

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE-ALGER

FACULTE DE MATHEMATIQUES



THESE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTORAT D'ETAT

en : MATHEMATIQUES

Spécialité : ANALYSE : Equations aux dérivées partielles

Par :

Mounir TLEMCANI

Sujet

Diffraction d'ondes par des couches minces.
Couches parfaitement adaptées stables pour les ondes
courtes en eau peu profonde.

Soutenue publiquement le

22 / 12 / 2010, devant le jury composé de:

M. TENIOU Djamel Eddine,
M. LEMRABET Keddour,
Mme. BARUCQ Hélène,
M. AMARA Mohamed,
M. BENDALI Abderrahmane,
M. DJELLOULI Rabia,
M. MOULAY Mohamed Said,
M. TERBECHE Mekki,

Professeur à l' U.S.T.H.B
Professeur, à l'U.S.T.H.B
Docteur, INRIA, Univ de Pau, France
Professeur à l' Univ de Pau, France
Professeur à l' I.N.S.A, Toulouse, France
Professeur à l' Univ de Californie USA
Professeur à l'U.S.T.H.B
Professeur à l'Univ d'Oran Es-Sénia

Président
Directeur de thèse
Co-directeur de thèse
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur
Examineur

Table des Matières

I	Les couches minces	3
1	Introduction	4
1.1	Description géométrique	5
1.2	Description physique	6
1.3	Description mathématique d'un modèle 2d	7
2	Méthodes de résolution du problème de diffraction par des couches minces	11
2.1	Survol des méthodes directes	11
2.2	L'approche par condition d'impédance	12
2.2.1	L'opérateur d'impédance exact relatif à la couche mince	13
2.2.2	L'opérateur d'impédance exact relatif au milieu extérieur	14
2.3	Formulation équivalente en domaine borné	16
3	Condition d'impédance approchée pour une couche mince hétérogène non uniforme	17
3.1	Introduction	17
3.2	Changement d'échelle et formulation variationnelle dans un domaine fixe	18
3.3	L'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet	20
3.4	Analyse asymptotique	22
3.4.1	Introduction	22
3.4.2	Analyse asymptotique du problème avec condition aux limites de type Neumann	23
3.4.3	Analyse asymptotique du problème avec condition aux limites de type Dirichlet	26
3.4.4	Justification de la convergence du développement asymptotique vers la solution exacte : Cas de la condition aux limites de type Neumann	30
3.5	Conditions aux limites approchées d'Engquist et Nédélec	33
4	Analyse double échelle de la diffraction d'une onde harmonique par des couches minces périodiques	38
4.1	Introduction	38
4.2	Position du problème de diffraction par des couches minces périodiques	39
4.3	Cadre fonctionnel et alternative de Fredholm	40
4.4	Analyse asymptotique à deux échelles	41
4.4.1	Hierarchie des équations variationnelle	43

4.4.2	Analyse de convergence pour la condition de Neumann	49
4.5	Les conditions aux limites approchées de Neumann	53
4.6	Conclusion	57
5	Application de l'analyse double échelle au problème de la diffraction d'une onde harmonique par une surface rugueuse	58
5.1	Introduction	58
5.2	Description d'un modèle bidimensionnel	59
5.3	Décomposition du domaine et mise à l'échelle	59
5.4	Etude de la stabilité	62
5.4.1	Alternative de Fredholm pour δ fixé	62
5.4.2	Passage à la limite dans l'alternative de Fredholm	64
5.5	Analyse asymptotique à deux échelles	68
5.6	Analyse de la convergence	77
5.7	Conditions aux limites approchées de Neumann	81
5.8	Conclusion	83
II	Couches absorbantes parfaitement adaptées stables pour les ondes courtes en eau peu profonde.	89
6	Introduction	90
7	Méthodologie générale des (PML)	94
7.1	Couches parfaitement adaptées en 1d	94
7.1.1	Adaptation d'impédance	94
7.1.2	Une énergie décroissante en temps	97
7.2	Rappels sur les PML en 2d pour l'acoustique dans un milieu homogène et isotrope	98
7.2.1	Formulation second ordre basée sur le changement de variables complexe	98
7.2.2	Analyse par ondes planes	102
7.3	Inconvénients et critiques des PML	103
7.3.1	PML(s) et discrétisation	103
7.3.2	PML et milieux hétérogènes	104
8	Couches absorbantes parfaitement adaptées aux ondes courtes en eau peu profonde (shallow water)	105
8.1	Introduction	105
8.2	Position du problème d'eau peu profonde	106
8.3	Un modèle PML stable pour les ondes courtes en eau peu profonde en écoulement oblique	108
8.4	Stabilité du nouveau modèle PML	111
8.5	Une deuxième approche basée sur la factorisation de Smith	113
8.6	Le choix d'une formulation symétrique pour la PML au coin	116
8.7	Formulation premier ordre du modèle PML	118
8.8	Résultats numériques	121
8.9	Conclusions et perspectives	138

Liste des Figures

1.1	Diffraction d'un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une couche mince diélectrique	6
2.1	Modèle du problème de diffraction posé uniquement dans le milieu de propagation.	12
2.2	Modèle du problème de diffraction posé dans un milieu borné.	15
5.1	Une portion de la frontière rugueuse. La période tangentielle est du même ordre que l'amplitude des oscillations, ainsi que la distance à laquelle est placée la frontière artificielle. $\langle \Gamma_\delta \rangle$ désigne la courbe moyenne à Γ_δ	60
7.1	Couche PML 1d à droite, de largeur L . Dans le milieu complexe, l'axe réel est déformé en un contour dans $\mathbb{C}$	97
7.2	Construction conventionnelle d'une PML-coin dans le cas du quart du plan. . .	100
7.3	Réflexion d'une gaussienne à la frontière artificielle en absence de PML ou de CLA.	101
7.4	Absorption et adaptation parfaite d'une PML-x (verticale).	101
8.1	PML coin en écoulement oblique : $L_f^{\text{PML}-x-y}$ fait intervenir la superposition classique avec un terme correcteur proportionnel à $U.V$	118
8.2	Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.	123
8.3	Contours équipotentiels de la composante advective Gh , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$	124
8.4	Instantanées de la solution de référence et la solution PML au voisinage du coin supérieur droit, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.	125
8.5	Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$	126
8.6	Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$	127
8.7	Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.	128
8.8	Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex. . . .	129
8.9	Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.	130

8.10	Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$	131
8.11	Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$	132
8.12	Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$	133
8.13	Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$	134
8.14	Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$	135
8.15	Erreur relative sur h et Gh , dans le cas non rotatif $f = 0$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$	136
8.16	Erreur relative sur u et v , dans le cas non rotatif $f = 0$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$	137

Résumé

Cette thèse est divisée en deux parties dans lesquelles nous abordons deux thèmes différents sur des phénomènes de propagations d'ondes en domaine non borné.

Dans la première partie, nous considérons un problème de diffraction d'ondes en régime harmonique par un obstacle revêtu d'une ou éventuellement plusieurs couches minces contrastées. Nous écrivons et nous justifions des conditions aux limites approchées ou conditions d'impédance généralisée (GIBC) qui modélisent l'effet de ces couches minces sur le champ diffracté, quand l'épaisseur tend vers zéro. En se basant sur l'analyse asymptotique à deux échelles et sur un principe de superposition simple, nous déduisons les coefficients homogénéisés pour les couches minces périodiques par rapport à la direction tangentielle, lorsque la période et l'épaisseur sont du même ordre. Nous utilisons ensuite cette technique pour traiter une rugosité périodique comme une couche mince périodique, et nous obtenons des résultats d'homogénéisation avec des estimations d'erreurs optimales. Nous nous sommes concentrés sur le cas de la condition aux limites de Neumann qui présente souvent plus de difficultés par rapport à la condition aux limites de Dirichlet. Nous renvoyons le lecteur intéressé par les développements récents sur les GIBC à la référence [19].

Dans la deuxième partie, nous construisons et analysons un nouveau modèle de couches absorbantes parfaitement adaptées (PML) au système linéarisé d'eau peu profonde (shallow water) avec force de Coriolis et en écoulement oblique. La construction est basée sur une formulation second ordre qui permet de découpler les ondes d'inertie-gravité des ondes géostrophiques. Par leur nature, les ondes de gravité sont les seules qui peuvent se diffracter en présence d'obstacles. D'où, le nouveau modèle PML consiste à absorber uniquement ce type d'ondes, afin de laisser le système atteindre son état d'équilibre naturel qui est l'équilibre géostrophique. Cette stratégie a été utilisée par Nataf [21] dans le cas des équations d'Euler linéarisées, en se basant sur la factorisation de Smith. De cette manière, nous renforçons la stabilité des PML dans le cas d'un écoulement oblique, où tous les modèles de PML classiques conduisaient à des instabilités spectaculaires en absorbant ce qui ne doit pas être absorbé. Des résultats numériques confirment la performance de notre modèle et attestent la stabilité "numérique" de la solution en temps long.

Les deux parties traitent des problèmes différents et peuvent être lues indépendamment. Cependant, notre motivation pour ces problèmes est commune et nous a menés au-delà de ces préoccupations particulières. Actuellement, nous pouvons considérer que les conditions aux limites absorbantes (CLA) sont des conditions d'impédance généralisée (GIBC), lorsqu'on les associe à des PML minces avec un paramètre d'absorption infini (inversement proportionnel à l'épaisseur de la PML). On peut noter aussi que le système d'eau peu profonde est un exemple de GIBC associé à une couche mince, et dont la dérivation est basée sur l'analyse asymptotique (cf. [25]). C'est un autre aspect de notre travail qui fait le lien entre les deux thèmes, apparemment très différents.

Liste des articles : Cette thèse a donnée lieu aux articles suivants :

Publications internationales :

- *M. Tlemcani* , “A Two-Scale Asymptotic Analysis of a Time-Harmonic Scattering Problem with a Multi Layered Thin Periodic Domain”, *Commun. Comput. Phys.* (2009), Vol. 6, No. 4, pp. 758-776.
- *H. Barucq, J. Diaz, M. Tlemcani*, “New absorbing layers conditions for short water waves”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, Issue 1, pp. 58–72, (2010).

Proceeding de conférences internationales :

- *M. Tlemcani* , “Homogénéisation tangentielle d’une couche mince périodique pour un problème de diffraction d’ondes”. *Actes du 3^{ème} Colloque sur les Tendances des Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie et Maroc, TAMTAM’07, Tipaza, Avril 2007.*
- *H. Barucq, J. Diaz, M. Tlemcani*, “Perfectly Matched Layers for the Shallow Water equations”, *Tenth International Conference Zaragoza-Pau on Applied Mathematics and Statistics, Jaca, September 15–17th 2008.*
- *H. Barucq, J. Diaz, M. Tlemcani*, “Stable Perfectly Matched Layers for the Short Water Waves”, *9th International Conference on Mathematical and Numerical Aspects of Waves Propagation, Proceedings WAVES’2009, June 15–19th 2009 INRIA-Pau (France).*

Remerciements

- Mes remerciements au professeur D. E. TENIOU pour m'avoir fait l'honneur et le plaisir de présider le jury de ma soutenance; je lui exprime toute ma reconnaissance pour son enseignement en post graduation.
- Je tiens à adresser mes remerciements, ma reconnaissance et ma profonde gratitude au professeur K. LEMRABET. Il m'a initié à la recherche et m'a immédiatement accordé sa confiance en acceptant de diriger ma thèse, constamment encouragé, conseillé et guidé. Je ne saurais oublier que, depuis quelques années, il avait accepté avec gentillesse de me régulariser ma situation, alors que j'avais perdu espoir. J'avais ainsi, grâce à lui, une deuxième chance pour faire aboutir cette thèse. Il m'a ensuite orienté vers Mme H. BARUCQ et j'avoue qu'il a vraiment choisi la bonne personne pour me faire découvrir la recherche au laboratoire de mathématiques appliquées (L.M.A) de l'université de Pau.
- J'adresse également tous mes remerciements à Mme H. BARUCQ qui m'a accueilli au sein de l'équipe du projet magique-3d qu'elle dirige actuellement à l'INRIA. Elle m'a immédiatement intégré dans une dynamique que j'avais longtemps recherchée et m'a accordé sa confiance. Son enthousiasme et sa générosité m'ont donné tous les moyens nécessaires à la réalisation de ce travail dont la majeure partie a été faite durant mes séjours très confortables au sein de son laboratoire. Je lui exprime ici ma profonde gratitude pour m'avoir branché sur des thèmes très intéressants et aussi pour avoir accepté de rapporter cette thèse.
- Mes remerciements vont aussi au professeur M. AMARA qui a accepté, spontanément et malgré sa lourde charge, d'examiner ma thèse et de participer au jury. Il m'a enseigné en post graduation, il a participé à mon accueil au L.M.A de l'université de Pau et m'a constamment conseillé et encouragé. Je lui exprime ici ma sincère reconnaissance.
- Je remercie vivement le professeur A. BENDALI, qui m'a permis de bénéficier de sa compétence en acceptant d'examiner ma thèse et pour l'intérêt qu'il a montré pour ce travail. C'est un honneur pour moi d'avoir pu recueillir un avis aussi pertinent que le sien.
- Je tiens à exprimer ma gratitude au professeur R. DJELLOULI, qui malgré son éloignement a accepté avec enthousiasme d'examiner mon travail et de participer à mon jury de thèse. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il m'a accordée et pour les conseils précieux qui m'ont permis de réviser ma rigueur dans le domaine scientifique ou professionnel. C'est un honneur pour moi d'avoir eu cette chance de le connaître.
- Mes remerciements et ma reconnaissance vont aussi au professeur M. S. MOULAY pour m'avoir fait le plaisir d'examiner ma thèse et de participer au jury. Je lui exprime ici ma gratitude pour son enseignement en post graduation et pour l'intérêt qu'il a montré pour mon travail. Je suis honoré par son avis remarquable.
- Je remercie sincèrement le professeur M. TERBECHÉ. Depuis plusieurs années, cela a été un véritable plaisir de travailler ou tout simplement de discuter avec une personne

possédant de telles qualités scientifiques et humaines. Je lui témoigne ma gratitude pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury, pour son enseignement en graduation, pour m'avoir incité constamment à finir ce travail afin d'ouvrir d'autres portes à la recherche. En effet, il m'a donné ce goût véritable pour les mathématiques et m'a branché dans le domaine des statistiques mathématiques en voulant me faire hériter son deuxième talent. Je ne saurais estimer son soutien et sa sympathie.

- Je ne saurais oublier mes parents qui m'ont apporté l'éducation nécessaire et m'ont toujours donné la force et le courage indispensables pour progresser. Toute ma réussite est dédiée pour eux.
- Je tiens à témoigner ma plus profonde gratitude à ma femme. Bien plus qu'une simple femme, elle fut toujours d'une aide scientifique et psychologique inestimable en faisant preuve d'une incroyable disponibilité. Je ne saurais oublier son double rôle qui a fait mon confort et celui de mes enfants. En effet, elle a sans conteste été la personne qui, sans ses encouragements dans les phases difficiles, cette thèse ne serait sûrement pas ce qu'elle est.
- Enfin, je tiens à remercier sincèrement tous les membres du laboratoire L.A.A.R du département de physique de l'université U.S.T.O.-MB, tous les membres du laboratoire L.M.A de l'université de Pau, et en particulier mes amis Julien Diaz et Abdelaaziz Ezziani qui ont participé moralement et scientifiquement à cette réussite, et bien sûr tous ceux qui, de près ou de loin, ont contribué à la réalisation de cette thèse.

Partie I

Les couches minces

Chapitre 1

Introduction

Nous cherchons à approcher le champ acoustique ou électromagnétique diffracté par un obstacle recouvert d'une ou éventuellement plusieurs couches minces contrastées non absorbantes. Une couche mince est une fine pellicule d'un matériau déposée sur un autre matériau. Dans le monde de l'industrie, on trouve une large variété de matériaux qui sont recouverts ou connectés par des couches minces. Par exemple, dans le domaine de l'engineering : composants électroniques, antennes diélectriques, peintures radar absorbantes, auto-focalisation laser, etc., les recouvrements ou les jonctions ont une dimension petite qui caractérise soit une propriété physique ou géométrique du matériau. Lorsque cette dimension est suffisamment large comparée à la longueur d'onde du champ incident, le problème de diffraction peut être résolu par les méthodes directes telles que les méthodes volumiques ou encore les méthodes surfaciques (cf. [40], [12], [15]). En pratique, ces approches présentent des inconvénients majeurs (verrouillage et instabilités numériques, cf. [43], [11], [12]), lorsque l'épaisseur devient trop petite devant la longueur d'onde et en particulier lorsque la couche mince est hétérogène (épaisseur variable, contraste variable le long de la direction tangentielle, surface rugueuse, etc.). La méthode des conditions aux limites approchées permet d'accélérer ou de rendre possible les calculs numériques du champ à l'extérieur de la couche mince. Elle consiste à remplacer l'effet de cette dernière par une condition d'impédance généralisée (GIBC : acronyme anglais de Generalized Impedance Boundary Condition) qui est bien connue par son efficacité à traiter les situations compliquées telles que : les couches minces hétérogènes (cf. [1], [3], [4], [5], [6], [31], [53], [24]), les surfaces rugueuses ([42], [48]), les obstacles non parfaitement conducteurs (cf. [9], [10]), cavités (cf. [54], [55]), les conditions de radiation d'ordre élevé (cf. [14]), les conditions aux limites non réfléchissantes (cf. [33]), les conditions de transmission dans une méthode de décomposition de domaine (cf. [30]). Le terme "généralisée" veut dire que ces conditions sont exprimées à l'aide d'opérateurs ou d'inverses d'opérateurs différentiels. L'idée a été introduite dans les années quarante par Shukin-Léontovitch [37], pour étudier la diffraction par des objets diélectriques à fort indice et à perte. Depuis, en se basant sur l'analyse asymptotique pour la dérivation et la justification rigoureuse des GIBC, un cadre théorique complet pour les couches minces a été développé par Bendali, Lemrabet, Joly, Haddar et leurs co-auteurs (cf. [16], [17], [18], [31], [34]). Une sélection de travaux récents sur l'analyse asymptotique pour les problèmes de propagation d'ondes peut être trouvée dans [26]. Nous citons aussi les travaux récents de Bendali et Lemrabet [19] sur le système complet de Maxwell tridimensionnel, présentés dans la conférence internationale *WAVES'2009* et qui sont basés

sur les approches de type approximation de Padé, pour obtenir des GIBC d'ordre élevé stables et robustes. Dans ce contexte, notre travail consiste à écrire et justifier en 2D des GIBC jusqu'à l'ordre 2 pour les couches minces hétérogènes en régime harmonique. Trois types d'hétérogénéités sont considérés : le cas général d'une épaisseur variable dont les variations sont supposées lentes comparées à l'épaisseur moyenne de la couche mince, le cas d'une couche mince périodique par rapport à la direction tangentielle et dont la période et l'épaisseur tendent vers zéro à la même vitesse, et finalement le cas d'une surface rugueuse dont la rugosité est supposée périodique par rapport à la direction tangentielle. Notre approche est basée sur l'analyse asymptotique multi-échelles pour l'écriture des GIBC (cf. [4], [20], [24], [39], [42], [53]). A cause du caractère non coercif des formulations variationnelles, les développements asymptotiques sont justifiés à l'aide de l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16] dont la démonstration est basée sur la régularité de la solution d'un problème aux limites elliptique associé, soulignant le fait que les hypothèses de régularité imposées sur l'obstacle constituent une part essentielle du cadre mathématique du problème. Le plan de cette première partie de la thèse est organisé comme suit :

Dans ce chapitre, nous présentons une description générale du problème physique, y compris les motivations du problème de diffraction par des couches minces et aussi le cadre mathématique retenu pour l'analyse et la construction des GIBC. Dans le deuxième chapitre, nous discutons quelques méthodes de résolutions du problème, en ne citant qu'un nombre réduit de références et de travaux liés au sujet. Nous introduisons la notion de condition d'impédance généralisée qui, comme la notion des conditions aux limites absorbantes, relève de la même problématique de l'approximation de l'opérateur de Steklov-Poincaré. Ces deux notions nous permettent alors d'obtenir une formulation en domaine borné et de se placer dans les bonnes conditions d'utilisation des arguments de compacité dans l'alternative de Fredholm. Dans le troisième chapitre, nous appliquons le formalisme de Bendali-Lemrabet [16] au cas d'une couche mince non uniforme et non homogène, en montrant les différentes étapes de l'analyse asymptotique classique (à une échelle) pour obtenir les GIBC, ainsi que les estimations de convergence optimales. Dans le quatrième chapitre, nous écrivons et justifions des GIBC pour les couches minces périodiques, lorsque la taille de la période et du même ordre que l'épaisseur, en se basant sur un principe de superposition simple qui permet de séparer les variables rapides. Nous soulignons alors l'insuffisance de l'analyse asymptotique classique devant l'analyse à double échelle, pour obtenir les coefficients homogénéisés ainsi que les estimations de convergence optimales. Dans le cinquième et dernier chapitre, nous proposons une approche qui permet de traiter les surfaces rugueuses comme des couches minces périodiques. Pour faire de l'analyse asymptotique à deux échelles, nous reprenons alors la justification de l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16] en tenant compte d'un nouveau terme qui apparaît dans la dérivée covariante. Nous écrivons et justifions des GIBC pour le problème de Neumann qui présente souvent plus de difficultés par rapport au problème de Dirichlet.

1.1 Description géométrique

Soit δ un petit paramètre positif décrivant l'épaisseur de la couche mince et destiné à tendre vers zéro. Un obstacle métallique occupe le domaine Ω_0 de $\mathbb{R}^2$ de frontière Γ_δ , supposée être une variété compacte de classe C^∞ . On notera $\Omega_{\delta,\infty}$ le domaine extérieur défini par la réunion

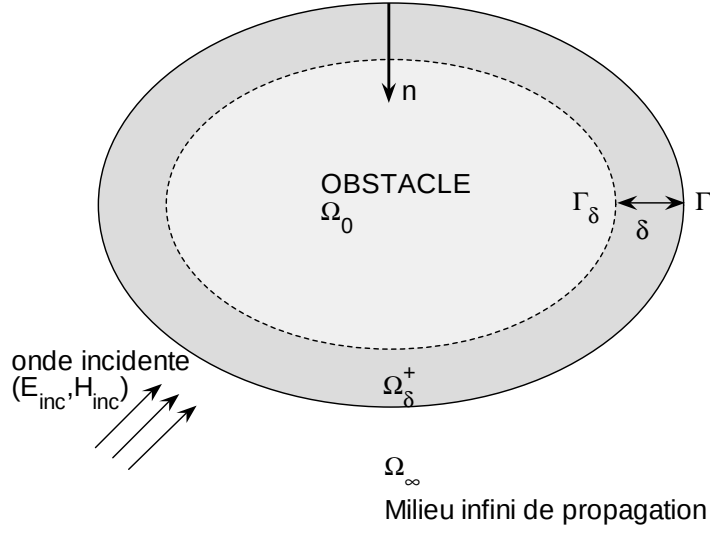


Figure 1.1: Diffraction d'un obstacle parfaitement conducteur recouvert d'une couche mince diélectrique

de la couche mince constituée d'un diélectrique d'épaisseur δ

$$\Omega_\delta^+ = \{x \in \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}_0 : d(x, \Gamma_\delta) < \delta\}$$

et du milieu infini de propagation

$$\Omega_\infty = \{x \in \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}_0 : d(x, \Gamma_\delta) > \delta\}$$

où $d(x, \Gamma_\delta)$ représente la distance du point x au bord Γ_δ . La frontière séparant Ω_δ^+ et Ω_∞ est notée Γ , et on a

$$\Gamma = \{x \in \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}_0 : d(x, \Gamma_\delta) = \delta\}.$$

La courbe Γ est parallèle à Γ_δ comme l'indique la figure 1.1. On convient de noter $\mathbf{n}$ la normale unitaire à une courbe donnée orientée toujours vers l'obstacle Ω_0 .

1.2 Description physique

On se limite à des modèles bidimensionnels linéaires en régime harmonique. Dans le milieu de propagation Ω_∞ , une onde harmonique est caractérisée par sa pulsation ω qui traduit sa dépendance sinusoïdale en fonction du temps au travers du facteur multiplicatif $e^{-i\omega t}$, facteur que l'on supprime par linéarité dans les équations. On rappelle que la vitesse de propagation c d'une onde électromagnétique dans le vide est donnée par la relation

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}}$$

où ε_0 et μ_0 sont des constantes représentant la permittivité électrique et la perméabilité magnétique de l'air. La longueur d'onde

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega}$$

est une grandeur caractéristique des dimensions des objets diffractants en fonction de la fréquence considérée. Le nombre d'onde est l'analogie d'une fréquence spatiale et est associé à l'inverse de λ par la relation

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (1.1)$$

Enfin l'impédance du vide est définie par

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}$$

Les deux constantes caractéristiques de la couche mince ε et μ sont définies relativement à celles du milieu de propagation. Le milieu diélectrique est supposé homogène et isotrope. On peut caractériser de façon équivalente ses propriétés à l'aide de son impédance

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$$

et de son indice de réfraction

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu}$$

Pour un milieu sans contraste avec le domaine de propagation, on a $n = 1$ et $Z = 1$.

1.3 Description mathématique d'un modèle 2d

Une onde électromagnétique est décrite par un champ électrique $\mathbf{E}$ et un champ magnétique $\mathbf{H}$ en tout point de l'espace. Si ν est le vecteur unitaire donnant le sens de propagation alors le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est défini par

$$\mathbf{k} = k\nu$$

où k est défini par (1.1). On se ramène à un problème bidimensionnel en supposant que les ondes sont polarisées. Supposons que l'axe d'invariance est l'axe Oz et le plan de propagation contenant le vecteur d'onde $\mathbf{k}$ est le plan (Ox,Oy). Alors, la polarisation est dite transverse électrique (*TE*) si le champ électrique $\mathbf{E}$ appartient au plan de propagation et par conséquent le champ magnétique $\mathbf{H}$ est colinéaire à l'axe d'invariance. Si par contre $\mathbf{E}$ est perpendiculaire au plan de propagation alors la polarisation est dite transverse magnétique (*TM*) et le champ magnétique est dans le plan (Ox,Oy).

En régime harmonique, une onde incidente $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ est solution des équations de Maxwell dans un voisinage de l'obstacle. Un exemple simple peut être donné par une onde plane qui est décrite en dimension deux par son angle d'incidence θ et le nombre d'onde k par

$$u^{inc}(x, y) = e^{-i(kx \cos \theta + ky \sin \theta)} = e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}}$$

où $\mathbf{k}$ est le vecteur d'onde et $\mathbf{x}$ le vecteur position.

L'onde totale $(\mathbf{E}, \mathbf{H})$ est une superposition de l'onde incidente $(\mathbf{E}_{inc}, \mathbf{H}_{inc})$ et de l'onde diffractée $(\mathbf{E}_{diff}, \mathbf{H}_{diff})$ par l'obstacle, et vérifie en outre les équations de Maxwell en régime harmonique

$$rot \mathbf{E} - ikZ_0 \mathbf{H} = 0 \quad (1.2a)$$

$$rot \mathbf{H} + ikZ_0^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (1.2b)$$

dans le milieu de propagation Ω_∞ , et

$$rot \mathbf{E} - iknZ_0Z \mathbf{H} = 0 \quad (1.3a)$$

$$rot \mathbf{H} + iknZ_0^{-1}Z^{-1} \mathbf{E} = 0 \quad (1.3b)$$

dans la couche mince diélectrique Ω_δ^+ .

Si la polarisation est choisie (TE) , alors on a

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ u \end{bmatrix}$$

Par conséquent, les équations de Maxwell-Faraday (1.2a) et (1.3a) deviennent scalaires dans chacun des deux milieux

$$rot \mathbf{E} - ikZ_0 u = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \quad (1.4a)$$

$$rot \mathbf{E} - iknZ_0Z u = 0 \text{ dans } \Omega_\delta^+ \quad (1.4b)$$

où $rot \mathbf{E} = \partial_y \mathbf{E} - \partial_x \mathbf{E}$, alors que celles de Maxwell-Ampère (1.2b) et (1.3b) demeurent vectorielles dans chacun des deux milieux

$$\mathbf{rot} u + ikZ_0 \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \quad (1.5a)$$

$$\mathbf{rot} u + iknZ_0^{-1}Z^{-1} \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega_\delta^+ \quad (1.5b)$$

où le rotationnel vecteur d'une fonction scalaire $v(x, y)$ est par définition

$$\mathbf{rot} v = \begin{bmatrix} \partial_y v \\ -\partial_x v \end{bmatrix}$$

Aux équations (1.4a) et (1.5b), s'ajoutent les conditions aux limites suivantes :

- Une condition de conducteur parfait est imposée sur la surface métallique Γ_δ

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = 0 \quad (1.6)$$

- Une condition de transmission à la traversée de la frontière Γ impose le raccord des composantes tangentielles du champ électromagnétique

$$[\mathbf{E} \wedge \mathbf{n}]_\Gamma = 0 \quad (1.7)$$

$$[\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}]_\Gamma = 0 \quad (1.8)$$

où le crochet $[v]_\Gamma$ désigne le saut de la trace d'une distribution v à travers l'interface Γ

$$[v]_\Gamma = v|_\Gamma^+ - v|_\Gamma^-$$

et la notation v^+ (respectivement v^-) désigne la restriction de v à Ω_δ^+ (respectivement Ω_∞).

- Une condition de radiation à l'infini de type Sommerfeld vérifiée par $\mathbf{E} - \mathbf{E}_{inc}$ et $\mathbf{H} - \mathbf{H}_{inc}$ et qui, en dimension deux, s'écrit sous la forme

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r v - ikv) = 0 \quad (1.9)$$

uniformément par rapport à la direction radiale r où $r = |\mathbf{x}|$ est le module du vecteur position $\mathbf{x}$ de l'espace. Cette condition (comme plusieurs autres conditions de radiation) est équivalente à celle de Silver-Müller en 2D.

Il est classique d'éliminer le champ qui est vectoriel en dimension deux et d'obtenir simplement l'équation d'Helmholtz scalaire pour l'inconnue u dans chacun des deux milieux :

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_\infty \quad (1.10a)$$

$$\Delta u + k^2 n^2 u = 0 \text{ dans } \Omega_\delta^+ \quad (1.10b)$$

En adoptant la notation u^+ (respectivement u^-) dans Ω_δ^+ (respectivement Ω_∞) pour désigner le champ magnétique dans chacun des deux milieux, les conditions aux limites (1.6), (1.7), (1.8) se mettent sous la forme

$$\partial_{\mathbf{n}} u^+ = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta \quad (1.11)$$

$$\varepsilon^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u^+ = \partial_{\mathbf{n}} u^-, \quad u^+ = u^- \text{ sur } \Gamma \quad (1.12)$$

Ainsi, pour la polarisation considérée (TE), le problème de transmission associé à l'équation d'Helmholtz consiste à trouver le champ total $u^\pm$ à valeurs complexes, tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\pm \in H^1(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u^- + k^2 u^- = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \Delta u^+ + k^2 n^2 u^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+) \\ \varepsilon^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u^+ = \partial_{\mathbf{n}} u^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u^+ = u^- \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \partial_{\mathbf{n}} u^+ = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r (u^- - u^{inc}) - ik(u^- - u^{inc})) = 0 \end{array} \right. \quad (1.13)$$

Finalement, et en vertu de la forme de la condition de radiation, il est justifiable de travailler avec le champ diffracté plutôt qu'avec le champ total. En effet, le champ incident est créé par des sources placées à l'infini et le champ total peut ne pas satisfaire la condition de radiation. En conservant la même notation $u^\pm$ pour le champ diffracté et en tenant compte du fait que le champ incident est lui aussi solution de l'équation d'Helmholtz (1.10a) dans un

voisinage de l'obstacle, quitte à faire un relèvement des traces sur les frontières, le problème de transmission (1.13) peut être reformulé comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\pm \in H^1(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u^- + k^2 u^- = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \Delta u^+ + k^2 n^2 u^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+) \\ \varepsilon^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u^+ = \partial_{\mathbf{n}} u^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u^+ = u^- \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \partial_{\mathbf{n}} u^+ = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u^- - i k u^-) = 0 \end{array} \right. \quad (1.14)$$

où le second membre, noté f , est supposé dans l'espace $L^2(\Omega_\infty)$ à support compact dans Ω_∞ et dépend de l'onde incidente.

Remarque 1.1 *Pour la polarisation (TE), on a obtenu une condition de Neumann sur Γ_δ . De manière similaire, on peut reprendre cette formulation pour le cas de la polarisation (TM). Dans ce cas, u représentera la composante verticale du champ électrique diffracté et ainsi le problème obtenu pour cette polarisation est un problème avec condition de Dirichlet sur Γ_δ et un contraste μ^{-1} au lieu de ε^{-1} entre les deux milieux. Plus précisément,*

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u^\pm \in H^1(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u^- + k^2 u^- = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \Delta u^+ + k^2 n^2 u^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+) \\ \mu^{-1} \partial_{\mathbf{n}} u^+ = \partial_{\mathbf{n}} u^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u^+ = u^- \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u^+ = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u^- - i k u^-) = 0 \end{array} \right. \quad (1.15)$$

Pour tout $s \in \mathbb{R}$, on note :

$$H_{loc}^s(\bar{\Omega}_\infty) \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in \mathcal{D}'(\Omega_\infty), \forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^2) : \phi v \in H^s(\Omega_\infty)\}$$

Théorème 1.1 *Les problème de Neumann (1.14) ou de Dirichlet (1.15) admettent chacun une solution unique qui dépend continûment du second membre f . En outre, si Γ est régulière (de classe C^∞), alors : pour tout $s \geq 0$, si $f \in H^s(\Omega_\infty)$ à support compact dans Ω_∞ , alors $u \in H^{s+2}(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^{s+2}(\bar{\Omega}_\infty)$.*

Preuve: Basé essentiellement sur la condition de radiation qui permet de sélectionner les ondes sortantes, l'unicité de la solution est une conséquence directe du lemme de Rellich [44]. L'existence est obtenue soit par des arguments standards basés sur l'alternative de Fredholm en utilisant par exemple la méthode de Lax et Phillips (cf. [49],[52]), soit encore avec le principe d'absorption limite proposé par Wilcox [56]. La régularité découle des résultats généraux sur les systèmes elliptiques d'Agmon-Douglis-Nirenberg [7]. ■

Chapitre 2

Méthodes de résolution du problème de diffraction par des couches minces

2.1 Survol des méthodes directes

Il existe deux grandes familles de méthodes pour résoudre de manière directe le problème de diffraction par des couches minces en régime harmonique.

Les méthodes volumiques

Le calcul se fait dans tout le volume intérieur et extérieur des objets. Elles permettent une bonne prise en compte des caractéristiques physiques du milieu, en particulier des hétérogénéités et des effets d'anisotropie. Néanmoins, elles nécessitent un grand nombre d'inconnues et une réalisation explicite des conditions aux limites. Parmi les méthodes numériques utilisées, citons la méthode des éléments finis (FEM) dans la couche mince couplée avec une autre méthode qui prend en charge le caractère non borné du milieu infini de propagation telle que la méthode des éléments finis de frontière (BEM), les éléments infinis, des conditions aux limites absorbantes (CLA), (cf. [33]), des couches parfaitement adaptées (PML), (cf. [21]), etc.

Les méthodes surfaciques

Les inconnues sont placées sur le bord des objets considérés et elles prennent en compte de manière implicite les conditions aux limites. Ce sont des méthodes intégrales qui ramènent le problème sur les deux frontières Γ et Γ_δ et il s'agit alors de déterminer trois courants équivalents : un courant électrique sur Γ_δ , un courant électrique et un courant magnétique sur Γ . Cependant, elles ne s'appliquent que pour des couches minces homogènes et uniformes. Leur caractère non local donne lieu à des systèmes linéaires de matrices pleines difficiles à inverser par une méthode multipôle (cf. [11]).

En pratique, les deux approches ci dessus présentent des inconvénients majeurs (verrouillage et instabilités numériques, cf. [43], [11]), lorsque l'épaisseur devient trop petite par rapport à la longueur d'onde et en particulier lorsque la couche mince est hétérogène (épaisseur variable, contraste variable le long de la direction tangentielle, surface rugueuse, etc.).

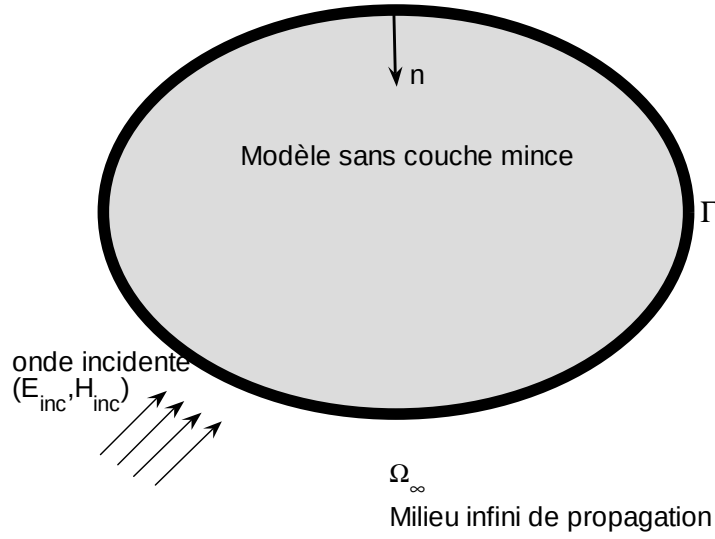


Figure 2.1: Modèle du problème de diffraction posé uniquement dans le milieu de propagation.

2.2 L'approche par condition d'impédance

Une autre alternative, utilisée pour traiter de manière plus générale et plus stable le problème de diffraction par des couches minces, consiste à approcher les trois courants sur les frontières Γ et Γ_δ par un seul courant équivalent sur Γ . Historiquement, cette idée fut utilisée pour la première fois par Leontovich (1948) [37] sous la forme d'une relation qui lie les composantes tangentielles des champs électrique et magnétique sur la frontière Γ comme suit

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = -\delta Z_{eff} (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n}) \text{ sur } \Gamma$$

où Z_{eff} est un nombre représentant l'impédance équivalente de la couche mince et qui dépend à la fois de la fréquence d'excitation et de l'angle d'incidence de l'onde plane. Achdou (1989) [2], utilisa l'homogénéisation pour calculer Z_{eff} lorsque la couche mince n'est pas homogène mais possède une structure périodique par rapport à la direction tangentielle. Ce n'est qu'en (1993), que Engquist et Nédélec [32] établirent la formule correcte représentant Z_{eff} comme un opérateur aux dérivés partielles. La condition obtenue est alors une approximation, lorsque δ tend vers zéro, de l'opérateur d'impédance exact Z appelé aussi opérateur de Steklov-Poincaré ou encore de Dirichlet-to-Neumann (DtN). Cette condition a un double avantage : d'une part, couplée à l'équation d'Helmholtz posée dans la couche mince, elle permet de ramener la résolution du problème de transmission à un problème posé uniquement dans le milieu de propagation (cf. figure 2.1), et d'autre part, couplée à l'équation d'Helmholtz posée dans ce milieu infini, elle permet de ramener la résolution à un problème posé dans un domaine borné. C'est un outil emprunté aux techniques de décomposition de domaine pour construire les conditions aux limites approchées et qui se prête particulièrement bien au traitement des problèmes de couches minces.

2.2.1 L'opérateur d'impédance exact relatif à la couche mince

On définit l'opérateur de Steklov-Poincaré ou encore d'impédance exact relatif à l'équation d'Helmholtz posée dans la couche mince comme étant l'opérateur qui fait passer d'une donnée de Cauchy à l'autre donnée de Cauchy du problème sur la frontière Γ . On obtient une condition aux limites, appelée encore condition d'impédance. En électromagnétisme, elle lie les composantes tangentielles du champ électrique et du champ magnétique et, à un facteur multiplicatif près, elle est souvent donnée sous la forme suivante :

$$\mathbf{E} \wedge \mathbf{n} = \mathbf{Z}_\delta (\mathbf{H} \wedge \mathbf{n})$$

où $\mathbf{Z}_\delta$ est appelé dans le jargon des électriciens "opérateur d'impédance" et $\mathbf{Z}_\delta^{-1}$ est alors un opérateur d'admittance.

Soit φ une fonction suffisamment régulière, définie sur Γ . Alors, le problème intérieur associé à l'équation d'Helmholtz

$$\begin{cases} \Delta u^+ + k^2 n^2 u^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+), \\ \partial_{\mathbf{n}} u^+ = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \text{ en polarisation (TE)}, \\ u^+ = 0 \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \text{ en polarisation (TM)}, \\ u^+ = \varphi \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma), \end{cases} \quad (2.1)$$

admet, au moins lorsque $k^2 n^2$ n'est pas valeur propre du problème homogène, une solution $u^+ \in H^1(\Omega_\delta^+)$. L'opérateur $\mathbf{Z}_\delta$ est défini, par :

$$\begin{aligned} \mathbf{Z}_\delta &: H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \varphi &\mapsto \mathbf{Z}_\delta \varphi = -\alpha \partial_{\mathbf{n}} u^+|_\Gamma \end{aligned}$$

où $\alpha = \varepsilon^{-1}$ dans le cas de la polarisation (TE) et $\alpha = \mu^{-1}$ dans le cas de la polarisation (TM). Ainsi, le problème extérieur devient

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \partial_{\mathbf{n}} u^- + \mathbf{Z}_\delta u^- = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u^- - i k u^-) = 0 \end{cases} \quad (2.2)$$

Remarque 2.1 Selon la polarisation, l'opérateur $\mathbf{Z}_\delta$ possède des propriétés physiques bien distinctes et qui se traduisent mathématiquement par les différences qui existent entre un problème de Neumann et un problème de Dirichlet. Le premier étant plus technique à approcher que le second, on retiendra alors la polarisation (TE) pour l'analyse détaillée. Les résultats pour la polarisation (TM) seront présentés très brièvement, en insistant sur les modifications dues au changement de polarisation.

L'opérateur $\mathbf{Z}_\delta$ présente deux difficultés principales car il est non-local et non explicite. Cependant, la difficulté majeure vient de son caractère non explicite, si on sort du cadre de quelques géométries canoniques telles que le plan, le cercle ou l'ellipse. La première difficulté n'est pas très gênante si on choisit une résolution par équations intégrales. En revanche, pour faire face au caractère non-explicite dans le cas de géométries quelconques, différentes approches ont été utilisées pour approcher $\mathbf{Z}_\delta$ lorsque l'épaisseur de la couche mince tend vers zéro. Pour le cas de couches minces homogènes, les différentes approches peuvent être hiérarchisées comme suit :

Approche de Engquist et Nédélec (1993) [32]

Leur approche consiste à utiliser l'équation aux dérivées partielles dans la couche mince en coordonnées curvilignes. Les premières conditions d'impédance sont dérivées en approchant la solution par un "polynôme" par rapport à la variable normale. Pour justifier que l'ordre correspondait bien au degré du polynôme, ils utilisent des fonctions test dans la formulation variationnelle de même nature que la solution et obtiennent des résultats de convergence.

L'approche de Bendali et Lemrabet (1994) [16], [17]

Pour traiter les problèmes de diffraction en haute fréquence, les auteurs font une analyse asymptotique relativement à l'épaisseur de la couche mince et obtiennent des conditions aux limites approchées locales (différentielles). Par leur approche, ils retrouvent les conditions d'impédance classiques jusqu'à l'ordre 2 et proposent une condition d'ordre 3. Malheureusement, à cause d'un "mauvais" signe, cette condition est instable. En outre, elle contient un opérateur différentiel d'ordre 4 sur le bord qui rend la discrétisation difficile. En revanche, dans leur analyse ils développent un outil basé sur la stabilité de la solution d'un problème associé pour justifier théoriquement la convergence.

L'approche de Sénior et Volakis (1995) [48]

Leur approche, un peu différente des précédentes, consiste à approcher le coefficient de réflexion, explicité de manière exacte dans des géométries canoniques tels que le plan et le cylindre. Ils retrouvent ainsi les premières conditions d'impédance classiques.

L'approche de Bendali et Bartoli (1999) [11]

En suivant le même principe que Sénior et Volakis dans le cas d'une géométrie plane, leur approche consiste à expliciter l'opérateur de Steklov-Poincaré exactement à travers son symbole dans le cas d'une géométrie circulaire, modèle qui est canonique mais qui a l'avantage de tenir compte des termes de courbure dans l'expression exacte de $\mathbf{Z}_\delta$. Pour construire une condition d'impédance d'ordre 3 stable, le symbole de $\mathbf{Z}_\delta$ est approché par une fraction rationnelle de type Padé, procédé similaire à celui utilisé dans la construction des conditions aux limites absorbantes. On diminue ainsi l'ordre de l'opérateur au bord à condition de rajouter un jeu d'inconnues auxiliaires pour l'inversion. Pour étendre les conditions obtenues à des géométries plus générales, ils utilisent le procédé heuristique de Kriegsmann, Taflov, et Umashankar [35]. La justification théorique de la convergence est alors obtenue à l'aide de l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16].

2.2.2 L'opérateur d'impédance exact relatif au milieu extérieur

En vue de formuler le problème (2.2) dans le cadre d'une alternative de Fredholm, on limite le milieu extérieur de propagation par une frontière artificielle notée Σ , et qui doit englober l'obstacle ainsi que le support de f . On impose alors sur Σ une condition aux limites (non locale) qui remplace la condition de radiation à l'infini. On dit que sur Σ , la condition aux limites est transparente (C.L.T). Pour la discrétisation, des techniques très utilisées consistent

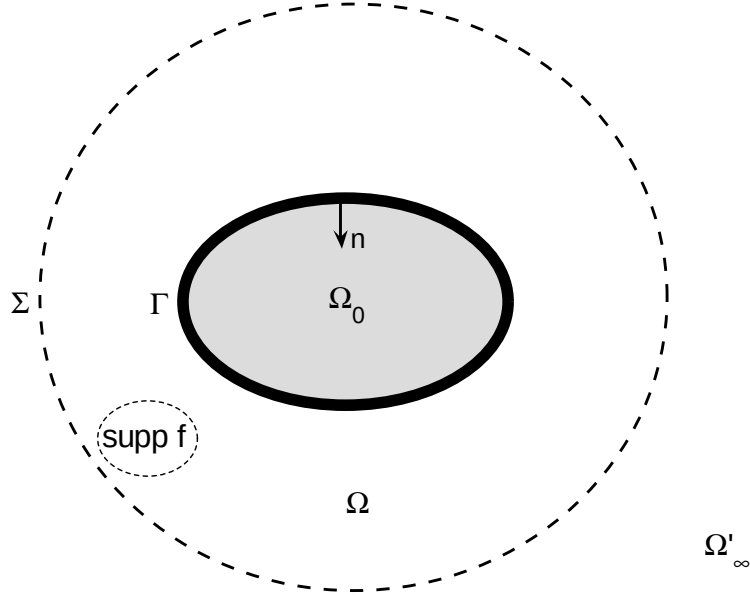


Figure 2.2: Modèle du problème de diffraction posé dans un milieu borné.

à ne prendre qu'une approximation de la C.L.T : il s'agit alors d'une condition aux limites absorbante (C.L.A), (cf. [33], [14]). Ainsi, on ne rencontre pas les difficultés numériques dues à la non-localité de la C.L.T. Cependant, on n'évite pas les réflexions artificielles créées par une C.L.A sur la frontière Σ . D'autres alternatives consistent à approcher la C.L.T en introduisant une couche absorbante parfaitement adaptée (P.M.L : acronyme anglais de Perfectly Matched Layer) qui a l'avantage d'être locale, simple à implémenter numériquement, et qui absorbe parfaitement (cf. [21]). La façon la plus simple de construire la C.L.T, appelée aussi condition DtN (Dirichlet-to-Neumann) ou encore condition d'impédance exacte relative au milieu extérieur, consiste à choisir une géométrie canonique pour tronquer le domaine extérieur. Soit alors Σ un cercle de rayon R (assez grand) et de centre O (un centre géométrique de l'obstacle). Soit $\Omega'_\infty = \{x : |x| > R\}$ le domaine extérieur à Σ , (cf. figure 2.2). Alors, l'opérateur DtN $\mathbf{S}_k$ est défini par l'application suivante

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_k &: H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \rightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \varphi &\mapsto \mathbf{S}_k \varphi = \partial_r u^-|_\Sigma \end{aligned}$$

où $u^- \in H^1_{loc}(\Omega'_\infty)$ est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} \Delta u^- + k^2 u^- = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega'_\infty) \\ u^- = \varphi \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Sigma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u^- - i k u^-) = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

et $r = x/|x|$ désigne la direction radiale relative au centre O .

Remarque 2.2 *Le choix de la condition à imposer sur la frontière artificielle Σ est très important car elle détermine la distance à laquelle Σ peut être placée. En effet, plus la C.L.A est efficace, plus Σ peut être proche du support de f sans que cela affecte la qualité de la solution.*

2.3 Formulation équivalente en domaine borné

Notons u^+ (resp. u^-) la restriction à Ω_δ^+ (resp. Ω_∞) d'une distribution u définie sur $\Omega_{\delta,\infty}$. La formule de Green montre que la solution u_δ des problèmes (1.14) ou (1.15) satisfait l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_\delta^+} \alpha (\nabla u_\delta^+ \nabla v^+ - k^2 n^2 u_\delta^+ v^+) dx + \int_{\Omega_\infty} (\nabla u_\delta^- \nabla v^- - k^2 u_\delta^- v^-) dx = \int_{\Omega_\infty} f \bar{v}^- dx \quad (2.4)$$

pour toute fonction test v régulière et à support compact dans $\Omega_{\delta,\infty}$. On rappelle que $\alpha = \varepsilon^{-1}$ dans le cas de la polarisation TE (problème de Neumann (1.14)) et $\alpha = \mu^{-1}$ dans le cas TM (problème de Dirichlet (1.15)). On désigne par $\Omega = \Omega_\infty - \bar{\Omega}'_\infty$ le domaine borné contenant le support de f et qui est délimité par les deux frontières Γ et Σ . Alors, par construction même de l'opérateur d'impédance exacte $\mathbf{S}_k$, la formulation variationnelle équivalente en domaine borné des problèmes (1.14) (respectivement (1.15)) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta \in X_\delta; \forall v \in X_\delta \\ \int_{\Omega_\delta^+} \alpha (\nabla u_\delta^+ \nabla v^+ - k^2 n^2 u_\delta^+ v^+) dx \\ + \int_{\Omega} (\nabla u_\delta^- \nabla v^- - k^2 u_\delta^- v^-) dx + \langle \mathbf{S}_k u_\delta^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\Omega} f v^- dx, \end{array} \right. \quad (2.5)$$

où $X_\delta = X_\delta^{(N)}$ (respectivement $X_\delta^{(D)}$) selon la polarisation considérée, où

$$\begin{aligned} X_\delta^{(N)} &= \{v = (v^+, v^-) \in H^1(\Omega_\delta^+) \times H^1(\Omega) : v^+ = v^- \text{ sur } \Gamma\} \\ X_\delta^{(D)} &= \{v = (v^+, v^-) \in X_\delta^N : v^+ = 0 \text{ sur } \Gamma_\delta\} \end{aligned}$$

sont des espaces de Hilbert munis de la norme naturelle suivante

$$\|v\|_{X_\delta} = \left(\|v^+\|_{1, \Omega_\delta^+}^2 + \|v^-\|_{1, \Omega}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Finalement, en utilisant l'opérateur d'impédance exacte $\mathbf{Z}_\delta$, on peut obtenir une formulation équivalente en domaine borné indépendamment de la couche mince, comme suit

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta^- \in H^1(\Omega); \forall v^- \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} (\nabla u_\delta^- \nabla v^- - k^2 u_\delta^- v^-) dx + \langle \mathbf{Z}_\delta u_\delta^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Gamma} + \langle \mathbf{S}_k u_\delta^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\Omega} f v^- dx, \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Remarque 2.3 Cette formulation variationnelle correspond au modèle exact qui consiste à résoudre le problème de diffraction dans le domaine effectif de calcul Ω , et qui tient compte de manière exacte de l'effet du champ lointain au travers de l'impédance du milieu extérieur Ω'_∞ , donnée par $\mathbf{S}_k$, et aussi de l'effet du champ proche via l'impédance de la couche mince Ω_δ^+ , donnée par $\mathbf{Z}_\delta$.

Chapitre 3

Condition d'impédance approchée pour une couche mince hétérogène non uniforme

3.1 Introduction

Dans les travaux cités au chapitre précédent, la construction explicite des opérateurs $\mathbf{Z}_\delta$ (resp. $\mathbf{S}_k$) n'est possible que dans des cas particuliers de géométries canoniques pour Γ (resp. Σ). De manière générale, l'approximation de l'un ou l'autre de ces deux opérateurs relève de l'analyse asymptotique relativement à un petit paramètre. On va présenter dans ce chapitre une étude asymptotique de $\mathbf{Z}_\delta$ pour les couches minces hétérogènes non uniformes. On reprend alors la formulation de Bendali-Lemrabet [16] qui rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm, pour construire et justifier les termes du développement asymptotique de $\mathbf{Z}_\delta$, donné formellement par l'Anstaz :

$$\mathbf{Z}_\delta = \mathbf{Z}^{(0)} + \delta \mathbf{Z}^{(1)} + \delta^2 \mathbf{Z}^{(2)} + \dots + \delta^j \mathbf{Z}^{(j)} + \dots$$

L'étude de la convergence repose sur l'argument de stabilité établi pour les couches minces homogènes dans [16] et qui reste encore valable dans ce cas, si on suppose que les coefficients de contraste et d'indice de réfraction vérifient des estimations uniformes en δ assurant la coercivité et la continuité des formes bilinéaires qui apparaissent dans les différentes formulations variationnelles. On suppose alors que ces coefficients sont décrits par deux fonctions $\alpha(\cdot)$ et $\beta(\cdot)$ régulières de classe $C^\infty(\Omega_\delta^+)$ et qu'il existe deux constantes positives c_1 et c_2 ($0 < c_1 < c_2$), telles que pour tout $\delta > 0$ assez petit, on a les deux estimations suivantes :

$$c_1 \leq \alpha(x) \leq c_2 \tag{3.1a}$$

$$0 \leq \beta(x) \leq c_2 \tag{3.1b}$$

presque partout en $x \in \bar{\Omega}_\delta^+$. Pour considérer aussi le cas non uniforme, on a choisi de représenter l'épaisseur par une fonction $\delta h(\cdot)$ où h est assez régulière, dépendant uniquement de la variable tangentielle m sur Γ et telle que :

$$0 < h_* \leq h(m) \leq h^* \tag{3.2}$$

presque partout en $m \in \Gamma$; h_* et h^* sont deux constantes qui ne dépendent pas de δ . En conservant les mêmes notations que le chapitre précédent et en considérant la forme générale de l'équation aux dérivées partielles posée dans la couche mince :

$$\operatorname{div}(\alpha \nabla u_\delta^+) + k^2 \beta u_\delta^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+),$$

qui représente le comportement du champ d'onde dans la couche hétérogène où α varie, la formulation variationnelle du problème de diffraction s'écrit alors, dans un espace qui dépend du paramètre δ , comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\delta \in X_\delta; \forall v \in X_\delta \\ \int_{\Omega_\delta^+} (\alpha \nabla u_\delta^+ \nabla v^+ - k^2 \beta u_\delta^+ v^+) dx \\ + \int_{\Omega} (\nabla u_\delta^- \nabla v^- - k^2 u_\delta^- v^-) dx + \langle \mathbf{S}_k u_\delta^-, v^- \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} = \int_{\Omega} f v^- dx. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Le cadre fonctionnel retenu pour l'analyse asymptotique relativement au petit paramètre δ est celui de l'alternative de Fredholm dans un espace fixe. Pour cela, un changement d'échelle est effectué dans la couche mince en introduisant les coordonnées tangentielle et normale qui permettent de récrire l'opérateur $\operatorname{div}(\alpha \nabla \cdot)$ d'une manière explicite relativement à l'épaisseur et d'extraire ainsi le terme de perturbation singulière dans la formulation. La stabilité de la solution u_δ par rapport au petit paramètre δ est obtenue à l'aide d'une prise en compte correcte de la convergence de ce terme dans un cadre fonctionnel convenable, soulignant aussi le fait que la régularité de la frontière Γ est essentielle pour établir les estimations *a priori* nécessaires.

3.2 Changement d'échelle et formulation variationnelle dans un domaine fixe

Soit $s \in [0, L]$ une abscisse curviligne locale du point $m(s)$ de l'arc Γ (supposé de longueur $L > 0$). On définit le vecteur tangent $\boldsymbol{\tau}$ et le rayon de courbure scalaire R par :

$$\boldsymbol{\tau} = \partial_s m, \quad \partial_s \mathbf{n} = \frac{\boldsymbol{\tau}}{R(s)},$$

où $\mathbf{n}$ est le vecteur normal unitaire défini par :

$$\mathbf{n} = \frac{\partial_s^2 m}{|\partial_s^2 m|}$$

$[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]$ représente ainsi la base directe locale de Frénet attachée à la courbe Γ . Soit $\Omega^+ = \Gamma \times (0, 1)$ et η la paramétrisation

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega^+ \xrightarrow{\eta} \Omega_\delta^+ \\ (m, t) \mapsto x = m + t \delta h \mathbf{n}(m) \end{array} \right.$$

On sait que pour δ suffisamment petit, l'application η réalise un C^∞ difféomorphisme de variétés entre Ω^+ et Ω_δ^+ (cf. [29]). Dans toute la suite, on aura tendance à confondre le point

$m \in \Gamma$ avec son abscisse curviligne $s \in [0, L]$. Ainsi, à toute fonction v définie sur Ω_δ^+ , on associe la fonction $\hat{v}$ définie sur le domaine fixe Ω^+ grâce à la relation

$$\begin{cases} x = \eta(s, t) \\ \hat{v}(s, t) = v(x) \end{cases}$$

On obtient alors les règles de dérivation suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \delta h \mathbf{n} \\ \partial_s x &= \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) \boldsymbol{\tau} + t\delta (\partial_s h) \mathbf{n} \end{aligned}$$

et par conséquent, le gradient de v dans la base locale $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]$ s'écrit comme suit :

$$\nabla v = \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} \left(\partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t\right) \hat{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \delta^{-1} h^{-1} \partial_t \hat{v} \cdot \mathbf{n}$$

Notons que $(1 + t\delta h/R)^{-1}$ existe bien lorsque δ est suffisamment petit. D'autre part, l'élément de surface $d\Omega_\delta^+$ est donné de manière intrinsèque par la relation

$$d\Omega_\delta^+ = \delta h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) ds dt$$

Pour simplifier l'écriture, les notations v et $\hat{v}$ seront confondues. Alors la formulation variationnelle (3.3) peut être réécrite de manière équivalente dans un espace fixe par rapport à δ , comme suit :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in X; \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + \delta b^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^-, v^-) = \int_\Omega f v^- dx, \end{cases} \quad (3.4)$$

où les formes bilinéaires $a^+(\delta, \cdot, \cdot)$, $b^+(\delta, \cdot, \cdot)$ et $a_k^-(\delta, \cdot, \cdot)$ sont définies sur l'espace de Hilbert $X = X^{(N)}$ (respectivement $X^{(D)}$) selon la polarisation, tel que :

$$\begin{aligned} X^{(N)} &= \{(v^+, v^-) \in H^1(\Gamma \times (0, 1)) \times H^1(\Omega) : v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma\} \\ X^{(D)} &= \{v = (v^+, v^-) \in X^{(N)} : v^+(\cdot, 1) = 0\} \end{aligned}$$

et elles sont données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} a^+(\delta, u, v) &= \int_{\Gamma \times (0, 1)} \alpha h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} \left(\partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t\right) u \left(\partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t\right) v ds dt \\ &\quad + \delta^{-2} \int_{\Gamma \times (0, 1)} \frac{\alpha}{h} \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) \partial_t u \partial_t v ds dt \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$b^+(\delta, u, v) = -k^2 \int_{\Gamma \times (0, 1)} \beta h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) u v ds dt \quad (3.6)$$

$$a_k^-(u, v) = \int_\Omega \nabla u \nabla v dx - k^2 \int_\Omega u v dx + \langle S_k u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} \quad (3.7)$$

3.3 L'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet

Le poids δ portant sur la forme $a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ dans la formulation (3.4), il se comporte, pour un second membre plus général, comme une perturbation singulière de la solution u_δ qui s'exprime par le fait que les dérivées tangentielles $\partial_s u_\delta^+$ ne sont pas bornées dans $L^2(\Omega^+)$ quand δ tend vers 0. En fait, pour δ fixé, la forme bilinéaire $\delta a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ participe dans la partie coercive de la formulation (3.4) et permet de contrôler la norme de la solution même dans le milieu extérieur Ω . Malheureusement, ce n'est plus le cas lorsque δ tend vers 0. En outre, la non contrôlabilité du signe du membre de gauche dans (3.4) pour $v = \bar{u}_\delta$ conduit à une dépendance singulière de u_δ par rapport à δ même dans le domaine Ω . Heureusement, par la suite, les seconds membres qui apparaissent dans l'analyse asymptotique de ce problème se comportent de manière à compenser cette singularité. Pour traiter le terme $\delta a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ on a trouvé pratique d'introduire l'opérateur différentiel qui dépend de h

$$D_{(h)} \stackrel{\text{déf}}{=} \partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t$$

Notons que si la couche mince est homogène et uniforme alors h est une constante normalisée à 1. Par conséquent $D_{(h)}$ se réduit simplement à ∂_s . Ainsi, la forme bilinéaire $a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ se réécrit de manière similaire à celle utilisée dans la formulation de Bendali-Lemrabet [16] :

$$\begin{aligned} a^+(\delta, u, v) &= \int_{\Gamma \times (0,1)} \alpha \left(1 + \frac{t\delta}{R}\right)^{-1} \partial_s u \partial_s v ds dt \\ &\quad + \delta^{-2} \int_{\Gamma \times (0,1)} \alpha \left(1 + \frac{t\delta}{R}\right) \partial_t u \partial_t v ds dt \end{aligned}$$

On rappelle alors que le théorème de stabilité est basé sur un passage à la limite correct dans l'alternative de Fredholm reposant sur l'injection compacte de l'espace $H^1(0, 1, L^2(\Gamma))$ dans $H^1(\Omega^+)$ où $H^1(0, 1, L^2(\Gamma))$ est l'espace des fonctions v^+ qui sont $H^1(0, 1)$ par rapport à t et $L^2(\Gamma)$ par rapport à s . Il constitue un outil principal pour les estimations de convergence dans l'analyse asymptotique et qui ont lieu par rapport à une topologie plus faible que celle de X , à savoir dans un espace de Hilbert plus grand $Y = Y^{(N)}$ (respectivement $Y^{(D)}$) selon la polarisation considérée, avec :

$$\begin{aligned} Y^{(N)} &= \{ (v^+, v^-) \in H^1(0, 1, L^2(\Gamma)) \times H^1(\Omega) : v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma \} \\ Y^{(D)} &= \{ v = (v^+, v^-) \in X^{(N)} : v^+(\cdot, 1) = 0 \} \end{aligned}$$

A noter que la topologie de Y possède l'avantage de ne pas affecter la norme H^1 dans le milieu effectif de calcul Ω . Tel qu'il a été énoncé dans Bendali-Lemrabet [16], le théorème de stabilité nous dit que la norme dans Y de la solution de (3.4) est du même ordre en δ que la perturbation du second membre dans le sens suivant :

Théorème 3.1 (de stabilité) *Soit $\{L_\delta\}_{\delta>0}$ une famille de formes linéaires sur X telles que pour tout $\delta > 0$ et $v \in X$ on ait :*

$$|L_\delta v| \leq l(\delta) \left\{ \delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right\}.$$

Alors, il existe une constante c indépendante de $\delta > 0$, telle que la solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in X, & \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + \delta b^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^-, v^-) = L_\delta v. \end{cases}$$

satisfait l'estimation :

$$\|u_\delta\|_Y \leq cl(\delta). \quad (3.8)$$

où $l(\delta)$ est une constante qui dépend de δ .

Ainsi, grâce aux estimations (3.1a), (3.1b) et (3.2) qui sont uniformes en δ , ce même argument de stabilité sera encore valable pour les couches minces hétérogènes et non uniformes si on montre que la semi-norme $|\cdot|_{h,\Omega^+}$ définie par :

$$|u|_{h,\Omega^+} = \|D_{(h)}u\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+}$$

est équivalente à la semi-norme naturelle dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega^+)$ qui est définie par

$$|u|_{1,\Omega^+} = \|\partial_s u\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+}$$

En effet, il est d'abord aisé de vérifier que $|\cdot|_{h,\Omega^+}$ est bien une semi-norme sur $H^1(\Omega^+)$. Ensuite, on a d'une part :

$$\begin{aligned} |u|_{h,\Omega^+} &= \left\| \partial_s u - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u \right\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+} \\ &\leq \|\partial_s u\|_{0,\Omega^+} + \left\| \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u \right\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+}, \end{aligned}$$

d'où, puisque h est régulière sur Γ compacte, alors $\partial_s h$ est borné et par conséquent il existe une constante $c \geq 0$ telle que pour tout $u \in H^1(\Omega^+)$:

$$|u|_{h,\Omega^+} \leq \|\partial_s u\|_{0,\Omega^+} + (c^2 + 1) \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |u|_{1,\Omega^+} &= \|\partial_s u\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+} \\ &= \left\| \partial_s u - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u + \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u \right\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+} \\ &\leq \left\| \partial_s u - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u \right\|_{0,\Omega^+} + \left\| \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t u \right\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+} \\ &\leq \|D_{(h)}u\|_{0,\Omega^+} + (c^2 + 1) \|\partial_t u\|_{0,\Omega^+} \end{aligned}$$

On conclut alors que pour tout $u \in H^1(\Omega^+)$:

$$\frac{1}{(c^2 + 1)} |u|_{1,\Omega^+} \leq |u|_{h,\Omega^+} \leq (c^2 + 1) |u|_{1,\Omega^+}$$

Par conséquent, la semi-norme $|\cdot|_{h,\Omega^+}$ est bien équivalente à $|\cdot|_{1,\Omega^+}$ dans l'espace de Hilbert $H^1(\Omega^+)$. Ainsi, la stabilité de la solution par rapport au petit paramètre δ est encore vraie dans le cas des couches minces hétérogènes et non uniformes.

Remarque 3.1 Notons que la constante c dans l'estimation précédente est affectée surtout par les variations de h relativement à la variable tangentielle, supposées ici lentes. On conclut alors que si on considère que h varie rapidement par rapport à s , comme par exemple dans le cas d'une rugosité, alors l'argument de stabilité doit être revu de plus près.

3.4 Analyse asymptotique

3.4.1 Introduction

L'analyse asymptotique consiste à déterminer une suite d'éléments $u_0, u_1, \dots$ dans X de manière récursive telle que pour tout entier j , la solution u_δ du problème (3.4) s'écrit, d'abord formellement, comme suit :

$$u_\delta^-(x) = u_0^-(x) + \delta u_1^-(x) + \dots + \delta^j u_j^-(x) + \delta^{j+1} u_{\delta,j}^-(x) \quad (3.9)$$

$$u_\delta^+(s, t) = u_0^+(s, t) + \delta u_1^+(s, t) + \dots + \delta^j u_j^+(s, t) + \delta^{j+1} u_{\delta,j}^+(s, t) \quad (3.10)$$

Ensuite, grâce aux estimations de convergence, on montre que $u_{\delta,j}$ est un reste dans X tel que sa norme dans Y soit uniformément bornée en δ . Plus le second membre est régulier, plus on peut déterminer de termes u_j . On se contente, ici, d'explicitier les calculs jusqu'à l'ordre 2 seulement, la condition d'ordre 3 n'est pas décrite car comme dans Bendali-Lemrabet [16], elle n'est pas stable. Les deux types de conditions aux limites seront alors considérées séparément en soulignant le fait que la condition de type Neumann (polarisation TE) est celle qui présente le plus de difficulté et par conséquent nécessite plus d'attention dans l'analyse de convergence. Plus précisément, les termes u_j seront déterminés de la manière suivante :

On remplace dans $a^+(\delta, \dots)$ l'inverse de $(1 + \frac{t\delta h}{R})$ à l'aide de son développement exact suivant :

$$\left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} = 1 - \delta \frac{th}{R} + \dots + \delta^j \left(-\frac{th}{R}\right)^j + \frac{\left(-\frac{t\delta h}{R}\right)^{j+1}}{1 + \frac{t\delta h}{R}}, \quad (3.11)$$

et on injecte (3.9) et (3.10) dans la formulation (3.4). On obtient alors, en identifiant les puissances de δ , des équations variationnelles dont la résolution fait appel constamment à un lemme pour résoudre une équation différentielle ordinaire sous forme variationnelle et qui est spécifique à la condition aux limites considérée. Dans toute la suite, le crochet $\langle \cdot \rangle_\eta$ désignera la moyenne arithmétique en la variable $\eta \in (0, 1)$ d'une certaine fonction, i.e.

$$\langle \cdot \rangle_\eta = \int_0^1 \cdot d\eta.$$

Par la suite, on utilisera constamment la propriété de régularité classique de la solution du problème extérieur de Neumann (respectivement Dirichlet) homogène, suivante : pour tout réel $s \geq 0$, si $f \in H^s(\Omega)$ alors $u_0^-|_\Gamma \in H^{s+\frac{3}{2}}(\Gamma)$ (respectivement $\partial_{\mathbf{n}} u_0^-|_\Gamma \in H^{s+\frac{1}{2}}(\Gamma)$).

3.4.2 Analyse asymptotique du problème avec condition aux limites de type Neumann

On utilisera fréquemment le lemme suivant, spécifique à la condition de Neumann, et dont la vérification est directe.

Lemme 3.1 *Soient $p, g \in L^2(\Gamma \times (0, 1))$ tel que $\partial_s g \in L^2(\Gamma \times (0, 1))$. Alors la solution l de l'équation variationnelle suivante :*

$$\begin{cases} \forall v^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Gamma \times (0, 1)) \\ \int_{\Gamma \times (0,1)} l \partial_t v^+ ds dt = - \int_{\Gamma \times (0,1)} (g \partial_s v^+ + p v^+) ds dt, \end{cases}$$

où

$$H_{0,\Gamma}^1(\Gamma \times (0, 1)) \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in H^1(\Gamma \times (0, 1)) : v^+(\cdot, 0) = 0 \text{ sur } \Gamma\}$$

est donnée explicitement par

$$l(s, t) = \int_t^1 (\partial_s g(s, t') - p(s, t')) dt' \quad (3.12)$$

Si en outre, on a $v^+(\cdot, 0) \neq 0$, alors

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} (l \partial_t v^+ + g \partial_s v^+ + p v^+) ds dt = - \int_{\Gamma} l(s, 0) v^+(s, 0) ds. \quad (3.13)$$

Termes en $\delta^{(-1)}$: Pour tout $v^+ \in H^1(\Gamma \times (0, 1))$,

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_0^+ \partial_t v^+ ds dt = 0. \quad (3.14)$$

Le lemme 3.1 implique donc, en choisissant

$$l = \frac{\alpha}{h} \partial_t u_0^+, \quad p = g = 0$$

le premier résultat attendu :

$$\partial_t u_0^+ = 0 \quad (3.15)$$

On conclut alors, que

$$u_0^+(s, \cdot) = u_0^-(s) : \forall s \in \Gamma. \quad (3.16)$$

Cette propriété sera utilisée systématiquement dans l'identification de degré 0 :

Termes en $\delta^{(0)}$: Pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(N)}$,

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_1^+ \partial_t v^+ ds dt + a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx \quad (3.17)$$

D'où, avec le choix de fonctions test telles que $v^- = 0$, on obtient :

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_1^+ \partial_t v^+ ds dt = 0, \forall v^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Gamma \times (0,1)) \quad (3.18)$$

On obtient alors à l'aide du lemme 3.1 et en choisissant :

$$l = \frac{\alpha}{h} \partial_t u_1^+, \quad p = g = 0$$

le résultat :

$$\partial_t u_1^+ = 0 \quad (3.19)$$

Par conséquent, l'équation variationnelle (3.17) montre que u_0^- est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_0^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_0^- + k^2 u_0^- = -f \\ \partial_n u_0^- = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_0^- - i k u_0^-) = 0 \end{cases} \quad (3.20)$$

On observe donc qu'à l'ordre 0, l'effet de la couche mince est complètement négligé. De la régularité elliptique de la solution de ce problème, on déduit que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et en vertu de (3.16), on obtient $u_0 \in X^{(N)}$.

Termes en $\delta^{(1)}$ En se servant des résultats précédents sur u_0 et u_1^+ , on obtient que pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(N)}$:

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \left[\frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ + \alpha h \partial_s u_0^- D_{(h)} v^+ - k^2 \beta h u_0^- v^+ \right] ds dt + a_k^- (u_1^-, v^-) = 0 \quad (3.21)$$

De même, le choix $v^- = 0$ conduit à l'équation, pour tout $v^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Gamma \times (0,1))$:

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \left[\frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ + \alpha h \partial_s u_0^- \partial_s v^+ - k^2 \beta h u_0^- v^+ \right] ds dt = 0 \quad (3.22)$$

D'où, le lemme 3.1 avec le choix

$$l = \frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ - \alpha t (\partial_s h) \partial_s u_0^-, \quad p = -k^2 \beta h u_0^-, \quad g = \alpha h \partial_s u_0^- \quad (3.23)$$

conduit à

$$l(s, t) = \int_t^1 (\partial_s (\alpha h \partial_s u_0^-) + k^2 \beta h u_0^-) dt' \quad (3.24)$$

$$l(s, 0) = \partial_s (\alpha_0 h \partial_s u_0^-) + k^2 \beta_0 h u_0^- \quad (3.25)$$

où $\alpha_0 = \langle \alpha \rangle_t$ et $\beta_0 = \langle \beta \rangle_t$ sont les moyennes arithmétiques (moments d'ordre 0) par rapport à la variable t dans $(0,1)$. Lorsque $v^+(\cdot, 0) \neq 0$, l'équation (3.21) montre donc que u_1^- est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_1^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_1^- + k^2 u_1^- = 0 \\ \partial_n u_1^- + Z^{(1)} u_0^- = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_1^- - i k u_1^-) = 0 \end{cases} \quad (3.26)$$

où $Z^{(1)}$ est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 2, défini pour tout $\phi \in H^2(\Gamma)$ par :

$$Z^{(1)}\phi = -\partial_s(\alpha_0 h \partial_s \phi) - k^2 \beta_0 h \phi \quad (3.27)$$

Par conséquent, si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^2(\Gamma)$, i.e. $\partial_n u_1^- \in L^2(\Gamma)$ et à l'aide de la régularité des coefficients α et β , on obtient $u_1 \in X^{(N)}$.

Termes en $\delta^{(2)}$ En se servant toujours des résultats précédents sur u_0 et u_1 , on obtient que pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(N)}$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \left[\partial_t u_3^+ + \frac{th}{R} \partial_t u_2^+ - th \left(\partial_s u_1^- - \frac{th}{R} \partial_s u_0^- \right) (\partial_s h_s) \right] \partial_t v^+ ds dt \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} \alpha h \left(\partial_s u_1^- - \frac{th}{R} \partial_s u_0^- \right) \partial_s v^+ ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \beta h \left(u_1^- + \frac{th}{R} u_0^- \right) v^+ ds dt + a_k^-(u_2^-, v^-) = 0 \end{aligned} \quad (3.28)$$

En appliquant le lemme 3.1 avec

$$\begin{aligned} l &= \frac{\alpha}{h} \left(\partial_t u_3^+ + \frac{th}{R} \partial_t u_2^+ - th \left(\partial_s u_1^- - \frac{th}{R} \partial_s u_0^- \right) (\partial_s h_s) \right) \\ p &= -k^2 \beta h \left(u_1^- + \frac{th}{R} u_0^- \right) \\ g &= \alpha h \left(\partial_s u_1^- - \frac{th}{R} \partial_s u_0^- \right) \end{aligned} \quad (3.29)$$

on obtient :

$$l(s, t) = \int_t^1 \left[\partial_s (\alpha h \partial_s u_1^-) + k^2 \beta h u_1^- - \partial_s \left(\frac{\alpha t' h^2}{R} \partial_s u_0^- \right) + k^2 \frac{\beta t' h^2}{R} u_0^- \right] dt' \quad (3.30)$$

$$l(s, 0) = \partial_s (\alpha_0 h \partial_s u_1^-) + k^2 \beta_0 h u_1^- - \partial_s \left(\alpha_1 \frac{h^2}{R} \partial_s u_0^- \right) + k^2 \beta_1 \frac{h^2}{R} u_0^-$$

où $\alpha_j = \langle t^j \alpha \rangle_t$ et $\beta_j = \langle t^j \beta \rangle_t$ sont les moments arithmétiques d'ordre j par rapport à la variable t dans $(0,1)$. Lorsque $v^+(\cdot, 0) \neq 0$, l'équation (3.28) montre que u_2^- est l'unique

solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_2^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_2^- + k^2 u_2^- = 0 \\ \partial_n u_2^- + Z^{(1)} u_1^- + Z^{(2)} u_0^- = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_2^- - i k u_2^-) = 0 \end{cases} \quad (3.31)$$

où $Z^{(2)}$ est un opérateur différentiel tangentiel d'ordre 2, défini pour tout $\phi \in H^2(\Gamma)$ par :

$$Z^{(2)}\phi = \partial_s \left(\alpha_1 \frac{h^2}{R} \partial_s \phi \right) - k^2 \beta_1 \frac{h^2}{R} \phi \quad (3.32)$$

Si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^3(\Gamma)$, i.e. $\partial_n u_1^- \in H^1(\Gamma)$ et à l'aide de la régularité des coefficients α et β , on obtient $u_2 \in X^{(N)}$.

Remarque 3.2 *On peut poursuivre cette méthode récursive et construire ainsi tous les termes u_j du développement asymptotique mais avec une difficulté croissante. Ceci est dû surtout au caractère hétérogène de la couche mince et non à la non uniformité de l'épaisseur, puisque cette dernière varie par rapport à la variable tangentielle seulement, alors que le premier dépend foncièrement de la variable normale. Cette dépendance entraîne l'apparition des termes de mémoire associés aux coefficients α et β à partir de l'ordre $j = 3$. En outre, la condition d'impédance approchée de Neumann associée à cette ordre n'est pas stable comme cela a été mentionné par Bendali-Lemrabet [16] même dans le cas homogène et uniforme.*

3.4.3 Analyse asymptotique du problème avec condition aux limites de type Dirichlet

En suivant, étape par étape, l'analyse précédente faite dans le cas d'une condition de type Neumann, on obtient une hiérarchie d'équations variationnelles qui peuvent être résolues par un lemme similaire que nous énonçons ici :

Lemme 3.2 *Soit $g \in L^2(\Gamma \times (0, 1))$ vérifiant les hypothèses générales du lemme 3.1. Soient p, q, r respectivement dans $H^1(0, 1; L^2(\Gamma))$, $L^2(\Gamma \times (0, 1))$, $L^2(\Gamma)$. Alors la solution l de l'équation variationnelle suivante :*

$$\begin{cases} \forall v^+ \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Gamma \times (0, 1)) \\ \int_{\Gamma \times (0, 1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t l \partial_t v^+ ds dt = - \int_{\Gamma \times (0, 1)} [g \partial_s v^+ + p \partial_t v^+ + q v^+] ds dt - \int_{\Gamma} r v^+ ds \end{cases}$$

où

$$H_{0,\Gamma_1}^1(\Gamma \times (0, 1)) \stackrel{\text{déf}}{=} \{v \in H^1(\Gamma \times (0, 1)) : v^+(\cdot, 1) = 0 \text{ sur } \Gamma\},$$

est donnée explicitement par les relations suivantes :

$$\theta(\cdot, t) = \frac{h}{\alpha} \left(\int_0^t (q - \partial_s g) dt' + p(\cdot, 0) - p(\cdot, t) \right) \quad (3.33)$$

$$l(., 0) = -\langle \theta \rangle_t - \frac{h}{\mu_0} (r - p(., 0)) \quad (3.34)$$

$$l(., t) = l(., 0) + \int_0^t \theta dt' + h \left(\int_0^t \frac{1}{\alpha} dt' \right) (r - p(., 0)) \quad (3.35)$$

où $\mu_0(s) = \langle \alpha^{-1} \rangle_t^{-1}$ est la moyenne harmonique (moment d'ordre 0) de α par rapport à t sur $(0, 1)$.

Termes en $\delta^{(-1)}$: Pour tout $v^+ \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Gamma \times (0, 1))$,

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_0^+ \partial_t v^+ ds dt = 0. \quad (3.36)$$

Donc, le lemme 3.2 implique, en choisissant :

$$l = u_0^+, \quad p = g = q = 0, \quad r = 0$$

que $\theta = 0$ et par conséquent, le résultat attendu pour u_0^+ , à savoir :

$$l = u_0^+ = 0 : \Gamma \times (0, 1) \quad (3.37)$$

On conclut alors en utilisant la condition de transmission sur Γ que :

$$u_0^-|_{\Gamma} = 0 \quad (3.38)$$

Termes en $\delta^{(0)}$: Pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(D)}$,

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_1^+ \partial_t v^+ ds dt + a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx \quad (3.39)$$

Donc, pour des fonctions test telles que $v^+ = 0$, on obtient :

$$a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx : \forall v^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \quad (3.40)$$

Par conséquent, u_0^- est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_0^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\infty}) \\ \Delta u_0^- + k^2 u_0^- = -f \\ u_0^-|_{\Gamma} = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_0^- - i k u_0^-) = 0 \end{cases} \quad (3.41)$$

A l'ordre 0, l'effet de la couche mince est donc complètement négligé. De la régularité elliptique de la solution de ce problème et en vertu de (3.37), on déduit que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $\partial_n u_0^- \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et aussi $u_0 \in X^{(D)}$. La formule de Green appliquée à l'équation (3.40) donne maintenant :

$$a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx + \int_{\Gamma} \partial_n u_0^- v^- d\Gamma : \quad \forall v^- \in H^1(\Omega) \quad (3.42)$$

et par conséquent, l'équation (3.39) devient :

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_1^+ \partial_t v^+ ds dt + \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_0^- v^- ds = 0 : \forall v^+ \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Gamma \times (0,1)) \quad (3.43)$$

Ainsi, en appliquant le lemme (3.2) avec

$$l = u_1^+, \quad g = p = q = 0, \quad r = \partial_{\mathbf{n}} u_0^-,$$

on obtient $\theta = 0$ et par conséquent

$$u_1^-|_{\Gamma} = u_1^+(\cdot, 0) = -\frac{h}{\mu_0} \partial_{\mathbf{n}} u_0^- \quad (3.44)$$

$$u_1^+(\cdot, t) = u_1^-|_{\Gamma} + h \left(\int_0^t \frac{1}{\alpha} dt' \right) \partial_{\mathbf{n}} u_0^- \quad (3.45)$$

Termes en $\delta^{(1)}$: En se servant du fait que $u_0^+ = 0$, pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(D)}$, on a :

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ + \frac{\alpha t}{R} \partial_t u_1^+ \right) \partial_t v^+ ds dt + a_k^-(u_1^-, v^-) = 0 \quad (3.46)$$

D'où, en posant $v^+ = 0$, on obtient :

$$a_k^-(u_1^-, v^-) = 0 : \quad \forall v^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \quad (3.47)$$

et par conséquent, u_1^- est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_1^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\infty}) \\ \Delta u_1^- + k^2 u_1^- = 0 \\ u_1^-|_{\Gamma} = -\frac{h}{\mu_0} \partial_{\mathbf{n}} u_0^- \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_1^- - i k u_1^-) = 0 \end{cases} \quad (3.48)$$

Si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, la régularité elliptique de la solution du problème (3.41) implique $\partial_{\mathbf{n}} u_0^-|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$, i.e. $u_1^-|_{\Gamma} \in H^1(\Gamma)$ et d'après la relation (3.45), u_1 est complètement déterminé comme élément de $X^{(D)}$. Ainsi $\partial_{\mathbf{n}} u_1^-|_{\Gamma} \in L^2(\Gamma)$ et la formule de Green appliquée à l'équation (3.40) donne :

$$a_k^-(u_1^-, v^-) = \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_1^- v^- ds : \quad \forall v^- \in H^1(\Omega) \quad (3.49)$$

Ensuite, d'après la relation (3.45) on a $\partial_t u_1^+ = (h/\alpha) \partial_{\mathbf{n}} u_0^-$ et en remplaçant dans (3.46), on obtient pour tout $v^+ \in H_{0,\Gamma_1}^1(\Gamma \times (0,1))$:

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt + \int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{th}{R} \partial_{\mathbf{n}} u_0^- \partial_t v^+ ds dt + \int_{\Gamma} \partial_{\mathbf{n}} u_1^- v^- ds = 0 \quad (3.50)$$

D'où, le lemme (3.2) implique, si on prend

$$l = u_2^+, \quad p = \frac{th}{R} \partial_{\mathbf{n}} u_0^-, \quad g = q = 0, \quad r = \partial_{\mathbf{n}} u_1^-$$

que :

$$\theta = -\frac{th^2}{R\alpha}\partial_{\mathbf{n}}u_0^-$$

$$u_2^+(\cdot, 0) = \frac{h^2}{R}\left\langle\frac{t}{\alpha}\right\rangle_t\partial_{\mathbf{n}}u_0^- - \frac{h}{\mu_0}\partial_{\mathbf{n}}u_1^- \quad (3.51)$$

$$u_2^+(\cdot, t) = u_2^+(\cdot, 0) + \frac{h^2}{R}\left(\int_0^t \frac{t'}{\alpha}dt'\right)\partial_{\mathbf{n}}u_0^- + h\left(\int_0^t \frac{1}{\alpha}dt'\right)\partial_{\mathbf{n}}u_1^- \quad (3.52)$$

Si on note $\mu_1 = \langle t\alpha^{-1} \rangle_t^{-1}$ le moment harmonique d'ordre 1 de α par rapport à t sur $(0, 1)$, alors à l'aide de (3.51) et de la continuité de la trace au travers de Γ , on déduit la condition vérifiée par u_2^- sur Γ :

$$u_2^- = -\frac{h}{\mu_0}\partial_{\mathbf{n}}u_1^- + \frac{h^2}{\mu_1}\frac{1}{R}\partial_{\mathbf{n}}u_0^- \quad (3.53)$$

Termes en $\delta^{(2)}$: En utilisant les résultats précédents pour u_0 , u_1 et u_2^+ , on obtient, pour tout $(v^+, v^-) \in X^{(D)}$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_3^+ \partial_t v^+ ds dt \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\left(\frac{th}{R} \right)^2 \partial_{\mathbf{n}} u_0^- + \frac{th}{R} \partial_{\mathbf{n}} u_1^- - \alpha t (\partial_s h) \partial_s u_1^+ \right) \partial_t v^+ ds dt \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} (-\alpha h \partial_s u_1^+ \partial_s v^+ - k^2 \beta h u_1^+ v^+) ds dt + a_k^-(u_2^-, v^-) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (3.54)$$

et par conséquent, si on choisit $v^+ = 0$, il vient :

$$a_k^-(u_2^-, v^-) = 0; \quad \forall v^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega) \quad (3.55)$$

D'où, u_2^- est l'unique solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_2^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_2^- + k^2 u_2^- = 0 \\ u_2^-|_\Gamma = -\frac{h}{\mu_1} \left(\frac{\mu_0}{R} \right) \partial_{\mathbf{n}} u_1^- - \frac{h}{\mu_0} \partial_{\mathbf{n}} u_0^- \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_2^- - i k u_2^-) = 0 \end{cases} \quad (3.56)$$

Ensuite si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, la régularité elliptique de la solution du problème (3.41) implique $\partial_{\mathbf{n}} u_0^-|_\Gamma \in H^2(\Gamma)$, i.e. $u_1^-|_\Gamma \in H^2(\Gamma)$ donc $\partial_{\mathbf{n}} u_1^-|_\Gamma \in H^1(\Gamma)$ et d'après la relation (3.52) u_2 est complètement déterminé comme élément de $X^{(D)}$.

Remarque 3.3 Notons qu'à ce niveau là, le contraste β n'est pas encore intervenu dans le développement asymptotique; c'est pourquoi il sera nécessaire de continuer jusqu'à l'ordre $j \geq 3$ si on veut recouvrir cette propriété dans l'approximation. Ceci n'est pas notre souci dans cette thèse et peut se faire en suivant le schéma précédent. Par exemple, pour $j = 3$, la formule de Green appliquée à l'équation (3.55) puis le lemme (3.2) appliqué à l'équation variationnelle (3.54), permettent de déterminer la condition vérifiée par le terme u_3^- . En fait, à cause de la dépendance de u_1^+ en t , les calculs deviennent assez lourds et conduisent à des moments harmoniques en t avec des termes de mémoire pour les coefficients α et β .

3.4.4 Justification de la convergence du développement asymptotique vers la solution exacte : Cas de la condition aux limites de type Neumann

Le cas de la polarisation (TE) ou de la condition aux limites de type Neumann est considéré d'abord en raison des difficultés supplémentaires qu'il présente par rapport à l'autre polarisation (TM) ou la condition aux limites de type Dirichlet. Les résultats de convergence sont alors valables pour l'une ou l'autre des deux polarisations. On tronque l'Ansatz (3.9), (3.10) jusqu'aux termes du second ordre, i.e. on approche la solution exacte u_δ par la fonction $\phi_\delta^j \in X (= X^{(N)} \text{ ou } X^{(D)})$, $j = 0, 1, 2$, telle que :

$$\phi_\delta^{j+}(s, t) = \sum_{l=0}^j \delta^l u_l^+(s, t) \quad (3.57)$$

$$\phi_\delta^{j-}(x) = \sum_{l=0}^j \delta^l u_l^-(x) \quad (3.58)$$

Nous sommes alors en position de montrer, dans un premier temps, le théorème de convergence non optimal suivant.

Théorème 3.2 Pour chaque $j = 0, 1, 2$, il existe une constante c indépendante de δ et du terme source f , telle que :

$$\|u_\delta - \phi_\delta^j\|_Y \leq c\delta^{j+\frac{1}{2}} \|f\|_{s,\Omega} \quad (3.59)$$

où $s = 0$ pour $j = 0$ et $s = j - 1/2$ pour $j = 1$ ou 2 .

Preuve: Notons qu'on utilise une même lettre c pour désigner différentes constantes. On commence d'abord par le cas $j = 0$. En vertu des propriétés de u_0 obtenues précédemment, on a $\phi_\delta^0 = u_0$. Posons, pour tout $v \in X (= X^{(N)})$:

$$\delta a^+(\delta, u_\delta^+ - u_0^+, v^+) + \delta b^+(\delta, u_\delta^+ - u_0^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^- - u_0^-, v^-) = L_\delta^{(0)}v$$

Alors, on obtient, en se servant des équations vérifiées par u_δ et u_0 , que :

$$L_\delta^{(0)}v = -\delta \int_{\Omega^+} \left[\alpha h \left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right)^{-1} \partial_s u_0^- D_{(h)} v^+ - k^2 \beta h \left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right) u_0^- v^+ \right] ds dt \quad (3.60)$$

Rappelons que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u_0 \in X$. Donc, en utilisant les estimations uniformes en δ sur α , β et h , on montre aisément qu'il existe une constante c indépendante de δ (assez petit) et de $f \in L^2(\Omega)$, telle que :

$$\left| L_\delta^{(0)} v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \left(\delta \|D_{(h)} v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta \|v^+\|_{0,\Omega^+} \right) \quad (3.61)$$

Ensuite, en explicitant l'opérateur $D_{(h)}$ et en utilisant des arguments standards basés sur l'estimation classique suivante :

$$\|v^+\|_{0,\Omega^+} \leq c \left(\|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (3.62)$$

on obtient directement l'estimation attendue :

$$\left| L_\delta^{(0)} v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \delta^{\frac{1}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (3.63)$$

Finalement, la preuve de (3.59) pour $j = 0$ est achevée grâce au théorème de stabilité (3.1).

De même, pour le cas $j = 1$ on définit pour tout $v \in X$:

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)} v &= \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_\delta^- - u_0^- - \delta u_1^-, v^-) \\ &= L_\delta^{(0)} v - \delta a_k^- (u_1^-, v^-) - \delta^2 a^+ (\delta, u_1^+, v^+) - \delta^2 b^+ (\delta, u_1^+, v^+) \end{aligned}$$

Il est aisé de vérifier grâce à (3.60) et (3.21) et le développement exact d'ordre zéro suivant :

$$\left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right)^{-1} = 1 - \frac{\frac{t\delta h}{R}}{1 + \frac{t\delta h}{R}},$$

que la quantité $L_\delta^{(0)} v - \delta a_k^- (u_1^-, v^-)$ se réduit à

$$\delta \int_{\Omega^+} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt - \delta^2 \int_{\Omega^+} \left[\alpha h \frac{-\frac{th}{R}}{1 + \frac{t\delta h}{R}} \partial_s u_0^- D_{(h)} v^+ - k^2 \beta \frac{th^2}{R} u_0^- v^+ \right] ds dt,$$

et ainsi permet de compenser le poids d'ordre δ portant sur les dérivées tangentielles $\partial_s v^+$.

En se servant ensuite du fait que $\partial_t u_1^+ = 0$, on peut écrire :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)} v &= -\delta^2 \int_{\Omega^+} \left[\alpha h \left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right)^{-1} \partial_s u_1^- D_{(h)} v^+ - k^2 \beta h \left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right) u_1^- v^+ \right] ds dt \\ &\quad - \delta^2 \int_{\Omega^+} \left[\alpha h \frac{-\frac{th}{R}}{1 + \frac{t\delta h}{R}} \partial_s u_0^- D_{(h)} v^+ - k^2 \beta \frac{th^2}{R} u_0^- v^+ \right] ds dt \\ &\quad + \delta \int_{\Omega^+} \frac{\alpha}{h} \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt \end{aligned} \quad (3.64)$$

Si maintenant $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^{\frac{5}{2}}(\Omega)$ et $u_1 \in X$. En outre, grâce aux relations (3.23) et (3.24), on conclut que $\partial_t u_2^+ \in L^2(\Omega^+)$. Donc, en utilisant les estimations uniformes en δ sur

α, β et h , et en explicitant $D_{(h)}$, on montre aisément qu'il existe une constante c indépendante de δ (assez petit) et de $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$, telle que :

$$\left| L_{\delta}^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\delta^2 \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|v^+\|_{0, \Omega^+} \right)$$

Ensuite, l'estimation standard (3.62) permet d'obtenir :

$$\left| L_{\delta}^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\delta^2 \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|v^-\|_{1, \Omega} \right)$$

On a (pour δ assez petit) l'estimation attendue :

$$\left| L_{\delta}^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \delta^{\frac{3}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \|v^-\|_{1, \Omega} \right) \quad (3.65)$$

Ainsi, la preuve de (3.59) pour $j = 1$ est achevée grâce au théorème de stabilité (3.1).

Finalement, le cas $j = 2$ est similaire au cas précédent et il suffit donc d'estimer la forme linéaire, définie pour tout $v \in X$, par

$$\begin{aligned} L_{\delta}^{(2)} v &= \delta a^+ (\delta, u_{\delta}^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_{\delta}^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_{\delta}^- - u_0^- - \delta u_1^- - \delta^2 u_2^-, v^-) \\ &= L_{\delta}^{(1)} v - \delta^2 a_k^- (u_2^-, v^-) - \delta^3 a^+ (\delta, u_2^+, v^+) - \delta^3 b^+ (\delta, u_2^+, v^+) \end{aligned}$$

L'étape suivante est de vérifier que $L_{\delta}^{(1)} v - \delta^2 a_k^- (u_2^-, v^-)$ permet de compenser le poids d'ordre δ^2 portant sur les dérivées tangentielles $\partial_s v^+$. En effet, ceci est une conséquence directe de l'équation variationnelle (3.28) et le développement exact d'ordre 1 suivant :

$$\left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right)^{-1} = 1 - \frac{t\delta h}{R} + \frac{\left(\frac{t\delta h}{R} \right)^2}{1 + \frac{t\delta h}{R}}$$

Ensuite, si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^3(\Omega)$, $u_1^- \in H^2(\Omega)$ et $u_2 \in X$. La relation (3.29) et le résultat (3.30) assurent alors que $\partial_t u_3^+ \in L^2(\Omega^+)$ et par conséquent, en utilisant les estimations uniformes en δ sur α, β et h , on montre aisément qu'il existe une constante $c > 0$ indépendante de δ (assez petit) et de $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, telle que :

$$\left| L_{\delta}^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \left(\delta^3 \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^3 \|v^+\|_{0, \Omega^+} \right)$$

Puis, l'estimation standard (3.62) permet d'obtenir :

$$\left| L_{\delta}^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \left(\delta^3 \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^3 \|v^-\|_{1, \Omega^-} \right)$$

On obtient (pour δ assez petit) l'estimation attendue :

$$\left| L_{\delta}^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \delta^{\frac{5}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \|v^-\|_{1, \Omega} \right) \quad (3.66)$$

La preuve de (3.59) pour $j = 2$ est donc achevée grâce au théorème de stabilité (3.1). ■

Remarque 3.4 Comme il a été remarqué par Bendali-Lemrabet [18] dans le cas uniforme avec le système de Maxwell, ce résultat de convergence n'est pas optimal. Leur argument était basé sur l'idée astucieuse et intelligente introduite par Tordeux [50] et qui consiste à utiliser le développement asymptotique d'ordre suivant (ce qui nécessite bien sûr plus de régularité sur le terme source f) et de montrer que l'ordre de convergence dans l'estimation (3.59) est en fait $j + 1$ au lieu de $j + 1/2$.

Par conséquent, moyennant plus de régularité sur le terme f , on a le théorème de convergence optimal suivant :

Théorème 3.3 (de convergence optimal) Pour chaque $j = 0, 1, 2$, il existe une constante c indépendante de δ et du terme source $f \in H^{j+1/2}(\Omega)$, telle que :

$$\|u_\delta - \phi_\delta^j\|_Y \leq c\delta^{j+1} \|f\|_{j+\frac{1}{2},\Omega} \quad (3.67)$$

Preuve: En tenant compte de la remarque 3.2, le résultat de convergence non optimal (3.59) est en fait vrai même pour $j \geq 3$ et pour cela il suffit juste de développer un peu plus les calculs. Si on considère alors que $f \in H^{j+1/2}(\Omega)$, on s'aperçoit, grâce à l'analyse asymptotique précédente que le terme u_{j+1} existe comme élément de l'espace $X(=X^{(N)})$ et dépend continûment du second membre f . Il existe donc une constante c_1 indépendante de δ et de f telle que :

$$\|u_{j+1}\|_Y \leq \|u_{j+1}\|_X \leq c_1 \|f\|_{j+\frac{1}{2},\Omega}$$

Ainsi, en écrivant $\phi_\delta^{j+1} = \phi_\delta^j + \delta^{j+1}u_{j+1}$, la preuve est immédiate en utilisant l'estimation non optimale (3.59) à l'ordre suivant (avec une constante notée c_2) et l'estimation précédente, comme suit :

$$\begin{aligned} \|u_\delta - \phi_\delta^j\|_Y &= \|u_\delta - \phi_\delta^{j+1} - \delta^{j+1}u_{j+1}\|_Y \\ &\leq \|u_\delta - \phi_\delta^{j+1}\|_Y + \delta^{j+1} \|u_{j+1}\|_Y \\ &\leq c_2\delta^{j+\frac{3}{2}} \|f\|_{j+\frac{1}{2},\Omega} + c_1\delta^{j+1} \|f\|_{j+\frac{1}{2},\Omega} \\ &\leq \left(c_2\delta^{\frac{1}{2}} + c_1\right) \delta^{j+1} \|f\|_{j+\frac{1}{2},\Omega} \end{aligned}$$

d'où, pour δ suffisamment petit, $c_2\delta^{\frac{1}{2}} + c_1$ est majoré par $c = c_2 + c_1$, et par conséquent l'ordre de convergence optimal en δ est $j + 1$. ■

3.5 Conditions aux limites approchées d'Engquist et Nédélec

D'un point de vue numérique, il sera intéressant de résoudre un seul problème de diffraction dans lequel l'équation aux dérivées partielles dans la couche mince sera remplacée par une condition aux limites approchée via une localisation de l'opérateur Dirichlet-Neumann ou opérateur d'impédance. En utilisant l'analyse asymptotique précédente, les conditions

d'impédances approchées peuvent être obtenues en remplaçant dans l'Ansatz tronqué à l'ordre j chaque terme u_l^- par $\delta^{j-l} u_j^{EN}$. On obtient, par exemple, pour la polarisation (TE) un seul problème de diffraction pour l'inconnue u_j^{EN} :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_j^{EN} \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_j^{EN} + k^2 u_j^{EN} = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_j^{EN} + Z_\delta^{(j)} u_j^{EN} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_j^{EN} - i k u_j^{EN}) = 0 \end{cases} \quad (3.68)$$

où

$$Z_\delta^{(j)} = Z^{(0)} + \delta Z^{(1)} + \delta^2 Z^{(2)} + \dots + \delta^j Z^{(j)}$$

est l'approximation d'ordre j de l'opérateur Dirichlet-Neumann, tel que pour $j = 0, 1, 2$:

$$\begin{aligned} Z^{(0)} &= 0 \\ Z^{(1)} &= -\partial_s (\alpha_0 h \partial_{s \cdot}) - k^2 \beta_0 h. \\ Z^{(2)} &= \partial_s \left(\alpha_1 \frac{h^2}{R} \partial_{s \cdot} \right) - k^2 \beta_1 \frac{h^2}{R}. \end{aligned}$$

Pour l'autre polarisation (TM), on obtient les conditions aux limites approchées de Dirichlet, suivantes :

$$\begin{cases} u_0^{EN} = 0 \\ \frac{\mu_0}{\delta h} u_1^{EN} + \partial_{\mathbf{n}} u_1^{EN} = 0 \\ \frac{\mu_0}{\delta h} \left(1 - \frac{\delta h \mu_0}{R \mu_1} \right)^{-1} u_2^{EN} + \partial_{\mathbf{n}} u_2^{EN} = 0 \end{cases} \quad (3.69)$$

qui s'écrivent encore à l'aide l'opérateur d'admittance Y_δ tronqué à l'ordre $j = 0, 1, 2$:

$$Y_\delta^{(j)} = Y^{(0)} + \delta Y^{(1)} + \delta^2 Y^{(3)} + \dots + \delta^j Y^{(j)}$$

sous la forme adaptée à cette polarisation :

$$Y_\delta^{(j)} \partial_{\mathbf{n}} u_j^{EN} + u_j^{EN} = 0 : \mathcal{D}'(\Gamma)$$

et où, cette fois-ci, on a :

$$Y^{(0)} = 0, \quad Y^{(1)} = \frac{h}{\mu_0}, \quad Y^{(2)} = -\frac{1}{R} \frac{h^2}{\mu_1} \quad (3.70)$$

Remarque 3.5 *En fait, sous la forme (3.69), ces conditions aux limites approchées apparaissent comme une perturbation de la condition de Neumann par un terme de Dirichlet. Il s'agit, alors, d'une approximation du problème de Dirichlet par une méthode de pénalité et par conséquent les difficultés d'analyse de convergence sont traités surtout et rigoureusement dans le cas de la polarisation (TE), l'autre cas de polarisation étant généralement plus simple à traiter. D'ailleurs et d'après (3.70) on voit bien qu'aucune dérivée tangentielle n'est encore apparue jusqu'à l'ordre $j = 2$. En fait, ces conditions d'impédance ou d'admittance approchée peuvent être retrouvées en travaillant directement sur l'analyse asymptotique de l'opérateur Dirichlet-Neumann.*

L'utilisation d'un tel modèle est justifiée, par exemple pour la polarisation (TE), par le fait que l'Anstaz tronqué ϕ_δ^{j-} satisfait le problème suivant, pour $j = 0, 1, 2$:

$$\begin{cases} \text{Trouver } \phi_\delta^{j-} \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta \phi_\delta^{j-} + k^2 \phi_\delta^{j-} = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \partial_{\mathbf{n}} \phi_\delta^{j-} + Z_\delta^{(j)} \phi_\delta^{j-} = \delta^{j+1} \rho_\delta^j \text{ dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r \phi_\delta^{j-} - ik \phi_\delta^{j-}) = 0 \end{cases} \quad (3.71)$$

où le membre de droite sur Γ est un reste d'ordre supérieur, donné par :

$$\rho_\delta^0 = 0, \quad \rho_\delta^1 = -Z^{(1)} u_1^-, \quad \rho_\delta^2 = -Z^{(1)} u_2^- - Z^{(2)} (u_1^- + \delta u_2^-) \quad (3.72)$$

Les conditions aux limites approchées d'ordre j sont alors obtenues en négligeant les termes dominés par une puissance de δ égale à $j + 1$ ou plus.

Pour étudier la convergence, on introduit l'espace de Hilbert $V^{(m)}$, défini comme suit :

$$V^{(m)} = \{v \in H^1(\Omega); \quad v|_\Gamma \in H^m(\Gamma)\} : m = 0, 1 \quad (3.73)$$

de telle sorte que la formulation variationnelle du problème (3.68) rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm, suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_j^{EN} \in V^{(m)}; \quad \forall v \in V^{(m)} \\ a_k^-(u_j^{EN}, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l \left(a_\Gamma^{(l)}(u_j^{EN}, v) + b_\Gamma^{(l)}(u_j^{EN}, v) \right) = \int_\Omega f v dx \end{cases} \quad (3.74)$$

où $m = 0, 1, 1$ correspond respectivement à $j = 0, 1, 2$ et $a_\Gamma^{(j)}, b_\Gamma^{(j)}$ sont deux formes bilinéaires continues sur $V^{(m)}$, définies par $a_\Gamma^{(0)} = b_\Gamma^{(0)} = 0$ et :

$$a_\Gamma^{(1)}(u, v) = \int_\Gamma \alpha_0 h \partial_s u \partial_s v ds \quad (3.75)$$

$$b_\Gamma^{(1)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \beta_0 h u v ds \quad (3.76)$$

$$a_\Gamma^{(2)}(u, v) = - \int_\Gamma \alpha_1 \frac{h^2}{R} \partial_s u \partial_s v ds \quad (3.77)$$

$$b_\Gamma^{(2)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \beta_1 \frac{h^2}{R} u v ds \quad (3.78)$$

Les techniques standards utilisant le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm, conduisent pour δ assez petit, à l'existence et l'unicité de la solution du ce type de problème. On cite maintenant le deuxième argument de stabilité de Bendali-Lemrabet (cf. [16]).

Théorème 3.4 *Il existe une constante c telle que pour toute famille de formes linéaires $\{L_\delta\}_{\delta>0}$ sur l'espace $V^{(m)}$ satisfaisant à :*

$$|L_\delta v| \leq l(\delta) \left(m \delta^{\frac{1}{2}} \|v\|_{m,\Gamma} + \|v\|_{1,\Omega} \right) \quad (3.79)$$

pour tout $v \in V^{(m)}$, la norme dans $H^1(\Omega)$ de la solution u_δ du problème variationnel :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in V^{(m)}; \forall v \in V^{(m)} \\ a_k^-(u_\delta, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l \left(a_\Gamma^{(l)}(u_\delta, v) + b_\Gamma^{(l)}(u_\delta, v) \right) = L_\delta v \end{cases} \quad (3.80)$$

est du même ordre que la fonction $l(\delta)$, i.e.

$$\|u_\delta\|_{1,\Omega} \leq cl(\delta) \quad (3.81)$$

où $m = 0, 1, 1$ correspond respectivement à $j = 0, 1, 2$.

Comme conséquence du théorème de convergence de ϕ_δ^{j-} vers la solution exacte u_δ^- et de ce dernier théorème de stabilité, on obtient la convergence de la solution approchée u_j^{EN} vers la solution exacte u_δ^- du problème de diffraction dans le milieu sans couche mince Ω .

Théorème 3.5 Pour tout $j = 0, 1, 2$, il existe une constante c indépendante de δ et du terme source f , telle que la solution u_δ du problème variationnel (3.4) et la solution approchée u_j^{EN} de (3.74) vérifient l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u_\delta^- - u_j^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c\delta^{j+\frac{1}{2}} \|f\|_{s,\Omega} : j = 0, 1, 2 \quad (3.82)$$

où $s = 0$ pour $j = 0$ et $s = j - 1/2$ pour $j = 1$ ou 2 .

Preuve: En utilisant les estimations obtenues au théorème 3.2, il sera suffisant d'estimer la différence $\omega_\delta^j = \phi_\delta^{j-} - u_j^{EN}$. Pour $j = 0$, comme

$$\phi_\delta^{0-} = u_0^{EN} = u_0^-$$

on a $\omega_\delta^0 = 0$. Ainsi, pour $j = 0$ (3.82) est une conséquence directe de (3.59). Soit, maintenant, $j = 1$ ou 2 . D'après (3.74) et (3.71), on a :

$$a_k^-(\omega_\delta^j, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l \left(a_\Gamma^{(l)}(\omega_\delta^j, v) + b_\Gamma^{(l)}(\omega_\delta^j, v) \right) = \mathfrak{R}_\delta^{(j)} \quad (3.83)$$

où

$$\mathfrak{R}_\delta^{(j)} = \delta^{j+1} \int_\Gamma \rho_\delta^j v ds$$

et par définition même de ρ_δ^j on a :

$$\mathfrak{R}_\delta^{(1)} v = -\delta^2 \int_\Gamma Z^{(1)} u_1^- v ds$$

$$\mathfrak{R}_\delta^{(2)} v = -\delta^3 \int_\Gamma [Z^{(1)} u_2^- + Z^{(2)} (u_1^- + \delta u_2^-)] v ds$$

Rappelons, maintenant, que si $f \in H^{j-\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_j^- \in H^1(\Gamma)$; $j = 1, 2$. Donc, une intégration par parties sur Γ peut être réalisée et elle donne :

$$\begin{aligned}\mathfrak{R}_\delta^{(1)} v &= \delta^2 \left[a_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) + b_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) \right] \\ \mathfrak{R}_\delta^{(2)} v &= \delta^3 \left[a_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) + b_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) + a_\Gamma^{(1)}(u_1^- + \delta u_2^-, v) + b_\Gamma^{(1)}(u_1^- + \delta u_2^-, v) \right]\end{aligned}$$

Donc, puisque les formes bilinéaires $a_\Gamma^{(l)}$ et $b_\Gamma^{(l)}$ sont continues sur $V^{(m)}$, il existe une constante c indépendante de δ (assez petit), telle que :

$$\left| \mathfrak{R}_\delta^{(j)} v \right| \leq c \delta^{j+1} \|f\|_{j-\frac{1}{2}, \Omega} \|v\|_{1, \Gamma} : j = 1, 2$$

D'où, l'estimation (3.79) a lieu avec la fonction $l(\delta)$ suivante :

$$l(\delta) = c \delta^{j+\frac{1}{2}} \|f\|_{j-\frac{1}{2}, \Omega} \quad (3.84)$$

et comme conséquence du théorème de stabilité 3.4, ω_δ^j satisfait l'estimation :

$$\|\omega_\delta^j\|_{1, \Omega} \leq c \delta^{j+\frac{1}{2}} \|f\|_{j-\frac{1}{2}, \Omega} \quad (3.85)$$

Finalement, la preuve est achevée grâce au théorème de convergence 3.2, et à la décomposition suivante :

$$u_\delta^- - u_j^{EN} = u_\delta^- - \phi_\delta^{j-} + \omega_\delta^j, \quad (3.86)$$

suivie de l'estimation (3.85). ■

Remarque 3.6 *Contrairement au théorème 3.2, ce résultat de convergence est optimal et par conséquent le théorème de convergence optimal 3.3 du développement asymptotique vers la solution exacte n'a aucun avantage sur l'amélioration de la vitesse de convergence de la solution approchée d'Engquist et Nédélec vers cette solution exacte du problème. Nous verrons dans les chapitres suivants que cela ne sera pas le cas lorsque l'hétérogénéité (physique ou géométrique) présente des oscillations rapides et du même ordre que l'épaisseur.*

Chapitre 4

Analyse double échelle de la diffraction d'une onde harmonique par des couches minces périodiques

4.1 Introduction

L'analyse asymptotique utilisée dans le chapitre précédent est insuffisante dans le cas de couches minces hétérogènes périodiques dans la direction tangentielle, les périodes sont supposées du même ordre que l'épaisseur et tendent toutes vers zéro. C'est pourquoi une analyse asymptotique à deux échelles (cf. [4], [20], [24], [39], [42], [53]) a été effectuée sur un cas 2D dans le but de montrer comment les contributions de l'épaisseur et de la périodicité peuvent être superposées et, par conséquent, mémorisées dans une hiérarchie de conditions aux limites approchées conduisant effectivement à des résultats de convergence basés sur le critère essentiel de stabilité établi dans [16]. Des conditions aux limites approchées sont obtenues en tronquant un Ansatz périodique convenable aux termes importants pour lesquels la différence avec le cas homogène (cf. [16]) ou laminaire (cf. [51]) commence à être évidente. Il est important de noter que ces résultats ne peuvent pas être obtenus en faisant simplement une homogénéisation pour une épaisseur δ fixée et ensuite une analyse asymptotique à une échelle pour δ petit, ou vice-versa. Il est montré que ni l'une ni l'autre de ces deux approches n'est capable de donner une réponse au cas où l'épaisseur et la période sont supposées tendre vers zéro simultanément à la même vitesse. Inspiré de la technique de convergence à double échelle (cf. [8], [38], [39]) qui profite d'avantage de l'information de périodicité, une superposition convenable de fonctions test oscillantes au même ordre que δ est utilisée pour extraire des termes de variance-covariance entre les deux échelles. L'idée est similaire à celle utilisée dans [42] pour les surfaces rugueuses lorsqu'une procédure standard d'homogénéisation est incapable de capturer les petits détails. En outre, il est montré que l'Ansatz tronqué souffre de la perte d'une demi puissance de δ dans le taux de convergence qui est due essentiellement à une règle de compensation qui conserve les traces de termes d'ordre inférieur dans la preuve du théorème de convergence (cf. [4]). Néanmoins, grâce à une propriété de convergence faible d'une fonction oscillante vers sa valeur moyenne (cf. [20]), ces termes tendent, fort heureusement, vers zéro avec l'épaisseur δ . Les estimations d'erreur non optimales peuvent alors être optimisées en utilisant l'astuce de Tordeux [50] qui permet d'obtenir des estimations opti-

males à partir de celles non optimales et de la simple existence de l'Ansatz à l'ordre suivant seulement.

4.2 Position du problème de diffraction par des couches minces périodiques

En reprenant les mêmes notations qu'au chapitre précédent et en supposant que l'épaisseur est uniforme ($h = 1$), le problème que nous considérons est celui de la polarisation (TE). Il consiste à chercher une distribution à valeurs complexes u_δ telle que :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_\delta^\pm \in H^1(\Omega_\delta^+) \cap H_{loc}^1(\bar{\Omega}_\infty) \\ \Delta u_\delta^- + k^2 u_\delta^- = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\infty) \\ \operatorname{div}(\alpha_\delta \nabla u_\delta^+) + k^2 \beta_\delta u_\delta^+ = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_\delta^+) \\ \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^+ = \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u_\delta^+ = u_\delta^- \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_\delta^- - i k u_\delta^-) = 0 \end{array} \right. \quad (4.1)$$

Les fonctions α_δ et β_δ sont deux fonctions régulières liées aux propriétés de contraste et d'indice de réfraction de la structure mince périodique, et sont supposées ϵ -périodiques dans la direction tangentielle avec $\epsilon = d\delta$. Sans perte de généralité, on peut d'ailleurs supposer $d = 1$ car nous supposons que ϵ et δ sont du même ordre. On supposera dans toute la suite les estimations uniformes suivantes :

$$c_1 \leq \|\alpha_\delta\|_{L^\infty(\Omega_\delta^+)} \leq c_2 \quad (4.2)$$

$$0 \leq \|\beta_\delta\|_{L^\infty(\Omega_\delta^+)} \leq c_2 \quad (4.3)$$

où $0 < c_1 < c_2$ sont deux constantes positives indépendantes de δ .

Les techniques standards, utilisant le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm, montrent l'existence et l'unicité d'une solution $H_{loc}^2(\bar{\Omega}_{\delta,\infty})$ (cf. [16], [41], [56]). Pour mieux comprendre la notion de périodicité tangentielle, il est utile d'introduire les définitions en coordonnées locales (s, t) dans la variété Ω_δ^+ , comme suit.

Soit $m(s)$ la paramétrisation naturelle du contour Γ avec sa longueur d'arc s , telle que l'application :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Gamma \times (0, 1) \xrightarrow{\eta} \Omega_\delta^+ \\ (s, t) \mapsto m(s) + t\delta\mathbf{n}(m(s)), \end{array} \right. \quad (4.4)$$

réalise un C^∞ difféomorphisme de variétés pour δ positif assez petit. Alors, à chaque fonction v définie sur Ω_δ^+ , on associe la fonction $\hat{v}$ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \eta(s, t) \\ \hat{v}(s, t) = v(x) \end{array} \right.$$

La notion de périodicité tangentielle peut alors être introduite comme suit (cf. [1]).

Définition 4.1 Soit (s, t) dans $(0, L) \times (0, 1)$ les coordonnées locales du point $x \in \Omega_\delta^+$, où L est la longueur de la courbe Γ , et soit $y \in \mathbb{R}$ la variable microscopique liée à s par la relation de congruence suivante :

$$s = \delta y \bmod(L) \quad (4.5)$$

On dit alors qu'une fonction p_δ définie sur la couche mince Ω_δ^+ est δ -périodique dans la direction tangentielle s'il existe une fonction p définie dans la bande $\mathbb{R} \times (0, 1)$ qui est 1-périodique par rapport à la première variable y et telle que pour tout $(s, t) \in (0, L) \times (0, 1)$, on ait :

$$\hat{p}_\delta(s, t) = p(y, t)$$

où y est la variable microscopique associée à s par la relation (4.5). On dira aussi que la couche mince Ω_δ^+ est δ -périodique dans la direction tangentielle si ses propriétés caractéristiques décrites par les paramètres α_δ et β_δ sont δ -périodiques au sens ci-dessus.

Pour simplifier les notations, on écrira $y = \frac{s}{\delta}$ pour la variable microscopique et on utilisera la même écriture pour toute fonction v et son image $\hat{v}$, ainsi que pour tout point $m(s)$ de Γ et son abscisse curviligne s dans $(0, L)$.

4.3 Cadre fonctionnel et alternative de Fredholm

Le cadre fonctionnel retenu est celui de Bendali-Lemrabet [16]. Afin d'appliquer l'alternative de Fredholm et obtenir ainsi l'argument de stabilité par rapport au petit paramètre δ , on utilise la même méthode de décomposition de domaine basée sur l'opérateur de Steklov-Poincaré, introduit au chapitre précédent. Ainsi, une formulation équivalente en domaine borné du problème (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} \Delta u_\delta^- + k^2 u_\delta^- = -f \text{ dans } H^1(\Omega) \\ \operatorname{div}(\alpha_\delta \nabla u_\delta^+) + k^2 \beta_\delta u_\delta^+ = 0 \text{ dans } H^1(\Omega_\delta^+) \\ \alpha_\delta \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^+ = \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ u_\delta^+ = u_\delta^- \text{ dans } H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^-|_\Sigma + S_k u_\delta^- = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma) \end{cases} \quad (4.6)$$

La formulation en domaine fixe par rapport à δ peut être obtenue ainsi de la même manière qu'au chapitre précédent, comme suit :

Soient les formes bilinéaires définies sur l'espace de Hilbert X , suivantes :

$$a^+(\delta, u, v) = \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left[\left(1 + \frac{t\delta}{R}\right)^{-1} \partial_s u \partial_s v + \frac{1}{\delta^2} \left(1 + \frac{t\delta}{R}\right) \partial_t u \partial_t v \right] ds dt \quad (4.7)$$

$$b^+(\delta, u, v) = -k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R}\right) uv ds dt \quad (4.8)$$

$$a^-(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \langle Su, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} \quad (4.9)$$

$$b_k^-(u, v) = -k^2 \int_{\Omega} uv dx + \langle R_k u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma} \quad (4.10)$$

$$a_k^- \stackrel{\text{def}}{=} a^- + b_k^-$$

Alors, le problème Neumann (4.6) s'écrit de manière équivalente sous la forme variationnelle suivante :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_{\delta} \in X; \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, u_{\delta}^+, v^+) + \delta b^+(\delta, u_{\delta}^+, v^+) + a_k^-(u_{\delta}^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx, \end{cases} \quad (4.11)$$

Pour assurer des résultats d'homogénéisation (cf. [20]), les coefficients α_{δ} et β_{δ} sont supposés dépendre des variables macroscopique et microscopique, comme suit :

$$\begin{aligned} \alpha_{\delta}(s, t) &= \alpha\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) \\ \beta_{\delta}(s, t) &= \beta\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) \end{aligned}$$

où α et β sont deux fonctions 1-périodiques par rapport à la troisième variable $y = \frac{s}{\delta}$, selon la définition 4.1. Il est aisé de vérifier que la formulation (4.11) rentre dans le cadre de l'alternative de Fredholm. Puisque les estimations (1.2a) et (1.2b) sont uniformes en δ alors l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16] reste valable dans ce cas. En effet, il n'y a pas de nouveaux termes qui dépendent de δ dans les constantes de coercivité et de continuité dans les parties coercive et compacte de la formulation (4.11). Pour plus de détails, on renverra le lecteur à la thèse de magistère [52] ou encore à l'article original de Bendali-Lemrabet [16].

4.4 Analyse asymptotique à deux échelles

Comme dans [20], [16], [53] et [3], on peut écrire formellement le développement asymptotique suivant :

$$u_{\delta}^-(x) = u_0^-(x) + \delta u_1^-(x) + \cdots + \delta^j u_j^-(x) + \delta^{j+1} u_{\delta,j}^-(x) \quad (4.12)$$

$$u_{\delta}^+(s, t) = u_0^+\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) + \delta u_1^+\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) + \cdots + \delta^j u_j^+\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) + \delta^{j+1} u_{\delta,j}^+(s, t) \quad (4.13)$$

$u_{\delta,j}$ est un reste dans X , les termes u_j^+ appartiennent à l'espace $H^1(\Omega^+, H_{\#}^1(0, 1))$, i.e., sont 1-périodiques par rapport à la troisième variable $y = \frac{s}{\delta}$. De plus, afin d'assurer la continuité de la solution à la traversée de Γ , ces termes vérifient la condition de transmission moyenne sur Γ :

$$\int_0^1 u_j^+(\cdot, 0, y) dy = u_j^-(\cdot) \quad (4.14)$$

La construction de l'Ansatz périodique est basée en fait sur un principe de superposition simple. On supposera alors que chaque terme u_j^+ peut s'écrire comme la somme de deux termes dans lesquels les variables rapides t et y sont séparées, comme suit :

$$u_j^+(s, t, y) = \hat{u}_j^+(s, t) + \check{u}_j^+(s, y) \quad (4.15)$$

Ainsi, toute dérivée croisée par rapport à ces deux variables sera simplement nulle, i.e.

$$\partial_t \partial_y u_j^+ = 0 \quad (4.16)$$

Une telle construction nous conduit alors au choix de fonctions test suivant :

$$v_\delta^+(s, t) = v^+(s, t) + \delta v_1^+(s, \frac{s}{\delta}), \quad (4.17)$$

avec

$$v^+ \in X \quad \text{et} \quad v_1^+ \in L^2 \left(\Gamma, H_\#^1(0, 1)_{/\mathbb{R}} \right),$$

et $H_\#^1(0, 1)_{/\mathbb{R}}$ désigne l'espace des fonctions 1-périodiques ϕ dans $H^1(0, 1)$ à moyenne nulle en y , i.e. $\langle \phi \rangle_y = 0$. Par conséquent, on obtient les règles de dérivation suivantes :

$$\partial_s v_\delta^+ = \delta \partial_s v_1^+ + (\partial_s v^+ + \partial_y v_1^+) \quad (4.18)$$

$$\partial_t v_\delta^+ = \partial_t v^+ \quad (4.19)$$

Comme conséquence du principe de superposition (4.15), on obtient les formules suivantes, utiles par la suite :

$$\langle \phi \partial_t \rangle_y = \langle \phi \rangle_y \partial_t \quad (4.20)$$

$$\langle \phi \partial_y \rangle_t = \langle \phi \rangle_t \partial_y \quad (4.21)$$

pour tout ϕ vérifiant $\partial_t \partial_y \phi = 0$. Ces deux formules seront utilisées de manière implicite dans l'analyse asymptotique. On aura besoin d'un lemme d'homogénéisation qui vient compléter le lemme 3.1 du chapitre précédent :

Lemme 4.1 *Soient $p_1, g_1 \in L^2(\Gamma, L_\#^2(0, 1))$ tel que $\partial_s g_1 \in L^2(\Gamma, L_\#^2(0, 1))$. Alors la solution l_1 de l'équation variationnelle suivante :*

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} l_1 \partial_y \phi_1^+ ds dy = - \int_{\Gamma \times (0, 1)} (g_1 \partial_s \phi_1^+ + p_1 \phi_1^+) ds dy, \quad \forall \phi_1^+ \in H^1 \left(\Gamma, H_\#^1(0, 1)_{/\mathbb{R}} \right) \quad (4.22)$$

est donnée explicitement par :

$$l_1(s, y) = l_1(s, 0) + \int_0^y (p_1(s, \xi) - \partial_s g_1(s, \xi)) d\xi - y \langle p_1(s, \cdot) - \partial_s g_1(s, \cdot) \rangle_y \quad (4.23)$$

et $l_1 \in L^2(\Gamma, H_\#^1(0, 1))$.

Preuve: En intégrant par parties par rapport à y le membre de gauche de l'équation (4.22), on obtient à l'aide de la périodicité des fonctions test :

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} l_1 \partial_y \phi_1^+ ds dy = - \int_{\Gamma \times (0, 1)} \partial_y l_1 \phi_1^+ ds dy, \quad \forall \phi_1^+ \in H^1 \left(\Gamma, H_\#^1(0, 1)_{/\mathbb{R}} \right)$$

La deuxième intégration par parties est faite par rapport à s sur le terme qui contient $\partial_s \phi_1^+$ et on a par densité de $\mathcal{D}(\Gamma)$ dans $H^1(\Gamma)$:

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} g_1 \partial_s \phi_1^+ ds dy = - \int_{\Gamma \times (0,1)} \partial_s g_1 \phi_1^+ ds dy, \quad \forall \phi_1^+ \in H^1\left(\Gamma, H_{\#}^1(0,1)_{/\mathbb{R}}\right)$$

Donc, l'équation variationnelle (4.22) s'écrit :

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \partial_y l_1 \phi_1^+ ds dy = \int_{\Gamma \times (0,1)} (p_1 - \partial_s g_1) \phi_1^+ ds dy, \quad \forall \phi_1^+ \in H^1\left(\Gamma, H_{\#}^1(0,1)_{/\mathbb{R}}\right)$$

Par conséquent, on a :

$$\partial_y l_1 = p_1 - \partial_s g_1 - \langle p_1 - \partial_s g_1 \rangle_y \text{ dans } L^2\left(\Gamma, L_{\#}^2(0,1)_{/\mathbb{R}}\right)$$

et en intégrant par rapport à y , on obtient $l_1 \in L^2(\Gamma, H_{\#}^1(0,1))$ avec :

$$l_1(s, y) = l_1(s, 0) + \int_0^y (p_1(s, \xi) - \partial_s g_1(s, \xi)) d\xi - y \langle p_1(s, \cdot) - \partial_s g_1(s, \cdot) \rangle_y$$

ce qui achève la démonstration. ■

4.4.1 Hiérarchie des équations variationnelle

Comme au chapitre précédent, le but de cette section est de montrer que chaque terme u_j^- est solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_j^- \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\infty}) \\ \Delta u_j^- + k^2 u_j^- = -f_j \\ \partial_n u_j^- + N_j(u_j^-, u_{j-1}^-, \dots) = 0 \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_j^- - i k u_j^-) = 0 \end{cases} \quad (4.24)$$

où $f_j = f$ si $j = 0$ et 0 sinon, et N_j est un opérateur qui contient éventuellement des dérivées tangentielles. Pour cela, l'Ansatz (4.12), (4.13) est injecté dans l'équation (4.11) dans laquelle les fonctions test sont définies par (4.17). Ensuite, en prenant la moyenne par rapport à la variable y dans $(0,1)$, comme il est d'usage en techniques d'homogénéisation, on obtient à l'aide du principe de superposition (4.20) et (4.21) des équations variationnelles résultant de l'identification des termes en δ^j pour $j \geq -1$, comme suit.

Détermination de u_0

En identifiant les termes en δ^{-1} , on obtient pour tout $v^+ \in H^1(\Gamma \times (0,1))$:

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_0^+ \partial_t v^+ ds dt = 0. \quad (4.25)$$

Comme dans le cas homogène (cf. [16]), le lemme 3.1 montre en choisissant

$$l = \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_0^+, \quad p = g = 0$$

que u_0^+ ne dépend pas de t , i.e.

$$\partial_t u_0^+ = 0 \quad (4.26)$$

Ensuite, l'identification des termes en δ^0 donne pour tout $(v^+, v^-) \in X_N$ et tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$:

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} \int_0^1 \alpha [\partial_t u_1^+ \partial_t v^+ + \partial_y u_0^+ (\partial_s v^+ + \partial_y v_1^+)] dy ds dt + a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx \quad (4.27)$$

Si $v^+ = v^- = 0$, on obtient alors :

$$\int_{\Gamma} \int_0^1 \langle \alpha \rangle_t \partial_y u_0^+ \partial_y v_1^+ dy ds = 0 \quad (4.28)$$

Maintenant, le lemme d'homogénéisation 4.1 implique, si on choisit

$$l_1 = \langle \alpha \rangle_t \partial_y u_0^+, \quad p_1 = g_1 = 0$$

que $\langle \alpha \rangle_t \partial_y u_0^+$ ne dépend pas de y , i.e.

$$\partial_y (\langle \alpha \rangle_t \partial_y u_0^+) = 0 \quad (4.29)$$

et en utilisant la périodicité de l_1 par rapport à y , on obtient le deuxième résultat attendu :

$$\partial_y u_0^+ = 0 \quad (4.30)$$

Par conséquent, (4.30) et (4.28) montrent que

$$u_0^+(s, \cdot, \cdot) = u_0^-(s), \quad \forall s \in \Gamma \quad (4.31)$$

Si on choisit maintenant $v^+ = v_1^+ = 0$ dans l'équation (4.27) alors on obtient, pour tout $v^- \in H^1(\Omega)$:

$$a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx$$

Ainsi, u_0^- est l'unique solution du problème (4.24) pour $j = 0$ avec la condition aux limites de type Neumann sur Γ

$$\partial_n u_0^- = 0 \quad (4.32)$$

Comme conséquence, l'effet de la couche mince est complètement négligé à l'ordre 0. En suite, en se basant sur les résultats de régularité des systèmes elliptiques, si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et à l'aide de (4.31) on obtient $u_0^+ \in H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$.

Détermination de u_1

En appliquant le lemme 3.1 à (4.27), on obtient à l'aide de (4.30) l'identité $\langle \alpha \rangle_y \partial_t u_1^+ = 0$, i.e.

$$\partial_t u_1^+ = 0 \quad (4.33)$$

Ainsi, l'identification des termes en δ^1 donne :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \int_0^1 \alpha \left[\partial_t u_2^+ \partial_t v^+ + (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) (\partial_s v^+ + \partial_y v_1^+) \right] dy ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \int_0^1 \beta u_0^- v^+ dy ds dt + a_k^- (u_1^-, v^-) = 0, \end{aligned} \quad (4.34)$$

pour tout $(v^+, v^-) \in X_N$ et tout $v_1^+ \in H^1 \left(\Gamma, H_{\#}^1(0,1)_{/\mathbb{R}} \right)$. Donc, si $v^- = v^+ = 0$, il vient

$$\int_{\Gamma} \int_0^1 \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) \partial_y v_1^+ dy ds = 0 \quad (4.35)$$

De même, le lemme 4.1 montre qu'avec le choix

$$l_1 = \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+), \quad p_1 = g_1 = 0$$

$l_1(s, \cdot) = l_1(s, 0)$. Ensuite, en utilisant la périodicité de u_1^+ par rapport à y et en prenant la moyenne sur y , on obtient

$$\langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) = \alpha_0(s) \partial_s u_0^- \quad (4.36)$$

Le premier moment harmonique en y de la moyenne arithmétique en t du contraste α est noté

$$\alpha_0 = \left\langle \frac{1}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y^{-1}.$$

Par conséquent, si $v_1^+ = 0$ dans l'équation (4.34) alors on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt + \int_{\Gamma \times (0,1)} \left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \beta \rangle_y u_0^- v^+ ds dt + a_k^- (u_1^-, v^-) = 0 \end{aligned} \quad (4.37)$$

D'où, si $v^+ \in H_{0,\Gamma}^1(\Gamma \times (0,1))$ et $v^- = 0$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt + \int_{\Gamma \times (0,1)} \left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \beta \rangle_y u_0^- v^+ ds dt = 0 \end{aligned} \quad (4.38)$$

Le lemme 3.1 dit alors qu'avec

$$l = \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_2^+, \quad p = -k^2 \langle \beta \rangle_y u_0^-, \quad g = \left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \alpha_0 \partial_s u_0^-$$

on obtient :

$$l(s, t) = \int_t^1 \left(\partial_s \left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \alpha_0 \partial_s u_0^- + k^2 \langle \beta \rangle_y u_0^- \right) d\xi \quad (4.39)$$

$$l(s, 0) = \partial_s \alpha_0 \partial_s u_0^- + k^2 \beta_0 u_0^- \quad (4.40)$$

où, α_0 est récupéré grâce à l'identité $\left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_t = 1$. Le coefficient $\beta_0 = \langle \beta \rangle_{y,t}$ est le premier moment arithmétique de β par rapport aux deux échelles y et t . Si $v^+(., 0) \neq 0$, alors l'équation (4.34) montre que u_1^- est l'unique solution du problème (4.24) pour $j = 1$ avec la condition aux limites de type Neumann sur Γ

$$\partial_n u_1^- = \partial_s \alpha_0 \partial_s u_0^- + k^2 \beta_0 u_0^- \quad (4.41)$$

Ensuite, grâce à la régularité elliptique, si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^2(\Gamma)$, i.e. $\partial_n u_1^- \in L^2(\Gamma)$ et par conséquent $u_1^- \in H^1(\Omega)$. La régularité H^1 de u_1^+ par rapport à la variable y est ainsi assurée par l'équation (4.36) qui permet d'écrire :

$$\partial_y u_1^+ = \left(\frac{\alpha_0}{\langle \alpha \rangle_t} - 1 \right) \partial_s u_0^- \quad (4.42)$$

D'où, à l'aide de (4.33), on déduit que $u_1^+ \in H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$.

Remarque 4.1 *Comme il se fait en techniques d'homogénéisation (cf. [20]), on peut évaluer u_1^+ en termes de $\partial_s u_0^-$ (tout en respectant (4.14) et (4.15)) grâce à la relation de découplage :*

$$u_1^+ = u_1^- + w_1(s, y) \partial_s u_0^-$$

où $w_1 \in H^1\left(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}}\right)$ est une variable auxiliaire. w_1 est l'unique solution de l'équation de la cellule de base à l'ordre 1 dans l'analyse asymptotique, suivante :

$$\partial_y [\langle \alpha \rangle_t (1 + \partial_y w_1)] = 0 \quad (4.43)$$

En fait, cette variable auxiliaire est déterminée par le lemme d'homogénéisation 4.1 qui nous donne d'ailleurs la relation de découplage à l'aide de l'équation (4.36).

Détermination de u_2

En identifiant les termes en δ^2 et en utilisant les propriétés précédentes établies pour u_0 et u_1 , en particulier la relation (4.36) qui permet d'écrire :

$$(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) = \frac{\alpha_0}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^-,$$

on obtient, pour tout $(v^+, v^-) \in X_N$ et tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \alpha \rangle_y \left(\frac{t}{R} \partial_t u_2^+ + \partial_t u_3^+ \right) \partial_t v^+ ds dt \\
& + \int_{\Gamma \times (0,1)} \int_0^1 \alpha \left(-\frac{t}{R} \frac{\alpha_0}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^- + (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) \right) \partial_s v^+ dy ds dt \\
& - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\langle \beta u_1^+ \rangle_y + \frac{t}{R} \langle \beta \rangle_y u_0^- \right) v^+ ds dt + a_k^-(u_2^-, v^-) \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^1 \left(-\frac{\alpha_0}{R} \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^- + \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) \right) \partial_y v_1^+ dy ds \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^1 \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v_1^+ dy ds - k^2 \int_{\Gamma} \int_0^1 \langle \beta \rangle_t u_0^- v_1^+ dy ds = 0
\end{aligned} \tag{4.44}$$

De même, si on pose $v^- = v^+ = 0$, alors on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma} \int_0^1 \left(-\frac{\alpha_0}{R} \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^- + \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) \right) \partial_y v_1^+ dy ds \\
& + \int_{\Gamma} \int_0^1 \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v_1^+ dy ds - k^2 \int_{\Gamma} \int_0^1 \langle \beta \rangle_t u_0^- v_1^+ dy ds = 0
\end{aligned} \tag{4.45}$$

et à l'aide du lemme 4.1 en choisissant

$$l_1 = -\frac{\alpha_0}{R} \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^- + \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+), \quad g_1 = \alpha_0 \partial_s u_0^-, \quad p_1 = -k^2 \langle \beta \rangle_t u_0^-$$

on obtient $l_1 \in L^2(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1))$ et l_1 vérifie :

$$\begin{aligned}
l_1(s, 0) &= l_1(s, y) - \left[\int_0^y (p_1(s, \xi) - \partial_s g_1(s, \xi)) d\xi - y \langle p_1(s, \cdot) - \partial_s g_1(s, \cdot) \rangle_y \right] \\
&= \langle \alpha \rangle_t (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) - \frac{\alpha_0}{R(s)} \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t} \partial_s u_0^- + k^2 \left(\int_0^y \langle \beta \rangle_t dy' - y \beta_0 \right) u_0^-
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Noter que les termes en $\partial_s g_1$ se simplifient car g_1 ne dépend pas de y .

Ensuite, on a $\langle \partial_s u_1^+ \rangle_y = \partial_s u_1^-$, grâce à la condition de transmission moyenne (4.14). A l'aide de (4.33), et en prenant la moyenne en y de $l_1(\cdot, 0) / \langle \alpha \rangle_t$, on obtient aisément à l'aide de la périodicité de u_2^+ par rapport à y , l'identité suivante :

$$\frac{l_1(\cdot, 0)}{\alpha_0} = \partial_s u_1^- - \frac{\alpha_0}{R(s)} \left\langle \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t^2} \right\rangle_y \partial_s u_0^- + k^2 \left\langle \frac{\int_0^y \langle \beta \rangle_t dy' - y \beta_0}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y u_0^- \tag{4.47}$$

Ensuite, à l'aide de (4.46) et (4.47) on obtient directement :

$$(\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) = \frac{\alpha_0}{\langle \alpha \rangle_t} \left(\partial_s u_1^- + \frac{\tilde{\alpha}}{R(s)} \partial_s u_0^- - k^2 \tilde{\beta} u_0^- \right) \tag{4.48}$$

où les coefficients $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont donnés par :

$$\tilde{\alpha} = \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t} - \alpha_0 \left\langle \frac{\langle t\alpha \rangle_t}{\langle \alpha \rangle_t^2} \right\rangle_y \quad (4.49)$$

$$\tilde{\beta} = \frac{\int_0^y \langle \beta(s, \cdot, y') \rangle_t dy' - y\beta_0}{\alpha_0} - \left\langle \frac{\int_0^y \langle \beta(s, \cdot, y') \rangle_t dy' - y\beta_0}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \quad (4.50)$$

Le terme $\langle \beta u_1^+ \rangle_y$ est déterminé comme suit. En intégrant (4.42) on obtient la relation de découplage

$$u_1^+ = u_1^- + w_1(s, y) \partial_s u_0^-$$

où

$$w_1 = \alpha_0 \int_0^y \frac{dy'}{\langle \alpha \rangle_t} - y - \left\langle \alpha_0 \int_0^y \frac{dy'}{\langle \alpha \rangle_t} - y \right\rangle_y$$

et par conséquent :

$$\langle \beta u_1^+ \rangle_y = \langle \beta \rangle_y u_1^- + \langle \beta w_1 \rangle_y \partial_s u_0^- \quad (4.51)$$

Maintenant, si $v_1^+ = 0$ dans l'équation (4.44) on obtient alors, pour tout $v = (v^+, v^-) \in X_N$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \langle \alpha \rangle_y \left(\frac{t}{R(s)} \partial_t u_2^+ + \partial_t u_3^+ \right) \partial_t v^+ ds dt \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} \int_0^1 \alpha \frac{\alpha_0}{\langle \alpha \rangle_t} \left(\partial_s u_1^- + \frac{\alpha' - t}{R(s)} \partial_s u_0^- - k^2 \beta' u_0^- \right) \partial_s v^+ dy ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\langle \beta \rangle_y u_1^- + \langle \beta w_1 \rangle_y \partial_s u_0^- + \frac{t}{R(s)} \langle \beta \rangle_y u_0^- \right) v^+ ds dt + a_k^- (u_2^-, v^-) = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

Cette dernière équation est résolue pour $v^- = 0$ en appliquant le lemme 3.1 pour

$$\begin{aligned} l &= \langle \alpha \rangle_y \left(\frac{t}{R(s)} \partial_t u_2^+ + \partial_t u_3^+ \right) \\ p &= -k^2 \left[\langle \beta \rangle_y \left(u_1^- + \frac{t}{R} u_0^- \right) + \langle \beta w_1 \rangle_y \partial_s u_0^- \right] \\ g &= \alpha_0 \left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \partial_s u_1^- + \frac{\alpha_0}{R} \left\langle \frac{(\alpha' - t) \alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y \partial_s u_0^- - k^2 \alpha_0 \left\langle \frac{\alpha \beta'}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y u_0^- \end{aligned}$$

Il vient

$$\begin{aligned} l(s, 0) &= - \int_0^1 (p(s, \xi) - \partial_s g(s, \xi)) d\xi \\ &= \partial_s \alpha_0 \partial_s u_1^- + k^2 \beta_0 u_1^- + \partial_s \left(-\frac{\alpha_{1\#}}{R} \right) \partial_s u_0^- + k^2 \left(\frac{\beta_1}{R} \right) u_0^- \\ &\quad + k^2 (\beta_{\#} \partial_s u_0^- - \partial_s (C_{\alpha\beta} u_0^-)) \end{aligned} \quad (4.53)$$

où les coefficients $\alpha_{1\#}$, β_1 , $\beta_{\#}$ et $C_{\alpha\beta}$ sont donnés respectivement par :

$$\begin{aligned}\alpha_{1\#}(s) &= \alpha_0 \left\langle \frac{\alpha(t - \tilde{\alpha})}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_{y,t} \\ \beta_1(s) &= \langle \beta \rangle_{y,t} \\ \beta_{\#}(s) &= \langle \beta w_1 \rangle_{y,t} \\ C_{\alpha\beta}(s) &= \alpha_0 \left\langle \frac{\alpha \tilde{\beta}}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_{y,t}\end{aligned}$$

et $\tilde{\alpha}$ et $\tilde{\beta}$ sont définis par (4.49) et (4.50). Si $v^- \neq 0$ alors l'équation (4.52) montre que u_2^- est l'unique solution du problème (4.24) pour $j = 2$ avec la condition aux limites de type Neumann sur Γ , suivante :

$$\partial_n u_2^- = \partial_s \alpha_0 \partial_s u_1^- + k^2 \beta_0 u_1^- + \partial_s \left(-\frac{\alpha_{1\#}}{R} \right) \partial_s u_0^- + k^2 \left[\left(\frac{\beta_1}{R} - \partial_s C_{\alpha\beta} \right) + (\beta_{\#} - C_{\alpha\beta}) \partial_s \cdot \right] u_0^- \quad (4.54)$$

Finalement, si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^3(\Gamma)$, i.e. $u_1^- \in H^2(\Gamma)$, ce qui conduit à $\partial_n u_2^- \in L^2(\Gamma)$, donc $u_2^- \in H^1(\Omega)$ et à l'aide de (4.48) et de la régularité des coefficients α et β , on obtient u_2^+ dans $H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$.

Remarque 4.2 *Il est aisé de vérifier que dans le cas de couches minces homogènes (cf. [16]), les coefficients $C_{\alpha\beta}$ et $\beta_{\#}$ sont nuls alors que $\alpha_{1\#}$ et β_1 sont réduits respectivement aux premiers moments arithmétiques en t de α et β . En fait, la condition d'ordre 2 souligne une différence majeure si on la compare avec celle obtenue dans le cas laminaire (cf. [31], [51]) où la taille de la période est négligeable devant l'épaisseur, i.e. $\epsilon = o(\delta)$. Plus précisément, cette condition met en évidence l'apparition de nouveaux termes de mémoire (voir effet d'aimantation dans le cas de l'électromagnétisme par exemple). De plus, si on considère le cas d'un domaine multicouches mince, chacune étant périodique par rapport à la direction tangentielle, alors pendant que $\beta_{\#}$ capture l'effet de mémoire à l'intérieur de chaque couche, $\alpha_{1\#}$ est un coefficient de variance dans la périodicité entre les différentes couches. Finalement, le coefficient $C_{\alpha\beta}$ représente un terme de covariance qui n'existe que lorsque α et β sont tous les deux périodiques.*

Remarque 4.3 *Comme dans la remarque 4.1, on pourrait introduire une variable auxiliaire au second ordre (en respectant le principe de superposition et la condition de transmission moyenne) $w_2 \in H^2(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$ telle que $u_2^+ = w_2 \partial_s u_1^+ + (1 - t) u_2^-$ et w_2 est solution d'une équation différentielle ordinaire du second ordre non homogène, qu'on appellera équation de la cellule de base à l'ordre 2 dans l'analyse asymptotique. En fait, ces équations sont implicitement résolues par le lemme d'homogénéisation 4.1.*

4.4.2 Analyse de convergence pour la condition de Neumann

De manière similaire au chapitre précédent, à cause de la présence de dérivées tangentielles non bornées, les résultats de convergence pour l'Ansatz tronqué

$$\phi_{\delta}^j = u_0 + \delta u_1 + \cdots + \delta^j u_j \quad (4.55)$$

seront établis dans l'espace plus large, à savoir :

$$Y_N = \{ (v^+, v^-) \in H^1(0, 1, L^2(\Gamma)) \times H^1(\Omega) : v^+(\cdot, 0) = v^-(\cdot, 0) \}$$

En outre, ces résultats sont basés essentiellement sur le même argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16]. On a le théorème de convergence suivant :

Théorème 4.1 *Pour $j = 0, 1, 2$, il existe une constante c indépendante de δ et du terme source f , telle que :*

$$\|u_\delta - \phi_\delta^0\|_Y \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (4.56)$$

$$\|u_\delta - \phi_\delta^j\|_Y \leq c\delta^j \|f\|_{j-\frac{1}{2},\Omega} : j = 1, 2 \quad (4.57)$$

Preuve: Notons tout d'abord que la même lettre c sera utilisée pour désigner une constante générique dans les différentes estimations qui vont suivre. Clairement, l'estimation (4.56) est la plus simple à établir. En effet, il est suffisant d'estimer la forme linéaire $L_\delta^{(0)}$, définie sur X_N par :

$$L_\delta^{(0)}v = \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+, v^+) + a_k^- (u_\delta^- - u_0^-, v^-)$$

Les équations vérifiées par u_δ et u_0 conduisent directement à :

$$L_\delta^{(0)}v = -\delta \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)}\right)^{-1} \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt + \delta k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)}\right) u_0^- v^+ ds dt \quad (4.58)$$

On rappelle que si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u_0 \in X_N$. D'où, et à l'aide des estimations uniformes (4.2) et (4.3), il existe une constante c indépendante de δ (assez petit) et de $f \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\left| L_\delta^{(0)}v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \left(\delta \|\partial_s v^+\|_{0,\Gamma \times (0,1)} + \delta \|v^+\|_{0,\Gamma \times (0,1)} \right) \quad (4.59)$$

Ensuite, à l'aide de l'estimation (3.62) dans le chapitre précédent, on obtient l'estimation désirée pour $j = 0$:

$$\left| L_\delta^{(0)}v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \delta^{\frac{1}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0,\Gamma \times (0,1)} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Gamma \times (0,1)} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (4.60)$$

Par conséquent, la preuve (4.56) est achevée grâce au théorème de stabilité 3.1 donné au chapitre précédent.

De même, l'inégalité (4.57) pour $j = 1$ a lieu si on estime la forme linéaire $L_\delta^{(1)}$, définie sur X_N par :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)}v &= \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_\delta^- - u_0^- - \delta u_1^-, v^-) \\ &= L_\delta^{(0)}v - \delta^2 a^+ (\delta, u_1^+, v^+) - \delta^2 b^+ (\delta, u_1^+, v^+) - \delta a_k^- (u_1^-, v^-) \end{aligned}$$

En se basant sur la règle de dérivation

$$\partial_s \rightarrow \partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y$$

et sur les équations satisfaites par u_δ , u_0 et u_1 (essentiellement la relation de découplage (4.42)), on obtient :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)} v = & \delta \left(- \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(1 - \frac{t\delta}{R(s)} + \dots \right) (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ (s, t, \frac{s}{\delta})) \partial_s v^+ ds dt \right. \\ & \left. + k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)} \right) u_0^- v^+ ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \\ & + \delta^2 \left(- \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(1 - \frac{t\delta}{R(s)} + \dots \right) \partial_s u_1^+ (s, t, \frac{s}{\delta}) \partial_s v^+ ds dt \right. \\ & \left. + k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)} \right) u_1^+ (s, t, \frac{s}{\delta}) v^+ ds dt \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

Rappelons que dans le cas de couches minces homogènes par rapport à la direction tangentielle (voir chapitre précédent), la quantité $L_\delta^{(0)} v - \delta a_k^- (u_1^-, v^-)$ permettait de compenser le poids d'ordre δ portant sur les dérivées tangentielles $\partial_s v^+$ parce que $\partial_s u_0^-$ n'était pas couplé à $\partial_y u_1^+$. Néanmoins, et même si on peut la contrôler par une propriété de convergence faible d'une fonction oscillante vers sa moyenne (cf. [3]), cette quantité sera malheureusement responsables de la perte d'une demi puissance de δ dans la vitesse de convergence.

Notons les termes d'ordre inférieur à 2 en δ dans $L_\delta^{(1)} v$ par $B_\delta^{(1)} v$, alors on a :

$$B_\delta^{(1)} v = \delta \left(- \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right) \right) \partial_s v^+ ds dt + k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta u_0^- v^+ ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \quad (4.62)$$

A l'aide de l'identité :

$$\alpha_\delta \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right) \right) = \frac{\alpha_\delta}{\langle \alpha_\delta \rangle_t} \left[\langle \alpha_\delta \rangle_t \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right) \right) \right],$$

la relation de découplage (4.42) devient :

$$\alpha_\delta \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right) \right) = \frac{\alpha_\delta}{\langle \alpha_\delta \rangle_t} \alpha_0 \partial_s u_0^-$$

Par conséquent, on obtient :

$$B_\delta^{(1)} v = \delta \left(- \int_{\Omega^+} \frac{\alpha_\delta}{\langle \alpha_\delta \rangle_t} \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt + k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta u_0^- v^+ ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \quad (4.63)$$

Ensuite, à l'aide de l'équation (4.37), on obtient la règle de compensation suivante :

$$\begin{aligned} B_\delta^{(1)} v = & \delta \int_{\Omega^+} \langle \alpha \rangle_y \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt + \delta \int_{\Omega^+} \left[\left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y - \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right] \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt \\ & - k^2 \delta \int_{\Omega^+} \left[\langle \beta \rangle_y - \beta \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right) \right] u_0^- v^+ ds dt \end{aligned} \quad (4.64)$$

Maintenant, grâce à la convergence faible de $\beta_\delta = \beta \left(s, t, \frac{s}{\delta} \right)$ vers sa moyenne $\langle \beta \rangle_y$ et de $\alpha_\delta / \langle \alpha_\delta \rangle_t$ vers $\langle \alpha / \langle \alpha \rangle_t \rangle_y$ dans $L^2(\Omega^+)$ et aussi grâce à l'hypothèse de régularité $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$

qui conduit à u_0^- dans $H^1(\Gamma)$ et $\langle \alpha \rangle_y \partial_t u_2^+$ dans $L^2(\Omega^+)$ (voir la relation (4.39)), on obtient les résultats de compensation suivants :

$$\int_{\Omega^+} \left[\left\langle \frac{\alpha}{\langle \alpha \rangle_t} \right\rangle_y - \frac{\alpha_\delta}{\langle \alpha_\delta \rangle_t} \right] \alpha_0 \partial_s u_0^- \partial_s v^+ ds dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (4.65)$$

$$\int_{\Omega^+} \left[\langle \beta \rangle_y - \beta_\delta \right] u_0^- v^+ ds dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (4.66)$$

Par conséquent, il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $v^+ \in H^1(\Omega^+)$, pour tout $\varepsilon > 0$, l'estimation suivante a lieu pour tout δ (assez petit) :

$$\left| B_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \varepsilon \delta \quad (4.67)$$

En prenant alors $\varepsilon = c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \|v^+\|_{0, \Omega^+}$ strictement positif, on obtient :

$$\left| B_\delta^{(1)} v \right| \leq c \delta \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \|v^+\|_{0, \Omega^+} \right) \quad (4.68)$$

En utilisant en suite la propriété (3.62), on obtient l'estimation suivante :

$$\left| L_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\delta^2 \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|v^-\|_{1, \Omega} \right) \quad (4.69)$$

A ce niveau de la démonstration, on peut voir clairement pourquoi l'ordre de convergence est seulement en δ . En effet, (4.69) ne peut pas produire mieux que l'estimation d'ordre 1 suivante :

$$\left| L_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \delta \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \|v^-\|_{1, \Omega} \right) \quad (4.70)$$

et qui, par conséquent, achève la preuve de (4.57) pour $j = 1$ grâce au théorème de stabilité 3.1.

Le reste de la preuve pour $j = 2$ étant similaire, on en donnera une esquisse seulement. Comme ci-dessus, on devra estimer la forme linéaire $L_\delta^{(2)}$ définie sur X_N par :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(2)} v &= \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_\delta^- - u_0^- - \delta u_1^- - \delta^2 u_2^-, v^-) \\ &= L_\delta^{(1)} v - \delta^3 a^+ (\delta, u_2^+, v^+) - \delta^3 b^+ (\delta, u_2^+, v^+) - a_k^- (u_2^-, v^-) \end{aligned}$$

Alors, en plus des résultats obtenus pour $j = 1$, on combine les propriétés et les équations faisant intervenir u_2 , on utilise la règle de dérivation $\partial_s \rightarrow \partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y$ sur les termes dépendants de $\frac{s}{\delta}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(2)} v &= L_\delta^{(1)} v - \delta^3 \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(1 - \frac{t\delta}{R(s)} + \dots \right) \left(\partial_s u_2^+ + \frac{1}{\delta} \partial_y u_2^+ \right) \partial_s v^+ ds dt \\ &\quad - \delta \int_{\Omega^+} \alpha_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)} \right) \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt \\ &\quad + \delta^3 k^2 \int_{\Omega^+} \beta_\delta \left(1 + \frac{t\delta}{R(s)} \right) u_2^+ v^+ ds dt - \delta^2 a_k^- (u_2^-, v^-) \end{aligned}$$

Encore une fois, les termes en δ^k avec $k < 3$ (essentiellement ceux contenant les dérivées tangentielles) deviennent les mauvais termes dans le cas des couches minces périodiques. Heureusement, ils sont compensés comme pour l'ordre $j = 1$ par la même propriété de convergence faible mais, encore une fois, au prix d'une demi-puissance de δ dans la vitesse de convergence. Néanmoins, on se contente d'utiliser cette propriété de convergence faible jointe aux propriétés de u_1 et u_2 (essentiellement (4.52) et (4.53)) et l'hypothèse de régularité $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, afin de vérifier que le poids portant sur $\|v^+\|_{0,\Omega^+}$ est au pire du même ordre que δ^2 . Ainsi, et à l'aide de (3.62), on obtient l'estimation suivante :

$$\left| L_\delta^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2},\Omega} \left(\delta^3 \|\partial_s v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^2 \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^2 \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (4.71)$$

qui donne en retour l'estimation espérée :

$$\left| L_\delta^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2},\Omega} \delta^2 \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v^+\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (4.72)$$

Finalement, la preuve est une conséquence directe du théorème de stabilité 3.1. ■

4.5 Les conditions aux limites approchées de Neumann

De manière similaire au cas non périodique, dans l'Ansatz tronqué à l'ordre j donné par (4.55) on remplace chaque terme u_l^- par $\delta^{j-l} u_j^{EN}$ et on obtient pour le cas de la condition de Neumann, par exemple, le problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_j^{EN} \in H^1(\Omega) \\ \Delta u_j^{EN} + k^2 u_j^{EN} = -f \text{ dans } D'(\Omega) \\ \partial_n u_j^{EN} + Z_\delta^{(j)} u_j^{EN} = 0 \text{ dans } D'(\Gamma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_j^{EN} - i k u_j^{EN}) = 0 \end{cases} \quad (4.73)$$

où

$$Z_\delta^{(j)} = Z^{(0)} + \delta Z^{(1)} + \dots + \delta^j Z^{(j)} \quad (4.74)$$

est l'opérateur d'impédance approché qui peut être décrit pour $j = 0, 1, 2$, par :

$$Z^{(0)} = 0 \quad (4.75)$$

$$Z^{(1)} = -(\partial_s \alpha_0 \partial_{s^*} + k^2 \beta_0) \quad (4.76)$$

$$Z^{(2)} = \partial_s \left(\frac{\alpha_{1\#}}{R} \right) \partial_{s^*} - k^2 \left[\left(\frac{\beta_1}{R} - \partial_s C_{\alpha\beta} \right) \cdot + (\beta_\# - C_{\alpha\beta}) \partial_{s^*} \right] \quad (4.77)$$

et $\alpha_0, \beta_0, \alpha_{1\#}, \beta_1$ et $\beta_\#$ sont les coefficients homogénéisés liés à la structure mince.

De même, si on introduit l'Ansatz tronqué à l'ordre j , alors ϕ_δ^{j-} vérifie le même problème (4.73) dans lequel la condition aux limites sur Γ est simplement perturbée par un terme d'ordre $j + 1$, i.e.

$$\partial_n \phi_\delta^{j-} + Z_\delta^{(j)} \phi_\delta^{j-} = \delta^{j+1} \rho_\delta^j \text{ dans } D'(\Gamma) \quad (4.78)$$

et où le second membre peut être donné pour $j = 0, 1, 2$, par :

$$\rho_\delta^0 = 0, \quad \rho_\delta^1 = -Z^{(1)}u_1^-, \quad \rho_\delta^2 = -Z^{(1)}u_2^- - Z^{(2)}(u_1^- + \delta u_2^-) \quad (4.79)$$

La formulation variationnelle de (4.73) s'écrit alors :

$$\begin{cases} u_j^{EN} \in V^{(m)}; \quad \forall v \in V^{(m)} \\ a_k^-(u_j^{EN}, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l (a_\Gamma^l(u_j^{EN}, v) + b_\Gamma^l(u_j^{EN}, v)) = \int_\Omega f v dx \end{cases} \quad (4.80)$$

où $V^{(m)}$ est l'espace de Hilbert introduit au chapitre précédent :

$$V^{(m)} = \{v \in H^1(\Omega); \quad v|_\Gamma \in H^m(\Gamma)\} : m = 0, 1 \quad (4.81)$$

tel que $m = 0, 1, 1$ correspond dans l'ordre à $j = 0, 1, 2$ et où $a_\Gamma^{(j)}, b_\Gamma^{(j)}$ sont des formes bilinéaires continues sur $V^{(m)}$ et définies par :

$$a_\Gamma^{(0)}(u, v) = b_\Gamma^{(0)}(u, v) = 0 \quad (4.82)$$

$$a_\Gamma^{(1)}(u, v) = \int_\Gamma \alpha_0 \partial_s u \partial_s v ds \quad (4.83)$$

$$b_\Gamma^{(1)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \beta_0 u v ds \quad (4.84)$$

$$a_\Gamma^{(2)}(u, v) = - \int_\Gamma \frac{\alpha_{1\#}}{R} \partial_s u \partial_s v ds \quad (4.85)$$

$$b_\Gamma^{(2)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \left(\frac{\beta_1}{R} - \partial_s C_{\alpha\beta} \right) u v ds - k^2 \int_\Gamma (\beta_\# - C_{\alpha\beta}) (\partial_s u) v ds \quad (4.86)$$

Il est clair que, sous cette forme, les techniques standards utilisant le lemme de Rellich [44] et l'alternative de Fredholm (cf. [16], [41], [56]) conduisent, pour δ assez petit, à l'existence et l'unicité de la solution du problème (4.80). En effet, le seul terme nouveau par rapport à la formulation dans [16] dans le cas d'une couche mince homogène ou aussi par rapport à celle du chapitre précédent, est le terme non symétrique qui se trouve dans la forme bilinéaire $b_\Gamma^{(2)}$. Comme δ est destiné à tendre vers 0, ce terme sera compensé, fort heureusement, par une puissance dominante de δ dans l'alternative de Fredholm. L'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16] est donc encore valable et s'énonce comme suit.

Théorème 4.2 *il existe une constante c telle que pour toute famille de formes linéaires $\{L_\delta\}_{\delta>0}$ sur $V^{(m)}$ vérifiant*

$$|L_\delta v| \leq l(\delta) \left(m\delta^{\frac{1}{2}} \|v\|_{m,\Gamma} + \|v\|_{1,\Omega} \right),$$

la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} u_\delta \in V^{(m)}; \quad \forall v \in V^{(m)}, \\ a_k^-(u_\delta, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l (a_\Gamma^l(u_\delta, v) + b_\Gamma^l(u_\delta, v)) = L_\delta v, \end{cases}$$

satisfait l'estimation

$$\|v\|_{1,\Omega} \leq cl(\delta).$$

où, pour $j = 0, 1, 2$ les valeurs respectives de m sont $0, 1, 1$, et $l(\delta)$ est une constante qui dépend de δ .

Preuve: Les termes dont le signe ne peut être contrôlé sont multipliés par une puissance dominante de δ . Comme ce paramètre est destiné à tendre vers 0, alors on a l'estimation de coercivité suivante :

Il existe une constante $c > 0$ indépendante de $\delta > 0$ assez petit, telle que :

$$a^-(v, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l a_\Gamma^l(v, v) \geq c \left(\|v\|_{1,\Omega}^2 + m\delta \|v\|_{m,\Gamma}^2 \right), \quad \forall v \in V^{(m)} \quad (4.87)$$

Comme dans ([16]), l'étape suivante est d'estimer $\|p_\delta - p_0\|_{1,\Omega}$, où p_δ et p_0 sont les solutions respectives des problèmes dont les seconds membres dépendent d'un élément fixe $u \in H^1(\Omega)$, suivants :

$$\begin{cases} p_\delta \in V^{(m)}; & \forall v \in V^{(m)} \\ a^-(p_\delta, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l a_\Gamma^l(p_\delta, v) = b_k^-(u, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l b_\Gamma^l(u, v) \end{cases} \quad (4.88)$$

$$\begin{cases} p_0 \in H^1(\Omega); & \forall v \in H^1(\Omega), \\ a^-(p_0, v) = b_k^-(u, v). \end{cases} \quad (4.89)$$

Les arguments de régularité elliptique impliquent

$$\|p_0\|_{3,\Omega} \leq c \|u\|_{1,\Omega}, \quad (4.90)$$

et en particulier $p_0 \in V^{(m)}$. En posant $v = p_\delta - p_0$ dans l'estimation de coercivité (4.87) et en tenant compte de (4.88) et (4.89), on obtient :

$$\|p_\delta - p_0\|_{1,\Omega}^2 + m\delta \|p_\delta - p_0\|_{m,\Gamma}^2 \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,\Omega} \left(\|p_\delta - p_0\|_{1,\Omega} + m\delta^{\frac{1}{2}} \|p_\delta - p_0\|_{m,\Gamma} \right),$$

ce qui entraîne, pour δ petit :

$$\|p_\delta - p_0\|_{1,\Omega} \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_{1,\Omega}.$$

Ainsi, la suite de la démonstration est similaire à celle dans ([16]). ■

A partir de cette propriété de stabilité de la solution par rapport au petit paramètre δ , on obtient alors le théorème de convergence non optimal suivant :

Théorème 4.3 *Il existe une constante c indépendante de δ et du terme source f telle que la solution u_δ du problème variationnel (4.11) et la solution u_j^{EN} de (4.80) vérifient :*

$$\|u_\delta^- - u_0^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (4.91)$$

$$\|u_\delta^- - u_j^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c\delta^j \|f\|_{j-\frac{1}{2},\Omega} : j = 1, 2 \quad (4.92)$$

Preuve: La preuve est similaire à celle du théorème 3.5 du chapitre précédent. Pour $j = 0$ elle est évidente. Pour $j = 1$ ou 2, et à l'aide de (4.57), il est suffisant d'estimer la différence $\omega_\delta^j = \phi_\delta^{j-} - u_j^{EN}$. D'où, en partant des équations (4.80) et (4.78), on obtient :

$$a_k^-(\omega_\delta^j, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l \left(a_\Gamma^{(l)}(\omega_\delta^j, v) + b_\Gamma^{(l)}(\omega_\delta^j, v) \right) = \mathfrak{R}_\delta^{(j)} v \quad (4.93)$$

où le second membre est donné par :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\delta^{(1)} v &= -\delta^2 \int_\Gamma Z^{(1)} u_1^- v dx \\ \mathfrak{R}_\delta^{(2)} v &= -\delta^3 \int_\Gamma [Z^{(1)} u_2^- + Z^{(2)}(u_1^- + \delta u_2^-)] v dx \end{aligned}$$

On rappelle aussi que si $f \in H^{j-\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_j^- \in H^1(\Gamma)$. D'où, en intégrant par parties sur Γ , on obtient :

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}_\delta^{(1)} v &= \delta^2 \left[a_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) + b_\Gamma^{(1)}(u_1^-, v) \right] \\ \mathfrak{R}_\delta^{(2)} v &= \delta^3 \left[a_\Gamma^{(1)}(u_2^-, v) + b_\Gamma^{(1)}(u_2^-, v) + a_\Gamma^2(u_1^- + \delta u_2^-, v) + b_\Gamma^2(u_1^- + \delta u_2^-, v) \right] \end{aligned}$$

Ainsi, puisque les formes bilinéaires $a_\Gamma^{(j)}$ et $b_\Gamma^{(j)}$ sont continues sur $V^{(m)}$, alors il existe une constante c indépendante de δ (assez petit) telle que :

$$\left| \mathfrak{R}_\delta^{(j)} v \right| \leq c \delta^{j+1} \|f\|_{j-\frac{1}{2}, \Omega} \|v\|_{1, \Gamma}$$

On conclut à l'aide de l'argument de stabilité 4.2 que ω_δ^j satisfait l'estimation

$$\|\omega_\delta^j\|_{1, \Omega} \leq c \delta^{j+\frac{1}{2}} \|f\|_{j-\frac{1}{2}, \Omega} \quad (4.94)$$

La preuve est alors achevée par le théorème de convergence 3.2 et la décomposition suivante :

$$u_\delta^- - u_j^{EN} = u_\delta^- - \phi_\delta^{j-} + \omega_\delta^j \quad (4.95)$$

■

Il est important de noter que l'estimation d'erreur (4.94) entre la solution approchée u_j^{EN} et l'Ansatz tronqué ϕ_δ^{j-} est optimale par rapport à celle obtenue dans le théorème 4.1 où une perte d'une demi puissance de δ a été observée dans la vitesse de convergence. Ceci est actuellement un avantage pour optimiser l'estimation d'erreur obtenue dans le théorème précédent, en demandant bien sûr plus de régularité au terme source afin que le développement asymptotique existe à l'ordre suivant (cf. [50]).

Par exemple, pour $j = 1$ on écrit :

$$\begin{aligned} \|u_\delta^- - (u_0^- + \delta u_1^-)\|_{1, \Omega} &= \|u_\delta^- - (u_0^- + \delta u_1^- + \delta^2 u_2^-) + \delta^2 u_2^-\|_{1, \Omega} \\ &\leq \|u_\delta^- - (u_0^- + \delta u_1^- + \delta^2 u_2^-)\|_{1, \Omega} + \delta^2 \|u_2^-\|_{1, \Omega} \end{aligned}$$

Si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors u_2^- existe dans $H^1(\Omega)$. D'où, l'estimation (3.59) et le fait que $\|u_2^-\|_{1,\Omega}$ ne dépend pas de δ conduisent à l'inégalité optimale suivante :

$$\|u_\delta^- - (u_0^- + \delta u_1^-)\|_{1,\Omega} \leq c\delta^2 \|f\|_{\frac{3}{2},\Omega}$$

Il en découle alors, grâce à (4.92) et (4.95), que pour $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, on a l'estimation optimale suivante :

$$\|u_\delta^- - u_1^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c\delta^{\frac{3}{2}} \|f\|_{\frac{3}{2},\Omega}$$

où la demi puissance de δ perdue dans la vitesse de convergence dans le théorème 4.1-estimation (4.57), vient d'être récupérée.

4.6 Conclusion

On vient d'illustrer dans ce chapitre, par un cas simple 2D, l'efficacité de l'analyse asymptotique à deux échelles lorsqu'il s'agit d'une double perturbation singulière. Cette dernière affecte la vitesse de convergence par la perte d'une demi-puissance de δ . En outre, des termes effectifs tels que les effets de mémoire et de variance-covariance sont mis en évidence dans le cas de couches minces périodiques, alors que cela ne pouvait pas être obtenu en faisant simplement une homogénéisation suivie d'une analyse asymptotique ou vice versa comme dans le cas laminaire où la période tangentielle est négligeable devant l'épaisseur. Nous estimons que le fait de considérer des coefficients variables par rapport à la direction normale permet de traiter le cas d'un nombre infini de couches minces périodiques par la même technique. Par contre, les problèmes de couches minces périodiques fortement contrastées (par exemple $\alpha = o(\delta^{-1})$) ou encore ceux de systèmes 3D comme le système complet de Maxwell ne sont pas évidents et par conséquent ils nécessitent des justifications rigoureuses afin de leur adapter la méthode multi-échelle.

Chapitre 5

Application de l'analyse double échelle au problème de la diffraction d'une onde harmonique par une surface rugueuse

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre que l'analyse asymptotique double échelle peut être aussi efficace dans le cas des problèmes de diffraction par une surface rugueuse. Notre méthode est similaire à celle utilisée dans [42], dans le sens où la solution est décomposée en deux parties dont l'une dépend de l'échelle lente et l'autre dépend de l'échelle rapide. Plus précisément, notre approche est basée sur une décomposition du domaine de telle sorte que le problème posé fait intervenir une couche mince et rugueuse. Nous supposons que la rugosité est périodique et que l'épaisseur est du même ordre que la période. En fait, il s'agit de ramener le problème de diffraction par une frontière rugueuse à celui de la diffraction par une couche mince homogène d'épaisseur variable et périodique par rapport à la direction tangentielle. Ainsi, les techniques utilisées dans les deux chapitres précédents peuvent être adoptées, afin de construire et approcher l'opérateur de Steklov-Poincaré sur une frontière artificielle qui ne présente plus les oscillations rapides de la surface rugueuse. Les conditions aux limites approchées d'Engquist et Nédélec [33] peuvent être construites et analysées de manière simple. En plaçant ces conditions sur une frontière artificielle dont les variations dépendent uniquement de l'échelle lente, on parvient en particulier à traiter le cas de la polarisation (TE) qui fait intervenir une dérivée normale oscillante et qui a présenté souvent le plus de difficulté relativement à l'autre polarisation. En plus de la condition de transmission moyenne utilisée dans le chapitre précédent, une nouvelle condition, appelée condition aux limites moyenne, est imposée sur les termes du développement asymptotique sur la surface moyenne de la surface rugueuse. Cette condition aux limites représente les oscillations rapides de la dérivée normale sur la surface rugueuse. Des conditions aux limites approchées sont obtenues, soulignant le fait qu'à partir de l'ordre 2, des effets de mémoire sont mis en évidence. Les résultats de convergence sont similaires à ceux obtenus au chapitre précédent, en raison de la similitude de la double perturbation singulière produite par les deux échelles, et ils reposent sur le même argument de stabilité

de Bendali-Lemrabet [16] qui reste valide sous l'hypothèse que les dérivées tangentielles de la rugosité restent bornées uniformément par rapport à l'échelle rapide.

5.2 Description d'un modèle bidimensionnel

Une surface rugueuse dans $\mathbb{R}^2$ est décrite par une fonction à deux échelles

$$y = \gamma_\delta(x) := \delta\gamma\left(x, \frac{x}{\delta}\right) = \delta\gamma(x, y)|_{y=x/\delta}, \quad (5.1)$$

$x \longrightarrow \gamma(x, y)$ est périodique de période L et $y \longrightarrow \gamma(x, y)$ est périodique de période d (sans perte de généralité, d est normalisé à 1). Ceci exprime le fait que la surface admet des variations lentes de l'ordre de la longueur d'onde en x et des variations rapides comparées à la longueur d'onde décrites par la variable y . Le petit paramètre δ caractérise à la fois la petite amplitude et les oscillations rapides de la surface.

Dans notre étude, on suppose que la surface rugueuse est un contour simple et fermé Γ_δ dans $\mathbb{R}^2$, qui peut être décrit localement par une fonction à deux échelles du type (5.1). On note alors $\Omega_{\delta,\infty}$ le domaine extérieur au contour Γ_δ dans $\mathbb{R}^2$ (le milieu de propagation), $\Omega_{\delta,0} = \mathbb{R}^2 - \bar{\Omega}_{\delta,\infty}$ désigne l'obstacle rugueux diffractant. Ainsi, le problème de Neumann associé à l'obstacle rugueux consiste à trouver le champ diffracté u_δ solution du système suivant :

$$\begin{cases} u_\delta \in H_{loc}^1(\bar{\Omega}_{\delta,\infty}) \\ \Delta u_\delta + k^2 u_\delta = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega_{\delta,\infty}) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_\delta = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_\delta) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_\delta - i k u_\delta) = 0 \end{cases} \quad (5.2)$$

où $f \in L^2(\Omega_{\delta,\infty})$ désigne le terme source, à support compact dans $\Omega_{\delta,\infty}$. Les mêmes arguments standards, comme le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm, permettent de conclure à l'existence et l'unicité de la solution u_δ dans $H_{loc}^2(\bar{\Omega}_{\delta,\infty})$.

5.3 Décomposition du domaine et mise à l'échelle

On convient de noter $\mathbf{n}$ la normale unitaire à une courbe donnée orientée toujours vers l'obstacle $\Omega_{\delta,0}$. On supposera alors que le support de f est suffisamment loin de la frontière Γ_δ de $\Omega_{\delta,0}$, afin de pouvoir les séparer à l'aide d'une interface Γ (contour fermé régulier) et de telle sorte que le domaine Ω_δ^+ délimité par Γ et Γ_δ soit un domaine connexe (cf. figure 5.1). On a alors :

$$\Omega_{\delta,\infty} = \Omega_\delta^+ \cup \Gamma \cup \Omega_\infty$$

où Ω_∞ représente le milieu de propagation dans lequel nous allons approcher la solution du problème de diffraction. Ainsi, on vient d'introduire une couche mince rugueuse artificielle Ω_δ^+ qui a les mêmes propriétés physiques que le milieu extérieur Ω_∞ . Afin d'obtenir une

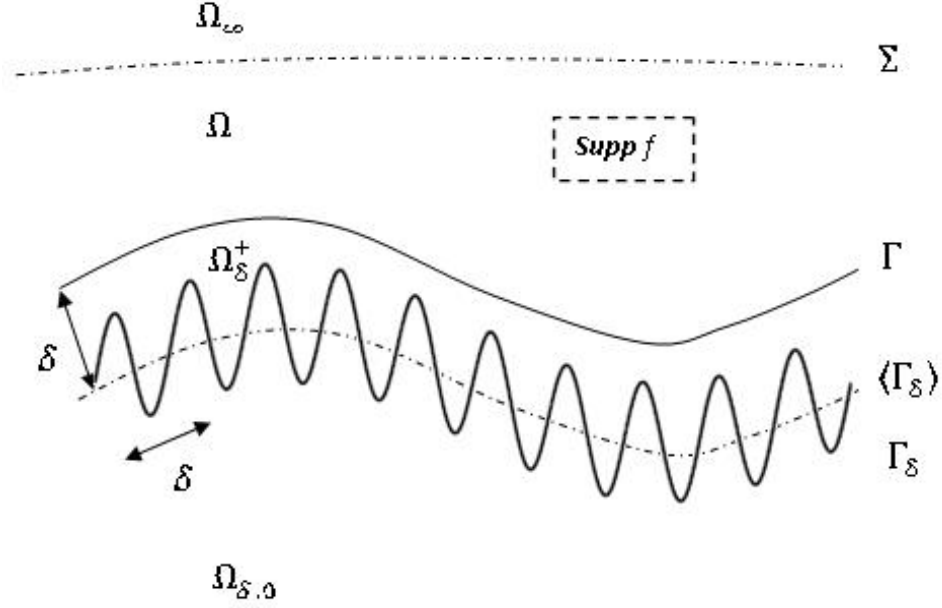


Figure 5.1: Une portion de la frontière rugueuse. La période tangentielle est du même ordre que l'amplitude des oscillations, ainsi que la distance à laquelle est placée la frontière artificielle. $\langle \Gamma_\delta \rangle$ désigne la courbe moyenne à Γ_δ .

formulation dans un domaine fixe, Ω_δ^+ est paramétrisé par le domaine tubulaire $\Omega^+ = \Gamma \times (0, 1)$ à l'aide de l'application à deux échelles η suivante :

$$\begin{cases} \Omega^+ = \Gamma \times (0, 1) \xrightarrow{\eta} \Omega_\delta^+ \\ (s, t) \mapsto x = s + t\delta h\left(s, \frac{s}{\delta}\right) \mathbf{n}(s) = \eta(s, t) \end{cases}$$

où h est une fonction à deux échelles décrivant l'épaisseur de Ω_δ^+ . Si $m(s)$ est la projection orthogonale du point $x \in \Gamma_\delta$ sur la courbe Γ , alors $\delta h\left(s, \frac{s}{\delta}\right)$ est la distance euclidienne de x à $m(s)$. Si L est la longueur de Γ , alors l'application $s \rightarrow h(s, y)$ est vue comme une fonction périodique de période L et $y \rightarrow h(s, y)$ comme une fonction périodique de période 1. h est supposée assez régulière, et telle que :

$$0 < h_* \leq h(s, y) \leq h^* \quad (5.3)$$

$$0 < h_* \leq \partial_y h(s, y) \leq h^* \quad (5.4)$$

presque partout en $s \in (0, L)$ et $y \in (0, 1)$; h_* et h^* sont deux constantes qui ne dépendent pas de δ . De cette façon, la couche mince rugueuse Ω_δ^+ devient δ -périodique par rapport à la direction tangentielle, en un sens similaire à celui de la définition (4.1) du chapitre précédent. Rappelons que, pour δ suffisamment petit, η réalise un C^∞ difféomorphisme de variétés entre Ω^+ et Ω_δ^+ . Comme dans le chapitre précédent, à une fonction v définie sur Ω_δ^+ on associe la fonction $\hat{v}$ définie sur le domaine fixe Ω^+ grâce au changement de variables :

$$\begin{cases} x = \eta(s, t) \\ \hat{v}(s, t) = v(x) \end{cases}$$

En adoptant ensuite la règle de dérivation standard en technique d'homogénéisation :

$$\partial_s \rightarrow \partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y,$$

on obtient les relations différentielles locales suivantes :

$$\begin{aligned} \partial_t x &= \delta h \mathbf{n} \\ \partial_s x &= \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) \boldsymbol{\tau} + t\delta \left(\partial_s h + \frac{1}{\delta} \partial_y h\right) \mathbf{n} \end{aligned}$$

Le gradient de v dans la base locale de Frénet $[\boldsymbol{\tau}, \mathbf{n}]$ (attachée à la courbe Γ) s'écrit alors

$$\nabla v = \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} \left(\partial_s - \frac{\partial_s h + \frac{1}{\delta} \partial_y h}{h} t \partial_t\right) \hat{v} \cdot \boldsymbol{\tau} + \delta^{-1} h^{-1} \partial_t \hat{v} \cdot \mathbf{n}$$

et l'élément de surface $d\Omega_\delta^+$ s'obtient de manière intrinsèque par la relation suivante :

$$d\Omega_\delta^+ = \delta h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) ds dt$$

Par abus de notations, on confondra v et $\hat{v}$. Ainsi, v^+ (respectivement v^-), désignera la restriction d'une fonction v définie sur $\Omega_{\delta,\infty}$ à Ω_δ^+ (respectivement Ω_∞), et Ω désignera le domaine extérieur Ω_∞ tronqué par un cercle Σ de rayon ρ assez grand pour contenir le support de la source f (cf. figure 5.1). La solution du problème (5.2) vérifie alors les conditions de transmission sur Γ

$$u_\delta^+|_\Gamma = u_\delta^-|_\Gamma, \quad \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^+|_\Gamma = \partial_{\mathbf{n}} u_\delta^-|_\Gamma$$

Comme dans le chapitre 3, on note S_k l'opérateur de Steklov-Poincaré sur Σ , et $D_{(h)}$ l'opérateur différentiel :

$$D_{(h)} = \partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t \quad (5.5)$$

Alors, la formulation variationnelle (5.2) peut être écrite de manière équivalente dans un espace fixe par rapport à δ , comme suit :

$$\begin{cases} u_\delta \in X; \forall v \in X, \\ \delta a^+ (\delta, u_\delta^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+, v^+) + a_k^- (u_\delta^-, v^-) = \int_\Omega f v^- dx, \end{cases} \quad (5.6)$$

où les formes bilinéaires $a^+ (\delta, \cdot, \cdot)$, $b^+ (\delta, \cdot, \cdot)$ et $a_k^- (\delta, \cdot, \cdot) = a^- (\delta, \cdot, \cdot) + b_k^- (\delta, \cdot, \cdot)$ sont définies sur l'espace de Hilbert X , comme suit :

$$X = \{ (v^+, v^-) \in H^1 (\Omega^+) \times H^1 (\Omega) : v^+ (\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma \},$$

$$\begin{aligned} a^+ (\delta, u, v) &= \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) u \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) v ds dt \\ &\quad + \delta^{-2} \int_{\Omega^+} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) \partial_t u \partial_t v ds dt, \end{aligned} \quad (5.7)$$

$$b^+(\delta, u, v) = -k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} h \left(1 + \frac{t\delta h}{R} \right) uv ds dt, \quad (5.8)$$

$$a^-(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \langle Su, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma}, \quad (5.9)$$

$$b_k^-(u, v) = -k^2 \int_{\Omega} uv dx - \langle R_k u, v \rangle_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \Sigma}, \quad (5.10)$$

où S et R_k sont les opérateurs au bord Σ introduits au chapitre précédent.

Remarque 5.1 *Si h ne dépend pas de y , i.e., h dépend uniquement de la variable lente s , alors on retrouve une formulation similaire au cas des couches minces non uniformes. À présent, il est clair que le terme oscillant $\partial_y h$ est affecté d'une puissance négative de δ , et que par conséquent l'argument de stabilité de la solution nécessite d'être revu de plus près afin d'établir les résultats de convergence lors de l'analyse asymptotique.*

5.4 Etude de la stabilité

Le poids δ portant sur la forme $a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ dans la formulation (5.6) conduit, pour un second membre plus général, à une solution u_δ telle que les dérivées tangentielles $\partial_s u_\delta^+$ ne sont pas bornées quand δ tend vers 0. C'est un terme de perturbation singulière par rapport à la variable lente s . En outre, la non contrôlabilité du signe du membre de gauche dans (5.6) pour $v = \bar{u}_\delta$ conduit à une dépendance singulière de u_δ par rapport à δ même dans le domaine Ω . En fait, les termes du développement asymptotique de la solution sont des fonctions de la variable rapide y , et par conséquent le terme oscillant $\partial_y h$ affecte les variations de u_δ par rapport à la variable rapide. On aboutit alors à un deuxième type de perturbation singulière qui se traduit par des dérivées par rapport à y non bornées. Heureusement, par la suite, les seconds membres qui apparaissent dans l'analyse asymptotique de ce problème se comportent de manière à compenser ces singularités.

5.4.1 Alternative de Fredholm pour δ fixé

On montre que, pour des seconds membres convenables, la solution u_δ du problème (5.6) sera bornée par rapport à une topologie plus faible que celle de X , à savoir dans l'espace de Hilbert

$$Y = \{v = (v^+, v^-) \in H^1(0, 1, L^2(\Gamma)) \times H^1(\Omega); \quad v^+(\cdot, 0) = v^- \text{ sur } \Gamma\}$$

Il est clair que pour δ fixé, la forme bilinéaire $\delta a^+(\delta, \cdot, \cdot) + a^-(\cdot, \cdot)$ est coercive dans X . Le lemme de Lax-Milgram permet donc de définir l'opérateur de perturbation singulière T_δ de Y dans X , en posant pour tout $u \in Y$: $T_\delta u = p_\delta$, où p_δ est l'unique solution du problème variationnel et coercif suivant :

$$\begin{cases} p_\delta \in X, & \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, p_\delta^+, v^+) + a^-(p_\delta^-, v^-) = \delta b^+(\delta, u^+, v^+) + b_k^-(u^-, v^-). \end{cases} \quad (5.11)$$

Il découle des mêmes arguments de compacité locale de l'espace H^1 dans L^2 et $H^{\frac{1}{2}}$ dans $H^{-\frac{1}{2}}$ que T_δ est un opérateur compact de Y dans X (et par conséquent de Y dans Y).

Ainsi, $(I + T_\delta)u_\delta = w_\delta$ est solution d'un problème variationnel et coercif et par conséquent, la stabilité s'obtient *via* une estimation à gauche de l'opérateur $I + T_\delta$ qui permet alors de contrôler la norme de u_δ dans l'espace Y . Pour cela, nous avons besoin des estimations *a priori* suivantes :

proposition 5.1 *Il existe une constante positive c , telle que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \|\partial_s p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c\delta^{-\frac{1}{2}} \|u\|_Y, & (i) \\ \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y, & (ii) \\ \|p_\delta^-\|_{1,\Omega} \leq c \|u\|_Y. & (iii) \end{array} \right. \quad (5.12)$$

pour tout $u \in Y$ et tout $\delta > 0$ assez petit.

Preuve: La lettre générique c indique différentes constantes (indépendantes de δ) qui interviennent dans les différentes estimations qui vont suivre. Commençons d'abord par expliciter les estimations de coercivité de la forme bilinéaire $\delta a^+(\delta, \cdot, \cdot)$ par rapport à δ . On a

$$\begin{aligned} \delta a^+(\delta, p_\delta^+, \bar{p}_\delta^+) &= \delta \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right)^{-1} \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) p_\delta^+ \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) \bar{p}_\delta^+ ds dt \\ &\quad + \delta^{-1} \int_{\Omega^+} \frac{1}{h} \left(1 + \frac{t\delta h}{R}\right) \partial_t p_\delta^+ \partial_t \bar{p}_\delta^+ ds dt \end{aligned} \quad (5.13)$$

D'où, pour δ petit, et à l'aide de l'estimation (5.3), on obtient

$$\delta a^+(\delta, p_\delta^+, \bar{p}_\delta^+) \geq c \left(\delta \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) p_\delta^+ \right\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 \right) \quad (5.14)$$

Donc, en posant $v = \bar{p}_\delta$ dans l'équation (5.11), on a

$$\delta a^+(\delta, p_\delta^+, \bar{p}_\delta^+) + a^-(p_\delta^-, \bar{p}_\delta^-) = \delta b^+(\delta, u^+, \bar{p}_\delta^+) + b_k^-(u^-, \bar{p}_\delta^-) \quad (5.15)$$

et par conséquent, il existe $c > 0$, indépendante de δ , telle que :

$$\delta \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) p_\delta^+ \right\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|p_\delta^-\|_{1,\Omega}^2 \leq c \|u\|_Y \left(\delta \|p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (5.16)$$

En utilisant, ensuite, l'estimation standard :

$$\|p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} \leq c \left(\|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1,\Omega} \right), \quad (5.17)$$

on déduit, pour δ petit, que

$$\begin{aligned} &\delta \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) p_\delta^+ \right\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+}^2 + \|p_\delta^-\|_{1,\Omega}^2 \\ &\leq c \|u\|_Y \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) p_\delta^+ \right\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t p_\delta^+\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^-\|_{1,\Omega} \right) \end{aligned} \quad (5.18)$$

Ceci achève la démonstration pour les deux estimations (5.12-(ii)) et (5.12-(iii)). En outre, l'inégalité (5.18) implique que :

$$\left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \leq c \delta^{-\frac{1}{2}} \|u\|_Y \quad (5.19)$$

Pour montrer (5.12-(i)), on part de la définition

$$D_{(h)} = \partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t$$

ce qui entraîne

$$\begin{aligned} \|\partial_s p_\delta^+\|_{0, \Omega^+} &= \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t \right) p_\delta^+ + \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \\ &= \left\| D_{(h)} p_\delta^+ + \frac{\partial_s h}{h} t \partial_t p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \\ &= \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) p_\delta^+ + \frac{\partial_s h + \frac{\partial_y h}{\delta}}{h} t \partial_t p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \\ &\leq \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} + \left\| \frac{\partial_s h + \frac{\partial_y h}{\delta}}{h} t \partial_t p_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \end{aligned}$$

et puisque $\partial_s h/h$ et $\partial_y h/h$ sont bornées, la démonstration de (5.12-(i)) est achevée en tenant compte de (5.19) et (5.12-(ii)). ■

5.4.2 Passage à la limite dans l'alternative de Fredholm

Les estimations *a priori* précédentes permettent de conclure que la suite $(p_\delta)_{\delta>0}$ est bornée dans l'espace de Hilbert Y , i.e.

$$\|p_\delta\|_Y \leq c \|u\|_Y,$$

où c est une constante indépendante de u dans Y , pour tout $\delta > 0$ assez petit. Il existe alors une sous-suite (notée toujours p_δ) et un élément $p_0 \in Y$, telles que

$$p_\delta \rightharpoonup p_0 \quad \text{faiblement dans } Y.$$

La limite p_0 est caractérisée par la proposition suivante :

proposition 5.2 p_0^- est l'unique solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} p_0^- \in H^1(\Omega), & \forall v^- \in H^1(\Omega), \\ a^-(p_0^-, v^-) = b_k^-(u^-, v^-). \end{cases} \quad (5.20)$$

En outre, p_0^+ est la fonction constante en t sur Ω^+ telle que $p_0 = (p_0^+, p_0^-)$ soit dans Y , i.e.,

$$p_0^+(\cdot, t) = p_0^- \quad \text{sur } \Gamma; \quad t \in (0, 1), \quad (5.21)$$

et par conséquent p_0 est un élément de X .

Preuve: A l'aide de (5.12-(ii)) on montre que $\partial_t p_0^+ = 0$. On obtient alors directement (5.21) à l'aide de la condition de transmission qui définit l'espace Y .

Soit, maintenant, v^- une fonction test régulière dans $H^1(\Omega)$ qui peut être prolongée par une fonction v^+ dans Ω^+ de telle sorte que $v = (v^+, v^-) \in X$ a les mêmes propriétés que p_0 (pour la condition de Dirichlet, il aurait suffi de prendre simplement $v^+ = 0$). Dans notre cas (condition de Neumann), on choisit v^+ tel que

$$\begin{cases} \partial_t v^+ = 0, \\ \lim_{\delta \rightarrow 0} \delta^{\frac{1}{2}} \partial_s v^+ = 0. \end{cases}$$

Alors, l'estimation (5.12-(ii)) permet d'obtenir

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \delta a^+(\delta, p_\delta^+, v^+) = 0.$$

Ainsi, en passant à la limite dans (5.11-(ii)), on s'aperçoit que p_0^- satisfait le problème (5.20) pour des fonctions test v^- régulières. Par densité, on conclut que p_0^- est solution forte du problème (5.20), i.e.

$$\begin{cases} p_0^- \in H^1(\Omega), \\ \Delta p_0^- = k^2 u \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} p_0^- = 0 \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \partial_{\mathbf{n}} p_0^- + S p_0^- = R_k p_0^- \quad \text{dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{cases}$$

Les résultats de régularité standards pour l'équation de Laplace avec une condition de Neumann sur le bord impliquent que p_0^- est H^3 au voisinage de Γ . Actuellement, les résultats sur les systèmes elliptiques (cf. [7]) donnent une régularité globale pour p_0^- , à savoir $H^3(\Omega)$. Cependant cette extra-régularité ne sera pas utile dans ce travail. Comme conséquence, p_0^- est dans $H^1(\Gamma)$, ce qui donne p_0 dans X . ■

Puisque p_0 est déterminé d'une manière unique, alors c'est toute la suite $\{p_\delta\}_{\delta>0}$ qui converge vers p_0 . On note T_0 l'opérateur défini de Y dans X par

$$T_0 u = p_0; \quad \forall u \in Y.$$

La stabilité nécessite alors une prise en compte correcte de la convergence de $\{p_\delta\}_{\delta>0}$ vers p_0 . On utilise, pour cela, la régularité de p_0^- au voisinage de Γ .

proposition 5.3 *Il existe une constante $c > 0$ telle que*

$$\|p_\delta - p_0\|_Y \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y, \tag{5.22}$$

pour tout $\delta > 0$ assez petit et pour tout $u \in Y$.

Preuve: Nous avons à l'aide de (5.11) et (5.20)

$$\delta a^+(\delta, p_\delta^+ - p_0^+, v^+) + a^-(p_\delta^- - p_0^-, v^-) = \delta b^+(\delta, u^+, v^+) - \delta a^+(\delta, p_0^+, v^+). \tag{5.23}$$

En utilisant le fait que $\partial_t p_0^+ = 0$, on obtient l'estimation uniforme en δ suivante :

$$|a^+(\delta, p_0^+, v^+)| \leq c \|\partial_s p_0^-\|_{0,\Omega^+} \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ \right\|_{0,\Omega^+}.$$

La clé, maintenant, est d'utiliser la définition de p_0^+ et la régularité d'ordre supérieur de p_0^- (qui est une conséquence de la régularité imposée sur la frontière Γ du diffracteur) pour obtenir les estimations

$$\|\partial_s p_0^-\|_{0,\Omega^+} \leq c \|p_0^-\|_{1,\Gamma}, \quad \|p_0^-\|_{1,\Gamma} \leq c \|u^-\|_{1,\Omega}$$

On obtient ainsi, par coércivité et continuité des formes bilinéaires dans (5.23), l'estimation :

$$\begin{aligned} & \delta \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) (p_\delta^+ - p_0^+) \right\|_{0,\Omega^+}^2 + \delta^{-1} \|\partial_t (p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+}^2 + \|p_\delta^- - p_0^-\|_{1,\Omega}^2 \leq \\ & c\delta \|u\|_Y \left(\left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) (p_\delta^+ - p_0^+) \right\|_{0,\Omega^+} + \|\partial_t (p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^- - p_0^-\|_{1,\Omega} \right). \end{aligned} \quad (5.24)$$

Pour δ petit, le second membre de (5.24) est borné par

$$c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) (p_\delta^+ - p_0^+) \right\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t (p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^- - p_0^-\|_{1,\Omega} \right),$$

et par conséquent, on a les trois inégalités suivantes :

$$\left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) (p_\delta^+ - p_0^+) \right\|_{0,\Omega^+} \leq c \|u\|_Y \quad (5.25)$$

$$\|\partial_t (p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+} \leq c\delta \|u\|_Y \quad (5.26)$$

$$\|p_\delta^- - p_0^-\|_{1,\Omega} \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y \quad (5.27)$$

D'où, (5.22) découle directement de (5.26), (5.27) et de l'estimation standard :

$$\|(p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+} \leq c \left(\|\partial_t (p_\delta^+ - p_0^+)\|_{0,\Omega^+} + \|p_\delta^- - p_0^-\|_{1,\Omega} \right)$$

■

A partir de là, les arguments de stabilité deviennent similaires à ceux dans Bendali-Lemrabet [16], à savoir l'estimation à gauche (uniforme en $\delta \geq 0$ assez petit) de l'opérateur $I + T_\delta$, et qui est donnée par le lemme suivant :

Lemme 5.1 (de stabilité) *Il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$\|u + T_\delta u\|_Y \geq \gamma \|u\|_Y, \quad \forall u \in Y, \quad (5.28)$$

pour tout $\delta \geq 0$ assez petit.

Preuve: On note I l'opérateur identité de Y . Montrons d'abord (5.28) pour $\delta = 0$. Par des techniques standards, on vérifie que T_0 est compact de Y dans X et par conséquent de Y dans Y (cf. [16]). D'où, l'alternative de Fredholm permet de conclure que l'estimation (5.28) aura lieu pour $\delta = 0$ si on arrive à montrer que l'opérateur $I + T_0$ est injectif sur Y . Soit, alors, $w \in Y$ tel que $(I + T_0)w = 0$. Puisque T_0w est dans X , alors $w \in X$. En partant de la définition de T_0 , on voit que w^- est solution du problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} w^- \in H^1(\Omega), \\ \Delta w^- + k^2 w^- = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} w^- = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \partial_{\mathbf{n}} w^- + S w^- = R_k w^- \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{cases}$$

En vertu de l'unicité de la solution de ce type de problème, on conclut que $w^- = 0$. Puisque $w^+ = -(T_0 w)^+$, on déduit que $w = 0$ car $(T_0 w)^+(\cdot, t) = w^-(\cdot)$ ne dépend pas de t dans Ω^+ (voir proposition 5.2). Donc $(I + T_0)$ est injectif. L'alternative de Fredholm permet donc de conclure qu'il existe une constante $\gamma_0 > 0$ indépendante de δ telle que :

$$\gamma_0 \|u\|_Y \leq \|u + T_0 u\|_Y$$

Partant, maintenant, de l'estimation (5.22) et de l'inégalité suivante :

$$\|u + T_0 u\|_Y \leq \|u + T_\delta u\|_Y + \|T_\delta u - T_0 u\|_Y,$$

on obtient

$$\gamma_0 \|u\|_Y \leq \|u + T_\delta u\|_Y + c\delta^{\frac{1}{2}} \|u\|_Y,$$

ce qui entraîne, pour δ petit, l'estimation de stabilité (5.28). ■

Finalement, c'est cette dernière estimation qui conduit à l'argument de stabilité de Bendali-Lemrabet [16] et qui, avec les nouvelles expressions des formes bilinéaires (5.7)...(5.7), s'énonce de la même manière que le théorème de stabilité 3.1 du chapitre 3, comme suit.

Théorème 5.1 (de stabilité) *Soit $\{L_\delta\}_{\delta>0}$ une famille de formes linéaires sur X telles que pour tout $\delta > 0$ et $v \in X$ on ait :*

$$|L_\delta v| \leq l(\delta) \left\{ \delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ \right\|_{0,\Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right\}. \quad (5.29)$$

Alors, il existe une constante c indépendante de $\delta > 0$, telle que la solution du problème variationnel suivant :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\delta \in X, & \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + \delta b^+(\delta, u_\delta^+, v^+) + a_k^-(u_\delta^-, v^-) = L_\delta v. \end{cases}$$

satisfait l'estimation :

$$\|u_\delta\|_Y \leq c l(\delta). \quad (5.30)$$

où $l(\delta)$ est une constante qui dépend de δ .

Preuve: On définit $w_\delta = (I + T_\delta)u_\delta$. Alors w_δ est solution du problème variationnel et coercif suivant

$$\begin{cases} w_\delta \in X ; & \forall v \in X, \\ \delta a^+(\delta, w_\delta^+, v^+) + a^-(w_\delta^-, v^-) = L_\delta v. \end{cases} \quad (5.31)$$

D'où, on obtient par coercivité :

$$\begin{aligned} & \delta \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+}^2 + \delta^{-1} \left\| \partial_t w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+}^2 + \left\| w_\delta^- \right\|_{1, \Omega}^2 \leq \\ & c l(\delta) \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \left\| \partial_t w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} + \left\| w_\delta^- \right\|_{1, \Omega} \right), \end{aligned}$$

Ce qui donne les trois inégalités suivantes :

$$\left\| \left(D_{(h)} - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \leq c \delta^{-\frac{1}{2}} l(\delta), \quad (5.32)$$

$$\left\| \partial_t w_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} \leq c \delta^{\frac{1}{2}} l(\delta), \quad (5.33)$$

$$\left\| w_\delta^- \right\|_{1, \Omega} \leq c l(\delta). \quad (5.34)$$

D'après (5.33) et (5.34), on conclut que $\|w_\delta\|_Y \leq c l(\delta)$. D'où la démonstration est achevée par le lemme de stabilité 5.1. ■

Remarque 5.2 *Il est important de noter que, pour obtenir l'estimation (5.30), on a besoin de contrôler le second membre de (5.29) uniquement pour des fonctions test particulières $w_\delta = (I + T_\delta)u_\delta$.*

5.5 Analyse asymptotique à deux échelles

De façon similaire au chapitre précédent sur les couches minces périodiques, on part du même développement formel de la solution u_δ en se basant sur le principe de superposition, et nous adoptons les mêmes notations. On fera aussi souvent appel aux deux lemmes liés à la condition de Neumann; le lemme 3.1 (respectivement le lemme 4.1) qui résout une équation différentielle ordinaire en t (respectivement en y). Ici encore, les fonctions test choisies ont la forme

$$v_\delta^+(s, t) = v^+(s, t) + \delta v_1^+(s, \frac{s}{\delta})$$

où $v^+ \in X$ et $v_1^+ \in L^2 \left(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}} \right)$.

Remarque 5.3 *On rappelle que $\langle \Gamma_\delta \rangle$ représente la surface moyenne à de la surface rugueuse Γ_δ (cf. figure 5.1). Pour simplifier les calculs et toutes fois sans restriction aucune, on choisit Γ parallèle à $\langle \Gamma_\delta \rangle$ de telle sorte que la fonction à deux échelles $(s, y) \rightarrow h(s, y)$ ne dépend que de la variable rapide. Par ce choix, la dérivée $\partial_s h$ s'annule et les calculs deviennent plus légers. En particulier, la forme bilinéaire a^+ se réduit à :*

$$a^+(\delta, u, v) = \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t \delta h}{R} \right)^{-1} \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) u \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v ds dt$$

et l'opérateur $D_{(h)}$ devient alors ∂_s dans le théorème précédent.

On suppose alors Γ parallèle à $\langle \Gamma_\delta \rangle$ en vertu de la remarque précédente. On injecte l'Ansatz dans les équations (5.6) et en prenant la moyenne sur la variable y dans $(0, 1)$, on obtient par identification des puissances croissantes de δ une hiérarchie d'équations variationnelles qui va servir à la détermination des différents termes du développement asymptotique. Rappelons que dans le cas des couches minces périodiques, on avait imposé une condition de transmission moyenne sur les termes du développement du type,

$$\int_0^1 u_j^+ (., 0, y) dy = u_j^- (.) \quad (5.35)$$

En plus de cette condition et pour traiter le cas de la rugosité périodique, on impose sur la frontière moyenne Γ_δ une nouvelle condition appelée condition aux limites moyenne sur Γ_δ et qui s'écrit :

$$\int_0^1 u_j^+ (., t, .) dt = u_j^+ (., 1, .) \quad (5.36)$$

pour tout $j \geq 0$. C'est ce type de condition qui permettra de retrouver la condition aux limites d'ordre 0 et qui, de manière classique, consiste à négliger complètement les petits détails comme l'épaisseur, ou la période, ou la rugosité. Une conséquence directe de ce type de condition se traduit par le résultat, utile par la suite, suivant :

A l'aide d'une intégration par parties, on a

$$\int_0^1 t \partial_t u_j^+ (., t, .) dt = - \int_0^1 u_j^+ (., t, .) dt + u_j^+ (., 1, .) = 0 \quad (5.37)$$

Détermination de u_0

En identifiant les termes en δ^{-1} , on obtient pour tout $v^+ \in H^1(\Gamma \times (0, 1))$:

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} \left\langle - \left(\partial_y u_0^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_0^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_0^+}{h} \right\rangle_y \partial_t v^+ ds dt = 0 \quad (5.38)$$

Ensuite, l'identification des termes en δ^0 donne en choisissant $v^+ = v^- = 0$ et pour tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_\#^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$:

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} h \left\langle \partial_y u_0^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_0^+ \right\rangle_t \partial_y v_1^+ ds dy = 0$$

Comme $\partial_y u_0^+$ et $\partial_y h/h$ ne dépendent pas de t , on obtient :

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} h \left(\partial_y u_0^+ - \frac{\partial_y h}{h} \langle t \partial_t u_0^+ \rangle_t \right) \partial_y v_1^+ ds dy = 0$$

et d'après (5.37), on a $\langle t \partial_t u_0^+ \rangle_t = 0$, d'où

$$\int_{\Gamma \times (0, 1)} h \partial_y u_0^+ \partial_y v_1^+ ds dy = 0 \quad (5.39)$$

On utilise alors le lemme d'homogénéisation 4.1 avec

$$l_1 = h \partial_y u_0^+, \quad g_1 = p_1 = 0,$$

et on obtient que $l_1 \in L^2(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1))$ et l_1 ne dépend pas de y , i.e., $l_1(s, y) = l_1(s, 0)$ pour presque tout $s \in \Gamma$. Ainsi, on a

$$\partial_y u_0^+ = \frac{l_1(\cdot, 0)}{h}$$

et faisant la moyenne sur y , on obtient :

$$\langle \partial_y u_0^+ \rangle_y = \left\langle \frac{1}{h} \right\rangle_y l_1(\cdot, 0)$$

Grâce à la périodicité en y de u_0^+ , on conclut que $l_1(\cdot, 0) = 0$, et on obtient le premier résultat attendu, à savoir

$$\partial_y u_0^+ = 0. \tag{5.40}$$

On revient, ensuite, à l'équation (5.38) et on utilise le lemme 3.1, avec

$$\begin{aligned} l &= \left\langle \left(\frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_0^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_0^+}{h} \right\rangle_y, \\ p &= g = 0. \end{aligned}$$

On obtient alors $l = 0$, et puisque $\partial_t u_0^+$ ne dépend pas de y , on a

$$\begin{aligned} l &= \left\langle \left(\frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_0^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_0^+}{h} \right\rangle_y \\ &= \left\langle \frac{(t \partial_y h)^2 + 1}{h} \right\rangle_y \partial_t u_0^+ \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme $((t \partial_y h)^2 + 1)/h$ est strictement positif et par conséquent sa moyenne par rapport à y ne peut être nulle, alors :

$$\partial_t u_0^+ = 0 \tag{5.41}$$

Par conséquent, (5.40) et (5.41) montrent que pour presque tout $s \in \Gamma$, on a

$$u_0^+(s, \cdot, \cdot) = u_0^-(s) \tag{5.42}$$

Si on choisit $v^+ = v_1^+ = 0$ dans l'équation variationnelle obtenue par identification des termes homogènes à δ^0 , alors on obtient, pour tout $v^- \in H^1(\Omega)$:

$$a_k^-(u_0^-, v^-) = \int_{\Omega} f v^- dx \tag{5.43}$$

Ainsi, u_0^- est l'unique solution du problème de diffraction dans le domaine Ω avec une condition aux limites de type Neumann sur Γ ,

$$\begin{cases} u_0^- \in H^1(\Omega), \\ \Delta u_0^- + k^2 u_0^- = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega), \\ \partial_{\mathbf{n}} u_0^- = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), \\ \partial_{\mathbf{n}} u_0^- + S_k u_0^- = 0 \text{ dans } H^{-\frac{1}{2}}(\Sigma). \end{cases} \quad (5.44)$$

Ceci justifie encore que l'effet de la couche mince est complètement négligé à l'ordre 0. Ensuite, en se basant sur les résultats de régularité des systèmes elliptiques, si $f \in L^2(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)$ et à l'aide de (5.42) on obtient $u_0^+ \in H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$.

Détermination de u_1

En tenant compte de (5.42) et (5.43) dans l'identification de la puissance δ^0 , on obtient pour tout $(v^+, v^-) \in X$ et tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} \left\langle - \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_1^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_1^+}{h} \right\rangle_y \partial_t v^+ ds dt = 0 \quad (5.45)$$

Ainsi, le lemme 3.1 avec

$$l = \left\langle - \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_1^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_1^+}{h} \right\rangle_y, \quad g = p = 0,$$

conduit à $l = 0$, ce qui entraîne

$$\left\langle - \left(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_1^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_1^+}{h} \right\rangle_y = 0. \quad (5.46)$$

Ensuite, en prenant $v^+ = v^- = 0$, et en identifiant la puissance δ^1 , on obtient pour tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} h \left\langle \partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_1^+ \right\rangle_t \partial_y v_1^+ ds dy = 0$$

Comme $\partial_y h/h$ ne dépend pas de t et comme d'après (5.37), $\langle t \partial_t u_1^+ \rangle_t = 0$, cette dernière équation devient :

$$\int_{\Gamma \times (0,1)} h (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) \partial_y v_1^+ ds dy = 0$$

Nous pouvons alors utiliser le lemme d'homogénéisation 4.1, avec

$$l_1 = h (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+), \quad g_1 = p_1 = 0,$$

et on obtient que $l_1 \in L^2(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1))$ et l_1 ne dépend pas de y , i.e. $l_1(s, y) = l_1(s, 0)$ pour presque tout $s \in \Gamma$. Ainsi, en faisant la moyenne sur y et en tenant compte de la périodicité de u_1^+ , on obtient :

$$\partial_s u_0^- = \left\langle \frac{1}{h} \right\rangle_y l_1(., 0)$$

et par conséquent

$$h(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) = l_1(., 0) = h_{(-1)} \partial_s u_0^- \quad (5.47)$$

où $h_{(-1)} = \langle h^{-1} \rangle_y^{-1}$ est le premier moment harmonique de h par rapport à la variable y .

A l'aide de cette dernière relation, on peut conclure que $\langle (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) \partial_y h \rangle_y = 0$. En effet,

$$\begin{aligned} \langle (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) \partial_y h \rangle_y &= \left\langle h(\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+) \frac{\partial_y h}{h} \right\rangle_y \\ &= \left\langle h_{(-1)} \partial_s u_0^- \frac{\partial_y h}{h} \right\rangle_y \\ &= h_{(-1)} \partial_s u_0^- \left\langle \frac{\partial_y h}{h} \right\rangle_y \\ &= h_{(-1)} \partial_s u_0^- \langle \partial_y \ln(h) \rangle_y \\ &= 0 \end{aligned}$$

car $\ln(h)$ est périodique par rapport à y . Ainsi, puisque $\partial_t u_1^+$ ne dépend pas de y , l'équation (5.46) devient :

$$\left\langle \frac{(t \partial_y h)^2 + 1}{h} \right\rangle_y \partial_t u_1^+ = 0.$$

Par conséquent, u_1^+ ne dépend pas de t , i.e.

$$\partial_t u_1^+ = 0, \quad (5.48)$$

car

$$\left\langle \frac{(t \partial_y h)^2 + 1}{h} \right\rangle_y \neq 0.$$

En tenant compte maintenant des propriétés de u_0 dans l'identification de la puissance δ^1 , on obtient : pour tout $(v^+, v^-) \in X$

$$\begin{aligned} &\int_{\Gamma \times (0, 1)} \left(h_{(-1)} \partial_s u_0^- \partial_s v^+ - \langle h \rangle_y k^2 u_0^- v^+ \right) ds dt + a_k^-(u_1^-, v^-) \\ &+ \int_{\Gamma \times (0, 1)} \left\langle - \left(\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_2^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_2^+}{h} \right\rangle_y \partial_t v^+ ds dt \\ &= 0. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Alors, si on pose $v^- = 0$, le lemme 3.1 dans lequel

$$\begin{aligned} l &= \left\langle - \left(\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_2^+ \right) t \partial_y h + \frac{\partial_t u_2^+}{h} \right\rangle_y, \\ p &= - \langle h \rangle_y k^2 u_0^-, \quad g = h_{(-1)} \partial_s u_0^-, \end{aligned}$$

donne

$$l(s, t) = (1 - t) \left(h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \right) \quad (5.50)$$

$$l(s, 0) = h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \quad (5.51)$$

Si on choisit $v^+ = 0$ dans l'équation (5.49), alors on obtient, pour tout $v^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$:

$$a_k^-(u_1^-, v^-) = 0 \quad (5.52)$$

et par suite, si $v^- \in H^1(\Omega)$, alors le lemme 3.1 permet de conclure que

$$\partial_n u_1^- = h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \quad (5.53)$$

Ensuite, grâce à la régularité elliptique, si $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^2(\Gamma)$, i.e. $\partial_n u_1^- \in L^2(\Gamma)$ et comme d'après (5.52), u_1^- vérifie l'équation d'Helmholtz homogène dans Ω , alors $u_1^- \in H^1(\Omega)$. En ce qui concerne la régularité de u_1^+ , on a, d'après la relation (5.49), le découplage suivant habituel en techniques d'homogénéisation :

$$\partial_y u_1^+ = \left(\frac{h_{(-1)}}{h} - 1 \right) \partial_s u_0^-, \quad (5.54)$$

et comme $u_0^- \in H^2(\Gamma)$, alors $\partial_y u_1^+ \in H^1(\Gamma)$ et à l'aide de (5.48), on conclut que u_1^+ est bien un élément de $H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$. En vertu de cette dernière relation, comme u_1^+ ne dépend pas de t , et comme la condition aux limites moyenne (5.37) est vérifiée, u_1^+ est complètement déterminé par :

$$u_1^+(s, \cdot, y) = u_1^-(s) + \left[\int_0^y \left(\frac{h_{(-1)}}{h(y')} - 1 \right) dy' - \left\langle \int_0^y \left(\frac{h_{(-1)}}{h(y')} - 1 \right) dy' \right\rangle_y \right] \partial_s u_0^- \quad (5.55)$$

en notant bien sûr que le terme entre crochets s'annule lorsque h ne dépend pas de y , et que u_1^+ est bien périodique par rapport à y , i.e.

$$u_1^+(\cdot, \cdot, 0) = u_1^+(\cdot, \cdot, 1).$$

Détermination de u_2

Afin de simplifier l'identification de la puissance δ^2 , nous utilisons systématiquement les propriétés acquises par u_0 et u_1 (en particulier les relations (5.47) et la condition aux limites

moyenne (5.37)) ainsi que la périodicité de u_0, u_1 et h en y . Si on choisit $v^+ = v^- = 0$, nous obtenons pour tout $v_1^+ \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1)_{/\mathbb{R}})$:

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} h \left\langle (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) - \frac{t}{R} h_{(-1)} \partial_s u_0^- \right\rangle_t \partial_y v_1^+ ds dy \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} h_{(-1)} \partial_s u_0^- \partial_s v_1^+ ds dy - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} h u_0^- v_1^+ ds dy \\ & = 0 \end{aligned} \tag{5.56}$$

Alors le lemme d'homogénéisation 4.1, dans lequel

$$\begin{aligned} l_1 &= h \left\langle (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) - \frac{t}{R} h_{(-1)} \partial_s u_0^- \right\rangle_t \\ g_1 &= h_{(-1)} \partial_s u_0^-, \quad p_1 = -k^2 h u_0^-, \end{aligned}$$

nous permet de conclure que $l_1 \in H^1(\Gamma, H_{\#}^1(0, 1))$ et l_1 vérifie :

$$\begin{aligned} l_1(s, y) &= l_1(s, 0) + \left[\int_0^y (p_1(s, \xi) - \partial_s g_1(s, \xi)) d\xi - y \langle p_1(s, \cdot) - \partial_s g_1(s, \cdot) \rangle_y \right] \\ &= l_1(s, 0) - k^2 \left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right) u_0^- \end{aligned}$$

Noter qu'ici, les termes en $\partial_s g_1$ se simplifient parce que g_1 ne dépend pas de y . Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} \left\langle (\partial_s u_1^+ + \partial_y u_2^+) - \frac{t}{R} h_{(-1)} \partial_s u_0^- \right\rangle_t &= \langle \partial_s u_1^+ \rangle_t + \partial_y u_2^+ - \frac{h_{(-1)}}{2R} \partial_s u_0^- \\ &= \frac{l_1}{h} \\ &= \frac{l_1(\cdot, 0)}{h} - k^2 \frac{\left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right)}{h} u_0^- \end{aligned}$$

En prenant ensuite la moyenne sur y dans cette dernière relation, et en tenant compte de la périodicité en y de u_2^+ , de h , on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \partial_s u_1^+ \rangle_y - \frac{h_{(-1)}}{2R} \partial_s u_0^- &= \left\langle \frac{l_1}{h} \right\rangle_y \\ &= \frac{l_1(\cdot, 0)}{h_{(-1)}} - k^2 \left\langle \frac{\left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right)}{h} \right\rangle_y u_0^- \end{aligned} \tag{5.57}$$

Ensuite, grâce à la condition de transmission moyenne (5.35), et comme u_1^+ ne dépend pas de t , on a :

$$\langle \partial_s u_1^+ \rangle_y = \partial_s u_1^-,$$

et par conséquent, la relation (5.57) donne :

$$l_1(., 0) = h_{(-1)} \partial_s u_1^- - \frac{h_{(-1)}^2}{2R} \partial_s u_0^- + k^2 \left\langle \frac{\left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right)}{h} \right\rangle_y h_{(-1)} u_0^-$$

Ainsi, on a :

$$l_1 = h_{(-1)} \partial_s u_1^- - \frac{h_{(-1)}^2}{2R} \partial_s u_0^- + k^2 \tilde{h} u_0^- \quad (5.58)$$

où

$$\tilde{h} = \left\langle \frac{\left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right)}{h} \right\rangle_y h_{(-1)} - \left(\int_0^y h(\xi) d\xi - y \langle h \rangle_y \right) \quad (5.59)$$

désigne un nouveau terme de mémoire qui est généré par la rugosité de la surface. Il est aisé de vérifier que ce terme s'annule lorsque h ne dépend pas de y . En utilisant la définition de l_1 , on peut écrire alors le découplage suivant non standard en technique d'homogénéisation :

$$\partial_y u_2^+ = \left(\frac{h_{(-1)}}{h} - 1 \right) \left(\partial_s u_1^- - \frac{h_{(-1)}}{2R} \partial_s u_0^- \right) + k^2 \frac{\tilde{h}}{h} u_0^- \quad (5.60)$$

On procède maintenant à l'identification de la puissance δ^2 , dans laquelle on choisit $v_1^+ = 0$, et on obtient en se basant sur les propriétés établies pour u_0 , u_1 , la périodicité en y de h et découplage (5.60) : pour tout $(v^+, v^-) \in X$

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma \times (0,1)} \left\langle \frac{\partial_t u_3^+}{h} + \frac{t \partial_t u_2^+}{R} + \left(\partial_s u_2^+ + \partial_y u_3^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_3^+ \right) t \partial_y h \right\rangle_y \partial_t v^+ ds dt \\ & + \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(h_{(-1)} \partial_s u_1^- + \left(\frac{\langle h \rangle_y - h_{(-1)} - 2t}{2R} \right) h_{(-1)} \partial_s u_0^- + k^2 h_{0\#} u_0^- \right) \partial_s v^+ ds dt \\ & - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\langle h u_1^+ \rangle_y + \frac{t \langle h^2 \rangle_y}{R} u_0^- \right) v^+ ds dt + a_k^- (u_2^-, v^-) \\ & = 0 \end{aligned} \quad (5.61)$$

où

$$h_{0\#} = \left\langle \tilde{h} \right\rangle_y$$

$\tilde{h}$ étant le terme de mémoire obtenu en (5.59). Comme u_1^+ dépend de y , on génère alors le deuxième terme de mémoire, qui est obtenu en utilisant (5.55) :

$$\langle h u_1^+ \rangle_y = \langle h \rangle_y u_1^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- \quad (5.62)$$

où

$$h_{1\#} = \left\langle h \left[\int_0^y \left(\frac{h_{(-1)}}{h(y')} - 1 \right) dy' - \left\langle \int_0^y \left(\frac{h_{(-1)}}{h(y')} - 1 \right) dy' \right\rangle_y \right] \right\rangle_y \quad (5.63)$$

Ainsi, en posant $v^- = 0$ dans (5.61), on obtient

$$\begin{aligned}
& \int_{\Gamma \times (0,1)} \left\langle \frac{\partial_t u_3^+}{h} + \frac{t \partial_t u_2^+}{R} + \left(\partial_s u_2^+ + \partial_y u_3^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_3^+ \right) t \partial_y h \right\rangle_y \partial_t v^+ ds dt \\
& + \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(h_{(-1)} \partial_s u_1^- + \left(\frac{\langle h \rangle_y - h_{(-1)} - 2t}{2R} \right) h_{(-1)} \partial_s u_0^- + k^2 h_{0\#} u_0^- \right) \partial_s v^+ ds dt \\
& - k^2 \int_{\Gamma \times (0,1)} \left(\langle h \rangle_y u_1^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + \frac{t \langle h^2 \rangle_y}{R} u_0^- \right) v^+ ds dt \\
& = 0
\end{aligned} \tag{5.64}$$

Le lemme 3.1, avec

$$\begin{aligned}
l_1 &= \left\langle \frac{\partial_t u_3^+}{h} + \frac{t \partial_t u_2^+}{R} + \left(\partial_s u_2^+ + \partial_y u_3^+ - \frac{t \partial_y h}{h} \partial_t u_3^+ \right) t \partial_y h \right\rangle_y \\
g &= h_{(-1)} \partial_s u_1^- + \left(\frac{\langle h \rangle_y - h_{(-1)} - 2t}{2R} \right) h_{(-1)} \partial_s u_0^- + k^2 h_{0\#} u_0^- \\
p &= -k^2 \left(\langle h \rangle_y u_1^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + \frac{t \langle h^2 \rangle_y}{R} u_0^- \right)
\end{aligned}$$

permet de conclure que :

$$\begin{aligned}
l(s, t) &= \int_t^1 (\partial_s g(s, t') - p(s, t')) dt' \\
&= (1-t) \left(h_{(-1)} \partial_s^2 u_1^- - h_{(-1)} \partial_s \left(\frac{1+t+h_{(-1)}-\langle h \rangle_y}{2R} \partial_s u_0^- \right) + k^2 h_{0\#} u_0^- \right) \\
&\quad + (1-t) k^2 \left(\langle h \rangle_y u_1^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + \frac{(1+t) \langle h^2 \rangle_y}{2R} u_0^- \right) \\
l(s, 0) &= h_{(-1)} \partial_s^2 u_1^- + h_{(-1)} \left(1 + h_{(-1)} - \langle h \rangle_y \right) \partial_s \left(-\frac{1}{2R} \partial_s u_0^- \right) \\
&\quad + k^2 \left(\langle h \rangle_y u_1^- + \frac{\langle h^2 \rangle_y}{2R} u_0^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + h_{0\#} u_0^- \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, si on choisit $v^+ = 0$ dans l'équation (5.61), on obtient, pour tout $v^- \in H_{0,\Gamma}^1(\Omega)$:

$$a_k^-(u_2^-, v^-) = 0 \tag{5.65}$$

et par suite, si $v^- \in H^1(\Omega)$, le lemme 3.1 permet de conclure que

$$\begin{aligned}
\partial_n u_2^- &= h_{(-1)} \partial_s^2 u_1^- + k^2 \langle h \rangle_y u_1^- + h_{(-1)} \left(1 + h_{(-1)} - \langle h \rangle_y \right) \partial_s \left(-\frac{1}{2R} \partial_s u_0^- \right) \\
&\quad + k^2 \left(\frac{\langle h^2 \rangle_y}{2R} u_0^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + h_{0\#} u_0^- \right)
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Ensuite, si $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^3(\Gamma)$, i.e. $u_1^- \in H^2(\Gamma)$, et par conséquent $\partial_n u_2^- \in L^2(\Gamma)$. L'équation variationnelle (5.65) montre que u_2^+ est solution de l'équation d'Helmholtz homogène dans Ω . Ainsi, grâce à la régularité des systèmes elliptiques, $u_2^- \in H^1(\Omega)$. Le découplage (5.60) permet donc de conclure que $u_2^- \in H^1(\Gamma \times (0, 1), H_{\#}^1(0, 1))$. On peut noter que si h ne dépend pas de y , alors $h_{(-1)} = \langle h \rangle_y = h$ et $h_{1\#} = h_{0\#} = 0$, et par conséquent on retrouve la condition homogène d'ordre 2 classique (cf. [16]).

5.6 Analyse de la convergence

De manière similaire au chapitre précédent, on considère l'Ansatz tronqué :

$$\phi_{\delta}^j(s, t) = u_0\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) + \delta u_1\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right) + \cdots + \delta^j u_j\left(s, t, \frac{s}{\delta}\right)$$

En se basant sur l'argument de stabilité 5.1 et la remarque 5.2 concernant le choix particulier de fonctions test, on obtient le même résultat de convergence, pour $j = 0, 1, 2$, que celui du chapitre précédent concernant les couches minces périodiques.

Théorème 5.2 *Pour tout $j = 0, 1, 2$, il existe une constante c indépendante de δ et du terme source f , telle que :*

$$\|u_{\delta} - \phi_{\delta}^0\|_Y \leq c\delta^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (5.67)$$

$$\|u_{\delta} - \phi_{\delta}^j\|_Y \leq c\delta^j \|f\|_{j-\frac{1}{2},\Omega} : j = 1, 2 \quad (5.68)$$

Preuve: Rappelons que la même lettre c est utilisée pour désigner une constante générique pour les différentes estimations qui vont suivre. En fait, l'estimation (5.67) est très simple à établir. En effet, il est suffisant d'estimer la forme linéaire $L_{\delta}^{(0)}$, définie sur X par :

$$L_{\delta}^{(0)}v = \delta a^+ (\delta, u_{\delta}^+ - u_0^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_{\delta}^+ - u_0^+, v^+) + a_k^- (u_{\delta}^- - u_0^-, v^-)$$

Or, les équations vérifiées par u_{δ} et u_0 conduisent directement à :

$$\begin{aligned} L_{\delta}^{(0)}v &= -\delta \int_{\Omega^+} h \left(1 - \frac{t\delta h}{R(s)} + \cdots\right) \partial_s u_0^- \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) v^+ ds dt \\ &\quad + \delta k^2 \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t\delta h}{R(s)}\right) u_0^- v^+ ds dt \end{aligned}$$

et si $f \in L^2(\Omega)$ alors, il existe une constante c indépendante de δ (assez petit) et de $f \in L^2(\Omega)$ telle que :

$$\left|L_{\delta}^{(0)}v\right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \left(\delta \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t\right) v^+ \right\|_{0,\Omega^+} + \delta \|v^+\|_{0,\Omega^+} \right) \quad (5.69)$$

Ensuite, à l'aide de l'estimation standard

$$\|v^+\|_{0,\Omega^+} \leq c \left(\|\partial_t v^+\|_{0,\Omega^+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right), \quad (5.70)$$

on obtient

$$\left| L_\delta^{(0)} v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \left(\delta \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ \right\|_{0,\Omega_+} + \delta \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega_+} + \delta \|v^-\|_{1,\Omega} \right),$$

ce qui donne, pour δ petit, l'estimation désirée pour $j = 0$, à savoir :

$$\left| L_\delta^{(0)} v \right| \leq c \|f\|_{0,\Omega} \delta^{\frac{1}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ \right\|_{0,\Omega_+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v^+\|_{0,\Omega_+} + \|v^-\|_{1,\Omega} \right) \quad (5.71)$$

La preuve de (5.67) est alors achevée par le théorème de stabilité (5.1).

Comme u_0^+ ne dépend pas de t , on conclut de (5.67) que

$$\|\partial_t u_\delta^+\|_{0,\Omega_+} \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (5.72)$$

De même, l'inégalité (5.68) pour $j = 1$ aura lieu si on arrive à contrôler la forme linéaire $L_\delta^{(1)}$, définie sur X par :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)} v &= \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_\delta^- - u_0^- - \delta u_1^-, v^-) \\ &= L_\delta^{(0)} v - \delta^2 a^+ (\delta, u_1^+, v^+) - \delta^2 b^+ (\delta, u_1^+, v^+) - \delta a_k^- (u_1^-, v^-) \end{aligned}$$

Alors, en se basant sur la règle de dérivation $\partial_s \rightarrow \partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y$, et sur les équations satisfaites par u_δ , u_0 et u_1 (essentiellement la relation de découplage (5.54) et le fait que u_0^+ et u_1^+ ne dépendent pas de t), on obtient :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(1)} v &= \delta \left(- \int_{\Omega^+} h \left(1 - \frac{t \delta h}{R(s)} + \dots \right) (\partial_s u_0^- + \partial_y u_1^+ (s, \frac{s}{\delta})) \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ ds dt \right. \\ &\quad \left. + k^2 \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t \delta h}{R(s)} \right) u_0^- v^+ ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \\ &\quad + \delta^2 \left(- \int_{\Omega^+} h \left(1 - \frac{t \delta h}{R(s)} + \dots \right) \partial_s u_1^+ (s, \frac{s}{\delta}) \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ ds dt \right. \\ &\quad \left. + k^2 \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t \delta h}{R(s)} \right) u_1^+ (s, \frac{s}{\delta}) v^+ ds dt \right) \quad (5.73) \end{aligned}$$

A l'aide de l'identité (5.47) et des équations vérifiées par u_1 , le terme en δ dans l'expression de $L_\delta^{(1)} v$, noté $B_\delta^{(1)} v$, peut s'écrire :

$$\begin{aligned} B_\delta^{(1)} v &= \delta \left(\int_{\Omega^+} (-h_{(-1)} \partial_s u_0^- \partial_s v^+ + k^2 h u_0^- v^+) ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \\ &\quad + \int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v^+ ds dt \\ &= \delta \left(\int_{\Omega^+} (-h_{(-1)} \partial_s u_0^- \partial_s v^+ + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- v^+) ds dt - a_k^- (u_1^-, v^-) \right) \\ &\quad + \delta \int_{\Omega^+} k^2 (h - \langle h \rangle_y) u_0^- v^+ ds dt + \int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v^+ ds dt \end{aligned}$$

En utilisant, ensuite, l'équation (5.49) et la relation (5.50), on a :

$$\begin{aligned} a_k^-(u_1^-, v^-) &= \int_{\Omega^+} \left(-h_{(-1)} \partial_s u_0^- \partial_s v^+ + \langle h \rangle_y k^2 u_0^- v^+ \right) ds dt \\ &\quad - \int_{\Omega^+} (1-t) \left(h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \right) \partial_t v^+ ds dt \end{aligned}$$

On déduit alors que :

$$\begin{aligned} B_\delta^{(1)} v &= \delta \int_{\Omega^+} (1-t) \left(h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \right) \partial_t v^+ ds dt \\ &\quad + \delta \int_{\Omega^+} k^2 \left(h - \langle h \rangle_y \right) u_0^- v^+ ds dt + \int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v^+ ds dt \end{aligned}$$

Maintenant, grâce à la propriété de convergence faible dans $L^2(\Omega^+)$ des fonctions périodiques, de h vers sa moyenne $\langle h \rangle_y$ et de $\partial_y h/h$ vers $\langle \partial_y h/h \rangle_y$ qui d'ailleurs est nulle à cause de la périodicité en y de $\ln(h)$, on obtient :

$$\int_{\Omega^+} k^2 \left(h - \langle h \rangle_y \right) u_0^- v^+ ds dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (5.74)$$

$$\int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v^+ ds dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0 \quad (5.75)$$

Comme $f \in H^{\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors $u_0^- \in H^2(\Gamma)$, et par conséquent $h_{(-1)} \partial_s^2 u_0^- + k^2 \langle h \rangle_y u_0^- \in L^2(\Gamma)$. On conclut alors qu'il existe une constante $c > 0$ telle que pour tout $v^+ \in H^1(\Omega^+)$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $\varepsilon' > 0$, il existe $\delta_0 > 0$ tel que pour tout $\delta \in]0, \delta_0]$, l'estimation suivante a lieu.

$$\left| B_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \varepsilon \delta + \varepsilon' \quad (5.76)$$

En prenant alors $\varepsilon = c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \|v^+\|_{0, \Omega^+}$ et $\varepsilon' = c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+}$ strictement positifs, on obtient, pour δ petit :

$$\left| B_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|v^+\|_{0, \Omega^+} + \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} \right), \quad (5.77)$$

et comme v^+ vérifie l'estimation standard (5.70), alors l'inégalité (5.77) entraîne :

$$\left| L_\delta^{(1)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|v^-\|_{1, \Omega} \right). \quad (5.78)$$

A partir de cette dernière inégalité, on voit que le second membre est surestimé à cause du terme $\|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+}$ qui est affecté seulement par une puissance nulle de δ . Ceci est dû au fait que la relation de compensation (5.75) n'est pas suffisante à cause du terme d'ordre 0 dans $B_\delta^{(1)} v$:

$$\int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v^+ ds dt,$$

qui résulte des oscillations rapides de h par rapport à la direction tangentielle.

Ainsi, et d'après la remarque 5.2, il est suffisant de contrôler le second membre de (5.78) uniquement pour les fonctions test particulières de la forme

$$v_\delta = (I + T_\delta)(u_\delta - u_0 - \delta u_1).$$

Or, d'après les estimations *a priori* (3.11), (5.72) et le fait que $\partial_t u_0^+ = \partial_t u_1^+ = 0$, on déduit que

$$\delta^{-\frac{1}{2}} \partial_t v_\delta^+$$

est bornée dans $L^2(\Omega^+)$, et par conséquent la relation de compensation (5.75) devient :

$$\delta^{-\frac{1}{2}} \int_{\Omega^+} h_{(-1)} \frac{t \partial_y h}{h} \partial_s u_0^- \partial_t v_\delta^+ ds dt \xrightarrow{\delta \rightarrow 0} 0,$$

Ainsi, pour $v = v_\delta$, l'estimation (5.75) est améliorée par

$$\left| L_\delta^{(1)} v_\delta \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_t v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \delta \|v_\delta^-\|_{1, \Omega} \right),$$

ce qui, pour δ petit, induit l'inégalité attendue :

$$\left| L_\delta^{(1)} v_\delta \right| \leq c \|f\|_{\frac{1}{2}, \Omega} \delta^{\frac{1}{2}} \left(\delta^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v_\delta^+ \right\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \|v_\delta^-\|_{1, \Omega} \right), \quad (5.79)$$

La preuve de (5.68), pour $j = 1$, est ainsi achevée, grâce au théorème de stabilité 5.1 et la remarque 5.2 sur le choix des fonctions test.

Une esquisse de la preuve pour $j = 2$ peut être donnée comme suit. On devra estimer la forme linéaire $L_\delta^{(2)} v$ définie sur X par :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(2)} v &= \delta a^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) + \delta b^+ (\delta, u_\delta^+ - u_0^+ - \delta u_1^+ - \delta^2 u_2^+, v^+) \\ &\quad + a_k^- (u_\delta^- - u_0^- - \delta u_1^- - \delta^2 u_2^-, v^-) \\ &= L_\delta^{(1)} v - \delta^3 a^+ (\delta, u_2^+, v^+) - \delta^3 b^+ (\delta, u_2^+, v^+) - a_k^- (u_2^-, v^-) \end{aligned}$$

Alors, en plus des résultats obtenus pour $j = 1$, on combine les propriétés et les équations faisant intervenir u_2 , on utilise la règle de dérivation $\partial_s \rightarrow \partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y$ sur les termes dépendants de $\frac{s}{\delta}$ et on obtient :

$$\begin{aligned} L_\delta^{(2)} v &= L_\delta^{(1)} v - \delta \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t \delta h}{R(s)} \right) \partial_t u_2^+ \partial_t v^+ ds dt - \delta^2 a_k^- (u_2^-, v^-) \\ &\quad - \delta^3 \int_{\Omega^+} h \left(1 - \frac{t \delta h}{R(s)} + \dots \right) \left(\partial_s + \frac{1}{\delta} \partial_y - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) u_2^+ \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ ds dt \\ &\quad + \delta^3 k^2 \int_{\Omega^+} h \left(1 + \frac{t \delta h}{R(s)} \right) u_2^+ v^+ ds dt \end{aligned}$$

Les termes en δ^k avec $k < 3$ (essentiellement ceux contenant les dérivées tangentielles) sont les mauvais termes lorsque h dépend de y . Heureusement, ils sont compensés de manière

similaire au cas $j = 1$ par la même propriété de convergence faible, mais, encore une fois, au prix d'une demi-puissance de δ dans la vitesse de convergence. Grâce à cette propriété de convergence faible, combinée aux propriétés de u_0 , u_1 , et u_2 , et à l'aide de l'hypothèse de régularité $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ et l'estimation standard (5.70), on obtient :

$$\left| L_\delta^{(2)} v \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \left(\delta^3 \left\| \left(\partial_s - \frac{\partial_y h}{\delta h} t \partial_t \right) v^+ \right\|_{0, \Omega^+} + \delta \|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|v^-\|_{1, \Omega} \right). \quad (5.80)$$

Comme dans le cas précédent, le poids δ portant sur $\|\partial_t v^+\|_{0, \Omega^+}$ dans cette dernière estimation n'est pas suffisant pour obtenir (5.68), pour $j = 2$. D'après la remarque 5.2, on a besoin de contrôler le second membre seulement pour les fonctions test v_δ telles que :

$$v_\delta = (I + T_\delta) (u_\delta - u_0 - \delta u_1 - \delta^2 u_2).$$

Or, d'après le résultat de convergence (5.68) pour $j = 1$, et comme u_2 est borné dans X pour $f \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, on conclut que $\delta^{-\frac{1}{2}} \partial_t v_\delta^+$ est bornée dans $L^2(\Omega^+)$, ce qui permet d'obtenir une inégalité meilleure que (5.80) pour $v = v_\delta$:

$$\left| L_\delta^{(2)} v_\delta \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \left(\delta^3 \|\partial_s v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{\frac{3}{2}} \|\partial_t v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^2 \|v_\delta^-\|_{1, \Omega} \right), \quad (5.81)$$

et qui entraîne, pour δ petit, l'estimation voulue :

$$\left| L_\delta^{(2)} v_\delta \right| \leq c \|f\|_{\frac{3}{2}, \Omega} \delta^2 \left(\delta^{\frac{1}{2}} \|\partial_s v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \delta^{-\frac{1}{2}} \|\partial_t v_\delta^+\|_{0, \Omega^+} + \|v_\delta^-\|_{1, \Omega} \right), \quad (5.82)$$

La preuve de (5.68), pour $j = 2$, est donc achevée, grâce au théorème de stabilité 5.1 et la remarque 5.2. ■

5.7 Conditions aux limites approchées de Neumann

Comme dans le cas non rugueux, dans l'Ansatz tronqué à l'ordre j , on remplace chaque terme u_l^- par $\delta^{j-l} u_j^{EN}$ et on obtient, pour le cas de la condition de Neumann, le problème de diffraction suivant :

$$\begin{cases} u_j^{EN} \in H^1(\Omega) \\ \Delta u_j^{EN} + k^2 u_j^{EN} = -f \text{ dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \partial_n u_j^{EN} + Z_\delta^{(j)} u_j^{EN} = 0 \text{ dans } \mathcal{D}'(\Gamma) \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r^{\frac{1}{2}} (\partial_r u_j^{EN} - i k u_j^{EN}) = 0 \end{cases} \quad (5.83)$$

où

$$Z_\delta^{(j)} = Z^{(0)} + \delta Z^{(1)} + \dots + \delta^j Z^{(j)} \quad (5.84)$$

est l'opérateur d'impédance approché, donné pour $j = 0, 1, 2$, par :

$$Z^{(0)} = 0 \quad (5.85)$$

$$Z^{(1)} = - \left(h_{(-1)} \partial_s^2 + k^2 \langle h \rangle_y \right) \quad (5.86)$$

$$\begin{aligned} Z^{(2)} = & -h_{(-1)} \left(1 + h_{(-1)} - \langle h \rangle_y \right) \partial_s \left(-\frac{1}{2R} \partial_s u_0^- \right) \\ & - k^2 \left(\frac{\langle h^2 \rangle_y}{2R} u_0^- + h_{1\#} \partial_s u_0^- + h_{0\#} u_0^- \right) \end{aligned} \quad (5.87)$$

et $h_{(-1)}$, $\langle h \rangle_y$, $\langle h^2 \rangle_y$, $h_{0\#}$, $h_{1\#}$, sont les coefficients homogénéisés définis en section précédente.

De même, si on introduit l'Ansatz tronqué à l'ordre j , alors ϕ_δ^{j-} vérifie le même problème (5.83) dans lequel la condition aux limites sur Γ est simplement perturbée par un terme d'ordre $j+1$, i.e.

$$\partial_{\mathbf{n}} \phi_\delta^{j-} + Z_\delta^{(j)} \phi_\delta^{j-} = \delta^{j+1} \rho_\delta^j : D'(\Gamma) \quad (5.88)$$

et où le second membre peut être donné pour $j = 0, 1, 2$, par :

$$\rho_\delta^0 = 0, \quad \rho_\delta^1 = -Z^{(1)} u_1^-, \quad \rho_\delta^2 = -Z^{(1)} u_2^- - Z^{(2)} (u_1^- + \delta u_2^-) \quad (5.89)$$

La formulation variationnelle de (5.83) s'écrit :

$$\begin{cases} u_j^{EN} \in V^{(m)}; \quad \forall v \in V^{(m)} \\ a_k^-(u_j^{EN}, v) + \sum_{l=0}^j \delta^l (a_\Gamma^l(u_j^{EN}, v) + b_\Gamma^l(u_j^{EN}, v)) = \int_\Omega f v dx \end{cases} \quad (5.90)$$

où $V^{(m)}$ est l'espace de Hilbert introduit au chapitre précédent, tel que $m = 0, 1, 2$ correspond dans l'ordre à $j = 0, 1, 2$, et où $a_\Gamma^{(j)}$, $b_\Gamma^{(j)}$ sont des formes bilinéaires continues sur $V^{(m)}$ et définies par :

$$a_\Gamma^{(0)}(u, v) = b_\Gamma^{(0)}(u, v) = 0 \quad (5.91)$$

$$a_\Gamma^{(1)}(u, v) = \int_\Gamma h_{(-1)} \partial_s u \partial_s v ds \quad (5.92)$$

$$b_\Gamma^{(1)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \langle h \rangle_y u v ds \quad (5.93)$$

$$a_\Gamma^{(2)}(u, v) = - \int_\Gamma \frac{h_{(-1)} (1 + h_{(-1)} - \langle h \rangle_y)}{2R} \partial_s u \partial_s v ds \quad (5.94)$$

$$b_\Gamma^{(2)}(u, v) = -k^2 \int_\Gamma \left(\frac{\langle h^2 \rangle_y}{2R} + h_{0\#} \right) u v ds - k^2 \int_\Gamma h_{1\#} (\partial_s u) v ds \quad (5.95)$$

Comme au chapitre précédent en section 4.5, le seul terme nouveau par rapport à la formulation dans [16] (dans le cas d'une couche mince homogène) est le terme non symétrique qui se trouve dans la forme bilinéaire $b_\Gamma^{(2)}$. Alors, les mêmes arguments standards basés sur le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm conduisent, pour δ petit, à l'existence et à l'unicité de la solution du problème (5.90). A partir de là, il est clair que les résultats de convergence, obtenus au chapitre précédent pour les couches minces périodiques, s'appliquent encore pour les couches minces rugueuses. Ceci étant vrai, il existe alors, d'après les théorèmes 4.3 et 4.2 du chapitre précédent, une constante c indépendante de δ et du terme source f telle que :

$$\|u_\delta^- - u_0^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c \delta^{\frac{1}{2}} \|f\|_{0,\Omega} \quad (5.96)$$

$$\|u_\delta^- - u_j^{EN}\|_{1,\Omega} \leq c \delta^j \|f\|_{j-\frac{1}{2},\Omega} : j = 1, 2 \quad (5.97)$$

Finalement, et comme il a été remarqué au chapitre précédent, section 4.5, si $f \in H^{j+\frac{1}{2}}(\Omega)$ alors l'estimation (5.97) devient optimale avec une puissance $\delta^{j+\frac{1}{2}}$ au lieu de δ^j .

5.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons traité uniquement le cas de la condition aux limites de Neumann. Pour l'autre polarisation (condition aux limites de Dirichlet), l'analyse est plus simple à cause du décalage entre les deux développements asymptotiques. Par un cas simple 2D, on vient de montrer (en régime harmonique) qu'une surface rugueuse peut être traitée à l'aide d'une décomposition de domaine adéquate comme une couche mince rugueuse, l'épaisseur de celle-ci étant proportionnelle à l'amplitude des oscillations tangentielles et du même ordre que la période de rugosité. Le choix d'une interface parallèle à la surface moyenne de la surface rugueuse est purement technique car il simplifie considérablement le calcul des coefficients homogénéisés. L'analyse asymptotique à deux échelles, lorsqu'il s'agit d'une perturbation singulière dû à la rugosité de l'obstacle diffracteur, s'applique de manière efficace et donne des conditions aux limites approchées de Neumann de manière simple. Comme dans le cas de couches minces périodiques, cette perturbation singulière affecte la vitesse de convergence par la perte d'une demi puissance de δ , par rapport aux résultats obtenus dans le cas homogène et sans rugosité (cf. [16]). On peut noter qu'à partir de l'ordre 2, l'homogénéisation classique ne produit pas le même découplage (5.60) obtenu *via* l'analyse asymptotique à deux échelles. Ainsi, des termes correcteurs tels que les effets de mémoire sont mis en évidence, alors que cela ne pouvait pas être obtenu en faisant simplement de l'homogénéisation classique suivie d'une analyse asymptotique ou vice versa. Nous estimons que le fait de considérer une surface rugueuse non bornée introduit une difficulté supplémentaire, puisque les arguments classiques de compacité ne peuvent pas être utilisés. Finalement, on peut noter que l'analyse asymptotique à deux (ou éventuellement plusieurs) échelles permet de retrouver des termes correcteurs qui conduisent aux estimations de convergence optimales. Récemment, dans le cas homogène et uniforme, Bendali et al, (cf. [19]), ont donné la version optimale de l'estimation (5.97) avec une puissance δ^{j+1} au lieu de $\delta^{j+\frac{1}{2}}$, ce qui correspond exactement à l'ordre du développement asymptotique pour $j = 0, 1, 2$. Cette correction s'applique, notamment et sans difficultés, au cas abordé dans le chapitre 3. Cependant, son extension au cas de couches minces périodiques ou de surfaces rugueuses n'est pas évidente et nécessite une analyse de stabilité plus précise par rapport aux termes de compensation dans la procédure d'homogénéisation.

Bibliographie

- [1] Abboud T. and Ammari H., “Diffraction at a curved grating : TE and TM cases”, *Homogenization. J. Math. Anal. Appl.* 202 (1996) 995-1026.
- [2] Achdou Y., “Contribution à l’étude numérique des réseaux en électromagnétisme et de la couche limite en mécanique des fluides”, *Thèse de l’Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI*, (1990).
- [3] Ammari H. and He .S, *Homogenization and scattering for gratings*. *J. Electromagn. Waves Appl.* 11 (1997) 1669-1683.
- [4] Ammari H. and Latiri-Crouz C., “Conditions aux limites approchées pour les couches minces périodiques”. *Mathematical Modeling and Numerical Analysis, M2AN, Vol.33, no. 4, 1999*, p.673-692
- [5] Ammari H., “Scattering of waves by thin periodic layers at high frequencies using the on surface radiation condition”. *IMA J. Appl. Math.* 60 (1998) 199-214.
- [6] Ammari H. and Nédélec .J.C, “Time-harmonic electromagnetic fields in thin chiral layers”. *SIAM J. Math. Anal.* 29 (1998) 395-423.
- [7] Agmon S., Douglis A. and Nirenberg L., “Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions”. Part II, *Comm.pure Appl. Math.* 25 (1964), 35-92.
- [8] Alaire G., “Homogenization and two scale convergence”, *SIAM J. Math. Anal.*, 23 (1992), 1482-1518.
- [9] Artola M. and Cessenat M., “Diffraction d’une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un conducteur épais. I. Cas des inclusions fortement conductrices”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, (1991), 231-236.
- [10] Artola M. and Cessenat M., “Diffraction d’une onde électromagnétique par une couche composite mince accolée à un conducteur épais. II. Cas des inclusions fortement conductrices”, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 313, série I, (1991), 381-385.
- [11] Bartoli N. and Bendali A., “Robust and high order effective boundary conditions for perfectly conducting scatterers coated by a thin dielectric layer”, *IMA J. Appl. Math.* 67 (2002) no. 5, 479-508.

- [12] Bartoli N., “Modèles pour la diffraction d’ondes par des obstacles revêtus de couches minces. Résolution de problèmes de diffraction d’ondes via une formulation intégrale de type point selle”, *Ph.D. Thesis, INSA, Toulouse, (2000)*.
- [13] Bartoli N. & Bendali A., “Numerical solving of electromagnetic scattering by coated perfectly conducting obstacles”, *Technical report TR/EMC/01/42, CERFACS, Toulouse, (2001), France*.
- [14] Bayliss A. & Turkel E., “Radiation boundary conditions for wave-like conditions”. *Comm. Pure Appl. Math.*, 23, 707–725, (1980).
- [15] Bendali A., “Boundary element solution of scattering problems relative to a generalized impedance boundary condition. *Partial Differential Equations*”, *Theory and Numerical Solution*, Vol. 406. (W. Jäger, J. Nécas, O. John, K. Najzar & J. Starà, eds). Boca Raton, FL : Chapman & Hall/CRC, (1999).
- [16] Bendali A. and Lemrabet K., “The Effect of a Thin Coating on the Scattering of a Time Harmonic Wave for the Helmholtz Equation”, *SIAM Journal of Applied Mathematics* 6 (1996), no. 5, 1664-1693.
- [17] Bendali A. and Lemrabet K., “Analyse asymptotique de la diffraction d’une onde harmonique par un obstacle recouvert d’une couche mince contrastée”, *Actes JEE’93, UPS, CERT, ONERA, INSA, Toulouse, (1993), 101-108*.
- [18] Bendali A. and Lemrabet K., “Asymptotic analysis of the scattering of a time-harmonic electro-magnetic wave by a perfectly conducting metal coated with a thin dielectric shell”, *Asymptotic Analysis* 00 (2008) 1-29.
- [19] Bendali A., Fares M., Lemrabet K., Pernet S., “Recent Developments in the Scattering of an Electromagnetic Wave by a Coated Perfectly Conducting Obstacle”, in : *Mathematical and numerical aspects of wave propagation, Proceedings Waves2009, INRIA-PAU, France*.
- [20] Bensoussan A., Lions J. L., and Papanicolaou G., “Asymptotic analysis for periodic structures”. North-Holland, Amsterdam., 1978.
- [21] Bérenger J., “A perfectly matched layer for the absorption of electromagnetic waves”, *J. Comput. Phys.* 114 (2) (1994) 185–200.
- [22] Berger M. and Gostiaux B., “Differential geometry : manifolds, curves, and surfaces”, Springer Verlag, New York, 1988.
- [23] Brézis H., “Analyse fonctionnelle : Théorie et applications”, Masson, Paris, 1987.
- [24] Bouchitté G. and Fragalà I., Homogenization of thin structures by two-scale method with respect to measures”. *SIAM J. Math. Anal.*, 32 : 6 (2001), 1198-1226.

- [25] Buffa A. and Hiptmair H., “Galerkin boundary element methods for electromagnetic scattering”, *Topics in Computational Wave Propagation : Direct and Inverse Problems* (M. Ainsworth et Al., ed.), *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Vol. 31, Springer, 2003, pp. 83-124.
- [26] CLAEYS Xavier., “Overview on a selection of recent works in asymptotic analysis for wave propagation problems”. In : *Workshop on Computational Electromagnetism and Acoustics*, 14-20 Feb 2010, Oberwolfach-Walke, Germany.
- [27] Chazarain J. and Piriou A., “Introduction to the theory of linear partial differential equations”, North-Holland, Amsterdam and New-York, 1982.
- [28] Caloz G., Costabel M., Dauge M. and Vial G., “Asymptotic expansion of the solution of in interface problem in a polygonal domain with thin layer”, *Asymptotic Analysis* 50 (2006), no. 1/2, 121-173.
- [29] Do Carmo M.P., “Differential geometry of curves and surfaces”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1976.
- [30] Desperés B., Joly P. & Roberts J., “A domain decomposition method for the harmonic Maxwell’s equations”. *IMACS International Symposium on Iterative Methods in Linear Algebra*. (R. Beauvens & P. de Groen, eds). Amsterdam : North-Holland, pp. 475-484, (1992).
- [31] Duruflé M., Haddar H. and Joly P., “High order generalized impedance boundary conditions in electromagnetic scattering problems”, *C.R. Physique* 7 (2006), no. 5, 533-542.
- [32] Engquist B. and Nédélec J.C., “Effective boundary conditions for acoustic and electromagnetic scattering in thin layers”, *Research Report CMAP, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France*, 1993.
- [33] Engquist E. & Majda A. “Absorbing boundary conditions for the numerical simulation of waves”. *Math. Comp.*, 31, 629-651, (1977).
- [34] Haddar H. and Joly P., “Stability of a thin layer approximation of electromagnetic waves scattering by linear and non linear coatings”, *Journal of Computational and Applied Mathematics* 143 (2002), no. 2, 201-236.
- [35] Kriegsmann G. A., Taflov A. & Umashankar K.R., “A new formulation of electromagnetic wave scattering using the on-surface radiation condition approach”. *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, (1987), 35, 153-161.
- [36] Lemrabet K., “Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d’origine physique ou mécanique dans des ouverts non régulier”, *Thèse de Doctorat d’état Es-Sciences, Université d’Alger (USTHB), Algiers*, 1987.
- [37] Léontovitch M. A., “Approximate boundary conditions for the electromagnetic on the surface of good conductors”, V. A. Fock ed. N. A. Logan, (1948).

- [38] Lukkassen D., Ngutseng G. and Wall P., “Two-scale convergence”, *Int. J. of Pure and Appl. Math.* 2 (2002), 1, 35-86.
- [39] Marusic-Paloka E. and Marusic S., “Two-scale convergence for thin domains and its application to some lower dimensional models in mechanics”. *Asymptot. Anal.*, 23 : 1 (2000), 23-57.
- [40] Monk P., “Finite element methods for Maxwell’s equations”, *Numerical Mathematics and Scientific Computation*, Clarendon Press-Oxford, New York, 2003.
- [41] Nédélec J.C., “Acoustic and electromagnetic equations : Integral representation for harmonic problems”, Springer, Berlin, 2001.
- [42] Poirier J.R., Bendali A., Borderies P. “Impedance Boundary Conditions for the Scattering of Time-Harmonic Waves by Rapidly Varying Surfaces”, *IEEE Transactions on Antennas and Propagation*, Vol. 54, No. 3, March 2006.
- [43] Raynaud N., “Approximation par éléments finis de problèmes de transmission raides”, thèse de l’Université de Pau et des Pays de l’Adour, Pau, 1994.
- [44] Rellich F., “Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von $\Delta u + \lambda u = 0$ in unendlichen Gebieten”, *Jber. Deutsch. Math. Verein*, 53 (1943), 57-66.
- [45] Rojas R. G. and Al-Hekail Z., “Generalized impedance / resistive boundary conditions for electromagnetic scattering problems”, *Radio Science*, 24, (1989), 1-12.
- [46] Senior T.B.A., “A note on impedance boundary condition”, *Can. J. Physics*, 40, (1962), 663-665.
- [47] Senior T.B.A. and Volakis J. L., “Derivation and application of a class of generalized boundary condition”, *IEEE Trans. Antennas Propagation*, 37, no. 12, (1989), 1566-1572.
- [48] Senior T. B. A. and J. L. Volakis, “Approximate boundary conditions in electromagnetics”, ser. 41. London : IEE Electromagnetic waves, 1995.
- [49] Souilah M., “Analyse numérique d’un problème de diffraction en acoustique”, Thèse de magister, U.S.T.H.B , (1988).
- [50] Tordeux S., “Méthodes asymptotiques pour la propagation des ondes dans les milieux comportant des fentes”, Ph.D. Thesis, Université Versailles Saint-Quentin en Yvelines, 2004.
- [51] Tlemcani M., “Homogénéisation tangentielle d’une couche mince périodique pour un problème de diffraction d’ondes”. Actes du 3^{ème} Colloque sur les Tendances des Applications Mathématiques en Tunisie, Algérie et Maroc, TAMTAM’07, Tipaza, Avril 2007.
- [52] Tlemcani M., “Modélisation de l’effet des couches minces sur la diffraction des ondes en régime harmonique”, Thèse de magister, U.S.T.H.B , (1997).

- [53] *Tlemcani M.*, “A Two-Scale Asymptotic Analysis of a Time-Harmonic Scattering Problem with a Multi Layered Thin Periodic Domain”, *Commun. Comput. Phys.* (2009), Vol. 6, No. 4, pp. 758-776
- [54] *Teymur M.*, “A note on higher-order surface radiation conditions”. *IMA J. Appl. Math.*, 57, 137–163, (1996).
- [55] *Theron I. P. & Cloete J. H.*, “On the surface impedance used to model the conductor losses of microstrip structures”. *IEE Proc. Microwaves, Antennas and Propagation*, 142, 35–40, (1995).
- [56] *Wilcox C.H.*, “Scattering theory for the D’Alembert equation in exterior domains”, *Lectures Notes in Math.*, vol. 442, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1975.

Partie II

**Couches absorbantes parfaitement
adaptées stables pour les ondes
courtes en eau peu profonde.**

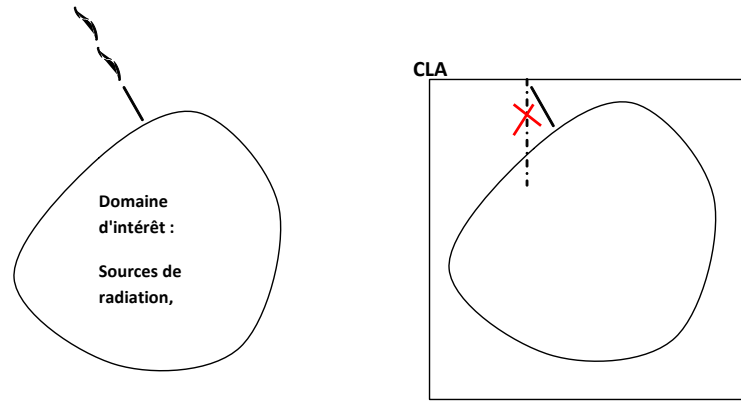
Chapitre 6

Introduction

Pour des raisons numériques, la résolution des équations aux dérivées partielles (EDPs) dans un domaine non borné nécessite de limiter le domaine de calcul par une frontière artificielle (cf. [13], [26], et les références en citation). La question naturelle est donc : quelle condition aux limites doit-on imposer sur cette frontière, afin de ne pas modifier significativement la solution qui correspond au milieu infini. Lorsque la solution décroît rapidement dans l'espace ou si elle varie très lentement à grande distance, ce choix n'est pas foncièrement gênant puisque les aspects majeurs du phénomène sont confinés dans un milieu de taille réduite. Par contre, lorsqu'il s'agit de phénomènes de propagation d'ondes, alors il est bien connu que la solution décroît avec la distance r seulement comme $r^{(1-d)/2}$ où d est la dimension d'espace. La difficulté majeure se pose alors avec l'aspect ondulatoire qui fait que toute troncature du milieu à distance finie produira des réflexions artificielles. Par exemple, dans les problèmes de diffraction en régime harmonique, l'approche la plus commune consiste à définir des conditions aux limites sur le bord artificiel qui sont destinées à remplacer la condition de radiation de Sommerfeld (CRS). En théorie, l'idéal est d'utiliser une condition aux limites transparente (CLT) via l'opérateur de Steklov-Poincaré qui assure une parfaite adaptation du milieu intérieur avec le milieu extérieur. Cependant, le caractère non local des CLT constitue un inconvénient majeur si on approche la solution par une méthode volumique comme la méthode des éléments finis ou les différences finies. L'idée de localiser les CLT a donné lieu à une multitude de travaux dans lesquels les auteurs cherchent, en quelque sorte, à remplacer de manière approchée la condition de radiation de Sommerfeld, tout en gardant le caractère bien posé du problème (cf. [4] et les références en citation). Il y a, actuellement, deux grandes familles de méthodes pour répondre à cette question.

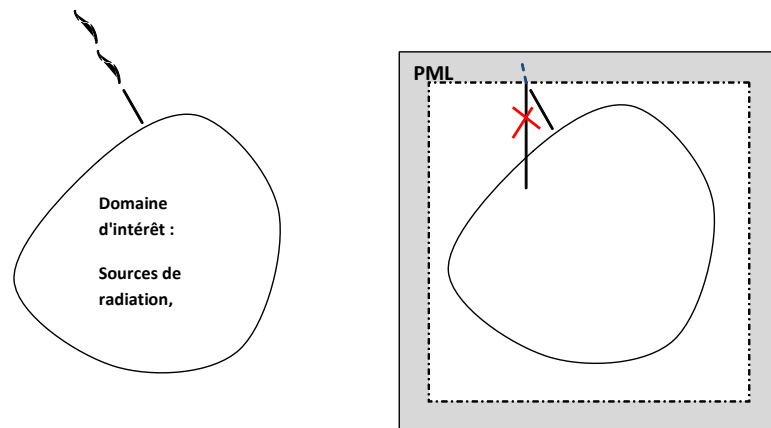
La première méthode consiste à imposer une condition aux limites absorbante (CLA) sur une frontière artificielle Σ autour du domaine de calcul. Par exemple, l'idée la plus simple consiste à imposer la condition $\partial_{\mathbf{n}}u = iku$ sur Σ , qui a la même forme que la CRS. Les CLA ont attiré l'attention de nombreux chercheurs de la communauté d'analyse numérique qui utilisent la méthode des éléments finis (FEM). Ceci est justifié par le fait qu'elles sont définies par des opérateurs différentiels qui, en outre, préservent la structure creuse de la matrice de masse. En général, une CLA peut être représentée, en régime harmonique, sous la forme $\partial_{\mathbf{n}}u = \mathbf{B}u$ sur Σ , où $\mathbf{B}$ est un opérateur différentiel à coefficients variables qui peuvent dépendre de la fréquence, de l'angle d'incidence et aussi de la géométrie de Σ (cf. [4]). La dérivation et l'analyse du caractère bien posé des premières familles de CLA sont

dues à B. Engquist et A. Majda [12], dans le domaine de l'acoustique en régime transitoire. Depuis, des travaux ont été réalisés dans plusieurs directions : développement de CLA d'ordre arbitrairement élevé et stables, traitement des coins, CLA pour les milieux plus complexes (cf. [14]), etc.



Condition aux limites absorbante: le milieu infini est tronqué par une frontière artificielle qui absorbe les ondes sortantes.

La deuxième technique pour limiter le domaine de calcul, consiste à l'entourer d'une couche artificielle qui absorbe parfaitement les ondes. Avant 1994, l'idée principale était d'introduire un milieu absorbant contenant un terme d'amortissement. Cependant, la rupture d'impédance entre le milieu physique et la couche absorbante induit des réflexions parasites assez importantes pour polluer la solution recherchée. Ce n'est qu'en 1994 que Bérenger [8] a introduit pour les équations de Maxwell un nouveau concept de couches absorbantes qui ont la magnifique propriété d'être parfaitement adaptées : il n'y a pas de réflexions entre le milieu physique et le milieu absorbant ! On les appelle dans le jargon anglo-saxon Perfectly Matched Layers ou (PML). Depuis, et à cause de leur implémentation particulièrement simple aux coins, cette méthode a connu un grand succès en améliorant considérablement les performances des méthodes classiques. En revanche, l'analyse mathématique des PML a suscité et continue à susciter des débats (cf. [6]), voire des difficultés lorsqu'il s'agit d'extension à des modèles plus complexes.



Couche absorbante parfaitement adaptée : le milieu infini est tronqué par une couche artificielle qui absorbe les ondes sortantes et qui est parfaitement adaptée.

La construction de modèles PML a fait l'objet de plusieurs travaux et pour une large variété d'applications. Notre objectif dans ce contexte est de contribuer par la construction d'un nouveau modèle PML pour le système linéarisé d'ondes en eau peu profonde (shallow water) avec force de Coriolis. Abarbanel et al. [3] ont dérivé des PML non splitées pour ce système en faisant de l'analyse asymptotique par rapport au paramètre de Coriolis qu'il supposent petit et par conséquent : la dispersion n'est pas prise en compte correctement dans leur modèle. Navon et al. [20] ont récemment développé un modèle splitté pour le système linéarisé qu'ils discrétisent à l'aide d'un schéma aux différences finies (FDTD) explicite. Cependant, ils utilisent dans leur schéma un filtre à 9 points afin d'éviter les instabilités numériques dues à l'explosion de la solution pour certaines fréquences. Ce problème a été autrefois considéré pour les équations d'Euler linéarisées dans [17] et ensuite dans [16] pour des systèmes hyperboliques de manière plus générale. Dans leurs travaux, la PML est obtenue *via* un changement de variable complexe qui s'applique à la direction normale à l'interface entre le domaine de calcul et le milieu absorbant. Ceci revient à remplacer toutes les dérivées spatiales (normales à ces interfaces) dans le système d'Euler par un opérateur qui reste différentiel dans la direction d'absorption mais qui est pseudodifférentiel par rapport aux autres directions. Cependant, et même si ces modèles (splités ou non splités) conduisent à des problèmes bien posés (au moins faiblement bien posés en transitoire), il peuvent être instables pour certains systèmes (eau peu profonde, aéroacoustique, élastodynamique, anisotropie...) dans le sens où ils ne peuvent pas empêcher certains modes de croître exponentiellement en temps. Dans [5], on montre qu'il existe une condition nécessaire de stabilité en hautes fréquences liée à la notion de consistance entre la vitesse de groupe et la vitesse de phase, et dans [7] on montre que cette condition peut être utilisée pour stabiliser les modèles PML pour l'équation d'Helmholtz convective en écoulement parallèle. En fait, les changements de variable dans [1], [17], [16], [2], etc., reviennent tous et tout simplement à respecter cette condition nécessaire de stabilité utilisée dans [5] ou [7], et permettent ainsi de stabiliser les PML de l'acoustique en écoulement parallèle. Une analyse en 2D d'un type similaire de PML, et des estimations d'erreurs en transitoire, ont été présentés dans [11], voire moins justifiés dans le cas d'un écoulement oblique et uniforme dans les PML aux coins. A notre connaissance, il n'existe pas de changement de variable spécifique aux systèmes hyperboliques de manière générale comme c'est le cas de l'aéroacoustique, eau peu profonde, etc..., et particulièrement en écoulement oblique. La difficulté essentielle avec ces systèmes est que ce changement de variable ne peut pas supprimer les inconsistances en écoulement oblique et, lorsque la propagation est couplée à un phénomène de transport, où siègent des ondes qui ne se diffractent pas (comme les ondes de vorticit   et d'entropie, ondes g  ostrophiques, ...). Dans [21], une nouvelle formulation des PML pour les   quations d'Euler lin  aris  es en   coulement oblique est propos  e, o   l'auteur utilise une factorisation de Smith pour d  coupler les ondes de vorticit   et d'entropie des autres ondes acoustiques et de telle sorte que seules ses derni  res sont absorb  es par son mod  le PML en ne modifiant ainsi que les d  riv  es spatiales qui se trouvent dans l'op  rateur des ondes acoustiques. Si bien que, dans sa strat  gie (cf. [21]), l'id  e du d  couplage est int  ressante en permettant effectivement de stabiliser la PML, la question d'utiliser la factorisation de Smith pour   tendre le mod  le au cas non lin  aire reste    voir. Givoli et al. [14] ont d  velopp   des CLA d'ordre arbitrairement   lev   pour les   quations d'eau peu profonde en se basant uniquement sur l'  quation d'ondes dispersives qu'il d  rivent du syst  me. En partant alors de la seule id  e de d  coupler la solution propagative de la partie transport, nous arrivons

à écrire un nouveau modèle PML stable pour le système linéarisé d'eau peu profonde avec force de Coriolis (cf. [15]). Plus précisément, et dans le même esprit que [21], notre modèle consiste à absorber uniquement les ondes d'inertie-gravité qui sont solutions d'une équation d'ondes dispersives : équation de Klein-Gordon advective. De cette manière, nous laissons la dynamique d'eau peu profonde atteindre son état d'équilibre naturel (équilibre géostrophique) où elle est dominée par les ondes de vorticité et d'entropie, et les ondes d'inertie (limite ondes longues) dues à la rotation de la terre (cf. [24]). Ces ondes ne sont pas absorbées par notre modèle et des résultats numériques, basées sur une première formulation premier ordre du système PML, montrent l'efficacité et attestent "numériquement" la stabilité en temps long de la solution.

Dans le chapitre suivant, nous présentons la méthodologie générale des PML avec quelques inconvénients et critiques qui peuvent limiter leur utilisation. Dans le dernier chapitre, nous présentons les différentes étapes de l'approche que nous avons adoptée pour la construction du nouveau modèle PML pour le système d'eau peu profonde en écoulement oblique. Nous montrons qu'il est parfaitement adapté, et qu'il est stable au sens où il ne crée pas de modes exponentiellement croissants en temps. Nous construisons une PML coin plus ou moins justifiée par son caractère symétrique que nous avons pu obtenir grâce à une superposition non conventionnelle des PML horizontales et verticales et qui fait intervenir un terme typique aux coins et en écoulement oblique seulement. Des résultats numériques sont présentés pour confirmer l'adaptation parfaite et attester numériquement la stabilité en temps long de la solution.

Chapitre 7

Méthodologie générale des (PML)

7.1 Couches parfaitement adaptées en 1d

7.1.1 Adaptation d'impédance

Considérons l'équation des ondes scalaire à coefficients variables en 1d dans un milieu non dissipatif :

$$\rho(x)\partial_t^2 u - \partial_x(\alpha(x)\partial_x u) = 0 : x \in \mathbb{R}, t > 0 \quad (7.1)$$

avec ρ et α deux fonctions réelles, strictement positives, et qui sont éventuellement discontinues en $x = 0$. On peut supposer que ρ et α sont constantes par morceau :

$$\rho(x) = \begin{cases} \rho^- : x < 0 \\ \rho^+ : x > 0 \end{cases}, \quad \alpha(x) = \begin{cases} \alpha^- : x < 0 \\ \alpha^+ : x > 0 \end{cases}$$

On définit la vitesse de phase et l'impédance du milieu de propagation respectivement par :

$$c = \sqrt{\frac{\alpha}{\rho}} = \begin{cases} c^- : x < 0 \\ c^+ : x > 0 \end{cases}$$
$$Z = \sqrt{\alpha\rho} = \begin{cases} Z^- : x < 0 \\ Z^+ : x > 0 \end{cases}$$

On s'intéresse alors aux solutions ondes planes qui vérifient les conditions de transmission en $x = 0$:

$$u(0^-) = u(0^+) \quad (7.2)$$

$$\alpha^- \partial_x u(0^-) = \alpha^+ \partial_x u(0^+) \quad (7.3)$$

La discontinuité de Z permet d'écrire une onde plane solution de l'équation (7.1) comme superposition d'une onde incidente et d'une onde réfléchie, dans le milieu $x < 0$:

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - kx)} + R(\omega) e^{i(\omega t + kx)},$$

et comme une onde transmise dans le milieu $x > 0$:

$$u(x, t) = T(\omega) e^{i(\omega t - kx)},$$

où $k = \omega/c$ est le nombre d'onde et $\omega \geq 0$ est la fréquence en temps. $R(\omega)$ et $T(\omega)$ désignent respectivement les coefficients de réflexion et de transmission en $x = 0$. Grâce aux conditions de transmission (7.2) et (7.2), on trouve :

$$R(\omega) = \frac{Z^- - Z^+}{Z^- + Z^+}, \quad T(\omega) = \frac{2Z^-}{Z^- + Z^+}$$

Ainsi, il est évident que $R(\omega) = 0$ lorsqu'il n'y a pas rupture d'impédance.

Nous avons donc besoin d'adapter l'impédance afin que l'onde réfléchie soit nulle. Si on suppose que la PML va être construite du côté $x > 0$ et que, pour les raisons de calcul numérique, celle-ci doit être limitée à distance finie $x = L > 0$, alors nous avons besoin aussi que l'onde transmise soit absorbée dans le direction des x croissants ($\Delta x > 0$) afin que les réflexions créées en $x = L$ soient suffisamment atténuées pour ne pas modifier significativement la solution dans le milieu de calcul $x < 0$. Pour cela, l'idée commune est de passer en régime fréquentiel en faisant une transformée de Fourier¹ en temps dans l'équation (7.1). Si on note ω la variable duale du temps t , i.e. $\partial_t \rightarrow -i\omega$, et la transformée de Fourier d'une fonction ϕ par $\hat{\phi}$, alors on aboutit à l'équation d'Helmholtz :

$$\hat{\rho}(x, \omega) \omega^2 \hat{u} + \partial_x (\hat{\alpha}(x, \omega) \partial_x \hat{u}) = 0 : x \in \mathbb{R}, \quad \hat{\rho}, \hat{\alpha} > 0 \quad (7.4)$$

Voulant modifier uniquement l'équation (7.1) dans la région $x > 0$, on choisit alors $d(\omega) \in \mathbb{C} - \{0\}$ et on introduit de nouveaux coefficients $\hat{\rho}$ et $\hat{\alpha}$ tels que :

$$\begin{aligned} \hat{\rho}^- &= \rho^-, & \hat{\alpha}^- &= \alpha^- \\ \hat{\rho}^+(\omega) &= \frac{\rho^-}{d(\omega)}, & \hat{\alpha}^+(\omega) &= d(\omega) \alpha^- \end{aligned}$$

ce qui induit les deux points importants suivants :

- L'adaptation parfaite d'impédance entre les deux milieux :

$$\hat{\mathbf{Z}}^+ = \hat{\mathbf{Z}}^- = \sqrt{\rho^- \alpha^-}$$

- La nouvelle impédance $\hat{\mathbf{Z}}$ n'a pas changé le milieu physique ($x < 0$) et a rendu le milieu fictif ($x > 0$) dissipatif :

$$\hat{\mathbf{c}}^- = c^- \in \mathbb{R}_+, \quad \hat{\mathbf{c}}^+ = c^- \cdot d(\omega) \in \mathbb{C}$$

Ainsi, en régime fréquentiel, l'équation (7.4) n'a pas changé dans le milieu $x < 0$, alors que de l'autre côté ($x > 0$) elle devient :

$$\frac{\rho^-}{d(\omega)} \omega^2 \hat{u} + \partial_x (\alpha^- d(\omega) \partial_x \hat{u}) = 0 : x > 0 \quad (7.5)$$

¹En analyse modale, on fait une transformée de Laplace en t .

Sous cette forme, la choix de $d(\omega)$ n'est pas trop restrictif si ce n'est que la condition de rendre le milieu dissipatif. Par contre, en régime transitoire et pour des raisons d'implémentation numérique, nous avons besoin de construire l'équation (7.5) de telle sorte qu'en faisant une transformée de Fourier inverse en t , il sera possible de retrouver un opérateur différentiel (local) ou à la limite quasi-local en t . La condition cruciale est donc que $d(\omega)$ soit une fonction rationnelle par rapport à la variable $i\omega$ à coefficients réels. Ainsi, en écrivant $d(\omega) = (a+ib)^{-1}$, on obtient des solutions ondes planes qui ont une décroissance exponentielle en se propageant dans le sens ($\Delta x > 0$) :

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - \frac{a}{c}x) + \frac{\omega b}{c}x}, \quad \omega b < 0,$$

avec une vitesse de phase c/a et un taux d'absorption $\omega b/c$. Le choix commun qui ne modifie pas la vitesse de phase entre les deux milieux, et qui laisse le taux d'absorption indépendant de la fréquence, est donc :

$$a = 1, \quad b = -\frac{\sigma}{\omega},$$

où $\sigma > 0$ est appelé coefficient d'absorption. Ainsi,

$$d(\omega) = \frac{i\omega}{i\omega + \sigma},$$

et par conséquent, l'équation d'ondes en régime fréquentiel devient dans le milieu PML :

$$\rho^- \omega^2 \hat{u} + i\omega(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x (\alpha^- i\omega(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x \hat{u}) = 0 \quad (7.6)$$

Rappelons que dans le milieu physique ($x < 0$) nous avons :

$$\rho^- \omega^2 \hat{u} + \partial_x (\alpha^- \partial_x \hat{u}) = 0$$

Nous déduisons que, par similitude de ces deux dernières équations, pour obtenir une PML (en harmonique) il suffit alors de remplacer la dérivée spatiale ∂_x par une dérivée-pml qui dépend de ω et de σ :

$$\partial_x \rightarrow \hat{\partial}_x^{\text{pml}} = i\omega(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x,$$

ce qui correspond en transitoire à :

$$\partial_x \rightarrow \partial_x^{\text{pml}} = \partial_t(\partial_t + \sigma)^{-1} \partial_x, \quad (7.7)$$

où l'inversion de l'opérateur $(\partial_t + \sigma)$ peut être implémentée à l'aide d'une inconnue auxiliaire comme suit. Si $\xi = (\partial_t + \sigma)^{-1} \phi$ alors ξ est déterminée de manière simple comme solution unique du problème de Cauchy suivant :

$$\begin{cases} (\partial_t + \sigma)\xi = \phi : t > 0 \\ \partial_t \xi(t = 0) = 0 \end{cases}$$

Ainsi, nous avons construit le modèle PML standard 1d (formulation second ordre) :

$$\begin{cases} \rho^- \partial_t^2 u - \partial_x (\alpha^- \partial_x u) = 0 & : x < 0 \\ \rho^- \partial_t^2 u - \partial_x^{\text{pml}} (\alpha^- \partial_x^{\text{pml}} u) = 0 & : 0 < x < L \\ u(0^-) = u(0^+) \\ \partial_x u(0^-) = \partial_x^{\text{pml}} u(0^+), \end{cases} \quad (7.8)$$

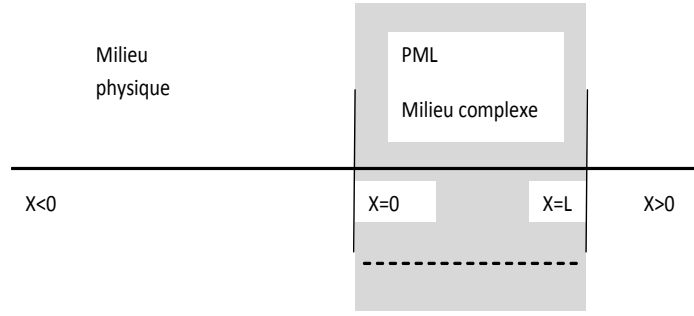


Figure 7.1: Couche PML 1d à droite, de largeur L . Dans le milieu complexe, l'axe réel est déformé en un contour dans $\mathbb{C}$.

Le choix de la condition aux limites à imposer en $x = L$ n'est pas important, que ce soit sur le plan analytique ou numérique. Actuellement, une condition de Dirichlet ou de Neumann suffit pour obtenir des résultats numériques satisfaisants. Par contre, la largeur L de la couche PML doit être suffisamment grande afin d'atténuer significativement l'amplitude de l'onde réfléchie depuis cette distance.

Remarque 7.1 *Nous avons construit le modèle standard en se basant sur l'adaptation parfaite d'impédance. Le même modèle peut être obtenu grâce à un prolongement analytique de la solution dans le milieu physique, en remplaçant l'axe réel ($x > 0$) par un contour dans le plan complexe le long duquel, son amplitude sera atténuée par un coefficient d'absorption $\sigma > 0$. C'est ce qui correspond à l'idée alternative du changement de variables complexe :*

$$x^{pml}(x) = x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma(s) ds, \quad (7.9)$$

où $\sigma(x)$ est un profil d'absorption éventuellement variable, tel que :

$$\sigma(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 0 \\ > 0 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Il est clair alors que la transformation (7.7) est une conséquence directe du changement de variables (7.9) (cf. [1]).

7.1.2 Une énergie décroissante en temps

Pour alléger, on convient de supprimer le signe (-) en exposant de ρ^- et α^- . Lorsqu'il s'agit de trouver des estimations énergétiques, que ce soit pour les CLA ou pour les PML, il est généralement préférable de travailler sur des formulations en premier ordre. À l'aide de multiplications formelles, on peut écrire l'équation (7.6) sous la forme :

$$-\rho(i\omega + \sigma)\hat{u} + \partial_x (\alpha(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x \hat{u}) = 0$$

On introduit l'inconnue

$$\hat{v} = \alpha(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x \hat{u},$$

et on obtient le système :

$$\begin{cases} -\rho(i\omega + \sigma)\hat{u} + \partial_x \hat{v} = 0, \\ \hat{v} - \alpha(i\omega + \sigma)^{-1} \partial_x \hat{u} = 0, \end{cases}$$

qui, après multiplication formelle de la deuxième équation par $(i\omega + \sigma)$, devient :

$$\begin{cases} -\rho(i\omega + \sigma)\hat{u} + \partial_x \hat{v} = 0, \\ (i\omega + \sigma)\hat{v} - \alpha \partial_x \hat{u} = 0, \end{cases}$$

ce qui induit, en régime transitoire, la formulation en premier ordre suivante :

$$\begin{cases} \rho(\partial_t u + \sigma u) - \partial_x v = 0, \\ \alpha^{-1}(\partial_t v + \sigma v) - \partial_x u = 0. \end{cases}$$

Pour obtenir une énergie, on teste la première équation par $\bar{u}$ et la deuxième par $\bar{v}$, et on intègre sur $\mathbb{R}$ les deux équations obtenues. On obtient :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \rho |u|^2 dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \sigma \rho |u|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{u} \partial_x v dx, \quad (7.10)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} \alpha^{-1} |v|^2 dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \sigma \alpha^{-1} |v|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} \bar{v} \partial_x u dx, \quad (7.11)$$

où on peut remarquer que les membres de gauche sont des quantités réelles. Il s'ensuit alors, par antisymétrie de l'opérateur ∂_x et en faisant la somme de ces deux équations, l'identité énergétique suivante :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\rho |u|^2 + \alpha^{-1} |v|^2) dx \right) + \int_{\mathbb{R}} \sigma (\rho |u|^2 + \alpha^{-1} |v|^2) dx = 0,$$

ce qui induit que la quantité positive notée $E(t)$ et définie par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} (\rho |u|^2 + \alpha^{-1} |v|^2) dx$$

est une énergie décroissante en temps. Ainsi, nous n'avons pas seulement de la dissipation en espace mais aussi de la dissipation en temps. Malheureusement, cette magnifique propriété des PML en 1d n'est pas du tout triviale en plusieurs dimensions. C'est pourquoi en 2d et plus, les auteurs traitent toujours la question cruciale de la stabilité de la solution en temps long lorsqu'il s'agit du régime transitoire (cf. [6], [11], ...).

7.2 Rappels sur les PML en 2d pour l'acoustique dans un milieu homogène et isotrope

7.2.1 Formulation second ordre basée sur le changement de variables complexe

Afin d'éviter les formulations par décomposition du champ (splitting) nous choisissons de rester sur la formulation second ordre qui peut être obtenue comme suit. On part de l'équation

des ondes acoustiques dans un milieu homogène et isotrope :

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0 \quad \text{dans } \mathbb{R}^2, \quad t > 0 \quad (7.12)$$

où c est une constante positive qui désigne la vitesse de phase des ondes dans le milieu de propagation. Supposons, par exemple, qu'on veut limiter le domaine de calcul au demi-plan ($x < 0$) en introduisant une couche PML verticale à droite de largeur $L_x > 0$. Alors, l'idée vient du concept de changement de variables complexe introduit en remarque 7.1. On écrit alors

$$x^{\text{pml}}(x) = x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma_x(s) ds, \quad (7.13)$$

où $\sigma_x(\cdot)$ est le profil d'absorption dans la direction ($\Delta x > 0$), tel que :

$$\sigma_x(x) \begin{cases} = 0 & \text{si } x < 0, \\ > 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

On remplace alors dans la région ($x > 0$), dans l'équation (7.12), la dérivée spatiale ∂_x par la dérivée PML :

$$\partial_x^{\text{pml}} = \partial_t (\partial_t + \sigma_x)^{-1} \partial_x,$$

et on obtient, en respectant les conditions de transmission qui s'imposent, le modèle PML correspondant au demi-plan (à droite) suivant :

$$\begin{cases} \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0, & \text{si } x < 0 \\ \frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - (\partial_x^{\text{pml}})^2 u - \partial_y^2 u = 0, & \text{si } 0 < x < L_x \\ u(0^-) = u(0^+) \\ \partial_x u(0^-) = \partial_x^{\text{pml}} u(0^+), \end{cases} \quad (7.14)$$

auquel nous ajoutons une condition de Neumann ou Dirichlet homogène en $x = L_x$. Pour implémenter l'opérateur $(\partial_x^{\text{pml}})^2$ en formulation second ordre, on a besoin de deux variables auxiliaires. Lorsque le profil $\sigma(x)$ n'est pas constant en x , il faut respecter l'ordre dans l'opération de composition :

$$(\partial_x^{\text{pml}})^2 = \partial_x^{\text{pml}} \cdot \partial_x^{\text{pml}} = \partial_t (\partial_t + \sigma)^{-1} \partial_x \cdot \partial_t (\partial_t + \sigma)^{-1} \partial_x$$

Par similitude, le modèle PML dans l'autre direction y peut être obtenu en inversant simplement les rôles de x et y dans la formulation précédente. En général, et comme on a besoin souvent de limiter le domaine de calcul par une frontière rectangulaire, on doit construire des modèles PML qui sont valables aussi aux coins. L'idée commune pour traiter ce point consiste à superposer tout simplement les deux modèles et obtenir ainsi un modèle général qui inclut le coin, la PML verticale et la PML horizontale (cf. figure 7.2).

Soit $D = [-a - L, a + L] \times [-b - L, b + L]$ un domaine rectangulaire dans lequel nous voulons faire le calcul. $L > 0$ est une largeur commune aux couches horizontales et verticales.

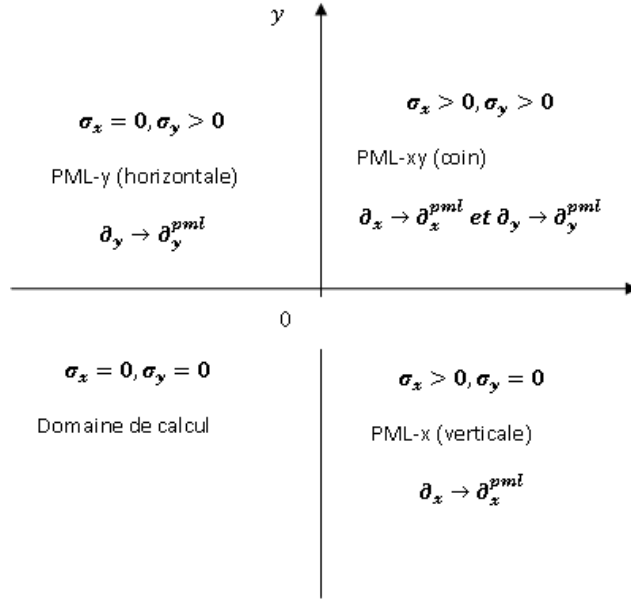


Figure 7.2: Construction conventionnelle d'une PML-coin dans le cas du quart du plan.

On note σ_x (resp. σ_y) le profil d'absorption qui dépend uniquement de x (resp. y) à support dans $\{a < |x| < a + L\}$ (resp. $\{b < |y| < b + L\}$). Le modèle général, dans lequel les coins sont automatiquement traités, consiste donc à résoudre l'équation:

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - (\partial_x^{\text{pml}})^2 u - (\partial_y^{\text{pml}})^2 u = 0 \quad \text{dans } D,$$

où ∂_y^{pml} est défini de manière symétrique à ∂_x^{pml} :

$$\partial_y^{\text{pml}} = \partial_t (\partial_t + \sigma_y)^{-1} \partial_y,$$

où les conditions de transmission naturelles qui assurent l'adaptation parfaite sont résumées par les sauts aux différentes interfaces :

$$\begin{aligned} [u]_{|x|=a} &= [u]_{|y|=b} = 0, \\ [\partial_x^{\text{pml}} u]_{|x|=a} &= [\partial_y^{\text{pml}} u]_{|y|=b} = 0, \end{aligned}$$

et, où les conditions aux limites aux bords extérieurs sont, par exemple, des conditions standards de type Neumann homogènes :

$$\partial_x u|_{|x|=L} = \partial_y u|_{|y|=L} = 0.$$

La figure (7.4) illustre l'efficacité d'une PML de largeur finie et conçue pour la direction x croissant. La figure précédente (7.3) montre la réflexion d'une onde incidente lorsque le domaine est tronqué à distance finie.

Remarque 7.2 On peut noter que l'un des grands avantages des PML sur les CLA est qu'elles sont très simples à implémenter dans les coins, grâce à l'idée de superposition des

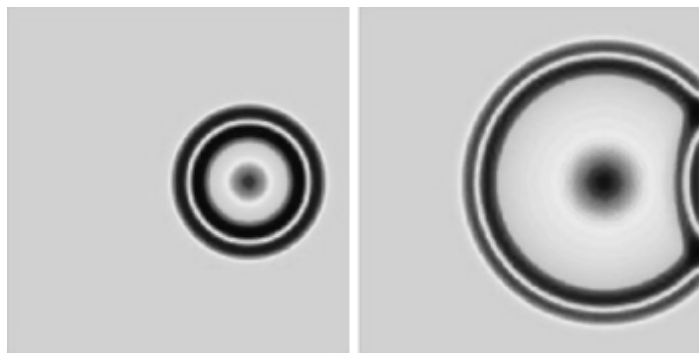


Figure 7.3: Réflexion d'une gaussienne à la frontière artificielle en absence de PML ou de CLA.

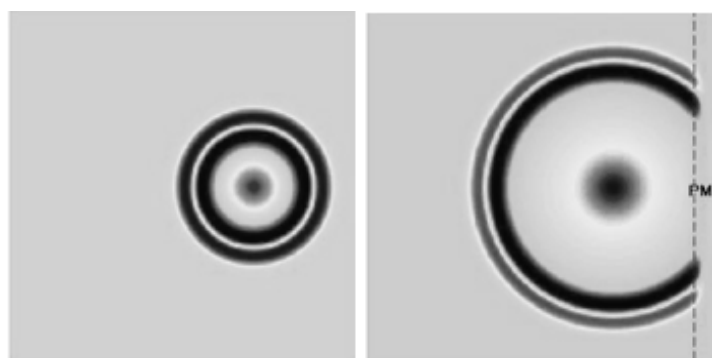


Figure 7.4: Absorption et adaptation parfaite d'une PML-x (verticale).

PML verticales et horizontales qui s'adapte bien avec l'analyse mathématique de la solution analytique dans un quart de plan et qui, elle aussi, peut être obtenue avec le même principe de superposition (cf. [11]).

7.2.2 Analyse par ondes planes

L'analyse par ondes planes consiste à étudier l'absorption et la réflexion d'une solution exponentielle de la forme :

$$u(x, t) = e^{i(\omega t - k_x x - k_y y)}, \quad \omega, k_x, k_y \in \mathbb{R}$$

où ω est une fréquence temporelle et $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2}$ désigne le nombre d'onde dans le milieu homogène de propagation. En remplaçant cette solution dans l'équation d'ondes

$$\frac{1}{c^2} \partial_t^2 u - \partial_x^2 u - \partial_y^2 u = 0,$$

on obtient la relation de dispersion suivante, qui lie les fréquences temporelles et spatiales :

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k_x^2 + k_y^2 \quad (7.15)$$

Si θ désigne l'angle d'incidence, alors on a :

$$k_x = \frac{\omega \cos \theta}{c}, \quad k_y = \frac{\omega \sin \theta}{c}.$$

Dans la PML verticale ($x > 0$) par exemple, on applique le changement de variables complexe

$$x^{\text{pml}}(x) = x + \frac{1}{i\omega} \int_0^x \sigma(s) ds.$$

Ainsi, une solution onde plane s'écrit :

$$u(x, t) = e^{i \frac{\omega}{c} (t - x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{\cos \theta}{c} \int_0^x \sigma(s) ds}, \quad x > 0$$

Les ondes sortantes dans la direction des x croissants ($\Delta x > 0$) sont celles qui ont une vitesse de phase²

$$v_x^{\text{ph}} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{c}{\cos \theta}$$

positive. Il est clair alors qu'elles sont absorbées avec un facteur d'atténuation exponentiel :

$$e^{-\frac{\cos \theta}{c} \int_0^x \sigma(s) ds}, \quad x > 0.$$

Si maintenant, la PML est terminée en $x = L$ avec une condition de Neumann homogène, on obtient par simple réflexion une solution particulière sous la forme :

$$u(x, t) = e^{i \frac{\omega}{c} (t - x \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{\cos \theta}{c} \int_0^x \sigma(s) ds} + e^{i \frac{\omega}{c} (t - (2L - x) \cos \theta - y \sin \theta) - \frac{\cos \theta}{c} \int_0^{(2L - x)} \sigma(s) ds}.$$

²En fait, il faut argumenter aussi sur la vitesse de groupe $v^g = d\omega/dk$ (vitesse de transport d'énergie, dans un milieu non dissipatif) afin de donner un sens correct aux ondes sortantes (cf. [5]).

Dans le milieu ($x < 0$), la solution devient alors :

$$u(x, t) = e^{i\frac{\omega}{c}(t-x\cos\theta-y\sin\theta)} + \mathbf{R}(\sigma, \theta, L)e^{i\frac{\omega}{c}(t+x\cos\theta-y\sin\theta)},$$

où

$$\mathbf{R}(\sigma, \theta, L) = e^{-\frac{2\cos\theta}{c}\int_0^L \sigma(s)ds} \cdot e^{-2i\frac{\omega L}{c}}, \quad (7.16)$$

désigne le coefficient de réflexion à l'interface $x = 0$, et qui dépend du cosinus de l'angle d'incidence θ , de la largeur L de la couche PML et du profil d'absorption σ .

Remarque 7.3 *Le facteur multiplicatif $e^{-2i\frac{\omega L}{c}}$ est un terme qui modifie uniquement la phase de l'onde réfléchie et donc n'a pas d'influence sur son amplitude. Ainsi, les PML classiques ne posent pas de problèmes de stabilité en régime transitoire, puisque l'atténuation exponentielle à lieu pour toutes les fréquences ω et indépendamment de l'angle d'incidence θ , sauf peut-être pour des incidences rampantes ($\theta \simeq \pm\frac{\pi}{2}$). D'un point de vue numérique, cela ne constitue pas un réel problème si on éloigne suffisamment les couches PML du domaine d'intérêt où sont localisées les sources de radiation.*

7.3 Inconvénients et critiques des PML

Depuis Bérenger [8], et pendant que pour un grand nombre d'auteurs, les PML ont révolutionné les CLA dans la simulation des phénomènes de propagation d'ondes en domaine non borné, elles ne sont pas plus qu'un outil parmi d'autres qui a ses avantages et ses inconvénients, qui peut être critiqué et parfois limité dans les applications à des situations plus complexes, que nous allons illustrer dans cette section.

7.3.1 PML(s) et discrétisation

D'un point de vue numérique, le but est d'avoir des PML de largeur L assez petite afin d'accélérer la simulation, ce qui nécessite une absorption assez importante pour atténuer les réflexions venant du bord extérieur. Le problème est que cela est possible uniquement avec les PML exactes, i.e., lorsqu'on résout le problème continu. Après discrétisation (FEM, FDTD, etc.), un problème numérique crucial apparaît. Il s'agit alors des réflexions numériques qui sont dues à l'approximation numériques des équations différentielles par rapport à la direction de propagation. En fait, l'onde plane dans la PML discrétisée est de la même nature que celle dans le modèle exact. En supposant que le profil σ est constant, on montre que le coefficient de réflexion dans la PML exacte est proportionnel à :

$$R_{\text{exact}} \propto e^{-\frac{2\cos\theta}{c}L\sigma} (1 + O(\Delta x^2)),$$

où Δx est le pas de discrétisation d'espace, alors que le coefficient de réflexion numérique dans la PML discrétisée ($\Delta x \rightarrow 0$) est proportionnel à :

$$R_{\text{discret}} \propto \sigma^2 \cdot \Delta x^2.$$

On conclut que l'amplitude de l'onde réfléchie décroît avec le pas d'espace Δx , mais aussi elle est amplifiée de manière quadratique avec le profil constant σ , et par conséquent l'adaptation parfaite de la PML est perdue dès qu'on passe au numérique. Une des solutions consiste à choisir plusieurs couches avec des profils constants σ_i tel que $\sigma_{i+1} - \sigma_i$ doit rester petit, ce qui produit une superposition de réflexions numériques dont l'amplitude est proportionnelle à $(\sigma_{i+1} - \sigma_i)^2$ qui, graduellement doit être menée à tendre vers 0. Actuellement, la solution commune à ce problème est de choisir un profil variable, en particulier quadratique ou cubique (cf. [23], [22]). Plus récemment, des profils non bornés sont avérés plus intéressants pour atténuer les réflexions numériques dues à la discrétisation des PML (cf. [9]).

7.3.2 PML et milieux hétérogènes

Que ce soit en 2d ou en 3d, lors de la construction d'une PML verticale suivant la direction x par exemple, on n'a pas vraiment besoin de l'hypothèse que le milieu soit homogène par rapport aux autres directions y, z . En fait, le concept d'adaptation d'impédance est basé de manière essentielle sur l'idée de pouvoir prolonger analytiquement la solution de l'axe réel à un contour complexe, *via* le changement de variables (7.13). Ce prolongement analytique doit être possible par rapport à la direction en question et assez loin des sources de radiation. Donc, l'idée centrale d'une PML est que la solution elle-même soit analytique, et que par conséquent le milieu (ou l'équation d'ondes) soit invariant(e) dans cette direction pour $|x|$ suffisamment grand. Si le milieu varie selon x par exemple, et de manière discontinue comme il est souvent le cas dans les milieux hétérogènes (guides d'ondes, milieux périodiques, cristallins, etc.), alors l'idée du prolongement analytique et par conséquent des PML n'est plus envisageable (cf. [22]). On peut noter que les CLA non plus, n'apportent pas de réponse à ce problème (elles sont typiquement conçues pour les milieux homogènes).

Un autre cas intéressant où les PML font défaut est celui où l'idée de base du prolongement analytique est satisfaite par rapport à la direction x par exemple, mais l'hétérogénéité dans les autres directions (y, z) crée des solutions inhabituelles qui, pour une même fréquence ω , la vitesse de phase et la vitesse de groupe peuvent être consistantes (ont le même signe) dans un sens et inconsistantes dans un autre. Dans ce cas, quelque soit le choix du signe du profil d'absorption σ , il y aura toujours des modes qui explosent (instables) dans la PML. C'est ce qui arrive souvent avec un guide d'onde coaxial où il est difficile de distinguer ce qui est sortant de ce qui est rentrant (cf. [18], [19]). Cette situation peut arriver aussi dans le cas d'un milieu en écoulement oblique et non uniforme (advection, aéroacoustique, shallow water, etc.), où pour une même fréquence, les ondes consistantes (forward-waves) ont parfois tendance à devenir inconsistantes (backward-waves) dès que le sens de l'écoulement change. Dans le cas où l'écoulement est uniforme, ce déguisement des ondes est moins délicat à traiter et a fait l'objet de notre collaboration dans l'équipe du projet MAGIQUE-3D à l'INRIA. Dans le chapitre suivant, nous allons exposer quelques résultats de ce travail pour un système d'équations de Saint-Venant ou système d'eau peu profonde (shallow water) avec terme Coriolis.

Chapitre 8

Couches absorbantes parfaitement adaptées aux ondes courtes en eau peu profonde (shallow water)

8.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous construisons des PML stables pour le système linéarisé 2d d'eau peu profonde (shallow water) ou système de Saint Venant, en écoulement oblique et uniforme avec force de Coriolis. En négligeant les effets de topographie et de viscosité, et en supposant que le terme de rotation (force de Coriolis) est constant, notre approche est basée sur un découplage du système primal qui donne lieu à deux équations d'ondes de natures différentes. La première est l'équation des ondes de gravité qui sont capables de se diffracter en présence d'obstacles en créant ainsi une partie transmise et une partie réfléchie, la seconde est une équation de transport (vorticité et entropie) dont les solutions sont des ondes qui, par leur nature, ne se diffractent pas et par conséquent elles ne participent que dans la partie incidente du champ. Nous proposons un modèle non standard de PML dans lequel uniquement les ondes de gravité sont absorbés. La PML sera donc désactivée pour les ondes de vorticité et d'entropie qui ramènent le système à son équilibre géostrophique (cf. [24]). Nous partons de l'idée proposée dans [21] pour le système d'Euler linéarisé, qui consiste à remplacer uniquement les dérivées spatiales qui correspondent à l'opérateur d'ondes de la première équation qui, dans notre cas, est une équation du type Klein-Gordon avec termes d'advection et dispersion linéaire. En régime fréquentiel, cette équation rentre dans le cadre général de l'équation d'Helmholtz convective dont on dispose de modèles PML stables en se basant sur des changements de variables en temps et en espace convenables qui éliminent la convection (cf. [7]). Le critère de stabilité que nous utilisons et celui obtenu par une analyse de Fourier en hautes fréquences de la solution comme dans (cf. [5], [11], [10]). En suivant le transport, on arrive à supprimer les ondes inconsistantes (backward-waves) dans un nouveau référentiel, et par conséquent à respecter la condition nécessaire de stabilité qui permet de conclure à l'efficacité de notre modèle. L'inconvénient avec les modèles de PML classiques où on modifie toutes les dérivées spatiales dans le système est que, à notre connaissance, il n'existe pas de changement de variables convenable qui permet de stabiliser les PML en écoulement oblique pour certains systèmes tels que les équations de l'aéroacoustique, l'élastodynamique, eau peu profonde, etc.

8.2 Position du problème d'eau peu profonde

Nous considérons un fluide homogène et isotrope. On note $\eta := \eta(x, y, t)$ la hauteur de la surface libre à l'instant t , mesurée à partir d'un niveau de référence $z = 0$. Même si η varie en temps et en espace, on suppose qu'il existe une valeur caractéristique pour la hauteur moyenne qu'on note H . De même, on note L une échelle qui caractérise la dimension horizontale de l'espace dans lequel a lieu le phénomène. Les équations d'eau peu profonde sont obtenues en intégrant en profondeur les équations de Navier-Stokes sous l'hypothèse fondamentale :

$$\delta = \frac{H}{L} \ll 1. \quad (8.1)$$

Sous cette condition, l'équation de continuité implique que la composante verticale w du champ de vitesse (u, v, w) varie très peu en profondeur z , i.e.

$$w(z = \eta) \approx w(z = 0)$$

De même, l'équation de conservation des moments implique que la composante verticale du gradient de pression est presque hydrostatique, ce qui conduit alors à supposer que les composantes horizontales u et v du champ de vitesse sont eux aussi indépendantes de z . L'intégration selon z permet de découpler la troisième composante w des deux autres u et v , et par conséquent la dimension du problème est ramenée du 3d en 2d grâce à l'hypothèse fondamentale (8.1) de la théorie. On peut noter que cette simplification n'est plus valable lorsque la densité varie avec z sauf si elle est constante par morceau et dans ce cas on peut développer la théorie d'eau peu profonde dans un milieu stratifié. Nous pouvons ainsi dire que le système 2d est une condition d'impédance généralisée résultante de l'analyse asymptotique du système 3d par rapport à l'épaisseur δ lorsque celle-ci tend vers 0, (cf. [25]). Nous renvoyons le lecteur à Pedolsky [24] pour plus de littérature sur la théorie d'eau peu profonde.

On part du modèle 2d linéarisé sous forme non conservative (celle que nous adoptons pour la construction des PML) :

$$\begin{cases} Gh + H(\partial_x u + \partial_y v) = 0, \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0, \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0, \end{cases} \quad (8.2)$$

où :

- G est l'opérateur de transport défini par :

$$G = \partial_t + U\partial_x + V\partial_y,$$

- Le champ scalaire $h = h(x, y, t)$ représente la hauteur de la surface libre du fluide, mesurée à partir de la hauteur moyenne H , i.e. $h = \eta - H$.
- U, V et H sont des constantes positives qui décrivent l'état au repos, autour duquel la linéarisation a été faite.
- $g \approx 10m/s^2$ est la constante de gravité.

- f est une constante positive associée à la force de Coriolis.

En combinant les équations du système (8.2), on arrive à découpler l'inconnue h des deux autres u et v comme suit :

En dérivant la deuxième (resp. troisième) équation du système (8.2) par rapport à x (resp. y), on obtient en faisant la somme des équations résultantes :

$$G(\partial_x u + \partial_y v) = -g\Delta h + f(\partial_x v - \partial_y u) \quad (8.3)$$

On applique ensuite G à la première équation et on utilise (8.3) pour obtenir l'équation :

$$(G^2 - gH\Delta)h + Hf(\partial_x v - \partial_y u) = 0 \quad (8.4)$$

En dérivant maintenant la deuxième (resp. troisième) équation du système (8.2) par rapport à y (resp. x), on déduit en faisant la somme des résultats et après application de l'opérateur G , que la hauteur h est solution de l'équation différentielle d'ordre 3 suivante :

$$(G^2 - gH\Delta)(Gh) + f^2(Gh) = 0, \quad (8.5)$$

ce qui montre que la nouvelle inconnue $h^* = Gh$ est solution de l'équation des ondes avec termes d'advection et de dispersion linéaire :

$$(G^2 - gH\Delta)h^* + f^2 h^* = 0 \quad (8.6)$$

Si on note $L = G^2 - gH\Delta$ l'opérateur des ondes advectives alors les équations d'eau peu profonde peuvent être réécrites à l'aide d'un système à quatre inconnues :

$$\begin{cases} Gh = h^* \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0 \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0 \\ L h^* + f^2 h^* = 0 \end{cases} \quad (8.7)$$

L'opérateur d'ordre 2 :

$$L_f = L + f^2 = G^2 - gH\Delta + f^2$$

est appelé opérateur de Klein-Gordon avec termes d'advection et de dispersion linéaire qui, après développement du produit G^2 , s'écrit :

$$L_f = \partial_t^2 + 2U(\partial_t + V\partial_y)\partial_x + 2V(\partial_t + U\partial_x)\partial_y - (gH - U^2)\partial_x^2 - (gH - V^2)\partial_y^2 + f^2 \quad (8.8a)$$

Nous supposons dans toute la suite, que la vitesse de propagation des ondes de gravité est plus importante que l'écoulement, ce qui se traduit par l'hypothèse du régime subsonique :

$$gH > \sqrt{U^2 + V^2} \quad (8.9)$$

Remarque 8.1 La nouvelle formulation ci-dessus est intéressante puisque nous avons découplé la composante h^* qui, d'après la première équation du système (8.2), est proportionnelle à la divergence du champ de vitesse. La nouvelle inconnue h^* est solution d'une équation d'ondes dont on dispose de modèles PML stables (cf. [7]), pendant que les autres inconnues h , u et v sont gouvernées par des équations de transport et ne seront pas modifiées par le nouveau modèle PML que nous allons proposer.

8.3 Un modèle PML stable pour les ondes courtes en eau peu profonde en écoulement oblique

La difficulté essentielle pour construire des PML stables pour l'opérateur L_f en écoulement oblique est liée au fait que l'équation d'ondes $L_f h^* = 0$ supporte des ondes de gravité inconsistentes (backward-waves) qui doivent être corrigées grâce à un changement de référentiel convenable, avant même d'effectuer le changement de variables complexe classique $\partial_x \rightarrow \partial_x^{\text{pml}}$. D'une manière générale, le référentiel mobile a été utilisée par plusieurs auteurs (cf. [7], [1], [17], [16], [2], [10],...) où l'idée commune peut être liée à une factorisation adéquate de l'équation d'Helmholtz convective.

On commence par construire une PML qui agit dans la direction x , en rappelant que cela n'est pas restrictif puisqu'il suffit de permuter x (resp. U) et y (resp. V) pour construire une PML dans l'autre direction y . L'idée est donc de remplacer uniquement les dérivées spatiales ∂_x qui agissent sur la composante h^* dans la dernière équation de (8.7) par une dérivée ∂_x^{PML} qui, comme dans [21], est définie par le changement de variable formel :

$$\partial_x^{\text{PML}} = \alpha(x, \partial_t, \partial_y) \left(\partial_x - \frac{U}{gH - U^2} (\partial_t + V \partial_y) \right) + \frac{U}{gH - U^2} (\partial_t + V \partial_y) \quad (8.10)$$

où α est opérateur quasi-local qui dépend d'un paramètre d'absorption $\sigma := \sigma(x) \geq 0$ et qui est défini formellement par :

$$\alpha(x, \partial_t, \partial_y) = \frac{\sqrt{gH} (\partial_t + V \partial_y)}{\sqrt{gH} (\partial_t + V \partial_y) + (gH - U^2) \sigma(x)} \quad (8.11)$$

On note L^{PML} l'opérateur L dans lequel ∂_x a été remplacé par ∂_x^{PML} , alors le nouveau système dans lequel le demi-plan ($x > 0$) désigne la PML de largeur infinie, s'écrit :

$$\begin{cases} Gh = h^* \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0 \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0 \\ L h^* + f^2 h^* = 0 \quad \text{si } x < 0 \\ L^{\text{PML}} h^* + f^2 h^* = 0 \quad \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (8.12)$$

Nous avons besoin maintenant des conditions qui assurent l'adaptation parfaite de la PML à l'interface $x = 0$. Pour les trois premières équations du système (8.12), nous adoptons des conditions de transmission naturelles qui sont transparentes pour l'opérateur G :

$$[h] = [u] = [v] = 0 \text{ en } x = 0. \quad (8.13)$$

Pour les deux dernières équations, nous avons le théorème suivant :

Théorème 8.1 *Les deux dernières équations du système (8.12) sont parfaitement adaptées en $x = 0$ si elles sont couplées par les conditions de transmission $[h^*] = 0$ et $[D_x h^*] = 0$ à l'interface $x = 0$ entre le milieu physique ($x < 0$) et le milieu PML ($x > 0$), où D_x est défini par ∂_x si $x < 0$ et ∂_x^{PML} si $x > 0$.*

Preuve: Comme nous l'avons déjà remarqué, la composante h^* est solution de l'équation de Klein-Gordon indépendamment des autres h , u et v . Ainsi, les conditions de transmission naturelles suffisent pour ces trois composantes puisqu'elles sont couplées par des équations de transport. Le problème se pose donc uniquement avec les deux dernières où l'impédance des deux milieux physique et PML doit être adaptée par des conditions de transmission typiques aux PML.

On considère alors le changement variable qui, par construction, laisse x invariant :

$$\left\{ \begin{array}{l} t = \frac{\sqrt{gH}}{gH-U^2} t_1 - \frac{U}{gH-U^2} x_1, \\ x = x_1, \\ y = \sqrt{gH-U^2} y_1 - \frac{UV}{gH-U^2} x_1 + \frac{V\sqrt{gH}}{gH-U^2} t_1, \\ h_1^*(x_1, y_1, t_1) = h^*(x, y, t), \end{array} \right. \quad (8.14)$$

de telle sorte que les dérivées spatiales et temporelles subissent les transformations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\sqrt{gH}}{gH-U^2} (\partial_t + V \partial_y) h^* = \partial_{t_1} h_1^*, \\ \left(\partial_x - \frac{U}{gH-U^2} (\partial_t + V \partial_y) \right) h^* = \partial_{x_1} h_1^*, \\ \partial_y h^* = \sqrt{gH-U^2} \partial_{y_1} h_1^*, \\ \partial_x^{\text{PML}} h^* = \partial_{x_1}^{\text{PML}} h_1^* + \frac{U}{\sqrt{gH}} \partial_{t_1} h_1^*, \\ L h^* = (gH - U^2) (\partial_{t_1}^2 - \partial_{x_1}^2 - \partial_{y_1}^2) h_1^* = L_1 h_1^*, \\ L^{\text{PML}} h^* = (gH - U^2) (\partial_{t_1}^2 - \partial_{x_1}^{\text{PML}^2} - \partial_{y_1}^2) h_1^* = L_1^{\text{PML}} h_1^*, \end{array} \right. \quad (8.15)$$

avec

$$\partial_{x_1}^{\text{PML}} h_1^* = \alpha_1(x_1) \partial_{x_1} h_1^* \quad \text{et} \quad \alpha_1(x_1) = \frac{\partial_{t_1}}{\partial_{t_1} + \sigma(x_1)}. \quad (8.16)$$

$\partial_{x_1}^{\text{PML}}$ n'est autre que l'opérateur PML classique écrit dans le nouveau référentiel (x_1, y_1, t_1) . Ainsi, et par rapport à ce système de coordonnées, nous arrivons à factoriser les deux dernières équations du système (8.12) sous la forme non advective suivante :

$$\left\{ \begin{array}{ll} L_1 h_1^* + f^2 h_1^* = 0 & \text{si } x_1 < 0, \\ L_1^{\text{PML}} h_1^* + f^2 h_1^* = 0 & \text{si } x_1 > 0, \end{array} \right.$$

ou encore, en divisant par le facteur non nul $gH - U^2$ et en ajoutant les conditions de transmission réécrites pour h_1 :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_{t_1}^2 h_1^* - \partial_{x_1}^2 h_1^* - \partial_{y_1}^2 h_1^* + \frac{f^2}{gH-U^2} h_1^* = 0 & \text{si } x_1 < 0, \\ \partial_{t_1}^2 h_1^* - \partial_{x_1}^{\text{PML}^2} h_1^* - \partial_{y_1}^2 h_1^* + \frac{f^2}{gH-U^2} h_1^* = 0 & \text{si } x_1 > 0. \\ [h_1^*] = 0 \text{ et } [D_{x_1} h_1^*] = 0 & \text{en } x_1 = 0 \end{array} \right. \quad (8.17)$$

où D_{x_1} est défini par ∂_{x_1} si $x_1 < 0$ et $\partial_{x_1}^{\text{PML}}$ si $x_1 > 0$.

Le changement de variables (8.14) est proche de celui utilisé par Nataf [21], pour les équations d'Euler linéarisées en écoulement oblique. Nous pouvons aussi le comparer à ceux qui sont présentés dans [7], [1], [17], [16], [2], [11]. Il est destiné en fait à stabiliser la PML en supprimant les ondes inconsistantes dans un référentiel qui suit le mouvement, et par conséquent à respecter la condition nécessaire de stabilité dans le nouveau référentiel (cf. [5]).

On utilise ensuite, le changement de variables formel (où le deuxième est une écriture formelle de ce qu'on obtient en analyse de Fourier) :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_2 = t_1, \\ x_2 = x_1 + \frac{1}{\partial_t} \int_0^{x_1} \sigma(x) dx \text{ si } x_1 > 0 \\ x_2 = x_1 \text{ si } x_1 \leq 0 \\ y_2 = y_1, \\ h_2^*(x_2, y_2, t_2) = h_1^*(x_1, y_1, t_1), \end{array} \right. \quad (8.18)$$

de telle sorte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{t_1} h_1^* = \partial_{t_2} h_2^*, \\ \partial_{x_1} h_1^* = \partial_{x_2} h_2^*, \text{ si } x_2 < 0 \\ \partial_{x_1} h_1^* = \left(1 + \frac{\sigma(x_2)}{\partial_{t_2}}\right) \partial_{x_2} h_2^* = \frac{1}{\alpha_1(x_2)} \partial_{x_2} h_2^*, \text{ si } x_2 > 0 \\ \partial_{y_1} h_1^* = \partial_{y_2} h_2^*, \\ \partial_{x_1}^{\text{PML}} h_1^* = \partial_{x_2} h_2^*, \\ L_1 h_1^* = (gH - U^2) (\partial_{t_2}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{y_2}^2) h_2^* = L_2 h_2^*, \\ L_1^{\text{PML}} h_1^* = L_2 h_2^*, \end{array} \right. \quad (8.19)$$

et ainsi, le problème (8.17) devient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_{t_2}^2 h_2^* - \partial_{x_2}^2 h_2^* - \partial_{y_2}^2 h_2^* + \frac{f^2}{gH - U^2} h_2^* = 0 \quad \text{si } x_2 < 0, \\ \partial_{t_2}^2 h_2^* - \partial_{x_2}^2 h_2^* - \partial_{y_2}^2 h_2^* + \frac{f^2}{gH - U^2} h_2^* = 0 \quad \text{si } x_2 > 0. \\ [h_2^*] = 0 \text{ et } [\partial_{x_2} h_2^*] = 0 \quad \text{en } x_2 = 0 \end{array} \right. \quad (8.20)$$

Ce changement de variables est actuellement l'inverse du changement de variables classique qui permet de passer de ∂_{x_2} à $\partial_{x_1}^{\text{PML}}$ utilisé pour construire les PML.

Ainsi, h_2^* est solution de la même équation de Klein-Gordon dans les deux milieu physique et PML, avec des conditions de transmission parfaite, ce qui signifie qu'il n'y a pas de réflexions à l'interface $x = 0$. A partir des expressions des deux changements de variables ci dessus, et comme $x_2 = x_1$ pour $x < 0$, on conclut que h_2^* coïncide avec h^* . Par conséquent, aucune onde n'est réfléchiée dans le milieu physique si on considère le système original (8.12). La preuve est ainsi achevée. ■

8.4 Stabilité du nouveau modèle PML

Dans cette section, nous nous intéressons à la capacité d'absorption des modes physiques par la PML, en se basant sur l'analyse modale de la solution. Dans la PML-x, conçue pour les x croissants ($\Delta x > 0$), on s'intéresse particulièrement à une fonction h^* sous la forme

$$h^*(x, y, t) = \begin{cases} e^{\lambda x + i(\omega t + ky)} & \text{si } x < 0 \\ e^{\lambda^{\text{PML}} x + i(\omega t + ky)} & \text{si } x > 0 \end{cases}, \quad (8.21)$$

solution du problème

$$\begin{cases} Lh^* + f^2 h^* = 0, & \text{si } x < 0, \\ L^{\text{PML}} h^* + f^2 h^* = 0, & \text{si } x > 0, \\ [h^*] = 0 \text{ et } [D_x h^*] = 0 & \text{en } x = 0, \end{cases} \quad (8.22)$$

pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{R}^2$. Le facteur d'atténuation est lié à la partie réelle $\text{Re}(\lambda^{\text{PML}})$ qui doit être négative afin d'assurer l'absorption. La notion de stabilité est liée au fait que cette partie réelle doit rester négative pour tout ω et k qui vérifient une certaine relation appelée en analyse de Fourier : relation de dispersion. Le théorème suivant atteste la stabilité des modes physiques dans la PML -x.

Théorème 8.2 *Les solutions modales du problème (8.22) sont exponentiellement décroissantes dans la direction $x > 0$, pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{R}^2$.*

Preuve: Pour simplifier l'analyse, on applique successivement les deux changements de variables $h_1^*(x_1, y_1, t_1) = h^*(x, y, t)$ et $h_2^*(x_2, y_2, t_2) = h_1^*(x_1, y_1, t_1)$. En rappelant que h_2^* est solution du problème de transmission classique :

$$\begin{cases} L_2 h_2^* + f^2 h_2^* = 0, & \text{si } x_2 < 0, \\ L_2 h_2^* + f^2 h_2^* = 0, & \text{si } x_2 > 0, \\ [h_2^*] = 0 \text{ et } [\partial_{x_2} h_2^*] = 0, & \text{en } x_2 = 0, \end{cases} \quad (8.23)$$

une solution modale devient :

$$h_2(x_2, y_2, t_2) = e^{\lambda_2 x_2 + i(\omega_2 t_2 + k_2 y_2)}.$$

Le deuxième changement de variables implique que:

$$\begin{cases} \omega_2 = \frac{\sqrt{gH}}{gH - U^2} (\omega + V k) \\ k_2 = \frac{1}{\sqrt{gH - U^2}} k, \end{cases}$$

et par conséquent $(\omega_2, k_2) \in \mathbb{R}^2$. En remplaçant maintenant la solution modale dans le système, on obtient une équation algébrique du second ordre qui admet deux solutions (modes) λ_2^+ et λ_2^- telles que :

$$\begin{cases} \lambda_2^\pm = \pm \sqrt{k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2}}, & \text{si } k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} \geq 0, \\ \lambda_2^\pm = \pm i \sqrt{\omega_2^2 - k_2^2 - \frac{f^2}{gH-U^2}}, & \text{si } k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} < 0. \end{cases} \quad (8.24)$$

Dans le premier cas où $k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} \geq 0$, les modes correspondants sont réels et non propagatifs (évanescents). Seulement l'un d'entre eux est physiquement admissible dans chaque demi espace (voire : λ_2^- si $x_2 > 0$ et λ_2^+ si $x_2 < 0$). Dans le deuxième cas où $k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} < 0$, les modes sont imaginaires purs et sont donc propagatifs. Si $\omega_2 > 0$, λ_2^- se propage dans la direction des x croissants ($\Delta x > 0$), pendant que λ_2^+ se propage dans le sens opposé ($\Delta x < 0$). Par contre, il est clair que le sens de propagation est le même si $\omega_2 < 0$.

En utilisant le changement de variables complexe relatif à la construction d'une PML, on a:

$$\lambda^{\text{PML}} = \left(1 - \frac{i\sigma(x_2)}{\omega_2}\right)\lambda_2^\pm + i\frac{U}{\sqrt{gH}}\omega_2$$

On considère en premier lieu λ^{PML} qui correspond au mode λ_2^- physiquement admissible dans le demi-plan $\{x_2 > 0\}$. Alors, si $k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} \geq 0$, on obtient :

$$\text{Re}(\lambda^{\text{PML}}) = -\sqrt{k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2}} < 0$$

Ensuite, si $k_2^2 - \omega_2^2 + \frac{f^2}{gH-U^2} < 0$ et $\omega_2 > 0$, alors λ_2^- est le seul mode admissible dans la PML et on a :

$$\text{Re}(\lambda^{\text{PML}}(x)) = -\frac{\sigma(x_2)}{\omega_2} \sqrt{\omega_2^2 - k_2^2 - \frac{f^2}{gH-U^2}} < 0,$$

tandis que, si $\omega_2 < 0$, c'est le mode λ_2^+ qui est admissible et on a :

$$\text{Re}(\lambda^{\text{PML}}) = \frac{\sigma(x_2)}{\omega_2} \sqrt{\omega_2^2 - k_2^2 - \frac{f^2}{gH-U^2}} < 0,$$

Par conséquent, $\text{Re}(\lambda^{\text{PML}}) < 0$ pour tout (ω_2, k_2) et donc pour tout $(\omega, k) \in \mathbb{R}^2$, ce qui implique que les solutions modales sont exponentiellement décroissantes dans la PML. ■

Remarque 8.2 Les modes $\lambda_2^\pm$ ne dépendent pas de x_2 tandis que les modes correspondants dans la PML dépendent de x . Ceci est dû au fait que le symbole de l'opérateur différentiel $L_2 + f^2$ est indépendant de x_2 .

D'un point de vue numérique, si on tronque la PML à distance finie $x = L$ et on y impose une condition de Dirichlet ou de Neumann, alors on peut montrer, en utilisant le principe de l'image (cf. [11]), que les ondes réfléchies sont aussi exponentiellement décroissantes dans la PML.

8.5 Une deuxième approche basée sur la factorisation de Smith

Dans cette section, nous présentons une deuxième approche basée sur la factorisation de Smith d'une matrice (Smith, ≈ 1860). Cette idée a été utilisée par F. Nataf [21] pour construire de nouveaux modèles PML pour le système d'Euler linéarisé en écoulement oblique. C'est une méthode qui s'applique de manière générale aux systèmes d'EDPs linéaires, afin de diagonaliser une matrice tout en gardant le caractère différentiel dans la matrice diagonale obtenue. Lorsqu'il s'agit d'opérateurs différentiels, cette factorisation est différente de la procédure de diagonalisation habituelle qui peut faire intervenir des racines carrées d'opérateurs (cf. [27]).

On commence d'abord par rappeler la version polynomiale de la factorisation de Smith, qui est différente de la définition de diagonalisation, par le théorème suivant :

Théorème 8.3 *Soit n un entier et A une matrice inversible $n \times n$ et à coefficients polynômes en λ : $A := (a_{ij}(\lambda))_{1 \leq i,j \leq n}$. Alors, il existe trois matrices P, D , et Q à coefficients polynômes en λ , telles que*

$$\det(P) = \det(Q) = 1$$

D est une matrice diagonale

$$A = P.D.Q$$

Remarque 8.3 *Dans cette factorisation, P et Q ne sont pas uniques, tandis que D l'est à une permutation de lignes ou de colonnes près. En outre, ces trois matrices sont inversibles et P^{-1} et Q^{-1} sont aussi à coefficients polynômes en λ avec $\det(P^{-1}) = \det(Q^{-1}) = 1$ (on dit que P et Q sont des matrices unimodulaires).*

Il existe des algorithmes de calcul manuel de la factorisation de Smith, mais nous avons choisi le logiciel de calcul formel MAPLE qui donne directement un résultat à l'aide d'une procédure appelée *smith*. Nous partons alors du système primal (8.2) écrit sous forme matricielle :

$$A_{\text{sw}} \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix} = 0, \quad (8.25)$$

où :

$$A_{\text{sw}} = \begin{pmatrix} G & H\partial_x & H\partial_y \\ g\partial_x & G & -f \\ g\partial_y & f & G \end{pmatrix} \quad (8.26)$$

Afin d'introduire une PML qui agit dans la direction x , on transforme (8.2) en un système différentiel en x via une transformée de Fourier partielle par rapport à t et y , où ω (resp. k) désignent les variables duales associées à t (resp. y). Ainsi, la transformée de A_{sw} est :

$$\tilde{A}_{\text{sw}} = \begin{pmatrix} \tilde{G} & H\partial_x & Hik \\ g\partial_x & \tilde{G} & -f \\ gik & f & \tilde{G} \end{pmatrix} \quad (8.27)$$

où $\tilde{G}$ est donné par :

$$\tilde{G} = i\omega + U\partial_x + Vik$$

La matrice $\tilde{A}_{\text{sw}}$ est une matrice à coefficients polynômes en ∂_x et cette propriété est stable par factorisation de Smith, d'après le théorème précédent. Il existe alors trois matrices P, D , et Q à coefficients polynômes en ∂_x , telles que

$$\tilde{A}_{\text{sw}} = PDQ, \quad (8.28)$$

où D est la matrice diagonale donnée par :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_f \tilde{G} \end{pmatrix}, \quad (8.29)$$

et $\tilde{L}_f$ est l'image de Fourier de l'opérateur de Klein-Gordon :

$$\tilde{L}_f = (i\omega + U\partial_x + Vik)^2 - gH(\partial_x^2 - k^2) + f^2 \quad (8.30)$$

Les matrices P et Q , si bien que leurs inverses, sont des matrices à coefficients polynômes en ∂_x de déterminant égal à 1.

Remarque 8.4 *La factorisation de Smith du système fait clairement intervenir le produit de l'opérateur de transport $\tilde{G}$ par l'opérateur de Klein Gordon $\tilde{L}_f$, dans la matrice diagonale D . D'un point de vue physique, cela a un sens où elle caractérise la nature des ondes supportées par le système d'eau peu profonde (voire : ondes de gravités solutions de l'équation $\tilde{L}_f = 0$, et ondes géostrophiques ou de vorticité et d'entropie qui sont solutions de l'équation de transport $\tilde{G} = 0$).*

On associe à l'équation d'ordre deux ($\tilde{L}_f = 0$) deux modes propagatifs, tandis que l'opérateur G est un opérateur de transport dont l'unique mode est naturellement sortant et ne doit donc pas être traité par une procédure PML. C'est pourquoi, le modèle PML que nous proposons est basé sur la même idée non classique et qui consiste à remplacer uniquement les dérivées spatiales ∂_x qui se trouvent dans $\tilde{L}_f$ par une dérivée ∂_x^{PML} , comme nous l'avons définie en section 8.3 par les relations (8.10) et (8.11). On note $\tilde{L}_f^{\text{PML}}$ le nouvel opérateur après avoir effectué le changement $\partial_x \rightarrow \partial_x^{\text{PML}}$. Une possibilité pour construire une PML-x consiste à introduire la nouvelle matrice diagonale notée D^{PML} , telle que :

$$D^{\text{PML}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_f^{\text{PML}} \tilde{G} \end{pmatrix}, \quad (8.31)$$

et ensuite, à définir la matrice $\tilde{A}_{\text{sw}}^{\text{PML1}}$ par :

$$\tilde{A}_{\text{sw}}^{\text{PML}} = PD^{\text{PML}}Q = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \tilde{L}_f^{\text{PML}} \tilde{G} \end{pmatrix} Q. \quad (8.32)$$

où P et Q sont inchangées : c'est-à-dire qu'on n'y modifie pas ∂_x par une dérivée PML. On peut aisément vérifier, à l'aide d'un calcul formel sous MAPLE, que :

$$\tilde{A}_{\text{sw}}^{\text{PML}} = \tilde{A}_{\text{sw}} + \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \delta_2 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.33)$$

où δ_1 (resp. δ_2) sont des opérateurs différentiels en x d'ordre 3 (resp. 4), tels que :

$$\delta_1 = \frac{\left((gH - U^2) \left(\partial_x^2 - \partial_x^{\text{PML}^2} \right) - 2U (i\omega + ikV) (\partial_x - \partial_x^{\text{PML}}) \right) (f + ikU)^2}{f^2 ((f + ikU)^2 + (i\omega + ikV)^2)} \tilde{G}, \quad (8.34)$$

$$\delta_2 = \frac{\left((f + ikU) \tilde{G} + f (i\omega + ikV) \right) U}{gH} \delta_1 \quad (8.35)$$

Ainsi, ce modèle de PML consiste à perturber le système initial, dans la première et la troisième équation, par un terme qui agit uniquement sur l'inconnue $Gh = h^*$. Il est clair qu'en dehors de la zone PML, on a $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et on retrouve bien le système initial. Voire aussi, $\delta_1 = \delta_2 = 0$ dans le cas où $\tilde{G} = 0$: la PML n'absorbe donc pas les modes associés à cette équation qui sont les ondes de vorticité et d'entropie.

Remarque 8.5 *Nous avons repris les calculs précédents en posant dès le départ $f = 0$. Les résultats sont tels que :*

$$\tilde{A}_{\text{sw}}^{\text{PML}} = \tilde{A}_{\text{sw}} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ C_1 & C_2 & 0 \end{pmatrix}, \quad (8.36)$$

où C_1 (resp. C_2) sont des opérateurs différentiels en x d'ordre 2 (resp. 3) tels que:

$$C_1 = - \frac{\left((gH - U^2) \left(\partial_x^2 - \partial_x^{\text{PML}^2} \right) - 2U (i\omega + ikV) (\partial_x - \partial_x^{\text{PML}}) \right)}{ik (i\omega + ikV) gH} \tilde{G}, \quad (8.37)$$

$$C_2 = UC_1 \quad (8.38)$$

Il est clair que (8.36) est complètement diff rent de (8.33). Le modèle avec force de Coriolis est donc une perturbation singulière du modèle au repos par rapport au paramètre f au voisinage de 0.

Le modèle PML (8.33) fait intervenir des opérateurs d'ordre élevé (3 et 4), ce qui le rend difficile à implémenter numériquement. Contrairement au cas des équations d'Euler linéarisées où la division par le terme $(i\omega + ikV)$ pose problème pour certaines fréquences, le cas du système d'eau peu profonde avec force de Coriolis ($f \neq 0$) ne semble pas souffrir de cette difficulté puisque $(f + ikU)^2 + (i\omega + ikV)^2$ ne s'annule jamais pour $kU \neq 0$. On peut actuellement choisir un profile σ , tel que :

$$\sigma := \sigma(x, k, U, V, f) = \frac{(f + ikU)^2 + (i\omega + ikV)^2}{(f + ikU)^2}$$

afin de simplifier et régulariser δ_1 et δ_2 . Ce modèle reste intéressant d'un point de vue où il constitue une méthode systématique pour construire des PML (voire des CLA) pour les systèmes d'EDPs linéaires, de manière générale. Une question cruciale et intéressante serait donc : comment trouver la bonne factorisation de Smith, puisque celle-ci n'est pas unique, afin d'aboutir à un modèle PML simple et pratique. Dans la section suivante, nous revenons au premier modèle basé uniquement sur le découplage de la solution.

8.6 Le choix d'une formulation symétrique pour la PML au coin

Rappelons que $L_f = L + f^2$ est le seul opérateur qui doit être modifié par $L_f^{\text{PML}} = L^{\text{PML}} + f^2$ afin de construire une PML qui absorbe uniquement les ondes de gravités. Si on considère la PML verticale conçue pour la direction x , et dans laquelle la dérivée ∂_x est remplacée par une dérivée ∂_x^{PML} donnée par la relation (8.10), alors on a :

$$L_f^{\text{PML}-x} = (\partial_t + U\partial_x^{\text{PML}} + V\partial_y)^2 - gH \left((\partial_x^{\text{PML}})^2 + \partial_y^2 \right) + f^2 \quad (8.39)$$

Comme nous l'avons mentionné, il suffit d'échanger le rôle de x (resp. U) avec celui de y (resp. V), pour écrire une PML horizontale qui agit dans la direction y . On obtient dans ce cas :

$$L_f^{\text{PML}-y} = (\partial_t + U\partial_x + V\partial_y^{\text{PML}})^2 - gH \left(\partial_x^2 + (\partial_y^{\text{PML}})^2 \right) + f^2 \quad (8.40)$$

avec

$$\partial_y^{\text{PML}} - \frac{V}{gH - V^2} (\partial_t + U\partial_x) = \beta(y, \partial_t, \partial_x) \left(\partial_y - \frac{V}{H - V^2} (\partial_t + U\partial_x) \right), \quad (8.41)$$

où β est un opérateur quasi-local qui dépend d'un paramètre d'absorption $\sigma := \sigma(y) \geq 0$ et qui est défini formellement par :

$$\alpha(x, \partial_t, \partial_x) = \frac{\sqrt{gH} (\partial_t + U\partial_x)}{\sqrt{gH} (\partial_t + U\partial_x) + (gH - V^2) \sigma(y)} \quad (8.42)$$

Remarque 8.6 Lorsque l'écoulement se fait dans une seule direction (par exemple x) alors on a $V = 0$ et dans ce cas une PML standard peut être utilisée dans la direction y (cf. [10]).

Pour construire une PML au coin (intersection des PML horizontale et verticale), nous pouvons actuellement choisir la procédure la plus simple, et qui consiste (par exemple) à superposer la PML verticale sur l'horizontale (ou vice versa). Avec les PML classiques, les deux choix conduisent au même résultat. Dans notre cas, les variables x et y n'ont pas des rôles parfaitement symétriques, à cause des changements de variables (8.10) et (8.10) qui sont différents. De plus, il n'y a pas de raison justifiable de privilégier un choix sur l'autre (cf. [10]). Il n'y a pas, non plus, de méthodologie générale pour établir des conditions de transmission aux interfaces de superposition. Pour fixer les idées, nous avons choisi des conditions de

transmission naturelles aux interfaces dans les coins. Ainsi, nous utilisons dans les coins, l'opérateur :

$$L_f^{\text{PML}-x-y} = (\partial_t + U\partial_x^{\text{PML}} + V\partial_y^{\text{PML}})^2 - gH \left((\partial_x^{\text{PML}})^2 + (\partial_y^{\text{PML}})^2 \right) + f^2 \quad (8.43)$$

Remarque 8.7 *Il est important de noter que la dérivée ∂_x^{PML} contient déjà des dérivées spatiales ∂_y et que la superposition que nous effectuons ne concerne pas ces dérivées.*

Par la suite et pour des raisons numériques, nous avons trouvé convenable de travailler avec la différence $L_f^{\text{PML}} - L_f$, afin d'écrire le modèle PML sous la forme d'une perturbation du modèle initial, comme suit :

$$L_f^{\text{PML}} = L_f + (L_f^{\text{PML}} - L_f).$$

On utilise alors l'opérateur de perturbation suivant et qui, de manière générale, traite automatiquement les coins, la PML verticale et la PML horizontale :

$$\begin{aligned} L_f^{\text{PML}-x-y} - L_f &= 2(U(\partial_t + V\partial_y)(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) + V(\partial_t + U\partial_x)(\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y))_t \\ &\quad - (gH - U^2) \left((\partial_x^{\text{PML}})^2 - \partial_x^2 \right) - (gH - V^2) \left((\partial_y^{\text{PML}})^2 - \partial_y^2 \right) \\ &\quad + UV \left((\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)(\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y) + (\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y)(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) \right), \end{aligned} \quad (8.44)$$

En effet, si $\sigma(x) = 0$ (resp. $\sigma(y) = 0$), $\partial_x^{\text{PML}} = \partial_x$ (resp. $\partial_y^{\text{PML}} = \partial_y$), et par conséquent $L_f^{\text{PML}-x-y} - L_f$ se réduit à :

$$L_f^{\text{PML}-x} - L_f = 2U(\partial_t + V\partial_y)(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) - (gH - U^2) \left((\partial_x^{\text{PML}})^2 - \partial_x^2 \right), \quad (8.45)$$

dans la PML verticale, et respectivement à :

$$L_f^{\text{PML}-y} - L_f = 2V(\partial_t + U\partial_x)(\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y) - (gH - V^2) \left((\partial_y^{\text{PML}})^2 - \partial_y^2 \right), \quad (8.46)$$

dans la PML horizontale.

Il est donc plus intéressant de superposer dans la différence $L_f^{\text{PML}} - L_f$ que dans l'opérateur L_f^{PML} seul. Ainsi, nous obtenons la formulation symétrique suivante, pour la PML au coin :

$$\begin{aligned} L_f^{\text{PML}-x-y} - L_f &= (L_f^{\text{PML}-x} - L_f) + UV(\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y)(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) \\ &\quad + (L_f^{\text{PML}-y} - L_f) + UV(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)(\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y). \end{aligned} \quad (8.47)$$

La symétrie a lieu dans le sens où

$$\begin{aligned} L_f^{\text{PML}-x-y} - L_f &= [L_f^{\text{PML}-x} - L_f]^{\text{PML}-y} + (L_f^{\text{PML}-y} - L_f) \\ &= [L_f^{\text{PML}-y} - L_f]^{\text{PML}-x} + (L_f^{\text{PML}-x} - L_f) \\ &= L_f^{\text{PML}-y-x} - L_f \end{aligned}$$

Remarque 8.8 *Les termes qui sont proportionnels à UV dans l'expression (8.47) sont des termes correcteurs typiques au coin lorsque l'écoulement est oblique (i.e. $UV \neq 0$). Autrement dit, si $U = 0$ ou $V = 0$, ce qui correspond à un écoulement parallèle, alors ces termes s'annulent et on retrouve la superposition classique des PML aux coins.*

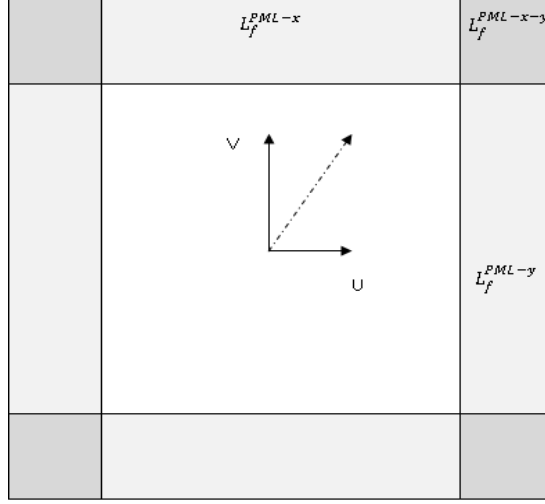


Figure 8.1: PML coin en écoulement oblique : $L_f^{\text{PML}-x-y}$ fait intervenir la superposition classique avec un terme correcteur proportionnel à $U.V$.

8.7 Formulation premier ordre du modèle PML

D'après la section précédente, on peut retenir pour le nouveau modèle PML le système :

$$\begin{cases} Gh = h^* \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0 \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0 \\ L_f h^* = 0 \quad \text{si } x < 0 \\ L_f^{\text{PML}} h^* = 0 \quad \text{si } x > 0, \end{cases} \quad (8.48)$$

où les deux dernières équations font intervenir des opérateurs (L_f^{PML} et L_f) d'ordre 2 en temps et en espace, et dont la résolution numérique conduit à l'inversion d'une matrice pleine. Afin de contourner cette difficulté, nous avons choisi de récrire ce système à l'aide d'équations qui font intervenir uniquement l'inversion d'opérateurs d'ordre 1. En utilisant l'identité $L_f^{\text{PML}} = L_f^{\text{PML}} - L_f + L_f$ dans la dernière équation dans (8.48), on obtient pour $x > 0$:

$$(L_f^{\text{PML}} - L_f)h^* + (G^2 + f^2 - gH\Delta)h^* = 0. \quad (8.49)$$

En multipliant ensuite, la deuxième (resp. troisième) équation du système (8.48) par $G\partial_x$ (resp. $G\partial_y$) et en faisant la somme des équations résultantes, on obtient :

$$g\Delta h^* = f(G\partial_x v - G\partial_y u) - G^2(\partial_x u + \partial_y v).$$

De même, la deuxième (resp. troisième) équation du système (8.48) multipliée par ∂_y (resp. ∂_x), permet d'obtenir :

$$(G\partial_x v - G\partial_y u) = -f(\partial_x u + \partial_y v),$$

de telle sorte que :

$$g\Delta h^* = -(f^2 + G^2)(\partial_x u + \partial_y v),$$

et qui, après insertion dans (8.49), donne :

$$h^* - H(\partial_x u + \partial_y v) = -(G^2 + f^2)^{-1}(L_f^{\text{PML}} - L_f)h^*. \quad (8.50)$$

Maintenant, l'inversion d'opérateur $(G^2 + f^2)^{-1}$ nécessite l'introduction de deux variables auxiliaires, ξ_1 et ξ_2 , telles que :

$$\begin{cases} G\xi_2 = (L_f^{\text{PML}} - L_f)h^* - f^2\xi_1; \\ G\xi_1 = \xi_2, \end{cases}$$

et par conséquent, nous obtenons le système d'ordre 1, suivant :

$$\begin{cases} Gh = h^*; \\ Gu + \partial_x h - fv = 0; \\ Gv + \partial_y h + fu = 0; \\ G\xi_2 = (L_f^{\text{PML}} - L_f)h^* - f^2\xi_1; \\ G\xi_1 = \xi_2; \\ h^* - H\partial_x u - H\partial_y v = -\xi_1, \end{cases} \quad (8.51)$$

avec des conditions de transmission naturelles sur ξ_1 et ξ_2 aux interfaces entre le milieu physique et le milieu PML. Il est clair que ce modèle est valable dans tout le domaine de calcul, puisque $(L_f^{\text{PML}} - L_f)h^*$ et par conséquent ξ_1 et ξ_2 s'annulent dans le milieu physique.

Remarque 8.9 *Même si, théoriquement, ξ_1 et ξ_2 s'annulent dans le milieu physique (sans PML), nous avons remarqué que l'inversion numérique de l'opérateur $(G^2 + f^2)$ nécessite le calcul de ξ_1 et ξ_2 dans tout le domaine afin de compenser des instabilités numériques dues à l'opérateur de transport G . Dans un travail en cours, nous traitons cet inconvénient à l'aide d'une autre approche basée sur une formulation divergence-rotationnel du système d'eau peu profonde.*

Concentrons-nous maintenant sur l'opérateur de perturbation dans la PML verticale, par exemple, on a :

$$L_f^{\text{PML}} - L_f = 2U(\partial_t + V\partial_y)(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) - (gH - U^2)\left((\partial_x^{\text{PML}})^2 - \partial_x^2\right).$$

Puisque l'opérateur $\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x$ est un opérateur pseudodifférentiel, sa discrétisation nécessite l'introduction de variables auxiliaires. La différence des carrés $(\partial_x^{\text{PML}})^2 - \partial_x^2$ est ensuite retrouvée de manière simple, à l'aide de l'écriture suivante :

$$(\partial_x^{\text{PML}})^2 - \partial_x^2 = (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)^2 + \partial_x(\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) + (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)\partial_x.$$

En effet, d'après (8.10) et (8.11), on a l'écriture formelle :

$$\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x = \sigma(x) \frac{\sqrt{gH}(\partial_t + V\partial_y) - (gH - U^2)\partial_x}{\sqrt{gH}(\partial_t + V\partial_y) + (gH - U^2)\sigma(x)}$$

de telle sorte que l'équation $\phi = (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) \psi$ peut être résolue simplement à l'aide du système suivant :

$$\begin{cases} (\sqrt{gH} (\partial_t + V \partial_y) + (gH - U^2) \sigma(x)) \phi = \sigma(x) (\sqrt{gH} (\partial_t + V \partial_y) - (gH - U^2) \partial_x) \psi, \\ \partial_t \psi(t=0) = 0, \end{cases}$$

et l'équation $\phi = (L_f^{\text{PML}} - L_f) \psi$ est résolue par :

$$\begin{cases} \phi &= (gH - U^2)(\partial_x \xi_3 + \xi_4) + 2U (\partial_t + V \partial_y) \xi_3; \\ \xi_3 &= (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) \psi; \\ \xi_4 &= (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)(\partial_x \psi + \xi_3), \end{cases} \quad (8.52)$$

La procédure pour obtenir le système qui correspond à la PML horizontale est similaire à celle que nous venons de présenter pour la couche verticale. Pour le coin, nous utilisons la formulation symétrique et pour cela nous avons besoin d'une cinquième variable auxiliaire

$$\xi_5 = (\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y) \xi_3, \quad (8.53)$$

afin de traiter le terme correcteur $UV (\partial_y^{\text{PML}} - \partial_y) (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)$.

Remarque 8.10 *Nous n'avons pas de justification pour garantir l'adaptation parfaite des PML aux coins, cependant et dans toutes les expériences numériques que nous avons mené, nous n'avons observé aucune réflexion à ces interfaces.*

En résumé, le système d'équations pour la PML horizontale est :

$$\text{pour } x > 0 : \begin{cases} h^* = -\xi_1 + H (\partial_x u + \partial_y v); \\ G\xi_1 = \xi_2; \\ G\xi_2 = -(gH - U^2)(\partial_x \xi_3 + \xi_4) + 2U (\partial_t + V \partial_y) \xi_3 - f^2 \xi_1; \\ \xi_3 = (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x) h^*; \\ \xi_4 = (\partial_x^{\text{PML}} - \partial_x)(\partial_x h^* + \xi_3); \\ Gh = h^*; \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0; \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0. \end{cases} \quad (8.54)$$

avec les conditions de Dirichlet $\xi_3 = \xi_4 = 0$ en $x = 0$,

$$\text{pour } x < 0 : \begin{cases} h^* = -\xi_1 + H (\partial_x u + \partial_y v); \\ G\xi_1 = \xi_2; \\ G\xi_2 = -f^2 \xi_1; \\ Gh = h^*; \\ Gu + g\partial_x h - fv = 0; \\ Gv + g\partial_y h + fu = 0, \end{cases} \quad (8.55)$$

avec des conditions de transmission naturelles sur ξ_1 et ξ_2 en $x = 0$.

Pour traiter le coin $\{x > 0 \text{ et } y > 0\}$, il faut ajouter au système (8.54) l'équation (8.53) qui détermine ξ_5 en fonction ξ_3 , et rajouter ensuite $UV\xi_5$ à droite dans la troisième équation du système (8.54), qui devient :

$$G\xi_2 = -(gH - U^2)(\partial_x \xi_3 + \xi_4) + 2U (\partial_t + V \partial_y) \xi_3 - f^2 \xi_1 + UV\xi_5$$

8.8 Résultats numériques

Les systèmes (8.54) et (8.55) sont discrétisés à l'aide d'une méthode classique FDTD (différences finies). Le schéma numérique est basé sur une grille décalée, régulière et uniforme, avec un pas d'espace noté $\Delta x = \Delta y$ et un pas de temps Δt . Les inconnues h , h^* , ξ_1 , ξ_2 et ξ_4 sont évaluées aux points $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta x)$ de la grille. u et ξ_3 (resp. v) sont calculés en $(x_{i+1/2}, y_j) = ((i + 1/2)\Delta x, j\Delta x)$ (resp. $(x_i, y_{j+1/2}) = (i\Delta x, (j + 1/2)\Delta x)$). Lorsque une inconnue est évaluée à l'instant $t_n = n\Delta t$, alors sa dérivée en temps est évaluée à l'instant $t_{n-\frac{1}{2}} = (n - \frac{1}{2})\Delta t$, de telle sorte qu'on puisse intégrer les équations en temps à l'aide d'un schéma de Yee (leap-frog). Les dérivées convectives sont discrétisées avec un schéma classique d'ordre 1 décentré à droite (upwind). Si on suppose que U et V sont positifs, alors on a :

$$(Gh)_{i,j}^n = \frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^n}{\Delta t} + U \frac{h_{i,j}^n - h_{i-1,j}^n}{\Delta x} + V \frac{h_{i,j}^n - h_{i,j-1}^n}{\Delta y}, \quad (8.56)$$

et

$$(\partial_t \xi_3 + V \partial_y \xi_3)_{i+1/2,j}^n = \frac{\xi_{3i+1/2,j}^{n+1} - \xi_{3i+1/2,j}^n}{\Delta t} + V \frac{\xi_{3i+1/2,j}^n - \xi_{3i+1/2,j-1}^n}{\Delta x}. \quad (8.57)$$

Les dérivées spatiales qui ne sont pas convectives sont approchées par le schéma centré :

$$(\partial_x u)_{i,j}^n = \frac{u_{i+1/2,j}^n - u_{i-1/2,j}^n}{\Delta x} \quad (8.58)$$

La condition de stabilité CFL que nous avons utilisée est : $\Delta t \leq 0.3 \frac{\Delta x}{\sqrt{gH}}$, et qui est, pour l'instant, une condition empirique.

Dans les expériences qui suivent, nous supposons que les équations sont adimensionnelles et que la constante de gravité g est normalisée à 1. Nous avons choisi un domaine de calcul $D = [0; 10H] \times [0; 10H]$, et une PML de largeur $\delta = 2.5H$, située du côté intérieur à D . Aux bords extérieurs à la PML, nous avons imposé une condition aux limites transparente pour les ondes de vorticité et d'entropie. Rappelons que ces ondes ont une divergence nulle $\partial_x u + \partial_y v = 0$, ou encore, leur composante advective vérifie l'équation de transport classique $Gh = 0$. En outre, la condition $Gh = 0$ sur les bords où l'écoulement est sortant, peut être aisément implémentée grâce à (8.56). Aux bords opposés où l'écoulement est rentrant, la condition de Dirichlet $h = 0$ est suffisante d'un point de vue théorique. Cependant, nous avons remarqué que la discrétisation des équations du modèle PML, tel qu'il est proposé, crée un mode de vorticité artificiel qui est transport  à la même vitesse que le mode physique, mais dans le sens opposé. Ce mode numérique a une très faible amplitude, comparé au mode physique, mais sa réflexion aux bords où le flux est rentrant peut produire des instabilités numériques. C'est pourquoi, nous avons choisi d'imposer sur ces bords une "condition de transport inverse", i.e.

$$\begin{cases} \partial_t h - U \partial_x h + V \partial_y h = 0, & \text{si } 0 < y < 10H \text{ et } x = 0, \\ \partial_t h + U \partial_x h - V \partial_y h = 0, & \text{si } 0 < x < 10H \text{ et } y = 0, \\ \partial_t h - U \partial_x h - V \partial_y h = 0, & \text{si } x = 0 \text{ et } y = 0, \end{cases}$$

qui, après discrétisation, permet d'éliminer le vortex artificiel.

Dans toutes les expériences, nous avons utilisé un profile d'absorption quadratique $\sigma = \sigma_{\max} \left(\frac{d}{\delta}\right)^2$, où d est la distance mesurée à partir des interfaces entre le milieu physique et la PML. La valeur maximale a été choisie de manière empirique $\sigma_{\max} = 20$. Pour valider notre modèle, nous avons comparé les résultats avec ceux obtenus dans un domaine de référence beaucoup plus large $D_{ref} = [0; 50H] \times [0; 50H]$. Nous avons calculé l'erreur relative en fonction du temps dans le cas d'un écoulement oblique et uniforme, au voisinage du coin supérieur (à deux points intérieurs près des interfaces).

Comme dans [20], nous avons testé ce modèle avec des impulsions initiales à $t = 0$ (Gaussiennes radiales), telles que:

$$h(x, y, 0) = Ae^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{R^2}} \quad (8.59)$$

$$u(x, y, 0) = 2\sqrt{H}\frac{(y-y_0)}{R^2}Ae^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{R^2}} \quad (8.60)$$

$$v(x, y, 0) = -2\sqrt{H}\frac{(x-x_0)}{R^2}Ae^{-\frac{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}{R^2}} \quad (8.61)$$

où A désigne l'amplitude, (x_0, y_0) est le centre de la Gaussienne et R est son rayon. Nous avons choisi $A = 0.1$, $(x_0, y_0) = (5H, 5H)$, $R = H/6$ et quatre valeurs $H = 1, 10, 100$, et 1000 pour la hauteur caractéristique (dans les figures 8.2–8.14, nous montrons seulement les cas extrêmes : $H = 1$ et $H = 1000$). Nous considérons un écoulement oblique tel que $U = V \geq 0$ (orientation à 45 degrés) et pour chaque valeur de H , nous avons testé deux valeurs du nombre de Froude $F = \sqrt{U^2 + V^2}/\sqrt{H} = 0.2$ et 0.6 , et nous avons choisi un terme de Coriolis $f = 1/\sqrt{H}$. Avec ce choix du paramètre f , le rayon de déformation de Rossby¹ $r_E \stackrel{\text{déf}}{=} \sqrt{H}/f$ est simplement égal à H . Le pas d'espace est $\Delta x = 0.05H$ et le pas de temps est déterminé par la condition CFL précédente. Les résultats sont reportés dans les figures 8.2–8.14. On constate que le maximum d'erreurs est obtenu dans le cas des ondes longues qui correspondent à un faible rayon de Rossby $r_E = 1$ (cf. figures 8.8, 8.9, 8.13 et 8.14). Pour les autres valeurs de r_E , la dynamique est dominée par les ondes courtes et les résultats sont nettement mieux. Cependant, et comme on peut l'observer, l'erreur relative est toujours inférieure à 0.02%, et ceci indépendamment de la valeur de r_E .

Nous avons aussi testé ce modèle dans le cas d'un écoulement parallèle, et on a obtenu des résultats satisfaisants comme dans [17] et [20].

Puisque le modèle que nous considérons n'est pas singulier par rapport au terme de rotation f , nous avons testé une configuration similaire à celle dans [21], en posant $f = 0$, $H = 1$ et $F = 0.2$ (cf. figures 8.15 et 8.16). Comme nous l'avons déjà mentionné, les deux modèles PML sont différents à cause de l'inversion de l'opérateur $G^2 + f^2$ qui intervient dans la formulation d'ordre 1 du système. Malgré cela, nous avons obtenu une erreur relative inférieure à 0.5%, ce qui indique que la formulation d'ordre 1 peut être mal posée dans le cas $f = 0$, à l'opposé de la formulation second ordre² qui donne actuellement des résultats satisfaisants, même dans le cas non rotatif.

¹C'est la distance à partir de laquelle on commence à sentir les effets de la rotation et où la dispersion devient importante (cf. [24]).

²Les expériences ne sont pas présentées ici. Elles rentrent dans le cadre d'un travail en cours sur les PML dans le cas non linéaire.

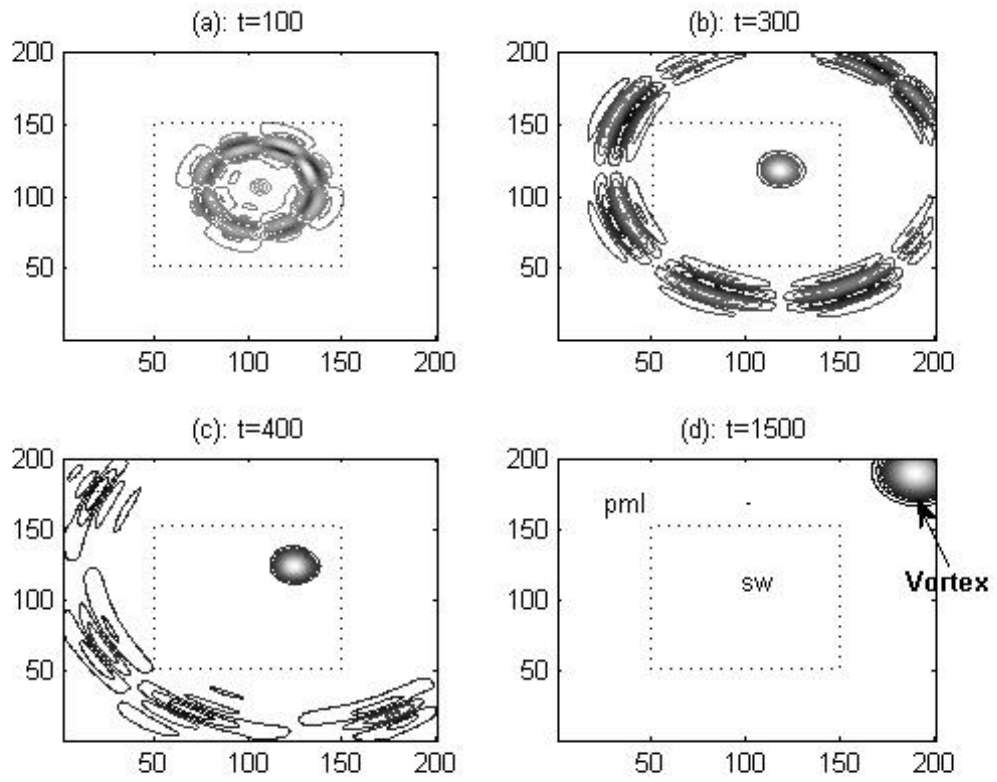


Figure 8.2: Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.

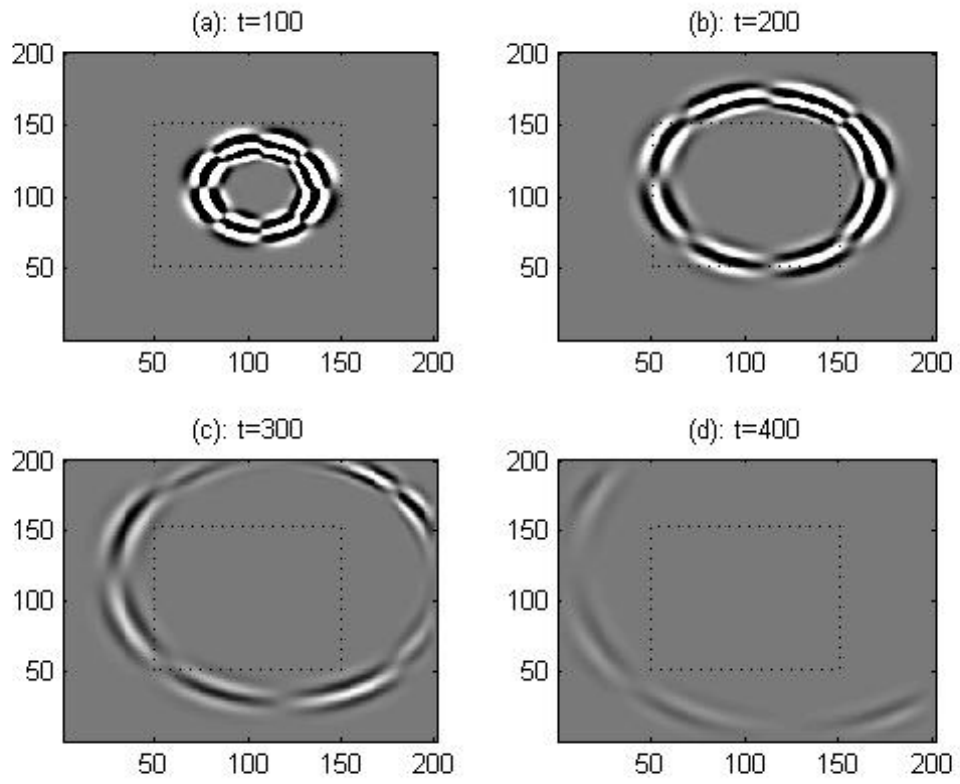


Figure 8.3: Contours équipotentiels de la composante advective Gh , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$.

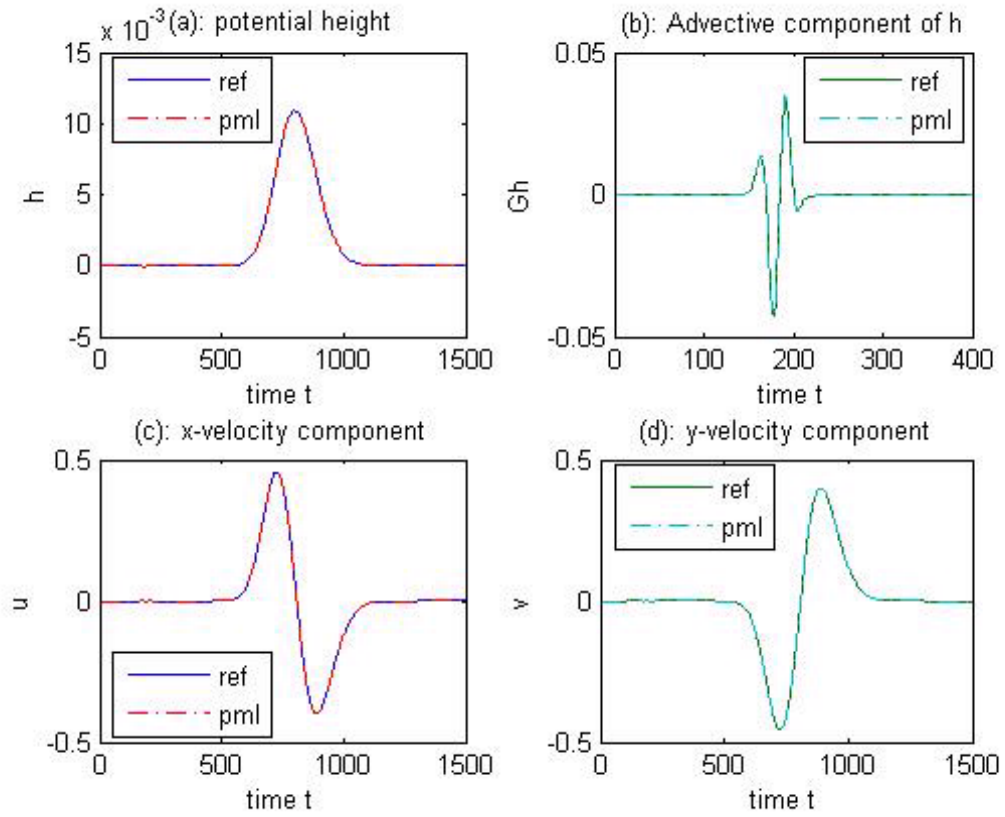


Figure 8.4: Instantanées de la solution de référence et la solution PML au voisinage du coin supérieur droit, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.

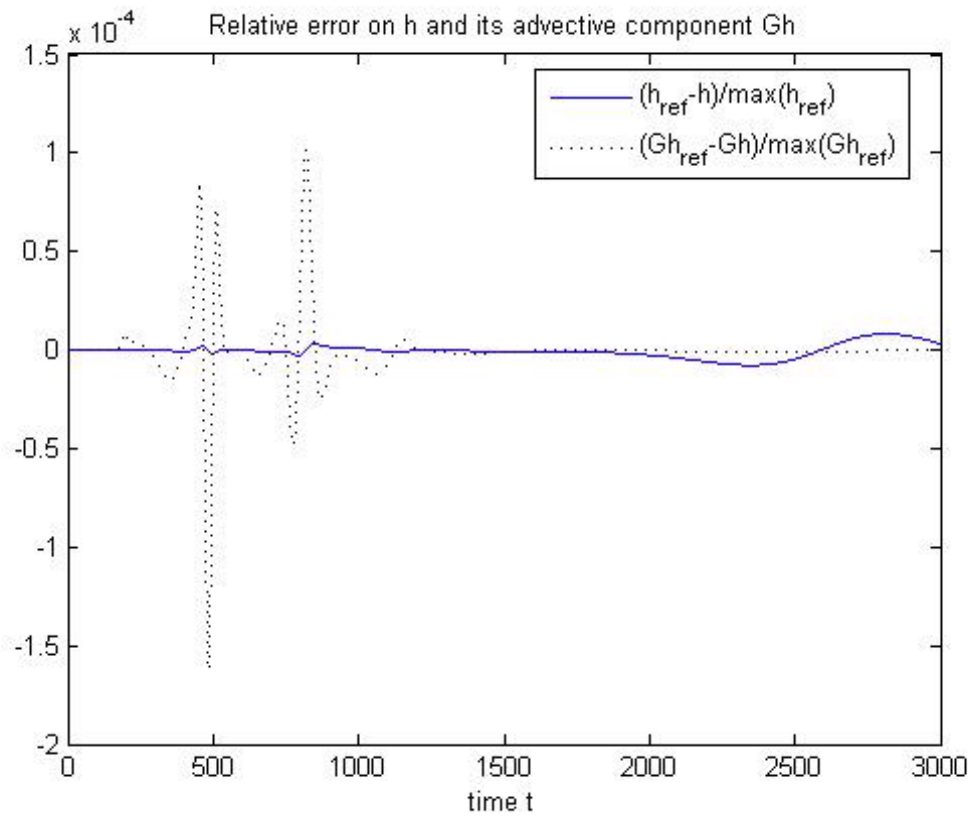


Figure 8.5: Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$

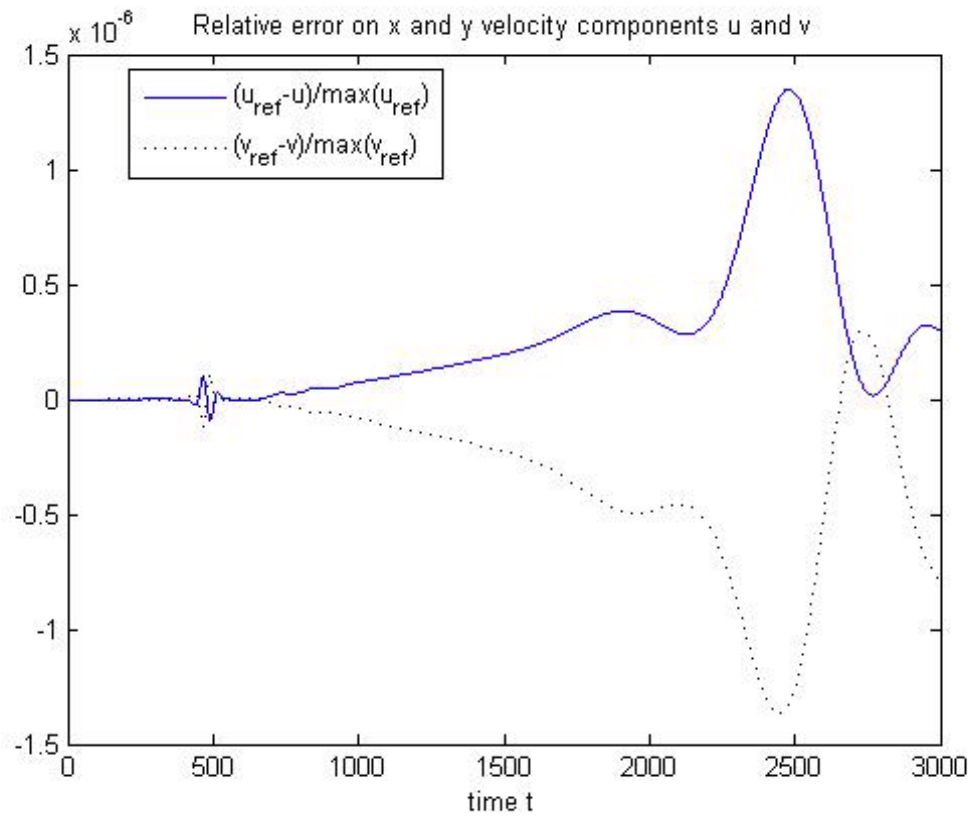


Figure 8.6: Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$

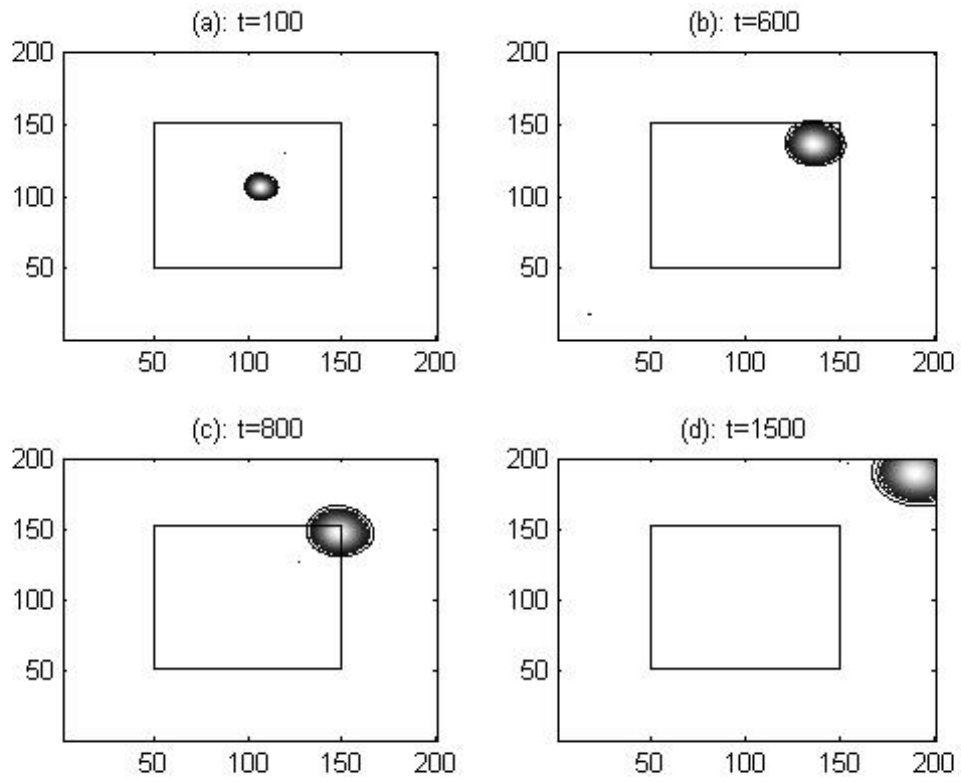


Figure 8.7: Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.

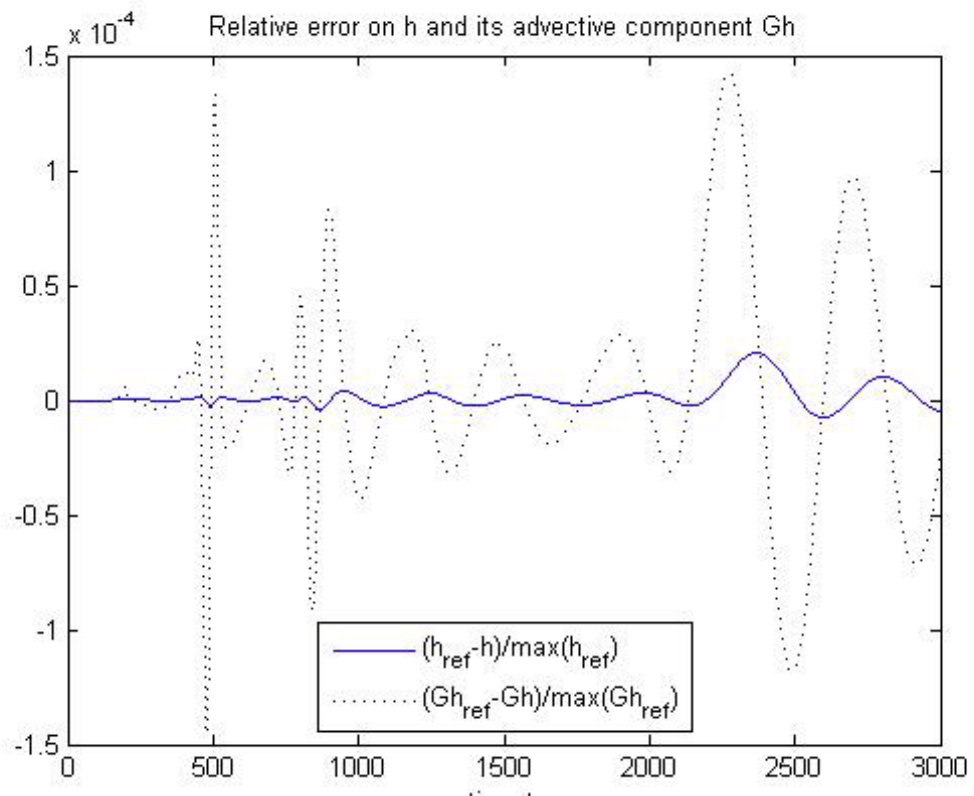


Figure 8.8: Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.

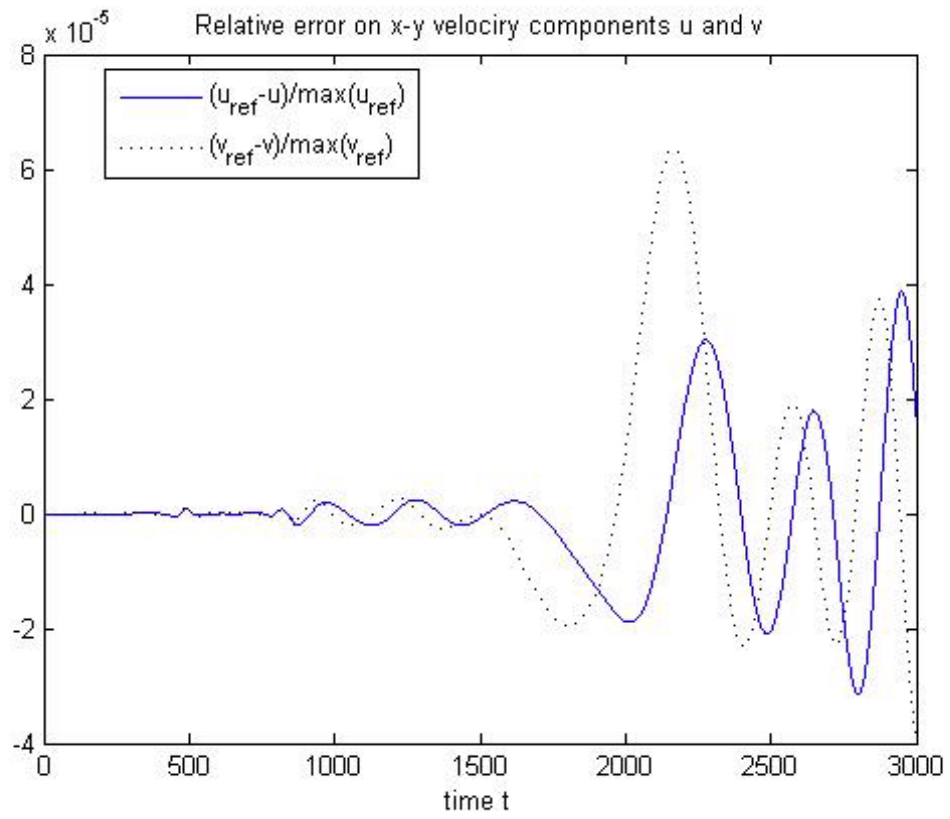


Figure 8.9: Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$: la PML ne voit pas le vortex.

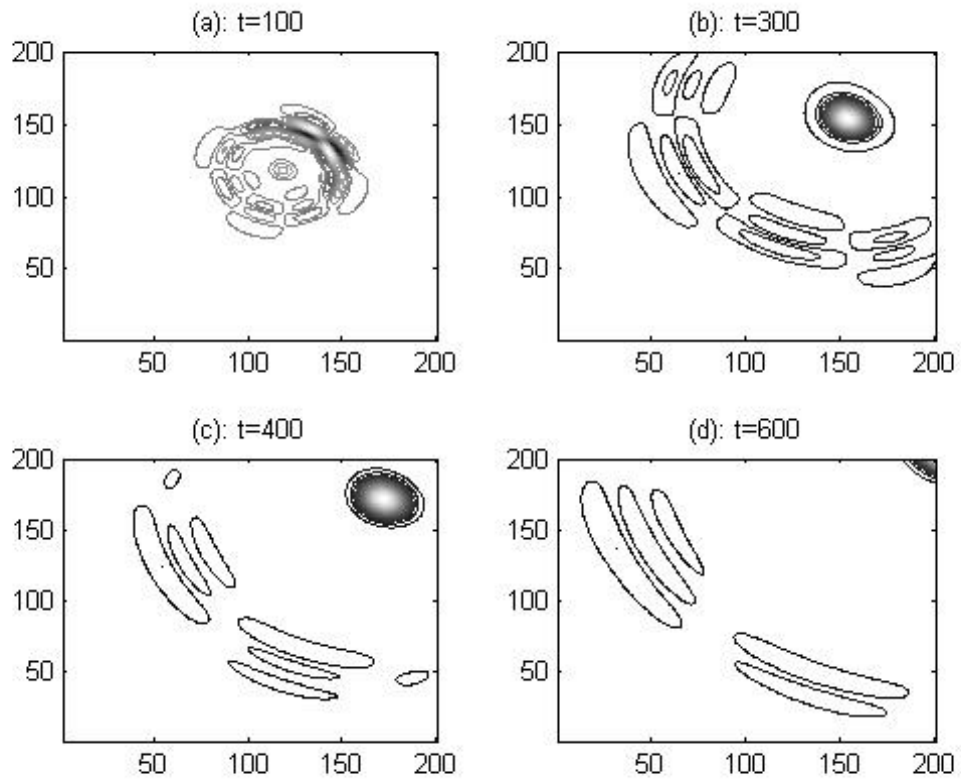


Figure 8.10: Contours équipotentiels de la hauteur h , avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$

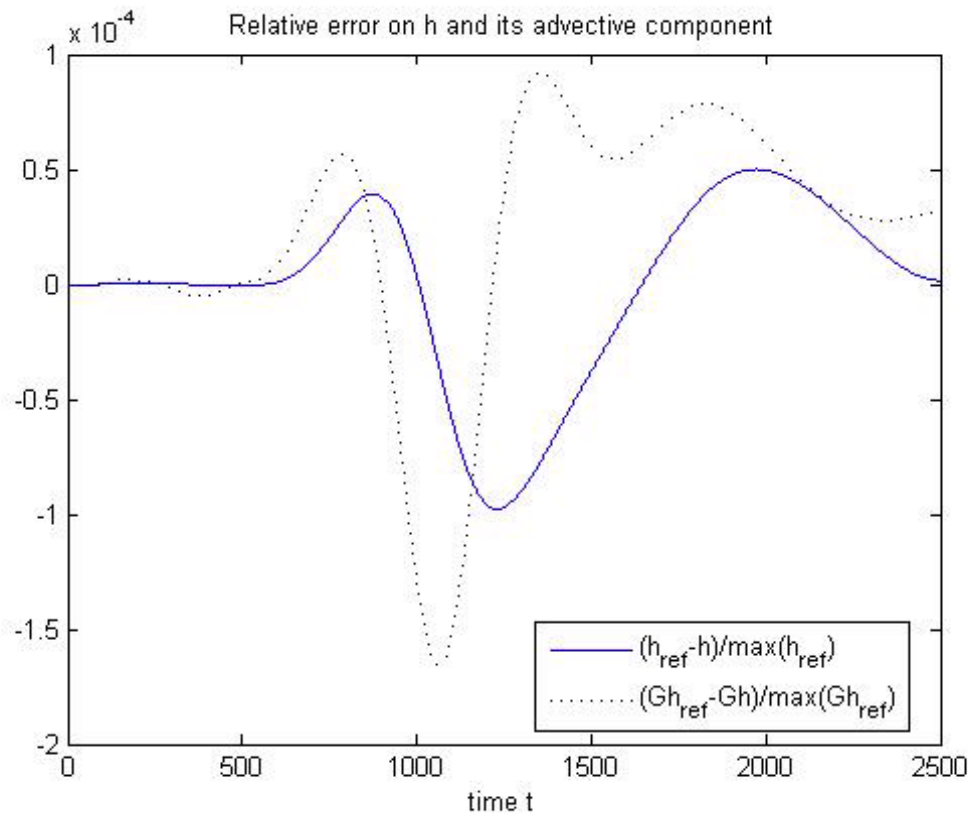


Figure 8.11: Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$

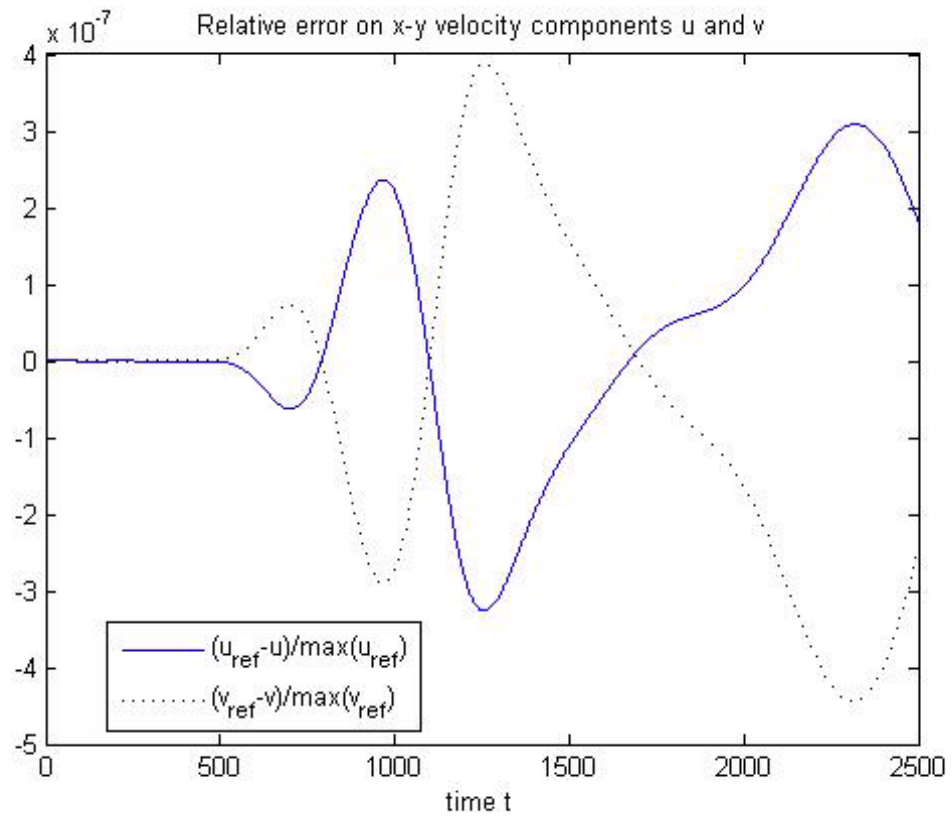


Figure 8.12: Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1000$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$

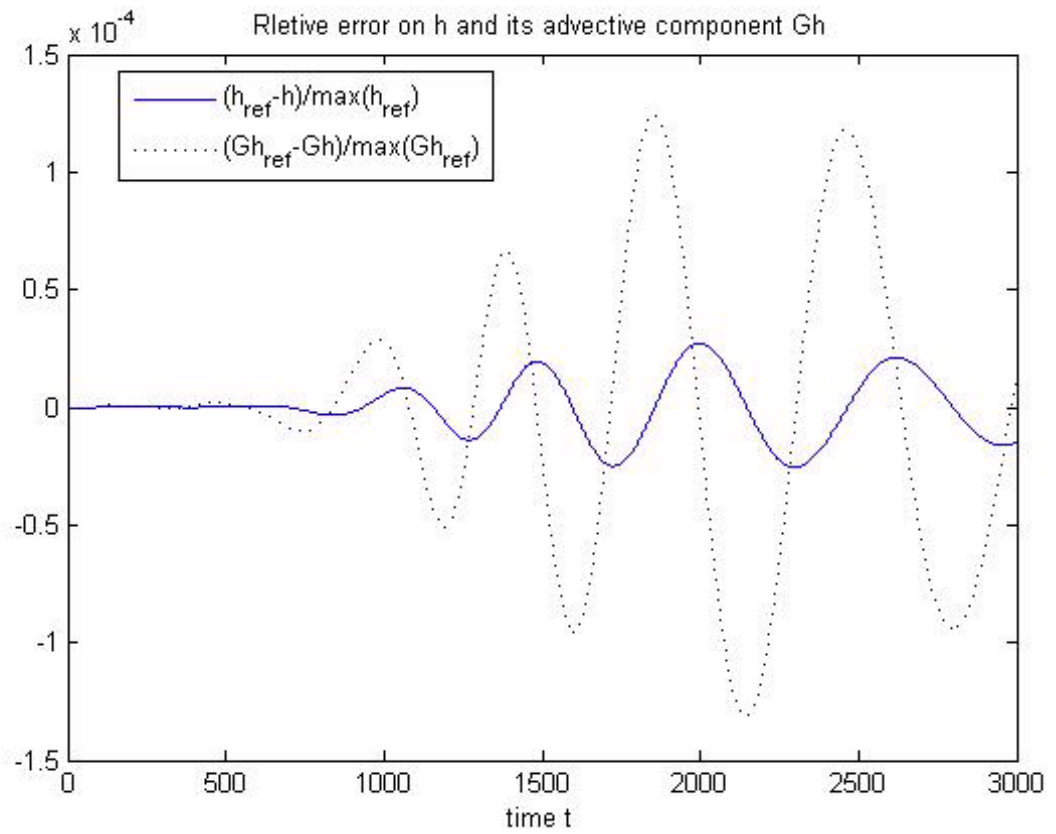


Figure 8.13: Erreur relative sur h et Gh en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$

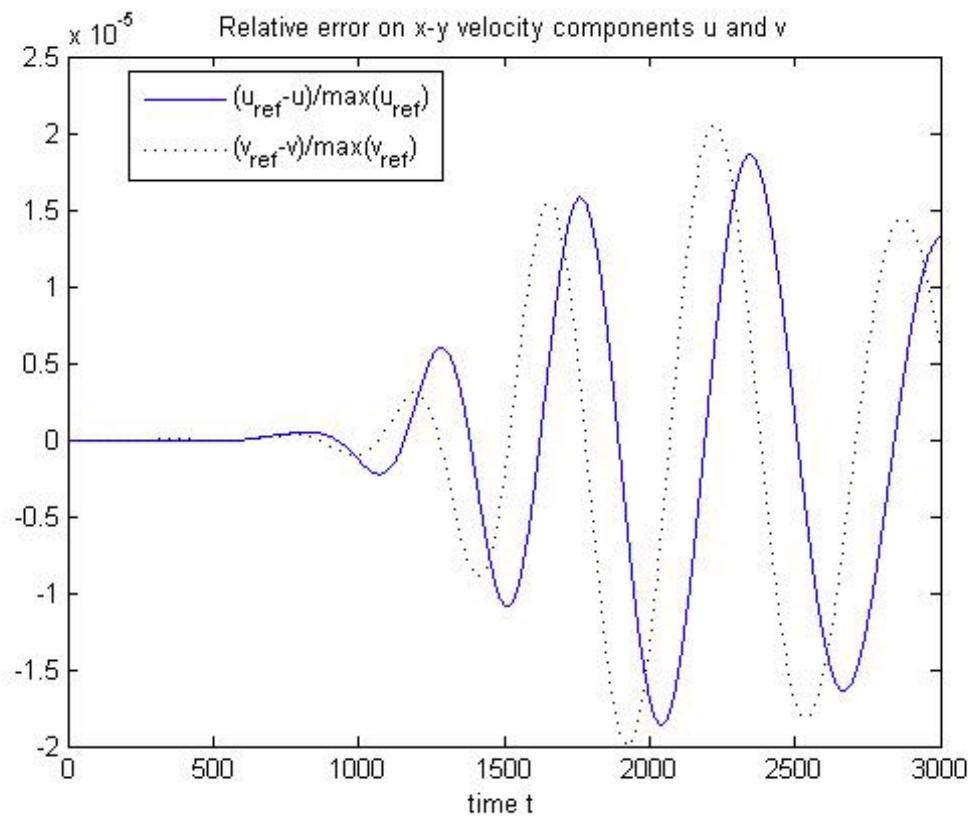


Figure 8.14: Erreur relative sur u et v en fonction du temps, avec un rayon de Rossby $r_E = 1$ et un nombre de Froude $F_r = 0.6$

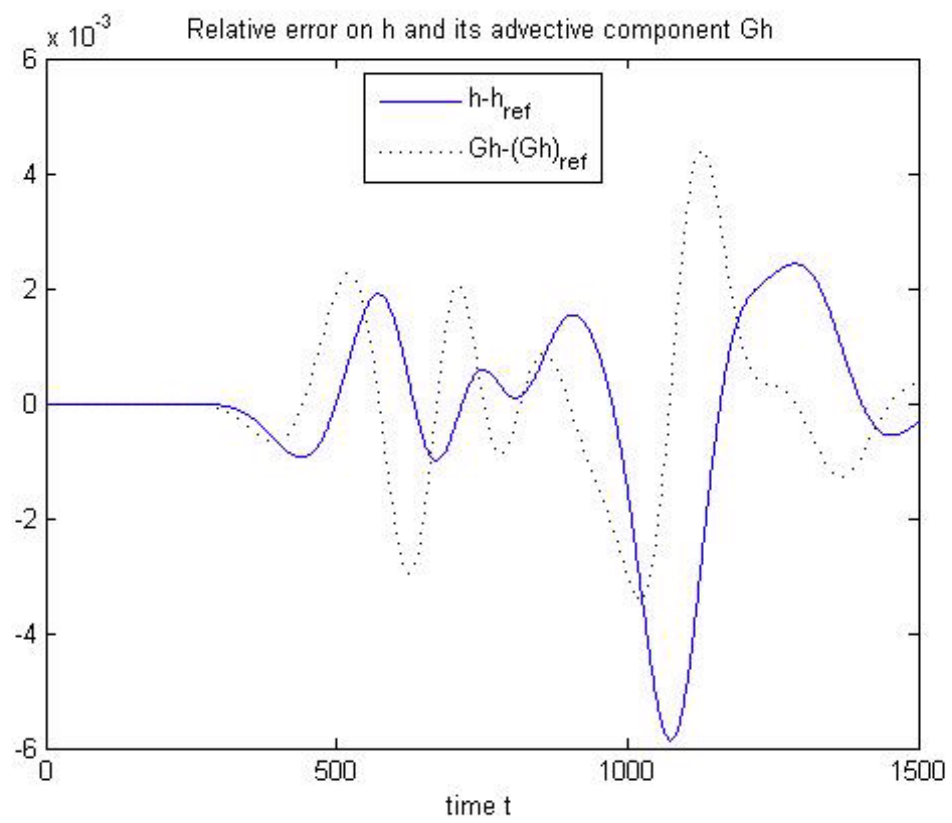


Figure 8.15: Erreur relative sur h et Gh , dans le cas non rotatif $f = 0$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$.

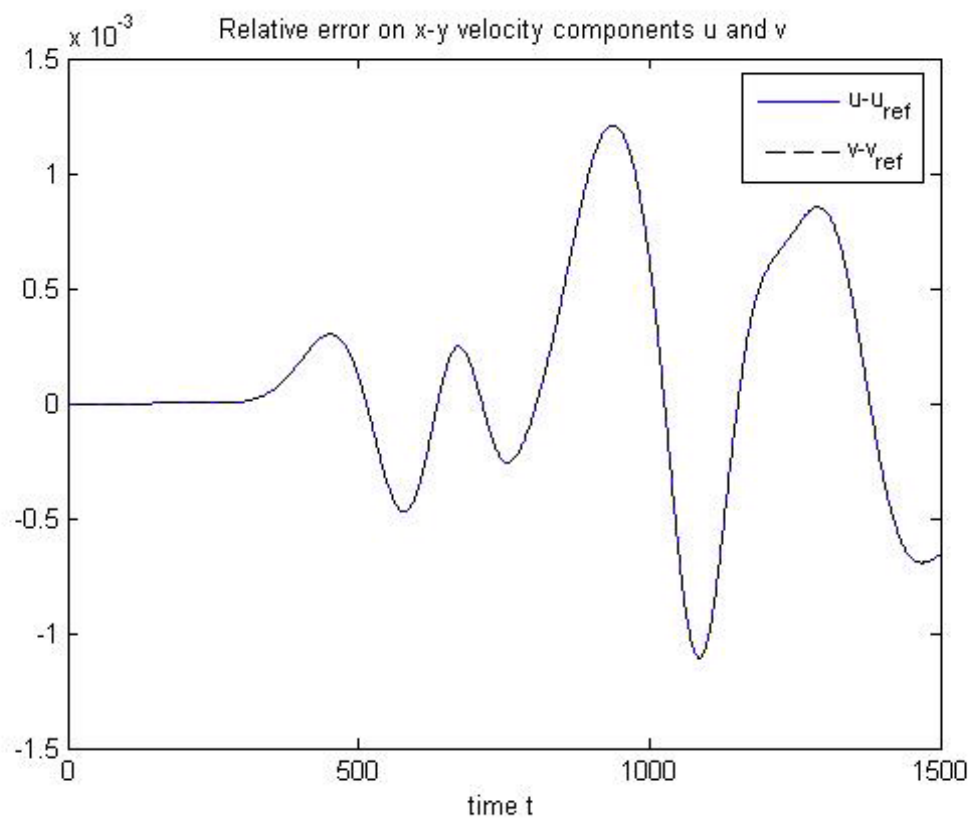


Figure 8.16: Erreur relative sur u et v , dans le cas non rotatif $f = 0$ et un nombre de Froude $F_r = 0.2$.

Pour étudier la stabilité en temps long de la PML proposée, nous avons reproduit chacune des expériences précédentes durant des intervalles de temps 1000 fois plus larges (ce qui représente approximativement 10^6 pas de temps Δt). Aucune instabilité n'a été observée pour les différents cas, ce qui prouve " numériquement " la stabilité en temps long de la méthode.

8.9 Conclusions et perspectives

Nous avons construit et analysé un nouveau modèle PML au système linéarisé d'ondes en eau peu profonde (shallow water). Le processus de construction est basé essentiellement sur la formulation second ordre qui permet le découplage de la composante advective de la hauteur des autres inconnues. De cette manière, uniquement les ondes d'inertie-gravité qui peuvent produire des réflexions aux interfaces entre le milieu physique et le milieu PML sont absorbées. Ceci est consistant avec le fait que la dynamique du système d'eau peu profonde converge vers un état d'équilibre naturel (équilibre géostrophique, cf. [24]), où siègent les ondes de vorticité et d'entropie (ondes géostrophiques) qui, par un simple bon sens, ne doivent pas être modifiées. Nous avons reformulé les équations PML par un système d'ordre 1 et des résultats numériques sont présentés pour attester la performance du modèle. La stabilité en temps long est actuellement confirmée expérimentalement, en reproduisant les simulations ci-dessus et aussi d'autres configurations que nous n'avons pas montré ici, durant des intervalles de temps beaucoup plus grands.

L'étude théorique de la stabilité, où on cherche à connaître la vitesse de croissance ou décroissance de la solution en temps long, nous a mené à nous interroger sur la possibilité de trouver des solutions analytiques à ces modèles PML dans les cas de couches homogènes. Ces préoccupations théoriques sont abordées progressivement, notamment par la méthode de Cagniard-de Hoop (cf. [11]), qui a connu un succès incontestable lorsqu'il s'agit de milieux stratifiées. Comme nous l'avons mentionné, la formulation d'ordre 1 souffre de l'inconvénient de l'inversion d'opérateur $G^2 + f^2$ dont le noyau contient les ondes longues qui, eux aussi, participent à l'état d'inertie du système. D'un point de vue numérique, la disc tisation de cette inversion fait perdre à la PML sa capacité d'absorption au voisinage de la limite ondes longues ($f^2 \ll gH$). Nous travaillons actuellement sur d'autres formulations qui, ne font pas appel à cette inversion, et qui nous permettrons de traiter des situations plus réalistes telles que : la dimension 3, les systèmes non linéaires, f non constant, etc.

Bibliographie

- [1] *D. Appelö, T. Hagstrom, and G. Kreiss. “Perfectly Matched Layers for Hyperbolic Systems: General Formulation, Well-posedness, and Stability”. SIAP, Vol. 67, Issue 1, 1–23, 2006.*
- [2] *S. Abarbanel, D. Gottlieb and J. S. Hesthaven. “Well-Posed perfectly matched layers for advective acoustics”. J. Comput. Phys., vol. 154, No 2, 266–283, 1999.*
- [3] *S. Abarbanel, D. Stanescu and M.Y. Hussaini, “Unsplit variables perfectly matched layers for the shallow water equations with Coriolis forces”, Computational Geosciences 7: 275–274, 2003.*
- [4] *A. Bayliss & E. Turkel , “Radiation boundary conditions for wave-like conditions”. Comm. Pure Appl. Math., 23, 707–725, (1980).*
- [5] *E. Becache, S. Fauqueux, P. Joly, “Stability of perfectly matched layers, group velocities and anisotropic waves”, J. Comput. Phys., 188, pp. 399–433, 2003*
- [6] *E. Bécache, P. G. Petropoulos and S. Gedney. “On the long-time behavior of unsplit Perfectly Matched Layers”. IEEE AP-Transactions, vol 52, No 5, May 2004.*
- [7] *E. Becache, A.-S. Bonnet-Ben Dhia, G. Legendre, “Perfectly matched layers for the convected Helmholtz equations”, SIAM J. Numer. Anal. 42 (1), pp. 409–433, 2003*
- [8] *J. P. Bérenger. “A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves”. J. of Comp. Phys., Vol. 114, 185–200, 1994.*
- [9] *A. Bermúdez, L. Hervella-Nieto, A. Prieto, and R. Rodriguez. “An optimal perfectly matched layer with unbounded absorbing function for time-harmonic acoustic scattering problems”. J. Comput. Phys., Vol. 223, No 2, 469–488, 2007.*
- [10] *Julien Diaz and Patrick Joly. “Stabilized perfectly matched layer for advective acoustics”. In Mathematical and numerical aspects of wave propagation| WAVES 2003, pages 115–119. Springer, Berlin, 2003.*
- [11] *J. Diaz, P. Joly, “A time domain analysis of PML models in acoustics”, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 195, 29–32, 3820–3853, 2006*
- [12] *B. Engquist, A. Majda, “Radiation boundary conditions for acoustic and elastic wave calculations”, Comm. Pure Appl. Math., 32, 3, 314–358, 1979*

- [13] D. Givoli, “Numerical Methods For Problems in Infinite Domains, *Studies in Applied Mechanics*”, 33, 1992
- [14] D. Givoli, B. Neta, “High-order nonreflecting boundary conditions for the dispersive Shallow Water equations”, *J. Comput. and Applied Math.*, Issue 1, 158, pp. 49-60, 2003
- [15] H. Barucq, J. Diaz, M. Tlemcani, “New absorbing layers conditions for short water waves”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 229, Issue 1, 58–72, 2010
- [16] T. Hagstrom, “A new construction of Perfectly Matched Layers for Hyperbolic Systems with Applications to the Linearized Euler Equations”, *Mathematical and Numerical Aspects of Wave Propagation*, G. Cohen, E. Heikkola, P. Joly, P. Neittaanmaki eds, pp. 125-129, 2003
- [17] F.Q. Hu, “A perfectly matched layer absorbing boundary condition for linearized Euler equation with a non-uniform flow”, *J. of Comp. Phys.*, vol. 208, Issue 2, 469-492, 2005
- [18] M. Ibanescu, S. G. Johnson, D. Roundy, C. Luo, Y. Fink, and J. D. Joannopoulos, “Anomalous dispersion relations by symmetry breaking in axially uniform waveguides,” *Phys. Rev. Lett.*, vol. 92, p. 063903, 2004.
- [19] P.-R. Loh, A. F. Oskooi, M. Ibanescu, M. Skorobogatiy, and S. G. Johnson, “Fundamental relation between phase and group velocity, and application to the failure of perfectly matched layers in backward-wave structures,” *Phys. Rev. E*, vol. 79, p. 065601(R), 2009.
- [20] I.M. Navon, B. Neta, M.Y. Hussaini, “A perfectly matched layer approach for the linearized Shallow Water equations models”, *Monthly Weather review*, 132, 1369-1378, 2004
- [21] F. Nataf, “A new approach to perfectly matched layers for the linearized Euler equations”, *J. Comput. Phys.*, Vol. 214, Issue 2, 757-772, 2006
- [22] A. F. Oskooi, L. Zhang, Y. Avniel, and S. G. Johnson, “The failure of perfectly matched layers, and towards their redemption by adiabatic absorbers,” *Optics Express*, vol. 16, pp. 11376–11392, July 2008.
- [23] A. Taflov and S. C. Hagness, *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method*. Norwood, MA: Artech, 2000.
- [24] J. Pedlosky, “*Geophysical Fluid Dynamics*”, Second edition, Springer Verlag, 1986
- [25] J.M. Rodríguez, R. Taboada-Vázquez, “From Euler and Navier–Stokes equations to shallow waters by asymptotic analysis”. *Advances in Engineering Software* 2007; 38:399–409.
- [26] V. S. Tsynkov, “Numerical solution of problems on unbounded domains”: A review, *Appl. Numer. Math.*, 27, 4, 465-532, 1998
- [27] J. T. Wloka, B. Rowley, and B. Lawruk. “Boundary value problems for elliptic systems”. CUP, Cambridge, 1995.