

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE GENIE CIVIL



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

En Génie Civil

Spécialité: Construction

Par

BELAID Toufik

Thème

*Etude de la stabilité latérale des éléments
en acier à section mono symétrique
-Cas des profils en U-*

Soutenue publiquement le 09/07/2009, devant le jury composé de

Mr M. CHABAAT	<i>Professeur</i>	USTHB	<i>Président</i>
Mme F. AMMARI	<i>Chargée de recherche</i>	USTHB	<i>Directrice du mémoire</i>
Mme H. HADJAB	<i>Maître de Conférences/A à l'USTHB</i>		<i>Examineurs</i>
Mr A. BOUKHALED	<i>Maître de Conférences/A à l'USTHB</i>		<i>Examineurs</i>
Mr B. AMEUR	<i>Maître de Recherche</i>	CGS	<i>Examineurs</i>

REMERCIEMENTS

Je saisis cette occasion pour adresser ma reconnaissance à Mme Fatiha AMMARI, Docteur Ingénieur, Chargée de recherche et chef de département à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, qui a assumé la direction du présent mémoire, pour sa bienveillance et son encouragement durant toute la période du présent travail.

Aussi mes prompts remerciements vont également aux membres de jury :

Professeur Mohamed CHABAAT qui nous a honorés en président la soutenance, Mme Hadda HADJAB Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB, Mr Ahmed BOUKHALED Maître de Conférences à la Faculté de Génie Civil de l'USTHB et Mr Boualem AMEUR Maître de Recherche au CGS

Un remerciement spécial est dédié à Dalila qui a collaborée énormément dans l'élaboration de ces travaux.

Enfin, je voudrais remercier du fond du cœur mes parents et mes frères et sœurs et spécialement ma femme sans qui je ne serais pas là aujourd'hui. Ils m'ont tous énormément apporté grâce à leurs expériences nombreuses et variées. Leur amour, leur écoute et leur soutien ont toujours été sans faille.

A ma fille Maysa

NOTATIONS

A	Aire de la section
a_{ij}	Coefficients sont des fonctions des charges appliquées
C	Centre de cisaillement
C_1	Coefficient prenant en compte la distribution du moment
C_2	Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Z relatives au centre de gravité.
C_3	Coefficient prenant en compte la dissymétrie de la section
C_4	Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Y relatives au centre de cisaillement.
C_b	Coefficient de variation du moment
c_r	Critique
E	Module d'élasticité
$E I_w$	Rigidité du gauchissement
$E I_z$	Rigidité de flexion par rapport à l'axe le plus faible,
f_y	Contrainte élastique de l'acier
G	Centre de gravité ; Module d'élasticité au cisaillement
GJ	Rigidité à la torsion de la poutre
h_c	Rayon
$I_x I_y I_z$	Moment d'Inertie par rapport aux axes x, y et z
I_0	Moment d'inertie polaire
I_ω	Moment d'inertie sectorielle inerte de Gauchissement
i	Rayon de giration
J	Constante de torsion.
k_w	Coefficient de gauchissement
L	Longueur de poutre,

L_b	Longueur de flambement de la poutre
M	Moment de flexion avec M_0 est la valeur maximale a l'extrémité
M_t	Moment de torsion
M_ω	Bi-moment
M_{bRd}	Moment résistant au déversement
Msd	Moment sollicitant
m_{lt}	Coefficient équivalent du moment constant
N	Effort normale
q	Flux de cisaillement
q_z	Charge appliquée suivant Z
Q	Quantité de chaleur transmise au système,
S_ω	Moment statique sectoriel,
$S1$	Système de chargement de référence
T_{Sd}	Sollicitation de torsion totale
$T_{v,Sd}$	Moment de torsion de St Venant ;
$T_{w,Sd}$	Moment de torsion non uniforme.
T_ω	Moment de torsion
T	Energie cinétique du système
t_f	Epaisseur de la semelle
t_w	Epaisseur de l'âme
U	Energie de déformation.
$u_M; v_M; w_M,$	Déplacements du point M
V	Effort tranchant
v	Déplacements dans les plans y-y
W	Energie fournie au système /Travail
W_{ext}	Travail créé dû aux forces extérieures au système,
W_{int}	Travail des forces intérieures,
w	Déplacements dans les plans z-z
$y_0 ; z_0$	Coordonnées du centre de cisaillement,.

y_c, z_c	Coordonnées du centre de torsion
α	Coefficient multiplicateur
$\beta_y; \beta_z; \beta_\omega$	Constants de WARNER
γ_{M1}	Coefficient de sécurité d'instabilités
Π	Energie potentielle
ΔT	Augmentation de l'énergie cinétique,
ΔU	Augmentation de l'énergie interne,
δ^2	Deuxième variation
δ_2	Flèche due a la charge du vent
$\delta_{b Rd}$	Flèche due à la charge critique
δ_{max}	Flèche due a la combinaison la plus défavorable
δU	Variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel,
δW_{ext}	Travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels
$\delta \Pi$	Variation de l'énergie potentielle
χ	Coefficient de réduction
ε_{xx}	Déformation
ε_l	Déformation linéaire
ε_{nl}	Déformation non linéaire
λ	Elancement
$\bar{\lambda}$	Elancement réduit
θ	Rotation autour de l'axe \vec{x}
σ	Contrainte normale
τ	Contrainte tangentielle
η	Facteur d'imperfection généralisée
Ω	Energie potentielle de ces forces.

ω COORDONNEE SECTORIELLE NORMEE
 ψ COEFFICIENT MULTIPLICATEUR DU MOMENT RESUME

De nombreux articles traitent le calcul du déversement élastique d'une poutre de section constante ou variable, symétrique ou mono-symétrique. En revanche, il existe très peu de méthodes

voir aucune permettant de prendre en compte la dissymétrie par rapport à l'axe de faible inertie dans l'évaluation du moment critique de déversement.

Dans la pratique, il est fréquent d'avoir des éléments en acier à section mono symétrique suivant leur axe de faible inertie (profilé en U)

En développant l'ensemble de la partie théorique, nous allons proposer une expression du moment critique de déversement pour ce type de profilés ainsi que son adaptation à la réglementation technique en cours d'exécution à citer le CCM 97.

Pour conclure, nous allons comparer les résultats trouvés avec les résultats trouvés dans la littérature.

ABSTRACT

Many articles deal with the calculation of elastic lateral buckling of a constant or adjustable section bar, either symmetrical or mono symmetrical.

On the other hand, there are hardly methods which allow taking into account the asymmetry with regard to the axis of weak inertia in the assessment of the critical moment of lateral buckling.

Practically, it is frequent to have steel components with asymmetric section following their weak inertia axis (channel section).

When developing the overall of the theoretical side, we are going to suggest an expression of the critical moment of lateral buckling for this kind of profiles and of its adaptation to technical regulation in force, I quote CCM97.

To conclude, we are going to compare the obtained results to the existing results.

ملخص

هناك عدة نصوص تتناول حساب الانحدار المرين لعارضة سوا كانت ذو مقطع ثابتة أو متغيرة، تناظرية أم أحادية التناظر. من جهة أخرى هناك قلة من الطرق وربما لا توجد أي منها تسمح باحتساب عدم التناظر بالنسبة لمحور المقاومة

الذاتية الضعيفة في تقدير العزم الحاسم للانحدار.

تطبيقا، اعتدنا على وجود عناصر فولاذية ذات مقطع أحادي التناظر تتبع محور المقاومة الذاتية الضعيف

(على شكل U)

مع تقدمنا في الدراسة النظرية سنقترح تعبيراً يناسب العزم الحاسم للانحدار خاص بهذا الشكل و كذلك لتأقلمها مع

التنظيم التقني المعمول به للذكر CCM97

في الختام سنجري مقارن بين النتائج التي تحصلنا عليها و النتائج المعروفة سابقا

LISTE DES FIGURES

Figure 1.1 : Flambement d'un poteau 11

Figure 1.2 : Flambement par torsion des poteaux cruciformes	12
Figure 1.3 : Flambement par torsion et flexion des poteaux en U	13
Figure 1.4: Déformation d'un profilé à âme élancée	15
Figure1.5: Déformation d'un profilé à âme massive.....	15
Figure 1.6 : Déversement d'une poutre en I.....	16
Figure 1.7 : Déformations dus au déversement.....	17
Figure 2.1: Elément poutre.....	23
Figure 2.2: Poutre droite à plan moyen.....	23
Figure 2.3 : Ligne moyenne Figure 2.4: Section droite	24
Figure 2.5: Vues à différentes échelles d'un béton	25
Figure 2.6: Courbes effort/déplacement pour différents ressorts	27
Figure 2.7: Visualisation de l'hypothèse de Navier Bernoulli	28
Figure 2.8: Déformation d'une poutre en I due a la torsion.....	30
Figure2.9 : Photos de la "grille" avant (à gauche) et après (à droite) déformation	31
Figure2.10: Vue "3D" idéalisée de la grille avant et après déformation	31
Figure 2.11: Vue idéalisée de la grille avant et après déformation	32
Fig. 2.12: Déformation de la section droite	34
Fig2.13: Etat de contraintes.....	34
Fig. 2.14: Couple de torsion par rapport à l'axe x-x.....	35
Figure 3.1 : Etats d'équilibres	42
Figure 3.2 : Déformation d'une poutre sur appuis	42
Figure 3.3 : Déformation d'une poutre cantilever.....	43
Figure 4.1 : Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien	55
Figure 4.2 : Modèle de VLASOV	57
Figure 5.1 : Illustration de la méthode des différences finis d'EULER.....	68
Figure 6.1 : Courbes d'imperfections.....	82
Figure 6.2 : Flambement d'un poteau bi articulé avec un défaut initial et chargé axialement	83
Figure 6.3 : Moment linéairement variable.....	87
Figure 6.4 : Compartimentage des moments appliqués	88
Figure 7.1 : « Variation de $M_{b,Rd}$ en fonction de la section d'acier (IPE-UAP) ».....	93
Figure 7.2 : « Variation de δ_{lim} en fonction de la section d'acier (UAP) »	96

Table des matières

RESUME.....	0
LISTE DES FIGURES	5
1 INTRODUCTION.....	10
1.1 SITUATION DU PROBLEME.....	10
1.2 ETAT DE LA RECHERCHE.....	18
1.3 MOTIVATION DE CE TRAVAIL.....	20
2 ELEMENTS DE RESISTANCE DES MATERIAUX.....	22
2.1 INTRODUCTION	22
2.2 GENERALITE	22
2.3 HYPOTHESES SUR LE MATERIAU	24
2.4 HYPOTHESES FONDAMENTALES DE LA RDM.....	27
2.5 SOLLICITATION ELEMENTAIRE « TORSION ».....	29
2.6 CONCLUSION	37
3 CRITERE D'INSTABILITE.....	39
3.1 INTRODUCTION	39
3.2 RAISONS DE LA NON LINEARITE DANS UNE STRUCTURE	40
3.3 ETATS D'EQUILIBRE STABLE ET INSTABLE.....	41
3.4 CRITERES GENERAUX DE LA STABILITE ELASTIQUE	42
3.5 PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL.....	44
3.6 PRINCIPE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE STATIONNAIRE	46
3.7 STABILITE DE L'EQUILIBRE	47
3.8 EQUILIBRE NEUTRE - CHARGEMENT CRITIQUE.....	47
3.9 CONCLUSION	49
4 ETUDE D'UN ELEMENT POUTRE A PAROIS MINCE.....	51
4.1 INTRODUCTION	51
4.2 EQUATION DIFFERENTIELLE D'EQUILIBRE.....	52
4.3 ETUDE D'UN ELEMENT A PAROIS MINCES	54
4.4 FORMULATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE.....	58
4.5 CONCLUSION	61
5 TRANSFORMATION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE ET RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE.....	63
5.1 INTRODUCTION	63
5.2 APPLICATION DES METHODES ENERGETIQUES GENERALES AUX SYSTEMES ELASTIQUES.....	63
5.3 COEFFICIENT DE RAYLEIGH.....	65
5.4 METHODE DE RAYLEIGH-RITZ.....	66
5.5 METHODE DE GALERKIN	67
5.6 METHODES NUMERIQUES	68
5.7 CHOIX DE LA METHODE	69

5.8	RESOLUTION PAR LA METHODE DE GALERKIN.....	69
5.9	DETERMINATION DES COEFFICIENTS C_i	77
5.10	CONCLUSION	79
6	PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DANS LA FORMULATION DE M_{bRd} .	81
6.1	INTRODUCTION	81
6.2	FORMULATION DES COURBES DE FLAMBEMENT	82
6.3	CALCUL DE $M_{B RD}$	85
6.4	RESUME POUR LE CALCUL DE M_{bRd}	86
6.5	TRAITEMENTS OU PROCEDURES REGLEMENTAIRES	87
6.6	CONCLUSION	90
7	RESULTATS ET INTERPRETATIONS	92
7.1	NUMERISATION DES RESULTATS.....	92
7.2	ANALYSE DE LA STABILITE ET LA RESISTANCE	92
7.3	ANALYSE DES DEFORMATIONS (LA FLECHE).....	95
7.4	RECAPITULATIF	98
8	CONCLUSION	100
	BIBLIOGRAPHIE	101
	ANNEXE I : DEVELOPPEMENT DU CALCUL DE β_z	104
	ANNEXE II : EXEMPLE DE CALCUL D'UNE PANNE DE TOITURE.....	106
	ANNEXE III : VALEURS DE $M_{B RD}$ POUR LES LONGUEUR ETUDIEES	109

Chapitre 1

INTRODUCTION

1 INTRODUCTION

1.1 SITUATION DU PROBLEME

A l'heure actuelle, les facteurs les plus importants dans l'étude d'un projet sont d'une part l'économie et d'autre part la sécurité. La satisfaction à l'exigence économique, dans le cas des structures en acier, nous incite à utiliser des éléments légers et par conséquent élancés. L'élancement élevé d'un élément l'expose à des phénomènes d'instabilités qui sont souvent prépondérants dans le dimensionnement de cet élément.

Au cours de ces dernières années, les exigences de plus en plus pressantes de l'industrie ont donné l'essor à toute une série de recherches et d'études théoriques et pratiques sur les conditions qui gouvernent la stabilité d'éléments de construction tels que les poutres et les tôles.

Les premiers problèmes d'instabilité élastique, se rapportant au flambement de pièces comprimées, ont été résolus il y a plus de deux cents ans par L. Euler [1]. A cette époque, les principaux matériaux de construction étaient le bois et la pierre. Leur résistance relativement faible nécessitait des pièces trapues pour lesquelles la question de la stabilité élastique ne jouait pas un rôle de premier plan. C'est pourquoi la théorie d'Euler relative à des pièces de forme élancée, demeura longtemps sans application pratique. Ce ne fut qu'au début de la construction des ponts en acier pour les chemins de fer que la question du flambement des pièces minces prit une importance pratique, l'emploi de l'acier conduisit naturellement à des types de constructions comportant des pièces élancées soumises à la compression.

Les recherches sur la stabilité des éléments élancés ont montré que leur utilisation présente certains inconvénients. On peut citer :

- l'exigence d'un calcul plus poussé,
- les difficultés de fabrication,
- l'exigence de la bonne compréhension des phénomènes d'instabilités qui les affectent, car le manque de connaissances dans ce domaine amène à un mauvais dimensionnement des éléments, source de beaucoup de dégâts par le passé.

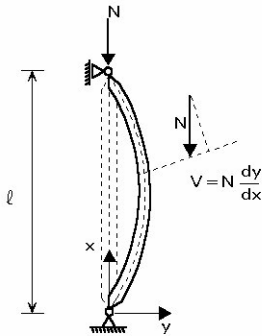
Quels sont donc les principaux phénomènes d'instabilités à craindre lors d'une conception de structures composées principalement d'éléments poutres ?

Les codes font référence à trois situations principales habituellement : dépendant de la rigidité flexionnelle, de la rigidité de torsion et de la géométrie de la section, une poutre peut être confrontée aux types d'instabilités suivants :

- Flambement d'ensemble de la poutre par compression ;
- Déversement d'ensemble de la poutre par flexion ;
- Voilement local des parois de la poutre par compression et par cisaillement.

Le déversement d'ensemble des poutres fléchies ainsi que le flambement d'ensemble des poteaux comprimés, et qui peut se produire selon plusieurs manières, seront décrit ci-après.

1.1.1 FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR FLEXION



A la charge critique, l'équilibre stable du poteau rectiligne se trouve à sa limite et il existe une configuration légèrement déformée du poteau qui peut aussi satisfaire l'équilibre [1] (figure 1.1).

Pour cette configuration, le moment de flexion, à chaque position de la section droite et pour une poutre bi articulée, est donné par :

$$M = N \cdot y \quad (1.1)$$

Figure 1.1 : Flambement d'un poteau

Si l'on utilise l'équation différentielle donnée par la théorie de la flexion simple et en considérant de grands déplacements :

$$\frac{\frac{d^2 y}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}} = -\frac{M}{EIz} \quad (1.2)$$

ou son approximation $\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EIz}$ qui se révèle suffisamment précise pour des charges voisines de la charge critique et pour de petits déplacements; si on introduit l'équation (1.1), on obtient alors :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{N \cdot y}{EIz} = 0 \quad (1.3)$$

La solution générale de cette équation est :

$$y = A \sin kx + B \cos kx$$

Avec $k^2 = \frac{N}{EIz}$

Après résolution de l'équation (1.3) on trouve :

$$N_{cr} = \pi^2 \frac{EI_z}{L^2} \quad (1.4)$$

1.1.2 FLAMBEMENT DES POTEAUX PAR TORSION

L'instabilité due au flambement par torsion ne peut se développer que dans des circonstances spéciales. Ce type de flambement est illustré au moyen d'un barreau en compression composé de quatre pans saillants identiques, constituant une section cruciforme. Si une telle poutre était simplement appuyée le long de l'axe du poteau, elle flamberait de telle sorte que toute ligne OA du pan, perpendiculaire aux bords longitudinaux, resterait approximativement rectiligne, bien que tournant autour du point O. Cette forme de flambement, où l'axe du barreau reste rectiligne, mais les sections tournent est appelé « flambement par torsion » [1].

Comme de la torsion intervient dans un tel processus de flambement, la contrainte critique de flambement élastique dépend en partie de la rigidité de torsion de Saint-Venant et de la rigidité de gauchissement. De plus, les liaisons terminales vis-à-vis de la torsion et du gauchissement doivent apparaître dans les facteurs numériques utilisés [2].

Comme pour le flambement par flexion, on doit aussi tenir compte des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles et des effets dus à la plasticité du matériau et à l'écroutissage [2]. En ce qui concerne les imperfections géométriques initiales, la rotation initiale du barreau et le manque de planéité des composants de la section sont, comme on peut le comprendre, les plus significatifs. A la différence du flambement par flexion, pour lequel on a beaucoup d'informations, la résistance ultime associée au flambement par torsion ne peut pas être estimée avec une grande précision à cause du manque d'expériences suffisamment documentées et des résultats correspondants des tests. On accepte généralement que la procédure utilisée pour le flambement par flexion puisse être étendue au flambement par torsion, sous réserve de faire l'hypothèse que les diminutions de résistance dues aux imperfections et à la plasticité sont semblables dans les deux cas, si on les exprime en coordonnées normées [2]. L'élancement normé est logiquement défini de la manière suivante :

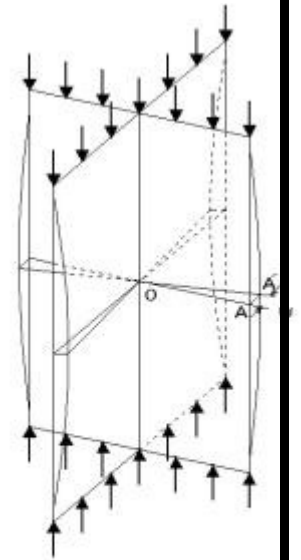


Figure 1.2 : Flambement par torsion des poteaux cruciformes

$$\bar{\lambda}_T = \sqrt{\frac{fy}{\sigma_{cr,T}}} \quad (1.5)$$

où $\sigma_{cr,T}$ représente la contrainte critique de flambement par torsion élastique.

1.1.3 FLAMBEMENT PAR FLEXION-TORSION

Les déplacements de flexion et de torsion se combinent quand le centre de cisaillement et le centre de gravité de la section ne coïncident pas. Ceci a pour conséquence une réduction de la charge critique de flambement par rapport à celle du flambement par flexion.

Pour illustrer cette forme de flambement, on considère une barre soumise à une charge de compression uni axiale appliquée au centre de gravité, de telle sorte que les sections terminales subissent une contrainte uniformément appliquée. Dès que le barreau a tendance à flamber dans la direction y-y, c'est-à-dire par flexion par rapport à l'axe z-z, la flèche $v(x)$ crée un moment de flexion $M(x) = N \cdot v(x)$, donnant naissance à un cisaillement correspondant :

$$q = -\frac{dV(x)}{dx} = -N \frac{d^2v(x)}{dx^2} \quad (1.6)$$

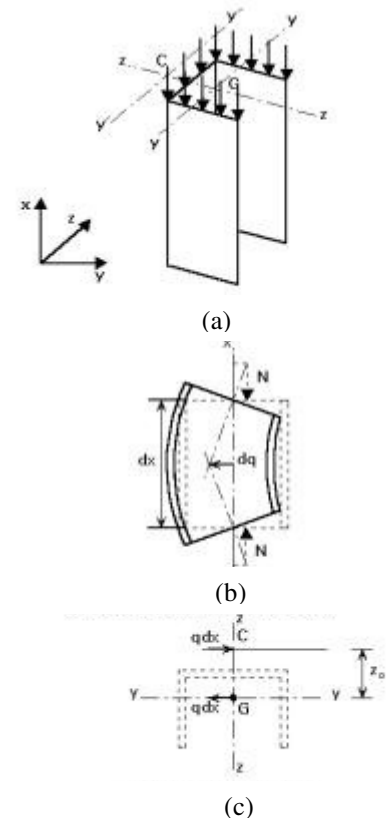


Figure 1.3 : Flambement par torsion et flexion des poteaux en U

Tout se passe comme si le barreau était soumis à des forces distribuées transversales agissant dans le plan y-y contenant le centre de gravité G et non pas dans le plan z-z qui contient le centre de cisaillement C (figure 1.3 c). De ce fait, la flexion par rapport à l'axe z-z et le cisaillement correspondant induisent un moment de torsion $dM_t = q \cdot z_0 \cdot dx$, où z_0 représente la distance entre le centre de gravité et le centre de cisaillement.

Ceci veut dire qu'un flambement purement par flexion dans le plan y-y est impossible, parce que les déformations de flexion et de torsion sont inévitablement couplées [1].

Le flambement par flexion-torsion est déterminé par trois équations différentielles d'équilibre qui contiennent les dérivées des trois fonctions : déplacements v et w dans les plans $y-y$ et $z-z$ et la rotation θ .

Dans le cas usuel du barreau bi articulé, parfaitement libre de se gauchir, c'est-à-dire $v = v'' = 0$, $w = w'' = 0$ et $\theta = \theta'' = 0$ aux extrémités, la contrainte critique de flambement par flexion-torsion vaut :

$$\sigma_{cr,FT} = \frac{\sigma_{cr,zz} + \sigma_{cr,T} \pm \sqrt{(\sigma_{cr,T} - \sigma_{cr,zz})^2 + 4\sigma_{cr,zz}\sigma_{cr,T}\left(\frac{z_0}{r_0}\right)^2}}{2\left[1 - \left(\frac{z_0}{r_0}\right)^2\right]} \quad (1.7)$$

où y_0 et z_0 sont les coordonnées du centre de cisaillement, avec $r_0^2 = y_0^2 + z_0^2$.

On voit que cette valeur est toujours plus faible que la contrainte de flambement par flexion, $\sigma_{cr,zz}$ par rapport à l'axe $z-z$ et que la contrainte de flambement par torsion $\sigma_{cr,T}$.

Le flambement par flexion-torsion entraîne des déformations dues à la fois au flambement du poteau par flexion et par torsion. La résistance ultime associée sera alors modifiée par tous les types d'imperfections, dans la mesure où elles modifient ces deux phénomènes de base [2].

Comme dans le cas du flambement de poteau en torsion, on manque d'information sur la perte de résistance de flambement par flexion-torsion due aux imperfections, aux contraintes résiduelles et à la plasticité du matériau ; ici encore, on peut généraliser la procédure utilisée pour le flambement par flexion en utilisant les mêmes courbes de résistance normée, en supposant que l'élanement normé est défini de la manière suivante :

$$\bar{\lambda}_{FT} = \sqrt{\frac{fy}{\sigma_{cr,FT}}} \quad (1.8)$$

1.1.4 DEVERSEMENT DES POUTRES

Quand une poutre est soumise à une flexion selon son axe d'inertie la plus grande, due, soit à des couples d'extrémités, soit, plus classiquement, à des charges transversales, une des deux semelles ainsi que la partie adjacente de l'âme, est comprimée, et, donc, susceptible de flamber [2]. Ce phénomène d'instabilité est appelé « déversement ».

Le flambement de la semelle comprimée dans le plan de l'âme est normalement empêché par l'âme, en raison de la grande rigidité de cette dernière dans son propre plan ; le flambement de la semelle dans son plan est donc, le plus souvent, critique, parce que l'âme ne fournit qu'un encastrement limité dans cette direction. Quand l'âme est très élancée, elle risque probablement de se déformer, de telle sorte que l'encastrement est négligeable et le déversement est très proche du flambement de la semelle par flexion par rapport à l'axe le plus faible de la section droite (figure 1.4) [5]. Une âme massive, toutefois, se comporte en gros comme un élément plaque rigide et le déversement amène la section à tourner (figure 1.5) [5]. A cause de la rotation des axes principaux par rapport à leurs directions initiales, la déformation qui en résulte est une combinaison de torsion et de flexion latérale

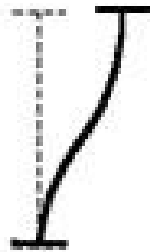


Figure 1.4: Déformation d'un profilé à âme élancée

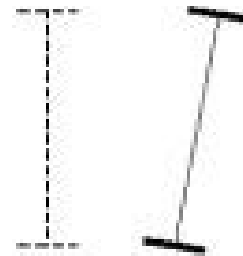


Figure 1.5: Déformation d'un profilé à âme massive

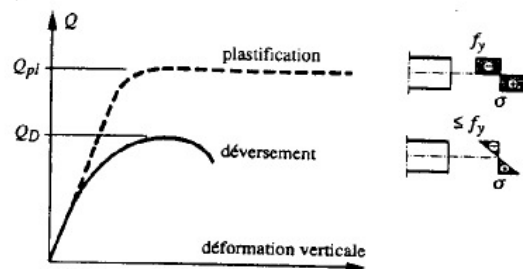
Pour une poutre parfaite, chargée dans la direction de la flexion la plus forte, le déversement se produit pour une valeur critique du moment fléchissant maximum ou de la contrainte de compression maximum [2]. Cette valeur dépend de plusieurs facteurs : la distribution de moment le long de la poutre (forme du diagramme de moment fléchissant), les conditions aux limites (maintiens en flexion, torsion et gauchissement), le niveau d'application des charges transversales et la possible dissymétrie de la section droite. Comme ce flambement mêle torsion et flexion selon l'axe le plus faible, le moment fléchissant critique pourra s'exprimer en termes de longueur de poutre L , de rigidités en torsion et vis-à-vis du gauchissement, respectivement $G I_t$ et $E I_w$ et la de rigidité de flexion par rapport à l'axe le plus faible, $E I_z$.

Considérons une poutre simple, chargée dans le plan d'inertie maximale de sa section (cf. fig. 1.6.a). Pour un faible charge, elle fléchit dans ce plan d'inertie mais, si l'on augmente la

charge, la partie comprimée du profil va se dérober latéralement pour échapper à la compression [6].



(a)



(b)

Figure 1.6 : Déversement d'une poutre en I [6]

La résistance ultime de la poutre est alors limitée par une charge Q_D inférieure à la charge ultime- Q_{PI} correspondant à la plastification totale de la section la plus sollicitée (fig.1.6.b); la poutre montre un comportement instable.

En première approximation, on peut considérer le déversement comme étant le flambage latéral (dans le plan horizontal) de la membrure comprimée de la poutre [6].

Toutefois, quand la poutre déverse, chaque section subit en plus d'un déplacement latéral de l'aile comprimée une rotation autour de son centre de cisaillement. En effet, supposons que la partie comprimée de la poutre flambe latéralement et qu'elle subisse de ce fait un déplacement latéral v (cf. fig.1.7). On voit que cette partie ne peut pas flamber indépendamment des autres. La continuité avec la partie tendue du profil exige que les deux moitiés se tordent autour de leur centre de torsion respectif, d'un même angle [6]. Ainsi, l'étude du déversement doit faire aussi appel à des notions de torsion qui sera étudié dans ce qui suit.

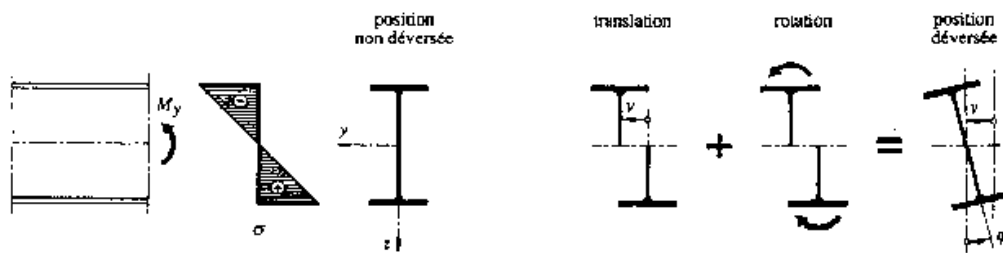


Figure 1.7 : Déformations due au déversement

Plusieurs chercheurs ont étudié le déversement afin de trouver une méthode de calcul générale, applicable à de nombreux cas pratiques. Les résultats des études théoriques, combinées aux résultats d'études expérimentales du déversement (pour prendre en compte les effets des imperfections sur la ruine par déversement), sont à l'origine des méthodes pratiques de vérification.

Les codes modernes des structures en acier, tel que AISC LRFD, BS 5950 et EC3, fournissent les méthodes et les procédures à suivre pour le dimensionnement des poutres à la stabilité au déversement [3]. Comme un premier pas, ces procédures exigent généralement la détermination du moment critique de déversement élastique.

1.1.5 FACTEURS INFLUENÇANT LA RESISTANCE AU DEVERSEMENT :

1.1.5.1 Influence des conditions d'appuis

La plus part des théories présentées sont basées sur l'hypothèse que les appuis aux extrémités de la poutre sont des appuis à fourche [7]. On prêtera donc une attention particulière à ces appuis de manière à garantir des conditions correspondant au moins à cette hypothèse.

Pour cela, on s'assurera qu'ils empêchent toute translation horizontale et toute rotation. On se situera du côté de la sécurité si l'on néglige les effets positifs d'un éventuel encastrement latéral des ailes [6].

Pour augmenter la charge critique de déversement d'une poutre donnée, il est souvent plus économique de disposer des appuis latéraux intermédiaires plutôt que de choisir une section plus importante [6].

Pour ce faire, on se contente, en général, d'appuyer la poutre au niveau de la membrure comprimée. Même si une légère rotation des sections est dans ce cas possible, on peut généralement la négliger [6].

1.1.5.2 Influence du point d'application de la charge

Le point d'application des charges extérieures, par rapport à la section droite de la poutre, peut également influencer la valeur du moment de déversement, suivant qu'elles créent un moment de torsion stabilisant ou déstabilisant. Or, la théorie du déversement présentée dans ce travail repose sur l'hypothèse que les charges agissent au niveau de l'axe de la poutre. On peut toutefois l'appliquer pour d'autres cas au vu des remarques ci-dessous.

Si les charges n'agissent pas au niveau de l'axe de la poutre, mais au niveau de l'aile inférieure la contrainte de déversement est légèrement plus élevée; on est donc du côté de la sécurité [6].

Si, par contre, les charges agissent au niveau de l'aile supérieure la contrainte de déversement diminue [6]. Sous cette forme théorique, sans éléments stabilisateurs au droit des charges, ce cas ne se rencontre guère dans la pratique. Les voies de roulement de ponts roulants font exception. Mais ces poutres-là sont dimensionnées entre autres pour des efforts horizontaux agissant au niveau du rail; le problème de stabilité est ainsi ramené à un problème de résistance [6].

1.1.5.3 Influence du mode de chargement

Le calcul du moment de déversement est fonction du type de chargement de la poutre, ou, en d'autres termes, de la répartition des moments de flexion.

1.2 ETAT DE LA RECHERCHE

L'étude du problème des poutres a attiré l'attention des chercheurs. PRANDTL et MICHELL [25] ont étudié séparément, en 1899, le déversement d'une poutre à section rectangulaire. De nombreuses recherches ont été faites dans le but de décrire les équations d'équilibre spéciales des pièces longues. TIMOSHENKO [1] est le premier qui a tenu compte, dans ses recherches, de l'effet du gauchissement pour les profilés en double té. En 1920, EGGEN-SCHWYLER [25] a montré que le centre de gravité n'est pas le seul point caractéristique de la section. MAILLART [25], quant à lui, a défini le centre de cisaillement. WAGNER [25] a étudié le flambement des profilés à section ouverte et à parois minces, en introduisant le concept de "gauchissement unitaire" ; de plus, il a supposé que lors du flambement, le centre de rotation

coïncide avec le centre de cisaillement. KAPPUS [25], quant à lui, a obtenu une théorie applicable à toutes les sections à parois minces, en utilisant le concept de WAGNER, "gauchissement unitaire", et le théorème de stationnarité de l'énergie potentielle totale.

La théorie générale du comportement des pièces longues à section ouverte et à parois minces a été abordée par des chercheurs comme, TIMOSHENKO [1] et VLASSOV [14].

A cause de son importance, le flambement latéral continue à attirer l'attention de beaucoup de chercheurs. Les solutions pour les cas simples peuvent être obtenues des livres traditionnellement [3] et cela en développant un modèle pour une poutre en I reposant sur des appuis en fourches [1].

B. LARUE dans son article [7] à considérer une poutre, de section en I constante et indéformable, maintenue élastiquement en rotation et en déplacement latéral de manière continue sur la longueur de la poutre, où l'auteur a essayé de couvrir l'ensemble des cas courants et cela en considérant une poutre soumise à une charge uniformément répartie et des moments d'extrémités.

Miguel A. Serna & al [3] et Steven M. Wilkerson [20] ont comparé dans leurs articles, pour des sections en I couramment utilisées dans la charpente du bâtiment, la variation du moment critique et cela en utilisant les approches réglementaires, la résolution par la méthode des éléments finis et la résolution par la méthode des différences finis. Une approche dans ce sens a fait l'objet d'une recherche établi par Bambang Suryoatmono et David Ho [9], quoique dans cet article les auteurs ont pris en compte plusieurs cas de charges.

La dissymétrie de la section et sa variation longitudinale ont fait l'objet d'une recherche établie par A. Andrade & D. Camotim [21], où les expressions obtenues ont été appliqué à une poutre bi-appuyée et à une console.

L'approche adoptée par l'EC3 [10], qui consiste à formuler l'expression du moment critique élastique de déversement en fonction de coefficients dépendant des conditions de charge et d'encastrement, a fait l'objet de plusieurs travaux de recherches. F. Mohri, A. Brouki, J.C.Roth [17] dans leur article ont utilisé la méthode de Ritz et Galerkin pour résoudre les équations et ont comparé les résultats trouvés avec les résultats de l'EC3 [10]. Bambang Suryoatmono, David Ho [9] ont comparé les résultats trouvés par la méthode des différences finis et ceux donnés par le AISC [3].

La stabilité au déversement des profilés laminés à froid a intéressé des chercheurs dont Xiao-ting Chu[22], où il a déterminé la charge critique d'un profilé en U laminé à froid appuyé à sa semelle supérieure pour une charge uniformément répartie.

1.3 MOTIVATION DE CE TRAVAIL

Malgré la recherche étendue rapportée dans la littérature sur l'étude de la stabilité au déversement, il n'existe pas de méthodes qui prennent en compte l'effet de la dissymétrie de la section par rapport à l'axe de faible inertie sur la stabilité latérale d'un élément.

L'utilisation des profilés en « U » comme lisse de bardage ou pannes de toitures, et en absence de formule de vérification de leur stabilité vis à vis le déversement dans la réglementation Algérienne [4] nous amène à chercher et à formuler une expression du moment critique de déversement élastique et à proposer des formules simples pour la vérification des pièces métallique à section mono symétrique suivant l'axe de faible inertie.

Le présent travail est réparti en huit chapitres.

Le chapitre 1 est une introduction à cette étude.

Au chapitre 2, on donne un rappel sur les notions essentielles de la RDM et plus précisément sur la torsion.

Le chapitre 3 montre les différents critères de stabilité existants. Il permet de choisir le critère qui convient à la présente étude.

Le chapitre 4 présente l'étude d'un élément à parois minces pour lequel nous allons définir l'équation d'équilibre

Le chapitre 5 donne les différentes méthodes de résolutions mathématiques, puis la résolution de l'équation en question ainsi que la détermination des différents coefficients intervenant dans le calcul du moment critique.

Le chapitre 6 présente l'introduction des imperfections géométriques dans la formule du moment critique, ainsi que les aspects réglementaires des codes les plus utilisés.

Le chapitre 7 consiste à présenter et à interpréter les résultats trouvés

Le chapitre 8 résume les conclusions les plus importantes qui découlent de ce travail.

Chapitre 2

ELEMENTS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

2 ELEMENTS DE RESISTANCE DES MATERIAUX

2.1 INTRODUCTION

La Résistance des Matériaux (RdM) est la science du dimensionnement. Elle est issue d'une théorie plus générale, la Mécanique des Milieux Continus, qui permet de concevoir une pièce mécanique, un ouvrage d'art ou tout objet utilitaire, c'est à dire d'abord imaginer les formes et le squelette géométrique qui remplissent les fonctions demandées ; et ensuite déterminer les quantités de matière nécessaires et suffisantes pour réaliser ces formes en assurant une résistance sans dommage de l'objet à tous les efforts auxquels il sera soumis pendant son service. Ce dimensionnement fait appel à des calculs qui prévoient le comportement de l'objet dont la conception doit réunir les meilleures conditions de sécurité, d'économie et d'esthétique.

2.2 GENERALITE

La RdM est une théorie simplifiée qui nécessite de ne s'intéresser qu'à des solides particuliers, considérés ici comme déformables. Ainsi un certain nombre de restrictions sont nécessaires pour pouvoir utiliser la RdM. Ces restrictions portent sur la géométrie du solide étudié, le matériau dont il est constitué, et dans une moindre mesure les liaisons et les efforts extérieurs. Nous allons donc détailler chacun de ces points.

2.2.1 DEFINITION GENERALE

Une poutre est un solide engendré par une surface plane (S) dont le centre d'inertie géométrique G décrit une courbe G_0G_1 , le plan de (S) restant normal à la courbe G_0G_1 (Fig. 2.2).

Le centre d'inertie peut dans de nombreux cas être confondu avec le centre de gravité. Nous avons supposé l'aire (S) constante ; la poutre est alors dite de section constante. Mais très souvent, en vue de proportionner les dimensions de la poutre aux efforts qu'elle doit supporter, l'aire (S) varie lorsque son centre de gravité décrit la fibre moyenne ; la poutre est alors dite de section variable, et l'on supposera que la section varie continument le long de la fibre neutre.

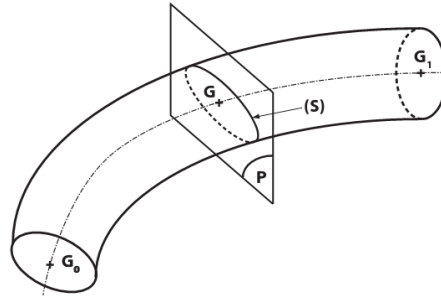


Figure 2.1: Élément poutre

2.2.2 RESTRICTION AU CAS DES POUTRES DROITES A PLAN MOYEN

Dans ce qui suit, nous ne nous intéresserons qu'aux poutres droites à plan moyen (voir Fig. 2.2).

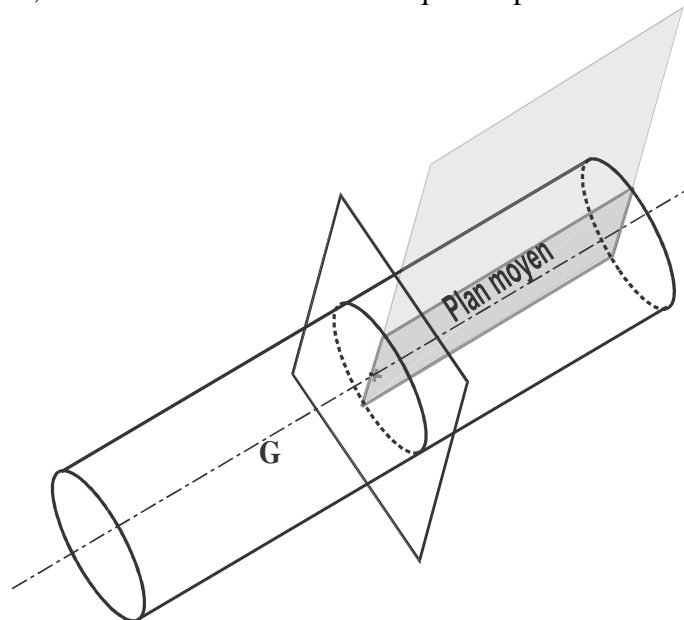


Figure 2.2: Poutre droite à plan moyen

Ainsi, une poutre est maintenant totalement définie par sa fibre moyenne et par sa section droite. Pour les poutres à section variable, il faut aussi se donner la forme de l'évolution le long de la fibre moyenne.

La fibre moyenne est un segment de droite qui est défini par une origine et par une extrémité.

On peut donc orienter la fibre moyenne et associer à la poutre un repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$.

Traditionnellement :

– le vecteur \vec{x} est le vecteur unitaire de la fibre moyenne,

- \vec{y} est tel que le plan (\vec{x}, \vec{y}) est le plan de symétrie ou plan moyen,
- le vecteur \vec{z} est choisi de tel sorte que le repère $(0, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ soit direct (Fig.2.3),
- le point O est positionné à l'origine de la fibre moyenne.

Pour décrire la poutre on peut donc la représenter par sa ligne moyenne et sa section droite (figure 2.3&2.4).

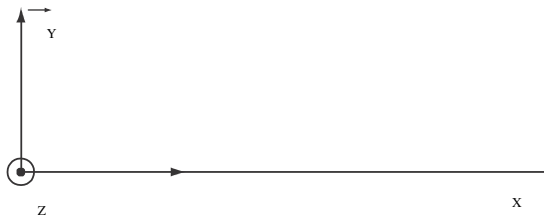


Figure 2.3 : Ligne moyenne

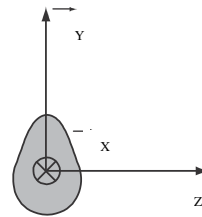


Figure 2.4: Section droite

2.3 HYPOTHESES SUR LE MATERIAU

Pour toute l'étude faite ici, nous allons considérer que le matériau dont est constituée la poutre est un matériau :

- homogène,
- isotrope,
- élastique linéaire.

Nous allons préciser chacun de ces points ci-après.

2.3.1 HOMOGENEITE

La notion la plus importante qu'il faut retenir concernant l'homogénéité est que, pour en parler, il faut nécessairement parler d'échelle. En effet, l'homogénéité se dit d'un milieu matériel qui présente des propriétés constantes dans toute son étendue. Ainsi, un milieu, quel qu'il soit, ne peut être considéré comme homogène qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle qui lui est propre [8]. Prenons l'exemple d'un matériau très courant comme le béton : lorsqu'on regarde un pilier d'un point suffisamment loin, on voit le béton

comme homogène. Pourtant le béton est un matériau composite de granulats, de ciment, d'eau et d'adjuvants (Fig.2.5).



Figure 2.5: Vues à différentes échelles d'un béton [11]

On peut se poser la même question avec un acier : si à une certaine échelle celui-ci est homogène, on peut descendre à l'échelle des grains qui le composent pour rapidement se rendre compte que c'est, à l'échelle microscopique, un matériau hétérogène.

Il est aussi important de s'intéresser à la répartition spatiale des hétérogénéités dans le matériau. En effet si cette répartition est régulière (périodique par exemple), on pourra se ramener plus facilement à un matériau homogène équivalent.

Ainsi, pour l'étude des poutres, il faudra que la plus grande dimension transversale soit grande (supérieure à 10 fois) par rapport à la dimension de la plus grande hétérogénéité présente dans le matériau (taille des granulats du béton par exemple). On peut aussi ajouter qu'en pratique c'est souvent un choix de modélisation de considérer qu'un matériau est homogène

2.3.2 ISOTROPIE

Un matériau est dit isotrope s'il présente les mêmes propriétés dans toutes les directions de l'espace. Par exemple, on peut le caractériser par le fait qu'un signal quelconque (son, courant électrique, etc.) peut se propager de la même manière dans toutes les directions.

De même que l'homogénéité, l'isotropie n'apparaît qu'au-dessus d'une certaine échelle dimensionnelle [8;11] : par exemple, un polycristal formé d'un grand nombre de grains anisotropes disposés aléatoirement paraît isotrope, à grande échelle.

S'agissant des caractéristiques mécaniques des matériaux, il est parfois assez intuitif de dire si un matériau est isotrope ou non. Si l'on considère un matériau qui possède des fibres ayant une direction privilégiée (comme le bois), du fait de l'orientation particulière de ces fibres, le bois ne sera pas isotrope.

Une expérience simple menée avec une peau de banane permet facilement de se rendre compte qu'il est plus facile de déchirer la peau en tirant dans la direction perpendiculaire à la plus grande direction (direction orthogonale aux fibres de la peau) qu'en tirant dans la direction des fibres.

2.3.3 ÉLASTICITE LINEAIRE

Un matériau est dit élastique s'il retrouve entièrement sa forme ou son volume après avoir subi un cycle de charge/décharge quelconque. Cette notion est implicitement liée à la réversibilité totale et au fait qu'au cours du chargement et du déchargement le matériau ne dissipe aucune énergie. On peut aussi dire que lors du chargement, le chemin suivi sera le même que lors de la décharge. L'état actuel du matériau ne dépend donc que des charges appliquées à l'instant considéré et non du chemin suivi.

Pour mieux comprendre cette notion prenons l'exemple d'un ressort a priori inconnu. On réalise un essai simple sur le ressort en lui appliquant un effort croissant jusqu'à une valeur maximale puis décroissant jusqu'à 0. Au cours de l'essai, on mesure le déplacement de l'extrémité. On trace alors l'évolution de l'effort appliqué F en fonction du déplacement U mesuré.

Quelques graphiques obtenus pour différents ressorts sont tracés sur la figure 2.6. Pour la courbe 1, le ressort n'est pas élastique, puisqu'il ne revient pas dans sa configuration initiale après la décharge.

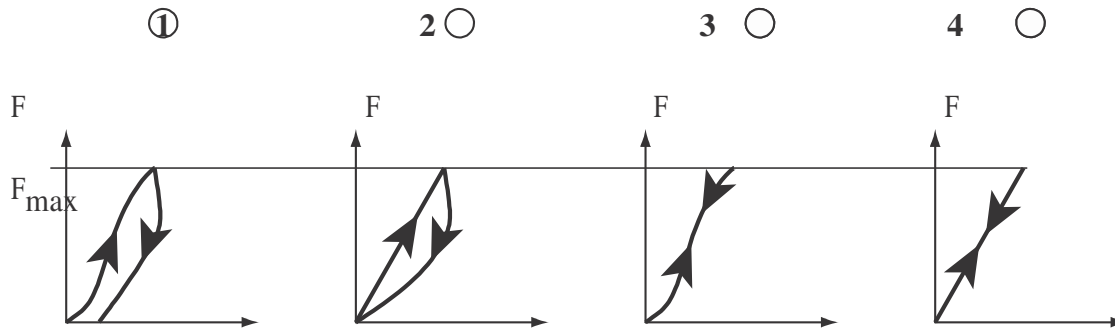


Figure 2.6: Courbes effort/déplacement pour différents ressorts

La courbe 2 ne décrit pas non plus un comportement élastique puisqu'à la charge et à la décharge, les chemins suivis ne sont pas les mêmes.

Les courbes 3 et 4 sont toutes deux caractéristiques d'un ressort élastique. Par contre, seule la quatrième courbe caractérise un comportement élastique linéaire (La relation liant F à U étant linéaire).

2.4 HYPOTHESES FONDAMENTALES DE LA RDM

2.4.1 PRINCIPE DE SAINT-VENANT ET CONSEQUENCES

Nous exploiterons le principe de Saint-Venant dont l'énoncé est : étant donné un solide déformable, si sur une partie (Σ) de sa frontière on remplace une distribution de forces appliquées par une autre distribution, constituant un torseur équivalent et agissant également sur (Σ), les sollicitations restent inchangées dans toute région du solide suffisamment éloignée de (Σ) [11].

La conséquence directe de ce principe est que les résultats obtenus par un calcul de RDM sur une poutre ne s'appliquent valablement qu'à une distance suffisamment éloignée de la région d'application des actions mécaniques extérieures concentrées et des liaisons. En pratique on peut considérer que les résultats sont valables à partir d'une distance égale à 2 fois la plus grande dimension transversale.

2.4.2 HYPOTHESE DE NAVIER-BERNOULLI

L'hypothèse de Navier-Bernoulli stipule que les sections normales à la ligne moyenne restent planes et normales à la ligne moyenne pendant la déformation de la poutre. Un énoncé souvent plus répandu est de dire que toute section droite (i.e. plane et perpendiculaire à la ligne moyenne) avant déformation reste droite après déformation (Fig. 2.7).

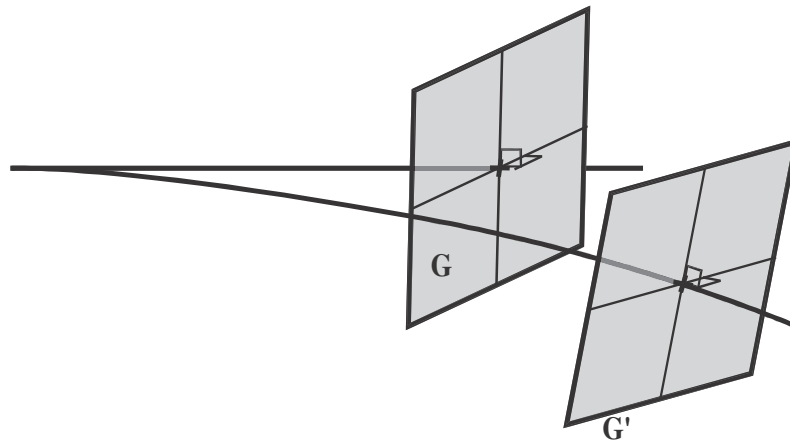


Figure 2.7: Visualisation de l'hypothèse de Navier Bernoulli

Cette hypothèse est bien vérifiée dans de nombreux cas de sollicitations simples.

Le fait que la section reste plane permet de caractériser le déplacement de toute section droite par un torseur appelé torseur des petits déplacements. Comme on se restreint ici à des poutres à plans moyens, ce torseur ne compte que quatre composantes non nulles associées :

- au déplacement dans la direction \vec{x} noté u
- au déplacement dans la direction \vec{y} noté v
- à la rotation autour de l'axe \vec{x} notée θ
- à la rotation autour de l'axe \vec{z} notée w

À partir de ce torseur, on peut aussi décrire le déplacement local d'un point quelconque M de la section (S) en déplaçant le torseur précédent au point M .

Avec ce qui précède, nous avons introduit deux notions fondamentales :

- les grandeurs globales, caractéristiques de la section droite,
- les grandeurs locales, caractéristiques d'un point de la section.

La grande force de la RdM consiste à résoudre les problèmes en ne travaillant que sur les grandeurs globales. La détermination des grandeurs locales, en particulier les contraintes que nous allons préciser par la suite (mais éventuellement aussi les déformations et les déplacements), est alors utile pour appliquer des critères de dimensionnement tels que par exemple :

- le critère en contrainte de type VON MISES,
- le critère en déformation (utilisé typiquement pour le béton),
- le critère en déplacement (par exemple la variation d'entraxe entre deux arbres d'une boîte de vitesse qui doit rester compatible avec les conditions de fonctionnement).

L'hypothèse de Navier-Bernoulli amène aussi la nécessité de restreindre le cadre d'étude à des sections particulières pour la torsion. En effet, on ne considèrera que la torsion des poutres à section circulaire : l'étude d'autres sections nécessiterait d'abandonner l'hypothèse de Navier-Bernoulli pour prendre en compte le gauchissement des sections [11] (pour une section droite, le gauchissement est le fait de se voiler en prenant une forme complexe).

2.5 SOLLICITATION ELEMENTAIRE « TORSION »

Lorsqu'un élément est soumis à une torsion, il se tord selon son axe longitudinal, qui passe par le centre de cisaillement de la section transversale [8]. Cependant, il ne se produit pas de torsion si la résultante du chargement externe appliqué passe par le centre de cisaillement de la section transversale. Dans des situations de calcul pratiques, il convient de préférence d'éviter la torsion en appliquant les charges de telle manière que leur résultante passe par le centre de cisaillement [11].

2.5.1 EFFETS DE LA TORSION

Lorsqu'une force entraînant une sollicitation de torsion dans un élément est appliquée de telle sorte que la rotation de torsion de l'élément modifie la distance entre la ligne d'action de la force et le centre de cisaillement de la section transversale, il convient de prendre en compte cet effet pour la détermination de la sollicitation s'exerçant dans l'élément au niveau d'une section transversale. Il convient en général de diviser la sollicitation de torsion totale T_{Sd} quelconque en deux parties telles que :

$$T_{Sd} = T_{v,Sd} + T_{w,Sd}$$

où :

$T_{v,Sd}$ est le moment de torsion de St Venant ;

$T_{w,Sd}$ est le moment de torsion non uniforme.

Les efforts typiques de torsion selon Saint Venant se produisent seulement si la déformation peut avoir lieu librement [13]. Dans la pratique en matière de technologie c'est rarement le cas. La déformation peut être retenue aux appuis, par exemple, une poutre à section en I en acier soudée d'un plat épais

La déformation est également retenue à la position d'un chargement imposé de moment de torsion.

La raison est que le chargement donne un saut dans le moment interne de torsion, qui donnerait un saut dans la déformation s'il pourrait se produire librement. Clairement, les sections à gauche et à droite du chargement sont jointes, ainsi la déformation là est retenue. La déformation est également retenue où la section transversale change (les faisceaux non-prismatiques) [11].

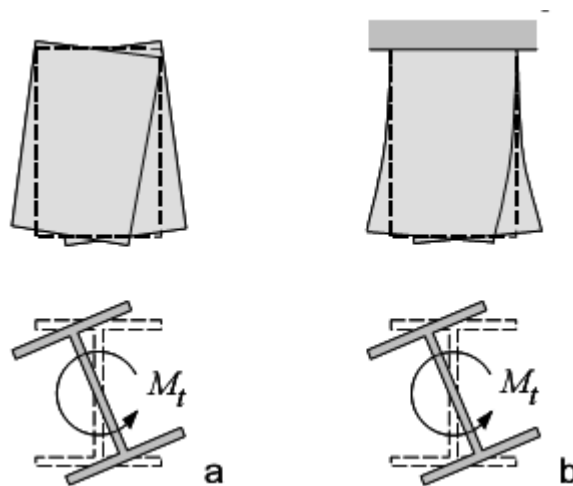


Figure 2.8: Déformation d'une poutre en I due à la torsion

En 1940, Vlassov a développé une théorie de torsion dans laquelle a retenu que la déformation est inclus [14]. Cette théorie s'appelle également « torsion de déformation » ou « la torsion non-uniforme ».

À côté de ceci la théorie de torsion de Saint Venant s'appelle également « torsion circulatoire » ou « la torsion uniforme ».

2.5.2 TORSION DE SAINT VENANT

On considère un barreau cylindrique soumis à une de ces deux extrémités à un moment porté par l'axe du barreau, et bloqué en rotation à son autre extrémité.

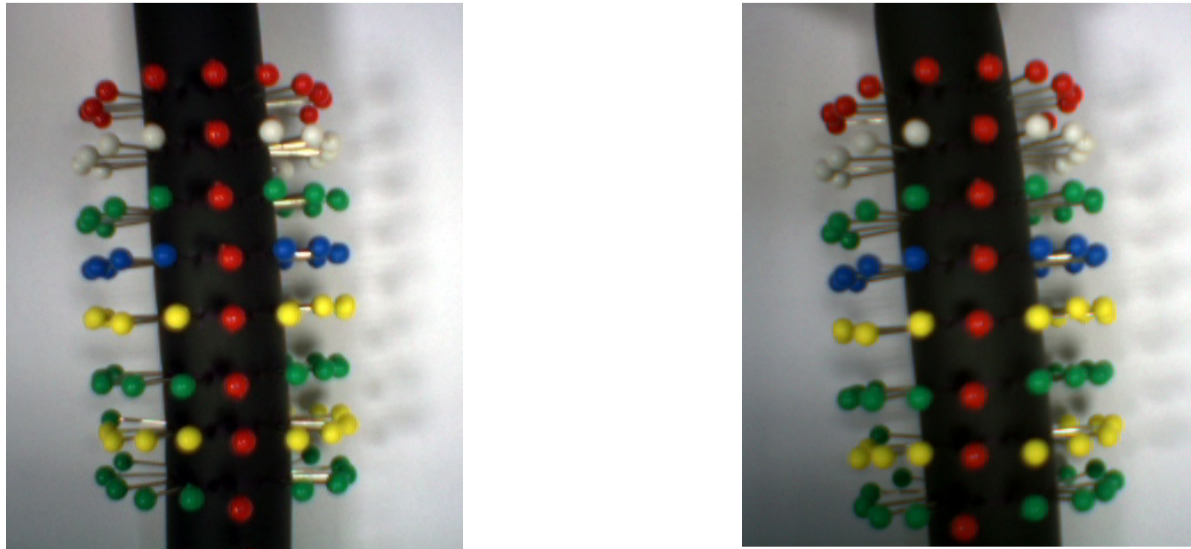


Figure2.9 : Photos de la "grille" avant (à gauche) et après (à droite) déformation [11]

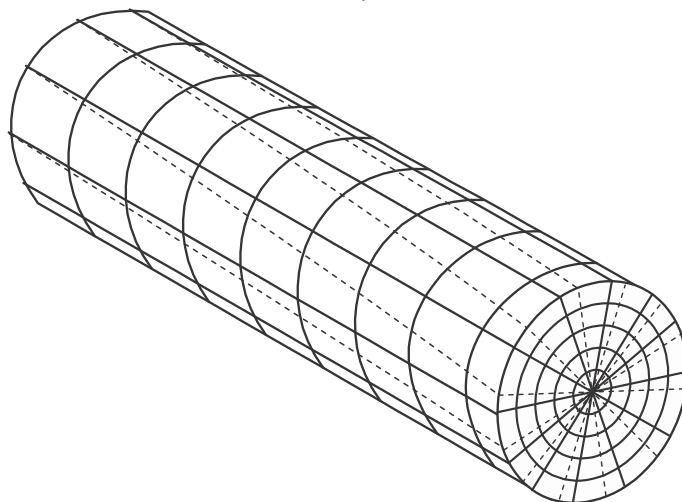


Figure2.10: Vue "3D" idéalisée de la grille avant et après déformation

L'étude de ce barreau montre immédiatement que l'on est bien dans le cadre de la torsion pure. Pour visualiser les déformations sur le barreau, on a dessiné une grille sur la surface cylindrique, ainsi que sur l'extrémité du barreau. La grille est matérialisée par des épingles, et on en donne une représentation sur la figure 2.10. Sur la figure 2.11 on a aussi représenté une vue de face et une vue de côté le même barreau. Sur ces deux figures, on a représenté aussi la grille une fois déformée par le moment de torsion.

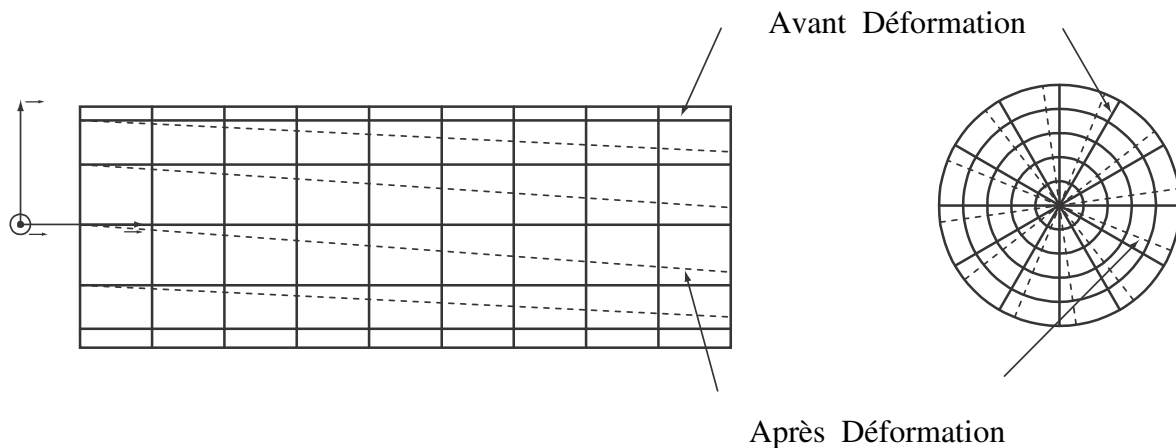


Figure 2.11: Vue idéalisée de la grille avant et après déformation

À l'issue de cette petite manipulation, on peut faire les constats suivants :

- Toute section plane et normale à l'axe du cylindre reste plane et normale à l'axe ce qui vérifie bien l'hypothèse de Navier-Bernoulli.
- La distance entre deux sections droites données reste sensiblement constante.
- Le mouvement d'une section droite est uniquement une rotation autour de son axe et cette rotation est proportionnelle à sa distance de la section encastree.

Ainsi, une génératrice du cylindre (une droite avant déformation) se transforme en une hélice sur le cylindre.

Des remarques précédentes on peut donc déduire que dans une section droite, il n'y a pas de déformation longitudinale donc pas de contrainte normale, les sections ont seulement un mouvement de rotation sans aucune translation, les seules contraintes sont donc des contraintes tangentielles

Si une poutre est déformée par des couples appliqués à ses extrémités et agissant dans des plans normaux à son axe, et si les extrémités sont libres de se mouvoir, on dit qu'il y a torsion pure [15]. Les seules contraintes produites sont de cisaillement. Leur distribution dépend de la forme de la section droite et est la même pour toutes les sections. Pour une poutre mince, on peut supposer, avec une approximation suffisante, que la contrainte en chaque point est parallèle à la tangente correspondante à l'axe de la poutre et est proportionnelle à sa distance à cet axe [11].

L'angle θ de torsion par unité de longueur est :

$$\theta = \frac{M_t}{GJ} \quad (2.1)$$

où M_t représente le couple et GJ la rigidité à la torsion de la poutre ; G est le module d'élasticité au cisaillement et J est le moment d'inertie de torsion pure.

2.5.3 TORSION NON UNIFORME DE POUTRES MINCES

Dans le cas de la torsion pure, le gauchissement est le même pour toutes les sections droites et s'effectue sans qu'il y ait déformation axiale des fibres longitudinales. Le cas de torsion non uniforme se produit lorsqu'une des sections droites n'est plus libre de se gaucher ou si le couple varie le long de la poutre [1]. Alors, le gauchissement variera le long de la poutre et il y aura donc tension ou compression des fibres longitudinales. De plus, l'angle θ variera le long de la poutre.

CINEMATIQUE

Dans le plan de la section le profil tourne autour du centre de cisaillement C

La variation selon S de la déformation hors du plan s'exprime [16] donc :

$$\frac{\partial w}{\partial s} = -\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{d\theta}{dx} h_C \quad (2.2)$$

La déformation hors du plan s'obtient en intégrant selon S, car θ [1] est constant pour la section donc sur S

$$w = -\frac{d\theta}{dx} \int_0^s h_C ds + w_0(x) \quad (2.3)$$

En définissant la coordonnée sectorielle Ω [16] par

$$d\Omega = h_C ds \quad (2.4)$$

On obtient une expression simple de la déformation hors du plan:

$$w = -\frac{d\theta}{dx} \int_0^s h_C ds + w_0(x) = -\frac{d\theta}{dx} \Omega + w_0(x) \quad (2.5)$$

Relation d'état : Loi de HOOKE

$$\sigma_x = E \varepsilon_x \quad (2.6)$$

Dans notre cas $\varepsilon_x = \frac{\partial w}{\partial x}$ (2.7)

$$\sigma_x = E \frac{\partial w}{\partial x} = E \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{d\theta}{dx} \int_0^s h_C ds + w_0(x) \right) \quad (2.8)$$

$$\sigma_x = -E \frac{d^2\theta}{dx^2} \Omega + E \frac{dw_0(x)}{dx}$$

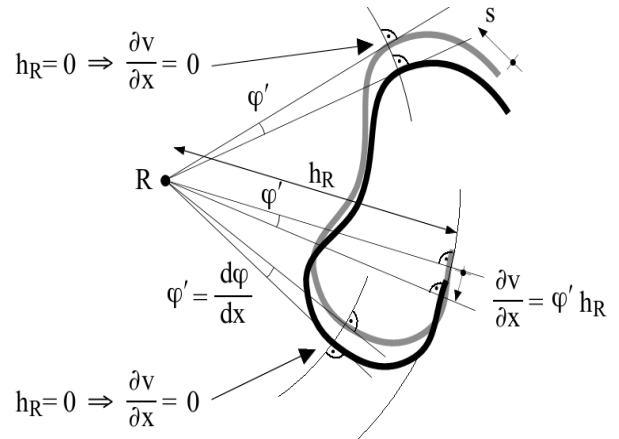


Fig. 2.12: Déformation de la section droite

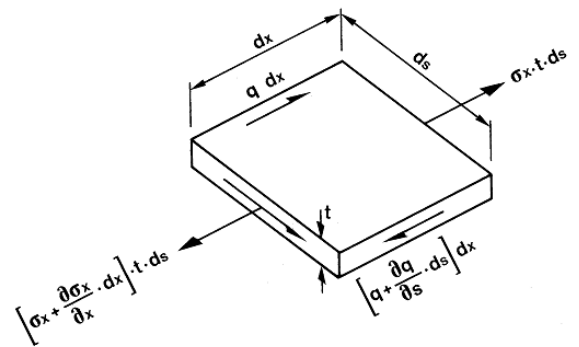


Fig2.13: Etat de contraintes

(2.9)

$q = \tau.t$ est le flux de cisaillement provenant de la variation de la contrainte normale σ_x [16]

La condition d'équilibre des forces selon x $\sum F_x = 0$ s'exprime par :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2.10)$$

PRINCIPE D'EQUIVALENC

Les axes y et z doivent être les axes principaux d'inerte de la section considérée

$$N = 0 = \int_A \sigma_x dA$$

$$M_y = 0 = \int_A \sigma_x z dA$$

$$M_z = 0 = \int_A \sigma_x y dA$$

En introduisant σ_x déterminée précédemment en (2.9)

$$\begin{aligned} N = 0 &= \int_A \sigma_x dA = \int_A \left(-E \frac{d^2\theta}{dx^2} \Omega + E \frac{dw_0(x)}{dx} \right) dA \\ &= -E \frac{d^2\theta}{dx^2} \int_A \Omega dA + E \frac{dw_0(x)}{dx} \int_A dA = 0 \quad (2.11) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E \frac{dw_0(x)}{dx} = E \frac{d^2\theta}{dx^2} \frac{\int_A \Omega dA}{\int_A dA} = E \frac{d^2\theta}{dx^2} \frac{\int_A \Omega dA}{A}$$

L'introduction de la coordonnée permet de simplifier l'expressic normale :

$$\omega = \Omega - \frac{\int_A \Omega dA}{\int_A dA} = \Omega - \frac{\int_A \Omega dA}{A} \quad (2.12)$$

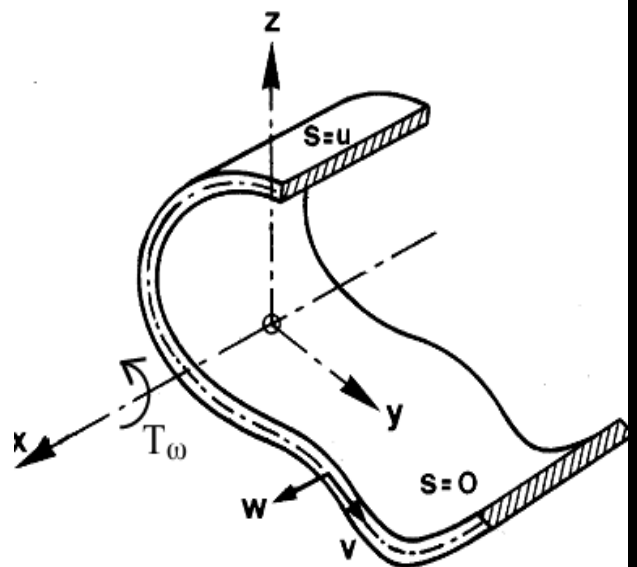


Fig. 2.14: Couple de torsion par rapport à l'axe x-x

$$\sigma_x = -E \frac{d^2\theta}{dx^2} \Omega + E \frac{dw_0(x)}{dx} = -E \frac{d^2\theta}{dx^2} \left(\Omega - \frac{\int \Omega dA}{A} \right) = -E \frac{d^2\theta}{dx^2} \omega \quad (2.13)$$

La condition d'équilibre devient :

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 = \frac{\partial}{\partial x} \left(-E \frac{d^2\theta}{dx^2} \omega \right) t + \frac{\partial q}{\partial s} = -E \frac{d^3\theta}{dx^3} \omega t + \frac{\partial q}{\partial s} = 0 \quad (2.14)$$

Le flux de cisaillement s'obtient en intégrant par rapport à S

$$q = E \frac{d^3\theta}{dx^3} \int_s \omega t . dS + q_1(x) \quad (2.15)$$

La constante d'intégration, $q_1(x)$ est nulle car elle représente le flux de cisaillement à l'origine du domaine d'intégration, donc au bord libre [16].

En introduisant le moment statique sectoriel, S_ω

$$S_\omega = \int_0^s \omega . dA = \int_0^s \omega t . dS \quad (2.16)$$

Le flux de cisaillement devient :

$$q = E \frac{d^3\theta}{dx^3} S_\omega \quad (2.17)$$

Le moment de torsion T_ω s'exprime selon le principe d'équivalence :

$$T_\omega = \int_s q . h_c dS = \int_s q d\Omega = \int_s q d\omega = q \omega \Big|_{s=0}^{s=u} - \int_s \omega \frac{\partial q}{\partial S} dS \quad (2.18)$$

Avec un flux de cisaillement nul aux bords libres (en S=0 et S=u)

$$T_\omega = - \int_s \omega \frac{\partial q}{\partial S} dS = - \int_s \omega \left(E \frac{d^3\theta}{dx^3} . \omega t \right) dS = -E \frac{d^3\theta}{dx^3} \int_A \omega . \omega dA \quad (2.19)$$

En définissant le moment d'inertie sectorielle I_ω

$$I_\omega = \int_0^s \omega^2 . dA = \int_0^s \omega^2 . t . dS \quad (2.20)$$

Le moment de torsion devient

$$T_{\omega} = -E \frac{d^3 \theta}{dx^3} I_{\omega} \quad (2.21)$$

En définissant le bi-moment : $M_{\omega} = -EI_{\omega} \frac{d^2 \theta}{dx^2}$ (2.22)

Les expressions des contraintes sont analogues à la flexion :

$$\sigma_x = -E \frac{d^2 \theta}{dx^2} \omega = \frac{M_{\omega}}{I_{\omega}} \omega \quad (2.23)$$

$$\tau_{XS} = \frac{q}{t} = \frac{T_{\omega} S_{\omega}}{I_{\omega} t} \quad (2.24)$$

2.6 CONCLUSION

Le développement de l'expression du bi-moment et du moment d'inertie sectorielle I_{ω} dit aussi inertie de gauchissement nous permet d'aborder l'étude de la stabilité au déversement, mais pour cela les différents principes d'équilibre et de stabilité doivent être passés en revue, c'est ce qui fera l'objet du chapitre suivant.

Chapitre 3

CRITERE D'INSTABILITE

3 CRITERE D'INSTABILITE

3.1 INTRODUCTION

Les théories sur la stabilité ont été élaborées afin de déterminer les conditions par lesquelles une structure, en équilibre, cesse d'être stable. L'instabilité est essentiellement une propriété des structures de géométrie extrême, comme par exemple les éléments comprimés d'élanement important, les plaques minces plates ou encore les coques minces cylindriques.

Tout d'abord, un critère de stabilité est une condition suffisante définissant un système instable. Plusieurs critères sont utilisés dans le domaine élastique avec beaucoup de succès ; on peut citer :

- le critère de bifurcation,
- le critère cinétique,
- le critère de l'énergie,

3.1.1 CRITERE DE BIFURCATION

Ce critère est aussi connu sous les noms de méthode géométrique, méthode classique, méthode de l'équilibre adjacent. Mathématiquement, c'est un problème de valeurs propres. Cette méthode est très ancienne et fréquemment utilisée de nos jours dans le domaine linéaire.

Dans cette méthode, on tente de répondre à la question suivante : soit une cause extérieure appliquée de manière quasi-statique sur un système ; pour quel niveau cette cause permet-elle au système de prendre plus d'une position d'équilibre différente mais très proche ?

3.1.2 CRITERE CINEMATIQUE

Appelé aussi méthode dynamique, dans laquelle les équations d'équilibre sont établies pour un niveau fini de la cause extérieure ; bien entendu, ce niveau est inférieur à celui de la charge critique. On crée alors une perturbation dans le système dont on observe les influences sur le mouvement ; parallèlement, le niveau de charge est augmenté de plus en plus jusqu'à ce que le mouvement devienne illimité ; on a atteint le niveau critique. Par conséquent, l'équilibre est dit stable si pour une petite variation de la position d'équilibre du système, ce dernier revient à sa position initiale ou demeure dans une position très proche de celle-ci. La condition critique est atteinte quand l'écart entre la position initiale et finale cesse d'être limité. Notons encore

que ce critère est purement dynamique et qu'il s'occupe du mouvement au voisinage de la position d'équilibre.

Nous dirons donc que l'équilibre d'un système est stable si, pour une perturbation suffisamment petite, le système évolue au voisinage de la configuration d'équilibre.

3.1.3 CRITERE DE L'ENERGIE

Dans cette méthode, le système doit être conservatif. Ce dernier est en équilibre stable quand l'énergie potentielle totale est minimale.

Le critère de l'énergie est basé sur la théorie de Lagrange-Dirichlet. Il est considéré comme une condition nécessaire et suffisante pour la stabilité. On l'utilise pour la découverte de la charge critique, simplement en cherchant le niveau de charge pour lequel le système ne répond plus de manière stable. Autrement dit, le système est stable si la variation de l'énergie potentielle totale est définie positive.

3.1.4 CRITERE DE STABILITE CHOISI

Pour déterminer la charge critique élastique pour le cas étudié dans le cadre de ce travail, nous avons choisi comme critère de stabilité, le critère de l'énergie. Ce choix a été retenu après l'examen des travaux des chercheurs dans le domaine et qui nous a amené à déduire que l'emploi de ce critère nous conduit à approcher le comportement réel des éléments.

L'utilisation de la méthode choisie exige des connaissances qui seront détaillées dans ce chapitre.

3.2 RAISONS DE LA NON LINEARITE DANS UNE STRUCTURE

Dans une structure, la relation entre les charges et les déformations ou entre les charges et les efforts internes peut devenir non linéaire pour deux raisons :

- 1.- Le matériau n'est pas élastique et n'obéit pas à la loi de Hooke. Cela définit la classe des problèmes de non linéarité physique.
- 2.- Si le matériau est linéaire mais que les déplacements de la poutre changent de façon sensible l'action des forces, les conditions d'équilibre doivent être formulées dans la position

déformée de la structure et ainsi, la relation entre les charges et les déformations ou entre les charges et les efforts internes n'est plus linéaire ; cela définit la classe de non linéarité géométrique.

Dans le cas général, il y a apparition simultanée des non linéarités physique et géométrique.

La non linéarité complique considérablement les calculs, d'une part à cause des complications mathématiques inhérentes aux équations non linéaires, d'autre part à cause du choix, parmi plusieurs solutions mathématiques possibles, de celle qui est intéressante dans l'optique d'applications pratiques.

Ce problème ne se pose pas pour la théorie linéaire puisque la linéarité des relations implique l'unicité de la solution.

3.3 ETATS D'EQUILIBRE STABLE ET INSTABLE

D'une manière générale, on peut définir la stabilité comme la capacité d'un système physique à revenir à l'équilibre lorsqu'il est perturbé légèrement.

Pour un système mécanique, on peut adopter la définition donnée par Dirichlet : **«L'équilibre d'un système mécanique est stable si, lorsque l'on déplace les points du système de leur position d'équilibre d'une quantité infinitésimale et en leur donnant à chacun d'eux une faible vitesse initiale, les déplacements des différents points du système restent, pendant le déplacement, contenus dans des limites imposées faibles » [2].**

Cette définition montre clairement que la stabilité détermine une qualité d'une solution (une solution d'équilibre) d'un système et que le problème de s'assurer de la stabilité d'une solution concerne le « voisinage » de cette solution particulière.

Si on considère un système élastique conservatif, initialement en état d'équilibre sous l'action d'un ensemble de forces, le système s'écartera de cet état d'équilibre seulement s'il subit une force perturbatrice temporaire. Si l'énergie fournie au système par cette force perturbatrice est W , on a alors :

$$W = T + \Pi = \text{constante (principe de conservation de l'énergie.)}$$

ou, T représente l'énergie cinétique du système et Π l'énergie potentielle.

Pour des corps rigides, la stabilité peut être illustrée par l'exemple bien connu de la bille sur un support courbe.

Si la bille repose sur une surface concave, l'équilibre est stable ; si l'on donne à la bille une vitesse initiale faible, elle commencera à osciller, mais restera à proximité de son état d'équilibre [8].

D'un autre côté, si le système n'est pas dans une configuration de Π minimum (énergie potentielle), alors le fait de lui donner une impulsion va conduire très rapidement à de grands déplacements et vitesses et on dit que le système est instable.

C'est le cas lorsque la bille repose au sommet d'une surface convexe ou au point d'inflexion horizontal d'une surface. Si la bille repose sur un plan horizontal, l'équilibre est dit «neutre»[2].

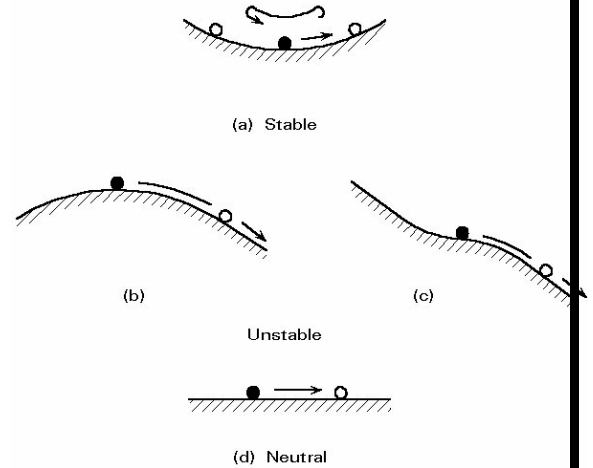


Figure 3.1 : Etats d'équilibres

3.4 CRITERES GENERAUX DE LA STABILITE ELASTIQUE

On considère les changements de la configuration d'un système à partir d'une configuration initiale ; tout changement dans cette configuration est considéré comme un déplacement. Une configuration est déterminée au moyen d'un nombre fini de variables réelles indépendantes, appelées coordonnées généralisées, notées ici $q_1, q_2 \dots q_n$ ou plus généralement q_i . Une poutre à travée unique peut, bien sûr, avoir un ensemble infini de coordonnées généralisées, comme par exemple les coefficients q_i de la série de Fourier représentant la flèche :

$$y = \sum_i q_i \sin \frac{i\pi x}{L}$$

Cette série peut cependant être approchée par un nombre fini de termes avec un nombre fini de coordonnées généralisées représentant les degrés de liberté du système. Si l'on considère

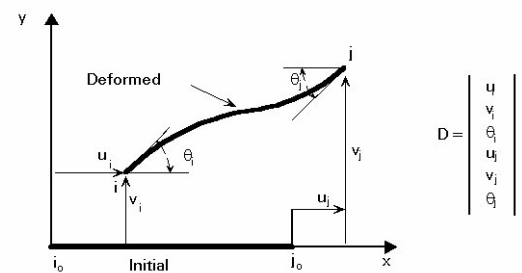
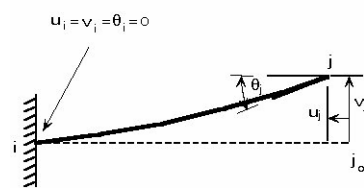


Figure 3.2 : Déformation d'une poutre sur appuis

la poutre de la figure 3.2, les coordonnées généralisées peuvent être les degrés de liberté des nœuds i et j aux extrémités de la poutre : deux translations u et v et une rotation θ par nœud (dans le plan). On suppose ici que l'ensemble de l'allure de la déformée élastique de la



$$D = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{pmatrix}$$

poutre peut être défini en utilisant, par exemple, des fonctions d'interpolation. Le vecteur déplacement de la poutre peut être noté :

Figure 3.3 : Déformation d'une poutre cantilever

$$D = (u_i, v_i, \theta_i, u_j, v_j, \theta_j).$$

Aux appuis, les conditions aux limites imposent des restrictions aux variables généralisées. Sur la figure 3.3, par exemple, les conditions aux limites sont telles que le vecteur déplacement est nul à l'extrémité encastree de la poutre console, d'où les restrictions imposées : $u_i = v_i = \theta_i = 0$.

Une structure est généralement soumise à des forces intérieures et extérieures ; les forces intérieures sont généralement des forces de traction (de décohésion), c'est-à-dire des forces dues aux contraintes, sur les faces d'un cube infiniment petit de matériau. Les forces extérieures agissent sur le volume (par exemple la gravitation), et/ou sur la surface (forces ou couples de contacts) de l'élément de la structure.

Lors d'un changement dans la configuration du système, la loi de conservation de l'énergie peut s'exprimer de la manière suivante :

$$W_{ext} + Q = \Delta T + \Delta U \quad (3.1)$$

où :

W_{ext} représente le travail créé dû aux forces extérieures au système,

Q représente la quantité de chaleur transmise au système,

ΔT représente l'augmentation de l'énergie cinétique,

ΔU représente l'augmentation de l'énergie interne,

U est souvent appelée énergie de déformation.

D'autre part, la loi de l'énergie cinétique est donnée par :

$$W = W_{ext} + W_{int} = \Delta T \quad (3.2)$$

où : W_{int} représente le travail des forces intérieures,

W représente le travail créé par toutes les forces appliquées au système.

Les équations (3.1) et (3.2) donnent :

$$W_{int} = Q - \Delta U \quad (3.3)$$

Comme on ne prend en compte ici que des processus adiabatiques : $Q = 0$

L'équation (3.3) donne : $W_{int} = -\Delta U \quad (3.4)$

N.B. : ΔU n'existe que pour des systèmes déformables ; pour un système rigide on a :

$$W_{int} = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta U = 0 \quad (3.5)$$

Comme on ne prend en compte ici que les aspects statiques, on suppose qu'il n'y a pas de variation de l'énergie cinétique pendant le déplacement (vitesse très faible) :

$$\Delta T = 0 \quad (3.6)$$

Des équations (3.1), (3.2) et (3.5) donnent :

$$W_{ext} = \Delta U \quad (3.7)$$

$$W_{ext} + W_{int} = 0 \quad (3.8)$$

La théorie de la stabilité élastique fournit des méthodes pour déterminer :

- La stabilité d'une configuration d'équilibre.
- La valeur critique de la charge à l'instabilité.

La plupart de ces méthodes dérivent des critères énergétiques généraux qui proviennent eux-mêmes des principes énergétiques de la mécanique.

3.5 PRINCIPE DU TRAVAIL VIRTUEL

L'étude des problèmes de stabilité fait généralement appel au principe du travail virtuel. Le problème est d'abord de trouver la configuration d'équilibre réel du système, si elle existe, puis ensuite de vérifier si cette configuration est stable.

Un système donné peut prendre un nombre quelconque de configurations déformées compte tenu des limites fixées par les conditions aux limites, mais seule l'une d'elles correspondant à l'équilibre entre les charges réellement appliquées et les réactions correspondantes.

Supposons qu'un système soit dans une configuration caractérisée par les coordonnées généralisées q_1, q_2, \dots, q_n et pour laquelle on recherche l'équilibre.

Supposons que ce système soit soumis à des déplacements petits, arbitraires à partir de cette configuration, on ne demandera à ces déplacements que de satisfaire les conditions aux limites, la structure étant soumise à son chargement réel. Les petits déplacements considérés ici ne sont pas nécessairement réels ; ils sont imaginaires et ne servent qu'à des fins de comparaison, c'est pour cela qu'on les appelle déplacements virtuels ; ces déplacements virtuels sont indépendants du chargement et sont notés ici δq_i .

Par conséquent, tous les travaux ou calculs énergétiques mis en œuvre sur ce système donneront lieu à des travaux ou énergie virtuels.

Pour un système déformable, l'équation (3.7) donne :

$$\delta W_{ext} = \delta U \quad (3.9)$$

où : δW_{ext} représente le travail virtuel des forces extérieures dans les déplacements virtuels et δU représente la variation de l'énergie de déformation dans le déplacement virtuel.

Le principe du travail virtuel peut être exprimé ainsi :

«Un système déformable est dans sa configuration d'équilibre si le travail virtuel de toutes les forces extérieures est égal à la variation d'énergie de déformation, dans tout déplacement virtuel satisfaisant les conditions aux limites»[2].

C'est là la forme du principe que l'on rencontre le plus souvent en analyse des structures ; cette condition est équivalente à la condition suivante, en utilisant l'équation (3.8) :

$$\delta W = \delta W_{int} + \delta W_{ext} = 0 \quad (3.10)$$

3.6 PRINCIPE DE L'ENERGIE POTENTIELLE TOTALE STATIONNAIRE

Les forces intérieures et extérieures sont toutes conservatives (système parfaitement conservatif). Les forces intérieures dérivent d'une fonction scalaire unique des coordonnées généralisées $U(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dont la valeur U représente l'énergie de déformation exprimée par l'équation (3.4). De la même manière, les forces extérieures dérivent d'une fonction $\Omega(q_1, q_2, \dots, q_n)$ dont la valeur Ω représente l'énergie potentielle de ces forces. On peut donc dire que toutes les forces dérivent d'une seule fonction scalaire $\Pi(q_1, q_2, \dots, q_n)$, appelée fonction potentiel total, dont la valeur est donnée par l'énergie potentielle totale du système. Cette énergie potentielle totale peut être exprimée par :

$$\Pi = U + \Omega \quad (3.11)$$

La valeur totale de l'énergie potentielle est généralement indéterminée. Seules des différences d'énergie potentielle peuvent être déterminées.

Parce qu'on suppose le système parfaitement conservatif, on a :

$$\delta W = -\delta \Pi \quad (3.12)$$

où $\delta \Pi$ représente la variation de l'énergie potentielle totale dans le déplacement virtuel et (3.10) et (3.12) donnent :

$$\delta \Pi = 0 \quad (3.13)$$

L'équation (3.13) est une traduction analytique du principe de l'énergie potentielle totale stationnaire qui dit que :

« De toutes les configurations géométriques possibles d'un système, celle qui correspond à l'équilibre entre les charges appliquées et les réactions correspondantes est celle pour laquelle l'énergie potentielle totale est stationnaire »[5].

En résumé, il faut noter que, pour des systèmes parfaitement conservatifs, le principe du travail virtuel devient le principe de l'énergie potentielle totale stationnaire. Le principe est exact et très puissant et peut être utilisé pour développer des méthodes approchées de résolution des problèmes de stabilité en conception générale de structures.

3.7 STABILITE DE L'EQUILIBRE

On dit qu'un système est en état d'équilibre stable s'il a tendance à revenir à sa configuration d'équilibre d'origine dès l'arrêt de la perturbation (faible) qu'il subissait. Si cette légère perturbation a pour effet de faire quitter au système sa position d'équilibre, il est dit instable. On peut concevoir une situation intermédiaire dans laquelle la configuration légèrement déformée se maintient à l'arrêt de la perturbation. Cette situation détermine un état d'équilibre neutre (l'exemple classique de la bille dans un bol). Il est bien évident que les faibles déplacements dont il est question doivent être compatibles avec les conditions aux limites, de telle sorte qu'ils correspondent à de petites variations des coordonnées généralisées du système ; la discussion relative à la stabilité de l'équilibre peut alors se baser sur les déplacements virtuels.

Le principe du travail virtuel montre que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ; on a aussi vu que l'équilibre est stable pour un minimum relatif ; la condition de stabilité peut donc être écrite sous la forme :

« L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale, en configuration d'équilibre constitue à la fois une condition nécessaire et suffisante de stabilité de cette configuration » [5].

Si on note $\Delta\Pi$ l'augmentation de l'énergie potentielle totale due à un déplacement virtuel à partir de la configuration d'équilibre, on a :

$\Delta\Pi > 0$: Équilibre stable

$\Delta\Pi = 0$: Équilibre neutre (3.14)

$\Delta\Pi < 0$: Équilibre instable

On peut voir que, parce que l'énergie potentielle est stationnaire à l'équilibre ($\delta\Pi=0$), discuter de la stabilité revient à discuter des termes d'ordre supérieur qui apparaissent dans l'augmentation de l'énergie potentielle totale $\Delta\Pi$.

3.8 EQUILIBRE NEUTRE - CHARGEMENT CRITIQUE

L'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale pour une configuration

stable et si on considère l'équilibre neutre comme une limite de la stabilité, la condition de l'équilibre neutre peut être exprimée de la manière suivante :

$$\delta^2\Pi = 0 = \text{minimum} \quad (3.15)$$

Il s'avère donc très important d'un point de vue pratique de pouvoir déterminer les valeurs critiques des charges conduisant à l'équilibre neutre d'un système subissant un changement d'état de stabilité de sa configuration d'équilibre.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si l'on définit un système de chargement de référence S_1 (correspondant à $\alpha = 1$), les charges, à chaque instant d'une histoire du chargement proportionnelle (linéaire) sont égales à :

$$S = \alpha S_1 \quad (3.16)$$

Seul le facteur multiplicateur de charge est inconnu et la condition d'équilibre neutre nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres :

$$Det[a(\alpha)] = 0 \quad (3.17)$$

ou les coefficients a_{ij} sont des fonctions des charges appliquées et des caractéristiques du système, de telle sorte que le fait pour la matrice $[a]$ d'être définie positive impose une condition à vérifier pour les charges afin que la configuration soit stable

La résolution de l'équation (3.17) conduit à un ensemble de solutions α , appelées α_{cr} , dont le nombre est égal au nombre de coordonnées généralisées du système. Les vecteurs propres représentent la configuration déformée associée à chaque solution α . La plupart de ces solutions mathématiques ne correspondent pas au comportement réel de la structure ; généralement, l'ingénieur ne s'intéresse qu'aux valeurs du chargement au-delà desquelles le système, stable en l'absence de charges, devient instable. Ces charges s'obtiennent normalement pour la plus petite valeur positive α_{cr}^o de α_{cr} , et, de ce fait, les charges critiques sont déterminées par :

$$S = \alpha_{cr}^o S_1 \quad (3.18)$$

3.9 CONCLUSION

Toute configuration d'un système peut généralement être décrite par un ensemble de coordonnées généralisées q_i . Si on note Π l'énergie potentielle totale du système, une configuration d'équilibre vérifie $\delta^2\Pi = 0$ et la condition de stabilité de cet équilibre est $\delta^2\Pi > 0$; la première et la seconde variation de Π sont déterminées pour tout déplacement virtuel δq_i satisfaisant les conditions aux limites.

Les charges critiques sont calculées à partir de la condition d'équilibre neutre donnée par $\delta^2\Pi = 0 = \text{minimum}$.

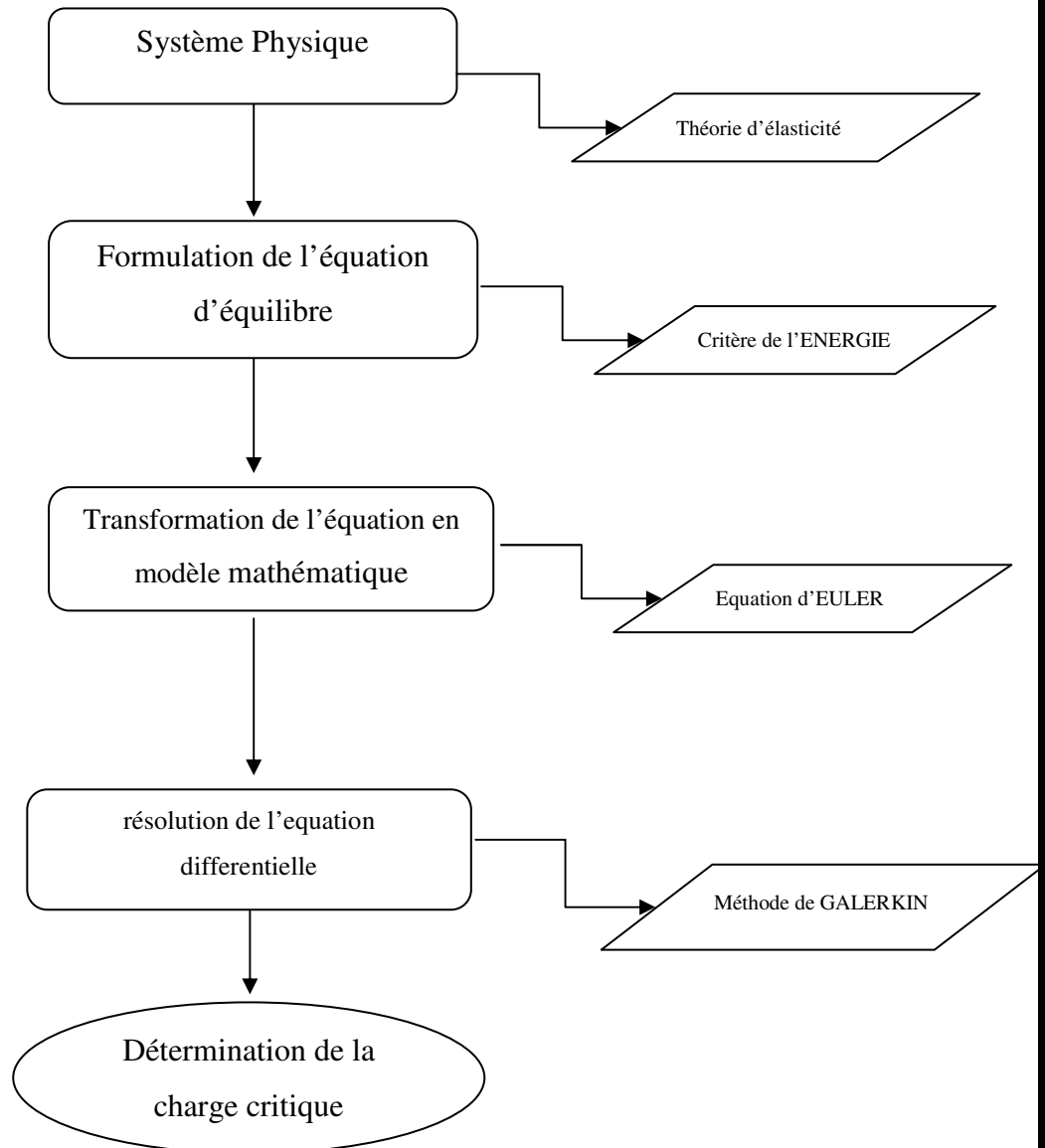
Chapitre 4

ETUDE D'UN ELEMENT POUTRE A PAROIS MINCE

4 ETUDE D'UN ELEMENT POUTRE A PAROIS MINCE

4.1 INTRODUCTION

Pour développer un modèle mathématique décrivant le comportement réel d'un système, il est nécessaire de formuler des équations qui respectent les lois physiques de ce dernier. On peut décrire la démarche en vue d'une solution par l'organigramme suivant :



4.2 EQUATION DIFFERENTIELLE D'EQUILIBRE

4.2.1 GENERALITE

Avant d'entrer dans le détail de la formulation de ces équations différentielles d'équilibre, il nous faut clarifier certains points d'où découleront les hypothèses faites dans notre travail. Ces points ont été exposés notamment par GERY et CALGARO [25] et nous donnons ci-dessous les éléments essentiels.

Les équations d'équilibre sont obtenues à partir des relations entre les contraintes et les déformations. Ces déformations devraient permettre, tout au moins théoriquement, de déterminer en tous points de la poutre les contraintes, les déformations et les déplacements, mais des complications considérables apparaissent dès que l'on veut expliciter les conditions aux limites. Ces complications sont telles que l'on est pratiquement dans l'obligation d'introduire de nouvelles hypothèses simplificatrices, lesquelles trouvent leur justification dans le fait que l'une des dimensions des poutres est prépondérante vis-à-vis des deux autres.

Ces hypothèses viennent essentiellement de l'application des trois principes suivants :

4.2.1.1 Principe de continuité.

Ce principe est en quelque sorte une généralisation du principe de Navier-Bernoulli et il s'énonce comme suit :

« Deux sections droite infiniment voisines d'une poutre deviennent après déformation deux sections droites infiniment voisines, gauches en général, mais superposables par simple déplacement ».

4.2.1.2 Principe de l'équivalence

Ce principe peut se résumer ainsi :

« L'ensemble des contraintes qui agissent sur une section droite divisant une poutre en deux parties A et B, et considérée comme appartenant par exemple à la partie A, est équivalent au système des forces extérieures appliquées sur la partie B de la poutre ».

4.2.1.3 Principe de régularisation.

Ce principe est aussi connu sous le nom de principe de Saint-Venant, et il s'énonce :

« Les contraintes dans une région éloignée des points d'application d'un système de forces sont pratiquement indépendantes de la manière dont ces forces sont réparties dans les zones chargées, et elles ne dépendent que des éléments de réduction de ce système de forces ».

Ces hypothèses résultant de ces trois principes sont acceptables uniquement pour des solides allongés satisfaisants à certaines conditions. Ces conditions définissent le domaine de validité des hypothèses de la théorie des poutres et qui sont :

- Le rapport a/b de la plus grande à la plus petite dimension de la section transversale doit rester inférieur à 10.
- Les dimensions transversales de la section droite doivent être petites vis-à-vis de la longueur L de la poutre. Pour une poutre droite, le rapport de la plus grande dimension transversale 'a' à la longueur L doit être tel que :

$$L/30 < a < L/5$$

- Le rayon de courbure r de la fibre moyenne de la poutre ne doit pas subir de discontinuité ni en grandeur, ni en direction.
- Le profilé de la poutre doit être constant ou, s'il est variable, sa variation doit être lente et progressive.

Du rapport de la hauteur de la section droite 'a' sur la longueur de la poutre L défini ci-dessus découle aussi la prépondérance des contraintes normales σ par rapport aux contraintes de cisaillement τ .

En effet, des considérations d'équilibre, on peut estimer le rapport σ/τ environ égal au rapport L/a . Ce rapport étant bien supérieur à l'unité, la contrainte de cisaillement τ sera donc faible vis-à-vis de la contrainte normale σ . Par conséquent, l'effet des contraintes de cisaillement sera négligé dans l'analyse des poutres. Les efforts tranchants seront donc considérés comme des réactions nécessaires pour maintenir l'équilibre plutôt que comme des contraintes généralisées.

Les hypothèses admises dans notre travail, découlant partiellement de ce que nous venons d'exposer, peuvent se résumer ainsi :

- Les déformations (pas les déplacements) sont petites.
- Les sections planes avant déformation restent planes après déformation ; pour le gauchissement de la section, on se base sur les hypothèses de Vlassov [17].
- Les charges appliquées sur la poutre sont conservatrices, proportionnelles et indépendantes du temps.
- Les effets résultant du mode d'application des efforts sur la répartition des contraintes sont négligés.
- L'effet des efforts tranchants sur la déformation est négligé.
- Le matériau est homogène et isotrope.
- La courbe contrainte-déformation est identique en traction et en compression.
- La loi de Hooke est valable dans le domaine élastique.

4.3 ETUDE D'UN ELEMENT A PAROIS MINCES

4.3.1 CINEMATIQUE

Pour décrire le mouvement d'un corps, on est amené à définir un certain nombre de configurations dans lesquelles il peut se trouver. La cinématique d'un solide déformable a été schématisée de manière générale dans le chapitre 2 de notre travail.

On considère un élément à parois minces et à section ouverte dans un repère 3D. Les axes y et z sont les axes principaux d'inertie.

On repère le centre de torsion C par ses coordonnées (y_c, z_c) .

On définit aussi sur le contour un point M par ses coordonnées y, z et w où w est la coordonnée sectorielle qui définit le gauchissement de la section en ce point.

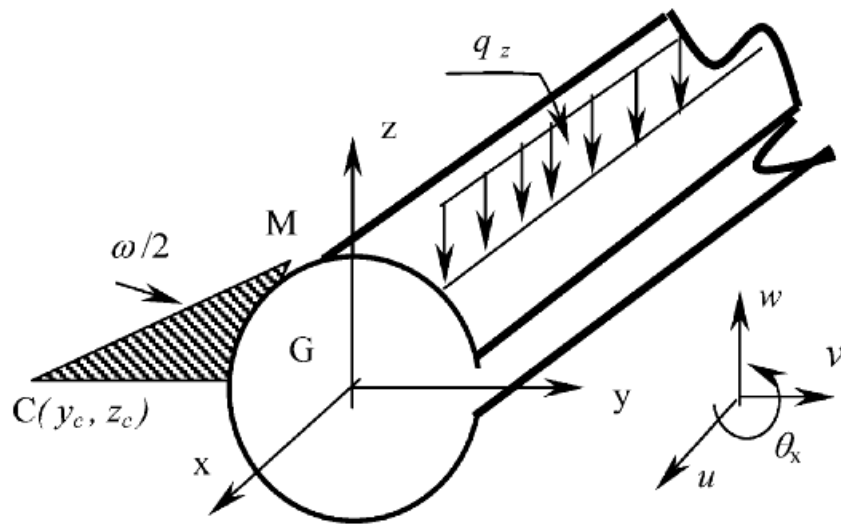


Figure 4.1 : Schématisation d'un élément à parois minces dans un repère cartésien

4.3.2 DEPLACEMENTS

Soit $u_M; v_M; w_M$, les déplacements du point **M** dans le repère cité si dessus. En utilisant le modèle de Vlassov [17] et en adoptant les hypothèses suivantes :

- Le déplacement suivant ($O\bar{x}$) dû au gauchissement de la section sera égal à $\omega \frac{\partial \theta_x}{\partial x}$; où ω est l'aire sectorielle principale de pôle C ;
- Les distorsions de sections dues à l'effort tranchant sont négligées ;
- On se place en petite rotation $\theta_x^2 = 0$;

Les déplacements peuvent être exprimés en fonction de ceux du centre de torsion C (notés $u; v; w$ et θ_x) par les relations suivantes :

$$u_M = u - yv'_x - zw'_x - \omega\theta'_x \quad (4.1)$$

$$v_M = v - (z - z_c)\theta_x \quad (4.2)$$

$$w_M = w - (y - y_c)\theta_x \quad (4.3)$$

4.3.3 DEFORMATION

La déformation ε_{xx} s'écrit de la manière suivante :

$$\varepsilon_{xx} = u'_M + \frac{1}{2}((u'_M)^2 + (v'_M)^2 + (w'_M)^2) \approx u'_M + \frac{1}{2}((v'_M)^2 + (w'_M)^2) \quad (4.4)$$

En écrivant les déformations sous la forme : $\varepsilon = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl}$

L'équation 4.4 nous donne:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_l + \varepsilon_{nl} \quad (4.5.a)$$

$$\varepsilon_l = u' - yv'' - zw'' - \omega\theta_x'' \quad (4.5.b)$$

$$\varepsilon_{nl} = \frac{1}{2}(v'^2 + w'^2 + R^2\theta_x'^2) + (y - y_c)w'\theta_x' - (z - z_c)v'\theta_x' \quad (4.5.c)$$

$$\varepsilon_{xy} = -\frac{1}{2}(z - z_c + \frac{\partial\omega}{\partial y})\theta_x' \quad (4.6)$$

$$\varepsilon_{xz} = \frac{1}{2}(y - y_c + \frac{\partial\omega}{\partial z})\theta_x' \quad (4.7)$$

$$R^2 = (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 \quad (4.8)$$

4.3.4 ENERGIE :

L'énergie de torsion est donnée par l'expression :

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_{xx}^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \quad (4.9)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E (\varepsilon_l^2 + 2\varepsilon_l \varepsilon_{nl} + \varepsilon_{nl}^2) dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \quad (4.10)$$

Le développement de la formule de l'énergie de torsion, en considérant la contribution de ε_{nl}^2 négligeable [18], nous permettra d'écrire l'énergie totale comme étant la somme de deux parties l'une linéaire et l'autre non linéaire

$$U = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx + \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx = U_l + U_{nl}$$

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L \int_A E \varepsilon_l^2 dA dx + \frac{1}{2} \int_L GJ (\theta_x')^2 dx \quad (4.11)$$

$$U_{nl} = \int_L \int_A E \varepsilon_l \varepsilon_{nl} dA dx.$$

En utilisant l'équation 4.5 on aura :

$$U_l = \frac{1}{2} \int_L (EA(u')^2 + EI_z(v'')^2 + EI_y(w'')^2 + EI_\omega(\theta''_x)^2) dx + \frac{1}{2} \int_L GJ(\theta_x')^2 dx. \quad (4.12)$$

Avec :

$$A = \int_A dA; \quad I_y = \int_A z^2 dA; \quad I_z = \int_A y^2 dA; \quad I_\omega = \int_A \omega^2 dA$$

et

$$U_{nl} = U_{nl}(N) + U_{nl}(M_y) + U_{nl}(M_z) + U_{nl}(B_\omega) \quad (4.13)$$

avec :

$$U_{nl}(N) = \int_L N \left(\frac{1}{2} v'^2 + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{I_0}{2} \theta_x'^2 + z_c v' \theta_x' - y_c w' \theta_x' \right) dx; \quad U_{nl}(M_y) = \int_L M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x) dx$$

$$U_{nl}(M_z) = - \int_L M_z (\beta_y \theta_x'^2 + w'' \theta_x) dx; \quad U_{nl}(B_\omega) = - \int_L \beta_\omega \theta_x'^2 dx$$

et :

$$N = \int_A E \varepsilon_l dA = EAu'; \quad M_y = \int_A E \varepsilon_l z dA = -EI_y w''; \quad M_z = - \int_A E \varepsilon_l y dA = EI_z v'';$$

$$B_\omega = - \int_A E \varepsilon_l \omega dA = EI_\omega \theta_x''$$

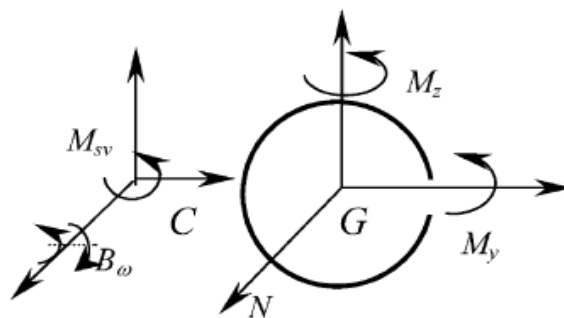


Figure 4.2 : Modèle de VLASOV

Les coefficients $\beta_y; \beta_z; \beta_\omega$ sont les constants de WARNER et I_0 est le moment d'inertie polaire

$$\beta_y = \frac{1}{2I_z} \int_S y(y^2 + z^2) dS - y_c ; \beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c ; \beta_\omega = \frac{1}{2I_\omega} \int_S \omega(y^2 + z^2) dS$$

$$I_0 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_c^2 + z_c^2$$

La combinaison de U_l et U_{nl} peut être utilisée pour toutes les sections minces ouvertes ;

Dans la stabilité au flambement on prend uniquement les efforts uni axiaux [17] c'est à dire :

$$N \neq 0 \text{ et } M_y = M_z = B_\omega = 0$$

donc :

$$U = U_l + U_{nl}(N)$$

Pour un flambement dû uniquement à la flexion on a :

$$M_y \neq 0, \text{ et } N = M_z = B_\omega = 0$$

donc :

$$U = U_l + U_{nl}(M_y)$$

4.4 FORMULATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

Soit une poutre en acier à section transversale ouverte sollicitée avec un chargement répartie q_z dans le sens négative de l'axe Z. Cette charge est appliquée au dessus de la section comme indiqué sur la figure 4.1.

Le travail dû aux charges extérieures W et l'énergie totale U sont formulés comme suit :

$$W_q = \int \delta W_q = \int_L q_z w dx + \int_L (y_Q - y_c) q_z \theta_x dx - \int_L \frac{1}{2} (z_Q - z_c) q_z \theta_x^2 dx. \quad (4.14)$$

$$U = \frac{1}{2} \int_L [EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x)] dx \quad (4.15)$$

On définit le potentiel total Π comme étant :

$$\Pi = U - W$$

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_L [EI_y (w'')^2 + EI_z (v'')^2 + GJ (\theta_x')^2 + EI_\omega (\theta''_x)^2 + 2M_y (\beta_z \theta_x'^2 + v'' \theta_x')] dx - \quad (4.16)$$

$$\int_L q_z w dx - \int_L (y_c - y_c) q_z \theta_x dx + \int_L \frac{1}{2} (z_c - z_c) q_z \theta_x^2 dx$$

4.4.1 EQUATION EULER

Soit $\Pi = \int_{x_0}^{x_1} f(\xi, g(\xi), g'(\xi), g''(\xi), \dots, g^n(\xi)) dx$. [19]

Lorsque Π est extremum les fonctions $g^i(\xi)$ vérifient la relation suivante :

$$\sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{\partial^i}{\partial \xi^i} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial g^i} \right] = 0 \quad (4.17)$$

4.4.2 EQUATION DIFFERENTIELLE D'EQUILIBRE

En utilisant les relations 4.17 dans l'équation 4.16, on aura les équations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial w'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial w''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial w} &= -q_z \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial w'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial w''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [(EI_y w'')] = EI_y w^{(4)} \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI_y w^{(4)} - q_z = 0 \quad (4.18)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial v} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial v} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial v'} \right] &= 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial v''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_z v'' + M_y \theta_x] = EI_z v^{(4)} + M_y \theta_x'' \end{aligned} \right\} \Rightarrow EI_z v^{(4)} + (M_y \theta_x)'' = 0. \quad (4.19)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} - \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x} &= [M_y v''] - (y_Q - y_c) q_z + (z_Q - z_c) q_z \theta_x \\ \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x'} \right] &= \frac{\partial}{\partial x} [GJ(\theta_x') + 2M_y (\beta_z \theta_x')] = GJ(\theta_x'') + [2M_y (\beta_z \theta_x')] \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[\frac{\partial \Pi}{\partial \theta_x''} \right] &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} [EI_\omega (\theta_x'')] = EI_\omega (\theta_x^{(4)}) \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow EI_\omega (\theta_x^{(4)}) - [GJ(\theta_x'') + 2M_y \beta_z \theta_x'] + [M_y v''] - (y_Q - y_c) q_z + (z_Q - z_c) q_z \theta_x = 0 \quad (4.20)$$

L'équation (4.19) devient

$$EI_z v'' = -(M_y \theta_x) \Rightarrow v'' = \frac{-(M_y \theta_x)}{EI_z}$$

Donc (4.20) devient :

$$EI_\omega (\theta_x^{(4)}) - [GJ(\theta_x'') + 2(M_y \beta_z \theta_x')] - \left[\frac{M_y^2}{EI_z} \theta_x \right] - (y_Q - y_c) q_z + (z_Q - z_c) q_z \theta_x = 0$$

$$\left[EI_\omega (\theta_x^{(4)}) - GJ(\theta_x'') - \frac{M_y^2}{EI_z} \theta_x \right] + [-2(M_y \beta_z \theta_x') - (y_Q - y_c) q_z + (z_Q - z_c) q_z \theta_x] = 0$$

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_y \beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z M_y' \theta_x' - \left(\frac{M_y^2}{EI_z} - (z_Q - z_c) q_z \right) \theta_x = -(y_Q - y_c) q_z \quad (4.21)$$

En posant :

$$z_Q - z_c = e_z$$

$$y_Q - y_c = e_y$$

on aura :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_y \beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z M_y' \theta_x' - \left(\frac{M_y^2}{EI_z} - e_z q_z \right) \theta_x = -e_y q_z \quad (4.22)$$

4.5 CONCLUSION

L'équation différentielle régissant sur le déplacement comporte tous les paramètres que celle trouvées dans la littérature plus la prise en compte de l'excentricité relatif au centre de torsion.

La résolution de cette équation nécessite l'intervention de méthodes numériques

Quelques méthodes seront présentées dans le chapitre qui suit.

Chapitre 5

TRANSFORMATION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE ET RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

5 TRANSFORMATION DE L'EQUATION D'EQUILIBRE ET RESOLUTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE

5.1 INTRODUCTION

Les charges critiques de stabilité peuvent être déterminées en utilisant l'une ou l'autre des méthodes suivantes :

- Résolution directe des équations différentielles de l'équilibre, avec comme résultats les valeurs exactes des charges critiques.
- l'utilisation de méthodes approchées qui sont, pour la plupart d'entre elles, basées sur des méthodes énergétiques et qui conduisent à des solutions approchées des problèmes de stabilité.

La résolution des équations différentielles de l'équilibre, afin de satisfaire les conditions aux limites présente beaucoup de difficultés et ne peut être réalisée que pour des problèmes simples de flambement, pour des structures dont le nombre de degrés de liberté est faible [1]. Ce n'est plus cette approche, cependant qui sera prise en compte dans des problèmes complexes, il faut se focaliser plutôt sur des méthodes énergétiques alternatives. Il faut noter que l'on peut aussi utiliser des méthodes itératives puissantes pour résoudre les problèmes de stabilité [9].

Quand on fait certaines hypothèses sur la nature de la déformation d'un système élastique pendant le changement de configuration associé à l'équilibre neutre (mode de flambement), le système élastique peut être approché en utilisant des paramètres adéquats et modifiables ou des coordonnées généralisées, déterminées de manière à remplir les conditions d'équilibre neutre. Cette idée est à la base des méthodes approchées; on présentera les plus connues de ces méthodes, à savoir les coefficients de Rayleigh, la méthode de Rayleigh-Ritz et la méthode de Galerkin. On donnera aussi une présentation rapide d'une méthode numérique (la méthode des différences finies d'Euler).

5.2 APPLICATION DES METHODES ENERGETIQUES GENERALES AUX SYSTEMES ELASTIQUES

Les méthodes énergétiques de résolution des problèmes de stabilité élastique sont basées sur le principe de l'existence d'un minimum relatif de l'énergie potentielle totale à l'équilibre neutre.

Il est établi que : si on considère le changement ΔV de l'énergie totale V d'un système, d'une

configuration d'équilibre de départ à une configuration voisine définie par un déplacement virtuel infiniment petit et cinématiquement admissible, alors la condition d'équilibre neutre est gouvernée par la deuxième variation δ^2V de l'incrément ΔV , c'est-à-dire :

$$\delta^2V = 0 = \text{minimum} \quad (5.1)$$

Généralement, quand on considère des structures en acier, on étudie la stabilité d'une structure sous un ensemble de charges extérieures en prenant en compte une déformation de flambement, f , depuis une configuration de départ et en faisant les calculs conformément à l'équation (5.1), soit pour vérifier la stabilité de la configuration de départ, soit pour déterminer les valeurs critiques des charges extérieures conduisant à l'instabilité. La déformation f est exprimée comme une fonction de une ou plusieurs variables indépendantes (généralement les coordonnées cartésiennes) ; par exemple, $f(x)$ en tant que déformée d'une poutre ou $f(x,y)$ comme déformée d'une plaque. Le changement de déformation d'un système à l'équilibre neutre, la déformation de flambement ou le mode de flambement sera désormais noté $f(X)$, où X représente le champ de coordonnées du système de référence utilisé (une, deux ou trois dimensions). La fonction f peut être continue si le système est continu ou peut être définie par morceaux si le système est discret.

La résolution de l'équation (5.1) nécessite l'évaluation de la fonction potentielle δ^2V par rapport à la fonction f , à l'intérieur d'un domaine d'intégration noté D (longueur, pour une poutre, surface, pour une plaque, par exemple). Généralement δ^2V comprend des quantités quadratiques et homogènes de la déformation de flambement $f(X)$ et ses dérivées et constitue une fonction linéaire des charges extérieures appliquées.

Si l'on introduit un coefficient multiplicateur de charge commun α , pour toutes les composantes du chargement et si on définit un chargement de référence $S1$ (correspondant à $\alpha = 1$), la charge à chaque instant d'une histoire linéaire du chargement est égale à :

$$S = \alpha S1 \quad (5.2)$$

Alors, d'une manière générale, la fonction δ^2V peut être évaluée par :

$$\delta^2V(f) = \int_D F(\alpha, X, f, f', f'') dD = 0 \quad (5.3)$$

où la fonction F comporte aussi les caractéristiques géométriques et le matériau du domaine.

La résolution de l'équation (5.3) par rapport à f conduit à la détermination des valeurs des charges (par le coefficient multiplicateur α) à l'équilibre neutre, c'est-à-dire les valeurs critiques des charges au-delà desquelles la configuration de départ devient instable.

5.3 COEFFICIENT DE RAYLEIGH

La méthode de calcul des charges critiques par le coefficient de Rayleigh découle directement de l'équation (5.1) ; la seconde variation δ^2V de l'énergie potentielle totale peut être exprimée de la manière suivante [2]:

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \delta^2\Omega(f, S) \quad (5.4)$$

où : δ^2U est la deuxième variation de l'énergie de déformation (fonction homogène et quadratique de f) ; elle représente l'énergie de déformation correspondant au mode de flambement ;

$\delta^2\Omega$ est la deuxième variation de l'énergie potentielle due aux charges extérieures S (fonction linéaire de S et fonction quadratique et homogène de f). Elle représente l'opposé du travail des forces extérieures correspondant au mode de flambement.

A l'équilibre neutre, α prend la valeur particulière α_{cr} qui est le facteur multiplicateur de charge critique au-delà duquel se développe l'instabilité. Les équations (5.1), (5.2) et (5.4) donnent :

$$\delta^2V(f) = \delta^2U(f) + \alpha_{cr} \delta^2\Omega(f, S_1) = 0 \quad \text{minimum} \quad (5.5)$$

Si l'on connaît la déformation de flambement f , le facteur multiplicateur de charge critique peut être obtenu à partir de l'équation (5.4), soit :

$$\alpha_{cr} = -\frac{\delta^2U(f)}{\delta^2\Omega(f, S_1)} \quad (5.6)$$

$$\text{C'est-à-dire : } \alpha_{cr} < \min\left[-\frac{\delta^2U(f_1)}{\delta^2\Omega(f, S_1)}\right] \text{ quel que soit } f \neq f_1 \quad (5.7)$$

Ceci définit le principe de Rayleigh qui établit que le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} calculé en utilisant l'équation (5.6) avec un déplacement cinématiquement admissible quelconque différent de la vraie déformation de flambement, donnera une valeur de α_{cr} supérieure à la valeur exacte [2].

5.4 METHODE DE RAYLEIGH-RITZ

La méthode de Rayleigh-Ritz suppose que la solution exacte $f(X)$ du problème variationnel décrit par l'équation (5.3) peut être approchée par une combinaison linéaire de «fonctions de coordonnées» correctement choisies :

$$\Phi_1(X) + \Phi_2(X) + \dots + \Phi_n(X) \quad , \text{ soit :}$$

$$f_n(X) = q_1\Phi_1(X) + q_2\Phi_2(X) + \dots + q_n\Phi_n(X) \quad (5.8)$$

où les q sont des constantes à déterminer et qui doivent être considérées comme les coordonnées généralisées (degrés de liberté) du système.

Quand $f(X)$ est approchée ainsi par $f_n(X)$, la fonction δ^2V , à évaluer, devient une fonction quadratique et homogène des q ; l'équation (5.3) peut alors s'écrire de la manière suivante :

$$\delta^2V = \{q\}^t [a] \{q\} = 0 \quad (5.9)$$

où $\{q\}$ représente le vecteur des q et $[a]$ une matrice dont les coefficients a_{ij} sont :

$$a_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j} \quad (5.10)$$

Les coefficients a_{ij} sont des fonctions du facteur multiplicateur de charge α et des propriétés du système.

Si l'on considère le cas de configurations non triviales, $\{q\} \neq 0$, l'équation (5.9) de l'équilibre neutre nécessite que $[a]$ soit une matrice singulière, c'est-à-dire que son déterminant doit être nul. Cette condition fournit une équation en α , de degré n , dont la valeur positive la plus petite peut être considérée comme le facteur multiplicateur de charge critique α_{cr} .

Les fonctions Φ_i sont choisies par avance, selon la connaissance et les hypothèses faites sur la

nature de la déformation. Elles ne sont pas inconnues, et, à condition qu'elles satisfassent les conditions aux limites forcées (ou géométriques) pour chaque valeur de q , le choix des «formes» est arbitraire. On peut noter, cependant, que l'efficacité de la méthode dépend du caractère judicieux du choix fait pour les Φ et que c'est un avantage si elles satisfont toutes les conditions aux limites : dans les applications pratiques, on aura une idée de la nature générale de la solution réelle $f(X)$, de telle sorte que la question d'utiliser des formes « excessives » pour les Φ se pose rarement. Si les fonctions sont judicieusement choisies, on peut obtenir une très bonne précision avec relativement peu de fonctions [2]. L'efficacité du procédé de Rayleigh- Ritz peut être considérablement améliorée si, en plus des conditions aux limites forcées (ou géométriques) (concernant les translations ou les rotations aux supports, c'est-à-dire f et f'), on vérifie aussi les conditions aux limites naturelles (ou mécaniques) (concernant la courbure, c'est-à-dire f'').

5.5 METHODE DE GALERKIN

On constate que la méthode de Rayleigh-Ritz donne une solution après avoir écrit le problème variationnel, la méthode de Galerkin fournit directement les solutions approchées des équations différentielles et elle s'applique que l'on puisse ou non écrire la transformation sous la forme d'un problème variationnel. Elle semble donc s'appliquer plus largement que la technique de Rayleigh-Ritz et est plus attractive en pratique dans la mesure où elle ne nécessite pas de déterminer une fonction potentiel. On peut démontrer, cependant, que les deux méthodes sont étroitement liées. La méthode de Galerkin procède de la manière suivante [2].

Généralement, l'équation différentielle gouvernant un problème de flambement peut s'écrire

$$L [f(X)] = 0 \tag{5.11}$$

où : $f(X)$ représente la déformation de flambement et L un opérateur différentiel linéaire et homogène.

Supposons que la solution exacte $f(X)$ de l'équation (5.11) puisse s'exprimer sous la forme d'une série de fonctions complète :

$$f(X) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j \Phi_j(X) \tag{5.12}$$

satisfaisant toutes les conditions aux limites ; l' « exactitude » de cette solution peut être établie en déclarant que la partie gauche de l'équation (5.11) est orthogonale à chaque terme dans la série de l'équation(5.12), soit :

$$\int_D L[f(X)]\Phi_j(X)dD = 0 \quad j = 1,2,\dots \quad (5.13)$$

Supposons que la série de l'équation (5.12) soit tronquée à un nombre fini de termes, n, ensuite, au moyen de l'idée ci-dessus, on peut imposer n conditions d'orthogonalité, de la manière suivante :

$$\int_D L\left[\sum_{j=i}^{\infty} q_j \Phi_j(X)\right]\Phi_i(X)dD = 0 \quad i = 1,2,\dots \quad (5.14)$$

Ceci fournit une base moyenne d'évaluation des n inconnues q, telles que :

$$f_n(X) = \sum_{j=1}^n q_j \Phi_j(X) \quad (5.15)$$

ce qui constitue une solution approchée de l'équation différentielle.

La partie gauche de l'équation (5.14) qui comprend les propriétés du système et les charges extérieures par l'intermédiaire du coefficient multiplicateur de charge α , est quadratique et homogène en q ; cette équation peut s'écrire sous la forme de l'équation (5.8), puis traitée de la même manière que pour la méthode de Rayleigh-Ritz pour trouver les charges critiques.

5.6 METHODES NUMERIQUES

Les méthodes numériques qui nécessitent l'utilisation d'un ordinateur peuvent être utilisées pour déterminer des charges critiques, on peut citer les méthodes des éléments finis, des différences finies, des intégrales de frontières ...etc.

On décrira ici rapidement la méthode des différences finies d'Euler.

Dans la méthode de Rayleigh-Ritz, il est nécessaire que les fonctions admissibles soient

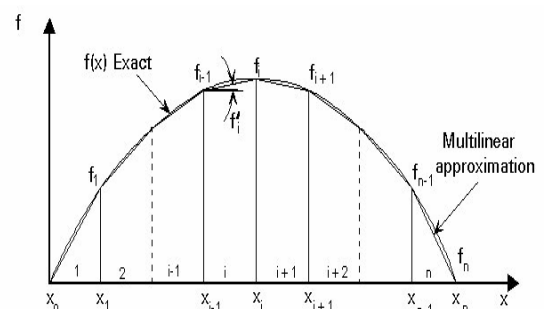


Figure 5.1 : Illustration de la méthode des différences finies d'EULER

continûment différentiables dans le domaine d'intégration. Le domaine admissible peut être étendu si l'on admet des fonctions qui ont des dérivées continues par morceaux. La base de la méthode des différences finies d'Euler consiste donc à diviser le domaine d'intégration en un certain nombre de sous domaines ou intervalles, en supposant les fonctions linéaires à l'intérieur du sous domaine. Si on note f_i la valeur de la fonction f à la frontière entre les intervalles i et $i+1$, les dérivées de f peuvent être exprimées comme des fonctions de f et la somme de la deuxième variation de l'énergie sur tous les intervalles est aussi une fonction de f . On peut considérer ici les f comme les q de la méthode de Rayleigh-Ritz.

5.7 CHOIX DE LA METHODE

Nous avons choisi, dans le cadre de ce travail d'utiliser la méthode de Galerkin qui fournit directement des solutions approchées à des équations différentielles.

Les étapes de résolution de cette méthode ont été suivies et respectées pour deux cas de charges : charge uniformément répartie et moment constant. Les résultats obtenus étaient proches de ceux trouvés par B. Larue [7] et F. Mohri, A. Brouki, J.C.Roth [17] dans leurs travaux

Les solutions obtenues sont en fonction des paramètres suivants :

- Les conditions d'appuis.
- La variation du diagramme du moment fléchissant.

Pour les deux cas qui vont être étudiés nous supposons que les poutres reposent sur des appuis en fourche, donc les poutres ne peuvent pas pivoter autour de l'axe x au niveau des appuis, mais elles sont libres de se gauchir.

5.8 RESOLUTION PAR LA METHODE DE GALERKIN

5.8.1 MOMENT LINEAIREMENT VARIABLE

Dans ce cas de charge, l'équation 4.22 devint

$$EI_{\omega} \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_y \beta_z) \theta_x'' - 2\beta_z M_y' \theta_x' - \left(\frac{M_y^2}{EI_z}\right) \theta_x = 0 \quad (5.16)$$

car $e_y = e_z = q_z = 0$

La variation du moment suivant l'axe x suit la fonction linéaire suivante :

$$M_y(x) = M_0 \left[(\Psi - 1) \frac{x}{l} + 1 \right] \quad (5.17)$$

avec :

- M_0 : la valeur maximale du moment à l'extrémité.
- Ψ : le coefficient multiplicateur du moment) ($-1 \leq \Psi \leq 1$).

Soit θ_x la solution de l'équation 5.16. La solution qui satisfait les conditions aux limites

(poutre reposant sur des appuis en fourches) est : $\theta_x = A \sin \frac{\pi x}{L}$

En dérivant la solution proposée et par analogie aux formules 5.11 à 5.14 et en remplaçant θ_x par la solution proposée dans la formule 5.16 nous allons obtenir l'équation 5.18 ci-dessous.

$$A \int_0^L \left(EI \omega \frac{\pi^4}{L^4} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx + A \int_0^L \left((GJ - 2\beta_z M_y) \frac{\pi^2}{L^2} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx +$$

$$A \int_0^L \left(2\beta_z M_0 \left[\frac{(\Psi - 1)}{l} \right] \frac{\pi}{L} \cos \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx - A \int_0^L \left(\frac{M_y^2}{EI_z} \sin \frac{\pi x}{L} \right) \sin \frac{\pi x}{L} dx = 0$$

Vue la complexité de cette équation un changement de variable doit être effectué pour nous permettre de trouver les solutions [20]. Soit :

$$\xi = \frac{x}{L} \rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \rightarrow \frac{d^2\xi}{dx^2} = 0$$

$$M_{\max} = \max_{0 \leq x \leq L} M(x)$$

$$m = \frac{M(x)}{M_{\max}} \Rightarrow M(x) = m.M_{\max}$$

$$\frac{dm}{dx} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{dM}{dx} = \frac{V(x)}{M_{\max}} \quad (5.19)$$

$$= \frac{dm}{d\xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{L} \frac{dm}{d\xi} \equiv \frac{1}{L} m'$$

$$\frac{d^2m}{dx^2} = \frac{1}{M_{\max}} \frac{d^2M}{dx^2} = -\frac{q(x)}{M_{\max}}$$

$$= \frac{d}{dx} \left(\frac{dm}{dx} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{d^2m}{d\xi^2} \equiv \frac{1}{L} m''$$

Des équations précédentes on peut écrire :

$$-\frac{q(x)}{M_{\max}} = \frac{1}{L} m'' \Rightarrow q(x) = -\frac{M_{\max}}{L} m''$$

En effectuant ces changements dans l'équation 5.18 on trouve :

$$\int_0^1 \left(EI_{\omega} \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi + \int_0^1 \left((GJ - 2\beta_z m M_{\max}) \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi + \int_0^1 \left(2\beta_z \frac{1}{L} m' M_{\max} \frac{\pi}{L} \cos \pi \xi \right) \sin \pi \xi \frac{1}{L} d\xi - \int_0^1 \left(\frac{m^2 M_{\max}^2}{EI_z} \sin^2 \pi \xi \right) \frac{1}{L} d\xi = 0 \quad (5.20)$$

Après un série de modification et en posant :

$$Q_a = \int_0^1 m^2 (\sin^2 \pi \xi) d\xi \quad (a)$$

$$Q_b = -\int_0^1 (m') \pi \sin^2 \pi \xi d\xi \quad (b) \quad (5.21)$$

$$Q_c = \int_0^1 (m' \cos \pi \xi) \sin \pi \xi d\xi \quad (c)$$

nous obtenons :

$$\left(\frac{Q_a}{EI_z} \right) M_{\max}^2 - 2\beta_z \frac{\pi}{L^2} (Q_b + Q_c) M_{\max} - \frac{\pi^2}{L^2} \cdot \frac{1}{2} \left[(GJ) + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right] = 0 \quad (5.22)$$

C'est une équation du second ordre dont la solution est :

$$M_{cr} = \frac{2\beta_z \frac{\pi}{L^2} (Q_b + Q_c) \pm \sqrt{\left(2\beta_z \frac{\pi}{L^2} (Q_b + Q_c) \right)^2 + 2 \left(\frac{Q_a}{EI_z} \right) \frac{\pi^2}{L^2} \left[(GJ) + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right]}{2 \left(\frac{Q_a}{EI_z} \right)} \quad (5.23)$$

Sous une expression plus ordonnée, on obtient :

$$M_{cr} = \frac{1}{2\sqrt{Q_a}} \left\{ (EI_z) \left(2\beta_z \frac{\pi}{L^2} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \right) \pm (EI_z) \sqrt{\left(2\beta_z \frac{\pi}{L^2} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \right)^2 + 2 \left(\frac{1}{EI_z} \right) \frac{\pi^2}{L^2} \left[(GJ) + EI_{\omega} \frac{\pi^2}{L^2} \right]} \right\} \quad (5.24)$$

Pour nous mettre en harmonie avec les écritures du CCM 97 [4] on pose :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2Q_a}} \quad (5.25)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{Q_b + Q_c}{\sqrt{Q_a}} \quad (5.26)$$

$$M_{cr} = C_1 P_{cr} \left\{ \beta_z (C_3) \pm \sqrt{\beta_z^2 (C_3)^2 + \left[\frac{(GJ)L^2}{(EI_z)\pi^2} + \frac{I_\omega}{I_z} \right]} \right\} \quad (5.27)$$

5.8.2 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE

Tout en gardant la même procédure de résolution, la même solution proposée $\theta_x = A \sin \frac{\pi x}{L}$ et les mêmes changements de variables données en 5.19, nous procédons à la résolution de l'équation 4.22 qui devient :

$$\int_0^1 EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \cdot L d\xi + \int_0^1 (GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi) \cdot L d\xi - \int_0^1 (2\beta_z M_y) \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \cdot L d\xi + \int_0^1 2\beta_z M_y \frac{\pi}{L} \cos \pi \xi \sin \pi \xi \cdot L d\xi - \int_0^1 \left(\frac{M_y^2}{EI_z} - e_z q_z \right) \sin^2 \pi \xi \cdot L d\xi + \int_0^1 \frac{e_y q_z}{A} \sin \pi \xi \cdot L d\xi = 0 \quad (5.28)$$

puis :

$$\int_0^1 EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} \sin^2 \pi \xi \cdot d\xi + \int_0^1 (GJ \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi) \cdot d\xi - \int_0^1 (2\beta_z m M_{\max}) \frac{\pi^2}{L^2} \sin^2 \pi \xi \cdot d\xi + \int_0^1 2\beta_z \frac{1}{L} m' M_{\max} \frac{\pi}{L} \cos \pi \xi \sin \pi \xi \cdot d\xi - \int_0^1 \left(\frac{m^2 M_{\max}^2}{EI_z} + e_z \frac{M_{\max}}{L^2} m'' \right) \sin^2 \pi \xi \cdot d\xi - \int_0^1 \frac{e_y M_{\max} m''}{L^2 A} \sin \pi \xi \cdot d\xi = 0 \quad (5.29)$$

On pose :

$$Q_a = \int_0^1 m^2 (\sin^2 \pi \xi) d\xi \quad (a)$$

$$Q_b = -\int_0^1 (m') \pi \sin^2 \pi \xi d\xi \quad (b)$$

$$Q_c = \int_0^1 (m' \cos \pi \xi) \sin \pi \xi d\xi \quad (c) \quad (5.30)$$

$$Q_d = \int_0^1 (m'') \sin 2\pi\xi \cdot d\xi \quad (d)$$

$$Q_e = \int_0^1 \frac{m''}{A} \sin \pi\xi \cdot d\xi \quad (e)$$

L'équation 4.28 peut s'écrire sous la forme d'une équation du second ordre comme formulé dans l'équation ci-dessous :

$$-\frac{1}{2} (EI_\omega \frac{\pi^4}{L^4} + (GJ \frac{\pi^2}{L^2})) - \left[2\beta_z \frac{\pi}{L^2} Q_c + (2\beta_z) \frac{\pi}{L^2} Q_b - e_z \frac{1}{L^2} Q_d - \frac{e_y}{L^2} Q_e \right] M_{\max} + \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right] M_{\max}^2 = 0 \quad (5.31)$$

La solution de l'équation 5.31 est :

$$M_{cr} = \frac{\frac{1}{L^2} [2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b - e_z Q_d - e_y Q_e] \pm \frac{1}{L^2} \sqrt{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b - e_z Q_d - e_y Q_e]^2 + 2\pi^2 \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right] (EI_\omega \pi^2 + L^2(GJ))}}{2 \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) Q_a \right]} \quad (5.32)$$

ou bien :

$$M_{cr} = \frac{\frac{1}{L^2} \frac{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b - e_z Q_d - e_y Q_e]}{\sqrt{Q_a}} \pm \frac{1}{L^2} \sqrt{\left[\frac{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b - e_z Q_d - e_y Q_e]}{\sqrt{Q_a}} \right]^2 + 2\pi^2 \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) \right] (EI_\omega \pi^2 + L^2(GJ))}}{2 \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) \sqrt{Q_a} \right]} \quad (5.33)$$

En posant :

$$\frac{[2\beta_z \pi Q_c + (2\beta_z) \pi Q_b - e_z Q_d - e_y Q_e]}{\sqrt{Q_a}} = K \quad (5.34)$$

on obtient une expression simple suivante :

$$M_{cr} = \left[\left(\frac{1}{\sqrt{2} \sqrt{Q_a}} \right) \right] EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \frac{K}{\sqrt{2} \pi^2} \pm \sqrt{\left(\frac{K}{\sqrt{2} \pi^2} \right)^2 + \left[\left(\frac{1}{EI_z} \right) \right] \left(EI_\omega + \frac{L^2}{\pi^2} (GJ) \right)} \right\} \quad (5.35)$$

Pour nous mettre en harmonie avec les écritures du CCM 97 [4] on pose :

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{2Q_a}} \quad (a)$$

$$C_2 = -\frac{Q_d}{\pi^2 \sqrt{2Q_a}} \quad (b) \quad (5.36)$$

$$C_3 = -\frac{\sqrt{2} Q_b + Q_c}{\pi \sqrt{Q_a}} \quad (c)$$

$$C_4 = -\frac{Q_e}{\pi^2 \sqrt{2Q_a}} \quad (d)$$

ce qui nous donne :

$$M_{cr} = C_1 P_{cr} \left\{ C_2 e_z + \beta_z C_3 + C_4 e_y \pm \sqrt{(C_2 e_z + \beta_z C_3 + C_4 e_y)^2 + \left(\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2 GJ}{\pi^2 EI_z} \right)} \right\} \quad (5.37)$$

Pour comparer les résultats trouvés en 5.27 et 5.37 nous allons écrire l'équation 4.22 sous une forme dont la solution mathématique est connu cela nous amène à solliciter notre poutre par un moment constant, donc $M_y = M_0 [1]$

5.8.3 RESOLUTION PAR LA METHODE ANALYTIQUE POUR UN MOMENT CONSTANT

L'équation 4.22 devient :

$$EI_\omega \theta_x^{(4)} - (GJ - 2M_0 \beta_z) \theta_x'' - \left(\frac{M_0^2}{EI_z} \right) \theta_x = 0 \quad (5.38)$$

Soit :

$$C_1 = EI_\omega \quad ; \quad C = (GJ - 2M_0 \beta_z) \quad ; \quad \alpha = \frac{C}{2C_1} \quad ; \quad \beta = \frac{M_y^2}{C_1 EI_z}$$

L'équation 5.38 s'écrit sous la forme :

$$\frac{d^4 \theta}{dx^4} - 2\alpha \frac{d^2 \theta}{dx^2} - \beta \theta = 0 \quad (5.39)$$

La solution générale de l'équation est [1]:

$$\theta = A_1 \sin mx + A_2 \cos mx + A_3 e^{nx} + A_4 e^{-nx}$$

$$m, n \in R^+$$

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$$

$$n = \sqrt{\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}}$$

Les constantes A_i , $i = 1, 2, 3$ et 4 seront déterminées par les conditions aux limites de la poutre, pour $x=0$ et $x=L$

De la condition $x=0$ nous concluons que $A_2 = 0$ et $A_3 = -A_4$ donc :

$$\theta_x = \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = 0 \quad ; \quad \theta = A_1 \sin mx - 2A_4 \operatorname{sh}nx$$

Utilisant les conditions à $x = L$, nous obtenons :

$$A_1 \sin mL - 2A_4 \operatorname{sh}nL = 0 \quad (*)$$

$$A_1 m^2 \sin mL - 2A_4 n^2 \operatorname{sh}nL = 0 \quad (**)$$

$$\begin{bmatrix} \sin mL & \operatorname{sh}nL \\ m^2 \sin mL & n^2 \operatorname{sh}nL \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} A_1 \\ -2A_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

En annulant le déterminant de cette équation matricielle, on obtient :

$$\det \begin{bmatrix} \sin mL & \operatorname{sh}nL \\ m^2 \sin mL & n^2 \operatorname{sh}nL \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow (\sin mL) \cdot (n^2 \operatorname{sh}nL + m^2 \operatorname{sh}nL) = 0$$

m et n sont définies positifs différents de zéro donc :

$$\sin mL = 0$$

On remplace ce résultat dans l'équation (**) et on aura : $A_4 = 0$

Finalement la solution est :

$$\theta_x = A_1 \sin mx$$

La plus petite valeur de m qui satisfait l'équation : $m = \frac{\pi}{L}$

$$m = \sqrt{-\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta}} \Rightarrow -\alpha + \sqrt{\alpha^2 + \beta} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

$$\alpha = \frac{C}{2C_1}; \beta = \frac{M_y^2}{C_1 EI_z}$$

donc :

$$-\frac{C}{2C_1} + \sqrt{\frac{C^2}{4C_1^2} + \frac{M_y^2}{C_1(EI_z)}} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

alors :

$$-\frac{(GJ - 2\beta_z M_y)}{2EI_\omega} + \sqrt{\frac{(GJ - 2\beta_z M_y)^2}{4(EI_\omega)^2} + \frac{M_y^2}{(EI_\omega)(EI_z)}} = \frac{\pi^2}{L^2}$$

Cette dernière équation peut s'écrire sous la forme d'une équation du second ordre :

$$M_y^2 + 2(\beta_z EI_z \frac{\pi^2}{L^2})M_y - EI_z \frac{\pi^2}{L^2} (GJ + EI_\omega \frac{\pi^2}{L^2}) = 0 \quad (5.40)$$

Dont la solution est :

$$M_{CR} = P_{cr} \left\{ \beta_z \pm \sqrt{\beta_z^2 + \left(\frac{L^2 GJ}{EI_z \pi^2} + \frac{EI_\omega}{EI_z} \right)} \right\} \quad (5.41)$$

ou bien :

$$M_{CR} = EI_z \frac{\pi^2}{L^2} \left\{ \beta_z \pm \sqrt{\beta_z^2 + \left(\frac{L^2 GJ}{EI_z \pi^2} + \frac{I_\omega}{I_z} \right)} \right\} \quad (5.41')$$

En comparant les équations 5.27, 5.37 et 5.41 nous pouvons définir les coefficients C_i comme suit :

C_1 Coefficient prenant en compte la distribution du moment.

C_2 Coefficient prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Z par rapport au centre de cisaillement.

C_3 Coefficient prenant en compte la dissymétrie de la section par rapport à l'axe Y.

C_4 Coefficient β prenant en compte le point d'application de la charge suivant l'axe Y par rapport au centre de cisaillement.

Avant même d'entamer les calculs, nous savons déjà en comparant les équations 5.27 et 5.41 que les coefficients C_1 et C_3 sont égaux à 1 pour $\Psi = 1$.

5.9 DETERMINATION DES COEFFICIENTS C_i

La détermination des coefficients par différentes méthodes à fait l'objet de plusieurs travaux de recherches. F. Mohri, A. Brouki, J.C.Roth [17] dans leur article ont utilisé la méthode de Ritz et Galerkin pour trouver les solutions et ont comparé les résultats trouvés avec les valeurs données à l'EC 3 [10]. Bambang Suryatmono, David Ho [9] ont comparé les valeurs du coefficient C_b trouvés par la méthode des différences finies et celles données par le AISC [3]. Les résultats trouvés ci-dessous ont été calculés en intégrant les équations 5.21 et 5.36 tout en remplaçant m (eq. 5.19) à chaque fois par sa valeur.

5.9.1 MOMENT LINEAIREMENT VARIABLE

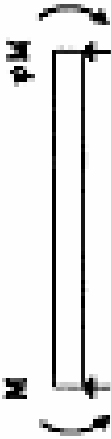







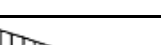
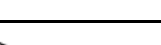
Chargement	Diagramme des moments	ψ	C_1	C_3
		1,00000	1,00000	1,00000
		0,75000	1,14134	0,99867
		0,50000	1,32376	0,99282
		0,25000	1,56364	0,97727
		0,00000	1,88087	0,94043
		-0,25000	2,28410	0,85654
		-0,50000	2,71149	0,67787
		-0,75000	2,94009	0,36751
		-1,00000	2,76616	0,00000

Tableau 5.1 : Coefficients C_1 et C_3 dans le cas de moments linéairement variables

5.9.2 CHARGE UNIFORMEMENT REPARTIE

La détermination des coefficients C_1 , C_2 et C_3 se fait par intégration directe, par contre, l'expression du coefficient C_4 dépend de l'amplitude A de la solution proposée à l'équation différentielle. Rappelons que la solution proposée $\theta_x = A \sin \frac{\pi x}{L} \ll 1$ donc A doit obligatoirement être inférieure à un. En bornant la solution de l'équation on aura le maxima et le minima du coefficient.

Sachant que :

$$C_4 = -\frac{Q_e}{\pi^2 \sqrt{2} Q_a} = -\frac{\int_0^1 \frac{(m'')}{A} \sin \pi \xi . d\xi}{\pi^2 \sqrt{2} \sqrt{\int_0^1 m.^2 (\sin^2 \pi \xi) d\xi}}$$

et que :

$$-1 \leq A \sin \pi \xi \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{\sin \pi \xi} \leq A \leq \frac{1}{\sin \pi \xi} . \Rightarrow -\int_0^1 m'' . d\xi \leq Q_e \leq \int_0^1 m'' . d\xi$$

donc :

$$8 \leq Q_e \leq -8$$

Après intégration on trouve :

$$C_1 = 1.13232$$

$$C_2 = 0.45961$$

$$C_3 = 0.52507$$

$$-7,06509 \leq C_4 \leq 7,06509$$

Tel que présenté, le moment critique de déversement dépend de la variation du coefficient C_4 , ce dernier à une variation linéaire. La valeur minimale de M_{cr} est donnée pour $C_4 = 7,065092612$

5.10 CONCLUSION

En comparant les valeurs des coefficients trouvées ci-dessus avec celles données dans la réglementation [4;10] pour les profilés bi symétrique et mono symétrique suivant l'axe de forte inertie, on observe que ces derniers sont identiques.

L'excentricité, par rapport à l'axe Y, entre le centre de cisaillement et le point d'application de la charge est exprimée par l'introduction d'un nouveau paramètre $C_4 e_y$ dans la formule du moment critique de déversement.

Le moment résistant $M_{b Rd}$ des profilés mono symétriques est autre que le moment critique formulé auparavant, car il nécessite l'introduction des imperfections géométriques qui seront étudiés dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DANS LA FORMULATION DE M_{bRd}

6 PRISE EN COMPTE DES IMPERFECTIONS DANS LA FORMULATION DE M_{bRd}

6.1 INTRODUCTION

Les modèles d'instabilités par « bifurcation » de l'équilibre donnent des charges « critiques » qui constituent des bornes supérieures des charges de ruine des poutres et des plaques . Les imperfections inévitables qui affectent les éléments de structures, et qui constituent la cause même des phénomènes d'instabilité, sont de plusieurs types. On peut notamment citer les imperfections géométriques telles que courbure ou torsion initiales, les imperfections structurelles telles que les contraintes résiduelles de fabrication et les hétérogénéités de la limite élastique ou du module d'élasticité dans la section transversale d'un profil et les défauts de positionnement ou de centrage des charges.

Ces imperfections entraînent des déformations transversales des éléments, même pour des charges nettement plus petites que les charges critiques, déformations qui s'amplifient indéfiniment lorsque la charge appliquée devient voisine de la charge de ruine et conduisent à une instabilité par « divergence » de l'équilibre.

Les courbes européennes de flambements, qui ont été établies pour donner des valeurs pratiques aux imperfections, sont issues d'un programme de recherches qui a été mené par le Convention Européennes de la Construction Métallique (CECM) à partir de 1960 [23]. Le programme a permis de réaliser plus de milles essais dans sept pays différents sur des éléments laminées et pour des élancements variés ($55 < \lambda < 160$). [23]

Les courbes de flambement **a**, **b**, **c** et **d** correspondent au profilés possédant un degré d'imperfection petit, moyen, grand et très grand respectivement le choix de ces courbes ce fait conformément au tableau 5.5.3 de l'EC3.

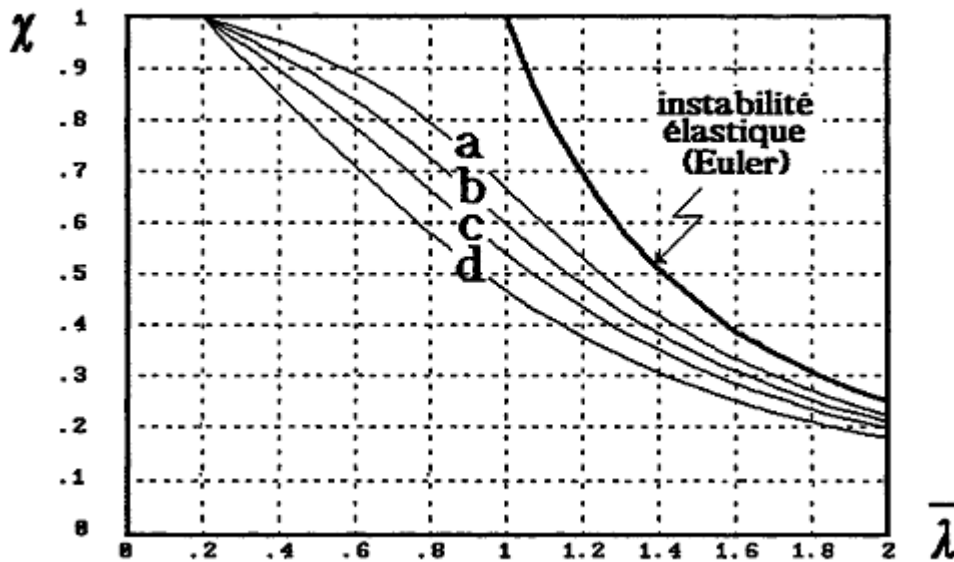


Figure 6.1 : Courbes d'imperfections

On notera que ces courbes sont fondées sur les conditions suivantes [23] :

Poutres de section constante et articulées à leurs extrémités.

L'effort axial est constant et appliqué aux extrémités de l'élément.

Le voilement local est empêché.

Il est à souligner que les courbes d'imperfections utilisées pour le déversement sont [4]:

La courbe **a** pour les profilés laminés.

La courbe **c** pour les sections soudées.

6.2 FORMULATION DES COURBES DE FLAMBEMENT

La formulation des courbes de flambement est issue des travaux d'AYRTON-PERRY et ceux de MAQUOI et RONDAL.

6.2.1 PRISE EN COMPTE D'UN DEFAUT INITIAL.

On considère un défaut de rectitude du type sinusoïdal s'écrivant sous la forme :

$$y_0(x) = e_0 \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6.1)$$

On a donc le schéma de déformée suivant :

L'équation différentielle traduisant l'équilibre du poteau devient :

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + \frac{N(y_0(x) + y(x))}{EI} = 0$$

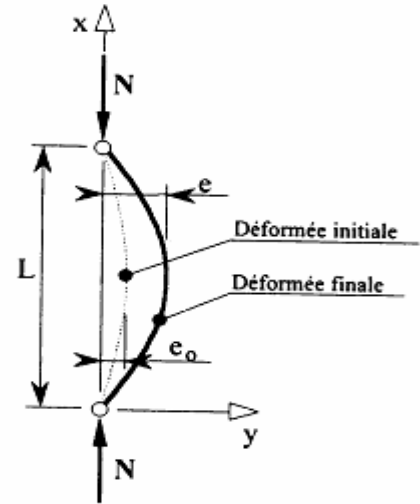


Figure 6.2 : Flambement d'un poteau bi articulé avec un défaut initial et chargé axialement

avec pour solution :

$$y(x) = \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} \sin \frac{\pi x}{L} \quad (6.2)$$

La flèche maximale totale e au milieu du poteau s'écrit sous la forme :

$$e = e_0 + \frac{e_0}{\frac{N_{cr}}{N} - 1} = \frac{e_0}{1 - \frac{N_{cr}}{N}} \quad (6.3)$$

On définit par ailleurs le facteur d'amplification : $\frac{1}{1 - \frac{N_{cr}}{N}}$

L'atteinte à la première plastification dans le poteau considéré sans contraintes résiduelles sous l'action du couple N_{max} et $e.N_{max}$ répond au critère :

$$\frac{N_{max}}{A} + \frac{e.N_{max}}{W_{el}} = f_y \quad (6.4)$$

N_{max} étant l'effort axial maximal limité par le flambement

En utilisant l'équation (6.3)

$$\frac{N_{max}}{N_{pl}} + \frac{e_0 \cdot A \cdot N_{max}}{W_{el} \left(1 - \frac{N_{max}}{N_{pl}} \frac{N_{pl}}{N_{cr}}\right)} = 1 \quad (6.5)$$

ou encore :

$$\chi + \frac{\chi}{1 - \chi \bar{\lambda}^2} \frac{e_0 \cdot A}{W_{el}} = 1 \quad (\text{Équation d'AYRTON-PERRY}) \quad (6.6)$$

avec : $\chi = \frac{N_{\max}}{N_{pl}}$ et $\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_y}{E}}$

On pose $\eta = \frac{e_0 \cdot A}{W_{el}}$ facteur d'imperfections généralisé représentant l'effet des différentes imperfections.

η peut s'écrire sous la forme :

$$\eta = \frac{l \cdot \zeta \cdot A}{W_{el}} \quad \text{avec} \quad \zeta = \frac{e_0}{l} \quad (6.7)$$

On faisant intervenir, λ , i et v

$$\eta = \frac{\zeta \cdot \lambda}{i/v} \quad (6.8)$$

L'objectif est de trouver une expression de χ coefficient de réduction affectant la résistance plastique de la section.

En exprimant λ en fonction de $\bar{\lambda}$ et sachant que $\chi = 1$ pour $\bar{\lambda} \leq 0,2$, on a :

$$\eta = \frac{90,15 \zeta \cdot (\bar{\lambda} - 0,2)}{i/v} = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2) \quad (6.9)$$

α est le facteur d'imperfection qui dépend de la courbe de flambement.

L'équation (6.6) devient : $(1 - \chi) \cdot (1 - \chi \bar{\lambda}^2) = \chi \eta = \alpha (\bar{\lambda} - 0,2)$ (6.10)

La recherche de la solution minimale donne :

$$\chi = \frac{\phi - \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}}{\bar{\lambda}^2} \quad (6.11)$$

avec : $\phi = 0,5[1 + \alpha(\bar{\lambda} - 0,2) + \bar{\lambda}^2]$ (6.12)

Après transformation, on obtient l'expression proposée par l'EC3 :

$$\chi = \frac{1}{\phi + \sqrt{\phi^2 - \bar{\lambda}^2}} \quad (6.13)$$

6.3 CALCUL DE M_{BRd}

Comme pour tous types de flambement, on doit tenir compte des imperfections géométriques, des contraintes résiduelles et des effets dus à la plasticité du matériau et à l'écroutissage. En ce qui concerne les imperfections géométriques initiales, la rotation initiale du barreau et le manque de planéité des composants de la section sont, comme on peut le comprendre, les plus significatifs. A la différence du flambement par flexion, pour lequel on a beaucoup d'informations, la résistance ultime associée au déversement ne peut pas être estimée avec une grande précision à cause du manque d'expériences suffisamment documentées et des résultats correspondants des tests [2]. On accepte généralement que la procédure utilisée pour le flambement par flexion puisse être étendue au flambement latéral, sous réserve de faire l'hypothèse que les diminutions de résistance dues aux imperfections et à la plasticité sont semblables dans les deux cas, si on les exprime en coordonnées réduite. L'élanement réduit correspondant est logiquement défini de la manière suivante :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{fy}{\sigma_{cr,LT}}}$$

où $\sigma_{cr,LT}$ représente la contrainte critique de déversement élastique.

L'introduction des imperfections géométrique nous a permis de déterminer le moment résistant au déversement $M_{BRd} = \chi_{LT} M_{PIRd}$ et cela en prenant en compte la courbe « a » (courbes C.E.C.M) [4]

6.3.1 CALCUL DE $\bar{\lambda}_{LT}$

La formule de $\bar{\lambda}_{LT}$ est donnée par :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{\beta_W \cdot W_{PL,y} \cdot f_y}{M_{cr}}} \quad (6.14)$$

où M_{cr} est le moment critique de déversement d'une poutre bi-appuyée sollicitée avec une charge uniformément répartie dont l'expression est donnée en (5.37).

Lorsque la charge est appliquée au centre de gravité l'expression du moment critique devient :

$$M_{cr} = C_1 P_{cr} \left\{ \beta_z C_3 + C_4 e_y \pm \sqrt{(\beta_z C_3 + C_4 e_y)^2 + \left(\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\} \quad (6.15)$$

Si la section de la poutre possède un axe de symétrie et si le couple de flexion s'exerce dans le plan perpendiculaire à cet axe, on trouve que la valeur de $\beta_z = 0$ [1] (calcul détaillé en ANNEXE I), donc l'expression du moment critique devient :

$$M_{cr} = C_1 P_{cr} \left\{ C_4 e_y \pm \sqrt{(C_4 e_y)^2 + \left(\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\} \quad (6.16)$$

De l'équation 6.14 , l'équation général de $\bar{\lambda}_{LT}$ s'écrit :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \frac{\beta_w \cdot W_{PL,y} \cdot f_y}{\sqrt{C_1 P_{cr} \left\{ C_4 e_y \pm \sqrt{(C_4 e_y)^2 + \left(\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\}}} \quad (6.17)$$

6.4 RESUME POUR LE CALCUL DE M_{bRd}

Des équations précédentes nous allons mettre en place un résumé qui nous permettra de déterminer les valeurs numériques de M_{bRd} pour une poutre bi-appuyée portant une charge uniformément répartie appliquée au centre de gravité dont les conditions aux limites sont déjà cité au préalable. Les étapes de calcul sont les suivantes :

- Détermination des caractéristiques géométriques de la section.
- Calcul de $\bar{\lambda}_{LT}$; $\bar{\lambda}_{LT} = \frac{\beta_w \cdot W_{PL,y} \cdot f_y}{\sqrt{C_1 P_{cr} \left\{ C_4 e_y \pm \sqrt{(C_4 e_y)^2 + \left(\frac{I_\omega}{I_z} + \frac{L^2}{\pi^2} \frac{GJ}{EI_z} \right)} \right\}}}$
- Calcul de ϕ_{LT} ; $\phi_{LT} = 0,5[1 + \alpha_{LT}(\bar{\lambda}_{LT} - 0,2) + \bar{\lambda}_{LT}^2]$ avec $\alpha_{LT} = 0,21$
- Calcul de $\chi_{LT} = \frac{1}{\phi_{LT} + \sqrt{\phi_{LT}^2 - \bar{\lambda}_{LT}^2}}$

- En fin $M_{BRd} = \chi_{LT} M_{PIRd}$

6.5 TRAITEMENTS OU PROCEDURES REGLEMENTAIRES

Pour poutres bi-symétriques chargées au centre du cisaillement, la valeur de M_{cr} peut être calculée par l'expression [10] :

$$M_{cr} = C_1 \frac{\pi^2 EI_z}{(kL)^2} \left\{ \sqrt{\left(\frac{k}{kw}\right)^2 \frac{I_\omega}{I_z} + \frac{(kL)^2 GI_t}{\pi^2 EI_z}} \right\} \quad (6.18)$$

où les conditions d'appuis sont introduites au moyen du coefficient k et du coefficient de gauchissement k_w , qui ont pour valeurs 1 lorsque la poutre est libre de se gauchir.

La variation du moment le long de la poutre est prise en considération par le coefficient C_1 lequel est aussi affecté par les conditions d'appuis.

Dans cette partie nous présentons une vue d'ensemble schématique des procédures proposées pour déterminer le moment critique du déversement élastique et les valeurs qu'ils donnent pour le facteur de variation du moment.

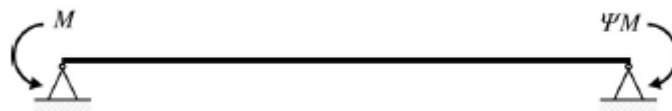


Figure 6.3 : Moment linéairement variable

6.5.1 CALCUL SELON LES REGLES AISC LRFD

Pour une poutre à section ouverte le moment critique dépend de la rigidité à la flexion latérale ; la rigidité de torsion ainsi que la rigidité de gauchissement [15].

Pour une poutre simplement appuyée la formule définissent le moment critique de déversement élastique est :

$$M_{cr} = C_b \frac{\pi}{L_b} \sqrt{\left[EI_z GI_t + \left(\frac{\pi E}{L_b} \right)^2 I_z I_\omega \right]} \quad (6.19)$$

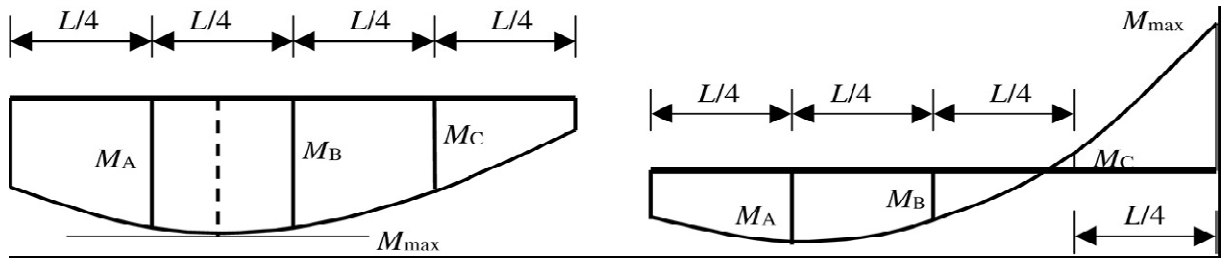


Figure 6.4 : Compartimentage des moments appliqués

où L_b est la longueur de la poutre et C_b est le coefficient de variation du moment [9].

Les équations (6.18) et (6.19) sont identiques quand les coefficients k et k_w ont les mêmes valeurs, c'est-à-dire, quand la poutre a le même grade de prévention pour la rotation comme pour gauchir à chacun de ses supports. Lorsque $L_b = kL$, et $k = k_w$, les deux expressions sont identiques. Par conséquent, le coefficient C_b est égal au coefficient C_1 .

Miguel A. Serna & al [3] se réfèrent aux travaux de recherche exécutés par Salvador, et suivant ces derniers les valeurs de C_b qui ont été données dans l'AISC LRFD pour le cas de distribution du moment linéaire (Fig. 6.3) sont exprimées par :

$$C_b = 1.75 - 1.05\psi + 0.3\psi^2$$

avec :

$$C_b \leq 2.3 \quad (6.20)$$

L'édition la plus récente de l'AISC LRFD incorpore, avec une très petite modification, l'expression du coefficient C_b proposée par Kirby et Nethercot [3;9] pour différentes formes de distribution du moment. En se référant à la figure 6.4, le coefficient C_b est donné par :

$$C_b = \frac{12,5M_{Max}}{2,5M_{Max} + 3M_A + 4M_B + 3M_C} \quad (6.21)$$

où M_{Max} est le moment maximum, et M_A , M_B et M_C sont les valeurs du moment à $L/4$, $L/2$ et $3L/4$ de la longueur respectivement. Toutes les valeurs du moment dans l'équation (6.21) sont prise en valeurs absolues.

Il devrait être noté que le AISC LRFD ne considère pas la possibilité de k diffère de k_w , de plus, valeurs de C_b pour toute condition d'appuis est la même et ne dépend pas des coefficients, k et k_w [3].

6.5.2 CALCUL SELON LES REGLES BS 5950

L'édition de l'année 2000 du code Britannique pour l'acier dans les bâtiments incorpore une formulation très semblable à cela de l'AISC LRFD [3].

Dans le BS 5950, le coefficient équivalent du moment constant appelé m_{lt} , est l'inverse des coefficients C_1 (éq. (6.18)) et C_b (éq. (6.19)).

Les expressions de m_{Lt} et de C_1 sont données par :

$$m_{LT} = 0.2 + \frac{0.15M_A + 0.5M_B + 0.15M_C}{M_{Max}} \quad (6.22)$$

avec :

$$m_{LT} \geq 0.44$$

$$C_1 = \frac{M_{Max}}{0.2M_{Max} + 0.15M_A + 0.5M_B + 0.15M_C} \quad (6.23)$$

avec :

$$C_1 \leq 2.273$$

Les valeurs de M_{Max} , M_A , M_B et M_C sont des valeurs absolues (Fig. 6.4)

En multipliant et en divisant de deuxième membre de l'équation (6.23) par 12.5, nous pouvons voir plus clairement la ressemblance entre les coefficients donnés en (6.22) et (6.23) et le de coefficient de distribution donné par AISC LRFD [9]:

$$C_1 = \frac{12.5M_{Max}}{2.5M_{Max} + 1.875M_A + 6.25M_B + 1.875M_C} \quad (6.24)$$

6.5.3 CALCUL SELON LES REGLES EUROCODE 3

Le déversement des poutres est considéré par l'Eurocode 3 [10] comme un des états limites ultimes. La résistance au déversement est obtenue en multipliant la résistance de la section transversale par un facteur de réduction χ_{LT} . Ce facteur de réduction dépend de deux autres paramètres : le facteur d'imperfection α et l'élancement réduit $\bar{\lambda}_{LT}$.

L'élancement réduit $\bar{\lambda}_{LT}$ est obtenu par l'expression :

$$\bar{\lambda}_{LT} = \sqrt{\frac{M_{cRd}}{M_{cr}}} \quad (6.25)$$

où M_{cRd} est le moment de la résistance de la section transversale soumise à la flexion et M_{cr} est le moment critique de déversement élastique.

Des formules simplifiées de $\bar{\lambda}_{LT}$ sont proposées dans l'EC 3 et le CCM 97 [4 ; 10] pour les cas d'utilisation courants.

6.6 CONCLUSION

L'introduction des formules d'imperfection nous permettra d'approcher le comportement réel des profils en U vis à vis sa stabilité au déversement.

Des application seront développées dans le chapitre qui suit.

Chapitre 7

RESULTATS ET INTERPRETATIONS

7 RESULTATS ET INTERPRETATIONS

7.1 NUMERISATION DES RESULTATS

Les profilés étudiés sont toujours employés comme lisse de bardages ; pannes de toitures ou solives pour plancher. Pour cela nous nous proposons de calculer les valeurs de M_{bRd} pour les différentes sections des *UAP* en considérant les longueurs de poutre les plus utilisées dans la charpente du bâtiment 04 m ; 06 m et 08 m.

D'un autre part nous avons calculé les valeurs de M_{bRd} correspondant aux longueurs citées ci-dessus pour des *IPE* et cela afin de d'effectuer un comparaison entre les deux gammes de profilés.

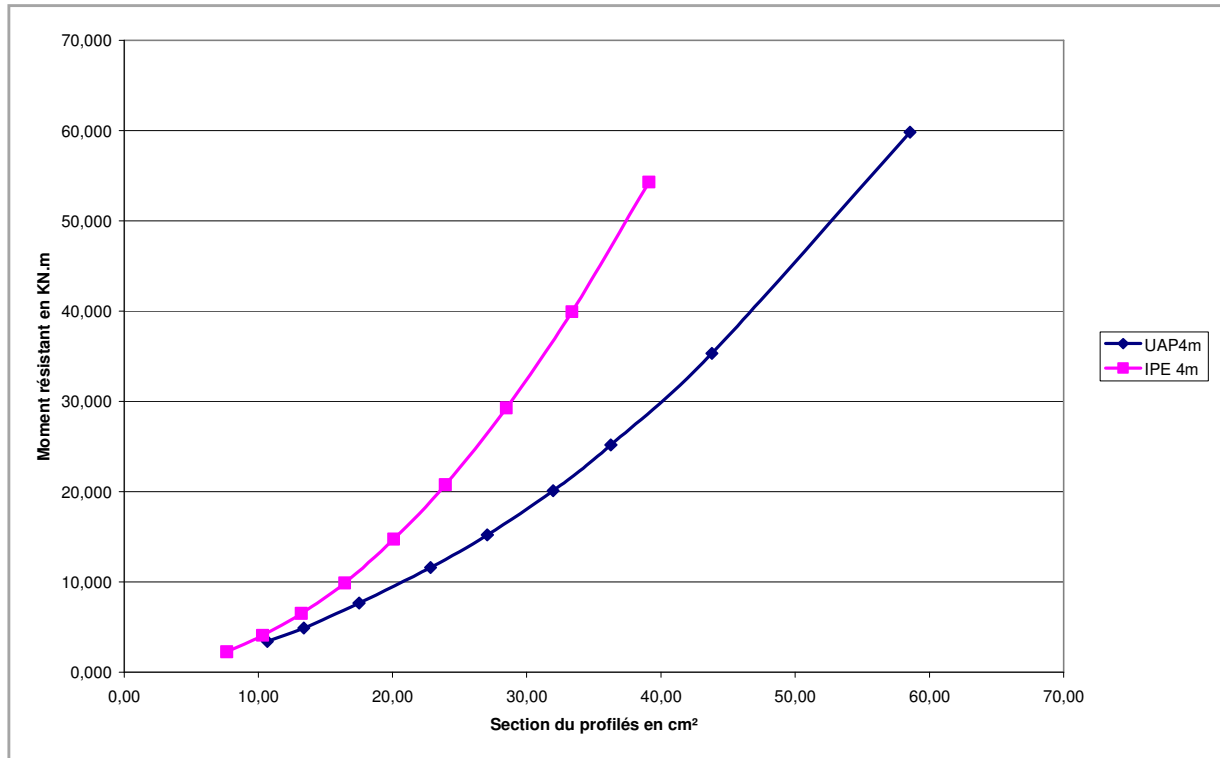
Toutes les valeurs de M_{bRd} (calculés en utilisant les caractéristiques géométriques des profilés prises dans le catalogue de l'OTUA [24]) sont données à l'annexe II.

7.2 ANALYSE DE LA STABILITE ET LA RESISTANCE

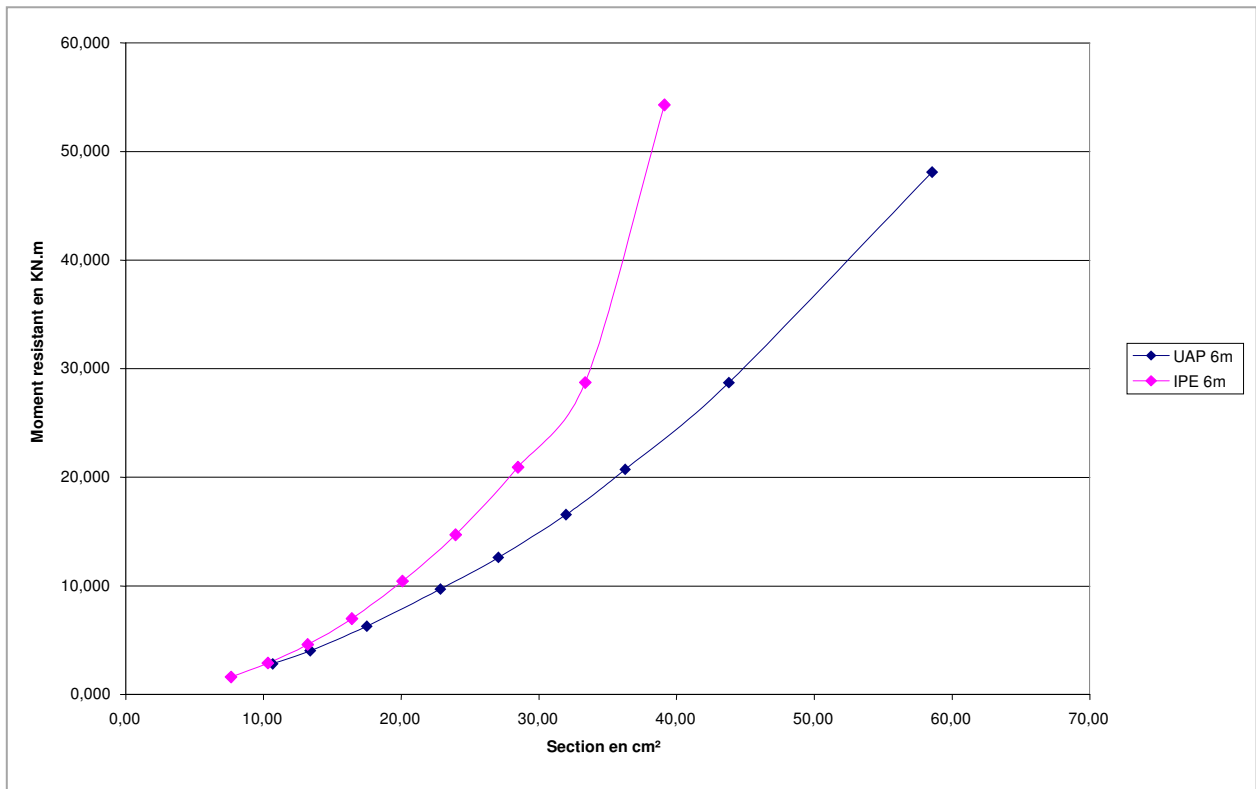
La comparaison des résultats trouvés pour ce type de profilés (section en U) et les résultats trouvés dans la littérature (sections en I) nous amène à distinguer l'introduction d'un nouveau coefficient C_4 dans l'expression du moment critique de déversement, intervenant dans la prise en compte de l'excentricité du centre de torsion suivant l'axe y-y.

En représentant les variations de M_{bRd} en fonction du poids (ou bien de l'aire de la section transversale) des éléments pour des *IPE* et des *UAP* nous avons obtenus les courbes suivantes :

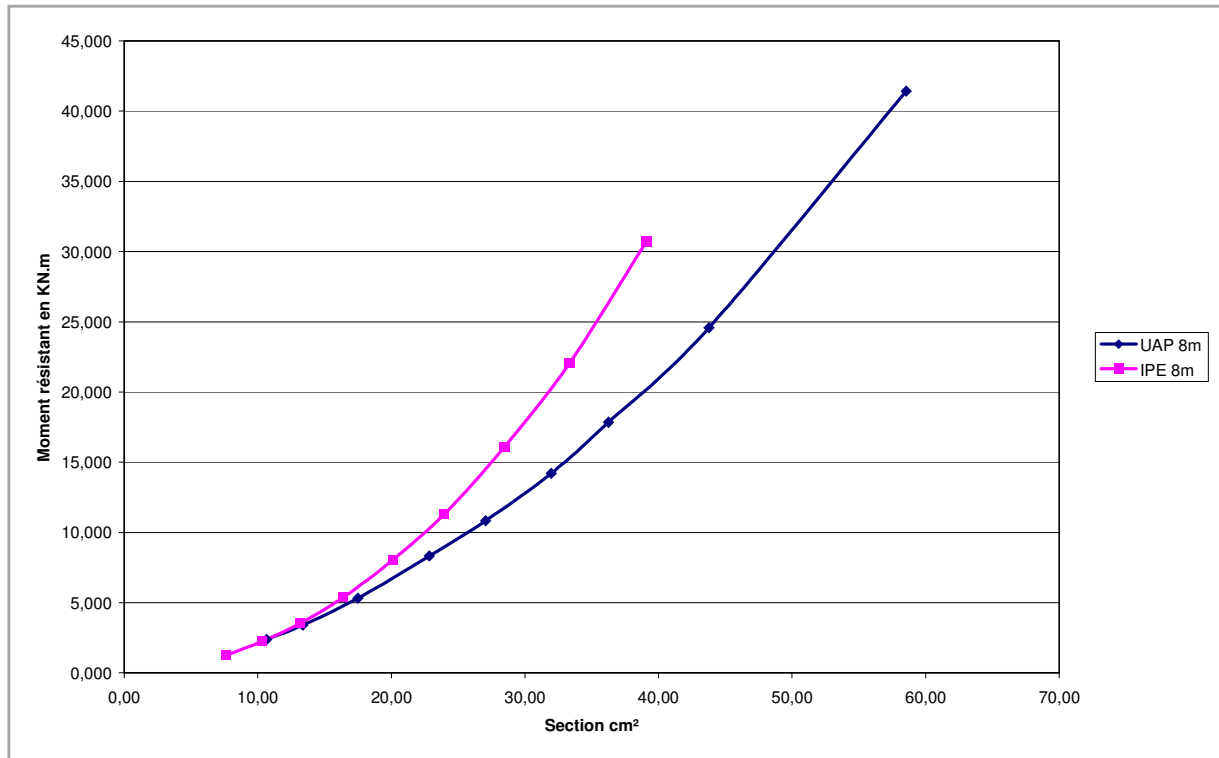
Figure 7.1 :« Variation de $M_{b,Rd}$ en fonction de la section d'acier (IPE-UAP) »



Courbe -a-



Courbe -b-



Courbe -c-

Nous remarquons dans les trois courbes (a, b et c) que les *IPE* offre une stabilité meilleure que celle donnée par les *UAP*, la différence augmente et paraît claire pour les moments dépassant les 10 KN.m.

Pour les gammes de profilés dont les hauteurs ne dépassent pas les 140 mm (cas des éléments secondaires) les rapports entre capacité de résistance et poids est quasiment le même car on constate que les points correspondant à l'*IPE100* et l'*UAP100* sont superposés dans les trois cas.

Même si pour une même résistance un gain en quantité d'acier est clair, en comparant l'*IPE160* et l'*UAP150*, cependant, et pour des raisons de service et de durabilité, il est préférable d'utiliser les *UAP* comme lisses de bardage.

Pour des dimensions supérieures à celles citées ci-dessus, il est clair que l'utilisation des *IPE* est bénéfique et plus économique.

Les profilés étudiés sont toujours employés comme lisses de bardages ; pannes de toitures ou solives pour plancher.

Dans le cas des solives le problème ne se pose pas car la partie comprimée des solives est accrochée à un diaphragme

L'utilisation des profilés en U comme pannes de toitures n'est pas à écarter pour cela nous allons comparer le dimensionnement d'une panne de toiture sans prise en compte de la stabilité au déversement puis vérifier cette dernière à l'aide des formules établies dans ce travail.

Pour cela nous avons pris un cas de charge déjà étudié auparavant et où les pannes de toitures étaient des *IPE140* de 04m de longueur (voir ANNEXE II).

Sachant que la pièce est sollicitée en flexion déviée, la condition de rigidité pour cet exemple nous a donné un *UAP130*, le ratio de travail en ne prenant pas en compte la stabilité au déversement était de 40%.

La vérification de la stabilité au déversement conformément aux résultats trouvés nous donne un ratio de travail considérablement plus important égal à 92,2%.

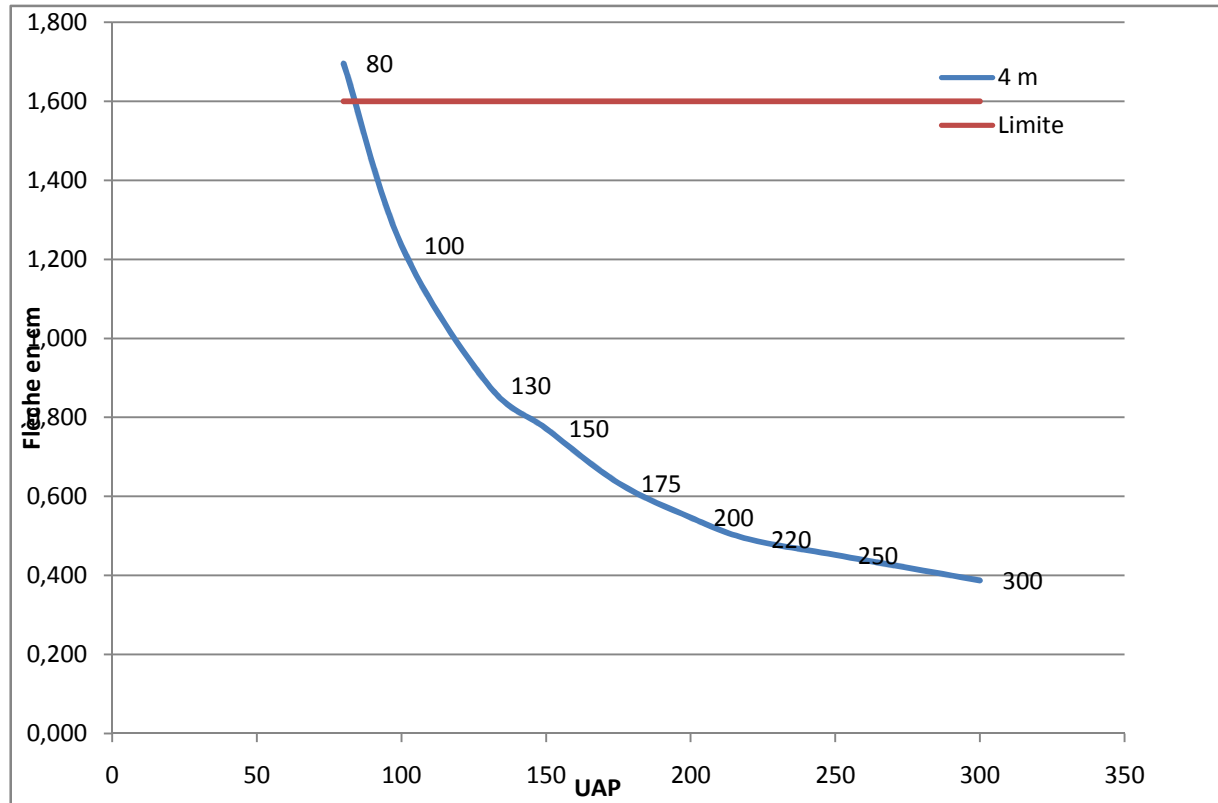
Même si pour ce cas l'*UAP130* vérifie la stabilité au déversement mais toujours est il que le taux de travail en flexion est inférieur à la moitié du taux de la stabilité. Donc la vérification de la stabilité au déversement s'avère nécessaire.

7.3 ANALYSE DES DEFORMATIONS (LA FLECHE)

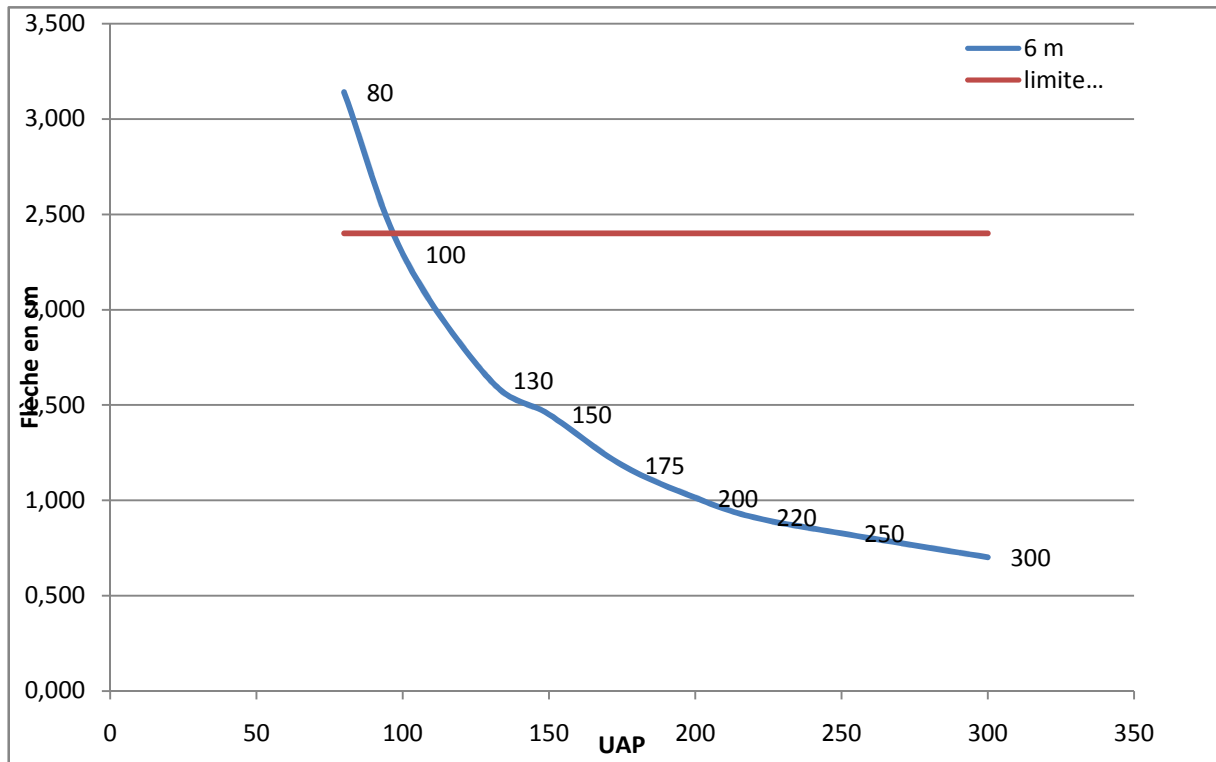
Généralement le critère prédominant de dimensionnement des profilés en U est celui de la rigidité ; l'expérience a montré que pour les lisses de bardage, le dimensionnement ce fait en satisfaisant la condition de la flèche réglementaire, pour cela un comparatif a été établis.

Pour les mêmes valeurs des moments critiques calculées précédemment, nous avons déterminé les flèches (à l'ELS) dues à ces moments et nous les avons comparés à la limitation réglementaire comme indiqué ci-dessous :

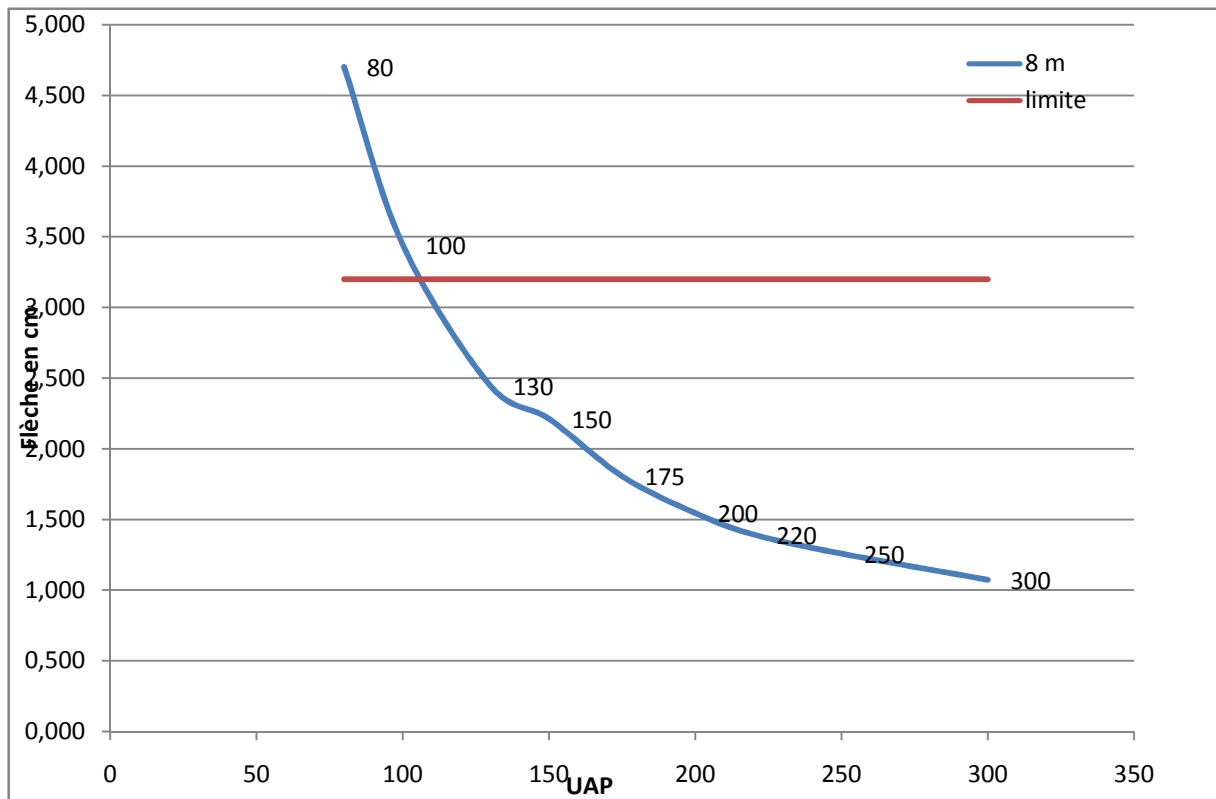
Figure 7.2 :« Variation de δ_{lim} en fonction de la section d'acier (UAP) »



Courbe -d-



Courbe -e-



Courbe -f-

Les courbes ci-dessus nous montrent la variation de la flèche donnée par une charge répartie correspondant au moment M_{bRd} pour la gamme des UAP. Le seuil réglementaire est constant car il dépend de la longueur des pièces.

Ces courbes nous montrent que les charges critiques de l'UAP80 provoquent des flèches de 1.69 ; 3.14 et 4.7 cm pour les pièces de 4 ; 6 ; et 8 m de long (respectivement.), cependant la limite réglementaire de la flèche est de l'ordre de $L/250$ [4] (1.6 ; 2.4 et 3.2 cm). Ce qui nous mène à dire que si l'UAP80 satisfait la condition de rigidité pour les longueurs étudiées, il n'est pas nécessaire de vérifier sa stabilité au déversement.

7.4 RECAPITULATIF

Le tableau ci-dessous nous décrit les critères de dimensionnements prédominants, en faisant la même analyse pour les profilés restants.

PROFILÉ	Critère de dimensionnement pour différentes portées		
	04 m	06 m	08 m
UAP 80	Rigidité	Rigidité	Rigidité
UAP 100	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Rigidité
UAP 130	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 150	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 175	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 200	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 220	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 250	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique
UAP 300	Stabilité élastique	Stabilité élastique	Stabilité élastique

Chapitre 8

CONCLUSION

8 CONCLUSION

Au cours de ce travail nous avons développé la formule du moment critique de déversement des poutres à section transversal mono symétrique suivant leur axe de faible inertie.

L'équation différentielle régissant le déplacement comporte tous les paramètres que celles trouvées dans la littérature en plus la prise en compte de l'excentricité relative au centre de torsion par rapport à l'axe $y-y$.

En comparant les valeurs des coefficients trouvées ci-dessus avec celles données dans la réglementation [4;10] pour les profilés bi symétrique et mono symétrique suivant l'axe de forte inertie, on observe que ces dernières sont identiques.

L'excentricité entre le centre de cisaillement et le point d'application de la charge est exprimée par l'introduction d'un nouveau coefficient C_4 inexistant dans la littérature dans la formule du moment critique de déversement.

L'aspect pratique nous a poussé à calculer les différentes valeurs du moment critique pour les sections en *UAP* normalisées et à comparer leur stabilité avec celle des *IPE*, ceci nous a aussi permis de comparer les critères de dimensionnement c'es-à-dire, la condition de rigidité et la stabilité au déversement pour les longueurs utilisées généralement dans la charpente du bâtiment.

Dans la charpente du bâtiment, les pièces en U généralement utilisées sont les *UAP* 80 ; 100 et 130. Leurs critères de dimensionnement est, soit celui de la rigidité ou celui de la stabilité élastique. Pour cela, la stabilité au déversement de ces pièces doit être envisagée dans les calculs et cela afin d'assurer une bonne servitude du bâtiment conçu.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Timoshenko. – «Theory of elastic stability» – McGraw-Hill – 1961 /Traduit en français par Jean MOREL
- [2] Association pour la Promotion de l'enseignement de la construction acier – « Stabilité appliquée » - Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier
- [3] Miguel A. Serna, Aitziber Lopez, Inigo Puente, Danny J.Yong «Equivalent uniform moment factors for lateral–torsional buckling of steel members» - Journal of Constructional Steel Research 62(2006)566–580
- [4] DTR BC 2.44 – «Règles de conception et de calcul des structures en Acier » «CCM 97 »
- [5] Site internet – «www.cluny.ensma.fr »
- [6]C. Deschenaux– «Construction en acier »– EIA-FR, GC
- [7] B. Larue. – «Déversement élastique des profils laminés avec maintien latéral rigide et continu au niveau d'une semelle»– Revue Construction Métallique n°4-2002 – CTICM
- [8] P.Stepine – «Resistance des Matériaux » 1983–Traduit du russe en français par Valentin Polonski- Edition MIR, 1986
- [9] Bambang Suryoatmono, David Ho– «The moment–gradient factor in lateral–torsional Buckling on wide flange steel sections» - Journal of Constructional Steel Research 58(2002)1247–1264
- [10] XP P22-311 – EC3-DAN – «Calcul des structures en acier» et Document d'Application Nationale – Partie 1.1: «Règles générales et règles pour les bâtiments».
- [11] Pierre-Alain Boucard « Cours de Dimensionnement des Structures Résistance des Matériaux » - IUT Cachan
- [12] Manfred Hirt, Rolf Bez – «Conception et Dimensionnement des Hall et Bâtiments »- Vol.11. Presse Polytechnique et Université de Romandes – Avril 1994
- [13] XP P22-311/A2 – EC3-DAN – «Calcul des structures en acier » et Document d'Application Nationale – Partie 1.1: «Règles générales et règles pour les bâtiments» ANNEXE G.
- [14]P.C.J. Hoogenboom« Vlasov torsion theory» October 2006
- [15] Roger L. Brockenbrough & Frederick S. Merritt « Structural Steel Designer's Handbook»-Third Edition -Mc GRAW-HILL, INC.
- [16] P. Lestuzzi – «Cours de Mécanique des Structures et Solides» -Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne- 2005
- [17] F.Mohri , A. Brouki , J.C.Roth-« Theoretical and numerical stability analyses of Unrestrained, mono-symmetric thin-walled beams» - Journal of Constructional Steel Research 59(2003)63–90

[18] Foudil Mohri - Nouredine Damil - Michel Potier-Ferry – «Un modèle éléments finis pour le calcul non linéaire des poutres à parois minces et à sections ouvertes » –IUT Nancy-Brabois, UHP, Nancy 1, France

[19] B. Larue. – «Stabilité des poutres a voiles minces» site internet -www.Lycos.fr

[20] Steven M. Wilkerson-« Improved Coefficients for Elastic Lateral -Torsional

Buckling» – American Institute of Aeronautics and Astronautics - Rice University, Houston, Texas, 77005, U.S.A

[21] A. Andrade & D. Camotim– «lateral-torsional buckling of singly symmetric tapered beams: theory and applications» FCT, University of Coimbra, Portugal

[22] Xiao-ting Chu, Roger Kettle, Long-yuan Li -«Lateral-torsion buckling analysis of partial-laterally restrained thin-walled channel-section beams»- Journal of Constructional Steel Research 60(2004)1159–1175

[23] Philippe SZKLEREK « Construction métallique » - Université du HAVRE

[24] Office Technique pour l'Utilisation de l'Acier (OTUA). – Produits sidérurgiques Caractéristiques dimensionnelles. Édition 1993.

[25] MOHAMED EL NAGGAR-« Recherche de la charge ultime d'une charpente métallique »- Ecole Polytechnique Fédérale De Lausanne -Thèse N° 420 (1982).

ANNEXES

ANNEXE I : DEVELOPPEMENT DU CALCUL DE β_z

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \int_S z(y^2 + z^2) dS - z_c$$

La section sera compartimentée en trois parties :

$$0 \leq y \leq b$$

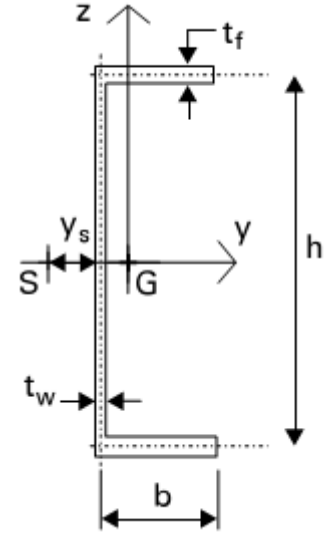
$$-\frac{h}{2} \leq z \leq -\left(\frac{h}{2} - tf\right)$$

$$0 \leq y \leq tw$$

$$-\left(\frac{h}{2} - tf\right) \leq z \leq \left(\frac{h}{2} - tf\right)$$

$$0 \leq y \leq b$$

$$\left(\frac{h}{2} - tf\right) \leq z \leq \frac{h}{2}$$



$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \left(\left[\left(\frac{1}{6} z^2 y^3 + \frac{1}{4} y z^4 \right) \right]_{-h/2}^{b, -(h/2-tf)} + \left[\left(\frac{1}{6} z^2 y^3 + \frac{1}{4} y z^4 \right) \right]_{-(h/2-tf)}^{tw, 0} + \left[\left(\frac{1}{6} z^2 y^3 + \frac{1}{4} y z^4 \right) \right]_{(h/2-tf)}^{b, h/2} \right)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \left(\left[\left(\frac{1}{6} z^2 b^3 + \frac{1}{4} b z^4 \right) \right]_{-h/2}^{-(h/2-tf)} + \left[\left(\frac{1}{6} z^2 tw^3 + \frac{1}{4} tw z^4 \right) \right]_{-(h/2-tf)}^{(h/2-tf)} + \left[\left(\frac{1}{6} z^2 b^3 + \frac{1}{4} b z^4 \right) \right]_{(h/2-tf)}^{h/2} \right)$$

$$\beta_z = \frac{1}{2I_y} \left(\left[\left(\frac{1}{6} ((h/2 - tf))^2 b^3 + \frac{1}{4} b ((h/2 - tf))^4 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{6} (h/2)^2 b^3 + \frac{1}{4} b (h/2)^4 \right) \right] \right)$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{6} (h/2 - tf)^2 tw^3 + \frac{1}{4} tw (h/2 - tf)^4 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{6} (h/2 - tf)^2 tw^3 + \frac{1}{4} tw (h/2 - tf)^4 \right) \right]$$

$$+ \left[\left(\frac{1}{6} (h/2)^2 b^3 + \frac{1}{4} b (h/2)^4 \right) \right] - \left[\left(\frac{1}{6} (h/2 - tf)^2 b^3 + \frac{1}{4} b (h/2 - tf)^4 \right) \right] = 0$$

$$\beta_z = 0$$

Le résultat trouvé a été déjà cité dans la littérature [1].

ANNEXE II : EXEMPLE DE CALCUL D'UNE PANNE DE TOITURE

Soit une panne de toiture se trouvant sur une halle industrielle de 8 m de hauteur. Cette panne, dont la portée est égale à 4m, est sollicitée par une charge $q_w=252.6$ daN/ml (action du vent).

Le choix d'un profilé en I nous mène à prendre un *IPE* 140 suite aux différentes vérifications (la stabilité au déversement présente le critère de dimensionnement).

Nous allons dans cet exemple choisir une autre famille de profilés à savoir les UAP.

$$q_w = 252.6 \text{ daN/ml}$$

$$\delta_2 \leq L/250 = 400/250 = 1.6 \text{ cm}$$

$$\delta_2 = 5ql^4/384EI_y \Rightarrow I_y \geq 250.6 \text{ cm}^4$$

On choisie un *UAP* 130

Vérifications :

Les différentes charges intervenantes

G : Les charges permanentes

Le poids propre

$$g_1 = 13.7 \text{ daN/ml}$$

Le poids de la couverture TL75 (15.20daN/m²)

$$g_2 = 15.20 * 1.45 = 22.04 \text{ daN/ml}$$

$$G = 13.7 + 22.04 = 35.47 \text{ daN/ml}$$

$$G_z = 35.04 \text{ daN/ml}; G_y = 7.00 \text{ daN/ml}$$

Charges d'exploitations

Q : Charge imposée par le DTR BC 22

$$Q = 100 \text{ daN}$$

$$Q_z = 98.06 \text{ daN}; Q_y = 19.6 \text{ daN}$$

S : Le poids de la neige (39.4 daN/m²)

$$S = 1.45 \times 39.4 = 57.13 \text{ daN/ml}$$

$$S_z = 56.02 \text{ daN/ml}; S_y = 11.2 \text{ daN/ml}$$

W: charge due au vent

$$W^+ = W_z = 13.1 \text{ daN/ml}$$

$$W^- = W_z = 252.6 \text{ daN/ml}$$

Les valeurs de **M**, **V** et δ obtenues pour considérer les cas de charges les plus défavorables sont données dans le tableau suivant :

charge	axe de flexion	M (daN.m)	V (daN)	δ (cm)
G	Y-Y	70.08	70.08	0.12
	Z-Z	14	14	0.22
W-	Y-Y	-505.2	-505.2	-0.87
	Z-Z	0	0	0
Q	Y-Y	130.75	98.06	0.33
	Z-Z	23.13	19.6	0.76

Vérification de la flèche

La combinaison la plus défavorable pour δ max est donnée par **G+Q**

$$\delta_{\max} = \sqrt{\delta_y^2 + \delta_z^2} = 1.07 < 400/200 = 2 \text{ cm}$$

La combinaison la plus défavorable pour δ_2 max est donnée par **W-**

$$\delta_2 = 0.76 < 1.6 \text{ cm}$$

Vérification du moment fléchissant

Notre section (**UAP130**) est de classe 1 et elle est soumise à la flexion déviée

La formule de vérification est :

$$\frac{M_{ysd}}{W_{ply} \times f_y / \gamma_{M0}} + \frac{M_{zsd}}{W_{plz} \times f_y / \gamma_{M0}} \leq 1$$

$$\frac{70,08 + 1,5 \times -505,2}{83,51 \times 23,5 / 1,1} + \frac{14 + 1,5 \times 0}{26,03 \times 23,5 / 1,1} = 0,38 + 0,02 = 0,4$$

Stabilité au déversement : (en utilisant la valeur de $M_{b Rd}$ calculée précédemment – voir annexe III)

$$\frac{M_{ysd}}{\chi_L W_{ply} \times f_y / \gamma_{M1}} + \frac{M_{zsd}}{W_{plz} \times f_y / \gamma_{M1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{6,877}{7,667} + \frac{0,14}{5,560} = 0,922$$

Sachant que la pièce est sollicitée en flexion déviée, la condition de rigidité pour cet exemple nous a mené à prendre un UAP130, le ratio de travail en ne prenant pas en compte la stabilité au déversement est de 40%.

La vérification de la stabilité au déversement conformément aux résultats trouvés nous donne un ratio de travail largement plus important égal à 92,2%.

Même si pour ce cas l'UAP130 vérifie le critère de stabilité au déversement mais toujours est il, que le taux de travail en flexion est inférieur à la moitié du taux de stabilité. Donc la vérification de la stabilité à déversement s'avère nécessaire.

ANNEXE III : VALEURS DE M_{BRD} POUR LES LONGUEUR ETUDIEES

UAP	Aire du profilé (cm ²)	M_{bRd} (KN.m)		
		L= 04 m	L= 06 m	L= 08 m
80	10,67	3,434	2,826	2,379
100	13,38	4,894	4,036	3,410
130	17,50	7,667	6,289	5,309
150	22,84	11,616	9,702	8,321
175	27,06	15,223	12,633	10,836
200	31,98	20,107	16,567	14,207
220	36,27	25,204	20,731	17,838
250	43,80	35,341	28,716	24,586
300	58,56	59,819	48,113	41,422

IPE	Aire du profilé (cm ²)	M_{bRd} (KN.m)		
		L= 04 m	L= 06 m	L= 08 m
80	7,64	2,277	1,612	1,243
100	10,32	4,085	2,899	2,236
120	13,21	6,504	4,602	3,545
140	16,43	9,903	6,991	5,376
160	20,09	14,744	10,443	8,031
180	23,95	20,775	14,700	11,280
200	28,48	29,282	20,940	16,102
220	33,37	39,947	28,736	22,073
240	39,12	54,298	54,298	30,737