N^0 d'ordre : 03/2006-M/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

HAMADACHE Salima

THÈME

STABILITE EXPONENTIELLE DE L'EQUATION DES ONDES AVEC CONDITION AU BORD DE TYPE VENTCEL

Soutenu publiquement, le 20/03/2006 devant le jury composé de :

Mr.	**D. E. TENIOU**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**A. HEMINNA**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	**K. LEMRABET**	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	**M. MEDJDEN**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
M^{elle}.	**O. ZAIR**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinatrice.

Table des matières

Introduction

Un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales soit des conditions aux limites soit les deux, à voir si une solution existe, si elle est unique, si elle dépend régulièrement des données et à chercher des algorithmes de calcul. Nous parlons alors, suivant les différentes situations de Cauchy bien posé ou de problème bien posé au sens de Hadamard. Dans notre étude, nous nous intéressons à un problème de contrôle qui est la stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec conditions au bord de type Ventcel. Naïvement un exemple type est le suivant, on met un gâteau dans un four, on se donne une température initiale et on chauffe durant un temps T, au bout de ce temps le gâteau sera probablement soit pas assez cuit, soit brûlé. Le problème de contrôle consiste à "se débrouiller pour faire ce qu'il faut afin d'obtenir un "bon gâteau"".

Historiquement les problèmes de contrôle sont d'abord apparus dans des systèmes d'équations différentielles ordinaires; il s'agissait par exemple de déterminer des trajectoires de missiles ou de satellites (Pontryagine (1961)). Mais très vite d'autres mathématiciens (J.L.Lions et A.B. Balakrishnan principalement) ont développé une théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles (paraboliques) et ceci pour plusieurs raisons :

(i)- L'analyse faite par J.L.Lions et G.Stampacchia des inéquations variationnelles fournissait un très bon cadre fonctionnel pour une telle approche.

(ii)- Des exemples pratiques se sont présentés; B.Bardos pense que l'un des premiers exemples ([2]), se trouve étudié dans le cadre d'un contrat entre L'INRIA(1) et L'IRSID(2); (il s'agissait de contrôler la forme de la surface libre séparant les phases liquides et solides d'un métal dans un haut fourneau).

(iii)- Dés que le nombre de degré de liberté est important (et c'est ce qui se passe dans le guidage d'un satellite) le traitement numérique du système discret ressemble à celui d'un système continu. Ainsi des progrès dans la compréhension et le traitement des systèmes continus s'avèrent être utiles pour l'approche des problèmes discrets à grand nombre de degrés de liberté.

Pour des problèmes continus nous parlerons de contrôle distribué. Tant à cause des outils mathématiques que des problèmes pratiques posés, les premiers exemples continus étaient avant tout des problèmes essentiellement paraboliques (l'exemple du gâteau). Nous en trouvons une description assez exhaustive dans le livre de J.L.Lions [19].

Plus récemment sont apparus des problems de nature hyperboliques. Il s'agit d'empêcher par exemple les vibrations dans de grandes structures flexibles des robots ou des antennes de véhicules spatiaux. Et c'est ce second type de problèmes qui est à l'origine des développements les plus importants de la théorie. La NASA a participé à l'organisation d'un "workshop"(Blacksburg 1984) où ont été définis des problèmes mathématiques modèles dont la compréhension devait aider à résoudre certains problèmes pratiques d'utilité courante. Nous en trouverons une description dans l'article de L.X.Taylor et A.B.Balakrishnan(cf. [30]).

0.1 Note historique sur la notion de stabilisation exponentielle de l'équation des ondes

Cette section a pour but de rappeler les travaux principaux sur la décroissance exponentielle de l'énergie d'un système gouverné par des équations aux dérivées partielles (appelé système distribué).
Cette notion a pris, sous l'influence des travaux de D. L. Russell (cf. [28]) le nom de stabilisation frontière ou interne exponentielle.

0.1.1 Stabilisation frontière d'un exemple modèle

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, dont la frontière est $\Gamma = \partial\Omega$ est de classe $\mathscr{C}^2$.
On désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction.

On appelle stabilisation frontière de l'équation des ondes dans Ω, avec une condition de dirichlet homogène et une condition de Newmann non homogène considérées respectivement sur Γ_0 et Γ_1, où (Γ_0, Γ_1) est une partition de Γ, la donnée d'un opérateur (appelé opérateur de feedback frontière)

$$F : V \times H \longrightarrow K$$

où V, H, K sont des espaces de fonctions ou de distributions, tels que l'énergie associée à la solution du problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u & = & F(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

décroisse de manière exponentielle quand $t \longrightarrow +\infty$, et ceci pour tous u_0, u_1 pris dans des espaces convenables.

Remarque 0.1.1 *Le problème de stabilisation frontière consiste à exhiber un opérateur de feedback frontière de telle sorte que l'énergie $E(t)$ du système vérifie*

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \qquad \forall t \geq 0.$$

où C et β sont des constantes positives. β est appelé taux de décroissance de l'énergie.

Définition 0.1.1 *On définit aussi la notion d'opérateur de feedback interne*

$$G : \widetilde{V} \times \widetilde{H} \longrightarrow \widetilde{K}$$

(où $\widetilde{V}, \widetilde{H}, \widetilde{K}$ sont des espaces de fonctions ou de distributions), ensuite on s'intéresse au comportement asymptotique de l'énergie associée au problème

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & G(u, u_t) & \textit{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \textit{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u & = & F(u, u_t) & \textit{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \textit{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \textit{dans } \Omega \end{cases}$$

Remarque 0.1.2 *A vrai dire la notion de stabilisation frontière n'est pas propre aux conditions de Dirichlet homogène et Neumann non homogène, ni même à l'équation des ondes; on peut se poser ce genre de problème pour tout système évolutif, avec conditions aux limites choisies de sorte que le problème soit bien posé.*

0.1.2 Note historique

On a vu ci-dessus que les problèmes de stabilisation exponentielle, que l'on peut se poser pour les systèmes évolutifs, consiste à trouver un opérateur de feedback frontière ou interne de sorte que l'énergie du système décroisse en exponentielle. On va rappeller, d'une manière breve les différentes phases qu'à connues la notion de stabilisation exponentielle, sans vraiment rentrer dans les détails, ou prétendre que cet aperçu historique soit exhaussif.

Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox (cf. [32]) a réussi à montrer que l'énergie, locale, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Sous les hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S .Morawetz (cf.[25]) a montré que l'énergie locale, décroit comme l'inverse du temps.

En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips (cf. [17]) ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé, décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Les travaux de G. Chen et de J. Lagnese

En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz (cf. [25] et [29]) sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell a conjecturé, en 1974, un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné.

Énoncé de la conjecture (cf. [29])

Soit Ω un domaine borné de $\mathbb{R}^n$, s'il existe un poit $x_0 \in \mathbb{R}^n$, extérieur à $\overline{\Omega}$ tel que le bord de Ω, noté Γ, admette une partition vérifiant la condition géométrique suivante :

$$m(x).\nu(x) \leq 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_0.$$

où :

1. $\nu(x)$ désigne la normale unitaire extérieur à Ω.
2. $m(x) = x - x_0, \quad$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3. $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1, \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing$.

alors il existe deux constantes, C et w positives telles que l'énergie associée au système évolutif

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \alpha(x)\,\partial_\nu u + u_t & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{0.1.1}$$

où $\alpha \in L^\infty(\Gamma_1)$, et $\alpha(x) \geq \alpha_0 > 0, \ \forall x \in \Gamma_1$, vérifie l'inégalité suivante :

$$E(t) \leq C \exp(-wt), \qquad \forall t \geq 0.$$

En 1977, J. P. Quin et D. L. Russell (cf.[27]) sont parvenus à montrer, sous les hypothèses de la conjecture de Russel, l'inégalité

$$E(t) \leq \frac{C(E(0))}{1+t}, \qquad \forall t \geq 0. \tag{0.1.2}$$

mais malheuresement, ils n'ont pas réussit à montrer que $C(E(0))$ vérifie

$$C(E(0)) \leq k.E(0). \tag{0.1.3}$$

où k est une constante qui ne dépend ni de $E(0)$ ni de temps.

Il est intéressant de savoir qu'à partir de (0.1.2) et (0.1.3) on peut déduire la décroissance exponentielle de $E(t)$ par une simple application des propriétés des semi-groupes (cf.[17]).

Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen (cf.[5]), en partant des hypothèses suivantes :

il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que :

$$\begin{aligned} &m(x).\nu(x) \leq 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_0 \\ &m(x).\nu(x) \geq \gamma > 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \end{aligned} \tag{0.1.4}$$

1- $\nu(x)$ désigne le champ unitaire normal extérieur à Ω.
2- $m(x) = x - x_0, \qquad$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.
3- $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Ensuite, en adaptant les techniques, en particulier la technique des **multiplicateurs,** utilisées par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U.R alston, dans les domaines extérieurs, G. Chen (cf. [6]) a pu alléger les hypothèses (0.1.4) , ces résultats ont été améliorés par J. Lagnese (cf. [13]), en 1983, sous l'hypothèse :

il éxiste un champ de vecteur $h \in \left(\mathscr{C}^2\left(\overline{\Omega}\right)\right)^n$ tel que :

$$\begin{cases} h(x).\nu(x) \leq 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_0 \\ h(x).\nu(x) \geq \gamma > 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_1. \\ \text{la matrice } \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} + \frac{\partial h_j}{\partial x_i}\right) \text{ est uniformément définie positive sur } \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani (cf.[16]) ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord Γ.

Ils font appel à un opérateur de feedback frontière donnée par :

$$F(u, u_t) == -b\frac{\partial}{\partial \nu}\left(Gu_t\right), \qquad \text{sur } \Gamma.$$

où $b \in L^\infty(\Gamma)$, et $b(x) \geq b_0 > 0$, pour tout $x \in \Gamma$, et G est l'inverse de l'isomorphisme suivant :

$$(-\Delta): \quad H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \quad \longrightarrow \quad L^2(\Omega)$$

qu'on note $G = (-\Delta)^{-1}$.

Dans tous les travaux, dans un domaine borné, cités ci-dessus l'inégalité

$$E(t) \leq C\exp(-wt), \qquad \forall t \geq 0.$$

a été obtenue, à partir d'une estimation sur $\int_0^\infty E(t)dt$, en utilisant un résultat dû à R. Datko (cf. [7]) et A. Pazy (cf.[26]), malheureusement ce théorème prouve l'existence des constantes C et w sans donner des estimations explicites.

On remarquer que lorsque la frontière Γ est régulière, la condition (0.1.4) exige que

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing \tag{0.1.5}$$

donc si $\Gamma_0 \neq \varnothing$, les résultats obtenus par Chen, ou Lagnese, ne peuvent être appliqués aux domaines ayant un bord connexe.

Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition (0.1.4) de G. Chen en la remplaçant par

$$m(x).\nu(x) > 0, \qquad \text{pour tout } x \in \Gamma_1.$$

donc permettant, en principe, de généraliser les résultats de Chen et Lagnese aux domaines à bords réguliers et connexes, mais au prix de remplacer la condition aux limites, du problème (0.1.1) , sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$ par

$$\partial_\nu u = -m.\nu \ u_t, \qquad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+.$$

Si $\Gamma = \partial\Omega$ satisfait à la condition (0.1.5) , alors pour tout $n \geq 2$, la méthode de Komornik et Zuazua (cf.[11]) donne, d'une manière simple des estimations explicites pour C et w en fonction de la géométrie de Ω et x_0.

Leur pprocédé devient inapliccable dans le cas général où

$$\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} \neq \varnothing \tag{0.1.6}$$

car dans ce cas la régularité des solutions n'est plus suffisante pour justifier l'application de la méthode des multiplicateurs.

Cependant, la même année (1987), P. Grisvard est parvenu à montrer (cf. [8]) que, au moins pour $n \leq 3$, l'identité fondamentale, sur laquelle est basée la thechnique des multiplicateurs de Komornik et Zuazua, devient une inégalité qui est suffisante pour mener les calculs à bout et obtenir une décroissance exponentielle de l'énergie, avec des estimations explicites pour C et w.

Le cas $n \geq 4$, sans l'hypothèse (0.1.5) reste ouvert; à moins que l'inégalité de Grisvard ne puisse être prouvée dans ce cas; alors le procédé de stabilisation de Komornik et Zuazua peut être appliqué avec efficacité.

Remarque 0.1.3 *Grâce à la simplicité de l'opérateur de feedback*

$$F(u, u_t) = -m.\nu u_t \tag{0.1.7}$$

la technique des multiplicateurs a pernis d'obtenir des estimations sur C et w, dans le but d'améliorer le taux de décroissance w, certains auteurs ont proposé l'opérateur

$$F(u, u_t) = -bm.\nu u_t \tag{0.1.8}$$

où b est une fonction, définie sur Γ_1 à choisir convenablement.

En effet, dans certais cas, il a été possible d'améliorer légèrement le taux de décroissance w, cepandant, J.Lions a signalé (cf.[21] page 47) que D. H. Wagner a montré (formellement) que même lorsque $b \longrightarrow +\infty$, le taux $w(b)$, obtenu à partir du feedback (0.1.8) ne croit pas indéfiniment.

Remarque 0.1.4 *E.Zuazua a montré (cf.[33]) que l'opérateur de feedback* $F(u,u_t) = -m.\nu u_t$ *ne satisfait pas la propriété de robustesse, c'est à dire que la propriété de stabilisation est perdue sous certaines perturbation continues du support du feedback; cependant l'opérateur*

$$F(u,u_t) = -m.\nu\left[u_t + \alpha u\right], \qquad \text{avec } \alpha > 0. \tag{0.1.9}$$

est robuste grâce à la présence du terme $\alpha m.\nu \times u$ *; d'autre part le fait que* $\alpha > 0$ *exclut l'existence de solution stationnaire non triviale.*

Remarque 0.1.5 *(retour à la conjecture de Russel)*

En 1978, Russel insista bien (cf.[28]) sur le fait que l'hypothèse (0.1.4) suffit à elle seule pour obtenir la stabilisation du système (0.1.1) et que toute autre hypothèse sur Ω *constitue une restriction géométrique inutile; en effet par exemple la condition (0.1.4) exclut les domaines à bord connexes.*

J.Lagnese a remarqué que l'utilisation d'un feedback de la forme

$$F(u,u_t) = m.\nu\widetilde{F}\left[u_t, u\right] \tag{0.1.10}$$

sur le bord permet d'enlever, au moins formellement, l'hypothèse (0.1.5) dans certains problèmes de stabilisation de système élastodynamiques ou de plaques vibrantes.

Les travaux de J. L. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contôlables.

Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle optimal et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni d'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

Le but de notre travail est de chercher un feedback intérieur ou un feedback frontière sur une partie du bord du domaine qui ramène le système à l'équilibre au bout d'un temps infini.

Ce travail a eu pour point de départ le travail de Mr Medjden (cf.[22]).

Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs tangentiels de même ordre que l'opérateur principal.

Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes :

- Mécanique comme l'élasticité.
- Physique comme les processus de diffusion.

Les conditions de Ventcel sont obtenues par des méthodes asymptotiques.

La condition

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \quad \text{sur } \Gamma_1 \tag{0.1.11}$$

pour l'équation

$$-\Delta u + u = f \quad \text{dans } \Omega \tag{0.1.12}$$

a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusions ($cf.$[31]). Elle fait intervenir des dérivées tangentielles d'ordre deux. Elle modélise l'échange thermique du corps Ω avec le milieu ambiant en présence d'une pellicule fine, très bonne conductrice, sur la surface du corps.

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ de classe C^2; on considère une partition $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ de Γ telle que :

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1 \text{ et } \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing, \text{ mes } \overline{\Gamma_1} > 0 \text{ et mes } \overline{\Gamma_0} > 0. \tag{0.1.13}$$

Le problème étudié est l'équation des ondes avec condition au bord de type Ventcel.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & f(u, u_t) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = & -g(u, u_t) & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{0.1.14}$$

Nous traitons le cas linéaire.

Soit V l'espace défini par :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0,\ v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \right\} \tag{0.1.15}$$

muni de la norme suivante :

$$\|v\|_V^2 = \int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma \tag{0.1.16}$$

Une étude spectrale a montré, par une application du théorème de Rouché, que le problème (0.1.14) n'est pas exponentiellement stable (cf.[9]).

Nous considérons le problème avec un feedback frontière avec mémoire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = -au_t & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = -bu_t - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta_T u(s)ds & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{0.1.17}$$

avec $a, b \geq 0$ et h une fonction décroissante de classe $\mathscr{C}^2(\mathbb{R}^+)$, et le problème avec un feedback intérieur avec mémoire

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = -au_t - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{0.1.18}$$

avec $a \geq 0$ et h est une fonction décroissante de classe $C^2(\mathbb{R}^+)$ nous permet de montrer que le problème de Ventcel est exponentiellement stable.

Notre travail se compose de quatre chapitres.

• Le premier chapitre est consacré aux définitions et aux rappels, de quelques notions de base d'analyse fonctionnelle.

• Dans le second chapitre, nous reprenons la démonstration de ([9]) pour montrer que le feedback naturel n'est pas suffisant pour assurer la décroissance exponentielle de l'énergie associée au problème de l'équation des ondes avec condition au bord de type Ventcel .

• Dans le troisième chapitre, nous donnons une fonction de Lyaponauv qui permet de montrer la décroissance exponentielle de l'énergie par un feedback frontière avec mémoire.

Ce chapitre comporte troix sections :

1- Dans la première section, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution.

2- Dans la deuxième section, on montre que le problème de l'équation des ondes avec condition de Ventcel est exponentiellement stable par un feedbak frontière avec mémoire, et par des dissipations interne et frontière par le feedback naturel.

3- Dans la troisème section, on montre que l'équation des ondes avec condition au bord de Ventcel est exponentiellement stable par un feedback frontière avec mémoire, et par une dissipation frontière par le feedback naturel.

Cette section est constituée d'une sous-section où on montre que la dissipation produite par le feedback frontière avec mémoire est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie.

• Dans le quatrième chapitre, nous procédons de la même façon que le troisième chapitre par un feedback intérieur avec mémoire et par une dissipation interne par le feedback naturel.

Ce chapitre comporte troix sections :

1- Dans la première section, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution.

2- Dans la deuxième section, on montre que le problème de l'équation des ondes avec condition de Ventcel homogène est exponentiellement stable par un feedbak intérieur avec mémoire et par une dissipation interne par le feedback naturel.

3- Dans la troisème section, on montre que la dissipation produite par le feedback intérieur avec mémoire seule est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie.

1

Rappels généraux et définitions

1.1 Rappels sur les distributions

Définition 1.1.1 *L'espace D Nous appellerons (D) l'espace vectoriel des fonctions complexes φ de n variables réelles, indéfiniment dérivables et à support compact.*

Définition 1.1.2 *Les espaces topologiques (D_k) Nous appellerons (D_k) le sous-espace de (D) formé des fonctions φ ayant leur support dans le compact K de $\mathbb{R}^n$. Nous allons mettre sur (D_k) une topologie plus fine que la topologie induite par $(\mathscr{C}_k)$. On dira que des fonctions $\varphi_j \in (D_k)$ convergent vers 0 dans (D_k), si les fonction φ_j convergent vers 0 uniformement sur $\mathbb{R}^n$, ainsi que chaqune de leurs dérivées. Autrement dit, pour chaque système fixée d'entiers $p_1 \geq 0$, $p_2 \geq 0$,...$p_n \geq 0$, les dérivées*

$$\frac{\partial^{p_1+p_2+\ldots p_n}}{(\partial x_1)^{p_1}(\partial x_2)^{p_2}\ldots(\partial x_n)^{p_n}}\varphi(x_1, x_2, \ldots x_n)$$

convergent vers 0 uniformement par rapport à $x_1, x_2,\ldots x_n$.Cette topologie est définie par la famille des semi-normes N_p :

$$N_p(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |D^p(x)|\,, \quad \text{où } p = (p_1, p_2, \ldots p_n).$$

Définition 1.1.3 *Les distributions. Une distribution T est alors une forme linéaire sur (D), dont la restriction à chaque (D_k), K compact de $\mathbb{R}^n$, est continue.*

1.2 Espaces de Sobolev

Définition 1.2.1 *On dit qu'une distribution* T *de* $D'(\Omega)$ *est dans* $L^p(\Omega)^n \quad (1 \leq p \leq \infty)$ *S'il existe une classe de fonctions* u *de* $L^p(\Omega)$*, telle que :*

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} u(x)\varphi(x)dx, \qquad \textit{pour tout } \varphi \in D(\Omega) \tag{1.2.1}$$

Définition 1.2.2 *On appelle espace de Sobolev d'ordre* m *(*m *entier) sur* Ω *l'espace*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \partial^\alpha v \in L^2(\Omega), \quad |\alpha| \leq m \right\}$$

On munit $H^m(\Omega)$ *du produit scalaire*

$$(u, v)_{m,\Omega} = \int_{\Omega} \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \partial^\alpha u \partial^\alpha v \right) dx \tag{1.2.2}$$

et on note

$$|v|_{m,\Omega} = (v, v)_{m,\Omega}^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Pour $m = 1$, on a :

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega);\ \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \quad 1 \leq i \leq n \right\}$$

muni de la norme suivante :

$$|v|_{1,\Omega} = (v, v)_{1,\Omega}^{\frac{1}{2}}$$

Comme on peut aussi définir les espaces de Sobolev $H^m(\Omega)$ (Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$) pour m un reel non entier positif

Définition 1.2.3 *Soit* $m > 0$ *un reel. On note* $[m]$ *sa partie entière et* $s = m - [m]$ *sa partie fractionnaire.*
a) pour $0 < m < 1$*, on définit l'espace* $H^m(\Omega)$ *par :*

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \iint_{\Omega\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{2m+n}} dxdy < \infty \right\}$$

munit de la norme suivante :

$$|v|_{m,\Omega} = \left\{ \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \iint_{\Omega\Omega} \frac{|v(x) - v(y)|^2}{|x - y|^{2m+n}} dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

b) pour $m > 1$, on définit l'espace $H^m(\Omega)$ par :

$$H^m(\Omega) = \left\{ v \in H^{[m]}(\Omega) ; D^\alpha v \in H^s(\Omega), \quad \forall \alpha, |\alpha| = [m] \right\}$$

munit de la norme suivante :

$$|v|_{m,\Omega} = \left\{ \|v\|^2_{[m],(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=[m]} \iint_{\Omega\Omega} \frac{|D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y)|^2}{|x-y|^{2s+n}} dxdy \right\}^{\frac{1}{2}}$$

Théorème 1.2.1 *L'application trace*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma = \partial\Omega) \\ & v & \longmapsto & v\,|_\Gamma \end{array}$$

est linéaire continue et surjective.

Proposition 1.2.1 *L'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ est un espace de Hilbert pour la norme*

$$|u|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{v \in H^1(\Omega),\ \delta_0 v = u} |v|_{1,\Omega} \tag{1.2.3}$$

Définition 1.2.4 *On suppose que Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ de classe $\mathscr{C}^1$ par morceaux. Alors $H^1_0(\Omega)$ est le noyau de δ_0, application trace sur Γ de $H^1(\Omega)$ dans $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, i.e., $H^1_0(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ;\ \delta_0 v = 0\}$.*

Théorème 1.2.2 *$D(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$.*

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante c dépendante du diamètre de Ω telle que :

$$\forall u \in H^1_0(\Omega) ;\ \ |u|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2.4}$$

On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H^1_0(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme duale suivante :

$$|f|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H^1_0(\Omega),\ v \neq 0} \frac{\langle f, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H^1_0(\Omega)}}{|v|_{1,\Omega}} \tag{1.2.5}$$

Du fait que $D(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$. On peut identifier les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ à des distributions. On dit alors que $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de distributions.

Théorème 1.2.3 *Soit U un espace défini par :*

$$U = \left\{ u \in H^1(\Omega),\ \Delta u \in L^2(\Omega) \right\}$$

alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & U & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & u & \mapsto & \partial u.\nu \end{array}$$

est linéaire continue.
avec $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \right)'$.

Définition 1.2.5

$$H^2(\Omega) = \left\{ v \in H^1(\Omega) ; \textit{pour toutes les dérivées d'ordre 2, } \partial^2 v \in L^2(\Omega) \right\}$$

On note

$$|v|_{2,\Omega} = \left(|v|_{1,\Omega}^2 + \sum \left\| \partial^2 v \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

la norme correspondante.

Théorème 1.2.4 $D\left(\overline{\Omega}\right)$ *est dense dans* $H^2(\Omega)$.

Théorème 1.2.5 *L'application trace*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_1 : & H^2(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma = \partial\Omega) \\ & v & \mapsto & \nabla v.\nu \end{array}$$

est linéaire continue et surjective.

La formule de Green pour le Laplacien

$$\forall u \in H^2(\Omega),\ \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_\Omega \Delta u v dx = -\int_\Omega \nabla u \nabla v dx + \int_\Gamma \partial_\nu u v d\Gamma. \tag{1.2.6}$$

où $\partial_\nu u = \gamma_1 u$ est la dérivées normale de u sur $\partial\Omega = \Gamma$.

Théorème 1.2.6 $H_0^2(\Omega) = \{ v \in H^2(\Omega) ;\ \delta_0 v = 0 \ \textit{et}\ \delta_1 v = 0 \}$

On désignepar $H^{-2}(\Omega)$ le dual de $H_0^2(\Omega)$.

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\Omega)$, $H^{-2}(\Omega)$ est un espace des distributions.

Inégalité de Poincaré

Soit Ω un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante c dépendante du diamètre de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^2(\Omega),\ \ |u|_{H^2(\Omega)} \leq c \left\| \Delta u \right\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.2.7}$$

Définition 1.2.6 *L'espace*

$$H^m_{loc}(\Omega) = \{u \in D'(\Omega) / \forall \varphi \in \mathscr{D}(\Omega), \ \varphi u \in H^m(\Omega)\} \tag{1.2.8}$$

est muni de la famille de semi-normes suivante :

$$P_\varphi(u) = |\varphi u|_{H^m(\mathbb{R}^n)}, \qquad \varphi \in \mathscr{D}(\Omega). \tag{1.2.9}$$

Proposition 1.2.2 *Les injections suivantes sont à image dense*

$$D(\Omega) \hookrightarrow H^m_{loc}(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega) \tag{1.2.10}$$

1.3 Rappels sur les opérateurs et les semi-groupes

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Banach.

Définition 1.3.1 *Un opérateur (linéaire) A dans X est dit dissipatif si on a :*

$$\forall u \in D(A), \ \forall \lambda > 0, \ \|u - \lambda A u\| \geq \|u\|. \tag{1.3.1}$$

A est dit m-dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $I - \lambda A$ est surjectif, c'est à dire :

$$\forall f \in X, \ \forall \lambda > 0, \ \exists u \in D(A), \ (I - \lambda A) u = f \tag{1.3.2}$$

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Hilbert, dont on note (,) le produit scalaire. Si A est un opérateur linéaire dans X de domaine dense, la formule :

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X, \ \forall (u, f) \in G(A), \ (v, f) = (\varphi, u)\} \tag{1.3.3}$$

définit un opérateur linéaire A^*(l'adjoint de A) de domaine :

$$D(A^*) = \{v \in X, \ \exists c > 0, \ |(Au, v)| \leq c\|u\|, \quad \forall u \in D(A).\} \tag{1.3.4}$$

et on a :

$$\langle A^* v, u \rangle = \langle v, Au \rangle, \quad \forall v \in D(A^*), \quad \forall u \in D(A). \tag{1.3.5}$$

Proposition 1.3.1 *A est dissipatif dans X si et seulement si $\langle Au, u \rangle \leq 0, \quad \forall u \in D(A)$.*

Définition 1.3.2 *Soit $A : D(A) \longrightarrow X$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que :*
1) A est monotone si :

$$(Au, u)_X \geq 0, \quad \forall u \in D(A). \tag{1.3.6}$$

2) A est maximal si l'application :

$$\begin{array}{rccc} (I - A) : & D(A) & \longrightarrow & X \\ & u & \longmapsto & (I - A)u \end{array} \tag{1.3.7}$$

est surjective.

1.3.1 Semi-groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit Z un espace de Hilbert, $L(Z)$ ensemble des applications linéaires et continues sur Z.

Définition 1.3.3 *Un semi-groupe continu (fortement) sur Z est une fonction*

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & L(Z) \\ & t & \longmapsto & T(t) \end{array}$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

1- $T(0) = I_Z$.

2- $T(t+s) = T(t)T(s)$, *pour tout* $t,\ s \geq 0$.

3- $\lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \|T(t)z - z\| = 0$, *pour tout* $z \in Z$.

On dit que $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *est un semi-groupe de classe* $\mathscr{C}^0$ *ou* $\mathscr{C}^0-$*semi-groupe.*

Théorème 1.3.1 *Soit* $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *un* $\mathscr{C}^0-$*semi-groupe sur un espace de Hilbert Z.*

On a :

1- Il existe $(\exists M \geq 1)$, $(\exists w > 0)$ *telle que:*

$$\|T(t)\| \leq M \exp(wt), \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

2- Soit $w_0 = \inf\limits_{t>0} \left(\frac{1}{t} \ln \|T(t)\|\right)$, *on a :*

$$w_0 = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t} \ln \|T(t)\|\right)$$

w_0 *est appelé le type du semi-groupe* $T(t)$.

Définition 1.3.4 *Le générateur infinitésimal*

Soit $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *un* $\mathscr{C}^0-$*semi-groupe sur un espace de Hilbert Z.*

Le générateur infinitésimal de $\{T(t), \quad t \geq 0\}$ *est l'opérateur non borné en général défini par :*

$$\begin{cases} D(A) = \left\{ z \in Z;\ \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} \quad \textit{existe.} \right\} \\ \textit{et} \\ Az = \lim\limits_{t \longrightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t}, \qquad\qquad z \in D(A) \end{cases}$$

1.4 Problèmes variationnels abstraits

Soit X un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme $\|.\|$, de dual X' de norme duale $\|.\|_*$:

$$\forall f \in X', \quad \|f\|_* = \sup_{v \in X,\ v \neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|}. \tag{1.4.1}$$

Soit a une forme bilinéaire sur $X \times X$ et l un élément de X'. On pose le problème :
Chercher $u \in X$ tel que :

$$\forall v \in X,\ a(u,v) = l(v). \tag{1.4.2}$$

Lemme 1.4.1 *(Lax Milgram). On suppose que a est continue et coercive sur $X \times X$: c'est à dire qu'il existe des constantes positives $M > 0$ et $\alpha > 0$ telles que :*

$$\begin{array}{lll} \forall v \in X, \forall u \in X \quad a(u,v) & \leq & M\|u\|\|v\| \\ \forall v \in X \qquad\qquad a(v,v) & \geq & \alpha \|v\|^2. \end{array} \tag{1.4.3}$$

Alors le problème (1.4.2) a une solution unique u et :

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha}\|l\|_*. \tag{1.4.4}$$

c'est à dire que l'application $u \longmapsto l$ est un isomorphisme de X sur X'.

1.5 Rappels sur la géométrie différentielle pour les surfaces

On s'intéresse dans ce paragraphe aux notions fondamentales permettant de calculer la dérivée d'une fonction, d'un champ de vecteurs, où d'un endomorphisme définis sur une surface.

1.5.1 Paramétrisation

Soit Γ une surface plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ dans lui-même rapporté à une base orthonormée, on transforme un ouvert $\widehat{\Gamma}$ du plan (O, ξ^1, ξ^2) en la surface Γ par une carte régulière $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$.

1.5.2 La normale et le plan tangent

En chaque point m de Γ, on définit deux vecteurs tangents à Γ par :

$$a_\alpha(m) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^\alpha}\left(\varphi^{-1}(m)\right) \qquad \alpha = 1, 2 \tag{1.5.1}$$

Les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ sont supposés linéairement indépendants. La normale unitaire à Γ en chaque point m est définie par :

$$\nu(m) = \nu = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|} \tag{1.5.2}$$

où $\wedge$ (respectivement $\|.\|$) désigne le produit vectoriel (respectivement la norme euclidienne). Le plan tangent à Γ en m engendré par les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ est noté $T_m(\Gamma)$.

1.5.3 Base duale

En générale, la base $\{a_\alpha(m)\} = \{a_1(m), a_2(m)\}$ du plan tangent $T_m(\Gamma)$ n'est ni orthogonale, ni normée. On est donc amené à utiliser la cobase ou base duale notée $\{a^\alpha(m)\} = \{a^1(m), a^2(m)\}$ définie par :

$$a^\alpha(m) . a_\beta(m) = \delta^\alpha_\beta \qquad (1.5.3)$$

où δ^α_β est le symbole de Kronecker, $\alpha, \beta = 1, 2$.
$a^\alpha(m)$, $\alpha = 1, 2$ est une forme linéaire sur le plan tangent, mais on peut l'identifier avec un vecteur du plan tangent.

1.5.4 Tenseur métrique

On définit le tenseur métrique de la surface Γ associé à la carte φ par :

$$g_{\alpha\beta} = (a_\alpha, a_\beta) \quad \alpha, \beta = 1.2 \qquad (1.5.4)$$

où $(,)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. On note $|g|$ le déterminant de ce tenseur.

1.5.5 Le transposé d'un vecteur

Soit $q = q^1 a_1 + q^2 a_2$ un vecteur arbitraire du plan tangent $T_m(\Gamma)$; on lui associé par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ une forme linéaire (vecteur transposé) :

$$\overline{q} = q_1 a^1 + q_2 a^2. \qquad (1.5.5)$$

Les q^α sont les composantes contravariantes et les q_α sont les composantes covariantes.
On a :

$$q_\alpha = g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \qquad \alpha = 1, 2. \qquad (1.5.6)$$

En effet :
On a :

$$\overline{q}.a_\alpha = q_\beta a^\beta . a_\alpha = q_\beta \delta^\beta_\alpha = q_\alpha$$

d'où :

$$\begin{aligned} q_\alpha &= (q, a_\alpha) \\ &= g_{\alpha\beta} q^\beta \\ &= g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \qquad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

1.5.6 Dérivation sur une surface

Dérivation d'une fonction scalaire

Soit f une fonction définie sur Γ et suffisamment régulière ; sa dérivée est une forme linéaire sur l'espace tangent définie par :

$$\partial_m f = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha a^\alpha \tag{1.5.7}$$

Le transposé de $\partial_m f$ noté $\overline{\partial_m f}$ est un vecteur appelé gradient tangentiel de f défini par :

$$\overline{\partial_m f} = \sum_{\alpha=1}^{2} q^\alpha a_\alpha = \nabla_T f \tag{1.5.8}$$

avec :

$$q^\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} f_{,\beta}$$

où $g^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique dual de $g_{\alpha\beta}$ tel que :

$$\sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \delta^\alpha_\mu \qquad \alpha, \mu = 1, 2 \tag{1.5.9}$$

1.5.7 Dérivée d'un champ tangentiel

Soit q_T un champ régulier de vecteur tangent à Γ :

$$m \in \Gamma \longrightarrow q_T(m) = q^\alpha(m)\, a_\alpha(m) \in T_m(m).$$

On définit la dérivée de q_T sur Γ par :

$$\partial_m q_T = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial q_T}{\partial \xi^\alpha} . a^\alpha$$

c'est un endomorphisme qui applique le plan tangent dans $\mathbb{R}^3$ et non pas dans le plan tangent lui même.

1.5.8 Dérivée d'un champ normal

On note par $q_\nu \nu$ le champ normal ; on a par définition :

$$\partial_m (q_\nu \nu) = \nu \partial_m q_\nu + q_\nu . \partial_m \nu \tag{1.5.10}$$

1.5.9 Expression de la divergence

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs sur une surface Γ

La divergence du champ de vecteurs tangents à Γ :

$$q_T = q^1 a_1 + q^2 a_2$$

est un champ scalaire défini sur Γ par :

$$\int_\Gamma div\,(q_T)\, zdm = -\int_\Gamma \partial_m z q_T dm \qquad \text{pour tout } z \in D\,(\Gamma)\,. \tag{1.5.11}$$

où $D\,(\Gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Γ à support compact (le support d'un fonction est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert sur lequel elle est identiquement nulle).

Expression de la divergence d'un champ d'endomorphisme sur une surface Γ

Désignons par ζ_t un champ d'endomorphismes du plan tangent à la surface Γ.
Posons :

$$\zeta_t = \zeta^\alpha_\beta . a^\beta a_\alpha$$

(on a utilisé la convention de sommation par indice répété).
La divergence tangentielle du champ ζ_t est un champ de formes linéaire sur $T_m\,(\Gamma)$, noté $div\zeta_t$ et défini par :

$$\int_\Gamma div\zeta_t . q_T dm = -\int_\Gamma tr_2\,(\zeta_t . \pi \partial_m q_T)\, dm \qquad \text{pour tout } q_T \in D\,(\Gamma, T\,(\Gamma)) \tag{1.5.12}$$

tr_2 désigne la trace d'un endomorphisme du plan tangent dans lui même et $D\,(\Gamma, T\,(\Gamma))$ désigne l'espace des champs tangents à Γ dont les composantes dans la base de $T_m\,(\Gamma)$ sont $\{a_\alpha\}$ $\alpha = 1.2$ sont dans $D\,(\Gamma)\,.$

Définition 1.5.1 *feedback* *La rétroaction (on utilise aussi courâment le terme anglais: feedback), est l'action en retour d'un effet sur le dispositif qui lui a donné naissance, et donc, ainsi, sur elle-même. C'est à dire que la valeur de sortie (à une date antérieure) fait partie des éléments de la commande du dispositif.*

Remarque 1.5.1 *La discipline qui étudie systématiquement les rétroactions est nommée automatique .*

Les rétroactions sont très importantes dans de nombreux domaines car :

- *une rétroaction positive amplifie le phénomène.*
- *une rétroaction négative le réduit, provoque un amortissement.*
- *la rétroaction peut avoir un effet variable (la rétroaction est parfois positive, parfois négative) selon les conditions et notamment selon le délai de transmission (paramèttre important) et l'inertie du système, ce qui induit des effets très variés (cycle, comportement chaotique, etc.).*

2

Insuffisance du feedback naturel

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous montrons dans le cas de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de Ventcel sur une partie Γ_1 du bord et de Dirichlet homogène sur l'autre partie Γ_0.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u &= 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u &= -u_t & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) &= u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(0) &= u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{2.1.1}$$

que le feedback naturel $(ici(-u_t)_{\Gamma_1})$ n'assure pas une dissipation suffisante de l'énergie pour permettre sa décroissance exponentielle.
On a :

$$\overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_0} = \varnothing; \quad \text{mes } \overline{\Gamma_1} \neq 0, \ \text{mes } \overline{\Gamma_0} \neq 0, \quad \text{et } \Gamma_1 \cup \Gamma_0 = \partial\Omega \tag{2.1.2}$$

On désigne par ν le champ unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction. On note par ∂_T la dérivée tengentielle.
On sait que si v est une fonction régulière, le vecteur transposé de $\partial_T v$ est le gradient tangentiel de v et sera noté par $\nabla_T v$. On a :

$$\begin{array}{ll} 1) & \nabla v = \nabla_T v + \partial_\nu v.\nu, \quad \text{sur } \Gamma_1 \\ 2) & \Delta_T v = div_T \ \nabla_T v, \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array}$$

Soit V l'espace définit par :

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \right\}$$

muni de la norme suivante :

$$\|v\|_V^2 = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma \right)$$

Proposition 2.1.1 *La norme $\|.\|$ est équivalente à la norme suivante :*

$$|||v|||_V^2 = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} \left(|\nabla_T v|^2 + |v|^2 \right) d\Gamma \right)$$

posons $z = (u, u_t)$, alors :

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = \begin{pmatrix} u_t \\ u_{tt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_t \\ \Delta u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ u_t \end{pmatrix} = Az \\ z(0) = (u(0), u_t(0)) = (u^0, u^1) = z^0. \end{cases} \tag{2.1.3}$$

avec

$$A = \begin{pmatrix} 0 & I \\ \Delta & 0 \end{pmatrix}$$

De domaine :

$$D(A) = \left\{ (v, u) \in V \times V, \Delta v \in L^2(\Omega) \, ; \partial_\nu v - \Delta_T v = 0, \text{ sur } \Gamma_1. \right\}$$

Proposition 2.1.2 *On a $u \in H^1(\Omega)$ et $\Delta u \in L^2(\Omega)$, alors on peut définir $\partial_\nu v$ comme elément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$.*

On considère $\widetilde{A}$ l'opérateur non borné de domaine :

$$D(\widetilde{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (v, u) \in V \times V, \quad \Delta v \in L^2(\Omega) \, ; \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{array} \right\}$$

défini sur $Z = V \times L^2(\Omega)$ par :

$$\widetilde{A}(v, u) = (u, \Delta v)$$

$\widetilde{A}$ est à résolvante compacte; ses valeurs propres sont isolées ayant ∞ comme seul point d'accumulation possible.

Proposition 2.1.3 *1- $\widetilde{A}$ engendre un semi-groupe contractant; ses valeurs propres sont à partie réelle négative.*
2- A engendre un semi-groupe unitaire, ses valeurs propres sont imaginaires pures.

Preuve. 1- On sait que si un opérateur B est m-dissipatif, alors :

$$\begin{cases} B \text{ est fermé à domaine dense.} \\ B \text{ engendre un semi-groupe de contraction.} \end{cases}$$

Montrons que $\widetilde{A}$ est m-dissipatif :

On a :

$$\widetilde{A} \text{ est m-dissipatif} \Longleftrightarrow \begin{cases} \left\langle \widetilde{A}u, u \right\rangle_Z \leq 0. \\ \left(I - \widetilde{A}\right) \text{ est surjectif.} \end{cases}$$

1) Montrons que :

$$\left\langle -\widetilde{A}u, u \right\rangle_Z \geq 0, \qquad \forall u \in D\left(\widetilde{A}\right)$$

Soit $u = (v, z) \in D\left(\widetilde{A}\right)$.

On a :

$$\begin{aligned}
\left\langle -\widetilde{A}u, u \right\rangle_Z &= \left\langle \begin{pmatrix} -z \\ -\Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \right\rangle_Z \\
&= \langle -z, v \rangle_V + \langle -\Delta v, z \rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= -\int_\Omega \nabla z \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \nabla_T z \nabla_T v d\Gamma - \int_\Omega \Delta v z dx \\
&= \int_\Omega \Delta v z dx - \int_{\Gamma_1} \tfrac{\partial v}{\partial \nu} z d\Gamma + \int_{\Gamma_1} z \Delta_T v d\Gamma - \int_\Omega \Delta v z dx \\
&= -\int_{\Gamma_1} z \Delta_T v d\Gamma + \int_{\Gamma_1} |z|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} z \Delta_T v d\Gamma \\
&= \int_{\Gamma_1} |z|^2 d\Gamma \geq 0
\end{aligned}$$

D'où $\left(-\widetilde{A}\right)$ est monotone.

2) Soit $u = (v, z) \in D\left(\widetilde{A}\right)$

Montrons que l'application :

$$\begin{aligned} \left(I - \widetilde{A}\right) : \ D\left(\widetilde{A}\right) &\longrightarrow Z \\ u &\longmapsto \left(I - \widetilde{A}\right) u \end{aligned}$$

est surjective.

Pour $f = (f_1, f_2) \in Z$, $\exists\, u \in D\left(\widetilde{A}\right)$ tel que :

$$\left(I - \widetilde{A}\right) u = f$$

On a :

$$\left(I - \widetilde{A}\right) u = \begin{pmatrix} v - z \\ z - \Delta v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} v - z = f_1 \\ z - \Delta v = f_2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} z = v - f_1 \\ -\Delta v - f_1 + v = f_2 \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta v - v = f_2 - f_1 = g$$

Soit $w \in V$, alors :

$$\int_\Omega (-v + \Delta v)\, w dx = \int_\Omega g w dx.$$

$$\begin{aligned} \int_\Omega (-v + \Delta v)\, w dx &= +\int_\Omega v w dx + \int_\Omega \nabla v \nabla w dx - \int_{\Gamma_1} \tfrac{\partial v}{\partial \nu} w d\Gamma, \quad \forall w \in V. \\ &= \int_\Omega v w dx + \int_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} z w d\Gamma \\ &= \int_\Omega v w dx + \int_\Omega \nabla v \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma + \int_{\Gamma_1} (v - f_1)\, w d\Gamma, \quad \forall w \in V. \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_\Omega (v w dx + \nabla v \nabla w)\, dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T v \nabla_T w + v w)\, d\Gamma = \int_\Omega g w dx + \int_{\Gamma_1} f_1 w d\Gamma, \quad \forall w \in V.$$

Posons :

$$a(v, w) = \int_\Omega (v w + \nabla v \nabla w)\, dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T v \nabla_T w + v w)\, d\Gamma$$

et :

$$L(w) = \int_\Omega g w dx + \int_{\Gamma_1} f_1 w d\Gamma$$

Montrons que :

• $a(.,.)$ est continue coercive sur V.

• $L(.)$ est continue sur V.

On a :

$$\begin{aligned} |a(v, w)| &= \left| \int_\Omega (v w dx + \nabla v \nabla w)\, dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T v \nabla_T w + v w)\, d\Gamma \right| \\ &\leq \left[\|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\|w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \left[\|v\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \left[\|w\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla_T w\|_{L^2(\Gamma_1)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} \|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T w\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \\ &\leq c' \|v\|_V \|w\|_V \end{aligned}$$

D'où $a(.,.)$ est continue.

On a :

$$\begin{aligned} a(w,w) &= \int_{\Omega} (wwdx + \nabla w \nabla w)\, dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T w \nabla_T w + ww)\, d\Gamma \\ &= \|w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|w\|^2_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla_T w\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\geq \|\nabla w\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T w\|^2_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\geq \|w\|^2_V \end{aligned}$$

D'où la coercivité de $a(.,.)$.

On a :

$$\begin{aligned} L(w) &= \int_{\Omega} gwdx + \int_{\Gamma_1} f_1 wd\Gamma \\ &\leq \|g\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} + \|f_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \|w\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq c\left(\|w\|_{H^1(\Omega)} + \|w\|_{H^1(\Gamma_1)}\right) \\ &\leq c' \|w\|_V \end{aligned}$$

D'où $L(.)$ est continue.

D'après le lemme de Lax Milgram, on a :

$$\forall f \in Z,\ \exists! w \in V \text{ tel que } \ a(v,w) = L(w)$$

comme $v \in V$ et $w \in V$, alors $z \in V$. D'où :

$$u = (v,z) \in V \times V\ .$$

et

$$-\Delta v + v = f_2 + f_1 = g \in L^2(\Omega)$$

Donc pour tout $f \in Z$, il existe $u = (v,z) \in D\left(\widetilde{A}\right)$ tel que :

$$\left(I - \widetilde{A}\right) u = f$$

Donc $\widetilde{A}$ engendre un semi-groupe de contraction.

Soit (λ, φ) élément propre de $\widetilde{A}$, donc $(\exp(\lambda t), \varphi)$ élément propre de $T(t)$.

$$\begin{aligned} \|T(t)\varphi\| &\leq \|T(t)\|\, \|\varphi\| \\ &\leq \|\varphi\| \end{aligned}$$

Posons $\lambda = \alpha + i\beta$, donc :

$$\|\exp(\lambda t)\| = \exp(\alpha t) \leq 1 \Longrightarrow \alpha \leq 0$$

D'où les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont à partie réelle négative ou nulle.

2- On sait que :

$$A \text{ engendre un semi-groupe unitaire} \Longleftrightarrow A^* = -A \text{ et } D(A) = D(A^*)$$

Montrons que A est anti-adjoint.

$$D(A^*) = \left\{ \begin{array}{l} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in Z \diagup \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \left\langle A \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z \text{ est continue} \\ \text{sur } D(A) \text{ pour la topologie de } Z. \end{array} \right\}$$

Soit $(y_1, y_2) \in D(A^*)$, $\exists \widetilde{y} = (\widetilde{y_1}, \widetilde{y_2}) \in Z$, tel que :

$$\left\langle A \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z = \left\langle \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{y_1} \\ \widetilde{y_2} \end{pmatrix} \right\rangle_Z, \qquad \forall (v, z) \in D(A)$$

On a :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y_1} \in V \\ \widetilde{y_2} \in L^2(\Omega) \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z &= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z \\ &= \int_\Omega \nabla z \nabla y_1 dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T z \nabla_T y_1 d\Gamma + \int_\Omega \Delta v y_2 dx \\ &= \int_\Omega \nabla v \nabla \widetilde{y_1} dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T \widetilde{y_1} d\Gamma + \int_\Omega z \widetilde{y_2} dx \end{aligned}$$

Pour $z = 0$, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle A \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z &= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle_Z \\ &= \int_\Omega \Delta v y_2 dx \end{aligned}$$

En faisant une intégration par partie pour $\int_\Omega \Delta v y_2 dx$, on trouve :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \Delta v y_2 dx &= -\int_\Omega \nabla v \nabla y_2 dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T y_2 d\Gamma, \quad \forall v \in V, \Delta v \in L^2(\Omega), \ \partial_\nu v - \Delta_T v = 0 \text{ sur } \Gamma_1. \\ &= \int_\Omega \nabla v \nabla \widetilde{y_1} dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T \widetilde{y_1} d\Gamma, \quad \forall v \in V \\ &= -\int_\Omega \Delta v \widetilde{y_1} dx + \int_{\Gamma_1} \Delta_T v \widetilde{y_1} d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \Delta_T v \widetilde{y_1} d\Gamma, \quad \forall v \in V \end{aligned}$$

Donc :

$$\int_{\Omega} \Delta v y_2 dx = -\int_{\Omega} \Delta v \widetilde{y_1} dx$$

Pour que $y_2 = -\widetilde{y_1}$, il suffit que l'application :

$$\begin{array}{rlcl} \Delta : & \{v \in V, \Delta v \in L^2(\Omega), \ \partial_\nu v - \Delta_T v = 0 \text{ sur } \Gamma_1.\} & \longrightarrow & L^2(\Omega) \\ & v & \longmapsto & \Delta v \end{array}$$

soit surjective.

Pour $f \in L^2(\Omega)$, on a :

$$\begin{cases} \Delta v & = f \quad , \quad \text{dans } \Omega. \\ v & = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_0. \\ \partial_\nu v - \Delta_T v & = 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_1. \end{cases}$$

Donc :

$$\Delta v \in L^2(\Omega)$$

D'où :

$$y_2 = -\widetilde{y_1}$$

Pour $z \in D(\Omega)$, on obtient :

$$-\Delta y_1 = \widetilde{y_2} \in L^2(\Omega) \Longrightarrow \Delta y_1 \in L^2(\Omega)$$

Ce qui permet de définir $\partial_\nu y_1$ comme élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, pour obtenir $\partial_\nu y_1 - \Delta_T y_1 = 0$, sur Γ_1.

$$\begin{pmatrix} \widetilde{y_1} \\ \widetilde{y_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y_2 \\ -\Delta y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Donc :

$$(y_1, y_2) \in D(A)$$

D'où :

$$D(A^*) \subset D(A) \text{ et } -A \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = A^* \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in D(A^*).$$

Soit $y = (y_1, y_2) \in D(A)$, pour $u = (v, z) \in D(A)$:

l'application $u \longrightarrow \langle Au, y \rangle_Z$ est continue pour la topologie de Z sur $D(A)$.

en effet :

$$\begin{aligned}
\left\langle A\begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\rangle_Z &= \left\langle \begin{pmatrix} z \\ \Delta v \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right\rangle_Z \\
&= \langle z, y_1\rangle_V + \langle \Delta v, y_2\rangle_{L^2(\Omega)} \\
&= \int\limits_\Omega \nabla z \nabla y_1 dx + \int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T z \nabla_T y_1 d\Gamma + \int\limits_\Omega \Delta v y_2 dx \\
&= \int\limits_\Omega \nabla z \nabla y_1 dx - \int\limits_{\Gamma_1} z \Delta_T y_1 d\Gamma - \int\limits_\Omega \nabla v \nabla y_2 dx + \langle \partial_\nu v, y_2\rangle_{H^{--\frac{1}{2}}(\Gamma_1)\times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\
&= -\int\limits_\Omega z \Delta y_1 dx - \int\limits_\Omega \nabla v \nabla y_2 dx - \int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T y_2 d\Gamma \\
&= -\left\langle \begin{pmatrix} v \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_2 \\ \Delta y_1 \end{pmatrix}\right\rangle_Z
\end{aligned}$$

D'où la continuité de l'application :

$$u \longrightarrow \langle Au, y\rangle_Z \text{ pour la topologie de } Z \text{ sur } D(A)$$

Donc :

$$(y_1, y_2) \in D(A^*)$$

D'où :

$$A^* = -A \quad \text{et} \quad D(A^*) = D(A)$$

Ce qui prouve que A engendre un semi-groupe unitaire $S(t)$.
Soit λ une valeur propre de A, comme $A^* = -A$, alors :

$$-\lambda = \overline{\lambda}$$

On pose $\lambda = \alpha + i\beta$, on a :

$$\begin{aligned}
-\alpha - i\beta &= \alpha - i\beta \\
&\Longrightarrow \alpha = 0
\end{aligned}$$

D'où les valeurs propres de A sont imaginaires pures.

■

La comparaison des spectres de $\widetilde{A}$ et A par le théorème de Rouché montre que le semi-groupe engendré par $\widetilde{A}$ n'est pas exponentiellement stable.

2.2 Théorème

Théorème 2.2.1 *Le semi-groupe engendré par $\widetilde{A}$ sur $V \times L^2(\Omega)$ n'est pas exponentiellement stable.*

Preuve. Soit $T(t)$ un semi-gpe continu.

On pose :

$$w_0 \quad = \quad \inf_{t>0} \tfrac{1}{t} \left(\ln \| T(t) \| \right) = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \tfrac{\ln \| T(t) \|}{t}$$

(w_0 est le type de $T(t)$).

On pose :

$$w_T = \sup \left(\operatorname{Re} |\lambda| \, , \lambda \in \sigma(A) \right)$$

tel que A est le générateur infinitésimal de $T(t)$.

On a $w_0 \geq w_T$.

On conclut que si $w_T \geq 0$, alors $w_0 \geq 0$, et on a $\{T(t) \quad ,t \geq 0\}$ n'est pas exponentiellement stable.

Démonstration du théorème

La démonstration sera faite pour un cas voisin c'est à dire qu'on se place dans $\mathbb{R}^2$ avec :

$$\begin{cases} \Omega = (0, \pi)^2 \\ \Gamma_0 = (\{0\} \times (0, \pi)) \cup ((0, \pi) \times \{0\}) \\ \Gamma_1 = (\{\pi\} \times (0, \pi)) \cup ((0, \pi) \times \{\pi\}) \\ \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_0} \neq \varnothing. \end{cases}$$

Soit λ une valeur propre de A correspondante à la fonction propre $u = (v, z)$.

On a :

$$Au \quad = \quad (z, \Delta v) = \lambda u = \lambda (v, z)$$

Alors :

$$\begin{cases} z &= \quad \lambda v \\ \Delta v &= \quad \lambda z = \lambda^2 v \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \Delta v & = \lambda^2 v & \text{dans } \Omega \\ v & = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v - \Delta_T v & = 0 & \text{sur} \Gamma_1 \end{cases}$$

On cherche des fonctions propres sous la forme:

$$v(x, y) = f(x) g(y)$$

On a :

$$\begin{aligned} \Delta v &= f''(x)\, g(y) + g''(y)\, f(x) \\ &= \lambda^2 f(x) g(y) \end{aligned}$$

et

$$\begin{array}{lll}\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g'(0)}{g(0)} =0 & , & y=0.\\ \frac{f''(x)}{f(x)}-\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} =0 & , & y=\pi.\\ \frac{g''(y)}{g(y)}-\frac{f'(\pi)}{f(\pi)} =0 & , & x=\pi.\\ \frac{g''(y)}{g(y)}+\frac{f'(0)}{f(0)} =0 & , & x=0.\end{array}$$

D'où l'on tire :

$$\left\{\begin{array}{lll}\frac{f''(x)}{f(x)}+\frac{g''(y)}{g(y)} & = & \lambda^2\\ \frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{f'(\pi)}{f(\pi)} & = & 0\\ \frac{g'(0)}{g(0)}+\frac{g'(\pi)}{g(\pi)} & = & 0\end{array}\right.$$

En posant :

$$\alpha^2=-\frac{f'(0)}{f(0)}=-\frac{g'(0)}{g(0)}$$

On obtient :

$$\lambda^2=2\alpha^2,\qquad \text{on prend } g\equiv f.$$

$$\frac{f''(x)}{f(x)} \ = \ \alpha^2 \ \Longrightarrow \ f''(x)-\alpha^2 f(x)=0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2-\alpha^2=0\Longrightarrow r=\pm\alpha$$

$$\left\{\begin{array}{lll}f(x) & = & c_1\exp(\alpha x)+c_2\exp(-\alpha x),\quad c_1,c_2\in\mathbb{C}\\ \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} & = & \alpha^2\\ \frac{f'(0)}{f(0)} & = & -\alpha^2\end{array}\right.$$

On obtient :

$$\begin{array}{lll}\dfrac{f'(\pi)}{f(\pi)} & = & \dfrac{\alpha c_1\exp(\alpha\pi)-\alpha c_2\exp(-\alpha\pi)}{c_1\exp(\alpha\pi)+c_2\exp(-\alpha\pi)}=\alpha^2\\ \dfrac{f'(0)}{f(0)} & = & \dfrac{\alpha(c_1-c_2)}{c_1+c_2}=-\alpha^2\end{array}$$

En posant $\nu=\frac{c_2}{c_1}$, on aura :

$$\alpha=\frac{\lambda}{\sqrt{2}}=\frac{i\omega}{\sqrt{2}}=i\mu,\quad \mu\in\mathbb{R}.$$

d'où $\lambda=i\mu\sqrt{2}$.

$$\lambda^2=2\alpha^2 \ \Longrightarrow \ \alpha=\pm\frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

alors :

$$\frac{1-\nu}{1+\nu}=-\alpha \quad \text{et} \quad \frac{e^{2\alpha\pi}-\nu}{e^{2\alpha\pi}+\nu}=\alpha$$

donc :

$$\nu = \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \quad \text{et} \quad \exp(2\alpha\pi) = \nu \frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \left[\frac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)} \right]^2 .$$

$$\exp(\alpha\pi) \;=\; \tfrac{(1+\alpha)}{(1-\alpha)}$$

Equation aux valeurs propres :

$$\exp\left(\tfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) \;=\; \left(\sqrt{2}+\lambda\right)\left(\sqrt{2}-\lambda\right)^{-1}$$

et en remplaçant λ par sa valeur, on trouve :

$$\exp(i\mu\pi) \;=\; (1+i\mu)(-i\mu+1)^{-1}$$

$$\begin{aligned} \exp(i\mu\pi) &= \cos(\mu\pi) + i\sin(\mu\pi) \\ &= (1+i\mu)(-i\mu+1)^{-1} \\ &= \left(1-\mu^2+2i\mu\right)\left(\mu^2+1\right)^{-1} \\ &= \tfrac{1-\mu^2}{(\mu^2+1)} + i\tfrac{2\mu}{(\mu^2+1)} \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \cos(\mu\pi) &= \tfrac{1-\mu^2}{(\mu^2+1)} \\ \sin(\mu\pi) &= \tfrac{2\mu}{(\mu^2+1)} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tan(\mu\pi) &= \tfrac{\sin(\mu\pi)}{\cos(\mu\pi)} \\ &= 2\mu\left(1-\mu^2\right)^{-1} \end{aligned}$$

On obtient alors une suite $(\mu_n)_n$ telle que :

$$|\mu_n - n| \longrightarrow 0, \text{ quand } n \longrightarrow +\infty$$

En effet :

$$\frac{\tan(\mu_n\pi) - \tan(n\pi)}{(\mu_n - n)\pi} = \frac{1}{\cos^2(\Theta_n)} = \frac{2\mu_n}{(1-\mu_n^2)}, \qquad \text{avec } \Theta_n \text{ entre } \mu_n\pi \text{ et } n\pi.$$

D'où :

$$|\mu_n - n| \leq \frac{1}{\pi}\left|\frac{2\mu_n}{(1-\mu_n^2)}\right| \longrightarrow 0, \text{ quand } |n| \longrightarrow +\infty, \text{ car } |\mu_n| \longrightarrow +\infty.$$

On a encore :

$$\left|\lambda_n - in\sqrt{2}\right| \leq \frac{1}{\pi}\left|\frac{4\lambda_n}{(2+\lambda_n^2)}\right| \longrightarrow 0, \quad |n| \longrightarrow +\infty, \qquad \text{avec } \left(\mu_n = \lambda_n \frac{1}{i\sqrt{2}}\right).$$

Soit λ une valeur propre de $\widetilde{A}$ correspondant à la fonction propre $u = (v, z)$.

On a :

$$\begin{cases} \Delta v & = \lambda^2 v \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ v & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v - \Delta_T v + \lambda v & = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

Posons $v(x, y) = f(x)g(y)$, et en procèdant de la même façon comme pour l'opérateur A, on obtient :

$$\begin{array}{lll} \frac{f''(x)}{f(x)} + \frac{g'(0)}{g(0)} & = \lambda \quad , & y = 0. \\ \frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g'(\pi)}{g(\pi)} & = \lambda \quad , & y = \pi. \\ \frac{g''(y)}{g(y)} - \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} & = \lambda \quad , & x = \pi. \\ \frac{g''(y)}{g(y)} + \frac{f'(0)}{f(0)} & = \lambda \quad , & x = 0. \end{array}$$

On pose :

$$\lambda - \frac{f'(0)}{f(0)} = \alpha^2 = \lambda - \frac{g'(0)}{g(0)}$$

Donc :

$$\lambda^2 = 2\alpha^2 \Longrightarrow \lambda = \pm\sqrt{2}\alpha, \qquad \text{on prend } g \equiv f.$$

et

$$\frac{f''(x)}{f(x)} \quad = \quad \alpha^2 \quad \Longrightarrow \quad f''(x) - \alpha^2 f(x) = 0$$

L'équation caractéristique est :

$$r^2 - \alpha^2 = 0 \Longrightarrow r = \pm\alpha$$

Donc :

$$\begin{cases} f(x) & = c_1 \exp(\alpha x) + c_2 \exp(-\alpha x), \quad c_1, c_2 \in \mathbb{C} \\ \frac{f'(0)}{f(0)} & = \lambda - \alpha^2 = \alpha\sqrt{2} - \alpha^2 \\ \frac{f'(\pi)}{f(\pi)} & = \alpha^2 - \lambda = \alpha^2 - \alpha\sqrt{2} \end{cases}$$

On obtient :

$$\begin{cases} \frac{c_1 - c_2}{c_1 + c_2} = \sqrt{2} - \alpha = -\beta \\ \frac{c_1 \exp(\alpha\pi) - c_2 \exp(-\alpha\pi)}{c_1 \exp(\alpha\pi) + c_2 \exp(-\alpha\pi)} = \alpha - \sqrt{2} = \beta \end{cases}$$

On pose $\upsilon = \frac{c_2}{c_1}$, alors :

$$\begin{cases} \frac{1-\upsilon}{1+\upsilon} = -\beta \\ \frac{\exp(2\alpha\pi) - \upsilon}{\exp(2\alpha\pi)\upsilon} = \beta \end{cases}$$

D'où :

$$\upsilon = \frac{1+\beta}{1-\beta} \quad \text{et} \quad \exp(2\alpha\pi) = \upsilon\frac{1+\beta}{1-\beta} = \left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)^2.$$

Donc :

$$\exp(\alpha\pi) \quad = \quad \frac{(1+\alpha-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2}-\alpha)}$$

On a :

$$\lambda^2 = 2\alpha^2 \implies \alpha = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}$$

en remplaçant λ par sa valeur, on trouve :

$$\exp\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\lambda\pi\right) = \left(\lambda + \sqrt{2} - 2\right)\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1}$$

On va montrer que les valeurs propres de $\widetilde{A}$ sont aussi proches que l'on veut de l'axe imaginaires, ce qui nous donnera :

$$w_0 = \lim_{t \longrightarrow +\infty} \frac{1}{t} \ln \|T(t)\| \geq 0$$

On a :
$\widetilde{A}$ engendre un semi-groupe de contraction, ses valeurs propres sont donc à partie réelle négative ou nulle.
On pose :

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) &= \exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} \\ g_2(\lambda) &= \exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2} - 2\right)\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1} \end{aligned}$$

On fait appel au théorème de Rouché.

Théorème 2.2.2 *Soit f et g deux fonctions holomorphes non constantes dans un ouvert connexe U, et soit K un compact à bord régulier inclu dans U.*
Supposons qu'on a :

$$|f(z) - g(z)| \leq |f(z)| + |g(z)|$$

sur la frontière de K, alors f et g ont même nombre de zéros dans K.

On sait que les zéros de g_1 forment une suite $(\lambda_n)_n$ de nombres imaginaires pures et :

$$\left|\lambda_n - in\sqrt{2}\right| \longrightarrow 0, \quad |n| \longrightarrow +\infty$$

Maintenant, on montre que les zéros de g_2 sont aussi proches que l'on veut de ceux de g_1.
On considère un contour δ_n ayant en son intérieur un seul λ_n et un seul $in\sqrt{2}$; prend par exemple :

$$\delta_n = \left\{z \in \mathbb{C} : \left|z - in\sqrt{2}\right| = \rho\right\}$$

avec ρ assez petit et $\left|\lambda_n - in\sqrt{2}\right| \leq \rho$ et n assez grand.
Pour $\lambda \in \delta_n$ on a :

$$|\lambda_n - \lambda| \underset{n \longrightarrow +\infty}{\longrightarrow} \rho$$

On montre que pour n assez grand on a :

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| < |g_1(\lambda)|, \quad \forall \lambda \in \delta_n$$

En posant $f = g_1$ et $g = g_2$, alors $g_1(\lambda)$ et $g_2(\lambda)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de δ_n et donc $g_2(\lambda)$ aura des zéros à l'intérieur de δ_n; comme on peut prendre ρ aussi petit que l'on veut, on aura $w_T = 0$ et le résultat découle alors du théorème de Rouché.
On a :

$$\begin{aligned} g_1(\lambda) - g_2(\lambda) &= -\left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} + \left(\lambda + \sqrt{2} - 2\right)\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1} \\ &= \tfrac{4\sqrt{2}}{\left(\lambda - \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)} \end{aligned}$$

On montre alors que :

$$\left|4\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1}\right| < \left|\exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right|, \quad \forall \lambda \in \delta_n$$

On a :

$$\exp\left(\frac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) = \exp\left(\frac{\lambda_n}{\sqrt{2}}\pi\right) + (\lambda - \lambda_n)\frac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(\sqrt{2}\theta_n\pi\right), \quad \text{avec } \theta_n = \alpha_n + i\beta_n$$

et il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\alpha_n > \alpha, \forall n \in \mathbb{Z}$$

Comme $g_1(\lambda_n) = 0$, alors :

$$\begin{aligned} \exp\left(\tfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} &= \exp\left(\tfrac{\lambda_n}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} \\ &\quad + (\lambda - \lambda_n)\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(\theta_n\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \\ &= \left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)^{-1}\left(\lambda_n + \sqrt{2}\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} \\ &\quad + (\lambda - \lambda_n)\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(\theta_n\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right) \qquad (*) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \tfrac{\left(\lambda_n + \sqrt{2}\right)}{\left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)} - \tfrac{\left(\lambda + \sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{2} - \lambda\right)} &= \tfrac{\lambda\lambda_n + \sqrt{2\lambda} - \sqrt{2}\lambda_n - 2 - \lambda\lambda_n + \sqrt{2}\lambda - \frac{\lambda_n}{\sqrt{2}} + 2}{\left(-\lambda_n + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)} \\ &= \tfrac{2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)}{\left(\sqrt{2} - \lambda_n\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)} \end{aligned}$$

alors :

$$* \;=\; 2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)\left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1} + (\lambda - \lambda_n)\pi\sqrt{2}\exp\left(\sqrt{2}\theta_n\pi\right)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left|\exp\left(\tfrac{\lambda}{\sqrt{2}}\pi\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right| &\geq \left|(\lambda - \lambda_n)\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\exp\left(\theta_n\tfrac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right| \\ &\quad - \left|2\sqrt{2}(\lambda - \lambda_n)\left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right| \end{aligned}$$

Pour $\lambda \in \delta_n$, on a :

$$|\lambda - \lambda_n| \longrightarrow \rho$$

Donc :

$$\left|(\lambda - \lambda_n)\left(\lambda_n - \sqrt{2}\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } |n| \longrightarrow +\infty$$

Il existe $\beta > 0$ tel que :

$$\left|\exp\left(\theta_n \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right| > \beta, \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

Il existe alors :

$$\left|(\lambda - \lambda_n)\frac{\pi}{\sqrt{2}}\right|\left|\exp\left(\theta_n \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right)\right| > \beta \frac{\pi}{\sqrt{2}}\left|(\lambda - \lambda_n)\right|$$

Donc :

$$\left|\exp\left(\lambda \frac{\pi}{\sqrt{2}}\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right| > \gamma, \quad \forall \lambda \in \delta_n, \forall n \in \mathbb{Z}, |n| > n_0$$

Comme d'autre part on a pour $\lambda \in \delta_n$

$$|g_1(\lambda) - g_2(\lambda)| = \left|4\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1}\right| \longrightarrow 0, \quad \text{quand } |n| \longrightarrow +\infty$$

Pour $|n|$ assez grand :

$$\left|4\sqrt{2}\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\left(\sqrt{2} - \lambda + 2\right)^{-1}\right| < \left|\exp\left(\frac{\lambda\pi}{\sqrt{2}}\right) - \left(\lambda + \sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2} - \lambda\right)^{-1}\right|, \quad \forall \lambda \in \delta_n$$

■

3

Stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec condition de Ventcel par un feedback frontière avec mémoire

3.1 Introduction

Dans cette partie on s'intéresse à l'étude de la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes avec condition de Ventcel par un feedback frontière avec mémoire et des dissipations interne et frontière par le feedback naturel.

On montre que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, pourvu que le noyau h du terme mémoire soit décroissant en exponentielle.

Nous considérons le problème de l'équation des ondes avec des dissipations interne et frontière par le feedback naturel et un feedback frontière avec mémoire.

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & -au_t & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = & -bu_t - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta_T u(s)ds & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u_1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.1.1}$$

avec $a, b \geq 0$.
Soit Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière :

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1; \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing. \tag{3.1.2}$$

Supposons que le noyau $h(\mathrm{t})$ est décroissant de classe $C^2(\mathbb{R}^+)$ satisfait aux hypothèses suivantes :
$\exists\ \xi, \xi', \xi''$ des constantes positives telles que :

$$\begin{array}{rcccl} -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \end{array} \tag{3.1.3}$$

Cette partie comporte trois sections :

Dans la première section, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution du problème (3.1.1) .

Dans la deuxième section, on introduit une fonction de type Lyapounov.
En effet, nous modifierons l'énergie associée au système (3.1.1) en ajoutant un terme convenablement choisi, ce qui nous permet d'éliminer certains termes indésirables, et de montrer que le problème (3.1.1) est exponentiellement stable par un feedback frontière avec mémoire et par des dissipations interne et frontière par le feedback naturel c'est à dire que nous etudieons le cas $a, b > 0$ et nous posons $a = b = 1$.

Dans la troisième section, on traite le cas $a = 0$, $b > 0$ et on pose $b = 1$ et on montre que le problème de l'équation des ondes avec condition de type Ventcel est exponentiellement stable par un feedback frontière avec mémoire et une dissipation frontière par le feedback naturel.

Cette section contient une sous-section où on montre que la dissipation produite par le feedback frontière avec mémoire est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie (cas $a = b = 0$).

3.2 Existence et unicité de la solution

Nous posons $a = b = 1$.

On considère l'espace

$$V = \left\{ v \in H^1(\Omega), v_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1) \right\}$$

muni de la norme suivante :

$$\|v\|_V^2 = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma \right)$$

On suppose que les hypothèses (3.1.3) sont vérifiées, et en procédant comme dans (cf.[3]), nous montrons le théorème suivant :

Théorème 3.2.1
1) Supposons que $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0, \quad sur\ \Gamma_1 \quad et \quad \Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1).$$

Alors le problème (3.1.1) admet une solution (forte) unique

$$u: \ \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$(u, u_t, u_{tt}) \in L^\infty\left(0, \infty; V \times V \times L^2(\Omega)\right)$$

2) Soit $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$, *alors le problème (3.1.1) admet une solution (faible) unique*

$$u: \ \mathbb{R}^+ \times \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant

$$u \in C\left(\mathbb{R}^+, V\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)\right)$$

Preuve. Existence des solutions :
Dans cette section, on montre l'existence et l'unicité de la solution forte du problème (3.1.1) . Premièrement, on considère la solution forte et en utilisant la densité, on prolonge le même résultat pour les solutions faibles.

Une intégration par partie formelle nous donne :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega u_{tt} w dx - \int_\Omega \Delta u w dx + \int_\Omega u_t w dx &= (u_{tt}, w) + \int_\Omega \nabla u \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T w d\Gamma + \int_\Omega u_t w dx \\
&\quad - \int_{\Gamma_1} \nabla_T w \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u_t w d\Gamma \\
&= (u_{tt}, w) + (\nabla u, \nabla w) + (\nabla_T u, \nabla_T w) + (u_t, w) \\
&\quad + (u_t, w)_{\Gamma_1} - \int_0^t h(t-s) \left(\nabla_T u(s), \nabla_T w\right) ds, \quad \forall w \in V.
\end{aligned}$$

On transforme le problème (3.1.1) en un problème équivalent avec des conditions initiales homogènes.
On fait un changement de fonctions, et on pose :

$$u(x,t) = v(x,t) + \phi(x,t), \quad \text{où} \ \ \phi(x,t) = u^0(x) + t u^1(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}^+ \times \Omega \qquad (3.2.1)$$

On a :

$$
\begin{aligned}
& u_{tt} = v_{tt}, \quad \Delta u = \Delta v + \Delta\phi, \quad u_t = v_t + \phi_t = v_t + u^1(x) \\
& \int_0^t h(t-s)\Delta_T u(s)ds = \int_0^t h(t-s)\Delta_T v(s)ds + \int_0^t h(t-s)\Delta_T \phi(s)ds \\
& u = 0 \text{ sur } \Gamma_0 \Longrightarrow v = 0 \text{ sur } \Gamma_0. \\
& \tfrac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u = \tfrac{\partial v}{\partial \nu} - \Delta_T v + \tfrac{\partial \phi}{\partial \nu} - \Delta_T \phi \\
& u(x,0) = v(x,0) + \phi(x,0) = v(x,0) + u^0(x) = u^0(x) \Longrightarrow v(x,0) = 0. \\
& u_t(x,0) = v_t(x,0) + \phi_t(x,0) = v(x,0) + u^1(x) = u^1(x) \Longrightarrow v_t(x,0) = 0.
\end{aligned}
$$

Donc le problème équivalent à (3.1.1) s'écrit :

$$
\begin{cases}
v_{tt} + (v_t + \phi_t) - \Delta v & = & F & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
v & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\
\partial_\nu v - \Delta_T v + (v_t + \phi_t)_{\Gamma_1} + \displaystyle\int_0^t h(t-s)\Delta_T v(s)ds & = & G & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\
v(x,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega \\
v_t(x,0) & = & 0 & \text{dans } \Omega
\end{cases}
\tag{3.2.2}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
F &= \Delta\phi \\
G &= -\frac{\partial \phi}{\partial \nu} + \Delta_T \phi - \int_0^t h(t-s)\Delta_T \phi(s)ds
\end{aligned}
$$

Si v est solution de (3.2.2) dans $[0,T]$, alors $u = v + \phi$ est solution de (3.1.1) dans le même intervalle. des estimations que nous allons obtenir ci-dessous, nous pouvons montrer que :

$$
|\Delta v(t)|^2 + |\nabla v_t(t)|^2 \leq C(T). \quad \text{pour tout } t \in [0,T].
$$

On montre que le problème (3.2.2) a une solution approchée, qui sera donnée par la méthode de **Faedo-Galerkin.**

On établit, sur cette solution approchée, des estimations a priori.

On construit une suite $w_1, w_2, ..., w_m$ de fonctions ayant les propriétés suivantes :

$$
\begin{cases}
\forall\ w_i \in V \cap H^2(\Omega). \\
\forall m,\ w_1, w_2, ..., w_m \text{ sont linéairements indépendants} \\
\text{les combinaisons linéaires finies des } w_i \text{ sont denses dans } V \cap H^2(\Omega).
\end{cases}.
$$

Une telle suite existe car l'espace $V \cap H^2(\Omega)$ est séparable (ie. admet un ensemble dénombrable dense).

Soit $(w_\nu)_{\nu \in \mathbb{N}}$ une base de $V \cap H^2(\Omega)$ orthonormale dans $L^2(\Omega)$.

Soit V^m l'espace engendré par $w_1, w_2, \ldots.., w_m$, et soit

$$v^m(t) = \sum_{j=1}^{m} \gamma^j(t) w_j$$

une solution approchée du problème suivant de Cauchy :

$$\begin{cases} (v_{tt}^m(t), w) + (\nabla v^m(t), \nabla w) + (\nabla_T v^m(t), \nabla_T w) + (v_t^m + \phi_t, w) \\ -\displaystyle\int_0^t h(t-s)\,(\nabla_T v^m(s), \nabla_T w)\,ds + (v_t^m + \phi_t, w)_{\Gamma_1} \\ = (F(t), w) + (G(t), w)_{\Gamma_1}, \qquad \text{pout tout } w \in V^m. \\ v^m(0) = v_t^m(0) = 0 \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Par la méthode standard des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (3.2.3) sur $[0, t_m]$, alors cette solution peut être prolonger à un intervalle fermé $[0, T]$ par la première estimation($cf.$ [3] et [23]).

Première estimation :

Nous prenons $w = \gamma_t^j(t) w_j$ dans (3.2.3) , on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(v_{tt}^m(t), \gamma_t^j(t) w_j\right) + \left(\nabla v^m(t), \nabla \gamma_t^j(t) w_j\right) + \left(\nabla_T v^m(t), \nabla_T \gamma_t^j(t) w_j\right) \\ &- \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T \gamma_t^j(t) w_j\right)_{\Gamma_1} ds + \left(v_t^m(t) + \phi_t(t), \gamma_t^j(t) w_j\right) \\ &= \left(F(t), \gamma_t^j(t) w_j\right) + \left(G(t), \gamma_t^j(t) w_j\right) - \left(v_t^m(t) + \phi_t(t), \gamma_t^j(t) w_j\right)_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

Maintenant, nous sommons sur j et notons que $v^m(0) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\right\} + (v_t^m(t) + \phi_t(t), v_t^m(t) + \phi_t(t))_{\Gamma_1} \\ &+ (v_t^m(t) + \phi_t(t), v_t^m(t) + \phi_t(t)) \\ &= (F(t), v_t^m(t)) + (G(t), v_t^m(t)) + (v_t^m(t) + \phi_t(t), \phi_t(t)) + (v_t^m(t) + \phi_t(t), \phi_t(t))_{\Gamma_1} \\ &+ \int_0^t h(t-s)\,(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v_t^m(t))\,ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\right\}+\int_\Omega\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2dx+\int_{\Gamma_1}\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2d\Gamma$$
$$=(F(t),v_t^m(t))+\frac{d}{dt}(G(t),v^m(t))-(G_t(t),v^m(t))+(v_t^m(t)+\phi_t(t),\phi_t(t))$$
$$-h(0)\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2-\int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v^m(t)\right)ds+(v_t^m(t)+\phi_t(t),\phi_t(t))_{\Gamma_1}$$
$$+\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v^m(t)\right)ds\right]$$

L'inégalité de Cauchy-Schwartz donne :

$$\int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v^m(t)\right)ds\leq\left|\nabla_T v^m(t)\right|\int_0^t\left|h_t(t-s)\right|\left|\nabla_T v^m(s)\right|ds$$

L'inégalité de Holder donne, pour $\eta>0$

$$\begin{aligned}\left|(v_t^m(t)+\phi_t(t),\phi_t(t))\right| &\leq \eta\int_\Omega\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2dx+\frac{1}{4\eta}\left|u^1(x)\right|^2\\ \left|(v_t^m(t)+\phi_t(t),\phi_t(t))_{\Gamma_1}\right| &\leq \eta\int_{\Gamma_1}\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2d\Gamma+\frac{1}{4\eta}\left|u^1(x)\right|^2\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\right\}+\int_\Omega\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2dx+\int_{\Gamma_1}\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2d\Gamma$$
$$\leq k_1(\eta)+(F(t),v_t^m(t))+\frac{d}{dt}(G(t),v^m(t))-(G_t(t),v^m(t))-h(0)\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2$$
$$+\eta\int_\Omega\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2dx+\eta\int_{\Gamma_1}\left|v_t^m(t)+\phi_t(t)\right|^2d\Gamma+\left|\nabla_T v^m(t)\right|\int_0^t\left|h_t(t-s)\right|\left|\nabla_T v^m(s)\right|ds$$
$$+\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v^m(t)\right)ds\right]$$

où $k_1(\eta) = \frac{1}{4\eta}\left(\left|u^1(x)\right|^2 + \left|u^1(x)\right|_{\Gamma_1}^2\right) > 0.$
Considérons l'inégalité de Young et tenant compte de l'hypothèse (3.1.3) , on déduit :

$$\begin{aligned}
\left|\nabla_T v^m(t)\right| \int_0^t \left|h_t(t-s)\right| \left|\nabla_T v^m(s)\right| ds &\leq \left|\nabla_T v^m(t)\right| \int_0^t \xi h(t-s) \left|\nabla_T v^m(s)\right| ds \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(t-s)\left|\nabla v_T^m(s)\right| ds\right)^2 + \frac{\xi^2}{2}\left|\nabla v_T^m(t)\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds \\
&\quad + \frac{\xi^2}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2 \\
&\leq \frac{1}{2}\|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds \\
&\quad + \frac{\xi^2}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2
\end{aligned} \tag{3.2.4}$$

Inégalité de Poincaré nous donne :

$$|v|_{\Gamma_1} \leq C_0 \left|\nabla v\right|, \quad \text{pour tout } v \in V. \tag{3.2.5}$$

D'après les inégalités (3.2.4) et (3.2.5) , on peut écrire :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\right\} + (1-\eta)\int_\Omega \left|v_t^m(t) + \phi_t(t)\right|^2 dx \\
&+ (1-\eta)\int_{\Gamma_1} \left|v_t^m(t) + \phi_t(t)\right|^2 d\Gamma \\
&\leq k_1(\eta) + \frac{1}{2}\left|F(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2 + \frac{d}{dt}\left(G(t), v^m(t)\right)_{\Gamma_1} + \frac{C_0^2}{2}\left|G_t(t)\right|_{\Gamma_1}^2 \\
&+\frac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2 + \frac{1}{2}\|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds + \left(\frac{\xi^2}{2} - h(0)\right)\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2 \\
&+\frac{d}{dt}\left[\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v^m(t)\right) ds\right].
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

En intégrant (3.2.6) entre $(0,t)$ et on note $v^m(0) = v_t^m(t) = 0$, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2 + (1-\eta)\int_0^t\int_\Omega \left|v_t^m(s) + \phi_t(s)\right|^2 dxds \\
&+ (1-\eta)\int_0^t\int_{\Gamma_1} \left|v_t^m(s) + \phi_t(s)\right|^2 d\Gamma ds \\
&\leq k_2(\eta,T) + \int_0^t \left[\tfrac{1}{2}\left|v_t^m(s)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla v^m(t)\right|^2 + \left(\tfrac{\xi^2}{2} - h(0)\right)\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\right] ds \\
&+ \tfrac{1}{2}\int_0^t \left|F(s)\right|^2 ds + \left(G(t), v^m(t)\right)_{\Gamma_1} + \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v^m(t)\right) ds \\
&+ \tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s h(s-r)\left|\nabla_T v^m(r)\right|^2 drds + \tfrac{C_0^2}{2}\int_0^t \left|G_t(s)\right|_{\Gamma_1}^2 ds
\end{aligned}$$

avec

$$\int_0^t k_1(\eta)dt \leq \int_0^T k_1(\eta)ds = k_2(\eta,T)$$

On a :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\int_0^s h(s-r)\left|\nabla_T v^m(r)\right|^2 drds &\leq \tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(s)ds\int_0^s \left|\nabla_T v^m(r)\right|^2 dr \\
&\leq \tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}^2\int_0^t \left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v^m(t)\right) ds &\leq \left|\nabla_T v^m(t)\right|\int_0^t \left|h(t-s)\right|\left|\nabla_T v^m(s)\right| ds \\
&\leq \eta\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2 + \tfrac{1}{4\eta}\int_0^t h(s)ds\int_0^t \left|h(t-s)\right|\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds \\
&\leq \tfrac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t \left|\nabla_T v^m(s)\right|^2 ds \\
&\quad +\eta\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2
\end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.2.5) on a :

$$\left(G(t), v^m(t)\right)_{\Gamma_1} \leq \frac{C_0^2}{4\eta}\left|G(t)\right|_{\Gamma_1}^2 + \eta\left|\nabla v^m(t)\right|^2. \tag{3.2.7}$$

$$\frac{1}{2}\left|v_t^m(t)\right|^2+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left|\nabla v^m(t)\right|^2+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2+(1-\eta)\int_0^t\int_\Omega\left|v_t^m(s)+\phi_t(s)\right|^2dxds$$
$$+(1-\eta)\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|v_t^m(s)+\phi_t(s)\right|^2d\Gamma ds$$
$$\leq k_2(\eta,T)+\frac{1}{2}\left\|F\right\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}+\frac{C_0^2}{4\eta}\left|G(t)\right|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds$$
$$+\frac{C_0^2}{2}\left\|G_t\right\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))}+\int_0^t\left[\frac{1}{2}\left|v_t^m(s)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla v^m(s)\right|^2+\left(\frac{\xi^2}{2}-h(0)\right)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2\right]ds$$
$$+\frac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds \tag{3.2.8}$$

On fait appel au lemme de **Gronwall.**

Lemme 3.2.1 *Soit a une fonction non négative de $L^1(0,\infty)$, et g une fonction de $L^\infty(0,\infty)$. Soit β une constante positive ou nulle.*
Si $g(t)\leq\beta+\int_0^t a(s)g(s)ds$, alors :

$$g(t)\leq\beta\exp\left(\int_0^t a(s)ds\right)$$

En choisissant $\eta>0$ suffisamment petit, et en appliqant le lemme de Gronwall, on déduit :

$$\left|v_t^m(t)\right|^2+\left|\nabla v^m(t)\right|^2+\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\leq L_1.$$

avec

$$\begin{aligned}
g(t) &= \left|v_t^m(t)\right|^2+\left|\nabla v^m(t)\right|^2+\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2\leq k_2(\eta,T)+\frac{1}{2}\left\|F\right\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}+\frac{C_0^2}{4\eta}\left|G(t)\right|^2_{\Gamma_1}\\
&\quad+\int_0^T\left[\frac{1}{2}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}+\frac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}+\left(\frac{\xi^2}{2}-h(0)\right)\right]\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds\\
&\quad+\frac{C_0}{2}\left\|G_t\right\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))}+\int_0^T\left[\frac{1}{2}\left|v_t^m(s)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla v^m(s)\right|^2\right]ds\\
&\leq \beta+\int_0^t a(s)\left[\left|v_t^m(s)\right|^2+\left|\nabla v^m(s)\right|^2+\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2\right]ds
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
g(t) &\leq \beta \exp\left[\int_0^t \sup\left[\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^1(0,\infty)}+\frac{1}{4\eta}\|h\|_{L^1(0,\infty)}\|h\|_{L^\infty(0,\infty)}+\left(\frac{\xi^2}{2}-h(0)\right),\frac{1}{2}\right]ds\right]\\
&\leq \beta \exp\left[\int_0^T \sup\left[\frac{1}{2}\|h\|^2_{L^1(0,\infty)}+\frac{1}{4\eta}\|h\|_{L^1(0,\infty)}\|h\|_{L^\infty(0,\infty)}+\left(\frac{\xi^2}{2}-h(0)\right),\frac{1}{2}\right]ds\right]\\
&\leq \beta C\left(T\right).
\end{aligned}$$

Où :

$$\begin{aligned}
\beta &= k_2(\eta,T)+\tfrac{1}{2}\|F\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Omega))}+\tfrac{C_0^2}{4\eta}|G(t)|^2_{\Gamma_1}+\tfrac{C_0}{2}\|G_t\|^2_{L^2(0,\infty;L^2(\Gamma_1))}>0\\
a &\equiv \sup\left[\tfrac{1}{2}\|h\|^2_{L^1(0,\infty)}+\tfrac{1}{4\eta}\|h\|_{L^1(0,\infty)}\|h\|_{L^\infty(0,\infty)}+\left(\tfrac{\xi^2}{2}-h(0)\right),\tfrac{1}{2}\right]
\end{aligned}$$

et

$$|G(t)|^2_{\Gamma_1}\leq |G(T)|^2_{\Gamma_1}$$

Donc :

$$g(t)\leq \beta C(T)\leq L_1$$

où L_1 est une constante positive indépendante de $m\in\mathbb{N}$.
D'où :

$$|v_t^m(t)|^2+|\nabla v^m(t)|^2+|\nabla_T v^m(t)|^2+\int_0^t\int_\Omega |v_t^m(s)+\phi_t(s)|^2\,dxds+\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v_t^m(s)+\phi_t(s)|^2\,d\Gamma ds\leq L_2 \tag{3.2.9}$$

avec L_2 est une constante positive indépendante de $m\in\mathbb{N}$.
On déduit que $T=t_m,\quad \forall m$ et

$$\begin{cases} v_t^m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;V\right).\\ v^m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;V\right).\end{cases} \tag{3.2.10}$$

La seconde estimation :
Premièrement, on estime le terme $v_{tt}^m(0)$ dans la norme de $L^2\left(\Omega\right)$.
Posons $w=v_{tt}^m(0)$ dans (3.2.3) et notons que $v^m(0)=v_t^m(0)=0$:

$$\begin{aligned}
&|v_{tt}^m(0)|^2+(\nabla v^m(0),v_{tt}^m(0))+(\nabla_T v^m(0),v_{tt}^m(0))+(v_t^m+\phi_t,v_{tt}^m(0))\\
&(v_t^m+\phi_t,v_{tt}^m(0))_{\Gamma_1}=(F(0),v_{tt}^m(0))+(G(0),v_{tt}^m(0))_{\Gamma_1}
\end{aligned}$$

On a :

$$\frac{\partial u^0}{\partial \nu}-\Delta_T u^0+u^1=0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \Delta_T u^1_{\Gamma_1}\in L^2\left(\Gamma_1\right)$$

alors :

$$|v_{tt}^m(0)|^2 + \left(u^1, v_{tt}^m(0)\right)_\Omega = \left(\Delta u^0, v_{tt}^m(0)\right)$$

Donc :

$$|v_{tt}^m(0)|^2 = \left|-u^1 + \Delta u^0\right| |v_{tt}^m(0)|$$

D'où :

$$|v_{tt}^m(0)| < L_3 \tag{3.2.11}$$

Où L_3 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

Nous dérivons (3.2.3) , on obtient :

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\frac{d}{dt} v_{tt}^m(t), w\right) + (\nabla v_t^m(t), \nabla w) + (\nabla_T v_t^m(t), \nabla_T w) + (v_{tt}^m + \phi_{tt}, w) \\ (v_{tt}^m + \phi_{tt}, w)_{\Gamma_1} - \int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T w\right) ds - h(0)\left(\nabla_T v^m(t), \nabla_T w\right) \\ = (F_t(t), w) + (G_t(t), w)_{\Gamma_1} \end{array}\right. \tag{3.2.12}$$

Nous multiplions (3.2.12) par $\gamma_{tt}^j(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned} &\left(\tfrac{d}{dt} v_{tt}^m(t), \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) + \left(\nabla v_t^m(t), \nabla \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) + \left(\nabla_T v_t^m(t), \nabla_T \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) \\ &- \int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) ds + \left(v_{tt}^m(t), \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right)_{\Gamma_1} \\ &-h(0)\left(\nabla_T v^m(t), \nabla_T \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) + \left(v_{tt}^m(t), \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) \\ &= \left(F_t(t), \sum_{j=1}^m \gamma_{tt}^j(t) w_j\right) + \tfrac{d}{dt}\left(G_t(t), \sum_{j=1}^m \gamma_t^j(t) w_j\right)_{\Gamma_1} - \left(G_{tt}(t), \sum_{j=1}^m \gamma_t^j(t) w_j\right)_{\Gamma_1} \end{aligned}$$

Nous faisons la somme par rapport à j, on obtient :

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}|v_{tt}^m(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla v_t^m(t)|^2 + \tfrac{1}{2}|\nabla_T v_t^m(t)|^2\right\} - h(0)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v_{tt}^m(t)\right) \\ &+ \int\limits_\Omega (v_{tt}^m(t))^2\, dx + \int\limits_{\Gamma_1} (v_{tt}^m(t))^2\, d\Gamma - \int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s), \nabla_T v_{tt}^m(t)\right) ds \\ &= (F_t(t), v_{tt}^m(t)) + \tfrac{d}{dt}\left(G_t(t), v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1} - \left(G_{tt}(t), v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}. \end{aligned}$$

En intégrant par partie, on trouve :

$$\frac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2\right\}+h(0)\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2+\int\limits_{\Omega}\left(v_{tt}^m(t)\right)^2dx+\int\limits_{\Gamma_1}\left(v_{tt}^m(t)\right)^2d\Gamma$$

$$=\left(F_t(t),v_{tt}^m(t)\right)+\tfrac{d}{dt}\left(G_t(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}-\left(G_{tt}(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}-\int\limits_0^t h_{tt}(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds$$

$$-h_t(0)\left(\nabla_T v^m(t),\nabla_T v_t^m(t)\right)+\tfrac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds\right)$$

$$+h\left(0\right)\tfrac{d}{dt}\left(\nabla_T v^m(t),\nabla_T v_t^m(t)\right)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et l'inégalité de Young, on obtient :

$$\begin{aligned}
&\left(F_t(t),v_{tt}^m(t)\right)\leq\tfrac{1}{2}\left|F_t(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2\\
&\left(G_{tt}(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}\leq\tfrac{C_0^2}{4\eta}\left|G_{tt}(t)\right|^2+\eta\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2\\
&h_t(0)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)\leq\tfrac{(h_t(0))^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2+\eta\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2\\
&\int\limits_0^t h_{tt}(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds\leq\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2\int\limits_0^t\xi''h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|ds\\
&\leq\eta\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2+\tfrac{(\xi")^2}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds
\end{aligned}$$

Donc :

$$\frac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2\right\}-\eta\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2+\left(h(0)-2\eta\right)\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2$$
$$+\int\limits_{\Omega}\left(v_{tt}^m(t)\right)^2dx+\int\limits_{\Gamma_1}\left(v_{tt}^m(t)\right)^2d\Gamma$$

$$\leq\tfrac{1}{2}\left|F_t(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2+\tfrac{d}{dt}\left(G_t(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}+\tfrac{(\xi")^2}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds$$

$$+\tfrac{d}{dt}\left(\int\limits_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds\right)+\tfrac{C_0^2}{4\eta}\left|G_{tt}(t)\right|^2+\tfrac{(h_t(0))^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2$$
$$+h\left(0\right)\tfrac{d}{dt}\left(\nabla_T v^m(t),\nabla_T v_t^m(t)\right)$$

En intégrant de 0 à t, et tenant compte de (3.2.11) , $v^m(0)=v_t^m(0)$, et des estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
\int\limits_0^t ds\int\limits_0^s h(s-r)\left|\nabla_T v^m\left(r\right)\right|^2dr &\leq \left\|h\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\int\limits_0^t\left|\nabla_T v^m\left(r\right)\right|^2dr\\
h(0)\left(\nabla_T v^m(t),\nabla_T v_t^m(t)\right) &\leq \frac{h(0)^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m\left(t\right)\right|^2+\eta\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\frac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2+\frac{1}{2}\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2-\eta\int_0^t\left|\nabla v_t^m(s)\right|^2ds+(h(0)-2\eta)\int_0^t\left|\nabla_T v_t^m(s)\right|^2ds$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\left(v_{tt}^m(s)\right)^2dxds+\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left(v_{tt}^m(s)\right)^2d\Gamma ds$$
$$\leq\frac{L_2}{2}+\frac{1}{2}\left\|F_t\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\left(G_t(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}+\frac{C_0^2}{4\eta}\left\|G_{tt}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}$$
$$+\int_0^t\left[\frac{1}{2}\left|v_{tt}^m(s)\right|^2+\frac{(h_t(0))^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2\right]ds+\frac{h(0)^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2+\eta\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2$$
$$+\frac{\left(\xi"\right)^2}{4\eta}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds+\int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds$$

Tenant compte de (3.2.5) et (3.1.3) , on a :

$$\int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T v^m(s),\nabla_T v_t^m(t)\right)ds \leq \frac{\left(\xi'\right)^2}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds$$
$$+\eta\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2$$

et

$$\left(G_t(t),v_t^m(t)\right)_{\Gamma_1}\leq\frac{C_0^2}{4\eta}\left|G_t(t)\right|^2_{\Gamma_1}+\eta\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2$$

D'où :

$$\frac{1}{2}\left|v_{tt}^m(t)\right|^2+\left(\frac{1}{2}-\eta\right)\left|\nabla v_t^m(t)\right|^2+\left(\frac{1}{2}-2\eta\right)\left|\nabla_T v_t^m(t)\right|^2+(h(0)-2\eta)\int_0^t\left|\nabla_T v_t^m(s)\right|^2ds$$
$$+\int_0^t\int_\Omega\left(v_{tt}^m(s)\right)^2dxds+\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left(v_{tt}^m(s)\right)^2d\Gamma ds$$
$$\leq\frac{L_2}{2}+\frac{1}{2}\left\|F_t\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}+\frac{C_0^2}{4\eta}\left\|G_{tt}\right\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))}+\eta\int_0^t\left|\nabla v_t^m(s)\right|^2ds+\frac{1}{2}\int_0^t\left|v_{tt}^m(s)\right|^2ds$$
$$+\int_0^t\frac{(h_t(0))^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds+\frac{\left(\xi"\right)^2}{4\eta}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds+\frac{h(0)^2}{4\eta}\left|\nabla_T v^m(t)\right|^2+\frac{C_0^2}{4\eta}\left|G_t(t)\right|^2_{\Gamma_1}$$
$$+\frac{\left(\xi'\right)^2}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T v^m(s)\right|^2ds.$$

Nous appliquons le lemme de **Gronwall,** tenons compte de la première estimation et choisissons η suffisamment petite, on trouve :

$$|v_{tt}^m(t)|^2 + |\nabla v_t^m(t)|^2 + |\nabla_T v_t^m(t)|^2 + \int_0^t |\nabla_T v_t^m(s)|^2 \, ds + \int_0^t \int_{\Gamma_1} (v_{tt}^m(s))^2 \, d\Gamma ds + \int_0^t \int_{\Omega} (v_{tt}^m(s))^2 \, dx ds \leq L_5$$

avec L_5 une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$ et $t \in [0, T]$.

Où

$$\begin{aligned}
g(t) &= |v_{tt}^m(t)|^2 + |\nabla_t v^m(t)|^2 \leq \tfrac{L_2}{2} + \tfrac{1}{2} \|F_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} \|G_{tt}\|^2_{L^2(0,T;\, L^2(\Gamma_1))} \\
&\quad + \int_0^T C \, |\nabla_T v^m(s)|^2 \, ds + \eta \int_0^T |\nabla v_t^m(s)|^2 \, ds + \tfrac{1}{2} \int_0^T |v_{tt}^m(s)|^2 \, ds + \tfrac{C_0^2}{4\eta} |G_t(t)|^2_{\Gamma_1} \\
&\leq \tfrac{L_2}{2} + \tfrac{1}{2} \|F_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} \|G_{tt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} |G_t(t)|^2_{\Gamma_1} + \int_0^T C L_1 ds \\
&\quad + \eta \int_0^T |\nabla v_t^m(s)|^2 \, ds + \tfrac{1}{2} \int_0^T |v_{tt}^m(s)|^2 \, ds \\
&\leq \tfrac{L_2}{2} + \tfrac{1}{2} \|F_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} - \tfrac{C_0^2}{4\eta} \|G_{tt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} |G_t(t)|^2_{\Gamma_1} + k(T)' \\
&\quad + \eta \int_0^T |\nabla v_t^m(s)|^2 \, ds + \tfrac{1}{2} \int_0^T |v_{tt}^m(s)|^2 \, ds \\
&\leq \beta + \int_0^t a(s) \left[|v_t^m(s)|^2 + |\nabla_t v^m(s)|^2 \right] ds
\end{aligned}$$

Donc :

$$g(t) \leq \beta \exp\left(\int_0^t \sup\left[\frac{1}{2}, \eta\right] ds \right) \leq \beta \left(\int_0^T \sup\left[\frac{1}{2}, \eta\right] ds \right) \leq \beta C\,(T).$$

Où :

$$\begin{aligned}
\beta &= \tfrac{L_2}{2} + \tfrac{1}{2} \|F_t\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} \|G_{tt}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Gamma_1))} + \tfrac{C_0^2}{4\eta} |Q(T)|^2_{\Gamma_1} + k(T) > 0 \\
a &\equiv \sup\left[\tfrac{1}{2}, \eta\right] \\
C &= \left[\tfrac{(h_t(0))^2}{4\eta} + \tfrac{\left(\xi^{"}\right)^2}{4\eta} \|h\|^2_{L^1(0,\infty)} + \tfrac{h(0)^2}{4\eta} \tfrac{\left(\xi^{'}\right)^2}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right]
\end{aligned}$$

et

$$|G_t(t)|^2_{\Gamma_1} \leq Q(T)$$

Donc :

$$g(t) \leq \beta C(T) \leq L_4$$

D'après (3.2.10) et (3.2.11) on déduit que :

$$v_{tt}^m \text{ demeure dans un borné de } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{3.2.13}$$

Passage à la limite :

Des informations (3.2.9) ,(3.2.10) et (3.2.13) on déduit que l'on peut extraire de v^m une sous suite v^η telle que :

$$\begin{cases} v^\eta \longrightarrow v \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile.} \\ v_t^\eta \longrightarrow v_t \text{ dans } L^\infty(0,T;V) \text{ faible étoile.} \\ v_{tt}^\eta \longrightarrow v_{tt} \text{ dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega)) \text{ faible étoile.} \end{cases}$$

D'où l'existence d'une solution forte.

Unicité :

Soit u_1 et u_2 deux solutions du problème (3.2.3) , alors $z = u_1 - u_2$ satisfait :

$$\begin{aligned} 0 &= (z_{tt}, w) + (\nabla z, \nabla w) + (\nabla_T z, \nabla_T w) + (u_t, w) + (u_t, w)_{\Gamma_1} \\ &\quad - \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T w\right) ds, \quad \text{pour tout } w \text{ appartient à } V. \end{aligned}$$

Posons $w = z_t(t)$, on a :

$$\begin{aligned} &(z_{tt}, z_t(t)) + (\nabla z, \nabla z_t(t)) + (\nabla_T z, \nabla_T z_t(t)) + (z_t(t), z_t(t)) + (z_t, z_t)_{\Gamma_1} \\ &- \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z_t(t)\right) ds = 0 \\ &= \tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\left|z_t(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla z_t(t)\right|^2 + \tfrac{1}{2}\left|\nabla_T z_t(t)\right|^2\right\} - \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z_t(t)\right) ds \\ &+ \int_\Omega \left|z_t(t)\right|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \left|z_t(t)\right|^2 d\Gamma = 0 \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z_t(t)\right) ds &= -h(0)\left|\nabla_T z(t)\right|^2 - \int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z(t)\right) ds \\ &\quad + \frac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z(t)\right) ds\right) \end{aligned}$$

Et

$$\int_0^t h_t(t-s)\left(\nabla_T z(s), \nabla_T z(t)\right) ds \le \tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T z(s)\right|^2 ds + \tfrac{\xi^2}{2}\left|\nabla_T z(t)\right|^2$$

Donc :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{d}{dt}\left\{\tfrac{1}{2}\left|z_t(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla z(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla_T z(t)\right|^2\right\}\\
&\leq-\int_{\Omega}\left|z_t(t)\right|^2dx-\int_{\Gamma_1}\left|z_t(t)\right|^2d\Gamma+\tfrac{1}{2}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds+\tfrac{\xi^2}{2}\left|\nabla_T z(t)\right|^2\\
&+\tfrac{d}{dt}\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s),\nabla_T z(t)\right)ds\right).
\end{aligned}
$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$
\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T z(s),\nabla_T z(t)\right)ds\leq\eta\left|\nabla_T z(t)\right|^2+\frac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds
$$

En intégrant de 0 à t et en remarquant que :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t ds\int_0^s h(s-r)\left|\nabla_T z(r)\right|^2dr &= \int_0^t dr\int_r^t h(s-r)\left|\nabla_T z(r)\right|^2ds\\
&\leq \left\|h\right\|_{L^1(\mathbb{R}^+)}\int_0^t\left|\nabla_T z(r)\right|^2dr
\end{aligned}
$$

On obtient :

$$
\begin{aligned}
&\tfrac{1}{2}\left|z_t(t)\right|^2+\tfrac{1}{2}\left|\nabla z(t)\right|^2+\left(\tfrac{1}{2}-\eta\right)\left|\nabla_T z(t)\right|^2\\
&\leq-\int_0^t\int_{\Omega}\left|z_t(s)\right|^2dxds-\int_0^t\int_{\Gamma_1}\left|z_t(s)\right|^2d\Gamma ds+\tfrac{1}{2}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds+\tfrac{\xi^2}{2}\int_0^t\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds\\
&+\tfrac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\int_0^t\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds.\\
&\leq\left[\tfrac{1}{2}\left\|h\right\|^2_{L^1(0,\infty)}+\tfrac{\xi^2}{2}+\tfrac{1}{4\eta}\left\|h\right\|_{L^1(0,\infty)}\left\|h\right\|_{L^\infty(0,\infty)}\right]\int_0^t\left|\nabla_T z(s)\right|^2ds.
\end{aligned}
$$

En appliquant le lemme de **Gronwall,** on trouve :

$$
\left|z_t(t)\right|^2+\left|\nabla z(t)\right|^2+\left|\nabla_T z(t)\right|^2=0
$$

Donc :

$$
\left|z_t(t)\right|^2=\left|\nabla z(t)\right|^2=\left|\nabla_T z(t)\right|^2=0\Longrightarrow z=u_1-u_2=0\Longrightarrow u_1=u_2
$$

Existence de la solution faible :

Soit $\{u^0, u^1\} \in V \times L^2(\Omega)$. Comme

$$D(-\Delta) = \left\{ u \in V \cap H^2(\Omega), \ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \right\}$$

est dense dans V et $\times \ H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, il existe une suite $\{u_\eta^0\} \subset D(-\Delta)$ et $\{u_\eta^1\} \subset H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ telle que :

$$\begin{cases} u_\eta^0 \longrightarrow u^0 \text{ fortement dans } V \\ u_\eta^1 \longrightarrow u^1 \text{ fortement dans } L^2(\Omega) \end{cases} \tag{3.2.14}$$

et on a :

$$\frac{\partial u_\eta^0}{\partial \nu} - \Delta_T u_\eta^0 + u_\eta^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 \text{ et } \Delta_T u_\eta^1 \in L^2(\Gamma_1).$$

alors, pour tout $\eta \in \mathbb{N}$, il existe

$$u_\eta : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

une solution régulière du problème (3.1.1) satisfait :

$$\begin{cases} u_{tt,\eta} + u_{t,\eta} & = & \Delta u_\eta & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u_\eta & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u_\eta - \Delta_T u_\eta & = & -u_{t,\eta} - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta_T u_\eta(s) ds, & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u_\eta(x,0) & = & u_\eta^0(x) & \text{dans } \Omega \\ u_{t,\eta}(x,0) & = & u_\eta^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.2.15}$$

En utilisant la première estimation, on obtient :

$$|u_{t,\eta}(t)|^2 + |\nabla u_\eta(t)|^2 + |\nabla_T u_\eta(t)|^2 + \int\limits_0^t \int\limits_\Omega |u_{t,\eta}(s)|^2 dxds + \int\limits_0^t \int\limits_{\Gamma_1} |u_{t,\eta}(s)|^2 d\Gamma ds \leq L \tag{3.2.16}$$

et posons $z_{\theta,\eta} = u_\theta - u_\eta$, $\theta, \eta \in \mathbb{N}$, où u_θ et u_η deux solutions régulières de (3.2.15) corespondant à $u_\eta^0(x)$, $u_\eta^1(x)$, $u_\theta^0(x)$ et $u_\theta^1(x)$, nous suivons les mêmes étapes utilisées dans l'unicité de la solution forte de (3.2.3) et prenons en compte de (3.2.14) , on déduit qu'il existe

$$u : \Omega \times (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$$

tel que :

$$\begin{cases} u_\eta \longrightarrow u \text{ fortement dans } C^0([0,T]; V) \\ u_{t,\eta} \longrightarrow u_t \text{ fortement dans } C^0([0,T]; L^2(\Omega)) \end{cases}$$

Par (3.2.16) on a aussi :

$$\begin{cases} u_{t,\eta} \longrightarrow u_t \text{ faiblement dans } L^2\left([0,T]\,;L^2\left(\Omega\right)\right) \\ u_{t,\eta} \longrightarrow u_t \text{ faiblement dans } L^2\left([0,T]\,;L^2\left(\Gamma_1\right)\right) \end{cases}$$

Par passage à la limite dans la première équation de (3.1.1) , on trouve :

$$u_{tt} + u_t - \Delta u = 0 \ \text{ dans } L^2\left([0,T]\,;V'\right) \tag{3.2.17}$$

Caractérisation des conditions au bord :

On considère le problème elliptique suivant :

$$\begin{cases} -\Delta p & = & u_t & \text{dans } \Omega \\ p & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \frac{\partial p}{\partial \nu} - \Delta_T p & = & \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u = u(t) - \exp\left(-t\right)\int_0^t \exp\left(s\right)u(s)ds & \text{sur } \Gamma_1 \\ & & +\exp\left(-t\right)\int_0^t k\left(s\right)\exp\left(r\right)dr & \end{cases}$$

avec

$$k(r) = \int_0^r h(r-s)\Delta_T u(s)ds$$

et u est solution faible de (3.1.1) , tenons compte de la régularité de la frontière Γ de Ω, on a :

$$p \in L^2\left(0,\infty;H\right) \tag{3.2.18}$$

avec

$$H = \left\{u \in V,\ \Delta u \in L^2\left(\Omega\right)\right\}$$

Maintenant, nous allons montrer que :

$$u = -p - p_t \ \text{ dans } H^{-1}_{loc}\left(0,\infty;H\right)$$

On a :

$$-\Delta u = -u_{tt} - u_t \quad \text{ dans } L^2_{loc}\left(0,\infty;V'\right)$$

Donc :

$$-\Delta u = \Delta p_t + \Delta p \quad \text{dans } D\left(0,\infty;V'\right)$$

Soit $\theta \in D\left(0,\infty\right)$, on a :

$$\begin{aligned} \langle -\Delta u, \theta \rangle &= \langle \Delta p_t, \theta \rangle + \langle \Delta p, \theta \rangle \\ &= -\langle \Delta p, \theta_t \rangle + \langle \Delta p, \theta \rangle \qquad \text{pour tout } \theta \in D\left(0,\infty\right) \end{aligned}$$

En intégrant de 0 à T, on obtient

$$\int_0^T (-\Delta)\, u(t)\, \theta(t)\, dt = \int_0^T (-\Delta)\, p(t)\, \theta_t(t)\, dt - \int_0^T (-\Delta)\, p(t)\, \theta(t)\, dt \quad \text{dans } V'.$$

Par conséquent :

$$\int_0^T u(t)\, \theta(t)\, dt = \int_0^T p(t)\, \theta_t(t)\, dt - \int_0^T p(t)\, \theta(t)\, dt \ dansV.$$

D'où :

$$u = -p - p_t \quad \text{dans } H_{loc}^{-1}(0, \infty; H).$$

On considère les opérateurs traces suivants (cf. [3]et [23]) :

$$\begin{array}{rccc} \widehat{\delta_0}: & H_{loc}^{-1}(0,\infty;V) & \longrightarrow & H_{loc}^{-1}\left(0,\infty;L^2(\Gamma_1)\right) \\ \widehat{\delta_v}: & H_{loc}^{-1}(0,\infty;H) & \longrightarrow & H_{loc}^{-1}\left(0,\infty;H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)\right) \\ & u & \longmapsto & \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u \end{array}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \widehat{\delta_v}(u) &= -\widehat{\delta_v}(p_t) - \widehat{\delta_v}(p) \\ &= -\left[\widehat{\delta_v}(p)\right]_t - \widehat{\delta_v}(p) \end{aligned}$$

On a :

$$\left[\widehat{\delta_v}(p)\right]_t = u_t(t) + \exp(-t)\int_0^t \exp(s)\, u(s) ds - u(t) - \exp(-t)\int_0^t k(s)\exp(r)\, dr + k(t)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \left[\widehat{\delta_v}(p)\right]_t + \widehat{\delta_v}(p) &= u(t) - \exp(-t)\int_0^t \exp(s)\, u(s)ds + \exp(-t)\int_0^t k(s)\exp(r)\, dr + u_t(t) \\ &\quad + \exp(-t)\int_0^t \exp(s)\, u(s)ds - u(t) - \exp(-t)\int_0^t k(s)\exp(r)\, dr + k(t) \\ &= u_t(t) + \int_0^r h(r-s)\Delta_T u(s) ds \end{aligned}$$

Donc :

$$\widehat{\delta_v}(u) + u_t + \int_0^t h(t-s)\Delta_T u(s) ds = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Ce qui achève la démonstration. ■

3.3 La stabilisation exponentielle de l'énergie par un feedback frontière avec mémoire et par des dissipations interne et frontière par le feedback naturel

Dans cette section, nous étudierons le cas $a > 0$, $b > 0$ et nous posons $a = b = 1$.
par la suite, nous présentons et nous démontrons nos résultats.
Premièrement nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes :
$\exists\ \xi, \xi', \xi'' > 0$ tels que :

$$\begin{array}{llcccl} (h1) & -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \\ (h2) & 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0. \\ (h3) & 1 - \int\limits_0^\infty h(s)ds & = & l > 0. & & \end{array} \tag{3.3.1}$$

Conséquence :
$h'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.
$\exists\ \alpha > 0$ telle que :

$$(h4) \qquad e^{\alpha t} h(t) \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad \text{pour } 0 < \alpha < \xi$$

On multiplie la première équation du système (3.1.1) et on intègre formellement :

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega u_{tt} u_t dx - \int\limits_\Omega u_t \Delta u dx &= -\int\limits_\Omega |u_t|^2 dx \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx + \int\limits_\Omega \nabla u_t \nabla u dx - \int\limits_{\Gamma_1} u_t \tfrac{\partial u}{\partial \nu} d\Gamma \\ &= \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\ &\quad + \int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int\limits_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma &= -\int\limits_\Omega |u_t| dx - \int\limits_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma \\ &\quad - \int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int\limits_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Ensuite, on définit l'énergie associée au problème (3.1.1) par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma. \tag{3.3.4}$$

Théorème 3.3.1 *Si les hypothèses $(h1)-(h4)$ sont satisfaites, alors l'énergie de (3.1.1) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives C et β telles que:*

$$E(t) \leq C\exp(-\beta t), \; \forall t \geq 0. \tag{3.3.5}$$

pour toute solution faible u de (3.1.1) .

On fait la démonstration pour les solutions fortes, la densité de $D(-\Delta)\times(H^1(\Omega)\cap H^2(\Omega))$ dans $V\times L^2(\Omega)$ permet d'étendre le résultat aux solutions faibles (cf. existence des solutions faibles).

Preuve. La différentiation de $E(t)$ par rapport au temps nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} (u_t(\Delta u - u_t) dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma. \\
&= -\int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} u_t \left(\Delta_T u - u_t - \int_0^t h(t-s)\Delta_T u(s) ds \right) d\Gamma \\
&= -\int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma} |u_t|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

On définit une fonction de Lyaponouv par :

$$(h\Box\nabla_T u)(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma$$

En dérivant $(h\Box\nabla_T u)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(h\Box\nabla_T u)(t) &= (h'\Box\nabla_T u)(t) + \frac{d}{dt}\left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \right\} - h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\quad -2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) \nabla_T u_t(t) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(h\square\nabla_T u\right)(t) &= \frac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) - \int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\
&+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma\right\} - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma.
\end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h\square\nabla_T u\right)(t)\right] \\
&= -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t)
\end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h\square\nabla_T u\right)(t)\right] \\
&= \int_\Omega u_t u_{tt} dx + \frac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) - \int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\
&+ \left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t\nabla_T u d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
&+ \int_0^t h(s)ds\int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t\nabla_T u d\Gamma + \int_\Omega \nabla u_t\nabla u dx \\
&= -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_\Omega \nabla u_t\nabla u dx + \int_\Omega \nabla u\nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t\nabla_T u d\Gamma + \\
&\int_{\Gamma_1} u_t\left(\Delta_T u - u_t - \int_0^t h(t-s)\Delta_T u(s)ds\right)d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
&- \int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma - \int_0^t h(s)ds\int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\nabla_T u(s)d\Gamma \\
&+ \int_0^t h(s)ds\int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\nabla_T u(s)d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) \\
&= -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1}|u_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t).
\end{aligned}$$

IL s'ensuit qu'en définissant une énergie modifiée par :

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \frac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \frac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t)$$

On trouve:

$$e'(t) \;=\; -\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 \, d\Gamma - \tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t)$$

Remarquons par l'hypothèse $(h1)$ on a :

$$e'(t) \leq 0, \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus, de la définition de $e(t)$, $\left(h\Box\nabla_T u\right)(t)$ et de l'hypothèse $(h2)$, nous avons la remarque suivante :

Remarque 3.3.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$ *, alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$E(t) \leq Me(t), \quad \textit{pour tout } t \geq 0$$

En effet :

$$\begin{aligned} e(t) \;&\geq\; \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + l\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma\right] \\ &\geq\; l\; E(t), \quad \text{puisque } 0 < l < 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$E(t) \leq l^{-1}e(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctions suivantes :

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} u_t u dx$$

et

$$\Psi(t) = \int_{\Gamma_1}\int_0^t H_\alpha(t-s)\left|\nabla_T u\,(s)\right|^2 dsd\Gamma$$

où

$$H_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)\int_t^\infty h(s)\exp(\alpha s)ds$$

et α est défini comme dans $(h4)$.

En utilisant la première équation du problème (3.1.1) , on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d\varphi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \int_{\Omega} u_{tt} u dx \\
&= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} u_t u dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \varphi(t) - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Nous avons l'éstimation suivate :

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \nabla_T u(t) \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma &\leq \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \left[\int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds \right]^2 d\Gamma \\
&\leq \tfrac{1}{2} \int_0^t h(s) ds \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_T u(s)|^2 ds d\Gamma \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\leq \tfrac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{(1-l)}{2\lambda} \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_T u(s)|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

avec $\lambda > 1$.

Par conséquence,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\varphi(t)}{dt} &\leq \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \varphi(t) - \int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \tfrac{\lambda}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\quad + \tfrac{(1-l)}{2\lambda} \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_T u(s)|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

En dérivant la fonction $\Psi(t)$, on trouve:

$$\tfrac{d\Psi(t)}{dt} = \left(\int_0^\infty h(s) e^{\alpha s} ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_T u(s)|^2 ds d\Gamma - \alpha \Psi(t).$$

Maintenant, on introduit une nouvelle fonction :

$$V(t) = e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\Psi(t)$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$.

Proposition 3.3.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes positives* C_1 *et* β *telles que :*

$$V(t) \leq C_1 \exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

Par différentiation de $V(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
V'(t) &= e'(t) + \varepsilon\varphi'(t) + \eta\Psi'(t) \\
&\leq -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma - \tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) \\
&\quad +\varepsilon\int_\Omega |u_t|^2 dx - \varepsilon\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \varepsilon\varphi(t) - \varepsilon\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \tfrac{\varepsilon\lambda}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\quad +\tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s} ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\quad -\eta\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma - \eta\alpha\Psi(t).
\end{aligned}$$

$u = 0,\ sur\Gamma_0$, en appliquant l'inégalité de Poincaré sur Γ_1

$$\int_{\Gamma_1} |u|^2 d\Gamma \leq c_p \int_\Omega |\nabla u|^2 dx$$

Puis l'inégalité de Young, on trouve :

$$\varepsilon\left|\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma\right| \leq \varepsilon\gamma c_p \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4\gamma c_p}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma, \text{ avec } \gamma > 0.$$

Donc :

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -\left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s} ds\right)\right]\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma - \left(1 - \tfrac{\varepsilon}{4\gamma c_p}\right)\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma \\
&\quad -\varepsilon(1-\gamma c_p)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \varepsilon\varphi(t) - (1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2 dx - \eta\alpha\Psi(t) \\
&\quad -\left[\eta - \tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\right]\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

$0 < \alpha < \xi$, on peut tendre α vers zéro.

On a :

$$\frac{1}{1-l} > 1 \text{ et } \lim_{\alpha \longrightarrow 0^+}\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s} ds = \int_0^\infty h(s) ds < 1$$

Donc :

$$\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds < \frac{1}{1-l}, \text{ pour } \alpha \text{ assez petit.}$$

alors, si on choisit η tel que :

$$\frac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda} < \eta < \frac{\varepsilon}{2\lambda}\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)^{-1}$$

et

$$\gamma = \frac{1}{2c_p}$$

On trouve pour ε assez petit :

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - (1-\tfrac{\varepsilon}{2})\int_{\Gamma_1} |u_t|^2\,d\Gamma - \tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
&\quad \left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma - \varepsilon\varphi(t) - \eta\alpha\Psi(t) \\
&\quad - \left[\eta - \tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\right]\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\
&\leq -(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right)\right]\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\
&\quad -\eta\alpha\Psi(t) - \varepsilon\varphi(t) - \left[\eta - \tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\right]\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \qquad **)
\end{aligned}$$

Par conséquent, les coefficients de

$$\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma \text{ et } \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma$$

sont négatifs (car $1-l<1$).

Ajoutons et soustrayons le terme $\delta(h\Box\nabla_T u)(t)$ avec $\delta>0$ au membre de droite de l'inégalité (**), ensuite nous utilisons l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
(h\Box\nabla_T u)(t) &= \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\
&\leq 2\int_0^t h(s)ds\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\
&\leq 2(1-l)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma + 2\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma
\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2\delta(1-l)\right]\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\ &\quad -\tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \eta\alpha\Psi(t) - \varepsilon\varphi(t) - \delta\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) \end{aligned}$$

Finalement, on peut choisir δ suffisamment petit tel que les coefficients de

$$\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,ds d\Gamma \text{ et } \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma$$

soient toujours négatifs.

On a :

$$\begin{aligned} V(0) &= e(0)+\varepsilon\varphi(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(0)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(0)|^2\,dx + \frac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(0) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_T u(0)|^2\,d\Gamma + \varepsilon\int_\Omega u_t(0)u(0)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^1(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u^0(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \left|\nabla_T u^0(x)\right|^2 d\Gamma + \varepsilon\int_\Omega u^1(x)u^0(x)dx \\ &= E(0)+\varepsilon\int_\Omega u^1(x)u^0(x)dx = C > 0, \qquad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

Par conséquence, il existe une constante positive $\beta > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\tfrac{\beta}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \tfrac{\beta}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - \tfrac{\beta}{2}\left(1-\int_0^t h(s)\ ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\ &\quad -\tfrac{\beta}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) - \beta\varepsilon\varphi(t) - \beta\eta\Psi(t) \\ &\leq -\beta(e(t)+\varepsilon\varphi(t)+\eta\Psi(t)) \\ &\leq -\beta V(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t)$$

avec

$$\beta \leq \min\left\{\ 2(1-\varepsilon), \alpha, 2\delta, \varepsilon, 2\left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2} - \eta\left(\int_0^\infty h(s)e^{\alpha s}ds\right) - 2\delta(1-l)\right]\ \right\}$$

On a :

$$V(t) \geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}(1-\varepsilon c_p)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{l}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma \geq Me(t),$$

pour ε assez petit et $M = \min(1-\varepsilon, 1-\varepsilon c_p, \frac{l}{2})$.

Donc :

$$E(t) \leq Me(t) \leq V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t), \qquad t \geq 0.$$

D'où :

$$E(t) \leq C\exp(-\beta t), \qquad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec $C = V(0)$.

La preuve est ainsi achevée. ■

3.4 La décroissance exponentielle de l'énergie par un feedback frontière avec mémoire et par une dissipation frontière par le feedback naturel

Dans la section précédente, nous avons montré que les solutions décroissent exponentiellement vers zéro si le noyau $h(t)$ était aussi à décroissance exponentielle.

On a supposé que :

$$\begin{array}{rcccl} -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\ & & e^{\alpha t} h(t) & \in & L^1(0,+\infty), \text{ pour } \alpha > 0. \end{array} \tag{3.4.1}$$

Dans cette section, nous considérons le cas $\underline{a = 0}$ et $b > 0$ dans (3.1.1) et nous posons $b = 1$, c'est à dire que nous montrons que la dissipation produite par le feedback frontière avec mémoire et par le feedback naturel est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie.

Pour cela, nous utiliserons une nouvelle fonction $W(t)$ et des estimations différentes.

On considère le nouveau système :

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u = -u_t - \int_0^t h(t-s)\,\Delta_T u(s)\,ds & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) = u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(0) = u^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{3.4.2}$$

On suppose que h est une fonction décroissante et de classe $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qui satisfait :

$$\begin{array}{ll}
h1) & \displaystyle\int_0^{+\infty} h(t)\,dt \leq 1 \\
h2) & -\xi' h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t), \quad \text{et} \quad 0 \leq h''(t) \leq \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\
h3) & e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0,+\infty), \ \text{pour } \alpha > 0, \ t \geq 0. \\
h4) & h'(t) + \delta h(t) \geq 0 \text{ et } e^{\alpha t}\left(h'(t) + \delta h(t)\right) \in L^1(0,+\infty), \ \text{pour } \alpha > 0, \ \delta > 0
\end{array} \tag{3.4.3}$$

Nous notons par l, $\bar{l}$, l_α, $\overline{l_\alpha}$, et $\overline{h}$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
l(t) &= h'(t) + \delta h(t) \\
\bar{l} &= \int_0^{+\infty} l(t)\,dt \\
\overline{l_\alpha} &= \int_0^{+\infty} l_\alpha(s)\,ds = \int_0^{+\infty} l(s)\exp(\alpha s)\,ds \\
\overline{h} &= \int_0^{+\infty} h(t)\,dt \\
\overline{h_\alpha} &= \int_0^{+\infty} h(s)\exp(\alpha s)ds
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

L'énergie associée au système (3.4.2) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \tag{3.4.5}$$

Dans toute la suite la densité de $D(-\Delta) \times (H^1(\Omega) \cap H^2(\Omega))$ dans $V \times L^2(\Omega)$ permet d'étendre les résultats obtenus ci-dessous par les solutions fortes aux solutions faibles (cf. existence des solutions faibles).

Par différentiation de E(t), on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_\Omega (u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t)dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&= \int_\Omega u_t \Delta u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma. \\
&= -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} u_t \left(\Delta_T u - u_t - \int_0^t h(t-s)\Delta_T u(s) ds \right) d\Gamma \\
&= -\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.4.6}$$

Posons:

$$(h\Box\nabla_T u)(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) |\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)|^2 ds d\Gamma \tag{3.4.7}$$

En dérivant $(h\Box\nabla_T u)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla_T u)(t) &= \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) - \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t(t) \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \right\} - \frac{1}{2}h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.4.8}$$

On peut facilement voir que :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) \right] \\
&= -\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t)
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

IL s'ensuit qu'en définissant l'énergie modifiée par :

$$e(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1 - \int_0^t h(s)ds\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) \tag{3.4.10}$$

On trouve :

$$e'(t) = -\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) \tag{3.4.11}$$

Remarquons par l'hypothèse $(h1)$ on a :

$$e'(t) \leq 0, \text{pour tout } t \geq 0. \tag{3.4.12}$$

De plus, de la définition de $e(t)$, $(h\square\nabla_T u)(t)$ et de l'hypothèse $(h2)$, on a la remarque suivante :

Remarque 3.4.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$E(t) \leq Me(t), \quad \textit{pour tout } t \geq 0$$

En effet :

$$\begin{aligned} e(t) &\geq \frac{1}{2}\left[\int_\Omega |u_t|^2 dx + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + l\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma\right] \\ &\geq l\ E(t), \quad \text{puisque } 0 < l < 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$E(t) \leq l^{-1}e(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctions suivantes :

$$\varphi(t) = \int_\Omega u_t u dx \tag{3.4.13}$$

et

$$\Psi(t) = \int_\Omega \int_0^t L_\alpha(t-s)\left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma = (l_\alpha \square \nabla_T u)(t) \tag{3.4.14}$$

où

$$L_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)\int_t^\infty l(s)\exp(\alpha s) ds \tag{3.4.15}$$

et α est défini comme dans $(h3)$.

De plus, on considère une nouvelle fonction $V(t)$ telle que :

$$\begin{aligned} V(t) &= e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\Psi(t) - \eta\left(\int_0^t l_\alpha(s) ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\ &\quad +2\eta\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \end{aligned} \tag{3.4.16}$$

pour certaines constantes η et ε qui seront déterminées plus tard.

Proposition 3.4.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_1$ *et* ξ_2 *telles que :*

$$\frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \xi_1 E(t) \leq V(t) \leq \xi_2 (E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla_T u)(t)) \tag{3.4.17}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\varphi(t) &= \int_\Omega u\,\mathrm{u}_t dx \\
&\leq \tfrac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \tfrac{c_p}{2}\int_\Omega |\nabla u(t)|^2 dx
\end{aligned}$$

où c_p est la constante de Poincaré.

On peut estimer le terme $\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s)\,dsd\Gamma$ par :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s)\,dsd\Gamma \leq \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\left[\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t) + \nabla_T u(t)\right] dsd\Gamma \\
&\leq \left(\int_0^t l_\alpha(s)\,ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\left[\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right] dsd\Gamma \\
&\leq \left(\int_0^t l_\alpha(s)\,ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \zeta_1 \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&+\tfrac{1}{4\zeta_1}\left(\int_0^t l_\alpha(s)\,ds\right)\left[\int_{\Gamma_1}\int_0^t l_\alpha(t-s)\left[\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right]^2 dsd\Gamma\right] \\
&\leq \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi(t)
\end{aligned}$$

Or on a :

$$\left(\int_0^t l_\alpha(s)\,ds\right) \leq \frac{1}{\alpha}\int_0^{+\infty} l(s)\exp(\alpha s)ds = \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}$$

En effet :

$$
\begin{aligned}
\int_0^t L_\alpha(s)ds &= \int_0^t \exp(-\alpha s)\int_t^\infty l(r)\exp(\alpha r)drds \\
&= \left[\tfrac{-1}{\alpha}\exp\left(-\alpha s\right)\int_s^\infty l(r)\exp(\alpha r)dr\right]_0^t + \tfrac{1}{\alpha}\int_0^t \exp\left(-\alpha s\right)\left(\int_s^\infty l(r)\exp(\alpha r)dr\right)' ds \\
&= \tfrac{-1}{\alpha}\exp\left(-\alpha t\right)\int_t^\infty l(r)\exp(\alpha r)dr + \tfrac{1}{\alpha}\int_0^\infty l(r)\exp(\alpha r)dr - \tfrac{1}{\alpha}\int_0^t l(r)dr \\
&\le \tfrac{1}{\alpha}\int_0^\infty l(r)\exp(\alpha r)dr = \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}, \qquad (car \quad l>0)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
V\left(t\right) &\ge e(t) - \tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \tfrac{\varepsilon c_p}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \eta\Psi\left(t\right) - \tfrac{\eta}{\alpha}\overline{l_\alpha}\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \tfrac{\eta}{2\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi\left(t\right) \\
&\quad -2\eta\left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
V(t) &\ge \left(\tfrac{1-\varepsilon}{2}\right)\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \left(\tfrac{1-\varepsilon c_p}{2}\right)\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \eta\left(1 - \tfrac{1}{2\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi\left(t\right) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) \\
&\quad + \left[\tfrac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - 2\eta\zeta_1 - 3\eta\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right]\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma
\end{aligned}
$$

On choisit :

$$
\begin{aligned}
\zeta_1 &= \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \\
\eta &< \tfrac{\alpha\left(1-\overline{h}\right)}{20\overline{l_\alpha}} \\
\varepsilon &< \min\left\{1, \tfrac{1}{c_p}\right\}
\end{aligned}
$$

Donc, il existe une constante positive $\xi_1 > 0$ telle que :

$$
V(t) \quad \ge \quad \xi_1 E(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t)
$$

avec

$$
\xi_1 \le \min\left\{\left(1-\varepsilon\right), \left(1-\varepsilon c_p\right), \left(1-\overline{h}\right) - 10\eta\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right\}
$$

Pour l'autre inégalité on a :

$$
\varphi\left(t\right) \le \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \frac{c_p}{2}\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx
$$

$$
\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha\left(t-s\right)\nabla_T u\left(s\right)dsd\Gamma \quad \le \quad \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi\left(t\right)
$$

alors :

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \left(\tfrac{1+\varepsilon}{2}\right) \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \left(\tfrac{1+\varepsilon c_p}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \eta \left(1 + \tfrac{1}{2\zeta_1} \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \Psi\left(t\right) + \tfrac{1}{2} \left(h \Box \nabla_T u\right)(t) \\ & + \left[\tfrac{1}{2} + 2\eta\zeta_1 + 2\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \end{aligned}$$

On choisit $\zeta_1 = \frac{1}{2}$, alors :

$$\begin{aligned} V(t) \leq & \left(\tfrac{1+\varepsilon}{2}\right) \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \left(\tfrac{1+\varepsilon c_p}{2}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \eta \left(1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \Psi\left(t\right) + \tfrac{1}{2} \left(h \Box \nabla_T u\right)(t) \\ & + \left[\tfrac{1}{2} + \eta + 2\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \end{aligned}$$

Donc il existe une constante positive $\xi_2 > 0$ telle que :

$$V(t) \leq \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) + \left(h \Box \nabla_T u\right)(t)\right)$$

avec

$$\xi_1 \leq \min \left\{ (1+\varepsilon), (1+\varepsilon c_p), 1 + 2\eta + 4\eta \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \right\}$$

D'où :

$$\xi_1 E(t) + \frac{1}{2} \left(h \Box \nabla_T u\right)(t) \leq V(t) \leq \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) + \left(h \Box \nabla_T u\right)(t)\right)$$

■

On introduit une nouvelle fonction W(t) telle que :

$$W(t) = V(t) + \lambda\Gamma(t) + \mu\Theta(t)$$

$$\Gamma(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t H_\alpha\left(t-s\right) |\nabla_T u(s)|^2 \, ds d\Gamma$$

avec

$$H_\alpha(t) = \exp(-\alpha t) \int_t^\infty h(s) \exp(\alpha s) ds$$

et

$$\Theta(t) = \int_{\Omega} \int_t^{+\infty} \exp\left(-\alpha\left(t-s\right)\right) |u(s)|^2 \, ds dx$$

Proposition 3.4.2 *Soit* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2\left(\Omega\right)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2\left(\Gamma_1\right)$, *alors il existe des constantes positives* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_3$ *et* ξ_4 *telles que :*

$$\xi_3 E(t) + \left(h \Box \nabla_T u\right)(t) \leq W(t) \leq \xi_4 \left[E(t) + \Psi(t) + \left(h \Box \nabla_T u\right)(t) + \Gamma\left(t\right) + \Theta\left(t\right)\right] \tag{3.4.18}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Preuve. On a d'après la proposition 3.4.1 :

$$V(t)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t)\leq\xi_2\left(E(t)+\Psi(t)+(h\Box\nabla_T u)(t)\right)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t)$$

Il existe une constante positive $\xi_4>0$ telle que :

$$W(t)\leq\xi_4\left[E(t)+\Psi(t)+(h\Box\nabla_T u)(t)+\Gamma(t)+\Theta(t)\right]$$

Pour l'autre inégalité on a :

$$\begin{array}{rcl} V(t)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t) & \geq & \xi_1 E(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t)+\lambda\Gamma(t)+\mu\Theta(t) \\ & \geq & \xi_1 E(t)+\frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) \end{array}$$

Il existe une constante positive $\xi_3>0$ telle que :

$$W(t)\geq\xi_3 E(t)+(h\Box\nabla_T u)(t)$$

D'où :

$$\xi_3 E(t)+(h\Box\nabla_T u)(t)\quad\leq\quad W(t)\quad\leq\quad\xi_4\left[E(t)+\Psi(t)+(h\Box\nabla_T u)(t)+\Gamma(t)+\Theta(t)\right]$$

■

Théorème 3.4.1 *Supposons que les hypothèses $(h1)$ et $(h2)$ sont satisfaites et que les données initiales $(u^0,u^1)\in\left[V\cap H^2(\Omega)\right]^2$ avec $\partial_\nu u^0-\Delta_T u^0+u^1=0$ sur Γ_1 et $\Delta_T u^1_{\Gamma_1}\in L^2(\Gamma_1)$ vérifient l'inégalité $E(0)>0$.*
Supposons de plus que les quantitées $\overline{l_\alpha}$ et $\overline{h_\alpha}$ sont suffisamment petites, alors l'énergie classique $E(t)$ du problème (3.4.2) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives $C>0,\ \beta>0$ telles que :

$$E(t)\leq C\exp(-\beta t),\qquad t\geq 0 \tag{3.4.19}$$

pour toute solution faible u de (3.4.2) .

Preuve. On a :

$$\begin{array}{rcl} e'(t) & = & -\int\limits_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma-\frac{1}{2}h(t)\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+\frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) \\ \varphi'(t) & = & \int\limits_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx-\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-\int\limits_{\Gamma_1}u_t u\,d\Gamma+\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)\,ds\,d\Gamma \end{array}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma'(t) &= -\alpha\Gamma(t) - \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \overline{h_\alpha}\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
\Theta'(t) &= -\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \alpha\Theta(t) \\
V'(t) &= -\int_{\Gamma_1}\left|u_t\right|^2 d\Gamma - \tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) + \varepsilon\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx \\
&\quad -\varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx - \varepsilon\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \eta\left(l\Box\nabla_T u\right)(t) - \alpha\eta\Psi(t) \\
&\quad +\varepsilon\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma + 2\eta l_\alpha(o)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \eta l_\alpha(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
&\quad -2\eta\alpha\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
W'(t) &\leq -\int_{\Gamma_1}\left|u_t\right|^2 d\Gamma - \left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o)\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \varepsilon\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx \\
&\quad +\tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) + \varepsilon\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - \alpha\eta\Psi(t) \\
&\quad -\varepsilon\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \eta\left(l\Box\nabla_T u\right)(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \mu\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \alpha\mu\Theta(t) \\
&\quad -2\eta\alpha\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
&\quad -\lambda\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \lambda\overline{h_\alpha}\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
W\prime(t) &\leq -\left(\mu-\varepsilon\right)\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx \\
&\quad -\int_{\Gamma_1}\left|u_t\right|^2 d\Gamma - \alpha\eta\Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) - \lambda\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
&\quad \varepsilon\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - \varepsilon\int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma - \eta\left(l\Box\nabla_T u\right)(t) \\
&\quad -2\eta\alpha\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

On a :

$$\bar{l} = \int_0^\infty l(s)ds \leq \int_0^\infty l(s)\exp(\alpha s)ds = \overline{l_\alpha}.$$

On a les estimations suivantes :

$$\varepsilon \int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma \leq \varepsilon\nu c_p \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{\varepsilon}{4\nu c_p}\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \leq \zeta_2 \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{\overline{h}}{4\zeta_2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2 dsd\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\,\nabla_T u(s)\,dsd\Gamma \leq \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi(t)$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l(t-s)\,\nabla_T u(s)\,dsd\Gamma \leq \left(\zeta_3 + \int_0^t l(s)ds\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{\bar{l}}{4\zeta_3}\,(l\Box\nabla_T u)(t)$$

pour

$$\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0, \zeta_3 > 0 \text{ et } \nu > 0$$

qui seront choisies plus loin.

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq\ & -\left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha} - \varepsilon\zeta_2 - 2\eta\alpha\zeta_1 - 2\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\zeta_3 - 2\eta\bar{l}\right)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
& -(\mu-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2 dx - (\varepsilon - \varepsilon\nu c_p)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx - (1 - \tfrac{\varepsilon}{4\nu c_p})\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 d\Gamma \\
& -\alpha\eta\left(1 - \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) - \eta\left(1 - \tfrac{\bar{l}}{2\zeta_3}\right)(l\Box\nabla_T u)(t) \\
& -\left(\lambda - \tfrac{\varepsilon\bar{h}}{4\zeta_2}\right)\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2 dsd\Gamma
\end{aligned}$$

On choisit :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \\
\zeta_2 &= \tfrac{1}{2} \\
\zeta_3 &= \bar{l} \\
\nu &= \tfrac{1}{2c_p}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'(t) &\leq -\left(\tfrac{\varepsilon}{2}-\lambda\overline{h_\alpha}-10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-(\mu-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx-\tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx \\
&\quad -(1-\tfrac{\varepsilon}{2})\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma-\alpha\lambda\Gamma(t)-\alpha\mu\Theta(t)-\tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t)-\tfrac{\eta}{2}\left(l\square\nabla_T u\right)(t) \\
&\quad -\left(\lambda-\tfrac{\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \qquad (*)
\end{aligned}$$

Ajoutons et soustrayons le terme $\gamma\left(h\square\nabla_T u\right)(t)$ au membre droit de (*), ensuite on utilise l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}
\left(h\square\nabla_T u\right)(t) &= \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(t)-\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
&\leq 2\int_0^t h(s)ds\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+2\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
&\leq 2\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+2\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
W'(t) &\leq -\left[\tfrac{\varepsilon}{2}-\lambda\overline{h_\alpha}-10\eta\overline{l_\alpha}-2\gamma\right]\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-(\mu-\varepsilon)\int_\Omega|u_t|^2\,dx \\
&\quad -\tfrac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-(1-\tfrac{\varepsilon}{2})\int_{\Gamma_1}|u_t|^2\,d\Gamma-\alpha\lambda\Gamma(t)-\alpha\mu\Theta(t) \\
&\quad -\tfrac{\eta}{2}\left(l\square\nabla_T u\right)(t)-\tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t)-\gamma\left(h\square\nabla_T u\right)(t) \\
&\quad -\left[\lambda-\tfrac{\varepsilon\overline{h}}{2}-2\gamma\right]\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Pour

$$\begin{array}{ccccc}
0 & < & \varepsilon & < & 1 \\
\frac{\varepsilon\overline{h}}{2} & < & \lambda & < & \frac{\varepsilon}{2\overline{h_\alpha}} \\
0 & < & \eta & < & \frac{\varepsilon-2\lambda\overline{h_\alpha}}{20\overline{l_\alpha}} \\
 & & \mu & = & 1
\end{array}$$

et nous choisissons γ suffisamment petite telle que les coefficients entre crochet soient positifs. Par conséquent, il existe une constante $C_1>0$ telle que :

$$\begin{aligned}
W'(t) &\leq -\tfrac{C_1}{2}\int_\Omega|u_t|^2\,dx-\tfrac{C_1}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-\tfrac{C_1}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx-\alpha C_1\lambda\Gamma(t)-C_1\alpha\mu\Theta(t) \\
&\quad -\tfrac{C_1\alpha\eta}{2}\Psi(t)-C_1\gamma\left(h\square\nabla_T u\right)(t) \\
W'(t) &\leq -C_1\left[E(t)+\alpha\lambda\Gamma(t)+\alpha\mu\Theta(t)+\tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t)+\gamma\left(h\square\nabla_T u\right)(t)\right]
\end{aligned}$$

avec

$$C_1 \leq \min\left\{2(1-\varepsilon), 2\left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda\overline{h_\alpha} - 10\eta\overline{l_\alpha} - 2\gamma\right), \varepsilon, \alpha\lambda, \alpha\mu, \frac{\alpha\eta}{2}, \gamma\right\}$$

D'après la proposition 3.4.2 on a :

$$W'(t) \leq \tfrac{-C_1}{\xi_4} W(t) = -\beta W(t)$$

On a :

$$V(t) = e(0) + \varepsilon\varphi(0) = E(0) + \varepsilon \int_\Omega u^1(x)u^0(x)dx = V(0) > 0, \text{ pour un } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Donc :

$$W(0) = V(0) > 0$$

D'où :

$$W(t) \leq W(0)\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 > 0$$

D'après la proposition 3.4.2 , on a :

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3}\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 > 0$$

D'où :

$$E(t) \leq C\exp(-\beta t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec $C = \frac{W(0)}{\xi_3}$

La preuve est ainsi achevée. ■

3.5 La décroissance exponentielle de l'énergie par un feedback frontière avec mémoire

Dans cette sous-section, nous considérons le cas $b = 0$ dans (3.4.2) , c'est à dire, que nous montrons que la dissipation produite par le feedback frontière avec mémoire est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie.

La différence entre ce travail $(a = 0, b = 0)$ et le travail précédent est que les termes :

$$\int_{\Gamma_1} |u_t|^2 \, d\Gamma \text{ et } \int_{\Gamma_1} u_t u \, d\Gamma \tag{3.5.1}$$

n'existent plus. Pour cela, nous utiliserons les mêmes fonctions et les mêmes estimations. On considère le nouveau système :

$$\left\{\begin{array}{lll} u_{tt} & = \Delta u & \text{dans } \Omega\times\mathbb{R}^+ \\ u & = 0 & \text{sur } \Gamma_0\times\mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u-\Delta_T u & = -\int\limits_0^t h\left(t-s\right)\Delta_T u\left(s\right)ds & \text{sur } \Gamma_1\times\mathbb{R}^+ \\ u(0) & = u^0 & \text{dans } \Omega \\ u_t(0) & = u^1 & \text{dans } \Omega \end{array}\right. \tag{3.5.2}$$

On suppose que h une fonction décroissante et de classe $C^2\left(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^+\right)$ qui satisfait :

$$\begin{array}{ll} h1) & \int\limits_0^{+\infty} h\left(t\right)dt\leq 1 \\ h2) & -\xi' h(t)\leq h'\left(t\right)\leq -\xi h(t), \quad \text{et} \quad 0\leq h''(t)\leq \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t\geq 0 \\ h3) & e^{\alpha t}h\left(t\right)\in L^1\left(0,+\infty\right), \ \text{pour } \alpha>0,\ t\geq 0. \\ h4) & h'\left(t\right)+\delta h\left(t\right)\geq 0 \text{ et } e^{\alpha t}\left(h'\left(t\right)+\delta h\left(t\right)\right)\in L^1\left(0,+\infty\right), \ \text{pour } \alpha>0,\ \delta>0 \end{array} \tag{3.5.3}$$

Nous notons par l, $\bar{l}$, l_α, $\overline{l_\alpha}$, et $\overline{h}$ les expressions suivantes :

$$\begin{array}{lll} l(t) & = & h'\left(t\right)+\delta h\left(t\right) \\ \bar{l} & = & \int\limits_0^{+\infty} l\left(t\right)dt \\ \overline{l_\alpha} & = & \int\limits_0^{+\infty} l_\alpha\left(s\right)ds=\int\limits_0^{+\infty} l(s)\exp\left(\alpha s\right)ds \\ \overline{h} & = & \int\limits_0^{+\infty} h\left(t\right)dt \\ \overline{h_\alpha} & = & \int\limits_0^{+\infty} h\left(s\right)\exp(\alpha s)ds \end{array} \tag{3.5.4}$$

L'énergie associée à ce système est donnée par :

$$E\left(t\right)=\frac{1}{2}\int\limits_\Omega\left(\left|u_t\right|^2+\left|\nabla u\right|^2\right)dx+\frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \tag{3.5.5}$$

La densité de $D\left(-\Delta\right)\times\left(H^1\left(\Omega\right)\cap H^2\left(\Omega\right)\right)$ dans $V\times L^2\left(\Omega\right)$ permet d'étendre les résultats au dessous aux solutions faibles (cf. existence des solutions faibles).

Par différentiation, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_{\Omega} (u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} u_t \Delta u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma. \\
&= -\int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1} u_t \left(\Delta_T u - \int_0^t h(t-s) \Delta_T u(s) ds \right) d\Gamma \\
&= + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int_0^t h(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned} \tag{3.5.6}$$

On pose :

$$(h \Box \nabla_T u)(t) = \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \left| \nabla_T u(t) - \nabla_T u(s) \right|^2 ds d\Gamma$$

En dérivant $(h \Box \nabla_T u)(t)$, on obtient :

$$\frac{d}{dt}(h \Box \nabla_T u)(t) = -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} \left| \nabla_T u \right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left\{ \left(\int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} \left| \nabla_T u \right|^2 d\Gamma \right\} \tag{3.5.7}$$

On peut facilement voir que :

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h \Box \nabla_T u)(t) \right] \\
&= -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' \Box \nabla_T u)(t)
\end{aligned} \tag{3.5.8}$$

IL s'ensuit qu'en définissant l'énergie modifiée par :

$$e(t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h \Box \nabla_T u)(t) \tag{3.5.9}$$

On trouve :

$$e'(t) = -\frac{1}{2} h(t) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{2} (h' \Box \nabla_T u)(t) \tag{3.5.10}$$

Remarquons par l'hypothèse $(h1)$ on a :

$$e'(t) \leq 0, \text{pour tout } t \geq 0.$$

De plus, de la définition de $e(t)$, $(h\Box\nabla_T u)(t)$ et de l'hypothèse $(h2)$, on a la proposition suivante :

Remarque 3.5.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$E(t) \leq Me(t), \quad \textit{pour tout } t \geq 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles suivantes :

$$\varphi(t) = \int_\Omega u_t u dx \tag{3.5.11}$$

et

$$\Psi(t) = \int_\Omega \int_0^t L_\alpha(t-s) \left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma = (l_\alpha \Box \nabla_T u)(t) \tag{3.5.12}$$

où

$$L_\alpha(t) = \exp(-\alpha t) \int_t^\infty l(s) \exp(\alpha s) ds \tag{3.5.13}$$

et α est défini comme dans $(h2)$.
De plus, on considère une nouvelle fonctionnelle $V(t)$:

$$\begin{aligned} V(t) &= e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\Psi(t) - \eta\left(\int_0^t l_\alpha(s) ds\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\ &\quad + 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s) \nabla_T u(s) ds d\Gamma \end{aligned} \tag{3.5.14}$$

pour certaines constantes η et ε qui seront déterminées plus tard.

Proposition 3.5.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes positives* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_1$ *et* ξ_2 *telles que :*

$$\frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \xi_1 E(t) \leq V(t) \leq \xi_2 (E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla_T u)(t)) \tag{3.5.15}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Proposition 3.5.2 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes positives* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_3$ *et* ξ_4 *telles que :*

$$\xi_3 [E(t) + (h\Box\nabla_T u)(t)] \leq W(t) \leq \xi_4 [E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)] \tag{3.5.16}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$.

Théorème 3.5.1 *Supposons que les hypothèses* $(h1)$ *et* $(h2)$ *sont satisfaites et que les données initiales* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 + u^1 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$ *vérifient l'inégalité* $E(0) > 0$.
Supposons de plus que les quantitées $\overline{l_\alpha}$ *et* $\overline{h_\alpha}$ *sont suffisamment petites, alors l'énergie classique* $E(t)$ *du problème (3.5.2) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives* $C > 0$, $\beta > 0$ *telles que :*

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

pour toute solution faible de (3.5.2) .

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
e'(t) &= -\tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) \\
\varphi'(t) &= \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma - \int_{\Gamma_1} u_t u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
\Gamma'(t) &= -\alpha\Gamma(t) - \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \overline{h_\alpha}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \\
\Theta'(t) &= \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \alpha\Theta(t) \\
V'(t) &= -\tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) + \varepsilon\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \varepsilon\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
&\quad -\eta\left(l\Box\nabla_T u\right)(t) - \alpha\eta\Psi(t) - 2\eta\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - \varepsilon\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \\
&\quad +\varepsilon\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma + 2\eta l_\alpha(o)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma - \eta l_\alpha(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma \\
&\quad -2\eta\alpha\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq & -\left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o)\right)\int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon\int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \varepsilon\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx \\
& + \tfrac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) + \varepsilon\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - \alpha\eta\Psi(t) \\
& -\eta\left(l\square\nabla_T u\right)(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \mu\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \alpha\mu\Theta(t) + \lambda\overline{h_\alpha}\int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
& -2\eta\alpha\int_{\Gamma_1} \nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma + \\
& -\lambda\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
\leq & -\left(\mu-\varepsilon\right)\int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon\int_\Omega\left|\nabla u\right|^2 dx \\
& -\alpha\eta\Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) - \lambda\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \\
& \varepsilon\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta\alpha\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
& -\eta\left(l\square\nabla_T u\right)(t) - 2\eta\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s)\, ds d\Gamma = \int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\left[\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t) + \nabla_T u(t)\right] ds d\Gamma \\
&\leq \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi(t)
\end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \leq \zeta_2\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{\overline{h}}{4\zeta_2}\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma$$

$$\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s)\, ds d\Gamma \leq \left(\zeta_3 + \int_0^t l(s) ds\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \tfrac{\bar{l}}{4\zeta_3}\left(l\square\nabla_T u\right)(t)$$

pour

$$\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0 \text{ et } \zeta_3 > 0$$

qui seront choisies plus loin.

$$\begin{aligned}W'(t) &\leq -\left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha} - \varepsilon\zeta_2 - 2\eta\alpha\zeta_1 - 2\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\zeta_3 - 2\eta\bar{l}\right)\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\ &\quad -(\mu-\varepsilon)\int\limits_\Omega |u_t|^2\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega|\nabla u|^2\,dx - \alpha\eta\left(1-\tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) \\ &\quad -\eta\left(1-\tfrac{\bar{l}}{2\zeta_3}\right)(l\Box\nabla_T u)(t) - \left(\lambda - \tfrac{\varepsilon\bar{h}}{4\zeta_2}\right)\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma\end{aligned}$$

On choisit :

$$\begin{aligned}\zeta_1 &= \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\\ \zeta_2 &= \tfrac{1}{2}\\ \zeta_3 &= \bar{l}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}W'(t) &\leq -\left(\tfrac{\varepsilon}{2} - \lambda\overline{h_\alpha} - 10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma - (\mu-\varepsilon)\int\limits_\Omega|u_t|^2\,dx - \varepsilon\int\limits_\Omega|\nabla u|^2\,dx - \alpha\lambda\Gamma(t) \\ &\quad -\alpha\mu\Theta(t) - \tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \tfrac{\eta}{2}(l\Box\nabla_T u)(t) - \left(\lambda - \tfrac{\varepsilon\bar{h}}{2}\right)\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \quad *\end{aligned}$$

Ajoutons et soustrayons le terme $\gamma\,(h\Box\nabla_T u)(t)$ au membre droit de (*), ensuite on utilise l'estimation suivante :

$$\begin{aligned}(h\Box\nabla_T u)(t) &= \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\ &\leq 2\int\limits_0^t h(s)ds\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + 2\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\ &\leq 2\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + 2\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}W'(t) &\leq -\left[\tfrac{\varepsilon}{2} - \lambda\overline{h_\alpha} - 10\eta\overline{l_\alpha} - 2\gamma\right]\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma - (\mu-\varepsilon)\int\limits_\Omega|u_t|^2\,dx \\ &\quad -\varepsilon\int\limits_\Omega|\nabla u|^2\,dx - \alpha\lambda\Gamma(t) - \alpha\mu\Theta(t) \\ &\quad -\tfrac{\eta}{2}(l\Box\nabla_T u)(t) - \tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \mu\,(h\Box\nabla_T u)(t) \\ &\quad -\left[\lambda - \tfrac{\varepsilon\bar{h}}{2} - 2\gamma\right]\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma\end{aligned}$$

Pour

$$\begin{array}{rcccl} 0 & < & \varepsilon & < & 1 \\ \frac{\varepsilon \overline{h}}{2} & < & \lambda & < & \frac{\varepsilon}{2\overline{h_\alpha}} \\ 0 & < & \eta & < & \frac{\varepsilon - 2\lambda \overline{h_\alpha}}{20\overline{l_\alpha}} \\ & & \mu & = & 1 \end{array}$$

et nous choisissons γ suffisamment petite telle que les coefficients entre crochet soient positifs. Par conséquent, il existe une constante $C_1 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} W'(t) &\leq -\tfrac{C_1}{2} \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \tfrac{C_1}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma - \tfrac{C_1}{2} \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \alpha C_1 \lambda \Gamma(t) - C_1 \alpha \mu \Theta(t) \\ &\quad - \tfrac{C_1 \alpha \eta}{2} \Psi(t) - C_1 \gamma \left(h \Box \nabla_T u \right)(t) \\ W'(t) &\leq -C_1 \left[E(t) + \alpha \lambda \Gamma(t) + \alpha \mu \Theta(t) + \tfrac{\alpha \eta}{2} \Psi(t) + \gamma \left(h \Box \nabla_T u \right)(t) \right] \end{aligned}$$

avec

$$C_1 \leq \min \left\{ 2(1-\varepsilon), 2\left(\frac{\varepsilon}{2} - \lambda \overline{h_\alpha} - 10\eta \overline{l_\alpha} - 2\gamma \right), \varepsilon, \alpha\lambda, \alpha\mu, \frac{\alpha\eta}{2}, \gamma \right\}$$

D'après la proposition 3.5.2 on a :

$$W'(t) \leq \tfrac{-C_1}{\xi_4} W(t) = -\beta W(t)$$

On a :

$$V(t) = e(0) + \varepsilon \varphi(0) = E(0) + \varepsilon \int\limits_{\Omega} u^1(x) u^0(x) dx = V(0) > 0, \quad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit..}$$

Donc :

$$W(0) = V(0) > 0$$

$$W(t) \leq W(0) \exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 > 0$$

$$\xi_3 E(t) + \left(h \Box \nabla_T u \right)(t) \leq W(t) \leq W(0) \exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 > 0$$

D'après la proposition 3.5.2 , on a :

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3} \exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 > 0$$

D'où :

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec $C = \frac{W(0)}{\xi_3} > 0$. ■

4

Stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec condition de Ventcel par un feedback intérieur avec mémoire

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes avec condition au bord de type Ventcel par un feedback intérieur avec mémoire et une dissipation interne par le feedback naturel.

On montrera que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro, pourvu que le noyau h dans le terme mémoire soit décroissant en exponentielle.

Nous considérons le problème de l'équation des ondes avec condition de Ventcel avec un feedback intérieur avec mémoire et une diissipation interne par le feedback naturel.

$$
\begin{cases}
u_{tt} - \Delta u & = & -au_t - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds, & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\
u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\
\partial_\nu u - \Delta_T u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\
u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega \\
u_t(x,0) & = & u_1(x) & \text{dans } \Omega
\end{cases}
\tag{4.1.1}
$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1; \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing. \tag{4.1.2}$$

et $a \geq 0$.

Supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction décroissante de classe $C^2\left(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+\right)$ satisfait aux hypothèses suivantes : $\exists\ \xi, \xi', \xi'' > 0$ tels que :

$$\begin{array}{rcccll} -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), & \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), & \text{pour tout } t \geq 0 \end{array} \tag{4.1.3}$$

Cette partie comporte deux sections.
Dans la première section, on étudie l'existence, l'unicité et la régularité de la solution u du problème (4.1.1) .
Dans la deuxième section, on introduit une fonction de type Lyapounov. En effet, nous modifierons l'énergie associée au système (4.1.1) en ajoutant un terme convenablement choisi, ce qui nous permet d'éliminer certains termes indésirables, et de montrer que le problème (4.1.1) est exponentiellement stable par un feedback intérieur avec mémoire et par une dissipation interne par le feedback naturel c'est à dire que nous étudierons le cas $a > 0$ et nous posons $a = 1$.

Dans la troisième section, on traite le cas $a = 0$ et on montre que le problème de l'équation des ondes avec condition Ventcel homogène est exponentiellement stable par un feedback intérieur avec mémoire.

4.2 Existence et unicité de la solution

On considère l'espace

$$V = \left\{v \in H^1(\Omega), v_{\Gamma_0} = 0 \text{ et } v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\right\}$$

muni de la norme suivante :

$$\|v\|_V^2 = \left(\int_\Omega |\nabla v|^2 \, dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 \, d\Gamma\right)$$

Nous posons $a = 1$.

On suppose que les hypothèses (4.1.3) sont vérifiées, et en procédant comme dans (cf.[3]), nous montrons le théorème suivant :

Théorème 4.2.1
1) Supposons que l'hypothèse (4.1.3) est satisfaite et que $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec*

$$\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0, \quad sur\ \Gamma_1\ \ et\ \Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1).$$

Alors le problème (4.1.1) admet une solution (forte) unique

$$u : \ \mathbb{R}^+ \times \Omega \ \longrightarrow \mathbb{R}$$

telle que :

$$(u, u_t, u_{tt}) \in L^\infty\left(0, \infty; V \times V \times L^2(\Omega)\right)$$

2) Soit $(u^0, u^1) \in V \times L^2(\Omega)$, *alors le problème (4.1.1) admet une solution (faible) unique*

$$u : \ \mathbb{R}^+ \times \Omega \ \longrightarrow \mathbb{R}$$

vérifiant

$$u \in C\left(\mathbb{R}^+, V\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega)\right)$$

Preuve. La démonstration est similaire à celle de la section 2 :Existance et unicité de la solution du chapitre 3 (cf.[3]). ∎

4.3 La dissipation de l'énergie par un feedback intérieur avec mémoire et par une dissipation interne par le feedback naturel

Dans cette section, nous étudierons le cas $a > 0$ et nous posons $a = 1$.
par la suite, nous présentons et nous démontrons nos résultats.
Premièrement nous supposons que le noyau $h(t)$ est une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qui satisfait aux hypothèses suivantes:
$\exists\ \xi,\ \xi',\ \xi'' > 0$ tels que :

$$\begin{array}{llcccl}
(h1) & -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \\
(h2) & 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\
(h3) & 1 - \int_0^\infty h(s)ds & = & l > 0 & &
\end{array} \tag{4.3.1}$$

Conséquence :

$h'(t) \leq 0$ pour tout $t \in \mathbb{R}^+$.

$\exists\ \alpha > 0$ telle que :

$$(h4) \qquad e^{\alpha t} h(t) \in L^1\left(\mathbb{R}^+\right), \quad \text{pour} \quad 0 < \alpha < \xi.$$

Ensuite, on définit l'énergie associée au problème (4.1.1) par :

$$E\left(t\right) \;=\; \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega}\left(\left|u_t\right|^2 + \left|\nabla u\right|^2\right)dx + \frac{1}{2}\int\limits_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma. \tag{4.3.2}$$

Théorème 4.3.1 *Si les hypothèses $(h1) - (h4)$ sont satisfaites, alors l'énergie de (4.1.1) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives C et β telles que:*

$$E(t) \;\leq\; C\exp(-\beta t),\ \forall t \geq 0. \tag{4.3.3}$$

pour toute solution forte du problème (4.1.1) .

Preuve. La différentiation de $E(t)$ par rapport au temps nous donne :

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int\limits_{\Omega}(u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t)dx + \int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&= \int\limits_{\Omega}(u_t(\Delta u - u_t - \int\limits_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds)dx + \int\limits_{\Omega}\nabla u \nabla u_t dx + \int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma. \\
&= -\int\limits_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx - \int\limits_{\Omega}\nabla u_t \nabla u dx + \int\limits_{\Omega}\nabla u \nabla u_t dx + \int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_1}u_t\left(\Delta_T u\right)d\Gamma \\
&= -\int\limits_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx + \int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u_t \int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma + \int\limits_{\Omega}\nabla u_t \int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx
\end{aligned}$$

Posons:

$$\left(h\Box\nabla u\right)(t) = \int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dsdx$$

$$\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) = \int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma$$

En dérivant $\left(h\Box\nabla_T u\right)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) &= \frac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t) - \int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\
&\quad -\frac{1}{2}h(t)\int\limits_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int\limits_0^t h(s)ds\right)\int\limits_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma\right\}
\end{aligned}$$

En dérivant $(h\Box\nabla_T u)(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) &= \tfrac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \int_\Omega \nabla u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ &\quad -\tfrac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \tfrac{1}{2}\tfrac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right\}\end{aligned}$$

On peut facilement voir que:

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \tfrac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2 d\Gamma + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\right] \\ &+\tfrac{d}{dt}\left[\tfrac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \tfrac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)\right] \\ &= -\int_\Omega |u_t|^2 dx - \tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2 d\Gamma - \tfrac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) + \tfrac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t))\end{aligned}$$

IL s'ensuit qu'en définissant une énergie modifiée par :

$$\begin{aligned}e(t) &= \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2 d\Gamma + \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\right)\end{aligned}$$

On trouve :

$$e'(t) = -\int_\Omega |u_t|^2 dx + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_\Omega |\nabla u|^2 d\Gamma$$

Remarquons par l'hypothèse $(h1)$ on a :

$$e'(t) \le 0, \text{pour tout } t \ge 0.$$

De plus, de la définition de $e(t)$, $(h\Box\nabla_T u)(t)$ et,$(h\Box\nabla u)(t)$ de l'hypothèse $(h2)$, on a la remarque suivante

Remarque 4.3.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$E(t) \le Me(t), \qquad \textit{pour tout } t \ge 0$$

En effet :

$$\begin{aligned} e(t) &\geq \frac{1}{2}\left[\int_{\Omega} |u_t|^2\,dx + \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + l\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma\right] \\ &\geq l\ E(t), \quad \text{puisque } 0 < l < 1. \end{aligned}$$

D'où :

$$E(t) \leq l^{-1}e(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctions suivantes :

$$\varphi(t) = \int_{\Omega} u_t u dx$$

et

$$\Psi(t) = \int_{\Omega}\int_0^t H_\alpha(t-s)\,|\nabla u\,(s)|^2\,dsdx + \int_{\Gamma_1}\int_0^t H_\alpha(t-s)\,|\nabla_T u\,(s)|^2\,dsd\Gamma$$

où

$$H_\alpha(t) = \exp(-\alpha t)\int_t^\infty h(s)\exp(\alpha s)ds$$

et α est défini comme dans $(h3)$.

En utilisant l'équation (1) de notre problème, on obtient :

$$\begin{aligned} \tfrac{d\varphi(t)}{dt} &= \int_{\Omega} |u_t|^2\,dx + \int_{\Omega} u_{tt}udx \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2\,dx - \int_{\Omega} u_t udx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u u d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} |u_t|^2\,dx - \varphi\,(t) - \int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u(t)\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\ &\quad + \int_{\Omega} \nabla u(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx - \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\,d\Gamma. \end{aligned}$$

Nous avons les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla u(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx &\leq \tfrac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,d\Gamma + \tfrac{1}{2}\int_{\Omega}\left[\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right]^2 dx \\ &\leq \tfrac{1}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \tfrac{1}{2}\int_0^t h(s)ds\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \\ &\leq \tfrac{\lambda}{2}\int_{\Omega} |\nabla u|^2\,dx + \tfrac{(1-l)}{2\lambda}\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Gamma_1} \nabla_T u(t) \int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma &\leq \tfrac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_1} \left[\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds \right]^2 d\Gamma \\
&\leq \tfrac{1}{2} \int\limits_0^t h(s) ds \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
&\quad + \tfrac{1}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma \\
&\leq \tfrac{\lambda}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{(1-l)}{2\lambda} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Par conséquence,

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\varphi(t)}{dt} &\leq \int\limits_\Omega |u_t|^2 dx - \tfrac{\lambda}{2} \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx - \varphi(t) + \tfrac{(1-l)}{2\lambda} \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma \\
&\quad - \tfrac{\lambda}{2} \int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{(1-l)}{\lambda 2} \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla u(s)\right|^2 ds dx
\end{aligned}$$

En dérivant la fonctionn $\Psi(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\Psi(t)}{dt} &= \left(\int\limits_0^\infty h(s) e^{\alpha s} ds \right) \left[\int\limits_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \int\limits_\Omega |\nabla u|^2 dx \right] - \alpha \Psi(t). \\
&\quad - \int\limits_\Omega \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla u(s)\right|^2 ds dx - \int\limits_{\Gamma_1} \int\limits_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma
\end{aligned}$$

Maintenant, on introduit une nouvelle fonction :

$$V(t) = e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\Psi(t)$$

avec $0 < \varepsilon < 1$ et $\eta > 0$

Proposition 4.3.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes positives* C_1 *et* β *telles que :*

$$V(t) \leq C_1 \exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

Par différentiation de $V(t)$, on trouve :

$$\begin{aligned}
V'(t) &= e'(t)+\varepsilon\varphi'(t)+\eta\Psi'(t) \\
&\leq -\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+\tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t)+\tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t) \\
&\quad+\varepsilon\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\tfrac{\varepsilon\lambda}{2}\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx-\varepsilon\varphi(t)-\tfrac{\varepsilon\lambda}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-\tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,d\Gamma \\
&\quad+\tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma+\tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
&\quad-\eta\alpha\Psi(t)+\eta\left(\int_0^{\infty}h(s)e^{\alpha s}ds\right)\left[\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx\right] \\
&\quad-\eta\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx-\eta\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma
\end{aligned}$$

On pose

$$\overline{h_\alpha}=\int_0^{\infty}h(s)e^{\alpha s}ds \text{ et } \overline{h}=\int_0^{\infty}h(s)ds$$

Donc :

$$\begin{aligned}
V'(t) &\leq -\left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2}-\eta\overline{h_\alpha}\right]\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma-\left[\tfrac{\varepsilon\lambda}{2}-\eta\overline{h_\alpha}\right]\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \\
&\quad-(1-\varepsilon)\int_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\varepsilon\varphi(t)-\eta\alpha\Psi(t). \\
&\quad-\left[\eta-\tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\right]\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\
&\quad-\left[\eta-\tfrac{\varepsilon(1-l)}{2\lambda}\right]\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \qquad (**)
\end{aligned}$$

Si on choisit α très petit tel que :

$$\int_0^{\infty}h(s)e^{\alpha s}ds\leq\frac{1}{1-l}$$

alors, on peut prendre η tel que :

$$\tfrac{\varepsilon(1-l)}{\lambda 2} \quad < \quad \eta \quad < \quad \tfrac{\varepsilon}{2\lambda}\left(\int_0^{\infty}h(s)e^{\alpha s}ds\right)^{-1}$$

Par conséquent, les coefficients de

$$\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma, \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx, \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla_T u(s)|^2 \, dsd\Gamma \text{ et } \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla u(s)|^2 \, dsdx$$

sont négatifs pour un ε assez petit.

Ajoutons et soustrayons les termes $\delta(h\Box\nabla_T u)(t)$ et $\theta(h\Box\nabla u)(t)$ $(\delta, \theta > 0)$ au membre de droite de l'inégalité (**), ensuite nous utilisons les estimations suivantes:

$$\begin{aligned}
(h\Box\nabla_T u)(t) &= \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)|^2 \, dsd\Gamma \\
&\leq 2 \int_0^t h(s)ds \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla_T u(s)|^2 \, dsd\Gamma \\
&\leq 2(1-l) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + 2 \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla_T u(s)|^2 \, dsd\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(h\Box\nabla u)(t) &= \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 \, dsdx \\
&\leq 2 \int_0^t h(s)ds \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla u(s)|^2 \, dsdx \\
&\leq 2(1-l) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + 2 \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla u(s)|^2 \, dsdx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V'(t) \leq & -\left[\tfrac{\lambda\varepsilon}{2} - \eta\overline{h_\alpha} - 2\delta(1-l)\right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma - \left[\tfrac{\lambda\varepsilon}{2} - \eta\overline{h_\alpha} - 2\theta(1-l)\right] \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx \\
& -(1-\varepsilon) \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \varepsilon\varphi(t) - \eta\alpha\Psi(t) - \delta(h\Box\nabla_T u)(t) \\
& -\theta(h\Box\nabla u)(t) - \left[\eta - \tfrac{\varepsilon(1-l)}{2} - 2\lambda\right] \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla u(s)|^2 \, dsdx \\
& -\left[\eta - \tfrac{\varepsilon(1-l)}{2} - 2\delta\right] \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \, |\nabla_T u(s)|^2 \, dsd\Gamma.
\end{aligned}$$

Finalement, on peut choisir δ et λ suffisamment petites telles que les coefficients entre crochet soient toujours positifs.

Par conséquence, il existe une constante positive $\beta > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} V'(t) &\leq -\frac{\beta}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \frac{\beta}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left[\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx\right] \\ &\quad -\frac{\beta}{2}\left(h\square\nabla_T u\right)(t) - \frac{\beta}{2}\left(h\square\nabla u\right)(t) - \beta\varepsilon\varphi(t) - \beta\eta\Psi(t) \end{aligned}$$

Donc :

$$V'(t) \;\leq\; -\beta(e(t)+\varepsilon\varphi(t)+\eta\Psi(t)) \leq -\beta V(t)$$

On a :

$$\begin{aligned} V(0) &= e(0)+\varepsilon\varphi(0) = \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t(0)|^2\,dx + \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u(0)|^2\,dx + \frac{1}{2}\left(h\square\nabla_T u\right)(0) \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_\Gamma |\nabla_T u(0)|^2\,d\Gamma + \varepsilon\int_\Omega u_t(0)u(0)dx \\ &= \frac{1}{2}\int_\Omega \left|u^1(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Omega \left|\nabla u^0(x)\right|^2 dx + \frac{1}{2}\int_\Gamma \left|\nabla_T u^0(x)\right|^2 d\Gamma + \varepsilon\int_\Omega u^1(x)u^0(x)dx \\ &= E(0)+\varepsilon\int_\Omega u^1(x)u^0(x)dx = C > 0, \qquad \text{pour } \varepsilon \text{ assez petit.} \end{aligned}$$

D'où :

$$V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t)$$

avec

$$\beta \leq \min\left\{2(1-\varepsilon), \eta\alpha, 2\delta, \varepsilon, 2\theta\right\}$$

Donc :

$$V(t) \leq \exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

Donc :

$$V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

On a :

$$V(t) \geq \frac{1}{2}(1-\varepsilon)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{1}{2}(1-\varepsilon c_p)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \frac{l}{2}\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma \geq Me(t),$$

pour ε assez petit et $M = \min(1-\varepsilon, 1-\varepsilon c_p, \frac{l}{2})$.

Donc :

$$E(t) \leq Me(t) \leq V(t) \leq V(0)\exp(-\beta t), \qquad t \geq 0.$$

D'où :

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec :

$$C = V(0)$$

La preuve est ainsi achevée. ■

4.4 La dissipation de l'énergie par un feedback intérieur avec mémoire

Dans la section précédente, nous avons montré que les solutions décroissent exponentiellement vers zéro si le noyau $h(t)$ était aussi à décroissance exponentielle vers zéro.
On a supposé que :

$$\begin{array}{rclll} -\xi' h(t) & \leq & h'(t) & \leq & -\xi h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \\ 0 & \leq & h''(t) & \leq & \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\ & & e^{\alpha t} h(t) & \in & L^1(0, +\infty), \text{ pour } \alpha > 0. \end{array} \tag{4.4.1}$$

Dans cette section, nous considérons le cas $\underline{a = 0}$, c'est à dire que nous montrerons que la dissipation produite par le feedback intérieur est suffisante pour la décroissance exponentielle de l'énergie.
Pour cela, nous utiliserons une nouvelle fonction W(t) et des estimations différentes.
On considère le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u & = & -\int\limits_0^t h(t-s)\Delta_T u(s)ds & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(x,0) & = & u_0(x) & \text{dans } \Omega \\ u_t(x,0) & = & u_1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases} \tag{4.4.2}$$

où Ω est un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ de frontière

$$\partial\Omega = \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1; \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \varnothing \tag{4.4.3}$$

On suppose que h est une fonction décroissante et de classe $C^2(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ qui satisfait :

$$\begin{array}{ll}
h1) & \int_0^{+\infty} h(t)\,dt \leq 1 \\
h2) & -\xi' h(t) \leq h'(t) \leq -\xi h(t), \quad \text{et} \quad 0 \leq h''(t) \leq \xi'' h(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0 \\
h3) & e^{\alpha t} h(t) \in L^1(0, +\infty), \text{ pour } \alpha > 0, \ t \geq 0. \\
h4) & h'(t) + \delta h(t) \geq 0 \text{ et } e^{\alpha t}(h'(t) + \delta h(t)) \in L^1(0, +\infty), \text{ pour } \alpha > 0, \ \delta > 0
\end{array} \tag{4.4.4}$$

Nous notons par l, $\bar{l}$, l_α, $\overline{l_\alpha}$, et $\overline{h}$ les expressions suivantes :

$$\begin{aligned}
l(t) &= h'(t) + \delta h(t) \\
\bar{l} &= \int_0^{+\infty} l(t)\,dt \\
\overline{l_\alpha} &= \int_0^{+\infty} l_\alpha(s)\,ds = \int_0^{+\infty} l(s)\exp(\alpha s)\,ds \\
\overline{h} &= \int_0^{+\infty} h(t)\,dt
\end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Ensuite, on définit l'énergie classique associée au problème (4.4.2) par :

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_\Omega \left(|u_t|^2 + |\nabla u|^2\right) dx + \frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2\, d\Gamma. \tag{4.4.6}$$

La différentiation de $E(t)$ par rapport au temps nous donne:

$$\begin{aligned}
\frac{dE}{dt} &= \int_\Omega (u_t u_{tt} + \nabla u \nabla u_t)dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma \\
&= \int_\Omega (u_t(\Delta u - \int_0^t h(t-s)\Delta u(s)ds)dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma. \\
&= -\int_\Omega \nabla u_t \nabla u dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \nabla_T u d\Gamma + \int_{\Gamma_1} u_t\left(\Delta_T u\right) d\Gamma \\
&= +\int_{\Gamma_1} \nabla_T u_t \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma + \int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx
\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

Posons :

$$(h\Box\nabla u)(t) = \int_\Omega \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 ds dx \tag{4.4.8}$$

$$(h\Box\nabla_T u)(t) = \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma \tag{4.4.9}$$

On sait que :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla_T u)(t) &= \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) - \int_{\Gamma_1}\nabla_T u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\ &\quad -\frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma\right\}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(h\Box\nabla u)(t) &= \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \int_{\Omega}\nabla u_t(t)\int_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx \\ &\quad -\frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left(\int_0^t h(s)ds\right)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx\right\}\end{aligned} \tag{4.4.10}$$

On peut facilement voir que :

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx + \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx\right)\right] \\ &+\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t)\right] \\ &= -\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 d\Gamma + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t)\end{aligned} \tag{4.4.11}$$

IL s'ensuit qu'en définissant une énergie modifiée par :

$$\begin{aligned}e(t) &= \frac{1}{2}\int_{\Omega}\left|u_t\right|^2 dx + \frac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) \\ &\quad +\frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(s)ds\right)\left(\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 dx\right)\end{aligned} \tag{4.4.12}$$

On trouve :

$$e'(t) = +\frac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) + \frac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \frac{1}{2}h(t)\int_{\Omega}\left|\nabla u\right|^2 d\Gamma \tag{4.4.13}$$

Remarquons par l'hypothèse $(h1)$ on a :

$$e'(t) \leq 0, \text{pour tout } t \geq 0. \tag{4.4.14}$$

De plus, de la définition de $e(t)$, $(h\Box\nabla_T u)(t), (h\Box\nabla u)(t)$ et de l'hypothèse $(h2)$

Remarque 4.4.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe une constante* $M > 0$ *telle que :*

$$E(t) \le Me(t), \qquad \textit{pour tout } t \ge 0$$

Ensuite, on introduit les deux fonctionnelles suivantes :

$$\varphi(t) = \int_\Omega u_t u dx \tag{4.4.15}$$

et

$$\begin{aligned} \Psi(t) &= \int_\Omega \int_0^t L_\alpha(t-s) \left|\nabla u(t) - \nabla u(s)\right|^2 dsdx + \int_{\Gamma_1} \int_0^t L_\alpha(t-s) \left|\nabla_T u(t) - \nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma \\ &= (L_\alpha \Box \nabla u)(t) + (L_\alpha \Box \nabla_T u)(t) \end{aligned} \tag{4.4.16}$$

où

$$L_\alpha(t) = \exp(-\alpha t) \int_t^\infty l(s) \exp(\alpha s) ds \tag{4.4.17}$$

et α est défini comme dans $(h3)$.
De plus, on considère une nouvelle fonction $V(t)$. :

$$\begin{aligned} V(t) &= e(t) + \varepsilon\varphi(t) + \eta\Psi(t) - \eta\left(\int_0^t l_\alpha(s) ds\right)\left[\int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma + \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx\right] \\ &\quad +2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s) \nabla_T u(s) dsd\Gamma + 2\eta \int_\Omega \nabla u \int_0^t l_\alpha(t-s) \nabla u(s) dsdx, \qquad (*) \end{aligned} \tag{4.4.18}$$

pour certaines constantes η et ε qui seront déterminées plus tard.

Proposition 4.4.1 *Soit* $(u^0, u^1) \in [V \cap H^2(\Omega)]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_1$ *et* ξ_2 *telles que :*

$$\tfrac{1}{2}(h\Box\nabla_T u)(t) + \tfrac{1}{2}(h\Box\nabla u)(t) + \xi_1 E(t) \le V(t) \le \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \tag{4.4.19}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \int_\Omega u\, \mathrm{u}_t dx \\ &\le \tfrac{1}{2} \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \tfrac{c_p}{2} \int_\Omega \left|\nabla u(t)\right|^2 dx \end{aligned}$$

où c_p est la constante de Poincaré.

On peut estimer le terme $\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla_T u(s)\, ds d\Gamma$ par :

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla u(s)\, dsdx &\leq \int_\Omega \nabla u \int_0^t l_\alpha (t-s) \left[\nabla u(s) - \nabla u(t) + \nabla u(t)\right] dsdx \\
&\leq \left(\zeta_1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\zeta_1} \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} (L_\alpha \square \nabla u)(t)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla_T u(s)\, dsd\Gamma &\leq \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha (t-s) \left[\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t) + \nabla_T u(t)\right] dsd\Gamma \\
&\leq \left(\zeta_1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 dx + \frac{1}{4\zeta_1} \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} (L_\alpha \square \nabla_T u)(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla_T u(s)\, dsd\Gamma + 2\eta \int_\Omega \nabla u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla u(s)\, dsdx \\
&\leq 2\eta \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + 2\eta \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + 2\eta \tfrac{1}{4\zeta_1} \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \Psi(t)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(t) &\geq e(t) - \tfrac{\varepsilon}{2} \int_\Omega |u_t|^2 dx - \tfrac{\varepsilon c_p}{2} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \eta \Psi(t) - \tfrac{\eta}{\alpha} \overline{l_\alpha} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma - \tfrac{\eta}{\alpha} \overline{l_\alpha} \int_\Omega |\nabla u|^2 dx \\
&\quad -2\eta \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma - 2\eta \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx - \tfrac{\eta}{2\zeta_1} \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \Psi(t) \\
&\geq \left(\tfrac{1-\varepsilon}{2}\right) \int_\Omega |u_t|^2 dx + \left(\tfrac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - \tfrac{\varepsilon c_p}{2} - 2\eta\zeta_1 - 3\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \eta \left(1 - \tfrac{1}{2\zeta_1} \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \Psi(t) \\
&\quad + \left[\tfrac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - 2\eta\zeta_1 - 3\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right] \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \tfrac{1}{2} (h \square \nabla_T u)(t) + \tfrac{1}{2} (h \square \nabla u)(t)
\end{aligned}$$

On choisit :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \\
\eta &< \tfrac{\alpha\left(1-\overline{h}\right)}{20\overline{l_\alpha}} \\
\varepsilon &< \min\left\{1, \tfrac{1}{c_p}\right\}
\end{aligned}$$

Donc, il existe une constante positive $\xi_1 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned}
\left(\tfrac{1-\varepsilon}{2}\right) &\geq \tfrac{\xi_1}{2} \\
\tfrac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - \tfrac{\varepsilon c_p}{2} - 5\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} &\geq \tfrac{\xi_1}{2} \\
\tfrac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - 5\eta \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} &\geq \tfrac{\xi_1}{2}
\end{aligned}$$

$$\xi_1 \leq \min\left\{(1-\varepsilon), \left(\left(1-\overline{h}\right) - 10\eta\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right), 2\left(\frac{1}{2}\left(1-\overline{h}\right) - \frac{\varepsilon c_p}{2} - 5\eta\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\right\}$$

D'où :

$$V(t) \geq \xi_1 E(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t)$$

Pour l'autre inégalité on a :

$$\varphi(t) \leq \frac{1}{2}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{c_p}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx$$

$$\int_{\Gamma_1}\nabla_T u\int_0^t l_\alpha(t-s)\,\nabla_T u(s)\,ds d\Gamma \leq \left(\zeta_1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + \tfrac{1}{4\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\Psi(t)$$

alors :

$$\begin{aligned} V(t) \leq{}& \left(\tfrac{1+\varepsilon}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\varepsilon c_p}{2} + 2\eta\zeta_1 + 2\eta\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \eta\left(1 + \tfrac{1}{2\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi(t) \\ &+ \left[\tfrac{1}{2} + 2\eta\zeta_1 + 2\eta\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right]\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t) \end{aligned}$$

On choisit $\zeta_1 = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned} V(t) \leq{}& \left(\tfrac{1+\varepsilon}{2}\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{\varepsilon c_p}{2} + \eta\left(1 + 2\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \eta\left(1 + \tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi(t) \\ &+ \left[\tfrac{1}{2} + \eta\left(1 + 2\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) +\right]\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t) \end{aligned}$$

Donc il existe une constante positive $\xi_2 > 0$ telle que :

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{1+\varepsilon}{2}\right) &\leq \tfrac{\xi_2}{2} \\ \tfrac{1}{2} + \tfrac{\varepsilon c_p}{2} + \eta\left(1 + 2\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) &\leq \tfrac{\xi_2}{2} \\ \tfrac{1}{2} + \eta\left(1 + 2\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) &\leq \tfrac{\xi_2}{2} \end{aligned}$$

$$\xi_2 \geq \max\left\{(1+\varepsilon), \frac{1}{2}, \left(1 + 2\eta\left(1 + 2\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\right), 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\varepsilon c_p}{2} + \eta\left(1 + 2\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\right)\right\}$$

Donc :

$$V(t) \leq \xi_2\left(E(t) + \Psi(t) + \left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \left(h\Box\nabla u\right)(t)\right)$$

D'où :

$$\tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \tfrac{1}{2}\left(h\Box\nabla u\right)(t) + \xi_1 E(t) \leq V(t) \leq \xi_2\left(E(t) + \Psi(t)\left(h\Box\nabla_T u\right)(t) + \left(h\Box\nabla u\right)(t)\right)$$

■

On introduit une nouvelle fonction W(t) telle que :

$$W(t) = V(t) + \lambda\Gamma(t) + \mu\Theta(t)$$

$$\Gamma(t) = \int_\Omega \int_0^t H_\alpha(t-s) \left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx + \int_{\Gamma_1} \int_0^t H_\alpha(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma$$

avec

$$H_\alpha(t) = \exp(-\alpha t) \int_t^\infty h(s) \exp(\alpha s) ds$$

et

$$\Theta(t) = \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s) \left(u(s) - u(t)\right) dsdx$$

Proposition 4.4.2 *Soit* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$, *alors il existe des constantes positives* $\varepsilon_0, \eta_0, \xi_3$ *et* ξ_4 *telles que :*

$$\begin{aligned} \xi_3 E(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t) \leq W(t) \leq \; & \xi_4 \left(E(t) + \Psi(t) + \Gamma(t) + \Theta(t)\right) \\ & + \xi_4 \left((h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \end{aligned} \tag{4.4.20}$$

pour tout $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ *et* $0 < \eta < \eta_0$

Preuve. L'inégalité de Young nous donne :

$$\begin{aligned} \Theta(t) &= \int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s) \left(u(s) - u(t)\right) dsdx \\ &\leq c \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \tfrac{c_p \overline{h}}{4c} \int_\Omega \int_0^t h(t-s) \left|\nabla u(s) - \nabla u(t)\right|^2 dsdx \\ &\leq c \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \tfrac{c_p \overline{h}}{4c} (h\Box\nabla u)(t) \end{aligned}$$

où c est une constante positive.

D'après la proposition4.4.1 on a :

$$\begin{aligned} V(t) + \lambda\Gamma(t) + \mu\Theta(t) &\geq \xi_1 E(t) - \mu c \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx - \tfrac{\mu c_p \overline{h}}{4c} (h\Box\nabla u)(t) + \lambda\Gamma(t) \\ &\quad + \tfrac{1}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \tfrac{1}{2} (h\Box\nabla_T u)(t) \\ &\geq \left(\tfrac{\xi_1}{2} - \mu c\right) \int_\Omega \left|u_t\right|^2 dx + \tfrac{\xi_1}{2} \int_\Omega \left|\nabla u\right|^2 dx + \tfrac{\xi_1}{2} \int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\ &\quad + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{\mu c_p \overline{h}}{4c}\right) (h\Box\nabla u)(t) + \tfrac{1}{2} (h\Box\nabla_T u)(t) \end{aligned}$$

Pour

$$c = \mu c_p \overline{h} \text{ et } \mu^2 < \frac{\xi_1}{2c_p\overline{h}}$$

Il existe une constante positive $\xi_3 > 0$ telle que :

$$W(t) \geq \xi_3 E(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)$$

Pour l'autre inégalité on a :

$$\begin{aligned} W(t) \quad &\leq \quad \xi_2 \left(E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) + \tfrac{\mu}{2} \int\limits_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \\ &+ \tfrac{\mu c_p \overline{h}}{2} (h\Box\nabla u)(t) + \lambda\Gamma(t) \end{aligned}$$

Il existe une constante positive ξ_4 telle que :

$$W(t) \leq \xi_4 \left[E(t) + \Psi(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t) + \Gamma(t)\right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \xi_3 \left(E(t) + (h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \quad \leq \quad W(t) \quad \leq \quad & \xi_4 \left(E(t) + \Psi(t) + \Gamma(t)\right) \\ & + \xi_4 \left((h\Box\nabla_T u)(t) + (h\Box\nabla u)(t)\right) \end{aligned}$$

■

Théorème 4.4.1 *Supposons que les hypothèses* $(h1)$ *et* $(h2)$ *sont satisfaites et que les données initiales* $(u^0, u^1) \in \left[V \cap H^2(\Omega)\right]^2$ *avec* $\partial_\nu u^0 - \Delta_T u^0 = 0$ *sur* Γ_1 *et* $\Delta_T u^1_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$ *vérifient l'inégalité* $E(0) > 0$.
Supposons de plus que les quantitées $\overline{l_\alpha}$ *et* $\overline{h_\alpha}$ *sont suffisamment petites, alors l'énergie classique* $E(t)$ *du problème (4.4.2) décroît exponentiellement vers zéro, c'est à dire, il existe deux constantes positives* $C > 0$ *et* $\beta > 0$ *telle que :*

$$E(t) \leq C \exp(-\beta t), \qquad t \geq 0$$

pour toute solution forte u de (4.4.2) .

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
e'(t) &= -\tfrac{1}{2}h(t)\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \tfrac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) \\
\varphi'(t) &= \int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx - \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \\
\Gamma'(t) &= -\alpha\Gamma(t) - \int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma - \int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 ds dx \\
&\quad + \overline{h_\alpha}\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx + \overline{h_\alpha}\int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 \, d\Gamma
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Theta'(t) &= \int_{\Omega} u_{tt}\int_0^t h(t-s)\left(u(s)-u(t)\right) ds dx + \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s)\left(u(s)-u(t)\right) ds dx \\
&\quad - \left(\int_0^t h(s) ds\right)\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx \\
&= -\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right) ds d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Gamma_1}\left(\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s)-\nabla_T u(t)\right) ds\right) d\Gamma \\
&\quad + \int_{\Omega}\left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right) ds\right) dx \\
&\quad - \left(\int_0^t h(s) ds\right)\int_{\Omega} |u_t|^2 \, dx + \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s)\left(u(s)-u(t)\right) ds dx \\
&\quad - \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right) ds dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq\ & -\varepsilon \int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \varepsilon \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} \left|u_t\right|^2 dx + \varepsilon \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
& + \tfrac{1}{2}\left(h'\square\nabla_T u\right)(t) + \tfrac{1}{2}\left(h'\square\nabla u\right)(t) - \alpha\eta\Psi(t) + \varepsilon \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds dx \\
& -\eta\left(l\square\nabla_T u\right)(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \mu \int_{\Omega} \left|u_t\right|^2 dx - 2\eta l_\alpha(0) \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx - \eta\left(l\square\nabla u\right)(t) \\
& -2\eta\alpha \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla u(s) ds dx - 2\eta \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t l(t-s)\nabla u(s) ds dx \\
& -\lambda \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 ds dx \\
& +\lambda\overline{h_\alpha} \int_{\Omega} \left|\nabla u\right|^2 dx + \overline{\lambda h_\alpha} \int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - 2\eta l_\alpha(0) \int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma \\
& -2\eta\alpha \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma - 2\eta \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l(t-s)\nabla_T u(s) ds d\Gamma \\
& +\lambda\overline{h_\alpha} \int_{\Gamma_1} \left|\nabla_T u\right|^2 d\Gamma - \lambda \int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds dx \\
& -\mu \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right) ds d\Gamma \\
& +\mu \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds\right) dx \\
& +\mu \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds\right)\left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right) ds\right) d\Gamma \\
& -\mu\left(\int_0^t h(s) ds\right) \int_{\Omega} \left|u_t\right|^2 dx + \mu \int_{\Omega} u_t \int_0^t h'(t-s)\left(u(s) - u(t)\right) ds dx
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq\ & -\left(\mu\overline{h}-\varepsilon\right)\int\limits_{\Omega}|u_t|^2\,dx-\left(\varepsilon-2\eta l_\alpha(o)-\lambda\overline{h_\alpha}\right)\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\
& -\alpha\lambda\Gamma(t)+\varepsilon\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx-\left(\varepsilon-2\eta l_\alpha(o)-\lambda\overline{h_\alpha}\right)\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \\
& \varepsilon\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma+\mu\int\limits_{\Omega}u_t\int\limits_0^t h'(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)dsdx \\
& -2\eta\alpha\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t l_\alpha(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma-2\eta\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t l(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma \\
& -2\eta\alpha\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^t l_\alpha(t-s)\nabla u(s)dsdx-2\eta\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^t l(t-s)\nabla u(s)dsdx \\
& -\mu\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)dsdx-\alpha\eta\Psi(t) \\
& +\mu\int\limits_{\Omega}\left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)ds\right)\left(\int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s)-\nabla u(t)\right)ds\right)dx \\
& +\mu\int\limits_{\Gamma_1}\left(\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)ds\right)\left(\int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s)-\nabla_T u(t)\right)ds\right)d\Gamma \\
& +\tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla_T u\right)(t)+\tfrac{1}{2}\left(h'\Box\nabla u\right)(t)-\lambda\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma \\
& -\lambda\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx-\eta\left(l\Box\nabla_T u\right)(t)-\eta\left(l\Box\nabla u\right)(t) \\
& -\mu\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s)-\nabla_T u(t)\right)dsd\Gamma
\end{aligned}$$

On a :

$$\overline{l}=\int\limits_0^\infty l(s)ds\leq\int\limits_0^\infty l(s)\exp(\alpha s)ds=\overline{l_\alpha}.$$

On a les estimations suivantes :

$$\int\limits_{\Gamma_1}\nabla_T u\int\limits_0^t h(t-s)\nabla_T u(s)dsd\Gamma\leq\zeta_2\int\limits_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma+\frac{\overline{h}}{4\zeta_2}\int\limits_{\Gamma_1}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma$$

$$\int\limits_{\Omega}\nabla u\int\limits_0^t h(t-s)\nabla u(s)dsdx\leq\zeta_2\int\limits_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx+\frac{\overline{h}}{4\zeta_2}\int\limits_{\Omega}\int\limits_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla_T u(s)\, ds d\Gamma \leq \left(\zeta_1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{1}{4\zeta_1}\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} (l_\alpha \Box \nabla_T u)(t)$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t l(t-s) \nabla_T u(s)\, ds d\Gamma \leq \left(\zeta_3 + \int_0^t l(s) ds\right) \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{\bar{l}}{4\zeta_3} (l \Box \nabla_T u)(t)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \int_0^t l_\alpha (t-s) \nabla u(s)\, ds dx \leq \left(\zeta_1 + \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{4\zeta_1}\frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} (l_\alpha \Box \nabla u)(t)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \int_0^t l(t-s) \nabla u(s)\, ds dx \leq \left(\zeta_3 + \int_0^t l(s) ds\right) \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{l}}{4\zeta_3} (l \Box \nabla u)(t)$$

$$\int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-s)\nabla u(s) ds\right) \left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds\right) dx$$
$$\leq k_1 \bar{h} \int_{\Gamma_1} \int_0^t h(t-s) \left|\nabla_T u(s)\right|^2 ds d\Gamma + \frac{\bar{h}}{4k_1} (h \Box \nabla u)(t)$$

$$\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^t h(t-s)\nabla_T u(s) ds\right) \left(\int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right) ds\right) d\Gamma$$
$$\leq k_1 \bar{h} \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \left|\nabla u(s)\right|^2 ds dx + \frac{\bar{h}}{4k_1} (h \Box \nabla_T u)(t)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla u(s) - \nabla u(t)\right) ds dx \leq \zeta_4 \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \frac{\bar{h}}{4\zeta_4} (h \Box \nabla u)(t)$$

$$\int_{\Gamma_1} \nabla_T u \int_0^t h(t-s)\left(\nabla_T u(s) - \nabla_T u(t)\right) ds d\Gamma \leq \zeta_4 \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u|^2 d\Gamma + \frac{\bar{h}}{4\zeta_4} (h \Box \nabla_T u)(t)$$

pour

$$\zeta_1 > 0, \zeta_2 > 0, \zeta_3 > 0, \zeta_4 > 0 \text{ et } k_1 > 0$$

qui seront choisies plus loin.

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq & -\left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha} - \varepsilon\zeta_2 - 2\eta\alpha\zeta_1 - 2\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\zeta_3 - 2\eta\bar{l} - \mu\zeta_4\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma \\
& -\left(\varepsilon - 2\eta l_\alpha(o) - \lambda\overline{h_\alpha} - \varepsilon\zeta_2 - 2\eta\alpha\zeta_1 - 2\eta\overline{l_\alpha} - 2\eta\zeta_3 - 2\eta\bar{l} - \mu\zeta_4\right)\int_{\Omega}|\nabla u|^2\,dx \\
& -\left(\mu\overline{h} - \varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \alpha\eta\left(1 - \tfrac{1}{2\zeta_1}\tfrac{\overline{l_\alpha}}{\alpha}\right)\Psi(t) - \alpha\lambda\Gamma(t) - \eta\left(1 - \tfrac{\bar{l}}{2\zeta_3}\right)(l\Box\nabla_T u)(t) \\
& - - \eta\left(1 - \tfrac{\bar{l}}{2\zeta_3}\right)(l\Box\nabla u)(t) + \tfrac{\mu\overline{h}}{4}\left(\tfrac{1}{\zeta_4} + \tfrac{1}{k_1}\right)(h\Box\nabla u)(t) + \tfrac{\mu\overline{h}}{4}\left(\tfrac{1}{\zeta_4} + \tfrac{1}{k_1}\right)(h\Box\nabla_T u)(t) \\
& -\left(\lambda - \tfrac{\varepsilon\overline{h}}{4\zeta_2} - \mu k_1\overline{h}\right)\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma + \tfrac{1}{2}(h'\Box\nabla u)(t) + \tfrac{1}{2}(h'\Box\nabla_T u)(t) \\
& -\left(\lambda - \tfrac{\varepsilon\overline{h}}{4\zeta_2} - \mu k_1\overline{h}\right)\int_{\Omega}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx \\
& +\mu\int_\Omega u_t\int_0^t h'(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx.
\end{aligned}$$

En prenant :

$$\begin{aligned}
\zeta_1 &= \frac{\overline{l_\alpha}}{\alpha} \\
\zeta_2 &= \frac{1}{2} \\
\zeta_3 &= \bar{l} \\
\zeta_4 &= \frac{\varepsilon}{6\mu} \\
k_1 &= \frac{\varepsilon}{\mu}
\end{aligned}$$

et en remplaçant $h'(t)$ par $l(t) - \delta h(t)$, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
W'(t) \leq & -\left(\tfrac{\varepsilon}{3} - \lambda\overline{h_\alpha} - 10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma - \left(\tfrac{\varepsilon}{3} - \lambda\overline{h_\alpha} - 10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& -\left(\mu\overline{h} - \varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \tfrac{1}{2}(\eta - 1)(l\Box\nabla_T u)(t) - \tfrac{1}{2}(\eta - 1)(l\Box\nabla u)(t) \\
& -\tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \tfrac{1}{2}\left(\delta - \tfrac{7\overline{h}\mu^2}{2\varepsilon}\right)(h\Box\nabla_T u)(t) - \tfrac{1}{2}\left(\delta - \tfrac{7\overline{h\mu^2}}{2\varepsilon}\right)(h\Box\nabla_T u)(t) \\
& -\alpha\lambda\Gamma(t) - \left(\lambda - \tfrac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\,|\nabla_T u(s)|^2\,dsd\Gamma \\
& +\mu\int_\Omega u_t\int_0^t l(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx - \mu\delta\int_\Omega u_t\int_0^t h(t-s)\,(u(s)-u(t))\,dsdx \\
& -\left(\lambda - \tfrac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\,|\nabla u(s)|^2\,dsdx
\end{aligned}$$

On a pour $t \geq t_0 \geq 0$

$$\int_0^t h(s)ds \geq \int_0^{t_0} h(s)ds$$

et les estimations suivantes :

$$\int_\Omega u_t \int_0^t l(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)dsdx \leq \frac{h_0}{3}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{3c_p\bar{l}}{4h_0}\left(l\square\nabla u\right)(t)$$

$$\int_\Omega u_t \int_0^t h(t-s)\left(u(s)-u(t)\right)dsdx \leq \frac{h_0}{3\delta}\int_\Omega |u_t|^2\,dx + \frac{3\delta c_p\overline{h}}{4h_0}\left(h\square\nabla u\right)(t)$$

$$\begin{aligned}
W'(t) \quad \leq \quad & -\left(\tfrac{\varepsilon}{3}-\lambda\overline{h_\alpha}-10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int_{\Gamma_1}|\nabla_T u|^2\,d\Gamma - \left(\tfrac{\varepsilon}{3}-\lambda\overline{h_\alpha}-10\eta\overline{l_\alpha}\right)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \\
& -\left(\tfrac{\mu h_0}{3}-\varepsilon\right)\int_\Omega |u_t|^2\,dx - \tfrac{1}{2}\left(\eta-1\right)\left(l\square\nabla_T u\right)(t) - \tfrac{1}{2}\left(\eta-1-\tfrac{\mu 3c_p\bar{l}}{2h_0}\right)\left(l\square\nabla u\right)(t) \\
& -\tfrac{\alpha\eta}{2}\Psi(t) - \tfrac{1}{2}\left(\delta-\tfrac{7\overline{h}\mu^2}{2\varepsilon}\right)\left(h\square\nabla_T u\right)(t) - \tfrac{1}{2}\left(\delta-\tfrac{7\overline{h}\mu^2}{2\varepsilon}-\tfrac{3\mu\delta^2c_p\overline{h}}{2h_0}\right)\left(h\square\nabla u\right)(t) \\
& -\alpha\lambda\Gamma(t) - \left(\lambda-\tfrac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_{\Gamma_1}\int_0^t h(t-s)\left|\nabla_T u(s)\right|^2 dsd\Gamma \\
& -\left(\lambda-\tfrac{3\varepsilon\overline{h}}{2}\right)\int_\Omega\int_0^t h(t-s)\left|\nabla u(s)\right|^2 dsdx
\end{aligned}$$

En posant :

$$\begin{aligned}
\mu &= \tfrac{h_0}{\overline{h}}\min\left\{\tfrac{\delta}{21},\tfrac{1}{3c_p\delta},\tfrac{\delta}{63}\right\} \\
\varepsilon &= \tfrac{\mu h_0}{6} \\
\eta &= 2+\tfrac{3\mu c_p\bar{l}}{2h_0} \\
\lambda &= \tfrac{\mu h_0}{36\overline{h_\alpha}}\left(9\overline{h_\alpha^2}+1\right)
\end{aligned}$$

Il apparaît que si on suppose :

$$\overline{h_\alpha} < \frac{1}{3} \text{ et } \overline{l_\alpha} = \frac{\varepsilon}{60\eta}$$

nous aboutissons au résultat suivant :

$$W'(t) \leq -C_1\left(E(t)+\left(h\square\nabla_T u\right)(t)+\left(h\square\nabla u\right)(t)+\Psi(t)+\Gamma(t)\right)$$

telle que est une constante positive.

D'après le membre droit de la proposition 4.4.2 on a :

$$W'(t) \leq -\frac{C_1}{\xi_4}W(t) = -\beta W(t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

on a :

$$W(t) \;=\; V(0) > 0, \text{ pour un } \varepsilon \text{ assez petit.}$$

Donc :

$$W(t) \leq W(0)\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0$$

Le membre gauche de la proposition 4.4.2 nous donne :

$$E(t) \leq \frac{W(0)}{\xi_3}\exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

D'où :

$$E(t) \leq C\exp(-\beta t), \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

avec $C = \frac{W(0)}{\xi_3} > 0$. ■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié la stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec condition au bord de type Ventcel. Nous avons introduit, comme dans [22] des feedbacks avec mémoire.

Un feedback interne, avec mémoire et une dissipation interne par le feedback naturel nous ont permis de montrer la stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec condition de Ventcel homogène.

Un feedback frontière, avec mémoire et des dissipations interne et frontière par le feedback naturel nous ont permis de montrer la stabilité exponentielle de l'équation des ondes avec condition de Ventcel.

La stabilisation de l'équation des ondes avec condition de Ventcel par un feedback intérieur avec mémoire et par des dissipations interne et frontière par le feedback naturel est un problème qui nous semble technique, et qui peut se résoudre en définissant une bonne énergie modifiée.

Bibliographie

[1] **Robert. A. ADAMS.** Sobolev Spaces. Academic press New York San Francisco London (1975).

[2] **C. Bardos et M. Bercovier.** Interview de JL.Lions.

[3] **M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano.** Existence and Uniform Decay Rrates for Viscoelastic Problems Nonlinear Boundary Damping. Differential and Integral Equations, Volume 14, Number 1, January 2001, pp. 85-116.

[4] **T. Cazenave et A. Haraux,** Introduction aux problèmes d'évolution semi linéaire.

[5] **G. Chen**. Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain (J. Math. pures Appl. 58 (1979), 249-274).

[6] **G. Chen**. A note on the boundary stabilization of the wave equation (S.I.A.M. J. control. opt, 19 (1981), 106-113).

[7] **R. Datko**. Extending a theorem of Liapounov to hilbert spaces (J. Math. Anal. Appl. 32, (1970), p. 610-616).

[8] **P. Grisvard.** Controlabilité exacte des solutions de l'équation des ondes en présence de singularités(J. M.Pures Appl. 68 (1989), 215-259).

[9] **A. Heminna.** Stabilisation frontière de problème de Ventcel. ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, Novembre 2000,Vol. 5,591-622.

[10] **V. Komornik et E. Zuazua.** C.K. Acad. Sci. Paris, t 305, Serie I (1987), p. 605-608.

[11] **V. Komornik et E. Zuazua.** A direct method for the boundary stabilization of the wave equation (J. Math. Pures Appl. 58 (1990), 33-54)

[12] **Marie-Thérèse LACROIX-SONRIER.** Distributions, Espace de Sobolev, Applications, ellipses/edition marketing S.A, 1998.

[13] **J. Lagnese.** Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, (J. Diff. Equations, 50,1983, 163-182).

[14] **J. Lagnese.** Boundary stabilization for linear elastodynamic systems (S.I.A.M, J, control, opt,21,(1983), 968-984).

[15] **J. Lagnese.** Note on boundary stabilization of wave equations, (S.I.A.M, J, control, opt,26,(1988), 1250-1256).

[16] **I. Lasiecka and K. Triggiani.** Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0, T; L^2(\Sigma))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions (J. Diff. Equations, 66,1987, 1340-390).

[17] **P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips.** Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of start-shaped obstacle (comm.pure. Appl. Math, vol 16, 1963, p 477-489).

[18] **K. Lemrabet.** Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, thèse, USTHB, Alger (1987).

[19] **J. L. Lions.** Contrôle optimal des systèmes gouivernés par des équations aux dérivées partielles. Dunod, (1968).

[20] **J. L. Lions.** Contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1 : Contrôlabilité exacte. RMA 8. Masson, (1988).

[21] **J. L. Lions.** Exact controlability stabilization, and perturbation for distributed systemes (S.I.A.M. Rev. 30, (1988), 1-68).

[22] **M. Medjden**. Propriétés de régularité pour le problème de Navier-Stokes et estimations d'énergie pour certaines équations aux dérivées partielles, thèse, USTHB, Alger (2004).

[23] **M. Milla Miranda.** Traço para o dual dos espaços de Sobolev, Bol. Soc. Paran. Mat. (2^a série), Vol. 11, N.2 (1990), 131-157.

[24] **C. S. Moraetz.** The decay of solutions of the exterior initial-boundary value problem for the wave equation (comm.pure. Appl. Math, vol 14, 1961, p. 561-568).

[25] **C. S. Moraetz.** Exponential decay of solutions of the wave equation (comm.pure. Appl. Math, vol 19, 1966, p. (539-444).

[26] **A. Pazy**. Semi- goups of linear operators and applications to partial differential equation Springer Verlag, Berlingo, New-York, 1983.

[27] **J. P. Quinn and D. L. Russel.** Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of hyperbolic equations with boundary damping. (Po. Roy. Soc. Edinburgh, Sect. A, 77, 1977, 97-127).

[28] **D. L. Russel**. Controlability ans stabilization for linear partial differantial equations. Recent progress and open questions(S.I.A.M. J. control. opt,21 (1978), 639-739).

[29] **D. L. Russel.** Exact boundary value controlability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in differential games and control theory (Raxin, Liu and Sternberg, Eds, Maercel Dekker Inc, New-York 1974).

[30] **L. W. Taylor and A. B. Balakrishnan.** Mathematical problems and a spacecraft control laboratory experiment used to evaluate control laws for flexible spacecraft NASA/IEEE design challenge publication de UCLA JUIN, (1984).

[31] **A. D. Wentzell** (**Ventcel**) . On boundary conditions for multidimentional diffusion processes. Theor. Probab. Appl.4 (1959), p 164-177.

[32] **C. Wilcox.** The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary (Amer. Math. Soc. Not. Abstract n° 564-20, Vol 6, 1959).

[33] **E. Zuazua.** C. R. A. Sci. Paris, t 307, série I, p. 587_591, (1988).