correspondent à  $W_{uv}$  et  $W_{vu}$  respectivement. De plus, une géodésique reliant deux sommets de  $W_{uv}$  ne contient pas deux arêtes appartenant au même ensemble d'articulation ayant  $e$ . De même pour  $W_{vu}$ . De ce fait,  $W_{uv}$  et  $W_{vu}$  sont convexes. Par conséquent,  $G$  est un cube partiel en vertu du théorème 2.1.3. De plus, les classes d'équivalence de la relation  $\theta$  sont les arêtes de l'ensemble d'articulation de  $G$ .

Par ailleurs comme la théorie des graphes moléculaires nécessite d'étudier des paramètres liés à la structure chimique, il existe certains d'entre eux qui sont basés sur la notion de distance. Ainsi, des travaux ont été effectués pour l'étude de ces paramètres dans les graphes benzenoïdes. Pour un graphe benzenoïde d'ordre  $n$  :

- L'indice de Wiener, indice permettant d'avoir une corrélation avec la surface moléculaire, est la somme des longueurs des plus courtes chaînes. Cet indice se détermine linéairement en temps  $o(n)$ . Voir [29].
- Le diamètre peut également être calculé linéairement ( $o(n)$ ). Voir [26].

## 2.3 Sous-classes des cubes partiels

La classe la plus simple que comporte les cubes partiels est bien celles des arbres vu que chaque arête d'un arbre peut être plongée dans une dimension de l'hypercube distincte des autres arêtes.

Par ailleurs, Chepoi, Dragan et Vaxès [28] ont travaillé sur les plongements isométriques dans l'hypercube et leur planarité. Parmi ces graphes, nous pouvons bien citer les benzenoïdes explicités en haut.

Les graphes médians constituent une importante sous-classe de ces plongements. Deux généralisations de ces graphes permettant toujours de rester dans la classes des cubes partiels ont été étudiées récemment, à savoir les semi-médians et les presque médians. Ces graphes découlent des expansions particulières appliquées à un graphe donné :

### 2.3.1 Les graphes semi-médians

**Définition 2.3.1.** *Un graphe  $G$  est dit **semi-médian** si  $\theta = \theta^*$  et  $U_{ab}$  est connexe pour toute arête  $ab$  de  $G$ .*

Autrement dit un semi-médian est un cube partiel avec  $U_{ab}$  connexe pour toute  $ab \in E(G)$ .

Dans [55] Imrich et Klavžar ont prouvé nécessairement qu'un graphe  $G$  est semi-médian s'il est obtenu à partir d'un sommet par une séquence d'expansions connexes. Cependant Chepoi [27] a montré que cette condition est insuffisante. Le graphe  $G$  de la figure. 2.8 est l'expansion connexe du semi-médian  $G'$  mais l'ensemble  $U_{ab}$  n'est pas connexe. Ainsi, une telle caractérisation de ces graphes se fait en rajoutant cette condition :

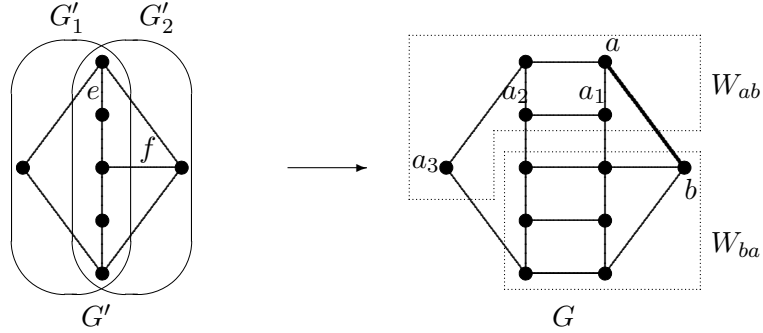


FIG. 2.8 – Le graphe  $G$  est l'expansion connexe de  $G'$  suivant  $G'_1$  et  $G'_2$ . Par contre, le sous-graphe  $U_{ab}$  de  $G$  induit par  $\{a, a_1, a_2, a_3\}$  n'est pas connexe.

**Définition 2.3.2.** Soit  $G$  un graphe.

- Pour toute paire d'arêtes  $\{e, f\}$ ,  $edf$  si  $e = f$  ou s'il existe un cycle élémentaire  $C_4$  dans  $G$  tel que  $e$  et  $f$  sont opposées dans le  $C_4$ .
- La couverture transitive de  $\delta$ , notée  $\delta^*$ , et la plus petite relation transitive contenant  $\delta$ .

**Théorème 2.3.1.** [19] Un graphe  $G$  est semi-médian si et seulement s'il est obtenu par une séquence d'expansions connexes et pour toute expansion liée à un recouvrement propre  $\{G_1, G_2\}$  et une intersection  $G_0$ , la propriété suivante est vérifiée :

- Si  $e \in G_1$   $f \in G_2$ ,  $edf$  et chacune de ces arêtes a une extrémité dans  $G_0$ , alors il existe une arête  $g$  de  $G$  telle que  $ed_{G_1}^*g$  et  $fd_{G_2}^*g$ .

Nous pouvons bien voir cela dans le graphe de la figure. 2.8. Considérons les arêtes  $e$  et  $f$ . Celles-ci sont en relation suivant  $\delta$ , mais puisque  $G_1$  est un cycle  $C_6$ , il n'existe aucune arête  $g$  dans  $G_0$  telle que :  $gd_{G_1}^*e$ .

Par ailleurs, nous avons la caractérisation suivante :

**Théorème 2.3.2.** [55] Un graphe biparti  $G$  est un semi-médian si et seulement si  $\delta^* = \theta$ .

### 2.3.2 Les graphes presque médians

**Définition 2.3.3.** Un graphe  $G$  est dit **presque médian** s'il est un cube partiel et si pour toute arête  $ab$  de  $G$ ,  $U_{ab}$  est isométrique.

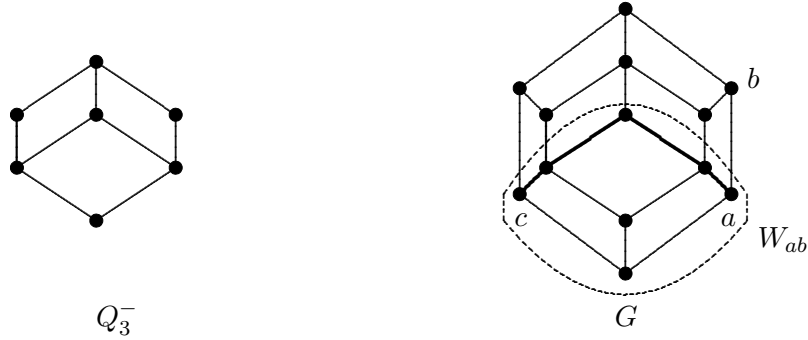


FIG. 2.9 – L'expansion de  $Q_3^-$  n'est pas isométrique.

L'expansion isométrique d'un graphe presque médian n'est pas un graphe presque médian en général. Le graphe  $G$  de la figure. 2.9 est l'expansion isométrique de  $Q_3^-$  suivant le cycle isométrique  $C_6$  et  $Q_3^-$ . Par contre,  $U_{ab}$  dans le graphe résultant est une  $ac$ -chaîne induite (en gras dans la figure). Cette chaîne n'est pas isométrique.

Ainsi, Brešar [18] ajouta cette condition afin de caractériser cette classe de graphes suivant l'expansion isométrique :

**Théorème 2.3.3.** [18] *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est presque médian si et seulement s'il est obtenu par une séquence d'expansions isométriques suivant des recouvrements presque médians.*

Peterin [72] a conjecturé que les presque médians sont exactement les semi-médians n'ayant pas de  $C_{2n}$  convexes  $n \geq 3$  comme sous-graphe induits. Ce résultat a été confirmé un peu plus tard par Brešar [18].

### 2.3.3 Les graphes médians

**Définition 2.3.4.** *Soient  $G$  un graphe et  $u, v, w$  trois sommets de  $G$ .*

- *Un sommet  $z$  est dit **sommet médian** de  $u, v, w$  si  $z$  appartient à une  $uv$ -géodésique, à une  $uw$ -géodésique et à une  $vw$ -géodésique.*
- *Le sommet  $z$  peut être atteint en  $u$  ou  $v$  ou  $w$ .*
- *Les médians des sommets  $u, v, w$  peuvent être définis comme étant les sommets se trouvant dans  $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)$ .*

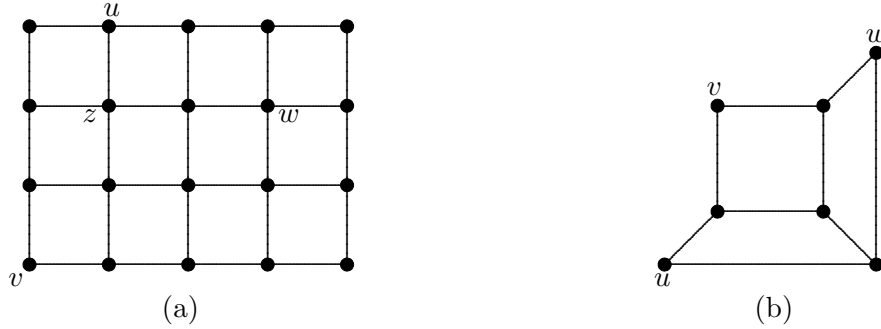


FIG. 2.10 –

- Le sommet  $z$  de la figure. 2.10 (a) est le médian des sommets  $u$ ,  $v$ , et  $w$ .

**Définition 2.3.5.** *Un graphe  $G$  est dit **graphe médian** si et seulement si tout triplet de sommets de  $G$  possède un unique médian. Autrement dit*

$$|I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w)| = 1 \quad \forall u, v, w \in V(G)$$

- Le graphe biparti complet  $K_{2,3}$  n'est pas un graphe médian. En effet, ses deux sommets de degré 3 sont des médians des trois autres sommets de  $K_{2,3}$ .
- Le graphe  $Q_3^-$  n'est pas un graphe médian. Dans la figure. 2.10(b), les sommets  $u, v, w$  n'ont pas de médian dans  $Q_3^-$ .

La classes de graphes médians a été longuement étudiée dans la littérature.

La théorie structurale de ces graphes a été explicitée dans un nombre considérable de travaux (Voir [5] [30] [57] [65] [66]).

Les graphes médians constituent une classe propre des cubes partiels. L'une des caractérisations de ces derniers repose sur l'expansion dans les graphes. En 1978, Mulder [65] [66] a énoncé le théorème de l'expansion convexe :

**Théorème 2.3.4.** [65] [66] *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est un graphe médian si et seulement si  $G$  est obtenu à partir d'un sommet par une séquence d'expansions convexe.*

Puisque dans les graphes médians,  $U_{ab}$  est convexe pour chacune des arêtes, ils forment une sous-classe propre des semi-médians et des presque médians. Nous avons donc les inclusions suivantes :

$$\text{médians} \subset \text{presque médians} \subset \text{semi-médians} \subset \text{cubes partiels}$$

### Les cubes de Fibonacci et les cubes de Lucas

Les cubes de Fibonacci forment une classe intéressante des cubes partiels. Ils ont été introduits par Hsu ([53] et [54]) tout en les utilisant dans les réseaux de connexion. Un peu plus tard, on s'est intéressé beaucoup plus à leur structure ([68] [60]).

- Définition 2.3.6.**
- Une **chaîne de Fibonacci** de longueur  $n$  est un mot binaire  $b_1b_2\dots b_n$  avec  $b_i \times b_{i+1} = 0$  pour tout  $1 \leq i < n$ .
  - Un **cube de Fibonacci**  $\Gamma_n$  ( $n \geq 1$ ) est le sous-graphe de  $Q_n$  induit par toutes les chaînes de Fibonacci de longueur  $n$ . Voir la figure. 2.11(a).
  - Une **chaîne de Lucas** de longueur  $n$  est une chaîne de Fibonacci de longueur  $n$  telle que  $b_1 \times b_n = 0$ .
  - Un **cube de Lucas**  $\Lambda_n$  ( $n \geq 1$ ) est le sous-graphe de  $Q_n$  induit par toutes les chaînes de Lucas. Voir la figure. 2.11(b).

La suite de Fibonacci est l'une des suites mathématiques les plus connues. Elle doit son nom au mathématicien italien Léonardo Pisano, plus connu sous le pseudonyme de Fibonacci. Dans son ouvrage Liber Abaci, il propose un problème récréatif concernant la croissance des lapins. Ce problème est l'origine de la suite. Cette suite est définie comme suit :

$$\begin{cases} F_1 = F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

La suite de Lucas est une généralisation de la suite de Fibonacci. Elle a été étudiée par le mathématicien français Edouard Lucas en premier lieu. Cette suite fut utilisée pour le test de primalité dans la théorie des nombres. Cette suite est définie comme suit :

$$\begin{cases} L_1 = L_2 = 1 \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Les graphes de Fibonacci  $\Gamma_n$  et les graphes de Lucas  $\Lambda_n$  ont une relation étroite avec les suites  $F_n$  et  $L_n$  d'où l'appellation de ces classes de graphes. A



## 2.4 La reconnaissance des cubes partiels

Après avoir étudié les cubes partiels en exploitant leurs propriétés caractéristiques, on s'est intéressé à la reconnaissance de ces graphes en leur attribuant l'étiquetage associé dans le cas où la réponse de l'algorithme est positive. Dans [4], ces caractérisations ont été exploitées et ont permis de donner un algorithme polynomial en temps de reconnaissance.

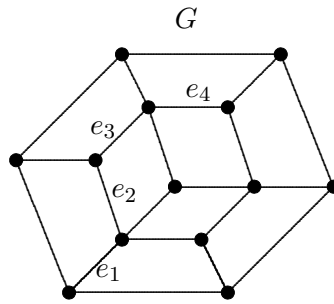


FIG. 2.12 –

### 2.4.1 Le plongement isométrique canonique

Soient  $G$  un graphe et  $E_1, \dots, E_k$  les classes d'équivalences issues de la relation  $\theta^*$  définie dans  $G$ .

Pour tout  $i = 1 \dots, k$ ,  $G_i$  est le graphe ayant l'ensemble des sommets de  $G$  et  $E(G) \setminus E_i$  comme ensemble de ses arêtes. Le graphe  $G_i$  est dit **graphe quotient** pour tout  $i = 1 \dots, k$ .

Pour chaque graphe quotient  $G_i$ , nous notons ses composantes connexes par  $C_{i,0}, \dots, C_{i,m_i}$ .

Associons le graphe  $G_i^*$  pour chaque  $G_i$  où  $V(G_i^*) = \{C_{i,0}, \dots, C_{i,m_i}\}$ . Un sommet  $C_{i,j}$  est adjacent à un sommet  $C_{i,j'}$  dans  $G_i^*$  s'il existe un sommet de  $C_{i,j}$  adjacent à un sommet de  $C_{i,j'}$  dans  $G$ .

Définissons le contracté  $\alpha_i : V(G) \rightarrow V(G_i^*)$  avec  $\alpha_i(v) = j$  où  $v \in C_{i,j}$ .

Soit l'application suivante :

$$\alpha : V(G) \rightarrow V(G_1^*) \square V(G_2^*) \square \dots \square V(G_k^*)$$

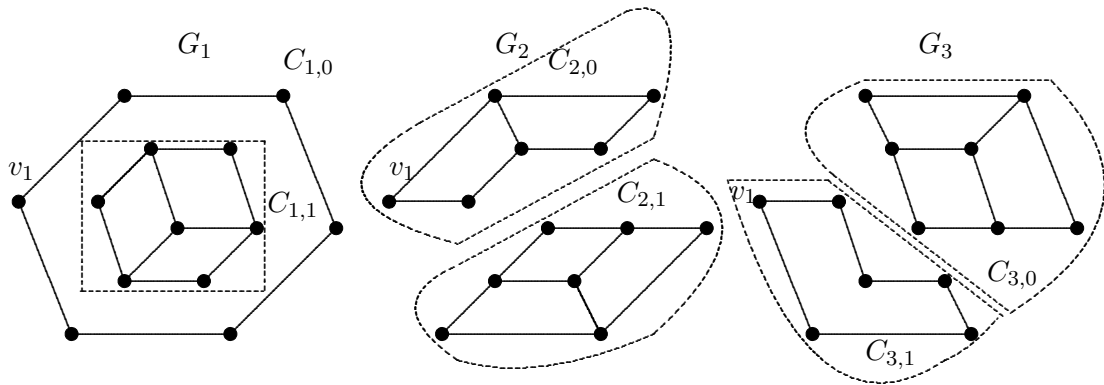


FIG. 2.13 –

$$v \mapsto \alpha(v) = (\alpha_1(v), \alpha_2(v), \dots, \alpha_k(v))$$

L'application  $\alpha$  est appelée **plongement isométrique canonique**. Nous en parlerons avec plus de détails dans le chapitre suivant.

### Exemple

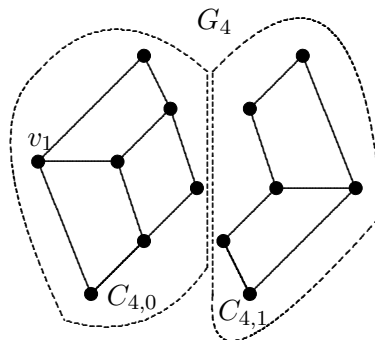


FIG. 2.14 –

Soit  $G$  le graphe de la figure. 2.12. Les graphes quotients correspondants sont  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$  et  $G_4$  (voir la figure 2.13 et la figure. 2.14). Chaque graphe  $G_i$  est obtenu en supprimant les arêtes du graphe  $G$  appartenant à la classe de  $e_i$  où  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Chaque graphe quotient  $G_i$  possède deux composantes

connexes à savoir  $C_{i,0}$  et  $C_{i,1}$ . Le graphe  $G_i^*$  associé à  $G_i$  est un graphe complet  $K_2$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$  (Voir la figure 2.15). Comme  $v_1 \in C_{1,0}$ ;  $v_1 \in C_{2,0}$ ;  $v_1 \in C_{3,1}$  et  $v_1 \in C_{4,0}$  alors  $\alpha(v_1) = (0, 0, 1, 0)$ . De même pour tout autre sommet de  $G$ .

Par conséquent,  $G$  admet un plongement isométrique canonique dans l'hypercube  $Q_4$ .



FIG. 2.15 –

En s'appuyant sur ce plongement et la proposition 2.1.2, un algorithme en un temps  $o(mn)$  a été établi pour dire si un graphe à  $n$  sommets et  $m$  arêtes est un cube partiel [57].

Un peu plus tard, une optimisation du temps d'exécution des algorithmes de reconnaissance pour des sous-classes des cubes partiels a été apportée. Voir [19] [49] et [58].

Récemment, une amélioration a été apportée à ce type de problème. Eppstein [42] a proposé donc un algorithme en temps  $o(n^2)$  permettant de dire si un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est un cube partiel. Cet algorithme propose un étiquetage des sommets du graphe  $G$  en  $d$ -uplets binaires avec  $d = \max_{x \in V(G)} d_G(x) = d(a)$ . L'étiquetage dépend des semi-cubes  $W_{ab}$  où  $b \in N_G(a)$ . Ainsi, un test des arêtes de l'arborescence issue de  $a$  permet de confirmer ou d'infirmer que  $G$  est un cube partiel.

# Chapitre 3

## Les cubes partiels et les subdivisions des graphes

### Introduction

Pour un graphe  $G$ , une *subdivision* de  $G$  est le graphe obtenu en remplaçant chaque arête par une chaîne de longueur arbitraire. La subdivision  $S(G)$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en remplaçant chaque arête par une chaîne de longueur 2. Une subdivision  $S(G)$  est un cube partiel si et seulement si chaque bloc de  $G$  est soit une clique soit un cycle pair [62].

En 1994, une intéressante question a été posée durant la conférence "Discrete Metric Spaces". Chepoi et Tardif ont posé le problème suivant : "Est ce qu'un graphe est un cube partiel si et seulement s'il est biparti et intervalle monotone?" Dans [21], une réponse négative a été apportée à cette conjecture. Brešar, Klavžar et Lipovec ont montré qu'un graphe biparti intervalle monotone est soit un cube partiel soit contient une subdivision d'un graphe complet  $K_4$ .

Dans le contexte des subdivisions des graphes nous nous intéresserons à la question suivante tout au long de ce chapitre :

"Pour un graphe  $G$  donné quelles sont toutes les subdivisions du graphe pouvant être plongées isométriquement dans un hypercube?"

Ainsi, nous déterminons des familles des cubes partiels, s'exprimant en subdivisions des graphes complets, ou d'enveloppes généralisées. L'aspect structural de ces graphes nous permettra d'infirmer la conjecture des cubes partiels liée à la subdivision du  $K_{2,3}$  ([9]) :

**Conjecture 3.0.1.** [11] *Soit  $G$  un graphe biparti. Alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  ne contient pas de subdivision de  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique.*

### 3.1 La subdivision de $K_{2,3}$

Un résultat important dans la littérature traitant la structure des cubes partiels et les subdivisions des graphes est le lemme 3.1.1. Nous verrons au cours de nos démarches de preuve que cette proposition est un outil justificatif qui se manifeste régulièrement :

**Lemme 3.1.1.** [47] *Soit  $G$  un graphe et  $K$  un sous-graphe isométrique de  $G$  isomorphe à une subdivision de  $K_{2,3}$ . Alors,  $G$  n'est pas un cube partiel.*

En effet, une subdivision d'un  $K_{2,3}$  biparti n'est pas plongeable dans un hypercube.

Une telle subdivision peut être considérée comme étant un graphe obtenu en joignant deux sommets  $a$  et  $b$  par trois chaînes disjointes  $P_1, P_2, P_3$  avec la longueur de chacune de ces chaînes est au moins égale à 2. Supposons ainsi que  $P_1$  est la plus petite  $ab$ -chaîne induite et posons  $P_i = (a, x_{i,1}, x_{i,2}, \dots, x_{i,n_i-1}, b)$  pour  $i = 1, 2, 3$ . Ainsi,  $n_1 + n_2$  et  $n_1 + n_3$  sont pairs. Soient alors les arêtes  $e = ax_{1,1}$ ,  $f = x_{2,n_1+n_2/2-1}x_{2,n_1+n_2/2}$  et  $g = x_{3,(n_1+n_3/2)-1}x_{3,(n_1+n_3/2)}$  de la subdivision. Voir la figure. 3.1. Il est clair que ces arêtes vérifient  $e\theta f$  et  $e\theta g$  mais  $f$  et  $g$  ne sont pas en relation suivant  $\theta$  puisque elles appartiennent à une géodésique dans la subdivision. D'où, une telle subdivision n'est pas un cube partiel.

Puisque dans ce chapitre, nous nous intéressons aux subdivisions des graphes comme étant des cubes partiels, nous introduisons au long de cette partie les définitions et les notations suivantes :

### 3.2 Définitions et notations

Soient  $H$  un graphe,  $S$  un sous-ensemble de sommets de  $H$  et  $u, v, w$  des sommets de  $H$ . Soit  $G$  une subdivision de  $H$ .

- Un sommet de  $G$  est dit **principal** dans  $G$  s'il appartient à  $V(H)$ .
- Une chaîne reliant  $u$  et  $v$  sans passer par d'autres sommets principaux distincts de  $u$  et  $v$  est notée  $P(u, v)$  (i.e.  $P(u, v)$  est l'arête subdivisée dans  $G$ ).

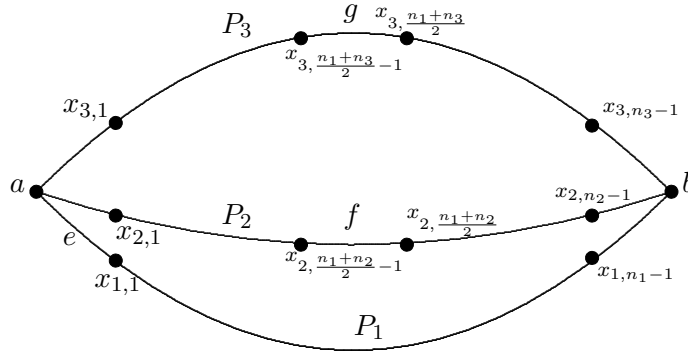


FIG. 3.1 –

- S’il existe une  $uv$ -géodésique dont les sommets internes ne sont pas principaux, alors  $u \rightarrow v$ . Dans le cas contraire, nous notons par  $u \not\rightarrow v$ .
- Si  $P(u, v)$  est une arête, celle-ci sera dite **pleine**.
- Le sommet principal  $u$  est dit **universel** dans  $G$  si tout voisin de  $u$  dans  $G$  est un voisin de  $u$  dans  $H$ . Autrement dit, toute arête incidente à  $u$  dans  $H$  est pleine dans  $G$ .
- Une chaîne reliant  $u$  et  $v$  contenant exactement  $n$  sommets principaux dans  $G$  (y compris les sommets  $u$  et  $v$ ) sera désignée par  $P_n^*(u, v)$ . La chaîne  $P_n^*(u, v)$  est dite **isométrique** (ou **géodésique**) si le graphe induit  $P_n^*(u, v)$  est isométrique dans  $G$ .
- S’il existe une  $uv$ -géodésique passant par  $w$  et formant un  $P_3^*$  isométrique alors  $u \xrightarrow{w} v$ . Dans le cas contraire, nous noterons par  $u \not\xrightarrow{w} v$ .
- Par abus de langage,  $\langle S \rangle$  désignera le sous-graphe induit de  $G$  qui est isomorphe à une subdivision du sous-graphe induit par  $S$  dans  $H$ . Si  $S = \{u, v, w\}$ , nous noterons par  $\langle u, v, w \rangle$  au lieu de  $\langle S \rangle$ .

Dans cette partie, un sommet principal (resp. une arête pleine) d’une subdivision sera représenté (e) par un point (resp. un trait) en gras. Notons que dans les figures de nos preuves, une ligne (resp. ligne pointillée) représente une chaîne géodésique (resp. non isométrique) reliant deux sommets principaux dans une subdivision d’une enveloppe généralisée. Une ligne (resp. un cercle) en gras représente une arête pleine (resp. un sommet principal). Une ligne discontinue représente une arête subdivisée dont nous ignorons son statut (s’il est géodésique ou non isométrique).

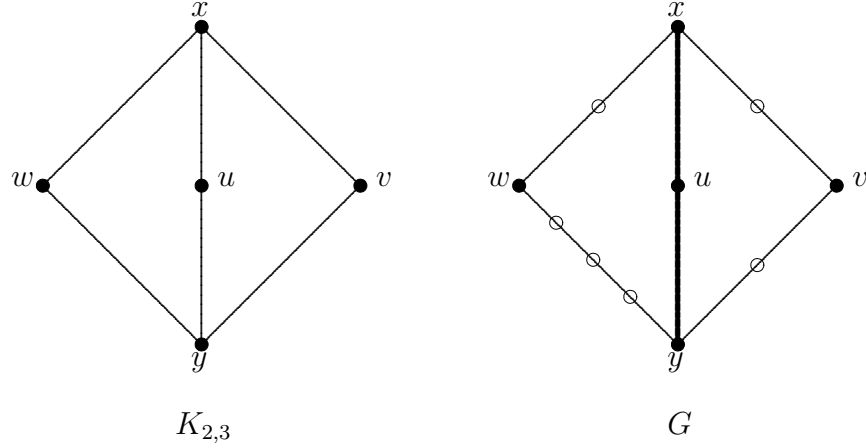


FIG. 3.2 –

Dans le graphe de la figure. 3.2, où  $G$  est une subdivision du  $K_{2,3}$ , nous avons :

- Les sommets principaux de  $G$  sont  $u, v, w, x, y$ .
- Le sommet principal  $u$  est universel dans  $G$ .
- La subdivision  $\langle u, v, x, y \rangle$  est un cycle  $C_6$  isométrique.
- Le graphe  $G$  contient une unique  $xy$ -géodésique passant par un sommet principal intermédiaire. Aussi,  $x \xrightarrow{u} y$  et  $x \not\rightarrow y$ .
- De plus,  $G$  contient un  $P_3^*$  géodésique ( $P_3^*(x, y)$ ).

Nous allons étudier les plongements isométriques pour des familles de graphes similaires :

### 3.3 Les roues

**Définition 3.3.1.** Soit  $k$  un entier  $k \geq 3$ .

- La  **$k$ -roue**  $W_k$  est le graphe obtenu en joignant un sommet  $u$  à chaque sommet du cycle élémentaire  $C_k$  engendré par  $w_1, w_2, \dots, w_k$ .
- Le sommet  $u$  est le **centre** de la roue.
- La  $k$ -roue subdivisée est notée  $W_k(m_1, m_2, \dots, m_k; n_1, n_2, \dots, n_k)$  où  $m_i$  (resp.  $n_i$ ) est le nombre de sommets ajoutés à l'arête  $w_i w_{i+1}$ ; (resp. à l'arête  $uw_i$ ).

Le graphe  $Q_3^-$  est isométrique dans  $Q_3$  et isomorphe à  $W_3(1, 1, 1; 0, 0, 0)$ . Voir la figure. 3.3.

Gravier, Klavžar et Mollard [47] ont étudié les subdivisions des roues et ont trouvé que toutes les subdivisions pouvant être plongé dans l'hypercube tout en préservant les distances sont soit  $S(K_4)$  soient les subdivisions des roues dont le centre est un sommet universel :

**Théorème 3.3.1.** [47] *Soit  $k > 3$ . Alors une subdivision d'une  $k$ -roue  $W$  est un cube partiel si et seulement si  $W$  est isomorphe à  $W_k(m_1, m_2, \dots, m_k; 0, 0, \dots, 0)$  où  $m_i$  impair pour  $i = 1, \dots, k$  ou si  $W = W_3(1, 1, 1; 1, 1, 1)$ .*

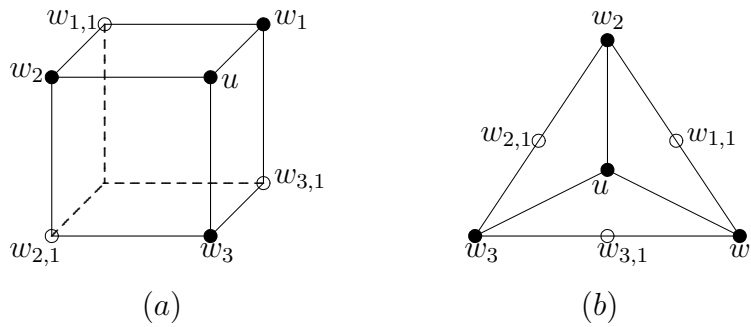


FIG. 3.3 –  $W_3(1, 1, 1; 0, 0, 0)$  est un cube partiel puisqu'il est isomorphe à  $Q_3^-$ .

La subdivision  $S(K_4)$  (ou  $W_3(1, 1, 1; 1, 1, 1)$ ) est un cube partiel. Un tel graphe est plongeable dans  $Q_4$ . Voir la figure. 3.4.

Par ailleurs, Klavžar et Lipovec [62] ont montré, en utilisant successivement l'expansion dans le graphe, le résultat suivant :

**Proposition 3.3.1.** [62] *Pour tout  $n \geq 1$ ,  $S(K_n)$  est un cube partiel.*

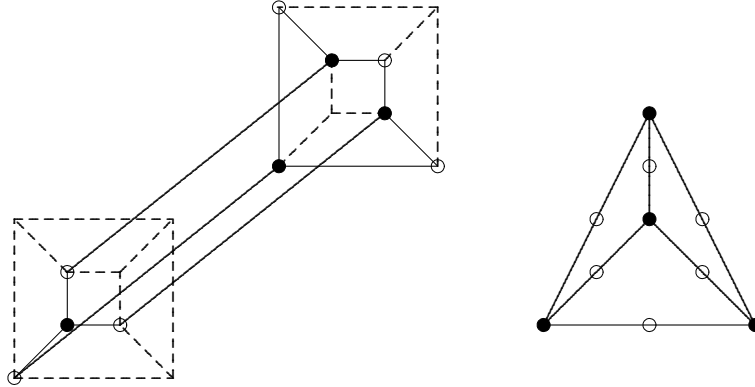


FIG. 3.4 –  $S(K_4)$ .

## 3.4 Les fans

### 3.4.1 Le diamant

**Lemme 3.4.1.** [3] *Soit  $G$  une subdivision d'un diamant  $K_4 - e$ . Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si la corde du diamant n'est pas subdivisée et chaque  $K_3$  induit dans le diamant correspond à un cycle pair dans  $G$ .*

*Démonstration.* Soit  $G$  une subdivision d'un diamant induit par les sommets  $w_1, w_2, w_3, w_4$  où  $w_2w_4$  est la corde du diamant.

Si  $G$  est un cube partiel alors  $G$  est biparti. Par conséquent, chaque cycle du graphe  $G$  est pair. Par ailleurs, l'arête  $w_2w_4$  n'est pas subdivisée, sinon  $G$  contiendrait une subdivision de  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique. (Lemme 3.1.1).

Supposons que les sommets  $w_2$  et  $w_4$  sont adjacents dans  $G$  biparti et montrons que  $G$  est un cube partiel par récurrence sur  $n$  où  $n$  est l'ordre de  $G$ . Comme le graphe  $G$  est biparti,  $n = 2k \geq 6$ .

Si  $n = 6$  alors  $G$  est isomorphe au graphe de la figure 3.5 (a). Ce graphe est obtenu à partir d'une expansion appliquée à un cycle élémentaire  $C_4$  en considérant les sous-graphes isométriques suivants  $C_4$  et  $P_2$ . Le graphe  $G$  est un cube partiel d'après le théorème 2.1.4.

D'autre part, soit  $G_{2k}$  un graphe biparti isomorphe à une subdivision

d'un diamant avec  $2k$  sommets où la corde du diamant  $w_2w_4$  est une arête pleine dans  $G$ . L'arête  $w_2w_4$  appartient à deux cycles pairs. Soit  $H$  un sous-graphe isométrique de  $G$  isomorphe à une chaîne d'extrémité  $w_4$  et ayant une longueur égale à la moitié de la longueur de l'un de ces cycles pairs. Posons  $y$  sa deuxième extrémité et  $H'$  le sous-graphe engendré par  $V(G) \setminus V(H) \cup \{w_4, y\}$ . Le sous-graphe  $H'$  est isométrique. L'expansion de  $G_{2k}$  suivant  $H$  et  $H'$  est un cube partiel d'après le théorème 2.1.4. Ce graphe, noté  $G_{2k+2}$  est une subdivision d'un diamant à  $2k + 2$  sommets. Voir figure 3.5 (b).  $\square$

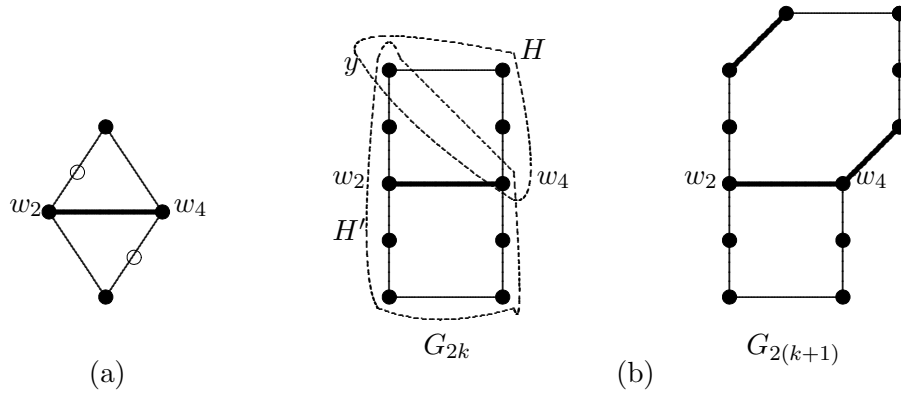


FIG. 3.5 –

### 3.4.2 Les fans

**Définition 3.4.1.** Pour tout  $k \geq 3$ , un  **$k$ -fan**  $F_k$  est un graphe obtenu en reliant un sommet  $u$  à tous les sommets de la chaîne  $P_k$  engendrée par  $w_1, w_2, \dots, w_k$ .

**Théorème 3.4.1.** [3] Soit  $G$  une subdivision d'un  $k$ -fan ( $k \geq 3$ ). Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si chaque triangle du  $k$ -fan correspond à un cycle pair dans  $G$  et les arêtes  $uw_j$  sont pleines pour tout  $j \in \{2, \dots, (k-1)\}$ .

*Démonstration. Condition nécessaire.* Voir la référence [47].

*Condition suffisante* Soit  $G$  une subdivision d'un  $k$ -fan  $F_k$  ( $k \geq 3$ ) induit par les sommets  $u, w_1, w_2, \dots, w_k$  telle que chaque triangle du fan est un cycle pair dans le graphe. (Voir la figure. 3.6). Montrons par induction sur  $k$  que  $G$  est un cube partiel.

Si  $k = 3$ ,  $G$  est le diamant subdivisé dont la corde est une arête pleine dans  $G$ . D'après le lemme 3.4.1,  $G$  est un cube partiel.

Supposons que  $k > 3$  et montrons que  $G$  est un cube partiel. Puisque le diamant subdivisé  $u, w_{k-2}, w_{k-1}, w_k$  est isométrique et donc un cube partiel alors il existe deux arêtes  $e$  et  $f$  dans  $G$  telles que  $e\theta f$ ;  $e\theta uw_{k-1}$ ;  $f\theta uw_{k-1}$  où  $e \in P(u, w_k) \cup P(w_{k-1}, w_k)$  et  $f \in P(w_{k-2}, w_{k-1})$ . Le sous-graphe  $H$  de  $G$  qui est isomorphe au  $(k - 1)$ -fan subdivisé induit par  $u, w_1, \dots, w_{k-1}$ , est isométrique. Par hypothèses d'induction,  $H$  est un cube partiel. Pour toute arête  $g \in H$   $g \neq f$ ,  $g$  et  $e$  appartiennent à une géodésique de  $G$ . Par conséquent,  $e$  n'est pas en relation avec  $g$  suivant  $\theta$ . Les classes d'équivalences rencontrant les autres arêtes du cycle  $\langle u, w_{k-1}, w_k \rangle$  excepté celles de la classe de  $e$  contiennent uniquement deux arêtes. Ces classes appartiennent à de nouvelles classes autres que celle de  $H$ . Ainsi, la transitivité de la relation  $\theta$  est préservée dans  $G$  à partir de  $H$  (en rajoutant une nouvelle classe satisfaisant la transitivité de  $\theta$  dans  $G$  et d'autres classes contenant uniquement deux arêtes). Par conséquent,  $G$  est un cube partiel.  $\square$

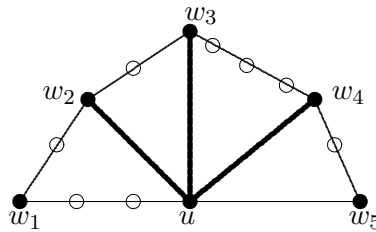


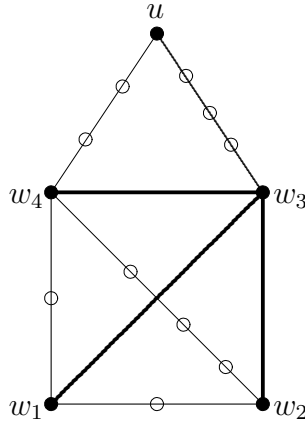
FIG. 3.6 –

### 3.5 L'enveloppe

**Définition 3.5.1.** Soit  $K_4$  le graphe complet induit par  $w_1, w_2, w_3, w_4$ . Le graphe  $G$  obtenu à partir du  $K_4$  en ajoutant un sommet  $u$  voisin à deux sommets du  $K_4$  est appelé **enveloppe**.

**Lemme 3.5.1.** [3] Soit  $G$  une subdivision de l'enveloppe engendrée par les sommets  $u, w_1, w_2, w_3, w_4$  où  $w_3$  et  $w_4$  sont les sommets de degré 4. Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si :

- i. Le sous-graphe  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  est isomorphe à  $W_3(m_1, m_2, m_3; 0, 0, 0)$  où  $m_i$  impair  $i \in \{1, 2, 3\}$  ;
- ii. Le sommet  $w_3$  (ou  $w_4$ ) est universel dans  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  ;
- iii. Le nombre total des sommets ajoutés aux arêtes  $w_3w_4$  et  $w_1w_2$  est impair.



$G$

FIG. 3.7 – Le graphe  $G$  est un cube partiel si  $w_3$  (ou  $w_4$ ) est universel dans  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ .

*Démonstration. Condition nécessaire.* Supposons que  $G$  est un cube partiel, et montrons que le sommet  $w_3$  (ou  $w_4$ ) est universel dans  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$ .

Montrons d'abord que  $P(w_3, w_4)$  est une chaîne isométrique. Supposons le contraire et soit  $H$  le sous-graphe isométrique de  $G$  induit par tous ses sommets sauf les sommets internes de  $P(w_3, w_4)$ . Comme  $H$  est isométrique, il est donc un cube partiel. De plus,  $H$  est la subdivision d'un graphe complet dont les sommets principaux sont  $w_1, w_2, w_3$  et  $w_4$ . Si  $H$  est isomorphe à  $S(K_4)$ , alors  $\langle w_1, w_3, w_4, u \rangle$  est une subdivision isométrique d'un diamant dont la corde  $w_3w_4$  est une arête subdivisée. D'après le lemme 3.1.1,  $G$  n'est pas un cube partiel. Si  $H$  contient un sommet universel, celui-ci est atteint en  $w_1$  ou  $w_2$  car  $d(w_3, w_4) \geq 2$ . Si  $w_1$  est le sommet universel, alors de nouveau  $G$  contient un sous-graphe isométrique isomorphe à une subdivision d'un diamant  $w_1w_3w_4u$  dont la corde est subdivisée. Contradiction avec le lemme 3.4.1. Un raisonnement analogue se fait lorsque  $w_2$  est universel dans  $K$ . D'où  $P(w_3, w_4)$  est géodésique dans  $G$ .

Par conséquent, le sous-graphe  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  est isométrique dans  $G$ . Celui-ci n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  sinon  $\langle w_1, w_3, w_4, u \rangle$  est une subdivision du diamant dont la corde est subdivisée. De plus, si  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  contient un sommet universel, ce dernier ne peut être ni  $w_1$  ni  $w_2$  sinon la subdivision du diamant  $\langle w_1, w_3, u, w_4 \rangle$  (ou  $\langle w_2, w_3, u, w_4 \rangle$ ) est isométrique. La corde de ce diamant n'est pas une arête pleine de  $G$ . Contradiction avec le lemme 3.4.1. D'où,  $w_3$  ou  $w_4$  est universel dans  $H$ . Comme  $G$  est biparti, le nombre de sommet ajoutés aux arêtes  $uw_3$  et  $uw_4$  est impair. (voir figure. 3.7).

*Condition suffisante.* Soit  $G_{2p}$  une subdivision d'une enveloppe vérifiant les hypothèses du théorème avec  $w_3$  universel dans  $\langle w_1, w_2, w_3, w_4 \rangle$  et le cycle  $\langle u, w_3, w_4 \rangle$  de  $G$  est de longueur  $2p$  où  $p \geq 2$ .

Montrons par récurrence sur  $p$  que  $G_{2p}$  est un cube partiel. Si  $p = 2$ ,  $G$  peut être obtenu à partir d'une subdivision d'une roue  $W_3$  ayant un sommet universel suivant une arête incident à ce sommet.

Supposons que  $G_{2p}$  est un cube partiel et montrons que  $G_{2p+2}$  l'est aussi. Pour cela, soit  $G'_{2p}$  le sous-graphe de  $G_{2p}$  isomorphe à une subdivision d'un complet  $K_4$  dont  $w_3$  est sommet universel.

Posons aussi,  $P$  la plus longue chaîne géodésique du cycle  $\langle u, w_3, w_4 \rangle$  telle qu'une seule de ses extrémités soit incidente à l'arête pleine de la subdivisions  $G_{2p}$ .

Comme  $P$  est  $G'_{2p}$  sont isométriques, l'expansion de  $G_{2p}$  suivant ces sous-graphes est un cube partiel suivant les hypothèses de récurrence. Le graphe résultant suite à cette opération est isomorphe à  $G_{2p+2}$ .  $\square$

## 3.6 Plongements isométriques des subdivisions d'un graphe complet

### 3.6.1 Le graphe complet $K_5$

**Lemme 3.6.1.** [3] Soit  $G$  une subdivision de  $K_n$  où chaque arête de  $K_n$  est une chaîne géodésique dans  $G$ . Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si :

- le graphe  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  contient exactement un sommet ajouté ou
- le graphe  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$ .

*Démonstration. Condition nécessaire.* Soit  $G$  une subdivision d'un graphe

complet  $K_n$  induit par les sommets  $w_1, w_2, \dots, w_n$  où toute arête de  $K_n$  est une géodésique dans  $G$ . Si  $G$  contient un sommet universel  $w_i$  alors toute arête de  $K_n$  non incidente à  $w_i$  dans  $K_n$  contient uniquement un sommet ajouté dans la subdivision. Supposons que  $G$  est un cube partiel et montrons par induction sur  $n$  que soit  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$  soit  $G$  contient un sommet universel.

Si  $n = 4$ ,  $G$  est la roue subdivisée. D'après le théorème précédent,  $G$  est précisément un de ces graphes :  $W_3(1, 1, 1; 1, 1, 1)$  ;  $W_3(1, 1, 1; 0, 0, 0)$ . Ainsi, la proposition est vraie pour  $n = 4$ .

Supposons que  $n > 4$  et soit  $H = \langle w_1, w_2, \dots, w_{n-1} \rangle$ . Le sous-graphe  $H$  est isomorphe à une subdivision du graphe complet  $K_{n-1}$ . Ce sous-graphe est isométrique et par conséquent un cube partiel. Par hypothèses d'induction,  $H$  contient un sommet universel ou  $H$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$ . Dans le premier cas, posons  $w_1$  le sommet universel de  $H$ . Pour tout  $i \neq j$   $i < j$   $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$ , la subdivision  $\langle w_1, w_n, w_i, w_j \rangle$  est isométrique. Donc,  $w_1$  est universel pour chacune de ces subdivisions notées  $K_{ij}$  pour tout  $i \neq j$ ,  $i < j$   $i, j \in \{2, \dots, n-1\}$ . Ainsi,  $w_1$  est universel dans  $G$ . Dans le second cas, et puisque  $K_{ij}$  est un sous-graphe isométrique,  $K_{ij}$  est un  $S(K_4)$  ou  $K_{ij}$  contient un sommet universel. D'où soit  $w_n$  est le sommet universel de  $G$  soit  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$ .

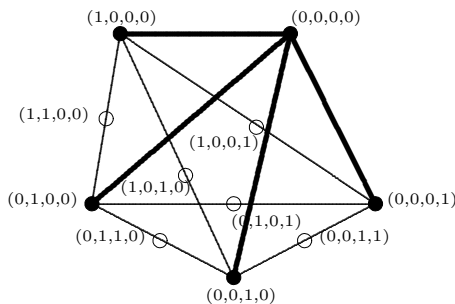


FIG. 3.8 – La subdivision du  $K_5$  ayant un sommet universel est plongeable isométriquement dans  $Q_4$

*Condition suffisante.* D'après la proposition 3.3.1,  $S(K_n)$  est un cube partiel. Ainsi, le reste de la preuve consiste à montrer que si  $G$  contient un sommet universel et toute arête de  $K_n$  non incidente à ce sommet contient

un seul sommet dans la subdivision, alors  $G$  est un cube partiel. Soient  $u$  le sommet universel de  $G$  et  $w_1, w_2, \dots, w_{n-1}$  les autres sommets principaux de  $G$ . Pour tout  $i \neq j$ ,  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$   $w_{ij}$  est le sommet ajouté à  $w_i w_j$ . Ainsi, nous pouvons plonger isométriquement  $G$  dans l'hypercube  $Q_{n-1}$  comme suit. Posons le sommet  $u$  à l'origine. Toutes les composantes du sommet  $w_i$  sont nulles excepté la  $i$  ème composante. La  $i$  ème et la  $j$  ème composante du sommet  $w_{ij}$  prennent la valeur 1 et les autres composantes de ce sommet sont nulles. Voir la figure. 3.8. Il est clair que la distance entre deux sommets principaux  $w_i$  et  $w_j$  est deux. Par ailleurs, la distance entre deux sommets  $w_{ij}$  et  $w_{jk}$  est deux avec  $k \notin \{i, j\}$ . De plus, la  $w_{ij} w_{kh}$ -géodésique passe par  $u$  où  $k, h \notin \{i, j\}$ . D'où un tel plongement est isométrique dans l'hypercube  $Q_{n-1}$ . Par conséquent,  $G$  est un cube partiel.  $\square$

**Théorème 3.6.1.** [3] *Soit  $G$  une subdivision d'un graphe complet  $K_5$ . Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $S(K_5)$  ou  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  dans  $K_5$  est une chaîne de longueur paire dans  $G$ .*

*Démonstration. Condition nécessaire.* Soient  $G$  une subdivision d'un  $K_5$  et  $u$  un sommet principal de  $G$  tels qu'il existe un sommet principal  $a$  de  $G$  différent de  $u$  avec  $P(a, u)$  non isométrique. Le cas où toutes les chaînes joignant une paire de sommets principaux sont isométriques a été traité (Lemme 3.6.1). Posons  $H$  le sous-graphe isométrique de  $G$  obtenu en supprimant les sommets internes de toute chaîne non géodésique  $P(a, u)$ . Soit  $\{K, L, u\}$  une partition des sommets principaux de  $G$  où  $K = \{x : P(u, x) \text{ isométrique}\}$  et  $L = \{a : P(u, a) \text{ non isométrique}\}$ . Il est évident que les sous-ensembles  $K$  et  $L$  ne sont pas vides. Supposons que  $G$  est un cube partiel et montrons que  $G$  contient un sommet universel  $x \in K$ .

*1<sup>er</sup> Cas.* Supposons que  $|K| = 3$ ;  $|L| = 1$  et soient donc  $K = \{x, y, z\}$  et  $L = \{a\}$ . Voir la figure. 3.9(a). Posons ainsi  $a \xrightarrow{x} u$  et montrons que soit  $\langle u, x, y, z \rangle$  ou  $\langle x, y, z, a \rangle$  est géodésique. Supposons le contraire en posant  $x \xrightarrow{u} y$  et  $y \xrightarrow{a} z$ . Ainsi la subdivision du  $K_4 : \langle a, x, y, u \rangle$  est isométrique. Celle-ci n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  car  $a \in L$ . De plus, le sommet universel de  $\langle a, x, y, u \rangle$  est atteint en  $K$ . Supposons que  $x$  est universel, alors  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique  $y \rightarrow x \rightarrow a \rightarrow z$ . D'où  $\langle x, y, z, a \rangle$  isométrique. Contradiction. Si  $y$  est universel  $P(a, x)$  est de longueur 2 et  $d(a, u) = 2$ . D'où  $a \xrightarrow{y} u$ . Contradiction. Par conséquent, soit  $\langle u, x, y, z \rangle$  ou  $\langle x, y, z, a \rangle$  est isométrique. Le sommet  $u$  et le sommet  $a$  ne peuvent pas être universels dans ces subdivisions sinon la subdivision du diamant induit par  $u, a, x, y$  est

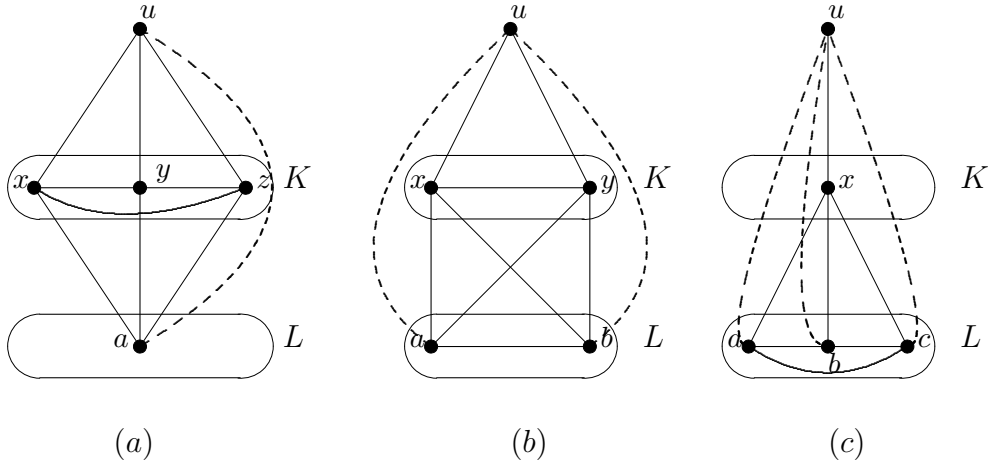


FIG. 3.9 –

isométrique et  $G$  contiendrait un triangle. Contradiction avec le fait que  $G$  est biparti. Comme  $a \xrightarrow{x} u$  le sommet  $x$  est universel dans une de ces subdivisions. Et puisque  $\langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique, le sommet  $x$  est universel dans  $G$ .

*2ème Cas.* Supposons que  $|K| = 2$ ;  $|L| = 2$  et soient donc  $K = \{x, y\}$  et  $L = \{a, b\}$ . Voir la figure. 3.9(b). Le sous-graphe  $H$  est isomorphe à une subdivision d'une enveloppe. D'après le lemme 3.5.1, le sommet  $x$  (ou  $y$ ) est universel dans la subdivision  $\langle a, b, x, y \rangle$  de  $H$ . Par ailleurs, la subdivision  $\langle u, x, y, a \rangle$  de  $H$  est isométrique dans  $H$ . Par conséquent,  $x$  est universel dans  $G$ .

*3ème Cas.* Supposons que  $|K| = 1$ ;  $|L| = 3$  et soient donc  $K = \{x\}$  et  $L = \{a, b, c\}$ . Voir la figure. 3.9(c). La subdivision  $\langle x, a, b, c \rangle$  est isométrique. Ce sous-graphe n'est pas un  $S(K_4)$  sinon  $G$  contiendrait une subdivision d'un diamant dont la corde est subdivisée. Ainsi cette dernière subdivision contient un sommet universel. Celui-ci n'est pas un sommet de  $L$  sinon  $G$  contient une subdivision d'un  $K_{2,3}$  isométrique. D'où  $x$  est universel dans la subdivision du graphe complet induit par  $x, a, b, c$ . Par conséquent, la subdivision  $\langle u, x, a, b \rangle$  est isométrique. D'où,  $x$  est universel dans  $G$ .

*Condition suffisante.* Supposons que  $G$  est une subdivision d'un graphe complet  $K_5$  telle que  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  dans  $K_5$  contient un nombre impair de sommets ajoutés. Posons  $n$  le nombre total de sommets ajoutés aux arêtes du  $K_5$ . Il est clair que  $n \geq 6$ .

Pour  $n = 6$ ,  $G$  est la subdivision du  $K_5$  où chaque arête de  $K_5$  est une chaîne isométrique dans  $G$ . Ainsi, le graphe  $G$  est un cube partiel d'après le lemme 3.6.1. Supposons alors que  $n > 6$ . Alors, il existe une arête  $w_1w_2$  dans  $K_5$  ayant  $w_{1,1}, w_{1,2}, \dots, w_{1,2k+1}$  où  $k \geq 1$ . Le graphe  $G'$  obtenu à partir de  $G$  en supprimant les sommets  $w_{1,2k}, w_{1,2k+1}$  est un cube partiel par induction. Le graphe  $G$  peut être ainsi construit à partir de  $G'$  en utilisant une expansion suivant  $G'_1 = \{w_1, w_{1,1}, \dots, w_{1,k}\}$  et  $G'_2 = V(G') \setminus G' \cup \{w_1, w_2\}$ . Notons bien que si  $k = 1$ , nous posons  $G'_1 = \{w_1, w_{1,1}, w_2\}$  et  $G'_2 = \{V(G') \setminus G' \cup \{w_1, w_2\}\}$ . De ce fait,  $G$  est un cube partiel.  $\square$

L'étude du graphe complet  $K_5$  (le théorème 3.6.1), nous permet de trouver la caractérisation des subdivisions des graphes complets comme partiels cubes :

### 3.6.2 Les graphes complets $K_n$

**Théorème 3.6.2.** [10] *Soit  $G$  une subdivision d'un graphe complet  $K_n$  ( $n \geq 4$ ). Alors,  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est isomorphe à l'un de ces graphes :*

- La subdivision  $S(K_n)$  ;
- Le graphe  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  dans  $K_n$  est une chaîne de longueur paire dans  $G$ .

*Démonstration. Condition suffisante.* Supposons que  $G$  est une subdivision d'un complet  $K_n$  ayant un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  dans  $K_n$  est une chaîne de longueur paire. Montrons, alors qu'un tel graphe est un cube partiel. D'après le lemme 3.6.1, une subdivision  $G_0$  d'un complet  $K_n$ , où toute arête du  $K_n$  est une chaîne isométrique et  $u$  sommet universel de  $G_0$ , peut être plongé isométriquement dans  $Q_m$ . Or,  $G$  peut être obtenu à partir de  $G_0$  tout en rajoutant des sommets internes aux chaînes reliant les principaux de  $G_0$  différents de  $u$ . Si l'arête  $xy$  de  $K_n$  contient  $2k + 1$  ( $k > 1$ ) sommets ajoutés dans  $G$ , soient  $x = (a_1, a_2, \dots, a_i, a_j, \dots, a_m)$   $u = (a_1, a_2, \dots, \bar{a}_i, a_j, \dots, a_m)$   $y = (a_1, a_2, \dots, \bar{a}_i, \bar{a}_j, \dots, a_m)$  les composantes de  $x$ ,  $u$  et  $y$  respectivement dans  $G_0$ . Soit  $G_1$  le graphe obtenu à partir de  $G_0$  en posant  $v_1, v_2, \dots, v_{2k+1}$  les  $2k + 1$  sommets entre  $x$  et  $y$  avec  $k > 1$ . Le sous-graphe  $G_1$  est un isométrique dans  $Q_{m+k}$ . En effet, il suffit de garder les composantes des sommets de  $G_0$  et de poser toutes les composantes nulles à partir de la  $(m + 1)$  ème dimension. Par ailleurs, les composantes de  $v_i$

( $1 \leq i \leq 2k + 1$ ) sont :

$$\left\{ \begin{array}{ll} v_i = (a_1, a_2, \dots, a_i, a_j, \dots, a_m, \overbrace{1, \dots, 1}^{i \text{ fois}}, 0, \dots, 0) & 1 \leq i \leq k \\ v_i = (a_1, a_2, \dots, a_j, \overline{a_j}, \dots, a_m, 1, 1, \dots, 1, 1) & i = k + 1 \\ v_i = (a_1, a_2, \dots, \overline{a_i}, \overline{a_j}, \dots, a_m, \underbrace{0, \dots, 0}_{i-k-1 \text{ fois}}, 1, \dots, 1) & k + 2 \leq i \leq 2k + 1 \end{array} \right.$$

Ainsi, la distance entre deux sommets de  $G_0$  est préservée dans  $G_1$ . De plus, pour tout sommet  $v_i$  et tout sommet de  $G_0$ , la plus courte chaîne qui les relie passe soit par  $x$  soit par  $y$ . Donc, il est facile de vérifier que  $G_1$  est un cube partiel. En itérant cette transformation à toute paire de sommets principaux (différents de  $u$ ), le graphe résultant peut être plongé isométriquement dans un hypercube. D'où,  $G$  est un cube partiel.

*Condition nécessaire.* Supposons que  $G$  est une subdivision d'un graphe complet  $K_n$  ( $n > 4$ ) plongeable dans l'hypercube et montrons par récurrence sur  $n$  que  $G$  est un  $S(K_n)$  ou  $G$  est une subdivision ayant un sommet universel et que des cycles pairs.

La proposition est vraie pour  $n \in \{4, 5\}$ .

Si toutes les chaînes reliant les sommets principaux de  $G$  sont géodésiques, alors  $G$  est isomorphe à  $S(K_n)$  ou  $G$  contient un sommet universel  $u$  et toute arête non incidente à  $u$  dans  $K$  est de longueur 2 (Lemme 3.6.1).

Si  $G$  est un cube partiel alors il est biparti. Par ailleurs, sous ces conditions nous avons les résultats suivants :

**Proposition 3.6.1.** *Soient  $x$  et  $y$  deux sommets principaux de  $G$ , alors une  $xy$ -géodésique est soit un  $P_2^*$  isométrique ou un  $P_3^*$  isométrique.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe  $p \geq 4$  tel que la plus courte  $xy$ -chaîne induite est un  $P_p^*$  et considérons les quatre premiers sommets principaux de  $P_p^* : x, x_1, x_2, x_3$ . Voir la figure. 3.10 (a). La subdivision  $S = \langle x, x_1, x_2, x_3 \rangle$  est isométrique et donc  $S$  est un  $S(K_4)$  ou  $S$  contient un sommet universel. Puisque  $d(x, x_3) \geq 3$ ,  $S$  n'est pas un  $S(K_4)$ . Alors,  $S$  contient un sommet universel. Par conséquent, soit  $P(x, x_3)$  est pleine soit  $d(x, x_3) = 2$ . Contradiction car  $d(x, x_3) \geq 3$ .  $\square$



FIG. 3.10 –

**Lemme 3.6.2.** *Soient  $x, y, v$  des sommets principaux de  $G$ . Si  $P(x, y)$  est une arête pleine et  $y \rightarrow v$  alors il existe une  $xv$ -géodésique contenue dans  $\langle x, y, v \rangle$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $x \xrightarrow{w} v$  avec  $w$  sommet principal différent de  $x, y$  et  $v$  et que  $x \not\rightarrow v$  et  $x \not\rightarrow^y v$ . Voir la figure. 3.10(b). En posant ainsi  $d(y, v) = a$  et  $d(v, x) = b$ , nous avons  $b < a + 1$  (sinon  $x \xrightarrow{y} v$ ). Par ailleurs, si  $b < a - 1$ , la séquence  $y, x, w, v$  forme un  $P_4^*$  isométrique entre  $y$  et  $v$ . Contradiction avec la proposition 3.6.1. Si  $b = a$ , alors le graphe  $G$  contient un cycle impair de longueur  $2a + 1$ . Contradiction car  $G$  est biparti.  $\square$

Soit  $u$  un sommet principal dans  $G$  tel qu'il existe  $a$  principal de  $G$  avec  $P(u, a)$  non isométrique.

Posons  $\{u, K_u, L_u\}$  la partition des sommets principaux de  $G$  avec  $K_u = \{x \in G : P(u, x) \text{ géodésique}\}$  et  $L_u = \{a \in G : P(a, x) \text{ non géodésique}\}$ . Voir la figure. 3.11. Notons, que dans le reste de la preuve et par abus de langage, le sous-graphe de  $G$  isomorphe à une subdivision dont les sommets principaux sont ceux de  $G$  excepté  $u$  sera noté par  $G \setminus u$ .

**Définition 3.6.1.** *Soit  $x$  un sommet de  $K_u$ . Toute géodésique passant par  $x$  et reliant deux sommets principaux de  $G$  différents de  $x$  peut avoir un de ces types de configurations que nous désignerons comme suit (Voir FIG. 3.12) :*

- $x$  est dit de type  $\mathcal{L}$  s'il existe  $y \in K_u$  tel que  $u \xrightarrow{x} y$ .
- $x$  est dit de type  $\mathcal{I}$  s'il existe  $a \in L_u$  tel que  $a \xrightarrow{x} u$ .
- $x$  est dit de type  $\mathcal{C}$  s'il existe  $y, z \in K_u$  tel que  $y \xrightarrow{x} z$ .
- $x$  est dit de type  $\Lambda$  s'il existe  $a, b \in L_u$  tel que  $a \xrightarrow{x} b$ .
- $x$  est dit de type  $\mathcal{R}$  s'il existe  $y \in K_u$   $a \in L_u$  tel que  $a \xrightarrow{x} y$ .

**Remarque 3.6.1.** *Supposons qu'il n'existe pas de sommet principal  $v$  dans  $G$  tel que  $G \setminus v$  soit isométrique. Alors, nous avons :*

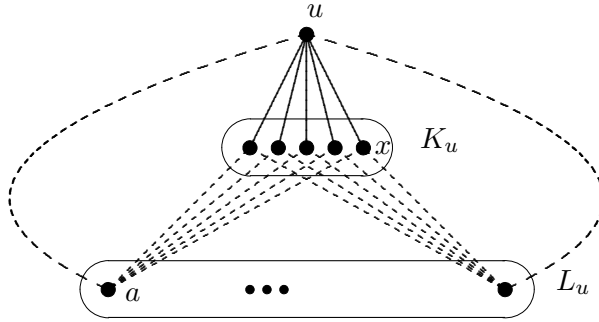


FIG. 3.11 –

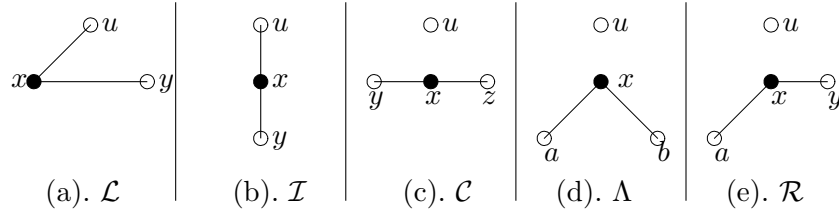


FIG. 3.12 – Les configurations possibles des géodésiques reliant des sommets principaux de  $G$  et passant par le sommet  $x$ .

- Pour tout sommet principal  $u$  dans  $G$ , chaque sommet  $x \in K_u$  admet au moins une des configurations citées en haut ( $\mathcal{I}, \mathcal{C}, \mathcal{L}, \Lambda, \mathcal{R}$ ).
- De plus, le sommet  $x$  ne peut pas être uniquement de type  $\mathcal{L}(u \xrightarrow{x} y)$  sinon  $G \setminus x$  est isométrique vu que  $P(u, y)$  est isométrique.

**Lemme 3.6.3.** *S'il n'existe pas de sommet principal  $v$  dans  $G$  tel que  $G \setminus v$  soit isométrique, alors pour tout  $u$  sommet principal de  $G$  et tout  $x$  sommet de  $K_u$ ,  $x$  n'est pas de type  $\mathcal{C}$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $u$  est un sommet principal de  $G$  tel qu'il existe un sommet  $x$  dans  $K_u$  avec  $x$  de type  $\mathcal{C}$ . Autrement dit,  $y \xrightarrow{x} z$  où  $y, z \in K_u$ . Ainsi, la subdivision de  $K_4 \langle u, x, y, z \rangle$  est géodésique. Celle-ci n'est pas un  $S(K_4)$  car  $y \xrightarrow{x} z$ . Le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  contient donc un sommet universel non atteint ni en  $y$  ni en  $z$  ( $d(y, z) \geq 2$ ). De plus, le sommet  $u$  ne peut pas être universel dans la subdivision du  $K_4$  sinon  $d(y, z) = 2$  et

donc  $G$  contient un triangle. Or  $G$  est biparti. Par conséquent, le sommet universel est atteint en  $x$ .

De ce fait, si  $x$  est de type  $\mathcal{C}$  avec  $x \xrightarrow{x} z$ , alors  $x$  est universel dans  $\langle u, x, y, z \rangle$ . Par ailleurs, nous avons :

**Remarque 3.6.2.** *Pour tout sommet  $t$  dans  $K_u$  différent de  $x, y$  et  $z$  où  $P(y, t)$  est géodésique, la chaîne  $P(x, t)$  est pleine.*

*Démonstration.* Supposons que  $P(y, t)$  est géodésique et  $d(y, t) = l$ . (Voir la figure. 3.13(a)). La distance entre  $u$  et  $t$  vérifie  $l - 2 < d(u, t) < l + 2$  sinon il existe une  $ut$ -géodésique ou une  $yt$ -géodésique formant un  $P_4^*$ . Contradiction avec la proposition 3.6.1. D'autre part,  $d(u, t) \notin \{l - 1, l + 1\}$  sinon  $G$  contient un cycle impair. Par conséquent,  $d(u, t) = l$ . La  $xt$ -géodésique n'est

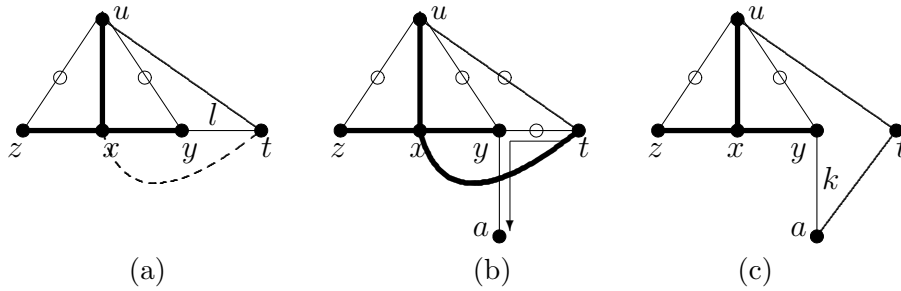


FIG. 3.13 –

pas de la forme  $x \xrightarrow{y} t$  sinon le sommet  $y$  est de type  $\mathcal{C}$  et donc  $y$  universel dans  $\langle u, x, y, t \rangle$ . Ainsi,  $G$  contient un cycle impair  $\langle x, y, u \rangle$ . Contradiction. Par ailleurs,  $d(x, t) \geq l - 1$  sinon  $G$  contient une chaîne reliant les sommets  $y$  et  $t$  de longueur inférieure strictement à  $l$ . Si  $d(x, t) = l$ ,  $G$  contient un cycle de longueur  $2l + 1$ . D'où,  $d(x, t) = l - 1$ . De plus, la chaîne  $P(x, t)$  est géodésique sinon, il existe un  $P_4^*$  isométrique et ceci contredit le lemme 3.6.1. Par conséquent, la subdivision  $\langle u, x, y, t \rangle$  est isométrique dans  $G$  et  $x$  est universel dans cette subdivision. Ainsi,  $l = 2$  et  $P(x, t)$  est une arête pleine.

Considérons le type de configuration que peut avoir le sommet  $y$  :

- Le sommet  $y$  ne peut pas être de type  $\mathcal{C}$  sinon  $P(u, y)$  est pleine et  $\langle u, x, y \rangle$  est un cycle impair.

- Si le sommet  $y$  est de type  $\mathcal{I}$ , il existe un sommet  $a$  dans  $L_u$  tel que  $a \xrightarrow{y} u$ . Il existe une  $ax$ -géodésique dans le cycle  $\langle x, y, a \rangle$  d'après le lemme 3.6.2. Ainsi, la subdivision du  $K_4 \langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique. Puisque  $P(a, u)$  n'est pas géodésique,  $\langle u, x, y, a \rangle$  n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$ , et les sommets  $u$  et  $a$  ne sont pas universels dans  $\langle u, x, y, a \rangle$ . Le sommet  $x$  n'est pas universel dans cette subdivision du  $K_4$  sinon  $a \xrightarrow{y} u$ . Le sommet  $y$  n'est pas universel dans  $\langle u, x, y, a \rangle$  sinon les sommets  $x, y, u$  forment un triangle dans  $G$ . Contradiction. D'où  $y$  n'est pas de type  $\mathcal{I}$ .
- Montrons que le sommet  $y$  n'est pas de type  $\Lambda$ . Supposons qu'il existe deux sommets  $a$  et  $b$  dans  $L_u$  tel que  $a \xrightarrow{y} b$ . D'après le lemme 3.6.2, il existe une  $ax$ - géodésique (resp. une  $bx$ -géodésique) dans le cycle  $\langle a, x, u \rangle$  (resp.  $\langle b, x, y \rangle$ ). Alors, le  $K_4$  subdivisé  $\langle x, y, a, b \rangle$  est isométrique et non isomorphe à  $S(K_4)$  car  $a \xrightarrow{y} b$ . Le sommet  $a$  (resp.  $b$ ) ne peut pas être universel dans cette subdivision sinon  $\langle a, x, y \rangle$  (resp.  $\langle b, x, y \rangle$ ) est un triangle. Le sommet  $x$  n'est pas universel sinon  $a \xrightarrow{y} b$ . Supposons maintenant, que  $y$  est universel dans  $\langle x, y, a, b \rangle$ . La distance entre les sommets  $a$  et  $u$  est au plus 3. Si  $d(a, u) = 3$ , les sommets  $u, x, y, a$  forment un  $P_4^*$  isométrique dans  $G$ . Contradiction avec le lemme 3.6.1. Il est clair que  $d(a, u) \neq 1$  puisque  $a \in L_u$ . Par ailleurs, si  $d(a, u) = 2$ , alors  $G$  contiendrait un cycle d'ordre 5. Contradiction. D'où, le sommet  $y$  n'est pas de type  $\Lambda$ .
- Le sommet  $y$  n'est pas de type  $\mathcal{R}$ . En effet, si  $y$  est de type  $\mathcal{R}$ , alors soit  $t \xrightarrow{y} a$  soit  $x \xrightarrow{y} a$  où  $t \in K_u$ ,  $t$  différent de  $x, y, z$  :
  - Si  $t \xrightarrow{y} a$ , alors les sommets  $x$  et  $t$  sont adjacents dans  $G$  d'après la remarque 3.6.2. Voir la figure. 3.13(b). Ainsi,  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique (considérer la géodésique reliant  $t$  et  $a$  en passant par  $x$  et  $y$ ). Contradiction avec la proposition 3.6.1.
  - Si  $a \xrightarrow{y} x$ , la  $au$ -géodésique ne passe pas par le sommet  $y$ , sinon  $y$  est de type  $\mathcal{I}$ . Ceci est impossible d'après le cas traité précédemment. Si  $a \xrightarrow{x} u$ , alors  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique (considérer  $a \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow u$ ) et ceci contredit la proposition 3.6.1. Aussi, si  $a \xrightarrow{z} u$ , la chaîne suivante  $a \rightarrow y \rightarrow x \rightarrow u$  est un  $P_4^*$  géodésique dans  $G$ . Contradiction avec la proposition 3.6.1. D'où il existe un sommet principal  $t$  dans  $K_u$  différent de  $x, y, z$  tel que  $a \xrightarrow{t} u$ . Posons ainsi :  $d(a, u) = l$  et  $d(a, y) = k$ . Voir la figure. 3.13(c). D'un coté,  $k \leq l + 1$ , sinon la  $au$ -géodésique passe par  $y$ . D'autre part,  $l - 1 \leq k$ , la chaîne

$a \rightarrow t \rightarrow u \rightarrow x$  est un  $P_4^*$  isométrique. Contradiction. D'où,  $l = k$  et  $d(x, a) = l + 1$ . Ainsi,  $a \rightarrow t \rightarrow u \rightarrow x$  est un  $P_4^*$ .

Par conséquent le sommet  $y$  n'est pas de type  $\mathcal{R}$ .

En conclusion, toutes les géodésiques (entre sommets principaux) passant par le sommet  $y$  ne peuvent être de type  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\mathcal{A}$ ,  $\mathcal{R}$ . Contradiction avec la remarque 3.6.3. Et cela achevera la preuve de notre lemme.  $\square$

Maintenant, montrons que  $G$  admet un sommet universel tout en utilisant les résultats précédents :

**1er Cas : il existe  $u$  principal dans  $G$  tel que  $G \setminus u$  isométrique**

Si  $G \setminus u$  est isométrique dans  $G$  qui est cube partiel alors  $G \setminus u$  est un cube partiel aussi. Par hypothèse d'induction,  $G \setminus u$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$  ou  $G \setminus u$  contient un sommet universel.

Considérons le cas où  $G \setminus u$  est isomorphe à  $S(K_{n-1})$ .

- Montrons que pour tout sommet principal  $v \in G \setminus u$ , la chaîne  $P(u, v)$  est isométrique. Supposons le contraire en posant  $a$  sommet principal dans  $G$  avec  $P(u, a)$  non géodésique. Soit  $x$  sommet principal dans  $G \setminus v$  tel que  $d(u, x) = \min_{y \in G \setminus u} d(u, y)$ . Ainsi  $u \xrightarrow{x} a$  et pour  $b$  principal dans  $G \setminus \{u, x\}$  soit  $u \rightarrow b$  soit  $u \xrightarrow{x} b$ . Voir la figure. 3.14(a). De ce fait, les quatre sommets  $u, x, a, b$  forment une subdivision de  $K_4$  isométrique différente de  $S(K_4)$  (car  $P(u, a)$  non géodésique). De plus aucun sommet principal de cette subdivision n'est universel. D'où toutes les  $P(u, v)$  sont isométriques avec  $v$  principal dans  $G \setminus u$ .
- Si  $P(u, v)$  est isométrique pour tout sommet principal de  $G \setminus u$ . Comme  $G$  n'est pas isomorphe à  $S(K_n)$  alors il existe un sommet principal  $v$  dans  $G \setminus u$  tel que  $P(u, v)$  n'est pas une chaîne de longueur 2. Soient  $y, z$  deux sommets principaux de  $G \setminus \{u, v\}$ . La subdivision  $\langle u, v, y, z \rangle$  est isométrique et non isomorphe à  $S(K_4)$  à cause de la longueur de la chaîne  $P(u, v)$ . Donc cette subdivision de  $K_4$  contient un sommet universel et il sera atteint en  $u$ . Ceci est vrai pour toute paire de sommets principaux de  $G \setminus \{u, v\}$ . D'où  $u$  est universel dans  $G$ . Voir la figure. 3.14(b).

Considérons maintenant le cas où  $G \setminus u$  contient un sommet universel  $x$  et montrons que  $x$  est universel dans  $G$  aussi. Soient  $y, z$  deux sommets principaux de  $G \setminus \{u, x\}$  les plus proches de  $u$ . Il existe alors une  $uz$ -géodésique

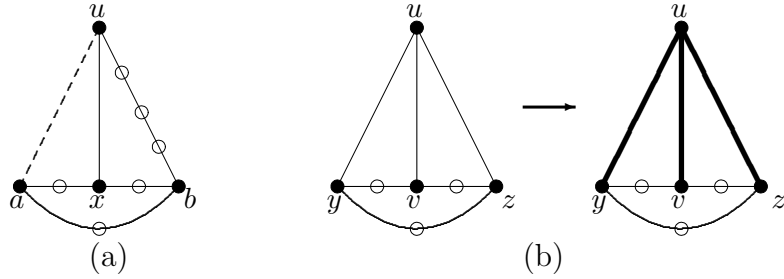


FIG. 3.14 –

et une  $uy$ -géodésique dans  $\langle u, x, y, z \rangle$ . Ainsi, la subdivision  $\langle u, x, y, z \rangle$  est isométrique et par conséquent,  $x$  est universel dans  $G$ .

**2ème Cas : pour tout  $u$  principal dans  $G$ ,  $G \setminus u$  est non isométrique**  
 Dans ce cas, il existe deux sommets  $a$  et  $x$  tels que  $a \xrightarrow{x} b$  avec  $x \in K$  et  $a \in L$ . D'après le lemme, il n'existe aucun sommet dans  $K$  de type  $\mathcal{C}$ . Par ailleurs, nous avons le résultat suivant :

**Lemme 3.6.4.** *Il n'existe aucune paire de sommets  $\{x, y\}$  dans  $K$  telle que  $P(u, x)$  et  $P(x, y)$  soient pleines.*

*Démonstration.* Par absurde, supposons que  $P(u, x)$  et  $P(x, y)$  sont pleines et considérons le type des géodésiques passant par  $y$ . Il est clair que  $y$  n'est pas de type  $\mathcal{C}$ . (Lemme 3.6.3).

Supposons que  $y$  est de type  $\mathcal{I}$ . Alors il existe  $b \in L$  tel que  $b \xrightarrow{y} u$ . La distance entre  $b$  et  $y$  est  $d(b, y) + 2$ . Ainsi la séquence des sommets  $b, y, x, u$  forme un  $P_4^*$  isométrique entre  $b$  et  $u$ . Contradiction avec la proposition 3.6.1.

Si  $y$  est de type  $\Lambda$ , alors il existe  $b, c \in L$  tels que  $b \xrightarrow{y} c$ . D'après le lemme 3.6.2, il existe une  $xb$ -géodésique et une  $xc$ -géodésique dans la subdivision  $\langle x, y, b, c \rangle$  et par conséquent, cette dernière est isométrique non isomorphe à  $S(K_4)$ . Donc,  $\langle x, y, b, c \rangle$  admet un sommet universel. Si  $x$  est universel alors  $P(y, b)$  et  $P(y, c)$  sont de longueur 2 puisqu'elles sont isométriques. Voir la figure. 3.15(a). Or ceci contredit le fait que  $b \xrightarrow{y} c$  puisqu'il existe une plus courte chaîne passant par  $x$ . D'autre part, si  $y$  est universel (Voir la figure. 3.15(b)), la séquence des sommets  $c, y, x, u$  forme un  $P_4^*$  isométrique. Contradiction. D'où le sommet  $y$  n'est pas de type  $\Lambda$ . Supposons que  $y$  est de type  $\mathcal{R}$ . Ainsi, il existe  $b \in L$  et  $t \in K$  tels que  $b \xrightarrow{y} t$ .

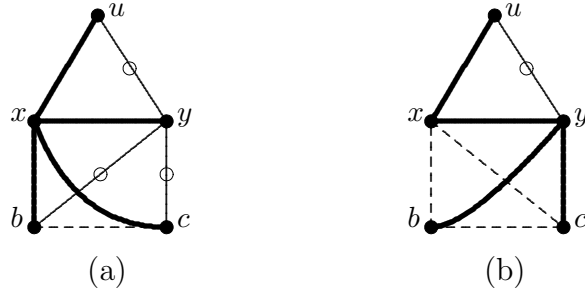


FIG. 3.15 –

- Si  $t = x$ , notons par  $l$  la longueur entre  $b$  et  $y$ . Ainsi,  $d(b, x) = l + 1$ . Par ailleurs, aucune  $bu$ -géodésique passe par le sommet  $y$  (sinon  $y$  est de type  $\Lambda$  et ceci a été déjà étudié) ni par le sommet  $x$  (sinon la séquence  $b, y, x, u$  est un  $P_4^*$  isométrique). D'où, il existe un sommet  $z \in K \setminus \{x, y\}$  tel que  $b \xrightarrow{z} u$  de longueur notée  $p$ . Voir la figure. 3.16(a). Ainsi  $p > l$  sinon  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique entre  $x$  et  $b$  (Considérer la séquence  $x, u, z, b$ ). De plus,  $p \leq l + 1$  sinon il existe une  $bu$ -géodésique passant par  $y$ . Or  $y$  ne peut pas être de type  $\mathcal{I}$ . D'où  $p = l + 1$  et ceci est impossible car  $G$  contient un cycle de longueur impair  $2p + 1$ .
- Si  $t \neq x$  alors il existe une  $xt$ -géodésique de longueur  $p$  dans le cycle pair  $\langle x, y, t \rangle$  et de plus  $d(x, t) \in \{l - 1, l + 1\}$  avec  $l = d(y, t)$ . Voir la figure. 3.16(b). Puisque  $y$  ne peut pas être de type  $\mathcal{C}$ ,  $d(x, t) \neq l + 1$  et donc  $d(x, t) = l - 1$ . Ainsi,  $P(x, t)$  est géodésique sinon  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique entre  $y$  et  $t$ . Comme  $d(x, t) = l - 1$ , la chaîne  $P(y, t)$  n'est pas pleine. D'autre part, sachant qu'il existe une  $bx$ -géodésique est dans  $\langle x, b, y \rangle$ , la subdivision  $\langle x, y, t, b \rangle$  est isométrique et non isomorphe à  $S(K_4)$  (car elle contient une arête pleine). Ainsi le sommet  $x$  est universel dans cette subdivision et  $d(b, y) = 2$ . Or ceci est impossible car  $P(y, t)$  n'est pas pleine et donc  $y$  n'est pas de type  $\mathcal{R}$ .

Comme le sommet  $y$  ne peut pas être de type  $\mathcal{C}$ ,  $\mathcal{I}$ ,  $\Lambda$ ,  $\mathcal{R}$ , il sera de type  $\mathcal{L}$ . Or, ceci contredit la remarque 3.6.1.  $\square$

**Lemme 3.6.5.** *Pour tout sommet  $a$  dans  $L$ , il existe un unique sommet  $x$  dans  $K$  tel que  $P(x, a)$  soit géodésique.*

*Démonstration. L'existence.* Il suffit juste de considérer la  $au$ -géodésique. Celle-ci passe par un sommet de  $K$ .

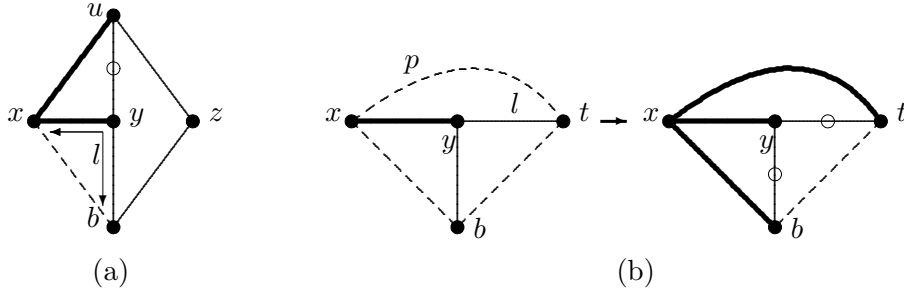


FIG. 3.16 –

*L'unicité.* Par absurde supposons qu'il existe deux sommets distincts  $x, y$  dans  $K$  tels que  $P(a, x)$  et  $P(a, y)$  soient géodésiques. Choisissons les sommets  $x, y$  tels que  $a \xrightarrow{x} u$ ,  $a \rightarrow y$  et  $d(u, x) + d(x, a) + d(a, y)$  soit minimum dans  $G$  sous ces conditions.

– *La subdivision  $\langle u, a, x, y \rangle$  est isométrique dans  $G$*

Par absurde, supposons qu'elle n'est pas isométrique. Ainsi, il existe un sommet  $a'$  principal de  $G$  différent de  $u$  tel que  $x \xrightarrow{a'} y$ . Voir la figure. 3.17. D'après le lemme 3.6.3,  $a' \in L$  (sinon  $x$  est de type  $\mathcal{C}$ ). Ainsi,  $d(u, x) + d(x, a') + d(a', y) < d(u, x) + d(x, a) + d(a, y)$ . Puisque  $d(u, x) + d(x, a) + d(a, y)$  est minimum suivant les conditions citées en haut, aucune  $a'u$ -géodésique passe par le sommet  $x$  ou par le sommet  $y$ . Alors, il existe  $x' \in K$  tel que  $a' \xrightarrow{x'} u$ . Voir la figure. 3.17. Ainsi nous avons :  $a' \xrightarrow{x'} u$ ,  $a' \rightarrow y$  et  $d(u, x) + d(x, a') + d(a', y) < d(u, x) + d(x, a) + d(a, y)$ . Contradiction avec les hypothèses.

Alors, la subdivision  $\langle u, x, y, a \rangle$ , non isomorphe à  $S(K_n)$  (car  $a \in L$ ), contient un sommet universel qui est soit  $x$  soit  $y$ . Supposons que  $x$  est universel, et donc  $P(u, x)$  et  $P(x, y)$  sont pleines. Or, ceci contredit le lemme 3.6.4.  $\square$

D'après le lemme 3.6.5, pour tout  $a \in L$ , il existe un unique  $x \in K$  tel que :  $P(a, x)$  géodésique et  $a \xrightarrow{x} u$ .

Montrons maintenant que  $|K| = 1$ . Supposons ainsi qu'il existe deux sommets distincts  $x$  et  $y$  dans  $K$ . Chacun de ces sommets doit avoir un type de configuration  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{I}$  ou  $\Lambda$  (d'après la remarque 3.6.1 et le lemme 3.6.3). Ainsi, il existe un sommet  $x \in L$  tel que  $P(a, x)$  isométrique. La chaîne  $P(a, y)$  n'est pas géodésique d'après le lemme 3.6.5. Aucune  $ay$ -géodésique passe par  $x$  car la subdivision  $\langle a, x, y, a \rangle$  est isométrique ( $a \xrightarrow{x} u$ ) et donc  $x$  universel. Par

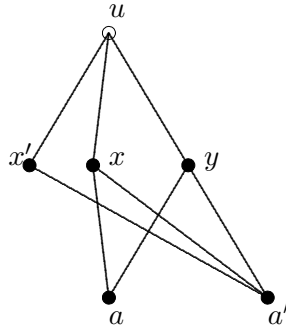


FIG. 3.17 –

conséquent, les chaînes  $P(u, x)$  et  $P(x, y)$  sont pleines. Contradiction avec le lemme 3.6.4. De plus, la  $ay$ -géodésique ne passe pas par un sommet de  $K$ . D'où, il existe  $b \in L$  tel que  $a \xrightarrow{b} y$ . Il existe une  $bu$ -géodésique passant par  $y$ . Choisissons ainsi les sommets principaux  $x, y$  dans  $K$  et  $a, b$  dans  $L$  tels que  $a \xrightarrow{x} u$ ,  $b \xrightarrow{y} u$  et  $x \xrightarrow{b} y$  avec  $d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$  plus petite sous ces conditions .

*La subdivision  $\langle u, x, y, a, b \rangle$  est isométrique.*

Supposons le contraire. Ainsi, les seules géodésiques reliant les sommets principaux de la subdivision  $\langle u, x, y, a, b \rangle$  qui ne sont pas dans ce sous-graphe de  $G$  sont la  $xy$ -géodésique et la  $xb$ -géodésique. Supposons ainsi, qu'il existe un sommet principal  $t$  tel que  $x \xrightarrow{t} y$ . Le sommet  $t$  n'est pas dans  $K$  sinon  $t$  est de type  $\mathcal{C}$ . Contradiction avec le lemme 3.6.3. De plus, si  $t \in L$ ,  $t$  rencontre deux géodésiques  $P(x, t)$  et  $P(y, t)$ . Ceci contredit le lemme 3.6.4. D'où  $x \xrightarrow{u} y$ . Ainsi la  $xb$ -géodésique n'est pas dans la subdivision  $\langle u, x, y, a, b \rangle$ . Puisque  $P(b, y)$  est l'unique chaîne reliant  $b$  à un sommet de  $K$ , il existe un sommet  $a'$  dans  $L$  tel que  $b \xrightarrow{a'} x$ . Donc,  $b \xrightarrow{a'} x$ ,  $a' \xrightarrow{x} u$  et  $b \xrightarrow{y} u$  avec  $d(x, a') + d(a', b) + d(b, y) < d(x, a) + d(a, b) + d(b, y)$ . Contradiction. D'où la subdivision du  $K_5$   $\langle u, x, y, a, b \rangle$  est isométrique.

Puisque  $\langle u, x, y, a, b \rangle$  est isométrique et non isomorphe à  $S(K_5)$  (car  $a, b \in L$ ), ce sous-graphe de  $G$  contient un sommet universel différent de  $u, a, b$ . Par ailleurs, s'il est atteint en  $x$  (resp.  $y$ ) alors  $P(u, x)$  et  $P(x, y)$  (resp.  $P(u, y)$  et  $P(x, y)$ ) sont pleines. Contradiction avec le lemme 3.6.4. Alors, le sous-

graphe isométrique  $\langle u, x, y, a, b \rangle$  n'est pas un cube partiel. Contradiction. D'où  $|K| = 1$ .  $\square$

Comme  $|K| = 1$ , aucune géodésique reliant les sommets de  $K$  et  $L$  passe par  $u$ . Alors,  $G \setminus u$  est isométrique. Or ceci contredit les hypothèses.

De ce fait, il existe  $u$  principal dans  $G$  tel que  $G \setminus u$  est isométrique. D'après le premier cas,  $G$  contient un sommet  $x$  universel. Et comme  $G$  est biparti, tout triplet de sommets principaux de  $G$  forme un cycle pair.  $\square$

Un bref résumé s'impose suite à cette démonstration. En effet, voulant montrer par récurrence sur  $n$  qu'une subdivision d'un graphe complet  $K_n$  devrait contenir un sommet universel tout en étant un cube partiel différent  $S(K_n)$ , nous avons procédé comme suit :

- Si nous pouvons enlevé un sommet principal de telle sorte que les distances dans le graphe résultant sont les mêmes dans  $G$ , l'hypothèse de récurrence nous permet de dire que  $G$  contient un sommet universel.
- Ensuite, nous nous sommes intéressés au fait qu'un tel sommet peut être supprimé pour avoir ce résultat :
  - Ainsi nous avons considéré la partition  $\{u, K, L\}$  de l'ensemble des sommets principaux.
  - Un sommet de l'ensemble  $K$  pouvant intervenir dans les géodésiques du graphe  $G$  aura l'un des types suivants de sommets :  $\mathcal{C}$ ,  $\Lambda$ ,  $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{I}$ .
  - Le type  $\mathcal{C}$  ne peut avoir lieu dans un tel graphe.
  - Par conséquent, un sommet de  $L$  voit géodésiquement au plus un sommet de  $K$ .
  - Le graphe  $G$  contient une subdivision d'un graphe complet  $K_5$  isométrique différente de  $S(K_5)$ . Celle ne pouvant pas contenir un sommet universel, permet de déduire que  $|K| = 1$ .
  - Les hypothèses de récurrence permet de dégager un sommet principal de  $G$  qui soit universel.

**Corollaire 3.6.1.** [10] *Soit  $G$  une subdivision d'un graphe  $K$  d'ordre  $n$  où toute arête de  $K$  est subdivisée un nombre impair de fois. Le graphe  $G'$  obtenu en joignant un sommet  $u$  à chacun des sommets principaux de  $G$  est un partiel cube.*

*Démonstration.* Il est évident que si  $K$  est un graphe complet, le graphe  $G'$  est un partiel cube en vertu du précédent théorème. Sinon, soit  $D_n$  le nombre

maximum de sommets ajoutés à une arête de  $K$ . Complétons  $G'$  afin d'avoir une subdivision du graphe complet  $K_{n+1}$  en rajoutant les arêtes du graphe complémentaire de  $K$  subdivisées  $2D_n + 1$  fois. Une telle subdivision est un partiel cube. Comme les distances dans  $G'$  sont préservées dans le nouveau graphe,  $G'$  est un partiel cube aussi. Voir figure. 3.18.  $\square$

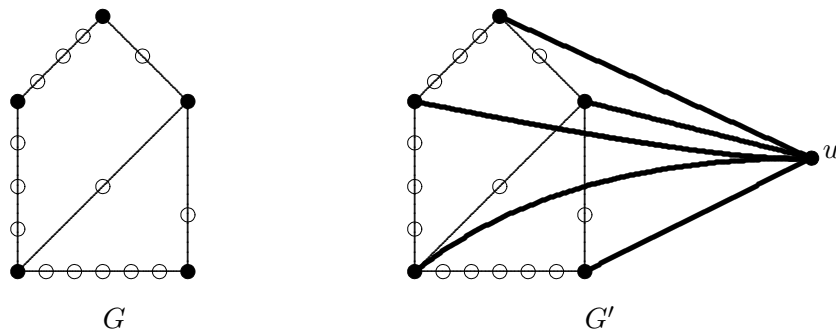


FIG. 3.18 –

Ce corollaire nous montre bien que nous ne pouvons pas caractériser les subdivisions des graphes  $H$  en termes de sous-graphes induits exclus par  $H$ . Puisque s'il existe un sous-graphe exclu, il peut être complété de tel sorte à créer un cube partiel en vertu de ce résultat. Or ceci est une contradiction.

### 3.7 Enveloppes généralisées

**Définition 3.7.1.** *L'enveloppe généralisée  $E_{m,n}$  est le graphe obtenu en reliant un sommet  $u$  à  $m$  sommets d'un graphe complet  $K_{m+n}$  avec  $m \geq 2$  et  $n \geq 2$ .*

- La subdivision de  $E_{2,2}$  a été traitée tout en caractérisant les cube partiels parmi les subdivisions d'une enveloppe (Lemma 3.5.1).
- Dans cette partie, nous considérons  $\{u; K; L\}$  la **partition** des sommets de  $E_{m+n}$  avec  $K = N_{E_{m,n}}(u)$  (voir la figure. 3.19).

**Lemme 3.7.1.** [12] *Soient  $E_{2,n}$  une enveloppe généralisée et  $\{u; K; L\}$  la partition correspondante à  $V(E_{2,n})$ . Une subdivision  $G$  de  $E_{2,n}$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  est biparti et le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  contient un sommet universel  $x \in K$ .*

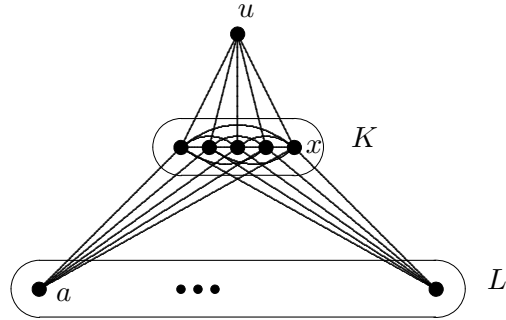


FIG. 3.19 – La partition de l'ensemble des sommets de  $E_{m,n}$

*Démonstration. Condition nécessaire.* Supposons que  $E_{2,n}$  est une enveloppe généralisée ayant  $\{u; K; L\}$  comme partition de ses sommets et  $G$  une subdivision de  $E_{2,n}$  avec  $n \geq 2$ . Posons  $K = \{x, y\}$ . Montrons, alors que si le graphe  $G$  est un cube partiel alors  $x$  est universel dans  $\langle L \cup K \rangle$  avec  $x \in K$ . Montrons d'abord que la chaîne  $P(x, y)$  est isométrique. Supposons le contraire.

Le sous-graphe de  $G$  induit par tous ses sommets excepté les sommets internes de  $P(x, y)$  est isométrique. Celui-ci, noté  $H$ , est isomorphe à une subdivision du graphe complet  $K_{n+2}$  (considérons  $L \cup K$  l'ensemble des sommets principaux de ce sous-graphe). D'après le théorème 3.6.2, soit  $H$  contient un sommet universel soit  $H$  est isomorphe à  $S(K_{n+2})$ . Si  $H$  est un  $S(K_{n+2})$ , alors pour tout sommet  $a \in L$ ;  $\langle u, x, y, a \rangle$  est un  $K_{2,3}$  subdivisé isométrique dans  $G$ . Contradiction avec le lemme 3.1.1. Donc,  $H$  contient un sommet universel non atteint en  $x$  ou  $y$  puisque  $P(x, y)$  n'est pas géodésique. Ainsi, il existe un sommet  $a$  dans  $L$  tel que  $a$  est universel dans  $H$ . De ce fait, le sous-graphe  $\langle a, x, y, u \rangle$  est une subdivision de  $K_{2,3}$  isométrique dans  $G$ , contradiction avec le lemme 3.1.1.

D'où  $P(x, y)$  est isométrique et par conséquent, le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  est isométrique dans  $G$ . Celui-ci n'est pas isomorphe à  $S(K_{p+2})$  sinon pour tout sommet  $a$  dans  $L$  la séquence  $x, y, a, u$  forme une subdivision isométrique de  $K_{2,3}$ . Contradiction avec le lemme 3.1.1. Alors,  $\langle K \cup L \rangle$  contient un sommet universel. Si  $a$  ( $a \in L$ ) est universel dans un tel graphe,  $\langle u, x, y, a \rangle$  est un  $K_{2,3}$  subdivisé isométrique, contradiction avec le lemme 3.1.1. Alors, le sommet  $x$  ou  $y$  est universel dans  $\langle K \cup L \rangle$ . De plus, puisque  $G$  est biparti, chaque triangle induit dans l'enveloppe généralisée est un cycle pair dans la subdivision.

*Condition suffisante.* Supposons que  $G_{2k}$  est une subdivision de  $E_{2,n}$  ayant la partition  $\{u; K; L\}$  avec  $n \geq 2$  et  $K = \{x, y\}$ . Le cycle  $\langle x, y, u \rangle$  est de longueur  $2k$  où  $k \geq 2$ . Montrons par récurrence sur  $k$  que  $G$  est un cube partiel.

Soit  $H$  un graphe biparti isomorphe à une subdivision d'un graphe complet  $K_{2+n}$  ayant un sommet universel  $x$ . Soit  $e = xy$  une arête de  $H$ . L'expansion de  $H$  suivant l'arête  $e$  est le graphe  $G$ . Celui-ci est isomorphe à  $G_4$ . Ainsi la proposition de récurrence est vraie pour  $k = 2$ .

Supposons maintenant que  $G_{2k}$  est un cube partiel et montrons que  $G_{2k+2}$  est un cube partiel aussi. Soit alors  $P_k$  une chaîne de  $G_{2k}$  d'extrémité  $x$  de longueur  $k$  et n'ayant pas  $y$  comme sommet intermédiaire. Il est clair que  $P_k$  est une chaîne isométrique. Le sous-graphe  $G'_{2k}$  induit par tous les sommets de  $G'_{2k}$  excepté les sommets internes de la chaîne  $P$  est isométrique. L'expansion de  $G_{2k}$  suivant la chaîne  $P_k$  et le sous-graphe  $G'_{2k}$  est un cube partiel. Celui-ci est isomorphe à  $G_{2k+2}$ . D'où  $G_{2k}$  est un cube partiel pour tout  $k \geq 2$ .  $\square$

**Théorème 3.7.1.** [12] Soit  $E_{m,n}$  une enveloppe généralisée ( $n \geq 2$ ;  $m \geq 2$ ) avec  $\{u, K, L\}$  la partition de ses sommets. Une subdivision  $G$  d'une enveloppe généralisée  $E_{m,n}$  est un cube partiel si et seulement si :

- (i). pour  $m = 2$ , le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  a un sommet universel  $x$  dans  $K$ , et chaque triangle induit dans  $E_{m,n}$  est un cycle pair dans  $G$ .
- (ii). pour  $m > 2$ ,  $G$  contient un sommet universel  $x \in K$  et toute arête non incidente à  $x$  dans  $E_{m,n}$  est une chaîne de longueur paire.

*Démonstration. Condition suffisante.*

Le graphe  $G$  est un sous-graphe isométrique du  $K_p$  subdivisé ( $p = n+m+1 > 4$ ) ayant un sommet universel et que des cycles pairs. D'après le théorème 3.6.2, cette subdivision est un cube partiel. Alors,  $G$  est un cube partiel par hérédité.

*Condition nécessaire.*

Soit  $G$  une subdivision de l'enveloppe généralisée  $E_{n,m}$  et  $\{u, K, L\}$  sa partition de sommets. Supposons que  $G$  est un cube partiel et montrons par induction sur  $m$  que  $G$  satisfait (i) and (ii).

D'après le lemme 3.7.1, la proposition est vraie pour  $m = 2$ . Supposons alors que  $m \geq 3$ .

**Cas 1.** Il existe un sommet  $z \in K$  tel que  $P(u, z)$  n'est pas géodésique.

Le sous-graphe  $H$  de  $G$  induit par tous ses sommets sauf les sommets internes de  $P(u, z)$  est isométrique. Celui-ci est isomorphe à un  $E_{m-1, n+1}$  subdivisé.

Supposons que  $m = 3$ . Posons alors  $K = \{x, y, z\}$ . Par hypothèses de récurrences, il existe un sommet universel dans la subdivision  $\langle K \cup L \rangle$  atteint en  $K$ . Soit  $x$  ce sommet. Le sommet  $x$  est adjacent aux sommets  $y$  et  $z$  dans  $G$ . Donc, le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  est une subdivision isométrique du  $K_4$  contenant une arête pleine. En vertu du théorème 3.6.2, le sommet  $x$  est universel dans  $\langle u, x, y, z \rangle$ . D'où,  $x$  est universel dans  $G$ .

Supposons que  $m > 3$ . D'après les hypothèses de récurrence, il existe un sommet  $x \in K \setminus \{z\}$  tel que  $x$  est universel dans  $H$ . Ce sommet est universel dans  $G$ .

**Cas 2.** *Pour tout sommet  $x$  dans  $K$  la chaîne  $P(u, z)$  est géodésique.*

**Cas 2.1.** *Le sous-graphe  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est isométrique.*

D'après le théorème 3.6.2,  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est isomorphe à  $S(K_{m+1})$  ou  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  contient un sommet universel.

*Le sous-graphe  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est isomorphe à  $S(K_{m+1})$ .*

Soient  $a \in L$  et  $x \in K$  tels que  $d(a, x) = \min_{z \in K, b \in L} d(b, z)$  (Voir la figure. 3.20 (a)). Si  $d(a, x) = l$ , la distance entre  $a$  et  $u$  est  $l + 2$  sinon, il existe un sommet  $z \in K \setminus \{x\}$  reliant  $a$  avec une distance inférieure strictement à  $l$ . Contradiction avec la minimalité de  $d(a, x)$ . Posons alors  $y$  un sommet dans  $K \setminus \{x\}$ . Puisque  $d(x, y) = 2$ , le sous-graphe  $\langle u, x, y, a \rangle$  est un  $K_{2,3}$  subdivisé isométrique. Contradiction avec le lemme 3.1.1.

*Le sous-graphe  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  contient un sommet universel.*

Si  $u$  est universel dans  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ , en considérant un sommet  $a$  dans  $L$  choisi suivant les précédentes conditions, le sous-graphe  $\langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique où  $y \in K \setminus \{x\}$  (voir figure. 3.20 (b)). Ce sous-graphe est isomorphe à un  $K_{2,3}$  subdivisé isométrique, contradiction avec Lemma 3.1.1. D'où,  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  contient un sommet universel  $x$  atteint en  $K$ .

Toutes les plus courtes chaînes reliant deux sommets de  $K$  passent par  $\langle K \rangle$  (voir figure. 3.20 (c)). Par conséquent,  $\langle K \cup L \rangle$  est une subdivision isométrique du graphe complet  $K_{n+m}$ . Ainsi, le sommet  $x$  est universel dans  $G$  (Théorème 3.6.2).

**Cas 2.2.** *Le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  est isométrique.*

Si le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  est isomorphe à  $S(K_{n+m})$  alors il existe  $a \in L$  et  $x \in K$  tels que  $a \xrightarrow{x} u$  (voir figure. 3.21) (a). La subdivision  $\langle a, x, y, u \rangle$  est

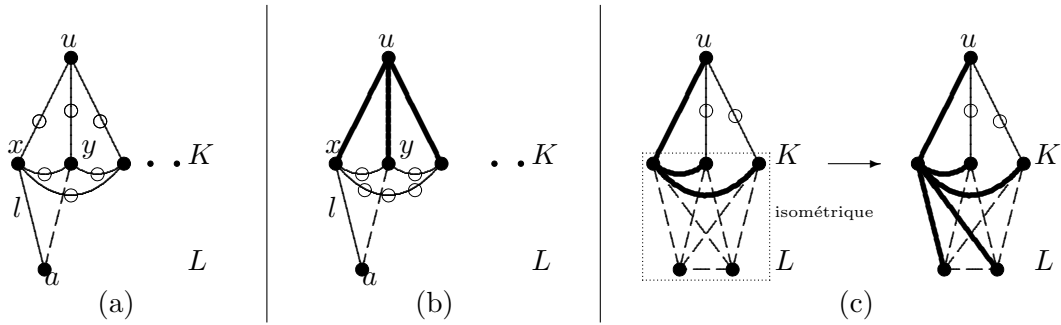


FIG. 3.20 – Le sous-graphe  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

isométrique dans  $G$  et isomorphe à celle d'un  $K_{2,3}$  subdivisé dans  $G$ . Or,  $G$  est un cube partiel, contradiction.

Si le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  contient un sommet universel  $a \in L$ , alors il existe un sommet  $x \in K$  appartenant à une plus courte  $au$ -chaîne ( $a \xrightarrow{x} u$ ). (Voir figure. 3.21 (b)). Soit alors  $y$  un sommet de  $K \setminus \{x\}$ . Le sous-graphe  $\langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique et isomorphe à une subdivision de  $K_{2,3}$ , contradiction.

Par conséquent, le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  contient un sommet universel  $x$  dans  $K$ . De plus,  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est isométrique (figure. 3.21) (c)). Alors, le sommet  $x$  est universel dans  $G$  (Théorème 3.6.2).

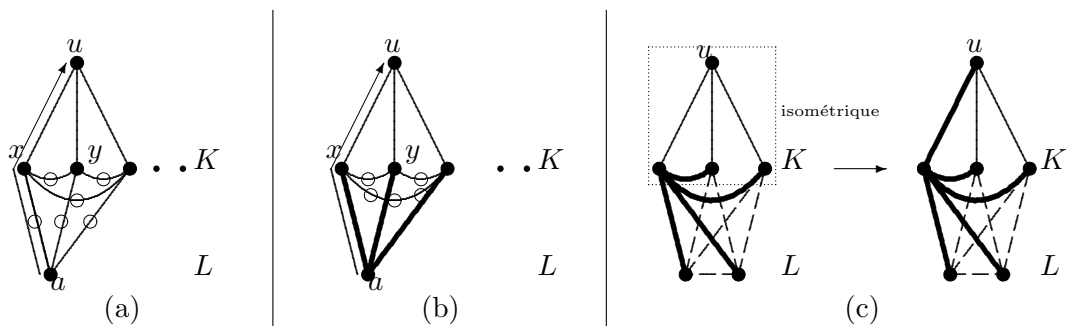


FIG. 3.21 – Le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

**Cas 2.3.** Les sous-graphes  $\langle K \cup L \rangle$  et  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  ne sont pas isométriques. Montrons que ce cas là ne peut avoir lieu. Notons que sous ces conditions ( $G$  cube partiel,  $P(u, x)$  géodésique  $\forall x \in K$  et  $\langle K \cup L \rangle, \langle K \cup \{u\} \rangle$  non isométriques), nous avons les propositions suivantes :

**Proposition 3.7.1.** Soient  $x, y$  deux sommets principaux de  $\langle K \cup L \rangle$  (ou  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ ). Alors, la plus courte  $xy$ -géodésique est soit un isométrique  $P_2^*$  ou un isométrique  $P_3^*$ .

*Démonstration.* Supposons que la plus courte  $xy$ -chaîne induite est un  $P_4^*$  isométrique et considérons la séquence  $x, x_1, x_2, y$ , les quatre sommets principaux du  $P_4^*$  (voir figure.3.22 (a)). Notons que la distance entre le sommet  $x$  et  $y$  est au moins égale à trois. De plus, la subdivision  $\langle x, x_1, x_2, y \rangle$ , notée  $S$ , est isométrique dans  $G$ . Celle-ci est isomorphe à un  $K_4$  subdivisé ou à un  $K_4 - e$  subdivisé (si  $S$  contient un sommet de  $L$  et le sommet  $u$  comme sommets principaux). Si  $S$  est isomorphe à une subdivision du  $K_4$  alors,  $S$  contient un sommet universel ou serait isomorphe à  $S(K_4)$ . Donc,  $d(x, y) \in \{1, 2\}$ , contradiction. D'où  $S$  est un sous-graphe isométrique d'un cube partiel isomorphe à une subdivision du diamant. D'après le lemme 3.4.1,  $x_1$  et  $y$  sont adjacents. Or ceci contredit que la séquence  $x, x_1, x_2, y$  forme la  $xy$ -géodésique.

Par ailleurs, s'il existe une  $xy$ -géodésique sous forme d'un  $P_k^*$  avec  $k > 4$ , alors  $G$  contient un  $P_4^*$  isométrique d'extrémités dans  $K \cup L$  (ou  $K \cup \{u\}$ ).  $\square$

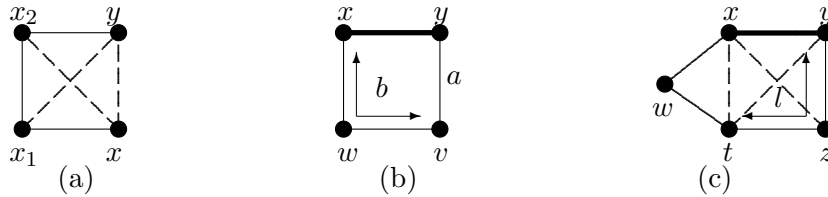


FIG. 3.22 –

**Lemme 3.7.2.** Soient  $x, y, v$  trois sommets principaux de  $G$ . Si  $P(x, y)$  est une arête pleine et  $y \rightarrow v$  alors le sous-graphe  $\langle x, y, v \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

*Démonstration.* Supposons que  $x \xrightarrow{w} v$  avec  $w$  sommet principal différent de  $x, y$  et  $v$ . Voir figure. 3.22(b). Posons alors :  $d(y, v) = a$  et  $d(v, x) = b$ . Nous

avons  $b < a + 1$  (sinon  $x \xrightarrow{y} v$ ). Aussi, si  $b < a - 1$ , la séquence  $y, x, w, v$  forme un  $P_4^*$  isométrique reliant  $y$  et  $v$ . Contradiction avec la proposition 3.7.1. Si  $b = a$ , le graphe  $G$  contient un cycle impair de longueur  $2a + 1$ . Ceci contredit le fait que  $G$  est biparti.  $\square$

**Lemme 3.7.3.** *Soient  $x, y, z, t$  quatre sommets principaux appartenant à la clique subdivisée  $\langle K \cup L \rangle$  (ou  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ ) tels que  $P(x, y)$  est pleine et  $y \xrightarrow{z} t$ . Alors,  $\langle x, y, z, t \rangle$  est une subdivision isométrique du  $K_4$  dans  $G$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\langle x, y, z, t \rangle$  n'est pas isométrique. En vertu du lemme 3.7.2, il existe une plus courte  $xz$ -chaîne dans  $\langle x, y, z, t \rangle$ . Alors, aucune des  $xt$ -géodésiques est dans  $\langle x, y, z, t \rangle$ . Donc il existe un sommet principal  $w \notin \{x, y, z, t\}$  tel que  $x \xrightarrow{w} t$ . Posons ainsi  $d(y, t) = l$  (Voir figure. 3.22(c)). Aussi,  $d(x, t) < l + 1$ . Si  $d(x, t) = l$  le graphe  $G$  contient un cycle de longueur  $2l + 1$ . Ceci est impossible car  $G$  est biparti. Si  $d(y, t) = l - 1$ , la séquence  $y, x, w, t$  constitue un  $P_4^*$  reliant  $t$  à  $y$ . Or ceci contredit la proposition 3.7.1. De plus, si  $d(y, t) > l - 1$ , il existe une  $xt$ -chaîne induite de longueur strictement inférieure à  $l$ . Ceci est impossible car  $d(y, t) = l$ .  $\square$

**Remarque 3.7.1.** *Pour chaque sommet  $x$  dans  $K$  et tout sommet  $a$  dans  $L$ , la chaîne  $P(x, a)$  n'est pas pleine.*

*Démonstration.* Supposons par absurde qu'il existe  $a$  dans  $L$  et  $x$  dans  $K$  tels que  $P(a, x)$  est pleine. D'après le lemme 3.7.2,  $a \xrightarrow{x} u$ . Soit  $y$  un sommet de  $K$  différent de  $x$ . Supposons que la chaîne  $P(a, y)$  n'est pas isométrique. Il existe alors un sommet  $w \in K \cup L$  tel que  $a \xrightarrow{w} y$ . En vertu du lemme 3.7.3, le sous-graphe  $\langle x, a, w, y \rangle$  est un isométrique  $K_4$  subdivisé. Il n'est pas équivalent à  $S(K_4)$  puisque  $P(a, y)$  n'est pas géodésique. Par conséquent, le sommet  $x$  est universel dans  $\langle x, a, w, y \rangle$  et  $a \xrightarrow{y} y$ , contradiction. D'où  $P(a, y)$  est géodésique pour tout  $y$  dans  $K \setminus \{x\}$ . De plus,  $\langle u, x, y, a \rangle$  est un sous-graphe isométrique de  $G$  isomorphe à une subdivision du diamant. D'après le lemme 3.4.1, les sommets  $x$  et  $y$  sont adjacents. Aussi,  $\langle K \cup L \rangle$  est isométrique dans  $G$ . Contradiction avec les hypothèses.  $\square$

**Proposition 3.7.2.** *Soit  $C$  une clique du sous-graphe  $K \cup \{u\}$  de  $E_{m,n}$  tel que  $\langle C \rangle$  est isométrique. Alors,  $|C| = p$  avec  $p \leq 3$ .*

*Démonstration.* Soit  $\langle C \rangle$  une subdivision de clique maximale dans  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  avec  $p = |C| > 3$ . Supposons que la clique  $C$  ne contient pas  $u$ . Puisque

$P(u, x)$  est géodésique pour tout  $x$  dans  $K$ ,  $\langle C \cup \{u\} \rangle$  est une subdivision de clique isométrique qui contient  $\langle C \rangle$ . Or ceci contredit la maximalité de  $\langle C \rangle$ . D'où  $u \in C$ . Comme  $G$  est un cube partiel, soit le sous-graphe  $\langle C \rangle$  contient un sommet universel ou  $\langle C \rangle$  est isomorphe à  $S(K_p)$  avec  $p < n + 1$  (Théorème 3.6.2).

Montrons que  $\langle C \rangle$  ne contient aucun sommet universel. Pour cela, posons  $t$  un sommet principal de  $G$  appartenant à  $K \setminus C$ .

- Si  $u$  est universel, pour tout  $y \in C \setminus \{u\}$  le cycle  $\langle u, y, t \rangle$  est isométrique (lemme 3.7.2). Par conséquent,  $\langle C \cup \{t\} \rangle$  est une subdivision d'une clique isométrique dans  $G$ . Contradiction avec la maximalité de  $\langle C \rangle$ .
- Supposons que  $x \in K$  est le sommet universel de  $\langle C \rangle$ . Ainsi,  $\langle x, u, t \rangle$  est isométrique dans  $G$  (Lemme 3.7.2). Posons  $y$  sommet dans  $C \setminus \{u, x\}$  et montrons que le sous-graphe  $\langle x, y, u, t \rangle$  est isométrique par absurde. Donc, il existe un sommet  $w \in K \cup L$  tel que  $y \xrightarrow{w} t$  (voir figure. 3.23 (a)). Par conséquent,  $\langle x, y, w, t \rangle$  est isométrique suivant le lemme 3.7.3. Ce sous-graphe n'est pas isomorphe à  $S(K_4)$  ( $P(y, t)$  n'est pas géodésique). Donc, il contient un sommet universel. Ce n'est pas  $x$  sinon  $y \xrightarrow{x} t$ . Ce n'est pas non plus  $w$  sinon  $G$  contient un triangle  $K_3$  induit par  $x, y, w$ . Or ceci est impossible car  $G$  est biparti. D'où,  $\langle x, y, u, t \rangle$  est isométrique pour tout  $y \in C \setminus \{u, x\}$ . Et par conséquent,  $\langle K \cup L \rangle$  contient une clique subdivisée isométrique  $\langle C \cup \{t\} \rangle$ , contradiction avec la maximalité de  $\langle C \rangle$ .

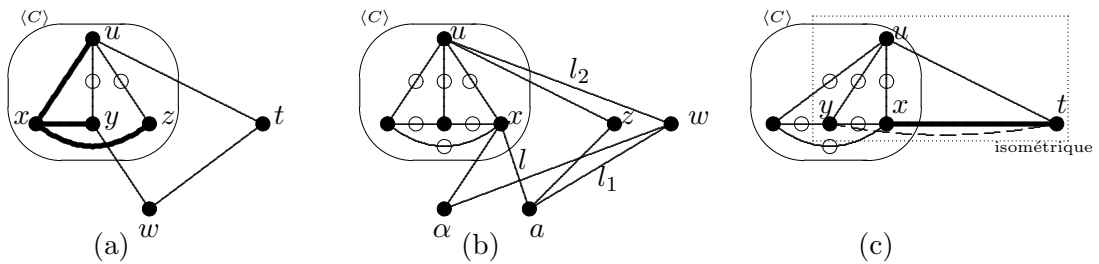


FIG. 3.23 –

Maintenant, supposons que  $\langle C \rangle$  est un  $S(K_p)$  et montrons qu'il existe un sommet  $w \in K \setminus C$  tel que  $w$  est un voisin d'un sommet principal  $x$  de  $C$

$(x \neq u)$ .

Comme  $\langle C \rangle$  est maximale il existe un sommet  $x \in C \setminus \{u\}$  et un sommet  $z \in K \setminus C$  tels que  $x \xrightarrow{a} z$  où  $a \in L$ . Si  $\langle u, x, z, a \rangle$  est isométrique alors  $x$  et  $z$  sont adjacents (Considérons le diamant subdivisé isométrique  $\langle u, x, z, a \rangle$  dans le cube partiel  $G$ ). Sinon, toute  $au$ -géodésique ne contient pas le sommet  $x$ . Soit alors  $l = d(x, a)$  et  $a \xrightarrow{w} u$  avec  $w \in K$ . Il est clair que  $w \notin C$  sinon le cube partiel  $G$  contient une subdivision de  $K_{2,3}$  isométrique ( $\langle a, w, x, u \rangle$ ). Contradiction. Puisque  $G$  est biparti,  $d(a, u)$  est de même parité que  $l$ . Si  $d(u, a) = l - 2$ , alors la séquence  $a, w, u, x$  forme un isométrique  $P_4^*$  reliant  $a$  et  $x$ . Ceci est impossible (Lemme 3.7.1). De plus, si  $d(u, a) < l - 2$  alors le graphe  $G$  contient une  $au$ -chaîne induite de longueur strictement inférieure à  $l$ . Or ceci est impossible car  $d(u, a) = l$ . Donc,  $d(a, u) = l = l_1 + l_2$  avec  $d(a, w) = l_1$  et  $d(w, u) = l_2$ . Il existe dans  $\langle u, x, w, a \rangle$  une  $xw$ -géodésique sinon, il existe une  $xw$ -chaîne induite de longueur strictement inférieure à  $l_2 + 2$  telle que  $x \xrightarrow{\alpha} w$  où  $\alpha \in K \cup L$  (voir figure. 3.23 (b)). Comme  $G$  est biparti, tous ses cycles sont pairs, et donc  $d(x, w)$  de même parité que  $l_2$ . Si  $d(x, w) < l_2 - 2$ , il existe une  $au$ -chaîne de longueur inférieure à  $l$  (Considérer l'union de cette géodésique et  $P(a, w)$ ). Ceci est impossible car  $d(a, x) = l$ . Alors,  $d(x, w) = l_2$ . Les sommets principaux  $x, \alpha, w$  et  $a$  forment un géodésique  $P_4^*$  reliant  $x$  et  $a$ . Ceci est impossible suivant le lemme 3.7.1. Par conséquent, le sous-graphe  $\langle u, x, w, a \rangle$  est isométrique et isomorphe à une subdivision du diamant. Puisque  $G$  est un cube partiel,  $P(x, w)$  est pleine.

Alors, il existe un sommet  $x \in C \setminus \{u\}$  et un sommet  $t$  dans  $K \setminus C$  tels que  $P(x, t)$  est une arête pleine. Pour chaque sommet  $y \in C \setminus \{u, x\}$ ,  $\langle u, y, t \rangle$  contient une  $yz$ -géodésique puisque  $d(y, t) \in \{1, 3\}$ . Par conséquent, le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  est géodésique, voir la figure. 3.23 (c). Le graphe  $G$  contient une subdivision isométrique de  $K_{p+1}$  induit par  $C \cup \{t\}$  et incluse dans  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ . Contradiction avec la maximalité de  $\langle C \rangle$ .  $\square$

**Remarque 3.7.2.** *Pour toute paire de sommets  $\{x, y\}$  dans  $K$ , la chaîne  $P(x, y)$  n'est pas pleine.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une arête pleine  $P(x, y)$  dans  $\langle K \rangle$ . Soit  $z$  un sommet dans  $K \setminus \{x, y\}$ . Aucune plus courte  $xz$ -chaîne passe par le sommet  $u$ , sinon le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  est isométrique en vertu du lemme 3.7.3. Et donc,  $K \cup \{u\}$  contient une subdivision de clique de taille 4 (en comptant uniquement les sommets principaux). Contradiction avec la proposition 3.7.2. En utilisant les mêmes arguments, la chaîne  $P(x, z)$  n'est pas

géodésique. D'où  $x \xrightarrow{a} z$  avec  $a \in L$ . D'après le lemme 3.7.3, le sous-graphe  $\langle x, y, z, a \rangle$  est isométrique, isomorphe à une subdivision de  $K_4$ . Comme il contient une arête pleine, il existe un sommet universel dans un tel sous-graphe. Ce sommet est différent de  $x$  puisque  $P(x, z)$  n'est pas isométrique. Alors, le sommet  $y$  est universel dans  $\langle x, y, z, a \rangle$  et  $x \xrightarrow{y} z$ . Contradiction.  $\square$

**Proposition 3.7.3.** *Soit  $C$  une clique dans le sous-graphe de  $E_{m,n}$  induit par  $K \cup L$  telle que  $\langle C \rangle$  est isométrique. Alors,  $|C| = p$  avec  $p \leq 3$ .*

*Démonstration.* Par absurde, supposons que  $\langle C \rangle$  est une subdivision de clique maximale dans  $\langle K \cup L \rangle$  et  $p = |C| > 3$ .

Il est clair que  $\langle C \rangle$  n'est pas un sous-graphe de  $\langle K \rangle$  puisque la subdivision de clique maximale dans  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  est de taille trois (Proposition 3.7.2).

Montrons, par absurde, que  $\langle C \rangle$  n'est pas un sous-graphe de  $\langle L \rangle$ . Puisque  $\langle C \rangle$  est isométrique, ce sous-graphe est soit isomorphe à  $S(K_4)$  ou contient un sommet universel. Pour cela, montrons que pour tout triplet de sommets  $a, b, c$  dans  $L$ , les configurations suivantes sont interdites dans  $\langle L \rangle$

- (i). Le sommet  $a$  est universel dans  $\langle a, b, c \rangle$  ;
- (ii). Les chaînes  $P(a, b)$ ,  $P(a, c)$  et  $P(b, c)$  sont de longueur deux.

Soient  $a, b, c$  trois sommets de  $C$  et  $x$  un sommet de  $K$ .

- Supposons que  $a$  est universel dans  $\langle a, b, c \rangle$ . Si  $P(a, x)$  est isométrique, les cycles  $\langle x, a, b \rangle$  et  $\langle x, a, c \rangle$  sont géodésiques d'après le lemme 3.7.2. Par conséquent,  $\langle x, a, b, c \rangle$  est une subdivision isométrique du  $K_4$  dans  $G$ . Alors,  $P(a, x)$  est pleine or ceci contredit la remarque 3.7.1. Maintenant, supposons que  $a \xrightarrow{w} x$  avec  $w \in L$ . D'après le lemme 3.7.3, le sous-graphe  $\langle x, a, b, w \rangle$  est une subdivision isométrique de  $K_4$  différente de  $S(K_4)$  ( $P(a, x)$  n'est pas isométrique). Puisque  $P(a, b)$  est une arête pleine, cette subdivision a  $a$  ou  $b$  comme sommet universel. Le sommet  $a$  n'est pas candidat car  $P(a, x)$  n'est pas géodésique. Le sommet  $b$  n'est pas universel sinon  $a \xrightarrow{y} x$ . Par conséquent, la configuration (i) est interdite dans  $\langle L \rangle$  et donc, le sous-graphe  $\langle C \rangle$  n'a pas de sommet universel.
- Supposons que  $P(a, b)$ ,  $P(a, c)$  et  $P(b, c)$  sont des chaînes de longueur deux.

Montrons que si  $P(a, x)$  est isométrique de longueur  $l$ , le sous-graphe  $\langle a, b, c, x \rangle$  est isométrique et isomorphe à  $S(K_4)$ .

Montrons d'abord que le cycle  $\langle a, b, x \rangle$  est géodésique. Supposons le contraire. Alors  $x \xrightarrow{w} b$  où  $w \in K \cup L$ . Comme  $G$  est biparti,  $d(x, b)$  est

de même parité que  $l$ . Il est clair que cette distance est différente de  $l - 2$  sinon  $G$  contient un géodésique  $P_4^*$  de longueur  $l$  reliant  $a$  et  $x$ . Si de plus, elle est inférieure strictement à  $l - 2$ , le graphe  $G$  contient une  $ax$ -chaîne induite de longueur au plus  $l - 2$  et  $d(a, x) = l$ . Contradiction. Donc,  $d(x, b) = l$ . Posons  $d(b, w) = l_1$  et  $d(w, x) = l_2$ .

Montrons que le sous-graphe  $\langle a, b, x, w \rangle$  est une subdivision de  $K_4$  isométrique. Supposons qu'aucune  $aw$ -géodésique est dans  $\langle a, b, x, w \rangle$ . Puisque  $G$  est biparti,  $d(a, w)$  est de même parité que  $l_1$ . Cette longueur n'est pas  $l_1 - 2$  sinon,  $G$  contient  $P_4^*$  isométrique. Si elle est inférieure strictement à  $l_1 - 2$  le graphe  $G$  contient une  $bw$ -chaîne induite de longueur strictement inférieure à  $l_1$ . Contradiction car  $d(b, w) = l_1$ . Donc,  $d(a, w) = l_1$  et  $x \xrightarrow{\alpha} b$  où  $\alpha \in K \cup L$  (voir la figure. 3.24 (a)). La séquence des sommets  $w, x, \alpha, b$  forme un géodésique  $P_4^*$  de longueur  $l$  connectant  $x$  et  $b$ . D'où le sous-graphe  $\langle a, b, x, w \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

Comme  $P(x, b)$  n'est pas isométrique, celui-ci n'est pas un  $S(K_4)$ . Donc, il contient un sommet universel. Alors le sommet  $a$  ou le sommet  $w$  est universel dans ce sous-graphe. Or ceci contredit la remarque précédente. Par conséquent, le cycle  $\langle a, b, x \rangle$  est isométrique. Par symétrie, le cycle  $\langle b, c, x \rangle$  est isométrique aussi.

Donc, le sous-graphe  $\langle a, b, c, x \rangle$  est isométrique de  $G$ . D'après la remarque 3.7.1,  $\langle a, b, c, x \rangle$  est isomorphe à  $S(K_4)$ .

Nous concluons que s'il existe un sommet  $x$  dans  $K$  tel que  $P(a, x)$  est géodésique, alors  $\langle a, b, c, x \rangle$  est un  $S(K_4)$ .

Montrons alors que  $P(a, x)$  est géodésique pour tout  $x$  dans  $K$ .

Supposons que  $a \xrightarrow{w} x$  avec  $w \in L$ . Ainsi, en utilisant les mêmes arguments que précédemment, les sous-graphes  $\langle w, a, b, c \rangle$  et  $\langle w, a, b, x \rangle$  sont isomorphes à  $S(K_4)$ . D'où,  $a \not\xrightarrow{w} x$ , contradiction. Par conséquent,  $a$  rencontre isométriquement tout sommet  $x$  de  $K$  et  $\langle a, b, c, x \rangle$  est un  $S(K_4)$ .

Maintenant, montrons que le sous-graphe  $\langle K \cup L \rangle$  est isométrique. Soient alors  $x, y$  deux sommets dans  $K$ . Les sous-graphes  $\langle x, a, b, c \rangle$  et  $\langle y, a, b, c \rangle$  sont des  $S(K_4)$ . Etudions la subdivision  $\langle x, y, a, b \rangle$ . Supposons que  $d(x, y) < 4$ . Donc,  $d(x, y) = 2$  et  $x \xrightarrow{u} y$ . D'où la subdivision  $\langle x, y, a, u \rangle$  est isométrique. Donc,  $P(x, y)$  est pleine (Lemme 3.4.1). Contradiction avec la remarque 3.7.2. D'où, il existe une  $xy$ -géodésique dans  $\langle x, y, a, b \rangle$  et cette subdivision est isométrique dans  $G$  pour toute paire de sommets  $x, y$  dans  $K$ . Ainsi, le sous-graphe  $\langle K \cup \{a, b\} \rangle$  est

isométrique dans  $G$ . Contradiction avec les hypothèses.  
 De ce fait, la configuration (ii) est interdite dans  $L$  et donc  $\langle C \rangle$  n'est pas isomorphe à un  $S(K_p)$  avec  $p \geq 4$ .

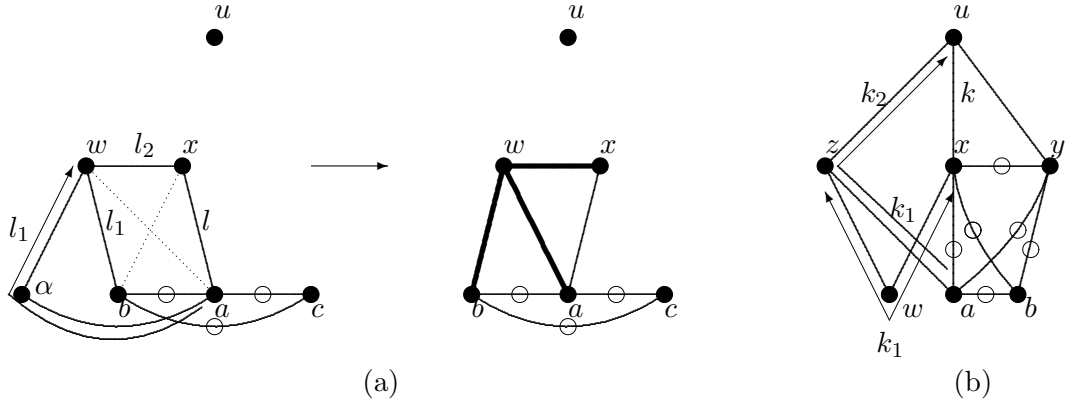


FIG. 3.24 –

D'un côté, en vertu des configurations interdites (i) et (ii) dans  $\langle L \rangle$ , le sous-ensemble  $C$  contient au plus deux sommets de  $L$ . De l'autre côté,  $C$  contient au plus deux sommets de  $K$  puisque  $P(u, x)$  est isométrique pour tout  $x \in K$  et la proposition 3.7.2 est vérifiée. Par conséquent,  $C = \{x, y, a, b\}$  avec  $x, y \in K$  et  $a, b \in L$ . Plus précisément,  $\langle C \rangle$  est isomorphe à un  $S(K_4)$  en vertu de la remarque 3.7.1.

Supposons que  $P(u, x)$  est plus courte que  $P(u, y)$  et ayant une longueur  $k$ . Alors,  $a \not\rightarrow u$  et  $a \not\leftarrow u$  sinon  $\langle u, x, y, a \rangle$  est un  $K_{2,3}$  subdivisé isométrique dans un cube partiel  $G$ , contradiction. Donc, il existe une plus courte chaîne passant à travers le sommet  $z$  tout en formant soit un géodésique  $P_3^*$  ou un géodésique  $P_4^*$  dans  $G$ .

Supposons que cette géodésique est un  $P_3^*$  et montrons que  $\langle u, x, z, a \rangle$  est isométrique. Par absurde, il n'existe aucune  $xz$ -géodésique dans  $\langle u, x, z, a \rangle$ . Soit alors  $d(a, z) = k_1$  et  $d(z, u) = k_2$ . Puisque  $G$  est biparti,  $d(x, z) \geq l_1$ . De plus,  $d(x, z) > l_1 - 2$  sinon il existe une chaîne reliant les sommets  $u$  et  $x$  de longueur plus petite que  $l$ , contradiction. Alors,  $d(x, z) = l_1$  et  $G$  contient un isométrique  $P_4^*$  reliant  $u$  à chaque sommet  $x$  (voir la figure. 3.24(b)). Contradiction avec le lemme 3.7.1. Alors,  $\langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique dans le cube partiel  $G$ . D'après le lemme 3.4.1,  $P(x, z)$  est pleine. Ceci contredit la remarque 3.7.2.

Supposons qu'il existe une  $au$ -géodésique sous forme d'un  $P_4^*$  avec  $a, c, z, u$  les sommets principaux de  $P_4^*$  où  $z \in K$ . En utilisant les mêmes arguments du précédent cas, le sous-graphe  $\langle u, x, z, b, c \rangle$  contient une  $xz$ -géodésique. Aussi,  $\langle u, x, z, b, c \rangle$  contient une  $xc$ -géodésique. Sinon il existe un géodésique  $P_4^*$  de longueur  $l_1$  reliant les sommets  $x$  et  $z$ , contradiction. Alors, le sous-graphe  $\langle u, x, z, b, c \rangle$  est une isométrie subdivision d'enveloppe dans un cube partiel  $G$ . Donc,  $P(x, z)$  est pleine. Or ceci contredit la remarque 3.7.2.  $\square$

**Proposition 3.7.4.** *Soient  $G$  un cube partiel avec  $P(u, x)$  géodésique pour tout  $x$  dans  $K$  et  $\langle K \cup \{u\} \rangle, \langle K \cup L \rangle$  ne sont pas isométriques. Alors, il n'existe pas de séquence de sommets principaux  $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$  de  $G$  telle que  $P(x_i, x_{i+1})$  et  $P(x_1, x_5)$  soient isométriques avec  $1 \leq i \leq 4$ .*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une séquence de cinq sommets principaux vérifiant ces conditions notées  $(\Delta)$  et choisissons une séquence de telle sorte que  $\delta = \sum_{1 \leq i, j \leq 5, i \neq j} d(x_i, x_j)$  soit plus petite que possible dans  $G$ . Montrons alors que le sous-graphe  $\langle S \rangle = \langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

Supposons qu'il existe deux sommets non consécutifs principaux  $x_i, x_j$  dans  $S$  tels que  $\langle S \rangle$  ne contient aucune  $x_i x_j$ -géodésique. Alors, une  $x_i x_j$ -géodésique est soit un  $P_3^*$  ou un  $P_4^*$ . Dans  $\langle S \rangle$  la  $x_i x_j$ -chaîne induite est soit un  $P_2^*$  ( $P(x_i, x_j)$ ) soit un  $P_3^*$  soit un  $P_4^*$ . D'où, il existe une nouvelle séquence de cinq sommets  $G$  vérifiant  $(\Delta)$  avec une plus petite somme de distance  $\delta' < \delta$ . Contradiction. Par conséquent  $\langle x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \rangle$  est isométrique dans  $G$ .

Il est clair que  $\langle S \rangle$  n'est pas un sous-graphe de  $\langle K \cup L \rangle$  (resp.  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ ) sinon,  $\langle K \cup L \rangle$  (resp.  $\langle K \cup \{u\} \rangle$ ) contient une subdivision isométrique du  $K_5$ . Contradiction avec la proposition 3.7.3 (resp. la proposition 3.7.2). Par conséquent, l'ensemble  $S$  contient un sommet de  $L$  et le sommet  $u$ .

Si  $S = \{u, x, y, a, b\}$  avec  $x, y \in K$  et  $a, b \in L$ , alors  $\langle S \rangle$  une subdivision isométrique de l'enveloppe dans  $G$  et donc  $P(x, y)$  est pleine. Contradiction avec la remarque 3.7.2.

Maintenant supposons que la séquence est  $u, x, y, a, z$  dans cet ordre avec  $x, y, z \in K$  et  $a \in L$ . D'après la proposition 3.7.3,  $y \xrightarrow{a} z$  ou  $x \xrightarrow{a} z$ .

Si  $x \xrightarrow{a} z$  alors, en considérant le sommet de  $K$  qui appartient à une  $au$ -géodésique, nous avons soit  $\langle u, x, z, a \rangle$  ou  $\langle u, x, y, a \rangle$  est géodésique. Puisque ces graphes sont des subdivisions du diamant,  $P(x, y)$  ou  $P(x, z)$  est pleine (Lemme 3.4.1). Contradiction avec la remarque 3.7.2.

Si  $y \xrightarrow{a} z$ , alors soit  $\langle u, y, z, a \rangle$  ou  $\langle u, x, y, a \rangle$  est une subdivision isométrique du diamant dans le graphe  $G$ . Alors,  $P(y, z)$  ou  $P(x, y)$  est une arête pleine, contradiction avec la remarque 3.7.2.  $\square$

**Remarque 3.7.3.** *Pour tout sommet  $a$  dans  $L$ , il existe au plus un sommet  $x$  dans  $K$  tel que  $P(a, x)$  est géodésique dans  $G$ .*

*Démonstration.* S'il existe dans  $L$  des sommets rencontrant isométriquement au moins deux sommets de  $K$ , notons le sous-ensemble  $A \subset L$  avec  $A = \{b \in L : \exists x, y \in K \text{ avec } P(a, x) \text{ et } P(a, y) \text{ géodésiques}\}$ . Pour chaque  $b$  dans  $L$ , posons  $l(b) = \min (d(x, b) + d(y, b) + d(x, u), d(x, b) + d(y, b) + d(y, u))$ .

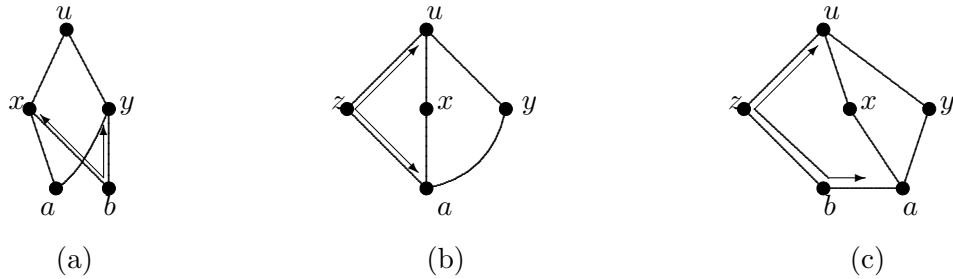


FIG. 3.25 –

Choisissons le sommet  $a$  dans  $A$  tel que  $l(a) = \min_{b \in A} l(b) = d(a, x) + d(a, y) + d(u, x)$  et montrons que le sous-graphe  $\langle u, x, y, a \rangle$  est isométrique dans  $G$ . Supposons le contraire. Alors soit  $\langle u, x, y, a \rangle$  ne contient pas une  $xy$ -géodésique ou  $\langle u, x, y, a \rangle$  ne contient pas une  $au$ -géodésique.

Supposons que  $x \xrightarrow{z} y$  avec  $z \in K$ . Le sous-graphe  $\langle u, x, y, z \rangle$  n'est pas isométrique (Proposition 3.7.2). Donc, s'il existe un sommet  $b \in A$  tel que  $x \xrightarrow{b} y$ , (voir la figure. 3.25 (a)). Le sommet  $b$  vérifie :

$$l(b) \leq d(x, b) + d(y, b) + d(x, u) < d(x, a) + d(y, a) + d(u, x) = l(a).$$

Or, ceci contredit la minimalité de la valeur  $l(a)$ . Par conséquent,  $\langle u, x, y, a \rangle$  ne contient aucune  $au$ -géodésique. Supposons alors que  $a \xrightarrow{z} u$  avec  $z \in K$  (voir la figure. 3.25 (b)). Ainsi,  $d(a, z) + d(a, y) + d(z, u) < d(a, x) + d(a, y) + d(u, x) = l(a)$ . Contradiction avec les hypothèses. De ce fait, il existe une  $au$ -géodésique sous forme d'un  $P_4^*$ . Soient  $\{a, b, z, u\}$  les sommets principaux de cette géodésique avec  $z \in K$ ,  $b \in L$  (voir la figure. 3.25 (c)). La séquence des

sommets principaux  $a, b, z, u, x$  vérifie  $(\Delta)$ . Contradiction avec la proposition 3.7.4.

Par conséquent, le sous-graphe  $\langle u, x, y, a \rangle$  est une subdivision isométrique du diamant dans un cube partiel  $G$ . D'après le lemme 3.4.1, la chaîne  $P(x, y)$  est pleine. Contradiction avec la remarque 3.7.2.  $\square$

Finalement,  $P(u, x)$  est géodésique pour tout  $x \in K$ . En plus,  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  et  $\langle K \cup L \rangle$  ne sont pas isométriques, il existe  $x, y, z, t$  tels que  $x \xrightarrow{u} y$  et  $z \xrightarrow{a} t$  avec  $a \in L$ . Alors, les chaînes  $P(a, z)$  et  $P(a, t)$  sont géodésiques. Contradiction avec la remarque 3.7.3.

Nous concluons que si  $P(u, x)$  est géodésique pour tout  $x \in K$ , alors les sous-graphes  $\langle K \cup \{u\} \rangle$  et  $\langle K \cup L \rangle$  sont isométriques. Ceci implique qu'il existe un sommet  $x$  dans  $K$  universel dans  $G$ . Par contre, s'il existe  $x \in K$  tel que  $P(u, x)$  non isométrique, par hypothèse de récurrence appliquée à une enveloppe généralisée d'ordre inférieur, nous trouverons un sommet  $y \in K$  tel que  $y$  universel soit dans  $G$  soit dans  $\langle K \cup L \rangle$ . Et puisque  $G$  est biparti, tous les cycles de  $G$  (les subdivisions des  $K_3$  induits de  $E_{m,n}$ ) sont pairs.  $\square$

### 3.8 La subdivision du $K_{2,3}$ et les cubes partiels

L'outil le plus souvent utilisé dans nos arguments au cours des preuves de ce chapitre est celui lié à la subdivision du  $K_{2,3}$ . Etant donné que cette subdivision est interdite comme sous-graphe isométrique dans un cube partiel, nous avons posé la conjecture suivante :

**Conjecture 3.8.1.** [11] *Soit  $G$  un graphe biparti. Alors  $G$  est un cube partiel si et seulement si  $G$  ne contient pas de subdivision de  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique.*

Le graphe de la figure. 3.26 est biparti (il admet une partition de ses sommets en deux stables). Le graphe  $G$  n'est pas un cube partiel car la relation  $\theta$  n'est pas transitive. En effet, l'arête  $e$  est en relation avec l'arête  $f$  et  $g$  mais les arêtes  $f$  et  $g$  appartiennent à une  $xy$ -géodésique. Donc  $f$  et  $g$  ne sont pas en relation  $\theta$ . De plus, nous pouvons vérifier facilement que  $G$  ne contient aucune subdivision de  $K_{2,3}$  isométrique. Par la suite, L. Beaudou [9] a donné le contre exemple suivant pour infirmer cette conjecture :

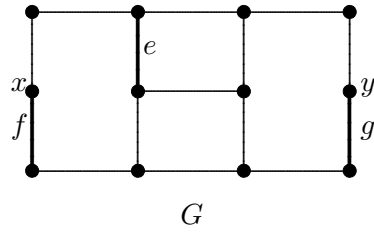


FIG. 3.26 – Le contre exemple.

En guise de conclusion de ce chapitre, nous proposons le problème suivant :

”*Existe-t-il une famille de graphes  $\mathcal{F}$  telle qu’un graphe  $G$  est un cube partiel si et seulement s’il ne contient aucun graphe de  $\mathcal{F}$  comme sous-graphe isométrique ?*”

# Chapitre 4

## Les graphes de Hamming partiels et les subdivisions

### 4.1 Introduction

Dans les réseaux de communication, l'information entre les sommets est émise dans des paquets où certaines données devraient y être simultanément. Un paquet particulier ne peut être transmis que si la chaîne du parcours est bien connue. Le routage local réalise une communication comme suit : il assigne une adresse à chaque sommet et utilise l'information locale pour trouver un chemin de chaque source à sa destination. Graham et Pollack [45] ont suggéré un système d'adresses utilisant un ensemble fini de symboles. La distance entre deux sommets dans ce système est égale à la distance de Hamming aux adresses correspondantes. Ainsi si un paquet est à distance  $k$  de sa destination il prend les adresses de ses voisins, puis se dirige vers celui ayant une distance  $k-1$  de la destination. Tous les réseaux de communication ne possèdent pas cette propriété. Les graphes modélisant les réseaux qui ont bien cette caractéristique sont dits *graphes de Hamming partiels*. En s'intéressant à cette classe de graphes et aux subdivisions, nous généraliserons les résultats du précédent chapitre tout en déterminant les graphes ayant bien cette structure parmi les subdivisions des graphes données :

**Définition 4.1.1.** *Soit  $G$  un graphe.*

- *Le graphe  $G$  est dit **de Hamming partiel** s'il existe un plongement isométrique  $\alpha$  de  $G$  dans un graphe de Hamming.*
- *Un graphe  $G$  est de Hamming partiel s'il admet un étiquetage de ses*

sommets en mots (ou labels) de longueur fixée  $k$  d'un alphabet fini  $\Sigma$  tel que la distance entre deux sommets du graphe  $G$  correspond à la distance de Hamming de  $H(f(u), f(v))$  entre les label  $f(u)$  et  $f(v)$

– La fonction  $f : V(G) \rightarrow \Sigma^k$  est dite **étiquetage de Hamming** de  $G$ .

- Si l'alphabet  $\Sigma$  est choisie de telle sorte qu'elle comprend uniquement deux symboles, alors  $G$  est un cube partiel.
- Il est clair que les graphes de Hamming partiels sont des sous-graphes isométriques d'un graphe de Hamming.

## 4.2 Les plongements isométriques dans les graphes de Hamming

### 4.2.1 Le plongement canonique

Soit  $G$  un graphe et  $E_1, E_2, \dots, E_k$  toutes les  $\theta^*$ -classes de  $G$ . Posons alors  $G_i = G \setminus E_i$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ . Ainsi,  $\Pi_i$  est la partition de  $V(G_i)$  induite par chaque composante connexe de  $G_i$ .

Posons  $\alpha_i$  la contraction de  $G$  à  $G_i^* = G/\Pi_i$  pour tout  $i = 1, \dots, k$ .

Le **plongement canonique** est l'application  $\alpha$  définie comme suit :

$$\alpha : G \rightarrow G/\Pi_1 \square G/\Pi_2 \square \dots \square G/\Pi_k$$

$$v \mapsto \alpha(v) = (\alpha_1(v), \dots, \alpha_2(v), \alpha_k(v))$$

Graham et Winkler [46] ont montré qu'un graphe fini peut être plongé isométriquement dans un produit cartésien de facteurs irréductibles :

**Théorème 4.2.1.** [46] *Le plongement canonique  $\alpha$  est isométrique.*

Le graphe de la figure. 4.1  $G$  possède trois classes de  $\theta^*$ . Les graphes quotients sont respectivement  $K_4 - e$ ,  $K_2$  et  $K_2$ . Voir la figure. 4.2.

Alors,  $G$  admet un plongement isométrique dans  $K_4 - e \square K_2 \square K_2$ . Le graphe  $G$  ne peut pas être plongé isométriquement dans un graphe de Hamming. En plongeant les arêtes du triangle dans une dimension donnée d'un graphe de Hamming, nous ne pouvons pas préserver la distance entre les arêtes reliant les deux triangles de  $G$ .

Un des algorithmes de reconnaissance des graphes de Hamming partiels dépendait bien de ce plongement canonique. Basé sur les résultats de [46],

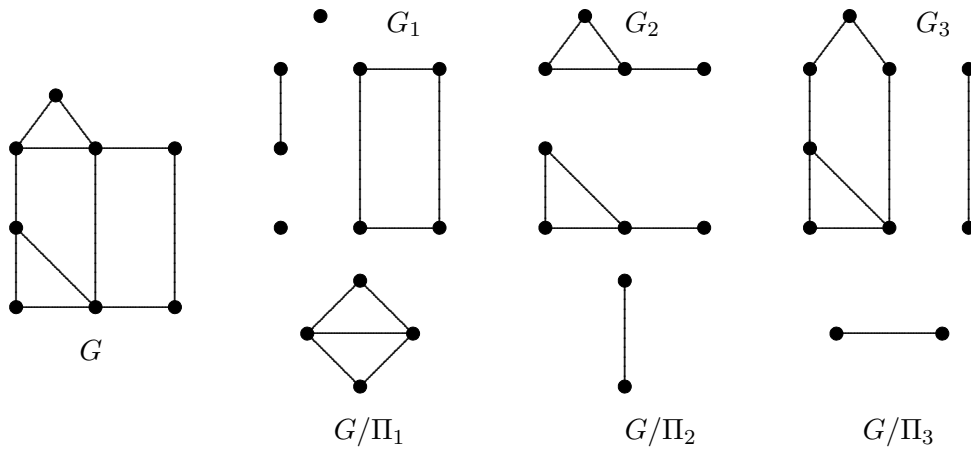


FIG. 4.1 – Les graphes quotients de  $G$ .

cet algorithme affirme qu'un graphe  $G$  d'ordre  $n$  est un graphe de Hamming partiel si les graphes quotients du plongement canonique sont tous complets. L'exécution d'un tel algorithme se fait en  $o(mn)$ . Voir [56].

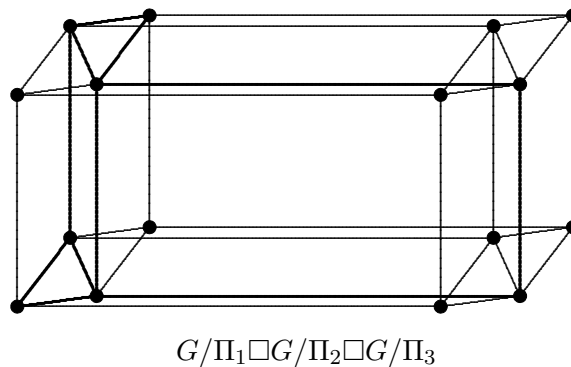


FIG. 4.2 – Le plongement canonique  $G$  dans  $(K_4 - e) \square K_2 \square K_2$ .

### 4.2.2 Caractérisation des graphes de Hamming partiels

Parmi les graphes de Hamming partiels qui peuvent exister, ceux qui sont plongeableq dans le produit cartésien de  $K_3$  sont caractérisés comme suit :

**Théorème 4.2.2.** [76] *Un graphe  $G = (V, E)$  admet un plongement isométrique dans un produit de  $K_3$  si et seulement si  $\theta$  est transitive dans  $E$ .*

Par ailleurs, Brešar [17] définit la relation ' $\Delta$ ' afin de caractériser tout plongement isométrique dans un graphe de Hamming :

**Définition 4.2.1.** *Soient  $G$  un graphe,  $uv$  et  $ab$  deux arêtes de  $G$ . L'arête  $uv$  est en relation avec l'arête  $ab$  suivant  $\Delta$  s'il existe deux arêtes  $e$  et  $f$  appartenant à une clique de  $G$  tels que  $uv \sim e$  et  $ab \sim f$ .*

Il est clair que la relation  $\Delta$  est reflexive et symétrique dans  $E(G)$  et que la relation  $\Delta$  contient  $\sim$  (la relation citée dans le chapitre 2).

Cependant cette relation n'est pas transitive. Il suffit de considérer le graphe  $K_4 - e$ . Les arêtes d'un triangle sont deux à deux en relation suivant  $\Delta$ . Comme  $K_4 - e$  est formé par deux triangles ayant une arête commune, leurs arêtes issues de deux triangles différents respectivement ne sont pas en relation suivant  $\Delta$ .

Cette relation est par contre transitive dans les graphes de Hamming partiels :

**Théorème 4.2.3.** [17] *Soit  $G$  un graphe. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (A)  *$G$  est un graphe de Hamming partiel.*
- (B) (i) *La relation  $\Delta$  est transitive,*  
(ii) *Pour tout  $ab, xy \in E(G)$  : si  $ab \sim xy$  alors  $W_{ab} = W_{xy}$ ,*  
(iii) *Si  $P$  est une chaîne reliant les extrémités d'une arête  $xy$ , alors  $P$  contient une arête  $f$ , telle que  $f \Delta xy$ ,*
- (C) (i) *La relation  $\Delta$  est transitive,*  
(ii) *Pour tout  $ab, xy \in E(G)$  : si  $ab \sim xy$  alors  $W_{ab} = W_{xy}$ ,*  
(iii) *Si un sommet  $w \in V(G)$  est à la même distance à deux sommets adjacents  $x$  et  $y$  alors pour toute paire de voisins  $u, v$  de  $w$  tels que  $u \in W_{xy}$  et  $v \in W_{yx}$ ,  $u$  et  $v$  sont adjacents dans  $G$ ,*
- (D) (i) *La relation  $\Delta$  est transitive,*  
(ii) *Pour tout  $ab, xy \in E(G)$  : si  $ab \sim xy$  alors  $W_{ab} = W_{xy}$ ,*  
(iii)  *$G$  ne contient pas de cycle impair de longueur au moins 5 comme sous-graphes isométriques pour tout  $n \geq 2$ .*

### 4.2.3 Les graphes de Hamming partiels et l'étiquetage des arêtes

Klavžar et Peterin [63] ont montré qu'une caractérisation des graphes de Hamming partiels nécessite un étiquetage vérifiant certaines conditions :

**Définition 4.2.2.** [63] Soient  $G = (V, E)$  un graphe et  $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$  une partition de  $E$ . L'étiquetage des arêtes  $l : E \rightarrow \{1, 2, \dots, k\}$  associe à chaque arête  $e$  de  $G$  le label  $l(e) = i$  où  $e \in F_i$ .

**Théorème 4.2.4.** [63] Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  est un graphe de Hamming partiels si et seulement s'il existe un étiquetage  $l$  des arêtes de  $G$  en  $k$  labels différents vérifiant ces conditions :

- (a) Pour chaque triangle  $T$  de  $G$ , les arêtes de  $T$  ont le même label.
- (b) Pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $G$  à distance au moins 2, il existe deux différents labels  $i$  et  $j$  qui apparaissent dans chaque  $uv$ -chaîne induite.
- (c) Les labels des arêtes d'une plus courte  $uv$ -chaîne sont distincts.

**Notation .** Soit  $G = (V, E)$  un graphe de Hamming partiel admettant un étiquetage de Hamming  $f : V \rightarrow \Sigma^n$ . Pour toute arête  $e = xy$  de  $G$  nous affectons le label  $\ell(e) = k$   $1 \leq k \leq n$  où la  $k$ ième composante respective à  $f(x)$  et à  $f(y)$  sont différentes.

**Lemme 4.2.1.** Soit  $G$  un graphe de Hamming partiel. Si  $e$  et  $f$  sont deux arêtes appartenant à une géodésique de  $G$ , alors  $\ell(e) \neq \ell(f)$ .

*Démonstration.* Soit  $G$  un graphe de Hamming partiel. Supposons qu'il existe deux arêtes d'une géodésique de  $G$  ayant le même étiquetage. Il est clair que ces arêtes ne sont pas adjacentes car sinon elles appartiendraient à un triangle.

Soient alors  $P(u, y)$  une géodésique contenant deux arêtes  $e = uv$  et  $f = xy$ . Supposons que c'est la seule paire d'arêtes dans  $P(u, y)$  ayant le même label. Posons donc  $d(v, x) = p$  avec  $p > 0$ . Les composantes des sommets  $u$  et  $y$  diffèrent de  $p + 1$  composantes. Or  $d(u, y) = p + 2$ . Contradiction.  $\square$

**Lemme 4.2.2.** *Soient  $G$  un graphe de Hamming partiel et  $C$  un cycle élémentaire de  $G$ . Alors, chaque label  $\ell_0 = \ell(e)$  avec  $e \in C$  apparaît au moins deux fois dans  $C$ . Si de plus,  $C$  est isométrique différent de  $K_3$ , alors  $\ell_0$  apparaît exactement deux fois.*

*Démonstration.* Par absurde supposons que  $C = (x_0, x_1, \dots, x_k, x_0)$  est un cycle dans un graphe de Hamming partiel tel que  $\ell(x_0, x_1) = \ell_0$  et toute autre arête de  $C$  possède un étiquetage différent de  $\ell_0$ . Ainsi,  $x_0^{\ell_0} \neq x_1^{\ell_0}$ . De plus,  $x_p^{\ell_0} = x_{p+1}^{\ell_0}$  où  $1 \leq p \leq k-1$ . Ceci implique que  $x_k^{\ell_0} = x_1^{\ell_0}$ . L'arête  $x_k x_0$  mène à une contradiction puisque  $x_0^{\ell_0} \neq x_1^{\ell_0}$ .

Soit  $C$  un cycle isométrique de longueur  $2p$  où  $p > 1$ . Comme la plus longue géodésique dans  $C$  est d'ordre  $p$ , et en vertu du lemme 4.2.1, tout label du cycle apparaît exactement deux fois.

Maintenant soit  $C$  un cycle isométrique de longueur  $2p+1$  différent de  $K_3$  dans un graphe de Hamming partiel avec  $p \geq 2$ . Puisque la plus longue géodésique dans  $C$  est de longueur  $p$  et que chaque label apparaît exactement deux fois dans  $C$ , il existe une arête ayant soit un étiquetage exclusif dans  $C$  soit un label déjà cité deux fois dans  $C$ . Contradiction avec le lemme 4.2.1.  $\square$

Nous déduisons ainsi la remarque suivante :

**Remarque 4.2.1.** *Pour tout cycle  $C$  isométrique dans  $G$  un graphe de Hamming partiel,  $C$  est soit un cycle pair soit un  $K_3$ .*

Comme conséquence, nous avons :

**Proposition 4.2.1.** *Le diamant  $K_4 - e$  n'est pas un graphe de Hamming partiel.*

*Démonstration.* Soient  $x, y, z, t$  les sommets du diamant où  $xy$  est la corde de  $K_4 - e$ . Les sommets  $x$  et  $y$  diffèrent exactement d'une composante, supposons que celle-ci est la  $i$ ème composante. De plus, puisque  $z, t \in N(x) \cap N(y)$ , les composantes des sommets  $z$  et  $t$  sont identiques excepté la  $i$ ème composante. Par conséquent,  $z$  et  $t$  sont adjacents. Contradiction.  $\square$

L'étiquetage des arêtes  $\ell$  d'un graphe de Hamming partiel  $G$  coïncide avec la partition des arêtes de  $G$  suivant la relation  $\theta^*$ . chaque label issu de cet étiquetage représente une classe de la relation  $\theta^*$ . En particulier si  $G$  est un cube partiel, ces classes sont celles de  $\theta$  comme nous l'avons vu dans le chapitre 2.

## 4.3 Les subdivisions des graphes et les graphes de Hamming partiels

Dans le chapitre précédent, nous avons étudié les subdivisions des graphes comme étant des cubes partiels. Pour étendre cette étude nous proposons de généraliser les subdivisions des graphes complets et des roues en les plongeant isométriquement dans un graphe de Hamming :

### 4.3.1 Les graphes complets

**Théorème 4.3.1.** [11] *Soit  $G$  une subdivision d'une clique  $K_n$  ( $n \geq 4$ ). Alors  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si  $G$  est un cube partiel ou  $G$  est isomorphe à  $K_n$ .*

*Démonstration. Condition suffisante.* Evidente.

*Condition nécessaire.* Soit  $G$  une subdivision d'une clique  $K_n$  ( $n \geq 4$ ) plongeable dans un graphe de Hamming isométriquement. Montrons que  $G$  est isomorphe à  $K_n$  ou à un cube partiel.

**1er cas.** Supposons que  $G$  est biparti et montrons alors que les coordonnées des sommets de  $G$  prennent exactement deux valeurs. Par absurde, supposons qu'il existe trois sommets  $x, y, z$  tels que :  $x^i = 0$ ,  $y^i = 1$  et  $z^i = 2$ . Donc, il existe un cycle utilisant exactement trois valeurs à la  $i$ ème coordonnée. Prenons, alors  $C$  le plus petit cycle vérifiant ces conditions. Voir la figure. 4.3. Le cycle  $C$  contient exactement trois arêtes ayant le même étiquetage  $\ell$ . D'après le lemme 4.2.2, soit  $C$  est isomorphe à  $K_3$  soit  $C$  n'est pas isométrique. Comme,  $G$  est biparti, il existe une chaîne dans  $C$  coupant ce cycle en formant un cycle élémentaire plus petit que  $C$  et parcourant trois valeurs à la  $i$ ème composante. Contradiction avec les hypothèses.

Ainsi, chaque composante d'un sommet  $x$  de  $G$  utilise exactement deux valeurs. D'où  $G$  est plongeable dans l'hypercube. Et donc,  $G$  est un cube partiel.

**2ème cas.** Supposons maintenant que  $G$  n'est pas biparti et montrons que  $G$  est isomorphe à  $K_n$ . Le graphe  $G$  contient un cycle impair puisqu'il n'est pas biparti. Soit alors  $C$  le plus petit cycle impair dans  $G$ . Le cycle  $C$  est isométrique d'après la proposition 1.5.1. D'après la remarque 4.2.1,  $C$  est isomorphe à  $K_3$ .

Soit  $K$  une clique maximale dans  $G$  (suivant l'inclusion) contenant  $C$ . Donc, toutes les arêtes de cette clique ont le même label que nous noterons  $i$ . Si

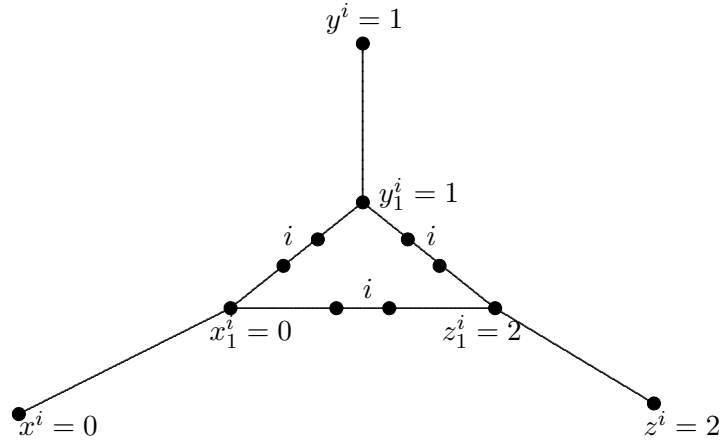


FIG. 4.3 –

$K = K_n$ , alors  $G = K_n$ . Supposons que  $K \neq K_n$ . Soit alors  $u$  le sommet principal le plus proche de  $K$ . Posons  $x$  un sommet de  $K$  telle  $d(u, x) = \min_{z \in K} d(u, z)$ .

S'il existe un sommet  $y$  dans  $K$  distinct de  $x$  tel que  $P(u, y)$  soit pleine, alors  $P(u, x)$  est pleine aussi et donc  $\langle u, x, y \rangle$  est un triangle. Par conséquent, les sommets  $x, y, u$  ont le même label  $i$ . Ainsi,  $u$  est à distance égale à 1 avec tous les autres sommets de la clique  $K$ . D'où,  $K$  n'est pas maximale. Contradiction.

Supposons maintenant que pour chaque sommet  $y \in K \setminus \{x\}$ , la chaîne  $P(u, y)$  est de longueur au moins égale à deux. Ainsi, le cycle  $\langle u, x, y \rangle$  est isométrique.

En effet, si  $\langle u, x, y \rangle$  n'est pas isométrique, alors il existe une  $uy$ -géodésique n'appartenant pas à ce cycle. Soit  $l = d(u, x)$ .

- **1er cas.** Si cette géodésique passe par un sommet principal  $w \notin K$ , alors  $d(u, y) < l+1$ . Voir la figure. 4.4(a). Comme  $d(u, x) = \min_{z \in K} d(u, z)$ , la distance entre  $y$  et  $w$  est supérieure ou égale à  $l$ . Par conséquent, il n'existe pas de  $uy$ -chaîne induite de longueur strictement inférieure à  $l+1$ . Contradiction.
- **2ème cas.** Supposons qu'il existe une  $uy$ -géodésique telle que  $u \xrightarrow{w} y$  où  $w \in K$ . Voir la figure. 4.4 (b). Comme la distance entre  $u$  et  $w$  est au moins égale à  $l$ , la  $uy$ -géodésique passant par  $w$  est donc de longueur

au moins  $l + 1$ . Contradiction.  
 D'où le cycle  $\langle u, x, y \rangle$  est isométrique.

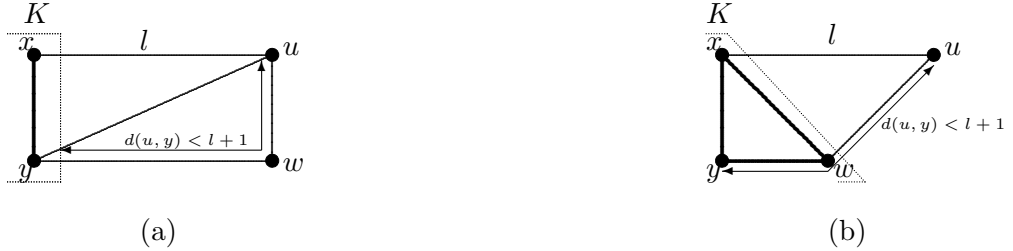


FIG. 4.4 –

Puisque  $|K| > 3$ , posons  $y$  et  $w$  deux sommets de  $K$  différents de  $x$ . Les subdivisions  $\langle u, x, y \rangle$  et  $\langle u, x, w \rangle$  sont isométriques non isomorphes à  $K_3$ . D'après la remarque 4.2.1, ces dernières sont des cycles pairs. Ainsi il existe une arête ayant l'étiquetage  $i$  dans chacun de ces cycles (Lemme 4.2.2). Puisque  $P(u, x) \cup (x, y)$  (resp.  $P(u, x) \cup xw$ ) est une chaîne isométrique, il existe une arête  $de$  dans  $P(u, y)$  (resp.  $ab$  dans  $P(u, w)$ ) ayant le label  $i$ . Soit l'arête de

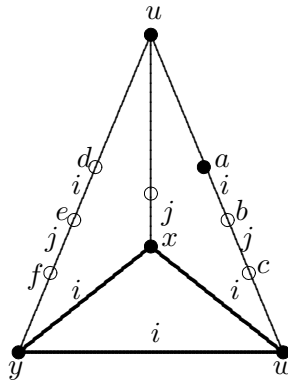


FIG. 4.5 –

la chaîne  $P(x, u)$  adjacente à  $(x, y)$ . Cette arête prend un label  $j \neq i$ . Donc, les arêtes  $bc$  et  $ef$  prennent le même étiquetage  $j$  (voir la figure 4.5). Maintenant considérons la  $eb$ -chaîne induite dans le graphe. Chacune de ces chaînes contient deux labels identiques plus particulièrement la  $eb$ -géodésique. Contradiction avec le lemme 4.2.1.  $\square$

**Remarque 4.3.1.** *D'après le premier cas traité dans la condition nécessaire du théorème, nous pouvons conclure que si  $G$  biparti plongeable dans un Hamming graphe isométriquement, alors  $G$  est un cube partiel.*

### 4.3.2 Les roues

**Théorème 4.3.2.** [11] *Soit  $G$  une roue subdivisée ( $k \geq 4$ ). Alors,  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si :*

- (i). *Toute arête de la roue incidente au centre est pleine dans  $G$  ;*
- (ii). *Toute arête de la roue non incidente au centre est soit une arête pleine ou une chaîne de longueur paire dans  $G$  ;*
- (iii). *Si  $\{e, f\}$  est une paire d'arêtes distinctes de la roue non incidente au centre de la roue telle que  $e$  et  $f$  sont pleines dans  $G$ , alors  $e$  et  $f$  sont disjointes dans  $G$  ;*
- (iv). *Si  $G$  est la  $W_4$  subdivisée,  $G$  ne contient pas le graphe de la figure. 4.6 (a) comme sous-graphe.*

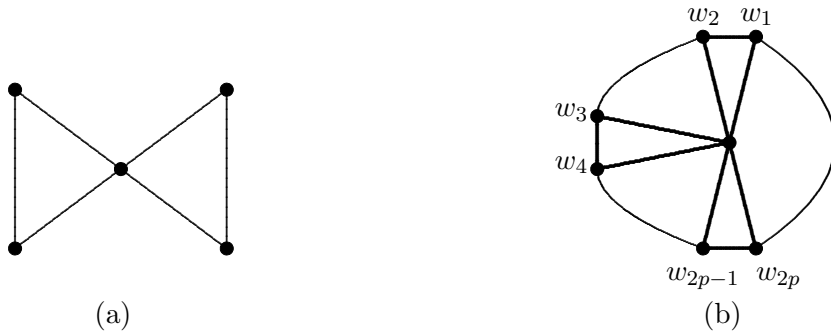


FIG. 4.6 –

*Démonstration. Condition nécessaire.*

Soit  $G$  une subdivision d'une roue  $W_k$  de centre  $u$  plongeable dans un graphe de Hamming isométriquement. Si  $G$  est biparti, alors  $G$  est un cube partiel. D'après le théorème 3.3.1, les arêtes incidentes à  $u$  sont pleines dans  $G$ . De plus, les autres arêtes sont subdivisées un nombre impair de fois. Et puis,  $G$  ne contient pas de triangle induit puisqu'il est biparti.

Supposons que  $G$  n'est pas biparti. Alors,  $G$  contient un cycle impair, et pour cela considérons  $C$  le cycle impair le plus petit possible dans  $G$ . Ainsi, le cycle

$C$  est isométrique. De plus,  $C$  est un triangle induit contenant le sommet  $u$ . Si  $p$  est le nombre de triangle existant dans  $G$ , posons  $w_1, w_2, \dots, w_{2p-1}, w_{2p}$  les sommets qui appartiennent aux  $p$  triangles du graphe  $G$ . Donc, ces triangles sont :  $\langle u, w_1, w_2 \rangle, \dots, \langle u, w_{2p-1}, w_{2p} \rangle$  (voir la figure. 4.6 (b)). Ces sommets  $w_i$  sont différents, car s'il existe deux sommets de  $\{w_1, w_2, \dots, w_{2p-1}, w_{2p}\}$  identiques alors,  $G$  contient un  $K_4 - e$  comme sous-graphe induit. Contradiction avec la proposition 4.2.1.

Pour tout indice  $r$  vérifiant  $1 \leq r \leq p-1$ , considérons le fan induit par le sommet  $u$  et les sommets de la  $w_{2r}w_{2r+1}$ -chaîne. Le sous-graphe de  $G$  isomorphe à la subdivision de ce fan est isométrique pour tout  $r$  où  $1 \leq r \leq p-1$  et donc plongeable dans le graphe de Hamming isométriquement. Comme cette subdivision est biparti, elle est un cube partiel et par conséquent, toute arête incidente à  $u$  dans  $W_k$  est pleine dans  $G$  (Théorème 3.4.1). D'où, les assertions (i), (ii) et (iii) sont vérifiées.

Montrons maintenant que le graphe de la figure. 4.6 est interdit si  $G$  est une  $W_4$  subdivisée. Supposons qu'un tel graphe est induit dans  $G$  où  $G$  est une subdivision d'une roue d'ordre 4 avec  $u, w_1, w_2, w_3, w_4$  ses sommets principaux. Les triangles sont alors  $T_1 = \langle u, w_1, w_2 \rangle$  et  $T_2 = \langle u, w_3, w_4 \rangle$ . Ainsi, chaque arête d'un triangle donné est étiquetée avec le même label. Posons  $i$  (resp.  $j$ ) le label associé à  $T_1$  (resp.  $T_2$ ) et  $x$  (resp.  $y$ ) le sommet intermédiaire se trouvant au milieu de  $P(w_2, w_3)$  (resp.  $P(w_4, w_1)$ ) (voir la figure. 4.7). Comme la plus longue géodésique d'extrémité  $x$  dans le cycle isométrique  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$  est soit  $x \rightarrow w_2 \rightarrow u$  ou  $x \rightarrow w_3 \rightarrow u$ , le sommet  $x$  est incident à deux arêtes de label  $i$  et  $j$  respectivement dans  $P(w_2, w_3)$ . Par symétrie, il en est de même pour le sommet  $y$  dans  $P(w_1, w_4)$ . De ce fait, chaque  $xy$ -chaîne induite de  $G$  contient deux arêtes portant le même label, en particulier la  $xy$ -géodésique. Contradiction avec le lemme 4.2.1.

*Condition suffisante.* Soit  $G$  une subdivision d'une roue  $W_k$  vérifiant les conditions du théorème. Montrons alors que  $G$  est un graphe de Hamming partiel. Il est clair que si  $G$  est biparti alors  $G$  est un cube partiel (Théorème 3.3.1).

Supposons maintenant que  $G$  contient  $p$  triangles. Posons alors,  $k = 2p + l$  ( $l > 0$ ) et effectuons le plongement suivant dans un graphe de Hamming et vérifions qu'il est isométrique :

Mettons le centre de la roue  $u$  à l'origine.

Soient  $w_1, w_2, \dots, w_3, w_4, \dots, w_{2p-1}, w_{2p}$  sont les sommets appartenant aux triangles de  $G$ . Chacune de ces paires occupe une des  $p$  premières dimensions

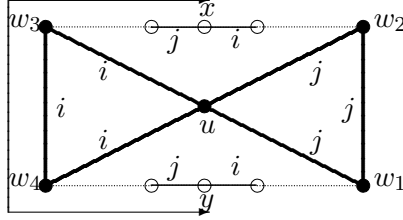


FIG. 4.7 –

distincte avec les coordonnées 1 et 2 respectivement.

Soient  $w_{2p+1}, w_{2p+2}, \dots, w_{2p+l}$  les autres sommets principaux de la subdivision.

Pour tout  $i = 1, \dots, l$  posons :

$$\begin{cases} w_{2p+i}^{(2p+i)} = 1 \\ w_{2p+i}^{(j)} = 0 \quad j \neq 2p+1 \end{cases}$$

Soient  $w_i$  et  $w_j$  deux sommets distincts dans  $\{w_1, w_2, \dots, w_3, w_4, \dots, w_{2p-1}, w_{2p}\}$  tels que  $w_i$  et  $w_j$  sont successifs dans la roue.

Posons ainsi  $P = (w_i, v_1, v_2, \dots, v_{2m+1}, w_j)$  la chaîne de longueur  $2m+2$  ( $m > 0$ ) dans la subdivision. La  $s$ -ième (resp. la  $r$ -ième) composante du sommet  $w_i$  (resp.  $w_j$ ) est non nulle. Affectons donc ces composantes :

$$\begin{cases} v_i = (0, \dots, w_i^{(r)}, \dots, 0^{(s)}, \dots, 0^{(p+l)} | \overbrace{1, \dots, 1}^{m \text{ fois}}, 0, \dots, 0) & 1 \leq i \leq m \\ v_i = (0, \dots, w_i^{(r)}, \dots, w_j^{(s)}, \dots, 0^{(p+l)} | 1, 1, \dots, 1, 1) & i = m+1 \\ v_i = (0, \dots, 0^{(r)}, \dots, w_j^{(s)}, \dots, 0^{(p+l)} | \underbrace{0, \dots, 0}_{i-m-2 \text{ fois}}, 1, \dots, 1) & m+2 \leq i \leq 2m \end{cases}$$

Nous remarquons bien qu'en étiquetant ainsi le cycle  $\langle u, x, y \rangle$ , nous obtenons un label propre d'un cycle isométrique. Donc, ce cycle est isométrique dans un graphe de Hamming.

Nous itérons cette dernière procédure à toute autre chaîne reliant deux sommets principaux de longueur paire tout en plongeant les sommets internes dans de nouvelles dimensions. Aussi le cycle formé par cette chaîne et  $u, x, y$  est isométrique dans un graphe de Hamming.

De ce fait, le graphe  $G$  est isomorphe à un sous-graphe d'un graphe de Hamming  $H$ . Montrons que  $G$  est isomorphe dans  $H$ . Soient alors  $x$  et  $y$  deux sommets de  $G$  et montrons que  $d_G(x, y) = d_H(x, y)$ .

Il est clair que si  $x$  et  $y$  sont principaux dans la subdivision, cette égalité est vérifiée.

Supposons que  $x$  est principal et  $y$  intermédiaire dans la subdivision ( $y \in P(w_i, w_j)$ ).

**1er cas.** Le sommet  $x$  est le centre de la roue  $u$ .

Comme  $\langle x, w_i, w_j \rangle$  est un cycle isométrique d'un graphe de Hamming,  $d_G(x, y) = d_{\langle x, w_i, w_j \rangle}(x, y)$ . L'étiquetage associé à  $G$  permet de conclure que  $d_G(x, y) = d_H(x, y)$ .

**2ème cas.** Le sommet  $x$  n'est pas identique au centre de la roue  $u$ .

Le cycle  $\langle u, w_i, w_j \rangle$  et  $P(u, x)$  est un sous-graphe isométrique de  $G$ . Ainsi,  $d_G(x, y) = d(x, u) + d_{\langle u, w_i, w_j \rangle}(u, y)$ . Comme la dimension de  $x$  est différente à toute autres dimensions non nulles des sommets du cycle  $\langle u, w_i, w_j \rangle$ , la distance entre  $x$  et  $y$  dans  $G$  est la même dans  $H$ .

Supposons que  $x$  et  $y$  ne sont pas des sommets principaux de la subdivision.

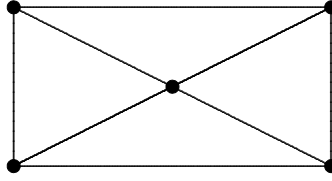


FIG. 4.8 –

**1er cas.** La  $xu$ -géodésique et la  $yu$ -géodésique dans  $G$  n'ont pas d'arêtes communes. Alors, les composantes des sommets  $x$  et  $y$  diffèrent en  $d_G(u, x) + d_G(u, y)$ . De plus, la plus courte  $xy$ -chaîne dans  $G$  est bien l'union des deux géodésiques. D'où :  $d_H(x, y) = d_G(x, u) + d_G(y, u) = d_G(x, y)$ .

**2ème cas.** Si les deux géodésiques ont une arête commune, Soient alors  $x \in P(w_i, w_j)$  et  $y \in P(w_j, w_k)$  avec  $j \neq k$ . La plus courte  $xy$ -chaîne dans  $G$  est bien  $P(x, w_j) \cup P(w_j, y)$ . Par contre, si les composantes de  $w_j$  qui sont différentes avec celles de  $x$  et celles de  $y$  sont respectivement  $p$  et  $q$ ,  $d_H(x, y) = p + q = d_H(x, w_j) + d_H(y, w_j) = d_G(x, y)$ .  $\square$



- Les arêtes du triangle  $\langle u, w_1, w_2 \rangle$  (resp.  $\langle u, w_3, w_4 \rangle$ ) ont le label  $i_1$  (resp.  $i_2$ )
- Les arêtes du cycle  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$  prennent des valeurs  $\{i_1, i_2, \dots, i_{k+1}\}$ .
- Les arêtes de chaque chaîne de longueur  $k + 1$  du cycle  $\langle u, w_2, w_3 \rangle$  prennent des étiquetages distincts deux à deux. (Voir figure 4.9)

Ainsi l'étiquetage  $\ell$  vérifie les conditions du théorème 4.2.2. Par conséquent, le graphe  $G$  est un graphe de Hamming partiel.  $\square$

**Lemme 4.3.2.** [11] *Soit  $G$  une subdivision d'un  $k$ -fan  $F_k$  ( $k \geq 4$ ) induit par les sommets  $\{u, w_1, w_2, \dots, w_k\}$  tel que :*

- (i) *Pour tout  $i = 2, \dots, (k - 1)$ , l'arête  $uw_i$  du  $F_k$  est pleine dans  $G$  ;*
- (ii) *Pour tout  $i = 1, \dots, (k - 1)$ , l'arête  $w_i w_{i+1}$  du  $F_k$  est une arête pleine ou une chaîne de longueur paire dans  $G$  ;*
- (iii) *Le graphe  $G$  ne contient pas de paire de triangles ayant une arête commune.*

*Alors,  $G$  est un graphe de Hamming partiel.*

*Démonstration.* Si  $P(u, w_1)$  et  $P(u, w_k)$  sont pleines toutes les deux dans  $G$  alors  $G$  est un graphe de Hamming partiel d'après le lemme 4.3.1.

Cependant si l'une des chaînes  $\{P(u, w_1), P(u, w_k)\}$  n'est pas pleine dans  $G$ , posons  $x$  (resp.  $y$ ) le plus proche sommet de  $u$  appartenant à  $P(u, w_1)$  (resp.  $P(u, w_k)$ ). Ainsi le graphe  $G$  est isomorphe à une subdivision d'un  $k$ -fan ayant  $\{u, x, w_2, w_3, \dots, w_{k-1}, y\}$  comme ensemble des sommets principaux.

Vérifiant les hypothèses du lemme 4.3.1, le graphe  $G$  est un graphe de Hamming partiel.  $\square$

Nous remarquons que dans les preuves de ce chapitre, deux structures émergent comme configuration exclue (en termes de subdivisions) à savoir le  $K_4 - e$  et le graphe de la figure 4.8. Sachant bien que la subdivision du  $K_4 - e$  est une configuration clé des cubes partiels.

# Chapitre 5

## Les graphes distance héréditaire

### Introduction

Revenons à l'exemple des réseaux de communication, cité précédemment, où les sommets sont reliés point par point lorsqu'un échange de messages s'impose entre eux. Ainsi, un message atteint une destination donnée tout en passant par des sommets intermédiaires. Certains de ces réseaux ne sont pas fiables dans le cas où des sommets échouent à la transmission des messages et ne parviennent à le faire qu'avec un retard. Etant connectés dans le réseau, ce retard s'exprime par le fait que la distance entre l'expéditeur et le récepteur augmente. La distance est un coût minimum estimé par chaque sommet à partir de messages envoyés par les sommets voisins. Elle impose de fixer une métrique commune à chaque sommet. Aussi, elle est basée sur le nombre de sauts, c'est à dire le nombre de sommets intermédiaires que le paquet devra traverser avant d'atteindre sa destination finale. Dans ce cas, la distance entre sommets voisins est une constante fixée à 1. Le coût total d'un chemin est alors calculé en sommant les coûts des sauts qui le composent.

Les graphes distance héréditaire modélisent bien ces réseaux dans le cas de leur fiabilité (pas de retard). Autrement, la distance dans tout sous-réseau connectant deux sommets est la même dans le réseau initial. Introduits par Howorka [51] en 1977, toute chaîne induite dans ces graphes est isométrique. Durant ce chapitre, nous nous intéresserons essentiellement à cette classe de graphes. Ainsi, nous rappellerons, au cours de la première

partie, les caractérisations établies qui se présentent sous différents aspects. En seconde partie, nous localiserons la classe de graphes distance héréditaire dans l'ensemble des graphes. Aussi, nous évoquerons certaines sous-classes particulières qui découlent des différentes caractérisations, d'une part, et rappellerons, d'autre part, les diverses classes constituant une extension de ces graphes qui ont été étudiées.

## 5.1 Graphes distance héréditaire

**Définition 5.1.1.** *Un graphe  $G$  est dit **distance héréditaire**, noté  $dh$ , si tout sous-graphe induit connexe  $H$  de  $G$  'héríte' la fonction distance. Autrement dit :*

$$d_H(u, v) = d_G(u, v) \text{ pour toute paire } \{u, v\} \text{ de sommets de } H.$$

Notons que dans un graphe  $dh$ , toute chaîne induite est isométrique. Howorka [51] qui a établi les premières caractérisations associées :

**Définition 5.1.2.** *Une chaîne  $P$  est une **partie essentielle** d'un cycle  $C$  si  $P$  est un sous-graphe de  $C$  et  $1/2|E(C)| < |E(P)| < |E(C)|$ .*

**Définition 5.1.3.** *Soient  $G$  un graphe et  $C$  un cycle de  $G$ .*

- *Deux cordes distinctes d'un cycle  $C$  sont dites **concourantes** si elles ont une extrémité commune. Sinon, elles sont **disjointes**.*
- *Deux cordes disjointes d'un cycle  $C$  **se croisent** si, dans le parcours des sommets du cycle, leurs extrémités sont rencontrées alternativement.*
- *Une corde est dite **courte** si elle forme un triangle dans le cycle  $C$ .*

**Théorème 5.1.1.** [51] *Soit  $G$  un graphe. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i). Le graphe  $G$  est un graphe distance héréditaire.*
- ii). Chaque chaîne induite est isométrique.*
- iii). Toute partie essentielle d'un cycle est une chaîne ayant une corde.*
- iv). Chaque cycle de longueur au moins 5 a au moins deux cordes et chaque cycle  $C_5$  a une paire de cordes qui se croisent.*
- v). Chaque cycle de longueur au moins 5 a une paire de cordes qui se croisent.*

Hammer et Maffray [50] ont étudié la classe de graphes distance héréditaire tout en utilisant un concept autre que celui de l'isométrie pour les définir. Ainsi, en ayant recours aux fonctions booléennes et plus particulièrement à une de leurs propriétés, ces graphes ont été appelés **graphes complètement séparables**.

- Si  $G$  est un graphe  $dh$ , alors  $G$  ne contient aucun des graphes de la figure. 5.1 comme sous-graphe induit.
- Tout cycle  $C_n$  ( $n \geq 5$ ) n'est pas un sous-graphe induit (ou isométrique) d'un graphe distance héréditaire.
- Tout cycle d'un graphe  $dh$  de longueur au moins égal à 5 possède des cordes disjointes.
- Dans un graphe  $dh$ , chaque cycle de longueur au moins 5 possède des cordes non concourantes.

## 5.2 Caractérisations des graphes $dh$

L'un des types de caractérisations métriques des graphes consiste à comparer les sommes de distances  $d(u, v) + d(w, x)$ ;  $d(u, w) + d(v, x)$  et  $d(u, x) + d(v, w)$  pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets du graphe. Ainsi, en évaluant ces sommes dans les graphes  $dh$ , Bandelt et Mulder [7] ont montré que ces graphes sont exactement les graphes satisfaisant " **la condition faible des quatre points** " (i.e. condition (viii)). du théorème 5.2.1. Par ailleurs, d'autres caractérisations métriques intéressantes faisant appel aux sous-graphes induits interdits, ont été établies ( [37] , [50] ) :

**Théorème 5.2.1.** [7] [50] [37] *Soit  $G$  un graphe connexe avec une fonction distance  $d$  et une fonction intervalle  $I$ . Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i). *Le graphe  $G$  est distance héréditaire.*
- (ii). *Pour toute paire  $\{u, v\}$  de sommets de  $G$  avec  $d_G(u, v) = 2$ , il n'existe pas de  $uv$ -chaîne induite de longueur supérieure strictement à 2.*
- (iii). *Les graphes de la figure. 5.1 et les cycles élémentaires  $C_n$  ( $n \geq 5$ ) ne sont pas des sous-graphes induits de  $G$ .*
- (iv). *Les graphes de la figure. 5.1 ne sont pas des sous-graphes induits de  $G$  et  $I(u, v) \cap I(u, w) = \{v\}$  implique que  $d(u, w) \geq d(u, v) + d(v, w) - 1$ .*
- (v). *Les graphes de la figure. 5.1 ne sont pas des sous-graphes induits de  $G$  et  $I(u, v) \cap I(u, w) = \{v\}$  implique que  $d(u, w) \geq d(u, v) + d(v, w) - 1$ .*

(vi). Le graphe de la figure. 5.1 (a) (le 4-fan  $F_4$ ) n'est pas un sous-graphe induit de  $G$  et pour tout triplet  $\{u, v, w\}$  de sommets de  $G$ , au moins deux de ces inclusions sont vérifiées :

$$I(u, v) \subseteq I(u, w) \cup I(v, w)$$

$$I(u, w) \subseteq I(u, v) \cup I(v, w)$$

$$I(v, w) \subseteq I(u, v) \cup I(u, w)$$

(vii). Pour tous  $x, y, w, x$  sommets quelconques de  $G$ , au moins deux des sommes de distance  $d(u, v) + d(w, x)$  ;  $d(u, x) + d(v, x)$  ;  $d(u, w) + d(v, x)$  sont égales et si les plus petites sommes de distances sont égales, la plus grande somme les dépasse d'au plus deux unités.

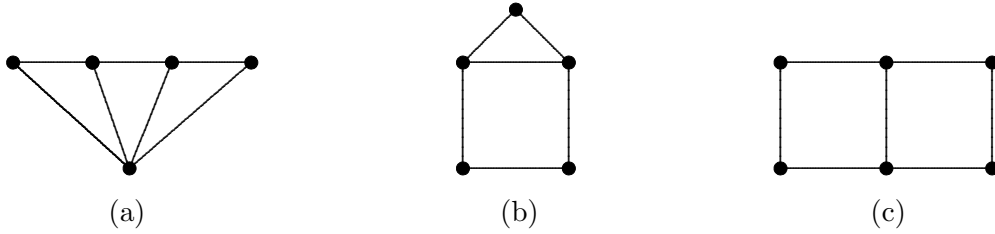
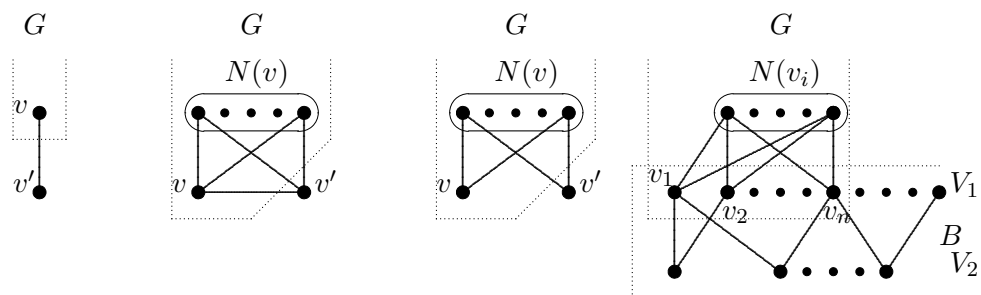


FIG. 5.1 –

**Définition 5.2.1.** Soient  $G$  un graphe et  $v$  un sommet de  $G$ . Soient  $B = (V_1 \cup V_2, E)$  un graphe biparti et  $V'$  sous-ensemble non vide de  $V_1$ . Nous pouvons effectuer une extension au graphe  $G$  à l'aide des opérations définies comme suit :

- $\alpha(G, v)$  est le graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant un sommet pendant  $v'$  adjacent à  $v$ . Voir la figure. 5.2 (a).
- $\beta(G, v)$  (resp.  $\gamma(G, v)$ ) est le graphe résultant suite à l'ajout d'un vrai (resp. faux) jumeau  $v'$  de  $v$ . La **duplication** du sommet  $v$  consiste à appliquer l'une des opérations  $\beta$  ou  $\gamma$  au sommet  $v$ . Voir la figure. 5.2 (b)(resp. Voir la figure. 5.2 (c)).
- Un **prolongement du graphe  $G$  par un graphe biparti  $B = (V_1 \cup V_2, E(B))$**  suivant  $V'$  est l'opération  $\phi$  qui consiste à créer un nouveau graphe à partir de  $G$  en identifiant chaque sommet de  $V'$  avec un faux jumeaux de  $v$ . Ainsi ce graphe est noté  $\phi(G, B(v_1, v_2, \dots, v_n))$ . Voir la figure. 5.2 (d).



(a).  $\alpha(G, v)$       (b).  $\beta(G, v)$       (c).  $\gamma(G, v)$       (d).  $\phi(G, B(v_1, v_2, \dots, v_n))$

FIG. 5.2 – L'extension du graphe  $G$  suivant les opérations  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  et  $\phi$ .

Il est facile de voir que l'application des opérations  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$  dans graphe  $dh$  préserve les distances dans le graphe résultant. Bandelt et Mulder [7] ont montré qu'un graphe  $dh$  peut être décomposé en ôtant, à chaque étape, soit un sommet pendant ou un jumeau. Ainsi, ils ont établi la caractérisation suivante :

**Théorème 5.2.2.** [7] *Soit  $G$  un graphe avec au moins deux sommets. Alors,  $G$  est un graphe distance héréditaire si et seulement si  $G$  est obtenu à partir de  $K_2$  par une séquence d'opérations : ajout de sommet pendants, et duplication de sommets.*

L'une des conséquences importantes de cette (décomposition) composition a été donnée par ce résultat :

**Corollaire 5.2.1.** [7] *Chaque graphe distance héréditaire ayant au moins quatre sommets possède soit deux paires disjointes de jumeaux, soit une paire de jumeau et un sommet pendant, ou bien deux sommets pendants.*

**Définition 5.2.2.** [6] *Soient  $G$  un graphe et  $v$  un sommet du graphe  $G$ . La **complémentation locale** du graphe  $G$  associée au sommet  $v$  est l'opération qui consiste à transformer uniquement le sous-graphe induit par les sommets de  $N_G(v)$  en son complémentaire.*

- Le graphe  $G'$  de la figure. 5.3 est obtenu à partir de  $G$  par la complémentation locale associée au sommet  $v$ . Le graphe  $G'$  est obtenu à partir de  $G$  par la même opération.



FIG. 5.3 – La complémentation locale suivant le sommet  $v$ .

- Nous notons que l’opération inverse de la complémentation locale est la complémentation locale. Voir la figure. 5.3.
- Les graphes distance héréditaire peuvent être construits ” blocs par blocs ”. Ces derniers sont les niveaux résultants à la décomposition en couches du graphe. Cette caractérisation est très utile puisque la stabilité de la complémentation locale dans la classe des graphes distance héréditaire en dérive.
- Dans [6], une généralisation de la caractérisation des graphes distance héréditaire en termes d’opérations constructives du graphe a été établie. Celle-ci est fondée sur la stabilité de l’opération citée précédemment dans la classe des graphes distance héréditaire :

**Théorème 5.2.3.** [6] *Un graphe  $G$  est distance héréditaire si et seulement si  $G$  est obtenu à partir d’un ensemble de sommets indépendants par la complémentation locale et les opérations suivantes : duplication de sommets ; ajout de sommets pendants.*

### 5.3 Optimisation dans les graphes $dh$

Les différentes recherches ayant pour but d’étudier l’aspect combinatoire et les problèmes d’optimisation ont abouti à des résultats très importants pour cette classe. De nombreux algorithmes ont été proposés afin de résoudre des problèmes généralement durs. Ainsi, un algorithme de reconnaissance polynomial en temps a été établi pour ces graphes [37] [44] [50].

Par ailleurs, l’étude algorithmique qui se consacre particulièrement à des problèmes d’optimisation classiques, a été basée sur les propriétés structurales et combinatoires des graphes distance héréditaire. Comme exemple,

nous pouvons citer le théorème suivant, établi par A. D'Atri et M. Moscarini [37], qui fut très motivant puisque le résultat trouvé a permis de résoudre le problème de l'arbre de Steiner dans un graphe  $dh$  en un temps linéaire :

**Définition 5.3.1.** *Soient  $G$  un graphe et  $S$  un sous-ensemble de sommets de  $V(G)$ . Un arbre de Steiner de  $S$  est le plus petit sous-graphe connexe de  $G$  contenant  $S$ .*

**Définition 5.3.2.** *Soit  $G$  un graphe et  $T$  un sous-ensemble de  $V(G)$ . Le problème de l'arbre de Steiner dans  $G$  consiste à trouver un sous-ensemble minimal de sommets  $S$  de  $V(G) \setminus T$  de telle sorte que le sous-graphe engendré par  $S \cup T$  soit connexe. Les sous-ensembles  $S$  et  $T$  sont appelés **ensemble Steiner** et **cible** respectivement.*

**Théorème 5.3.1.** [37] *Un graphe  $G$  est distance héréditaire si et seulement si chaque sommet  $v$  de  $G$  et chaque paire  $\{x, y\}$  de sommets dans  $N_i(v)$  ( $i \geq 1$ ) tels que  $x$  et  $y$  sont adjacents alors :  $N_{i-1}(v) \cap N(x) = N_{i-1}(v) \cap N(y)$ .*

Cependant, d'autres problèmes d'optimisation combinatoire ont été résolus linéairement dans la classe des graphes  $dh$ . Nous pouvons citer le problème de la chaîne hamiltonienne [69], le problème d'isomorphisme [38] [32], le problème de la  $r$ -domination connexe [41] [70], le problème de la clique (le stable) de poids maximum [38] [44] [64], le problème de l'arbre de Steiner de poids minimum [77].

## 5.4 Sous-classes des graphes $dh$

### 5.4.1 Les cographes

**Définition 5.4.1.** *Un **cographe** est un graphe dans lequel la longueur de toutes les chaînes induites est au plus deux.*

Plusieurs appellations sont attribuées à ces graphes dans la littérature. Sumner [75] les appela '**graphes Dacey héréditaires**'. Cependant, nous pouvons les trouver sous le nom de '**compléments de graphes réductibles**' dans [35] ou les '**2-parité graphes**' dans [24]. Parmi les caractérisations faites pour ces graphes durant ces travaux de recherches, nous retenons ces propriétés caractéristiques :

**Proposition 5.4.1.** [35] *Pour un graphe  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i). Le graphe  $G$  ne contient pas de chaîne de longueur 3.*
- ii). Le graphe  $G$  est l'union disjointe de graphe distance héréditaire de diamètre au plus 2.*
- iii). Le graphe  $G$  peut être obtenu à partir d'une séquence de duplication de sommets.*
- iv). Le graphe  $G$  peut être obtenu à partir d'une séquence d'opérations suivantes : l'union jointe et disjointe de graphe.*

### 5.4.2 Les graphes $dh$ bipartis

**Définition 5.4.2.** *Un graphe  $G$  est un  $(6,2)$ -corde biparti si  $G$  est biparti et tout cycle de longueur au moins 6 contient au moins deux cordes.*

Moscarini et D'Atri [37] ont montré indépendamment que les graphes  $(6,2)$ -corde biparti sont exactement les graphes distance héréditaire bipartis. Par ailleurs, Bandelt et Mulder ont établi ces propriétés :

**Corollaire 5.4.1.** [7]

*Pour un graphe  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i). Le graphe  $G$  est biparti et distance héréditaire.*
- ii). Le graphe  $G$  est sans triangle et ne contient ni de cycle élémentaire  $C_n$   $n \geq 5$  ( $n \geq 5$ ) ni le graphe de la figure. 5.1 (c).*
- iii). Pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets de  $G$  avec  $I(u, v) \cap I(u, w) \cap I(v, w) = \emptyset$ , au moins deux de ces unions sont égales :  $I(u, v) \cup I(u, w)$  ;  $I(u, v) \cup I(v, w)$  ;  $I(u, w) \cup I(v, w)$ .*

Un graphe  $(6,2)$ -corde biparti ne contient pas de vrai jumeau puisqu'il est sans  $K_3$ . Par conséquent, la construction de tels graphes s'effectue de la manière suivante :

**Corollaire 5.4.2.** [7] *Un graphe fini  $G$  avec au moins deux sommets est distance héréditaire biparti si et seulement s'il est obtenu à partir de  $K_2$  par une séquence d'opérations de type  $(\alpha)$  et  $(\gamma)$ , autrement dit ajout de sommets pendants et de faux jumeaux.*

Par ailleurs, nous avons le résultat suivant :

**Corollaire 5.4.3.** [7] Soit  $G$  un graphe distance héréditaire. Pour tout sommet  $v$  de  $G$ , la partie horizontale de  $G$  suivant le sommet  $v$  est un cografe et la partie verticale de  $G$  suivant le sommet  $v$  est un  $(6,2)$ - corde biparti.

### 5.4.3 Les graphes ptolémaïques

**Définition 5.4.3.** Un graphe connexe  $G$  est dit **ptolémaïque** si pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets de  $G$  :

$$d(u, v) \times d(w, x) \leq d(u, w) \times d(v, x) + d(u, x) \times (v, w).$$

Dans l'espace métrique, cette dernière inégalité est connue sous le nom de **l'inégalité ptolémaïque**.

Les graphes ptolémaïques ont été introduits par Kay et Chartrand [59] et intensivement étudiés par E. Howorka [51]. Ce dernier a montré que ces graphes sont exactement les graphes distance héréditaire triangulés :

**Définition 5.4.4.** Un graphe  $G$  est dit **triangulé** si tout cycle de longueur au moins 4 contient une corde.

**Corollaire 5.4.4.** [7]

Pour un graphe  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes :

- i). Le graphe  $G$  est ptolémaïque.
- ii). Le graphe  $G$  est distance héréditaire et triangulé.
- iii). Le graphe  $G$  ne contient ni le cycle élémentaire  $C_n$  ( $n \geq 4$ ) ni le graphe de le 4-fan  $F_4$  comme sous-graphe isométrique.
- iv). Pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets de  $G$ , au moins deux des sommes de distances :  $d(u, v) + d(w, x)$  ;  $d(u, x) + d(v, w)$  ;  $d(u, w) + d(v, x)$  sont égales et si les plus petites sommes sont égales, la plus grande les excède d'au plus une unité.

D'autre part, la construction de graphes ptolémaïques s'effectue de la manière suivante :

**Corollaire 5.4.5.** [7] Un graphe fini  $G$  est ptolémaïque si et seulement si  $G$  est obtenu à partir de  $K_1$  par une séquence d'opération de type  $(\alpha)$ ,  $(\beta)$  et  $(\gamma)$ , où les opérations  $\gamma$  sont appliquées uniquement aux sommets ayant des voisins (non vides) induisant des sous-graphes complets.

## 5.4.4 Les graphes blocs

**Définition 5.4.5.** *Un graphe  $G$  est un graphe bloc si  $G$  est connexe et si tout sous-graphe 2-connexe maximal est complet.*

Cette classe de graphes a été la première à être caractérisée en utilisant les quatre points. En effet, Howorka [52] a montré que les graphes blocs sont exactement les graphes vérifiant une condition des quatre points :

**Définition 5.4.6.** *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G$  satisfait la condition des quatre points si pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets de  $G$ , les deux plus grandes sommes suivantes sont égales :  $d(u, v) + d(w, x)$  ;  $d(u, x) + d(v, w)$  ;  $d(u, w) + d(v, x)$ .*

**Proposition 5.4.2.** [7] *Soit  $G$  un graphe connexe avec une fonction distance  $d$ . Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

- i). Le graphe  $G$  est un graphe bloc.*
- ii). La distance  $d$  satisfait la condition des quatre points.*
- iii). Le graphe  $G$  ne contient ni de  $K_4 - e$  ni de  $C_n$  induit  $n \geq 4$  comme sous-graphe.*

## 5.5 Extension des graphes $dh$

### 5.5.1 Les graphes de parité

**Définition 5.5.1.** *Un graphe de parité est un graphe dont toutes les chaînes induites reliant la même paire de sommets distincts sont de même parité.*

Nous constatons que cette classe de graphes constitue une extension des graphes  $dh$  puisqu'on impose uniquement la même parité des longueurs de chaînes et non pas leur égalité. Introduits par Burlet et Uhry [24], les graphes de parité ont été caractérisés par analogie à la première caractérisation des graphes héréditaires donnée par Howorka (Théorème 1.2.1) en utilisant la version parité ce dernier résultat :

**Théorème 5.5.1.** [24] *Un graphe  $G = (V, E)$  est de parité, si et seulement si tout cycle impair de longueur au moins 5 contient deux cordes qui se croisent.*

Burlet et Uhry [24] ont effectué une étude algorithmique des graphes de parité en exploitant une de leur propriété structurelle. Cette dernière nous permet de confirmer que la classe de ces graphes est constituée d'un " assemblage " de deux classes de graphes ; à savoir les graphes bipartis et les cographes :

**Théorème 5.5.2.** [24] *Tout graphe  $G = (V, E)$  de parité s'obtient à partir d'un sommet unique par les opérations suivantes :*

- (i).  $\gamma$  : création d'un faux jumeau ;
  - (ii).  $\beta$  : création d'un vrai jumeau ;
  - (iii).  $\phi$  : prolongement par un biparti ;
- appliquées successivement et dans un ordre quelconque .

Un peu plus tard, Cicerone et Di Stefano [31] ont étudié une propriété intéressante dans les graphes de parité. Celle-ci a été très utile pour résoudre quelques problèmes classiques d'optimisation dans les graphes.

Cependant, la caractérisation des graphes de parité en termes de sous-graphes induits interdits a été établie par Burlet et Uhry [24]. Toutefois, Bandelt et Mulder [8] montrèrent que la liste des sous-graphes isométriques non permis coïncide avec celle des sous-graphes interdits donnée dans [24]. Ils ont caractérisé également les graphes de parité en utilisant la "version parité" de la 'condition faible des quatre points' (condition (ii). du théorème 5.5.3) :

**Notation .** *Soit  $G$  un graphe.*

- *Tout cycle  $C_n$  ayant une corde courte est noté par  $C_n^*$ .*
- *Le cycle  $C_5$  possédant deux cordes concourantes sera désigné par  $C_5^{**}$  .*

**Théorème 5.5.3.** [8] *Pour tout graphe  $G$ , les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (i). *Le graphe  $G$  est de parité.*
- (ii). *Pour tout quadruple  $\{u, v, w, x\}$  de sommets soit toutes les trois sommes  $d(u, v) + d(w, x)$  ;  $d(u, w) + d(v, x)$  ;  $d(u, x) + d(v, w)$  sont de même parité soit deux d'entre elles sont égales.*
- (iii). *Si  $d(u, v) + d(w, x) \leq d(u, w) + d(v, x) \leq d(u, x) + d(v, w)$  telle que la somme  $d(u, w) + d(v, x)$  est impaire, alors  $d(u, v) + d(w, x)$  ou  $d(u, x) + d(v, w)$  est impaire.*

- (iv). Le graphe  $G$  ne contient pas de  $C_{2k+1}$  ( $k \geq 2$ ),  $C_{2k+1}^*$  ( $k \geq 2$ ), ou de  $C_5^{**}$  comme sous-graphe isométrique induit.
- (v). Pour toute arête  $wx$  et toute paire de sommets  $\{u, v\}$  telles que :  $d(u, w) = d(u, x) = d(u, v) + 1$   $v$  est adjacent à  $w$  si et seulement si  $v$  est adjacent à  $x$ .

## 5.6 Vers une généralisation paramétrique des graphes $dh$

Entre autres, les graphes de parité formant une extension des graphes  $dh$ , il existe des classes de graphes issues d'une extension purement paramétrique de la définition des graphes distance héréditaire :

- En effet, Cicerone et Di Stefano [33] ont introduit la classe des **graphes à distance induite bornée** d'ordre  $\alpha$ , notée  $BID(\alpha)$ . Ces graphes expriment bien les défaillances des réseaux de communication citées au début de ce chapitre. Ainsi, un graphe  $G$  est dans la classe  $BID(\alpha)$  si pour toute paire de sommets  $\{u, v\}$  de  $G$ , la longueur d'une  $uv$ -chaîne induite dans le graphe est au plus  $\alpha$  fois la longueur de la  $uv$ -géodésique dans  $G$ . En exploitant le rapport de la longueur d'une plus longue et plus courte chaîne dans un graphe, plus particulièrement dans les cycles de ce graphe, ils ont donné une caractérisation des  $BID(\alpha)$  pour tout  $\alpha$  entier positif.
- Dans le même contexte, à savoir celui de modéliser les réseaux défaillants, Aïder [1] a étudié l'aspect structurel et combinatoire des **graphes presque distance héréditaire**. Basés sur la même idée que celles des  $BID(\alpha)$  mais en exprimant la défaillance d'une façon additive, les graphes  $DH(k, +)$  ont été étudiés par Cicerone et Di Stefano [34]. Ces graphes généralisent la notion de presque héréditaire. Les travaux entrepris dans le cadre de caractériser ces graphes sont exposés dans le chapitre suivant où nous donnons une nouvelle caractérisation des  $DH(k, +)$ .

# Chapitre 6

## Vers une généralisation des graphes distance héréditaire

### 6.1 Définitions et résultats préliminaires

Nous rappelons, au cours de cette partie, la définition des graphes  $k$ -distance héréditaire et certaines notions déjà introduites et utilisées pour la caractérisation de ces graphes :

**Définition 6.1.1.** *Un graphe  $G$  est  $k$ -distance héréditaire, noté  $DH(k, +)$ , si pour tout sous-graphe induit connexe  $H$  de  $G$  :*

$$d_H(u, v) \leq d_G(u, v) + k \quad \forall u, v \in V(H).$$

Autrement dit, la distance entre deux sommets quelconques dans un sous-graphe connexe qui les contient peut être augmentée d'au plus  $k$  unités par rapport à la distance entre ces mêmes sommets dans  $G$ .

**Définition 6.1.2.** *Soient  $G$  un graphe et  $\{u, v\}$  une paire de sommets distincts de  $G$ .*

- **Le nombre dilatoire de la paire  $\{u, v\}$ , noté  $\delta_G(u, v)$ , est donné par :**  $\delta_G(u, v) = D_G(u, v) - d_G(u, v)$  où  $d_G(u, v)$  (resp.  $D_G(u, v)$ ) est la longueur d'une plus courte (resp. plus longue)  $uv$ -chaîne induite dans le graphe  $G$ .
- **Le nombre dilatoire du graphe  $G$ ,  $\delta(G)$  est le maximum des nombres dilatoires de toutes les paires possibles de sommets distincts de  $G$ .**
- **$\mathcal{D}(G)$  est l'ensemble des paires de sommets dont le nombre dilatoire est égal à  $\delta(G)$ .**  $\mathcal{D}(G) = \{\{u, v\} \in V(G) : \delta_G(u, v) = \delta(G)\}$ .

**Propriétés 6.1.1.** Soient  $k_1$  et  $k_2$  deux entiers positifs tels que  $k_1 \leq k_2$  :

- (i)  $DH(k_1, +) \subseteq DH(k_2, +)$  ;
- (ii) Si  $\{u, v\} \in E$  alors  $\delta(u, v) = 0$
- (iii) Si  $\delta(G) = 0$  alors  $\mathcal{D}(G)$  contient toutes les paires de sommets possibles de  $G$ .
- (iv) Si  $\delta(G) > 0$  alors  $\forall \{u, v\} \in \mathcal{D}(G) : d_G(u, v) \geq 2$ .

*Démonstration.* Les propriétés (i), (ii) et (iii) se déduisent immédiatement des définitions 6.1.2. □

## 6.2 Les graphes presque distance héréditaire

La classe des  $k$ -distance héréditaire contient les graphes distance héréditaire (quand  $k = 0$ ) introduits par Howorka [51]. Les graphes **presque distance héréditaire** sont les 1-distance. Aïder les a caractérisé en termes de sous-graphes interdits :

**Définition 6.2.1.** Soient  $C$  et  $C'$  deux cycles d'ordre  $n$  et  $n'$  respectivement.

- Le cycle  $C$  est dit  $1C_n$  s'il est élémentaire ou s'il ne contient que des cordes concourantes.
- Si  $C$  et  $C'$  sont isomorphes à  $1C_5$  alors une  **$2C_5$ -configuration de type (a)** est un graphe obtenu en reliant  $C$  et  $C'$  à l'aide d'une chaîne d'extrémités  $x$  et  $y$  dans  $C$  et  $C'$  respectivement avec  $d_C(x) = d_{C'}(y) = 2$ . Voir la figure. 6.1(a).
- La  **$2C_5$ -configuration de type (b)** est un cycle  $C_8$  isomorphe au graphe de la figure. 6.1(b).

Nous notons qu' au long de ce chapitre et dans nos figures, une ligne pointillée représente une chaîne induite éventuellement réduite à un seul point. Une ligne discontinue représente une éventuelle arête dans le graphe.

**Théorème 6.2.1.** [1] Un graphe  $G$  est presque distance héréditaire ( $DH(1, +)$ ) si et seulement si  $G$  ne contient ni de  $2C_5$ -configuration, ni de  $1C_n$ , pour tout  $n \geq 6$ , comme sous-graphe induit.

De cette caractérisation découle des propriétés combinatoires et métriques généralisant celles vérifiées dans les graphes  $dh$  :

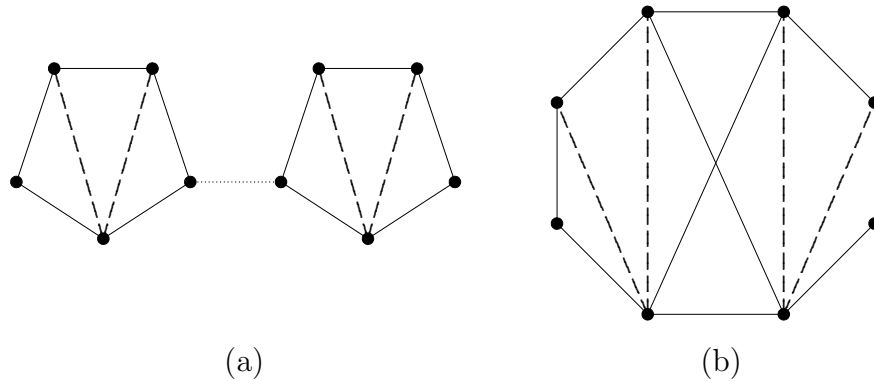


FIG. 6.1 –  $2C_5$ -configuration

**Proposition 6.2.1.** [1] Soit  $G$  un graphe presque distance héréditaire avec au moins deux sommets. Alors,  $G$  contient :

- (a) soit deux sommets pendants ;
- (b) soit une paire de jumeaux ;
- (c) soit une  $C_5$  configuration de type (a) induite.

**Proposition 6.2.2.** [1] Soit  $G$  un graphe ne contenant pas de  $C_n$  configuration de type (a) comme sous-graphe induit tel que pour tout quadruple de sommets  $\{u, v, w, x\}$  de  $G$ , la différence entre deux de ces sommets de distances  $d(u, w) + d(v, x)$  ;  $d(u, x) + d(v, w)$  et  $d(u, x) + d(v, w)$  est au plus 2. Alors,  $G$  est presque distance héréditaire.

### 6.3 Les graphes 2-distance héréditaire

Bessedik [14] et Rautenbach [73] ont étudié les graphes 2-distance héréditaire. Ils ont donné cette caractérisation :

**Théorème 6.3.1.** [14] [73] Un graphe  $G$  est 2-distance héréditaire si et seulement  $G$  ne contient pas une de ces configurations comme sous-graphe induit :

1.  $1C_n$  ( $n \geq 7$ ) ;
2. Un des graphes de la figure. 6.2 ;
3. Un des graphes de la figure. 6.3.

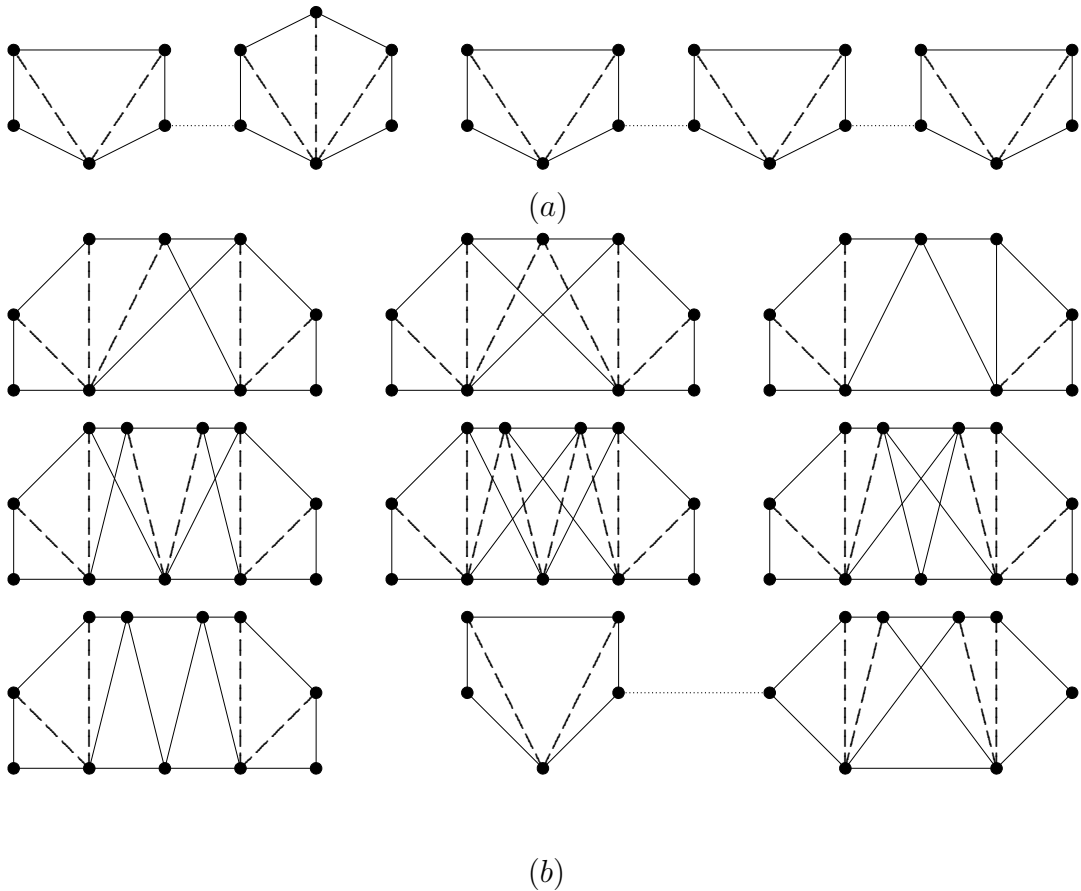


FIG. 6.2 – Des configurations interdites d'un graphe 2-distance héréditaire.

## 6.4 Caractérisations des graphes $DH(k, +)$

Cicerone et Di Stefano [34] ont établi deux caractérisations des graphes  $DH(k, +)$ . La première était une condition nécessaire et suffisante portant sur le nombre dilatoire des graphes. Par ailleurs, en définissant le 'jumeau' d'un graphe  $DH(k, +)$ , ils avaient montré une propriété locale intéressante dans ce graphe permettant de caractériser la classe  $DH(k, +)$ , pour tout  $k$  entier positif :

**Théorème 6.4.1.** [34] *Soit  $G$  un graphe. Alors,  $G \in DH(k, +)$  si et seulement si  $\delta(G) \leq k$ .*

**Définition 6.4.1.** *Soit  $G$  un graphe. Le graphe jumeau de  $G$  est le graphe  $G^* = (V^*, E^*)$  où :  $V^* = V^1 \cup V^2$  ;  $E^* = E^1 \cup E^2 \cup E^3$  avec :*

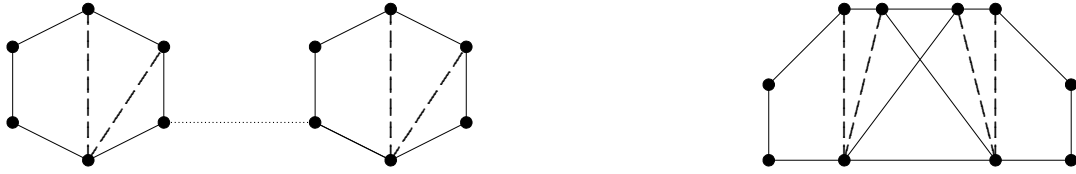


FIG. 6.3 –

$$\begin{aligned}
 V^1 &= \{v^1/v \in V\}; & V^2 &= \{v^2/v \in V\}; \\
 E^1 &= \{u^1v^1/uv \in E\}; & E^2 &= \{u^2v^2/uv \in E\}; \\
 & & E^3 &= \{u^1v^2, u^2v^1/uv \in E\}.
 \end{aligned}$$

- A partir de la définition 6.4.1, nous avons :  $|V^*| = 2|V|$  et  $|E^*| = 4|E|$ .
- Le graphe  $G^*$  est obtenu à partir de  $G$  en appliquant l'opération  $\gamma$  (ajout de faux jumeaux) à chaque sommet de  $v$  de  $G$ . En effet, chaque paire  $\{u^1, v^2\}$  de  $G^*$  ( $v^1 \in E^1$  et  $v^2 \in E^2$ ) est une paire de faux jumeaux dans  $G^*$ . Ainsi, le graphe  $G$  est composé de deux 'copies' de  $G$  ( $G^1 = (V^1, E^1)$  et  $G^2 = (V^2, E^2)$ ) qui sont reliées par les arêtes de  $E^3$ . Voir l'exemple de la figure. 6.4 où nous illustrons le graphe jumeau d'un cycle élémentaire  $C_5$ .

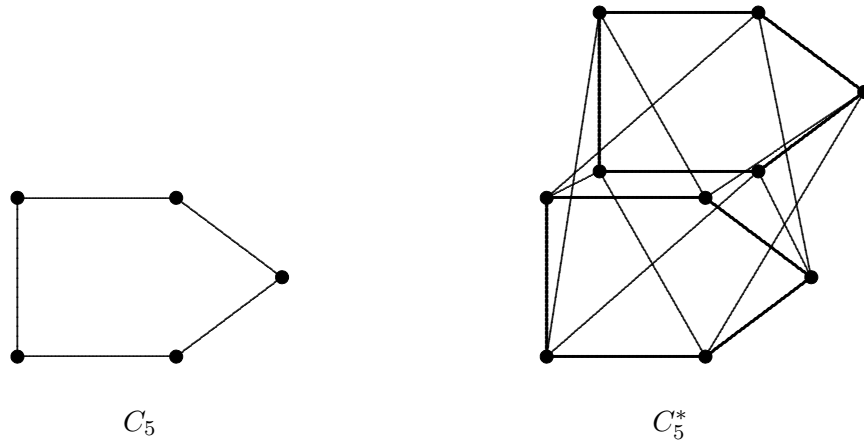


FIG. 6.4 – Le graphe jumeau  $C_5^*$  du cycle  $C_5$

**Lemme 6.4.1.** [34] Pour tout  $k$  entier naturel,  $G \in DH(k, +)$  si et seulement si  $G^* \in DH(k, +)$ .

**Définition 6.4.2.** Soit  $C_n$  un cycle.

- Nous notons par  $K(C_n)$  l'ensemble des sommets consécutifs  $u_i, u_{i+1}, \dots, u_{i+|K(C_n)|-1}$  dans  $C_n$  tel que pour chaque corde  $e$  dans  $C_n$  il existe un sommet  $x_s$  dans  $K(C_n)$  incident à  $e$ .
  - Si  $C_n$  est un cycle élémentaire alors  $K(C_n) = \emptyset$ .
  - La **distance de corde** d'un cycle  $C_n$ , notée par  $cd(C_n)$ , est le cardinal minimum de  $K(C_n)$ .
- L'exemple de la figure. 6.5(a) est un cycle d'ordre 8 à distance de corde égale à 4.
  - Le graphe de la figure. 6.5(b), est isomorphe à  $1C_5$ . La distance de corde associée est au plus égale à 1.

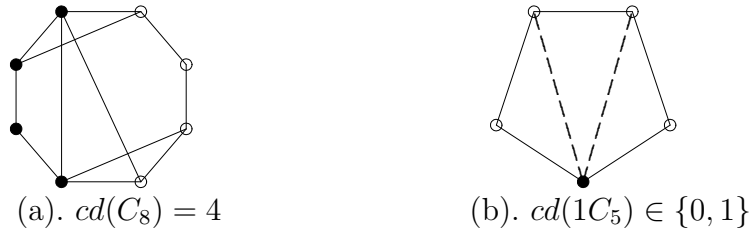


FIG. 6.5 – Cycles et leur distance de corde.

Pour tout graphe  $G \in DH(k, +)$  ( $k > 0$ ), le nombre dilatoire du graphe jumeau  $G^*$  coïncide avec celui d'un sous-graphe de  $G^*$  induisant un cycle. En exprimant ainsi la longueur de ce cycle en fonction de sa distance de corde et de  $k$ , Cicerone et Di Stefano [34] ont établi une caractérisation des graphes  $DH(k, +)$  basée sur la distance des cordes des graphes jumeaux :

**Théorème 6.4.2.** [34] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier ( $k \geq 0$ ). Alors,  $G \in DH(k, +)$  si et seulement si  $cd(C_n) > \frac{n-k}{2} - 1$  pour tout cycle  $C_n$   $n > k + 4$  dans  $G^*$ .

- Il est facile de vérifier que la classe des graphes  $DH(k, +)$  est fermée en considérant les sous-graphes induits connexes.
- Chaque cycle élémentaire  $C_{4+k'}$  est interdit comme sous-graphe induit dans un  $k$ -distance héréditaire pour  $k' > k$ , puisque il peut être obtenu comme l'union d'une plus courte  $uv$ -chaîne de longueur 2 et une  $uv$ -chaîne induite de longueur  $2 + k'$ . Cette configuration demeure non permise si les cordes de ce cycle sont concourantes.

Par ailleurs, nous pouvons construire des configurations interdites tout en utilisant ces opérations :

**Définition 6.4.3.** Soient  $C_{n_1}$  et  $C_{n_2}$  deux cycles disjoints ayant les ensembles de sommets et d'arêtes correspondants  $V_1 \cup \{v_1\}$  et  $V_2 \cup \{v_2\}$ ;  $E_1$  et  $E_2$  respectivement de telle sorte que si  $C_{n_1}$  (resp.  $C_{n_2}$ ) contient une corde, le sommet  $v_1$  (resp.  $v_2$ ) n'est pas incident à cette corde dans  $C_{n_1}$  ( resp. dans  $C_{n_2}$ ) :

- Pour tout  $r$  entier positif, la  **$r$ -composition** de  $C_{n_1}$  et  $C_{n_2}$  est le graphe  $C_{n_1} \varphi_r C_{n_2}$  obtenu en reliant  $C_{n_1}$  et  $C_{n_2}$  par une chaîne d'extrémités  $v_1$  et  $v_2$  et de longueur  $r$ .
- $1C_{n_1} \varphi_{-1} 1C_{n_2}$  est le graphe  $G$  ayant  $V = V_1 \cup V_2$  comme ensemble de sommets et  $E$  comme ensemble d'arêtes où  $E = E'_1 \cup E'_2 \cup \{xy / x \in N_{1C_{n_1}}(v_1); y \in N_{1C_{n_2}}(v_2)\}$  avec  $E'_i = \{xy \in E_i / x, y \in V_i\}$  pour  $i = 1, 2$ .

L'opération  $\varphi_{-1}$  est la **composition split** appliquée à  $1C_{n_1}$  et  $1C_{n_2}$  suivant les sommets  $v_1$  et  $v_2$  (Voir figure. 6.2).

Cette opération est l'inverse de la décomposition introduite dans [36]. Dans [16], la composition split a été utilisée pour construire des graphes distance héréditaire, des graphes complets, des graphes bipartis, et des arbres.

Nous remarquons que la restriction de cette opération sur ces cycles comme  $1C_{n_1}$  et  $1C_{n_2}$  est associative.

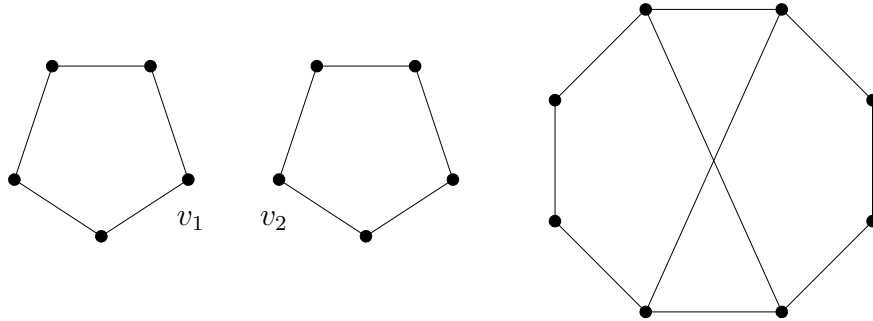


FIG. 6.6 – La composition split de deux  $C_5$  suivant  $m_1$  et  $m_2$  ou  $C_5 \varphi C_5$ .

**Définition 6.4.4.** Soit  $k$  un entier  $k \geq 1$ .

- Une  **$k$ -configuration** est toute configuration interdite comme sous-graphe induit d'un graphe  $k$ -distance héréditaire.
- Cette configuration est dite **stricte** si son nombre dilatoire est égale à  $k + 1$ .

- Dans l'autre cas (quand ce nombre dépasse cette valeur), la configuration est dite **large**.

En reliant  $p$   $1C_{4+k_i}$  configurations,  $1 \leq k_i < k + 1, i = 1 \dots p$ , avec  $\sum_{i=1}^p k_i = k + 1$ , tout en utilisant la  $r$ -composition,  $r \geq 0$ , nous obtenons une configuration non permise comme sous-graphe induit dans un graphe  $k$ -distance héréditaire (Voir la figure. 6.2 (a) pour le cas où  $k = 2$ ) :

**Définition 6.4.5.** Soient  $G$  un graphe,  $H$  un sous-graphe de  $G$  et  $k$  un entier ( $k \geq 1$ ). Alors  $H$  est dit une  **$k$ -configuration stricte de type (a)** si  $H$  est isomorphe au graphe suivant :

$$1C_{4+k_1}\varphi_{r_1}1C_{4+k_2}\varphi_{r_2}\dots1C_{4+k_{p-1}}\varphi_{r_{p-1}}1C_{4+k_p}$$

où  $2 \leq p \leq k + 1$  ;  $r_j \in \mathbb{N}, 1 \leq j \leq (p - 1)$  ;  $\sum_{i=1}^{i=p} k_i = k + 1$

Par ailleurs, nous notons que la  $2C_5$ -configuration de type (b) est la composition split de deux  $1C_5$ . Voir la figure. 6.1 (b).

De plus, nous définissons les autres configurations interdites suivantes dans un graphe  $k$ -distance héréditaire :

**Définition 6.4.6.** Soient  $G$  un graphe et  $u, v$  deux sommets de  $G$  tels que  $d_G(u, v) \geq 2$ .

La paire de sommets  $\{u, v\}$  est une **paire cycle** s'il existe une plus courte  $uv$ -chaîne  $p_G(u, v)$  et une plus longue  $uv$ -chaîne  $P_G(u, v)$  tels que :

$$V(p_G(u, v)) \cap V(P_G(u, v)) = \{u, v\}.$$

Le cycle induit par  $V(p_G(u, v)) \cup V(P_G(u, v))$  est noté par  $C_n\{u, v\}$  où  $n = d_G(u, v) + D_G(u, v)$ .

**Définition 6.4.7.** Soit  $G$  un graphe ayant un nombre dilatoire supérieur à  $k$  ( $k$  un entier naturel ( $k \geq 1$ )) et  $H$  un sous-graphe de  $G$ .

Alors  $H$  est une  **$k$ -configuration of type (b)** s'il existe une paire cycle  $\{u, v\}$  et un entier  $n$  tels que  $H$  est isomorphe à  $C_n\{u, v\}$  où :  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k'$  avec  $k' > k$  et  $d_G(u, v) > 2$ .

**Lemme 6.4.2.** [2] Soient  $G \in DH(k, +)$ ,  $k \geq 1$ , et  $H$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $H$  est une  $k$ -configuration stricte de type (b), alors il existe une paire cycle  $\{u, v\}$  telle que  $H$  est isomorphe à un cycle  $C_{2p+k+3}\{u, v\}$  avec :

$$cd(C_{2p+k+3}) = p \text{ où } 2 \leq p \leq k + 1.$$

*Démonstration.* Soient  $G$  un graphe et  $H$  une  $k$ -configuration de type (b). Alors  $H$  est isomorphe à un cycle  $C_n$  induit par la réunion d'une plus courte  $uv$ -chaîne  $P$  et une plus longue  $uv$ -chaîne  $Q$  dans  $G$  tel que  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k + 1$  et  $d_G(u, v) > 2$ . Notons que si  $p$  est la distance de corde de  $C_n$ , il est clair que  $n = 2p + k + 3$ . Supposons que  $C_n$  est une  $k$ -configuration stricte et minimale au sens de l'inclusion et montrons par induction sur  $k$ , que  $C_n$  n'est pas minimal si  $p$  dépasse la valeur  $k + 1$ .

D'après la caractérisation des graphes 1-distance héréditaire,  $1C_5\varphi_{-1}1C_5$  ayant une distance de corde égale à 2 est l'unique 1-configuration de type (b). Sa distance de corde est égale à 2. Donc, l'assertion est vraie pour  $k = 1$ .

Pour  $k > 2$ , Soit  $C_n$  une  $k$ -configuration stricte minimale de type (b) avec une distance de corde  $p > k + 1$ . Sans perdre de généralité, considérons le cas où  $cd(C_n) = k + 2$ , puisque nous utiliserons les mêmes arguments pour  $cd(C_n) > k + 2$ . Alors,  $C_n = \langle P \cup Q \rangle$  avec :  $P = (u, x_1, x_2, \dots, x_{k+2}, v)$  et  $Q = (u, y_1, y_2, \dots, y_{2k+3}, v)$  sont la plus courte et la plus longue  $uv$ -chaîne induite respectivement. Notons par  $r_j$  (resp.  $l_j$ ) le plus grand (resp. le plus petit) indice  $j'$  tel que  $x_j$  est adjacent à  $y_{j'}$ .

Puisque  $cd(C_n) = k + 2$ ,  $r_j$  et  $l_j$  sont définis pour  $j = 1$  et  $j = k + 2$ . (Voir la figure. 6.7)

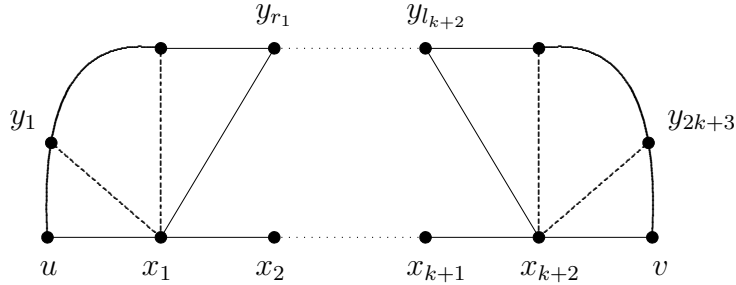


FIG. 6.7 –

Par minimalité de  $C_n$ ,  $d_Q(u, y_{r_1}) = 2 + k_1$ ,  $d_Q(y_{l_{k+2}}, v) = 2 + k_2$  où  $1 \leq k_i \leq k$ ,  $i = 1, 2$ . Considérons alors  $C_{n_1} = Q(u, y_{r_1}) \cup y_{r_1}x_1 \cup x_1u$  et  $C_{n_2} = Q(y_{l_{k+2}}, v) \cup vx_{k+2} \cup x_{k+2}y_{l_{k+2}}$  où  $k_1 \leq k_2$

**1er Cas :**  $k_1 + k_2 = k + 1$

$C_n$  contient une  $k$ -configuration de type (a). Contradiction.

**2ème Cas :**  $k_1 + k_2 < k + 1$

Soit  $C_{n'}$  est un cycle induit par les sommets de  $C_n$  excepté  $u, y_1, \dots, y_{r_1-1}$ .

**Cas 2.1.** Supposons que le  $x_2$  est incident à une corde de  $C_{n'}$ .  $x_1y_{r_1} \cup Q(y_{r_1}, v)$  est une  $x_1v$ -chaîne induite de longueur  $2k - k_1 + 3$ . Donc, le nombre dilatoire de la paire  $\{x_1, v\}$  dans le cycle  $C_{n'}$  est au moins égal à  $k - k_1 + 1$ . Le cycle  $C_{n'}$  est une  $(k - k_1)$ -configuration de type (b) ayant une distance de corde  $k + 1$ . En vertu des hypothèses de récurrence,  $C_{n'}$  contient strictement une  $(k - k_1)$ -configuration. Si ce graphe est un cycle celui-ci forme avec  $C_{n_1}$  une  $k$ -configuration strictement incluse dans  $C_n$ . Contradiction avec la minimalité de la configuration.

Si la  $(k - k_1)$ -configuration est l'union de cycle  $C$  et  $C'$  reliés par une chaîne, celle-ci forme avec  $C_{n_1}$  une  $k$ -configuration in  $C_n$ . Contradiction.

**Cas 2.2.** Supposons maintenant qu'il existe aucune corde incidente à  $x_2$  dans  $C_{n'}$  et soit  $p'$  la distance de corde de  $C_{n'}$ . Si  $p' > k - k_1 + 1$ , en utilisant les mêmes arguments du Cas 2.1., nous aboutirons à une  $k$ -configuration strictement incluse dans  $C_n$ , contradiction.

Sinon, notons par  $x_\alpha$  le sommet le plus proche de  $x_2$  qui est incident à une corde dans le cycle de  $C_{n'}$ . L'indice  $\alpha$  est au moins égal à  $k_1 + 2$  puisque  $p' \leq k - k_1 + 1$ . Alors,  $P(x_{\alpha-1}, x_1) \cup x_1y_{r_1} \cup Q(y_{r_1}, v)$  est une  $x_{\alpha-1}v$ -chaîne de longueur au moins  $(2k + 3)$ . Le nombre dilatoire du cycle  $C_{n'}$  satisfait :

$$\begin{aligned} \delta(C_{n'}) &\geq \delta_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) = D_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) - d_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) \\ \delta_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) &\geq D_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) - d_{C_{n'}}(x_{\alpha-1}, v) \Big|_{\alpha=k_1+2} \\ &\geq 2k + 3 - (k - k_1 + 2) \\ &\geq k + k_1 + 1 > k + 1 \end{aligned}$$

Donc, la  $k$ -configuration  $C_n$  est ni stricte ni minimale. Contradiction avec les hypothèses. Par conséquent, chaque  $k$ -configuration stricte de type (b) ayant une distance de corde plus que  $k + 1$  n'est pas minimale. D'où,  $H$  est un cycle  $C_n\{u, v\}$  où  $2 \leq cd(C_n\{u, v\}) = p \leq k + 1$ .  $\square$

**Définition 6.4.8.** Soient  $G$  un graphe et  $H$  un sous-graphe de  $G$ . Alors,  $H$  est une  **$k$ -configuration de type (a,b)** si  $H$  est obtenu :

- Soit en joignant une  $k_i$ -configuration (ou des  $k_i$ -configurations) de type (a) avec une  $k_j$ -configuration (ou  $k_j$ -configurations) de type (b) suivant la  $r$ -composition ( $r \in \mathbb{N}$ ) telle que  $\sum k_i + k_j \geq k + 1$
- ou en joignant deux (ou plusieurs)  $k_i$ -configurations de type (b) suivant la  $r$ -composition ( $r \in \mathbb{N}$ ) telle que  $\sum k_i \geq k + 1$

Parmi les sous-graphes interdits des 2-distance héréditaire, déjà introduits, le graphe  $(1C_5)\varphi_r(1C_5\varphi_{-1}1C_5)$ ,  $r \in \mathbb{N}$  est une 2-configuration de type (a,b).

Voir le dernier graphe de la figure. 6.2 (b). Cependant, le graphe  $1C_6\varphi_r1C_6$ ,  $r \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$ , est une large 2-configuration. (Voir la figure. 6.3)

**Lemme 6.4.3.** [2] Soient  $G \in DH(k, +)$ ,  $k \geq 1$ , et  $H$  un sous-graphe induit de  $G$ . Si  $H$  est une  $k$ -configuration stricte, alors  $H$  est isomorphe à l'un des graphes suivants :

- (i).  $1C_{4+k}$ ;
- (ii). Pour tout entier  $p$  avec  $2 \leq p \leq k + 1$ , le graphe :

$$1C_{4+k_1}\varphi_{r_1}1C_{4+k_2}\varphi_{r_2}\dots1C_{4+k_{p-1}}\varphi_{r_{p-1}}1C_{4+k_p}$$

où  $1 \leq k_i \leq k$  où  $1 \leq i \leq p$ ;  $r_j \in \mathbb{N} \cup \{-1\}$  pour chaque  $1 \leq j \leq p - 1$  ;  
et  $\sum_{i=1}^{i=p} k_i = k + 1$  ;

- (iii). Tout graphe obtenu à partir de (ii). en remplaçant chaque cycle  $C'$  ayant une distance de corde  $cd'$ ,  $cd' \geq 2$ , et un nombre dilatoire  $k'$ ,  $2 \leq k' \leq k + 1$  par une  $(k' - 1)$ -configuration de type (b).

*Démonstration.* Si  $H$  est une  $k$ -configuration stricte dans  $G$ , alors il existe une paire de sommets  $\{u, v\}$  dans  $H$  telle que  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k + 1$ . Nous notons par  $P$  (respectivement  $Q$ ) la plus courte (respectivement la plus longue)  $uv$ -chaîne induite dans  $G$ . Alors, soit les sommets  $u$  et  $v$  sont reliés par un cycle  $C_n\{u, v\}$  ou il existe au moins une sous-chaîne de  $Q$  (éventuellement réduite à un seul sommet) appartenant à  $P$ . Supposons alors que  $H$  est minimal et donc il existe une paire de sommets  $\{x, y\}$  dans  $H$  ayant un nombre dilatoire  $k$  et constituant une  $k$ -configuration strictement incluse dans  $H$ .

**Cas 1.** La paire  $\{u, v\}$  est un paire-cycle.

Ainsi,  $H$  est isomorphe à un cycle  $C_n\{u, v\}$  induit par les chaînes  $P$  et  $Q$ . Si la distance de corde de  $C_n\{u, v\}$  est au moins 1,  $C_n\{u, v\}$  est équivalent à une configuration (i). du lemme 6.4.3. Sinon, le cycle  $C_n\{u, v\}$  est une  $k$ -configuration de type (b). Sa distance de corde est au moins  $k + 1$  suivant le lemme 6.4.2. Donc,  $H$  est soit isomorphe à une configuration du cas (ii) pour  $r_j = -1 \forall j = 1, \dots, p - 1$  soit isomorphe à une autre stricte  $k$ -configuration de type (b).

**Cas 2.** Il existe au moins une sous-chaîne de  $P$  (éventuellement réduite à un seul point différent de  $u$  et  $v$ ) contenue dans  $Q$ .

Alors  $H$  est isomorphe à une union de cycle joints par ces sous-chaînes. Puisque  $H$  est stricte et minimale, il existe  $p$  cycles  $2 \leq p \leq k + 1$ . Notons

ainsi ces cycles par  $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_p}$ . Pour chaque indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq p$ ,  $cd_i$  et  $k_i$  sont respectivement la distance de corde et le nombre dilatoire de  $C_{n_i}$ . Puisque  $H$  est stricte et minimale, les nombres dilatoires  $k_i$  satisfont :  $1 \leq k_i \leq k$  et  $\sum_{i=1}^p k_i = k + 1$ .

Si  $cd_i \leq 1$  pour chaque indice  $i$ ;  $1 \leq i \leq p$ , alors le cycle  $C_{n_i}$  est équivalent à  $1C_{4+k_i}$ . Par conséquent,  $H$  est isomorphe à une configuration (ii) du lemme 6.4.2 où  $r_j \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq j \leq p - 1$ .

S'il existe plusieurs indices (pas tous)  $i_0$  tels que  $C_{n_{i_0}}$  a une distance de corde au moins égale à 2 et un nombre dilatoire  $k_{i_0}$ , alors ce cycle est une stricte  $(k_{i_0} - 1)$ -configuration de type (b).  $H$  est isomorphe à  $1C_{4+k_1}\varphi_{r_1}1C_{4+k_2}\dots\varphi_{r_{i-1}}C_{n_{i_0}}\varphi_{r_i}\dots\varphi_{r_{p-1}}1C_{4+k_p}$  ( $r_j \in \mathbb{N}$   $1 \leq j < p - 1$ ) qui est une  $k$ -configuration de type (a,b). Nous notons que la composition de  $1C_{4+k_j}$ ,  $\sum k_j = k_{i_0}$ , suivant  $\varphi_{-1}$  est une stricte  $(k_{i_0} - 1)$ -configuration de type (b). Finalement, si tous les cycles ont au moins une distance de corde égale à 2, alors  $H$  est isomorphe à  $C_1\varphi_{-1}C_2\dots\varphi_{-1}C_p$  où  $C_i$  est de type (b)  $i = 1, \dots, p$  et  $\sum k_j = k + 1$ . Donc,  $H$  est isomorphe à une stricte  $k$ -configuration de type (a,b).  $\square$

**Théorème 6.4.3.** [2] Soient  $G$  un graphe et  $k$  un entier ( $k \geq 2$ ). Alors,  $G$  est un graphe  $k$ -distance héréditaire si et seulement si  $G$  ne contient pas un de ces sous-graphes :

- (i)  $1C_{4+k'}$  ( $k' \geq k+1$ );
- (ii) Une  $k$ -configuration stricte;
- (iii) Une  $k$ -configuration large ayant un nombre dilatoire  $k'$  et  $k+1 < k' \leq 2k$ .

*Démonstration. Condition nécessaire.* Il est clair que si  $G$  contient une de ces configurations son nombre dilatoire est plus grand que  $k$  et donc  $G$  n'est pas  $k$ -distance graphe héréditaire.

*Condition suffisante.* Soit  $G$  un graphe tel que  $G \notin \text{DH}(k, +)$ . Alors,  $G$  contient une paire de sommets  $\{u, v\}$  telle que  $D_G(u, v)$  est au moins égale à  $d_G(u, v) + k + 1$ . Parmi toutes les paires ayant cette propriété notée  $(\Delta)$ , nous choisissons une paire  $\{u, v\}$  telle que  $d_G(u, v)$  est plus petite que possible. Nous notons par  $P$  (resp.  $Q$ ) la plus petite (resp. la plus longue)  $uv$ -chaîne induite de  $G$ . Ainsi, nous nous référons à ce choix de paire de sommets comme une condition minimale. Soit  $H$  le sous-graphe de  $G$  induit par les sommets de  $P$  et  $Q$ .

**Cas 1.**  $P \cap Q = \{u, v\}$ .

Les chaînes  $P$  et  $Q$  constituent un cycle  $C_n$  où  $n = d_G(u, v) + D_G(u, v)$ . Nous remarquons que  $d_G(u, v) \geq 2$  et la longueur du cycle  $C_n$  est au moins  $5 + k$ .

Si  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k + 1$ , ce cycle est soit  $1C_{5+k}$  ( $d_G(u, v) = 2$ ) soit une  $k$ -configuration stricte de type (b) ( $d_G(u, v) > 2$ ).

Sinon, si  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k'$  ( $k' > k + 1$ ) et  $d_G(u, v) = 2$ , la paire-cycle  $\{u, v\}$  induit un cycle  $1C_{4+k'}$ .

Maintenant, considérons le cas où  $\delta_G(u, v) = k' > k + 1$  et  $d_G(u, v) > 2$ . Le sous-graphe  $H$  est une  $k$ -configuration large. Montrons que  $k' \leq 2k$ .

Supposons que  $x$  est le plus proche sommet de  $u$  dans  $P$  ayant un sommet voisin dans  $Q$ . Soit  $x'$  son voisin dans  $Q$  tel que  $x'$  est le plus proche sommet à  $v$ . (voir la figure.6.8).

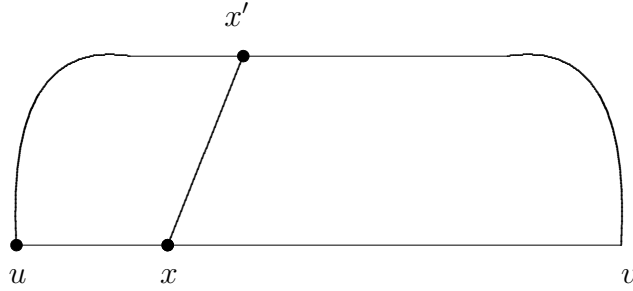


FIG. 6.8 –

D'un côté, la distance  $d_Q(u, x')$  est au moins égale à  $3 - d_P(u, x) + k$  sinon, le cycle induit par  $Q\{u, x'\} \cup (x', x) \cup P(x, u)$  est isomorphe à  $1C_{4+p}$  ( $p \geq k + 1$ ) et il existe un sommet dans  $P(u, x)$  qui forme avec  $x'$  une paire de sommets satisfaisant la condition  $(\Delta)$  avec une distance plus petite que  $d_G(u, v)$ . Contradiction avec la minimalité de la condition.

De l'autre côté, si  $d_Q(u, x') \leq d_P(u, x) + 1$ , alors :

$$\begin{aligned} d_Q(x', v) + 1 &= d_Q(u, v) - d_Q(u, x') + 1 \geq d_Q(u, v) - (d_P(u, x) + 1) + 1 \\ d_Q(x', v) + 1 &\geq d_P(u, v) + k' - d_P(u, x) \\ d_Q(x', v) + 1 &\geq d_P(x, v) + k' \end{aligned}$$

Ainsi,  $xx' \cup Q(x', v)$  est une  $xv$ -chaîne inuite de longueur au moins égale à  $d_G(x, v) + k'$ . Donc la paire  $\{x, v\}$  vérifie la propriété  $(\Delta)$  avec  $d_G(x, v) < d_G(u, v)$ . Contradiction.

Par conséquent,  $d_P(u, x) + 2 \leq d_Q(u, x') \leq 3 - d_P(u, x) + k$ .

**Cas 1.1.** . Si  $d_P(u, x) = 1$ , alors  $3 \leq d_Q(u, x') \leq 2 + k$ . Plus précisément,  $k' < 2k + 1$ . Sinon la paire  $\{x, v\}$  satisfait la condition  $(\Delta)$  avec  $d_G(x, v) < d_G(u, v)$ , puisque :

$$\begin{aligned} \delta_G(x, v) &= D_G(x, v) - d_G(x, v) \geq d_Q(x', v) + 1 - d_P(x, v) \\ \delta_G(x, v) &\geq (d_P(u, v) + 2k + 1 - d_Q(u, x')) + 1 - d_P(x, v) \\ \delta_G(x, v) &\geq d_P(u, v) + 2k + 1 - (2 + k) + 1 - d_P(x, v) \geq k + 1 \end{aligned}$$

Or, ceci contredit la condition de minimalité  $(\Delta)$ .

**Cas 1.2.** Si  $d_P(u, x) > 1$ , alors  $Q(u, v)$  a une longueur  $d_G(u, v) + k'$  avec  $k + 1 < k' \leq 2k - 2$ . Sinon, la plus longue  $xv$ -chaîne vérifie :

$$\begin{aligned} D_G(x, v) &\geq d_Q(x', v) - 1 = d_Q(u, v) - d_Q(u, x') + 1 \\ D_G(x, v) &\geq (d_P(u, v) + 2k - 1) - (3 - d_P(u, x) + k) + 1 \\ D_G(x, v) &\geq (d_P(x, v) + 2d_P(u, x) - 4) + (k + 1) \\ &\geq d_P(x, v) + k + 1 \end{aligned}$$

Alors, la paire  $\{x, v\}$  satisfait la condition  $(\Delta)$  avec  $d_G(x, v) < d_G(u, v)$ . Contradiction.

Par conséquent, si  $\delta_G(u, v) > k + 1$ . Donc,  $C_n\{u, v\}$  est une  $k$ -configuration large de type (b) ayant un nombre dilatoire  $k'$  tel que  $k' \leq 2k$ .

**Cas 2.**  $P \cap Q \neq \{u, v\}$ .

Il existe au moins une sous-chaîne de  $P$  (éventuellement réduite à un point) contenue dans  $P \cap Q$ . Notons ainsi ces sous-chaînes respectivement par  $P(y_1, x_2)$ ,  $P(y_2, x_3)$ , ...,  $P(y_{s-1}, x_s)$  ( $s \geq 2$ ). Il est clair que  $d_G(u, y_1) \geq 2$ ;  $d_G(x_i, y_i) \geq 2$  pour tout  $i = 2, \dots, (s - 1)$  et  $d_G(x_s, v) \geq 2$ .

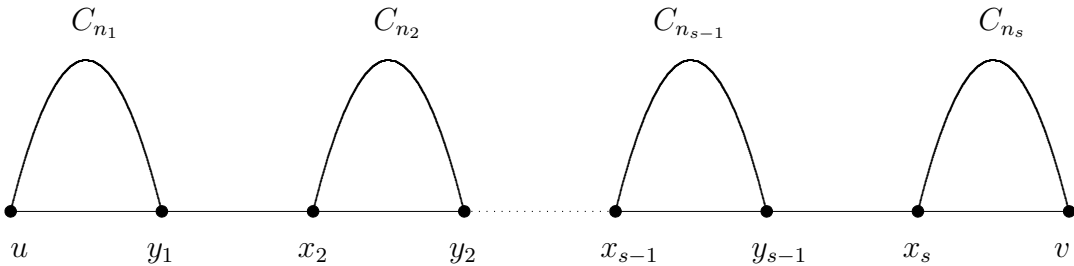


FIG. 6.9 –

Le sous-graphe  $H$  est isomorphe à une suite de cycles  $C_{n_1}, C_{n_2}, \dots, C_{n_s}$

reliés par des chaînes  $P(y_1, x_2), P(y_2, x_3), \dots, P(y_{s-1}, x_s)$ . Voir la figure. 6.9. Pour chaque indice  $i$ ,  $1 \leq i \leq s$ , notons par  $\delta_i$  le nombre dilatoire de  $C_{n_i}$ . Il est facile de vérifier que la somme des nombres dilatoires  $\delta_i$  est égale à  $\delta_G(u, v)$ . De plus, pour chaque indice  $i$ , ( $1 \leq i \leq s$ ), le nombre dilatoire  $\delta_i$  est au plus  $k$  sinon il existe une de ces paires de sommets vérifiant la condition de minimalité ( $\Delta$ ). Contradiction.

Supposons que  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k + 1$ . Si  $d_G(u, y_1) = d_G(x_i, y_i) = d_G(x_s, v) = 2$ , ( $i = 2, \dots, (s-1)$ ), alors le sous-graphe  $H$  est une  $k$ -configuration stricte de type (a). Dans l'autre cas, s'il existe un cycle  $C_{n_i}$  induit par une paire de sommets à distance au moins 2,  $C_{n_i}$  est une  $(\delta_i - 1)$ -configuration stricte de type (b). Alors,  $H$  est une  $k$ -configuration stricte de type (a,b).

Finalement, supposons que  $D_G(u, v) = d_G(u, v) + k'$  ( $k' > k + 1$ ). L'entier  $k'$  satisfait  $k' \leq 2k$ , puisque  $1 \leq \delta_i \leq k$  et  $\sum_{i=1}^{i=s} \delta_i = \delta_G(u, v)$ . En utilisant les mêmes arguments que précédemment,  $H$  est isomorphe soit à une  $k$ -configuration large de type (a) soit à une  $k$ -configuration large de type (a,b) ayant chacune un nombre dilatoire égal à  $k'$ .  $\square$

Nous constatons qu'une  $k$ -configuration large est  $k'$ -configuration stricte où  $k' > k$  et  $k' = k_1 + k_2$  avec  $1 < k_i < k$  pour  $i = 1, 2$ . Cependant si celle-ci est minimale par rapport à  $k$  (ne contient aucune  $k$ -configuration comme sous-graphe induit) alors elle ne peut se présenter de manière uniforme pour tout entier  $k \geq 2$ .

# Chapitre 7

## Conclusion générale

Dans cette thèse nous avons abordé des problèmes liés à la préservation de distance dans les graphes. En premier lieu, nous nous sommes intéressés aux plongements dans le produit des graphes complets. Ces plongements regroupent des classes de graphes intéressantes. Elles ont été longuement étudiées, et ont permis de donner des applications dans de nombreux domaines. Nous avons ainsi exploité l'aspect structurel des subdivisions des graphes tout en étant des cubes partiels ou des graphes de Hamming partiels. Après avoir traité des configurations finies et des familles de graphes subdivisés, deux structures intéressantes s'imposent dans les preuves. Nous avons montré qu'il est nécessaire d'interdire une subdivision d'un complet  $K_{2,3}$  comme sous-graphe isométrique, mais ceci n'est pas nécessaire. Par ailleurs, nous avons proposé d'étudier la configuration de la figure comme sous-graphe isométrique exclu d'un graphe de Hamming partiel.

Ainsi Certains des résultats demeurent partiels puisque des questions en suspens s'imposent :

- Si nous ajoutons des sommets à un graphe donné, nous pouvons bien déterminer toutes les configurations d'ajout qui pourraient être des cubes partiels pour un certain nombre de graphes (le chapitre 3). Cependant, si  $G$  est un cube partiel et  $e$  une arête de  $G$ , sous quelles conditions pouvons nous préserver ce plongement isométrique pour  $G - e$ ? (pas nécessairement en gardant la même dimension du plongement si celui-ci est faisable). Toutefois dans la littérature, des cubes partiels particuliers, dits critiques, dont la suppression d'une quelconque arête ont été traités (Voir [62] et [22]). Il a été noté que les cubes partiels critiques trouvés sont des cubiques. Comme il existe des graphes cri-

tiques non cubiques (il suffit de prendre le  $S(K_4)$ ), automatiquement la question qui se pose suite à cette remarque est de dire si tous les cubiques partiels cubes sont graphes critiques ?

- L'étiquetage dans un cube partiel est bien intéressant puisqu'il permet d'expliciter des propriétés structurelles de ces graphes. Un étiquetage parfait d'un cube partiel  $G = (V, E)$  d'ordre  $n$  est l'application  $f : V \rightarrow \{0, 1, \dots, n-1\}$  où pour chaque arête d'une même classe  $\theta$  reçoit le même label. Sachant qu'un label d'une arête est définie pas la valeur absolue de la différence des labels de ses extrémités. Un cube partiel est parfait s'il admet un tel étiquetage. Il a été prouvé dans [20] que plusieurs classes des cubes partiels admettent un tel étiquetage comme les cycles pairs, les cubes de Fibonacci, le produit cartésien des partiels cubes parfaits. Par contre, est ce que tous les cubes partiels sont parfaits ?
- Dans le cadre de la caractérisation des cubes partiels, nous avons suspecté que la subdivision du  $K_{2,3}$  est un 'destructeur mineur' de cette classe dans le sens où une telle configuration ne peut pas se produire comme sous-graphe isométrique. Cette conjecture a été bien infirmée par la suite, mais cependant, en traitant les plongements dans les graphes de Hamming nous posons la conjecture suivante :

**Conjecture 7.0.1.** *Soit  $G$  un graphe. Alors  $G$  est un graphe de Hamming partiel si et seulement si  $G$  satisfait des conditions de parité et  $G$  ne contient ni de subdivision de  $K_{2,3}$  ni de subdivision de la figure. 7.1 comme sous-graphe isométrique.*

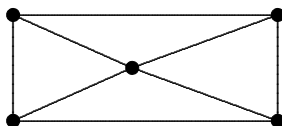


FIG. 7.1 –

- Les plongements traités dans cette thèse sont isométriques. Une généralisation de ces plongements a été exprimée dans [74] et [39] comme suit. Un plongement  $\phi$  d'un graphe  $G$  dans un graphe  $H$  est une 'série de plongements' s'il existe un entier  $\lambda$  tel que pour toute paire de sommets  $\{x, y\}$  de  $G$  :  $d_H(\phi(x), \phi(y)) = \lambda \cdot d_G(x, y)$ . Les graphes admettant un tel plongement sont dits des  $l_1$ -graphes. De ce fait, il sera pertinent

d'étudier les subdivisions des graphes en détectant ce type de plongement.

Dans la seconde partie de la thèse, nous avons caractérisé une famille de graphes formant une généralisation des graphes distance héréditaire. Cette classe mérite d'être étudiée beaucoup plus. Il est intéressant de trouver des algorithmes de reconnaissance de ces graphes, d'autres caractérisations si c'est possible. Néanmoins d'étudier beaucoup plus le cas où le paramètre  $k$  est égal à 1. Par ailleurs, on pourrait bien exploiter les différentes caractérisations pour rechercher des algorithmes efficaces pour des problèmes d'optimisation combinatoire classiques.

# Bibliographie

- [1] M. Aïder, *Almost distance hereditary graphs*, Discrete Maths **242** (2002)1–16.
- [2] M. Aïder, K. Meslem *On an extension of distance hereditary graphs*, Discrete Maths (2008) doi : 10.1016/j.disc.2007.12.102.
- [3] M. Aïder, S. Gravier, K. Meslem, *Isometric embeddings of subdivided connected graphs into hypercubes*, accepted for a special issue of Discrete Maths 2008.
- [4] F. Aurenhammer, J. Hagauer, *Recognizing binary Hamming graphs in  $o(n^2 \log n)$  time*, Mathematical Sys. Theory **28** (1995)387–395.
- [5] H.J. Bandelt, *Retracts of hypercubes*, J. Graph Theory **8 (4)** (1984), 501–510.
- [6] H.J. Bandelt, A. D’Atri, M. Moscarini, H.M. Mulder, A.Schultze, *Operations in distance-hereditary graphs*, Technical report 226 CNR (Rome, Italy), 1988.
- [7] H.J. Bandelt, H.M. Mulder, *Distance hereditary graphs*, J. Combin. Series **B 41** (1986) 182–208.
- [8] H.J. Bandelt, H.M. Mulder, *Metric Characterizations of parity graphs*, Discrete Maths, **91** (1999) 221–230.
- [9] L. Beaudou, *On a conjecture about partial cube recognition*, Rapport Institut Joseph Fourier, Juin 2008.
- [10] L. Beaudou, S. Gravier, K. Meslem, *Isometric embeddings of subdivided complete graph in the Hypercube*, SIAM Journal on Discrete Maths **22** (3)(2008) 1226–1238.
- [11] L. Beaudou, S. Gravier, K. Meslem, *Subdivided graphs as isometric subgraphs of Hamming graphs*, accepted for "European Journal of Combinatorics".

- [12] L. Beaudou, S. Gravier, K. Meslem, *Isometric embeddings of subdivided generalized envelope onto hypercubese*, Submitted.
- [13] C. Berge, *Graphes*, Dunod, Paris 1983.
- [14] M. Bessadik, *Sur quelques propriétés métriques des graphes*, Thèse de Magister USTHB, soutenue en Décembre 1997.
- [15] A. Bouchet, *Transforming trees by successive complementation*, J. Graph Theory.4 (1988) 196–207.
- [16] A. Brandstädt, *Special graph classes*. Technical Report SM-DU-199, University Duisburg, 1993.
- [17] B. Brešar, *Partial Hamming graphs and expansion procedures*, Discrete Mathematics **237** (2001) 13–27.
- [18] B. Brešar, *Characterizing almost-median graphs*, European J. of Combin. (**28**) (2007) 916–920.
- [19] B. Brešar, W. Imrich, S. Klavžar, *Fast recognition algorithms for classes of partial cubes*, Discrete Appl. Math. **131** (**1**) (2003) 51–61.
- [20] B. Brešar, S. Klavžar,  *$\theta$ -graceful labelling of partial cubes*, Discrete Mathematics, **306** (**13**) 1264–1271 (2006).
- [21] B. Brešar, S. Klavžar, A. Lipovec, *On partial cubes with convex intervals*, Comment. Math. Unive. Carolin. **43** (2002), 537–545.
- [22] B. Brešar, S. Klavžar, A. Lipovec, B. Mohar, *Cubic inflation, mirror graphs, regular maps, and partial cubes* European Journal of Combinatorics **25** (2004) 54–64.
- [23] F. Buckley, F. Harary, *Distance in graphs*, Addison-Wesley Edition (1990).
- [24] M. Burlet, J.P. Uhry, *Parity graphs*, Annals of Discrete Maths **50** (1984) 99–105.
- [25] V. Chepoi,  *$d$ -convexity and isometric subgraphs of Hamming graphs*, Cybernetics **1** (1988) 6–9.
- [26] V. Chepoi, *On distance in benzenoid systems*, J. Chim. Inf. Comput. Sci **36** (1996) 1169–1172.
- [27] V. Chepoi, Peronnal communication, 1999.
- [28] V. Chepoi, F. Dragan, Y. Vaxès, *Center and diameter problems in plane triangulations and quadrangulations*. Proc. 13th ACM-SIAM Symp. Discrete Algorithms (SODA 2002) 346–355.

- [29] V. Chepoi, S. Klavžar, *The Wiener index and Szeged index of benzenoid system in linear time*, J. Chim. Inf. Comput. Sci **37** (1997) 752-755.
- [30] V. Chung, R.L. Graham, M.E. Saks, *Dynamic search in graphs*, Discrete Algorithms and Complexity (1987) 351-387.
- [31] S. Cicerone, G. Di Stefano, *On an extension of bipartite to parity graphs*, Discrete Applied Maths **95** (1999) 181-195.
- [32] S. Cicerone, G. Di Stefano, *Graph classes between parity and distance hereditary graphs*, Discrete Applied Maths **95** (1999) 197-216.
- [33] S. Cicerone, G. Di Stefano, *Graphs with bounded induced distance*, Discrete Applied Maths **108** (2001) 3-21.
- [34] S. Cicerone, G. Di Stefano,  *$(k, +)$  distance hereditary graphs*, Journal of Discrete Maths **1** (2003) 281-302.
- [35] D.G. Corneil, H. Lerchs, L. Stewart-Burlingham, *Completely reducible graphs*, Discrete Applied Maths **3** (1981) 163-174.
- [36] W.H. Cunningham, *Decomposition of Directed Graphs*, Siam J. Algh .Discrete Maths 3 : 214-228, 1982
- [37] A. D'Atri, M. Moscarini, *Distance hereditary graphs, Steiner Tree and connected domination*, SIAM Journal of computing **17** (1988) 521-530.
- [38] A. D'Atri, M. Moscarini, H. M. Mulder *On the isomorphism problem for distance hereditary graphs*, Report 9241/A Econometric Institute. Erasmus University, Rotterdam.
- [39] M. Deza, V. Grishkhin, *Hypermetric graphs*, Quart. J. Maths. Oxford **22** (1993) 399-433.
- [40] D. Djoković, *Distance preserving subgraphs of the hypercubes*, Journal of Combinatorial Theory, Serie **B14** (1973) 263-267.
- [41] F. F. Dragan, *Dominating cliques in distance-hereditary graphs*, Lecture Notes in Computer Science **4** vol. 824, eds.EM.Smit, Skyum, Springer, Berlin (1994) 370-381.
- [42] D. Eppstein, *Recognizing partial cubes in quadratic time*, 19 th ACM-SLAM Sympo. Discrete Algorithms, San Francisco (2008) 1258-1266.
- [43] D. Eppstein, D. Falmagne, J.C. Ovchinnikov, *Media Theory Interdisciplinary Applied Mathematics*, 2008 Hardcover.
- [44] C. P. Gabor, W. L. Hsu, K.J. Supwit, *Recognizing circle graphs in polynomial time*, On Foundation of Computer Science (1985) 106-116.

- [45] R.L. Graham, H. Pollack, *On the addressing problem for loop switching*, Bell System Technol. J. **50** (1971) 2495–2519.
- [46] R.L. Graham, P.M. Winkler, *Isometric embeddings of graphs*, Proc. Natl. Acad. Sci. USA. **81** (1984) 7259–7260.
- [47] S. Gravier, S. Klavžar, M. Mollard, *Isometric embeddings of subdivided wheels in hypercubes*, Discrete Mathematics **269** (1–3) (2003) 287–293.
- [48] I. Gutman, S. J. Cyrvin, *Introduction to the theory of benzenoid hydrocarbons*, Springer Verlag, Berlin 1989.
- [49] J. Hagauer, W. Imrich, S. Klavžar, *Recognizing median graphs in subquadratic time*, Theoretical Computer Science **215** (1999) 123–136.
- [50] P. L. Hammer, F. Maffray, *Completely separable graphs*, Discrete Applied maths **27** (1990) 85–99.
- [51] E. Howorka, *A characterisation of distance hereditary graphs*, Quart. J. Math. Oxford **28** (1977) 417–420.
- [52] E. Howorka, *On metric properties of certain clique graphs*, Journal of Combinatorial Theory, Series **B27** (1981) 323–331.
- [53] W. J. Hsu, *Fibonacci cubes - a new interconnection technology*, IEEE Trans. Parallel Distr. Systems **4** (1) (1993) 3–12.
- [54] W. J. Hsu, *Fibonacci cubes : a class of self similar graphs*, Fibonacci Quart. **31**(1993) 65–72.
- [55] W. Imrich, S. Klavžar, *A convexity lemma and expansion procedures for bipartite graphs*, European J. Combin. **19**(6) (1998) 677–685.
- [56] W. Imrich, S. Klavžar, *A simple  $o(mn)$  algorithm for recognizing Hamming graphs*, Bull. Inst. Combin. Appl. **9** 45–56.
- [57] W. Imrich, S. Klavžar, *Product Graphs : structure and recognition*, Wiley, New York 2000.
- [58] W. Imrich, S. Klavžar, H.M. Mulder, *Median graphs and triangle-free graphs*, SIAM J. Discrete Maths **12** (1999) 111–118.
- [59] D. C. Kay, G. Chartrand, *A characterization of certain ptolemaic graphs*, J. Canadian Journal of Mathematics, **17** (1965) 342–346.
- [60] S. Klavžar, *On median nature and enumerative properties of Fibonacci-like cubes*, Discrete Math, **299**(1–3) (2005). 145–153.
- [61] S. Klavžar, I. Gutman, B. Mohar, *Labelling of benzenoid systems which reflects the vertex distance relation*, J. Chim. Inf. Comput. Sci **35** (1995) 590–593.

- [62] S. Klavžar, A. Lipovec, *Partial cubes as subdivision graphs and as generalized Petersen graphs*, Discrete Mathematics **263** (2003) 157–165.
- [63] S. Klavžar, I. Peterin, *Characterizing subgraphs of Hamming graphs*, Journal of Graph Theory **49** (4) 302–312.
- [64] M. Moscartini, A. Sassano, *The steiner set problem and greedy algorithms*, IASI, CNR Reaserach Report 227, Rome, Italy.
- [65] H. M. Mulder, *The structure of median graphs*, Discrete Math. **24** (1978) 197–204.
- [66] H. M. Mulder, *The interval Function of a graph* (Mathematical Centre Tracts 132, Mathematisch Centrum, Amesterdam, 1980).
- [67] E. Munanini, N. Zagaglia Salvi, *On the Lucas cubes, Fibonnaci cubes*, Discrete Maths **255** (2002) 317–324.
- [68] E. Munarini, N. Zagaglia Salvi, *Structural and enumerative properties of Fibonacci cubes*, Discrete Math. **255** (2002), 317–324.
- [69] F. Nicolai, *Hamiltonian problem on distance hereditary graphs*, Technical report SMDU264 University DUISBURG b1994.
- [70] F. Nicolai, T. Szymczak *Homogeneous sets and domination : a linear time algorithm for distance-hereditary graphs*, Networks **37** (3) (2001) 117–128.
- [71] S.V. Ovchinnikov, *Hyperplane arrangement in preference modeling*, J. Mathematical Psychology **49** (2005) 281–288.
- [72] I. Peterin, *Nekatere faktorizacije v metrični teoriji grafov*, Thèse PHD, Université de Maribor, Slovenie, Juin 2005.
- [73] D. Rautenbach, *Graphs with small additive stretch number*, Discussiones Mathematicae, Graph Theory **24** (2004), 291–301.
- [74] S. V. Shpectorov, *On scale embedding of graphs into hypercubes*, European Journal of Combinatorics **14** (1993) 399–433.
- [75] D. P. Sumner, *Dancey graphs*, J. Austral. Math. Soc. **18** (4) (1974) 492–502.
- [76] P.M. Winkler, *Isometric embeddings in Hamming graphs*, Discrete Applied Mathematics **7** (1984) 221–225.
- [77] H. G. Yeh, G.J. Chang, *Weighed connected domination and steiner tree in distance hereditary graphs*, Discrete Applied Mathematics **87** (1998) 245–453.

- [78] A.A. Zykov, *On some properties on linear complexes*, Maths Sbornik **24** (1949) 163–188.