

N° d'ordre : 05/2016-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté des Mathématiques

université
de BORDEAUX



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR EN SCIENCES**

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Systèmes Dynamiques

Par : OUKIL Walid

Sujet

Systèmes couplés et morphogénèse auto-organisation de systèmes biologiques

Soutenue publiquement, le 18 / 12 / 2016, devant le jury composé de :

M. A. KESSAB	Prof	à l'USTHB	Président
M. A. KESSI	Prof	à l'USTHB	Directeur de thèse
M. P. THIEULLEN	Prof	à l'U. Bordeaux	Co- Directeur de thèse
M. M. MORSLI	Prof	à l'U. M. M. Tizi-Ouzou	Examineur
M. T. MOUSSAOUI	Prof	à l'E. N. S. Kouba	Examineur
M. T. SARI	Prof	à l'U. H. A. Mulhouse	Examineur

Titre : Systèmes couplés et morphogénèse auto-organisation de systèmes biologiques

Résumé : On s'intéresse dans cette thèse à des systèmes couplés de type champ moyen en étudiant l'existence de l'état de synchronisation qui se caractérise par une distance uniformément bornée dans le temps entre chaque paire de composantes d'une solution. L'étude se base sur une méthode perturbative. Néanmoins les résultats obtenus ne sont pas évidents dans le cas non-perturbé. En outre dans le cas où le système couplé est périodique et grâce au Théorème du point fixe on montre l'existence d'une solution périodique sur le tore. L'étude de stabilité et de stabilité exponentielle est établie dans le cas linéaire et appliquée à ce type de systèmes couplés

Mots clés : Systèmes couplés, Champ moyen, Synchronisation, Accrochage, Auto-organisation, Systèmes périodiques, Solution périodique, Nombre de rotation, Modèle de Winfree, Modèle de Kuramoto, Stabilité.

Title : Coupled systems morphogenesis and self-organization in biological systems

Abstract : We study in this thesis a class of a perturbed interconnected mean-field system, also known as a coupled systems. Under some assumptions we prove the existence of an invariant open set by the flow of the perturbed system; in other word, we prove that the distance between the components of an orbit is uniformly bounded, this property is also called synchronization. We use the perturbation method to obtain the result. However the result is not trivial for the not perturbed system. We use the fixed point theorem to prove the existence of a periodic orbit in the torus. We study in addition the stability and the exponential stability of such systems by studying the stability of a linear systems.

Keywords : Coupled oscillators, Mean-field, Synchronization, Locked-state, Self-organization, Periodic system, Periodic solution, Rotation number, Winfree Model, Kuramoto Model, Stability.

UMR 5251 – Institut de Mathématiques de Bordeaux (IMB). Université de Bordeaux. 351, cours de la Libération – F 33 405 TALENCE.

&

Laboratoire des Systèmes Dynamiques (LSD), Faculté des Mathématiques. Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene. Alger.

Remerciements

Tous mes sentiments de respect et de reconnaissance à mes directeurs de thèse le Professeur Kessi Arezki et le Professeur Thieullen Philippe qui étaient toujours disponibles pendant mon cursus, je les remercie pour leur confiance; grâce à leurs encadrement et encouragement que ce travail a pu se réaliser. J'ai appris avec le Professeur Kessi Arezki depuis mon Magistère le sens du défi scientifique et du travail rigoureux. Avec le Professeur Thieullen Philippe j'ai appris le sens de la rigueur et de la responsabilité scientifique. Je remercie le Professeur Sari Tewfik et le Dr Fernandez Bastient d'avoir pris leur temps de lire ma thèse et d'être rapporteurs. Mes remerciements au Professeur Kessab Amor, au Professeur Morsli Mouhamed et au Professeur Moussaoui Toufik d'avoir accepté d'être membres du jury et aussi d'avoir pris le temps de lire ma thèse.

Tous mes sentiments de respect à tous mes professeurs et enseignants depuis que j'ai pris le stylo dans la main, je cite le Professeur Kessab Amor qui, dans mon cursus de graduation, a pu planter dans mon esprit l'arbre de la confiance; je cite aussi Monsieur Ben Ferrah Abderrahmane qui avec lui j'ai découvert la beauté de la théorie de la mesure.

Je remercie ma famille et mes amis ainsi que tous ceux qui m'ont aidé et soutenu pour pouvoir achever ce travail. Un grand merci à Monsieur Berrouane Salah qui m'a tout le temps soutenu et encouragé avec ses conseils lumineux et au Dr Boutiche Amine pour son assistance.

Je remercie également le Professeur Steven Strogatz pour la correspondance par email et l'aide que j'ai reçue de sa part .

En final je tiens à exprimer mes sentiments de respect et de gratitude à mes parents qui ont été toujours à mes côtés et m'ont toujours encouragé, je remercie mon épouse Yasmina pour sa patience et sa sagesse pendant la préparation de cette thèse.

Cette thèse est en cotutelle entre l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene et l'Université de Bordeaux. Cette thèse a été financée par le Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique Algérien par l'intermédiaire de l'Université Dr. Yahia Farès de Médéa dont je remercie les agents d'administration pour leur souplesse et leur aide dans mes démarches administratives, ce travail est aussi financé par l'Agence Nationale de la Recherche, France. Je tiens aussi à remercier les agents d'administration de l'Institut de Mathématiques de Bordeaux qui m'ont toujours facilité mes procédures administratives et aussi pour leur accueil chaleureux.



À mes chers parents qui m'ont fait vivre, avec leurs simples moyens, la vie d'un prince.

À ma fleur Yasmina.

*L'imagination est plus importante que le savoir
Albert Einstein*

Liste des notations

\mathbb{R}	Ensemble des nombres réels
\mathbb{R}^N	Produit cartésien N fois ($\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$) de l'ensemble \mathbb{R}
$\langle Y, Z \rangle$	Produit scalaire de $Y, Z \in \mathbb{R}^N$
Y^T	Transposé du vecteur $Y \in \mathbb{R}^N$
N	Nombre d'oscillateur (un entier naturel)
$\mathbb{1}$	Vecteur colonne unitaire $(1, \dots, 1)^T$ de taille appropriée
W	Le vecteur $(\mathbb{1}^T, 0)^T$ avec $\mathbb{1} \in \mathbb{R}^N$
$\rho_i(t)$	Phase moyenne : $x_i(t)/t$ avec $x_i(t)$ composante d'une solution $X(t)$
ρ_i	Nombre de rotation s'il existe, soit : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \rho_i(t)$
I_X	Intervalle maximale d'une solution de condition initiale X
κ	Force de couplage
γ	Propagation des fréquences naturelles ou force du bruit
ω	Fréquences naturelles
$d^i G$	$i^{\text{ième}}$ différentielle d'une fonction G
∂_i	Dérivée partielle par rapport à y_i de $G(Y)$, $Y = (y_1, \dots, y_p)$
∂_{N+1}	Dérivée partielle par rapport à z de $G(Y, z)$, $Y \in \mathbb{R}^N$, $z \in \mathbb{R}$
I_N	Matrice identité carrée d'ordre N
$R(t; s), S(t; s)$	Résolvantes d'un système linéaire
\mathcal{L}_t, ψ_t	Forme linéaire
$\bar{\Sigma}$	Adhérence d'un ensemble Σ
$\partial\Sigma$	Frontière d'un ensemble Σ
$\exp(t)$	La fonction exponentielle de t
$R_X(t)$	Paramètre d'ordre d'une solution $X(t) : \sum_{j=1}^N \exp(ix_j(t))/N$, $i = \sqrt{-1}$
$\mu_X(t), \mu_X$	Solution du système (SNP). Voir liste d'abréviations
$\delta_{i,j}(X)$	Dispersion d'oscillateurs x_i et x_j d'une solution $X(t) : x_i(t) - x_j(t)$
$\delta_X(t)$	Dispersion globale de $X(t) : \max_{i,j} \delta_{i,j}(X) $ ou $\max_i x_i - \mu_X (t)$
\approx	En approximation
$\phi^t(X), \Phi^t(X)$	Flot d'une orbite de condition initiale X
$\ \cdot\ $	Norme sup usuelle
$\ \cdot\ _B$	$\sup_{Y \in B} \max_{1 \leq i \leq p} G_i(Y) $, où $G = (G_1, \dots, G_p) : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ une fonction et $B = \{Y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q : \max_{i,j} y_i - y_j \leq 1\}$
$\ dG\ _B, \ d^2G\ _B$	$\max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \ \partial_j G_i(Y)\ _B, \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j, k \leq q}} \ \partial_k \partial_j G_i(Y)\ _B$ respectivement.

Principaux abréviations

- Systèmes (PNP) et (P) [Voir page 45] :

Le système périodique non-perturbé

$$\dot{x}_i = F(X, x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{PNP})$$

et le système perturbé

$$\dot{x}_i = F(X, x_i) + H_i(X), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{P})$$

où $N \geq 2$, $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $H = (H_1, \dots, H_N) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont des fonctions de classe C^1 .

- Fonction $\mathbb{1}$ -périodique [Voir page 45] :

Pour $q, p \in \mathbb{N}^*$ soit une fonction $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$. G est dite $\mathbb{1}$ -périodique si

$$G(Y + \mathbb{1}) = G(Y), \quad \forall Y \in \mathbb{R}^q$$

- Hypothèse (H) et hypothèse de synchronisation (H_*) [Voir page 46] :

Les deux hypothèses suivantes imposées sur la fonction F des systèmes (PNP) et (P)

$$(H) \quad \begin{cases} F \text{ est de classe } C^2, & \text{et } \max\{\|F\|_B, \|dF\|_B, \|d^2F\|_B\} < +\infty, \\ F \text{ est } \mathbb{1}\text{-périodique et } \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) > 0, \end{cases}$$

$$(H_*) \quad \int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} ds < 0.$$

- Le système (SNP) associé à une solution $X(t)$ du système (P) de condition initiale $X \in \mathbb{R}^N$ est le système non perturbé suivant [Voir page 55]

$$\dot{\mu}_X(t) = F(X(t), \mu_X(t)), \quad t \in I_X, \quad (\text{SNP})$$

où I_X est l'intervalle maximale de la solution $X(t)$ du système (P) . On dit que $\mu_X(t)$ est la solution du système (SNP) associée à $X(t)$ de condition initiale $\mu_X(t_0) \in \mathbb{R}$.

- Hypothèse de stabilité (H_{stab}) [Voir page 42] :

Soient $\mathcal{A}(t) = \{a_{i,j}(t)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice carrée d'ordre N de rang 1 continue et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. (H_{stab}) est l'hypothèse de stabilité suivante

$$(H_{stab}) \quad \begin{cases} a_{i,j}(t) = a_j(t) \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq N \text{ avec :} \\ b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, N \text{ continues et } \mathbb{1}\text{-périodiques,} \\ \int_0^1 b(s) + \sum_{j=1}^N a_j(s) ds = 0, \quad \text{et } \int_0^1 b(s) ds < 0. \end{cases}$$

Table des matières

Résumé	2
Liste des notations	9
Principaux abréviations	10
1 Introduction	15
2 Modèle de couplage de phase de type champ moyen : Etat de l'art	20
2.1 Définitions de la synchronisation	23
2.2 Paramètre d'ordre et nombre de rotation	24
2.3 Modèle de Winfree	27
2.3.1 État de mort et stabilité exponentielle	29
2.3.2 Transition : État d'incohérence-État de mort partielle	31
2.3.3 Synchronisation et synchronisation partielle	33
2.3.4 Diagramme de Phase	33
2.4 Modèle de Kuramoto	34
2.4.1 Modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs	35
2.4.2 Synchronisation et désynchronisation	36
2.4.3 Diagramme de Phase	37
2.5 Faible couplage dans un réseau de neurones	37
3 Hypothèses et résultats principaux obtenus	41
3.1 Résultats obtenus : Partie linéaire	42
3.1.1 Hypothèse de stabilité (H_{stab})	42
3.1.2 Résultat linéaire \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L	43

3.2	Résultats obtenus : Partie non-linéaire	44
3.2.1	Notations et définitions	45
3.2.2	Hypothèses de synchronisation (H) et (H_*)	46
3.2.3	Resultat I, II, III et IV	47
4	Preuve du résultat I et II : Synchronisation des systèmes champ moyen	50
4.1	Préliminaire	50
4.1.1	Remarques et motivation	52
4.2	Fonction de dispersion	53
4.3	Réduction du système (P)	55
4.4	Existence de solution et de l'état de synchronisation	60
4.5	Orbite périodique et nombre de rotation	61
4.6	Conclusion	64
5	Résultat numérique : Application au modèle de Winfree	65
5.1	Introduction et rappel	65
5.1.1	Preuve du théorème 21	67
5.2	Forme explicite du Modèle de Winfree	74
5.3	Condition nécessaire d'existence de la synchronisation	75
5.4	Cas de système non-perturbé	80
5.5	Conclusion	82
6	Preuve du résultat linéaire I^L et II^L : Stabilité des systèmes linéaires perturbés	83
6.1	Hypothèses et notations	84
6.1.1	Rappel des résultats linéaires I^L et II^L	85
6.1.2	Motivation	86
6.2	Outils de démonstration	87
6.3	Ingrédients de la forme linéaire $\mathcal{L}_{t'}$	92
6.4	Décomposition de la résolvante	95
6.5	Conclusion	98
7	Preuve du résultat III et IV : Stabilité des systèmes champ moyen	99
7.1	Linéarisation du système (P)	101

7.2 Preuve du résultat principal (III) et (IV) : Stabilité	104
7.3 Conclusion	107
<u>Conclusion et perspectives</u>	110
I . Conclusion	110
II . Travaux à venir	111
II . I . Équivalence entre stabilité et synchronisation	111
II . II . Vecteur de rotation	112
II . III . Hypothèse nécessaire et suffisante d'existence de synchronisation	112
II . IV . Cas continu : Nombre infini d'oscillateurs	112
II . V . Du champ moyen au proche voisin	113
<u>Bibliographie</u>	115
<u>Annexes</u>	121
A . Stabilité avec la méthode de la résolvante positive	121
B . Fonction presque périodique et vecteur de rotation	127
B . I . Fonction asymptotiquement presque périodique	127
B . II . Vecteur de rotation	130

Chapitre 1

Introduction

L'un des phénomènes remarquables de la "synchronisation" est l'exemple de deux pendules simples de masses identiques et couplés par un ressort horizontal. Une fois les deux pendules sont mis en mouvement et après un certain temps on remarque que les deux pendules oscillent de la même manière, c'est-à-dire à une même fréquence d'oscillation, où la fréquence est aussi connue sous le nom de "nombre de rotation". Lorsque la fréquence des objets ou "oscillateurs" qui oscillent est commune on dit qu'ils sont en état de *synchronisation* et comme on va voir dans la suite la synchronisation peut avoir plusieurs aspects. Le phénomène de synchronisation peut être observé dans une population d'au moins deux individus. On peut observer ce type de comportements dans les cellules du cœur qui battent en même temps. Ces phénomènes de synchronisation sont aussi remarquables dans plusieurs autres exemples biologiques, physiques,... etc, plus au moins complexes. Ces phénomènes peuvent être modélisés par un système d'équations différentielles qu'on appelle modèle *couplé* où l'ensemble des composantes d'une solution va jouer le rôle de la population étudiée et chaque composante sera appelée *oscillateur*. Dans un modèle couplé chaque oscillateur est influencé par d'autres oscillateurs de la population. On distingue le cas des modèles couplés du type "champ moyen" où chaque oscillateur est influencé d'une manière identique par tous les oscillateurs de la population. Comme on va voir dans la suite la synchronisation des oscillateurs

s'obtient sous certaines conditions en variant les paramètres de ce modèle couplé.

Plus précisément, les systèmes biologiques présentant des phénomènes de synchronisation peuvent être étudiés à l'aide des modèles non-linéaires possédant un cycle limite stable. La question est : dans quel cas un système champ moyen admet un cycle limite? La réponse à cette question nous a amené à répondre à d'autres questions intermédiaires : (A)- Sous quelles hypothèses un système couplé de type champ moyen admet une solution telle que la distance entre chaque paire de ses oscillateurs reste bornée en tout temps?(B)- Est-ce-que les hypothèses de la question (A) seront suffisantes pour étudier la stabilité et la stabilité exponentielle? (C)- Dans le cas où le système champ moyen est périodique est-ce-que les hypothèses de la question (A) seront aussi suffisantes pour montrer l'existence d'une solution périodique sur le tore? Dans cette thèse on va répondre à toutes ces questions dans un cas général de systèmes champ moyen. Entre temps on choisit d'étudier un modèle couplé explicite qui s'appelle Modèle de Winfree et qui permet l'étude des phénomènes de synchronisation dans les populations biologiques, en sus le côté motivant d'appliquer nos résultats théoriques sur ce modèle, le modèle de Winfree sera un modèle test; il nous aidera à avoir des résultats numériques qui permettent de vérifier nos hypothèses et de prévoir d'autres résultats. Notons que la périodicité considérée dans cette thèse est la périodicité suivant la diagonale et non une périodicité par rapport à chaque variable.

On va donc suivre le plan suivant :

Le Chapitre 2 présente l'état de l'art, dans ce Chapitre on discute la caractérisation d'un modèle de couplage de phase avec interaction champ moyen; on verra le lien avec les applications en biologie. Par la suite on proposera des définitions mathématiques pour différents aspects de la synchronisation : état de *synchronisation* et état d'*accrochage périodique*. A savoir, l'accrochage périodique sera une solution synchronisée et périodique sur le tore. On va citer les modèles de Winfree et de Kuramoto qui figurent parmi les modèles de bases de couplage pour l'étude de systèmes couplés

biologiques. Dans le cas du faible couplage on va voir comment des systèmes couplés permettent l'étude de la synchronisation d'un réseau de neurones. Dans la Section 3.2 on définit la forme générale de modèles champ moyen qu'on va étudier. La forme est gouvernée par un champ "périodique" et une perturbation dépendant de la phase et du temps, selon le choix de la perturbation il peut être périodique ou non.

Dans le Chapitre 3 on présente les hypothèses et les résultats obtenus. Les résultats obtenus se divisent en deux parties ; la partie *non-linéaire* et la partie *linéaire*. La partie non- linéaire se compose elle même de quatre résultats principaux, le premier consiste la synchronisation, le deuxième consiste à montrer l'existence d'orbite périodique sur le tore, le troisième et le quatrième consistent à montrer la stabilité et la stabilité exponentielle. La partie linéaire se compose de deux résultats principaux qui consistent à montrer la stabilité exponentielle d'une classe de systèmes linéaires, ces deux derniers nous permettent à montrer les deux derniers résultats principaux de la partie non-linéaire. Tous ces résultats seront démontrés dans le reste des chapitres suivants. Notons que nos résultats n'imposent pas que le couplage soit faible.

Dans le Chapitre 4 on montre les deux premiers résultats de la partie non-linéaire énoncés dans le Chapitre 3. Plus précisément on va voir une hypothèse qu'on appelle *hypothèse de synchronisation* qui est suffisante pour que les systèmes couplés en question admettent un ouvert de conditions initiales qu'on appelle *ouvert de synchronisation* où le flot existe pour tout temps supérieur à l'instant initial. Pour cela on introduit une fonction scalaire et périodique qu'on appelle la *fonction de dispersion*. À l'aide de cette fonction on utilise le principe de comparaison des équations différentielles et on montre que l'ouvert de synchronisation est positivement invariant par le flot ; cela implique que toute solution de condition initiale dans l'ouvert de synchronisation est synchronisée au sens de la définition donnée dans le Chapitre 2. Dans le cas où le système champ moyen est périodique on montre l'existence d'orbite périodique sur le tore, c'est à dire en accrochage périodique.

Le Chapitre 5 est une partie numérique . On suggère que l'hypothèse de synchronisation n'est pas seulement suffisante mais aussi nécessaire pour obtenir la synchronisation à petites perturbations. Un cas important dans cette partie numérique est de voir un exemple de système sans aucune perturbation où l'hypothèse de synchronisation reste nécessaire et suffisante.

Dans le Chapitre 6 on montre les deux résultats de la partie linéaire énoncés dans le Chapitre 3. On va étudier la stabilité d'une classe de systèmes linéaires perturbés. On va introduire une hypothèse qu'on appelle *hypothèse de stabilité* ; Cette hypothèse nous permet de montrer que l'espace des conditions initiales admet une décomposition en somme directe d'une sous-variété centrale et une sous-variété exponentiellement stable. Ce Chapitre a pour but d'étudier la stabilité par rapport aux conditions initiales des systèmes champ moyen dans l'ouvert de synchronisation définis dans le Chapitre 4.

Dans le Chapitre 7 on montre les deux derniers résultats de la partie non-linéaire énoncés dans le Chapitre 3. On rappelle donc les systèmes champ moyen en question afin d'étudier la stabilité. À l'aide d'une linéarisation convenable et à l'aide des résultats obtenus dans le Chapitre 6 on montre que l'hypothèse de synchronisation introduite dans le Chapitre 4 implique l'hypothèse de stabilité introduite dans le Chapitre 6. Par conséquent on déduit que les systèmes champ moyen périodiques vérifiant l'hypothèse de synchronisation admettent une solution périodique sur le tore exponentiellement stable, autrement dit l'existence d'un cycle limite stable.

Enfin dans la Conclusion on présente nos travaux à venir. En Annexe on présente une technique qu'on appellera "la méthode de la résolvante positive", cette technique permet l'étude de la stabilité par rapport aux conditions initiales, cette stabilité prend le sens de la stabilité de Lyapunov. Cette technique est faible par rapport à celle utilisée dans le Chapitre 7, en effet elle ne permet pas de déduire une stabilité exponentielle. On termine par la notion de fonction presque périodique et on montre dans un système

périodique, sous une condition de stabilité par rapport aux conditions initiales, que les solutions admettent un vecteur de rotation.

Chapitre 2

Modèle de couplage de phase de type champ moyen : Etat de l'art

Sommaire

2.1 Définitions de la synchronisation	23
2.2 Paramètre d'ordre et nombre de rotation	24
2.3 Modèle de Winfree	27
2.3.1 État de mort et stabilité exponentielle	29
2.3.2 Transition : État d'incohérence-État de mort partielle	31
2.3.3 Synchronisation et synchronisation partielle	33
2.3.4 Diagramme de Phase	33
2.4 Modèle de Kuramoto	34
2.4.1 Modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs	35
2.4.2 Synchronisation et désynchronisation	36
2.4.3 Diagramme de Phase	37
2.5 Faible couplage dans un réseau de neurones	37

Les travaux de cette thèse ont été initialement basés sur le modèle de Winfree continu avec un nombre fini et arbitraire d'oscillateurs qui est l'un des modèles de

base du couplage de systèmes biologiques présentant une morphogénèse. La morphogénèse est le comportement collectif des cellules d'un corps naturel (plante, corps animal, ...etc), les cellules présentent après un temps suffisant une structure organisée ; on appelle ce comportement "auto-organisation" et qui sera considéré dans cette thèse comme étant un état de synchronisation. Le modèle de Winfree est l'un des modèles où chaque oscillateur d'une solution est influencé par le comportement de tous les oscillateurs de cette solution. Autrement dit, cette influence est une interaction *champ moyen* (Mean-Field). Comprendre le comportement à long terme de ce champ moyen permet d'avoir toutes les informations sur le comportement collectif de tous les oscillateurs, toute la complexité de l'étude du système, réside donc, dans l'étude du champ moyen présent dans l'évolution de chaque oscillateur. Après avoir obtenu des résultats de synchronisation et de stabilité sur le modèle de Winfree, on a généralisé la méthode à une large classe de systèmes couplés et perturbés avec une interaction champ moyen. La complexité de tels systèmes est dans le fait que dans une solution chaque oscillateur est en fonction de tous les autres oscillateurs qui sont donc aussi inconnus. On distingue deux types de modèles couplés ; le premier type est le type des modèles *d'impulsion couplée* (Pulse-coupled model) qui sont des modèles discrets. Ces modèles jouent un rôle capital dans l'étude de systèmes biologiques. Les exemples remarquables sont l'étude des interactions des neurones dans le cerveau qu'on va développer dans la Section suivante, des flash lumineux des lucioles en Asie méridionale, cellules pacemaker cardiaque,...etc, voir à ce sujet [MS90, GE02] ainsi leurs références ; Ces modèles se caractérisent en général dans leurs formes par des fonctions discontinues, la fonction delta de Dirac est la fonction la plus adaptée pour ce type

$$\delta(\theta), \quad \theta \in [-1, 1].$$

Cette fonction représente l'impulsion d'un oscillateur biologique qui est l'effet recevable par un autre oscillateur ; si chaque oscillateur dans une population reçoit d'une manière identique des impulsions de tous les oscillateurs de cette population alors le couplage est dit *champ moyen*. Le deuxième type de modèle de couplage est le type de modèle

de *couplage de phase*, qui est l'objet de cette thèse ; Ces derniers sont décrits par des fonctions continues ou dérivables, par conséquent ils ne modélisent pas d'une manière assez pertinente le comportement des systèmes biologiques qui ont, en général, comme a été dit avant, un comportement d'impulsion couplée. Néanmoins on peut approximer des modèles d'impulsion couplée par des modèles de couplage de phase, on trouve cette technique dans [Ari02, EK91] ; ils utilisent l'approximation suivante

$$\frac{1}{2^n}(1 + \cos(\theta))^n \rightarrow \delta(\theta) \quad \text{sur} \quad [-\pi, \pi].$$

On tient à préciser, que dans cette thèse, on ne s'intéresse qu'à l'étude des modèles de couplage de phase, plus précisément on s'intéresse à des modèles de couplage de phase avec interaction du champ moyen.

On suggère que tout comportement de couplage est régi par deux facteurs principaux : la *caractéristique en nature* et la *liaison* ; En effet chaque oscillateur a son équation d'évolution qui est l'équation qui permet d'avoir des informations sur sa dynamique. L'ensemble de toutes les équations d'évolutions de la population définit donc le modèle globale de la dynamique couplée. La caractéristique en nature est l'aspect homogène ou hétérogène des oscillateurs couplés, cela définit la première partie de l'équation d'évolution d'un oscillateur x qu'on note H_x . Si la caractéristique en nature est homogène alors H_x est identique pour tous les oscillateurs c'est à dire ne dépendent pas de l'oscillateur x . Et si la caractéristique en nature est hétérogène alors H_x dépend de l'oscillateur x . Le facteur de liaison est la manière de couplage qui peut également comporter l'aspect partiel, c'est-à-dire que la formule du couplage dans l'équation d'évolution est différente d'un oscillateur à un autre comme on le trouve par exemple dans les modèles du *proche voisin*. Lorsque la liaison est commune le couplage est donc champ moyen. Le modèle de couplage de phase avec interaction du champ moyen est l'objet principal de cette thèse, on va considérer des systèmes définis par une équation différentielle de la forme

$$\dot{x}_i = F(X, x_i) + \epsilon H_i(X, t), \quad i = 1, \dots, N, \quad (2.1)$$

où N est un entier positif supérieur à 1 et $X = (x_1, \dots, x_N)$. $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et

$H_i : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions continues. Le paramètre ϵ est un paramètre positif qui représente une perturbation. Relativement à l'approche discutée avant, La fonction ϵH_i est la caractéristique en nature et la fonction F est la liaison du couplage. L'état globale $X(t)$ du système est présent dans chaque évolution d'un oscillateur et le fait que F est identique pour tous les oscillateurs le système est donc du type champ moyen. Le but est de tirer les points responsables que ce type de modèles devra satisfaire pour pouvoir être appliqué à des populations possédant un comportement de synchronisation. Rappelons, à cet effet, qu'un modèle de synchronisation dans les populations biologiques suppose l'existence d'un cycle limite.

2.1 Définitions de la synchronisation

Dans [Win67] la synchronisation d'une population biologique est étudié à l'aide d'un modèle de champ moyen possédant un cycle limite. On trouve dans [MS90, Erm92, Fra05] une définition mathématique de l'état de synchronisation plutôt appelée "phase-locked state"; un système est en état d'accrochage de phase s'il existe une solution $X(t)$ et une fréquence commune $\Omega \in \mathbb{R}_+^*$ appelée aussi *nombre de rotation* telle que

$$X(t) = \Omega t + P(t), \quad t \geq t_0,$$

où P est une fonction périodique et telle que $X(t)$ est exponentiellement stable dans le sens qu'il existe un sous-ensemble de conditions initiales non réduit à $X(t_0)$ appelé *isochrone* tel que la distance entre $X(t)$ et toute solution du système de condition initiale dans cet isochrone décroît vers zéro d'une manière exponentielle. Le nombre de rotation positif $\Omega > 0$ signifie qu'il y a une dynamique. Pour garder cet caractérisation on considère la définition suivante

Définition 1 (Oscillateur dynamique). Un oscillateur $x_i(t)$ d'une solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ du système (2.1) est dit *dynamique* s'il existe $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que

$$\inf_{t \geq t_0} \dot{x}_i(t) > 0.$$

Pour être proche de la définition de synchronisation précédente et afin d'avoir un enchaînement convenable on introduit les définitions suivantes

Définition 2 (Synchronisation). On dit que deux oscillateurs $x_i(t)$ et $x_j(t)$ d'une solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ du système (2.1) sont *synchronisés* ou en *état de synchronisation* si $x_i(t)$ ou $x_j(t)$ est dynamique et si

$$\sup_{t \geq t_0} |x_i(t) - x_j(t)| < +\infty;$$

Dans le but de simplifier on dit que le système (2.1) ou sa solution est *synchronisé(e)* ou en *état de synchronisation* si tous les oscillateurs $(x_i(t))_i$ sont synchronisés deux à deux. On appelle respectivement la *dispersion de phase des oscillateurs* $x_i(t)$ et $x_j(t)$ et la *dispersion de phase globale* de la solution $X(t)$ les deux fonctions suivantes

$$|x_i(t) - x_j(t)| \quad \text{et} \quad \max_{1 \leq i, j \leq N} |x_i(t) - x_j(t)|.$$

où elles sont définies.

Définition 3 (Accrochage périodique). On dit que les oscillateurs $(x_i(t))_i$ d'une solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ du système (2.1) sont en *accrochage périodique* ou en *état d'acrochage périodique* s'il existe $\Omega > 0$ et une fonction $P(t) = (P_1(t), \dots, P_N(t))$ avec P_i périodiques telles que

$$X(t) = \Omega t + P(t), \quad \forall t \geq t_0.$$

On utilisera dans tout ce qui suit le mot "dispersion" pour désigner la distance entre les composantes d'une solution, soit

$$|x_i(t) - x_j(t)|, \quad \max_{i,j} |x_i(t) - x_j(t)| \quad \text{ou encore} \quad |x_i(t) - \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t)|.$$

2.2 Paramètre d'ordre et nombre de rotation

Pour un grand nombre d'oscillateurs $N \gg 1$, une solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ du système (2.1) en état de synchronisation peut être présentée sur le cercle comme étant un bloc qui tourne au tour du cercle. Le rayon du cercle est approprié à la distance maximal de la dispersion entre les oscillateurs. Plus précisément on considère le

paramètre d'ordre suivant [Kur84], qui est la moyenne des phases des oscillateurs sur le cercle vu comme étant un objet unique en les unifiant,

$$R_X(t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{ix_j(t)}.$$

Le module $|R_X(t)|$ est la longueur du vecteur de la moyenne des positions des oscillateurs sur le cercle. Lorsque la majorité des oscillateurs sont désynchronisés le module va se positionner à une distance de l'origine presque égale à zéro et lorsque la majorité sont synchronisés il va se positionner à une distance de l'origine presque égale au rayon du cercle comme on le voit illustré dans la Figure 2.1. Dans la suite et dans le cas où le système champ moyen est périodique on va se concentrer sur la demi-droite $t \geq t_0$ où $t_0 \in \mathbb{R}$ est le temps initiale, plus précisément sur le comportement de la *phase moyenne* à l'infini de chaque oscillateur qui est définie par

$$\rho_i(t) = \frac{x_i(t)}{t}. \quad (2.2)$$

Sous certaines conditions de stabilité la limite $\rho_i := \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(t)$ existe pour tout $i = 1, \dots, N$ (voir Annex B., le Chapitre II. et [LS04, Sai71]). A notre avis l'existence du nombre de rotation n'a pas été démontrée dans le cas général. Intuitivement, dans des systèmes périodiques la définition 2 et la définition 3 sont équivalentes, car on suggère que le nombre de rotation existe dans ce type de systèmes.

Lorsque les oscillateurs $(x_i(t))_{i=1}^N$ sont en accrochage périodique au sens de la définition 3 le nombre de rotation qui est la limite de la phase moyenne est indépendant des oscillateurs; les oscillateurs forment un bloc qui tourne autour du cercle avec une moyenne égale à ce nombre de rotation.

Tout dépend du couplage, un oscillateur est en état *mort* si la limite de sa phase moyenne est égale à zéro. Plus précisément et dans le cas où le nombre de rotation existe pour chaque oscillateur on définit les ensembles suivants :

$$I_{death} = \{i \in \{1, \dots, N\}, \rho_i = 0\},$$

$$I_{synch} = \{i, j \in \{1, \dots, N\}, \rho_i = \rho_j \neq 0\},$$

$$I_{incoh} = \{i, j \in \{1, \dots, N\}, \rho_i \neq \rho_j\}.$$

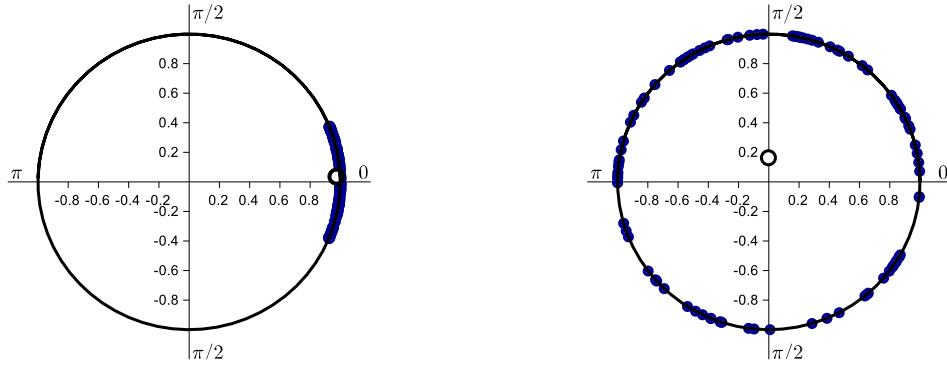


FIGURE 2.1 – Cette Figure illustre la position du paramètre d'ordre R_X qui est représenté par le petit cercle noir pour une population d'oscillateurs $(x_i)_i$ arbitrairement distribués sur le cercle qui sont présentés par des petits disques bleu. A gauche est un exemple d'un système où les oscillateurs sont synchronisés et le paramètre d'ordre se trouve à une distance de l'origine égale au rayon du cercle. A droite est un exemple d'un système où les oscillateurs sont desynchronisés et le paramètre d'ordre se trouve approximativement à l'origine.

Dans ce qui suit on va définir les différents états qu'un système couplé peut présenter (voir Figure 2.2)

Définition 4. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et supposons que le système 2.1 admet une solution $X(t)$ définie sur $[t_0, +\infty[$. Supposons de plus que pour tout $i = 1, \dots, N$ le nombre de rotation $\rho_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \rho_i(t)$ défini par l'équation 2.2 existe, alors le système 2.1 est dit en :

État de mort	$\iff I_{death} = \{1, \dots, N\}$.
État de mort partielle	$\iff I_{death} \neq \emptyset$ et $I_{death} \cup I_{incoh} \neq \emptyset$.
État d'incohérence	$\iff I_{incoh} = \{1, \dots, N\}$ et $I_{death} = \emptyset$.
État de synchronisation	$\iff I_{synch} = \{1, \dots, N\}$.
État de synchronisation partielle	$\iff I_{synch} \neq \emptyset$ et $I_{death} \cup I_{incoh} \neq \emptyset$.

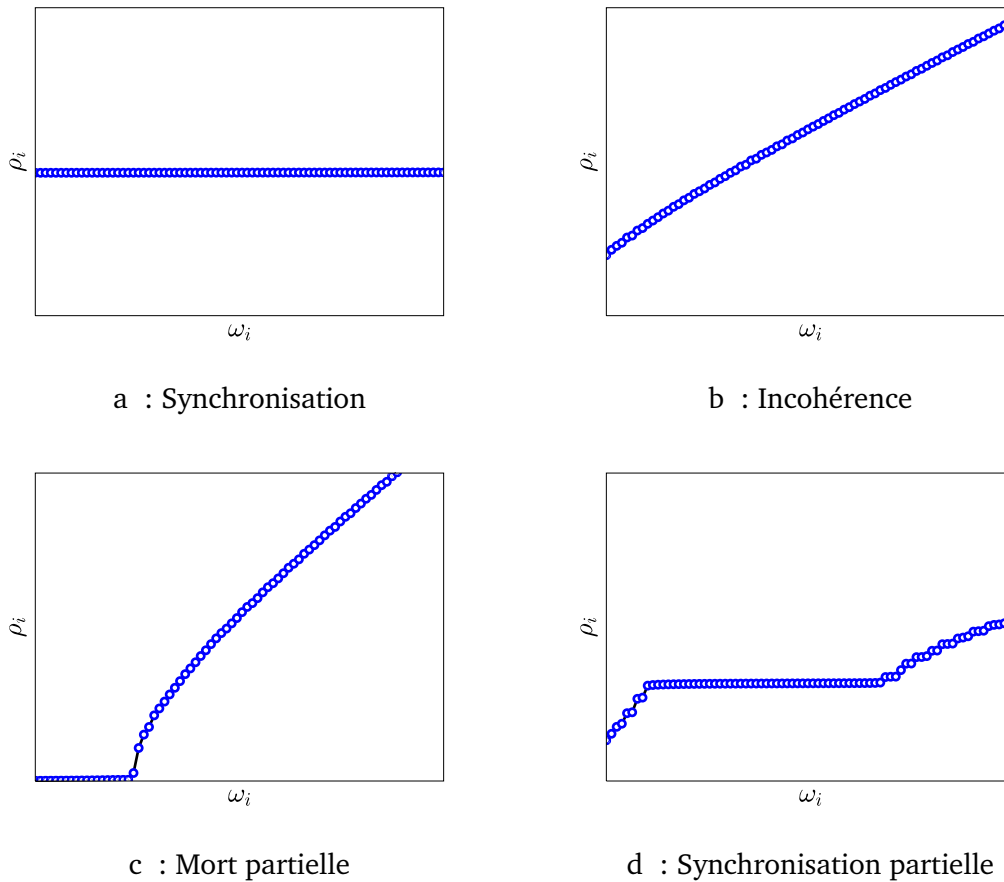


FIGURE 2.2 – Ces quatre Figures illustrent quatre états qu’un modèle champ moyen (2.1), vérifiant $\epsilon(H_1(X, t), \dots, H_N(X, t)) = (\omega_1, \dots, \omega_N) \in \mathbb{R}^N$ pour tout $X \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$, peut présenter sans être en état mort. On voit dans chaque Figure le nombre de rotation ρ_i en fonction de ω_i . Dans la Figure (a) les nombres de rotation sont alignés autrement dit sont égaux ce qui présente l’état de synchronisation. Dans la Figure (b) les nombres de rotation sont distincts ce qui présente l’état d’incohérence. Dans la Figure (c) on voit un mélange de nombres de rotation nuls et non-nuls ce qui présente l’état de mort partielle. Dans la Figure (d) il y a un mélange de nombres de rotation alignés et non-alignés ce qui présente un état de synchronisation partielle.

2.3 Modèle de Winfree

En 1967, Winfree propose un modèle de champ moyen pour la synchronisation de populations d’oscillateurs biologiques. Le système dépend de deux paramètres : la force

de couplage et la propagation des fréquences naturelles ou force du bruit. Pour de petites valeurs le système de Winfree peut être réduit au modèle de Kuramoto, dont plusieurs études ont été réalisées. Le modèle de Kuramoto sera discuté dans la prochaine section. Le comportement collectif des oscillateurs dans le modèle de Winfree a été d'abord étudié numériquement par Winfree [Win67], cette étude numérique montre qu'à une certaine force de couplage avec de petites valeur de la force du bruit tous les oscillateurs se synchronisent sur une fréquence commune. Le modèle de Winfree est donné par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x}_i = \omega_i - \kappa \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(x_j) R(x_i), \quad i = 1..N, \quad (2.3)$$

où P et R sont deux fonctions périodiques, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ est l'état du système et $x_i(t)$ est la phase du $i^{\text{ème}}$ oscillateur. La phase $x_i(t)$ peut être présentée comme étant un scalaire dans $[0, 2\pi]$. Le paramètre $\kappa \geq 0$ est la force de couplage ; les fréquences naturelles ω_i vérifient

$$1 - \gamma \leq \omega_i \leq 1 + \gamma, \quad \forall i = 1..N, \quad (2.4)$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est la force du bruit. Dans cette Section on considère un cas particulier du champ moyen, défini par Ariaratnam et Strogatz [AS01, Ari02], on suppose

$$\dot{x}_i = \omega_i - k\sigma(X) \sin(x_i), \quad i = 1..N, \quad (2.5)$$

où $\sigma : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est le champ moyen qui est défini pour tout $Y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ par :

$$\sigma(Y) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [1 + \cos(y_j)].$$

Le système (2.5) est autonome et globalement lipschitzien ; par le théorème d'existence et d'unicité de Cauchy-Lipschitz chaque condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^N$ au temps $t = t_0$ correspond à une unique solution $X(t)$ définie sur tout \mathbb{R} . Strogatz et Ariaratnam [AS01], donnent un diagramme de phase de ce modèle, où ils montrent qu'en variant la force de couplage et la force du bruit le modèle de Winfree (2.5) passe par les cinq états définis dans la définition 4 qu'on étudiera dans la suite. Dans [GMN⁺07] ils donnent des résultats analogues pour un modèle plus généralisé. L'étude a été faite dans le cas

d'un nombre infini d'oscillateurs, en passant au cas continu et en notant $p(x, t, \omega)$ la densité des oscillateurs et $g(\omega)$ la densité des fréquences, plus précisément ils considèrent l'équation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}x(\omega, t) &= \omega - k\sigma_c(t) \sin(x(\omega, t)), \\ \sigma_c(t) &= \int_0^{2\pi} \int_{1-\gamma}^{1+\gamma} p(x, t, \omega)(1 + \cos(x))g(\omega)d\omega dx. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Outre les résultats obtenus par Ariaratnam et Strogatz [AS01] nous mentionnons que le modèle de Winfree a été aussi étudié dans [LA14, BU09, PM14, HPR15, HKPR16, Ome13, PMT05, PA15].

2.3.1 État de mort et stabilité exponentielle

Ariaratnam et Strogatz remarquent que l'état de mort des oscillateurs, défini dans la définition 4, correspond sur le cercle à une convergence des oscillateurs vers un point fixe ; ils définissent l'état de mort par l'existence d'un point fixe du système,

$$\omega_i - k\sigma(X^*)\sin(x_i^*) = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (2.7)$$

La valeur $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ étant une solution constante alors $\sigma^* = \sigma(X^*)$ l'est aussi (Figure : 2.4) ; Cela n'est vrai que si le rapport $\frac{\omega_i}{k\sigma^*} \leq 1$; en prenant le max sur les ω_i et sachant que σ^* est positive on obtient une condition nécessaire pour l'existence de l'état mort, soit $\frac{1+\gamma}{k} \leq \sigma^*$. Dans ce cas, les composantes x_i^* de la solution seront données par

$$x_i^* = \arcsin\left(\frac{\omega_i}{k\sigma^*}\right).$$

Strogatz et Ariaratnam remarquent numériquement que les points x_i^* se trouvent dans l'arc $[0, \frac{\pi}{2}]$ (Voir Figure : 2.3). On applique σ au vecteur X^* et on obtient

$$\sigma^* = \frac{1}{N} \sum_1^N 1 + \cos\left(\arcsin\left(\frac{\omega_i}{k\sigma^*}\right)\right) = \frac{1}{N} \sum_1^N 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{k\sigma^*}\right)^2},$$

qui est une somme de Riemann. Ainsi il existe un point fixe si et seulement si cette dernière équation admet une solution en σ^* (avec σ^* vue autant qu'une variable réelle). Si la distribution des ω_i suit une densité g , en passant à l'infini sur N cette somme de

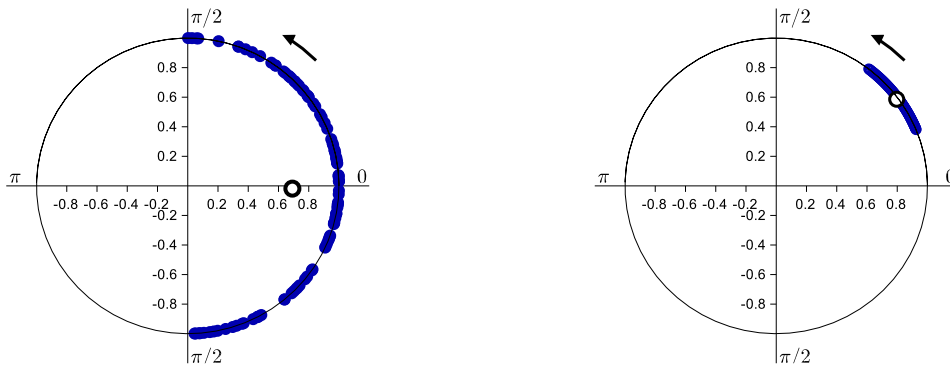


FIGURE 2.3 – On fixe dans le modèle de Winfree (2.5) : $N = 100$, $\kappa = 0.95$ et $\gamma = 0.35$. On choisit une distribution uniforme des fréquences naturelles $(\omega_i)_{i=1}^N$ dans $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$ et comme condition initiale $X(0) = (x_1(0), \dots, x_N(0))$ aléatoire dans $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. La Figure à gauche illustre en bleu les composantes $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ de la solution $X(t)$ au temps $t = 0$. Le paramètre d'ordre $R_X(0)$ qui est représenté par un cercle noir. La Figure à droite illustre les composantes $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ de la solution $X(t)$ au temps $t = 1000$ et le paramètre d'ordre $R_X(1000)$ qui est présenté par un cercle noir

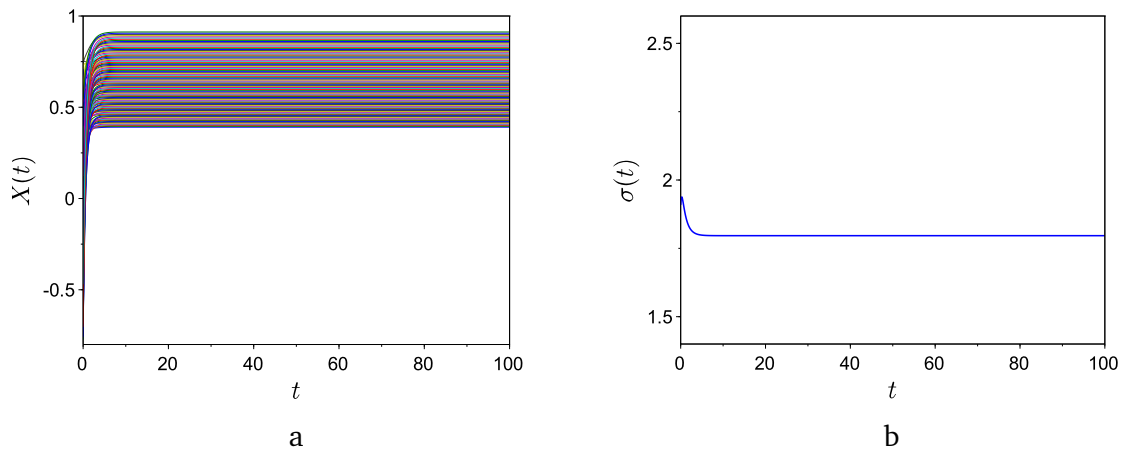


FIGURE 2.4 – On fixe dans le modèle de Winfree (2.5) les mêmes paramètres que la Figure 2.3. La figure à gauche illustre les composantes $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ de la solution $X(t)$ en fonction du temps, les composantes convergent vers des constantes ce qui représente l'état mort. La Figure à droite est le graphe de $\sigma(t)$ en fonction du temps, on voit que $\sigma(t)$ converge donc aussi vers une constante

Reimman devient

$$\sigma^* = \int_{1-\gamma}^{1+\gamma} 1 + \sqrt{1 - \left(\frac{\omega}{k\sigma^*}\right)^2} g(\omega) d\omega. \quad (2.8)$$

La région de l'état mort pour une infinité d'oscillateurs est donnée par l'existence d'une solution de cette dernière égalité. Concernant la stabilité de ce point fixe, les éléments de la jacobienne $J(X^*) = \{a_{ij}\}_{1 \leq i, j \leq N}$ du système (2.5) au point fixe $X^* = (x_1^*, \dots, x_N^*)$ définie précédemment sont donnés par

$$a_{ii}(t) = -k\sigma^* \cos(x_i^*) + \frac{k}{N} \sin^2(x_i^*) \quad \text{et} \quad a_{ij}(t) = \frac{k}{N} \sin(x_i^*) \sin(x_j^*), \quad i, j = 1..N.$$

Une valeur propre ψ et un vecteur propre $V = (v_1, \dots, v_N) \in \mathbb{R}^N$ correspondant vérifient

$$\sin(x_i^*) \frac{k}{N} \sum_j \sin(x_j^*) v_j = (\psi + k\sigma^* \cos(x_i^*)) v_i.$$

Grâce à cette dernière équation on remarque l'égalité suivante

$$\frac{k}{N} \sum_i \frac{\sin^2(x_i^*)}{\psi + \sigma^* \cos(x_i^*)} = 1.$$

Géométriquement dans [Ari02], la valeur σ^* vérifie l'inégalité

$$\frac{k}{N} \sum_1^N \frac{\left(\frac{\omega_i}{k\sigma^*}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\omega_i}{k\sigma^*}\right)^2}} < \sigma^*.$$

Comme il a été déjà dit le point fixe est donné par $\sin(x_i^*) = \frac{\omega_i}{k\sigma^*}$. Cela permet de constater que les valeurs propres de la jacobienne $J(X^*)$ sont réelles et strictement négatives, ce qui implique donc que le point fixe est exponentiellement stable.

2.3.2 Transition : État d'incohérence-État de mort partielle

Par la définition 4, l'état de mort partielle se présente sous forme d'un mélange d'états : un pourcentage d'oscillateurs sont en état de mort, et l'autre pourcentage ne l'est pas et ne possède pas d'oscillateurs synchronisés. Cet état s'obtient en général pour de grandes valeurs de la force du bruit γ . L'incohérence est l'état où chaque deux oscillateurs ne présentent ni l'état mort ni l'état synchronisé, elle s'obtient pour des valeurs moyennes de la force de couplage et de la force du bruit. Le paramètre d'ordre R_X dans ce cas vérifie $|R_X(t)| \approx 1$ (Voir Figure : 2.5) et cela permet d'identifier la valeur du

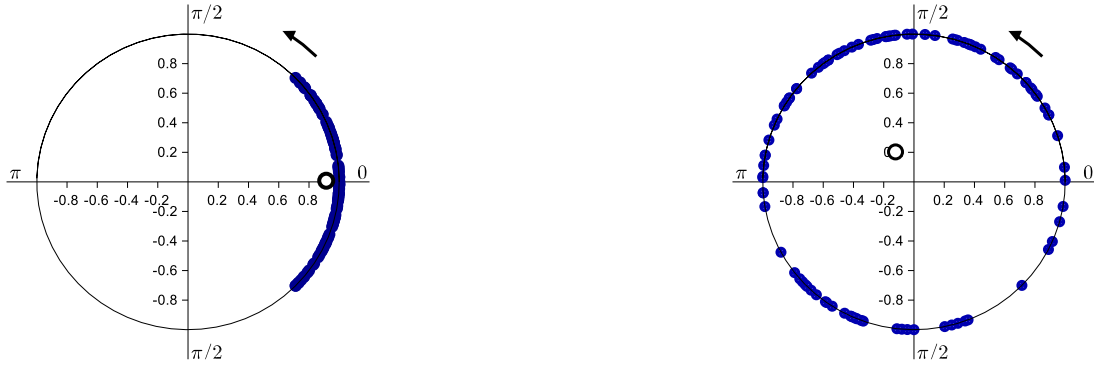


FIGURE 2.5 – On fixe dans le modèle de Winfree (2.5) : $N = 100$, $\kappa = 0.5$ et $\gamma = 0.4$. On choisit une distribution uniforme des fréquences naturelles $(\omega_i)_{i=1}^N$ dans $[1-\gamma, 1+\gamma]$ et comme condition initiale $X(0) = (x_1(0), \dots, x_N(0))$ aléatoire dans $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. La Figure à gauche illustre en bleu les composantes $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ de la solution $X(t)$ au temps $t = 0$. Le paramètre d'ordre $R_X(0)$ qui est représenté par un cercle noir. La Figure à droite illustre les composantes $\{x_i(t)\}_{i=1}^N$ de la solution $X(t)$ au temps $t = 1000$ et le paramètre d'ordre $R_X(1000)$ qui est présenté par un cercle noir

champ moyen $\sigma(t)$ et par conséquent une forme intégrable peut être obtenue du modèle de Winfree (2.5). En effet, la relation entre le champ moyen $\sigma(t)$ et le module $|R_X(t)|$ pour une solution du modèle (2.5) est donnée par

$$\sigma - 1 = \Re(R_X(t)),$$

où $\Re(R_X(t))$ est la partie réelle. Par conséquent $\sigma(t) \approx 1$ et le modèle de Winfree (2.5) peut être réduit à un système intégrable

$$\dot{x}_i = \omega_i - \kappa \sin(x_i),$$

Pour ne pas avoir d'oscillateur mort, il suffit que $\dot{x}_i > 0$ soit $\kappa < 1-\gamma$. La courbe $\kappa = 1-\gamma$ est donc la courbe de transition entre l'état de mort partielle et l'état d'incohérence (Voir Figure 2.6 dans la section 2.3.4). Dans le cas infini d'oscillateurs la densité $p(x, t, \omega)$ dans le modèle (2.6) vérifie

$$\frac{dp}{dt} + \frac{d(pv)}{dx} = 0 \quad \text{où} \quad v = \omega - k\sigma_c(t) \sin(x(\omega, t)).$$

L'état incohérence est dans ce cas un état stationnaire de densité.

2.3.3 Synchronisation et synchronisation partielle

L'état de synchronisation partielle, qui est un mélange d'états, est défini par l'existence d'au moins de deux oscillateurs en synchronisation et de deux autres non synchronisés. Dans le diagramme de phase élaboré dans [Ari02], et pour une distribution uniforme, l'incohérence est la région intermédiaire entre l'état de mort partielle et l'état de l'état de synchronisation partielle, voir la Figure 2.6. Pour une force de couplage et de bruit faibles et un nombre infini d'oscillateurs (Modele (2.6) ci-dessous) Quinn, Rand et Strogatz [QRS07] utilisent la méthode de Poincaré-Lindstedt, qui consiste à approcher une solution périodique en utilisant un développement en série entière, pour calculer la tangente de bifurcation entre l'état synchronisation et désynchronisation. Toujours dans le cas infini, Nardulli et al. [NMPS04] montrent une dépendance linéaire entre la différence des fréquences naturelles et la dispersion, le principe est que la synchronisation implique que $\sigma(t) \sin(x(\omega, t))$ est T -périodique, le nombre de rotation commun rend la quantité

$$\omega - k \frac{1}{T} \int_t^{t+T} \sigma_c(t) \sin(x(\omega, t)) dt,$$

invariante. À l'aide de la densité $p(x, t, \omega)$ la relation entre la différence des fréquences naturelles et de la dispersion est donnée par

$$\delta\omega = \frac{k\lambda}{2} \delta x(\omega, t) \text{ où } \lambda \text{ est solution de } \frac{4\gamma^2}{k^2} = \lambda \sin^2\left(\frac{2\gamma}{k\lambda}\right).$$

2.3.4 Diagramme de Phase

Ariaratnam illustre dans [Ari02] un diagramme de phase de paramètres de couplage et de la force du bruit. Plus précisément, il illustre cinq régions différentes outre la synchronisation et l'état mort. La frontière de transition de la synchronisation a été faite numériquement

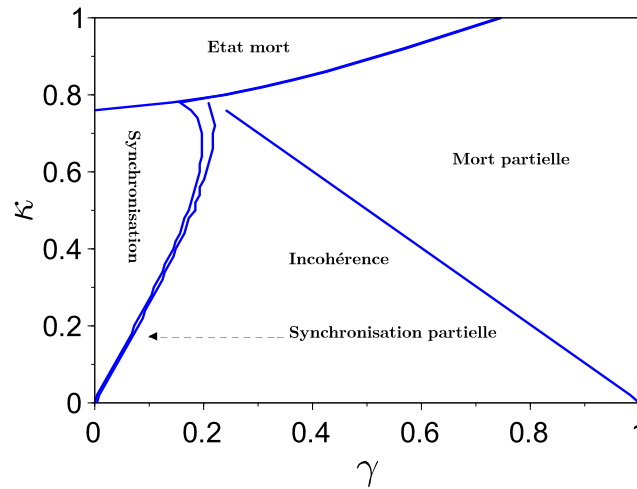


FIGURE 2.6 – Diagramme de phase du modèle de Winfree (2.5) tracé pour une distribution uniforme de fréquences naturelles.

2.4 Modèle de Kuramoto

En 1975, Kuramoto dans son premier article lié à l'étude de la synchronisation [Kur75] raffine le modèle de Winfree au modèle suivant appelé modèle de Kuramoto

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N \sin(x_j - x_i). \quad (2.9)$$

Pareillement au modèle de Winfree le paramètre $\kappa \geq 0$ est la force de couplage ; les fréquences naturelles ω_i vérifient

$$1 - \gamma \leq \omega_i \leq 1 + \gamma, \quad \forall i = 1..N,$$

où $\gamma \in [0, 1]$ est la force du bruit. Plusieurs reformulations de ce modèle ont été établies par plusieurs auteurs voir par exemple [ABV⁺05, CHY11]. Le modèle de Kuramoto peut s'appliquer à l'étude des phénomènes de synchronisation en biologie comme par exemple les réseaux de neurones, en chimie et en physique [ABV⁺05]. En général le modèle de Kuramoto de type champ moyen (aussi connu sous le nom "all-to-all" qui vient du fait que chaque oscillateur est influencé d'une même manière par tout le reste

des oscillateurs) est donné par l'équation différentielle suivante

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N H(x_j - x_i), \quad (2.10)$$

où H est une fonction périodique. Contrairement au modèle de Winfree (2.5) le modèle de Kuramoto (2.9) ne possède que trois états, à savoir : l'état de mort, l'état de synchronisation et l'état de synchronisation partielle (Voir Figure : 2.7 dans la Section 2.4.3). Pour de petites valeurs des paramètres de couplage et de la force du bruit, le Modèle de Winfree est équivalent au Modèle de Kuramoto voir [Ari02].

2.4.1 Modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs

Dans [Coo08] la synchronisation forte d'une solution du modèle de Kuramoto avec trois oscillateurs peut être démontré grâce au point fixe, cela est dû à la symétrie du système. Suivant une distribution uniforme $(\omega, \omega + \Omega, \omega + 2\Omega)$ avec $\omega, \Omega > 0$ le modèle (2.9) devient,

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 2\Omega + \omega - \frac{\kappa}{3} [\sin(x_2 - x_1) + \sin(x_3 - x_1)], \\ \dot{x}_2 &= \Omega + \omega - \frac{\kappa}{3} [\sin(x_1 - x_2) + \sin(x_3 - x_2)], \\ \dot{x}_3 &= \omega - \frac{\kappa}{3} [\sin(x_1 - x_3) + \sin(x_2 - x_3)]. \end{aligned}$$

En notant les dispersions par $\delta_1 = x_2 - x_1$ et $\delta_2 = x_3 - x_2$ le système se réduit à un système d'ordre deux, soit :

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_1 &= \Omega + \frac{\kappa}{3} (-2 \sin \delta_1 + \sin \delta_2 - \sin(\delta_1 + \delta_2)), \\ \dot{\delta}_2 &= \Omega + \frac{\kappa}{3} (-2 \sin \delta_2 + \sin \delta_1 - \sin(\delta_1 + \delta_2)); \end{aligned}$$

l'existence du point fixe $\dot{\delta}_1 = \dot{\delta}_2 = 0$ implique que la dispersion globale est constante donc bornée en tout temps, ce qui entraîne donc un état de synchronisation. Pour éliminer l'état mort d'un oscillateur on choisit $\omega > k$. La résolution du système précédent montre que le point fixe existe si et seulement si

$$\frac{\Omega}{\kappa} < \alpha \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{2\sqrt{6 - \sqrt{33}}(\sqrt{33} - 3)}{(7 - \sqrt{33})^2}.$$

2.4.2 Synchronisation et désynchronisation

Chopra et Spong dans [CS09] définissent la synchronisation dans le modèle de Kuramoto par un point fixe de l'équation de la différence de phases de même que l'exemple de la Section précédente, autrement dit : un point fixe de l'équation de la dispersion de chaque paire d'oscillateurs. Ils montrent une condition nécessaire pour avoir une telle synchronisation pour le modèle de Kuramoto et qui est un raffinement du travail [JMB04]. À partir du modèle (2.9), ils considèrent la dispersion

$$\dot{x}_i(t) - \dot{x}_j(t) = \omega_i - \omega_j + \frac{\kappa}{N} \left[-2 \sin(x_i - x_j) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\sin(x_k - x_i) + \sin(x_j - x_k)) \right].$$

Ils calculent ainsi le maximum ou plus précisément ils calculent le domaine où la fonction suivante est surjective

$$-2 \sin(z_i - z_j) + \sum_{k=1, k \neq i, j}^N (\sin(z_k - z_i) + \sin(z_j - z_k)), \quad Z = (z_1, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^N.$$

Ils obtiennent la valeur suivant

$$E_{max} = 2 \sin(C) + 2(N-2) \sin\left(\frac{C}{2}\right) \text{ avec } C = 2 \arccos\left(\frac{-(N-2) + \sqrt{(N-2)^2 + 32}}{8}\right).$$

La synchronisation aura lieu si

$$\kappa < \frac{2N\gamma}{E_{max}}.$$

Ils abordent aussi l'existence d'une synchronisation exponentielle ; l'existence de la synchronisation exponentielle s'obtient en supposant au premier lieu que pour tout $t \geq T$ la différence de phases $|x_i(t) - x_j(t)| < \frac{\pi}{2} + \epsilon$ avec $\epsilon < \frac{\pi}{2}$, dans ce cas on aura une synchronisation de type :

$$|\dot{x}_i - \Omega| \leq \sigma_T e^{-\kappa \sin(\epsilon)(t-T)}, \quad \sigma_T > 0, \forall i = 1, \dots, N \quad \text{où} \quad \Omega = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \omega_j.$$

La valeur de couplage κ suffisante pour avoir la synchronisation exponentielle est donnée par

$$\kappa < \frac{2N\gamma}{\cos(\epsilon)}.$$

On trouve une approche mathématique rigoureuse de l'étude de l'incohérence et de la stabilité du modèle de Kuramoto dans [FGG16]. Une riche littérature sur la stabilité

est aussi abordée, on cite [MS05, GPP12, MPT05]

2.4.3 Diagramme de Phase

Comme ça a été dit avant qu'à faible couplage on peut approximer le modèle de Winfree au modèle de Kuramoto. Contrairement au modèle de Winfree (2.5) le modèle de Kuramoto (2.9) ne possède que trois états, à savoir : l'état de synchronisation, l'état de synchronisation partielle et l'état d'incohérence

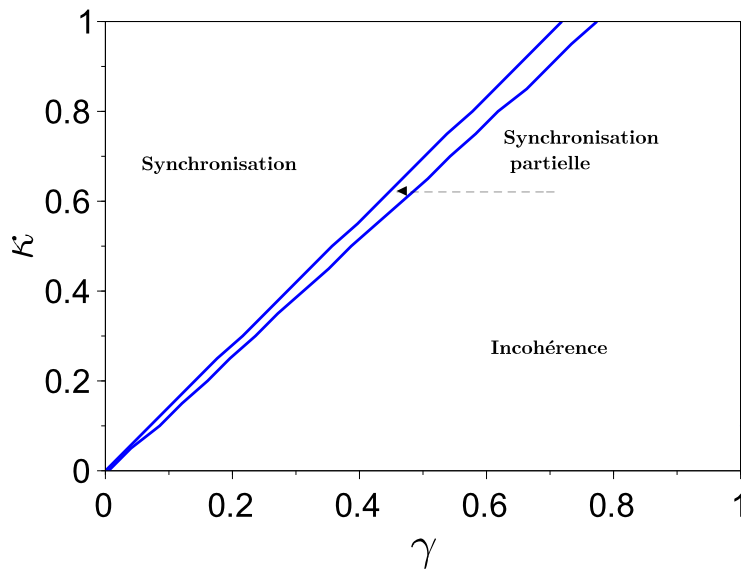


FIGURE 2.7 – Diagramme de phase du modèle de Kuramoto (2.9) tracé pour une distribution uniforme de fréquences naturelles.

2.5 Faible couplage dans un réseau de neurones

Dans un cerveau les neurones ont une structure regroupée et chaque neurone est connecté aux autres neurones ce qui forme donc un réseau ou un système couplé [WW02]. L'interaction des neurones dans le cerveau fait apparaître l'état de synchronisation, cette interaction est responsable dans des maladies psychiatriques et nerveuses

[Con13] citant l'exemple de la maladie de Bipolarité qui se manifeste par des changements d'humeur remarquables, d'une manière théorique on peut supposer que cela est dû à un dysfonctionnement dans le comportement collectif des neurones qui ne se rétablissent pas à leur état initiale après un événement donné qui les stimule. L'état initiale est en général présenté par un cycle limite [Con13]. Les neurones peuvent communiquer entre eux par des signaux ou charges électriques appelés influx nerveux, ainsi un neurone peut répondre à une stimulation et peut lui à son tour transmettre un signal électrique, cette capacité de recevoir et de transmettre, appelée excitabilité et conductivité respectivement, permet théoriquement de modéliser un ensemble de neurones par un système couplé. La forme physiologique d'un neurone sain se compose de trois éléments principaux : soma qui est le noyau ou le centre du neurone, l'axone qui est un prolongement colé au soma responsable de la conductivité du neurone et conduit le signal électrique d'une manière centrifuge, et les dendrites qui sont en tout aussi un prolongement colé au soma responsable dans l'excitabilité du neurone et conduisent le signal électrique d'une manière centripète [WW02]. Un modèle de neurones peut générer trois comportements : repos qui se caractérise par une phase constante du neurone, impulsions ou spikes qui se caractérisent par une phase uni-modale et trains d'impulsions ou bursts qui se caractérise par une phase multimodale [WW02, Con13]. En général l'étude de la synchronisation entre les neurones ne prend pas en compte les détails de la forme physiologique et des interactions chimiques ou électriques entre neurones. L'étude de la synchronisation fait appel à un modèle de couplage à deux paramètres : la fréquence naturel et la force de couplage. Ces derniers peuvent dépendre du temps au besoin de résultat souhaité. D'après notre approche, illustrée dans l'introduction de ce Chapitre, la fréquence naturelle est donc la caractéristique en nature et la force de couplage est la liaison. Théoriquement dans [CU07] une formulation du modèle de Kuramoto appliquée à un réseau couplé composé de N neurones a été établie comme suit : la capacité ou la force d'émission d'une charge électrique par un neurone x_i est présentée par une fréquence naturelle $\omega_i(t)$ qui dépend du temps, le couplage a été présenté

par le champ moyen

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \kappa_{ij}(t) \sin(x_i - x_j),$$

où la matrice $\{\kappa_{ij}(t)\}_{1 \leq i, j \leq N}$ est la force du couplage qui dépend aussi du temps. Lorsque le couplage est du type champ moyen, c'est à dire $\kappa_{ij}(t) = k(t)$ pour tout i et j le modèle de Kuramoto ne devient pas le modèle idéal pour décrire le comportement repos et le comportement bursts cités avant dans le cas où le couplage n'est pas du type champ moyen ; voir à ce sujet [BLB⁺12]. Les modèles de synchronisation, comme le modèle de Winfree ou de Kuramoto, permettent l'étude de l'aspect synchronisation dans un réseau de neurones, néanmoins ils ne répondent pas d'une manière précise à la réalité de la psychophysiologie des interactions des neurones. Pour pouvoir maîtriser le comportement collectif des neurones Winfree [Win80] introduit ce qu'on appelle *Phase response curve* (PRC) qui sert à mesurer le taux de perturbation du comportement des neurones lorsqu'on les stimule. Cela revient à l'étude de stabilité ou plus précisément de la jacobienne du système au tour du cycle limite. L'expérience se fait grâce à un électroencéphalographie (EEG) [KW02]. On peut visualiser le graphe de la moyenne des potentiels d'action de plusieurs régions du cerveau, cette moyenne de potentiel pourra avoir l'un des trois comportements cités avant représentant un cycle limite, par conséquent une stimulation (lumière, son, ..,etc) appliquée aux neurones perturbe la moyenne du potentiel, le taux de cette perturbation est donné par la PRC. La théorie du faible-couplage permet d'approximer des modèles assez proches de cette réalité, comme le modèle de Hodgkin-Huxley-type neuronal [HH52], aux modèles de synchronisation. On trouve plusieurs méthodes d'approximations [SL12] aussi appelées dérivations, le modèle résultant le plus fréquent est le modèle de Kuramoto. D'une manière générale un modèle d'un couplage de neurones est le modèle Hodgkin-Huxley-type neuronal donné sous forme

$$\dot{x}_i = F(x_i) + \epsilon I(X),$$

où x_i est la phase du $i^{\text{ième}}$ neurone qui représente son potentiel d'action et I est une fonction qui représente le couplage. Le paramètre positif ϵ permet de fixer la force du couplage. D'un point de vue de notre approche (voir début de ce chapitre) la caractérisation en nature de ce couplage est donc homogène et la liaison est de type champ moyen. Pour $0 < \epsilon \ll 1$, ce modèle peut être approximé [EPG01, SL12] à un modèle de phase couplé de la forme

$$\dot{\theta}_i = \epsilon H(\theta_i - \theta_j),$$

qui est une approximation en phase, c'est à dire une approximation à un modèle de couplage de phase qui est le modèle de Kuramoto. Des techniques d'approximations à des modèles à impulsion couplée ont été élaborés dans [GE02, MS90]; voir aussi le début de ce Chapitre pour la définition d'un modèle à impulsion couplée et un modèle en phase. L'approximation se généralise à un réseau de neurones hétérogènes. Le but de ces approximations est de pouvoir étudier le point fixe (synchronisation) de la dernière équation (qui est plus souple que le modèle d'origine) puis passer à la jacobienne et déduire des résultats de stabilité.

Chapitre 3

Hypothèses et résultats principaux obtenus

Sommaire

3.1 Résultats obtenus : Partie linéaire	42
3.1.1 Hypothèse de stabilité (H_{stab})	42
3.1.2 Résultat linéaire I^L et II^L	43
3.2 Résultats obtenus : Partie non-linéaire	44
3.2.1 Notations et définitions	45
3.2.2 Hypothèses de synchronisation (H) et (H_*)	46
3.2.3 Resultat I, II, III et IV	47

Notre résultat principal se compose de deux parties : *La partie linéaire* où on va étudier la stabilité d'une classe de systèmes linéaires perturbés en décomposant la résolvante. *La partie non-linéaire* qui se compose elle même en quatre résultats principaux pour l'étude de systèmes couplés de champ moyen. Relativement aux définitions dans la Section 2.1 : *Le premier résultat* montre l'existence de solution et de l'état de synchronisation. *Le deuxième résultat* montre l'existence de solution en état d'accrochage périodique. *Le troisième résultat* montre la stabilité du système. *Le quatrième résultat*, qui est une conséquence directe du deuxième et du troisième résultats, montre l'existence

de solution en accrochage périodique exponentiellement stable autrement dit l'existence d'un cycle limite stable.

Les résultats sont dans le cadre de la théorie des perturbations. Néanmoins, on tient à préciser que les résultats dans le cas non-linéaire ne sont pas évidents aussi dans le cas du non perturbé.

On présente dans ce qui suit en premier temps l'hypothèse de stabilité et le résultat linéaire puis dans un deuxième temps on présente l'hypothèse de synchronisation et le résultat non-linéaire.

3.1 Résultats obtenus : Partie linéaire

Dans ce qui suit on considère la notation suivante : Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ et

$$A(t) := \{a_{i,j}(t) \in \mathbb{R}, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m, t \in I \subseteq \mathbb{R}\},$$

une $n \times m$ matrice dépendant du temps t dans un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, on note la norme-sup de $A(t)$ par

$$\|A\| = \max\{\sup_{t \in I} |a_{ij}(t)|, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\},$$

et on note par I_N la matrice identité carrée d'ordre N .

3.1.1 Hypothèse de stabilité (H_{stab})

Soit $\zeta(t)$ une matrice carrée d'ordre N qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ vérifiant $\|\zeta\| < +\infty$. On considère dans la suite de ce Chapitre le système linéaire perturbé suivant

$$\dot{Y}(t) = [b(t)I_N + \mathcal{A}(t) + \zeta(t)]Y(t), \quad t \geq t', \quad (3.1)$$

où $t' \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}(t) = \{a_{i,j}(t)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice carrée d'ordre N de rang 1 continue et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire continue. On considère l'hypothèse suivante sur $b(t)$

et \mathcal{A} qu'on appelle l'hypothèse de stabilité

$$(H_{stab}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i,j}(t) = a_j(t) \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq N \text{ avec :} \\ b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, N \text{ des fonctions continues 1-périodiques,} \\ \int_0^1 b(s) + \sum_{j=1}^N a_j(s) ds = 0, \quad \text{et} \quad -\alpha := \int_0^1 b(s) ds < 0. \end{array} \right.$$

Pour avoir plus d'informations sur le comportement des solutions du système linéaire (3.1) on va introduire une classe de matrices ζ qu'on appelle matrices "normalisantes" ainsi définies dans la définition suivante.

Définition 5. On dit que la matrice ζ est une matrice *normalisante* si le système (3.1) admet une solution $V(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))^T$ telle que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| > 0, \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| < +\infty.$$

On appelle $V(t)$ solution *normalisante* de (3.1) associée à la matrice ζ .

Dans les deux résultats linéaires suivants on va considérer les deux cas : ζ une matrice normalisante ou bien quelconque.

3.1.2 Résultat linéaire I^L et II^L

Résultat linéaire (I^L). On considère le système (3.1) de résolvante $R(s; t)$. Supposons que b et \mathcal{A} vérifient l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe $K > 0$ et $D_* > 0$ tels que pour toute matrice ζ normalisante vérifiant $\|\zeta\| < D_*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une forme linéaire $\mathcal{L}_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $s \geq t$, on a

- $\mathcal{L}_s(R(s; t)V(t)) = 1$ et $\mathcal{L}_t(Y) < K\|Y\|$,
- $\mathcal{L}_t(Y) = \mathcal{L}_s(R(s; t)Y)$,
- $\|R(s; t)[Y - \mathcal{L}_t(Y)V(t)]\| < K\|Y\| \exp(-\beta(s - t))$.

où $V(t)$ est une solution normalisante de (3.1) associée à la matrice ζ . En outre l'opérateur $R(s; t)$ admet la décomposition

$$R(s; t)Y = \mathcal{L}_t(Y)V(s) + R(s; t)[Y - \mathcal{L}_t(Y)V(t)],$$

Autrement dit la sous-variété $\mathcal{W}_{stab} := \{Z \in \mathbb{R}^N, \mathcal{L}_t(Z) = 0\}$ de dimension $N - 1$ est exponentiellement stable.

Résultat linéaire (II^L). [Cas général] On considère le système (3.1) de résolvante $R(s; t)$. Supposons que b et \mathcal{A} vérifient l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe $K > 0$ et $D_* > 0$ tels que pour toute matrice ζ vérifiant $\|\zeta\| < D_*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une forme linéaire $\psi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $s \geq t$, on a

- $\|R(s; t)[Y - \psi_t(Y)\mathbb{1}]\| < K\|Y\| \exp(-\beta(s - t))$.

où $\mathbb{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N$. En outre l'opérateur $R(s; t)$ admet la décomposition

$$R(s; t)Y = \psi_t(Y)R(s; t)\mathbb{1} + R(s; t)[Y - \psi_t(Y)\mathbb{1}].$$

Autrement dit la sous-variété $\mathcal{W}_{stab} := \{Z \in \mathbb{R}^N, \psi_t(Z) = 0\}$ de dimension $N - 1$ est exponentiellement stable. De plus s'il existe une solution qui ne décroît pas exponentiellement vers zéro alors

- $\psi_t(Y) = \psi_s(R(s; t)Y)$.

3.2 Résultats obtenus : Partie non-linéaire

La méthode utilisée, pour obtenir des résultats de synchronisation, se base sur le principe de comparaison des équations différentielles. En supposant que la distance entre les oscillateurs d'une solution reste finie à un temps arbitraire; des informations sur le système sont obtenues, on utilise par suite le principe de comparaison d'équations différentielles qui implique que ce temps arbitraire est égal à l'infini.

La classe de systèmes couplés de champ moyen qu'on va étudier dans cette thèse est donnée par les deux systèmes suivants ; le système *périodique non-perturbé*

$$\dot{x}_i = F(X, x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{PNP})$$

et le système *perturbé*

$$\dot{x}_i = F(X, x_i) + H_i(X), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{P})$$

où $N \geq 2$ et $X = (x_1, \dots, x_N)$. $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $H = (H_1, \dots, H_N) : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ sont des fonctions de classe C^1 . On note dans tout ce qui suit par Φ^t le flot du système (P) (en particulier (PNP)).

3.2.1 Notations et définitions

Pour $q, p \in \mathbb{N}^*$ soit une fonction $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$, en posant $G = (G_1, \dots, G_p)$ on considère la semi-norme suivante sur l'espace vectoriel des fonctions continues de \mathbb{R}^q dans \mathbb{R}^p

$$\|G\|_B = \sup_{Y \in B} \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} |G_i(Y)|, \quad \text{où } B = \{Y = (y_1, \dots, y_q) \in \mathbb{R}^q : \max |y_i - y_j| \leq 1\}.$$

Cette semi-norme est une norme sur l'espace vectoriel des fonctions continues de B dans \mathbb{R}^p . On note $d^i G$, $i = 1, 2, \dots$, la $i^{\text{ème}}$ différentielle de G . On définit

$$\|dG\|_B = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j \leq q}} \|\partial_j G_i(Y)\|_B, \quad \|d^2 G\|_B = \max_{\substack{1 \leq i \leq p \\ 1 \leq j, k \leq q}} \|\partial_k \partial_j G_i(Y)\|_B.$$

Dans la suite on va considérer dans un premier temps des fonctions définies sur \mathbb{R}^q avec $q = N$ puis on va se limiter sur leurs restrictions sur l'ensemble B .

Soit $G : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $Y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ et $z \in \mathbb{R}$, on note

$$\partial_i G(Y, z) = \begin{cases} \frac{\partial}{\partial z} G(Y, z), & i = N + 1 \\ \frac{\partial}{\partial y_i} G(Y, z), & i := 1, \dots, N. \end{cases}$$

Pour $q, p \in \mathbb{N}^*$ une fonction $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ est dite $\mathbb{1}$ -périodique au sens de la définition suivante

Définition 6. [$\mathbb{1}$ -périodicité] Soit une fonction $G : \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$ et notons

$\mathbb{1} := (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^q$. La fonction G est dite $\mathbb{1}$ -périodique si

$$G(Y + \mathbb{1}) = G(Y), \quad \forall Y \in \mathbb{R}^q.$$

Remarquons que cette définition n'implique pas que la fonction G est périodique par rapport à chaque variable, cela nous permet d'avoir une classe plus large des systèmes champ moyen étudiés dans cette thèse (Voir la Section 5.4 du Chapitre 5). On définit maintenant la notion d'un ouvert positivement Φ^t -invariant,

Définition 7. Supposons que le flot Φ^t du système (P) existe pour tout $t \geq t_0$. On dit qu'un ouvert $C \subset \mathbb{R}^N$ est *positivement invariant* par le flot Φ^t , ou C est positivement Φ^t -invariant, si $\Phi^t(C) \subset C$ pour tout $t \geq t_0$.

3.2.2 Hypothèses de synchronisation (H) et (H_*)

On va considérer les deux hypothèses (H) et (H_*) suivantes, qui seront suffisantes pour avoir l'état de synchronisation et de stabilité

$$(H) \quad \begin{cases} F \text{ est de classe } C^2, & \text{et } \max\{\|F\|_B, \|dF\|_B, \|d^2F\|_B\} < +\infty, \\ F \text{ est } \mathbb{1}\text{-périodique et } \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) > 0, \end{cases}$$

$$(H_*) \quad \int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} ds < 0.$$

On appelle l'hypothèse (H_*) *hypothèse de synchronisation* sous réserve que l'hypothèse (H) soit vérifiée. L'hypothèse (H) implique que la fonction $F(s\mathbb{1}, s)$ est uniformément lipschitzienne. Lorsqu'on choisit $X = x_0\mathbb{1}$, avec $x_0 \in \mathbb{R}$, comme condition initiale de la solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ du système (PNP) alors chaque oscillateur $x_i(t)$ est solution de l'équation différentielle scalaire

$$\dot{x} = F(x\mathbb{1}, x), \quad t \geq t_0.$$

Par le théorème de Cauchy-Lipschitz on a l'unicité de la solution donc $|x_i(t) - x_j(t)| = 0 < +\infty$ pour tout $t \geq 0$ et $1 \leq i, j \leq N$ et donc la distance entre les oscillateurs $\{x_i(t)\}_i$ reste bornée en tout temps $t \geq t_0$, qui est une propriété de synchronisation. Remarquons aussi que l'hypothèse $\min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) > 0$ permet d'avoir

un oscillateur dynamique ainsi défini dans la définition 1 dans la Section 2.1. L'un des résultats obtenus dans cette thèse est une généralisation de cette propriété à un voisinage de $x_0\mathbb{1}$. L'hypothèse (H_*) vient du fait que lorsque $H \approx 0$ et $x_i \approx x_j (\approx x)$ le système (P) vérifie

$$\frac{d}{dt}x_i \approx F(x\mathbb{1}, x), \text{ et } \frac{d}{dt}(x_i - x_j) \approx \partial_{N+1}F(x\mathbb{1}, x)(x_i - x_j).$$

3.2.3 Resultat I, II, III et IV

Le résultat I suivant affirme l'existence de solutions en état de synchronisation au sens de la définition 2 du Chapitre 2

Résultat principal (I). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert C_r de la forme,*

$$C_r := \left\{ X = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N : \exists \nu \in \mathbb{R}, \max_i |x_i - \nu| < \Delta_r(\nu) \right\},$$

où $\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow (0, D]$ est une fonction C^1 et 1-périodique, tel que pour toute fonction H de classe C^1 vérifiant $\|H\|_B < r$ on a

1. Existence de solution. Le flot Φ^t du système (P) existe pour tout $X \in C_r$ et $t \geq t_0$.
2. Synchronisation. L'ouvert C_r est positivement invariant par Φ^t . De plus pour tout $X \in C_r$

$$\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{t \geq t_0} \frac{d}{dt} \Phi_i^t(X) > 0 \quad \text{et} \quad |\Phi_i^t(X) - \Phi_j^t(X)| < 2D, \forall 1 \leq i, j \leq N, \forall t \geq t_0.$$

On note dans tout ce qui suit Φ^t le flot du système (P) (en particulier (PNP)). Le résultat I suivant affirme l'existence de solutions périodique en état d'accrochage au sens de la définition 3

Résultat principal (II). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction H de classe C^1 et $\mathbb{1}$ -périodique vérifiant $\|H\|_B < r$, il existe un ouvert*

C_r (comme défini dans le résultat (I)) et il existe une condition initiale $X_* \in C_r$ telle que

$$\Phi_i^t(X_*) = \rho t + \Psi_{i,X_*}(t), \quad \forall i = 1, \dots, N, \quad \forall t \geq t_0,$$

où $\rho > 0$ et $\Psi_{i,X_*} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 et $\frac{1}{\rho}$ -périodiques.

Le résultat III suivant montre la stabilité du système (P).

Résultat principal (III). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_{*}) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert C_r (comme défini dans le résultat (I)), tel que pour toute fonction H de classe C^1 vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$ on a*

$$\exists M > 0, \forall X \in C_r, \exists \delta > 0, \forall Y \in C_r, \|X - Y\| < \delta :$$

$$\|\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)\| < M\|X - Y\|, \quad \forall t \geq t_0,$$

De plus pour tout $X \in C$ il existe une sous-variété $\mathcal{W}_X \subset C_r$ de dimension $N - 1$ en X telle que

$$\exists \beta > 0, \exists K > 0, \forall X \in C_r, \forall Y \in \mathcal{W}_X :$$

$$\|\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)\| < K \exp(-\beta(t - t_0))\|X - Y\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Une conséquence du résultat II et III est le résultat IV suivant

Résultat principal (IV). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_{*}) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert C_r (comme défini dans le résultat (I)) tel que pour toute fonction H de classe C^1 et $\mathbb{1}$ -périodique vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$, il existe une sous-variété $\mathcal{W}_{stab} \subset C_r$ de dimension $N - 1$ telle que*

$$\exists \beta > 0, \exists K > 0, \forall X \in \mathcal{W}_{stab} : \|\Phi^t(X) - \rho t - \Psi(t)\| < K \exp(-\beta(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0,$$

où $\rho > 0$ et $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ avec $\Psi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 et $\frac{1}{\rho}$ -périodiques.

Remarque.

1. Le dernier résultat IV montre que l'orbite périodique, énoncée dans le résultat II, vue sur le tore est un cycle limite stable.

3.2. RÉSULTATS OBTENUS : PARTIE NON-LINÉAIRE

2. Les résultats **I** et **III** se généralisent pour des fonctions $H(t, X)$ dépendant du temps t .

Chapitre 4

Preuve du résultat I et II : Synchronisation des systèmes champ moyen

Sommaire

4.1 Préliminaire	50
4.1.1 Remarques et motivation	52
4.2 Fonction de dispersion	53
4.3 Réduction du système (P)	55
4.4 Existence de solution et de l'état de synchronisation	60
4.5 Orbite périodique et nombre de rotation	61
4.6 Conclusion	64

4.1 Préliminaire

On va montrer dans ce Chapitre les deux premiers résultats I et II du résultat non-linéaire donné dans la Section 3.2.3 du Chapitre 3 précédent. Plus précisément, sous les hypothèses (H) et (H_*) imposées sur le champ de vecteur du système non-perturbé,

on montre l'existence d'un ouvert positivement invariant par le flot du système perturbé et que le flot existe pour tout élément de cet ouvert et tout temps supérieur au temps initiale; d'autre part, on montre que la dispersion entre les oscillateurs est bornée en tout temps. Cela signifie que le système est en état de synchronisation dans le sens de la définition 2 du Chapitre 2. Comme il a été énoncé, dans la Section 3.2 au Chapitre 3 on étudie dans cette thèse les deux systèmes suivants; le système *périodique non-perturbé*

$$\dot{x}_i = F(X, x_i), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{PNP})$$

et le système *perturbé*

$$\dot{x}_i = F(X, x_i) + H_i(X), \quad i = 1, \dots, N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{P})$$

où $N \geq 2$, $X = (x_1, \dots, x_N)$ et t_0 est le temps initial. $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $H_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 , on note $H = (H_1, \dots, H_N)$. On note dans ce qui suit par Φ^t le flot du système (P) (en particulier (PNP)).

Rappelons [Voir page 46] que les hypothèses (H) et (H_{*}) sont données par

$$(H) \quad \begin{cases} F \text{ est de classe } C^2, \quad \text{et} \quad \max\{\|F\|_B, \|dF\|_B, \|d^2F\|_B\} < +\infty, \\ F \text{ est } \mathbb{1}\text{-périodique et } \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) > 0, \end{cases}$$

$$(H_*) \quad \int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} ds < 0.$$

Rappelons aussi les deux résultats I et II

Résultat principal (I). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_{*}) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert C_r de la forme,*

$$C_r := \left\{ X = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N : \exists \nu \in \mathbb{R}, \quad \max_i |x_i - \nu| < \Delta_r(\nu) \right\},$$

où $\Delta_r : \mathbb{R} \rightarrow (0, D]$ est une fonction C^1 et 1-périodique, tel que pour toute fonction H de classe C^1 vérifiant $\|H\|_B < r$ on a

1. Existence de solution. *Le flot Φ^t du système (P) existe pour tout $X \in C_r$ et $t \geq t_0$.*
2. Synchronisation. *L'ouvert C_r est positivement invariant par Φ^t . De plus pour tout*

$$X \in C_r$$

$$\min_{1 \leq i \leq N} \inf_{t \geq t_0} \frac{d}{dt} \Phi_i^t(X) > 0 \quad \text{et} \quad |\Phi_i^t(X) - \Phi_j^t(X)| < 2D, \forall 1 \leq i, j \leq N, \forall t \geq t_0.$$

Résultat principal (II). On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction H de classe C^1 et $\mathbb{1}$ -périodique vérifiant $\|H\|_B < r$, il existe un ouvert C_r (comme défini dans le résultat (I)) et il existe une condition initiale $X_* \in C_r$ telle que

$$\Phi_i^t(X_*) = \rho t + \Psi_{i, X_*}(t), \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t \geq t_0,$$

où $\rho > 0$ et $\Psi_{i, X_*} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 et $\frac{1}{\rho}$ -périodiques.

4.1.1 Remarques et motivation

L'intérêt de nos résultats contribue dans les modèles de couplages biologiques [Win67], comme le modèle de Winfree et de Kuramoto ainsi illustrés dans l'exemple suivant.

Exemple 8. [Modèle de Winfree et de Kuramoto] Comme il a été dit dans la Section 2.3 et du Chapitre 2, le comportement collectif d'une population d'oscillateurs biologiques a été étudié par Winfree et raffiné par Kuramoto : pour une force de couplage fixée et une petite force de bruit, tous les oscillateurs se synchronisent sur une même fréquence. On considère, respectivement, les deux modèles particuliers de Winfree et Kuramoto suivants (Voir Section 2.3 et 2.4 Chapitre 2)

$$\dot{x}_i = \omega_i + \text{Win}(X, x_i), \quad i = 1 \dots N, \quad t \geq t_0. \quad (\text{W})$$

$$\dot{x}_i = \omega_i + \text{Kur}(X, x_i), \quad i = 1 \dots N, \quad t \geq t_0. \quad (\text{K})$$

où pour $(\omega, \kappa) \in \mathbb{R}_+^2$, $\text{Win}(Y, z) = \omega - \kappa \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [1 + \cos(y_j)] \sin(z)$ et $\text{Kur}(Y, z) = \omega - \kappa \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \sin(y_j - z)$ pour tout $Y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N$ et $z \in \mathbb{R}$. $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ est l'état du système, et $x_i(t)$ est la phase du $i^{\text{ème}}$ -oscillateur. Le paramètre $\kappa \geq 0$ est la force du couplage; le vecteur $(\omega_1 + \omega, \dots, \omega_N + \omega) \in \mathbb{R}^N$ est le vecteur des fréquences naturelles.

Proposition 9: Il existe un ouvert de paramètres $(\kappa, \omega) \in \mathbb{R}_+^2$, tel que les fonctions Win et Kur des systèmes (W) et (K) respectivement, vérifient les hypothèses (H) et (H*).

Démonstration. Comme Win est C^2 et $2\pi\mathbb{1}$ -périodique, il est suffisant de remarquer que

$$\min_{s \in [0, 2\pi]} \text{Win}(s\mathbb{1}, s) > 0 \iff \forall \omega > (1 + \cos(\frac{\pi}{3})) \sin(\frac{\pi}{3})\kappa, \quad \forall s \in [0, 2\pi],$$

et pour tout $\omega > (1 + \cos(\frac{\pi}{3})) \sin(\frac{\pi}{3})\kappa$ on a

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{\partial_{N+1} \text{Win}(s\mathbb{1}, s)}{\text{Win}(s\mathbb{1}, s)} ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{\kappa[1 + \cos(s)] \cos(s)}{\omega - \kappa(1 + \cos(s)) \sin(s)} ds \\ &= - \int_0^{2\pi} \frac{\kappa \sin^2(s)}{\omega - \kappa(1 + \cos(s)) \sin(s)} ds < 0. \end{aligned}$$

De même pour le modèle de Kuramoto, on a Kur est $2\pi\mathbb{1}$ -périodique, remarquons que

$$\min_{s \in [0, 2\pi]} \text{Kur}(s\mathbb{1}, s) > 0, \quad \forall \omega > 0, \quad \forall s \in [0, 2\pi],$$

et pour tout $\omega > 0$ et $\kappa > 0$ on a

$$\int_0^{2\pi} \frac{\partial_{N+1} \text{Kur}(s\mathbb{1}, s)}{\text{Kur}(s\mathbb{1}, s)} ds = - \int_0^{2\pi} \frac{\kappa}{\omega} ds = - \frac{2\pi\kappa}{\omega} < 0.$$

□

4.2 Fonction de dispersion

Notre stratégie dans ce Chapitre est d'utiliser le théorème de comparaison des équations différentielles, pour cela on introduit une "sur-solution" qui est périodique et qui vérifie quelques propriétés. On appelle cette sur-solution périodique la *fonction de dispersion* ainsi définie dans la définition qui va suivre. Plus précisément on a besoin du lemme suivant

Lemme 10: Soit $\Sigma = (\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3) \in \mathbb{R}_+^3 / \{(0, 0, 0)\}$. Soit $P_1(a, b) = \Sigma_1 a + \Sigma_2 b^2$ un polynôme défini pour tout $(a, b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et soit $\Lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction scalaire C^1 , 1-périodique et vérifiant

$$\int_0^1 \Lambda(s) ds < 0.$$

Alors pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, \Sigma_3)$ l'équation différentielle suivante

$$\frac{d}{ds} z(s) = \frac{P_1(a, b)}{\Sigma_3 - b} + \Lambda(s)z(s), \quad (4.1)$$

admet une solution $z(s)$ positive, C^1 et 1-périodique qu'on note $\Delta_{a,b}(s)$ et il existe $D_{\Sigma, \Delta} \in (0, \Sigma_3)$ tel que pour tout $D \in (0, D_{\Sigma, \Delta}]$ il existe $r > 0$ tel que la solution $\Delta_r := \Delta_{r,D}$ vérifie

$$\max_{s \in [0,1]} \Delta_r(s) \leq D.$$

Démonstration. Remarquons que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}_+^* \times (0, \Sigma_3)$, l'équation différentielle (4.1) admet une solution $\Delta_{a,b}(s)$ positive C^2 et 1-périodique de la forme

$$\Delta_{a,b}(s) = \frac{P_1(a, b)}{\Sigma_3 - b} \frac{\int_s^{1+s} \exp\left(\int_t^{1+s} \Lambda(v)dv\right) dt}{1 - \exp\left(\int_0^1 \Lambda(v)dv\right)}$$

Posons

$$\lambda_1 = - \int_0^1 \Lambda(s)ds \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \max_{0 \leq s, t \leq 1} \int_t^{1+s} \Lambda(v)dv.$$

Pour montrer le lemme on doit avoir

$$\max_{s \in [0,1]} \Delta_{a,b}(s) \leq \frac{P_1(a, b)}{\Sigma_3 - b} \frac{\exp(\lambda_2)}{1 - \exp(-\lambda_1)}.$$

C'est équivalent d'avoir r et D tels que

$$\frac{P_1(r, D)}{\Sigma_3 - D} \frac{\exp(\lambda_2)}{1 - \exp(-\lambda_1)} = D, \quad (4.2)$$

qui est vérifiée pour tout $D \in (0, D_{\Sigma, \Delta}]$ tel que

$$D_{\Sigma, \Delta} = \frac{\Sigma_3}{2} \frac{1 - \exp(-\lambda_1)}{1 - \exp(-\lambda_1) + \Sigma_2 \exp(\lambda_2)}.$$

où $r > 0$ est donné par la formule suivante

$$r = \frac{D}{\Sigma_1} \left[\Sigma_3 \frac{1 - \exp(-\lambda_1)}{\exp(\lambda_2)} - \left[\frac{1 - \exp(-\lambda_1)}{\exp(\lambda_2)} + \Sigma_2 \right] D \right].$$

□

Définition 11. Soit $D \in (0, D_{\Sigma, \Delta}]$. On appelle la fonction de dispersion associée à D la solution

$$\Delta_r := \Delta_{r,D}(s),$$

de l'équation différentielle (4.1) où r est défini par la formule

$$r = \frac{D}{\Sigma_1} \left[\Sigma_3 \frac{1 - \exp(-\lambda_1)}{\exp(\lambda_2)} - \left[\frac{1 - \exp(-\lambda_1)}{\exp(\lambda_2)} + \Sigma_2 \right] D \right], \quad (4.3)$$

avec

$$\lambda_1 = - \int_0^1 \Lambda(s) ds \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \max_{0 \leq s, t \leq 1} \int_t^{1+s} \Lambda(v) dv.$$

Définition 12. Soit $D \in (0, D_{\Sigma, \Lambda}]$. On appelle *ouvert de synchronisation associé à D* et on note C_r l'ouvert dans \mathbb{R}^N défini par

$$C_r := \left\{ X = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N : \exists \nu_X \in \mathbb{R}, \quad \max_i |x_i - \nu_X| < \Delta_r(\nu_X) \right\}, \quad (4.4)$$

où Δ_r est la fonction de dispersions associée à D .

Remarque 13. Remarquons que

$$D < D_{\Sigma, \Lambda} < \frac{\Sigma_3}{2\Sigma_2} \exp(-\lambda_2) \quad \text{et} \quad r < D \frac{\Sigma_3}{\Sigma_1} \exp(-\lambda_2).$$

4.3 Réduction du système (P)

L'objectif dans cette Section est de pouvoir montrer que le système perturbé (P) et le système périodique non perturbé (PNP) peuvent être étudiés à l'aide d'une équation différentielle scalaire à coefficients périodiques de la forme de l'équation (4.1) du lemme 10 de la Section précédente. Dans la définition suivante on définit un nouveau système non perturbé

Définition 14. Soit $X \in \mathbb{R}^N$ et soit $\mu_0 \in \mathbb{R}$, on appelle *système (SNP) associé à $\Phi^t(X)$* le système non perturbé suivant

$$\dot{\mu}_X = F(\Phi^t(X), \mu_X), \quad t \in I_X, \quad (\text{SNP})$$

où $I_X = [t_0, T_X)$ est l'intervalle maximale de la solution $X(t) := \Phi^t(X)$ du système (P) et de condition initiale $\phi^{t_0}(X) = X$. On dit que $\mu_X(t)$ est la solution du système (SNP) associée à $\Phi^t(X)$ de condition initiale $\mu_X(t_0) \in \mathbb{R}$.

On note dans tout ce qui suit

$$L := \|F\|_B + \|dF\|_B + \|d^2F\|_B, \quad (4.5)$$

$$\alpha := \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s).$$

Soit $X \in \mathbb{R}^N$ et soit $\mu_X(t)$ la solution, de condition initiale μ_0 , du système (SNP) associée à $\Phi^t(X)$. Sans perte de généralités on note aussi $X := \Phi^t(X)$ et $\mu_X := \mu_X(t)$ où Φ^t le flot du système (P) (en particulier (PNP)). On note la dispersion de phase $\delta_{i,k}(X)$ et la dispersion de phase globale $\delta(X)$

$$\delta_{i,1}(X) := x_i - \mu_X, \quad \delta_{i,2}(X) := \mu_X - x_i, \quad \text{et} \quad \delta(X) := \max_{i=1,\dots,N} |\delta_{i,1}(X)| = \max_{i=1,\dots,N} |\delta_{i,2}(X)|.$$

On va utiliser le principe de comparaison des équations différentielles et majorer la dispersion phase $\delta_{i,k}(X)$ par une fonction de dispersion convenable.

Proposition 15: On considère le système (P). Supposons que F satisfait l'hypothèse (H) et supposons que $\Phi^t(X)$ est définie sur $[t_1, t_2]$. Soit $D \in (0, \frac{\alpha}{L})$ et supposons que $\delta(X) < D$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$, alors

$$\dot{\mu}_X > -LD + \alpha > 0, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

En particulier, $t \rightarrow \mu_X(t)$ est un difféomorphisme de $[t_1, t_2]$ vers $[\mu_X(t_1), \mu_X(t_2)]$.

Démonstration. La stratégie est d'utiliser le théorème des accroissements finis. Comme $\delta(X) < D$ et par le théorème des accroissements finis, $|F(X, \mu_X) - F(\mu_X\mathbb{1}, \mu_X)| \leq \|dF\|_B D < LD$. On obtient

$$\dot{\mu}_X = F(X, \mu_X) = [F(X, \mu_X) - F(\mu_X\mathbb{1}, \mu_X)] + F(\mu_X\mathbb{1}, \mu_X) > -LD + \alpha.$$

Par hypothèse $0 < D < \frac{\alpha}{L}$ alors $\dot{\mu}_X(t) > -LD + \alpha > 0$ pour tout $t \in [t_1, t_2]$. □

Proposition 16: On considère le système (P). Supposons que F satisfait l'hypothèse (H) et supposons que $\Phi^t(X)$ est définie sur $[t_1, t_2]$. Soit $D \in (0, \frac{\alpha}{L})$ et $r > 0$. Supposons que

$$\|H\|_B < r, \quad \text{et} \quad \delta(X) < D, \quad \forall t \in [t_1, t_2].$$

Alors pour tout $i := 1, \dots, N$ et $k \in \{1, 2\}$ et tout $s \in [\mu_X(t_1), \mu_X(t_2)]$

$$\frac{d}{ds} \delta_{i,k}^*(s) < \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha r + LD^2(L + 2\alpha)}{\alpha - LD} + \frac{\partial F_{N+1}(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} \delta_{i,k}^*(s), \quad (4.6)$$

où

$$\delta_{i,k}^*(s) := \delta_{i,k}(X(\mu_X^{-1}(s))) \text{ et } X(\mu_X^{-1}(s)) = (x_1(\mu_X^{-1}(s)), \dots, x_N(\mu_X^{-1}(s))).$$

Démonstration. La stratégie dans cette preuve est d'utiliser la formule de Taylor plusieurs fois et de choisir un changement de variable convenable. Soit $D \in (0, \frac{\alpha}{L})$ et supposons que $\delta(X) < D$ sur $[t_1, t_2]$. D'un côté, par la formule Taylor il existe $c_i \in [x_i, \mu_X]$ tel que pour tout $i = 1, \dots, N$

$$\begin{aligned} F(X, x_i) - F(X, \mu_X) &= \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,1} + \frac{1}{2}\partial_{N+1}[\partial_{N+1}F(X, c_i)]\delta_{i,1}^2 \\ &< \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,1} + \frac{1}{2}\|d\partial_{N+1}F\|_B D^2 \\ &< \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,1} + \frac{1}{2}LD^2 \\ &< \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,1} + LD^2. \end{aligned}$$

Pour $k = 2$ on obtient aussi

$$\begin{aligned} F(X, \mu_X) - F(X, x_i) &= -\partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,1} - \frac{1}{2}\partial_{N+1}[\partial_{N+1}F(X, c_i)]\delta_{i,1}^2 \\ &= \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,2} - \frac{1}{2}\partial_{N+1}[\partial_{N+1}F(X, c_i)]\delta_{i,2}^2 \\ &< \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,2} + LD^2. \end{aligned}$$

D'un autre côté $\|H\|_B < r$. Par **(P)** et **(SNP)** on trouve pour tout $i = 1, \dots, N$ et $k \in \{1, 2\}$

$$\frac{d}{dt}\delta_{i,k} = H_i(X, x_i) + [F(X, x_i) - F(X, \mu_X)] < r + LD^2 + \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,k}. \quad (4.7)$$

On utilise encore la Formule de Taylor pour obtenir

$$\begin{aligned} \partial_{N+1}F(X, \mu_X)\delta_{i,k} &= [\partial_{N+1}F(X, \mu_X) - \partial_{N+1}F(\mu_X \mathbb{1}, \mu_X) + \partial_{N+1}F(\mu_X \mathbb{1}, \mu_X)]\delta_{i,k} \\ &< \|d\partial_{N+1}F\|_B D |\delta_{i,j}| + \partial_{N+1}F(\mu_X \mathbb{1}, \mu_X)\delta_{i,k} \\ &< LD^2 + \partial_{N+1}F(\mu_X \mathbb{1}, \mu_X)\delta_{i,k}. \end{aligned}$$

Par (4.7) on déduit que pour tout $i = 1, \dots, N$ et $k \in \{1, 2\}$

$$\frac{d}{dt}\delta_{i,k} < r + 2LD^2 + \partial_{N+1}F(\mu_X \mathbb{1}, \mu_X)\delta_{i,k}.$$

Par la proposition 15, $\dot{\mu}_X > \alpha - LD$. On considère le changement de variable : $t \rightarrow s := \mu_X(t)$ sur $[t_1, t_2]$. Posons $\delta_{i,k}^*(s) := \delta_{i,k}(X(\mu_X^{-1}(s)))$ et

$X(\mu_X^{-1}(s)) = (x_1(\mu_X^{-1}(s)), \dots, x_N(\mu_X^{-1}(s)))$. Par conséquent pour tout $s \in [\mu_X(t_1), \mu_X(t_2)]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta_{i,k}(X) &= \frac{d}{ds}\delta_{i,k}^*(s)\frac{d}{dt}\mu_X(t) < r + 2LD^2 + \partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)\delta_{i,k}^*(s) \\ \frac{d}{ds}\delta_{i,k}^*(s) &= \frac{r + 2LD^2}{\dot{\mu}_X} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{\dot{\mu}_X}\delta_{i,k}^*(s) < \frac{r + 2LD^2}{\alpha - LD} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{\dot{\mu}_X}\delta_{i,k}^*(s) \\ &= \frac{r + 2LD^2}{\alpha - LD} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}\frac{F(s\mathbb{1}, s)}{\dot{\mu}_X}\delta_{i,k}^*(s). \end{aligned}$$

Par le théorème des accroissements finis et sachant que $\delta(X) < D$, le changement de variable $t \rightarrow s := \mu_X(t)$ implique que

$$|F(\mu_X\mathbb{1}, \mu_X) - \dot{\mu}_X| = |F(\mu_X\mathbb{1}, \mu_X) - F(X, \mu_X)| < \|dF\|_B D < LD,$$

qui est équivalente à

$$\frac{F(s\mathbb{1}, s)}{\dot{\mu}_X} = 1 + \theta(s), \quad |\theta(s)| < \frac{LD}{\alpha - LD}, \quad \forall s \in [\mu_X(t_1), \mu_X(t_2)].$$

Comme $|\frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}| < \frac{L}{\alpha}$ et comme $|\delta_{i,k}(t)| \leq \delta(X) < D$ sur $[t_1, t_2]$ on obtient finalement pour tout $s \in [\mu_X(t_1), \mu_X(t_2)]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\delta_{i,k}^*(s) &< \frac{r + 2LD^2}{\alpha - LD} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}[1 + \theta(s)]\delta_{i,k}^*(s) \\ &< \frac{r + 2LD^2}{\alpha - LD} + \frac{L^2}{\alpha} \frac{D^2}{\alpha - LD} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}\delta_{i,k}^*(s) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha(r + 2LD^2) + L^2 D^2}{\alpha - LD} + \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}\delta_{i,k}^*(s). \end{aligned}$$

□

Les lemmes précédents nous permettent de montrer maintenant l'existence d'un ouvert de conditions initiales positivement Φ^t -invariant, plus précisément on a la proposition suivante.

Proposition 17: Soit F vérifiant les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* \in (0, 1)$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$, il existe $r > 0$ et un ouvert de synchronisation C_r (ainsi défini dans la définition 12), tels que pour toute fonction H vérifiant $\|H\|_B < r$, on a

$$\forall X \in C_r : \Phi^t(X) \in C_r, \quad \forall t \in I_X.$$

Démonstration. Par la notation (4.5) l'hypothèse (H) implique que

$$\max\left\{\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} ds : 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1\right\} \leq \frac{L}{\alpha}.$$

Soit $D_{\Sigma, \Lambda}$ la constante définie dans le lemme 10 telle que Σ et λ sont définies par

$$\Sigma = \left(\frac{1}{L}, 2 + \frac{L}{\alpha}, \frac{\alpha}{L}\right), \quad \text{et} \quad \Lambda(s) = \frac{\partial_{N+1}F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)}.$$

Posons $D_* := D_{\Sigma, \Lambda}$. Soit $D \in (0, D_*]$ et soit la fonction de dispersion Δ_r associée à D (voir définition 11 de la Section 4.2). La fonction de dispersion vérifie l'équation différentielle linéaire non homogène scalaire et 1-périodique suivante

$$\frac{d}{ds} \Delta_r(s) = \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha r + LD^2(L + 2\alpha)}{\alpha - LD} + \frac{F_{N+1}(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} \Delta_r(s),$$

et vérifie la majoration suivante

$$\max_{s \in [0, 1]} \Delta_r(s) \leq D.$$

Soit C_r l'ouvert de synchronisation associé à D , ainsi défini dans la définition 12 de la section 4.2.

Pour toute fonction H vérifiant $\|H\|_B < r$, où r est donné par la formule (4.3), soit $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t)) := \Phi^t(X)$ solution du système (P) de condition initiale $X = (x_1, \dots, x_N) \in C_r$, alors il existe $\nu_X \in \mathbb{R}$ tel que $\max_{1 \leq i \leq N} |x_i - \nu_X| < \Delta_r(\nu_X) \leq D$. Soit $\mu_X(t)$ solution du système (SNP) associé à $X(t)$ et de condition initiale $\mu_X(t_0) = \nu_X$, alors $\delta(X) < \Delta_r(\mu_X(t_0))$. Soit

$$T^* := \sup\{t \in I_X : \forall t_0 < s < t, \max_i |x_i(s) - \mu_X(s)| < \Delta_r(\mu_X(s))\}.$$

Par continuité $t_0 \neq T^*$. La proposition est prouvée si on montre que $T^* = \sup\{t \in I_X\}$.

Supposons par contradiction que $T^* \in I_X$. On utilise le changement de variable

$s = \mu_X(t)$. La proposition 16 implique que pour tout $s \in [\nu_X, \mu_X^* := \mu_X(T^*)]$

$$\frac{d}{ds} \delta_{i,k}^*(s) < \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha r + LD^2(L + 2\alpha)}{\alpha - LD} + \frac{F_{N+1}(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} \delta_{i,k}^*(s), \quad \forall s \in [\nu_X, \mu_X^*].$$

Par suite il existe $1 \leq i_0 \leq N$ et $k \in \{1, 2\}$ tel que $|\delta_{i_0, k_0}^*(\mu_X^*)| = \Delta_r(\mu_X^*)$. Sans perte de

généralités, supposons que $\delta_{i_0, k_0}^*(\mu_X^*) = \Delta_r(\mu_X^*)$, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \delta_{i_0, k_0}^*(\mu_X^*) &< \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha r + LD^2(L + 2\alpha)}{\alpha - LD} + \frac{F_{N+1}(\mu_X^* \mathbb{1}, \mu_X^*)}{F(\mu_X^* \mathbb{1}, \mu_X^*)} \delta_{i_0, k_0}^*(\mu_X^*) \\ &= \frac{1}{\alpha} \frac{\alpha r + LD^2(L + 2\alpha)}{\alpha - LD} + \frac{F_{N+1}(\mu_X^* \mathbb{1}, \mu_X^*)}{F(\mu_X^* \mathbb{1}, \mu_X^*)} \Delta_r(\mu_X^*) = \frac{d}{ds} \Delta_r(\mu_X^*). \end{aligned}$$

Alors il existe $s < \mu_X^*$ proche de μ_X^* tel que $\delta_{i_0, k_0}^*(s) > \Delta_r(s)$ autrement dit il existe $t < T^*$ proche de T^* tel que $\delta_{i_0, k_0}(t) > \Delta_r(\mu_X(t))$. On obtient donc une contradiction. Par conséquent pour tout $t \in I_X$, il existe $\nu_X^t := \mu_X(t) \in \mathbb{R}$ tel que $\max_i |x_i(t) - \nu_X^t| < \Delta_r(\nu_X^t)$, ainsi $X(t) \in C_r$ pour tout $t \in I_X$. \square

4.4 Existence de solution et de l'état de synchronisation

On montre maintenant le résultat principal non-linéaire I qui consiste à montrer l'existence de solution pour tout temps à partir du temps initial et de montrer l'existence de l'état de synchronisation défini dans la Section 2.1 du Chapitre 2. Ce résultat principal I est résumé par le théorème suivant

Théorème 18: Soit F vérifiant les hypothèses (H) et (H_{*}) alors il existe $D_* \in (0, 1)$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$, il existe $r > 0$ et il existe un ouvert de synchronisation C_r (défini dans la définition 12), tels que pour toute fonction H vérifiant $\|H\|_B < r$, et tout $X \in C_r$, on a $I_X = [t_0, +\infty[$. De plus C_r est positivement Φ^t -invariant et

$$\forall X \in C_r, \exists \nu_X \in \mathbb{R} : |\Phi_i^t(X) - \mu_X(t)| < D, \forall i = 1, \dots, N, \forall t \geq t_0,$$

où $\mu_X(t)$ est la solution du système (SNP) associé à $\Phi^t(X)$ et de condition initiale $\mu_X(t_0) = \nu_X$.

Démonstration. En utilisant la proposition 17, il est suffisant de montrer que $I_X = [t_0, +\infty[$. Supposons par contradiction qu'il existe un instant $t_0 < t_X < +\infty$ tel que la solution soit définie uniquement sur l'intervalle maximal $I_X = [t_0, t_X[$. Alors $\lim_{t \rightarrow t_X} \|\Phi^t(t)\| = +\infty$. La proposition 17 implique que

$$|\Phi_i^t(X) - \Phi_j^t(X)| < D, \forall 1 \leq i, j \leq N, \forall t_X > t \geq t_0,$$

Alors pour tout $i = 1, \dots, N$,

$$\alpha - LD - r < \frac{d}{dt}x_i < \max_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) + LD + r, \quad \forall t_X > t \geq t_0.$$

Par suite $\|\Phi^t(X)\| < +\infty$ pour tout $t \in [t_0, t_X]$, en particulier $\lim_{t \rightarrow t_X} \|\Phi^t(t)\| < +\infty$, d'où la contradiction. \square

4.5 Orbite périodique et nombre de rotation

On termine maintenant le Chapitre par la preuve du résultat **II**. Rappelons que l'accrochage périodique dans le sens de la définition **3** de la Section **2.1** du Chapitre **2**, implique que la phase moyenne $\frac{x_i(t)}{t}$ admet une limite ρ quand $t \rightarrow +\infty$ et cette limite est indépendante des oscillateurs. À notre avis l'existence de cette limite n'a pas été prouvée sauf dans des cas particuliers où un système périodique présente une certaine stabilité par rapport aux conditions initiales, voir à ce sujet [Sai71] et notre résultat en Annexe **B**. On va voir dans cette Section, dans le cas où la perturbation H est $\mathbb{1}$ -périodique et en particulier le système périodique non perturbé (**PNP**), il existe une solution $X(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))$ en accrochage périodique, autrement dit il existe un nombre de rotation $\rho > 0$ tel que $x_i(t) = \rho t + \Psi_i(t)$, $\forall i := 1, \dots, N$ où $\Psi_i(t)$ sont des fonctions scalaires et $1/\rho$ -périodiques. La stratégie est de fixer $\mu_X(t_0) = \mu \in \mathbb{R}$ d'introduire la section transverse compact et convexe Σ dans l'adhérence de \bar{C}_r , on introduit aussi la fonction de Poincaré $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ qui est définie par le premier instant ou le temps de retour où la moyenne de $X(t)$ vaut zéro. On utilise le théorème de Brouwer pour montrer le point fixe de P .

Lemme 19: Soit F satisfaisant (H) et (H_*) . Pour toute fonction H $\mathbb{1}$ -périodique vérifiant $\|H\|_B < r$ soit C_r l'ouvert de synchronisation positivement Φ^t -invariant donné par le théorème **18**. On définit l'ensemble Σ par

$$\Sigma = \{X \in \mathbb{R}^N, \max_i |x_i| < \Delta_r(0)\} \subset C_r.$$

Alors il existe une fonction C^1 (fonction de Poincaré) $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ et il existe un temps

de retour $\theta : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que

$$\begin{aligned}\Phi^{t_0+\theta(X)}(X) &= P(X) + \mathbb{1}, \quad \mathbb{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^N, \\ \frac{1}{L} &< \theta(X) < \frac{2}{\alpha}.\end{aligned}$$

Démonstration. Soit $X \in \Sigma \subset C_r$. Soit $\mu_X(t)$ solution du système (SNP) associé à (P) de condition initiale $\mu_X(t_0) = 0$. Soit τ_X l'inverse de la fonction $\mu_X := \mu_X(t)$. Par la proposition 15 et par le théorème 18 on obtient

$$\alpha - LD < \dot{\mu}_X(t) < L.$$

La remarque (13) dans la Section 4.2 montre que pour $D < \frac{\alpha}{2L}$ on a

$$\frac{\alpha}{2} < \dot{\mu}_X(t) < L.$$

On définit le temps de retour par $\theta(X) := \tau_X(1) - t_0$. Alors $\int_{t_0}^{\tau_X(1)} \dot{\mu}_X(t) dt = 1$ implique la deuxième estimation du lemme. Rappelons que $\max_{1 \leq i \leq N} |\Phi_i^t(X) - \mu_X(t)| < \Delta(\mu_X(t)) < D$ pour tout $t \geq t_0$. Posons $P(X) := \Phi^{t_0+\theta(X)}(X) - \mathbb{1}$, $P = (P_1, \dots, P_N)$. Comme $\mu_X(t_0 + \theta(X)) = 1$, alors

$$\max_{1 \leq i \leq N} |P_i(X)| = \max_{1 \leq i \leq N} |\Phi_i^{t_0+\theta(X)}(X) - 1| < \Delta(1) = \Delta(0).$$

On a par conséquent montré que P est une fonction de Σ dans lui même. □

Corollaire 20: La fonction de Poincaré P définie dans le lemme 19 admet un point fixe $X_* \in \Sigma$.

Démonstration. Remarquons que $\bar{\Sigma}$ est compact et convexe et que la fonction $P : \bar{\Sigma} \rightarrow \bar{\Sigma}$ est continue. Par le théorème du point fixe de Brouwer, la fonction P admet un point fixe qu'on note $X_* = (x_{1,*}, \dots, x_{N,*}) \in \bar{\Sigma}$. Notons que $X_* \notin \partial\bar{\Sigma}$. Supposons par contradiction que $X_* \in \partial\bar{\Sigma}$, alors il existe $1 \leq i_0 \leq N$, tel que $|x_{i_0,*}| = \Delta_r(0)$; Posons

$$X_*(t) = \Phi^t(X_*), \quad X_*(t) = (x_{1,*}(t), \dots, x_{N,*}(t)),$$

Soit $\mu_{X_*}(t)$ solution du système (SNP) associé à $X_*(t)$ et de condition initiale $\mu_{X_*}(t_0) = 0$. On note

$$\delta_{i,1}(X_*(t)) = x_{i,*}(t) - \mu_{X_*}(t), \quad \text{et} \quad \delta_{i,2}(X_*(t)) = \mu_{X_*}(t) - x_{i,*}(t).$$

Comme dans la preuve du théorème 18, il existe $1 \leq i \leq N$ et $k \in \{1, 2\}$, il existe un instant $t' > t_0$ proche de t_0 tel que $\delta_{i_0, k}(X_*(t)) < \Delta_r(\mu_{X_*}(t))$ pour tout $t' > t > t_0$; on répétant le même argument pour $1 \leq i_1 \leq N$ et $k \in \{1, 2\}$ satisfaisant l'égalité $\delta_{i_1, k}(X_*(t)) = \Delta_r(\mu_{X_*}(t))$, on obtient forcément $\delta(X_*(t^*)) < \Delta_r(\mu_{X_*}(t^*))$ pour un certain instant $t^* > t_0$. Mais par le théorème 18, cela devra impliquer que $\max_{1 \leq i \leq N} |x_{i,*}(t) - \mu_{X_*}(t)| < \Delta_r(\mu_{X_*}(t))$ pour tout $t > t^*$: qui est contradictoire avec le fait que

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq i \leq N} |\Phi_i^{t_0 + \theta(X_*)}(X_*) - \mu_{X_*}(t_0 + \theta(X_*))| &= \max_{1 \leq i \leq N} |x_{i,*} + 1 - 1| \\ &= \Delta_r(0) = \Delta_r(\mu_{X_*}(t_0 + \theta(X_*))), \end{aligned}$$

sachant que $\mu_{X_*}(t_0 + \theta(X_*)) = 1$ et que $\Phi^{t_0 + \theta(X_*)}(X_*) = X_* + \mathbb{1}$. \square

Le résultat principale II qui consiste à montrer l'existence d'une solution accrochage périodique est prouvé comme ce qui suit et qui est une conséquence du corollaire précédent.

Preuve du résultat II. Le corollaire 20 montre l'existence d'un point fixe $X_* \in C_r$ et un temps de retour $\theta_* > 0$ tel que

$$\Phi^{t_0 + \theta_*}(X_*) = X_* + \mathbb{1}.$$

Par la propriété d'unicité de solution d'équations différentielles, on a

$$\Phi^{\theta_* + t}(X_*) = \Phi^t(X_*) + \mathbb{1}, \quad \forall t \geq t_0.$$

Soit $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ la fonction définie par

$$\Psi(s) := \Phi^s(X_*) - \frac{s}{\theta_*} \mathbb{1} = (\Psi_1(s), \dots, \Psi_N(s)), \quad \forall s \geq t_0.$$

Le théorème est prouvé si on montre que les fonctions Ψ_i sont des fonctions périodiques de période θ_* . En effet, on a

$$\Psi(s + \theta_*) = \Phi^{s + \theta_*}(X_*) - \frac{s + \theta_*}{\theta_*} \mathbb{1} = \Phi^s(X_*) + \mathbb{1} - \frac{s + \theta_*}{\theta_*} \mathbb{1} = \Psi(s).$$

En outre par le lemme 19 le temps de retour θ_* est uniformément majoré. \square

4.6 Conclusion

À l'aide du principe de comparaison de solution d'équations différentielles on a montré que la distance entre les composantes d'une solution du système (P) de condition initiale dans l'ouvert de synchronisation est contrôlée par la fonction de dispersion, cela permet d'un autre côté de montrer que la solution existe et définie pour tout temps supérieur à l'instant initial. Par conséquent toute solution du système (P) de condition initiale dans l'ouvert de synchronisation est en état de synchronisation définie dans la Section 2.1 du Chapitre 2. Dans le cas où le système (P) est $\mathbb{1}$ -périodique, l'invariance de l'ouvert de synchronisation nous a permis de montrer à l'aide du théorème du point fixe de Brouwer l'existence d'une solution en accrochage périodique et l'existence d'un nombre de rotation. Ces résultats s'appliquent en particulier au système périodique non perturbé (PNP).

Chapitre 5

Résultat numérique : Application au modèle de Winfree

Sommaire

5.1 Introduction et rappel	65
5.1.1 Preuve du théorème 21	67
5.2 Forme explicite du Modèle de Winfree	74
5.3 Condition nécessaire d'existence de la synchronisation	75
5.4 Cas de système non-perturbé	80
5.5 Conclusion	82

5.1 Introduction et rappel

Dans ce Chapitre on remarque numériquement [OKT16] que l'hypothèse de synchronisation (H_*) introduite précédemment n'est pas uniquement une condition suffisante mais une condition nécessaire pour l'existence de l'état de synchronisation. Pour avoir de tels résultats numériques on va se baser sur une version explicite du modèle de Winfree. L'aspect d'auto-organisation de populations biologiques a été étudié par Winfree [Win67] en 1967. À faible couplage il observe la synchronisation dans l'interaction

des neurones, des flash lumineux des lucioles en Asie méridionale, cellules pacemaker cardiaque,...etc.

Rappelons la définition du modèle de Winfree introduite dans la Section 2.3 du Chapitre 2 ; le modèle de Winfree est donné par l'équation

$$\dot{x}_i = \omega_i - \kappa \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(x_j)R(x_i), \quad i = 1..N, \quad (5.1)$$

où P et R sont deux fonctions périodiques, $X(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_N(t))$ est l'état du système et $x_i(t)$ est la phase du $i^{\text{ème}}$ oscillateur. Le paramètre $\kappa \geq 0$ est la force de couplage ; les fréquences naturelles ω_i vérifient

$$1 - \gamma \leq \omega_i \leq 1 + \gamma, \quad \forall i = 1..N,$$

où $\gamma \in [0, 1[$ est la force du bruit.

Le modèle de Winfree (5.1) est un cas particulier du système (P) introduit dans le Chapitre 4. En effet, il suffit de prendre pour chaque κ constant

$$F(Y, z) = 1 - \kappa \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N P(y_j)R(z), \quad Y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \quad z \in \mathbb{R},$$

et H la fonction constante, vérifie

$$H = (\omega_1 - 1, \omega_2 - 1, \dots, \omega_N - 1), \quad \text{et} \quad \|H\|_B \leq \max_{1 \leq i \leq N} |\omega_i - 1| \leq \gamma. \quad (5.2)$$

Lorsque $N = 1$ et $\omega_1 = 1$, le modèle de Winfree est réduit à l'équation scalaire

$$\dot{x} = 1 - \kappa P(x)R(x). \quad (5.3)$$

On appelle *valeur critique de bifurcation de la synchronisation*, la valeur de la force de couplage κ_* qui sépare l'état mort et l'état de synchronisation dans le modèle de Winfree réduit précédent, soit

$$\kappa_* := \max\{\kappa > 0 : 1 - \kappa P(x)R(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}\}. \quad (5.4)$$

(Notons que $\kappa_* = +\infty$ si $\max_x P(x)R(x) \leq 0$.) Dans ce cas particulier du modèle de Winfree, les hypothèses (H) et (H_{*}) sont donc équivalentes aux hypothèses suivantes :

H1 la force du couplage κ est prise dans l'intervalle $(0, \kappa_*)$,

H2 les fréquences naturelles ω_i sont choisies dans $(1 - \gamma, 1 + \gamma)$ avec $\gamma \in (0, 1)$,

$$\text{H3} \int_0^{2\pi} \frac{P(s)R'(s)}{1 - \kappa P(s)R(s)} ds > 0, \forall \kappa \in (0, \kappa_*).$$

L'application des deux premiers résultats non-linéaires **I** et **II** du résultat non-linéaire donné dans la Section 3.2.3 du Chapitre 3 permettent de montrer l'existence de l'état la synchronisation et l'accrochage périodique dans le modèle de Winfree dans le cas $\kappa \in (0, \kappa_*)$ et $\gamma \approx 0$.

Les résultats non-linéaires **I** et **II** s'appliquent au modèle de Winfree comme suit

Théorème 21: [Voir [OKT16]] On considère le modèle de Winfree (5.1) satisfaisant les hypothèses H1–H3. Alors, il existe un ouvert U de paramètres $(\gamma, \kappa) \in (0, 1) \times (0, \kappa_*)$, indépendant de N , contenant dans son adhérence $\{0\} \times [0, \kappa_*]$ tels que pour tout paramètre $(\gamma, \kappa) \in U$, pour tout $N \geq 2$ et pour tout choix des fréquences naturelles $(\omega_i)_{i=1}^N$,

1. Il existe un ouvert $C_{\gamma, \kappa}^N$ positivement invariant par le flot, de la forme,

$$C_{\gamma, \kappa}^N := \left\{ X = (x_i)_{i=1}^N \in \mathbb{R}^N : \max_{i,j} |x_j - x_i| < \Delta_{\gamma, \kappa} \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i \right) \right\},$$

où $\Delta_{\gamma, \kappa} : \mathbb{R} \rightarrow (0, 1)$ est une fonction C^2 et 2π -périodique indépendante de N . Autrement dit, pour tout paramètre $(\gamma, \kappa) \in U$, les oscillateurs sont synchronisés pour toute condition initiale $X(0) \in C_{\gamma, \kappa}$.

2. Il existe une condition initiale particulière $(x_i^*(0))_{i=1}^N \in C_{\gamma, \kappa}^N$, et un nombre de rotation $\Omega_{\gamma, \kappa} > 0$ tel que

$$x_i^*(t) = \Omega_{\gamma, \kappa} t + \Psi_{i, \gamma, \kappa}^N(t), \quad \forall i = 1, \dots, N, \forall t \geq 0,$$

où $\Psi_{i, \gamma, \kappa}^N : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction C^2 et $2\pi/\Omega_{\gamma, \kappa}$ -périodique, uniformément bornée par rapport à N . En d'autres termes, les oscillateurs de la solution correspondant à cet condition initiale particulière sont en accrochage périodique.

5.1.1 Preuve du théorème 21

On va voir dans cette Section comment les techniques de la preuve du Résultat principal **I** et **II**, utilisées dans le Chapitre 4, s'appliquent au modèle de Winfree. On montre donc le théorème 21.

Soit $X = (x_1, \dots, x_N)$ une solution de (5.1). On note la moyenne $\mu(t)$ et la dispersion $\delta(t)$ de X les quantités suivantes

$$\mu(t) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j(t), \quad \delta(t) := \max_{i,j} |\delta_{i,j}(t)|, \quad \delta_{i,j}(t) := x_i(t) - x_j(t). \quad (5.5)$$

Contrairement au choix d'une solution du système (SNP) associée à une solution du système (P), utilisée dans la preuve du Résultat principal I et II dans le Chapitre 4, on a choisi ici μ comme étant la moyenne de la somme des phases des oscillateurs. En effet, lorsque les oscillateurs se synchronisent on peut choisir simplement une direction de leurs évolutions. On cherche dans la suite un ouvert de paramètres U de la forme

$$U = \{(\gamma, \kappa) \in (0, 1) \times (0, \kappa_*) : 0 < \gamma < \Gamma(\kappa)\},$$

et une "fonction de dispersion" $\Delta_{\gamma, \kappa}$ (comme définie dans la Section 4.2 du Chapitre 4) qui est 2π -périodique tels que, si $X(t)$ est solution du modèle de Winfree (5.1) satisfaisant H1 – H3,

$$\delta(0) < \Delta_{\gamma, \kappa}(\mu(0)) \implies \delta(t) < \Delta_{\gamma, \kappa}(\mu(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Comme a été énoncé dans la Section 4.2 la fonction de dispersion est obtenue en utilisant le lemme suivant [Voir page 53]

Lemme 22: On considère l'équation différentielle affine suivante

$$\frac{d}{ds} \Delta(s) = \alpha - \beta(s) \Delta(s), \quad (5.6)$$

où $\alpha > 0$ et β est une fonction 2π -périodique de classe C^1 satisfaisant

$$\int_0^{2\pi} \beta(s) ds > 0.$$

Alors, il existe une unique solution de (5.6) de classe C^2 , positive et 2π -périodique donnée par

$$\Delta(s) := \alpha \frac{\int_s^{s+2\pi} \exp\left(\int_s^t \beta(u) du\right) dt}{\exp\left(\int_0^{2\pi} \beta(u) du\right) - 1}.$$

De plus,

$$\max_{s \in \mathbb{R}} \Delta(s) \leq \alpha 2\pi \frac{\exp\left(\int_0^{2\pi} \beta^-(u) du\right)}{1 - \exp\left(-\int_0^{2\pi} \beta(u) du\right)}$$

où $\beta^- := \max(0, -\beta)$, et $\beta^+ := \max(0, \beta)$.

Le lemme suivant montre que, si la dispersion de la solution $X(t)$ de (5.1) est a priori bornée, $\delta(t) < D$, $\forall t \in [0, t_*]$, alors chaque $\delta_{i,j}(t)$ est une sous-solution d'une équation différentielle affine de la forme de l'équation (5.6) du lemme 22.

Lemme 23: Supposons pour $(\gamma, \kappa) \in (0, 1) \times (0, \kappa_*)$, il existe $D > 0$ et $t_* > 0$ tel que pour tout $t \in [0, t_*]$, la solution $X(t)$ du modèle de Winfree (5.1) satisfait $\delta(t) < D$. Alors pour tout $1 \leq i, j \leq N$, et $t \in [0, t_*]$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta_{i,j} &< (2\gamma + C\kappa D^2) - \kappa P(\mu)R'(\mu)\delta_{i,j}, \\ \left| \frac{d}{dt} \delta_{i,j} \right| &\leq 2\gamma + C\kappa D^2 + \tilde{C}\kappa D, \end{aligned}$$

où $\delta_{i,j}(t) := x_i(t) - x_j(t)$, $\mu(t) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x_k(t)$,

$$C := \|P\|_\infty \|R''\|_\infty + \|P'\|_\infty \|R'\|_\infty, \text{ et } \tilde{C} := \|P'\|_\infty \|R\|_\infty + \|P\|_\infty \|R'\|_\infty.$$

Démonstration. De (5.1) on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d\delta_{i,j}}{dt} &= \omega_i - \omega_j - \frac{\kappa}{N} \sum_{k=1}^N P(x_k) [R(x_i) - R(x_j)] \\ &= \omega_i - \omega_j - \kappa P(\mu)R'(\mu)\delta_{i,j} + \frac{\kappa}{N} \sum_{k=1}^N E_{i,j,k} \end{aligned}$$

où $E_{i,j,k} = P(\mu)R'(\mu)(x_i - x_j) - P(x_k)[R(x_i) - R(x_j)]$ qu'on majore en utilisant l'estimation suivante

$$\begin{aligned} P(x_k)[R(x_i) - R(x_j)] &= P(\mu)[R(x_i) - R(x_j)] + \tilde{E}_{i,j,k}, \\ |\tilde{E}_{i,j,k}| &\leq \|P'\|_\infty \|R'\|_\infty |x_k - \mu| |x_i - x_j| < \|P'\|_\infty \|R'\|_\infty D^2, \\ P(\mu)[R(x_i) - R(x_j)] &= P(\mu)R'(\mu)(x_i - x_j) + \hat{E}_{i,j,k}, \\ |\hat{E}_{i,j,k}| &< \|P\|_\infty \|R''\|_\infty D^2, \end{aligned}$$

et $|\omega_i - \omega_j| \leq 2\gamma$. □

Dans le lemme suivant on va donner une estimation de μ . On trouvera par suite une condition sur les paramètres (γ, κ) pour que $\frac{d\mu}{dt} > 0$ ce qui permet d'avoir des oscillateurs dynamiques au sens de la définition 1 du Chapitre 2. La constante \tilde{C} est définie dans le lemme 23.

Lemme 24: Sous les hypothèses du lemme 23, on a

$$\left| 1 - \kappa P(\mu)R(\mu) - \frac{d}{dt}\mu \right| \leq \gamma + \tilde{C}\kappa D, \quad \forall t \in [0, t_*].$$

Démonstration. On utilise l'approximation suivante $|x_i - \mu| \leq D$, $|1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k| \leq \gamma$,

$$\begin{aligned} \frac{d\mu}{dt} &= 1 - \kappa P(\mu)R(\mu) - \left[1 - \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \omega_k \right] + \frac{\kappa}{N} \sum_{k=1}^N E_k, \quad \text{où} \\ E_k &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left[P(\mu)(R(\mu) - R(x_i)) - (P(x_k) - P(\mu))R(x_i) \right]. \quad \square \end{aligned}$$

Maintenant on suppose que (γ, κ) sont choisis comme suit

$$1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D - \frac{\kappa}{\kappa_*} > 0. \quad (5.7)$$

Relativement à la définition de la valeur κ_* dans l'équation (5.4), la condition (5.7) implique que $\frac{d\mu}{dt} > 0$ sur $[0, t_*]$. On considère donc le changement de variable $s = \mu(t)$ de $[0, t_*]$ dans $[s_0, s_*]$ où $s_0 = \mu(0)$ et $s_* = \mu(t_*)$. Soit τ l'inverse de la fonction $\mu(t)$

$$\tau : \begin{cases} [s_0, s_*] & \rightarrow [0, t_*] \\ s & \mapsto \tau(s) \end{cases}. \quad (5.8)$$

On définit $x_i^*(s) = x_i \circ \tau(s)$, $X^*(s) = (x_1^*(s), \dots, x_N^*(s))$, $\delta_{i,j}^*(s) = x_i^*(s) - x_j^*(s)$. Avec la nouvelle variable s , le lemme 23 admet la forme suivante.

Lemme 25: Sous les hypothèses du lemme 23 et sous la condition (5.7). On a

$$\frac{d}{ds}\delta_{i,j}^*(s) < \alpha(\gamma, \kappa, D) - \beta_\kappa(s)\delta_{i,j}^*(s), \quad \forall s \in [s_0, s_*],$$

où

$$\begin{aligned} \alpha(\gamma, \kappa, D) &:= \frac{2\gamma + C\kappa D^2}{1 - \kappa/\kappa_*} + \frac{(2\gamma + C\kappa D^2 + \tilde{C}\kappa D)(\gamma + \tilde{C}\kappa D)}{(1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D - \kappa/\kappa_*)(1 - \kappa/\kappa_*)}, \\ \beta_\kappa(s) &:= \frac{\kappa P(s)R'(s)}{1 - \kappa P(s)R(s)}. \end{aligned}$$

Démonstration. On a $\frac{d}{dt}\delta_{i,j} = \frac{d}{ds}\delta_{i,j}^* \frac{d}{dt}\mu$, donc

$$\frac{d}{ds}\delta_{i,j}^*(1 - \kappa P(\mu)R(\mu)) = \frac{d}{dt}\delta_{i,j} + \frac{d}{ds}\delta_{i,j}^* \left(1 - \kappa P(s)R(s) - \frac{d}{dt}\mu \right).$$

Par définition de la valeur κ_* on obtient $1 - \kappa P(\mu)R(\mu) \geq 1 - \kappa/\kappa_* > 0$. Du lemme 23,

on déduit

$$\frac{d}{ds}\delta_{i,j}^* \leq \frac{(2\gamma + C\kappa D^2) + \frac{d}{ds}\delta_{i,j}^* \left(1 - \kappa P(s)R(s) - \frac{d}{dt}\mu\right)}{1 - \kappa P(\mu)R(\mu)} - \beta_\kappa(s)\delta_{i,j}.$$

Du lemme 24, on obtient finalement

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mu &\geq 1 - \kappa P(\mu)R(\mu) - \gamma - \tilde{C}\kappa D \geq 1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D - \kappa/\kappa_*, \\ \left|\frac{d}{ds}\delta_{i,j}^*\right| &\leq \frac{2\gamma + C\kappa D^2 + \tilde{C}\kappa D}{1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D - \kappa/\kappa_*}. \end{aligned} \quad \square$$

Soit $\Delta_{\gamma,\kappa,D}(s)$ l'unique solution 2π -périodique et de classe C^2 de l'équation

$$\frac{d\Delta}{ds} = \alpha(\gamma, \kappa, D) - \beta_\kappa(s)\Delta$$

donnée par lemme 22. Le lemme suivant donne une condition suffisante sur les paramètres (γ, κ, D) tels que $\max_s \Delta_{\gamma,\kappa,D}(s) < D$.

Lemme 26: Il existe un ouvert U de paramètres (γ, κ) d'adhérence contenant $\{0\} \times [0, \kappa_*]$, défini par

$$\begin{aligned} U &:= \{(\gamma, \kappa) \in (0, 1) \times (0, \kappa_*) : 0 < \gamma < \kappa D^2(\kappa)\}, \quad \text{où} \\ D(\kappa) &:= \min\left(1, \frac{L(\kappa)}{2(2+C)/(1-\kappa/\kappa_*) + 2\tilde{C}(1+\tilde{C})\kappa/(1-\kappa/\kappa_*)^2}\right), \\ L(\kappa) &:= \frac{1 - \exp(-\int_0^{2\pi} \beta_\kappa(s) ds)}{2\pi\kappa \exp(\int_0^{2\pi} \beta_\kappa^-(s) ds)}, \end{aligned}$$

tel que, pour tout $(\gamma, \kappa) \in U$,

$$1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D(\kappa) - \frac{\kappa}{\kappa_*} > 0, \quad \text{et} \quad \max_{s \in [0, 2\pi]} \Delta_{\gamma,\kappa,D(\kappa)}(s) < D(\kappa).$$

Démonstration. Du lemme 22, il suffit de prendre

$$\frac{\alpha(\gamma, \kappa, D(\kappa))}{\kappa L(\kappa)} < D(\kappa).$$

On a

$$\begin{aligned}
 D(\kappa) &< \frac{1 - \kappa/\kappa_*}{2\kappa(1 + \tilde{C})}, \quad \gamma + \tilde{C}\kappa D(\kappa) < \kappa D(\kappa)(1 + \tilde{C}) < \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_*}\right), \\
 1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D(\kappa) - \kappa/\kappa_* &> \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\kappa}{\kappa_*}\right), \\
 \alpha(\gamma, \kappa, D(\kappa)) &< \frac{2(2\gamma + C\kappa D(\kappa)^2)}{1 - \kappa/\kappa_*} + \frac{\tilde{C}\kappa D(\kappa)(\gamma + \tilde{C}\kappa D(\kappa))}{\frac{1}{2}(1 - \kappa/\kappa_*)^2}, \\
 &< \kappa D(\kappa)^2 \left[\frac{2(2 + C)}{1 - \kappa/\kappa_*} + \frac{2\tilde{C}(1 + \tilde{C})\kappa}{(1 - \kappa/\kappa_*)^2} \right] < \kappa D(\kappa)L(\kappa). \quad \square
 \end{aligned}$$

Définition 27. On appelle la *fonction de dispersion* la fonction périodique suivante

$$\Delta_{\gamma, \kappa}(s) := \Delta_{\gamma, \kappa, D(\kappa)}(s), \quad \forall s \in \mathbb{R}.$$

On montre dans ce qui suit la première partie du théorème 21. Rappelons qu'on note U l'ensemble des paramètres (γ, κ) défini dans le lemme 26.

Preuve du théorème 21 - Item 1. On utilise la même technique de démonstration utilisée dans la preuve du Résultat principal I [Voir la preuve de la proposition 17]. Soit $X(0) \in C_{\gamma, \kappa}^N$ et

$$t_* := \sup\{t \geq 0 : \forall 0 < t' < t, \delta(t') < \Delta_{\gamma, \kappa}(\mu(t'))\}.$$

Par l'absurde, supposons que $t_* < +\infty$. Avec la nouvelle variable $s = \mu(t)$ pour tout $s \in [s_0, s_*]$, $s_0 = \mu(0)$ et $s_* = \mu(t_*)$. Alors il existe, $1 \leq i_0, j_0 \leq N$ tel que $\delta_{i_0, j_0}^*(s_*) = \Delta_{\gamma, \kappa}(s_*)$. Comme $\max \Delta_{\gamma, \kappa} < D(\kappa)$ et $1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D(\kappa) - \kappa/\kappa_* > 0$, le lemme 25 implique

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds} \delta_{i_0, j_0}^*(s_*) &< \alpha(\gamma, \kappa, D(\kappa)) - \beta_{\kappa}(s) \delta_{i_0, j_0}^*(s_*), \\
 &= \alpha(\gamma, \kappa, D(\kappa)) - \beta_{\kappa}(s) \Delta_{\gamma, \kappa}(s_*) = \frac{d}{ds} \Delta_{\gamma, \kappa}(s_*).
 \end{aligned}$$

Donc il existe, $s < s_*$ au voisinage de s_* tel que $\delta_{i_0, j_0}^*(s) > \Delta_{\gamma, \kappa}(s)$ autrement dit il existe, $t < t_*$ au voisinage de t_* tel que $\delta_{i_0, j_0}(t) > \Delta_{\gamma, \kappa}(\mu(t))$. Contradiction. \square

Pareillement aux preuves de la Section 4.5, on montre maintenant la deuxième partie du théorème 21. Dans le cas du modèle de Winfree (5.1) la fonction H est une fonction constante (voir équation (5.2)) donc $\mathbb{1}$ -périodique au sens de la définition 6.

Lemme 28: Soit $(\gamma, \kappa) \in U$ où U est défini dans le lemme 26. Soit

$$\Sigma_{\gamma, \kappa} = \{X \in C_{\gamma, \kappa}^N : \mu(X) = 0\}.$$

Il existe une fonction de Poincaré, $P_{\gamma, \kappa} : \Sigma_{\gamma, \kappa} \rightarrow \Sigma_{\gamma, \kappa}$ de classe C^2 et une fonction (temps de retour) $\theta_{\gamma, \kappa} : \Sigma_{\gamma, \kappa} \rightarrow \mathbb{R}^+$ de classe C^2 telles que

$$\begin{aligned} \Phi^{\theta(X)}(X) &= P_{\gamma, \kappa}(X) + 2\pi\mathbb{1}, \quad \forall X \in \Sigma_{\gamma, \kappa}, \\ \frac{2\pi}{1 + \gamma + \kappa\|P\|_\infty\|R\|_\infty} &< \theta(X) < \frac{2\pi}{1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D(\kappa) - \frac{\kappa}{\kappa_*}}. \end{aligned}$$

Démonstration. Soit $X \in C_{\gamma, \kappa}^N$ tel que $\mu(X) = 0$. Soit $\mu(t) := \mu(\Phi^t(X))$ et $\tau(s)$ l'inverse de la fonction $\mu(t)$ comme définie dans l'équation (5.5) et l'équation (5.8). Plus précisément notons pour chaque $X : \mu_X(t) = \mu(t)$ et $\tau_X(s) = \tau(s)$. Par le lemme 24, on obtient

$$1 - \gamma - \tilde{C}\kappa D(\kappa) - \frac{\kappa}{\kappa_*} < \dot{\mu}_X(t) < 1 + \gamma + \kappa\|P\|_\infty\|R\|_\infty.$$

Soit $\theta(X) := \tau_X(2\pi)$. Alors $\int_0^{\tau_X(2\pi)} \dot{\mu}_X(t) dt = 2\pi$ implique donc la seconde estimation du lemme. Soit $P_{\gamma, \kappa}(X) := \Phi^{\theta(X)}(X) - 2\pi\mathbb{1}$. Alors

$$\begin{aligned} \mu(P_{\gamma, \kappa}(X)) &= \mu_X(\theta(X)) - 2\pi = \mu_X \circ \tau_X(2\pi) - 2\pi = 0, \\ \delta(P_{\gamma, \kappa}(X)) &= \delta(\Phi^{\theta(X)}(X)) < \Delta_{\gamma, \kappa}(\mu_X(\theta(X))) = \Delta_{\gamma, \kappa}(2\pi) = \Delta_{\gamma, \kappa}(0). \end{aligned}$$

Donc $P_{\gamma, \kappa}$ est une fonction de $\Sigma_{\gamma, \kappa}$ dans lui même. □

Corollaire 29: La fonction de Poincaré $P_{\gamma, \kappa}$ définie dans le lemme 28 admet un point fixe $X_* \in \Sigma_{\gamma, \kappa}$.

Démonstration. La preuve se fait de la même manière que la preuve du Corollaire 20. □

Preuve du théorème 21 - Item 2. Corollaire 29 implique qu'il existe, $X_* \in C_{\gamma, \kappa}^N$ et $\theta_* > 0$ tels que $\Phi^{\theta_*}(X_*) = X_* + 2\pi\mathbb{1}$. Par unicité de solution d'équation différentielle, on a

$$\Phi^{\theta_* + t}(X_*) = \Phi^t(X_*) + 2\pi\mathbb{1}, \quad \forall t \geq 0.$$

Soit $\Psi(s) := \Phi^s(X_*) - \frac{2\pi s}{\theta_*} \mathbb{1} = (\Psi_1(s), \dots, \Psi_N(s))$, $\forall s \geq 0$. Alors Ψ est périodique de période θ_* . En effet,

$$\Psi(s + \theta_*) = \Phi^{s+\theta_*}(X_*) - 2\pi \frac{s + \theta_*}{\theta_*} \mathbb{1} = \Phi^s(X_*) + 2\pi \mathbb{1} - 2\pi \frac{s + \theta_*}{\theta_*} \mathbb{1} = \Psi(s).$$

□

5.2 Forme explicite du Modèle de Winfree

Afin d'obtenir des résultats numériques on va utiliser la version explicite du modèle de Winfree suivante

$$\dot{x}_i = \omega_i - \frac{\kappa}{N} \sum_{j=1}^N P_\beta(x_j) \sin(x_i), \text{ où } P_\beta(x) = 1 + \cos(x + \beta), \quad (5.9)$$

$\beta \in [0, \pi]$. Lorsque $\beta = 0$, l'hypothèse de synchronisation H3 du théorème 21 est satisfaite. En effet

$$\frac{d}{ds} \left(\ln(1 - \kappa P_0 R) \right) = \frac{-\kappa(P_0' R + P_0 R')}{1 - \kappa P_0 R},$$

et

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{P_0 R'}{1 - \kappa P_0 R} ds &= - \int_0^{2\pi} \frac{P_0' R}{1 - \kappa P_0 R} ds \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{\sin^2(s)}{1 - \kappa(1 + \cos(s)) \sin(s)} ds > \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

La valeur numérique de κ_* est $\frac{4}{3\sqrt{3}} \approx 0.769$. Notons que la forme explicite du modèle de Winfree (5.9) lorsque $\beta = 0$ est étudiée dans [AS01], voir aussi Section 2.3 du Chapitre 2. Il est important de noter que dans le théorème 21, il n'y a aucune condition sur le nombre d'oscillateurs N ; en particulier on ne suppose pas que $N \rightarrow +\infty$. En outre les fréquences naturelles sont choisies arbitrairement et le résultat est indépendant de la loi de distribution.

5.3 Condition nécessaire d'existence de la synchronisation

Afin d'analyser numériquement l'hypothèse H3, on va discuter le modèle de Winfree explicite (5.9) pour de différentes valeurs de $\beta \in [0, \pi]$. On va utiliser deux paramètres d'ordres pour mesurer la synchronisation

$$R_X(\beta) := \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N e^{ix_j(T)}, \quad d_X(T) := \max_i |x_i(T) - \mu(T)|, \quad T \gg 1.$$

Le domaine numérique de synchronisation est plus large que le domaine théorique du théorème 21. La Figure 5.1 illustre le domaine U_β de synchronisation pour trois valeurs de β . Le domaine en γ -direction lorsque β croit vers $\frac{\pi}{2}$ comme illustré. La valeur critique de la transition vers l'état mort donnée dans l'équation (5.4) est définie par $\kappa_*(\beta) := \max\{P_\beta(x)R(x) : x \in \mathbb{R}\}^{-1}$.

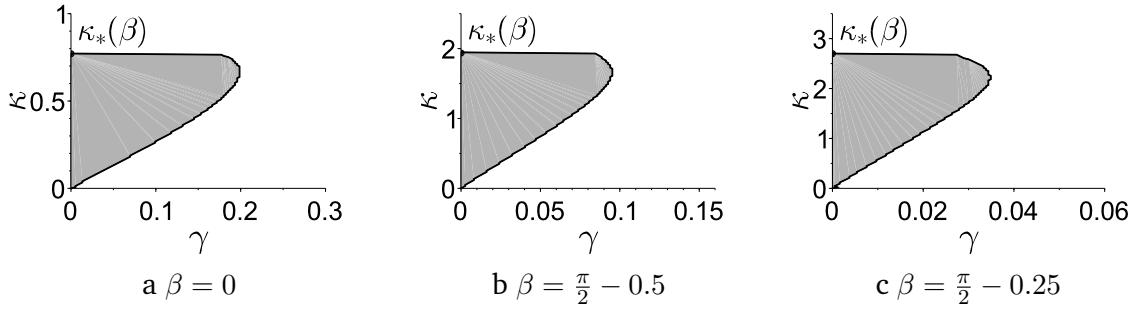


FIGURE 5.1 – Les trois Figures illustrent le domaine numérique de synchronisation U_β du modèle de Winfree (5.9) pour trois valeurs de β . Dans les trois Figures on choisit une distribution aléatoire des conditions initiales dans l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $N = 100$ oscillateurs avec une distribution uniforme des fréquences naturelles ω_i dans l'intervalle $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$. U_β est en couleur grise et obtenu par le calcul de la plus grande valeur de γ satisfaisant $d_X(T) < 3\pi$. Dans la Figure a, $T = 1500$, $\beta = 0$ et $\kappa_*(\beta) \approx 0.769$. Dans la Figure b, $T = 1800$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.5$ et $\kappa_*(\beta) \approx 1.936$. Dans la Figure c, $T = 3500$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.25$ et $\kappa_*(\beta) \approx 2.694$.

On observe dans la Figure 5.2a la variation de la valeur critique $\kappa_*(\beta)$ pour $\beta \in [0, \pi]$; notons que la plus petite valeur critique est obtenu en $\kappa_*(0) \approx 0.769$. La propriété H3

est l'hypothèse principale pour obtenir la synchronisation pour des valeurs de force de couplage $\kappa \in (0, \kappa_*)$. Soit la fonction $H_\kappa(\beta)$ définie par

$$H_\kappa(\beta) := \int_0^{2\pi} \frac{P_\beta(s)R'(s)}{1 - \kappa P_\beta(s)R(s)} ds.$$

Ainsi l'hypothèse H3 est satisfaite si et seulement si $H_\kappa(\beta) > 0$. On va étudier maintenant numériquement le modèle de Winfree (5.9) pour de différentes valeurs de $\beta \in [0, \pi]$. On observe numériquement dans la Figure 5.2a, que la région en couleur grise correspond à des paramètres (β, κ) satisfaisant $\beta \in [0, \pi]$, $\kappa \in [0, \kappa_*(\beta)]$, et $H_\kappa(\beta) > 0$, qui est le domaine correspondant à $\beta < \frac{\pi}{2}$. La symétrie $H_\kappa(\beta) = -H_\kappa(\pi - \beta)$ implique $H_\kappa(\frac{\pi}{2}) = 0$ pour tout $\kappa \in [0, \kappa_*(\frac{\pi}{2})]$. On va voir par la suite que cette valeur critique $\beta = \frac{\pi}{2}$ est une valeur de bifurcation de désynchronisation.

On choisit $\kappa = 0.6$ dans la Figure 5.2b, on calcule par suite la plus grande valeur de γ satisfaisant $d_X(T) < 3\pi$, qui détermine les bornes du domaine numérique de synchronisation U_β pour $\kappa = 0.6$. On remarque que le domaine de synchronisation est négligeable si et seulement si $\beta \in [\frac{\pi}{2}, \pi]$ qui correspond au domaine où l'hypothèse H3 n'est pas satisfaite.

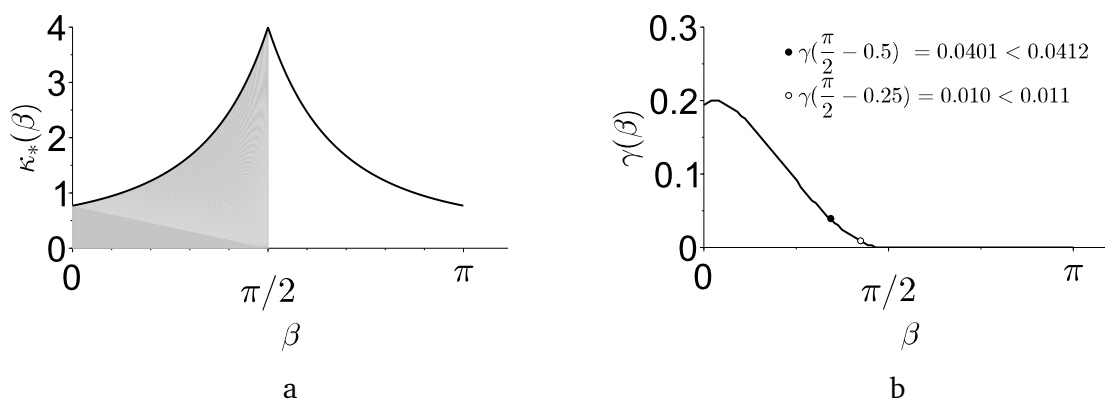


FIGURE 5.2 – La Figure a montre la valeur critique $\kappa_*(\beta)$ selon les valeurs de β . Dans la Figure b on fixe dans le modèle de Winfree (5.9) : $\kappa = 0.6$, $T = 3 \times 10^4$, la courbe de désynchronisation, est obtenue par le calcul de la plus grande valeur de γ pour laquelle $d_X(T) < 3\pi$. On utilise la même configuration des paramètres de la Figure 5.1.

On observe dans la Figure 5.3 la variation du module du paramètre d'ordre $|R_X(\beta)|$

5.3. CONDITION NÉCESSAIRE D'EXISTENCE DE LA SYNCHRONISATION

suivant trois valeurs de β dans $[0, \pi]$ à un temps T fixé et une force de couplage κ . La valeur numérique $|R_X(\beta)| \approx 1$ suggère un regroupement condensé de presque tous les oscillateurs dans le cercle, la valeur $|R_X(\beta)| \approx 0$ suggère une distribution symétrique des oscillateurs, revoir pour cela la Section 2.2 du Chapitre 2. On observe une décroissance du module $|R_X(\beta)|$ au voisinage de la valeur de bifurcation $\beta = \frac{\pi}{2}$ c'est à dire lorsque $H_\kappa(\beta)$ devient négative ce qui correspond comme a été déjà dit au cas où l'hypothèse H3 n'est pas satisfaite.

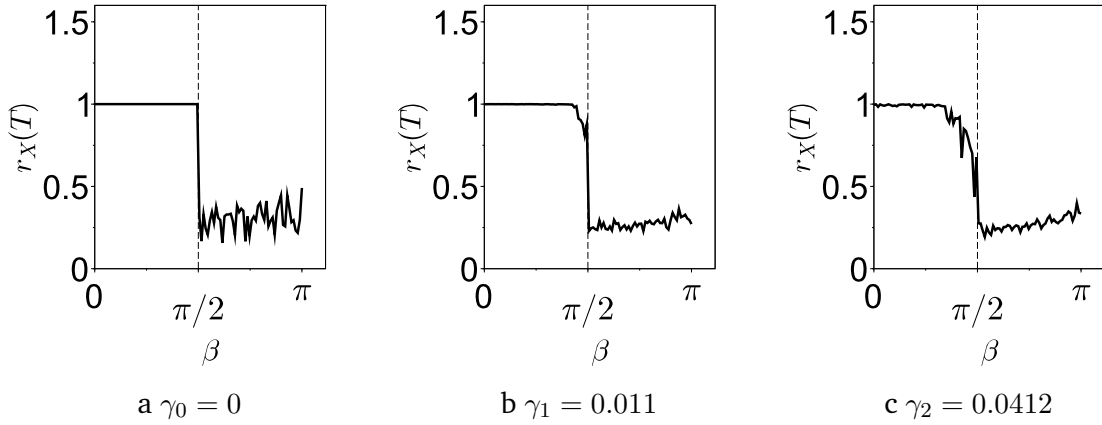


FIGURE 5.3 – Les trois Figures illustrent le graphe du module du paramètre d'ordre $|R_X(\beta)|$ à $T = 3000$ et $\kappa = 0.6$. On choisit la même configuration des paramètres que la Figure 5.1.

La Figure 5.4 montre le graphe du paramètre d'ordre $d_X(t)$ en fonction du temps $t \in [0, 3 \times 10^4]$ pour de différentes valeurs de γ et β et une force de couplage $\kappa = 0.6$. On illustre aussi dans la même Figure la position des oscillateurs dans le cercle au temps $T = 3 \times 10^4$. La synchronisation est définie par $\sup_{t>0} d_X(t) < +\infty$. Pour $\beta > \frac{\pi}{2}$, exceptionnellement pour $\gamma \approx 0$, $t \mapsto d_X(t)$ ne semble pas être bornée : les oscillateurs sont désynchronisés. Cette observation correspond à la disparition du domaine de synchronisation dans la Figure 5.2 lorsque $\beta > \frac{\pi}{2}$. Pour $\gamma = 0$, les oscillateurs ont la même fréquence naturelle ; le principe de comparaison des équations différentielles périodiques implique dans ce cas, si $\max_{1 \leq i, j \leq N} |x_i(0) - x_j(0)| \leq 2\pi$, alors $d_X(t) \leq 2\pi$ pour tout $t > 0$: les oscillateurs sont toujours synchronisés. Pour $\beta < \frac{\pi}{2}$, on choisit deux valeurs

de γ au voisinage et au dessus de la courbe de désynchronisation : $\gamma_1 > \gamma(\frac{\pi}{2} - 0.25)$ et $\gamma_2 > \gamma(\frac{\pi}{2} - 0.5)$. La Figure 5.4 montre que $t \mapsto d_X(t)$ croit vers l'infini d'une manière localement constante autrement dit en escalier.

5.3. CONDITION NÉCESSAIRE D'EXISTENCE DE LA SYNCHRONISATION

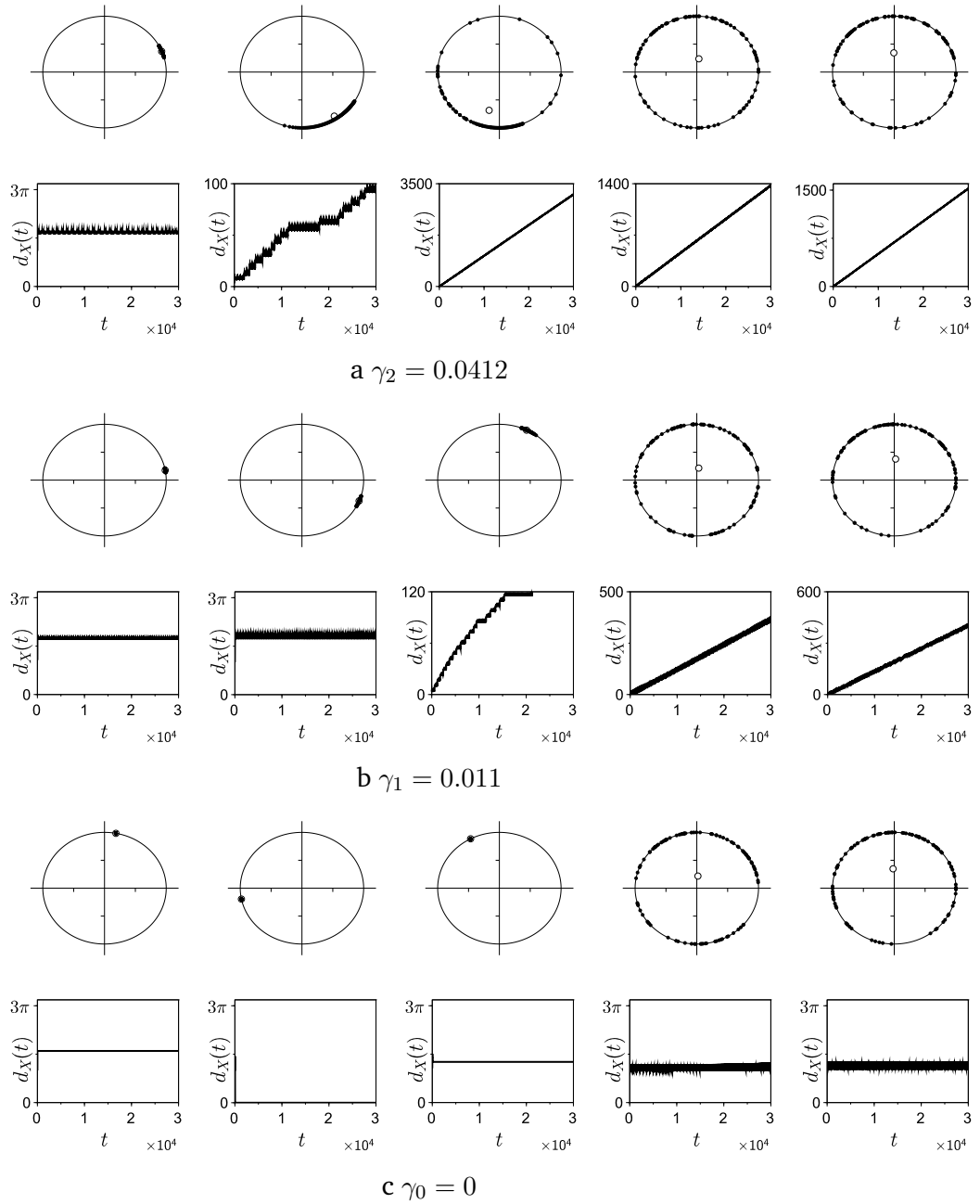


FIGURE 5.4 – On fixe dans le modèle de Winfree (5.9) : $\kappa = 0.6$ et on choisit une distribution aléatoire des conditions initiales dans l'intervalle $[-\pi, \pi]$. On fixe $N = 100$ oscillateurs avec une distribution uniforme des fréquences naturelles ω_i dans l'intervalle $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$. On observe dans cette Figure le paramètre d'ordre $d_X(t)$ pour $t \in [0, 3 \times 10^4]$ et on observe les oscillateurs sur le cercle représentés par des disques noirs et le paramètre d'ordre $R_X(\beta)$ représenté par un cercle au temps $T = 3 \times 10^4$. Verticalement vers le haut on fixe $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0.011$ et $\gamma_2 = 0.0412$, horizontalement de gauche vers la droite on fixe $\beta = 0$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.5$, $\beta = \frac{\pi}{2} - 0.25$, $\beta = \frac{\pi}{2} + 0.25$ et $\beta = \frac{\pi}{2} + 0.5$.

5.4 Cas de système non-perturbé

D'après ce qui précède (Voir Figure 5.4) on voit que lorsque le modèle de Winfree est sans perturbation ($\gamma = 0$) la dispersion est toujours bornée par 3π même si l'hypothèse H3 n'est pas satisfaite. On remarque par contre que le paramètre d'ordre R_X est symétrique où l'hypothèse H3 n'est plus satisfaite. Comme il a été dit avant cela revient au cas particulier des systèmes périodiques par rapport à chaque variable, en effet par unicité de solution et lorsque $\gamma = 0$ deux oscillateurs ne coïncident pas en tout temps. Dans ce qui suit on propose un modèle linéaire non homogène où cette particularité n'est plus vérifiée. Soit alors le modèle suivant

$$\dot{x}_i = \omega_i + \beta \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (x_i - x_j), t \geq t_0, \quad (5.10)$$

où $N \geq 2$, $(\omega_i)_i$ sont les fréquences naturelles prises dans un intervalle $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$ et $\gamma \in [0, 1[$ est la force du bruit. β est un paramètre dans $[-0.5, 0.5]$. Le modèle (5.10) précédent vérifie l'hypothèse (H) du Chapitre 4, en effet la fonction F définie par

$$F(Y, z) = 1 + \beta \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N (z - y_j), \quad \forall Y = (y_1, \dots, y_N) \in \mathbb{R}^N, \quad z \in \mathbb{R},$$

est de classe C^∞ et $F(s\mathbf{1}, s) = 1$ est une fonction constante donc sous-entendu périodique de plus $\min_{s \in \mathbb{R}} F(s\mathbf{1}, s) = 1 > 0$. On remarque d'un autre côté que l'hypothèse (H_*) est satisfaite si et seulement si $\beta < 0$. Contrairement au cas particulier des modèles périodiques par rapport à chaque variable comme le modèle de Winfree on remarque dans la Figure 5.5 que la dispersion est bornée seulement si l'hypothèse (H_*) est satisfaite.

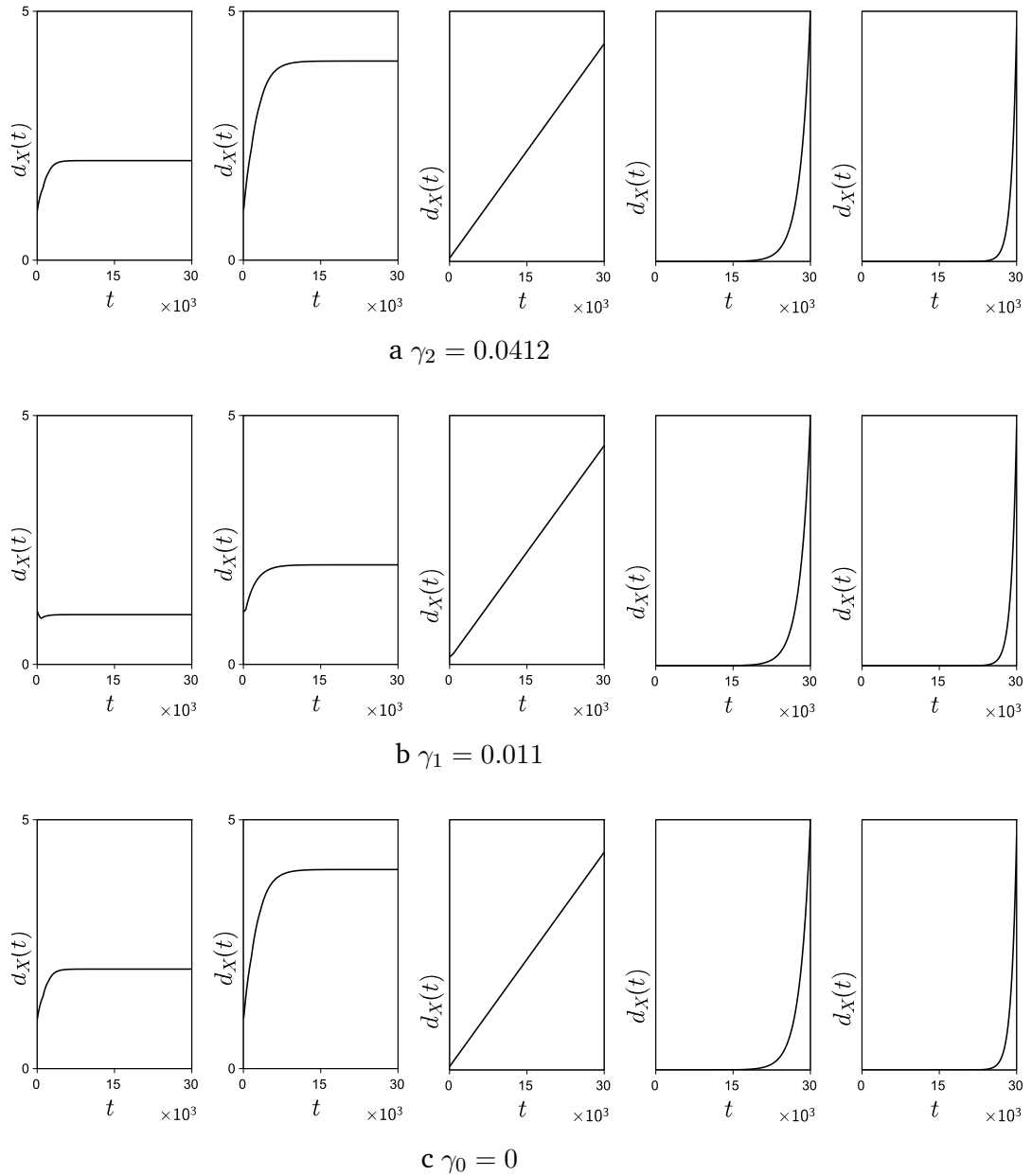


FIGURE 5.5 – On choisit dans le modèle 5.10 une distribution aléatoire des conditions initiales dans l'intervalle $[-1, 1]$. On fixe $N = 100$ oscillateurs avec une distribution uniforme des fréquences naturelles ω_i dans l'intervalle $[1 - \gamma, 1 + \gamma]$. On observe le paramètre d'ordre $d_X(t)$ pour $t \in [0, \times 10^4]$. Verticalement vers le haut on fixe $\gamma_0 = 0$, $\gamma_1 = 0.001$ et $\gamma_2 = 0.002$, horizontalement de gauche vers la droite on fixe $\beta = -0.001$, $\beta = -0.0005$, $\beta = 0$, $\beta = 0.0005$ et $\beta = 0.001$. On remarque que le paramètre d'ordre $d_X(t)$ est borné pour des valeurs $\beta < 0$ c'est à dire où l'hypothèse H3 est vérifiée, il prend des valeurs très grandes lorsque $\beta > 0$ c'est à dire lorsque l'hypothèse H3 n'est plus satisfaite même lorsque $\gamma = 0$.

5.5 Conclusion

On a défini la synchronisation comme étant l'état où la dispersion entre chaque paire d'oscillateurs est bornée dans le temps. Lorsque l'hypothèse de synchronisation H3 est satisfaite et que la force du couplage correspond à l'état non mort des oscillateurs on a montré analytiquement dans le théorème 21 l'existence de l'état de synchronisation et d'accrochage périodique. Lorsque l'hypothèse de synchronisation H3 n'est plus satisfaite on constate numériquement que le domaine de synchronisation devient négligeable. On suggère que cette hypothèse est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence du domaine de synchronisation.

Chapitre 6

Preuve du résultat linéaire \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L : Stabilité des systèmes linéaires perturbés

Sommaire

6.1 Hypothèses et notations	84
6.1.1 Rappel des résultats linéaires \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L	85
6.1.2 Motivation	86
6.2 Outils de démonstration	87
6.3 Ingrédients de la forme linéaire \mathcal{L}_t	92
6.4 Décomposition de la résolvante	95
6.5 Conclusion	98

Pour étudier la stabilité des systèmes couplés, donnés par l'équation (P) (en particulier (PNP)) dans le chapitre 4, on va étudier la stabilité d'une classe de systèmes linéaires perturbés. Plus précisément on va montrer dans ce Chapitre les deux résultats linéaires \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L de la partie linéaire de la Section 3.1.2 du Chapitre 3. Cela va nous permettre dans le Chapitre 7 de montrer les deux résultats **III** et **IV** de la Section 3.2.3. Ces systèmes linéaires perturbés vérifient une hypothèse qu'on appelle *hypothèse de sta-*

bilité qui est suffisante pour que l'espace de phase peut se décomposer en une variété centrale et une autre exponentiellement stable.

6.1 Hypothèses et notations

Dans cette section on introduit quelques notations, nous rappelons les hypothèses et les résultats linéaires I^L et II^L de la Section 3.1.2 du Chapitre 3. Soit $\zeta(t) = \{\zeta_{i,j}(t)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice carrée d'ordre N qui dépend du temps $t \in \mathbb{R}$ et de norme $\|\zeta\| = D < +\infty$. Posons I_N la matrice identité d'ordre N . On considère dans la suite de ce Chapitre le système linéaire perturbé suivant

$$\dot{Y}(t) = [b(t)I_N + \mathcal{A}(t) + \zeta(t)]Y(t), \quad t \geq t', \quad (6.1)$$

où $t' \in \mathbb{R}$ et $\mathcal{A}(t) = \{a_{i,j}(t)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice carrée d'ordre N de rang 1 continue et $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue.

On considère l'hypothèse suivante sur $b(t)$ et \mathcal{A} qu'on appelle *l'hypothèse de stabilité*

$$(H_{stab}) \quad \left\{ \begin{array}{l} a_{i,j}(t) = a_j(t) \text{ pour tout } 1 \leq i, j \leq N \text{ avec :} \\ b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, j = 1, \dots, N \text{ des fonctions continues 1-périodiques,} \\ \int_0^1 b(s) + \sum_{j=1}^N a_j(s) ds = 0, \quad \text{et} \quad -\alpha := \int_0^1 b(s) ds < 0. \end{array} \right.$$

Rappelons que dans l'intérêt d'avoir plus d'informations sur le comportement des solutions du système linéaire (6.1) on va considérer des matrices normalisantes définies par ce qui suit

Définition 30. On dit que la matrice ζ est une matrice *normalisante* si le système (6.1) admet une solution $V(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))$ telle que

$$\inf_{t \geq t'} \|V(t)\| > 0, \quad \text{et} \quad \sup_{t \geq t'} \|V(t)\| < +\infty.$$

On appelle $V(t)$ solution *normalisante* de (6.1) associée à la matrice ζ .

On note dans ce qui suit $\phi^t = (\phi_1^t, \dots, \phi_N^t)$ le flot du système (6.1). On identifie

par suite $\phi^t(Y) = Y(t)$ où $Y(t') = Y$. On note $R(t; t')$ la résolvante de (6.1), donc $\phi^t(Y) = \mathcal{R}(t; t')Y$. Encore dans le but de simplifier on note : $c_b = \max_{t \in [0,1]} |b(t)|$ et $c_a = \max_{t \in [0,1]} \sum_{j=1}^N |a_j(t)|$. Pour simplifier on pose $e(t, s) := \exp(\int_s^t b(x)dx)$ et $P(t, s) = \exp(\int_s^t b(x) + \sum_{j=1}^N a_j(x)dx)$ donc $\max_{s,t \in \mathbb{R}} P(t, s) \leq \exp(c_b + c_a)$. On note dans ce qui suit par $\langle Y, Z \rangle$ le produit scalaire de $Y, Z \in \mathbb{R}^N$ et par Y^T le transposé du vecteur $Y \in \mathbb{R}^N$. On note $\mathbb{1} = (1, \dots, 1)^T \in \mathbb{R}^N$. Posons

$$\begin{cases} A_*(s) = (a_1(s), \dots, a_N(s)), \\ \zeta_i(s) = (\zeta_{i,1}(s), \dots, \zeta_{i,N}(s)), \quad i = 1 \dots, N. \end{cases} \quad (6.2)$$

6.1.1 Rappel des résultats linéaires \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L

Nous rappelons dans cette Section les résultats linéaires \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L de la Section 3.1.2 du Chapitre 3. Notons que dans le Chapitre 7 on utilisera uniquement le résultat linéaire \mathbf{I}^L suivant.

Résultat linéaire (\mathbf{I}^L). *On considère le système (6.1) de résolvante $R(s; t)$. Supposons que b et \mathcal{A} vérifient l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe $K > 0$ et $D_* > 0$ tels que pour toute matrice ζ normalisante vérifiant $\|\zeta\| < D_*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une forme linéaire $\mathcal{L}_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $s \geq t$, on a*

- $\mathcal{L}_s(R(s; t)V(t)) = 1$ et $\mathcal{L}_t(Y) < K\|Y\|$,
- $\mathcal{L}_t(Y) = \mathcal{L}_s(R(s; t)Y)$,
- $\|R(s; t)[Y - \mathcal{L}_t(Y)V(t)]\| < K\|Y\| \exp(-\beta(s - t))$.

où $V(t)$ est une solution normalisante de (6.1) associée à la matrice ζ . En outre l'opérateur $R(s; t)$ admet la décomposition

$$R(s; t)Y = \mathcal{L}_t(Y)V(s) + R(s; t)[Y - \mathcal{L}_t(Y)V(t)],$$

Autrement dit la sous-variété $\mathcal{W}_{stab} := \{Z \in \mathbb{R}^N, \mathcal{L}_t(Z) = 0\}$ de dimension $N - 1$ est exponentiellement stable.

Résultat linéaire (\mathbf{II}^L). *[Cas général] On considère le système (6.1) de résolvante $R(s; t)$. Supposons que b et \mathcal{A} vérifient l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe*

$K > 0$ et $D_* > 0$ tels que pour toute matrice ζ vérifiant $\|\zeta\| < D_*$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe une forme linéaire $\psi_t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $s \geq t$, on a

- $\|R(s; t)[Y - \psi_t(Y)\mathbb{1}]\| < K\|Y\| \exp(-\beta(s - t))$.

En outre l'opérateur $R(s; t)$ admet la décomposition

$$R(s; t)Y = \psi_t(Y)R(s; t)\mathbb{1} + R(s; t)[Y - \psi_t(Y)\mathbb{1}].$$

Autrement dit la sous-variété $\mathcal{W}_{stab} := \{Z \in \mathbb{R}^N, \psi_t(Z) = 0\}$ de dimension $N - 1$ est exponentiellement stable. De plus si il existe une solution qui ne décroît pas exponentiellement vers zéro alors

- $\psi_t(Y) = \psi_s(R(s; t)Y)$.

Remarque 31. Dans le Chapitre 7 on aura besoin uniquement du résultat linéaire I^L.

6.1.2 Motivation

Si on considère le système (6.1) sans perturbation : ζ nulle, ce qui est équivalent à

$$\dot{Y}(t) = [b(t)I_N + \mathcal{A}(t)]Y(t), \quad t \geq t'.$$

Alors, comme $\mathcal{A}(t)$ est de rang 1 et sous l'hypothèse de stabilité (H_{stab}) toute valeur propre $\lambda(t)$ de $b(t)I_N + \mathcal{A}(t)$ de vecteur propre associé $V(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))$ vérifie

$$(\lambda(t) - b(t))V(t) = \langle V(t), A_*(t) \rangle \mathbb{1}.$$

Donc, on a deux cas. Le premier cas :

$$\lambda = b(t) \quad \text{et} \quad \langle V(t), A_*(t) \rangle = 0,$$

ici λ est une valeur propre de multiplicité $N - 1$ car à chaque t fixé l'espace des vecteurs $V(t)$ vérifiant $\langle V(t), A_*(t) \rangle = 0$ est un hyperplan. Par l'hypothèse de stabilité (H_{stab}),

$$\int_t^{t+1} \lambda(s) ds < 0, \quad \forall t \geq t'.$$

Le deuxième cas est le suivant :

$$(\lambda(t) - b(t)) \langle V(t), A_*(t) \rangle = \langle V(t), A_*(t) \rangle \langle \mathbb{1}, A_*(t) \rangle.$$

D'un autre terme :

$$\lambda(t) = b(t) + \langle \mathbb{1}, A_*(t) \rangle .$$

L'hypothèse de stabilité (H_{stab}) implique que

$$\int_t^{t+1} \lambda(s) ds = 0, \quad \forall t \geq t'.$$

Donc la stabilité du système (6.1) peut se déduire d'un théorème de perturbation car les moyennes d'intégrale des valeurs propres sont négatives avec une qui est nulle.

L'intérêt de notre approche, en utilisant le principe de comparaison d'équations différentielles comme on va voir dans la Section 6.2 et la Section 6.3, est qu'on donne une forme explicite de la décomposition de la résolvante. On détermine explicitement à partir d'une forme linéaire la sous-variété centrale et la sous-variété exponentiellement stable qui est un hyperplan de \mathbb{R}^N .

6.2 Outils de démonstration

Pour montrer les résultats linéaires \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L on considère dans cette Section uniquement l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Cela permet d'un autre côté de déduire le résultat linéaire \mathbf{II}^L . Soit le système non homogène suivant

$$\begin{cases} \dot{Z}^*(t) = b(t)Z^*(t) + \zeta(t)[z_{N+1}(t)\mathbb{1} + Z^*(t) + e(t, t')Y], & 1 \leq i \leq N, \quad t \geq t' \\ \dot{z}_{N+1}(t) = [b(t) + \langle A_*(t), \mathbb{1} \rangle]z_{N+1}(t) + \langle A_*(t), Z^*(t) + e(t, t')Y \rangle, & t \geq t'. \end{cases} \quad (6.3)$$

où $Z^*(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))^T$ et où A_* est définie par l'équation (6.2). Le but d'introduire le système précédent est le fait que la partie $E(t', t) = R(t; t')[Y - \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}]$ vérifie la décomposition suivante

$$E(t', t)Y = z_{N+1}(t)\mathbb{1} + Z^*(t) + e(t, t')Y,$$

où $Z(t) := (Z^*(t)^T, z_{N+1}(t))^T$ avec $z_{n+1}(t)$ et $Z^*(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))^T$ est solution du système non homogène couplé (6.3). L'idée est donc de montrer que $\|Z(t)\| < K \exp(-\beta(t-t'))$ avec $\alpha > \beta > 0$. On remarque ici que la condition initiale de $Z(t)$ vérifie : $z_{N+1}(t')\mathbb{1} + Z^*(t') = -\psi_{t'}(Y)\mathbb{1}$. Le problème à résoudre est donc de trouver

cette condition initiale convenable. Pour cela on va imposer que $Z^*(t') = \psi_{t'}(Y)(\mathbb{1}^T, 0)^T$. Dans un premier temps, on va voir dans cette section sous quelles hypothèses on va avoir une décroissance exponentielle de $Z(t)$ vers zéro?. Cela permettra de trouver une condition initiale $\psi_{t'}(Y)(\mathbb{1}^T, 0)^T$ particulière qui permet à son tour de conclure dans la Section 6.3 une écriture de la forme linéaire $\mathcal{L}_{t'}$. On aura besoin de trois lemmes. Le troisième lemme 34 est le lemme principal. Le lemme suivant permet de montrer le lemme 33 qui à son tour permet de montrer le lemme principal 34.

Lemme 32: Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction périodique telle que

$$-\alpha := \int_0^1 b(s)ds < 0.$$

Soit $\alpha > \beta > 0$, $L >$ et $D > 0$. On considère l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = [b(t) + \beta]\Delta(t) + DL,$$

alors il existe $D_0 > 0$ tel que pour tout $D < D_0$ l'équation précédente admet une solution $\Delta(t)$ qui est 1-périodique et strictement positive telle que $\max_{t \in [0,1]} \Delta(t) < 1$. La solution $\Delta(t)$ est donnée par

$$\Delta(t) = DL \frac{\int_t^{t+1} \exp(\int_s^{t+1} b(x) + \beta dx) ds}{1 - \exp(\beta - \alpha)}.$$

Lemme 33: On considère le système (6.3) avec $b(t)$ et \mathcal{A} vérifiant l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe $L > 0$ et il existe $D_* > 0$ tels que pour toute matrice ζ continue et de norme $\|\zeta\| < D_*$, pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour toute solution $Z(t) = (Z^*(t)^T, z_{N+1}(t))^T$ du système (6.3) de condition initiale $Z(t') = Z \in \mathbb{R}^N$ on a

$$\forall T > t' : z_{N+1}(T) = 0 \implies \|Z(t)\| < L \exp(-\beta(t - t'))(\|Z\| + \|Y\|), \quad \forall t \in [t', T].$$

Démonstration. Soit $Z(t) = (Z^*(t)^T, z_{N+1}(t))^T$ avec $Z^*(t) = (z_1(t), \dots, z_N(t))^T$ solution du système linéaire (6.3) de condition initiale $Z(t') = Z \in \mathbb{R}^N$. Supposons que $z_{N+1}(T) = 0$ alors en intégrant (6.3) on obtient

$$z_{N+1}(t') = - \int_{t'}^T \langle A_*(s), Z^*(s) + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds. \quad (6.4)$$

Soit $\beta < \alpha$. Soit $C = \|Z\| + \|Y\|$, donc pour tout $M > 1$ on a $\|Z\| < MC$, il existe $\epsilon > 0$

tel que $\|Z^*(t)\| < MC \exp(-\beta(t - t'))$. Posons

$$T_* = \sup\{t' \leq s \leq T_* : \|Z^*(s)\| < MC \exp(-\beta(s - t'))\},$$

$$\|Z^*(t)\| < MC \exp(-\beta(t - t')) \quad \forall t \in [t', T_*]. \quad (6.5)$$

La stratégie est de trouver une constante M particulière telle que $T_* \geq T$. Par l'absurde, supposons que $T_* < T$. En intégrant (6.3) et en utilisant (6.4) on obtient pour tout $t \in [t', T_*[$

$$\begin{aligned} |z_{N+1}(t)| &= \left| P(t, t') \left[z_{N+1}(t') + \int_{t'}^t \langle A_*(s), Z^*(s) + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds \right] \right| \\ &= P(t, t') \left| - \int_t^T \langle A_*(s), Z^*(s) + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds \right| \\ &< \exp(c_b + c_a) c_a C \int_t^T M \exp(-(\beta s - t')) + \exp(-\alpha(s - t') + c_b) ds \\ &< \exp(2c_b + c_a) c_a C \frac{2M}{\beta} \exp(-\beta(t - t')). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Soit ζ une matrice continue de norme $\|\zeta\| = D < D_*$, alors d'un autre côté, de l'équation (6.3) on aura pour $z_i(t)$ et $-z_i(t)$ les deux inégalités suivantes

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} z_i(t) &< b(t) z_i(t) + DC \left[\exp(2c_b + c_a) c_a \frac{2M}{\beta} + M + \exp(c_b) \right] \exp(-\beta(t - t')) \\ &< b(t) z_i(t) + DMC \left[\exp(2c_b + c_a) \frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b) \right] \exp(-\beta(t - t')). \end{aligned} \quad (6.7)$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} -z_i(t) &< b(t)(-z_i(t)) + DC \left[\exp(2c_b + c_a) c_a \frac{2M}{\beta} + M + \exp(c_b) \right] \exp(-\beta(t - t')) \\ &< b(t)(-z_i(t)) + DMC \left[\exp(2c_b + c_a) \frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b) \right] \exp(-\beta(t - t')). \end{aligned}$$

Posons $z_i(t) = \Delta_i(t) \exp(-\beta(t - t')) MC$, $t \in [t', T_*[$. On a $|\Delta_i(t)| \leq 1$ sur $[t', T_*[$. En remplaçant dans la dernière équation, on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta_i(t) &< [b(t) + \beta] \Delta_i(t) + D \left[\exp(2c_b + c_a) \frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b) \right], \\ \frac{d}{dt} -\Delta_i(t) &< [b(t) + \beta] (-\Delta_i(t)) + D \left[\exp(2c_b + c_a) \frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b) \right]. \end{aligned}$$

Par définition de T_* il existe $i \in \{1, \dots, N\}$ tel que $|\Delta_i(T_*)| = 1$. On va utiliser donc le lemme 32 pour avoir une contradiction.

Le lemme 32 implique que pour $\|\zeta\| = D < D_* := D_0$ il existe une fonction 1-périodique

strictement positive de l'équation

$$\frac{d}{dt}\Delta(t) = [b(t) + \beta]\Delta(t) + D[\exp(2c_b + c_a)\frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b)],$$

telle que $\max_{t \in [0,1]} \Delta(t) < 1$. Soit donc $M > 1$ vérifiant $\frac{1}{M} < \Delta(t')$ donc $\Delta_i(t') \leq \frac{\|Z\|}{MC} \leq \frac{1}{M} < \Delta(t')$. Il existe $\epsilon' > t'$ tel que $|\Delta_i(t)| < \Delta(t)$ sur $[t', \epsilon'[,$ posons $T_0 = \sup\{t' \leq s \leq T_0 : |\Delta_i(s)| < \Delta(s)\}$. Si $t' < T_0 < T_*$ donc $|\Delta_i(T_0)| = \Delta(T_0)$. Sans perte de généralités supposons que $\Delta_i(T_0) = \Delta(T_0)$, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}|\Delta_i(T_0)| &< [b(t) + \beta]|\Delta_i(T_0)| + D[\exp(2c_b + c_a)\frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b)] \\ &= [b(t) + \beta]\Delta(T_0) + D[\exp(2c_b + c_a)\frac{2c_a}{\beta} + 1 + \exp(c_b)] = \frac{d}{dt}\Delta(T_0). \end{aligned}$$

Contradiction. Donc $T_0 > T_*$ ce qui implique que $\Delta_i(T_*) < 1$, contradiction avec la définition de T_* . Donc pour tout $t \in [t', T]$ on a

$$\|Z^*(t)\| < M \exp(-\beta(t - t'))C = M \exp(-\beta(t - t'))(\|Z(t')\| + \|Y\|).$$

En combinant avec l'équation (6.6) on obtient $\|Z(t)\| < L \exp(-\beta(t - t'))(\|Z(t')\| + \|Y\|)$ pour tout $t \in [t', T]$ avec $L = M \max(1, 2 \exp(2c_b + c_a)c_a)$. \square

Le lemme précédent ne fournit pas une décroissance exponentielle d'une solution sur $[t', +\infty[$. Pour y arriver, la stratégie dans le lemme suivant est de considérer des intervalles $[0, T]$ du lemme précédent de plus en plus grands. On va donc approcher une solution $Z_Y(t)$ de condition initiale $Z_Y(t')$ par des solutions qui vérifient le lemme précédent. Cela permet de montrer l'existence d'une solution $Z_Y(t)$ exponentiellement décroissante vers zéro sur $[t', +\infty[$. On va aussi localiser la condition initiale $Z_Y(t')$.

Lemme 34: On considère le système (6.3) avec $b(t)$ et \mathcal{A} vérifiant l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$ alors il existe $K > 0$ et il existe $D_* > 0$ tels que pour tout $D < D_*$ et tout $Y \in \mathbb{R}^N$, s'il existe une suite de solutions $Z_m(t) = (Z_m^*(t)^T, z_{N+1,m}(t))^T$ de (6.3) de condition initiale $Z_m(t') = z_{t',m}W$ ($z_{t',m} \in \mathbb{R}$, $W = (\mathbb{1}^T, 0)^T$) et une suite $(t_m)_m$ qui tend vers l'infini telles que $z_{N+1,m}(t_m) = 0$ alors il existe une solution $Z_Y(t) = (Z_Y^*(t)^T, z_{N+1,Y}(t))^T$ du système (6.3) de condition initiale $Z_Y(t') = Z_Y \in \mathbb{R}^N$

telle que

$$\|Z_Y(t)\| < K \exp(-\beta(t-t'))\|Y\|, \quad \forall t \geq t'.$$

De plus il existe une sous suite $(Z_{m_k}(t'))_k$ de $(Z_m(t'))_m$ telle que $Z_Y(t') = \lim_{k \rightarrow +\infty} Z_{m_k}(t')$.

Démonstration. Soit $Z_m(t)$ et $(t_m)_m$ vérifiant les hypothèses de ce présent lemme. Le lemme 33 implique que

$$\|Z_m(t)\| < L \exp(-\beta(t-t'))(\|Y\| + \|Z_m(t')\|), \quad \forall t \in [t', t_m].$$

L'idée est de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que $\|Z_m(t')\| < C\|Y\|$ puis extraire une sous-suite convergente de $Z_m(t)$. Soit ζ une matrice continue de norme $\|\zeta\| = D < D_*$.

En intégrant (6.3) pour tout $t \in [t', t_m]$ et tout $i = 1, \dots, N$ on a

$$\begin{aligned} z_{i,m}(t) &= e(t, t')z_{i,m}(t') + F_{i,m}(t), \\ |F_{i,m}(t)| &= |e(t, t') \int_{t'}^t \langle \zeta_i(s), z_{N+1,m}(s)\mathbb{1} + Z_m^*(s) + e(s, t')Y \rangle e(t', s) ds| \\ &< D(2L + \exp(c_b))(\|Y\| + \|Z_m(t')\|)e(t, t') \int_{t'}^t \exp((\alpha - \beta)(s - t')) ds \\ &< D(2L + \exp(c_b)) \exp(c_b) \frac{\|Y\| + \|Z_m(t')\|}{\alpha - \beta} \exp(-\beta(t - t')). \end{aligned}$$

Comme $z_{N+1,m}(t_m) = 0$, et en intégrant (6.3) on obtient

$$\begin{aligned} z_{N+1,m}(t_m) = 0 &\iff z_{i,m}(t') \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), \mathbb{1} \rangle \exp(-\int_{t'}^s \langle A_*(x), \mathbb{1} \rangle dx) ds \\ &+ \int_{t'}^{t_m} \sum_{i=1}^N [a_j(s) F_{i,m}(s)] P(t', s) ds \\ &= - \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \implies |z_{i,m}(t')| &\left| 1 - \exp(-\int_{t'}^{t_m} \langle A_*(x), \mathbb{1} \rangle dx) \right| \\ &- c_a D(2L + \exp(c_b)) \exp(c_b) \frac{\|Y\| + |z_{t',m}|}{\alpha - \beta} \int_{t'}^{t_m} \exp(-\beta(s - t')) P(t', s) ds \\ &< \left| \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds \right|. \end{aligned}$$

Pour $D \approx 0$ et $m \rightarrow +\infty$ on aura donc

$$|z_{i,m}(t')| < \frac{\exp(2c_b + c_a) \left[D \frac{c_a(2L + \exp(c_b))}{\beta(\alpha - \beta)} + \frac{c_a}{\alpha} \right]}{1 - c_a D(2L + c_b) \exp(2c_b + c_a) \frac{1}{\beta(\alpha - \beta)}} \|Y\|,$$

ce qui implique que $(\|Z_m(t)\|)_m$ est uniformément bornée sur chaque intervalle $[t', t_m]$, de plus

$$\|Z_m(t)\| < L \exp(-\beta(t - t')) (\|Y\| + \|Z_m(t')\|) < K \exp(-\beta(t - t')) \|Y\|,$$

où

$$K = L \left[1 + \frac{\exp(2c_b + c_a) \left[D \frac{c_a(2L + \exp(c_b))}{\beta(\alpha - \beta)} + \frac{c_a}{\alpha} \right]}{1 - c_a D(2L + c_b) \exp(2c_b + c_a) \frac{1}{\beta(\alpha - \beta)}} \right].$$

On peut donc extraire une sous-suite qui converge vers une solution $Z_Y(t)$ de (6.3) et vérifiant

$$\|Z_m(t)\| < K \exp(-\beta(t - t')) \|Y\|.$$

□

6.3 Ingrédients de la forme linéaire $\mathcal{L}_{t'}$

Dans cette Section on va montrer l'existence d'une famille de solutions du système (6.3) satisfaisant les hypothèses du lemme 34 de la Section précédente. Pour cela il suffit de déterminer les conditions initiales $Z_m(t') = z_{t',m} W$; remarquons qu'il suffit juste de déterminer la suite des nombres réels $(z_{t',m})_m$.

Aussi dans cette Section on considère $b(t)$ et \mathcal{A} satisfaisant uniquement l'hypothèse de stabilisé (H_{stab}) sans distinction dans la matrice ζ . Cela permet donc en particulier de déduire le résultat linéaire II^L.

Pour avoir plus d'informations sur les solutions $Z_m(t)$ du lemme 34 on va les écrire en terme de résolvante. Soit $S(t; t') = \{s_{i,j}(t; t')\}_{\substack{1 \leq i \leq N+1 \\ 1 \leq j \leq N}}$ la résolvante du système linéaire homogène associé au système (6.3) suivant

$$\begin{cases} \dot{X}^*(t) = b(t)X^*(t) + \zeta(t)[x_{N+1}(t)\mathbb{1} + X^*(t)], & X^*(t) = (x_1(t), \dots, x_N(t))^T \\ \dot{X}_{N+1}(t) = [b(t) + \langle A_*(t), \mathbb{1} \rangle]x_{N+1}(t) + \langle A_*, X^*(t) \rangle, \end{cases} \quad (6.8)$$

où $A_*(s)$ est donnée par l'équation (6.2). La solution $Z(t) = (Z^*(t)^T, z_{N+1}(t))^T$ de (6.3) de condition initiale $Z(t') \in \mathbb{R}^N$ peut s'écrire en terme de résolvante, comme suit

$$Z^*(t) = S^*(t; t')Z(t') + S_1(t; t')Y, \quad (6.9)$$

$$z_{N+1}(t) = P(t, t')z_{N+1}(t') + \quad (6.10)$$

$$+ P(t, t') \int_{t'}^t \langle A_*(s), S^*(s; t')Z(t') + S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds,$$

où $S^*(t; t') = \{s_{i,j}(t; t')\}_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$ et $S_1(t; t')$ est un opérateur qui ne dépend pas de $Z(t')$ et de Y tel que $S(t', t') = 0$.

Comme il a été dit précédemment, on cherche à montrer l'existence de solutions du système (6.3) satisfaisant les hypothèses du lemme 34 de la Section précédente. Dans le lemme 34 on a $Z_m(t') = z_{t',m}W$, alors pour une suite $(T_m)_m$ qui tend vers l'infini telle que $Z_{m,N+1}(T_m) = 0$ et par la notation de l'équation (6.10) précédente, la suite de nombres réels $(z_{t',m})_m$ devra être définie par

$$z_{t',m} = - \frac{\int_{t'}^{T_m} \langle A_*(s), S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds}{\int_{t'}^{T_m} \langle A_*(s), S^*(s; t')W \rangle P(t', s) ds}.$$

Dans le lemme suivant on va montrer que cette suite $(z_{t',m})_m$ est bien définie, autrement dit on va montrer que le dénominateur du quotient dans le membre droit de l'équation précédente est non nul.

Lemme 35: Soit $S(t; t') = \{s_{i,j}(t; t')\}_{\substack{1 \leq i \leq N+1 \\ 1 \leq j \leq N}}$ la résolvante du système linéaire homogène (6.8) associé au système (6.3). Notons $S^*(t; t') = \{s_{i,j}(t; t')\}_{\substack{1 \leq i \leq N \\ 1 \leq j \leq N}}$. Supposons que $b(t)$ et A vérifient l'hypothèse (H_{stab}) . Posons

$$H(t, t') := \left[\int_{t'}^t \langle A_*(s), S^*(s; t')W \rangle P(t', s) ds \right], \quad W = (\mathbb{1}^T, 0)^T, \quad t \geq t'. \quad (6.11)$$

Soit $\beta \in (0, \alpha)$, alors il existe $D_* > 0$ tel que pour toute matrice ζ continue de norme $\|\zeta\| < D_*$ il existe $T_W > 0$ tel que pour tout $t \geq T_W$ on a $H(t, t') \neq 0$.

Démonstration. De l'équation (6.10), on déduit que $Z(t) = (S^*(t; t')W - z_{N+1}(t), z_{N+1}(t))$ est solution du système linéarisé homogène (6.8) et de condition initiale W où $z_{N+1}(t)$ vérifie

$$z_{N+1}(t) = P(t, t')H(t, t'), \quad t \geq t'.$$

Donc $Z(t) = (S^*(t; t')W - z_{N+1}(t), z_{N+1}(t))$ est en particulier solution de l'équation linéaire non homogène (6.3) avec $Y = 0$ et vérifie les hypothèses du lemme 34. Comme $Y = 0$ donc $\|Z(t)\| \equiv 0$, ce qui contredit la valeur de la condition initiale $Z(t') = W$. \square

Par conséquent dans la proposition suivante on montre que le système (6.3) admet une suite de solutions qui satisfait les hypothèse du lemme 34

Proposition 36: On considère le système (6.3) avec $b(t)$ et \mathcal{A} vérifiant l'hypothèse de stabilité (H_{stab}). Soit $\beta \in (0, \alpha)$ alors il existe $D_* > 0$ et $K > 0$, tel que pour toute matrice ζ continue et de norme $\|\zeta\| < D_*$ et tout $Y \in \mathbb{R}^N$ il existe une solution $Z_Y(t) = (Z_Y^*(t)^T, z_{N+1,Y}(t))^T$ de (6.3) telle que

$$\|Z_Y(t)\| < K \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|, \quad \forall t \geq t',$$

de plus $Z_Y(t') = \psi_{t'}(Y)W$ où

$$\psi_{t'}(Y) = \lim_{t_m \rightarrow +\infty} \frac{-1}{H(t_m, t')} \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds.$$

et où $(t_m)_m$ est une suite de nombres réels qui tendent vers $+\infty$ et où $H(t_m, t')$ est donnée par le lemme 35.

Démonstration. D'après le lemme 35, pour toute suite $(t_m)_m$ telle que $t_m > T_W$ on a $H(t_m, t') \neq 0$. De (6.10), la solution $Z_m(t) = (Z_m^*(t)^T, z_{N+1,m}(t))^T$ de (6.3) et de condition initiale $z_{m,t'}W$ telle que

$$z_{m,t'} = -\frac{1}{H(t_m, t')} \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds.$$

vérifie :

$$z_{N+1,m}(t_m) = 0 = P(t', t) \left[z_{m,t'} H(t_m, t') + \int_{t'}^{t_m} \langle A_*(s), S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds \right].$$

D'après le lemme 34, il existe une solution $Z_Y(t)$ telle que $\|Z_Y(t)\| < L \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|$ pour tout $t \geq t'$ avec $Z_Y(t') = \psi_{t'}(Y)W$ où

$$\psi_{t'}(Y) = \lim_{t_{m_k} \rightarrow \infty} \frac{-1}{H(t_{m_k}, t')} \int_{t'}^{t_{m_k}} \langle A_*(s), S_1(s; t')Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds.$$

\square

6.4 Décomposition de la résolvante

Finalemt on va montrer dans ce qui suit le résultat linéaire \mathbf{I}^L et \mathbf{II}^L . Dans l'intérêt d'avoir une cohérence dans la preuve, on montre en premier le cas générale c'est à dire le deuxième résultat linéaire \mathbf{II}^L qui n'impose pas que la matrice $\zeta(t)$ soit normalisante.

Preuve du résultat linéaire \mathbf{II}^L : Cas général.

- Montrons que $\|R(t; t')[Y + \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}]\|$ décroît exponentiellement :

Soit $\beta > 0$ et soit $\|\zeta\| = D < D_*$ où D_* est défini par le lemme 34. Soit $\psi_{t'}(Y)$ donné par la proposition précédente 36. Soit $Y \in \mathbb{R}^N$ et soit ϕ^t le flot du système (6.1). On additionne et on retranche un même terme dans $\phi^t(Y)$ comme suit

$$\phi^t(Y) = -\psi_{t'}(Y)R(t; t')\mathbb{1} + R(t; t')[Y + \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}]. \quad (6.12)$$

Posons $R(t; t')[Y + \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}] = z_{N+1}(t)\mathbb{1} + Z^*(t) + e(t; t')Y$ avec $z_{N+1}(t)$ est solution de condition initiale $z_{N+1}(t') = 0$ de l'équation

$$\dot{z}_{N+1}(t) = [b(t) + \langle A_*(t), \mathbb{1} \rangle]z_{N+1}(t) + \langle A_*(t), R(t; t')[Y + \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}] - z_{N+1}(t)\mathbb{1} \rangle.$$

Donc $Z(t) = (Z^*(t), z_{N+1}(t))$ est solution du système linéaire non homogène (6.3), de plus de l'équation (6.12), on déduit qu'elle est de condition initiale $Z(t') = W\psi_{t'}(Y)$. La proposition 36 implique que

$$\|Z(t)\| < K \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|, \quad \forall t \geq t'.$$

D'où $\|R(t; t')[Y + \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}]\| < [K + \exp(c_b)] \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|$ pour tout $t \geq t'$.

- Montrons que lorsque le système admet une solution qui ne décroît pas vers zéro alors $\psi_t(Y) = \psi_s(R(s; t)Y)$:

Supposons que le système (6.1) admet une solution qui ne décroît pas exponentiellement vers zéro. Notons $V(t)$ cette solution. On a alors

$$R(t; s)R(s; t')Y = \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t) - R(t; t')[Y - \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t')] \quad (6.13)$$

$$= \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(t) - R(t; s)[R(s; t')Y - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)]. \quad (6.14)$$

$$\implies [\mathcal{L}_{t'}(Y) - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)]V(t) = R(t; s)[R(s; t')\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') + \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)].$$

Comme le membre droit de la dernière équation vérifie

$$\begin{aligned} & \|R(t; s)[R(s; t')\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') + \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)]\| \\ & < K[\exp(-\beta(t - t')) + \exp(-\beta(t - s))]\|Y\|. \end{aligned}$$

Alors que le membre gauche est un produit d'une forme linéaire par la fonction $V(t)$ qui ne décroît pas exponentiellement vers zéro, alors on a forcément

$$\mathcal{L}_{t'}(Y) - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y) = 0, \quad \forall t' \geq 0, \forall s \geq t'.$$

□

On va montrer maintenant le résultat linéaire I^L. On considère alors le cas particulier où $\zeta(t)$ est une matrice normalisante. Par la définition 30, le système (6.1) admet une solution $V(t) = (v_1(t), \dots, v_N(t))^T$ telle que

$$\inf_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| > 0, \quad \text{et} \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| < +\infty.$$

Notons dans la suite

$$\alpha_- = \inf_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| > 0, \quad \text{et} \quad \alpha_+ = \sup_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| < +\infty.$$

On définit dans la preuve suivante la forme linéaire $\mathcal{L}_{t'}$ par

$$\mathcal{L}_{t'}(Y) = \frac{\psi_{t'}(Y)}{\psi_{t'}(V(t'))},$$

où $\psi_{t'}$ est définie par la proposition 36. On remarque par unicité que $\mathcal{L}_{t'}$ est définie par

$$\mathcal{L}_{t'}(Y) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_{t'}^t \langle A_*(s), S_1(s)Y + e(s, t')Y \rangle P(t', s) ds}{\int_{t'}^t \langle A_*(s), S_1(s)V(t') + e(s, t')V(t') \rangle P(t', s) ds}.$$

Preuve du résultat linéaire I^L.

- Montrons $\mathcal{L}_t(R(t; t')V(t')) = 1$:

Par définition de $\mathcal{L}_{t'}$ on a $\mathcal{L}_t(V(t)) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. Donc

$$\mathcal{L}_t(R(t; t')V(t')) = 1 = \mathcal{L}_{t'}(V(t')), \quad \forall t' \in \mathbb{R} \quad \forall t \geq t'. \quad (6.15)$$

- Construction de la forme linéaire $_t$:

On additionne et on retranche un même terme dans $V(t)$ on aura

$$R(t; t')V(t') = V(t) = -\psi_{t'}(V(t'))R(t; t')\mathbb{1} + R(t; t')[V(t') + \psi_{t'}(V(t'))\mathbb{1}]. \quad (6.16)$$

D'après la proposition 36, on a $\|\psi_{t'}(V(t'))\| < K\|V(t')\| < K\alpha_+$ pour tout $t' \geq 0$.

En outre

$$\begin{aligned} |\psi_{t'}(V(t'))|\|R(t; t')\mathbb{1}\| &= \|V(t) - R(t; t')[V(t') + \psi_{t'}(V(t'))\mathbb{1}]\| \\ &> \|V(t)\| - \|R(t; t')[V(t') + \psi_{t'}(V(t'))\mathbb{1}]\| \\ &> \alpha_- - K \exp(-\beta(t - t'))\|V(t')\| \\ &> \alpha_- - \alpha_+ K \exp(-\beta(t - t')), \quad \forall t' \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq t'. \end{aligned}$$

On intègre sur un compact de longueur δ fixé tel que $1 \ll \delta < +\infty$; posons $t = t' + \delta$, on a de (6.1) :

$$|\psi_{t'}(V(t'))| > \frac{\alpha_- - \alpha_+ K \exp(-\beta\delta)}{\exp((2\alpha + c_b + c_a + D)\delta)} > 0, \quad \forall t' \in \mathbb{R}, \quad \forall t \geq t'. \quad (6.17)$$

Posons

$$\mathcal{L}_{t'}(Y) = \frac{\psi_{t'}(Y)}{\psi_{t'}(V(t'))}.$$

- De (6.17) et d'après la proposition 36, il existe $K_1 > 0$ tel que $\mathcal{L}_{t'}(Y) < K_1\|Y\|$.

- Décroissance exponentielle :

D'après l'équation (6.15) pour tout $Y \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \phi^t(Y) &= \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t) - R(t; t')[Y - \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t')] \\ &= \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t) + R(t; t')[Y - \psi_{t'}(Y)\mathbb{1} - (\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') - \frac{\psi_{t'}(Y)}{\psi_{t'}(V(t'))}\psi_{t'}(V(t'))\mathbb{1})] \\ &= \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t) + R(t; t')[Y - \psi_{t'}(Y)\mathbb{1} - (\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') - \psi_{t'}(\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t'))\mathbb{1})]. \end{aligned}$$

D'après le résultat linéaire \mathbf{II}^L démontré précédemment il existe $K_* > 0$ tel que on a

$$\begin{aligned} \|R(t; t')[Y - \psi_{t'}(Y)\mathbb{1}]\| &< K_* \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|, \quad \forall t \geq t' \\ \|R(t; t')[\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') - \psi_{t'}(\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t'))\mathbb{1}]\| &< K_* \exp(-\beta(t - t'))\|Y\|, \quad \forall t \geq t'. \end{aligned}$$

- Finalement montrons que $\mathcal{L}_{t'}(Y) = \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)$: On a

$$\begin{aligned} R(t; s)R(s; t')Y &= \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t) - R(t; t')[Y - \mathcal{L}_{t'}(Y)V(t')] \\ &= \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(t) - R(t; s)[R(s; t')Y - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)]. \end{aligned}$$

$$\implies [\mathcal{L}_{t'}(Y) - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)]V(t) = R(t; s)[R(s; t')\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') + \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)].$$

Comme $\min_{t \in \mathbb{R}} \|V(t)\| = \alpha_- > 0$ et comme le membre droit de la dernière équation vérifie

$$\begin{aligned} &\|R(t; s)[R(s; t')\mathcal{L}_{t'}(Y)V(t') + \mathcal{L}_s(R(s; t')Y)V(s)]\| \\ &< K[\exp(-\beta(t - t')) + \exp(-\beta(t - s))]\|Y\|. \end{aligned}$$

Donc

$$\mathcal{L}_{t'}(Y) - \mathcal{L}_s(R(s; t')Y) = 0, \quad \forall t' \geq 0, \forall s \geq t'.$$

□

6.5 Conclusion

Dans ce Chapitre on a étudié une classe de systèmes linéaires perturbés par une matrice ζ qui dépend du temps. On a montré que l'espace \mathbb{R}^N se décompose en somme directe de sous-espaces $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}\mathbb{1} \oplus \mathcal{W}$ où \mathcal{W} est une variété qui est donc de dimension $N - 1$ et exponentiellement stable. Le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}\mathbb{1}$ peut être lui même une variété exponentiellement stable. Dans le cas où le système linéaire perturbé en question admet une solution $V(t)$ qui ne décroît pas vers zéros alors il existe une variété centrale qui est le sous-espace vectoriel $\mathbb{R}V(t')$ de dimension un avec $t' \in \mathbb{R}$ un instant initial. De plus dans le cas où la matrice de perturbation ζ est normalisante on a obtenu des informations concernant la norme de la forme linéaire. Dans le prochain Chapitre on va utiliser ces résultats pour montrer la stabilité des systèmes non-linéaires de type champ moyen étudiés dans cette thèse.

Chapitre 7

Preuve du résultat III et IV : Stabilité des systèmes champ moyen

Sommaire

7.1 Linéarisation du système (P)	101
7.2 Preuve du résultat principal (III) et (IV) : Stabilité	104
7.3 Conclusion	107

Dans ce Chapitre on montre les deux résultats **III** et **IV** énoncés dans la Section **3.2.3** du Chapitre **3**. On va étudier donc la stabilité des systèmes couplés donnés par l'équation **(P)** (en particulier **(PNP)**) du Chapitre **4** et présentant un état de synchronisation. On linéarise le système autour d'une orbite synchronisée et on applique par suite les résultats de stabilités obtenus dans le Chapitre **6** précédent. Rappelons que les deux systèmes **(P)** et **(PNP)** sont donnés par les deux équations suivantes

$$\dot{x}_i = F(X, x_i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{PNP})$$

$$\dot{x}_i = F(X, x_i) + H_i(X, x_i), \quad 1 \leq i \leq N, \quad t \geq t_0, \quad (\text{P})$$

où $N \geq 2$ et $t_0 \in \mathbb{R}$ est le temps initial. $F : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $H_i : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe C^1 , on note $H = (H_1, \dots, H_N)$. On note dans tout ce qui suit par Φ^t le flot du système **(P)** (en particulier **(PNP)**).

On a vu dans le Chapitre 4 que lorsque la norme $\|H\|_B$ est suffisamment petite et sous les hypothèses (H) et (H_*) la dispersion de phase globale, d'une solution du système **P** (et **PNP**), de condition initiale dans l'ouvert de synchronisation, reste uniformément bornée par une constante $D > 0$ que l'on peut choisir $D \approx 0$; Rappelons que les hypothèses (H) et (H_*) sont données par

$$(H) \quad \begin{cases} F \text{ est de classe } C^2, & \text{et } \max\{\|F\|_B, \|dF\|_B, \|d^2F\|_B\} < +\infty, \\ F \text{ est } \mathbb{1}\text{-périodique et } \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s) > 0, \end{cases}$$

$$(H_*) \quad \int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(s\mathbb{1}, s)}{F(s\mathbb{1}, s)} ds < 0.$$

On rappelle les deux résultats (III) et (IV)

Résultat principal (III). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert de synchronisation C_r (comme défini dans le résultat (I)), tels que pour toute fonction H de classe C^1 vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$ on a*

$$\exists M > 0, \forall X \in C_r, \exists \delta > 0, \forall Y \in C_r, \|X - Y\| < \delta :$$

$$\|\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)\| < M\|X - Y\|, \quad \forall t \geq t_0,$$

De plus pour tout $X \in C$ il existe une sous-variété $\mathcal{W}_X \subset C_r$ de dimension $N - 1$ en X telle que

$$\exists \beta > 0, \exists K > 0, \forall X \in C_r, \forall Y \in \mathcal{W}_X :$$

$$\|\Phi^t(X) - \Phi^t(Y)\| < K \exp(-\beta(t - t_0))\|X - Y\|, \quad \forall t \geq t_0.$$

Résultat principal (IV). *On considère le système (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_*) alors il existe $D_* > 0$ tel que pour tout $D \in (0, D_*]$ il existe $r > 0$ et il existe un ouvert C_r (comme défini dans le résultat (I)) tels que pour toute fonction H de classe C^1 et $\mathbb{1}$ -périodique vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$, il existe une sous-variété $\mathcal{W}_{stab} \subset C_r$ de dimension $N - 1$ telle que*

$$\exists \beta > 0, \exists K > 0, \forall X \in \mathcal{W}_{stab} : \|\Phi^t(X) - \rho t - \Psi(t)\| < K \exp(-\beta(t - t_0)), \quad \forall t \geq t_0,$$

où $\rho > 0$ et $\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_N)$ avec $\Psi_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions C^1 et $\frac{1}{\rho}$ -périodiques.

7.1 Linéarisation du système (P)

Soit alors le système perturbé (P). Afin de simplifier les notations on note dans toute cette Section

$$F_i(Y, z) := F(Y, z) + H_i(Y, z), \quad \forall Y \in \mathbb{R}^N, \forall z \in \mathbb{R}, \quad \forall 1 \leq i \leq N,$$

et on note $d\mathcal{F}(t)$ la différentielle de la fonction vectorielle (F_1, \dots, F_N) .

Rappelons que $\Phi^t(Z)$ est le flot de $Z \in \mathbb{R}^N$ du système (P). Sans perte de généralité, on note $Z := \Phi^t(Z)$, ainsi les éléments de la matrice $d\mathcal{F}(\Phi^t(Z)) := \{g_{i,j}\}_{i,j}$ sont donnés par

$$\begin{cases} g_{ii}(t) = \partial_{N+1} F_i(Z, z_i) + \partial_i F_i(Z, z_i), 1 \leq i \leq N, \\ g_{ij}(t) = \partial_j F_i(Z, z_i), 1 \leq i \neq j \leq N. \end{cases} \quad (7.1)$$

La stratégie dans la suite est d'appliquer les résultats linéaires de stabilité obtenus dans le Chapitre 6; pour cela on va choisir une linéarisation convenable du système (P). Plus précisément soit $Z \in \mathbb{R}^N$, on considère le système linéarisé suivant

$$\frac{d}{dt} Y(t) = d\mathcal{F}(\Phi^t(Z)) Y(t), \quad t \geq t_0, \quad Y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))^T. \quad (7.2)$$

Rappelons aussi que, pour $Z \in \mathbb{R}^N$, on note $\mu_Z := \mu_Z(t)$ la solution du système (SNP) associée à $\Phi^t(Z)$ et de condition initiale $\mu_Z(t_0) \in \mathbb{R}$ (voir définition 14 dans la Section 4.3).

Dans le lemme suivant on va voir que le système (7.2) peut s'écrire sous la forme des systèmes linéaires (6.1) étudiés dans le Chapitre 6. On note dans ce qui suit I_N la matrice identité carrée d'ordre N .

Lemme 37: Soit le système couplé non-linéaire (P). Supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_{*}). Alors, il existe $\epsilon_* > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_*]$ il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction H vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$ il existe un ouvert de synchronisation C_r qui est positivement Φ^t -invariant et tel que pour tout $Z \in C_r$ il existe un difféomorphisme $t \rightarrow \mu = \mu_Z(t)$ tel que le système linéarisé (7.2) est équivalent au

système linéaire suivant

$$\frac{d}{d\mu}Y^*(\mu) = [b(\mu)I_N + \mathcal{A}(\mu) + \zeta_Z(\mu)]Y^*(\mu), \quad \mu \geq \mu_Z(t_0), \quad Y^*(\mu) = Y(\tau_Z(\mu)), \quad (7.3)$$

où $\tau_Z : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est la fonction inverse de $\mu(t)$, $\zeta_Z(\mu)$ est une matrice normalisante vérifiant $\|\zeta_Z\| < \epsilon$, où $\mathcal{A}(\mu) = \{a_{i,j}(\mu) = a_j(\mu)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ est une matrice de rang 1 et $b(\mu)$ une fonction définies par

$$a_j(\mu) = \frac{\partial_j F(\mu \mathbb{1}, \mu)}{F(\mu \mathbb{1}, \mu)}, \quad 1 \leq i, j \leq N \quad \text{et} \quad b(\mu) = \frac{\partial_{N+1} F(\mu \mathbb{1}, \mu)}{F(\mu \mathbb{1}, \mu)},$$

et qui vérifient

$$\int_0^1 b(s) + \sum_{j=1}^N a_j(s) ds = 0, \quad \text{et} \quad \int_0^1 b(s) ds < 0,$$

autrement dit l'hypothèse de stabilité (H_{stab}) est satisfaite.

Démonstration. On considère le système (P). Supposons que F vérifie les hypothèses (H) et (H_*). Soit $D \approx 0$, d'après le théorème 18 dans la Section 4.4 du Chapitre 4, il existe $r > 0$ tel que pour une matrice H vérifiant $\|H\|_B < r$ et de classe C^1 , il existe un ouvert de synchronisation C_r qui est positivement Φ^t -invariant tels que pour tout $t \geq t_0$ et tout $Z \in C_r$ on a,

$$\max_j |\Phi_j^t(Z) - \mu_Z(t)| < D \quad \text{et} \quad \max_{i,j} |\Phi_i^t(Z) - \Phi_j^t(Z)| < 2D;$$

où $\mu_Z(t)$ est une solution du système (SNP) associée à $\Phi^t(Z)$ et de condition initiale $\mu_Z(t_0) \in \mathbb{R}$ ainsi définie dans la définition 14. Comme $Z \in C_r$, rappelons que par le théorème 18, le flot $\Phi^t(Z)$ et la solution $\mu_Z(t)$ sont définis pour tout $t \geq t_0$.

Soit le système linéarisé (7.2) au point $\Phi^t(Z)$. Pour tout $1 \leq i, j \leq N$, Soit $U_Z(t) = \{u_{i,j}^Z(t)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ la matrice d'ordre N définie par

$$\begin{cases} u_{ii}^Z(t) = \left[\partial_{N+1} H_i(Z, z_i) + [\partial_{N+1} F(Z, z_i) - \partial_{N+1} F(\mu_Z(t) \mathbb{1}, \mu_Z(t))] \right] \\ \quad + \partial_i H_i(Z, z_i) + [\partial_i F(Z, z_i) - \partial_i F(\mu_Z(t) \mathbb{1}, \mu_Z(t))] \\ u_{i,j}^Z(t) = \partial_j H_i(Z, z_i) + [\partial_j F(Z, z_i) - \partial_j F(\mu_Z(t) \mathbb{1}, \mu_Z(t))], \end{cases}$$

Alors

$$\dot{Y}(t) = [d\mathcal{F}(\mu_Z(t) \mathbb{1}) + U_Z(t)]Y(t).$$

équivalent aussi à

$$\dot{y}_i(t) = \partial_{N+1}F(\mu_Z(t)\mathbb{1}, \mu_Z(t))y_i(t) + \sum_{j=1}^N [\partial_j F(\mu_Z(t)\mathbb{1}, \mu_Z(t)) + u_{i,j}^Z(t)]y_j(t). \quad (7.4)$$

On note $L > 0$ et $\alpha > 0$ les quantités suivantes :

$$L := \sum_{0 \leq i \leq 2} \|d^i F\|_B, \quad \text{et} \quad \alpha := \min_{s \in [0,1]} F(s\mathbb{1}, s). \quad (7.5)$$

Supposons que $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$, alors pour tout $1 \leq i, j \leq N$ on a

$$\|u_{i,i}^Z\| < 2[r + LD], \quad \text{et} \quad \|u_{i,j}^Z\| < r + LD. \quad (7.6)$$

D'après la proposition 15 on a $\dot{\mu}_Z > \alpha - LD > 0$, en particulier $\mu_Z(t)$ est un difféomorphisme, de plus il existe $L > 0$ tel que

$$\frac{F(\mu_Z\mathbb{1}, \mu_Z)}{\dot{\mu}_Z} = 1 + \theta(t) \quad \text{avec} \quad |\theta(t)| = \left| \frac{F(\mu_Z\mathbb{1}, \mu_Z) - F(\Phi^t(Z), \mu_Z)}{\dot{\mu}_Z} \right| < \frac{LD}{\alpha - LD}.$$

Soit le changement de variable $t \rightarrow \mu = \mu_Z(t)$ et posons $Y^*(\mu) = Y(\tau_Z(\mu))$ où $\tau_Z(\mu) := \mu_Z^{-1}(\mu)$ est l'inverse de la fonction $\mu_Z(t)$. On utilise donc dans l'équation (7.4) l'équation suivante

$$\frac{d}{dt}Y(t) = \frac{d}{ds}Y^*(s) \frac{d}{dt}\mu_Z(t) = \frac{d}{ds}Y^*(s) \frac{F(\mu_Z(t)\mathbb{1}, \mu_Z(t))}{1 + \theta(t)}.$$

En tenant compte de l'équation (7.6) et l'équation (7.4), il existe une matrice $\zeta_Z(\mu) = \{\zeta_{ij}^Z(\mu)\}_{1 \leq i, j \leq N}$ qui dépend de $\mu \in \mathbb{R}$ définie par

$$\zeta_{ij}^Z(\mu) = d\mathcal{F}(\Phi^t(Z)) \frac{\theta(t)}{F(\mu\mathbb{1}, \mu)} + u_{i,j}^Z(t) \frac{1}{F(\mu\mathbb{1}, \mu)},$$

et qui vérifie

$$\|\zeta_Z\| < (L + r) \frac{\|\theta\|}{\alpha} + (r + LD) \frac{1}{\alpha} < \epsilon := (L + r) \frac{LD}{\alpha - LD} + (r + LD) \frac{1}{\alpha},$$

tel que le système (7.2) soit équivalent à

$$\frac{d}{d\mu}y_i^*(\mu) = \frac{\partial_{N+1}F(\mu\mathbb{1}, \mu)}{F(\mu\mathbb{1}, \mu)}y_i^*(\mu) + \sum_{j=1}^N \left[\frac{\partial_j F(\mu\mathbb{1}, \mu)}{F(\mu\mathbb{1}, \mu)} + \zeta_{ij}^Z(\mu) \right] y_j^*(\mu),$$

avec $\mu \geq \mu_Z = \mu_Z(t_0)$. Remarquons que

$$V_Z^*(\mu) := \left(F_1(\Phi^{\mu_Z^{-1}(\mu)}(Z)), \dots, F_N(\Phi^{\mu_Z^{-1}(\mu)}(Z)) \right) = \frac{d}{dt}\Phi^{\mu_Z^{-1}(\mu)}(Z),$$

est solution de (7.3) et vérifie

$$\min_{\mu \geq \mu_Z} V_Z^*(\mu) \geq \alpha - LD - r > 0 \quad \text{et} \quad \|V_Z^*\| \leq \max_{\mu \in [0,1]} F(\mu \mathbf{1}, \mu) + LD + r.$$

Donc la matrice ζ_Z est une matrice normalisante. En outre, les deux hypothèses (H) et (H_{*}) implique que

$$\int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(\mu \mathbf{1}, \mu)}{F(\mu \mathbf{1}, \mu)} d\mu < 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{\partial_{N+1} F(\mu \mathbf{1}, \mu)}{F(\mu \mathbf{1}, \mu)} + \frac{\partial_j F(\mu \mathbf{1}, \mu)}{F(\mu \mathbf{1}, \mu)} d\mu = 0.$$

On déduit que l'hypothèse de stabilité (H_{stab}) est satisfaite. □

7.2 Preuve du résultat principal (III) et (IV) : Stabilité

La preuve du résultat III et résultat IV se repose sur une méthode perturbative comme ce qui suit :

Preuve du résultat III. Soit le système couplé non-linéaire (P) et supposons que F satisfait les hypothèses (H) et (H_{*}). D'après le lemme 37, il existe $\epsilon_* > 0$ tel que pour tout $\epsilon \in (0, \epsilon_*]$, il existe $r > 0$ tel que pour toute fonction H vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r$ pour $Z \in C_r$ le système (7.2) est équivalent au système (7.3) avec $b(t)$ et \mathcal{A} vérifie l'hypothèse de stabilité (H_{stab}) et ζ une matrice normalisante vérifiant $\|\zeta_Z\| < \epsilon$.

Soit donc $Z \in C_r$, on note $R_Z(\mu; \mu_Z)$ la résolvante du système (7.3) où μ est le changement de variable $t \rightarrow \mu_Z(t)$ avec $\mu_Z(t)$ une solution du système (SNP) associée à $\Phi^t(Z)$ et de condition initiale $\mu_Z := \mu_Z(t_0) \in \mathbb{R}$ ainsi définie dans la définition 14. D'après le résultat linéaire L^L , de la Section 6.1 du Chapitre 6, on déduit qu'il existe $\beta > 0$ et $K > 0$ et il existe $r_* > 0$ tel que pour une fonction H vérifiant $\max\{\|H\|_B, \|dH\|_B\} < r_*$ et pour tout $Z \in C_{r_*}$, il existe une forme linéaire $\mathcal{L}_{\mu_Z} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour tout $Y \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $\mu \geq \mu_Z$, on a

- $\mathcal{L}_{\mu_Z}(R_Z(\mu; \mu_Z)V_Z^*(\mu_Z)) = 1$ et $\mathcal{L}_{\mu_Z}(Y) < K\|Y\|$,
- $\mathcal{L}_{\mu_Z}(Y) = \mathcal{L}_{\mu_Z}(R_Z(\mu; \mu_Z)Y)$,
- $\|R_Z(\mu; \mu_Z)[Y - \mathcal{L}_{\mu_Z}(Y)V_Z^*(\mu_Z)]\| < K\|Y\| \exp(-\beta(\mu - \mu_Z))$.

En outre la solution $Y^*(\mu)$ de condition initiale $Y^*(\mu_Z)$ s'écrit sous la forme

$$R_Z(\mu; \mu_Z)Y^*(\mu) = \mathcal{L}_{\mu_Z}(Y^*(\mu_Z))V_Z^*(\mu) + R_Z(\mu; \mu_Z)[Y^*(\mu_Z) - \mathcal{L}_{\mu_Z}(Y^*(\mu_Z))V_Z^*(\mu_Z)].$$

Posons $S_Z(t; t_0)$ la résolvante du système (7.2). Comme la solution $Y(t)$ du système (7.2) et de condition initiale $Y(t') = Y$ vérifie $Y(t) = Y(\tau_Z(\mu)) = Y^*(\mu)$ donc $Y^*(\mu_Z) = Y$ où $\mu \rightarrow \tau_Z(\mu)$ est l'inverse de $t \rightarrow \mu_Z(t)$, alors par le changement de variable $\mu := \mu_Z(t) \rightarrow t$ on obtient que $Y(t)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned} Y(t) &= S_Z(t; t_0)Y = Y^*(\mu) = R_Z(\mu_Z(t); \mu_Z(t_0))Y \\ &= \mathcal{L}_{\mu_Z}(Y)V_Z(t) + R_Z(\mu_Z(t); \mu_Z(t_0))[Y - \mathcal{L}_{\mu_Z}(Y)V_Z(t)], \end{aligned} \quad (7.7)$$

pour tout $t \geq t_0$ et où $V_Z(t) = V_Z^*(\mu_Z(t)) = \frac{d}{dt}\Phi^t(Z)$. D'un autre côté, le système (P) peut aussi s'écrire sous-forme

$$\frac{d}{dt}\Phi^t(Z) = \mathcal{F}(\Phi^t(Z)) \implies \frac{d}{dt}d\Phi^t(Z) = d\mathcal{F}(\Phi^t(Z))d\Phi^t(Z).$$

Donc $d\Phi^t(Z) = S_Z(t; t_0)$.

On montre maintenant la première assertion du résultat III.

Stabilité :

Soit $X, Y \in C_{r_*}$ tel que le segment $z(s) = (1-s)X + sY$ vérifie $z(s) \in C_{r_*}$ pour tout $s \in [0, 1]$. On a donc

$$\begin{aligned} \Phi^t(Y) - \Phi^t(X) &= \int_0^1 \frac{d\Phi^t(z(s))}{ds} ds = \int_0^1 d\Phi^t(z(s))ds(Y - X) \\ &= \int_0^1 S_{z(s)}(t; t_0)ds(Y - X). \end{aligned}$$

D'après la décomposition (7.7) et sachant que $\|V_{z(s)}\| < \|F\|_B + \|H\|_B$ on obtient

$$\begin{aligned} \|\Phi^t(Y) - \Phi^t(X)\| &\leq \left\| \int_0^1 \mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}(Y - X)V_{z(s)}(t)ds \right\| \\ &+ \left\| \int_0^1 R_{z(s)}(\mu_{z(s)}(t); \mu_{z(s)}(t_0)) \left[(Y - X) - \mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}(Y - X)V_{z(s)} \right] ds \right\| \\ &\leq K[\|F\|_B + \|H_B\|]\|Y - X\| + K \exp\left(-\beta(\mu_{z(s)}(t) - \mu_{z(s)}(t_0))\right)\|Y - X\| \\ &\leq K[\|F\|_B + \|H_B\| + 1]\|Y - X\|, \quad \forall t \geq t_0. \end{aligned}$$

On montre maintenant la deuxième assertion du résultat III.

Sous-variété exponentiellement stable :

Soit $X \in C_{r^*}$. Dans ce qui suit, montre qu'il existe une sous-variété en X exponentiellement stable. L'idée est de trouver des trajectoires de la forme $z(s)$ reliant $z(0) := X$ et $z(1) := Y \in C_r$ tels que pour tout $s \in [0, 1]$ la quantité $\frac{dz(s)}{ds}$ soit dans le noyau de la forme linéaire $\mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}$ cela permet d'utiliser l'équation (7.7) et d'annuler le terme qui ne décroît pas exponentiellement vers zéro comme suit :

$$\begin{aligned} \|\Phi^t(Y) - \Phi^t(X)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d\Phi^t(z(s))}{ds} ds \right\| = \left\| \int_0^1 d\Phi^t(z(s)) ds \frac{dz(s)}{s} \right\| \\ &= \left\| \int_0^1 \mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}\left(\frac{dz(s)}{s}\right) V_{z(s)}(t) ds + \int_0^1 R_{z(s)}(\mu_{z(s)}(t); \mu_{z(s)}) \left(\left(\frac{dz(s)}{s}\right) - \mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}\left(\frac{dz(s)}{s}\right) V_{z(s)} \right) ds \right\| \\ &= \int_0^1 R_{z(s)}(\mu_{z(s)}(t); \mu_{z(s)}) \left(\left(\frac{dz(s)}{s}\right) - \mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}\left(\frac{dz(s)}{s}\right) V_{z(s)} \right) ds \\ &\leq \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha - LD}(t - t_0)\right) \max_{s \in [0,1]} \left\| \frac{dz(s)}{ds} \right\|, \end{aligned} \quad (7.8)$$

sachant que d'après la proposition 15 on a $\dot{\mu}_Z > \alpha - LD > 0$ où D est donné dans la preuve du lemme 37 précédent. Pour que $\frac{dz(s)}{ds}$ soit dans le noyau de la forme linéaire $\mathcal{L}_{\mu_{z(s)}}$, il suffit que $z(s) := z(\xi, s)$ soit solution de

$$\frac{d}{ds} z(\xi, s) = \xi - \mathcal{L}_{\mu_{z(\xi, s)}}(\xi) V_{z(\xi, s)}(t_0), \quad (7.9)$$

de condition initiale $Z(\xi, 0) = X$ où $\xi \in \mathbb{R}^N$. Pour $\|\xi\| \approx 0$ la solution $z(\xi, s)$ existe pour tout $s \in [0, 1]$; dans la suite de cette preuve on considère des vecteurs ξ de normes assez proche de zéro tels que $z(\xi, s) \in C_{r^*}$ pour tout $s \in [0, 1]$. Comme $\mathcal{L}_{\mu_{z(\xi, s)}}(V_{z(\xi, s)}(t_0)) = 1$ on va obtenir à la fin donc $\mathcal{L}_{\mu_{z(\xi, s)}}(\xi) \left(\frac{d}{ds} z(\xi, s)\right) = 0$ ce qui implique l'équation (7.8) et ce qui achève la démonstration. On considère dans la suite des vecteurs $\xi \in \mathbb{R}^{N-1}$ dans l'hyperplan défini par $\mathcal{L}_{\mu_X}(\xi) = 0$. On montre maintenant que l'application $\xi \rightarrow \frac{d}{d\xi} z(\xi, 1) \approx Id$ avec $Id : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}^N$ est la matrice identité c'est à dire un C^1 -difféomorphisme ce qui définit donc la sous-variété exponentiellement stable. On a

$$\frac{d}{d\xi} \frac{d}{ds} z(\xi, s) = Id_N - \frac{d}{d\xi} \left[\mathcal{L}_{\mu_{z(\xi, s)}}(\xi) \right] V_{z(\xi, s)}(t_0) - \mathcal{L}_{\mu_{z(\xi, s)}}(\xi) \frac{d}{d\xi} \left[V_{z(\xi, s)}(t_0) \right]. \quad (7.10)$$

La différentiabilité du flot par rapport à chaque variable implique que la forme linéaire

\mathcal{L}_{μ_Z} est différentiable par rapport à Z . Comme \mathcal{L}_{μ_Z} est une forme linéaire par rapport à ξ et à l'aide d'un développement de Taylor (avec reste intégrale) il existe une matrice Π d'ordre $N - 1 \times N$ et $s' \in [0, s]$ tels que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mu_{z(\xi,s)}}(\xi) &= \mathcal{L}_{\mu_X}(\xi) + \Pi\xi(z(\xi, s) - X) \\ &= \Pi\xi(z(\xi, s) - Z(\xi, 0)) = \Pi\xi \frac{d}{ds}z(\xi, s').\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{L}_{\mu_{z(\xi,s)}}(\xi)$ est d'ordre 2 par rapport à ξ de la forme

$$\mathcal{L}_{z(\xi,s)}(\xi) = \theta\xi^2.$$

D'où pour $\xi \approx 0$ il existe $M > 0$ tel que $\|\frac{d}{d\xi}\mathcal{L}_{z(\xi,s)}(\xi)\| < M\|\xi\|$. Sachant que

$$\frac{d}{d\xi}\left[V_{z(\xi,s)}(t_0)\right] = \frac{d}{\xi}\mathcal{F}(z(\xi, s)) = d\mathcal{F}(\Phi^t(z(\xi, s)))\frac{d}{\xi}z(\xi, s).$$

Comme $\|d\mathcal{F}(\Phi^t(z(\xi, s)))\| < L$ avec L défini par l'équation (7.5) alors de l'équation (7.9) il existe M' tel que on obtient $\|\frac{d}{\xi}z(\xi, s)\| < M'$. Finalement il existe une constante $M'' > 0$ telle que l'équation (7.10) vérifie

$$\left\|\frac{d}{\xi}\frac{d}{s}z(\xi, s) - Id_N\right\| < M''\xi, \quad \forall s \in [0, 1].$$

Pour $\xi \approx 0$, la fonction

$$z(\xi, 1) = X + \int_0^1 \frac{d}{\xi}\frac{d}{s}z(\xi, s)ds,$$

est un C^1 -difféomorphisme ce qui définit donc une sous variété \mathcal{W}_{stab} de dimension $N - 1$ dont les points vérifient l'équation (7.8), c'est à dire

$$\forall Y \in \mathcal{W}_{stab} : \quad \|\Phi^t(Y) - \Phi^t(X)\| < K \exp\left(-\frac{\beta}{\alpha - LD}(t - t_0)\right), \quad \forall t \geq t_0.$$

avec $K > 0$ un majorant de $K(\xi) := \max_{s \in [0,1]} \left\|\frac{dz(s,\xi)}{ds}\right\|$ pour $\xi \approx 0$ et $Y = z(\xi, 1)$. \square

La preuve du résultat IV est une conséquence des résultats II et III.

7.3 Conclusion

On a vu dans ce Chapitre le lien entre l'hypothèse de synchronisation et l'hypothèse de stabilité. Le système couplé (P) (ou (PNP)) satisfaisant l'hypothèse de synchronisation peut être linéarisé autour des orbites synchronisées et satisfaire l'hypothèse de

stabilité ce qui permet de déduire la stabilité et la stabilité exponentielle du système couplé. Dans le cas du système (PNP) et dans le cas où la perturbation du système (P) est $\mathbb{1}$ -périodique on déduit que l'orbite périodique énoncée dans le résultat II est exponentiellement stable. Autrement dit on a déduit finalement l'existence d'un cycle limite stable.

Conclusion et perspectives

Sommaire

I . Conclusion	110
II . Travaux à venir	111
II . I . Équivalence entre stabilité et synchronisation	111
II . II . Vecteur de rotation	112
II . III . Hypothèse nécessaire et suffisante d'existence de synchronisation	112
II . IV . Cas continu : Nombre infini d'oscillateurs	112
II . V . Du champ moyen au proche voisin	113

I . Conclusion

On a vu dans cette thèse comment des systèmes couplés du type champ moyen peuvent présenter un état de synchronisation. La synchronisation a été définie par une distance uniformément bornée dans le temps entre chaque paire d'oscillateurs d'une solution du système champ moyen. On a considéré deux systèmes : perturbé et non perturbé. Les résultats obtenus s'appliquent aux deux systèmes et cette distinction entre les deux consiste à préciser que ces résultats ne sont pas triviales dans le cas non perturbé. La méthode principale utilisée dans les preuves est une méthode perturbative en appliquant le principe de comparaison des équations différentielles ordinaires. La fonction qu'on a appelé fonction de dispersion a servi d'être une sur-solution pour la comparai-

son dans plusieurs passages de cette thèse. Grâce à l'hypothèse de synchronisation on a majoré la distance qu'on a appelé dispersion entre les oscillateurs. À l'aide de cette fonction de dispersion on a défini l'ouvert de synchronisation. Par périodicité l'ouvert de synchronisation est positivement invariant par le flots de ces systèmes champ moyen et dans le cas où la perturbation est une fonction $\mathbb{1}$ -périodique on obtient l'existence d'une solution synchronisée et périodique dans le tore ; on a appelé ce phénomène accrochage périodique. La périodicité utilisée dans cette thèse n'est pas une périodicité d'une fonction par rapport à chaque variable mais uniquement dans la direction de la diagonale. Cela permet d'avoir une large classe de systèmes champ moyen où on peut appliquer les différents résultats obtenus. Numériquement on a observé que l'hypothèse de synchronisation est responsable dans l'existence de l'état de synchronisation lorsque la perturbation est suffisamment petite, on conjecture pour cela que cette hypothèse est une hypothèse nécessaire et suffisante pour l'existence d'un domaine de synchronisation. Pour étudier la stabilité par rapport aux conditions initiales on a étudié une classe de systèmes linéaires perturbés on a obtenu une variété centrale et une variété exponentiellement stable. On a utilisé une méthode de linéarisation des systèmes champ moyen pour conclure la stabilité de ces derniers. Dans le cas où la perturbation dans le système champ moyen est $\mathbb{1}$ -périodique et par l'existence d'orbite périodique dans le tore obtenus avant on déduit finalement l'existence d'un cycle limite stable. Les modèles champ moyens s'appliquent dans l'étude des populations biologiques qui présentent des phénomènes d'auto-organisation, ces modèles se basent sur l'hypothèse d'existence d'un cycle limite. D'autres applications peuvent être établies dans d'autres sciences appliquées.

II . Travaux à venir

II . I . Équivalence entre stabilité et synchronisation

On a vu dans le Chapitre 7 que lorsque le système (P) est en état de synchronisation et que la dispersion globale est majorée par une constante $D \approx 0$ le système est stable par

rapport aux conditions initiales. La synchronisation est obtenue grâce aux hypothèses (H) et (H_*) appliquées sur la fonction F et obtenue aussi à de petites perturbations. On a vu par suite que ces hypothèses (H) et (H_*) entraîne l'hypothèse (H_{stab}) qui est suffisante pour la stabilité. Autrement dit on a montré que la synchronisation à petite perturbation implique la stabilité. On conjecture que la stabilité sur un ouvert est équivalente à la synchronisation de toutes les solutions de condition initiales dans cet ouvert.

II . II . Vecteur de rotation

L'un des résultats à établir est d'utiliser le résultat linéaire **I** ou **II** pour déduire l'existence d'un vecteur de rotation d'une classe de systèmes périodiques. Un vecteur de rotation est la limite $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{X(t)}{t}$ si elle existe et où $X(t)$ est l'état du système.

II . III . Hypothèse nécessaire et suffisante d'existence de synchronisation

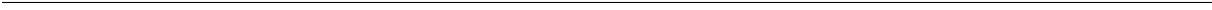
On a vu dans le Chapitre 5 que numériquement l'hypothèse (H_*) est responsable dans l'existence de l'état de synchronisation lorsque la perturbation dans le modèle de Winfree par le vecteur $(\omega_i - 1)_i$ est suffisamment petite. On conjecture que cette hypothèse est une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'état de synchronisation pour le système **(P)** lorsque la fonction de perturbation H est suffisamment petite.

II . IV . Cas continu : Nombre infini d'oscillateurs

Il est aussi motivant de savoir si les résultats obtenus dans cette thèse se généralisent au cas où le nombre d'oscillateurs est infini. Comme les techniques utilisées suggèrent le cas discret d'un nombre fini d'oscillateurs, il est motivant de savoir si par une méthode d'approximation ou de convergence uniforme, on peut répondre à cette question.

II . V . Du champ moyen au proche voisin

Contrairement aux modèles de type champ moyen où chaque oscillateur dépend de tous les autres oscillateurs de la population on trouve dans les modèles du type *proche voisin* que chaque oscillateur dépend de quelques oscillateurs de la population et comme la terminologie l'indique on peut considérer dans un modèle du type proche voisin l'aspect spatial de la population. Plusieurs études ont été établies sur ce type de modèles voir par exemple [Fer95, FM01, Fer96]. La question est de trouver une méthode pour pouvoir trouver une hypothèse convenable qui prend le sens de l'hypothèse de synchronisation dans cette thèse afin quelle soit suffisante pour que de tels types de modèles de couplage admettent un état de synchronisation.



Bibliographie

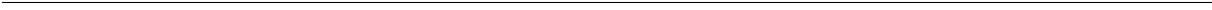
- [ABV⁺05] J. A. Acebrón, L. L. Bonilla, C. J. Pérez Vicente, F. Ritort, and R. Spigler. The Kuramoto model : A simple paradigm for synchronization phenomena. *Rev. Mod. Phys.*, 77 :137–185, 2005.
- [Ari02] J. Ariaratnam. *Collective dynamics of the Winfree model of coupled nonlinear oscillators*. PhD thesis, Cornell University, 2002.
- [AS01] J.T. Ariaratnam and S.H. Strogatz. Phase diagram for the Winfree model of coupled nonlinear oscillators. *Phys. Rev. Lett*, 86 :4278, 2001.
- [BLB⁺12] C. A. S. Batista, E. L. Lameu, A. M. Batista, S. R. Lopes, T. Pereira, G. Zamora-López, J. Kurths, and R. L. Viana. Phase synchronization of bursting neurons in clustered small-world networks. *Phys. Rev. E*, 86 :016211, 2012.
- [BU09] L. Basnarkov and V. Urumov. Critical exponents of the transition from incoherence to partial oscillation death in the Winfree model. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2009(10) :P10014, 2009.
- [CHY11] Y. P. Choil, S.Y Ha, and S.B. Yun. Complete synchronization of Kuramoto oscillators with finite inertia. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 240(1) :32–44, 2011.
- [Con13] L. Contevelle. *Stability analysis of non-linear network scillator, neuronal population application*. Thesis, Université Paris Sud, October 2013.
- [Coo08] G. Cooray. *The Kuramoto Model*. U.U.D.M. project report. Uppsala University, Department of Mathematics. 2008.

- [CS09] N. Chopra and M. W. Spong. On exponential synchronization of Kuramoto oscillators. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 54(2) :353–357, 2009.
- [CU07] D. Cumin and C.P. Unsworth. Generalising the Kuramoto model for the study of neuronal synchronisation in the brain. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 226(2) :181–196, 2007.
- [EK91] G. B. Ermentrout and N. Kopell. Multiple pulse interactions and averaging in systems of coupled neural oscillators. *Journal of Mathematical Biology*, 29(3) :195–217, 1991.
- [EPG01] G. B. Ermentrout, M. Pascal, and B. S. Gutkin. The effects of spike frequency adaptation and negative feedback on the synchronization of neural oscillators. *Neural Computation*, 13(6) :1285–1310, 2001.
- [Erm92] G. B. Ermentrout. Stable periodic solutions to discrete and continuum arrays of weakly coupled nonlinear oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 52(6) :1665–1687, 1992.
- [Fer95] B. Fernandez. Kink dynamics in one-dimensional coupled map lattices. *Chaos*, 5(3) :602–608, 1995.
- [Fer96] B. Fernandez. Existence and stability of steady fronts in bistable coupled map lattices. *Journal of Statistical Physics*, 82(3) :931–950, 1996.
- [FGG16] B. Fernandez, D. Gérard-Varet, and G. Giacomin. Landau damping in the Kuramoto model. *Annales Henri Poincaré*, 17(7) :1793–1823, 2016.
- [FM01] B. Fernandez and A. Morante. On the stability of periodic orbits in lattice dynamical systems. *Dynamical Systems*, 16(3) :247–252, 2001.
- [Fra05] J-P. Francoise. *Oscillations en biologie : analyse qualitative et modèles*. Mathématiques et applications. Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2005.
- [GE02] P. Goel and G. B. Ermentrout. Synchrony, stability, and firing patterns in pulse-coupled oscillators. *Physica D*, 163 :191–216, 2002.

- [GMN⁺07] F. Giannuzzi, D. Marinazzo, G. Nardulli, M. Pellicoro, and S. Stramaglia. Phase diagram of a generalized Winfree model. *Phys. Rev. E*, 75 :051104, 2007.
- [GPP12] G. Giacomini, K. Pakdaman, and X. Pellegrin. Global attractor and asymptotic dynamics in the Kuramoto model for coupled noisy phase oscillators. *Nonlinearity*, 25(5) :1247, 2012.
- [HH52] A. L. HODGKIN and A. F. HUXLEY. A quantitative description of membrane current and its application to conduction and excitation in nerve. *The Journal of physiology*, 117(4) :500–544, 1952.
- [HKPR16] S. Y. Ha, D. Ko, J. Park, and S. W. Ryoo. Emergent dynamics of Winfree oscillators on locally coupled networks. *Journal of Differential Equations*, 260, 5 :4203 – 4236, 2016.
- [HPR15] S. Y. Ha, J. Park, and S. W. Ryoo. Emergence of phase-locked states for the Winfree model in a large coupling regime. *Discrete and Continuous Dynamical Systems, Series A*, 35, 8 :3417–3436, 2015.
- [JMB04] A. Jadbabaie, N. Motesharrefi, and M. Barahona. On the stability of the Kuramoto model of coupled nonlinear oscillators. *Proceedings of the American Control Conference*, pages R4296–4301, 2004.
- [Kur75] Y. Kuramoto. International symposium on mathematical problems in theoretical physics. *Lecture Notes in Physics*, Springer, New York, 39 :420–20, 1975.
- [Kur84] Y. Kuramoto. *Chemical Oscillations, Waves, and Turbulence*, volume 19. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 1984.
- [KW02] B. Kolb and I. Q. Whishaw. *Cerveau & comportement*. Neurosciences & cognition. De Boeck, 2002.
- [LA14] S. Louca and F. M. Atay. Spatially structured networks of pulse-coupled phase oscillators on metric spaces. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 34(9) :3703–3745, 2014.

- [LS04] M. Lakrib and T. Sari. Averaging results for functional differential equations. *Siberian Mathematical Journal*, 45(2) :311–320, 2004.
- [MPT05] Y. L. Maistrenko, O. V. Popovych, and P. A. Tass. *Desynchronization and chaos in the Kuramoto model*. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2005.
- [MS90] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. Synchronization of pulse-coupled biological oscillators. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 50 :1645–1662, 1990.
- [MS05] R. E. Mirollo and S. H. Strogatz. The spectrum of the locked state for the Kuramoto model of coupled oscillators. *Physica D : Nonlinear Phenomena*, 205(1-4) :249 – 266, 2005.
- [NMPS04] G. Nardulli, D. Marinazzo, M. Pellicoro, and S. Stramaglia. Phase shifts between synchronized oscillators in the Winfree and Kuramoto models. *InterJournal Complex Systems*, 1408, 2004.
- [OKT16] W. Oukil, A. Kessi, and Ph. Thieullen. Synchronization hypothesis in Winfree model. *Dynamical Systems*, 2016.
- [Ome13] O. E. Omel’chenko. Coherence-incoherence patterns in a ring of non-locally coupled phase oscillators. *Nonlinearity*, 26 :2469–2498, 2013.
- [PA15] M. J. Panaggio and D. M. Abrams. Chimera states : coexistence of coherence and incoherence in networks of coupled oscillators. *Nonlinearity*, 28 :R67, 2015.
- [PM14] D. Pazó and E. Montbrió. Low-dimensional dynamics of populations of pulse-coupled oscillators. *Phys. Rev. X*, 4 :011009, 2014.
- [PMT05] O. V. Popovych, Y. L. Maistrenko, and P. A. Tass. Phase chaos in coupled oscillators. *Phys. Rev. E*, 71 :065201, 2005.

- [QRS07] D.D. Quinn, R.H. Rand, and S.H. Strogatz. Singular unlocking transition in the Winfree model of coupled oscillators. *Physical Review E*, 75 :036218, 2007.
- [Sai71] T. Saito. On dynamical systems in n-dimensional torus. *Proceedings of the Symposium on Differential Equations and Dynamical Systems. Lecture Notes in Mathematics*, 206 :18–19, 1971.
- [SL12] M.A. Schwemmer and T.J. Lewis. The theory of weakly coupled oscillators, 2012.
- [Win67] A. T. Winfree. Biological rhythms and the behavior of populations of coupled oscillators. *J. Theor. Bio*, 16 :15–42, 1967.
- [Win80] A. T. Winfree. *The geometry of biological time*. Biomathematics. Springer Verlag, New York, 1980.
- [WW02] G. Wulfram and W. Werner. *Spiking Neuron Models : An Introduction*. Cambridge University Press, New York, NY, USA, 2002.



Annexes

Sommaire

A . Stabilité avec la méthode de la résolvante positive	121
B . Fonction presque périodique et vecteur de rotation	127
B . I . Fonction asymptotiquement presque périodique	127
B . II . Vecteur de rotation	130

A . Stabilité avec la méthode de la résolvante positive

L'étude de stabilité présentée dans cette Section est faible par rapport à celle présentée dans le Chapitre 6 et le Chapitre 7, en effet elle ne permet pas d'avoir une stabilité exponentielle. Dans cette section soit $F = (f_1, \dots, f_N)$ une fonction uniformément lipschitzienne de \mathbb{R}^N dans \mathbb{R}^N . Posons $dF(\cdot)$ la jacobienne de F et supposons de plus que $\sup_{T \in \mathbb{R}^N} \|dF(T)\| = R < \infty$ où $\|\cdot\|$ est la norme matricielle usuelle. On considère le système autonome suivant :

$$\dot{X} = F(X). \tag{9.11}$$

Notons $\phi^t : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ le flot de ce système, soit d'un autre côté $dF(\phi^t(X))$ la jacobienne de F en $\phi^t(X)$.

Définition 38. (Stabilité) Soit C un ouvert de \mathbb{R}^N . On dit que le système (9.11) est

positivement stable uniformément à C si C est positivement invariant par le flot et si

$$\begin{aligned} \exists M > 0, \forall X \in C, \exists \delta > 0, \forall Y \in C, \|X - Y\| < \delta : \\ \|\phi^t(X) - \phi^t(Y)\| < M\|X - Y\| \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

Définition 39. Soit C un ouvert de \mathbb{R}^N , pour tout $X \in C$ soit $B_X(t)$ une $N \times N$ matrice dépendant de $t \in \mathbb{R}_+$ et de X . On dit que la famille $\{B_X(t)\}_{X \in C}$ est une famille de matrices C -stabilisante si il existe $L > 0$ tels que pour tout $X \in C$, toute solution $Y(t)$ du système,

$$\dot{Y} = B_X(t)Y, \tag{9.12}$$

vérifie

$$\|Y(t)\| \leq L\|Y(0)\|, \forall t \geq 0.$$

Le théorème suivant donne une condition suffisante pour que le système (9.11) soit positivement stable uniformément à C au sens de la définition 38.

Théorème 40: On considère le système (9.11). Supposons qu'il existe un ouvert $C \subseteq \mathbb{R}^N$ positivement invariant par le flot, tel que pour tout $X \in C$, la famille des jacobiennes $\{dF(\phi^t(X))\}_{X \in C}$ est une famille de matrices C -stabilisante. Alors le système (9.11) est positivement C -stable.

Démonstration. Le système (9.11) peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{d\phi^t(X)}{dt} = F(\phi^t(X)),$$

alors :

$$\frac{d}{dt}d\phi^t(X) = dF(\phi^t(X))d\phi^t(X).$$

Comme $\{dF(\phi^t(X))\}_{X \in C}$ est une famille de matrices C -stabilisante, alors il existe une constante $L > 0$, tel que pour tout $X \in C$:

$$\|d\phi^t(X)\| \leq L\|d\phi^0(X)\| = L \quad \forall t \geq 0, \forall X \in C. \tag{9.13}$$

Soit $(z_1, z_2) \in C \times C$ tel que le segment

$$z(s) = (1 - s)z_1 + sz_2 \in C \quad \forall s \in [0, 1].$$

On a donc :

$$\begin{aligned} \|\phi^t(z_1) - \phi^t(z_2)\| &= \left\| \int_0^1 \frac{d\phi^t(z(s))}{ds} ds \right\| = \left\| \int_0^1 d\phi^t(z(s)) \frac{dz(s)}{ds} ds \right\|, \\ &= \left\| \int_0^1 d\phi^t(z(s))(z_2 - z_1) ds \right\| \leq \sup_{s \in [0,1]} \|d\phi^t(z(s))\| \|z_1 - z_2\|. \end{aligned}$$

Comme $z(s) \in C, \forall s \in [0, 1]$ et par l'équation (9.13) on déduit que

$$\|\phi^t(z_1) - \phi^t(z_2)\| \leq L \|z_1 - z_2\| \quad \forall t \geq 0,$$

qui est une condition suffisante pour que le système (9.11) soit positivement stable uniformément à C au sens de la définition 38. \square

Dans le prochain théorème on va discuter la stabilité, au sens de la définition 38, pour une classe de système autonome satisfaisant une certaine hypothèse. On définit pour cela dans ce qui suit un opérateur strictement positif.

Définition 41. Soit $V^+ = \{(z, \dots, z_N) \in \mathbb{R}^p : z_i > 0, \forall i = 1 \dots N\}$ et soit $B(t)$ une matrice $p \times p$ dépendant du temps $t \in \mathbb{R}_+$. Soit $R(s; t)$ la résolvante du système linéaire suivant,

$$\dot{Y} = B(t)Y.$$

On dit que $R(s; t)$ est un opérateur strictement positif s'il existe $t_R > 0$ tel que

$$\forall Z \in V^+ : R(t_R, t)Z \in V^+, \quad \forall t \geq t_R.$$

Si l'opérateur $R_X(t)$ dépend d'une deuxième variable $X \in C \subset \mathbb{R}^p$, on dit que la famille de résolvantes $\{R_X(t; s)\}_{X \in C}$ est une famille d'opérateurs strictement positifs uniformément à C si la fonction $\tau : C \rightarrow \mathbb{R}_+, X \mapsto \tau(X) = t_{R_X}$ est bornée.

Théorème 42: Soit le système (9.11) et supposons qu'il existe un ouvert $C \in \mathbb{R}^N$ positivement invariant par le flot, tel que

$$\exists \alpha > 0, \exists \beta > 0, \text{ tels que } \alpha < f_i(T) < \beta, \quad \forall T \in \mathbb{R}^N, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}.$$

Supposons que la famille de résolvantes $\{R_X(t; s)\}_{X \in C}$ du système suivant

$$\dot{Y} = dF(\phi^t(X))Y, \tag{9.14}$$

est une famille d'opérateurs strictement positifs uniformément à C , Alors, la famille $\{dF(\phi^t(X))\}_{X \in C}$ est une famille de matrices C -stabilisante et donc le système (9.11) est positivement stable uniformément à C au sens de la définition 38.

Démonstration. Soit $X \in C$ et soit t_0 et $t_X \in [0, t_0]$ vérifiant l'hypothèse du présent théorème. Soit $M > 0$ tel que $M > \frac{1}{\alpha}$. Notons $Y(t) = (y_1(t), \dots, y_N(t))$ une solution arbitraire du système linéarisé (9.14); comme $\frac{d}{dt}\phi^t(X)$ est aussi solution, alors les deux fonctions

$$Z^+(t) = \|Y(t_X)\|M \frac{d\phi^t(X)}{dt} + Y(t) \quad \text{et} \quad Z^-(t) = \|Y(t_X)\|M \frac{d\phi^t(X)}{dt} - Y(t),$$

sont aussi solutions du même système (9.14). Posons

$$Z^+(t) := (z_1^+(t), \dots, z_N^+(t)) \quad \text{et} \quad Z^-(t) := (z_1^-(t), \dots, z_N^-(t)).$$

Par hypothèse et sachant que $\frac{d\phi_i^t(X)}{dt}(t) = f_i(X(t))$ on alors pour tout $1 \leq i \leq N$:

$$\begin{aligned} z_i^+(t_X) &= \|Y(t_X)\|M \frac{d\phi_i^{t_X}(X)}{dt} + Y(t_X) > \|Y(t_X)\|M \frac{d\phi_i^{t_X}(X)}{dt} - \|Y(t_X)\| \\ &> (M\alpha - 1)\|Y(t_X)\| > 0. \end{aligned}$$

De même

$$z_i^-(t_X) = \|Y(t_X)\|M \frac{d\phi_i^{t_X}(X)}{dt} - Y(t_X) > (M\alpha - 1)\|Y(t_X)\| > 0.$$

Encore par les hypothèses que la famille de résolvantes est une famille d'opérateurs strictement positifs uniformément à C on aura

$$Z_i^+(t) > 0 \quad \text{et} \quad Z_i^-(t) > 0 \quad \forall t \geq t_X, \quad \forall 1 \leq i \leq N,$$

$$\text{équivalent donc à :} \quad M\|Y(t_X)\| \frac{d\phi_i^t(X)}{dt} > |y_i(t)|, \quad \forall t \geq t_X, \quad \forall 1 \leq i \leq N,$$

$$\text{équivalente encore à :} \quad M\sqrt{N}\beta\|Y(t_X)\| > \|Y(t)\| \quad \forall t \geq t_X,$$

car par hypothèse sur F on a $\|\frac{d\phi^t(X)}{dt}(t)\| = \|F(\phi^t(X))\| < \beta\sqrt{N}$.

Par intégration sur un compact, on a :

$$\|Y(t)\| < e^{Rt_X}\|Y(0)\| < e^{Rt_0}\|Y(0)\| \quad \forall t \in [0, t_X],$$

$$\text{d'où :} \quad \|Y(t)\| < M\sqrt{N}\beta e^{Rt_0}\|Y(0)\| \quad \forall t \geq t_X.$$

Par suite on aura sur la demi-droite réelle :

$$\|Y(t)\| < \max(M\sqrt{N}\beta e^{Rt_0}, e^{Rt_0})\|Y(0)\| = M\sqrt{N}\beta e^{Rt_0}\|Y(0)\| \quad \forall t \geq 0.$$

Donc la famille des jacobiennes $\{dF(\phi^t(X))\}_{X \in C}$ est une famille de matrices C -stabilisante. D'après le théorème 40 et sous les hypothèses du présent théorème, le système (9.11) est positivement C -stable \square

Pour pouvoir appliquer le théorème précédent on va voir dans le théorème suivant un cas où une famille de résolvantes est une famille d'opérateurs strictement positifs

Théorème 43: Soit $N \in \mathbb{N}^*$ et soit $a_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, N$ des fonctions C^1 et 1-périodique tels que

$$\int_0^1 \min_{1 \leq j \leq N} a_j(s) ds > 0.$$

Soit $A(s) := \{a_{i,j}(s)\}_{1 \leq i,j \leq N}$ une matrice d'ordre N de rang 1, dépend de $s \in \mathbb{R}$ et qui est définie par $a_{i,j}(s) = a_j(s)$ pour tout $1 \leq i, j \leq N$. Soit $b : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^1 .

On considère le système

$$\frac{d}{ds} Y(s) = [b(s)Id_N + A(s)]Y(s), \quad (9.15)$$

où Id_N est la matrice identité d'ordre $N \times N$, alors il existe $s_0 \in \mathbb{R}$ telle que la résolvante $R(s; s_0)$ du système linéaire (9.15) est un opérateur strictement positif.

Démonstration. La solution $Y(s)$ du système linéaire (9.15) vérifie

$$\frac{d}{ds} y_i(s) = b(s)y_i(s) + \sum_{j=1}^N a_j(s)y_j(s). \quad (9.16)$$

Soit $s_1 < s_2$, en intégrant on obtient

$$y(s_2) = \exp\left(\int_{s_1}^{s_2} b(s) ds\right) \left[y(s_1) + \int_{s_1}^{s_2} \sum_{j=1}^N a_j(s)y_j(s) \exp\left(-\int_{s_1}^s b(\zeta) d\zeta\right) ds \right]. \quad (9.17)$$

On cherche à trouver $s_0 > 0$ tel que $Y(s_0) \in V_+$ implique que $Y(s) \in V_+$ pour tout $s \geq s_0$. $Y(s_*) \in V_+$ implique qu'il existe $\epsilon > 0$ tel que

$$y_i(s) > 0 \text{ and } \sum_{j=1}^N y_j(s) > 0, \quad \forall s \in [s_*, s_* + \epsilon].$$

Soit

$$s_* := \sup\{s \geq s_0 : \forall s < s' < s_*, y_i(s') > 0, \forall 1 \leq i \leq N\}.$$

Le théorème est prouvé si on montre $s_* = +\infty$. Par contradiction supposons que $s_* < +\infty$, alors il existe $1 \leq i \leq N$ tel que $y_i(s_*) = 0$ et $y_i(s) > 0$ pour tout $s \in [s_0, s_*)$ et pour tout $1 \leq i \leq N$. Par unicité de solution $\sum_{j=1}^N y_j(s) > 0$ pour tout $s \in [s_0, s_*]$; en effet, s'il existe $c \in [s_0, s_*]$ tel que $\sum_{j=1}^N y_j(c) = 0$ alors $y_i(c) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$ ce qui implique que $y_i(s) = 0$ pour tout $1 \leq i \leq N$ et pour tout $s \geq c$.

Par l'équation (9.17), on montre qu'on obtient une contradiction si on montre que

$$\int_{s_0}^{s_*} \sum_{j=1}^N a_j(s) y_j(s) \exp\left(-\int_{s_0}^s b(\zeta) d\zeta\right) ds > 0. \quad (9.18)$$

Comme $\sum_{j=1}^N y_j(s) > 0$ pour tout $s \in [s_0, s_*]$, on définit la fonction $a^* : [s_0, s_*] \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\sum_{j=1}^N a_j(s) y_j(s) = a^*(s) \sum_{j=1}^N y_j(s).$$

Alors,

$$a^*(s) \geq \min_{1 \leq j \leq N} a_j(s), \quad s \in [s_0, s_*]. \quad (9.19)$$

L'équation (9.16) implique que

$$\frac{d}{ds} \sum_{j=1}^N y_j(s) = [b(s) + a^*(s)] \sum_{j=1}^N y_j(s).$$

qui est une équation linéaire. On utilise (9.18) et on intègre, on obtient donc une contradiction si on montre

$$\int_{s_0}^{s_*} a^*(s) \exp\left(\int_{s_0}^s a^*(\zeta) d\zeta\right) ds = \exp\left(\int_{s_0}^{s_*} a^*(s) ds\right) - 1 > 0.$$

Comme a_j est 1-périodique alors $\min_{1 \leq j \leq N} a_j$ est une fonction 1-périodique et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et une fonction 1-périodique $P : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\int_{s_1}^{s_2} \min_{1 \leq j \leq N} a_j(s) ds = \lambda(s_2 - s_1) + P(s_2) - P(s_1).$$

Par hypothèse

$$\int_0^1 \min_{1 \leq j \leq N} a_j(s) ds > 0.$$

Alors $\lambda > 0$. Il suffira de choisir $s_0 \in [0, 1]$ tel que $\min_{s \in [0, 1]} P(s) = P(s_0)$ et utiliser

(9.19) pour avoir

$$\exp\left(\int_{s_0}^{s_*} a^*(s)ds\right) - 1 > \exp(\lambda(s_* - s_0) + P(s_*) - P(s_0)) - 1 > 0.$$

Contradiction avec la définition de s_* . Alors $Y(s) \in V_+$ pour tout $s \geq s_0$. \square

Cette méthode de l'étude de stabilité peut s'appliquer à des systèmes champ moyen par exemple le modèle explicite de Winfree (5.9) cité dans la Section 5.2 du Chapitre 5 avec $\beta = 0$.

B . Fonction presque périodique et vecteur de rotation

B . I . Fonction asymptotiquement presque périodique

Définition 44. Une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ (ou f de \mathbb{R} dans le tore \mathbb{T}^d) est dite presque périodique si elle est continue et si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des pseudo-périodes

$$\Lambda_\epsilon(f) := \left\{ T \in \mathbb{R} : \sup_{t \in \mathbb{R}} d(f(t+T), f(t)) \leq \epsilon \right\},$$

est relativement dense dans \mathbb{R} , c'est-à-dire vérifie :

$$\exists L > 0, \forall t \in \mathbb{R}, \Lambda_\epsilon(x) \cap [t, t+L] \neq \emptyset.$$

Dans le cas de \mathbb{R}^d , $d(x, y) = \|x - y\|$, dans le cas de \mathbb{T}^d ,

$$d(x \pmod{\mathbb{Z}^d}, y \pmod{\mathbb{Z}^d}) := \inf_{k \in \mathbb{Z}^d} \|x - y - k\|.$$

Par extension, une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^d$ est dite asymptotiquement presque périodique modulo \mathbb{Z}^d si elle est asymptotiquement presque périodique comme fonction à valeurs dans le tore \mathbb{T}^d .

La propriété de presque périodicité est équivalente à la compacité relative de l'orbite $(\tau_t(f))_{t \in \mathbb{R}}$ dans $C^0(\mathbb{R}, X)$, avec $X = \mathbb{R}^d$ ou $X = \mathbb{T}^d$, pour la topologie de la convergence uniforme sur \mathbb{R} , pour le flot translation $\tau^t(f) = g$ avec $g(s) = f(t+s)$. On peut affaiblir cette propriété en imposant seulement à l'ensemble ω -limite de $(\tau^t(f))_{t \in \mathbb{R}}$ d'être compact. Plus précisément

Définition 45. Une fonction $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ (ou $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{T}^d$) est dite positivement presque périodique si elle est continue et si, pour tout $\epsilon > 0$, l'ensemble des pseudo-périodes

$$\Lambda_\epsilon^\omega := \left\{ T \geq 0 : \exists R_T \geq 0 \sup_{t \geq R_T} d(f(t+T), f(t)) \leq \epsilon \right\}$$

contient une suite $T_n \rightarrow +\infty$.

Dans la définition précédente, on s'intéresse à un problème de convergence uniforme de $(\tau^{T_n}(f))_{n \geq 0}$ sur des intervalles s'accumulant en l'infini, $[R_{T_n}, +\infty[$ et non pas sur \mathbb{R} tout entier.

Lemme 46: Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ est asymptotiquement presque périodique, alors

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = 0.$$

Démonstration. Pour $\epsilon = 1$, Λ_ϵ^ω contient une infinité de pseudo périodes T tendant vers ∞ et vérifiant

$$\|f(t+T) - f(t)\| \leq 1, \quad \forall t \geq R_T,$$

pour des instants $R_T \geq 0$ dépendants de T . Alors pour tout entier $n \geq 0$

$$\|f(t+nT) - f(t)\| \leq n, \quad \forall n \geq 0, \forall t \geq R_T.$$

D'où, en prenant, $t = R_T$, $s \geq 0$ vérifiant $nT \leq s < (n+1)T$ pour un certain entier n , $t' = R_T + s - nT$ et $C(T) := \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(t+R_T) - f(R_T)\|$

$$\|f(R_T + s) - f(R_T)\| \leq \|f(t' + nT) - f(t')\| + \|f(t') - f(R_T)\| \leq n + C(T),$$

$$\frac{1}{s} \|f(R_T + s) - f(R_T)\| \leq \frac{1}{T} + \frac{C(T)}{s},$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \left\| \frac{f(t)}{t} \right\| \leq \frac{1}{T}.$$

On conclut la preuve en remarquant qu'on peut choisir T aussi grand que l'on veut. \square

Le lemme suivant, similaire au lemme 6.7 de [Sai71], permet de décomposer toute fonction $f(t) = (f_1(t), \dots, f_d(t))$, lorsqu'on suppose que la fonction

$$t \in [0, +\infty[\mapsto (e^{i2\pi f_1(t)}, \dots, e^{i2\pi f_d(t)}) \in \mathbb{S}^d,$$

est asymptotiquement presque périodique.

Lemme 47: Si $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ est asymptotiquement presque périodique modulo \mathbb{Z}^d , il existe alors $\rho \in \mathbb{R}^d$ et $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^d$ asymptotiquement presque périodique tels que

$$f(t) = \rho t + g(t), \quad \forall t \geq 0 \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{t} = \rho.$$

Démonstration. On choisit $\epsilon > 0$ de sorte que deux entiers du réseau \mathbb{Z}^d soient au moins à distance 2ϵ l'un de l'autre. Par hypothèse on peut trouver une suite de pseudo-périodes $T \rightarrow +\infty$ et des constantes $R_T > 0$ telles que

$$d(f(t+T), f(t)) \leq \epsilon, \quad \forall t \geq R_T.$$

Pour chaque $t \geq R_T$, on peut trouver un entier $k(t, T) \in \mathbb{Z}^d$ tel que

$$\|f(t+T) - f(t) - k(t, T)\| \leq \epsilon.$$

Par le choix de ϵ et la continuité de $t \mapsto f(t+T) - f(t)$, la fonction $t \mapsto k(t, T)$ est localement constante. Par connexité de $[R_T, +\infty[$, $k(t, T) = k(T)$ est nécessairement indépendant de t . On vient donc de montrer

$$\|f(t+T) - f(t) - k(T)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq R_T.$$

On itère cette inégalité pour $t, t+T, t+2T, \dots$ et on obtient

$$\|f(t+nT) - f(t) - nk(T)\| \leq n\epsilon, \quad \forall n \geq 0, \forall t \geq R_T.$$

Pour tout $s \geq 0$, il existe un unique entier n vérifiant $nT \leq s < (n+1)T$. On constate que $R_T + s$ s'écrit $t + nT$ avec $t = R_T + s - nT$, d'où en posant $C(T) = \sup_{0 \leq t \leq T} \|f(R_T + t) - f(R_T)\|$,

$$\left\| f(R_T + s) - f(R_T) - s \frac{k(T)}{T} \right\| \leq s \frac{\epsilon}{T} + C(T) + \|k(T)\|, \quad \forall s \geq 0.$$

Toute valeur d'adhérence de $f(s)/s$, lorsque $s \rightarrow +\infty$, se situe à moins de ϵ/T de $k(T)/T$ pour une suite de valeurs $T \rightarrow +\infty$. $f(s)/s$ est donc de Cauchy et converge vers un réel ρ . On pose $g(t) = f(t) - \rho t$. En reprenant les calculs précédents, on obtient

$$\|g(t+T) - g(t) - (k(T) - \rho T)\| \leq \epsilon, \quad \forall t \geq R_T,$$

$$\|g(t+nT) - g(t) - n(k(T) - \rho T)\| \leq n\epsilon, \quad \forall n \geq 0, \forall t \geq R_T.$$

Comme $g(s)/s \rightarrow 0$, lorsque $s \rightarrow +\infty$, en divisant par n , puis en faisant tendre $n \rightarrow +\infty$,

on obtient

$$\begin{aligned} \|k(T) - \rho T\| &\leq \epsilon, \\ \|g(t+T) - g(t)\| &\leq 2\epsilon, \quad \forall t \geq R_T. \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\Lambda_\epsilon^\omega(f) \subset \Lambda_\epsilon^\omega(g)$: g est bien asymptotiquement presque périodique. □

B . II . Vecteur de rotation

Les deux lemmes précédents vont permettre de démontrer qu'une orbite asymptotiquement presque périodique admet un vecteur de rotation. Il est cependant nécessaire de demander au système une condition de stabilité très forte.

Définition 48. On dira qu'une orbite $(\tilde{\phi}^t(z))_{t \geq 0}$ du système dynamique quotient est positivement stable si

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad d(x, z) \leq \delta \implies \sup_{t \geq 0} d(\tilde{\phi}^t(x), \tilde{\phi}^t(z)) \leq \epsilon.$$

La stabilité positive au sens de la définition 48 est très forte et permet de montrer que toute orbite appartenant au bassin d'attraction d'une orbite stable admet un nombre de rotation.

Théorème 49: On considère le flot ϕ^t d'un système dynamique $\dot{x} = F(x)$ où $F : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ est uniformément Lipschitzienne et périodique. On suppose que l'ensemble ω -limite dans \mathbb{T}^d d'une orbite $(\tilde{\phi}^t(x))_{t \geq 0}$ contient une orbite positivement stable au sens de la définition 48. Il existe alors $\rho(x) \in \mathbb{R}^d$, appelé vecteur de rotation et $g_x : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^d$, asymptotiquement presque périodique, tels que,

$$\phi^t(x) = \rho(x)t + g_x(t), \quad t \geq 0, \quad \text{et donc} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\phi^t(x)}{t} = \rho(x).$$

Démonstration. Soit z une valeur d'adhérence de $(\tilde{\phi}^t(x))_{t \geq 0}$. Alors il existe une suite de temps $(R_n)_n$ tels que $R_{n+1} - R_n \rightarrow +\infty$ et $\tilde{\phi}^{R_n}(x) \rightarrow z$. Soit $\epsilon > 0$ et $\delta > 0$ donnés par la

définition 48. Alors pour n suffisamment grand,

$$\begin{aligned} d(\tilde{\phi}^{R_n}(x), z) &\leq \delta, & d(\tilde{\phi}^{R_{n+1}}(x), z) &\leq \delta, \\ d(\tilde{\phi}^{R_n+t}(x), \tilde{\phi}^t(z)) &\leq \epsilon, & d(\tilde{\phi}^{R_{n+1}+t}(x), \tilde{\phi}^t(z)) &\leq \epsilon, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

En posant $T_n := R_{n+1} - R_n$, on obtient

$$d(\tilde{\phi}^{T_n+t}(x), \tilde{\phi}^t(x)) \leq 2\epsilon, \quad \forall t \geq R_n.$$

En posant $f(t) = \phi^t(x)$, on vient de montrer que $T_n \in \Lambda_{2\epsilon}^\omega$ de la définition 45 et donc que f est asymptotiquement presque périodique modulo \mathbb{Z}^d . Le lemma 47 entraîne alors l'existence du nombre de rotation ρ et de la décomposition $\phi^t(x) = \rho t + g(t)$ où g est asymptotiquement presque périodique. \square