

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée en vue de l'obtention du Grade de
Doctorat en Mathématiques

Spécialité : **Recherche Opérationnelle**

Par

Benyahia-Tani Nesrine

Thème

AUTOUR DES PARTITIONS D'UN ENTIER

Soutenue publiquement, le 10 Mai 2011, devant le jury composé de :

Mr- A. KHELLADI,	Professeur, à l'USTHB.	Président
Mr- S. BOUROUBI,	Professeur, à l'USTHB.	Directeur de thèse
Mme-I. BOUCHEMAKH,	Professeur, à l'USTHB.	Examineur
Mr-A. BERRACHEDI,	Professeur, à l'USTHB.	Examineur
Mr-K. ENGEL,	Professeur, à l'U. Rostock/ALLEMAGNE.	Examineur
Mr-M. POUZET,	Professeur, à l'U. Lyon / FRANCE.	Examineur
Mr-F. BENCHERIF,	Maître de Conférence/A, à l'USTHB.	Examineur

Remerciements

Ce manuscrit conclut cinq années de travail, je tiens en ces quelques lignes à exprimer ma reconnaissance envers tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenu, soit par leurs gestes soit par leur encouragements.

Je voudrais tout d'abord remercier le Professeur Sadek BOUROUBI, qui est à l'origine de ce travail. C'est un honneur pour moi de faire partie de son équipe et j'admire toujours son savoir ainsi que sa capacité à l'exposer et à le partager. Je lui suis infiniment reconnaissante, non seulement pour la confiance qu'il m'a accordée en acceptant de superviser ce travail de thèse, mais aussi parce qu'il a partagé ses idées et son expérience avec moi, ce qui m'a permis de progresser et de mieux appréhender les différentes facettes du métier d'enseignant-chercheur. Il a dirigé ma thèse avec beaucoup de patience et il a dédié beaucoup de temps à mon travail en étant toujours très disponible, ce qui m'a énormément encouragé.

Je suis aussi très reconnaissante au Professeur Abdelkader Khelladi d'avoir accepté de présider mon jury, ainsi qu'aux Professeurs Farid Bencherif, Abdelhafid Berrachedi, Isma Bouchemakh, Konrad Engel et Maurice Pouzet d'avoir accepté d'examiner ce travail. Ils m'ont honoré par leur présence dans le jury de ma thèse.

J'exprime également ma reconnaissance aux Professeurs Larbi Benaïssa et Noureddine Hanoune pour le temps passé à corriger mes publications en anglais, je les remercie pour leurs disponibilités.

De plus, il m'est impossible d'oublier les personnes suivantes pour les réflexions, les questions, les conseils et pour la documentation qu'ils ont mis à ma disposition : Professeurs Hacène Belbachir, Farid Bencherif, Isma Bouchemakh, Mourad Boudhar, Nawel Kahoul, Abdelkader Khelladi et Miloud Mihoubi. Ainsi que les Professeurs, Khaled Kouach, Messaoud Mdjitna, Mourad Zaid, Ahmed Zaghdar et mes collègues de l'université Alger3, spécialement Nadia Hablel et Fatma El Zohra Souker pour leur soutien et leur aide.

Je clos enfin ces remerciements en dédiant cette thèse de doctorat à toute ma famille, particulièrement, mes parents qui m'ont toujours encouragé à aller plus loin, à Adel et Mehdi qui ont dû malgré eux s'intéresser aux partitions d'entiers, en écoutant mes discours, mes jérémiades et en essayant de calmer mon stress, à ma sœur et mon beau frère pour leurs soutiens et encouragements, sans oublier ma petite chérie Nihel qui souvent piquait des crises en me voyant travailler sur les partitions et croyant que je m'amusais sans elle, ils ont tous été présents lorsque j'en ai eu besoin.

*Préservez votre droit de penser,
car même penser mal est mieux
que de ne pas penser du tout.*

Citations de Hypatie d'Alexendrie (370-415)
Mathématicienne et Philosophe Grecque.

La Science ne connaît qu'une loi : la contribution scientifique.

Citations de Bertolt Brecht
La Vie de Galilée (1938).

Table des matières

Introduction	8
Chapitre 1 Les partitions d'un entier	11
1.1 Introduction	11
1.2 Généralités	11
1.3 La technique de bijection	14
1.3.1 Diagramme de Ferrers	19
1.4 Fonctions génératrices	22
1.4.1 Fonction génératrice universelle	25
1.4.2 Fonctions génératrices de certains nombres combinatoires	32
Chapitre 2 Les partitions d'un entier et les progressions	35
2.1 Introduction	35
2.2 Partitions d'un entier en progressions arithmétiques	36
2.2.1 Motivation	36
2.2.2 Cas : r impair	38
2.2.3 Cas : r pair	39
2.3 Partitions d'un entier en progressions géométriques	41
2.3.1 Motivation	41
2.3.2 Cas : $r = 1$	42
2.3.3 Cas : $r \geq 2$	42
Chapitre 3 Les partitions d'un entier en s types de parts	44
3.1 Introduction	44
3.2 Définitions et généralités	44
3.2.1 Résultats préliminaires	46

3.2.2	Résultat principal	49
Chapitre 4 Les partitions d'un entier et les polynômes de Bell		55
4.1	Introduction	55
4.2	Srinivasa Ramanujan	56
4.3	Polynômes de Bell	57
4.3.1	Motivation	57
4.3.2	Formulation générale	58
4.3.3	Valeurs particulières de $B_{n,k}$	59
4.4	Quelques propriétés basiques de la fonction "somme des diviseurs"	61
4.5	Résultat principal	62
Chapitre 5 Le poset des partitions d'un entier		65
5.1	Introduction	65
5.2	Définitions	65
5.2.1	Relation d'ordre	65
5.2.2	Poset	66
5.2.3	Relation de couverture	66
5.2.4	Diagramme de Hasse	66
5.2.5	Élément maximal (resp. minimal)	66
5.2.6	Fonctions d'un poset	67
5.2.7	Poset des partitions d'un entier	68
5.3	De $Pi(n)$ à $Pi(n + m)$	70
5.4	Algorithme générant le DH de $Pi(n)$	72
5.4.1	Construction du DH de $Pi(n)$	73
5.4.2	Construction récursive du DH de $Pi(n + 1)$	75
5.4.3	Déduction récursive du DH de $Pi(n - 1)$	77
Chapitre 6 Les partitions d'un entier et applications géométriques		78
6.1	Introduction	78
6.2	Les partitions d'un entier et les triangles	78
6.2.1	Interprétation géométrique de $p(n, 3)$	80
6.3	Les partitions d'un entier et les quadrilatères	82

6.3.1	Interprétation géométrique de $p(n, 4)$	83
6.3.2	Quadrilatères ordonnés impropres	84
6.3.3	Quadrilatères ordonnés propres	85
6.4	Relation entre les triangles et les quadrilatères	86
6.5	Relation entre $t(n, k, 2)$ et les quadrilatères	86
Conclusion		88

Introduction

La théorie des partitions d'un entier n , dans sa généralité, touche au moins autant à l'arithmétique qu'à la combinatoire, c'est ce dernier aspect qui sera seul retenu dans cette thèse.

La combinatoire, ou encore analyse combinatoire, désigne la discipline des mathématiques qui étudie les configurations de collections finies d'objets ainsi que leurs dénombrements. Elle contient plusieurs branches telles que : la théorie des graphes, la combinatoire énumérative, les problèmes de dénombrement, etc.

La combinatoire débute au XVII^{ème} siècle, en même temps que le calcul des probabilités. Initialement, cette partie des mathématiques avait pour objet la résolution des problèmes de dénombrement, provenant de l'étude des jeux de hasard. A partir des années 80, elle se développa de façon significative sous l'influence du calcul des probabilités aussi bien que de l'avancée de l'informatique.

Partitionner un nombre entier a toujours été considéré comme un exercice intellectuel captivant en mathématiques. L'étude de ces partitions a fasciné un grand nombre de mathématiciens : Euler, Legendre, Ramanujan, Hardy, Rademacher, Sylvester, Selberg, Littlewood et Dyson, pour ne citer que ceux-là. Ils ont tous contribué au développement d'une théorie avancée de ces simples objets mathématiques [7].

Euler était le premier à prendre en considération le problème de dénombrement des partitions d'un entier. A partir de là, de plus en plus de mathématiciens se sont intéressés aux partitions d'entiers ainsi qu'à leurs fascinantes propriétés. En effet, plusieurs restrictions selon la nature des partitions sont souvent considérées. On pourrait exiger que le nombre de parts soit égal à k ou que les parts soient distinctes, paires ou impaires, etc. On peut trouver beaucoup de résultats dans ce sens dans la littérature, par exemple [7], [36], [63], [64], [71] et [73].

Le problème de l'évaluation de $p(n)$, le nombre total des partitions de n , a une longue histoire. Il n'y a pas de formule simple en général pour $p(n)$, mais il y a des méthodes sophistiquées et tout à fait remarquables pour le calculer.

La littérature abondante actuelle, en général, traite des formules de récurrence, des identités ainsi que certains comportements asymptotiques.

En effet, le sujet de partitionnement d'entiers est très riche et profond. Couvrir tous les aspects des partitions nécessiterait des centaines de pages [56]. Nous espérons dans cette thèse, faire la lumière sur la beauté des partitions, la combinatoire, et des mathématiques de façon générale.

Notre thèse est axée sur différentes propriétés des partitions d'un entier, elle est organisée comme suit :

Le premier chapitre est consacré à la présentation générale de l'état des connaissances sur les partitions d'un entier. Il donne un aperçu rapide sur les partitions, introduit quelques techniques pour les traiter, et explore des problèmes intéressants.

Le chapitre deux traite une nouvelle restriction concernant les partitions d'un entier. Il s'agit de partitionner un entier n en k parts formant des suites en progressions arithmétiques, ainsi que des suites en progressions géométriques.

L'étude des partitions d'un entier n en parts formant des suites en progressions arithmétiques a motivé plusieurs travaux de recherches tels que [40], [62], [61] et [70]. Thomas E. Mason [59] a montré que le nombre de façons de partitionner un entier n en parts consécutives, est le nombre des diviseurs impairs de n . Nous généralisons ce résultat en caractérisant le nombre de partitions de n en progressions arithmétiques de raison r et en donnant les partitions en question.

Le chapitre trois, étudie les partitions de n en k parts utilisant précisément s types distincts de parts. P. A. MacMahon [58] a été le premier mathématicien à s'intéresser à ce genre de partitions. Aussi, Emeric Deutsch a étudié le nombre de partitions de n en exactement deux parts impaires (A117955) et le nombre de partitions de n en exactement deux parts, une paire et une impaire (A117956).

En étendant des résultats antérieurs, nous dérivons plusieurs identités reliant ce type de partitions à la fonction "nombre de diviseurs". En plus, nous obtenons une nouvelle formule de récurrence pour compter le nombre de telles partitions et une nouvelle identité pour énumérer les partitions d'un entier en deux types de parts.

Le chapitre quatre traite les polynômes de Bell qui ont été étudiés par E. T. Bell [12] et apparaissent comme un outil mathématique standard. Ils interviennent fortement en analyse combinatoire [67].

Dans ce chapitre nous utilisons la fonction génératrice de $p(5n + 4)$, l'un des meilleurs résultats établi par le mathématicien autodidacte Srinivasa Ramanujan - selon Hardy - pour présenter une nouvelle identité sur les polynômes complets de Bell.

Le chapitre cinq, nous permet de présenter les algorithmes de construction et déduction récursives des diagrammes de Hasse de $Pi(n)$ l'ensemble partiellement ordonné des partitions de n , $n \geq 1$, utilisant leur propriété d'auto similitude.

Ces algorithmes ont été implémentés dans l'application *BNBSIP* que nous avons développé lors de notre préparation du mémoire de magister et que nous ne cessons de mettre à jour au fur et à mesure pour la vérification et la visualisation de nos résultats. Nous présentons la première idée de construction du diagramme de Hasse de $Pi(n)$, où seul l'entier n est la donnée de départ, puis nous présentons deux autres algorithmes qui permettent la construction ou la déduction des diagrammes de Hasse des posets $Pi(n \pm m)$ ($m \geq 1$) à partir de celui de $Pi(n)$. Ces deux algorithmes permettent de réduire considérablement le temps d'exécution du premier algorithme de la construction du diagramme de Hasse de $Pi(n)$.

Le chapitre six, représente des applications géométriques concernant les partitions d'un entier. Nous nous intéressons plus particulièrement aux nombres de triangles et de quadrilatères non isométriques inscrits dans un polygone régulier à n côtés. Concernant les triangles nous donnons une formule explicite pour $p(n, 3)$, concernant les quadrilatères nous donnons une formule explicite pour $p(n, 4)$, les nombres de partitions de n en 3 et 4 parts respectivement. Aussi, nous montrons une application géométrique pour les résultats présentés dans le troisième chapitre.

Chapitre 1

Les partitions d'un entier

1.1 Introduction

La théorie des partitions d'un entier, établie par Leonhard Euler à la fin du XVIII^{ème} siècle et dont l'importance a été renforcée par les travaux de Hardy et Ramanujan en 1918 et Rademacher de 1937 à 1943, appartient à la théorie des nombres aussi bien qu'à l'analyse combinatoire [36]. Cette théorie est un sujet d'intérêt durable, c'est un domaine de recherche important qui a trouvé de nombreuses applications [7], et des résultats célèbres tels que les identités de Rogers-Ramanujan qui donnent lieu à des généralisations qui n'ont toujours pas été épuisées [39].

En amont au travail de thèse à proprement parlé, nous faisons une présentation générale de l'état des connaissances sur les partitions d'un entier. En effet, le sujet de partitionnement d'un entier - comme déjà signalé dans l'introduction générale - est très riche et profond [56]. Ce Chapitre donne un aperçu succinct sur les partitions, introduit quelques techniques pour les traiter, et explore des problèmes intéressants.

1.2 Généralités

De combien de façons peut on distribuer n boules indiscernables dans k urnes indiscernables (les urnes doivent contenir au moins une boule) ?

La réponse à cette question revient à la recherche du nombre de façons dont on peut écrire l'entier n comme étant une somme d'entiers positifs, où l'ordre des parts n'est pas important, par exemple, $5 = 3 + 2$ et $5 = 2 + 3$ seront comptabilisées comme étant une

seule façon d'écrire 5 en utilisant les deux entiers 2 et 3. Sans perte de généralité, nous considérons l'ordre croissant des parts.

Soit n un entier positif, on appelle *partition* ou *partage* de n toute suite croissante d'entiers positifs n_1, n_2, \dots , dont la somme vaut n . Les entiers n_i sont appelés *parts* de la partition.

Une partition d'un entier n non nul en k parts, $k = 1, \dots, n$, est une solution entière du système

$$\begin{cases} n = n_1 + \dots + n_k; \\ 1 \leq n_1 \leq n_2 \leq \dots \leq n_k. \end{cases} \quad (1.1)$$

Une partition d'un entier n peut aussi être représentée par un n -uplet d'entiers $x = (x_1, \dots, x_n)$, tel que $\sum_{i=1}^n ix_i = n$, où x_i représente le nombre de parts égales à i dans la partition.

Une solution de (1.1) est alors équivalente à une solution du système

$$\begin{cases} n = x_1 + 2x_2 + \dots + nx_n; \\ k = x_1 + x_2 + \dots + x_n; \\ x_i \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, n. \end{cases} \quad (1.2)$$

Une partition d'un entier n en k parts distinctes, $k = 1, \dots, n$, est une solution entière du système

$$\begin{cases} n = n_1 + \dots + n_k; \\ 1 \leq n_1 < \dots < n_k. \end{cases} \quad (1.3)$$

Notons désormais par

- $p(n)$: le nombre de toutes les partitions de l'entier n ,
- $p(n, k)$: le nombre de toutes les partitions de l'entier n en k parts, $k = 1, \dots, n$,
- $q(n)$: le nombre de toutes les partitions de l'entier n en parts distinctes,
- $q(n, k)$: le nombre de toutes les partitions de l'entier n en k parts distinctes,

- $a(n, k)$: le nombre de toutes les solutions entières du système

$$\begin{cases} n = x_1 + 2x_2 + \cdots + kx_k; \\ x_i \geq 0, \quad i = 1, \dots, k. \end{cases}$$

Ici, $a(n, k)$ représente le nombre des partitions de n dont la plus grande part est inférieure ou égale à k .

On a évidemment,

$$p(n) = \sum_{k \geq 1} p(n, k) \quad \text{et} \quad q(n) = \sum_{k \geq 1} q(n, k).$$

Pour un entier n négatif, on pose $p(n) = 0$. Si $n = 0$ on convient alors de poser $p(0) = 1$.

Aussi, on pose $q(n, k) = 0$, quand $k = 0$ ou $k > n$.

Exemple 1.1. Nous listons toutes les partitions de $n = 6$, selon les deux manières décrites ci-dessus

Partitions	Parts	n - uplets
π_1	1 1 1 1 1 1	(6, 0, 0, 0, 0, 0)
π_2	1 1 1 1 2	(4, 1, 0, 0, 0, 0)
π_3	1 1 1 3	(3, 0, 1, 0, 0, 0)
π_4	1 1 2 2	(2, 2, 0, 0, 0, 0)
π_5	1 1 4	(2, 0, 0, 1, 0, 0)
π_6	1 2 3	(1, 1, 1, 0, 0, 0)
π_7	2 2 2	(0, 3, 0, 0, 0, 0)
π_8	1 5	(1, 0, 0, 0, 1, 0)
π_9	2 4	(0, 1, 0, 1, 0, 0)
π_{10}	3 3	(0, 0, 2, 0, 0, 0)
π_{11}	6	(0, 0, 0, 0, 0, 1)

Nous avons alors

$p(6) = 11$, $p(6, 6) = p(6, 5) = p(6, 1) = 1$, $p(6, 4) = 2$ et $p(6, 3) = p(6, 2) = 3$.

$q(6) = 4$, $q(6, 4) = q(6, 5) = q(6, 6) = 0$, $q(6, 1) = q(6, 3) = 1$ et $q(6, 2) = 2$.

$a(6, 1) = 1$, $a(6, 2) = 4$, $a(6, 3) = 7$, $a(6, 4) = 9$, $a(6, 5) = 10$ et $a(6, 6) = 11$.

Le problème de l'évaluation de $p(n)$ a une longue histoire. Il n'y a pas de formule simple en général pour $p(n)$, mais il y'a des méthodes sophistiquées et tout à fait remarquables pour calculer $p(n)$ (pour des valeurs «raisonnables» de n). Par exemple, en 1938 Lehmer Derrick Henry (1905-1991) a calculé $p(14031)$ (un nombre de 127 chiffres!), et aujourd'hui, en utilisant un ordinateur, on serait capable de calculer $p(10^{12})$, un nombre de 1.113.996 chiffres [18].

Trouver une formule exacte pour $p(n)$ est un problème difficile. Si nous connaissons $p(n-1)$, ou, même, $p(i)$ pour tout $i < n$, nous ne pouvons pas calculer directement $p(n)$ à partir de ces données même si certaines relations de récurrences existent, que nous mentionnerons ci-après.

La taille approximative du nombre $p(n)$ est fournie par la formule asymptotique suivante [52]

$$p(n) \sim \frac{1}{4\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right).$$

En d'autres termes, $p(n)$ augmente plus vite que n'importe quel polynôme, mais moins vite que n'importe quelle fonction exponentielle $f(n) = a^n$, $a > 1$.

Néanmoins, il est possible de trouver quelques résultats intéressants concernant $p(n)$, entre autres, en utilisant des techniques de bijections, parmi elles les représentations graphiques avec les diagrammes de Ferrers, ou encore, les fonctions génératrices, que nous essayons de présenter brièvement ci-dessous.

1.3 La technique de bijection

La preuve bijective est une technique de démonstration qui consiste à considérer une application bijective entre deux ensembles et à dénombrer chacun de ces ensembles, pour montrer que les expressions obtenues, correspondant à un même cardinal, sont égales. Nous présentons ici, quelques résultats qui s'y réfèrent.

Proposition 1.1. [23] On a

$$\begin{aligned} 1) \quad a(n, k) &= \begin{cases} a(n, k-1) & \text{si } k > n; \\ a(n, k-1) + a(n-k, k) & \text{si } n \geq k \geq 1. \end{cases} \\ 2) \quad p(n, k) &= a(n-k, k). \end{aligned}$$

Corollaire 1.1. [23] On a

- 1) $p(n, k) = a(n, k) - a(n, k - 1);$
- 2) $p(n) = a(n, n).$

Proposition 1.2. [37] Le nombre de partitions d'un entier n en m parts est égal au nombre de partitions de $n - m$ avec au plus m parts, c'est à dire

$$p(n, m) = \begin{cases} p(n - m) & \text{si } n - m \leq m; \\ \sum_{i=1}^m p(n - m, i) & \text{si } n - m \geq m. \end{cases}$$

Preuve 1.1. [15]

Si $n - m \leq m$ on a

$$a(n - m, m) = a(n - m, n - m).$$

D'après le Corollaire 1.1, $a(n - m, n - m) = p(n - m)$. Le résultat est ainsi établi en vertu de la Proposition 1.1.

Si maintenant $n - m \geq m$, alors d'après le Corollaire 1.1, on a

$$p(n - m, i) = a(n - m, i) - a(n - m, i - 1), \quad \forall i = 1, \dots, m.$$

Donc,

$$\sum_{i=1}^m p(n - m, i) = a(n - m, m).$$

Le résultat est ainsi démontré en vertu de la Proposition 1.1. □

Exemple 1.2. Nous présentons ci-dessous, les tables des valeurs de $p(n, k)$ et $p(n)$, ainsi que $a(n, k)$, pour $n \leq 20$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	$p(n)$
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2
3	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3
4	1	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	5
5	1	2	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
6	1	3	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
7	1	3	4	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	15
8	1	4	5	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	22
9	1	4	7	6	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	30
10	1	5	8	9	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	42
11	1	5	10	11	10	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	56
12	1	6	12	15	13	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	77
13	1	6	14	18	18	14	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	101
14	1	7	16	23	23	20	15	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	0	135
15	1	7	19	27	30	26	21	15	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	0	176
16	1	8	21	34	37	35	28	22	15	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	0	231
17	1	8	24	39	47	44	38	29	22	15	11	7	5	3	2	1	1	0	0	0	297
18	1	9	27	47	57	58	49	40	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	0	0	385
19	1	9	30	54	70	71	65	52	41	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	0	490
20	1	10	33	64	84	90	82	70	54	42	30	22	15	11	7	5	3	2	1	1	627

TAB. 1.1 – $p(n, k)$ et $p(n)$, $1 \leq k \leq 20$, $1 \leq n \leq 20$.

$n \backslash k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56	56	56	56	56	56	56	56	56	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76	77	77	77	77	77	77	77	77	77
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99	100	101	101	101	101	101	101	101	101
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131	133	134	135	135	135	135	135	135	135
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169	172	174	175	176	176	176	176	176	176
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219	224	227	229	230	231	231	231	231	231
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278	285	290	293	295	296	297	297	297	297
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355	366	373	378	381	383	384	385	385	385
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445	460	471	478	483	486	488	489	490	490
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560	582	597	608	615	620	623	625	626	627

TAB. 1.2 – $a(n, k)$, $1 \leq k \leq 20$, $1 \leq n \leq 20$.

Corollaire 1.2. [15] Pour $n \geq 2$, on a

- 1) $p_2(n) = p(n) - p(n - 1)$;
- 2) $p_2(n, k) = p(n, k) - p(n - 1, k - 1)$;

où $p_2(n)$ et $p_2(n, k)$ sont respectivement le nombre des partitions de n sans parts égales à 1 et le nombre des partitions de n en k parts, $k = 1, \dots, n$, sans parts égales à 1.

Théorème 1.1. [39]

Le nombre de partitions de n en parts distinctes est égal au nombre de partitions de n en parts impaires.

Exemple 1.3. La partition $3 + 4$ est une partition de $n = 7$ en parts distinctes. On a

$$3 + 4 = 2^0 \cdot 3 + 2^2 \cdot 1 = 2^2 \cdot 1 + 2^0 \cdot 3 = 4 \cdot 1 + 1 \cdot 3.$$

En utilisant l'application φ définie ci dessus, on obtient

$$\varphi(3 + 4) = 1 + 1 + 1 + 1 + 3.$$

Le Tableau 1.3 illustre la correspondance qui existe entre les partitions de $n = 7$ en parts distinctes avec les partitions en parts toutes impaires.

Partitions	Impaires	Distinctes
1111111	✓	
111112		
11113	✓	
11122		
1114		
1123		
1222		
115	✓	
124		✓
133	✓	
223		
16		✓
25		✓
34		✓
7	✓	✓

TAB. 1.3 – Partitions distinctes \leftrightarrow impaires de $n = 7$.

Il existe deux identités qui comptent parmi les résultats les plus célèbres de la théorie des partitions : les identités de Rogers-Ramanujan.

Première identité de Rogers-Ramanujan : le nombre de partitions de n en parts différent d'au moins 2 est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 1 ou 4 modulo 5.

Seconde identité de Rogers-Ramanujan : le nombre de partitions de n en parts différent d'au moins 2 et supérieures ou égales à 2 est égal au nombre de partitions de n en parts congrues à 2 ou 3 modulo 5.

Ces deux identités ont d'abord été énoncées sous forme analytique par Rogers [68], elles ont motivé plusieurs travaux de recherches et plusieurs preuves existent telles que celles de Rogers, Ramanujan, Hardy, MacMahon, Shur . . . , mais il n'en existe qu'une seule preuve bijective connue, c'est celle de Garsia et Milne [48].

1.3.1 Diagramme de Ferrers

Le *diagramme de Ferrers* d'une partition d'un entier, noté DF , du nom du mathématicien Américain Norman MacLeod Ferrers, est un outil graphique très pratique pour visualiser les parts des partitions.

Il existe deux manières connues de tracer de tels graphes pour une partition ; pour certains la représentation en utilisant des points semble meilleure, nous l'appellerons *graphes de Ferrers*, pour d'autres la représentation à l'aide de cellule est plus naturelle, nous l'appellerons *diagramme de Ferrers*.

Le DF est construit par des rangées de cellules (ou de points), où le nombre de cellules dans chaque rangée correspond à la taille d'une part. La première rangée (de haut en bas) correspond à la plus grande part, la deuxième rangée correspond à la deuxième plus grande part, et ainsi de suite.

Exemple 1.4. La figure suivante présente le graphe et le diagramme de Ferrers pour la partition de $24=7+6+4+2+2+1+1+1$.

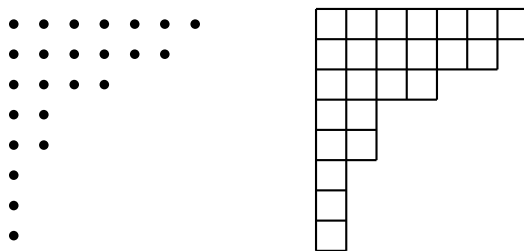


FIG. 1.1 – DF de la partition $7 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

Un diagramme de Ferrers peut être transformé en un *tableau de Young* en remplissant chaque cellule par une valeur unique de 1 à n , tels que les valeurs dans chaque rangée soient croissantes de gauche à droite, et dans chaque colonne de haut en bas. On peut obtenir une telle affectation des valeurs aux cellules, en plaçant à chaque fois la plus grande valeur non affectée dans une position du coin, c-à-d, une cellule où il n'y a aucune cellule non affectée en-dessous d'elle ni à sa droite.

Exemple 1.5. La figure suivante présente un tableau de Young pour la partition de $24 = 7 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

1	3	5	8	11	12	17
2	4	6	9	13	18	
7	10	14	19			
15	20					
16	21					
22						
23						
24						

FIG. 1.2 – Tableau de Young de la partition $7 + 6 + 4 + 2 + 2 + 1 + 1 + 1$

Si une transformation du diagramme de Ferrers est inversible alors c'est une bijection et peut être utilisée pour prouver quelques identités sur les partitions d'un entier [7]. Nous citons ici, quelques résultats connus qui utilisent les diagrammes de Ferrers pour leurs preuves.

Théorème 1.2. [7]

Le nombre de partitions de n dont la plus grande part est égale à r est égal au nombre de partitions de $n - r$ dont toutes les parts sont inférieures ou égales à r .

Preuve 1.2. [7]

Démarrant du DF d'une partition de n , en lui supprimant la première ligne on trouve un nouveau DF qui correspond à une partition de $n - r$. Si r est la taille de la première ligne (supprimée) de cette partition alors toutes les lignes du nouveau DF sont de tailles inférieures ou égales à r .

Réciproquement, pour n'importe quel DF d'une partition de $n - r$, on peut ajouter une ligne de taille r au sommet et on obtient un nouveau DF d'une partition de n . \square

Exemple 1.6. La Figure 1.3 illustre une partition de 21 ayant la plus grande part égale à 7 et une autre partition de 14 dont toutes les parts sont inférieures ou égales à 7.



FIG. 1.3 – DF de $7 + 6 + 5 + 2 + 1$ et $6 + 5 + 2 + 1$

Définition 1.3.1. Deux partitions d'un entier sont dites conjuguées (ou transposées), si le diagramme de Ferrers de la première se transforme en celui de la seconde en se reflétant par rapport à la ligne, où la première case à gauche est considérée de coordonnées $(0,0)$.

Exemple 1.7. La Figure 1.4 illustre deux partitions conjuguées de l'entier 28

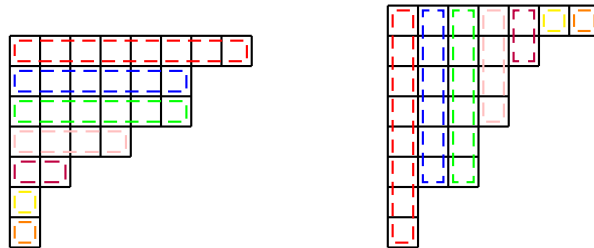


FIG. 1.4 – DF de $8 + 6 + 6 + 4 + 2 + 1 + 1$ et $7 + 5 + 4 + 4 + 3 + 3 + 1 + 1$

Définition 1.3.2. Une partition est auto-conjuguée si elle est égale à son conjuguée, c'est-à-dire, que son diagramme de Ferrers est symétrique par rapport à la diagonale.

Théorème 1.3. [39]

Le nombre de partitions de n en parts impaires et distinctes, est égal au nombre de partitions auto-conjuguées de n .

Preuve 1.3. [39]

La démonstration de ce théorème repose sur le diagramme de Ferrers. En effet, étant donnée une partition de n en parts impaires et distinctes, on peut lui associer une unique partition auto-conjuguée en pliant les lignes du DF, au niveau de la case du milieu, de sorte qu'elles forment des côtés d'un triangle droit isocèle, et puis superposer les coins des parts en respectant leurs ordres dans la partition.

Ce procédé est inversible, puisqu'à partir d'une partition auto-conjuguée on peut obtenir une unique partition en parts distinctes et impaires, en faisant exactement le geste inverse.

□

Exemple 1.8. La Figure 1.5 illustre deux partitions du nombre 22 l'une en parts impaires et distinctes $13 + 5 + 3 + 1$ et l'autre auto-conjuguée $7 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1$.

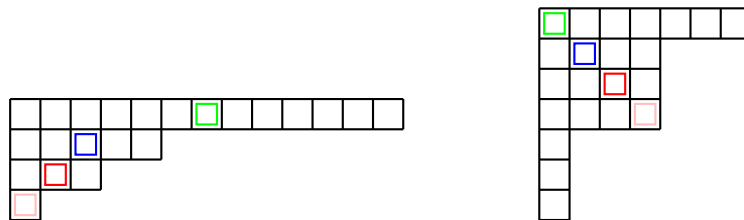


FIG. 1.5 – DF de $13 + 5 + 3 + 1$ et $7 + 4 + 4 + 4 + 1 + 1 + 1$

1.4 Fonctions génératrices

Définitions 1.4.1.

i- Soit (a_n) une suite de nombre réels et $(f_n(z))$ une suite de fonctions numériques réelles, on appelle fonction génératrice de (associée à) la suite (a_n) la série formelle

$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n f_n(z).$$

ii- Pour n et $m \in \mathbb{N}$, soit $(a_{n,m})$ une suite de nombre réels, on appelle fonction génératrice double de (associée à) la suite $(a_{n,m})$ la série formelle

$$A(z, u) = \sum_n \sum_m a_{n,m} f_{n,m}(z, u).$$

Les fonctions $f_n(z)$ et $f_{n,m}(z, u)$ constituent le noyau de la fonction génératrice associée.

Remarques 1.4.1. *Si*

1. $f_n(z) = z^n$, on parlera de fonction génératrice ordinaire,
2. $f_n(z) = \frac{z^n}{n!}$, on parlera de fonction génératrice exponentielle,
3. $f_{n,m}(z, u) = u^m z^n$, on parlera de fonction génératrice double ordinaire,
4. $f_{n,m}(z, u) = \frac{u^m z^n}{m! n!}$, on parlera de fonction génératrice double exponentielle.

Théorème 1.4. [39]

La fonction génératrice associée aux nombres $p(n)$ s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} comme suit

$$\begin{aligned} \phi(z) &= \sum_{n \geq 0} p(n) z^n \\ &= \prod_{i \geq 1} (1 - z^i)^{-1} \\ &= \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.5. [36]

La fonction génératrice double associée aux nombres $p(n, k)$ s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} comme suit

$$\begin{aligned} \phi(z, u) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{0 \leq k \leq n} p(n, k) u^k z^n \\ &= \prod_{i \geq 1} (1 - uz^i)^{-1} \\ &= \frac{1}{(1 - uz)(1 - uz^2)(1 - uz^3) \dots}, \quad |z| < 1. \end{aligned}$$

Théorème 1.6. [36]

La fonction génératrice associée aux nombres $p(n, k)$ des partitions de n en k parts, $n \geq k$, pour un nombre k fixé s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} comme suit

$$\begin{aligned}\phi_k(z) &= \sum_{n=k}^{\infty} p(n, k) z^n \\ &= z^k \prod_{i=1}^k (1 - z^i)^{-1} \\ &= \frac{z^k}{(1 - z) \cdots (1 - z^k)}, \quad |z| < 1.\end{aligned}$$

Proposition 1.3. [24]

La fonction génératrice associée aux nombres $a(n, k)$ pour un nombre k fixé s'exprime dans l'ensemble des nombres complexes \mathbb{C} comme suit

$$g_k(z) = \frac{1}{(1 - z) \cdots (1 - z^k)}, \quad |z| < 1.$$

Théorème 1.7. (Théorème du nombre pentagonal d'Euler)[73]

$$\begin{aligned}\prod_{i \geq 1} (1 - z^i)^{-1} &= \sum_{-\infty}^{\infty} (-1)^n x^{n(3n+1)/2} \\ &= 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + \dots\end{aligned}$$

Ce théorème permet de déduire une autre méthode de calcul de $p(n)$. On a la relation de récurrence suivante

$$p(n) = p(n - 1) + p(n - 2) - p(n - 5) - p(n - 7) + p(n - 12) + p(n - 15) + \dots$$

ces termes sont de la forme $(-1)^{(k+1)} p\left(n - \frac{k(3k-1)}{2}\right)$, où les nombres $n - \frac{k(3k-1)}{2}$ sont les nombres pentagonaux généralisés.

1.4.1 Fonction génératrice universelle

Nous présentons ici quelques fonctions génératrices connues traitant des restrictions concernant les partitions d'un entier n [36].

Soit $A = (a_{i,j}), i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots$, une matrice infinie à coefficients dans $\{0, 1\}$.

La matrice A détermine une séquence $Y_i, i = 1, 2, \dots$, de sous ensembles d'entiers positifs et vice versa et ce comme suit pour un i spécifique, $i = 1, 2, \dots, Y_i = \{j : a_{i,j} = 1\}$.

Notons $p(n, k; A)$ le nombre de partitions de n en k parts dont le nombre y_i , représentant la multiplicité de la part i , appartient à $Y_i, i = 1, 2, \dots$. En particulier, notons que $p(n; A) \equiv p(n), p(n, k; A) \equiv p(n, k)$ si $a_{i,j} = 1, i = 1, 2, \dots, j = 0, 1, \dots$ d'où $Y_i = \{0, 1, \dots\}$.

Théorème 1.8. [36]

Soit $A = (a_{i,j}), i \geq 1, j \geq 0$ une matrice infinie à coefficients dans $\{0, 1\}$ et $p(n, k; A)$ le nombre de partitions de n en k parts dont le nombre y_i des parts égales à i , appartient à $Y_i, i \geq 1$. Alors

$$G(z, u; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p(n, k; A) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} u^j z^{ij} \right). \quad (1.4)$$

Preuve 1.4. [36]

Le nombre $p(n, k; A)$ est égal au nombre de solutions entières positives du Système (1.2) avec

$$y_i \in Y_i = \{j : a_{i,j} = 1\}, i \geq 1. \quad (1.5)$$

Par conséquent,

$$G(z, u; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\sum u^{y_1+y_2+\dots+y_n} z^{y_1+2y_2+\dots+ny_n} \right),$$

où, la dernière somme s'effectue sur toutes les solutions entières positives du Système (1.2) avec la Condition (1.5). En introduisant les éléments $a_{i,j}$ de la matrice A dans la somme, on obtient l'expression suivante

$$G(z, u; A) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n \left(\sum a_{1,y_1} a_{2,y_2} \cdots a_{n,y_n} u^{y_1+y_2+\dots+y_n} z^{y_1+2y_2+\dots+ny_n} \right).$$

Notons que cette transformation inclue la Condition (1.5) en prenant en considération les termes nuls. Puisque nous sommes sur tous les $k = 0, 1, \dots, n$ et $n \geq 0$, il s'en suit que

$$G(z, u; A) = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{y_i=0}^{\infty} a_{i,y_i} u^{y_i} z^{iy_i} = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} u^j z^{ij} \right).$$

□

Du Théorème 1.8 nous pouvons déduire la fonction génératrice de $p(n; A)$

$$G(z; A) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n; A) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j} z^{ij} \right).$$

A chaque type de partitions, correspond une matrice A bien spécifique. Nous présentons dans ce qui suit quelques cas particuliers pour lesquels est utilisée cette technique, pour la détermination de la fonction génératrice associée (1.4).

– Partitions de n en parts distinctes

Notons dans ce cas, que le nombre y_i des parts égales à i peut être égal à 0 ou 1, $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{0, 1\}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, nous avons les fonctions génératrices suivantes

$$H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z^i); \quad (1.6)$$

$$H(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n q(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + uz^i); \quad (1.7)$$

$$H_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} q(n, k) z^n = \frac{z^{\frac{k(k+1)}{2}}}{\prod_{i=1}^k (1 - z^i)}, \quad |z| < 1. \quad (1.8)$$

La troisième fonction génératrice est une conséquence directe des deux faits suivants

$$H(z, u) = (1 + uz)H(z, uz) \quad \text{et} \quad H(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} H_k(z) u^k.$$

– **Partitions de n en parts paires**

Soient $p_0(n)$ le nombre de partitions de n en parts paires et $p_0(n, k)$ le nombre de partitions de n en k parts paires. Notons que dans ce cas, le nombre y_{2i} , représentant la multiplicité des parts $2i$, appartient à l'ensemble $Y_{2i} = \{0, 1, \dots\}$, alors que le nombre y_{2i-1} représentant la multiplicité des parts $2i - 1$ appartient à l'ensemble $Y_{2i-1} = \{0\}$, $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } i = 2m; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, nous avons les fonctions génératrices suivantes

$$G_0(z) = \sum_{n \geq 0} p_0(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (z^{2i})^j = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^{2i})^{-1}; \quad (1.9)$$

$$G_0(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_0(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (u z^{2i})^j = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - u z^{2i})^{-1}. \quad (1.10)$$

– **Partitions de n en parts impaires**

Soient $p_1(n)$ le nombre de partitions de n en parts impaires et $p_1(n, k)$ le nombre de partitions de n en k parts impaires. Notons que dans ce cas, le nombre y_{2i-1} , représentant la multiplicité des parts $2i-1$, appartient à l'ensemble $Y_{2i-1} = \{0, 1, \dots\}$, alors que le nombre y_{2i} représentant la multiplicité des parts $2i$ appartient à l'ensemble $Y_{2i} = \{0\}$ $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } i = 2m - 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors,

$$G_1(z) = \prod_{n=1}^{\infty} p_1(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (z^{2i-1})^j = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - z^{2i-1})^{-1};$$

$$G_1(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_1(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} (u z^{2i-1})^j = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - u z^{2i-1})^{-1}.$$

– **Partitions de n en parts paires et distinctes**

Soit $q_0(n)$ le nombre de partitions de n en parts paires et distinctes. Dans ce cas, $y_{2i} = 0$ ou 1 , $y_{2i-1} = 0$, $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } (j = 1 \text{ et } i = 2m); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Il vient,

$$\begin{aligned} H_0(z) &= \sum_{n \geq 0} q_0(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z^{2i}); \\ H_0(z, u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n q_0(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + uz^{2i}). \end{aligned}$$

– **Partitions de n en parts impaires et distinctes**

Soit $q_1(n)$ le nombre de partitions de n en parts impaires et distinctes. Dans ce cas, $y_{2i-1} = 0$ ou 1 , $y_{2i} = 0$, $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } (j = 1 \text{ et } i = 2m - 1); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$\begin{aligned} H_1(z) &= \sum_{n \geq 0} q_1(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z^{2i-1}); \\ H_1(z, u) &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n q_1(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + uz^{2i-1}). \end{aligned}$$

– **Partitions de n en somme de carrés distincts**

Soit $q_c(n)$ le nombre de partitions de n en somme de carrés distincts. Les partitions considérées ici sont les partitions dont les parts sont égales à leurs multiplicités. Dans ce cas, $y_i = i$ ou 0 , $i \geq 1$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j \in \{0, i\}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$H_c(z) = \sum_{n \geq 0} q_c(n) z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + z^{i^2});$$

$$H_c(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n q_c(n, k) u^k z^n = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + u^i z^{i^2}).$$

– **Partitions de n en nombres premiers**

Soit $p_p(n)$ le nombre de partitions de n en nombres premiers. Les partitions considérées ici sont les partitions dont les parts sont des nombres premiers. Dans ce cas, $y_i = \{0, 1, \dots\}$, d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = p; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$G_p(z) = \sum_{n \geq 0} p_p(n) z^n = \prod_{i=p} \frac{1}{1 - z^i};$$

$$G_p(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n p_p(n, k) u^k z^n = \prod_{i=p} \frac{1}{1 - u z^i}.$$

– **Partitions de n en nombres premiers distincts**

Soit $q_p(n)$ le nombre de partitions de n en nombres premiers distincts. Les partitions considérées ici sont les partitions dont les parts sont des nombres premiers et sont distinctes. Dans ce cas, $y_i = 0$ ou 1 , d'où

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \text{ ou } (j = 1 \text{ et } i = p); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc,

$$H_p(z) = \sum_{n \geq 0} q_p(n) z^n = \prod_{i=p} (1 + z^i);$$

$$H_p(z, u) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^n q_p(n, k) u^k z^n = \prod_{i=p} (1 + u z^i).$$

Ces fonctions génératrices peuvent générer plusieurs identités. Nous présentons ici, à titre d'exemples, les résultats suivants

Proposition 1.4. *On a*

$$\sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = \frac{n^2 - \chi(n \equiv 1 \pmod{2})}{4}, \quad (1.11)$$

où $\chi(\text{Enoncé})$ égale à 1 si Enoncé est vrai et 0 sinon.

Preuve 1.5. *En posant $k = 2$ dans la fonction génératrice de $q(n, k)$ donnée par (1.8) et en utilisant une simple décomposition en fractions partielles, on obtient facilement*

$$\sum_{n \geq 0} q(n, 2) z^n = \frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{(1-z)^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(1+z)} + \frac{\frac{5}{4}}{(z-1)}.$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q(n, 2) z^n &= 1 - \frac{5}{4} \sum_{n \geq 0} z^n - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n \\ &= 1 + \sum_{n \geq 0} \left(-\frac{5}{4} + \frac{(-1)^{n+1}}{4} + \frac{n+1}{2} \right) z^n. \end{aligned}$$

Aussi, il est facile de voir que $q(n, 2) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$, $n \geq 1$.

Il vient, par identification

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = -\frac{1}{4} + \frac{(-1)^n}{4} + \frac{n}{2}.$$

Donc,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor &= -\frac{n}{4} + \frac{1}{4} \left(\frac{-1 + (-1)^n}{2} \right) + \frac{n(n+1)}{4} \\ &= \frac{n^2 - \chi(n \equiv 1 \pmod{2})}{4}. \end{aligned}$$

□

Exemple 1.9. *Pour $n = 20$ et $n = 25$, on a*

$$\sum_{i=1}^{20} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = 100 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^{25} \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor = 156.$$

Théorème 1.9. On a

$$q(n, 3) = \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right\}.$$

où $\{x\}$ est l'entier le plus proche de x .

Preuve 1.6. En posant $k = 3$ dans la fonction génératrice de $q(n, k)$ donnée par (1.8) et après une simple décomposition en fractions partielles, on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} q(n, 3) z^n &= \frac{z^6}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)} \\ &= -1 + \frac{\frac{1}{8}}{(1+z)} + \frac{\frac{89}{72}}{(1-z)} - \frac{\frac{3}{4}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-z)^3} + \frac{1}{1+z+z^2} \left(\frac{1}{9}z + \frac{2}{9} \right) \\ &= -1 + \frac{\frac{1}{8}}{(1+z)} + \frac{\frac{9}{8}}{(1-z)} - \frac{\frac{3}{4}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{3}}{1-z^3}. \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} q(n, 3) z^n &= -1 + \frac{1}{8} \sum_{n \geq 0} (-1)^n z^n + \frac{9}{8} \sum_{n \geq 0} z^n - \frac{3}{4} \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n + \frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} z^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} z^{3n} \\ &= -1 + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{8} + \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right) z^n + \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} z^{3n} \\ &= -1 + \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n}{8} + \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} + a(n) \right) z^n, \end{aligned}$$

où $a(n)$ prend ses valeurs dans $\left\{ 0, \frac{1}{3} \right\}$.

Si $n = 0$ on obtient $q(0, 3) = 0$.

Si $n \geq 1$ on obtient $q(n, 3) = \frac{(-1)^n}{8} + \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} + a(n)$.

Comme $q(n, 3)$ est un entier et $\left| a(n) \pm \frac{1}{8} \right| < \frac{1}{2}$, il s'ensuit que

$$q(n, 3) = \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{12} \right\}.$$

□

Exemple 1.10. Pour $n = 20$ et $n = 25$, on a

$$q(20, 3) = \{23, 875\} = 24 \text{ et } q(25, 3) = \{40, 125\} = 40.$$

Corollaire 1.3. On a

$$q(n, 4) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor} \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n-4i}{2} + \frac{(n-4i)^2}{12} \right\}. \quad (1.12)$$

Preuve 1.7. En posant $k = 4$, $n_2 = n_1 + a$, $n_3 = n_1 + b$ et $n_4 = n_1 + c$ avec $1 \leq a < b < c$ dans le Système (1.3), on obtient

$$\begin{cases} a + b + c = n - 4n_1; \\ 1 \leq a < b < c. \end{cases}$$

Les plus petites valeurs que peuvent prendre a , b et c sont 1, 2 et 3 respectivement, alors $\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor$ est la plus grande valeur que peut prendre n_1 .

Le nombre de solutions entières du système ci-dessus est $q(n - 4n_1, 3)$. En vertu du Théorème 1.9, il vient

$$q(n, 4) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-6}{4} \rfloor} \left\{ \frac{13}{24} - \frac{n-4i}{2} + \frac{(n-4i)^2}{12} \right\}.$$

□

1.4.2 Fonctions génératrices de certains nombres combinatoires

Nous présentons ici les fonctions génératrices relatives à quelques nombres combinatoires très populaires dans ce domaine, auxquelles nous ferons appel dans le chapitre 4 de notre présente thèse.

– **Nombres de Stirling de second espèce** : $S(n, k)$

Les nombres de Stirling de second espèce représentent le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments en k sous ensembles. La fonction génératrice exponentielle double associée s'exprime comme suit

$$\phi(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} S(n, k) \frac{z^n}{n!} u^k = \exp(u(e^z - 1)). \quad (1.13)$$

– **Nombres de Stirling de première espèce** $s(n, k)$

Les nombres de Stirling de première espèce sont les coefficients du développement de $[x]_n = \sum_{k=1}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$, où $[x]_n$ est le polynôme des factorielles descendantes

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1).$$

La fonction génératrice exponentielle double associée est la suivante

$$\psi(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} s(n, k) \frac{z^n}{n!} u^k = (1+z)^u. \quad (1.14)$$

Les nombres de Stirling absolus de première espèce $|s(n, k)|$ comptent le nombre de permutations de n éléments se décomposant en k cycles disjoints. De manière générale, ces nombres sont les valeurs absolues des nombres de Stirling de première espèce. Sa fonction génératrice exponentielle double se présente comme suit

$$\psi(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} |s(n, k)| \frac{z^n}{n!} u^k = (1-z)^{-u}. \quad (1.15)$$

– **Nombres de Lah** $L(n, k)$

Les nombres de Lah absolus $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ représente le nombre de façon de partitionner un ensemble ordonné à n éléments en k chaînes non vides (une chaîne est un sous ensemble totalement ordonné).

$$L(n, k) = (-1)^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}; \quad \text{où} \quad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}.$$

La fonction génératrice exponentielle double associée est

$$\varphi(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} L(n, k) \frac{z^n}{n!} u^k = \exp(zu(1-z)^{-1}). \quad (1.16)$$

– **Nombres idempotent** $i(n, k)$

Soit $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ l'ensemble des applications d'un ensemble fini \mathcal{N} de taille n dans lui-même. Une application f de $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ est dite idempotente si $f \circ f = f$.

Le concept d'idempotence trouve son origine dans l'ensemble des applications idempotentes d'un ensemble \mathcal{N} dans lui-même.

Il est clair que f est idempotente si et seulement si la restriction de f sur son image $f(\mathcal{N})$ est l'identité.

La dénomination du nombre idempotent vient du fait que le nombre $i(n, k)$ des applications idempotentes de $\mathcal{F}(\mathcal{N})$ dont l'image $f(\mathcal{N})$ est de taille k est égal à

$$\binom{n}{k} k^{n-k}.$$

Ceci permet de déduire le nombre d'applications idempotentes de \mathcal{N} dans \mathcal{N}

$$i(n) = \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} k^{n-k}.$$

La fonction génératrice exponentielle double associée aux nombres idempotents est la suivante

$$\vartheta(z, u) = \sum_{n, k \geq 0} i(n, k) \frac{z^n}{n!} u^k = \exp(uz e^z). \quad (1.17)$$

Chapitre 2

Les partitions d'un entier et les progressions

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à un nouveau type de partitionnement d'un entier. En effet, il s'agit de partitionner un entier n en parts formant une séquence arithmétique (cette partie a fait l'objet des publications [27] et [28]). Nous nous sommes aussi intéressés à faire le même travail en considérant des parts en progression géométrique. L'étude des partitions d'un entier n en parts formant une suite en progression arithmétique a motivé plusieurs travaux de recherches. En particulier, en 1993, K.R.S. Sastry [70] a déterminé une formule pour $A(n, k)$ le nombre de solutions de l'équation $n = c + (c + d) + (c + 2d) + \dots + (c + (k - 1)d)$ en fonction du terme initial c et la raison d . De plus, il a résolu le problème qui consiste à déterminer le nombre d'entiers n pour lequel $A(n, k) = m$ pour m et k donnés. Un autre résultat à été établi par R. Cook et D. Sharp [40] en 1995, qui présente une condition nécessaire et suffisante pour qu'un entier possède une partition dont les parts forment une progression arithmétique. En 2003, M.A. Nyblom et C. Evans [62] ont étudié le problème d'énumération de ce type de partitions. En 2008 A.O. Munagi et T. Shonhiwa [61] ont établi une formule pour le cardinal de l'ensemble $AP(n)$ des partitions de n formant une progression arithmétique et ont caractérisé une classe d'entiers n dont la taille de chaque partition de $AP(n)$ divise n .

2.2 Partitions d'un entier en progressions arithmétiques

2.2.1 Motivation

Chaque nombre différent de la forme 2^k peut être partitionné en deux ou plusieurs parts consécutives. Thomas E. Mason [59] a montré que le nombre de façons de partitionner un entier n en parts consécutives, en incluant le cas d'un seul terme, est le nombre des diviseurs impairs de n . Nous généralisons ce résultat en déterminant le nombre de partitions de n en progressions arithmétiques de raison r .

Soit $n = 2^\alpha \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, la factorisation en nombres premiers de n . Alors, le nombre de façons de partitionner n en parts consécutives, en prenant en considération le cas d'un seul terme, est égale à $\prod_{i=1}^r (\alpha_i + 1)$, sauf pour le cas où $n = 2^\alpha$ où ce nombre est réduit à 1. Dans cette section nous étudions le cas de la partition de n en progressions arithmétiques, en général.

Notre problème peut être formulé en terme de partitions comme suit

Etant donné un entier positif n ,

Quel est le nombre de partitions de n en progressions arithmétiques de raison r ?

Partitionner n en une progression arithmétique de raison r implique l'existence de deux entiers positifs $l \geq 1$ et $m \geq 0$, tels que

$$n = l + (l + r) + (l + 2r) + \cdots + (l + mr). \quad (2.1)$$

Notons brièvement une telle partition par $\pi(l, m)$.

De (2.1) on a,

$$n = (m + 1)l + \frac{m(m + 1)}{2}r.$$

Donc,

$$rm^2 + (2l + r)m + 2l - 2n = 0. \quad (2.2)$$

La solution de l'Equation (2.2) en m donne

$$m = \frac{-(2l+r) + \sqrt{(2l-r)^2 + 8rn}}{2r}. \quad (2.3)$$

Puisque m est un entier, alors $(2l-r)^2 + 8rn$ est un carré parfait, i.e.,

$$(2l-r)^2 + 8rn = u^2. \quad (2.4)$$

Donc,

$$2rn = \frac{(u - (2l - r))}{2} \times \frac{(u + (2l - r))}{2}.$$

En posant,

$$A = \frac{u - (2l - r)}{2} \quad \text{et} \quad B = \frac{u + (2l - r)}{2},$$

on obtient

$$A + B = u, \quad (2.5)$$

et

$$B - A = 2l - r. \quad (2.6)$$

De (2.3), (2.5) et (2.6), on a

$$l = \frac{r + B - A}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{A - r}{r}. \quad (2.7)$$

Par voie de conséquence, r divise A . On a alors,

$$2n = \frac{A}{r} \times B. \quad (2.8)$$

Maintenant, on doit discuter la parité de r .

2.2.2 Cas : r impair

De (2.4) u est impair si r est impair. Alors en vertu de (2.5), A et B doivent avoir des parités différentes.

Cas 1. Si A est pair alors B est impair et $n = \frac{A}{2r} \times B$. Dans ce cas on a

$$l = \frac{r + d - \frac{2rn}{d}}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{2n}{d} - 1,$$

où $d = B$ est un diviseur impair de n .

Puisque $l \geq 1$, d doit vérifier $(2n - d)r \leq d(d - 2)$, i.e.,

$$d \geq \frac{2 - r + \sqrt{(r - 2)^2 + 8rn}}{2}. \quad (2.9)$$

Cas 2. Si A est impair alors $\frac{A}{r}$ est aussi impair et $n = \frac{A}{r} \times \frac{B}{2}$. Dans ce cas on a

$$l = \frac{r + \frac{2n}{d} - dr}{2} \quad \text{et} \quad m = d - 1,$$

où $d = \frac{A}{r}$ est un diviseur impair de n .

Puisque $l \geq 1$, d doit vérifier $d(d - 1)r \leq 2(n - d)$, i.e.,

$$d \leq \frac{r - 2 + \sqrt{(r - 2)^2 + 8rn}}{2r}. \quad (2.10)$$

Pour tout diviseur impair d de n vérifiant (2.9) ou (2.10), il existe une partition en progression arithmétique de raison impaire r , et vice versa.

Remarque 2.2.1. *Un moment de réflexion montre qu'un diviseur impair d de n ne peut satisfaire simultanément les inégalités*

$$(2n - d)r \leq d(d - 2) \quad \text{et} \quad d(d - 1)r \leq 2(n - d),$$

autrement $(d - 1)r \leq (d - 2)$, ce qui est absurde.

2.2.3 Cas : r pair

De (2.4) u est pair, si r est pair. Alors en vertu de (2.5), A et B doivent avoir la même parité.

Puisque r divise A , A et B sont pairs. Alors d'après (2.8)

$$n = \frac{A}{r} \times \frac{B}{2}.$$

De (2.7) on obtient

$$l = \frac{r + 2d - \frac{nr}{d}}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{n}{d} - 1,$$

où $d = \frac{B}{2}$ est un diviseur de n .

Puisque $l \geq 1$, d doit vérifier $(n - d)r \leq 2d(d - 1)$, i.e.,

$$d \geq \frac{2 - r + \sqrt{(r - 2)^2 + 8rn}}{4}.$$

Nous sommes maintenant en mesure de formuler nos résultats comme suit

Théorème 2.1. *Soit $n \geq 3$ un entier positif et soit $1 \leq r \leq n - 2$ un entier impair. Alors, Le nombre de partitions de n en progressions arithmétiques de raison impaire r , en incluant le cas d'un seul terme, est le nombre des diviseurs impairs d de n , satisfaisant $(2n - d)r \leq d(d - 2)$ ou $d(d - 1)r \leq 2(n - d)$. Pour chaque diviseur impair de ce type, la partition $\pi(l, m)$ est donnée par*

$$\begin{cases} l = \frac{r + \frac{2n}{d} - dr}{2} \quad \text{et} \quad m = d - 1 & \text{si} \quad d(d - 1)r \leq 2(n - d); \\ l = \frac{r + d - \frac{2rn}{d}}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{2n}{d} - 1 & \text{si} \quad (2n - d)r \leq d(d - 2). \end{cases}$$

Exemple 2.1. *Soient $n = 15$ et $r = 3$. Les diviseurs impairs de 15 qui satisfont $(2n - d)r \leq d(d - 2)$ ou $d(d - 1)r \leq 2(n - d)$ sont 1, 3 et 15; donc 15 admet trois partitions en progressions arithmétiques de raison égale à 3, chacune est associée à l'un de ces diviseurs, et ceci comme suit*

► **$d=1$** satisfait $d(d-1)r \leq 2(n-d)$, on a alors, $l = \frac{r + \frac{2n}{d} - dr}{2} = 15$ et $m = d-1 = 0$.

Donc $\pi(l, m) = \mathbf{15}$.

► **$d=3$** satisfait $d(d-1)r \leq 2(n-d)$, on a alors, $l = \frac{r + \frac{2n}{d} - dr}{2} = 2$ et $m = d-1 = 2$.

Donc $\pi(l, m) = \mathbf{2+5+8}$.

► **$d=15$** satisfait $(2n-d)r \leq d(d-2)$, on a alors, $l = \frac{r + d - \frac{2rn}{d}}{2} = 6$ et $m = \frac{2n}{d} - 1 = 1$.

Donc $\pi(l, m) = \mathbf{6+9}$.

Théorème 2.2. Soit $n \geq 3$ un entier positif et soit $1 \leq r \leq n-2$ un entier pair. Alors le nombre de partitions de n en progressions arithmétiques de raison paire r , en incluant le cas d'un seul terme, est le nombre des diviseurs d de n , satisfaisant $(n-d)r \leq 2d(d-1)$. Pour chaque diviseur d de ce type, la partition $\pi(l, m)$ est donnée par

$$l = \frac{r + 2d - \frac{nr}{d}}{2} \quad \text{et} \quad m = \frac{n}{d} - 1.$$

Exemple 2.2. Soient $n = 30$ et $r = 4$. Les diviseurs de 30 satisfaisant $(n-d)r \leq 2d(d-1)$ sont 10, 15 et 30; donc 30 admet trois partitions en progressions arithmétiques de raison égale à 4, chacune est associée à l'un de ces diviseurs, et ceci est détaillé ci dessous

► **$d=10$** $\Rightarrow l = \frac{r + 2d - \frac{nr}{d}}{2} = 6$ et $m = \frac{n}{d} - 1 = 2$, alors $\pi(l, m) = \mathbf{6+10+14}$.

► **$d=15$** $\Rightarrow l = \frac{r + 2d - \frac{nr}{d}}{2} = 13$ et $m = \frac{n}{d} - 1 = 1$, alors $\pi(l, m) = \mathbf{13+17}$.

► **$d=30$** $\Rightarrow l = \frac{r + 2d - \frac{nr}{d}}{2} = 30$ et $m = \frac{n}{d} - 1 = 0$, alors $\pi(l, m) = \mathbf{30}$.

Proposition 2.1. Le Théorème 2.1 généralise le théorème de Thomas E. Mason.

Preuve 2.1. Pour $r = 1$, on a $d = 2p + 1$ et $n = dk$. Par conséquent

$$d(d-1) \leq 2(n-d) \quad \Leftrightarrow \quad p \leq k-1$$

et

$$2n-d \leq d(d-2) \quad \Leftrightarrow \quad p \geq k.$$

□

Si $p \leq k - 1$, on obtient

$$l = \frac{1 - d + 2k}{2} \text{ et } m = d - 1,$$

sinon

$$l = \frac{1 + d - 2k}{2} \text{ et } m = 2k - 1.$$

Exemple 2.3. $n = 15$ a quatre diviseurs impairs 1, 3, 5 et 15.

► $d=1 \Rightarrow p = 0$ et $k = 15$, alors $l = \frac{1 - d + 2k}{2} = 15$ et $m = d - 1 = 0$, d'où $\pi(l, m) = \mathbf{15}$.

► $d=3 \Rightarrow p = 1$ et $k = 5$, alors $l = \frac{1 - d + 2k}{2} = 4$ et $m = d - 1 = 2$, d'où $\pi(l, m) = \mathbf{4+5+6}$.

► $d=5 \Rightarrow p = 2$ et $k = 3$, alors $l = \frac{1 - d + 2k}{2} = 1$ et $m = d - 1 = 4$, d'où $\pi(l, m) = \mathbf{1+2+3+4+5}$.

► $d=15 \Rightarrow p = 7$ et $k = 1$, alors $l = \frac{1 + d - 2k}{2} = 7$ et $m = 2k - 1 = 1$, d'où $\pi(l, m) = \mathbf{7+8}$.

2.3 Partitions d'un entier en progressions géométriques

2.3.1 Motivation

Étant donné un entier positif n . Partant de l'idée de la section précédente, nous nous sommes posés la question suivante

Quel est le nombre de partitions de n en progression géométrique de raison r ?

Partitionner n en une progression géométrique de raison r veut dire qu'il existe deux entiers positifs $a \geq 1$ et $m \geq 0$, tels que

$$n = a + (a \times r) + (a \times r^2) + \cdots + (a \times r^m). \quad (2.11)$$

Notons brièvement une telle partition par $\gamma(a, m)$.

2.3.2 Cas : $r = 1$

Faisant tout d'abord remarquer qu'étant donné un entiers $n \geq 2$, le nombre de partitions de n en progressions géométriques de raison $r = 1$ est égal à $\tau(n)$, le nombre de diviseurs d de n . Dans ce cas, la partition correspondante au diviseur d de n est $\gamma(n/d, d - 1)$.

2.3.3 Cas : $r \geq 2$

Soient $n \geq 3$ et $2 \leq r \leq n - 1$, à partir de (2.11),

$$n = a \times \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1}. \quad (2.12)$$

Alors $n = a \times d$, où

$$d = \frac{r^{m+1} - 1}{r - 1}. \quad (2.13)$$

La solution de l'Equation (2.13) en m donne

$$m = \frac{\ln(d(r - 1) + 1)}{\ln r} - 1. \quad (2.14)$$

Puisque m est un entier, alors $\frac{\ln(d(r - 1) + 1)}{\ln r}$ doit être entier, ce qui revient à dire que le nombre $d(r - 1) + 1$ est une puissance de r . Ainsi, nous avons la proposition suivante

Proposition 2.2. *Étant donnés deux entiers $n \geq 3$ et $2 \leq r \leq n - 1$, le nombre de partitions de n en progressions géométriques de raison r est égal au nombre de diviseurs d de n pour lesquels le nombre $d(r - 1) + 1$ est une puissance de r . Pour tous diviseur d de ce type, la partition $\gamma(a, m)$ est donnée par*

$$a = \frac{n}{d} \text{ et } m = \frac{\ln(d(r - 1) + 1)}{\ln r} - 1.$$

Remarque 2.3.1. *Pour tout $n \geq 1$, il existe au moins la partition triviale $\gamma(n, 0)$ qui correspond au diviseur $d = 1$.*

Si d est un diviseur de n , la proposition suivante fournit une condition nécessaire pour l'existence d'une partition de n en progression géométrique de raison r associée au diviseur d .

Proposition 2.3. Soit d un diviseur de n . Si on peut faire correspondre à d une partition de n en progression géométrique de raison $r \geq 1$, alors r divise $d - 1$.

Preuve 2.2. La preuve de cette proposition découle immédiatement de (2.13). En effet,

$$\begin{aligned} d - 1 &= r + r^2 + r^3 + \dots + r^m \\ &= r \times (1 + r + r^2 + \dots + r^{m-1}). \end{aligned}$$

□

Exemple 2.4. Soient $n = 80$ et $r = 3$. Les diviseurs de 80 sont 1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 40 et 80. Pour ces dix diviseurs, 2, 5, 8, 20 et 80 ne vérifient pas la condition nécessaire de la Proposition 2.3. Aussi, 10 et 16 ne vérifient pas la condition nécessaire et suffisante de la Proposition 2.2. Donc 80 admet trois partitions en progressions géométriques de raison $r = 3$ correspondantes aux diviseurs 1, 4 et 40, qui se présentent respectivement comme suit

- ▶ $d=1 \Rightarrow a = 80, m = 0$ et $\gamma(80, 0) = \mathbf{80}$.
- ▶ $d=4 \Rightarrow a = 20, m = 1$ et $\gamma(20, 1) = \mathbf{20} + \mathbf{20} \times \mathbf{3}$.
- ▶ $d=40 \Rightarrow a = 2, m = 3$ et $\gamma(2, 3) = \mathbf{2} + \mathbf{2} \times \mathbf{3}^1 + \mathbf{2} \times \mathbf{3}^2 + \mathbf{2} \times \mathbf{3}^3$.

Chapitre 3

Les partitions d'un entier en s types de parts

3.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons aux partitions de n en k parts utilisant précisément s types distincts de parts. En étendant des résultats antérieurs à ce chapitre, nous dérivons plusieurs identités reliant ce type de partitions à la fonction "nombre de diviseurs". En plus, une nouvelle formule de récurrence pour énumérer le nombre de telles partitions ainsi qu'une nouvelle identité pour énumérer les partitions d'un entier en deux types de parts sont obtenues. Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet de la publication [16].

3.2 Définitions et généralités

Le nombre de partitions de n en k parts utilisant s types distincts de parts, $t(n, k, s)$, $k = s, \dots, n - \frac{s(s-1)}{2}$, est le nombre de solutions entières du système

$$\left\{ \begin{array}{l} n = a_1 n_1 + \dots + a_s n_s; \\ 1 \leq n_1 < \dots < n_s; \\ a_1 + \dots + a_s = k; \\ a_1, \dots, a_s \geq 1. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Le nombre total de partitions de n en s types distincts de parts est noté $t(n, s)$ (voir A002133 pour $t(n, 2)$).

Notons que $t(n, k, s) = 0$, si $k \leq s - 1$ ou $k > n - \frac{s(s-1)}{2}$ ou bien $n < \max\left\{k, \frac{s(s+1)}{2}\right\}$.

On a alors,

$$t(n, s) = \sum_{k=s}^{\frac{2n-s(s-1)}{2}} t(n, k, s) = \sum_{k \geq 1} t(n, k, s). \quad (3.2)$$

Par exemple, si $s = 1$, alors $k \geq 1$ et $n \geq k$. On a alors

$$t(n, k, 1) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ divise } n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.3)$$

Par conséquent,

$$\sum_{n \geq k} t(n, k, 1) z^n = \frac{z^k}{1 - z^k}.$$

Aussi, il est clair que

$$t(n, 2, 2) = q(n, 2) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor. \quad (3.4)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier $\leq x$. Alors, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 3} t(n, 2, 2) z^n &= z^3 + z^4 + 2z^5 + 2z^6 + 3z^7 + 3z^8 + \dots \\ &= \frac{z^3}{1-z} + \frac{z^5}{1-z} + \frac{z^7}{1-z} + \dots \\ &= \frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)}. \end{aligned}$$

P. A. MacMahon [58] est le premier mathématicien à s'être intéressé à ce genre de partitions. Aussi, Emeric Deutsch a étudié le nombre de partitions de n en exactement deux parts impaires (voir A117955) et le nombre de partitions de n en exactement deux parts, une paire et une impaire (voir A117956).

3.2.1 Résultats préliminaires

Soient $\tau(k)$ et $\tau_{d\downarrow}(k)$ respectivement le nombre de diviseurs positifs de k et le nombre de diviseurs positifs de k inférieurs ou égaux à d .

Dans cette section, nous établissons des formules de récurrence impliquant le nombre $t(n, k, s)$. L'identité principale de ce chapitre est basée sur le résultat suivant

Théorème 3.1. *Soient n , k et s des entiers, tels que $k \geq s \geq 2$, $n \geq k + \frac{s(s-1)}{2}$ et $n \geq \max \left\{ k, \frac{s(s+1)}{2} \right\}$. Alors*

$$t(n, k, s) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{2n-s(s-1)}{2k} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-s+1} t(n - ki, k - j, s - 1) \quad (3.5)$$

et

$$t(n, k, 2) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor} \tau_{k-1\downarrow}(n - ki). \quad (3.6)$$

Preuve 3.1. *Notons que chaque part n_i du Système (3.1), pour $i = 2, \dots, s$, peut être écrite comme $n_i = n_1 + d_i$, $d_i \geq 1$. Considérant n_1 et a_1 comme paramètres, le Système (3.1) peut être réécrit comme suit*

$$\begin{cases} n - kn_1 = a_2 d_2 + \dots + a_s d_s; \\ 1 \leq d_2 < \dots < d_s; \\ a_2 + \dots + a_s = k - a_1; \\ a_1, \dots, a_s \geq 1. \end{cases} \quad (3.7)$$

D'où

$$t(n, k, s) = \sum_{n_1 \in \mathcal{N}} \sum_{a_1 \in \mathcal{A}} t(n - kn_1, k - a_1, s - 1),$$

où \mathcal{N} et \mathcal{A} sont les ensembles contenant les valeurs de n_1 et a_1 respectivement.

La plus petite valeur de n_1 et a_1 est 1. La plus grande valeur de n_1 est calculée en posant $a_{i+1} = 1$ et $d_{i+1} = i$, pour $i = 1, \dots, s - 1$, dans la première équation du Système (3.7).

On obtient alors

$$1 \leq n_1 \leq \left\lfloor \frac{2n - s(s-1)}{2k} \right\rfloor.$$

En posant $a_i = 1$, pour $i = 2, \dots, s$, dans la troisième équation du Système (3.7), on peut voir que la plus grande valeur de a_1 est $k - s + 1$.

Pour prouver (3.6) on applique (3.5) avec $s = 2$, soit

$$t(n, k, 2) = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{n-1}{k} \rfloor} \sum_{j=1}^{k-1} t(n - ki, j, 1).$$

Alors de (3.3) on obtient

$$\sum_{j=1}^{k-1} t(n - ki, j, 1) = \tau_{k-1 \downarrow}(n - ki).$$

□

Le Théorème 3.1 permet de redécouvrir des identités connues telles que,

$$t(n, 2, 2) = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Il permet aussi de déduire quelques nouvelles identités de $t(n, k, 2)$. Nous citons à titre d'exemple, les cas $k = 3, \dots, 6$.

Corollaire 3.1. Pour $n \geq 3$, on a

$$t(n, 3, 2) = \begin{cases} \frac{n-3}{3} + \left\lfloor \frac{n-3}{6} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{3}; \\ \frac{n-1}{3} + \left\lfloor \frac{n-1}{6} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{3}; \\ \frac{n-2}{3} + \left\lfloor \frac{n+1}{6} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{3}. \end{cases}$$

$$t(n, 4, 2) = \begin{cases} \frac{n-4}{2} + \left\lfloor \frac{n-4}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{4}; \\ \frac{n-1}{4} + \left\lfloor \frac{n-1}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}; \\ \frac{n-2}{2} + \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{4}; \\ \frac{n-3}{4} + \left\lfloor \frac{n+5}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

$$t(n, 5, 2) = \begin{cases} \frac{n-5}{5} + \left\lfloor \frac{n-5}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-5}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-5}{20} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{5}; \\ \frac{n-1}{5} + \left\lfloor \frac{n-1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-1}{20} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{5}; \\ \frac{n-2}{5} + \left\lfloor \frac{n+3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-2}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+3}{20} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{5}; \\ \frac{n-3}{5} + \left\lfloor \frac{n-3}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+7}{20} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 3 \pmod{5}; \\ \frac{n-4}{5} + \left\lfloor \frac{n+1}{10} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+1}{15} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+11}{20} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 4 \pmod{5}. \end{cases}$$

$$t(n, 6, 2) = \begin{cases} \frac{n-6}{2} + \left\lfloor \frac{n-6}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-6}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 0 \pmod{6}; \\ \frac{n-1}{6} + \left\lfloor \frac{n-1}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{6}; \\ \frac{n-2}{3} + \left\lfloor \frac{n-2}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 2 \pmod{6}; \\ \frac{n-3}{3} + \left\lfloor \frac{n+9}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 3 \pmod{6}; \\ \frac{n-4}{3} + \left\lfloor \frac{n+2}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+14}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 4 \pmod{6}; \\ \frac{n-5}{6} + \left\lfloor \frac{n+19}{30} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 5 \pmod{6}. \end{cases}$$

Preuve 3.2. Les résultats découlent immédiatement du Théorème 3.1. \square

Corollaire 3.2. Pour $n \geq 3$ et $\lceil \frac{n+1}{2} \rceil \leq k \leq n-1$, on a

$$t(n, k, 2) = \tau(n-k).$$

Preuve 3.3. D'une part, la somme de l'Identité (3.6) du Théorème 3.1 est réduite à un seul élément si $1 \leq \frac{n-1}{k} < 2$, i.e.,

$$\frac{n-1}{2} < k \leq n-1.$$

D'autre part, $\tau_{k-1\downarrow}(n-k) = \tau(n-k)$, si $k-1 \geq n-k$, i.e.,

$$k \geq \frac{n+1}{2}.$$

D'où, le résultat. □

Remarque 3.2.1. En vertu du Corollaire 3.2, on a pour $n \geq 2k+1$ et $k \geq 1$

$$t(n, n-k, 2) = \tau(k).$$

Par exemple, pour $n \geq 27$, on a

$$t(n, n-13, 2) = \tau(13) = 2.$$

3.2.2 Résultat principal

Le but de cette section est de dériver une formule explicite pour $t(n, k, 2)$. Mais avant de le faire, nous introduisons quelques notations que nous jugeons nécessaires. Soient

$$- \varphi_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv 0 \pmod{i}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

$$- \chi_k(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 0, \text{ pgcd}(k, j) \neq 1 \text{ et } \text{pgcd}(i, j) = 1; \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- $W_k = [W_k(i, j)]$, $0 \leq i \leq k-1$, $1 \leq j \leq k-1$, une matrice dont les éléments sont donnés par

$$W_k(i, j) = \begin{cases} d & \text{si } i \in I_{k,j}(d) \text{ et } \chi_k(i, j) = 1; \\ j & \text{sinon.} \end{cases}$$

où, $0 \leq d \leq \frac{j}{\text{pgcd}(k, j)} - 1$ et

$$I_{k,j}(d) = \left\{ i = \left(\left\lfloor \frac{dk-1}{j} \right\rfloor + a \right) j - dk \mid 1 \leq a \leq \left\lfloor \frac{(d+1)k-1}{j} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{dk-1}{j} \right\rfloor \right\}.$$

Remarque 3.2.2. *La construction de la matrice W_k est spéciale, elle est remplie colonne par colonne comme suit*

1. Cas $\chi_k(i, j) = 1$

Chaque valeur du paramètre d génère quelques valeurs du paramètre a , qui en retour produisent les numéros des lignes i . Cette façon de faire permet de définir les éléments de la ligne concernée.

2. Cas $\chi_k(i, j) = 0$

Les éléments non définis de la matrice prennent le numéro j de leurs colonnes.

Par exemple, pour $k = 6$, on obtient

$$W_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le théorème suivant est une généralisation des résultats présentés dans le Corollaire 3.1.

Théorème 3.2. *Pour $n \geq 3$, $n \equiv i \pmod{k}$, $2 \leq k \leq n-1$, on a*

$$t(n, k, 2) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{(n-k) \cdot \text{pgcd}(k, j)}{kj} \right\rfloor, & \text{si } i = 0; \\ \sum_{j=1}^{k-1} \chi_k(i, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n-i-k - kW_k(i, j)) \cdot \text{pgcd}(k, j)}{kj} \right\rfloor, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve 3.4.

Cas 1. $n = kl$, i.e., $i = 0$. En utilisant le Théorème 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} t(n, k, 2) &= \sum_{h=1}^{l-1} \tau_{k-1 \downarrow}(kh) \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \sum_{h=1}^{l-1} \varphi_j(kh). \end{aligned}$$

Les diviseurs de kh qui sont multiples de j sont de la forme $\frac{kjd_h}{\text{pgcd}(k, j)}$. Alors

$$\begin{aligned} t(n, k, 2) &= \sum_{j=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{(l-1) \cdot \text{pgcd}(k, j)}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \left\lfloor \frac{(n-k) \cdot \text{pgcd}(k, j)}{kj} \right\rfloor. \end{aligned}$$

Cas 2. $n = kl + i$, $1 \leq i \leq k-1$. En utilisant le Théorème 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} t(n, k, 2) &= \sum_{h=0}^{l-1} \tau_{k-1 \downarrow}(kh + i) \\ &= \sum_{\text{red } j=1}^{k-1} \sum_{h=0}^{l-1} \varphi_j(kh + i). \end{aligned}$$

Il est facile de vérifier que les diviseurs de $kh + i$ qui sont multiples de j sont de la forme suivante

$$\chi_k(i, j) \left(\frac{kjd_h}{\text{pgcd}(k, j)} + i + kW_k(i, j) \right).$$

D'où,

$$\begin{aligned} t(n, k, 2) &= \sum_{j=1}^{k-1} \chi_k(i, j) \left\lfloor \frac{j + \text{pgcd}(k, j) \cdot (l-1 - W_k(i, j))}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \chi_k(i, j) \left\lfloor \frac{j + \text{pgcd}(k, j) \cdot \left(\frac{n-i}{k} - 1 - W_k(i, j)\right)}{j} \right\rfloor \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} \chi_k(i, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n-i-k - kW_k(i, j)) \cdot \text{pgcd}(k, j)}{kj} \right\rfloor. \end{aligned}$$

□

Exemple 3.1. $k = 6$

1. $i = 0$, $n = 6l$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \left\lfloor \frac{(n-6) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \frac{n-6}{2} + \left\lfloor \frac{n-6}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n-6}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

2. $i = 1$, $n = 6l + 1$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l+1, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \chi_6(1, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n-7-6W_6(1, j)) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1 + \frac{n-7}{6} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{n-7-24}{30} \right\rfloor \\ &= \frac{n-1}{6} + \left\lfloor \frac{n-1}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

3. $i = 2$, $n = 6l + 2$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l+2, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \chi_6(2, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n-8-6W_6(2, j)) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1 + \frac{n-8}{6} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{2(n-8)}{12} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{2(n-8-6)}{24} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{n-8-18}{30} \right\rfloor \\ &= \frac{n-2}{3} + \left\lfloor \frac{n-2}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

4. $i = 3$, $n = 6l + 3$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l+3, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \chi_6(3, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n-9-6W_6(3, j)) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1 + \frac{n-9}{6} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{3(n-9)}{18} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{n-9-12}{30} \right\rfloor \\ &= \frac{n-3}{3} + \left\lfloor \frac{n+9}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

5. $i = 4, n = 6l + 4$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l + 4, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \chi_6(4, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n - 10 - 6W_6(4, j)) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1 + \frac{n - 10}{6} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{2(n - 10)}{12} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{2(n - 10)}{24} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{n - 10 - 6}{30} \right\rfloor \\ &= \frac{n - 4}{3} + \left\lfloor \frac{n + 2}{12} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n + 14}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

6. $i = 5, n = 6l + 5$, on obtient

$$\begin{aligned} t(6l + 5, 6, 2) &= \sum_{j=1}^5 \chi_6(5, j) \left\lfloor 1 + \frac{(n - 11 - 6W_6(5, j)) \cdot \text{pgcd}(6, j)}{6j} \right\rfloor \\ &= \left\lfloor 1 + \frac{n - 11}{6} \right\rfloor + \left\lfloor 1 + \frac{n - 11}{30} \right\rfloor \\ &= \frac{n - 5}{6} + \left\lfloor \frac{n + 19}{30} \right\rfloor. \end{aligned}$$

En utilisant le Théorème 3.2, nous obtenons la table suivante pour $n \leq 20$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	$t(n, 2)$
3	1																		1
4	1	1																	2
5	2	2	1																5
6	2	1	2	1															6
7	3	3	2	2	1														11
8	3	3	2	2	2	1													13
9	4	3	2	3	2	2	1												17
10	4	4	5	1	3	2	2	1											22
11	5	5	3	4	2	3	2	2	1										27
12	5	4	4	3	3	2	3	2	2	1									29
13	6	6	4	5	2	4	2	3	2	2	1								37
14	6	6	7	5	5	1	4	2	3	2	2	1							44
15	7	6	4	3	4	4	2	4	2	3	2	2	1						44
16	7	7	7	5	6	4	3	2	4	2	3	2	2	1					55
17	8	8	5	7	3	5	3	4	2	4	2	3	2	2	1				59
18	8	7	9	6	7	4	5	2	4	2	4	2	3	2	2	1			68
19	9	9	6	7	3	7	3	4	3	4	2	4	2	3	2	2	1		71
20	9	9	9	5	7	5	8	3	3	3	4	2	4	2	3	2	2	1	81

TAB. 3.1 – $t(n, k, 2)$, $2 \leq k \leq 19$, $3 \leq n \leq 20$.

Aussi, le Théorème 3.2 permet d'obtenir $t(n, 2)$ pour de grandes valeurs de n . La table suivante est introduite pour illustrer quelques unes.

n	30	40	50	60	70	80	90	100	200	300	400	500	600
$t(n, 2)$	168	266	386	536	640	801	998	1135	3123	6100	8244	11103	16142
n	700	800	900	1000	1500	2000	2500	3000	3500	4000			
$t(n, 2)$	17723	21077	27935	28340	54652	70128	91440	136790	144687	169953			

TAB. 3.2 – Valeurs de $t(n, 2)$.

Chapitre 4

Les partitions d'un entier et les polynômes de Bell

4.1 Introduction

La dénomination "polynômes de Bell" a été introduite par Riordan [67], qui observa pour la première fois qu'ils se prêtent parfaitement à la description de la formule de Faà di Bruno [65]. Ensuite, ils ont été étudiés en combinatoire des congruences, en probabilités et en bien d'autres domaines, par plusieurs auteurs, depuis 1950 à 1980 tels que Riordan et Carlitz, pour n'en citer que ceux là [60].

Les polynômes de Bell ont été introduits par E. T. Bell [12] et apparaissent comme un outil mathématique standard. Ils interviennent fortement en analyse combinatoire [67]. Nous trouvons dans Comtet [38] plusieurs résultats de base représentant leurs propriétés. La simplicité des polynômes de Bell, qui est due aux expressions récurrentes et au fait qu'ils soient fonctions de suites numériques, les a rendu utilisable d'une manière très large comme un outil mathématique et combinatoire par lequel des intégrales, des identités mathématiques, des probabilités et plusieurs fonctions sont exprimées et des interprétations combinatoires sont identifiées [36].

Dans ce chapitre, nous utilisons la fonction génératrice de $p(5n + 4)$, l'un des meilleurs résultats établi par Srinivasa Ramanujan d'après Hardy [52], pour présenter une nouvelle identité pour les polynômes complets de Bell. Ce chapitre a fait l'objet de la publication [29].

4.2 Srinivasa Ramanujan

Srinivasa Ramanujan est un mathématicien autodidacte Indien, né le 22 décembre 1887 dans une famille pauvre et apprit les mathématiques à partir de deux uniques livres "La Trigonométrie plane" de S. Looney, et "Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics" de S. Carr qui contenait une liste de quelques 6000 théorèmes sans démonstrations. Ces deux ouvrages lui permirent d'établir une grande quantité de résultats sur la théorie des nombres, les fonctions elliptiques, les fractions continues et les séries infinies. Il publia plusieurs articles dans des journaux mathématiques indiens et contacta des mathématiciens européens, tel que Godfrey Harold Hardy qui reçut une lettre en 1913 contenant une longue liste de théorèmes sans démonstrations. Interpellé par l'étrangeté de certains théorèmes, Hardy aboutit à la conviction que son auteur ne pouvait être qu'un "homme de génie". A partir de là une collaboration fructueuse en résultat.

Tourmenté toute sa vie par des problèmes de santé, Ramanujan vit son état empirer en Angleterre; il retourna en Inde en 1919 et mourut peu de temps après (26 avril 1920) à l'âge de 32 ans. Il laissa derrière lui des livres entiers de résultats non démontrés (appelés Cahiers de Ramanujan) qui continuent d'être étudiés au début du XXI ème siècle.

Ramanujan travailla principalement en théorie analytique des nombres et devint célèbre pour ses formules sommatoires impliquant des constantes telles que π et e , des nombres premiers et la fonction de partitions d'un entier obtenue avec Hardy.

L'outil principal que nous avons utilisé afin de démontrer le résultat principal de ce chapitre est la fonction génératrice de $p(5n + 4)$ établie par Ramanujan. C'est l'une des formules les plus appréciée par Hardy, qui dit [51]

"... if I had to select one formula from all of Ramanujan's work, I would agree with

Major MacMahon in selecting ..."

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(5n + 4) z^n = \frac{5 \{(1 - z^5)(1 - z^{10})(1 - z^{15}) \dots\}^5}{\{(1 - z)(1 - z^2)(1 - z^3) \dots\}^6}.$$

4.3 Polynômes de Bell

4.3.1 Motivation

Étant donné f une fonction analytique, telle que $f(0) = 0$, posons $g(z) = e^{f(z)}$. La fonction g étant aussi analytique, l'expression de sa fonction génératrice

$$g(z) = e^{f(z)} = e^{\sum_{n \geq 1} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n} = \sum_{k \geq 0} \frac{\left(\sum_{n \geq 1} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \right)^k}{k!}. \quad (4.1)$$

Le développement de $\frac{\left(\sum_{n \geq 1} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \right)^k}{k!}$ donne

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{n \geq 1} f^{(n)}(0) \frac{z^n}{n!} \right)^k = \sum_{n \geq k} B_{n,k} \left(f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-k+1)}(0) \right) \frac{z^n}{n!}.$$

On appelle $B_{n,k} \left(f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-k+1)}(0) \right)$ le polynôme partiel de Bell associé à la suite $(f^{(n)}(0))$ des dérivées successives de la fonction f au point 0.

En faisant référence à l'Equation (4.1), on trouve

$$\begin{aligned} g(z) &= e^{f(z)} = \sum_{k \geq 0} \sum_{n \geq k} B_{n,k} \left(f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-k+1)}(0) \right) \frac{z^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{k=0}^n B_{n,k} \left(f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-k+1)}(0) \right) \right) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

La formule $\sum_{k=0}^n B_{n,k} \left(f'(0), f''(0), \dots, f^{(n-k+1)}(0) \right)$ est appelée polynôme complet de Bell associé à la suite $(f^{(n)}(0))$.

Les polynômes de Bell sont généraux et ont plusieurs applications en combinatoire. Par exemple, la formule de Faà di Bruno qui est considérée comme un résultat d'analyse réelle par Goursat [49], alors que Riordan [67] et Comtet [38, 39] la considère comme faisant partie de l'analyse combinatoire, où elle est utilisée pour les partitions [6], les statistiques mathématiques, la théorie des matrices, ..., etc.

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(t)) = \sum_{k=1}^n g^{(k)}(f(t)) B_{n,k} \left(f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-k+1)}(t) \right).$$

Plus d'exemples sont exposés dans les excellents livres de Comtet, Riordan et Stanley [39, 66, 71].

4.3.2 Formulation générale

Dans cette partie, au lieu de considérer les séquences de dérivées successives d'une fonction analytique, on considère en guise de généralisation et par analogie, n'importe quelle suite (a_1, a_2, \dots) de nombres réels ou de nombres complexes. Son polynôme (exponentiel) partiel de Bell $B_{n,k}(a_1, a_2, \dots)$ sera alors défini de manière analogue à celui d'une fonction analytique telle que $f(0) = 0$, par

$$\frac{1}{k!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{z^m}{m!} \right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{z^n}{n!}.$$

Leur expression exacte est

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) = \sum \frac{n!}{k_1! k_2! \dots} \left(\frac{a_1}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!} \right)^{k_2} \dots$$

La somme s'effectue sur l'ensemble des solutions (k_1, k_2, \dots) du système $k_1 + 2k_2 + \dots = n$, $k_1 + k_2 + \dots = k$, avec $k_i \geq 0$, pour $i = 1, \dots, n$.

Les polynômes (exponentiels) complets de Bell sont donnés par leur fonction génératrice exponentielle

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{z^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a_1, a_2, \dots) \frac{z^n}{n!}.$$

En d'autres termes,

$$A_0(a_1, a_2, \dots) = 1 \quad \text{et} \quad A_n(a_1, a_2, \dots) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots), \quad \forall n \geq 1.$$

A partir de là, on obtient

$$A_n(a_1, a_2, \dots) = \sum_{k_1+2k_2+\dots=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \dots$$

La fonction génératrice exponentielle double associée aux polynômes complets de Bell est [39]

$$\Phi(t, u) = \exp\left(u \sum_{m \geq 1} a_m \frac{z^m}{m!}\right) = \sum_{n, k \geq 0} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k. \quad (4.2)$$

4.3.3 Valeurs particulières de $B_{n,k}$

Il existe quelques identités célèbres, donnant des valeurs particulières aux polynômes partiels de Bell pour des choix particuliers de la suite (a_m) .

– Si $a_m = 1, \forall m \geq 1$, alors en utilisant (4.2), on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n, k \geq 0} B_{n,k}(1, 1, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k &= \exp\left(u \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m!}\right) \\ &= \exp(u(e^z - 1)). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction génératrice exponentielle double (1.13) des nombres de Stirling de seconde espèce.

Donc,

$$B_{n,k}(1, 1, \dots) = S(n, k).$$

– Si $a_m = (-1)^{m-1}(m-1)!, \forall m \geq 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n, k \geq 0} B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k &= \exp\left(u \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} (m-1)! \frac{z^m}{m!}\right) \\ &= \exp\left(u \sum_{m \geq 1} (-1)^{m-1} \frac{z^m}{m}\right) \\ &= (1+z)^u. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction génératrice exponentielle double (1.15) des nombres de Stirling de première espèce.

Donc,

$$B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) = s(n, k).$$

– Si $a_m = (m-1)!, \forall m \geq 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n,k \geq 0} B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k &= \exp \left(u \sum_{m \geq 1} (m-1)! \frac{z^m}{m!} \right) \\ &= \exp \left(u \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{m} \right) \\ &= (1-z)^{-u}. \end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction génératrice exponentielle double (1.15) des nombres de Stirling absolus de première espèce.

Donc,

$$B_{n,k}(0!, 1!, 2!, 3!, \dots) = |s(n, k)|.$$

– Si $a_m = m!, \forall m \geq 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n,k \geq 0} B_{n,k}(1!, 2!, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k &= \exp \left(u \sum_{m \geq 1} m! \frac{z^m}{m!} \right) \\ &= \exp \left(u \sum_{m \geq 1} z^m \right) \\ &= \exp (uz(1-z)^{-1}). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction génératrice exponentielle double (1.16) des nombres de Lah.

Donc,

$$B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \dots) = L(n, k).$$

– Si $a_m = m, \forall m \geq 1$, alors on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n,k \geq 0} B_{n,k}(1, 2, \dots) \frac{z^n}{n!} u^k &= \exp \left(u \sum_{m \geq 1} \frac{z^m}{(m-1)!} \right) \\ &= \exp \left(uz \sum_{m \geq 1} \frac{z^{m-1}}{(m-1)!} \right) \\ &= \exp (uze^z). \end{aligned}$$

On reconnaît ici la fonction génératrice exponentielle double (1.17) des nombres idempotents.

Donc

$$B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) = i(n, k).$$

4.4 Quelques propriétés basiques de la fonction "somme des diviseurs"

Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs positifs de n . Il est clair que $\sigma(p) = 1 + p$ pour tout nombre premier p , puisque les seuls diviseurs positifs de p sont 1 et p . Aussi, les seuls diviseurs de p^2 sont 1, p et p^2 . Ainsi

$$\sigma(p^2) = 1 + p + p^2 = \frac{p^3 - 1}{p - 1}.$$

Il est facile de vérifier que

$$\sigma(p^k) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}. \quad (4.3)$$

Il est bien connu que $\sigma(n)$ est une fonction multiplicative [53], c'est à dire, si n et m sont co-premiers, alors

$$\sigma(nm) = \sigma(n) \cdot \sigma(m). \quad (4.4)$$

Le lemme suivant est une conséquence immédiate de ces propriétés.

Lemme 4.1. *Si 5 divise n , alors il existe $\alpha_n \geq 1$, tel que*

$$\sigma(n) = \frac{5^{\alpha_n+1} - 1}{5^{\alpha_n} - 1} \sigma\left(\frac{n}{5}\right). \quad (4.5)$$

où α_n est le nombre d'apparition de 5 dans la décomposition de n en facteurs premiers.

Preuve 4.1. *De (4.3) et (4.4), on a*

$$\sigma(n) = \frac{5^{\alpha_n+1} - 1}{4} \sigma\left(\frac{n}{5^{\alpha_n}}\right)$$

et

$$\sigma\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{5^{\alpha_n} - 1}{4} \sigma\left(\frac{n}{5^{\alpha_n}}\right).$$

Alors on obtient le résultat. □

4.5 Résultat principal

Pour le reste du chapitre, nous exprimons n sous la forme $n = 5^{\alpha_n} \cdot p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdots p_r^{\alpha_r}$, où les p_i sont des nombres premiers distincts différents de 5, et les α_i sont les puissances de leurs apparitions dans la factorisation de n , $i = 1, \dots, r$.

Théorème 4.1. Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par son terme général

$$a_n = \left(1 + \frac{20}{5^{\alpha_n+1} - 1}\right) \frac{\sigma(n)}{n}.$$

Alors, on a

$$A_n(1!a_1, 2!a_2, \dots, n!a_n) = \frac{n!}{5} p(5n+4).$$

Preuve 4.2. D'après Ramanujan [52], nous avons

$$\sum_{n \geq 0} P(5n+4)z^n = \frac{5 \{(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{15}) \dots\}^5}{\{(1-z)(1-z^2)(1-z^3) \dots\}^6}. \quad (4.6)$$

Posons

$$g(z) = \frac{5 \{(1-z^5)(1-z^{10})(1-z^{15}) \dots\}^5}{\{(1-z)(1-z^2)(1-z^3) \dots\}^6}.$$

Alors

$$\begin{aligned} \ln(g(z)) &= \ln 5 + 5 \ln \prod_{i=1}^{\infty} (1-z^{5i}) - 6 \ln \prod_{i=1}^{\infty} (1-z^i) \\ &= \ln 5 + 5 \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-z^{5i}) - 6 \sum_{i=1}^{\infty} \ln(1-z^i) \\ &= \ln 5 - 5 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{z^{5ij}}{j} + 6 \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{z^{ij}}{j} \\ &= \ln 5 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \end{aligned}$$

où

$$a_n = \begin{cases} \frac{6 \sigma(n) - 25 \sigma\left(\frac{n}{5}\right)}{n} & \text{si } 5 \text{ divise } n; \\ \frac{6}{n} \sigma(n) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\alpha_n \geq 1$, i.e., 5 divise n , alors en utilisant (4.5), on obtient

$$\sigma\left(\frac{n}{5}\right) = \frac{5^{\alpha_n} - 1}{5^{\alpha_n+1} - 1} \sigma(n).$$

Ainsi

$$a_n = \left(1 + \frac{20}{5^{\alpha_n+1} - 1}\right) \frac{\sigma(n)}{n}, \forall \alpha_n \geq 0.$$

Il vient à partir de (4.2)

$$\begin{aligned} g(z) &= 5 \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right) \\ &= 5 \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\sum_{n=1}^{\infty} n! a_n \frac{z^n}{n!}\right)^k}{k!}\right) \\ &= 5 + 5 \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(1!a_1, 2!a_2, \dots) \frac{z^n}{n!}\right) \\ &= 5 + 5 \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1!a_1, 2!a_2, \dots, n!a_n) \frac{z^n}{n!} \\ &= 5 \sum_{n=0}^{\infty} A_n(1!a_1, \dots, n!a_n) \frac{z^n}{n!}. \end{aligned}$$

Après une identification on obtient finalement

$$A_n(1!a_1, 2!a_2, \dots, n!a_n) = \frac{n!}{5} p(5n+4), \forall n \geq 0.$$

□

Corollaire 4.1. Pour $n \geq 1$, on a

$$\sigma(n) = \frac{5^{\alpha_n+1} - 1}{5^{\alpha_n+1} + 19} \cdot \frac{1}{(n-1)!} \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k} \left(\frac{1!}{5} p(9), \frac{2!}{5} p(14), \dots \right).$$

Preuve 4.3. Ce résultat est obtenu en utilisant la relation d'inversion de Chaou et al [35] qui stipule

$$t_n = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(z_1, z_2, \dots) \Leftrightarrow z_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k}(t_1, t_2, \dots).$$

□

Chapitre 5

Le poset des partitions d'un entier

5.1 Introduction

Dans le but d'étudier certaines propriétés du poset des partitions d'un entier, ordonné par raffinement, que nous proposons de noter $Pi(n)$, telles que l'unimodalité, la normalité, la compression du rang etc..., nous nous sommes penchés sur l'aspect graphique de la question. En effet, la théorie des graphes offre un outil très apprécié qui permet de visualiser le poset. Afin d'observer ses propriétés combinatoires, nous avons développé une application appelée *BNBSIP* (*Benyahia tani Nesrine Bouroubi Sadek Integer Partitions*) qui nous permet entre autres de visualiser le *Diagramme de Hasse*, noté *DH*, qui est la représentation graphique du poset. Dans ce chapitre, nous présentons les algorithmes de construction et déduction récursives des *DH* des poset $Pi(n)$, $n \geq 1$, en utilisant ses propriétés d'auto similitude [15].

5.2 Définitions

5.2.1 Relation d'ordre

Soit \mathfrak{R} une relation binaire sur un ensemble P satisfaisant les conditions suivantes

- \mathfrak{R} réflexive : $\forall x \in P, (x, x) \in \mathfrak{R}$,
- \mathfrak{R} antisymétrique : $\forall x, y \in P$, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ et $(y, x) \in \mathfrak{R}$ alors $x = y$,

- \mathfrak{R} transitive : $\forall x, y, z \in P$, si $(x, y) \in \mathfrak{R}$ et $(y, z) \in \mathfrak{R}$ alors $(x, z) \in \mathfrak{R}$.

Une relation d'ordre est dite totale lorsque deux éléments quelconques sont comparables, i.e., $(x, y) \in \mathfrak{R}$ où $(y, x) \in \mathfrak{R}$ pour tout $x, y \in P$. Elle est dite partielle, lorsqu'il existe des couples d'éléments incomparables.

La relation \mathfrak{R} entre deux éléments comparables x et $y \in P$, sera représentée usuellement par $x \leq y$ ou d'une façon équivalente par $y \geq x$.

5.2.2 Poset

Le terme " *poset* " est l'abréviation de " *partially ordered set* ", un ensemble partiellement ordonné, noté (P, \mathfrak{R}) .

5.2.3 Relation de couverture

Étant donné deux éléments x et y de P , on dit que x est *couvert* par y (ou y *couvre* x), noté $x \triangleleft y$, si $x < y$ et s'il n'existe aucun élément z tel que $x < z < y$, i.e., si $x < z \leq y$ alors $z = y$.

5.2.4 Diagramme de Hasse

Le graphe d'un poset P est nommé *Diagramme de Hasse (DH)* du nom du mathématicien Helmut Hasse (1898–1979). C'est un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est P et dont les arcs sont les paires de couvertures (x, y) dans le poset.

Nous traçons par convention le diagramme de Hasse d'un poset dans un plan de telle manière que, si y couvre x , alors le sommet représentant y est directement placé au-dessus du sommet représentant x . De ce fait, les flèches ne sont pas indispensables dans le graphe, du moment où l'orientation est implicite.

5.2.5 Élément maximal (resp. minimal)

Un élément x d'un poset P est dit *maximal* (resp. *minimal*) s'il n'existe aucun élément $y \in P$ satisfaisant $x < y$ (resp. $y < x$).

Si P possède un unique élément maximal (resp. minimal) il sera noté 1 (resp. 0).

Remarque 5.2.1. Dans un poset en général, il peut ne pas y avoir d'élément maximal, ou encore il peut y en avoir plus d'un. Mais dans un poset fini il y a toujours au moins un élément maximal, qui peut être trouvé comme suit

- Choisir un élément x , s'il n'est pas maximal, le remplacer par un élément y tel que $x < y$;
- Considérer y et répéter jusqu'à ce qu'un élément maximal soit trouvé.

Le processus doit s'arrêter, en raison de la réflexivité et de la transitivité. La procédure ne peut jamais revisiter le même élément.

Analogiquement, un poset fini doit contenir au moins un élément minimal.

5.2.5.1 Chaîne, Antichaine

Une *chaîne* dans un poset P est un sous-ensemble C de P totalement ordonné. On note $C = c_0 < c_1 < \dots < c_n$. La chaîne C est dite saturée si elle est de la forme $C = c_0 \leq c_1 \leq \dots \leq c_n$.

Une *antichaine* dans un poset P est un sous ensemble A de P d'éléments deux à deux incomparables.

5.2.5.2 Isomorphisme

Soient P et Q deux posets. P et Q sont *isomorphes* s'il existe une fonction bijective φ de P dans Q qui préserve l'ordre, c'est à dire

$$x \leq y \text{ dans } P \iff \varphi(x) \leq \varphi(y) \text{ dans } Q.$$

5.2.6 Fonctions d'un poset

5.2.6.1 Fonction de rang

Une *fonction de rang* d'un poset P est une fonction r définie de P dans \mathbb{N} vérifiant

$$\begin{cases} r(x) = 0 & , \text{ si } x \text{ est un élément minimal;} \\ r(y) = r(x) + 1 & , \text{ si } x \leq y. \end{cases}$$

Si une telle fonction existe, on dira que P est *rangé* ou *gradué* et la valeur $r(P) = \max \{r(x), x \in P\}$ représente son *rang*.

5.2.6.2 Niveau d'un poset

Si P est gradué, on définit son *niveau* i par $N_i = \{x \in P : r(x) = i\}$, $i = 0, \dots, r(P)$. Le cardinal du niveau N_i est noté W_i et est appelé *ième nombre de Whitney*.

Remarque 5.2.2. Dans un même niveau les éléments sont deux à deux incomparables, ils forment donc une antichaine.

5.2.7 Poset des partitions d'un entier

Soit $P_i(n)$ l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n . L'ensemble $P_i(n)$ des partitions de l'entier n , est ordonné par raffinement, c'est-à-dire, pour deux partitions π et σ de n on a

$$\pi \leq \sigma \iff \pi = \sigma \text{ ou bien } \sigma \text{ est obtenue en sommant deux ou plusieurs parts de } \pi.$$

Étant données deux partitions π et σ d'un entier n , la relation de *couverture* sur l'ensemble $P_i(n)$ est définie par

$$\pi \lessdot \sigma \iff \sigma \text{ est obtenue en sommant exactement 2 parts de } \pi.$$

Remarque 5.2.3. Nous noterons dans toute la suite le poset $(P_i(n), \leq)$ par $P_i(n)$.

Exemple 5.1. Soient $\pi = 1113$; $\sigma = 11112$; $\gamma = 111111$ dans $P_i(6)$.

On a $\sigma \lessdot \pi$, $\gamma \lessdot \sigma$ et $\gamma < \pi$.

Le poset $P_i(n)$ est gradué, sa fonction de rang r est définie comme suit

$$\begin{aligned} r : P_i(n) &\longrightarrow \mathbb{N} \\ \pi &\longmapsto r(\pi) = n - \#(\pi). \end{aligned}$$

où $\#(\pi)$ représente le nombre de parts de la partition π .

Il est clair que si π couvre σ alors $r(\pi) = r(\sigma) + 1$, et que $r(\underbrace{11 \dots 1}_{n \text{ fois}}) = 0$. Le rang de $Pi(n)$ est donc $r(Pi(n)) = n - 1$.

Le i ème niveau du poset $Pi(n)$ est donné par :

$$N_i = \{\pi \in Pi(n) : r(\pi) = i\}, \quad i = 0, \dots, r(Pi(n)).$$

Le nombre de Whitney W_i est alors égal à $p(n, n - i)$.

Le *diagramme de Hasse* du poset $Pi(9)$ est illustré dans la figure 5.1, ci dessous :

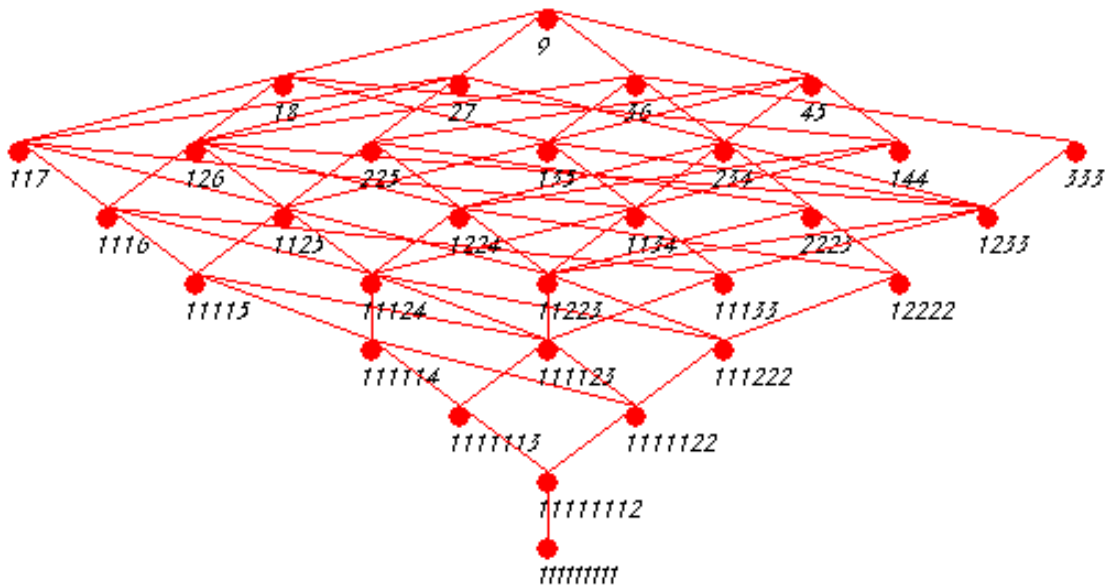


FIG. 5.1 – Diagramme de Hasse de $Pi(9)$

Notons désormais par,

- $Pi(n)$ l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n ,
- $Pi(n, k)$ l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n en k parts, $k = 1, \dots, n$,
- $Pim(n, k)$ l'ensemble de toutes les partitions de l'entier n en k parts, $k = 1, \dots, n$, avec au plus $m - 2$ parts égales à 1, $m \leq k$ et $p_m(n, k)$ son cardinal.

5.2.7.1 Représentation des partitions par des n -uplets

Dans ce qui suit, la représentation des partitions de n par des n -uplets sera considérée. Ainsi, une partition a de n sera représentée par un n -uplet (a_1, \dots, a_n) tel que a_i est le nombre de parts égales à i dans a .

Pour deux partitions a et b , on note $a \triangleleft b$ si et seulement si la partition correspondante à a est obtenue en subdivisant une part de celle de b (disons de taille l) en deux parts de taille i et j ($i + j = l$). On distingue deux cas

1/ $i = j$, dans ce cas

$$\begin{cases} a_k = b_k & , k \neq i, l; \\ a_l = b_l - 1; \\ a_i = b_i + 2. \end{cases} \quad (5.1)$$

2/ $i \neq j$, dans ce cas

$$\begin{cases} a_k = b_k & , k \neq i, j, l; \\ a_l = b_l - 1; \\ a_i = b_i + 1; \\ a_j = b_j + 1. \end{cases} \quad (5.2)$$

Le $k^{\text{ième}}$ niveau de $Pi(n)$ sera donc donné comme suit

$$N_k = \{a \in Pi(n) : a_1 + \dots + a_n = n - k\}, \quad k = 0, \dots, n - 1.$$

5.3 De $Pi(n)$ à $Pi(n + m)$

Les posets $Pi(1)$, $Pi(2)$ et $Pi(3)$ sont des chaînes. C'est à partir de $n \geq 4$ que le poset $Pi(n)$ commence à prendre une autre forme. Dans ce qui suit, on s'intéresse à l'étude de cette dernière et pour ce faire nous avons cherché la relation entre les différents DH sous-jacents.

Théorème 5.1. [15]

Soient m et n deux entiers tels que $m < n$ et soit $Q(n, m)$ le sous poset induit de $Pi(n)$, formé des partitions ayant au moins m parts égales à 1. Alors $Q(n, m)$ est isomorphe à $Pi(n - m)$ qui est un sous poset du poset $Pi(n)$.

Preuve 5.1. [15]

Considérons l'application φ définie de $Pi(n - m)$ dans $Q(n, m)$ par

$$\varphi((a_1, a_2, \dots, a_{n-m})) = (a_1 + m, a_2, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0),$$

où a_i représente le nombre de parts de taille i dans la partition.

L'application φ ainsi définie est injective par construction car $a \neq b \Rightarrow \varphi(a) \neq \varphi(b)$.

Elle est aussi surjective car si $x = (x_1, x_2, \dots, x_{n-m}, \dots, x_n) \in Q(n, m)$ alors $x_1 \geq m$ et $x_j = 0$ pour $n - m < j \leq n$ et donc $x = \varphi(x_1 - m, x_2, \dots, x_{n-m})$.

Ainsi φ est bijective.

Montrons maintenant que si $a \leq b$ alors $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

On a

$$a \leq b \Rightarrow \exists l \in \{2, \dots, n - m\}, \exists i, j \in \{1, \dots, n - m\} \text{ tels que } l = i + j.$$

- Si $i = j = 1$ alors d'après (5.1)

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, a_2, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \\ \varphi(b) &= (a_1 - 2 + m, a_2 - 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

- Si $i = j \neq 1$ alors toujours d'après (5.1)

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, \dots, a_i, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \\ \varphi(b) &= (a_1 + m, a_i - 2, a_l + 1, a_{n-m}, 0, 0) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

- Si $1 \neq i \neq j \neq 1$ alors d'après (5.2)

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, \dots, a_i, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \\ \varphi(b) &= (a_1 + m, \dots, a_i - 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$.

- Si $1 = i \neq j \neq 1$ alors d'après (5.2)

$$\begin{aligned} \varphi(a) &= (a_1 + m, \dots, a_j, \dots, a_l, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \\ \varphi(b) &= (a_1 + m - 1, \dots, a_j - 1, \dots, a_l + 1, \dots, a_{n-m}, 0, \dots, 0) \end{aligned}$$

et donc $\varphi(a) \leq \varphi(b)$. □

Remarque 5.3.1. *L'intérêt du théorème 5.1 est double :*

- Il permet d'une part de déduire les DH des posets $Pi(n - m)$, $m \geq 1$, de celui du poset $Pi(n)$, en un temps d'exécution réduit,
- il permet aussi, de construire les DH des posets $Pi(n + m)$, $m \geq 1$, à partir de celui de $Pi(n)$.

Exemple 5.2. *La construction du DH de $Pi(9)$ utilisant celui de $Pi(7)$ ($m=2$) est illustré par la figure 5.2.*

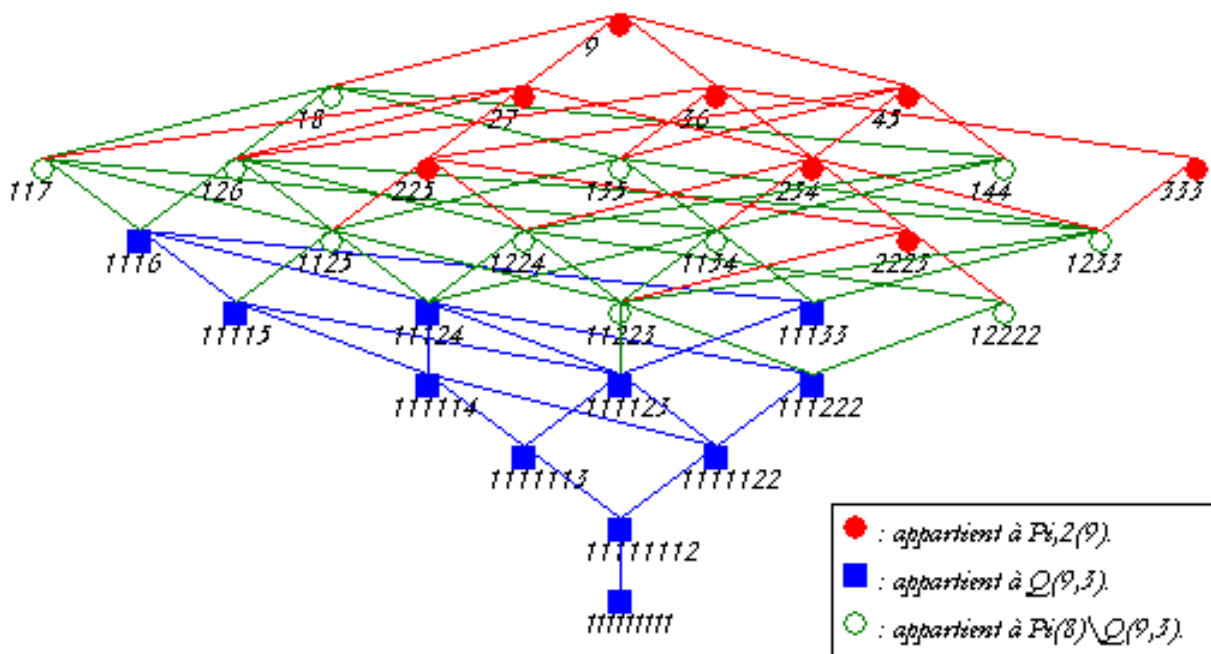


FIG. 5.2 – DH de $Pi(9)$

5.4 Algorithme générant le DH de $Pi(n)$

La schématisation de n'importe quel problème, le simplifie et l'éclaircit, c'est l'une des caractéristiques attrayantes de la théorie des graphes, qui est son inhérent caractère pictural qui contribue à sa compréhension. Maintes propriétés et procédures, ont été pensées ou trouvées à partir d'un schéma avant d'être ensuite formalisées ou développées. C'est la raison pour laquelle nous avons développé l'application *BNBSIP* nous permettant, entre autres, de visualiser le diagramme de Hasse du poset des partitions d'un entier.

Dans la sous section "construction du DH de $Pi(n)$ " nous présentons la première idée de construction du DH , où seul l'entier n est la donnée de départ, après quoi nous présentons deux autres algorithmes qui permettent la construction ou la déduction d'autres DH des posets $Pi(n \pm m)$ ($m \geq 1$) à partir de celui de $Pi(n)$, utilisant le DH de $Pi(n)$ comme donnée de départ.

Ces deux algorithmes permettent de réduire considérablement le temps de construction de $Pi(n)$ du premier algorithme.

5.4.1 Construction du DH de $Pi(n)$

La construction du DH de $Pi(n)$ utilisant l'application $BNBSIP$ est basée sur la construction des trois matrices suivantes

- $Matpart(n)$: Contient toutes les partitions de n , réunies par niveau, où chacune est présentée sur une ligne où chaque part prend une cellule. La première colonne présente le numéro de la partition, et d'un niveau à un autre nous laissons une ligne vide.
- $Matniv(n)$: présente les niveaux des partitions présentées dans la matrice $Matpart(n)$, telle que la première colonne donne le numéro du niveau, la deuxième et la troisième colonnes donnent le numéro de la ligne de la première et la dernière partition de chaque niveau dans la matrice $Matpart(n)$, et la dernière colonne donne le nombre de partitions dans chaque niveau.
- $Matcov(n)$: présente la relation de couverture entre toutes les partitions, c'est une matrice d'adjacence $p(n) \times p(n)$.

Quand ces trois matrices sont complètes, tracer le DH du poset correspondant devient une formalité, il reste juste à manipuler les propriétés des canevas de dessins du langage de programmation utilisé.

Algorithme 1 : Construction de $Pi(n)$ **Entrées** : n **Sorties** : $Pi(n)$: $Matpart(n)$, $Matniv(n)$, $Matcouv(n)$ **Debut**insérer 1 dans la première cellule de la première ligne de $Matpart(n)$;**pour** i de 2 à n **faire** **si** la ligne j n'est pas vide **alors**

décaler d'une cellule à droite toutes les partitions précédentes ;

insérer une part égale à 1 à gauche de toutes ces partitions ;

fin

insérer une ligne vide ;

 insérer i dans une nouvelle ligne ; remplir la matrice $Matniv(n)$; remplir la matrice $Matcouv(n)$;**fin****pour chaque** niveau k dans $Matniv(n)$ **faire** **pour chaque** partition correspondante π dans $Matpart(n)$ **faire** chercher toutes les partitions σ qui couvrent π ; reordonner les partitions résultantes σ ; effacer les partitions en double σ ; **pour chaque** niveau $k + 1$ dans $Matniv(n)$ **faire** **pour chaque** partition correspondante γ dans $Matpart(n)$ **faire** **si** σ n'est pas dans les lignes de $Matpart(n)$ au niveau $k + 1$ **alors** insérer σ au niveau $k + 1$ dans $Matpart(n)$; mettre à jour $Matcouv(n)$; mettre à jour $Matniv(n)$; **fin** **fin** **fin** **fin****fin** $m \leftarrow 1$;**pour chaque** ligne de $Matpart(n)$ **faire** **si** la ligne n'est pas vide **alors** insérer m dans la première colonne de $Matpart(n)$; $m \leftarrow m + 1$; **fin****fin****Fin**

5.4.2 Construction récursive du DH de $Pi(n + 1)$

L'idée de la construction récursive permet l'obtention du DH de $Pi(n)$, $n \geq 1$, en un temps d'exécution considérablement réduit par rapport à sa construction via le premier algorithme. En effet, pour tracer le DH de $Pi(n + 1)$, il suffit d'utiliser celui de $Pi(n)$, au dessus duquel on trace celui de $Pi2(n + 1)$ (qui est généré par la première étape de l'algorithme a partir des partitions du niveau $n - 2$ de $Pi(n)$). Après quoi, nous joignons les partitions maximales entre elles aussi bien que les partitions de $Pi(n)$ ayant la seconde part supérieur à 1, aux partitions qui les couvrent dans $Pi2(n + 1)$ (bien sûr sans oublier d'ajouter auparavant une part égale à 1 à toutes les partitions de $Pi(n)$). Notons ici que les éléments de $Pi(n - 3)$ ne sont pas concernés par la relation de couverture.

De la même façon, il est facile de construire le DH de $Pi(n + m)$, $m \geq 1$ à partir de celui de $Pi(n)$. En effet, le Théorème 5.1 permet de le faire, en ajoutant en première étape m parts égales à 1 à toutes les partitions de $Pi(n)$, au dessus des quelles nous insérons les sommets qui correspondent aux partitions ayant moins de m parts égales à 1, qui seront jointes en respectant la relation de couverture.

Ce qu'il y'a d'intéressant dans cette procédure c'est que les partitions ayant moins de $m + 2$ parts égales à 1, celles de $Q(n + m, m + 2)$ ($\sim Pi(n - 2)$) ne sont pas concernées par la relation de couverture et c'est justement là où apparaît le gain en terme d'opérations.

Algorithme 2 : Construction récursive

Entrées : $Pi(n) : Matpart(n), Matniv(n), Matcouv(n)$ **Sorties** : $Pi(n + 1) : Matpart(n + 1), Matniv(n + 1), Matcouv(n + 1)$ **Debut****pour chaque** *partition* π *dans* $Matpart(n)$ **faire**

| ajouter une part égale à 1;

fininsérer le niveau $n + 1$ dans $Matniv(n)$;insérer la partition $n + 1$ dans $Matpart(n)$;insérer la partition $n + 1$ dans $Matcouv(n)$;**pour chaque** *niveau* de $k = n - 2$ à n *dans* $Matniv(n + 1)$ **faire**| **pour chaque** *partition* π *correspondante* *dans* $Matpart(n + 1)$ **faire**| | **si** *la troisième part* de $\pi > 1$ **alors**| | | Chercher toutes les partitions σ qui couvrent π sans parts égales à 1;| | | réordonner les partitions résultantes σ ;| | | effacer les partitions en doubles σ ;| | **pour chaque** *niveau* $k + 1$ *dans* $Matniv(n + 1)$ **faire**| | | **pour chaque** *partition* γ *correspondante* *dans* $Matpart(n + 1)$ **faire**| | | | **si** σ *est différente* de γ *dans* $Matpart(n + 1)$ **alors**| | | | | insérer σ au niveau $k + 1$ dans $Matpart(n + 1)$;| | | | | mettre à jour $Matcouv(n + 1)$;| | | | | mettre à jour $Matniv(n + 1)$;| | | | **fin**| | | **fin**| | **fin**| **fin****fin****fin****Fin**

5.4.3 Dédution récursive du DH de $Pi(n - 1)$

L'idée de cette section est plus significative, puisqu'elle permet de déduire les DH des posets $Pi(n - m)$, $m \geq 1$, à partir de celui de $Pi(n)$, il suffit tout simplement de supprimer les sommets qui correspondent aux partitions ayant moins de m parts égales à 1 dans $Pi(n)$, ce qui permet d'obtenir le DH que nous cherchons en un temps réduit.

Algorithme 3 : Dédution récursive

Entrées : $Pi(n) : Matpart(n), Matniv(n), Matcouv(n)$

Sorties : $Pi(n - 1) : Matpart(n - 1), Matniv(n - 1), Matcouv(n - 1)$

Debut

pour chaque *partition* i **de** $Matpart(n)$ **faire**

si *La première colonne de* $Matpart(n)$ *est différente de 1* **alors**

 Effacer la ligne i de $Matpart(n)$;

 Effacer la ligne et la colonne i de $Matcouv(n)$;

 Mettre à jour $Matniv(n)$;

fin

 Effacer une part égale à 1 de $Matpart(n)$;

fin

Fin

Chapitre 6

Les partitions d'un entier et applications géométriques

6.1 Introduction

Dans les années 80, le nombre de partitions d'un entier n été étudié par rapport au nombre de ses parts k . Quelques formules explicites et récursives pour le nombre $p(n, k)$ des partitions de n en k parts ont été trouvées pour des petites valeurs de k . Ce sujet a d'abord été étudié par Andrews [5], qui découvrit une relation entre le nombre de partitions en trois parts et le nombre des triangles avec des côtés entiers. Plus de résultats dans ce sens sont exposés dans Andrews [6].

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre aux relations entre $p(n, 3)$ et $p(n, 4)$ et les nombres de triangles et de quadrilatères non isométriques inscrits dans un polygone régulier à n côtés respectivement. En étudiant les triangles et les quadrilatères propres non isométriques nous donnons des formules explicites pour $p(n, 3)$ et $p(n, 4)$.

La première section de ce chapitre a fait l'objet de la prépublication [11].

6.2 Les partitions d'un entier et les triangles

Théorème 6.1. Pour tout $n \geq 3$, on a

$$p(n, 3) = \left\{ \frac{n^2}{12} \right\}, \quad (6.1)$$

où $\{x\}$ est l'entier le plus proche de x .

Preuve 6.1. En utilisant la fonction génératrice de $p(n, k)$ donnée par le Théorème 1.6 et en posant $k = 3$, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} p(n, 3) z^n = \frac{z^3}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}.$$

Après une décomposition en fractions partielles, on a

$$\sum_{n \geq 0} p(n, 3) z^n = -\frac{\frac{1}{72}}{1-z} - \frac{\frac{1}{4}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-z)^3} - \frac{\frac{1}{8}}{1+z} + \frac{\frac{1}{9}(z+2)}{1+z+z^2}.$$

Une légère modification de la décomposition ci-dessus, donne

$$\sum_{n \geq 0} p(n, 3) z^n = \frac{\frac{1}{3}}{1-z^3} - \frac{\frac{1}{4}}{1-z^2} - \frac{\frac{1}{4}}{(1-z)^2} + \frac{\frac{1}{6}}{(1-z)^3}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} p(n, 3) z^n &= \frac{1}{3} \sum_{n \geq 0} z^{3n} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} z^{2n} - \frac{1}{4} \sum_{n \geq 0} (n+1) z^n + \frac{1}{6} \sum_{n \geq 0} \binom{n+2}{2} z^n \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3} z^{3n} - \frac{1}{4} z^{2n} - \frac{n+1}{4} z^n + \frac{(n+2)(n+1)}{12} z^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3} z^{3n} - \frac{1}{4} z^{2n} + \frac{n^2-1}{12} z^n \right) \\ &= \sum_{n \geq 0} \left(\frac{1}{3} z^{3n} - \frac{1}{4} z^{2n} - \frac{1}{12} z^n + \frac{n^2}{12} z^n \right). \end{aligned}$$

On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 3) z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n^2}{12} + a(n) \right) z^n,$$

où $a(n)$ prend ses valeurs dans $\{-\frac{1}{3}, -\frac{1}{12}, 0, \frac{1}{4}\}$.

On remarque que selon les valeurs de n , on a

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$a(n)$	0	$-\frac{1}{12}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{12}$

Puisque $p(n, 3)$ est un entier et que $|a(n)| \leq \frac{1}{2}$, il s'en suit que

$$p(n, 3) = \left\{ \frac{n^2}{12} \right\}.$$

□

Remarque 6.2.1.

Cet argument est utilisé dans [7, p. 58] pour les partitions en parts $\leq k$.

6.2.1 Interprétation géométrique de $p(n, 3)$

Soit \mathcal{P}_n un polygone n -régulier et soit $\Delta(n)$ le nombre de triangles non isométriques inscrits dans \mathcal{P}_n .

La Figure 6.1, illustre trois triangles isométriques inscrits dans \mathcal{P}_9 .

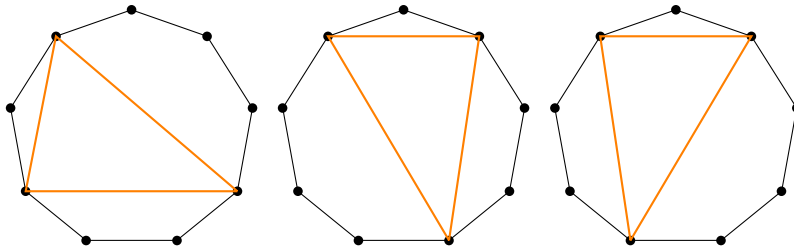


FIG. 6.1 – Trois triangles isométriques inscrits dans \mathcal{P}_9 .

Théorème 6.2. $\forall n \geq 3$, on a

$$\Delta(n) = p(n, 3).$$

Preuve 6.2. Le résultat est vrai pour $n \leq 5$, montrons qu'il est aussi vrai pour $n \geq 6$. Tout triangle inscrit dans \mathcal{P}_n utilise ou bien une corde et deux côtés de \mathcal{P}_n , deux cordes et un côté de \mathcal{P}_n , ou trois cordes. Chaque corde appartenant à un triangle inscrit dans \mathcal{P}_n , sépare un certain nombre de ses sommets n'appartenant pas au triangle. Ceci implique que deux triangles sont isométriques si et seulement si ils gèrent la même partition de $n - 3$ en i parts $i \in \{1, 2, 3\}$, où i est le nombre de cordes du triangle.

Alors,

$$\Delta(n) = p(n - 3, 1) + p(n - 3, 2) + p(n - 3, 3). \quad (6.2)$$

En utilisant la Proposition 1.2 on obtient finalement,

$$\Delta(n) = p(n, 3).$$

□

La figure 6.2, illustre cette idée en montrant sept triangles non-isométriques inscrits dans \mathcal{P}_9 .

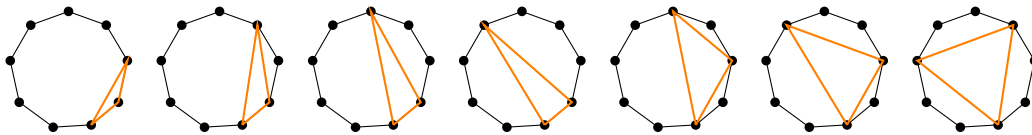


FIG. 6.2 – $\Delta(9)$ triangles non-isométriques distincts.

On dit qu'un triangle inscrit dans \mathcal{P}_n est propre si aucun de ses trois côtés n'appartient à \mathcal{P}_n .

Corollaire 6.1. Pour tout $n \geq 3$, on a

$$\left\{ \frac{n^2}{12} \right\} = \left\{ \frac{(n-3)^2}{12} \right\} + \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor.$$

Preuve 6.3. D'une part, de (6.1) on a

$$p(n-3, 3) = \left\{ \frac{(n-3)^2}{12} \right\}.$$

D'autre part, de (6.2), le nombre de triangles propres non isométriques inscrits dans \mathcal{P}_n est $p(n-3, 3)$.

Or

$$p(n-3, 3) = \Delta(n) - p(n-3, 2) - p(n-3, 1).$$

Comme de plus

$$p(n-3, 1) = 1 \text{ et } p(n-3, 2) = \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor - 1,$$

le résultat découle immédiatement en vertu de la relation (6.1) et du Théorème 6.2. □

6.3 Les partitions d'un entier et les quadrilatères

Théorème 6.3. Pour $n \geq 4$, on a

$$p(n, 4) = \left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \chi(n \equiv 1 \pmod{2}) \cdot \frac{n}{16} \right\},$$

où $\chi(\text{Enoncé})$ égale à 1 si Enoncé est vrai et 0 sinon.

Preuve 6.4. De la fonction génératrice de $p(n, k)$ donnée par le Théorème 1.6, on obtient

$$\sum_{n \geq 0} p(n, 4) z^n = \frac{\frac{1}{32}}{(1+z)^2} - \frac{\frac{13}{288}}{(1-z)^2} - \frac{\frac{1}{24}}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{24}}{(1-z)^4} + \frac{\frac{1}{8}}{1+z^2} - \frac{\frac{1}{9}}{1+z+z^2}.$$

Une légère modification de la décomposition ci-dessus, donne

$$\sum_{n \geq 0} p(n, 4) z^n = \frac{\frac{1}{32}}{(1+z)^2} - \frac{\frac{13}{288}}{(1-z)^2} - \frac{\frac{1}{24}}{(1-z)^3} + \frac{\frac{1}{24}}{(1-z)^4} + \frac{\frac{1}{8}(1-z^2)}{(1-z^4)} - \frac{\frac{1}{9}(1-z)}{(1-z^3)}.$$

On peut alors écrire

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 4) z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{(-1)^n (n+1)}{32} - \frac{13(n+1)}{288} - \frac{(n+1)(n+2)}{48} + \frac{(1 + \frac{11}{6}n + n^2 + \frac{1}{6}n^3)}{24} + a_n \right) z^n,$$

On remarque que selon les valeurs de n , on a

n	$12k$	$12k+1$	$12k+2$	$12k+3$	$12k+4$	$12k+5$	$12k+6$	$12k+8$	$12k+10$
		$12k+7$		$12k+9$		$12k+11$			
$a(n)$	$\frac{1}{72}$	$\frac{1}{9}$	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{9}$	$\frac{17}{72}$	0	$-\frac{17}{72}$	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{72}$

Alors $a(n)$ prend ses valeurs dans $\left\{ -\frac{17}{72}, -\frac{1}{8}, -\frac{1}{9}, -\frac{1}{72}, 0, \frac{1}{72}, \frac{1}{9}, \frac{1}{8}, \frac{17}{72} \right\}$.

Enfin, on obtient

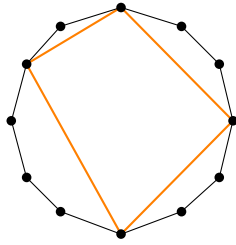
$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n, 4) z^n = \sum_{n \geq 0} \left(\frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \frac{((-1)^n - 1)n}{32} + b_n \right) z^n,$$

avec $|b_n| < \frac{1}{2}$. Le résultat est ainsi obtenu, en vertu de l'intégrité de $p(n, 4)$.

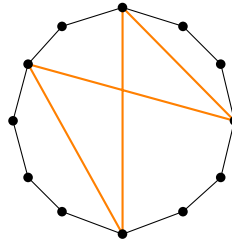
□

6.3.1 Interprétation géométrique de $p(n, 4)$

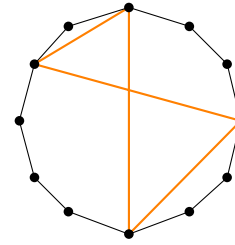
Dans cette section nous nous intéressons seulement aux **quadrilatères convexes**.



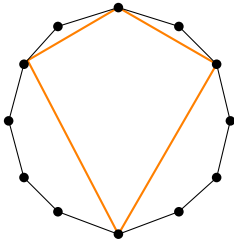
Quadrilatère convexe



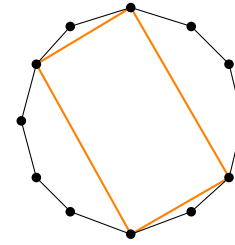
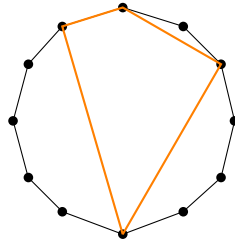
Quadrilatères non convexes



Un quadrilatère $ABCD$ ordonné est caractérisé par un quadruplet d'entiers positifs (x, y, z, t) tel que $x + y + z + t = n - 4$ et $x \leq y \leq z \leq t$, où x, y, z et t sont respectivement le nombre de sommets de \mathcal{P}_n entre A et B , le nombre de sommets entre B et C , le nombre de sommets entre C et D et le nombre de sommets entre D et A .



Quadrilatères ordonnés



Quadrilatère non ordonné

Soit $\square(n)$ le nombre de quadrilatères ordonnés, non isométriques, inscrits dans \mathcal{P}_n . Ce nombre correspond au nombre de solutions entières du système

$$\begin{cases} x + y + z + t = n - 4; \\ 0 \leq x \leq y \leq z \leq t. \end{cases} \tag{6.3}$$

Il convient de noter qu'en posant $x' = x + 1, y' = y + 1, z' = z + 1$ et $t' = t + 1$, le nombre de solutions du Système (6.4) est égal $p(n, 4)$.

Alors, on a le résultat suivant

Théorème 6.4. $\forall n \geq 4, \square(n) = p(n, 4)$.

Un quadrilatères inscrit dans \mathcal{P}_n peut être formé de

1. 4 côtés de \mathcal{P}_n , $n = 4$,
2. 1 corde et 3 côtés de \mathcal{P}_n , $n \geq 5$,
3. 2 cordes et 2 côtés de \mathcal{P}_n , $n \geq 6$,
4. 3 cordes et 1 côté de \mathcal{P}_n , $n \geq 7$,
5. 4 cordes \mathcal{P}_n , $n \geq 8$.

On distingue deux types de quadrilatères ordonnés, les quadrilatères propres dont le nombre est noté $\square_P(n)$ et les quadrilatères impropres dont le nombre est noté $\square_I(n)$.

6.3.2 Quadrilatères ordonnés impropres

Le nombre de quadrilatères ordonnés formés de

- 1 corde et 3 côtés de \mathcal{P}_n est égal à $p(n-4, 1) = 1$, $\forall n \geq 5$,
- 2 cordes et 2 côtés de \mathcal{P}_n est égal à $p(n-4, 2) = \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor$, $\forall n \geq 6$,
- 3 cordes et 1 côté de \mathcal{P}_n est égal à $p(n-4, 3) = \left\{ \frac{(n-4)^2}{12} \right\}$, $\forall n \geq 7$.

Il vient,

Proposition 6.1. Pour $n \geq 7$,

$$\square_I(n) = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{(n-4)^2}{12} \right\}.$$

La figure 6.3, illustre cette idée en montrant les 5 quadrilatères impropres ordonnés non-isométriques inscrits dans \mathcal{P}_9 .

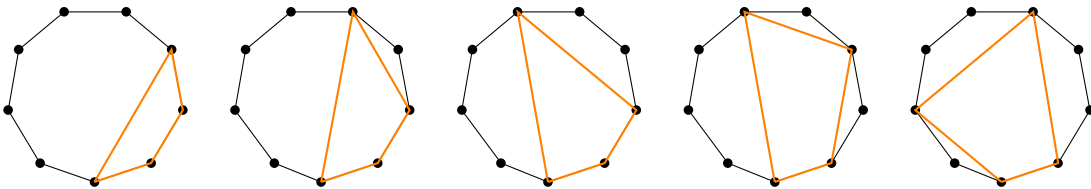


FIG. 6.3 – $\square_I(9)$ quadrilatères impropres ordonnés non-isométriques.

6.3.3 Quadrilatères ordonnés propres

Le nombre $\square_P(n)$ de quadrilatères ordonnés propres, non isométriques, inscrits dans \mathcal{P}_n est caractérisé par le système suivant

$$\begin{cases} x + y + z + t = n - 4; \\ 1 \leq x \leq y \leq z \leq t, \end{cases} \quad (6.4)$$

ce qui correspond au nombre $p(n - 4, 4)$. Le Théorème 6.3 d'introduire le résultat suivant

Proposition 6.2. *Pour $n \geq 8$,*

$$\square_P(n) = \left\{ \frac{(n-4)^3}{144} + \frac{(n-4)^2}{48} - \chi(n \equiv 1 \pmod{2}) \cdot \frac{n-4}{16} \right\}.$$

La figure 6.4, illustre cette idée en montrant les 5 quadrilatères propres ordonnés non-isométriques inscrits dans \mathcal{P}_{12} .

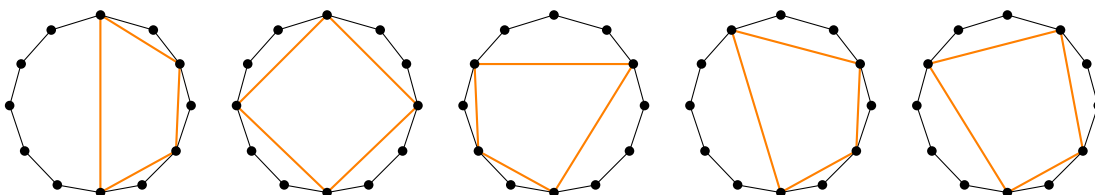


FIG. 6.4 – $\square_P(12)$ quadrilatères propres ordonnés non-isométriques.

Nous sommes maintenant en mesure de présenter le corollaire suivant

Corollaire 6.2. *Pour $n \geq 8$, le nombre de quadrilatères ordonnés non-isométriques inscrits dans \mathcal{P}_n est*

$$\left\{ \frac{n^3}{144} + \frac{n^2}{48} - \chi(n \equiv 1 \pmod{2}) \cdot \frac{n}{16} \right\} = \left\lfloor \frac{n-2}{2} \right\rfloor + \left\{ \frac{(n-4)^2}{12} \right\} + \left\{ \frac{(n-4)^3}{144} + \frac{(n-4)^2}{48} - \chi(n \equiv 1 \pmod{2}) \cdot \frac{n-4}{16} \right\}.$$

Preuve 6.5. *Le résultat découle immédiatement du fait que $\square(n) = \square_P(n) + \square_I(n)$.*

□

6.4 Relation entre les triangles et les quadrilatères

Théorème 6.5. Pour $n \geq 3$, on a

$$\Delta(n) = \square_I(n+1).$$

Preuve 6.6. Il suffit de considérer un quadrilatère impropre ordonné non-isométrique inscrit dans \mathcal{P}_{n+1} ayant un coté qui engendre une partition de taille un et de le contracter (joindre ses deux sommets), ainsi le contracté du graphe initial de \mathcal{P}_{n+1} représente le polygône \mathcal{P}_n et le contracté du graphe initial du quadrilatère impropre représente un triangle.

□

6.5 Relation entre $t(n, k, 2)$ et les quadrilatères

Dans cette section, nous montrons un exemple d'une application géométrique pour les résultats présentés dans le chapitre 3.

Théorème 6.6. Soient $n \geq 9$ et n impair et $\diamond(n)$ le nombre de quadrilatères ordonnés non isométriques propres inscrits dans \mathcal{P}_n , utilisant trois cordes égales. On a

$$\diamond(n) = \begin{cases} \frac{n-5}{4} + \left\lfloor \frac{n-5}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 1 \pmod{4}; \\ \frac{n-7}{4} + \left\lfloor \frac{n+1}{12} \right\rfloor, & \text{si } n \equiv 3 \pmod{4}. \end{cases}$$

Preuve 6.7. Les cordes appartenant au quadrilatère ordonné inscrit dans \mathcal{P}_n , n étant impair et $n \geq 9$, séparent le nombre de sommets de \mathcal{P}_n en quatre parts, sans prendre en considération les sommets du quadrilatères. En d'autres mots, chaque quadrilatère généré une partition de $n-4$ en quatre parts, ayant seulement deux types de parts et vice versa.

Alors

$$\diamond(n) = t(n-4, 4, 2),$$

et le résultat découle du Théorème 3.2.

□

Exemple 6.1. La figure 6.5, illustre cette idée dans \mathcal{P}_{19} . Le premier quadrilatère est généré par la partition $15 = 1 + 1 + 1 + 12$, le deuxième par $15 = 2 + 2 + 2 + 9$, le troisième par $15 = 3 + 3 + 3 + 6$ et le quatrième par $15 = 3 + 4 + 4 + 4$.

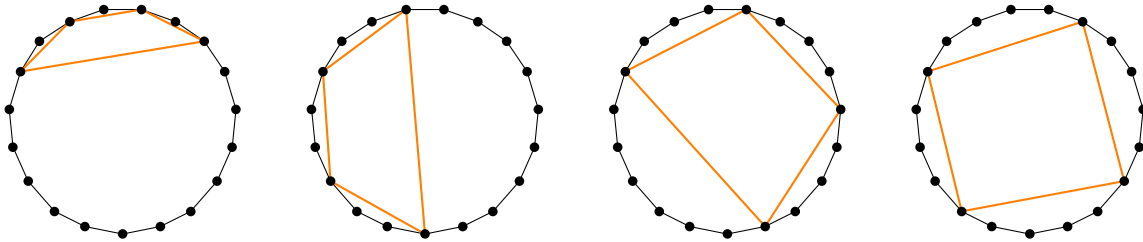


FIG. 6.5 – Quadrilatères ordonnés non-isométriques propres inscrits dans \mathcal{P}_{19} , utilisant trois cordes égales.

Conclusion et perspectives

Dans la littérature il est dit que les partitions d'un entier ont beaucoup d'applications [7], néanmoins, cette thèse est rédigée dans l'optique de la recherche fondamentale, sans s'attarder sur les applications pratiques.

Tout au long de ce document, nous avons essayé d'apporter notre modeste contribution au développement de la théorie des partitions en étudiant quelques propriétés combinatoires des partitions d'un entier. Peut être qu'un jour des applications pratiques surgiront et trouveront les outils théoriques nécessaires pour leurs résolutions.

Nous nous sommes en premier lieu intéressé aux partitions d'un entier en parts formant des suites en progressions arithmétiques et géométriques, où nous avons pour un nombre n donné, présenté et caractérisé ces partitions.

En second lieu, nous avons présenté plusieurs identités de récurrences relatives aux partitions d'un entier en k parts utilisant seulement s types de parts distinctes, ainsi qu'une formule permettant de calculer le nombre de partitions de n en k parts utilisant 2 types de parts, ce dernier résultat à généré une application géométrique motivée par l'étude des nombres de triangles et de quadrilatères non isométriques inscrits dans un polygone régulier à n côtés, qui à son tour, nous a permit d'établir des résultats concernant les nombres $p(n, 3)$ et $p(n, 4)$ présentés dans le dernier chapitre.

Par la suite nous avons utilisé la fonction génératrice du nombre $p(5n + 4)$ donnée par Ramanujan pour établir une nouvelle identité des polynômes complets de Bell.

Pour finir, nous nous sommes contentés de présenter les algorithmes de construction du diagramme de Hasse de $Pi(n)$, le poset des partitions d'un entier, de l'application $BNBSIP$ que nous avons développé lors de nos recherches effectuées dans le cadre de la préparation de notre mémoire de magister et que nous n'avons pas cessé d'enrichir jusqu'à nos jours, dans le but d'étudier les propriétés intrinsèques de $Pi(n)$. Cette application nous est d'une

utilité incontournable dans la mesure où elle nous permet de vérifier nos résultats.

L'exploration de ces identités mathématiques n'est toujours pas finie puisque des articles de journaux sont encore publiés sur ce sujet.

Nous présentons ici quelques directions qui peuvent faire l'objet de travaux de recherche ultérieurs ainsi que des idées pouvant faire suite aux résultats obtenus dans ce travail.

- Généraliser le résultat obtenu dans le troisième chapitre, $t(n, k, 2)$, en considérant $t(n, k, s)$,
- Reprendre les algorithmes de l'application *BNBSIP* en utilisant une autre structure de données, cela peut permettre de pousser les calculs plus loin et de tester plus de propriétés,
- Utiliser des fonctions génératrices connues relatives aux partitions d'un entier pour l'élaboration de nouvelles identités des polynômes complets de Bell,
- Déterminer une formule généralisant les résultats obtenus dans le dernier chapitre, concernant les nombres de triangles et de quadrilatères non isométriques inscrits dans un polygone régulier à n côtés,
- Plusieurs problèmes restent ouverts dans ce domaine, tels que le problème de Borwein, le problème de Leibniz, le problème de la parité de $p(n)$, etc, nous espérons, dans l'avenir, apporter notre contribution à leur résolution.

Bibliographie

- [1] M. Abbas and S. Bouroubi, ' On new identities for Bell's polynomials ', *Discrete Mathematics* **293** (2005), 5-10.
- [2] M. Aigner, ' *Combinatorial theory* ', Springer-verlag, Berlin / Heidelberg / NewYork, (1979).
- [3] V.B.Alekseev, ' On the number of k-valued functions ', *Probl. Kibernet*, **28** (1974), 5-24.
- [4] V.B. Alekseev, ' Use of symmetry in finding the width of partially ordered set ', *Diskret Analiz Vyp.* **26** (1974), 20-35.
- [5] G.E. Andrews, ' A note on partitions and triangles with integer sides ', *Amer. Math. Monthly* **86** (1979), 477-478.
- [6] G.E. Andrews, ' *The theory of partitions* ', Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, U.K., (1998).
- [7] G.E. Andrews and K. Eriksson, ' *Integer partitions* ', Cambridge University Press, Cambridge, (2004).
- [8] F.C. Auluck, S. Chowla and H. Gupta, ' On the maximum value of the number of partitions n into k parts ', *Journal of the Indian Math* **6** (1942), 105-112.
- [9] M. Barnabei, F. Bonetti and M. Silimbani, ' Bijections and recurrences for integer partitions into a bounded number of parts ', *Applied Mathematics Letters* **22** (2009), 297-303.
- [10] H. Belbachir, ' *Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques* ', Thèse de Doctorat d'Etat, Université U.S.T.H.B, Alger, (2007).
- [11] H. Belbachir, **N. Benyahia Tani**, S. Bouroubi, A. Khelladi, ' An explicit formula for $p(n,3)$ using a combinatorial approach ', *les annales ROAD du Laboratoire LAID3* N° **02** (2007), 20-30.

- [12] E. T. Bell, Exponential polynomials, *Annals of Mathematics* **35** (1934), 258-277.
- [13] E. A. Bender and E. R. Canfield, ' Log concavity and a related property of the cycle index polynomials ', preprint.
- [14] M. Benoumhani, ' A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers ', *Journal of Integer Sequences* Vol **6**(2003).
- [15] **N. Benyahia Tani**, ' *Étude du poset des partitions d'un entier* ', Mémoire de magister, Université U.S.T.H.B, Alger, (2006).
- [16] **N. Benyahia Tani** and S. Bouroubi, ' Enumeration of the partitions of an integer into parts of a specified number of different sizes and especially two sizes ', *Journal of Integer Sequences*, to appear.
- [17] G. Berman and K. D. Fryer, ' *Introduction to combinatorics* ', Academic press New York & London, (1972).
- [18] A. Bjorner and R. P. Stanley, ' *Combinatorial miscellany* ', CUP draft, (2004).
- [19] M. Bona, ' *A walk through combinatorics* ', World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, Singapore, (2006).
- [20] S. Bouroubi, ' *Étude du treillis des partitions* ', Thèse de magister, Université U.S.T.H.B, Alger, (1991).
- [21] S. Bouroubi, ' The Alekseev condition on the principal filters in the partition lattice ', *Maghreb Math.Rev*, **19** (2000), 37-42.
- [22] S. Bouroubi, ' Amélioration de la borne de convergence de l'algorithme de Konrad ENGEL pour la détermination d'une représentation optimale dans un poset fini ', *Maghreb Math.Rev*, **1** (2002),126-135.
- [23] S. Bouroubi and M. Mihoubi, ' Sur quelques relations relatives aux nombres des partitions d'un entier ', *Maghreb Math.Rev*, **11** June (2002), 14-19.
- [24] S. Bouroubi, ' *Optimisation dans les posets* ', Thèse de Doctorat d'Etat, Université U.S.T.H.B, Alger, (2004).
- [25] S. Bouroubi and **N. Benyahia Tani**, ' On the poset of partitions of an integer ', *les annales ROAD du Laboratoire LAID3*, **8** (2006).
- [26] S. Bouroubi and **N. Benyahia Tani**, ' Integer partitions into arithmetic progressions', *les annales ROAD du Laboratoire LAID3*, **29** (2008).

- [27] S. Bouroubi and **N. Benyahia Tani**, ' Integer partitions into arithmetic progressions with an odd common difference ', *INTEGERS*, **9** (2009), 77-81.
- [28] S. Bouroubi and **N. Benyahia Tani**, ' Integer partitions into arithmetic progressions', *Romako, Rostock. Math. Kolloq.*, **64** (2009), 11-16.
- [29] S. Bouroubi and **N. Benyahia Tani**, ' A New Identity for Complete Bell Polynomials Based on a Formula of Ramanujan ', *Journal of Integer Sequences*, **12** (2009).
- [30] T. Britz and P. Cameron, ' *Partially ordered sets* ', Syracuse University, November (2001).
- [31] C. P. Bruter, ' *Introduction aux méthodes de dénombrement* ', (1974), I.M.D.
- [32] E. R. Canfield and L. H. Harper, ' Large antichains in the partition lattice ', *Random structures Algorithms*, **6** (1995), 89-104.
- [33] E. R. Canfield, ' The size of the largest antichain in the partition lattice ', *JCT-A*, **83** (1998), 188-201.
- [34] E. R. Canfield and K. Engel, ' An upper bound for the size of the largest antichain in the poset of partitions of an integer ', *Discrete Applied Mathematics*, **95** (1999), 169-180.
- [35] W. S. Chaou, Leetsch C. Hsu, Peter J.-S. Shiue, ' Application of Faà di Bruno's formula in characterization of inverse relations ', *Journal of Computational and Applied Mathematics*, **190** (2006), 151-169.
- [36] A. Charalambos Charalambides, ' *Enumerative Combinatorics* ', Chapman & Hall / CRC, (2002).
- [37] F. Claudel, D. Barsky and *al*, ' Les partitions d'entier ', *Math en Jeans*, (1995).
- [38] L. Comtet, ' *Analyse Combinatoire* ', Presses Universitaires de France, Paris, (1970).
- [39] L. Comtet, ' *Advanced Combinatorics* ', D.Reided Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).
- [40] R. Cook and D. Sharp, ' Sums of arithmetic progressions ', *Fibonacci Quarterly*, **33** (1995), 218-221.
- [41] R. P. Dilworth, ' A decomposition theorem for partially ordered sets ', *Ann. of Math.* **2** (1950), 161-166.

- [42] K. Engel, ' About k-optimal Representation of Posets ', *J.Inform, Process, Cybern*, EIK**25** (1989), 3-10.
- [43] P. Erdos and J. Lehner, ' The distribution of the number of summands in the partitions of a positive integer ', *Duke Math. J.*, **8** (1941), 335-345.
- [44] T. Doslic, ' Maximum product over partitions into distinct parts ', *Journal of Integer Sequences*, **8** (2005).
- [45] K. Engel and H. D. O .F. Gronau, ' Sperner Theory in partially Ordered Sets ', *BSB B.G. Teubner Verlagsgesellschaft, Leipzig*, (1985).
- [46] K. Engel, ' On the Average Rank of an element in a filter of the partition lattice ', *J.Combin.Theory Ser, A* **64** (1994), 67-78.
- [47] K. Engel, ' *Sperner Theory* ', Cambridge U. Press, (1997).
- [48] A. M. Garsia and S. C. Milne, ' A Rogers-Ramanujan bijection ', *J.Combin.Theory Ser. A*, **31(3)** (1981), 289-339.
- [49] E. Goursat, ' *Cours d'analyse mathématique* ', vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, (1902).
- [50] Y. Guo and X. Zhang, ' Partitions of a positive integer as the sum of even and odd numbers ', *J.Univ.Electron.Sci.Technol. China*, **35** (2006), 848-850.
- [51] G. G. Hardy, ' *Ramanujan* ', reprinted Amer. Math. Soc., Providence, (1999).
- [52] G. G. Hardy and S. Ramanujan, ' Asymptotic formulae in combinatory analysis ', *J.London Math. Society*, **17** (1918), 75-115.
- [53] R. Kenneth, ' *Elementary Number Theory and Its application* ', 4th ed., Addison-Wesley Pub. Co.
- [54] G.Kreweras, ' Sur une classe de problèmes de dénombrement liés au treillis des partitions des entiers ', *Cahiers du BURIO*, **6** (1965), 9-103.
- [55] M. Latapy and H. D. Phan, ' The lattice of integer partitions and it's infinite extension', *proceedings of ORDAI*, **99** (1999).
- [56] J. Laurendi, ' Partitions of Integers ', (unpublished), available at <http://www.artofproblemsolving.com/Resources/Papers/LaurendiPartitions.pdf>.
- [57] L. Lovász, ' *Combinatorial problems and exercises* ', Akadémiai Kiadó, Budapest, (1979).

- [58] P. A. MacMahon, 'Divisors of numbers and their continuations in the theory of partitions', *Proc. London Math. Soc.*, **2** (1919), 75-113; Coll. Papers II, 303-341.
- [59] T. E. Mason, 'On the Representation of an Integer as the Sum Consecutive Integers', *The American Mathematical Monthly*, **19**, (1912), 46-50.
- [60] M. Mihoubi, 'Polynômes multivariés de Bell et polynômes de type binomial', Thèse de Doctorat d'Etat, Université U.S.T.H.B, Alger, (2009).
- [61] A. O. Munagi and T. Shonhiwa, 'On the Partitions of a number into arithmetic progressions', *Journal of Integer Sequences*, **11** (2008).
- [62] M. A. Nyblom and C. Evans, 'On the enumeration of partitions with summands in arithmetic progressions', *Journal of Integer Sequences*, **11** (2008).
- [63] I. Pak, 'Partition bijections', a survey, *Ramanujan Journal*, **12** (2006), 5-75.
- [64] H. Rademacher, 'On the partition function $p(n)$ ', *Proc. London, Math. Soc.*, **43**(1937), 241-254.
- [65] J. Riordan, 'Derivatives of composite functions', *Bull. Amer. Math. Soc.*, **52** (1946), 664.667.
- [66] J. Riordan, 'Combinatorial Identities', Huntington, New York, (1979).
- [67] J. Riordan, 'An Introduction to Combinatorial Analysis', John Wiley & Sons, New York, 1958, Princeton University Press, Princeton, NJ, (1980).
- [68] L. J. Rogers, 'Second memoir on the expansion of certain infinite products', *Proc. London Math. Soc.*, **25** (1894), 318-343.
- [69] G. C. Rota, 'The number of partitions', *American Math.*, **71** (1964), 498-504.
- [70] K. R. S. Sastry, 'Partitions of natural numbers by arithmetic progressions', *Math. Comput.*, **27** (1993), 23-28.
- [71] R. P. Stanley, 'Enumerative Combinatorics', Volume 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).
- [72] J. H. Van Lint and R. M. Wilson, 'A Course in Combinatorics', Cambridge University Press, Second edition, (2001).
- [73] H. S. Wilf, 'Lecture on integer partitions', (unpublished), available at <http://cis.upenn.edu/~wilf>.

- [74] A. Zoghbi and I. Stojmenovic, 'Fast Algorithms for Generating Integer Partitions ',
Intern. J. Computer Math, **70** (1998), 319-332.