

N° d'ORDRE : 09/2015-D/145

REPUBLIQUE ALGERINNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEINEMENT SUPERIEURE ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
«HOUARI BOUMEDIENE»
FACULTÉ DE MATHEMATIQUES



Thèse

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR EN SCIENCES**

EN : MATHÉMATIQUES

Spécialité : PROBABILITES ET STATISTIQUES

Par : MEDDAHI SAMIA

Thème

Estimation et algorithmes stochastiques comparés à la méthode de l'EDS

Soutenue publiquement le, 25/06/2015, devant le jury composé de :

Mme. H. GUERBYENNE	Professeur	à l'USTHB	Présidente
Mme. K. DJABALLAH	Maître de conférences A	à l'USTHB	Directrice de thèse
Mr. M. BOUSHABA	Professeur	E.N.S. CONSTANTINE	Examineur
Mme. M. OURBIH	Professeur	U.BEJAIA	Examinatrice
Mr. K. KHALDI	Professeur	UMBB	Examineur
Mme. H. SAGGOU	Maître de conférences A	USTHB	Examinatrice

Remerciements

Je tiens à remercier profondément ma directrice de thèse, Dr DJEDDOUR Khedidja de m'avoir ouvert au monde de la recherche ; et mon profond respect pour sa grande disponibilité et sa générosité avec laquelle elle m'a fait partager ses travaux et ses idées. Je tiens particulièrement à exprimer ma sincère gratitude pour la confiance qu'elle m'a accordée, le soutien qu'elle m'a apporté, ses corrections méticuleuses ainsi que ses précieux conseils durant cette recherche.

Toute ma gratitude et ma reconnaissance à Mr KHALDI Khaled, qui m'a comblé de sa générosité intellectuelle et m'a beaucoup aidé par ses orientations et ses documents. La pertinence de ses questions et de ses remarques ont toujours su motiver et m'orienter dans mes recherches.

Je remercie également madame GUERBYENNE, professeur à USTHB de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury.

Mes sincères remerciements vont aussi aux membres de jury : Mme SAGGOU, Mme OURBIH, Mr BOUSHABA et Mr KHALDI d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier Madame GESSOUME pour ses encouragements et son aide.

Un très grand merci à mes chers parents pour leurs prières, à mon frère et mes sœurs qui m'ont encouragé à mener à bout ce travail.

Un remerciement particulier à mon mari qui ne cesse de m'encourager et de me soutenir. Toute ma reconnaissance pour sa compréhension, sa patience et sa tolérance.

A mes enfants, qui malgré leur âge, étaient assez soucieux de la thèse de leur maman, bien que la thèse les a privé de beaucoup de temps.

Mes gratitudes sont également adressées à mes collègues de l'UMBB et tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.

Résumé

Dans cette thèse, nous considérons l'estimation des paramètres des équations différentielles stochastiques utilisant deux modèles d'évaluation d'options qui sont le modèle de Black-Scholes et le modèle à sauts de Merton.

Pour ces deux modèles, nous présentons une nouvelle méthode basée sur les temps de passage par une borne donnée. Nous comparons notre méthode aux autres méthodes d'estimation. Nous illustrons cette méthode par l'application sur des données réelles de cours de l'action de l'or de Londres.

Mots clés

Paramètres, équations différentielles stochastiques, modèle de Black-Scholes, modèle à sauts de Merton, temps de passage, volatilité stochastique.

Abstract

In this thesis we consider the parameter estimated relative to differential stochastic equations using two models of options evaluation that is the Black-Scholes model and the Merton jump model.

For these two models we present a new method based on the passage times by a given bound. We compare our method to the other methods. We illustrate these by an application with real data relative to gold action given by the London stock exchange.

Keywords

Parameters, differential stochastic equations, Black-Scholes model, Merton jump model, passage times, stochastic volatility.

Table des matières

Introduction	6
1 Modèles stochastiques des marchés financiers	10
1.1 Introduction	10
1.2 Instruments financiers	11
1.2.1 Produits primaires	11
1.2.2 Produits dérivés	12
1.2.3 La notion Arbitrage	15
1.2.4 Prix d'un contrat à terme	15
1.2.5 Parité call-put	16
1.3 Modélisation stochastique de la dynamique du sous-jacent : Modèle de Black-Scholes	16
1.3.1 Description du modèle	16
1.3.2 Portefeuille autofinçant	17
1.3.3 Probabilité risque-neutre	19
1.3.4 Formule de Black-Scholes	20
1.3.5 Les grecques	26
1.3.6 Volatilité	28
2 Modèles et méthodes d'estimations des paramètres	31
2.1 Introduction	31
2.2 Modèle de Black-Scholes	32
2.2.1 Série de rendement	32
2.2.2 Tests statistiques des séries de rendement :	34
2.2.3 Méthodes d'estimation des paramètres des EDS : Modèle de Black-Scholes	35
2.3 Modèle à volatilité stochastique	43
2.3.1 Introduction	43
2.3.2 La volatilité comme équation différentielle stochastique(EDS) :	44

2.4	Modèle à sauts : modèle de Merton	48
2.4.1	Introduction	48
2.4.2	Présentation du modèle de Merton	49
2.4.3	Loi jointe des rendements	51
2.4.4	Estimation des paramètres	52
2.4.5	La condition de risque-neutre	53
2.4.6	Prix d'option pour diffusion avec sauts	55
3	Algorithmes stochastiques et Application sur des données réelles de l'or	57
3.1	Introduction	57
3.2	Modèle de Black-Scholes	58
3.2.1	Observations	58
3.2.2	Statistiques descriptives	59
3.2.3	Tests statistiques des séries de rendement :	59
3.2.4	Estimation des paramètres : Modèles de Black-Scholes	59
3.2.5	Simulation	61
3.2.6	Prévision	62
3.3	Modèles de Merton	64
3.3.1	Observations	64
3.3.2	Statistiques descriptives	65
3.3.3	Estimation des paramètres	65
3.3.4	Simulation	66
3.3.5	Prévision	67
	Conclusion	68
	Annexe	70
	Bibliographie	72

Introduction

Les modèles mathématiques constituent un pilier incontournable de la finance de marché moderne. Dans un monde complexe, c'est un moyen privilégié d'appréhender le comportement des marchés. Louis Bachelier en 1900, dans sa thèse remarquable, soutenue à la Sorbonne sur la "théorie de la spéculation", est le premier à avoir montré la nécessité de posséder des outils mathématiques appropriés, et "créé" le mouvement Brownien pour répondre aux questions qu'il se pose sur le prix des produits dérivés.

Samuelson (1965) améliore la procédure en considérant un processus Brownien géométrique, la formule proposée étant en grande partie arbitraire. Elle n'offre pas les moyens aux acheteurs et vendeurs, parce qu'ils ont de degrés d'aversion au risque différent, pour être d'accord sur un prix.

Pour remédier à ce problème, Black et Scholes, en collaboration avec Merton (1973), développent une formule pour l'évaluation des options sur actions. Le modèle de Black-Scholes est sans aucun doute le premier modèle théorique d'évaluation à être utilisé de manière aussi intensive par les professionnels à des fins d'évaluation, de spéculation ou simplement de couverture. Ce modèle permet d'évaluer le prix d'une option dans le cas de non arbitrage en se basant sur l'hypothèse que l'évolution d'un titre suit un mouvement Brownien géométrique, taux d'intérêt sans risque constant quelle que soit l'échéance, titres parfaitement divisibles, transactions continues sans impôts ni coûts de transaction (marchés parfaits), ne détachant aucun dividende, options devant être européennes, rendement normal et volatilité constante.

Bien que le modèle de Black-Scholes apporte une solution théorique et empirique aux problèmes d'évaluation des contrats d'options, il demeure toute fois tributaire d'un certain nombre d'hypothèses qui ne sont pas en accord avec les conditions concrètes du négoce des options. Des auteurs comme Mandelbrot (1963) ou Fama (1965) ont proposé des représentations non-gaussiennes des rendements d'actifs. Plusieurs études empiriques comme celle de Cont (2001) (voir aussi celles rappelées par Jondeau, Poon et Rockinger

(2007)) ont en effet remis en cause l'hypothèse de normalité des rendements. Il est aussi admis que la plupart des lois de rendement sont leptokurtiques et exhibent des asymétries avec des queues épaisses. Cela signifie plus de rendements extrêmes, en particulier négatifs, que ne laisse prévoir une loi gaussienne.

Ce phénomène peut par exemple être modélisé par des dynamiques à volatilité stochastique ; plusieurs chercheurs, comme Wiggins (1987), Hull et White (1987, 1988), Stein et Stein (1991), Heston (1993), Bates (1997), ont conclu que la volatilité des rendements d'un actif pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Ces auteurs supposent que les variations non-anticipées du prix d'un call sont expliquées par les variations aléatoires du prix de l'actif support et par les variations de la volatilité.

De plus, les études empiriques montrent que les trajectoires prises par les cours d'actifs financiers présentent des discontinuités, pour tenir compte des sauts qui peuvent se produire, des modèles à sauts ont été introduits, en décrivant l'arrivée des sauts par le processus de Poisson (Merton (1976)), ou par des processus mixtes Brownien Poisson (Bellamy (1999)), ou encore des martingales discontinues (Dritschel, Protter (1999)).

Dans la présente thèse, nous nous intéressons aux méthodes d'estimation des paramètres des EDS. Nous présentons notre nouvelle méthode d'estimation et nous comparons avec d'autres méthodes d'estimations, pour deux modèles d'évaluations d'options : modèle de Black-Scholes et modèle à sauts de Merton.

Les chapitres sont présentés de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous exposerons quelques concepts sur la théorie des marchés financiers. Nous présentons le modèle d'évaluation d'option, modèle de Black-Scholes ; nous tirons en suite la formule de ce modèle. Pour la simplicité, nous limitons notre attention au cas d'une option d'achat européenne.

Le deuxième chapitre est consacré aux modélisations des actions financières, modélisation de la volatilité stochastique et méthodes d'estimations des paramètres des EDS. Pour la modélisation des actions financières, nous présentons deux modèles : modèle de Black-Scholes et modèle à sauts de Merton.

Ensuite, nous traitons de manière détaillée les diverses techniques d'estimation des pa-

ramètres. Nous commençons, d'abord, par le modèle de Black-Scholes. Nous estimons les paramètres avec trois méthodes, la première est la méthode via le temps du premier passage par une borne constante (PTP) dont nous proposons une amélioration en généralisant tous les temps de passage (GTP). Cette méthode permet d'estimer les paramètres à partir de tous les points de passage. La troisième méthode considère la volatilité comme équation différentielle stochastique (EDS). Le deuxième modèle traité est le modèle à sauts de Merton. Nous proposons l'estimation des paramètres de ce modèle en utilisant deux méthodes d'estimation : la méthode des moments et la généralisation de la méthode des temps de passage.

Au cours de troisième chapitre, nous présentons deux applications numériques sur des données réelles de l'action de l'or). La première traite du modèle de Black-Scholes dont nous présentons des résultats empirique issus de trois méthodes différentes (PTP, GTP et volatilité EDS). Ensuite, nous présentons la deuxième application sur le modèle à sauts de Merton, Les résultats empiriques sont issus de deux méthodes d'estimations (moments et GTP).

La conclusion donne un rappel des résultats obtenue dans l'estimation des paramètres, qui sont testés à l'aide de technique de simulation et de prévision. Nous donnons aussi les perspectives possibles pour le modèle à sauts.

Une annexe est consacré aux rappelles sur la loi de rendement pour le modèle à saut. Cette loi nous permet de déterminer les lois du rendement a conditionnement sur le nombre de sauts et par conséquent la densité de probabilité de ce rendement.

La bibliographie, sans être exhaustive, donne un état assez consistant sur les travaux de recherches concernant ce domaine.

Chapitre 1

Modèles stochastiques des marchés financiers

1.1 Introduction

Le développement de l'activité financière requiert de nombreux instruments basés sur des paramètres (taux d'intérêt, taux de change ...). L'instabilité de ces paramètres induit la demande de transferts des risques de la part de certains intervenants du marché.

Dès 1900, Bachelier était le précurseur à établir, dans sa thèse, un lien entre le prix des instruments financiers et les calculs probabilistes relatifs à certains processus stochastiques. Plus tard, en 1973, Black- Scholes ont résolu la question de la couverture des risques.

Dans ce chapitre, nous commençons par la présentation de quelques généralités financières, ensuite l'identification des instruments financiers et les produits dérivés et enfin, la notion d'arbitrage.

Nous présentons, ensuite, le modèle mathématique d'évaluation du prix d'une option d'achat européenne, qui est le modèle de Black-Scholes, ainsi que les différentes méthodes de calcul des volatilités implicite et historique.

L'objectif principal de ce chapitre est l'évaluation théorique de prix de cette option dont l'obtention passe par la formule de Black-Scholes (1973). Cette formule est le résultat de deux méthodes : l'approche EDP et l'approche martingale.

1.2 Instruments financiers

1.2.1 Produits primaires

Un produit primaire désigne un titre avec une rémunération indépendante de tout autre titre. Il existe deux types de produits primaires : les actions et les obligations ([17], [44], [55], [61], [83]).

Actions

Une action se définit par un titre de propriété représentant une part du capital d'une société, cotée en bourse et a une liquidité normalement assurée. En achetant une action, nous devenons actionnaire et donc propriétaire en partie de l'entreprise dans laquelle nous avons investi. Une action donne droit à un vote au sein de l'assemblée générale des actionnaires. La gestion de l'entreprise se discute au cours de cette assemblée, pour laquelle les actionnaires sont responsables.

L'analyse financière des actions : le ratio le plus utilisé est le PER (price earning ratio) le PER (price earning ratio), ou coefficient de capitalisation des résultats, est le ratio le plus utilisé qui est le rapport entre le bénéfice net par action et le cours de cette action. C'est plus le PER est faible, moins l'action est chère. Le PER demeure l'indicateur le plus couramment utilisé sur le marché des actions.

L'analyse technique des actions : cette analyse basée sur l'évolution historique du cours de l'action et le volume des transactions. Ceci permet de détecter si un mouvement haussier ou baissier est durable ou non.

Les deux analyses sont complémentaires : l'analyse financière propose une étude en amont des causes de variation des cours, alors que l'analyse technique étudie ces causes. La première permet de deviner une occasion favorable, la seconde donne un signal.

Obligations

Les obligations sont définies par des titres de dette pour les entreprises et de créances pour les souscripteurs. Elles sont émises sur un marché primaire à un taux fixe généralement et négociées sur un marché secondaire avec un prix variable en fonction des taux émis sur le marché primaire. Une obligation est déterminée par : une durée et un taux d'intérêt qui est choisi en fonction du risque de faillite de l'institution. Le prix d'une obligation dépend

du montant nominal, de la date d'échéance, et des coupons.

Le nominal : c'est la division du capital de départ emprunté par l'émetteur de l'obligation par le nombre de titres.

Coupons : ce sont des montants versés par l'emprunteur aux dates fixées à l'avance et qui correspondent à des intérêts sur le nominal.

Obligation zéro-coupon : c'est une obligation qui ne verse pas des coupons, donc à l'échéance, le détenteur est remboursé juste le nominal.

Nous pouvons construire la courbe des taux de rentabilité annuelle en fonction des échéances, lorsque nous avons suffisamment de zéro-coupons.

Lorsque cette courbe est décroissante, cela signifie que le marché anticipe une baisse des taux. Au contraire, le risque de taux est important lorsque cette courbe est croissante. Une courbe plate n'existe jamais en pratique mais signifierait qu'un taux d'intérêt constant dans le temps.

1.2.2 Produits dérivés

Un produit dérivé représente un instrument financier qui s'achète ou se vend et dont la valeur dépend d'un autre titre, appelé l'actif sous-jacent.

Les actifs sous-jacents classiques sont négociés dans différents marchés :

- marchés des actions
- marché des changes : achat/vente de devises
- marché des matières premières : pétrole, métaux ...
- marché de l'énergie : électricité, gaz ...
- marché des taux d'intérêt

Ces produits dérivés permettent de se protéger contre un risque déterminé : baisse du cours des actions, risque de taux d'intérêt Parmi les produits dérivés les plus couramment négociés sont les contrats à terme et les options.

Les contrats à terme

Un contrat à terme est un contrat pour une opération différée dans le temps entre l'acheteur et le vendeur, qui se mettent d'accord pour l'achat ou la vente d'un actif à une certaine date future (échéance) et à un prix fixé à l'avance. L'intérêt des contrats à

terme pour les intervenants est de figer des cours dans le futur : il s'agit dans ce cas d'une opération de couverture.

Exemple

Un industriel européen sait qu'il doit recevoir en dollars une forte somme d'argent, dans quatre mois. Afin de figer la quantité dont il peut disposer, il achète un contrat à terme, d'échéance trois mois sur le dollar, en Euros. Il s'agit donc d'une forme de couverture du risque de change, qui toutefois peut ne pas lui être favorable, si dans quatre mois le contrat cote moins que le taux de change.

Un contrat à terme peut aussi être mis en place à des fins de spéculation lorsque l'opérateur anticipe (contre le marché) un certain type de mouvement et achète ou vend un contrat en espérant réaliser un gain. En France, il existe un marché organisé, le MATIF ou Marché à Terme International de France, créé en 1986, dans lequel sont négociés les contrats à terme.

Les options

Une option est un contrat donnant le droit, et non l'obligation, d'acheter ou de vendre une certaine quantité spécifiée d'un actif à ou jusqu' à une date fixée, (échéance ou maturité) et à un prix déterminé d'avance, appelé prix d'exercice. Le MONEP (Marché des options négociables de Paris) créé en 1987, est un marché organisé d'options très actif.

Nous avons deux catégories d'options : les options européennes sont les options qui peuvent être exercées seulement le jour de l'échéance, et les options américaines sont celles pouvant être exercées à tout instant avant leur échéance.

Les deux formes d'options

Il existe deux types d'options : les options d'achat (call) et les options de vente (put).

Les options d'achat (call) : nous appelons option d'achat (call) le contrat qui confère à son détenteur le droit d'acheter l'actif sous jacent à un prix fixé d'avance durant une période de temps donné.

Les options de vente (put) : nous appelons option de vente le contrat qui donne à son détenteur le droit, mais non l'obligation, de vendre un titre à un prix d'exercice déterminé à l'avance, pendant une période de temps déterminée.

L'acheteur d'une option américaine peut exercer à tout moment son droit, alors que l'acheteur d'une option européenne doit attendre l'échéance pour décider de ce fait, donc ce dernier bénéficie de moins de droit que le second.

Les paramètres des options

La durée d'exercice (l'échéance ou maturité) : indique la date à laquelle une opération doit être réalisée. Il existe trois échéances dans les marchés organisés sont cotées simultanément : 3, 6 et 9 mois, Toutefois, sur le CAC 40 l'échéance des options est mensuelle.

Le prix d'exercice : représente le prix auquel se fait la transaction en cas d'exercice de l'option. Ce prix est fixé à l'avance et n'est pas modifiable pendant toute la durée de vie de l'option. Nous disons que l'option est à la monnaie lorsque le prix d'exercice est voisin du cours actuel de l'action sous-jacente. Les options dans la monnaie lorsque le prix d'exercice est inférieur au prix actuel de l'actif sous-jacent (pour un call) ou supérieur au prix de son actif sous-jacent (pour un put). Les autres sont dites en dehors de la monnaie dans le cas contraire.

Remarque

Le prix de l'option est décomposé en valeur intrinsèque et valeur temps.

- La valeur intrinsèque : représente la différence positive ou nulle entre le cours coté du titre support et le prix d'exercice.
- La valeur temps : se mesure par la différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque, cette valeur est nulle à l'échéance pour une option européenne.

La prime : la prime est le prix de l'option payé par l'acheteur au vendeur. Pour un contrat portant typiquement sur 100 actions support sur les marchés organisés, l'acheteur doit payer 100 fois la prime. Elle fait l'objet de cotations et peut être négociée : nous pouvons acheter une option pour essayer de la revendre plus chère, ou l'inverse. Le prix de l'option évolue tout au long de sa durée de vie.

Exemple

Option (call) de change sur un dollar dans 6 mois pour K euros. Si le dollar monte, nous exerçons l'option et nous achetons le dollar à K euros. Si le dollar baisse, nous n'exerçons pas l'option et nous achetons au prix du dollar. La prime est perdue.

Considérons le cas d'une option d'achat européen sur une action dont le cours à la date t est S_t de maturité T et de prix d'exercice K . Si $S_T > K$, le détenteur de l'option va exercer son droit puisqu'il lui permet de réaliser un profit égal à $S_T - K$ correspondant à l'achat au coût K de l'action valant S_t . Par contre, si $S_T \leq K$, le détenteur du call n'a pas intérêt à exercer son droit. La valeur intrinsèque à la maturité de l'option (payoff) du call est donc égale à :

$$(S_T - K)_+ = \max(S_T - K, 0) \quad (1.1)$$

De manière similaire, le prix théorique d'une option de vente, de payoff

$$(K - S_T)_+ = \max(K - S_T, 0) \quad (1.2)$$

1.2.3 La notion Arbitrage

Cette notion destinée à assurer un gain positif ou nul. Il consiste essentiellement :

- Soit à vendre un actif financier et acheter un autre, correspondant mieux au prix actuel du marché ;
- Soit à vendre et à acheter un même actif financier, mais sur deux marchés différents, entre lesquels une différence de prix susceptible de dégager un gain monétaire est constatée.

Le rôle des arbitragistes, est de détecter les produits financiers dont le prix est décalé par rapport à ce qu'il devrait être, compte tenu des autres prix de marché et faire des profits sans risque. Leur intervention est statique au sens où ils prennent seulement des positions aujourd'hui, qu'ils liquideront sans les renégocier à une date future.

1.2.4 Prix d'un contrat à terme

Notons par $F^S(t, T)$, le prix fixé par contrat à la date t auquel sera négocié le titre S à la date T . C'est le prix à terme de S à l'instant T . Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix de ce contrat au cours de prix du titre sous-jacent à la date t . Il y a en effet deux stratégies possibles pour obtenir le titre S en T : Pour obtenir le titre S en T , il existe deux stratégies possibles :

- La première consiste à acheter le titre S aujourd'hui, et à le garder jusqu'en T .
- La deuxième consiste à acheter le contrat à terme.

Pour pouvoir le payer en T , il faut placer à la banque un montant qui nous garantit $F^S(t, T)$ en T . L'instrument financier adapté à ce genre de situation est, par définition, le zéro-coupon de maturité T , dont le prix $B(t, T)$ est celui qu'il faut payer pour recevoir à

coup sûr 1 Euro en T . Il faut donc placer à la banque $F^S(t, T) B(t, T)$ Euros pour garantir le paiement du contrat.

Par absence d'arbitrage, nous avons donc :

$$F^S(t, T) = \frac{S_T}{B(t, T)} \quad (1.3)$$

1.2.5 Parité call-put

Notons par C_t et P_t les prix respectifs en t du call et du put européen de prix d'exercice K et de maturité T sur un sous-jacent S . En achetant le call et en vendant le put en t , au prix $C_t - P_t$, on est garanti d'obtenir à l'échéance le flux $(S_T - K)_+ - (K - S_T)_+ = S_T - K$. D'autre part, ce flux en T peut aussi être obtenu en achetant le titre S et vendant K zéro coupons en t , au prix $S_t - KB(t, T)$. L'absence d'arbitrage montre donc la relation dite de parité call-put :

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T) \quad (1.4)$$

1.3 Modélisation stochastique de la dynamique du sous-jacent : Modèle de Black-Scholes

Nous nous intéressons maintenant à la dynamique du cours de l'actif S dans le cadre de modèle de diffusion Brownien géométrique, qui est certainement l'un des modèles d'évaluation les plus répandus en finance, les hypothèses de modèle de Black-Scholes sont : taux d'intérêt sans risque constant quelle que soit l'échéance, absence d'opportunité d'arbitrage, titres parfaitement divisibles, transactions continues sans impôts ni coûts de transaction (marchés parfaits), cours de l'actif sous jacent suivant un mouvement Brownien géométrique, ne détachant aucun dividende (bénéfices distribués aux détenteurs d'actions), options devant être européennes, rendement normal et volatilité constante.

1.3.1 Description du modèle

Le modèle proposé par Black-Scholes décrivant l'évolution du cours d'un actif sous jacent. c'est un modèle à temps continu avec un actif risqué (une action de prix S_t à l'instant t) et un actif sans risque (de prix S_t^0 à l'instant t). L'évolution de S_t^0 est supposée régie par l'équation différentielle ordinaire ([34], [43], [44], [77], [85]) :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt, \quad S_0^0 = 1$$

de sorte que $S_t^0 = e^{rt}$ pour $t \geq 0$. Cela signifie que le taux d'intérêt sur le marché des placements sans risque est constant égale à r .

Les actifs $S = (S^0, S^1, \dots, S^d)$ représentent usuellement les prix des actifs risqués comme les actions, obligations ... Notre modélisation de référence sera donnée par le modèle de Black-Scholes pour $d = 1$ actif risqué :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t \quad (1.5)$$

où μ et σ sont deux constantes et B_t un mouvement Brownien standard.

Pour résoudre cette équation, nous posons $Y_t = \log(S_t)$ et $(\mu - \sigma^2/2)$ et en appliquant le lemme d'Itô. La solution est donnée par l'expression suivante :

$$S(t) = S_0 \exp \left[\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t \right] \quad (1.6)$$

Ce processus est un Brownien géométrique. Il est aussi dit processus "log-normal". Il résulte que $Y = (Y(t), t \geq 0)$ est un processus de Wiener généralisé de drift m et de variance σ^2 , vérifiant

$$\forall s, 0 \leq s \leq t, B_x(t) - B_x(s) \sim N(m(t-s), \sigma^2(t-s)), \text{ donc } Y(t) - Y(0) = \log((S(t)/S(0))).$$

1.3.2 Portefeuille autofinçant

Dans cette section, nous modélisons le concept de gestion dynamique de portefeuille [61], [79]. Une stratégie de portefeuille est définie par un processus adapté à la filtration naturelle (F_t) du mouvement Brownien $\phi = (\phi^0, \varphi)$ où ϕ^0 et $\varphi = (\varphi^1, \dots, \varphi^d)$ représente à l'instant t , les quantités d'actif sans risque S^0 et d'actif risqué $S = (S^1, \dots, S^d)$, et dont la valeur est déterminée sur la base des informations disponibles juste avant t . ϕ_t^0 et φ_t^i peuvent prendre des valeurs positives ou négatives correspondent à un achat ou une vente. La valeur de ce portefeuille à la date t est définie par

$$V_t(\phi) = \phi_t X_t = \phi_t^0 S_t^0 + \sum_{i=1}^d \varphi_t^i S_t^i$$

Dans les modèles discrets où l'investisseur ne peut négocier les titres qu'aux dates $t_0 = 0, \dots, t_k$, la condition d'autofinancement s'écrit :

$$\phi_{t_k} X_{t_k} = \phi_{t_{k+1}} X_{t_k}$$

ou encore de manière équivalente en mettant en évidence la variation des actifs entre deux dates :

$$V_{t_{k+1}}(\phi) = \phi_{t_{k+1}} X_{t_{k+1}} = \phi_{t_k} X_{t_k} + \phi_{t_{k+1}} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) = V_{t_k}(\phi) + \phi_{t_{k+1}} (X_{t_{k+1}} - X_{t_k}) \quad (1.7)$$

Ceci traduit l'idée suivante : à l'instant t_k , après avoir pris connaissances des cours X_{t_k} l'investisseur réajuste son portefeuille pour le faire passer de la composition ϕ_{t_k} à $\phi_{t_{k+1}}$, le réajustement se faisant au cours de la date t_k sans apport ni retrait de fonds extérieur. Autrement dit, les variations de la valeur d'un portefeuille autofinçant sont exclusivement dues aux variations du prix des actifs. En notant $\Delta X_{t_{k+1}} = X_{t_{k+1}} - X_{t_k}$, on remarque d'après (1.7) que la valeur d'un portefeuille autofinçant s'écrit :

$$V_{t_k}(\phi) = V_0(\phi) + \sum_{l=1}^k \varphi_{t_l} \Delta X_{t_l} .$$

Dans un modèle en temps continu, une stratégie de portefeuille autofinçant (dans les actifs $X = (S^1, \dots, S^d)$) est la donnée d'un processus adapté $\phi = (\phi^0, \varphi)$ tel que l'intégrale stochastique $\int \phi dX$ existe et dont la valeur de portefeuille est caractérisée par :

$$V_t(\phi) = \phi_t X_t = V_0(\phi) + \int_0^t \phi_u dX_u$$

Nous écrivons aussi la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinçant sous forme différentielle :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \varphi_t dS_t = (V_t(\phi) - \varphi_t S_t) r dt + \varphi_t dS_t = r V_t(\phi) dt + \varphi_t (-r S_t dt + dS_t) \quad (1.8)$$

Actualisation par le cash

Nous examinons la condition d'autofinancement lorsqu'on actualise par le cash. Nous notons $\tilde{S}_t^i = S_t^i / S_t^0 = e^{-rt} S_t^i, i = 1, \dots, d$, le prix actualisé (par rapport au cash) des actifs risqués, et $\tilde{V}_t(\phi) = V_t(\phi) / S_t^0 = e^{-rt} V_t(\phi)$ la richesse actualisée. Alors par la formule d'Itô et (1.8), la dynamique de la valeur d'un portefeuille autofinçant est :

$$d\tilde{V}_t(\phi) = -r e^{-rt} V_t(\phi) dt + e^{-rt} dV_t(\phi) = e^{-rt} [-r V_t(\phi) dt + dV_t(\phi)] = e^{-rt} \varphi [-r S_t dt + dS_t] = \varphi_t d\tilde{S}_t$$

Ce qui s'écrit encore :

$$\tilde{V}_t(\phi) = V_0(\phi) dt + \int_0^t \phi_u d\tilde{S}_u \quad (1.9)$$

Exemple

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, la dynamique de la richesse V d'un portefeuille autofinçant de stratégie φ dans l'actif S est :

$$dV_t = r V_t dt + \varphi_t S_t [(\mu - r) dt + \sigma dB_t] ,$$

et celle de la richesse actualisée est donc :

$$d\tilde{V}_t = \varphi_t \tilde{S}_t [(\mu - r) dt + \sigma dB_t] .$$

La dynamique de la richesse autofinçant associée à un montant $\theta_t = \varphi_t S_t$ dans l'actif risqué S s'écrit :

$$dV_t = (V_t - \theta_t) r dt + \theta_t \frac{dS_t}{S_t} = rV_t dt + \theta_t [(\mu - r) dt + \sigma dB_t] .$$

1.3.3 Probabilité risque-neutre

Les hypothèses d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA) et de marché complet assurent l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité Q sous laquelle le processus de prix actualisé est une martingale. Cette probabilité est appelée probabilité risque-neutre. C'est ce qu'exprime le théorème de Girsanov, que nous pouvons énoncer de la manière suivante :

Théorème 1.3.1. (Théorème de Girsanov) [33][44][63]

Soient B un mouvement Brownien pour un espace filtré (Ω, F, F_t, P) et θ un processus adapté vérifiant $E \left[\exp \left(\frac{1}{2} \int_0^T \theta^2(u) du \right) \right] < +\infty$. On définit le processus \tilde{B} et la mesure Q par :

$$\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta(s) dB_s \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^t \theta(u) dB_u - \frac{1}{2} \int_0^t \theta^2(u) du \right\}$$

alors \tilde{B} est un Q -mouvement Brownien.

En appliquant ce résultat avec $\theta_t = (\mu - r) / \sigma$ et en appliquant le lemme d'Itô au processus de prix actualisé $\tilde{S}(t) = S(t) e^{-rt}$, nous obtenons que \tilde{S} est une martingale sous Q . De même $\tilde{C}(t) = C(t) e^{-rt}$ est une Q -martingale, ce qui permet de conclure que :

$$\exp(-rt) \times C(t) = E^Q \left[\exp(-rT) \times (S_T - K)^+ | F_t \right]$$

Nous avons ainsi ramené le problème de la valorisation de l'option à un calcul d'espérance, a priori plus simple que la résolution de l'EDP issue du raisonnement d'arbitrage direct. En effet, la variable $\tilde{S}(t)$ est log-normale sous Q , ce qui conduit aisément à la formule de Black-Scholes [29] :

$$C(0) = S_0 \times N(d_1) - K e^{-r(T-t)} \times N(d_2)$$

Avec

$$d_1 = \left(\frac{\ln(S_0/K) + (r + (\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}} \right) \quad \text{et} \quad d_2 = \left(\frac{\ln(S_0/K) + (r - (\sigma^2/2))T}{\sigma\sqrt{T}} \right)$$

N désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Les deux approches sont liées par le théorème de représentation de Feynman-Kac qui permet d'exprimer la solution de certaines équations différentielles stochastiques sous la forme d'un calcul d'espérance.

Théorème 1.3.2. (Théorème de Feynman-Kac) [63]

Soit f une fonction de classe C^2 , si $\mu(x, t)$, $\sigma(x, t)$, $r(x, t)$ sont des fonctions lipschitziennes, bornées sur $R \times [0, T]$. Considérons l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x, t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x, t) \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} + r(x, t) f = 0$$

avec la condition limite :

$$f(x, t) = \Phi(x)$$

en supposant que,

$$\forall t \leq T, \int_0^t E \left[\left(\sigma(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right)^2 \right] ds < \infty$$

alors :

$$f(x, t) = E_t^N \left[\exp \left(\int_t^T r(X_s, s) ds \right) \Phi(X_T) \right]$$

où X suit l'EDS $dX_T = \mu(x, t) + \sigma(x, t) d\widehat{B}$ et est un mouvement Brownien pour la mesure N .

1.3.4 Formule de Black-Scholes

Ce paragraphe est consacré à la dérivation originale du prix d'arbitrage selon Black-Scholes. Nous supposons que nous avons un marché financier tel que :

1. Un actif sans risque dont le prix S_0 vérifie $dS_0(t) = S_0(t) \mu dt$ où μ est une constante.
2. Un actif risqué dont le prix vérifie l'équation (1.5) où B est un mouvement Brownien standard, μ et σ sont des constantes.

L'EDP d'évaluation

Le prix d'un call de maturité T et de prix d'exercice K est une fonction $C(t, S(t))$. Nous constituons un portefeuille composé d'un call et de β_t parts de l'actif risqué ([33], [65], [83]). La valeur de ce portefeuille est $V_t = C(t, S_t) + \beta_t S_t$. Nous supposons que cette condition est une condition d'autofinancement et ne doit être, aucun cas, confondue avec une formule d'Itô. En utilisant la formule d'Itô généralisée :

$$d\xi(t) = a(t) dt + b(t) dB_t$$

$$dV_t = \left[V_t' + V_x' a + \frac{1}{2} V_{xx}'' b^2 \right] dt + V_x' b dB_t$$

donc

$$d\xi(t) = dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

$$V(t, x) = C(t, x) + \beta_t x \quad \text{et} \quad V'_t = \frac{\partial C}{\partial t}, V'_x = \frac{\partial C}{\partial x} + \beta_t, V''_{xx} = \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \beta_t \right) \mu S_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \left(\frac{\partial C}{\partial x} + \beta_t \right) \sigma S_t dB_t$$

Nous trouvons

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial x} S_t \mu + \frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt + \beta_t S_t \mu dt + \left(\frac{\partial C}{\partial x} \sigma S_t + \beta_t \sigma S_t \right) dB_t$$

Le portefeuille est sans risque si $\frac{\partial C}{\partial x} \sigma S_t + \beta_t \sigma S_t = 0$, soit $\beta_t = -\frac{\partial C}{\partial x}$ et de rendement r si $dV_t = rV_t dt$, soit $dC_t + \beta_t dS_t = r(C_t + \beta_t S_t) dt$ d'où, en remplaçant β par sa valeur

$$dV_t = \left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = rV_t dt$$

$$\left(\frac{\partial C}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \sigma^2 S_t^2 \right) dt = r \left(C - \frac{\partial C}{\partial x} S_t \right) dt$$

d'où

$$rS_t \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial x} + \frac{\partial C(t, S_t)}{\partial t} + \sigma^2 S_t^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C(t, S_t)}{\partial x^2} - rC(t, S_t) = 0 \quad (1.10)$$

avec

$$C(T, S_T) = h(S_T) \quad (1.11)$$

Soit S_t une variable aléatoire avec une densité strictement positive définie sur R^+ et à valeur dans R^+ , alors

$$rx \frac{\partial C}{\partial x}(t, x) + \frac{\partial C}{\partial t}(t, x) + \sigma^2 x^2 \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}(t, x) - rC(t, x) = 0, \forall t \geq 0 \quad (1.12)$$

avec $C(T, x) = h(x)$.

C'est l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes. C'est l'équation aux dérivées partielles (EDP) de Black-Scholes que nous résolvons par étape :

- Transformation de l'équation initiale en une équation de la chaleur.
- Résolution de l'équation de la chaleur.
- Retour aux variables initiales.

Etape 1 : de l'EDP à l'équation de la chaleur.

On fait le changement de variable

$$C(S, t) = e^{-r(T-t)} u(x, \tau) \quad (1.13)$$

où τ le temps résiduel normé est donné par : $\tau = (2M/\sigma^2)(T - t)$, avec $M = r - \sigma^2/2$

$$x = \frac{2M}{\sigma^2} (\log(S/K) + M(T - t))$$

Nous trouvons l'équation en u , x et τ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial \tau} \quad (1.14)$$

C'est l'équation de la chaleur et la condition au bord :

$$C(S, T) = (S - K)_+$$

Le passage aux variables (x, τ) donne

$$(S, T) \rightarrow (x, 0)$$

$$x = \left(\frac{2}{\sigma^2}\right) \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \log S/K$$

et donc :

$$S = K \exp\left[\left(x\sigma^2/2M\right)\right]$$

Par conséquent, la condition au bord devient :

$$u(x, 0) = \varphi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ K \left(\exp\left(x\frac{\sigma^2}{2M}\right) - 1\right) & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

La solution de l'équation de la chaleur est donnée par

$$u(x, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(s)}{\sqrt{\tau}} e^{-(x-s)^2/4\tau} ds$$

dite intégrale de Poisson pour l'équation de la chaleur.

Etape 2 : résolution de l'équation de la chaleur.

La solution de l'équation est :

$$u(x, \tau) = K\Phi\left(\frac{x^*}{\sqrt{2\tau}}\right) \exp\left(-\frac{(x^* - x)^2}{4\tau}\right) - K\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2\tau}}\right)$$

avec :

$$x^* = x + \frac{\tau\sigma^2}{M}$$

$$\Phi(u) = \int_{-\infty}^u e^{-\frac{v^2}{2}} dv$$

Etape 3 : retour aux variables initiales

$$u(x, \tau) \rightarrow C(S, t)$$

La formule de Black-Scholes ([33], [43], [56], [61]) :

$$C(S, t) = S\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) \quad (1.15)$$

avec $\Phi(x)$ la fonction cumulative de la loi normale centrée réduite, S l'actif sous jacent, K le prix d'exercice, T la date d'échéance et

$$d_1 = \left(\frac{\log(S/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right) \quad d_2 = \left(\frac{\log(S/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right)$$

Formule du put : parité put-call

$$P(S, t) + S = C(S, t) + e^{-r(T-t)}K$$

$$P(S, t) = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1) \quad (1.16)$$

La valeur C est donnée en fonction de cinq paramètres : la valeur actuelle de l'actif sous jacent, le temps qui reste à l'option avant son échéance, le prix d'exercice fixé par l'option, le taux d'intérêt sans risque, la volatilité du prix de l'action qui est non directement observable sur le marché.

La formule de Black-Scholes repose sur l'hypothèse que les rendements de l'actif sous jacent sont gaussiens, d'une manière équivalente, la valeur de l'actif suit une diffusion Brownien géométrique. Cette formule dépend de deux paramètres du modèle Black-Scholes qui sont des paramètres à estimer.

Approche martingale

Nous allons nous placer dans le monde risque neutre ([40], [60], [61], [68]) c'est-à-dire sous Q , dans lequel les espérances de rentabilité instantanées de tous les actifs (risqués ou non) sont égales au taux sans risque r . En particulier, le prix de l'actif sous-jacent n'est plus régi par (1.5) mais par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma d\widetilde{B}_t \quad (1.17)$$

où $(\widetilde{B}_t)_{t \geq 0}$ représente un mouvement Brownien standard sous Q .

Nous calculons sous Q , l'espérance du payoff actualisé au taux sans risque pour un call européen sachant que les prix actualisés sont des martingales.

Nous rappelons la solution intégrée entre les dates t et T de l'équation (1.17) régissant l'évolution du prix de l'action sous la probabilité Q :

$$S_T = S_t \exp \left((r - \sigma^2/2) (T - t) + \sigma (\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t) \right) \quad (1.18)$$

Nous savons par ailleurs que l'accroissement du mouvement Brownien $\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t$ suit une loi normale centrée et de variance $T - t$. Nous noterons U une variable normale centrée réduite et nous écrirons : $\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t = \sqrt{T - t}U$; d'où :

$$S_T = S_t \exp \left((r - \sigma^2/2) (T - t) + \sigma \sqrt{T - t}U \right) \quad (1.19)$$

Considérons d'abord le cas du call de maturité T , de prix d'exercice K et donc de payoff $\Psi_T = \max(S_T - K, 0)$:

$$C(t, S_t) = \widetilde{E} [\max(S_T - K, 0) e^{-r(T-t)} | S_t]$$

En utilisant (1.19), nous obtenons :

$$S_T = S_t \exp \left((r - \sigma^2/2) (T - t) + \sigma (\widetilde{B}_T - \widetilde{B}_t) \right) \quad (1.20)$$

$$C_t = \int_{-\infty}^{+\infty} \max \left(S_t e^{((r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}u)} - K, 0 \right) e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Notons que le maximum intervenant dans cette expression est nul lorsque :

$$S_t e^{((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}u)} - K < 0,$$

c'est-à-dire lorsque, en date T , l'option est en-dehors de la monnaie et expire sans valeur. Cette inégalité prévaut si et seulement si : $\ln(S_t) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T - t) + \sigma\sqrt{T - t}u < \ln(K)$, soit : $u < -d_2$, où $d_2 = [\ln(S_T/K) + (r - \sigma^2/2)(T - t)] / \sigma\sqrt{T - t}$.

Les bornes d'intégration en u peuvent donc être ramenées de $]-\infty, \infty[$ à $[-d_2, \infty[$. Nous devons alors calculer :

$$C_t = \int_{-d_2}^{+\infty} \left(S_t e^{((r - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma\sqrt{T-t}u)} - K \right) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-r(T-t)} e^{-u^2/2} du,$$

qui peut se décomposer en deux termes :

$$C_t = \int_{-d_2}^{+\infty} S_t e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-r(T-t)} du - K \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du.$$

Posons :

$$I_1 = \int_{-d_2}^{+\infty} S_t e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-r(T-t)} du; I_2 = K \int_{-d_2}^{+\infty} e^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} du,$$

Calculons d'abord le deuxième terme, I_2 , plus simple que I_1 . Nous pouvons sortir de l'intégrale le terme $e^{-r(T-t)}$, qui est déterministe, et écrire :

$$I_2 = K e^{-r(T-t)} \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

En remarquant que la densité de probabilité $\Phi(u) du = \left[\left(e^{-u^2/2} \right) / \sqrt{2\pi} \right] du$ est une fonction symétrique, nous obtenons (par changement des bornes d'intégration) :

$$I_2 = K e^{-r(T-t)} \int_{-\infty}^{d_2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Cette intégrale est égale à la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite prise en d_2 , que l'on note $N(d_2)$. Donc :

$$I_2 = K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Étudions maintenant le premier terme, I_1 , intervenant dans l'expression de C_t :

$$I_1 = \int_{-d_2}^{+\infty} S_t e^{((r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}u)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} e^{-r(T-t)} du.$$

En remarquant que les termes en $e^{r(T-t)}$ et $e^{-r(T-t)}$ se compensent, que S_t peut sortir de I_1 , et en regroupant les exponentielles, nous trouvons :

$$I_1 = S_t \int_{-d_2}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{1}{2}(-u^2-2\sigma\sqrt{T-t}u+\sigma^2(T-t))} du.$$

Un carré parfait apparaît dans l'exponentielle : $(u - \sigma\sqrt{T-t})^2$. En procédant au changement de variable $v = u - \sigma\sqrt{T-t}$, on obtient :

$$I_1 = S_t \int_{-d_2-\sigma\sqrt{T-t}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv,$$

Par le même raisonnement de symétrie que précédemment (changement des bornes d'intégration), nous avons donc :

$$I_1 = S_t \int_{-\infty}^{d_1} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-v^2/2} dv,$$

où $d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}$. Cette dernière expression fait apparaître la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, prise en d_1 , notée $N(d_1)$. Le premier terme d_1 de la prime du call est donc égal à :

$$I_1 = S_t N(d_1)$$

Comme $C_t = I_1 - I_2$, la démonstration de la formule de Black-Scholes par un calcul direct de l'espérance du payoff actualisé de l'option.

$$C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2)$$

et $N(u)$ dénote la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. La formule de Black-Scholes relative au put peut être démontrée à l'aide d'un calcul semblable, ou plus simplement, déduite de celle du call et de la relation de parité call-put [7], [55].

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)} N(-d_2) - SN(-d_1)$$

1.3.5 Les grecques

Les grecques sont définies comme les dérivées d'une valeur d'option par rapport à différents paramètres [83]. Elles permettent de mesurer la sensibilité d'une option à ses différents paramètres et sont utilisées dans les stratégies de couverture d'options ou de portefeuilles d'options. Elles sont appelées grecques en relation avec l'alphabet correspondant.

Delta : mesure la variation du prix de l'option par rapport aux variations du sous-jacent est positif et donne le nombre de parts que l'investisseur doit donc acheter pour se couvrir.

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, nous avons

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) > 0$$

Le Delta d'une option d'achat varie entre 0 et 1 tandis que celui de l'option de vente varie entre 0 et -1 . Ainsi Delta tendra vers 0 lorsque l'option sera hors de la monnaie et tendra vers 1 lorsque l'option sera dans la monnaie.

Gamma : mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport à celle d'une unité du delta ; c'est donc la dérivée seconde par rapport à l'actif sous-jacent, i.e

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne,

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{S\sigma\sqrt{T-t}} N'(d_1) > 0$$

où N' est la densité de la normale centrée réduite. Les plus grandes valeurs de gamma se trouvent lorsque le prix du sous-jacent est proche du prix d'exercice de l'option.

Thêta : exprime la variabilité de l'option par rapport au temps. Il fournit une indication sur la vitesse à laquelle le prix de l'option décroît plus la date d'échéance approche.

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t}$$

Dans le cas de l'option européenne d'achat, nous avons

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{S\sigma}{2\sqrt{T-t}} N'(d_1) + SN(d_1) - rKe^{-r(T-t)} N(d_2) > 0$$

Véga : représente la sensibilité de l'option par rapport à la variation de la volatilité du sous-jacent et indique donc que plus le sous-jacent est risqué, plus le prix de l'option est élevé.

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma}$$

Dans le cas de l'option européenne d'achat, nous avons

$$v = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S\sqrt{T-t} N'(d_1) > 0$$

Bien que la volatilité soit supposée constante dans la formule de Black-Scholes, elle est très souvent variable dans la réalité.

La valeur de l'option est de fait affectée par la variation de la volatilité de l'actif sous-jacent. En partant de la formule de Black-Scholes pour une option d'achat européenne, nous faisons le lien entre la variance du prix de l'option et la volatilité de l'actif sous-jacent.

Pour une meilleure estimation du prix de l'option il est nécessaire de tenir compte de la variation par rapport à la volatilité du sous-jacent sur toute la durée de vie de l'option. Ainsi Vega est une fonction croissante du prix de l'option d'achat puisque qu'une augmentation de la volatilité implique une hausse de la probabilité d'exercice et produit l'effet contraire dans le cas d'une option de vente.

Rho : mesure la variabilité d'une option par rapport aux taux d'intérêt sans risque,

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r}$$

Dans le cas de l'option d'achat européenne, nous avons

$$\rho = \frac{\partial C}{\partial r} = K (T - t) e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

Un changement dans les taux d'intérêt va entraîner une variation du facteur d'actualisation et ainsi de la valeur de l'option. Cependant, il'a un impact relativement faible sur la valeur de l'option comparé aux autres dérivées partielles.

1.3.6 Volatilité

La volatilité est définie comme un paramètre qui mesure le risque associé au rendement de l'actif sous-jacent. L'estimation de la volatilité est le point plus délicat dans l'établissement d'un prix, d'autant plus, que la valeur d'une option est très sensible aux variations de la volatilité. Pour avoir un bon modèle d'évaluation d'une option, il faut également avoir une estimation la plus précise possible de la volatilité. Les principaux estimateurs de la volatilité sont la volatilité historique et la volatilité implicite.

La volatilité historique :

Nous déterminons la volatilité historique à partir des variations passées du sous-jacent les quelles peuvent être un outil d'aide à la décision pour déterminer une variation future. L'estimation de cette volatilité, a été utilisée par plusieurs chercheurs tels que Black-Scholes, Galai (1977)[21] et Finnerty (1978)[19]. La volatilité historique est mesurée par l'écart type du rendement R_t du sous-jacent durant la période qui précède l'émission des options.

Le rendement instantané du sous-jacent est supposé suivre un mouvement Brownien géométrique. Il est équivalent d'affirmer que R_t suit une loi log normale. Dans le modèle Black-Scholes la valeur σ du rendement instantané est supposée constante. La meilleure estimation de la volatilité est la racine carrée de la variance empirique sans biais ($\hat{\sigma}^2$), donnée par la formules suivantes :

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) - \hat{\mu} \right)^2 \quad (1.21)$$

où

$$\hat{\mu} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \ln \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} \right) \quad (1.22)$$

avec n est le nombre d'observations à considérer pour le calcul de la volatilité.

La volatilité implicite :

Etant donné les critiques adressées à la méthode de la volatilité historique, une méthode alternative consiste à utiliser les prix observés sur les marchés pour en extraire une volatilité implicite.

Le modèle Black et Scholes (1973) a été utilisé pour estimer la volatilité implicite d'une option donnée. Comme nous l'avons déjà vu, les auteurs de ce modèle supposent que cette variable est constante durant la vie de l'option, ce qui n'est pas vrai dans la réalité. L'utilisation d'un modèle d'évaluation d'option pour estimer la volatilité implicite suppose le modèle connu et bien spécifique, c'est-à-dire que le prix que dégage le modèle est le prix de l'option sur le marché.

Donc la mesure de la volatilité implicite est extrêmement tributaire du choix du modèle d'évaluation d'options que nous choisissons pour l'estimer. Afin de minimiser l'erreur de l'estimation, il faudrait donc choisir un modèle qui reflète la réalité de notre actif sous-jacent.

Calcul de la volatilité implicite : dans le modèle Black-Scholes, la valeur d'une option call européenne est donnée par l'équation (1.15). Cette valeur est donnée en fonction de six paramètres. Si nous connaissons σ nous pouvons calculer le prix de l'option. Inversement si nous connaissons la valeur de l'option, nous pouvons déduire la valeur de σ , car $\frac{\partial C}{\partial \sigma} > 0$. Etant donnée que la valeur de l'option à l'instant t est comprise entre $\max(S - Ke^{-r(T-t)}, 0)$ et S , alors il existe une et une seule valeur de σ telle que la valeur théorique de l'option soit égale à la valeur réelle sur le marché de cette même option. La valeur trouvée est ce qu'on appelle la volatilité implicite.

Techniques d'estimation de la volatilité implicite : Il existe plusieurs méthodes d'estimer la volatilité implicite : selon le modèle d'évaluation, les types et les séries d'options disponibles. Cela pose un problème car intuitivement, il devrait exister une seule mesure de la variabilité par actif financier sous-jacent à l'option [73]. Pour résoudre le problème de la structure de la volatilité implicite, plusieurs auteurs ont suggéré différentes techniques de calcul afin de trouver un seul chiffre qui pourrait caractériser un actif financier en particulier. Mayhew (1995)[53] explique trois façons d'estimer cette mesure de la variabilité unique. Toutes ces méthodes ont ceci en commun : elles utilisent une moyenne pondérée de la volatilité implicite des options se transigeant sur un même actif financier.

La première, qui a été suggérée par Trippi (1977) [82] est par la suite par Schmalensee et

Trippi (1978)[75], calcule la volatilité implicite (σ_{impl}) pour les options d'une même classes et de là, calcule une simple moyenne arithmétique de σ_{impl} comme ceci :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sigma_{impl}$$

L'idée de ce raisonnement consiste à dire que si le modèle évalue correctement le prix d'une option sur le marché, alors les déviations de la prévision du modèle par rapport au marché s'expliquent par une forme de bruit dans le marché, une distorsion qu'il est possible de réduire en augmentant le nombre d'observations dans le calcul du σ_{imp} . Certaines options sont plus sensibles à la volatilité que d'autres en raison de différents facteurs comme l'asynchronisme dans les prix, ce qui baisse encore plus l'évaluation de la prime. Latané et Rendleman (1976)[45] suggèrent l'équation suivante pour tenir compte de ce phénomène :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i} \sum_{i=1}^N w_i^2 \sigma_{impl}^2$$

où w_i est le vega de l'option calculée avec la formule de Black-Scholes. cette methode possède l'avantage de pondérer les options selon leur degré de sensibilité à la volatilité. Cependant, elle n'alloue malheureusement pas une somme des poids égale à un. Pour résoudre ce problème, Beckers (1981) [5]et Whaley (1982)[86] ont utilisé une autre forme pondérée afin de réduire la distorsion causée par l'écart entre le prix prévu par le modèle et le prix réel de l'option :

$$\hat{\sigma}_{impl} = \sum_{i=1}^N w_i [C_i - BS_i(\hat{\sigma})]^2$$

où C_i est la prime au marché de l'option et BS est la prime évaluée par le modèle Black-Scholes.

Chapitre 2

Modèles et méthodes d'estimations des paramètres

2.1 Introduction

De nombreux modèles ont été proposés pour modéliser l'évolution du cours des actions. Le modèle de référence est proposé par Black-Scholes (1973), qui considère que les cours peuvent être représentés par un mouvement Brownien géométrique ; ces auteurs obtiennent une formule donnant explicitement les prix et les stratégies de couverture des options européennes. Les hypothèses de ce modèle sont très restrictives : continuité des trajectoires, constance de la volatilité, log-normalité des rendements, etc. Il a l'avantage d'être un modèle simple, facile à estimer.

Plusieurs autres modèles ont été développés pour mieux rendre compte de la réalité du marché, les prix sautent soudainement, les études empiriques montrent que la volatilité n'est pas constante et les queues de distribution sont plus épaisses que celle d'une loi log-normale, donc l'hypothèse gaussienne pour le rendement des actifs financiers n'a qu'un champ de validité réduit (Mandelbrot (1962), (1963))[49], [50] et Fama (1965)[18]. Le lecteur trouvera des exemples dans l'article de Jorion (1988)[37] ainsi que dans le livre de Jondeau, Poon et Rockinger (2007)[36].

Ces courants de recherche aboutissent en premier lieu à deux voies d'extension du modèle de Black-Scholes : Les modèles à sauts : ils se basent sur le fait que le prix de l'actif sous jacent change généralement d'une façon continue, mais ils permettent à ce prix de faire un brusque saut important. Merton (1976) [54] est le premier auteur à avoir introduit un modèle non gaussien. C'est seulement dans les années quatre vingt dix que se sont

développées un très grand nombre de modélisations alternatives à ces travaux précurseurs. Merton considère un processus mixte avec une composante gaussienne et une composante de type poisson composé avec sauts gaussiens. Les modèles à volatilité stochastique : ces modèles introduisent, en complément de l'aléa caractérisant le processus de prix du sous-jacent, un deuxième aléa relatif à l'évolution de la volatilité au cours du temps. Ceci revient à injecter un processus stochastique (celui de la volatilité) dans un autre processus stochastique (celui des prix du support).

Dans ce chapitre, nous allons présenter quelques modèles d'évaluations des actions financières et les méthodes d'estimation. Ce chapitre est partagé en trois sections.

Dans la première section, après avoir présenté le modèle de Black-Scholes, ainsi que les séries de rendement avec ses propriétés, nous étudions en profondeur, les méthodes d'estimations : la méthode historique, la méthode via le temps du premier passage et nous présenterons une généralisation de la méthode des temps de passage.

La modélisation de la volatilité stochastique (volatilité comme EDS ainsi que la méthode d'estimation de la volatilité, font l'objet de la deuxième section.

Nous présentons dans la troisième section, le modèle à sauts, modèle de Merton (1976)[54], ainsi que deux méthodes d'estimation, la méthode des moments et la généralisation de la méthode des temps de passage.

2.2 Modèle de Black-Scholes

Nous supposons que le comportement du prix de l'action est déterminé par l'EDS :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

$B = (B(t), t \geq 0)$ un mouvement Brownien standard, μ et σ sont des paramètres réels (voir chapitre 1).

2.2.1 Série de rendement

Du point de vue d'un investisseur, le rendement de l'investissement est beaucoup plus intéressant. Principalement à cause qu'un investisseur insiste plus sur le gain relatif réalisable, plutôt que sur le prix nominal de l'investissement, mais aussi parce que le rendement comme indice de changement du prix relatif permet des comparaisons entre

compagnies, titres boursiers et monnaies. Le rendement d'un titre varie donc en fonction du cours du titre, c'est une valeur financière, à la différence de la rentabilité financière, qui est une valeur comptable se calcule différemment selon le type de placement.

Le taux de rendement géométrique est le plus utilisé dans les diverses recherches, il permet de relier les modèles en temps discret et ceux en temps continu ([9], [60], [47]). Soit le prix d'un titre au temps t . Le rendement à l'instant t peut être défini par :

$$R(h) = \ln \left(\frac{S_{t+h}}{S_t} \right)$$

Loi jointe des rendements

le rendement de l'actif entre t et $t+h$ vaut :

$$\frac{S_{t+h}}{S_t} = \frac{S_0 \times \exp((\mu - \sigma^2/2) \times (t+h) + \sigma B_{t+h})}{S_0 \times \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t)}$$

De plus, comme B_{t+h} et B_t sont des mouvements Browniens standards, la différence $B_{t+h} - B_t$ est de même loi que B_h . Ceci nous amène à $(S_{t+h}/S_t) = \exp((\mu - \sigma^2/2)h + \sigma B_h)$, variable aléatoire log normale indépendante de t , de moyenne $\mu - \frac{\sigma^2}{2}$ et de variance σ^2 . Nous poserons par la suite $R(h) = \ln(S_{t+h}/S_t) = (\mu - \sigma^2/2)h + \sigma B_h$.

Propriétés statistiques des séries de rendement

Les séries de rendement possèdent un certain nombre de caractéristiques différentes de celles du bruit blanc gaussien. Les caractéristiques les plus marquantes des séries de rendement sont :

1. Excès du coefficient d'aplatissement : les séries de rendement possèdent un coefficient d'aplatissement plus important que celle de bruit blanc gaussien [73].

Etant données K observations $u_k, k = 1, \dots, K$ d'une certaine variable, le coefficient d'asymétrie (*skewness*) est calculé par :

$$\gamma_1 = \frac{E[(U - E(U))^3]}{E[(U - E(U))^2]^{3/2}} = \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (u_k - \hat{\mu})^3}{\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (u_k - \hat{\mu})^2\right)^{3/2}}$$

De la même manière on calcule le coefficient d'aplatissement (*Kurtosis*) par :

$$\gamma_2 = \frac{E[(U - E(U))^4]}{E[(U - E(U))^2]^2} - 3 = \frac{\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (u_k - \hat{\mu})^4}{\left(\frac{1}{K} \sum_{k=1}^K (u_k - \hat{\mu})^2\right)^2} - 3$$

où $\hat{\mu} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K u_k$.

2. Hétéroscédasticité : Elle représente le caractère non constant de la variance d'une série dans le temps.
3. Autocorrelation : Les rendements ne démontrent qu'une faible autocorrelation, mais les carrés des rendements sont autocorrélés à un niveau significatif.

2.2.2 Tests statistiques des séries de rendement :

Autocorrélations

Il existe des tests statistiques afin de vérifier si les rendements, supposés de même loi, forment un bruit blanc.

Test de Box et Pierce [10] : Le test de Box-Pierce permet d'identifier les processus de bruit blanc. Cette statistique permet de tester $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})$ pour tout k . Ce test s'écrit :

$$\begin{cases} H_0 = \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_h = 0 \\ H_1 = \text{il existe } i \text{ tel que } \rho(i) \neq 0 \end{cases}$$

Pour effectuer ce test, on utilise la statistique de Box et Pierce (1970) Q , donnée par

$$Q_h = T \sum_{k=1}^h \hat{\rho}_k^2$$

où h est le nombre de retards, T est le nombre d'observations et $\hat{\rho}_k^2$ l'autocorrélation empirique. Nous rejetons l'hypothèse de bruit blanc au seuil h si Q est supérieure au quantile d'ordre $(1 - \alpha)$ de la loi du χ^2 à h degrés de liberté.

Test de Box Ljung [10] : Une statistique ayant de meilleures propriétés asymptotiques peut être utilisée

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^h \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}$$

qui suit asymptotiquement, sous H_0 une loi du χ^2 à h degrés de liberté. Si $Q \prec \chi_{h-r}^2$; alors on accepte H_0 , avec r est le nombre de paramètres estimés.

Test de Normalité

Nous pouvons aussi tester l'hypothèse de loi gaussienne, si les rendements sont indépendants, Il existe plusieurs tests de normalité, le test le plus classique de Jarque et Bera [32] est fondé sur la notion de Skewness (asymétrie) et du Kurtosis (aplatissement).

Les tests de Skewness et de Kurtosis : soit $\mu_k = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^k$ le moment centré d'ordre k , le coefficient de Skewness $\left(\beta_1^{1/2}\right)$ est égal à : $\beta_1^{1/2} = \mu_3/\mu_2^{3/2}$ et le coefficient de Kurtosis $\beta_2 = (\mu_4/\mu_2^2) - 3$. Pour une distribution normale et pour un nombre d'observations assez grand ; nous avons :

$$\beta_1^{1/2} \rightarrow N\left(0, \sqrt{6/n}\right) \quad \text{et} \quad \beta_2 \rightarrow N\left(3, \sqrt{24/n}\right)$$

Nous construisons alors les statistiques :

$$\nu_1 = \left(\beta_1^{1/2} - 0\right) / \sqrt{6/n} \quad \text{et} \quad \nu_2 = (\beta_2 - 3) / \sqrt{24/n}$$

Si les hypothèses $H_0 : \nu_1 = 0$ (symétrie) et $\nu_2 = 0$ (aplatissement normal) sont vérifiées alors $|\nu_1| < 1.96$ et $|\nu_2| < 1.96$. (au seuil 5%) Dans le cas contraire l'hypothèse de normalité est rejetée.

Test de Jarque-Bera : il s'agit d'un test qui regroupe les résultats précédents. Si $\beta_1^{1/2}$ et β_2 obéissent à des lois normales alors la quantité S :

$$S = \frac{n}{6}\beta_1 + \frac{n}{24}(\beta_2 - 3)^2 \quad \text{suit un } \chi^2(2)$$

Donc si $S > \chi_{1-\alpha}^2(2)$ nous rejettons l'hypothèse de normalité H_0 des résidus au seuil α .

2.2.3 Méthodes d'estimation des paramètres des EDS : Modèle de Black-Scholes

Cette partie est exclusivement consacrée aux méthodes d'estimation. Nous commençons par un bref aperçu d'une méthode courante (la méthode historique), et nous illustrons, ensuite, deux méthodes d'estimation basées sur les temps de passage.

Méthode historique

La méthode historique [24], [81] est une méthode statistique qui utilise la propriété d'indépendance des rendements logarithmiques. Les rendements forment un bruit blanc (i.e. des observations indépendantes de même loi gaussien).

Pour un échantillon r_1, \dots, r_n i.i.d de rendements, la vraisemblance du rendement de ce modèle s'écrit :

$$L(r_1, \dots, r_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^n \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\left(r_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2\sigma^2}\right)$$

Le log vraisemblance est donc :

$$\ln L(r_1, \dots, r_n, \mu, \sigma^2) = n \ln \left[\frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \right] + \sum_{i=1}^n \left(-\frac{\left(r_i - \mu + \frac{\sigma^2}{2} \right)^2}{2\sigma^2} \right)$$

Les équations de vraisemblance sont :

$$\frac{\partial \ln(L(r, \mu))}{\partial \mu} = 0 \text{ et } \frac{\partial \ln(L(r, \sigma^2))}{\partial \sigma^2} = 0$$

$$\sum_{i=1}^n -\frac{(-2 \times (r_i + \sigma^2/2) + 2\mu)}{2\sigma^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i - n\mu + n\sigma^2/2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \sum_{i=1}^n r_i - n\mu + n\sigma^2/2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i + \sigma^2/2$$

Donc

$$\mu = \bar{r} + \frac{\sigma^2}{2} \tag{2.1}$$

et

$$-\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2} \left[-\frac{1}{\sigma^4} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2)^2 + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow -\frac{n}{2\sigma^2} - \frac{1}{2\sigma^2} \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2)^2 + \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2)^2 + \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) \right] = 0$$

$$\frac{1}{\sigma^2} (r_i - \mu + \sigma^2/2)^2 = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 + \sum_{i=1}^n (r_i - \mu) + n\sigma^2/4$$

Or

$$\sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) = \sum_{i=1}^n (r_i - \mu) + n\sigma^2/4$$

Donc

$$n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2)^2 + \sum_{i=1}^n (r_i - \mu + \sigma^2/2) \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 + n\sigma^2/4 \right] = 0$$

Par ailleurs,

$$\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (r_i - \bar{r})^2 - (r_i - \bar{r}) + n\sigma^2/4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 = \frac{1}{\sigma^2} (r_i - \bar{r})^2 + n\sigma^2/4$$

Donc :

$$n + \left[-\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \mu)^2 + n\sigma^2/4 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow n - \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 = 0$$

$$\sigma^2 = \text{var}(r) \tag{2.2}$$

Il est bien connu que les lois des variables aléatoires des estimateurs ci-dessus sont respectivement $N(\mu - \sigma^2/2, \sigma^2/n)$ et $(\sigma^2/n) \chi_{n-1}^2$.

L'interprétation de μ et σ est la suivante en utilisant les propriétés de l'intégrale d'Itô :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} \right) = \mu t \quad \text{et} \quad \text{Var} \left(\int_0^t \frac{dS_u}{S_u} \right) = \sigma_t^2$$

Nous interprétons μ comme le taux d'intérêt espéré par unité de temps : il mesure la tendance du marché et est souvent comparé au taux sans risque r . La constante σ mesure l'aléa de l'actif risqué et est appelée volatilité.

Méthode via le temps de premier passage

Cette méthode propose l'estimation des paramètres du processus de diffusion log normale $X(t)$, via l'observation de l'instant de premier passage du processus à travers une borne constante notée S (Janssen et les autres (1996) [31]). Pour ce faire, nous considérons k trajectoires indépendantes ayant chacune n_i observations ($i = 1, \dots, k$). Nous supposons qu'elles partent toutes du même point initial c'est-à-dire que $P\{X_i(t_0) = x_0\} = 1, (i = 1, \dots, k)$. Les variables aléatoires T sont les instants du premier passage par la

borne S dans les k trajectoires (figure (2.1)), avec les valeurs observées $t_i : i = 1, \dots, k$, et on définit

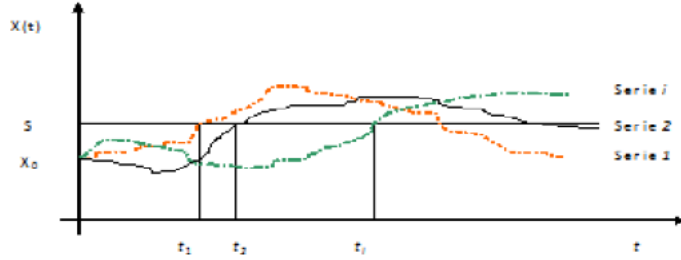


FIG. 2.1 – Temps du premier passage

- n_i : nombre d'observations dans la trajectoire i , avec $\sum_{i=1}^k n_i = n$.
- x_{ij} : j ème observation de la i ème trajectoire de la variable aléatoire ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i$).
- t_{ij} : l'instant de la j ème observation de la i ème trajectoire, ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i$).

Proposition 2.2.1. (Chhikara et Folks (1988))[12]

Soit $Y = (Y(t), t \geq 0)$ le processus de Wiener généralisé de drift $m > 0$ et de variance σ^2 . Considérons maintenant T le premier temps de passage de $Y(t)$ par le point $a > y_0$, défini comme suit :

$$T = \inf \{t \mid Y(t) = a\}, t > 0$$

alors pour $m > 0$, T suit une loi gaussienne inverse de paramètres ϕ et λ noté par :

$$T \rightarrow IG(\phi, \lambda)$$

où ϕ et λ sont des paramètres strictement positifs représentant respectivement la moyenne de la distribution et un paramètre d'échelle dont les expressions s'écrivent :

$$\phi = \frac{a - y_0}{m} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{(a - y_0)^2}{\sigma^2}$$

Conséquences

D'une manière équivalente, T est le premier temps de passage du processus $X(t) = \exp(Y(t))$ du modèle (1.5) par le point $S = \exp(a)$. En reformulant la propriété ci-dessus nous avons :

$$T = \inf \{t \mid X(t) = S\}, t > 0$$

Les paramètres ϕ et λ de sa distribution gaussienne inverse s'écrivent respectivement :

$$\phi = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\mu - \frac{1}{2}\sigma^2} \quad \text{et} \quad \lambda = \frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right)\right]^2}{\sigma^2}$$

Sa fonction de densité, étant donné $X(t_0) = x_0$, s'écrit donc sous la forme :

$$f(S, t/x_0, t) = \frac{\log\left(\frac{S}{x_0}\right)}{\sqrt{2\pi}\sigma(t-t_0)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\left[\log\left(\frac{S}{x_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-t_0)\right]^2}{2\sigma^2(t-t_0)}\right\} \quad (2.3)$$

L'espérance et la variance de T sont données par les formules suivantes [12] :

$$E(T) = \frac{\log(S/x_0)}{\mu - \sigma^2/2} \quad \text{et} \quad V(T) = \frac{\sigma^2 \log(S/x_0)}{(\mu - \sigma^2/2)^3}$$

Estimation : Pour la simplicité de notation, nous supposons $t_0 = 0$, soient T_1, T_2, \dots, T_k les variables aléatoires des instants du premier temps de passage à travers la borne constante S dans les k trajectoire (figure 1), de valeurs observées $t_i : i = 1, \dots, k, (t_i > 0 \text{ et } t_i > \infty)$.

La fonction de vraisemblance s'écrit :

$$\begin{aligned} L(S : t_1, \dots, t_0|x_0) &= \prod_{i=1}^k f(S : t_i|x_0) \\ &= \frac{[\log(S/x_0)]^k}{(2\pi)^{k/2} \sigma^k \prod_{i=1}^k t_i^{3/2}} \exp\left\{-\sum_{i=1}^k \frac{[\log(S/x_0) - (\mu - \sigma^2/2) t_i]^2}{2\sigma^2 t_i}\right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet \log L(S : t_1, \dots, t_0|x_0) &= k \log [\log(S/x_0)] - \frac{k}{2} \log(2\pi) - \frac{k}{2} \log \sigma^2 \\ &\quad - \frac{3}{2} \log \prod_{i=1}^k t_i - \sum_{i=1}^k \frac{[\log(S/x_0) - (\mu - \sigma^2/2) t_i]^2}{2\sigma^2 t_i} \\ \bullet \frac{\delta \log(S : t|x_0)}{\delta \mu} &= \sum_{i=1}^k \frac{t_i [\log(S/x_0) - (\mu - \sigma^2/2) t_i]^2}{\sigma^2 t_i} = 0 \\ &\Rightarrow k \log(S/x_0) = \mu \sum_{i=1}^k t_i - \frac{1}{2} \sigma^2 \sum_{i=1}^k t_i \end{aligned}$$

Donc :

$$\hat{\mu} = \frac{\log(S/x_0)}{\bar{t}} + \hat{\sigma}^2/2 \quad (2.4)$$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\delta \log(S : t_i | x_0)}{\delta \sigma^2} &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^k \frac{[\log(S/x_0) - (\log(S/x_0)/\bar{t}) t_i]^2}{2\sigma^4 t_i} = 0 \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^k \frac{[\log(S/x_0) - (\log(S/x_0)/\bar{t}) t_i]^2}{2\sigma^4} = 0 \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \sum_{i=1}^k \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0) (1 - t_i/\bar{t})]^2 \frac{1}{t_i} \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k (1 - t_i/\bar{t}) \frac{1}{t_i} \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{t_i} - 2(t_i/\bar{t}t_i) + t_i^2/\bar{t}t_i \right) \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k \left((1/t_i) - 2/\bar{t} + t_i/\bar{t}^2 \right) \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k (1/t_i) - \sum_{i=1}^k (2/\bar{t}) + kt/\bar{t}^2 \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k (1/t_i) - 2k/\bar{t} + k/\bar{t} \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k (1/t_i) - (k/\bar{t}) \\ &= \frac{-k}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} [\log(S/x_0)]^2 \sum_{i=1}^k ((1/t_i) - 1/\bar{t}) \end{aligned}$$

Donc,

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\log(S/x_0)]^2}{k} \sum_{i=1}^k ((1/t_i) - 1/\bar{t}) \quad (2.5)$$

Où $\bar{t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i$.

Etant des estimateurs de maximum de vraisemblance. Ces derniers sont, sous les conditions générales, asymptotiquement normaux, consistants et asymptotiquement efficaces.

Proposition 2.2.2. ((Raj S. Chhikara et Folks J (1988))

Soit \bar{t}_h la moyenne harmonique de l'échantillon tel que :

$$\bar{t}_h = \left(\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \frac{1}{t_i} \right)^{-1}$$

Alors nous pouvons réécrire le terme $\sum_{i=1}^k ((1/t_i) - 1/\bar{t})$ de l'expression (2.5) comme la différence $(1/\bar{t}_h - 1/\bar{t})$. Comme $\bar{t} \geq \bar{t}_h$, l'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est non négatif.

Lois et intervalle de confiance : Notons $a = \log(S/x_0)$, $(m = \mu - \sigma^2/2)$, $V = \sum_{i=1}^k ((1/t_i) - 1/\bar{t})$ où $\bar{t} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k t_i$.

Théorème 2.2.1. ((Raj S. Chhikara et Folks J (1988))

Soient T_1, T_2, \dots, T_k les variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que les valeurs de l'espérance de $T, T^2, 1/T$ et $1/\sum T_i$ existent et sont non nulles. Alors la condition nécessaire et suffisante pour que T_1, \dots, T_k soient distribuées selon une gaussienne inverse est que $\sum T_i$ et $\sum T_i^{-1} - k(\sum T_i^{-1})$ soient indépendamment distribués.

Il en résulte que \bar{T} et V sont indépendamment distribués tels que :

$$\bar{T} \rightarrow IG(a/m, ka^2/\sigma^2) \text{ et } (a^2/\sigma^2) V \rightarrow \chi_{k-1}^2$$

L'indépendance des deux statistiques \bar{T} et V découle de la propriété de reproductivité de la famille exponentielle de la distribution gaussienne inverse.

Propriété

Si $T \rightarrow IG(\phi, \lambda)$, alors l'espérance de la variable aléatoire $W = T^{-1}$ existe et est donnée par la formule suivante :

$$E(W) = 1/\phi + 1/\lambda.$$

Grâce à la propriété ci-dessus, nous pouvons mettre les estimateurs sans biais de μ et σ^2 sous la forme :

$$\hat{\mu} = \frac{\log(S/x_0)}{\bar{t}} + \hat{\sigma}^2 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{k \log(S/x_0)} \right) \quad (2.6)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\log(S/x_0)]^2}{k-1} \sum_{i=1}^k ((1/t_i) - 1/\bar{t}) \quad (2.7)$$

Nous s'intéressons maintenant à la région de confiance pour le couple de paramètres (m, σ^2) de niveau $(1 - \alpha)$, fondée sur la fonction pivotale bidimensionnelle de composantes :

$$H = \frac{\sqrt{k}(m\bar{T} - a)}{\sigma\sqrt{\bar{T}}} \text{ et } (a^2/\sigma^2) V$$

En effet, la région critique uniformément sans biais, $u_1 \leq \bar{T} \leq u_2$, correspond à $|H| > t_{1-\alpha/2}$ où $t_{1-\alpha/2}$ est, soit le quantile de pourcentage 100(1 - $\alpha/2$) de loi normale standard, soit celui de loi de Student à $(k - 1)$ degré de liberté. La variable H établit une relation de base entre les distributions gaussienne inverse et Normale. Elle représente, en quelque sorte, l'équivalent de la variable centrée réduite de loi Normale.

La région de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour le couple de paramètres (m, σ^2) est définie par :

$$(k - 1) \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{1-\alpha'_2}} \leq \sigma^2 \leq (k - 1) \frac{\hat{\sigma}^2}{z_{\alpha''_2}} \quad (2.8)$$

$$\max \left(0, \frac{a}{\bar{t}} [1 - \xi t_{1-(\alpha_1/2)}] \right) \leq m \leq \frac{a}{\bar{t}} [1 + \xi t_{1-(\alpha_1/2)}] \quad (2.9)$$

où

- $\xi = \frac{\sigma}{a} \sqrt{\frac{\bar{t}}{a}}$, $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_1 \alpha_2$, $\alpha_2 = \alpha'_2 + \alpha''_2$
- $z_{1-\alpha'_2}$ et $z_{\alpha''_2}$ sont les quantiles de loi χ^2 à $(k - 1)$ degré de liberté.
- $t_{1-\frac{\alpha_1}{2}}$ est le quantile de loi $N(0, 1)$.

Remarque

A partir de la région de confiance (2.9), on en déduit celle de μ , à savoir :

$$\max \left(\frac{\beta}{z_{1-\alpha'_2}}, \frac{\beta}{z_{1-\alpha'_2}} + \frac{a}{\bar{t}} (1 - \gamma) \right) \leq \mu \leq \frac{\beta}{z_{\alpha''_2}} + \frac{a}{\bar{t}} (1 + \gamma) \quad (2.10)$$

où

$$\beta = \frac{1}{2} (k - 1) \hat{\sigma}^2 \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{\hat{\sigma}}{a} \left(\frac{(k - 1) \bar{t}}{a z_{\alpha''_2}} \right)^{\frac{1}{2}} t_{1-(\alpha_1/2)}$$

Dans notre travail, nous étudions, dans la première étape, la qualité des estimations. Nous résolvons ce problème en adoptant un algorithme (à partir de la simulation de la loi uniforme sur les intervalles $[a, b]$ de variation des S) pour déterminer les estimateurs $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$, en se basant sur certains critères d'optimisation pour choisir de meilleur estimateur, notamment le critère qui minimise les *RMSE* (root mean squared error loss function) %*RMSE* (relative root mean squared error loss function) et l'erreur moyenne relative (*ERM*).

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N e_i^2(\Theta)}, \quad \%RMSE = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{e_i(\Theta)}{x_i} \right)^2} \quad \text{et} \quad ERM = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|e_i(\Theta)|}{x_i}$$

où les $e_i = x_i - x_i(\theta)$ sont les termes d'erreur.

Généralisation de la méthode des temps de passage

Dans la deuxième étape, nous généralisons la méthode PTP [39]. La figure (2.2) montre plusieurs temps du passage pour chaque trajectoire.

Dans cette méthode (G.T.P), nous utilisons tous les temps de passages traversés par

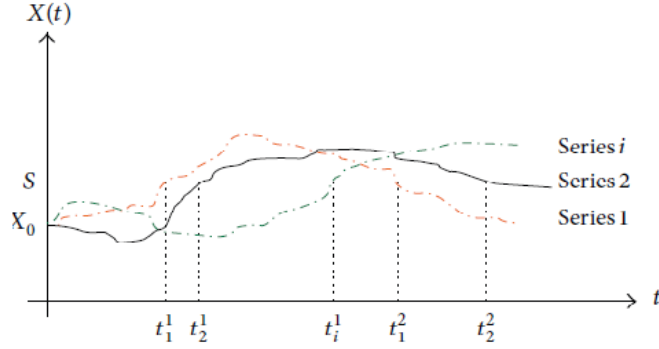


FIG. 2.2 – Tous les temps de passage

la valeur S de sorte que cette valeur est atteinte par toutes les trajectoires possibles. Le principe de cette méthode est similaire à celle de la première méthode. La variable T suit une loi gaussienne inverse, sa fonction de densité, s'écrit donc sous la forme (2.3). La résolution des équations de vraisemblance de l'équation (2.3) nous donne les estimateurs suivants :

$$\hat{\mu} = \frac{\log(S/x_0)}{\bar{t}} + \hat{\sigma}^2/2 \quad (2.11)$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{[\log(S/x_0)]^2}{m} \sum_{l=1}^m (1/t_i^l - 1/\bar{t}) \quad (2.12)$$

où $\bar{t} = 1/m \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^{m_k} t_i^l$.

Avec :

- $m = \sum_{l=1}^k m_l$, le nombre totale des temps de passage.
- m_l : Le nombre des temps de passage dans la l^{eme} trajectoire.
- t_i^l : Le l^{eme} temps de passage dans la trajectoire i , ($i= 1, \dots, k$; $l= 1, \dots, m_k$).

2.3 Modèle à volatilité stochastique

2.3.1 Introduction

Le problème de la volatilité stochastique a été examiné par plusieurs chercheurs dont Gesk (1979)[23], Johnson et Shanno (1987)[35], Wiggins (1987)[87], ont conclut que la vo-

latilité des rendements de l'actif sous jacent pourrait être elle-même une variable aléatoire qui évoluerait dans le temps suivant un processus spécifique. Hull et White (1987)[27] ont utilisé un certain nombre d'hypothèses, la valeur de l'option donnée par le modèle à volatilité stochastique [30], est solution d'une équation différentielle à dérivées partielles du second ordre, qui n'est autre qu'un cas particulier de l'équation de Garman (1976)[22], avec seulement deux variables d'état, qui sont le prix de l'actif sous jacent et la volatilité. Ils ont par ailleurs examiné la corrélation de la volatilité avec les prix de l'option. Stein et Stein (1991)[78] et Heston (1993)[25] ont réussi à trouver, analytiquement, une solution exacte de l'équation différentielle (closed form solution). Le premier est basé sur une technique relative à l'équation de la chaleur et le second sur l'inversion de Fourier. La plupart des autres chercheurs qui ont traité le sujet ont en recours à une résolution numérique de cette équation. Nous pouvons citer, à cet effet, Hull-White (1987)[27], Scott (1987)[76] et Wiggins (1987)[87].

Nous considérons dans cette section, un processus de la volatilité stochastique, volatilité comme équation différentielle stochastique (EDS).

2.3.2 La volatilité comme équation différentielle stochastique(EDS) :

Présentation du modèle

Dans le modèle de volatilité stochastique comme EDS [34], la volatilité sera elle-même un processus stochastique, dépendant du temps et du hasard. Ceci revient en fait, à injecter un processus stochastique qui est celui de la volatilité dans un autre processus de diffusion géométrique des prix de l'actif sous jacent. Le coefficient de corrélation, entre les mouvements du rendement instantané du sous jacent et les mouvements de la volatilité, est constant. Le prix du sous jacent S et la volatilité de son rendement instantané sont les deux variables d'états du modèle. Elles suivent des processus décrits par les équations suivantes :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dB_t \quad (2.13)$$

$$d\sigma_t = D_t dt + q_t dB'_t, \quad d\langle B, B' \rangle_t = \rho dt \quad (2.14)$$

Où, les paramètres μ_t et σ_t sont, respectivement, le drift réel et la volatilité instantanée du rendement instantané du sous jacent. Les quantités D_t et q_t sont, respectivement drift et la volatilité de la volatilité, qui sont des fonctions du prix du sous jacent de la volatilité et du temps. Les processus dB_t et dB'_t sont des processus de Wiener-Lévy que nous pouvons

écrire sous la forme

$$dB_t = u_S \sqrt{dt} \quad \text{et} \quad dB'_t = u_\sigma \sqrt{dt}$$

avec, u_S et u_σ sont des variables aléatoires suivant chacune une loi normale centrée réduite. Le coefficient de corrélation entre ces deux variables aléatoires est égale à ρ . Ainsi, les équations de diffusion du prix du sous jacent et de la volatilité peuvent s'écrire donc, sous la formule :

$$\begin{aligned} dS &= \mu S dt + \sigma S \sqrt{dt} u_S \\ d\sigma &= D(S, \sigma, t) dt + q(S, \sigma, t) \sqrt{dt} u_\sigma \\ \rho &= \rho(u_S, u_\sigma) \end{aligned}$$

Equations de valorisation (pricing) et de couverture

D'après les équations (2.13) et (2.14), où, $D_t = D(t, \sigma_t, S_t)$ et $q_t = q(t, \sigma_t, S_t)$. En présence de deux sources de risque nous aurons besoin de deux actifs risqués pour la couverture ([79], [8]). Nous supposons donc qu'il existe un actif liquide coté au prix :

$$C_t^0 = C^0(t, \sigma_t, S_t)$$

où la fonction déterministe $C^0(t, \sigma, S)$ est connue et satisfait $\delta C^0(t, \sigma, S) / \delta \sigma > 0$ pour tout t, σ, S (dans ce cas on dit que l'actif C^0 complète le marché). De plus nous aurons besoin de l'hypothèse $-1 < \rho < 1$ et de toutes les hypothèses techniques sur l'existence et régularité des solutions des EDS (2.13) – (2.14), qui sont détaillées dans [70]. Soit V_t la valeur du portefeuille autofinçant contenant δt actions et w_t unités de C^0 . Par la condition d'autofinancement et la formule d'Itô,

$$\begin{aligned} dV_t &= (V_t - \delta_t S_t - w_t C_t^0) r dt + \delta_t dS_t + w_t dC_t^0 \\ &= (V_t - \delta_t S_t - w_t C_t^0) r dt + \left(\delta_t + w_t \frac{\partial C^0}{\partial S} \right) dS_t + \frac{\partial C^0}{\partial \sigma} d\sigma_t + w_t L_t C^0 dt \quad (2.15) \end{aligned}$$

avec

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q_t^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + S_t \sigma_t q_t \rho \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma}$$

Essayons de trouver une stratégie autofinancante qui réplique une fonction déterministe C (qui donnera le prix de l'option à couvrir par la suite) : $V_t = C(t, \sigma_t, S_t)$. En appliquant la formule d'Itô, nous trouvons :

$$dV_t = L_t C dt \frac{\partial C}{\partial S} dS_t + \frac{\partial C}{\partial \sigma} d\sigma_t,$$

et pour l'égalité entre cette expression et (2.15), les ratios de couverture et la fonction C doivent satisfaire

$$w_t = \frac{\partial C / \partial \sigma}{\partial C^0 / \partial \sigma} \quad (2.16)$$

$$\delta_t = \frac{\partial C}{\partial S} - w_t \frac{\partial C^0}{\partial S} \quad (2.17)$$

$$L_t C - rC + rS_t \frac{\partial C}{\partial S} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} \frac{L_t C^0 - rC^0 + rS_t \frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma} \quad (2.18)$$

Le deuxième facteur à droite dépend de l'actif que nous avons choisi initialement pour la couverture. Soit

$$\lambda(t, \sigma, S) = - \frac{L_t C^0 - rC^0 + rS_t \frac{\partial C^0}{\partial S}}{\partial C^0 / \partial \sigma}$$

Nous avons démontré par réplication que le prix d'une option européenne de payoff $h(S_T)$ satisfait :

$$L_t C - rC + rS_t \frac{\partial C}{\partial S} + \lambda(t, \sigma, S) \frac{\partial C}{\partial \sigma} = 0, \quad C(T, \sigma, S) = h(S) \quad (2.19)$$

avec

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2} S_t^2 \sigma_t^2 \frac{\partial^2}{\partial S^2} + \frac{1}{2} q_t^2 \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} + S \sigma q_t \rho \frac{\partial^2}{\partial S \partial \sigma}$$

C'est la généralisation de l'équation de Black-Scholes aux modèles de la volatilité stochastique. La couverture avec des actions et des actifs risqués d'un autre type avec des ratios (2.16) – (2.17) s'appelle la couverture en delta-vega (risque de vega égale risque de volatilité).

Evaluation risque-neutre : les résolutions de l'EDP de valorisation (2.19) n'est pas toujours facile. Il serait plus satisfaisant d'exprimer le prix d'une option européenne dans un modèle de volatilité stochastique comme espérance, pour le calcul par exemple, avec une méthode de Monte Carlo. Les prix des actifs cotés sont des espérances actualisés de leurs flux terminaux sous la probabilité risque-neutre, sous laquelle toute option satisfait

$$dC_t = rC_t dt + \text{martingale.}$$

Or, en utilisant la formule d'Itô et (2.16) – (2.18), nous trouvons

$$dC_t = rC_t dt + \frac{\partial C}{\partial S} (dS_t - rS_t dt) + \frac{\partial C}{\partial \sigma} (d\sigma_t - \lambda_t dt),$$

donc, sous la probabilité risque-neutre Q , nous aurons

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= r dt + \sigma_t d\widetilde{B}_t \\ d\sigma_t &= \lambda_t dt + q_t d\widetilde{B}'_t, \end{aligned}$$

où \widetilde{B}_t et \widetilde{B}'_t sont des Q -mouvements Browniens avec $\langle d\widetilde{B}_t, \widetilde{B}'_t \rangle = \rho dt$. La fonction universelle λ , que nous avons rencontré pour la première fois dans l'équation de valorisation (2.19) joue donc le rôle de la dérive de volatilité sous la probabilité risque-neutre.

Sous Q , le prix d'une option européenne de payoff h satisfait

$$C(t, \sigma, S) = E \left[e^{-r(T-t)} h(S_T) \mid \sigma_t = \sigma, S_t = S \right]$$

Sous la condition $\sigma_t > 0$ et $q_t > 0$, le modèle (2.13)-(2.14) peut être réécrit

$$\begin{aligned} \frac{dS_t}{S_t} &= (r + \beta_t \sigma_t) dt + \sigma_t dB_t \\ d\sigma_t &= (\lambda_t + \phi_t q_t) dt + q_t dB'_t \end{aligned}$$

Le coefficient β_t qui permet de passer de la probabilité risque-neutre à la probabilité historique est appelé la prime de risque. Par analogie, nous appelons souvent ϕ_t la prime de risque de volatilité.

Remarque

Le paramètre β_t est facile à estimer comme $(\mu_t - r) / \sigma_t$ alors que pour estimer ϕ_t nous devrions estimer λ_t à partir de données historiques, ce qui n'est en général pas possible, c'est la différence fondamentale entre β_t et ϕ_t . Une solution consiste à spécifier une forme paramétrique pour λ_t qui sera estimée directement sous la probabilité risque-neutre, aux prix d'options cotés sur le marché.

Estimation de volatilité

La volatilité n'est pas directement observable sur le marché, et comme nous avons vu dans la section précédente, dans un modèle à volatilité stochastique avec deux facteurs de risque, toute option est répliquée par un portefeuille contenant des actions et un actif risqué additionnel. Les deux paramètres D et q sont estimés à partir des données historiques de la volatilité, en considérant la volatilité historique ou implicite (voir Jerbi (2006)).

Estimation du drift risque neutre de la volatilité (D) : nous considérons que ce drift est constant, à l'instar du drift risque neutre du prix du sous jacent, il est calculé comme étant la moyenne de la dérivée de la volatilité par rapport au temps. Nous avons, ainsi :

$$D = E(d\sigma_t) = Ddt$$

D'où, l'expression du drift risque neutre de la volatilité

$$D = E \left(\frac{d\sigma_t}{dt} \right)$$

Ainsi, pour une série temporelle de la volatilité (t_i, σ_i) de taille n , tirée suivant le temps t_i , nous pouvons déduire la série $(\Delta t_i, \Delta \sigma_i)$. L'estimation du D est la moyenne empirique des variations de la volatilité rapportées aux intervalles de temps correspondants. Soit :

$$\hat{D} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{\Delta \sigma_i}{\Delta t_i} \quad (2.20)$$

Δt_i est l'intervalle de temps séparant de cotations.

Estimation de la volatilité de la volatilité (q) : Etant donné que la volatilité de la volatilité q est supposée constante [34], elle peut être calculée comme l'écart type de la variable $d\sigma/\sqrt{dt}$; en effet, Comme nous avons $d\sigma/\sqrt{dt} = Ddt + U_q$; et que U est une variable aléatoire normale centrée réduite, nous pouvons écrire :

$$\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}} \longrightarrow N\left(D\sqrt{dt}, q\right) \quad \text{et} \quad V\left(\frac{d\sigma}{\sqrt{dt}}\right) = q^2$$

Par conséquent, si nous considérons la série $(t_i, \sigma_i, 1 \leq i \leq n)$, la volatilité de la volatilité peut être estimée par la quantité :

$$\hat{q} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(\frac{d\sigma_i}{dt_i} - D\sqrt{dt_i}\right)^2} \quad (2.21)$$

Les formules sont plus exactes pour la base journalière, puisque le temps n'est pas stochastique. Par contre ces formules ne donnent qu'une approximation des valeurs de la volatilité de la volatilité q dans le cas où le temps est stochastique. Dans ce cas nous pouvons considérer un intervalle de temps moyen \bar{dt} pour estimer la volatilité q .

2.4 Modèle à sauts : modèle de Merton

2.4.1 Introduction

Compte tenu de la place privilégiée du mouvement Brownien géométrique, nous nous intéressons ici aux modèles généralisant cette approche et incluant le mouvement Brownien géométrique comme cas particulier. Le modèle proposé par Merton (1976)[54] est donc le modèle que nous retiendrons dans cette section. Merton (1976) introduit des discontinuités modélisées par un processus de Poisson composée avec sauts gaussiens capable de capter les événements rares et les chocs abrupts.

2.4.2 Présentation du modèle de Merton

Nous considérons que le prix de l'actif S_t présente des sauts relatifs U_1, \dots, U_j à des instants aléatoires τ_1, \dots, τ_j qui sont les instants de saut d'un processus de Poisson ([3], [36], [37], [41], [51], [62], [68]). Entre deux instants de saut nous supposons que la dynamique du cours respecte le modèle de Black-Scholes. Cela conduit après quelques manipulations à l'expression suivante du cours (voire [44] pour la démonstration) :

$$S_t = S_0 \times \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) \quad (2.22)$$

où :

- $B = (B_t)_{(t \geq 0)}$ est un mouvement Brownien.
- $N = (N_t)_{(t \geq 0)}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ .
- $U = (U_i)_{(i \geq 1)}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi normale $N(0, \delta^2)$.

Les processus B , N et U sont mutuellement indépendants.

Pour obtenir un modèle du même niveau de simplicité que celui de Black-Scholes, nous supposons que les sauts sont symétriques et en moyenne nulle; des modèles plus élaborés à sauts dissymétriques peuvent également être proposés, comme dans Ramezani et Zeng (1998)[67]. Nous ne les considérerons pas ici.

Notons F_t la tribu engendrée par les variables aléatoires B_s, N_s (pour $s \leq t$) et $U_i \times 1_{N_i \geq i}$ pour $i \geq 1$. B est un mouvement Brownien standard par rapport à la filtration $(F_t)_{(t \geq 0)}$, N est un processus adapté à cette filtration. De plus $\forall t > s$, $N_t - N_s$ est indépendant de la tribu F_s . La loi de S_t est connue explicitement dans ce modèle [62] :

Proposition 2.4.1. *Pour tout $x > 0$,*

$$P[S(t) \leq x] = \sum_{n=0}^{\infty} \Phi \left[\frac{\ln x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{\sqrt{n\delta^2 + t\sigma^2}} \right] e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Démonstration

$$P[S(t) \leq x] = P \left[\sum_{i=1}^{N_t} U_i + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] \quad (2.23)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P \left[\sum_{i=1}^{N_t} U_i + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x, N_t = n \right] \quad (2.24)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P \left[\sum_{i=1}^n U_i + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t \leq \ln x \right] P[N_t = n], \quad (2.25)$$

puisque les processus B , N et U sont mutuellement indépendants. Par ailleurs, les processus $\sum_{i=1}^n U_i$ et σB_t étant indépendants et gaussiens, leur somme est également gaussienne : $\sum_{i=1}^n U_i + \sigma B_t \sim N(0; n\delta^2 + t\sigma^2)$. Enfin comme N est un processus de Poisson d'intensité λ , pour tout $t > 0$, la variable aléatoire N_t est distribuée selon une loi de Poisson de paramètre λt et donc

$$P[N_t = n] = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Lorsque $\lambda = 0$, (cas de l'absence de sauts) nous retrouvons la loi log-normale usuelle du Brownien géométrique. Dans le cas général, l'expression de la proposition ci-dessus permet d'approcher numériquement la distribution de l'actif en ne conservant qu'un nombre fini de termes dans la somme.

Proposition 2.4.2. *Pour tout $p \in \mathbb{R}$ nous avons :*

$$E(S(t)^p) = \exp \left\{ p(\mu - \sigma^2/2)t + \frac{p^2\sigma^2}{2}t + \lambda t [\exp(p^2\delta^2/2) - 1] \right\} \quad (2.26)$$

Démonstration

Soit $p \in \mathbb{R}$ nous avons :

$$E(S(t)^p) = E \left[\exp \left\{ p(\mu - \sigma^2/2)t + p\sigma B_t + p \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right\} \right]$$

Les termes aléatoires de l'exponentielle sont indépendants ce qui ramène le calcul au produit de $E[\exp\{p\sigma B_t\}]$ et $E\left[\exp\left\{p \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right\}\right]$.

Pour tout $t > 0$, B_t est une v.a. de loi $N(0; t)$ donc

$$E[\exp\{p\sigma B_t\}] = \exp \left\{ p^2 \frac{\sigma^2}{2} t \right\},$$

Par ailleurs nous avons vu (la démonstration de la proposition **2.3.1**) que

$$E \left[\exp \left\{ p \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} E \left[\exp \left\{ p \sum_{i=1}^n U_i \right\} \right], \quad (2.27)$$

Comme les sauts sont gaussiens et centrés,

$$E \left[\exp \left\{ P \sum_{i=1}^n U_i \right\} \right] = \exp \left\{ \frac{np^2\delta^2}{2} \right\}, \quad (2.28)$$

et donc

$$E \left[\exp \left\{ p \sum_{i=1}^{N_t} U_i \right\} \right] = e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \exp \left\{ \frac{np^2\delta^2}{2} \right\} = \exp \left\{ \lambda t \left[\exp \left(\frac{p^2\delta^2}{2} \right) - 1 \right] \right\} \quad (2.29)$$

ce qui permet d'obtenir le résultat.

2.4.3 Loi jointe des rendements

On s'intéresse maintenant au rendement logarithmique $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$ de cet actif sur $[t, t+h]$, pour $h \geq 1$.

$$\begin{aligned} \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t+h) + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} U_i\right)}{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right)} \\ \iff \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \frac{\exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_{t+h} + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} U_i\right)}{\exp\left(\sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right)} \\ \iff \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_{t+h} - \sigma B_t + \sum_{i=1}^{N_{t+h}} U_i - \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) \\ \iff \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma(B_{t+h} - B_t) + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} U_i\right) \\ \iff \frac{S_{t+h}}{S_t} &= \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)h + \sigma B_h + \sum_{i=N_{t+1}}^{N_{t+h}} U_i\right) \end{aligned}$$

Nous constatons dans cette dernière expression que la loi du rendement entre t et $t+h$ ne dépend pas de t mais seulement de h , l'amplitude de l'intervalle. Par la suite et par souci de simplification, nous noterons $r(h)$ le rendement entre t et $t+h$.

Nous déduisons que, si l'on dispose de n observations des cours équiréparties aux instants $t_j = jT/n$ sur un intervalle $[0, T]$, les variables $x_j = x(t_j) = \ln(S(t_j)/S(t_{j-1}))$ sont telles que :

$$x_j = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{n} + \sigma \left[B\left(\frac{jT}{n}\right) - B\left(\frac{(j-1)T}{n}\right) \right] + \sum_{i=1}^{N_{jT/n}} U_i - \sum_{i=1}^{N_{(j-1)T/n}} U_i \quad (2.30)$$

Cela prouve que les variables aléatoires x_1, \dots, x_n sont indépendantes et identiquement distribuées. En d'autres termes les rendements sur des intervalles disjoints sont indépendants, et la distribution du rendement dépend de la longueur de l'intervalle mais pas de sa position. Au prix d'un changement d'échelle, nous pouvons donc toujours supposer que le pas de la subdivision est égal à un ($\frac{T}{n} = 1$); nous sommes ainsi ramené à déterminer la loi de $R_t = \ln(S_t/S_{t-1})$, qui est indépendante de t .

L'expression de la densité du rendement R sur une période d'amplitude h s'écrit (**Annexe**) :

$$f_R(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 + n\delta^2}} \exp \left(-\frac{\left(x - \mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)^2}{2(\sigma^2 + n\delta^2)} \right) \right] \quad (2.31)$$

2.4.4 Estimation des paramètres

Une fois le modèle d'évaluation établi, il convient d'estimer ses paramètres. Ainsi, nous proposons dans un premier lieu d'exposer les différentes méthodes d'estimation retenues à savoir : la méthode des moments et la méthode des temps de passage, puis nous présentons un algorithme stochastique pour les applications numériques.

Méthode des moments

Notre modèle est décrit par quatre paramètres $\mu, \sigma, \lambda, \delta$, nous allons calculer les estimateurs par la méthode des moments. L'idée repose sur l'égalisation de quatre moments empiriques avec les moments théoriques correspondants conduit un à système de quatre équations à quatre inconnues qui va nous permettre d'en déterminer des estimateurs [1], [11]. Compte tenu de la forme de la loi du rendement, nous intéressons aux moments centrés, si $m = E(R) = \mu - \frac{\sigma^2}{2}$, nous allons donc calculer $m_k = E \left[(R - m)^k \right]$. Aussi pour une raison de symétrie des variables aléatoires contenus dans l'expression de R , les moments centrés d'ordre impair de R sont nuls. Il ne nous reste plus qu'à déterminer ces moments centrés d'ordre pair soit $E \left[(R - m)^{2k} \right]$ pour tout k entier.

$$E \left[(R - m)^{2k} \right] = \frac{(2k)!}{2^k k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n \exp(-\lambda)}{n!} (\sigma^2 + n\delta^2)^{2k} \quad (2.32)$$

Pour paramétrer le modèle nous utilisons donc le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} E(R) &= \mu - \frac{\sigma^2}{2} \\ E[(R - E(R))^2] &= \sigma^2 + \lambda\delta^2 \\ E[(R - E(R))^4] &= 3e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\delta^2)^2 = 3 \left((\sigma^2 + \lambda\delta^2)^2 + \lambda\delta^4 \right) \\ E[(R - E(R))^6] &= 15e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (\sigma^2 + n\delta^2)^3 = 15 \left((\sigma^2 + \lambda\delta^2)^3 + 3\lambda\delta^4 (\sigma^2 + \lambda\delta^2 + \delta^2) \right) \end{aligned}$$

Méthode 2 : Généralisation des temps de passage

C'est la méthode qui a été exposé dans la première section ([31], [40], [42], [69]). Mais dans cette section, nous utilisons cette méthode pour estimer les deux paramètres μ et σ^2 pour le modèle de Merton (formules (2.11), (2.12)).

2.4.5 La condition de risque-neutre

Nous supposons que le processus des prix suit le modèle de Merton sous la probabilité risque-neutre Q . La condition de risque neutre ([57], [65]) réduit de

$$E_Q S(t) = S(0) e^{rt}$$

où r est le taux d'intérêt sans risque. Selon le modèle Merton

$$\begin{aligned} S(t) &= S(0) \times \exp((\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B(t) + \sum_{i=1}^{N_t} U_i) \\ &= S(0) e^{(\mu - \sigma^2/2)t} \times e^{\sigma B(t)} \times e^{\sum_{i=1}^{N_t} U_i} \end{aligned}$$

Comme les trois facteurs sont indépendants,

$$E_Q S(t) = S_0 E_Q e^{(\mu - \sigma^2/2)t} E_Q e^{\sigma B(t)} E_Q e^{\sum_{i=1}^{N_t} U_i}$$

Le premier facteur est déterministe :

$$E_Q e^{(\mu - (\sigma^2/2))t} = e^{(\mu - (\sigma^2/2))t}$$

Le deuxième facteur est l'espérance d'un variable aléatoire log-normale, comme dans le modèle BS :

$$E_Q e^{\sigma B(t)} = e^{(\sigma^2/2)t}$$

Le troisième terme :

$$E_Q \exp \left(\sum_{i=1}^{N_t} U_i \right) = \sum_{n=0}^{\infty} E_Q \left[1_{\{N(t)=n\}} e^{\sum_{i=1}^n U_i} \right] \quad (2.33)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} Q(N(t) = n) E_Q \left[e^{\sum_{i=1}^n U_i} \right] \quad (2.34)$$

avec

$$Q(N(t) = n) = e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

Maintenant, nous calculons chaque terme de la somme séparément :

$$E_Q e^{(U_1 + \dots + U_n)} = E_Q (e^{U_1} \dots e^{U_n}) + E_Q e^{U_1} \dots E_Q e^{U_n}.$$

Mais U_1, \dots, U_n sont des variables aléatoires normales avec des paramètres (α, δ^2) , donc e^{U_1}, \dots, e^{U_n} sont log-normales avec les mêmes paramètres, et

$$E_Q e^{U_1} = e^{\alpha + \delta^2/2}$$

Nous obtenons

$$E_Q e^{\sum_{i=1}^n U_i} = e^{(\alpha + \delta^2/2)n},$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} E_Q e^{\sum_{i=1}^{N_t} U_i} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{(\alpha + \delta^2/2)n} \frac{(\lambda t)^n \exp(-\lambda t)}{n!} \\ &= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \left[e^{(\alpha + \delta^2/2)} \frac{(\lambda t)}{n!} \right]^n \\ &= \exp \left[t \left(-\lambda + \lambda e^{\alpha + \delta^2/2} \right) \right] = \exp \left[t \left(\lambda \left(e^{\alpha + \delta^2/2} - 1 \right) \right) \right]. \end{aligned}$$

Avec tous ces calculs, la condition neutre au risque est

$$\exp(rt) = \exp \left[t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) + \frac{\sigma^2}{t} + \lambda \left(e^{\alpha + \delta^2/2} - 1 \right) \right]$$

après la prise de logarithmes, en divisant par t, et en notant $k = e^{\alpha + \delta^2/2} - 1$, ce qui donne

$$\mu = r - \lambda k$$

Nous remarquons que, si $\lambda = 0$, ce qui signifie que nous n'avons pas de sauts, nous retrouvons la condition de risque neutre de Black-Scholes : $r = \mu$.

2.4.6 Prix d'option pour diffusion avec sauts

Nous allons nous placer dans le monde risque neutre ; le modèle avec sauts de Merton [57], est

$$S(t) = S(0) \times \exp\left(\left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B(t) + \sum_{i=1}^{N_t} U_i\right) \quad (2.35)$$

- r est le taux d'intérêt sans risque,
- λ est le nombre moyen de sauts dans une année,
- σ représente l'écart type de la composante gaussienne
- $B(t)$ est un processus de Wiener
- $N(t)$ est un processus de Poisson de paramètre λ ,
- U_i est le saut du prix .
- $k = e^{\alpha + \delta^2/2} - 1$

Avec la technique de conditionnement, Merton obtient le prix d'une option d'achat européen dans le cadre du modèle de diffusion de saut de maturité T et de prix d'exercice K . Nous considérons le prix en fonction du nombre de sauts dans $[0, T]$.

Si nous avons n sauts dans $[0, T]$, sous la condition neutre au risque (c'est à dire avec $(\alpha = r - \lambda k)$), le prix est donnée par

$$\frac{S_n(T)}{S(0)} = \exp\left[\left(r - \lambda k - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma B(T) + U_1, \dots, U_n\right]$$

Comme $B(T)$ et les sauts U_i sont indépendant, nous avons

$$\sigma B(T) + U_1, \dots, U_n \rightsquigarrow N(n\alpha, \sigma^2 T + n\delta^2).$$

Le calcul du prix de l'option sous Q , est

$$C_J = e^{-rT} E_Q (S_n(T) - K)^+ \quad (2.36)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-\lambda+r)T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} E_Q (S_n(T) - K)^+ \quad (2.37)$$

Merton propose la relation entre ce prix et le prix du modèle de Black-Scholes (BS), il définit

$$\sigma_n^2 = \sigma^2 + \frac{n}{T} \delta^2 \quad (2.38)$$

$$r_n = r - \lambda k + \frac{n}{T} \left(\alpha + \frac{\delta^2}{2}\right) \quad (2.39)$$

et, après quelques transformations, nous obtenons que

$$C_J = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda' T} \frac{(\lambda' T)^n}{n!} BS(S, K, T, r_n, \sigma_n)$$

où r_n et σ_n sont donnés ci-dessus, et $\lambda' = \lambda(1+k) = e^{\alpha+\delta^2/2}$

Le prix d'une option d'achat dans le modèle de diffusion de saut est un mélange de prix de BS d'options d'achat, chacun avec taux et volatilité différente, et le coefficient de mélange est lié à la probabilité d'avoir n sauts.

Chapitre 3

Algorithmes stochastiques et Application sur des données réelles de l'or

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter des applications numériques sur des données réelles du cours de l'action de l'or, pour deux modèles d'évaluations, modèle de Black-Scholes et modèle à sauts de Merton.

D'autre part dans ce chapitre, nous avons proposé des algorithmes stochastiques pour chaque méthode d'estimation. Ce chapitre comporte deux applications.

La première est consacrée au modèle de Black-Scholes ; nous présentons, dans un premier temps, les propriétés des séries de rendement logarithmique de l'action de l'or, avec la vérification de la normalité et l'indépendance. Nous présentons, dans un second temps, les résultats empiriques aux différentes méthodes d'estimations des paramètres de processus Brownien géométrique (PTP, GTP et Volatilité comme EDS), les simulations et les prévisions pour chaque méthode.

La deuxième application de ce chapitre est consacrée au modèle à sauts de Merton. Pour la partie de l'estimation, nous présentons deux méthodes d'estimation, nous commençons par la méthode des moments, en suite la généralisation de la méthode des temps de passage.

3.2 Modèle de Black-Scholes

3.2.1 Observations

Pour les applications numériques, nous disposons de 189 observations journalières de cours de l'action de l'or pour la période du 02 avril 2007 au 31 décembre 2007 (US\$ by once in London Bullion Market), dont l'évolution du cours est représentée sur la figure (3.1).

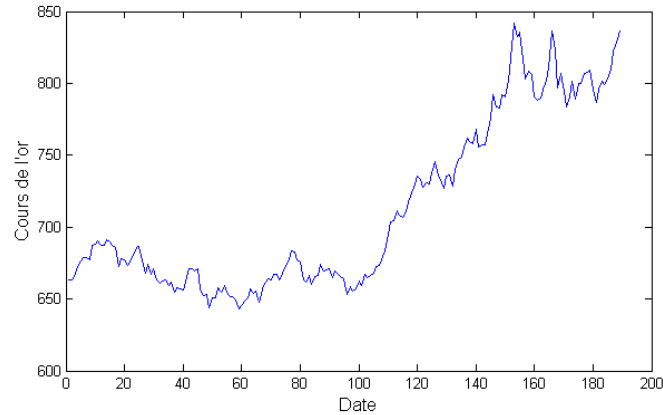


FIG. 3.1 – Evolution de cours de l'action de l'or pour modèle de Black-Scholes.

A partir de ces données, nous calculons les rendements $R_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ pour $i = 1, \dots, n$. Le rendement journalière évolue de la manière suivante :

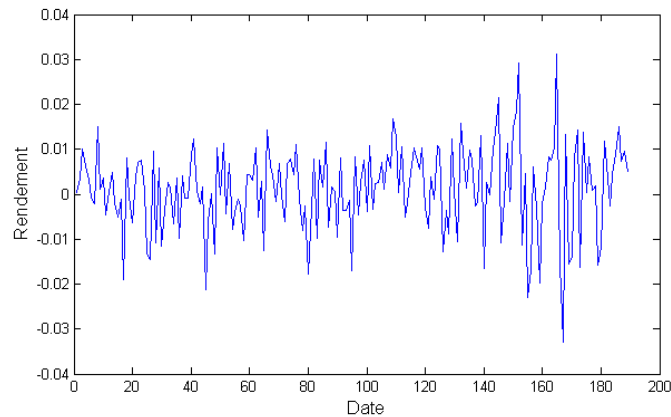


FIG. 3.2 – Evolution de rendement journalière pour modèle Black-Scholes.

En se basant sur certains critères pour choisir la meilleure méthode, notamment le critère qui minimise les $RMSE$, $\%RMSE$ et ERM .

3.2.2 Statistiques descriptives

Le cours moyen du titre précédent est de 712.1557 \$, pour un écart-type de 59.3030 \$. Le rendement moyen du titre est de 0.001323, pour un écart-type de 0.009885 pour la période étudiée.

3.2.3 Tests statistiques des séries de rendement :

Une contrainte très importante du modèle de Black-Scholes est que les rendements, sont indépendants et de même loi gaussienne. Nous pouvons tester ces hypothèses.

1. **Indépendance :** D'après les corrélogrammes, tous les pics sont à l'intérieur de la bande de confiance, donc les rendements sont indépendants.

Test de Box Ljung

$|Q| = 24.552 < \chi_{24} = 36.4$, on accepte l'hypothèse d'indépendance du rendement.

2. **La normalité :**

Test Jarque Bera

Pour $\alpha = 5\%$, nous avons $JB = 5.5975 \leq \chi_2^2 = 5.99$, nous acceptons l'hypothèse de normalité du rendement du titre.

Les estimations de μ et σ par la méthode historique, dépendent seulement de n observations des rendements (r_1, \dots, r_n) , et sont données par :

$$\begin{aligned}\hat{m} &= \hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i = \bar{r} \Rightarrow \hat{\mu} = \bar{r} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 = 0.001371 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \hat{m})^2 = s^2 = 0.977 \times 10^{-4}.\end{aligned}$$

3.2.4 Estimation des paramètres : Modèles de Black-Scholes

Comme nous l'avons mentionné dans le chapitre 2, les deux méthodes d'estimation (PTP et GTP) considèrent plusieurs trajectoires. Or en finance, la trajectoire considérée est unique. La première étape du procédé d'adaptation consiste donc à construire plusieurs trajectoires à partir d'une seule.

Méthode 1 : Méthode via le temps de premier passage

Algorithme 1 : Méthode via le temps de premier passage

1. Nous testons les hypothèses de rendement logarithmique, la normalité et l'indépendance.
2. Nous considérons k trajectoires indépendantes ayant chacune n_i observations ($i = 1, \dots, k$). Nous supposons qu'elles partent toutes du même point initial x_0 c'est-à-dire que $x_0 = x_{1,1} = \dots = x_{i,1}$.
3. Nous estimons le taux de rendement instantané $m = (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)$ à partir des données historiques (formules (2.1) et (2.2)) pour donner une idée sur la position de la borne S .
 - lorsque $m > 0$, nous prenons dans ce cas, une barrière S au dessus de x_0 , ($S > x_0$).
 - lorsque $m < 0$, nous choisissons S au dessous de x_0 ($S < x_0$).
4. Nous choisissons une borne constante S d'une manière aléatoire par simulation de la loi uniforme sur l'intervalle $[\max_{1 \leq i \leq k} \min_{1 \leq j \leq n_i} x_{ij}; \min_{1 \leq i \leq k} \max_{1 \leq j \leq n_i} x_{ij}]$, ($i = 1, \dots, k; j = 1, \dots, n_i$).
5. Nous vérifions, par le choix de la valeur de S , que cette borne est bien atteinte par toutes les trajectoires éventuelles. En d'autres termes, les premiers temps de passage par S de chacune de ces trajectoires doivent être finis.
6. Nous estimons les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ par les deux formules (2.4) et (2.5).
7. Nous simulons le processus de diffusion Brownien géométrique.
8. Nous étudions les erreurs de la simulation avec les vraies valeurs de cours de l'action. Pour choisir le meilleur résultat, nous utilisons le critère qui minimise les valeurs des $RMSE$, $\%RMSE$ et ERM .
9. Si nous n'avons pas trouvé de bons résultats (l'écart entre les erreurs de la simulation et les vraies valeurs est élevé), nous retournons à la 4ème étape pour choisir un autre S et nous appliquons la même procédure.

Résultats empiriques

Dans notre série, la valeur initiale $x_0 = 663.30$ qui partage la série de l'or en trois trajectoires ($k = 3$), aléatoirement nous avons trouvé une borne constante $S = 680$, tel que toutes les trajectoires sont atteintes par cette borne. Les estimateurs sont

$$\hat{\mu} = 3.9152 \times 10^{-4} \text{ et } \hat{\sigma}^2 = 1.60871 \times 10^{-5}$$

Méthode 2 : Généralisation de la méthode des temps de passage

Algorithme 2 : Généralisation de la méthode des temps de passage

Pour la généralisation de la méthode des temps de passage, nous appliquons les mêmes étapes de l'algorithme 1 sauf la 5ème étape. Afin d'estimer les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$, nous

prenons tous les temps de passage par la borne constante S , nous utilisons les formules (2.11) et (2.12).

Résultats empiriques

$x_0 = 663.30$, la borne constante $S = 683.49$, tel que toutes les trajectoires sont atteintes par cette borne. Nous prenons tous les points des temps de passage, nous trouvons :

$$\hat{\mu} = 6.8873 \times 10^{-4} \text{ et } \hat{\sigma}^2 = 1.7967 \times 10^{-5}$$

Méthode 3 : volatilité stochastique comme EDS

Algorithme 3 : volatilité stochastique comme EDS

1. Nous estimons les deux paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ par la méthode historique, nous utilisons les formules (2.1), (2.2).
2. Nous estimons maintenant les deux paramètres de la volatilité stochastique D et q , en utilisant les formules (2.20), (2.21).
3. Nous simulons un vecteur de valeurs de la volatilité stochastique EDS .
4. Nous injectons la volatilité stochastique comme EDS dans le processus de diffusion Brownien géométrique pour simuler le prix de l'action S_t et pour déterminer les prévisions.
5. Nous comparons les vraies valeurs de l'action avec les valeurs simulées avec la volatilité EDS , par le calcul des $RMSE$, $\%RMSE$ et ERM .

Résultats empiriques

Les résultats de l'estimation :

$$\hat{D} = 9.0190 \times 10^{-4} \text{ et } \hat{q} = 0.0059.$$

3.2.5 Simulation

Nous prenons les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ estimés par les quatre méthodes pour faire la simulation du modèle de Black-Scholes. Le graphe des simulations et vraies valeurs pour le cours de l'action de l'or est représenté dans la figure suivante :

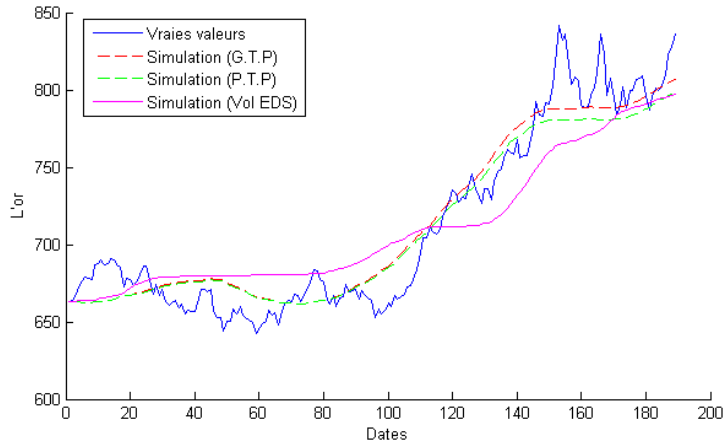


FIG. 3.3 – Comparaison des simulations pour les trois méthodes avec les vraies valeurs.

Les résultats numériques des quatre méthodes sont illustrés dans le tableau suivant :

	RMSE	%RMSE	ERM(%)
Méthode 1	17.7905	0.0242	1.9550
Méthode 2	16.768	0.0237	1.9473
Méthode 3	25.4408	0.0350	3.0157

Tableau 3.1 : Les valeurs des erreurs de la simulation pour les 3 méthodes.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que la méthode 2 donne de meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes (1 et 3), ceci au vu des valeurs du $RMSE$, $\%RMSE$ et ERM .

3.2.6 Prévision

La période de prévision est de 15 jours. L'analyse des prévisions de la deuxième méthode, nous indique, des résultats meilleurs que les autres méthodes (voir le graphe des erreurs de la prévision pour chaque méthode).

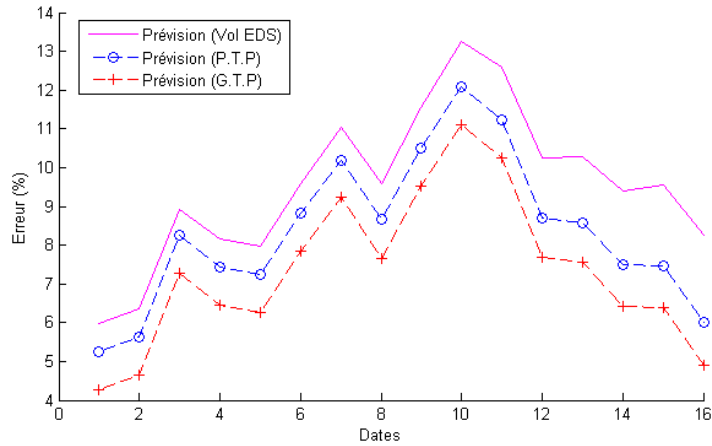


FIG. 3.4 – Erreur de prévision en fonction du temps pour les trois méthodes.

Nous considérons les valeurs des erreurs de la prévision pour chacune des 3 méthodes. Ces valeurs sont résumées dans le tableau 3.

	ERM(%)	Errors max(%)
Méthode 1	8.3488	12
Méthode 2	6.4887	10.5
Méthode 3	9.5426	13

Tableau 3.2 : Les valeurs des erreurs de la prévision pour les 4 méthodes.

L'analyse des prévisions de chacune des 3 méthodes nous indique, à première vue que l'erreur moyenne relative (ERM) est égale à 8.3488% dans la méthode 1 et (ERM) est égale à 9.5426% dans la méthode 3. Les graphes des erreurs relatives de la prévision nous révèlent que cette erreur ne dépasse pas 12% et la méthode 2 donne la valeur de l'erreur relative, la plus faible ($ERM = 6.4887%$) et $Emax$ ne dépasse pas 10.5%. Donc la méthode 2 donne de meilleurs résultats.

3.3 Modèles de Merton

3.3.1 Observations

Pour les applications numériques, nous utilisons des observations journalières de cours de l'action de l'or. Nous disposons 212 d'observations journalières des cours pour la période du 02 janvier 2007 au 31 octobre 2007 (US\$ by once in London Bullion Market), dont l'évolution du cours est représentée sur la figure (3.5).

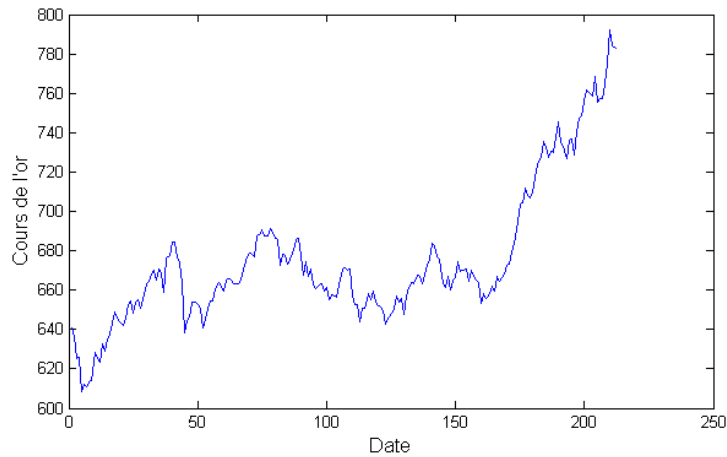


FIG. 3.5 – Evolution de cours de l'action de l'or pour modèle à sauts de Merton

Nous recalculons le rendement journalière de la manière suivante : $R_i = \ln(S_i/S_{i-1})$ pour $i = 1, \dots, n$. Le rendement journalière évolue de la manière suivante :

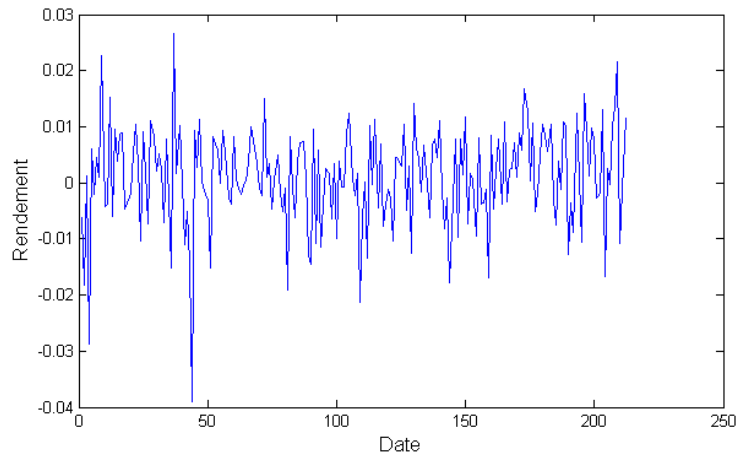


FIG. 3.6 – Evolution des rendements pour modèle de Merton

Vérifions, avant de continuer notre analyse, que les données ne sont pas gaussiennes. En effet, si tel est le cas, le modèle à sauts n'aurait pas lieu d'être, le modèle de Black-Scholes serait suffisamment robuste. Le test de normalité de Jarque Bera donne une P -valeur égale à $JB = 46.0063 > \chi_2^2 = 5.99$ pour $\alpha = 5\%$. Cela conduit à rejeter l'hypothèse nulle c'est-à-dire la loi du rendement ne peut être une loi normale.

3.3.2 Statistiques descriptives

Le cours moyen du titre précédent est de 675.1233 \$, pour un écart-type de 35.6991 \$. Le rendement moyen du titre est de 0.000999, pour un écart-type de 0.0088443 pour la période étudiée.

Les estimations de μ et σ par la méthode historique, dépendent seulement de n observations des rendements (r_1, \dots, r_n) , et sont données par :

$$\hat{\mu} = \bar{r} + \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2 = 0.0010387 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (r_i - \bar{r})^2 = s^2 = 0.7822 \times 10^{-4}.$$

3.3.3 Estimation des paramètres

Méthode des moments

Algorithme 4 : Méthode des moments

1. Représenter graphiquement la série réelle de cours de l'action et vérifier que nous pouvons voir des sauts.
2. Tester les hypothèses de rendement logarithmique, de la normalité et de l'indépendance.
3. Calculer les valeurs de la moyenne, de la variance et des moments centrés d'ordre 4 et 6 de rendement logarithmique pour trouver les résultats empiriques.
4. Estimer les quatre paramètres de modèle à sauts de Merton par l'égalisation de quatre moments empiriques avec les moments théoriques correspondants qui conduisent à un système de quatre équations à quatre inconnues qui va nous permettre d'en déterminer des estimateurs $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2, \hat{\lambda}, \hat{\delta}^2)$.
5. Simuler maintenant le processus de diffusion à sauts de Merton, avec les estimateurs trouvés. Ensuite nous utilisons ces estimateurs pour faire des prévisions.
6. Calculer les erreurs de la simulation (respectivement de la prévision) avec les vraies valeurs de cours de l'action.

Résultats empiriques

La paramétrisation selon le modèle de Merton, résolvant le système d'équations précédent

par la méthode des moments, donne les résultats suivants :

$$\hat{\mu} = 1.0288 \times 10^{-3}, \hat{\sigma}^2 = 4.8731 \times 10^{-5}, \hat{\lambda} = 0.244, \hat{\delta}^2 = 1.2361 \times 10^{-4}.$$

Généralisation de la méthode des temps de passage

Algorithme 5 : *Généralisation de la méthode des temps de passage*

1. Nous appliquons les même étapes de l'algorithme 1, l'étape 1, 2, 3 et 4.
2. Nous estimons les deux paramètres λ et δ par la méthode des moments.
3. Nous estimons les paramètres μ et σ^2 par les deux formules (2.11) et (2.12).
4. Nous simulons maintenant le processus de diffusion à sauts de Merton.
5. Nous étudions les erreurs de la simulation (ou de prevision) avec les vraies valeurs du cours de l'action. Pour choisir les meilleurs résultats, nous utilisons le critère qui minimise les valeurs de *RMSE*, *%RMSE* et *ERM*.
6. Si nous n'avons pas trouvé de bons résultats (l'écart entre les erreurs de la simulation et les vrais valeurs est élevé) nous retournons à la 4ème étape de l'algorithme 1 pour choisir une autre borne S et nous appliquons la même procédure.

Résultats empiriques

A partir de la trajectoire unique de cours de l'action de l'or, nous construisons plusieurs petites trajectoires successives. Nous choisissons un point initial $x_o = 608.4$, commun à toutes les trajectoires. Il partage la série de l'or en deux trajectoires ($k = 2$) et aléatoirement nous avons trouvé une borne constante $S = 640.75$, telle que toutes les trajectoires sont atteintes par cette borne. Nous prendrons tous les points des temps de passage. nous avons quatre ($n = 4$), nous trouvons :

$$\hat{\mu} = 0.0021 \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = 6.5117 \times 10^{-4}.$$

3.3.4 Simulation

Nous prenons les paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ estimées par les deux méthodes pour faire la simulation de modèle de Merton. En ce qui concerne les autres paramètres λ et δ , Nous prenons les valeurs estimées par la première méthode. Les graphes des simulations et vraies valeurs de l'or sont représenté dans la figure suivante :

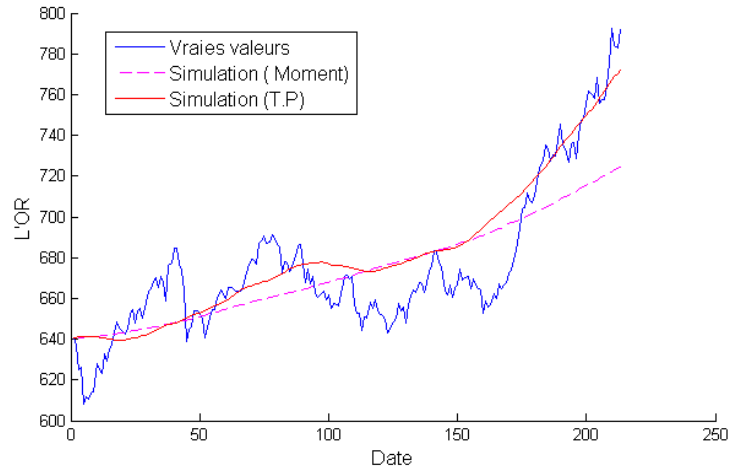


FIG. 3.7 – Simulations pour les deux méthodes avec les vraies valeurs.

Les résultats numériques des deux méthodes sont illustrés dans le tableau suivant :

	RMSE	% RMSE	ERM(%)
Méthode des moments	22.891	0.0327	2.743
Méthode généralisation des temps de passage.	17.959	0.0271	2.171

Tableau 3.3 : Les valeurs des erreurs de la simulation pour les 2 méthodes.

D'après les résultats obtenus, nous constatons que l'utilisation des paramètres $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ estimés par la méthode de généralisation des temps de passage donnent des bons résultats par rapport à l'utilisation $\hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}^2$ estimés par la méthode des moments en comparaison des valeurs des $RMSE$, $\%RMSE$ et ERM .

3.3.5 Prévision

La période de prévision est de 10 jours, l'analyse des prévisions de la deuxième méthode, nous indique des résultats meilleurs que la méthode des moments. Les graphes des erreurs relatives de la prévision nous révèlent que cette erreur ne dépasse pas 7% et l'erreur moyenne relatives (ERM) égale à 2.751% dans la méthode 2 et l'erreur moyenne relative dans la première méthode égale a 10.836% (fig 3.8).

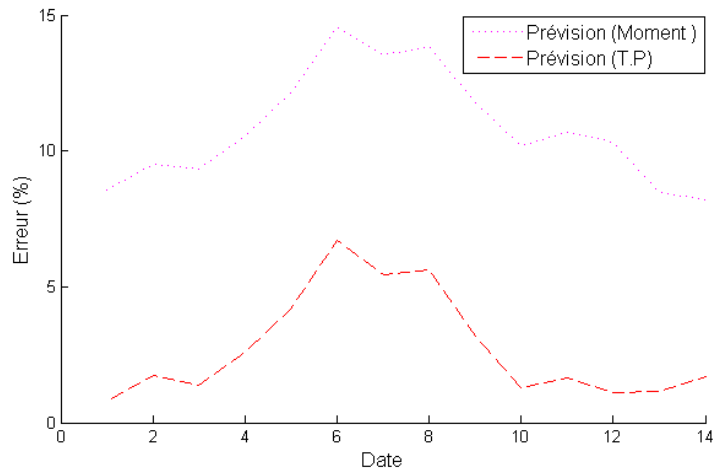


FIG. 3.8 – Erreur de prévision en fonction du temps pour modèle de Merton.

La conclusion porte sur la comparaison des résultats obtenus par les deux méthodes pour l'estimation des paramètres de modèle de Merton. Nous remarquons que les estimations avec la méthode de généralisation des temps de passage donnent de meilleurs résultats que la méthode des moments.

Conclusion

Cette thèse présente une nouvelle méthode d'estimation des paramètres pour les modèles d'évaluation d'options que sont le modèle de Black-Scholes et le modèle à sauts de Merton.

Tout d'abord, nous avons présenté quelques concepts de la théorie des marchés financiers et la formule d'évaluation de l'option d'achat européenne de Black-Scholes. Puis nous nous sommes intéressés au problème d'estimation des paramètres des équations différentielles stochastiques (EDS). Dans un premier temps, nous avons considéré le modèle d'évaluation de Black-Scholes qui est largement utilisé par les professionnels. Toutefois l'estimation des paramètres nous a permis de considérer d'autres techniques plus adaptées à ce problème. Dans ce cadre, la détermination de la volatilité est essentielle. C'est-à-dire l'estimation la plus précise possible de ce paramètre, nous permet d'obtenir un meilleur modèle d'évaluation d'une option. Dans le modèle de Black-Scholes la volatilité du sous-jacent est supposée constante alors que les études empiriques montrent que celle-ci est variable donc stochastique. Ceci nous incite donc à utiliser un processus pour la volatilité : la volatilité comme EDS.

Dans un second temps, nous avons considéré le cas où l'évolution des actifs financiers est décrite par des modèles à sauts. Nous considérons dans notre travail le modèle de Merton.

Cette thèse comporte deux applications empiriques indépendantes : la première est consacrée au modèle de Black-Scholes. Nous considérons l'estimation par trois méthodes différentes. La première méthode considère le temps du premier passage par une borne donnée (PTP) ; que nous améliorons en généralisant à tous les temps de passage par cette borne (GTP). Dans ces deux méthodes, la volatilité est considérée comme constante. Dans la troisième méthode nous considérons la volatilité comme étant un paramètre stochastique. Pour les applications (estimation, simulation et prévisions), nous avons formulé des algorithmes stochastiques pour chaque méthode sur les données journalières de cours de l'action de l'or du 02 avril 2007 au 31 décembre 2007. Nous avons montré à travers cette application, que la méthode de généralisation des temps de passage donne de meilleurs résultats par rapport aux autres méthodes. Ce résultat fait l'objet de la première publica-

tion intitulée : First Passage Time Method Generalization for the Estimation of Stochastic Differential Equation Parameters.

La deuxième application concerne le modèle à sauts de Merton dans lequel les séries de rendement financier sont distribuées selon une loi non normale et les trajectoires de ce processus sont discontinues. D'après les résultats de la première application, la méthode de généralisation des temps de passage (GTP) donne de meilleurs résultats par rapport à la méthode PTP. Alors, nous préférons l'appliquer sur le modèle de Merton. Nous avons appliqué donc deux méthodes d'estimation pour ce modèle. La première méthode est la méthode de généralisation des temps de passage et la deuxième méthode c'est la méthode des moments. Comme première application, nous avons formulé des algorithmes stochastiques pour chaque méthode en passant par l'estimation des paramètres, les simulations et les prévisions sur des données journalières de cours de l'action de l'or du 02 janvier 2007 au 31 octobre 2007. Les résultats obtenus montrent que la méthode de généralisation des temps de passage offre de meilleurs résultats par rapport à la méthode des moments. Ce résultat fait l'objet de la deuxième publication intitulée : Comparison of Jump-Diffusion Parameters Using Passage Times Estimation.

Notre travail a montré que la méthode GTP donne de meilleur résultat dans les deux modèles d'évaluation des options. Toutefois dans ces deux cas, le modèle de Black-Scholes et le modèle de Merton la distribution des sauts est symétriques. Une extension de notre travail est le peut être orienté vers la distribution de sauts asymétrique. Plus particulièrement le cas de la distribution double exponentielle pourrait donner des résultats conclus sur ce modèle de Kou.

Annexe

Loi du rendement du modèle à sauts

D'après le théorème des probabilités totales :

$$P(R = x) = \sum_n P(R = x | (N_s = n))$$

Deux cas se présentent alors :

$$P(R = x) = P(R = x | N_s = 0) \times P(N_s = 0) + P(R = x | N_s \geq 1) \times P(N_s \geq 1)$$

Nous notons : $A = P(R = x | N_s = 0) \times P(N_s = 0)$ le cas où il n'y a pas de saut entre t et $t + s$.

$B = P(R = x | N_s \geq 1) \times P(N_s \geq 1)$ le cas où il se produit au moins un saut (à la hausse ou à la baisse) sur la période $[t, t + s]$. Donc $B = \sum_{n=1}^{\infty} P(R = x | N_s = n) \times P(N_s = n)$

Ainsi, grâce aux densités conditionnelles, on trouve la loi de $R(s)$:

$$f_R(x) = f_{R|0}(x) \times P(N_s = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} f_{R|n}(x) \times P(N_s = n)$$

Nous allons maintenant déterminer les lois conditionnelles du rendement connaissant le nombre de sauts afin d'en expliciter la loi.

Cas 1 : $n = 0$

$$\begin{aligned} R_0(t, t + s) &= (\mu - \sigma^2/2) s + \sigma B(s) \rightarrow N((\mu - \sigma^2/2) s, \sigma^2 s) \\ \Rightarrow f_{R|0}(x) &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi s}} \times \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2 s} \times (x - (\mu - s\sigma^2/2))^2\right) \end{aligned}$$

Cas 2 : $n \geq 1$

$$R_0(t, t + s) = (\mu - \sigma^2/2) s + \sigma B(s) \sum_{n=1}^n U_i$$

$$U_i \rightarrow N(0, \delta^2) \Rightarrow \sum_{n=1}^n U_i \rightarrow N(0, n\delta^2)$$

$$R_n^s \rightarrow N((\mu - \sigma^2/2)s, \sigma^2 s + n\delta^2)$$

$$\Rightarrow f_{R|n}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 s + n\delta^2}} \times \exp\left[-\frac{(x - \mu + \sigma^2/2)s^2}{2(\sigma^2 s + n\delta^2)}\right]$$

Pour écrire la densité de $r(s)$, il faut aussi détailler les paramètres de Poisson. N_s est de paramètre λ d'où $P(N_s = n) = \exp(-\lambda) \frac{\lambda^n}{n!}$

Finalement sur une période :

$$f_R(x) = \exp(-\lambda) \times f_{R|0}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-\lambda) \times f_{R|n}(x)$$

$$\Rightarrow f_R(x) = \frac{\exp(-\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{\lambda^n}{n! \sqrt{\sigma^2 s + n\delta^2}} \exp\left(-\frac{(x - \mu + (\sigma^2/2)s)^2}{2(\sigma^2 s + n\delta^2)}\right) \right]$$

Bibliographie

- [1] Askari H, Krichene N, (2008), Oil price dynamics (2002 – 2006). *Journal of Energy Economics*, 30, pp. 2134 – 2153.
- [2] Bachelier L, (1900), Théorie de la Spéculation, *Annales Scientifiques de l’Ecole Normale Supérieure*, 17, pp. 21 – 86.
- [3] Bandi F.M, Nguyen T.H, (2003), On the functional estimation of jump-diffusion models, *Journal of Econometrics*, vol. 116, no.1 – 2, pp. 293 – 328.
- [4] Bates, (1996), Jumps and stochastic volatility : the exchange rate processes implicit in Deutschemark options, pp. 69 – 107.
- [5] Beckers S, (1981), A note on estimating the parameters of the diffusion-jump model of stock returns, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, vol. 16, no. 1, pp. 127 – 140.
- [6] Bellamy N. (1999), Evaluation et couverture dans un marché dirigé par des processus discontinus. Thèse de doctorat, Université d’Evry.
- [7] Black F, Scholes M, (1973), The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy* 81 N°3, pp. 637 – 654.
- [8] Bogdan N, (2001), Evaluation des options par la transformée de Fourier. EAM-ESA 8059 du CNRS-Université of Paris, pp. 1 – 25
- [9] Boni E, Genot B, Momein A, (2005), Un modèle statistique de détection des sauts dans un processus de cours boursiers. Mémoire de groupe de travail, ISFA.
- [10] Bourbonnais R, Terraza M, (1998), Analyse des séries Temporelles en économie. Presses universitaires de France, pp. 1 – 280.
- [11] Cherif R, (2009), Tarification d’options et ajustement dans un modèle avec sauts. Mémoire présenté à HEC Montréal.
- [12] Chhikara RS, Folks JL ,(1988), The inverse gaussian distribution. *Theory, Methodology and Applications*, Statistics 95, Marcel Dekker Inc, p. 232.
- [13] Cont R,(2001), Empirical proprieties of asset returns : stylized facts and statistical issues, *Quantitative Finance*, 1, pp. 223 – 236.

-
- [14] Cox J.C, Ross S.A, (1976), The valuation of option for alternative stochastic processes. *Journal of financial economics* vol 3. pp. 145 – 166.
- [15] Dritschel M, Protter P, (1999), Complete markets with discontinuous security price. *Finance Stoch*, pp.203 – 214.
- [16] Ekström E, Tysk J. (2010), The Black-Scholes equation in stochastic volatility models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, pp. 498 – 507.
- [17] El Karoui N, (2003), Couverture des risques financiers, Notes de cours, DEA Paris 6, pp. 1-267.
- [18] Fama E.F, (1965), The behavior of stock market price. *Journal of business*, vol. 38, no. 1, pp. 34 – 195.
- [19] Finnerty, J. E, (1978). The Chicago Board Options Exchange and market efficiency. *Journal of finance and quantitative analysis*, 13(1), pp. 29 – 38.
- [20] Fouquque, Papanicolaou et Sicar, (200), *Derivatives in Financial Markets with Stochastic Volatility*. Cambridge University Press, pp.1 – 20.
- [21] Galai D, (1979), A Proposal for Indexes for Traded Call Options. *Journal of Finance*, pp.57 – 72.
- [22] Garman M, (1976), A general theory of asset valuation under diffusion state processes, working paper no. 50.University of California, Berkeley, CA).
- [23] Gesk R, (1979), The valuation of compound options. *Journal of Financial Economics*, pp.63 – 81.
- [24] Gross P, (2006), Parameter estimation for Black-Scholes equation. Final report URA-Spring, p. 42.
- [25] Heston S.L, (1993), A closed- form solution for options with stochastic volatility with applications to bond and currency options. *Review of Financial Studies* 6, pp. 327 – 343.
- [26] Huang Y.C, Chen S.C, (2002), Warrants pricing : Stochastic volatility vs. Black-Scholes. *Pacific-Basin Finance Journal* 10,pp. 393 – 409.
- [27] Hull J, White A, (1987), The pricing of options with stochastic volatilities. *Journal of Finance* 42, pp. 281 – 300.
- [28] Hull J, White A. (1988), An Analysis of the Bias in option pricing caused by a stochastic volatility, *Advances in Futures and Option Research*, 3. pp. 29 – 61.
- [29] Hull J C, (1999) , *Options, Futures & Other Derivatives*, Prentice-Hall, 4ème édition.
- [30] Hobson D.G, Rogers L.C.G. (1998), Complete Models with Stochastic Volatility”, *Mathematical Finance*, 8(1), pp. 27 – 48.

-
- [31] Janssen J, Saib M, Khamis T. (1996), Techniques d'Estimation pour le Modèle de Black et Scholes. [http : //www. actua ries. org / AFIR/ Colloquia/ Nuernberg/ Janssen_Saib_Taous](http://www.actuaries.org/AFIR/Colloquia/Nuernberg/Janssen_Saib-Taous), pp. 1247 – 1265.
- [32] Jarque C.M, Bera A. K, (1987), A test for normality of observations and regression residuals, *International Statistical Review*, vol. 55, no. 2, pp. 163 – 172.
- [33] Jeanblanc M, (2002), Cours de Calcul Stochastique, DESS IM EVRY Option Finance, pp. 1 – 130.
- [34] Jerbi Y, (2006), Evaluation des options et gestion des risques financiers par les réseaux de neurones et par les modèles à volatilité stochastique. Thèse Université Paris 1, Sorbonne.[http : //hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/30/86/23/pdf/ Jerbi. pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/30/86/23/pdf/Jerbi.pdf).
- [35] Johnson H, Shanno D, (1981), Option pricing when the variance is changing. *The Journal on Financial and Quantitative Analysis*, vol 2 pp. 143 – 151.
- [36] Jondeau E, Poon S.H. and Rockinger M, (2007). *Financial Modeling Under Non-Gaussian Distributions*, Springer Finance, Springer Verlag, pp. 1 – 535.
- [37] Jorion P, (1988), On Jump Processes in the Foreign Exchange and Stock Markets, *Review of Financial Studies* 1(4), pp. 427 – 445.
- [38] Karatzas.I, Shreve S, (1988), *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Verlag. New York, pp. 1 – 470.
- [39] Khaldi K, Djeddour K and Meddahi S, (2014), First passage time method generalization for the estimation of stochastic differential equation parameters. *European Journal of Scientific Research*. Vol. 119, No. 3, pp. 489 – 496.
- [40] Khaldi K, Djeddour K and Meddahi S, (2014), Comparison of jump-diffusion parameters using passage times estimation. *Journal of Applied Mathematics*. Volume 2014, pp. 1 – 5.
- [41] Kou S.G, (2002) , A jump-diffusion model for option pricing, *Management Science*, vol. 48, no. 8, pp. 1086 – 1101.
- [42] Kou S.G, Wang H, (2003). First passage times of a jump diffusion process, *Advances in Applied Probability*, vol. 35, no. 2, pp. 504 – 531.
- [43] Lacaux C, (2008), *Méthodes probabilistes pour la simulation*. Ecole des Mines de Nancy - Département Génie Industriel-54 042 Nancy Cedex, pp. 1 – 65.
- [44] Lamberton D, Lapeyre B, (1991). *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, *Mathématiques et Applications* 9, Ellipses, pp. 1 – 185.
- [45] Latane H, Rendleman R. J, (1976), Standard Deviations of Stock Price Ratios Implied in Options Prices. *Journal of Finance*, pp.369 – 381.

- [46] Le Courtois O, Quttard-Pinonf F, (2007), Risk-Neutral and Actual Default Probabilities with an Endogenous Bankruptcy Jump-Diffusion Model, *Asia-Pacific Financial Markets* 13, pp. 11 – 39.
- [47] Lubrano M, (2011). Volatilité et risques financiers. Université Marseille.
- [48] Mandelbrot B, (1962), Sur certains prix spéculatifs : faits empiriques et modèle basé sur les processus stables additifs non gaussiens de Paul Lévy. *Comptes rendus l'Académie des sciences*, vol.254, pp. 3968 – 3970.
- [49] Mandelbrot. B, (1963), The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, vol.36, no. 4, pp. 394 – 419.
- [50] Mandelbrot. B, (1963), New methods in statistical economics, *Journal of Political Economy*, vol. 71, no. 5, pp. 421 – 440.
- [51] Matsuda K, (2004), Introduction to Merton Jump Diffusion MODEL, Working paper, The Graduate Center, The City University of New York, pp. 1 – 26.
- [52] Matsuda K, (2004), Introduction to Option Pricing with Fourier Transform : Option Pricing with Exponential Lévy Models, Working Paper, Graduate School and University Center of the City University of New York. pp. 1 – 248.
- [53] Mayhew S. (1995), Implied Volatility. *Financial Analyst Journal*, 51, pp. 8 – 20.
- [54] Merton R.C, (1976) , Option pricing when underlying stock returns are discontinuous,” *Journal of Financial Economics*, vol. 3, no.1-2, pp. 125 – 144.
- [55] Miniconi M, (2012), Petite introduction aux mathématiques des dérivés financiers, Université de Nice-Sophia-Antipolis, pp. 1 – 248.
- [56] Miri M, (2009), Développement stochastique et formules fermées de prix pour les options européennes. Thèse Institut polytechnique de Grenoble, pp. 1 – 223.
- [57] Mordecki E, CityU, HK, (2006), Diffusion with Jumps Modelling, pp. 1 – 37.
- [58] Musiela M, Rutkowski M, (1998), *Martingale Methods in Financial Modelling*, Springer-Verlag, New-York, pp. 1 – 42.
- [59] Norstad J, (2005), Black-Scholes the Easy Way. [http : //homepage.mac.com/j. norstad](http://homepage.mac.com/j.norstad), pp. 1 – 5.
- [60] Pelletier F, (2014), Modélisation des rendements financiers à l’aide de la distribution de Laplace asymétrique généralisée. Québec, Canada, pp. 1 – 137.
- [61] Pham H, (2006), Introduction aux Mathématique et Modèle stochastiques des marchés financières», Université Paris 7, laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, CNRS UMR 7599, pp. 1 – 115.

- [62] Planchet F, Therond P.E, (2005), L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance. Les cahiers de recherche de l'ISFA, pp. 1 – 23.
- [63] Planchet F, (2014), Modeles financiers et analyses de risque dynamiques en assurance, Support de cours (2013 – 2014). Version 3.9, pp. 1 – 45.
- [64] Press J, (1967), A compound events model for security prices, The Journal of Business, vol. 40, no. 3, pp. 317 – 335.
- [65] Privault N, (2011), Notes on Stochastic Finance. [http : //www. ntu. edu. sg /home/ nprivault/ indext. html](http://www.ntu.edu.sg/home/nprivault/index.html), pp. 1-548.
- [66] Quttard-Pinonf F et Randrianarivony R, (2008), Calibrage d'options pour trois modèles mixtes diffusions et sauts , Revue de l'association française de finance Vol. 29, pp. 103 – 130.
- [67] Ramezani C.A, Zeng Y, (1998), Maximum likelihood estimation of asymmetric jump-diffusion processes : application to security prices. Working paper, pp. 1 – 31.
- [68] Randrianarivony R, (2008), Prise en Compte des Discontinuités de Cours Financiers en Assurance et Finance. Université Claude Bernard - Lyon 1, pp. 1 – 184.
- [69] Rogers L. C. G, (2000), Evaluating first-passage probabilities for spectrally one-sided lévy processes, Journal of Applied Probability, vol. 37, no. 4, pp. 1173 – 1180.
- [70] Romano M, Touzi N, (1997), Contingent claims and market completeness in a stochastic volatility model, Mathematical Finance, 7, pp. 399 – 410.
- [71] Rosenberg J V, Engle R.F, (2002), Empirical Pricing Kernels Journal of Financial Economics 64, pp. 341 – 372.
- [72] Rouis M, (2007), Equations aux dérivées partielles en finance : problèmes inverses et calibration de modèle. Ecole Polytechnique. one-sided lévy processes, Journal of Applied Probability, vol. 37, no. 4, pp. 1173 – 1180.
- [73] Saïmi N, (2001), Estimation de la volatilité et filtrage non linéaire, Université du Québec à trois rivières, pp. 1 – 172.
- [74] Samuelson P.A, (1965), Rational theory of warrant pricing. industrial Management Review 6, pp. 13 – 39.
- [75] Schmanlensee R, Trippi, (1978), Common Stock Volatility Expectations Implied by Option Premia. ” Journal of Finance, vol. 33, no. 1, pp. 129 – 147.
- [76] Scott L, (1987), Option pricing when the variance changes randomly : theory estimator and applications. Journal on Financial and Qauntitative Analysis 22, pp. 419 – 438.
- [77] Steele JM ,(2001), Stochastic Calculus and Financial Applications. Springer, New York, Berlin, Heidelberg,p. 234.

- [78] Stein E, Stein J , (1991), Stock price distributions with stochastic volatility. Review of Financial Studies 4, pp. 727 – 752.
- [79] Tankov P, (2008), Calibration de Modèles et Couverture de Produits Dérivés; Université Paris VII, pp. 1 – 137.
- [80] Tsay RS, (2002), Analysis of Financial Time Series. John Wiley & Sons, New York, p. 1 – 601.
- [81] Toulouse,(2001), Statistique des processus. Applications aux finances, INSA SupAero 2001 – 2002, pp. 1 – 46.
- [82] Trippi R, 1977, A Test of Option Market Efficiency Using a Random-walk Valuation Model. Journal of Economics and Business, pp. 93 – 98.
- [83] Verraux A, (2008), Resolution de l'équation de Black et Scholes. Université de Technologie de Tampere, pp. 1 – 77.
- [84] Villa C. (1997), Estimation des paramètres d'un modèle à volatilité stochastique à partir des prix d'options .CREREG, Institut de Gestion de Rennes, pp. 55 – 64.
- [85] Warlop P, (2011), Modèle de Black-Schools, École Normale Supérieure de Cachan, pp. 1 – 25.
- [86] Whaley, Robert E, (1982), Valuation of American Call Options on Dividend-Paying Stocks. Journal of Financial Economics, pp. 29 – 58.
- [87] Wiggins J.B, (1987), Option values under stochastic volatility : Theory and Empirical estimates. Journal of Financial Economics vol 19, pp. 351 – 372.