

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LE RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI**  
**BOUMEDIENE**  
**(USTHB)-Alger**  
**FACULTE DE HYSIQUE**



**MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER**

**EN PHYSIQUE**

**Spécialité : MATERIAUX ET COMPOSANTS**

Par : Sadek KARA

**SUJET**

**MESURES DE LA PERMETTIVITE DIELECTRIQUE DE LIQUIDES**  
**EN HYPERFREQUENCE**  
**PAR CAVITE CYLINDRIQUE RESONNANT AU MODE  $TM_{020}$**

**Soutenu publiquement le 16 / 10 / 2007, devant le jury composé de :**

<b>Mr F. BOUBENIDER</b>	<b>Professeur à l'U.S.T.H.B</b>	<b>Président</b>
<b>Mr N. HAINE</b>	<b>Maître de conférences à l'U.S.T.H.B</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>Mr N. BELDJOUDI</b>	<b>Maître de conférences à l'U.S.T.H.B</b>	<b>Examineur</b>
<b>Mr M. SAIDI</b>	<b>Maître de conférences à l'U.S.T.H.B</b>	<b>Examineur</b>

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au laboratoire de diélectrique sous la direction scientifique de Monsieur N. HAINE Maître de conférence à l'USTHB.

Qu'il me soit permis de lui exprimer ma reconnaissance pour m'avoir confié le sujet et pour m'avoir dirigé tout au long de la préparation de ce mémoire. Ses compétences scientifiques et sa disponibilité m'ont beaucoup aidé à mener à terme les travaux, qu'il trouve ici l'expression de ma gratitude.

Je suis honoré que Monsieur F. BOUBENIDER, Professeur à l'USTHB ait accepté de présider le jury, je lui présente toutes mes reconnaissances ainsi que mon respect.

Monsieurs N. BELDJOUDI et M. SAIDI maîtres de conférences à l'USTHB me font honneur d'avoir accepté d'examiner mon travail. Je les remercie vivement.

Je remercie également tous les membres du laboratoire de diélectrique.

Que tous ceux qui m'ont aidé et soutenu trouvent ici un témoignage de ma sympathie et de ma reconnaissance.

## **DEDICACES**

**Je dédie se travail à mon père et ma mère**

**Mon frère et mes sœurs**

**Ainsi que toute la famille**

## **SOMMAIRE**

## SOMMAIRE

1- Introduction.....	1
----------------------	---

### **Chapitre I :GENERALITES SUR LES LIQUIDES**

I- 1-La matière en présence d'un champ électrique .....	3
I-2-Théorie des bandes .....	3
1-3-Milieux diélectriques .....	4
1-3-1- Polarisation.....	4
1-3-2-Permittivite diélectrique $\epsilon^*$ , et susceptibilité $\chi$ .....	4
I-3-3--Champ de Maxwell, champ local et champ directeur .....	5
1-3-4: Polarisabilités.....	5
I-3-4-1- Dipôle électrique .....	5
I-3-4-2- Polarisabilités d'orientation.....	6
I-3-4-3- Polarisabilité électronique .....	6
I-3-4-4- Polarisabilité ionique .....	6
I-4-1-Modèles de calcul du moment dipolaire moyen .....	8
1-4-1-1-Modèle de Debye .....	9
I-4-1-2-Modèle de Lorentz .....	9
1-4-1-3-Modèle d'Onsager .....	10
I-4-2-La relaxation diélectrique .....	10
1-5- Energie emmagasinée dans un diélectrique.....	13
1-6- Liquide.....	13
1-6-1- Interactions intermoléculaires .....	14
1-6-1-2- Force de coulomb .....	14
I-6-1-3-Force de Van Der Waals.....	15
I-6-1-3-a- Interaction dipôle /dipôle .....	15
I-6-1-3-a-1- Dipôle permanent / Dipôle permanent (force de Keesom) .....	15
I-6-1-3-a-2- Dipôle permanant / Dipôle induit (force de Debye).....	16
1-6-1-3-a-3- Dipôle induit / Dipôle induit (force de London).....	17

### **Chapitre II: THEORIE SUR LA CAVITE RESONANTE**

II-1-Cavité résonnante .....	18
II-1-1 - Le modèle théorique .....	18
II-1-1-1- Cas d'un mode spécifique $TM_{0n0}$ .....	21
II-1-1-2- lignes de champs électromagnétiques pour $n= 2$ .....	22
II-1-1-3- Fréquences propre $f_{mn}$ des différents modes.....	22
II-1-1 -3- Diagramme des modes .....	23
II-1-2-Coefficient de qualité d'une cavité (Q) .....	25
II-2 -Théorie des perturbations .....	27
II-2-1 - Introduction.....	27
II-2-2- Formule de perturbation .....	27

II-3-Expressions de la permittivité diélectrique des matériaux dans le mode TM020.....	35
II-3-1- Cas d'un échantillon cylindrique .....	36
II-3-2-Cas d'un support : tube en verre vide .....	37
II-3-3-Cas d'un échantillon tube rempli de liquide .....	38
II-3-4-Cavité réelle .....	39
II-3-4-1 -Effet de la conductivité finie des parois .....	39
II-3-4-2-Effet des trous d'insertion .....	44
II-3-4-3-Effet de l'air.....	47
II-3-4-3-1 -Effet de $\epsilon'_a$ .....	47
H-3-4-3-2-Effet de $\epsilon''_a$ .....	48
II-4-Equation de dispersion .....	50
II-4-1- Expressions des champs électromagnétiques .....	50
II-4- 2- Résolution des l'équations de dispersion.....	51
II-4-2-1-cas du tube vide .....	51
II-4- 2-2-cas du tube rempli de liquide .....	52

### **Chapitre III : DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET METHODES DE MESURE**

III-1 - Dispositif expérimental .....	54
III-2- Caractéristiques des capillaires .....	56
III-3- principe de fonctionnement .....	56
III-4- Technique de mesure .....	57
III-5- Test du programme de traitement des données expérimentales.....	59

### **Chapitre IV :RESULTATS ET DISCUSSION**

IV- Résultats expérimentaux et discussions .....	63
IV-1-Pyrex .....	64
VI-2-Décane .....	66
VI-3-Acétone .....	71

<b>V-CONCLUSION</b> .....	74
---------------------------	----

<b>BIBLIOGRAPHIE</b> .....	75
----------------------------	----

<b>ANNEXE</b> .....	76
---------------------	----

## **INTRODUCTION**

### **Introduction :**

Les ondes hertziennes sont des vibrations électromagnétiques de fréquences élevées. Les hyperfréquences « micro-ondes » correspondent à cette partie du spectre électromagnétique comprise entre 300 MHz et 300GHz.

Les hyperfréquences ont trouvées plusieurs domaines d'application, la télécommunication notamment, dans le secteur industriel comme la fixation de produit de teinture, la mesure des dimensions, on trouve aussi les hyperfréquences dans nos maisons, les fours à micro-ondes.

Ces ondes ont en outre, une application dans le domaine de recherche scientifique, comme la mesure de la constante diélectrique «  $\epsilon$  » et de la conductivité électrique «  $\sigma$  » des matériaux.

La caractérisation de la matière diélectrique est un domaine de recherche très intéressant. La permittivité, la perméabilité et la conductivité sont des paramètres décisifs dans le choix d'une matière diélectrique dans un domaine précis. La permittivité complexe d'un matériau peut nous informer sur le comportement de ce dernier en présence d'un champ électrique, la mesure de cette permittivité peut se faire par plusieurs méthodes dont on cite par exemple : transmission / réflexion, open-ended coaxial, plaques parallèles.

Dans ce présent travail, la cellule de mesure de la permittivité diélectrique est une cavité cylindrique résonnant au mode  $TM_{020}$ . Les variations de la puissance de l'onde hyperfréquence réfléchi par la cavité, en fonction de la fréquence, sont enregistrées. Ces enregistrements permettent de calculer la fréquence de résonance et le coefficient de qualité de la cavité chargée ou non d'échantillon. Dans les travaux ultérieurs [1-2] les fréquences de résonance et les fréquences à mi-hauteur de puissance étaient déduites graphiquement. Cette méthode graphique présente deux inconvénients majeurs: la mesure est manuelle et la détermination de la référence de puissance à partir de laquelle la position à mi-hauteur de puissance est déterminée, est imprécise.

Afin d'accroître la précision de ces mesures, nous proposons de numériser ces courbes de résonance et de les traiter par un programme informatique conçu en langage MATLAB. Les mesures obtenues serviront au calcul de la permittivité diélectrique, ce calcul se fait en utilisant deux méthodes différentes.

Le calcul se fait par deux méthodes différentes : la théorie des perturbations et la résolution des équations de dispersion. Les équations de dispersion obtenues à partir des équations de Maxwell et les conditions aux limites, sont des équations transcendantes, leurs

## **INTRODUCTION GENERALE:**

---

résolutions ont nécessité l'élaboration d'un programme informatique conçu aussi en langage MATLAB.

Afin de vérifier nos résultats, les valeurs de la permittivité diélectrique sont comparées à celles trouvées dans la littérature.

Le premier chapitre est consacré aux généralités sur les liquides diélectriques, le second traite les théories appliquées sur les cavités résonnantes et les méthodes de calculs de la constante diélectrique.

Dans le troisième chapitre, on présente le dispositif expérimental et les techniques de mesures.

Enfin dans le quatrième chapitre, les principaux résultats expérimentaux obtenus sont regroupés et comparés à ceux de la littérature.

## **CHAPITRE I**

### **GENERALITES SUR LES LIQUIDES DIELECTRIQUES**

### I-1-La matière en présence d'un champ électrique :

Lorsqu'on applique un champ électrique sur une matière, elle réagit. D'un point de vue électrique, la matière présente 3 types de propriétés qui sont à distinguer selon leur résistivité  $\rho$  :

- diélectrique (isolant) ( $\rho > 10^{10} \Omega m$ )
- semi-conducteur ( $10^{-6} < \rho < 10^{10} \Omega m$ )
- conducteur ( $\rho < 10^{-6} \Omega m$ )

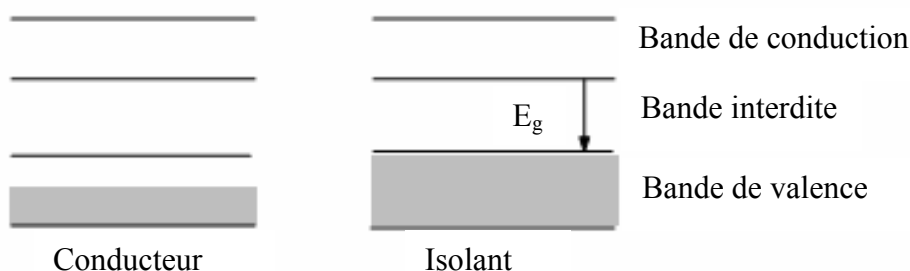
Cette distinction, dans les solides cristallins peut s'expliquer par la théorie des bandes.

### I-2-Théorie des bandes :

La théorie des bandes attribue des bandes d'énergie à la matière. Dans un solide à 0 K, toutes les bandes d'énergie les plus basses sont remplies, sauf la dernière qui peut être partiellement remplie ou complètement remplie.

Lorsque cette bande est partiellement remplie, on a affaire à un conducteur car si on applique un champ électrique, les électrons qui ont l'énergie la plus élevée peuvent acquérir une énergie supplémentaire en occupant des niveaux d'énergie très voisins disponibles.

Lorsque cette bande est remplie, on a affaire à un isolant car l'application d'un champ électrique ne peut fournir assez d'énergie pour lui faire franchir la bande interdite (gap) afin d'atteindre les premiers niveaux disponibles : les électrons ne peuvent acquérir un mouvement collectif correspondant au passage du courant. Dans ce cas, la dernière bande permise occupée est appelée bande de valence.



**Figure (I.1) : Structure de bande d'un conducteur et d'un isolant à 0K**

Sous l'influence de la température ( $T \neq 0K$ ) les électrons acquièrent une énergie thermique  $k_B T$ .

Si l'énergie du gap  $E_g \gg k_B T$ , le solide est isolant, pratiquement aucun électron ne peut migrer sous l'effet de l'agitation thermique de la bande de valence à la bande de conduction.

Si  $E_g$  est du même ordre de grandeur que  $k_B T$ , le cristal est un semi-conducteur intrinsèque. Les électrons migrent dans la bande de conduction et il se forme des trous dans la bande de valence.

Sous l'action d'un champ électrique, les électrons situés dans le bas de la bande de conduction et les trous situés dans le haut de la bande de valence peuvent acquérir un mouvement collectif : le solide devient conducteur.

### I-3- Milieux diélectriques :

Une matière diélectrique est une substance isolante (liquide, solide ou gaz), capable d'emmagasiner de l'énergie électrostatique, un diélectrique est caractérisé par sa permittivité  $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$ , et sa rigidité diélectrique.

#### I-3-1- polarisation:

Sous l'action d'un champ électrique  $\vec{E}$ , des dipôles peuvent être créés dans le matériau. S'ils existaient déjà, ces dipôles s'orienter suivant la direction de ce champ. Cette interaction se traduit par la création d'une polarisation  $P$  qui est reliée à ce champ, au niveau microscopique, par une polarisabilité  $\alpha$ , et au niveau macroscopique par la susceptibilité électrique  $\chi$ .

La polarisation est une grandeur macroscopique, équivalente au moment dipolaire par unité du volume de corps.

Il existe trois mécanismes principaux de polarisation.

- La polarisation électronique: toujours présente, est due au déplacement et à la déformation de chaque nuage électronique,
- La polarisation ionique: est due aux déplacements des ions,
- La polarisation d'orientation : existe lorsque des dipôles sont déjà présents.

#### I-3-2-Permittivité $\varepsilon^*$ et susceptibilité $\chi$ :

La permittivité diélectrique ou (constante diélectrique) est une grandeur tensorielle qui se réduit à un scalaire dans les milieux isotropes, elle est généralement complexe

( $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$ ). La partie imaginaire étant liée au phénomène d'absorption ou d'émission du champ électromagnétique par le matériau, et la partie réelle qui représente la réponse du

matériau au champ électrique est donnée par le rapport  $\frac{D}{E}$  où D est le déplacement électrique et E est le champ électrique appliqué et la susceptibilité  $\chi=(\epsilon^*-1)$ .

Au niveau microscopique la constante diélectrique est liée à la polarisabilité électronique des molécules ou les atomes constituant le milieu.

**I-3-3-Champ de Maxwell, champ local et champ directeur**

La théorie des milieux diélectriques repose sur la notion de champ local. Le champ local en un point du diélectrique est la somme du champ appliqué créé par les charges extérieures au milieu et du champ créé par les dipôles intérieurs à l'échantillon, à l'exception du dipôle présent en ce point.

On écrit usuellement le champ créé par les dipôles sous la forme d'une somme de trois termes,  $\vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3$ . Le champ  $\vec{E}_1$  est le champ dépolarisant, provenant des charges de polarisation sur la surface extérieure de l'échantillon. On imagine ensuite une cavité sphérique fictive creusée dans le diélectrique, autour du point considéré. Les charges de polarisation sur la surface de cette cavité sont à l'origine du champ  $\vec{E}_2$ , dit champ de cavité de Lorentz, et le champ  $\vec{E}_3$  est le champ créé par les dipôles situés à l'intérieur de cette cavité. Compte tenu de ces dispositions, le champ local s'écrit :

$$\vec{E}_l = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 \dots\dots\dots(1.1)$$

Le champ  $\vec{E}_{Max}$  qu'on trouve dans les équations de Maxwell, est dit champ de Maxwell. Il est fonction du champ extérieur  $\vec{E}_{ext}$  et du champ dépolarisant  $\vec{E}_1$ . On a :

$$\vec{E}_{Max} = \vec{E}_{ext} + \vec{E}_1 \dots\dots\dots(1.2)$$

Le calcul du champ dépolarisant  $\vec{E}_1$  peut s'avérer très difficile dans le cas général. Néanmoins pour des formes de diélectriques simples par exemple cylindrique, sphérique, elliptique et plane, l'expression de champ peut être établie.

Par exemple, lorsqu'un champ  $\vec{E}_{\text{ext}}$  est appliqué à un cylindre de longueur infini, parallèlement à son axe, le champ de dépolariation est nul. Pour une sphère, il sera égal à :

$$\vec{E}_1 = -\frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \dots\dots\dots(1.3)$$

Le champ de Lorentz peut aussi être calculé. Il est relié à le moment dipolaire  $\vec{P}$  par :

$$\vec{E}_2 = \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \dots\dots\dots(1.4)$$

Le champ  $\vec{E}_3$  est la seule contribution au champ local qui dépend de la structure de l'échantillon. Toutefois, dans le cas des diélectriques isotropes ou dans un environnement cubique où les atomes peuvent être remplacés par des dipôles parallèles entre eux, le champ  $\vec{E}_3$  est nul.

Dans le cas des corps polaires, seulement une partie du champ local  $\vec{E}_\ell$  influence la direction des dipôles permanents. Cette partie, notée  $\vec{E}_d$ , a été calculée par Böttcher. Il propose comme expression :

$$(\vec{E}_d)_i = \frac{1}{1-f_i\alpha_i} \frac{3\epsilon}{2\epsilon+1} (\vec{E}_{\text{Max}})_i \dots\dots\dots(1.5)$$

où f est le facteur du champ de réaction qui est égal dans le cas d'une molécule supposée sphérique de rayon a, à :

$$f_i = \frac{1}{a_i} \frac{2(\epsilon-1)}{2\epsilon+1} \dots\dots\dots(1.6)$$

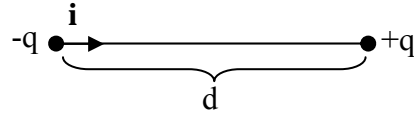
Ce rayon est relié à la concentration par unité de volume N par la relation :

$$\frac{4\pi}{3} N_i a_i^3 = 1 \dots\dots\dots(1.7)$$

**I -3-4-polarisabilités :**

**I-3-4-1-dipôle électrique :**

On appelle dipôle électrique *ou* doublet électrique, un ensemble de deux charges ponctuelles q et - q, de même valeur et de signes opposés, séparées par une distance fixe d. On définit alors le moment dipolaire par:



$$\vec{p} = qd\vec{i} \dots\dots\dots(1.8)$$

où  $\vec{i}$  est le vecteur normé porté par la droite joignant les points de l'espace où sont localisés les deux charges, dirigé de la charge négative vers la charge positive.

### I-3-4-2 polarisabilité d'orientation :

Dans une molécule où les barycentres des charges négatives et positives ne se confondent pas, la molécule présente un moment dipolaire  $\vec{p}_p$ .

A la présence d'un champ électrique dipolaire  $\vec{E}_d$ , ces moments peuvent se polariser. Le moment dipolaire moyen  $\vec{p}$  selon la direction du champ est relié à ce dernier par

$$\vec{p} = \alpha_d \varepsilon_0 \vec{E}_d \dots\dots\dots(1.9)$$

$\varepsilon_0$  est la permittivité du vide.

Le coefficient de proportionnalité  $\alpha_d$  est la polarisabilité d'orientation ou dipolaire, qui est facteur de la température et du moment dipolaire de la molécule  $p$ .

$$\alpha_d = \left( \frac{p^2}{3kT} \right) \dots\dots\dots(1.10)$$

### I-3-4-3 polarisabilité électronique :

Sous l'effet d'un champ électrique local  $E_{loc}$  créée par le voisinage (d'un ion, d'une molécule ou un champ macroscopique) le nuage électronique d'un atome ou d'une molécule peut se déformer temporairement, cette déformation donne naissance à un moment dipolaire induit  $\vec{p}_{ie}$ , qui est relié à ce champ et la polarisabilité électronique  $\alpha_e$  par la relation suivante :

$$\vec{P}_{ie} = \alpha_e \varepsilon_0 \vec{E}_{loc} \dots\dots\dots(1.11)$$

**I-3-4- 4 polarisabilité ionique :**

Les atomes au sein d'une molécule, peuvent se déplacer sous l'action d'un champ local, créant ainsi des dipôles de moments dipolaires induit  $\vec{P}_{ia}$ . Ce moment est relié au champ  $\vec{E}_{loc}$  et à la polarisabilité atomique  $\alpha_a$  par :

$$\vec{P}_{ia} = \alpha_a \epsilon_0 \vec{E}_{loc} \dots\dots\dots(1.12)$$

Les polarisabilités ( $\alpha_e, \alpha_d, \alpha_i$ ) peuvent être reliées aux différents champs de Maxwell  $\vec{E}_{max}$ , local  $\vec{E}_l$ , et directeur  $\vec{E}_d$  par la relation fondamentale :

$$(\epsilon - 1) \vec{E}_{max} = \sum N_i \left[ \alpha_i (\vec{E}_l)_i + \frac{\mu_k^2}{3kT} (\vec{E}_d)_i \right] \dots\dots\dots(1.13)$$

Où N est le nombre de particules par unité de volume,  $\alpha$  la polarisabilité induite ( $= \alpha_a + \alpha_e$ ), l'indice i se réfère au i<sup>ème</sup> genre de particule.

Pour les corps apolaires, l'équation fondamentale se réduit à :

$$(\epsilon - 1) \vec{E}_{max} = \sum N_i \alpha_i (\vec{E}_l)_i \dots\dots\dots(1.14)$$

**I-4-1-Modèles de calcul du moment dipolaire moyen**

Différentes théories ont été élaborées pour relier la polarisation définie précédemment à des grandeurs macroscopiques mesurables.

Dans le vide le champ électrique  $\vec{E}_{Max}$  et le déplacement  $\vec{D}$  sont reliés par la relation

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{Max}$$

$\epsilon_0$  désigne la permittivité diélectrique du vide.

Dans un milieu diélectrique de permittivité relative  $\epsilon$ , la polarisation  $\vec{P}$  se traduit par la relation:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}_{Max} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon \vec{E}_{Max} \dots\dots\dots(1.15)$$

soit

$$\vec{P} = (\epsilon_0 \epsilon_s - \epsilon_0) \vec{E}_{\text{Max}} \dots\dots\dots(1.16)$$

à basses fréquences la polarisation totale est:

$$\vec{P}_s = (\epsilon_0 \epsilon_s - \epsilon_0) \vec{E}_{\text{Max}} \dots\dots\dots(1.17)$$

à hautes fréquences les dipôles ne suivent plus le champ électrique, la polarisation s'écrit :

$$\vec{P}_\infty = (\epsilon_0 \epsilon_\infty - \epsilon_0) \vec{E}_{\text{Max}} \dots\dots\dots(1.18)$$

#### I-4-1-1-Modèle de Debye

Il considère des molécules quasi sphériques n'interagissant pas entre elles.

$$P_s = \frac{\epsilon_s - 1}{\epsilon_s + 2} \frac{M}{\rho} = P_i + \frac{N_A}{3\epsilon_0} \frac{\mu^2}{3KT} \dots\dots\dots(1.19)$$

où  $P_i$  est le moment dipolaire induit.

où  $M$  est la masse moléculaire,  $\rho$  la masse volumique et  $N_A$  le nombre d'Avogadro

à hautes fréquences

$$P_\infty = \frac{\epsilon_\infty - 1}{\epsilon_\infty + 2} \frac{M}{\rho} = P_i \dots\dots\dots(1.20)$$

où  $P_i$  est la polarisation induite.

A partir de ces deux relations, il déduit le moment dipolaire  $\mu$  de la molécule.

#### I-4-1-2-Modèle de Lorentz

Lorentz considère une cavité remplie de diélectrique et isolée du milieu extérieur. Ce modèle conduit à la relation de Clausius-Mossotti-Lorentz

$$\frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} = \sum_i \frac{N_i \alpha_i}{3\epsilon_0} \dots\dots\dots(1.21)$$

$\alpha$  étant la polarisabilité et N le nombre de molécules par unité de volume

Lorentz aboutit finalement à la relation entre permittivités et moment dipolaire.

$$\frac{N \mu^2}{3 k T} = \frac{9 \epsilon_s^2 (\epsilon_s - \epsilon_\infty)}{(\epsilon_s + 2 \epsilon_\infty)(\epsilon_\infty + 2 \epsilon_s)} \dots\dots\dots(1.22)$$

### I-4-1-3-Modèle d'Onsager

La cavité de forme sphérique, tend à représenter le volume occupé par une molécule. Onsager néglige les interactions à courte distance. Ce modèle conduit à la formule suivante :

$$\frac{4 \pi N \mu^2}{9 k T} = \frac{(\epsilon_s - \epsilon_\infty)(2 \epsilon_s + \epsilon_\infty)}{\epsilon_s (\epsilon_\infty + 2)^2} \dots\dots\dots(1.23)$$

### I-4-2-La relaxation diélectrique

La relaxation consiste en l'existence d'un délai de réponse pour un système, soumis à une excitation extérieure. Il y a relaxation diélectrique lorsqu'on supprime brusquement le champ électrique qui polarisait un matériau de permittivité  $\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ . Un temps, dit temps de relaxation, est nécessaire pour que le matériau retourne dans son état de désordre moléculaire de départ. Il est défini comme le temps nécessaire pour que la polarisation décroisse à 1/e de sa valeur initiale.

Dans les zones de basses fréquences, où le mouvement imposé aux molécules polarisées est lent, celles-ci se synchronisent sans difficultés sur les oscillations du champ mais si l'on augmente la fréquence progressivement, à une certaine fréquence, l'inertie de la molécule et les forces de liaisons s'opposant au mouvement deviennent prépondérantes.

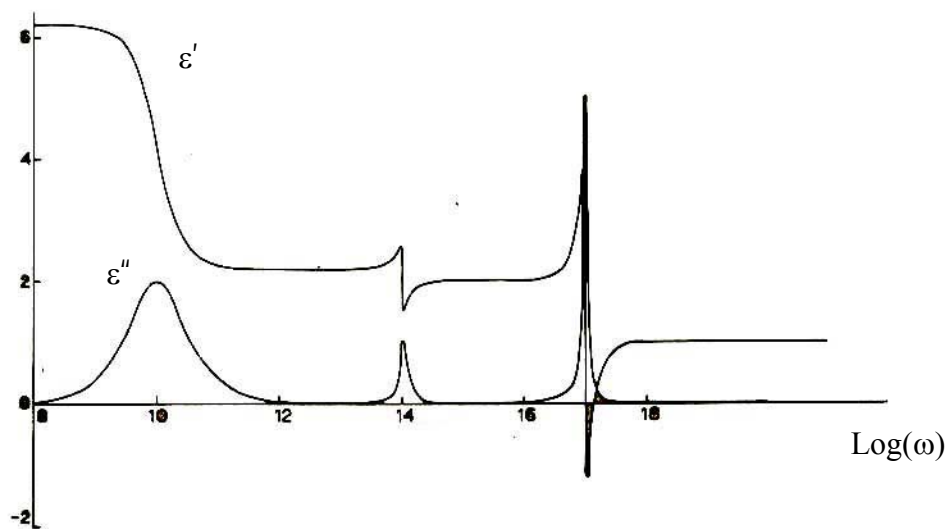
Entre ces deux zones de fréquences, il existe une bande de fréquences, dite plage de relaxation, sur laquelle il existe un déphasage entre le champ et les dipôles. Ce déphasage est appelé angle de polarité et est noté  $\delta$  et c'est dans cette bande de fréquences que le matériau retire de l'énergie au champ électrique et la dissipe en chaleur.

Cet angle de perte est relié à la permittivité diélectrique par :

$$\text{tag } \delta = \epsilon''/\epsilon' \dots\dots\dots(1.24)$$

Le terme  $\varepsilon'$  est le terme de dispersion qui caractérise la capacité du matériau a été polarisée par un champ électrique externe. Le second terme  $\varepsilon''$  est le terme d'absorption du matériau qui correspond aux pertes diélectriques dans le matériau, c'est-à-dire à sa capacité de dégrader l'énergie électromagnétique en chaleur.

Les variations de  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  en fonction de la fréquence pour un corps polaire dans un état condensé, sont représentées sur la figure suivante :



**Figure (I.2): Permittivité diélectrique d'un composant polaire en phase condensée [7]**

L'allure de la courbe de  $\varepsilon'(\omega)$  en fonction de la pulsation  $\omega$  dans la région de dispersion due à la polarisation d'orientation, est différente de celle de la courbe dans les régions de dispersion due aux polarisations atomique et électronique. Les pics de  $\varepsilon''(\omega)$  sont beaucoup plus aigus dans le dernier cas. Cette différence est due au fait que les niveaux d'énergie des vibrations moléculaires correspondant à la polarisation atomique et les mouvements d'électrons correspondant à la polarisation électronique, sont discrets. D'un point de vue phénoménologique, il est possible de caractériser cette différence en disant que la polarisation orientationnelle se produit par un processus de relaxation et que la polarisation induite se produit par un nombre de processus de résonance.

Dans les liquides polaires, les constantes diélectriques statiques ont des valeurs importantes. Par exemple, pour l'eau à température ambiante, la constante diélectrique

statique  $\epsilon_s$  vaut 81, tandis que la constante diélectrique  $\epsilon_\infty$  vaut 1.77 aux fréquences optiques.

Cette différence est due principalement à la polarisation orientationnelle effective aux basses fréquences mais négligeable aux fréquences supérieures à environ  $10^{10}$  Hz.

En 1929, P. Debye propose un modèle expliquant les grandes valeurs de  $\epsilon_s$  dans certains liquides, en supposant que les molécules de ces liquides possèdent des moments dipolaires électriques permanents pouvant s'écarter de leur orientation d'équilibre, le retour vers celle-ci étant caractérisé par un temps de relaxation  $\tau$ . Si la pulsation  $\omega$  du champ électrique appliqué est très supérieure à  $\frac{1}{\tau}$ , la molécule ne peut plus suivre le champ.

Debye propose ainsi de formuler la polarisabilité  $\alpha(\omega)$  comme suit

$$\alpha(\omega) = \frac{\alpha_0}{1 + j\omega\tau} \dots\dots\dots(1.25)$$

où  $\alpha_0$  désigne la polarisabilité orientationnelle statique.

Dans un liquide peu dense, on a pratiquement  $\epsilon(\omega) \approx 1$ . On peut donc simplifier la formule de Clausius-Mossotti (1.21) en écrivant

$$\epsilon(\omega) - 1 = \frac{N\alpha(\omega)}{\epsilon_0} \dots\dots\dots(1.26)$$

Par conséquent :

$$\epsilon(\omega) = 1 + \frac{N\alpha_0}{\epsilon_0(1 - j\omega\tau)} \dots\dots\dots(1.27)$$

Les parties réelle et imaginaire de la constante diélectrique sont données par :

$$\epsilon'(\omega) - 1 = (\epsilon_s - 1) \frac{1}{1 + \omega^2\tau^2} \dots\dots\dots(1.28)$$

$$\epsilon''(\omega) = (\epsilon_s - 1) \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \dots\dots\dots(1.29)$$

$$\text{où } (\epsilon_s - 1) = \frac{N\alpha_0}{\epsilon_0} \dots\dots\dots(1.30)$$

Une autre représentation couramment utilisée dans les problèmes de relaxation diélectrique est le *diagramme Cole-Cole* où on représente  $\epsilon''$  en fonction de  $\epsilon'$ . L'expression théorique de cette courbe est obtenue en éliminant le paramètre  $\omega$

$$\left( \epsilon' - \frac{\epsilon_s + 1}{2} \right)^2 + \epsilon''^2 = \frac{(\epsilon_s - 1)^2}{4} \dots\dots\dots(1.31)$$

Le diagramme de Cole-Cole associé à ce modèle est un demi-cercle centré en  $\frac{\epsilon_s + 1}{2}$ , de rayon  $\frac{\epsilon_s - 1}{2}$ . Le temps de relaxation du modèle de Debye peut être lu directement sur ce

diagramme, puisque  $\epsilon''(\omega)$  devient maximum à  $\omega = \frac{1}{\tau}$

**I-5- Energie emmagasinée dans un diélectrique :**

Un diélectrique est, du point de vue du potentiel et du champ électrique, assimilable à la superposition d'une distribution volumique et d'une distribution surfacique de charges de densités respectives

$$\rho_p = - \text{div } \mathbf{P} \dots\dots\dots (1.32)$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \dots\dots\dots (1.33)$$

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 (\epsilon_r - 1) \mathbf{E} \dots\dots\dots(1.34)$$

L'énergie emmagasinée dans le diélectrique égale :

$$W = \iiint_V P.E \, dv \text{ donc } W = \iiint_V \epsilon_0 (\epsilon_r - 1).E^2 \, dv \dots\dots\dots(1.35)$$

**I-6- Liquide :**

Le liquide est un état physique de la matière correspondant aux corps fluides condensée.

Un liquide est caractérisé par la capacité d'écoulement (fluidité) et n'a donc pas de forme propre, il prend la forme de récipient qui le contient, en outre il présente une très faible compressibilité.

Dans un liquide les forces intramoléculaires sont plus faibles que dans un solide. Les molécules peuvent glisser les unes sur les autres ce qui confère au liquide sa fluidité c'est-à-dire sa capacité d'écoulement, un fluide est donc une substance compacte partiellement ordonnée, les molécules d'un liquide sont ordonnées à courte distance mais désordonnées à longue distance.

Les liquides sont généralement caractérisés par les grandeurs physiques suivantes :

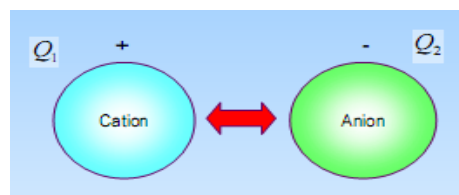
1. la viscosité.
2. la pression de vapeur, saturation.
3. la température d'ébullition ou de congélation et la chaleur latente de vaporisation.
4. les liaisons et les forces inter moléculaires.
5. la tension superficielle.

### I-6-1- Interactions intermoléculaires :

Les forces d'interaction moléculaire ou ionique qui s'exercent au sein des milieux liquides ou solides sont d'origine.

- coulombiennes (charge électrique / charge électrique)
- ou dipolaires dite forces de Van Der Waals.

#### I-6-1-2- Force de coulomb :



Figure(1.3) : force de coulomb

Les forces coulombiennes  $F = \frac{Q_1 Q_2}{4\pi\epsilon_0 \epsilon_r r^2}$  dépendent de la constante diélectrique du milieu, plus un solvant est polaire,  $\epsilon$  grand, plus cette force est faible. On peut comprendre alors que

dans un solvant fortement polaire les cations et les anions d'un sel que l'on dissout ont des interactions faibles facilitant leur dispersion.

### I-6-1-3-Force de Van Der Waals:

Les forces de Van Der Waals, d'intensité faible, sont cependant d'une importance considérable pour expliquer la plupart des comportements de ces produits vu leur nombre très important.

Elles sont de diverses natures. Et diminuent rapidement avec la distance intermoléculaire  $r$  ( $\frac{1}{r^7}$ ).

On peut comparer leur importance en exprimant l'énergie fournie pour rompre ces interactions.

#### I-6-1-3-a- Interaction dipôle /dipôle :

On observe trois types d'interactions dipôle /dipôle :

- 1- Dipôle permanent / Dipôle permanent (force de Keesom).
- 2- Dipôle permanent / Dipôle induit (force de Debye).
- 3- Dipôle induit / Dipôle induit (force de London).

##### I-6-1-3-a-1- Dipôle permanent / Dipôle permanent (force de Keesom).

L'énergie d'interaction entre deux dipôles,  $p_1 = q_1 l_1$  et  $p_2 = q_2 l_2$ , séparés l'un de l'autre par une distance  $r$ , et formant un angle de  $\theta$  entre eux, est

$$V(r) = \frac{p_1 p_2}{(4\pi\epsilon_0)r^3} (1 - 3 \cos^2 \theta) \dots\dots\dots (1.36)$$

Cette expression n'est valide que dans l'approximation de dipôles ponctuels. Qualitativement, on notera que l'énergie d'interaction dipôle -dipôle décroît avec la distance  $r$  entre les deux dipôles, donc plus rapidement que celle entre un ion et dipôle ou celle entre deux ions (potentiel de coulomb).

Ceci peut décrire l'interaction de deux molécules polaires en phase gazeuse, figée dans une orientation donnée, c'est à dire sans rotation. Quand l'on tient compte de la relation des deux molécules à la distance  $r$ , on obtient plutôt une interaction moyenne. La forme précise de cette interaction dipôle – dipôle moyen est donnée par la formule de Keesom :

$$\langle V(r) \rangle = -\frac{C}{r^6}, \quad C = \frac{2p_1^2 p_2^2}{3(4\pi\epsilon_0)^2 k_B T} \dots\dots\dots(1.37)$$

$k_B$  étant la constante de Boltzmann et T la température absolue.

On notera que cette interaction moyenne est attractive ( $\langle V \rangle$  est toujours négative) et que, en plus elle décroît en  $1/r^6$ , elle est inversement proportionnelle à la température : A plus haute température, une plus grande agitation thermique tend à faire que les effets d'orientation des dipôles s'annulent.

### I-6-1-3-a-2- Dipôle permanent / Dipôle induit (force de Debye).

Par des considérations d'électrostatique, on peut montrer qu'un dipôle  $p_1$  engendre un champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  de grandeur

$$|\vec{E}| = \frac{2p_1}{(4\pi\epsilon_0)r^3} \dots\dots\dots(1.38)$$

Ce champ induira un moment dipolaire de grandeur :

$$p_2 = \alpha_2 |\vec{E}| = \frac{2\alpha_2 p_1}{(4\pi\epsilon_0)r^3} \dots\dots\dots(1.39)$$

dans une molécule (polaire ou non - polaire), de polarisabilité  $\alpha_2$ , placée au point  $r$ , à la distance  $r$  de  $p_1$ . De plus, le dipôle induit  $p_2$  est toujours parallèle à  $p_1$ . Les deux dipôles,  $p_1$  le dipôle permanent de la première molécule, et  $p_2$ , le dipôle induit de la deuxième molécule interagissent, l'énergie d'interaction s'exprime par la loi :

$$\begin{aligned} V(r) &= \frac{p_1 p_2^*}{(4\pi\epsilon_0)r^3} (1 - 3\cos^2 \theta) \Big|_{\theta=0} = \left( \frac{2p_1}{(4\pi\epsilon_0)r^3} \right) \left( \frac{2\alpha_2 p_1}{(4\pi\epsilon_0)r^3} \right) \dots\dots\dots(1.40) \\ &= -\frac{4\alpha_2 p_1^2}{(4\pi\epsilon_0)^2 r^6} \end{aligned}$$

Cette interaction est attractive et son énergie varie en  $\frac{1}{r^6}$

Elle dépend de la grandeur du dipôle inducteur et de la polarisabilité de la molécule dans laquelle est induit le dipôle  $p_2$ . L'agitation thermique a un très faible effet sur cette interaction, elle est pratiquement indépendante de la température.

### I-6-1-3-a-3- Dipôle induit / Dipôle induit (force de London).

Deux molécules neutres et non polaires s'attirent mutuellement quand même, en dépit du fait qu'aucune d'elle n'a de moment dipolaire permanent. On met cette attraction sur le compte de l'existence d'un moment dipolaire transitoire et instantané  $p_1(2)$ , que des fluctuations dans la distribution instantanée des électrons dans chaque molécule peuvent induire dans l'autre. En fait, on imagine la distribution électronique instantanée dans la molécule 1 donnant lieu à un dipôle instantané  $p_1$  qui, à son tour, induit dans la molécule 2 un moment dipolaire  $p_2$  de sorte que les deux dipôles sont à tout moment corrélés et parallèles. A cause de cette corrélation, l'interaction moyenne entre ces deux dipôles n'est pas nulle, même si ces dipôles instantanés n'existent que de façon transitoire.

Cette interaction, appelée interaction de dispersion ou de London, varie comme

$\frac{1}{r^6}$ , et est traduite par une loi de la forme :

$$V(r) = -\frac{C}{r^6}, \quad C = \frac{2}{3} \alpha'_1 \alpha'_2 \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} \dots\dots\dots(1.41)$$

où  $\alpha'_1$  et  $\alpha'_2$ , sont les volumes de polarisabilités des deux espèces moléculaires considérées et  $I_1, I_2$ , leur première énergie d'ionisation. L'énergie d'interaction de London est toujours négative : il s'agit donc d'une attraction.

## **Chapitre II**

### **THEORIE SUR LA CAVITE RESONANTE**

### II-1- La cavité résonnante :

Un résonateur électromagnétique est constitué d'un domaine diélectrique limité par une surface métallique de forme quelconque. Dans le cas général, la résolution des équations de propagation permettant l'établissement des expressions des champs est très ardue sa mesure irrésoluble. Afin d'y remédier à cette difficulté, on choisit généralement des formes simples de résonateur voire cylindrique ou rectangulaire.

Dans ce mémoire, la surface délimitant le diélectrique est métallique de forme cylindrique à base circulaire (de longueur  $L$  et de rayon  $R_0$ ).

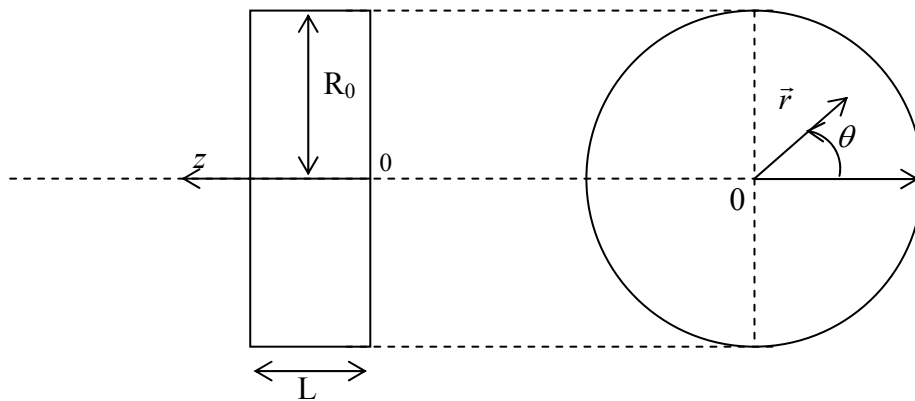


Figure 2.1 : présentation géométrique de la cavité

Les équations de propagations sont exprimées en coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ . L'axe Oz est confondu avec l'axe de révolution du cylindre.

#### II-1-1 - Le modèle théorique :[27]

L'étude des propriétés d'une cavité résonnante se fait suivant un modèle de structure idéal, caractérisé par les points suivants :

1-l'enveloppe de la cavité est formée de conducteurs parfaits conductivité électrique  $(\sigma \rightarrow \infty)$ .

2-le milieu remplissant la cavité est homogène, linéaire et isotrope, ses propriétés caractérisées par les paramètres diélectrique, magnétique et électrique  $(\epsilon, \mu, \sigma)$  ne dépendent pas des coordonnées du point considéré dans la cavité et de l'amplitude du signal et du temps.

3-Les densités de charges électriques et de courants sont nulles à l'intérieur de la cavité. Moyennant ces hypothèses les équations de Maxwell s'écrivent en fonction des champs électrique  $\vec{E}$  et magnétique  $\vec{H}$  à l'intérieur de la cavité:

$$\vec{rot}(\vec{E}) = -\mu_0\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \dots\dots\dots (2.1)$$

$$\vec{rot}(\vec{H}) = \varepsilon_0\varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \dots\dots\dots (2.2)$$

$$div(\vec{E}) = 0 \dots\dots\dots (2.3)$$

$$div(\vec{H}) = 0 \dots\dots\dots (2.4)$$

A partir de ces quatre équations et en utilisant quelques artifices mathématiques, il est possible d'établir les équations de propagation des champs électromagnétiques en coordonnées cylindriques.

La résolution de ces équations de propagations montre qu'il existe deux modes :

- a- le mode transverse magnétique noté (**TM<sub>mnp</sub>**) où la composante **H<sub>z</sub>** est nulle. Ce mode est aussi appelé ondes **E**.
- b- le mode transverse électrique noté (**TE<sub>mnp</sub>**) où la composante **E<sub>z</sub>** est nulle. Ce mode est aussi appelé ondes **H**.

Les nombres **m, n, p** sont des entiers définis comme suit :

**m** :période spatiale d'une configuration purement transversale(du champ magnétique pour les ondes **E** et du champ électrique pour les ondes **H**) lorsqu'on effectue un tour complet suivant la circonférence de la section droite de la cavité.

$$m = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

**n** : nombre de racine ( $E = 0$ ) le long d'un rayon .

$$n = 0, 1, 2, \dots\dots\dots$$

**p** : nombre de demi période des champs le long de l'axe **O<sub>z</sub>**

$$p = 0, 1, 2, \dots \text{ pour les ondes } \mathbf{E} \text{ (TM}_{mnp}\text{)}.$$

$$p = 1, 2, \dots\dots\dots \text{ pour les ondes } \mathbf{H} \text{ (TE}_{mnp}\text{)}.$$

En tenant compte des conditions aux limites (continuités des composantes tangentielles des champs électriques et normales des champs magnétiques à la surface de séparation diélectrique métal), on peut exprimer les champs électromagnétiques dans le résonateur, en fonction des fonctions de Bessel et de fonctions harmoniques.

Pour les modes TE<sub>mnp</sub> (E<sub>z</sub>=0) :

$$H_z = AJ_m(k_c r) \cos(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots (2.5)$$

$$H_r = \left(\frac{k_g}{k_c}\right) AJ'_m(k_c r) \cos(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots (2.6)$$

$$H_\theta = \left(\frac{k_g}{k_c^2}\right) Am \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots (2.7)$$

$$E_z = 0 \dots\dots\dots (2.8)$$

$$E_r = j\left(\frac{\omega\mu}{k_c^2}\right) Am \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\theta) \sin(k_g z) \dots\dots\dots (2.9)$$

$$E_\theta = j\left(\frac{\omega\mu}{k_c}\right) Am J'_m(k_c r) \cos(m\theta) \sin(k_g z) \dots\dots\dots (2.10)$$

où  $k_g = p \frac{\pi}{L}$  est le module du vecteur de propagation suivant O<sub>z</sub>.

$k_c = \frac{x'_{mn}}{R_0}$  est le module du vecteur d'onde de coupure.  $x'_{mn}$  sont les n<sup>ième</sup> racines de la dérivée de la fonction de Bessel d'ordre m [ $J'_m(x'_{mn}) = 0$ ].

Les modules de ces deux vecteurs sont reliés entre eux par la relation de dispersion :

$$\varepsilon\mu\omega^2 = k_g^2 + k_c^2 \dots\dots\dots(2.11)$$

Pour les modes TM<sub>mnp</sub> (H<sub>z</sub>=0) :

$$E_z = AJ_m(k_c r) \cos(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots (2.12)$$

$$E_r = -\left(\frac{k_g}{k_c}\right)AJ'_m(k_c r) \cos(m\theta) \sin(k_g z) \dots\dots\dots (2.13)$$

$$H_z = 0 \dots\dots\dots (2.14)$$

$$H_r = -j\left(\frac{\omega\epsilon}{k_c^2}\right)Am \frac{J_m(k_c r)}{r} \sin(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots(2.15)$$

$$H_\theta = -j\left(\frac{\omega\epsilon}{k_c}\right)AJ'_m(k_c r) \cos(m\theta) \cos(k_g z) \dots\dots\dots(2.16)$$

où  $k_g = p \frac{\pi}{L}$  est le module du vecteur de propagation suivant  $O_z$ .

$k_c = \frac{x_{mn}}{R_0}$  est le module du vecteur d'onde de coupure.  $x_{mn}$  sont les  $n^{i\grave{e}me}$  racine de la fonction de Bessel d'ordre  $m$  [ $J_m(x_{mn}) = 0$ ].

Les modules de ces deux vecteurs sont reliés entre eux par la relation de dispersion (2.11) :

$$\epsilon\mu\omega^2 = k_g^2 + k_c^2$$

**II-1-1-1- Can d'un mode spécifique  $TM_{0n0}$  :**

Les modes  $TM_{0n0}$  possèdent deux composantes, l'une d'elle est axiale à champ électrique  $E_z$  l'autre est angulaire à champ magnétique  $H_\theta$  , où  $m=0, p=0$  donc  $k_g=0$ .

Les expressions des champs électromagnétiques se simplifient :

$$E_z = E_0 J_0\left(\frac{x_{0n}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots(2.17)$$

$$E_r = 0 \dots\dots\dots(2.18)$$

$$E_\theta = 0 \dots\dots\dots(2.18)$$

$$H_\theta = jH_0 \left(\frac{\omega\epsilon}{k_c}\right) J_1\left(\frac{x_{0n}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.20)$$

$$H_r = 0 \dots\dots\dots (2.21)$$

$$H_z = 0 \dots\dots\dots (2.22)$$

$$f_{0n0} = \frac{cx_{0n}}{2\pi R_0} \dots\dots\dots (2.23)$$

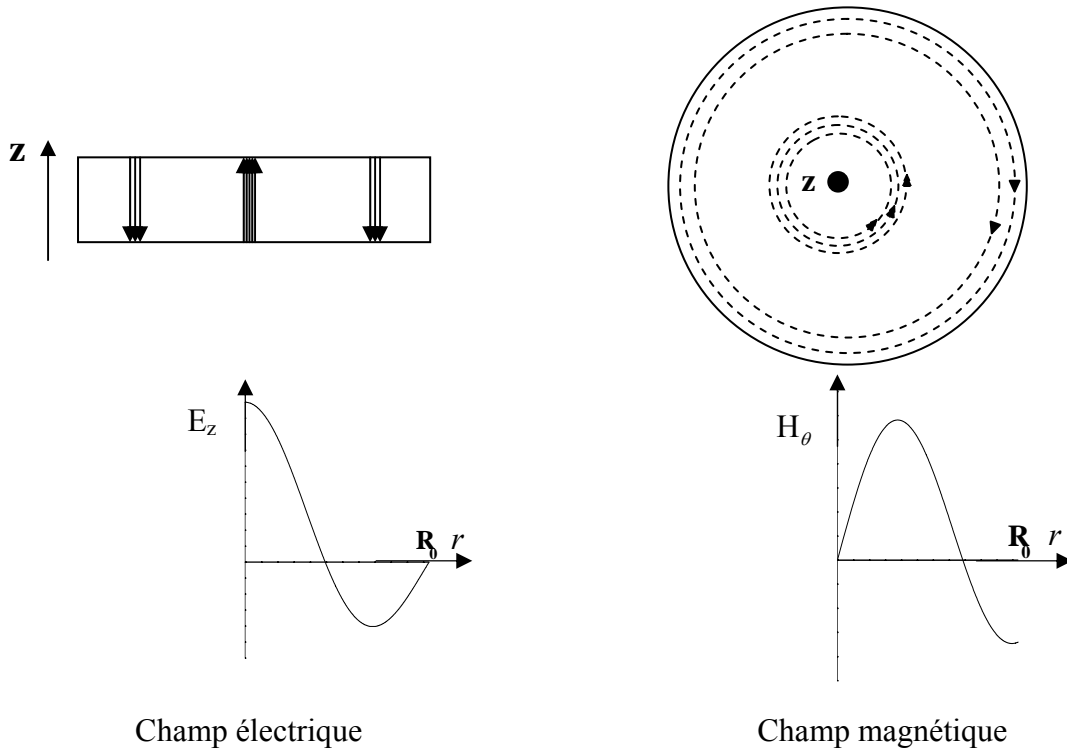
**II-1-1-2- L'allures des courbes pour n= 2 :**

Les expressions des champs  $E_z$  et  $H_\theta$  s'expriment pour n=2 par :

$$E_z = E_0 J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.24)$$

$$H_\theta = jH_0 \left(\frac{\omega \epsilon}{k_c}\right) J_1\left(\frac{x_{0n}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.25)$$

Sur la figure (2.2) sont représentés les lignes et les variations des champs électromagnétiques dans une cavité cylindrique  $TM_{020}$ .



Figure(2.2) : lignes et variations des champs électromagnétiques dans une cavité cylindrique  $TM_{020}$

En remplaçant  $k_g$  et  $k_c$  par leurs expressions dans la relation générale  $\epsilon\mu\omega^2 = k_g^2 + k_c^2$ , on obtient pour le mode  $TE_{mnp}$

$$\epsilon_0\mu_0 \epsilon\mu\omega^2 = \left(p \frac{\pi}{L}\right)^2 + \left(\frac{(x'_{mn})}{R_0}\right)^2 \dots\dots\dots (2.26)$$

et pour le mode  $TM_{mnp}$

$$\epsilon_0 \mu_0 \epsilon \mu \omega^2 = \left( p \frac{\pi}{L} \right)^2 + \left( \frac{x_{mn}}{R_0} \right)^2 \dots\dots\dots (2.27)$$

Sachant que la pulsation  $\omega$  s'exprime en fonction de la fréquence  $f$  par  $\omega = 2\pi f$  et que la vitesse de propagation  $c$  de l'onde dans le diélectrique par  $c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \epsilon \mu_0 \mu}$ , on peut exprimer les fréquence propres  $f_{mnp}$  de la cavité dans le mode TE<sub>mnp</sub> par:

$$f_{mnp} = \frac{c}{2} \sqrt{\left( \frac{x_{mn}}{\pi R_0} \right)^2 + \left( \frac{p}{L} \right)^2} \dots\dots\dots (2.28)$$

et dans le mode TM<sub>mnp</sub> par :

$$f_{mnp} = \frac{c}{2} \sqrt{\left( \frac{x_{mn}}{\pi R_0} \right)^2 + \left( \frac{p}{L} \right)^2} \dots\dots\dots (2.29)$$

**II-1-1-3- Diagramme des modes :**

En posant

$$A = \left( \frac{cp}{2} \right)^2$$

$$B = -1$$

$$X = \left( \frac{D}{L} \right)^2 \text{ où } D = 2R_0$$

$$Y = (f_{mnp} D)^2$$

$$C = \left( \frac{cx_{mn}}{\pi} \right)^2 \text{ (mode TM) } \quad \text{où} \quad C = \left( \frac{cx'_{mn}}{\pi} \right)^2 \text{ (mode TE)}$$

dans l'équation (2.28) ou (2.29) on obtient une nouvelle équation de forme simple et linéaire

$$AX + BY + C = 0 \dots\dots\dots (2.30)$$

Le tracé de Y en fonction X représente le diagramme des modes. Cette présentation graphique figure (2.3), est utile, elle permet, connaissant le rapport  $\left(\frac{D}{L}\right)^2$  et le produit  $(fD)^2$  (où  $f = f_{mp}$ ), d'identifier le mode existant dans la cavité.

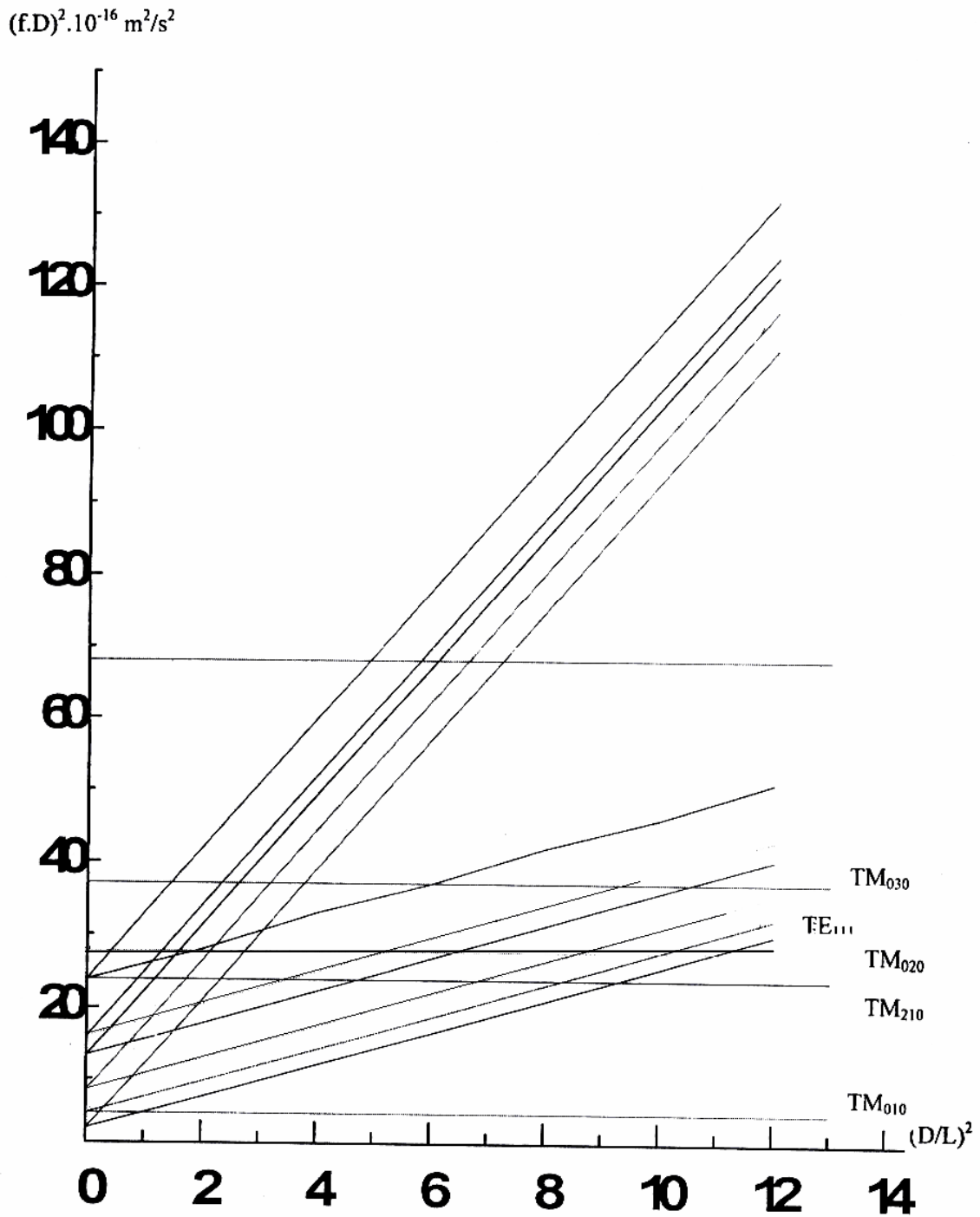


Figure (2.3) : diagramme des modes d'un cylindre

**II-1-2-Coefficient de qualité d'une cavité (Q) : [ 8, 9, 10]**

Dans le cas d'une cavité réelle, la conductivité des parois est finie ce qui engendre des pertes par conduction ohmique sur ces parois. Le diélectrique, généralement l'air, remplissant l'intérieur de la cavité, malgré de faibles pertes diélectriques, engendre lui aussi des pertes d'énergie à cette cavité. Un autre type de perte d'énergie cette fois-ci par rayonnement, se produit au niveau des trous d'insertion.

Pour évaluer les pertes, on est amené à définir un coefficient de qualité qui est le produit par  $2\pi$  du quotient de l'énergie emmagasinée  $W$  par l'énergie perdue pendant une période.

$$Q = 2\pi \frac{\text{Energie moyenne emmagasinée}}{\text{Energie moyenne des pertes}} = \omega \frac{W}{P} \dots\dots\dots (2.31)$$

$P$  est la puissance moyenne perdue dans la cavité. Elle est la somme des différentes puissances perdues  $P_{oh}$  sur les parois de la cavité,  $P_d$  dans le diélectrique et  $P_{ray}$  par rayonnement.

$$P = P_{oh} + P_d + P_{ray} \dots\dots\dots (2.32)$$

On peut associer à chaque type de perte un coefficient de qualité. L'inverse du coefficient de qualité de la cavité est égal tout simplement à la somme des inverses des coefficients associés à chaque type de perte :

$$\frac{1}{Q} = \frac{1}{Q_{oh}} + \frac{1}{Q_d} + \frac{1}{Q_{ray}} \dots\dots\dots (2.33)$$

où

$$Q_{oh} = \omega \frac{W}{P_{oh}} : \text{Coefficient du qualité de la cavité relié aux pertes ohmiques sur les parois.}$$

$$Q_d = \omega \frac{W}{P_d} : \text{Coefficient du qualité de la cavité relié aux pertes diélectriques.}$$

$$Q_{ray} = \omega \frac{W}{P_{ray}} : \text{Coefficient du qualité de la cavité vide relié aux pertes par rayonnement.}$$

On définit aussi un coefficient de qualité propre (ou interne)  $Q_{pr}$  par :

$$\frac{1}{Q_{pr}} = \frac{1}{Q_{oh}} + \frac{1}{Q_d} \dots\dots\dots(2.34)$$

et un coefficient de couplage  $\beta$  par :

$$\beta = \frac{Q_{pr}}{Q_{ray}} \dots\dots\dots(2.35)$$

Sa valeur nous renseigne sur le type de couplage lorsque,  $\beta = 1$  le couplage est dit critique, s'il est inférieur à 1 la cavité est sous couplée, sinon elle est sur couplée.

Les expressions théoriques de ces différents coefficients de qualité seront établies par la suite.

**II-2 -Théorie des perturbations : [3-8, 11- 18]**

**II-2-1 - Introduction :**

La théorie des perturbations peut être utilisée pour le calcul des permittivités diélectrique ou perméabilité magnétique d'un échantillon liquide ou solide dans les cavités résonantes.

Cette technique a été utilisée pour la première fois par Bethe et Schwinger (1933).

Kahan (1935), Slater (1950) pour le calcul de l'effet sur la fréquence de résonance d'une cavité, d'une faible déformation de ses parois, Casimir (1951) a appliqué cette méthode pour mesurer les propriétés magnétiques d'un barreau isotrope introduit dans la cavité.

Waldron (1957) a modifié le traitement de Casimir pour tenir compte d'échantillons anisotropes.

L'introduction dans une cavité d'un échantillon de diélectrique de permittivité complexe  $\epsilon^*$  entraîne une variation de la pulsation complexe  $\Omega$  et de l'énergie emmagasinée dans cette cavité, ces deux variations sont reliées entre elles par la relation:

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = -\frac{\Delta W}{W} \dots\dots\dots (2.36)$$

**II-2-2- formule des perturbations:**

Les champs électromagnétiques dans une cavité vide et fermée ne dépendent que des coordonnées du point considéré dans la cavité. Pour une cavité vide (non perturbée) les champs s'écrivent pour un régime supposé harmonique.

$$\vec{E}(r,t) = \vec{E}_0(r).exp(j\Omega t) \dots\dots\dots (2.37)$$

$$\vec{H}(r,t) = \vec{H}_0(r).exp(j\Omega t) \dots\dots\dots(2.38)$$

où  $E_0$  et  $H_0$  sont les amplitudes des champs fonction uniquement de la coordonnée radiale r.

Pour tenir compte des pertes, on introduit la notion de pulsation complexe  $\Omega$ .

$$\Omega = \omega + j\alpha \dots\dots\dots (2.39)$$

où  $\omega$  étant la pulsation réelle du mode considéré, et  $\alpha$  la partie imaginaire associée aux pertes.

L'énergie électromagnétique moyenne s'exprime en fonction de  $\alpha$  par :

$$W = W_0 \exp(-2\alpha t) \dots\dots\dots (2.40)$$

et la puissance perdue pendant le temps  $dt$  par :

$$P = \frac{dW}{dt} = -2\alpha W \dots\dots\dots (2.41)$$

Le coefficient de qualité sera relié à  $\alpha$  et  $\omega$  comme suit :

$$Q = \omega \frac{W}{P} = \frac{\omega}{2\alpha} \dots\dots\dots (2.42)$$

par conséquent

$$\alpha = \frac{\omega}{2Q} \dots\dots\dots (2.43)$$

L'expression de la pulsation complexe sera donnée par :

$$\Omega = \omega \left( 1 + \frac{j}{2Q} \right) \dots\dots\dots (2.44)$$

Lors de l'introduction de l'échantillon dans la cavité, les champs électromagnétiques sont perturbés. Ces perturbations se manifestent par l'addition des champs  $E_i$  et  $H_i$ , et le décalage de la fréquence  $\Omega$ , d'une quantité  $\Delta\Omega$ .

Les pertes sont supposées faibles (faible variation sur un large volume ou bien une large variation sur un faible volume) et uniquement dans l'échantillon Ce décalage peut être déduit pour des Q élevés, par un simple calcul variationnel sur l'équation (2.44) :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) \dots\dots\dots (2.45)$$

En exprimant les champs électromagnétiques additionnels par :

$$\vec{E}_{i0}(r, t) = \vec{E}_{i0}(r) \cdot \exp(j(\Omega + \Delta\Omega)t) \dots\dots\dots (2.46)$$

$$\vec{H}_{i0}(r, t) = \vec{H}_{i0}(r) \cdot \exp(j(\Omega + \Delta\Omega)t) \dots\dots\dots (2.47)$$

où  $\vec{E}_{i0}(r)$  et  $\vec{H}_{i0}(r)$  représentés les amplitudes des champs additionnels, les champs électromagnétiques s'exprimeront par :

**-dans la cavité sans échantillon :**

$$\vec{E}_T(r, t) = \vec{E}_0(r) \cdot \exp(j\Omega t) \dots\dots\dots (2.48)$$

$$\vec{H}_T(r, t) = \vec{H}_0(r) \cdot \exp(j\Omega t) \dots\dots\dots (2.49)$$

**- dans la cavité avec échantillon :**

$$\vec{E}_T(r, t) = (\vec{E}_0(r) + \vec{E}_{i0}(r)) \cdot \exp(j(\Omega + \Delta\Omega)t) \dots\dots\dots (2.50)$$

$$\vec{H}_T(r, t) = (\vec{H}_0(r) + \vec{H}_{i0}(r)) \cdot \exp(j(\Omega + \Delta\Omega)t) \dots\dots\dots (2.51)$$

Les équations de Maxwell sont applicables dans les deux cas.

**- dans la cavité sans échantillon :**

$$\text{rot}(\vec{E}) = -j\Omega\vec{B} \dots\dots\dots (2.52)$$

$$\text{rot}(\vec{H}) = j\Omega\vec{D} \dots\dots\dots (2.53)$$

$$\text{div}(\vec{E}) = 0 \dots\dots\dots (2.54)$$

$$\operatorname{div}(\vec{H}) = 0 \dots\dots\dots(2.55)$$

$$\text{où } \vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \quad \text{et} \quad \vec{B} = \mu_0 \vec{H} \dots\dots\dots(2.56)$$

- dans la cavité avec échantillon :

$$\operatorname{rot}(\vec{E}_T) = -j(\Omega + \Delta\Omega) \cdot (\vec{B} + \vec{B}_i) \dots\dots\dots(2.57)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_T) = j(\Omega + \Delta\Omega) \cdot (\vec{D} + \vec{D}_i) \dots\dots\dots(2.58)$$

où

$$\vec{B}_T = \vec{B} + \vec{B}_i = \mu_0 \mu^* \vec{H}_T = \mu_0 \mu (\vec{H} + \vec{H}_i) \dots\dots\dots(2.59)$$

$$\vec{D}_T = \vec{D} + \vec{D}_i = \varepsilon_0 \varepsilon^* \vec{E}_T = \varepsilon_0 \varepsilon^* (\vec{E} + \vec{E}_i) \dots\dots\dots(2.60)$$

où  $\varepsilon^*$  est la permittivité diélectrique complexe et  $\mu^*$  la perméabilité magnétique, qui seront égales à  $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$  et  $\mu^* = \mu' - j\mu''$  dans l'échantillon et  $\varepsilon^* = 1$  et  $\mu^* = 1$  en dehors de l'échantillon.

Par simple soustraction des équations (2.57) et (2.52) d'une part et (2.58) et (2.50) d'autre part, on obtient :

$$\operatorname{rot}(\vec{E}_i) = -j\Omega \vec{B}_i - j\Delta\Omega (\vec{B} + \vec{B}_i) \dots\dots\dots(2.61)$$

$$\operatorname{rot}(\vec{H}_i) = j\Omega \vec{D}_i + j\Delta\Omega (\vec{D} + \vec{D}_i) \dots\dots\dots(2.62)$$

En multipliant les deux dernières équations, la première par  $H$  et la seconde par  $E$ , on obtient :

$$\vec{H} \cdot \operatorname{rot}(\vec{E}_i) = -j\Omega \vec{H} \cdot \vec{B}_i - j\Delta\Omega \vec{H} \cdot (\vec{B} + \vec{B}_i) \dots\dots\dots(2.63)$$

$$\vec{E} \cdot \operatorname{rot}(\vec{H}_i) = j\Omega \vec{E} \cdot \vec{D}_i + j\Delta\Omega \vec{E} \cdot (\vec{D} + \vec{D}_i) \dots\dots\dots(2.64)$$

Par addition des deux équations (2.63) et (2.64) on obtient :

$$\vec{E}_i \text{rot}(\vec{H}_i) + \vec{H}_i \text{rot}(\vec{E}_i) = -j\Omega \vec{H} \vec{B}_i - j\Delta\Omega \vec{H} \cdot (\vec{B} + \vec{B}_i) + j\Omega \vec{E} \vec{D}_i + j\Delta\Omega \vec{E} \cdot (\vec{D} + \vec{D}_i) \dots\dots\dots(2.65)$$

Sachant que  $\text{div}[(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)] = (\vec{E}_i \cdot \text{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot} \vec{E}_i) + (\vec{H}_i \cdot \text{rot} \vec{E} - \vec{E} \cdot \text{rot} \vec{H}_i)$ , l'équation (2.65) peut se transformer en :

$$\begin{aligned} \vec{E}_i \text{rot} \vec{H} + \vec{H}_i \text{rot} \vec{E} - \nabla \cdot [(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)] \\ = j\Omega(\vec{E} \cdot \vec{D}_i - \vec{H} \vec{B}_i) + j\Delta\Omega[\vec{E}(\vec{D} + \vec{D}_i) - \vec{H}(\vec{B} + \vec{B}_i)] \dots\dots\dots(2.66) \end{aligned}$$

En intégrant cette dernière équation sur le volume  $V_c$  de la cavité, on obtient l'équation suivante :

$$\begin{aligned} \iiint_{V_c} [\vec{E}_i \text{rot}(\vec{H}) + \vec{H}_i \cdot \text{rot}(\vec{E}) - \text{div}\{(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)\}] dV \\ = j\Omega \iiint_{V_c} [\vec{E} \vec{D}_i - \vec{H} \vec{B}_i] dV + j\Delta\Omega \iiint_{V_c} [\vec{E}(\vec{D} + \vec{D}_i) - \vec{H}(\vec{B} + \vec{B}_i)] dV \dots\dots\dots(2.67) \end{aligned}$$

D'après le théorème de Green l'intégrale  $\iiint_V \text{div}[(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)] dV$  peut se transformer en une intégrale de surface elle est égale à :

$$\iiint_{V_c} \text{div}[(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)] dV = \iint_S (\vec{H} \times \vec{E}_i + \vec{E} \times \vec{H}_i) \cdot d\vec{S} \dots\dots\dots(2.68)$$

où S est la surface des parois de la cavité .

Au niveau des parois métalliques supposées parfaites, les champs électriques sont normaux et les champs magnétiques sont tangents à ces parois. Par conséquent, les produits vectoriels

$\vec{H} \times \vec{E}_i$  et  $\vec{E} \times \vec{H}_i$  seront tangents à ces parois et le produit scalaire  $ds [(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)]$  est nul, ce qui permet d'écrire  $\iiint_V \text{div} [(\vec{H} \times \vec{E}_i) + (\vec{E} \times \vec{H}_i)] dV = 0$

Compte tenu de la dernière égalité, l'équation (2.67) se réduit à :

$$\begin{aligned} & \iiint_{V_c} [\vec{E}_i \text{rot} \vec{H} + \vec{H}_i \text{rot} \vec{E}] dV \\ & = j\Omega \iiint_{V_c} (\vec{E} \vec{D}_i - \vec{H} \vec{B}_i) dV + j\Delta\Omega \iiint_{V_c} [\vec{E}(\vec{D} + \vec{D}_i) - \vec{H}(\vec{B} + \vec{B}_i)] dV \dots\dots (2.69) \end{aligned}$$

En remplaçant  $\text{rot}E$  et  $\text{rot}H$  par leurs expressions (2.52 et 2.53) dans la dernière équation, celle-ci se transforme en :

$$j\Omega \iiint_{V_c} (\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H}_i \vec{B}) dV = j\Omega \iiint_{V_c} (\vec{E} \vec{D}_i - \vec{H} \vec{B}_i) dV + j\Delta\Omega \iiint_{V_c} \{ \vec{E}(\vec{D} + \vec{D}_i) - \vec{H}(\vec{B} + \vec{B}_i) \} dV (2.70)$$

La variation relative  $\frac{\Delta\Omega}{\Omega}$  de la pulsation complexe peut être déduite aisément de la dernière équation on obtient :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\iiint_{V_c} (\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H}_i \vec{B}) dV + \iiint_{V_c} (\vec{H} \vec{B}_i - \vec{E} \vec{D}_i) dV}{\iiint_{V_c} [\vec{E}(\vec{D} + \vec{D}_i) - \vec{H}(\vec{B} + \vec{B}_i)] dV} \dots\dots\dots (2.71)$$

Cette formule n'est pas exploitable en pratique, des hypothèses simplificatrices s'imposent. Elles sont généralement de nombre de trois:

- L'échantillon est un diélectrique linéaire, homogène et isotrope.
- La perturbation est faible.
- Les champs  $E$  et  $H$  dans la cavité restent inchangés lors de l'introduction de l'échantillon.

**II-2-3-Cas des petites perturbations :**

$\vec{E}_i$  et  $\vec{H}_i$  sont faibles devant  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$ , et le volume  $V_e$  est supposé très petit comparé au volume de la cavité  $V_c$ , il en résulte une faible contribution des champs additionnels dans

l'intégrale du dénominateur. Par conséquent le dénominateur peut être approché à :

$$\iiint_{V_c} (\vec{E} \cdot \vec{D} - \vec{H} \cdot \vec{B}) dV$$

Pour le numérateur l'intégrale peut être décomposée et intégrée sur le volume de l'échantillon  $V_e$  et sur le volume restant  $V_c - V_e$  :

$$N = \iiint_{V_e} (\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H}_i \vec{B}) dV + \iiint_{V_c} (\vec{H} \vec{B}_i - \vec{E} \vec{D}_i) dV + \iiint_{V_c - V_e} [(\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H}_i \vec{B}) + (\vec{H} \vec{B}_i - \vec{E} \vec{D}_i)] dV \dots (2.72)$$

Compte tenu des relations entre les champs et induction électromagnétiques dans la cavité sans échantillon  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ,  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$  et dans la cavité avec échantillon mais en dehors de ce dernier  $\vec{B} + \vec{B}_i = \mu_0 (\vec{H} + \vec{H}_i)$  et  $\vec{D} + \vec{D}_i = \epsilon_0 (\vec{E} + \vec{E}_i)$ , il en résulte :

$$\vec{D}_i = \epsilon_0 \vec{E}_i \text{ et } \vec{B}_i = \mu_0 \vec{H}_i$$

Par conséquent  $\iiint_{V_c - V_e} [(\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H}_i \vec{B}) + (\vec{H} \vec{B}_i - \vec{E} \vec{D}_i)] dV = 0$

La formule des perturbations devient plus maniable et s'écrit

$$\frac{\Delta \Omega}{\Omega} = \frac{\iiint_{V_e} [(\vec{E}_i \vec{D} - \vec{D}_i \vec{E}) - (\vec{H}_i \vec{B} - \vec{B}_i \vec{H})] dV}{\iiint_{V_c} (\vec{E} \vec{D} - \vec{H} \vec{B}) dV} \dots (2.73)$$

A partir des relations (2.59), (2.66) et (2.56) reliant les champs et inductions électromagnétiques avec et sans échantillon, il est possible d'exprimer les expressions des inductions additionnelles électromagnétiques  $\vec{H}_i$  et  $\vec{D}_i$  dans l'échantillon :

$$\begin{cases} \vec{D}_i = \epsilon_0 (\epsilon^* - 1) \vec{E} + \epsilon_0 \epsilon^* \vec{E}_i \\ \vec{B}_i = \mu_0 (\mu^* - 1) \vec{H} + \mu_0 \mu^* \vec{H}_i \end{cases} \dots (2.75)$$

En remplaçant  $\vec{B}_i$  et  $\vec{D}_i$  par leurs expressions dans (2.74), on obtient nouvelle formule :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon^*)\iiint_{V_e} \vec{E}\vec{E}_e dV - \mu_0(1-\mu^*)\iiint_{V_e} \vec{H}\vec{H}_e dV}{\iiint_{V_c} [\varepsilon_0 E^2 - \mu_0 H^2] dV} \dots\dots\dots (2.76)$$

où  $\vec{E}_e = \vec{E} + \vec{E}_i$  et  $\vec{H}_e = \vec{H} + \vec{H}_i$  sont les champs dans l'échantillon.

Cette formule est applicable seulement pour les faibles perturbations. Elle permet de calculer les permittivités diélectriques et les perméabilités magnétiques des matériaux diélectriques et magnétiques.

Dans le cas pratique, pour la mesure de la permittivité diélectriques complexe  $\varepsilon^*$ , l'échantillon est placé là où le champ électrique est maximal et le champ magnétique nul. Par contre, pour la mesure de la perméabilité complexe  $\mu^*$ , l'échantillon est placé dans une position où le champ magnétique est maximal et le champ électrique nul.

Dans le cas d'un corps diélectrique ( $\mu = 1$ ), la relation de perturbation se simplifie :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon^*)\iiint_{V_e} \vec{E}\vec{E}_e dV}{2.\iiint_{V_c} [\varepsilon_0 E^2 - \mu_0 H^2] dV} \dots\dots\dots (2.77)$$

**II-3-Expressions de la permittivité diélectrique des matériaux dans le mode TM<sub>020</sub> :**

Le mode TM<sub>020</sub> représente un des cas qui s'adapte à la mesure de la permittivité diélectrique dans une cavité cylindrique, il possède un champ électrique axial et un champ magnétique angulaire dont les expressions sont données par :

$$E_z = E_0 J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.78)$$

$$H_\theta = jE_0 \left(\frac{\varepsilon\omega}{k_c}\right) J_1\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.79)$$

Le long de l'axe Oz de la cavité  $E_z$  est maximum et  $H_\theta$  est nul.

En supposant, lors de l'introduction de l'échantillon, les champs électromagnétiques  $E$  et  $H$  sont très peu perturbés et par conséquent restent inchangés :

$$E_e = E_z \text{ et } H_e = H_\theta$$

La formule des perturbations se transforme :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\varepsilon_0(1 - \varepsilon^*) \cdot \iiint_{V_e} E_z^2 dV}{2 \cdot \iiint_{V_c} [\varepsilon_0 E_z^2] dV} \dots\dots\dots (2.80)$$

Dans le cas des faibles perturbations, un simple calcul variationnel sur l'équation (2.76), permet de déterminer le décalage relatif de la fréquence complexe en fonction du décalage relatif de la fréquence de résonance et de la variation de l'inverse du coefficient de qualité :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) \dots\dots\dots (2.81)$$

En considérant la relation précédente, la formule de perturbation peut s'explicitier comme suit :

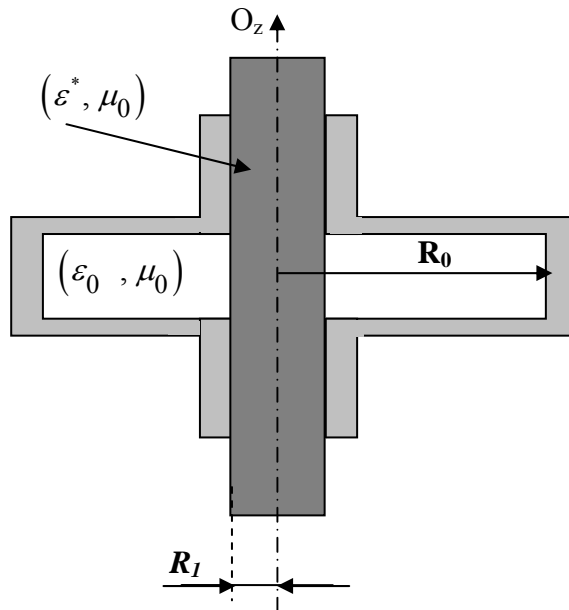
$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon^*) \cdot \iiint_{V_e} E_z^2 dV}{2 \cdot \iiint_{V_c} [\varepsilon_0 E_z^2] dV} \dots\dots\dots(2.82)$$

Dans le cas  $TM_{020}$ , elle s'écrit :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{\varepsilon_0(1-\varepsilon^*) \cdot \iiint_{V_e} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dV}{2 \cdot \iiint_{V_c} \left[ \varepsilon_0 J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right] dV} \dots\dots\dots(2.83)$$

**II-3-1-Echantillon cylindrique :**

En choisissant un échantillon de permittivité diélectrique  $\varepsilon^* = \varepsilon' - j\varepsilon''$  et de forme cylindrique à base circulaire de rayon  $R_l$ , la formule de perturbation s'écrit :



Figure(2.4): cavité chargée d'un échantillon solide

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{(1-\varepsilon^*) \cdot \int_0^{R_l} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr}{2 \cdot \int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr} \dots\dots\dots(2.84)$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = -\frac{(\varepsilon' - 1 - j\varepsilon'')}{2} \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \frac{1}{G_{020}} \dots\dots\dots (2.85)$$

$$\text{où } G_{020} = \frac{J_1^2(x_{02})}{J_0^2(x_{02} \frac{R_1}{R_0}) + J_1^2(x_{02} \frac{R_1}{R_0})} \dots\dots(\text{voir Annexe})\dots\dots\dots (2.86)$$

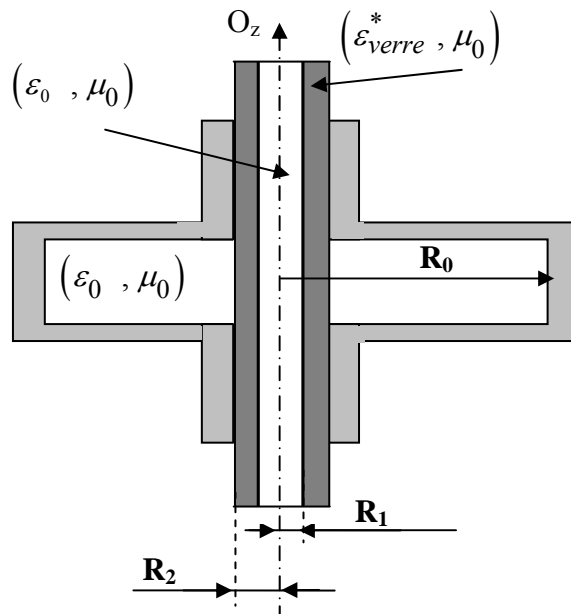
En identifiant les parties réelles et imaginaires,  
on peut exprimer  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  :

$$\varepsilon' = 1 - 2 \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 G_{020} \frac{\Delta f}{f} \dots\dots\dots (2.87)$$

$$\varepsilon'' = \left(\frac{R_0}{R_1}\right)^2 \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) G_{020} \dots\dots\dots (2.88)$$

**II-3-2-Cas d'un support : tube de verre vide.**

Pour mesurer les permittivités diélectriques de liquide, on est amené à utiliser des tubes creux en pyrex de forme cylindrique de rayon interne  $R_1$  et de rayon externe  $R_2$



Figure(2.5): cavité chargée d'un tube rempli de liquide

La théorie des perturbations permet d'établir les expressions des permittivités diélectriques ( $\epsilon'_v$  et  $\epsilon''_v$ ) du pyrex.

A partir de la formule des perturbation (2.83), en remplaçant  $\epsilon^*$  par  $\epsilon'_v - j\epsilon''_v$ , on aboutit à :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = - \frac{\epsilon_0 (\epsilon'_v - 1 - j\epsilon''_v) \int_{R_1}^{R_2} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr}{2 \int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr} \dots\dots\dots (2.89)$$

Après intégration, on aboutit à :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2} \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = - \frac{(\epsilon'_v - 1 - j\epsilon''_v)}{2} \frac{1}{G_{verre}} \dots\dots\dots (2.90)$$

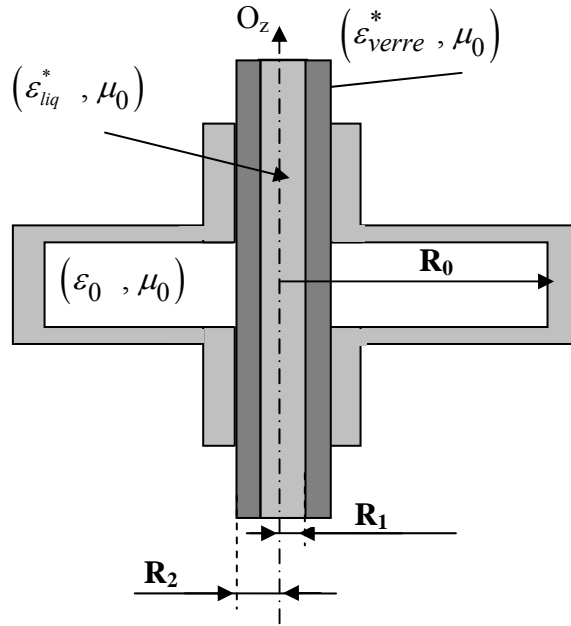
$$\text{où } G_{verre} = \frac{J_1^2(x_{02})}{\left(\frac{R_2}{R_0}\right)^2 \left\{ J_1^2\left(x_{02} \frac{R_2}{R_0}\right) + J_0^2\left(x_{02} \frac{R_2}{R_0}\right) \right\} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \left\{ J_1^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right) + J_0^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right) \right\}} \dots\dots\dots (2.91)$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on peut exprimer  $\epsilon'_v$  et  $\epsilon''_v$  :

$$\epsilon'_v = 1 - 2 \left(\frac{\Delta f}{f_0}\right) G_{verre} \dots\dots\dots (2.92)$$

$$\epsilon''_v = \Delta\left(\frac{1}{Q}\right) G_{verre} \dots\dots\dots (2.93)$$

II-3-3-Cas d'un échantillon : tube rempli de liquide



Figure(2.6): cavité chargée d'un tube rempli de liquide

De la formule de perturbation (2.83), en décomposant l'intégrale sur le volume du liquide de permittivité  $\epsilon_{liq}^* = \epsilon'_{liq} - j\epsilon''_{liq}$  et sur le volume du tube de permittivité  $\epsilon_v^* = \epsilon'_v - j\epsilon''_v$ , on aura :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2}\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{(\epsilon'_{liq} - 1 - j\epsilon''_{liq}) \int_0^{R_1} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr}{2 \int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr} - \frac{(\epsilon'_v - 1 - j\epsilon''_v) \int_{R_1}^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr}{2 \int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr} \dots (2.94)$$

Après intégration, on obtient :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{j}{2}\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = -\frac{(\epsilon'_v - 1 - j\epsilon''_v)}{2} \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \frac{1}{G_{020}} - \frac{(\epsilon'_v - 1 - j\epsilon''_v)}{2} \frac{1}{G_{verre}} \dots (2.95)$$

Où  $G_{020}$  et  $G_{verre}$  sont exprimés par les relations (2.86) et (2.91).

Les valeurs de  $\epsilon'_v$  et  $\epsilon''_v$  sont déterminées préalablement par les formules (2.92) et (2.93).

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on aboutit aux expressions de  $\epsilon'_{liq}$  et  $\epsilon''_{liq}$  :

$$\varepsilon'_{liq} = 1 - 2 G_{020} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \left( \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)_{verre+liq} + (1 - \varepsilon'_v) \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{G_{020}}{G_{verre}} \dots\dots\dots (2.96)$$

$$\varepsilon''_{liq} = G_{020} \left( \frac{R_0}{R_1} \right)^2 \Delta \left( \frac{1}{Q} \right)_{verre+liq} - \varepsilon''_v \left( \frac{R_2}{R_1} \right)^2 \frac{G_{020}}{G_{verre}} \dots\dots\dots (2.97)$$

**II-3-4-La cavité réelle :**

La cavité réelle est différente de la cavité idéale, pour cela on doit tenir compte de différents effets dans nos calculs comme les effets de la conductivité finie des parois, les effets des trous d'insertion et les effets de l'air.

**II-3-4-1-Effet de la conductivité finie des parois :**

Lorsque la conductivité des parois métalliques est finie, les ondes électromagnétique pénètrent en s'affaiblissant dans le métal sur une profondeur  $\delta$  de quelques dixième micromètres [24]. Au delà de cette profondeur, le champ électrique et l'induction magnétique sont nuls, et le métal peut être considéré parfait. On prendra comme volume  $V_0$  de la cavité perturbée la région délimitée par la surface  $\Sigma$  englobant le volume de la cavité délimitée par les parois métalliques de surface  $\Sigma_1$  et la partie métallique d'épaisseur  $\delta$  et de volume  $V_1$  voir figure (2.7).

Dans la région où le métal peut être considéré parfait, on a  $\varepsilon = -j$  et  $\mu = j0$ .

Dans la région métallique perturbée d'épaisseur  $\delta$  et de volume  $V_1$ , le métal peut être considéré comme un diélectrique non chargé ayant des courants de surface nuls, une permittivité diélectrique  $\varepsilon = -\frac{j\sigma}{\omega\varepsilon_0}$  et une perméabilité magnétique  $\mu = 1$ .

L'effet de la conductivité finie peut être estimé à l'aide de la théorie des perturbations. Il provoque une diminution de la fréquence de résonance et du coefficient de qualité de la cavité.

En reprenant la formule des perturbations (2.74)

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\iiint_{V_1} [(\vec{E}_i \vec{D} - \vec{D}_i \vec{E}) - (\vec{H}_i \vec{B} - \vec{B}_i \vec{H})] dV}{\iiint_{V_0} (\vec{E} \vec{D} - \vec{H} \vec{B}) dV}$$

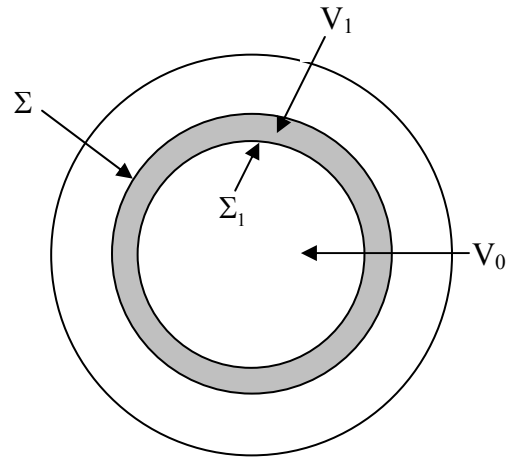


Figure (2.7) : parois de la cavité

on peut évaluer ces deux diminutions.

Dans l'intégrale du numérateur,  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  sont le champ électrique et l'induction magnétique existants dans la région de volume  $V_1$  lorsque le métal est considéré parfait (état non perturbé) et  $\vec{E}_i$  et  $\vec{B}_i$  les composantes additionnelles qu'il faut rajouter à  $\vec{E}$  et  $\vec{B}$  lorsque le métal n'est pas considéré parfait (état perturbé). Dans le cas du métal parfait,  $\vec{E} = \vec{0}$  et  $\vec{B} = \vec{0}$ . Le numérateur se simplifie et s'écrit :

$$N = \iiint_{V_1} (\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H} \vec{B}_i) dV \dots\dots\dots (2.98)$$

Nous ferons aussi remarquer que dans l'état non perturbé le champ électrique  $E$  dans la cavité est normal à  $\Sigma_1$  et le champ magnétique  $H$  lui est tangentiel (condition aux limites sur les conducteurs parfaits). Dans l'état perturbé  $\vec{D}$  est remplacé par  $(\vec{D} + \vec{D}_i)$ .

En utilisant les conditions aux limites a travers  $\Sigma_1$ .

$$(\vec{D} + \vec{D}_i)_{metal} = (\vec{D})_{cavité} \dots\dots\dots (2.99)$$

$$(\vec{D} + \vec{D}_i)_{metal} = \epsilon \epsilon_0 (\vec{E}_0 + \vec{E}_i)_{metal} \dots\dots\dots (2.100)$$

$$\text{où } \varepsilon = -\frac{j\sigma}{\varepsilon_0\omega} \text{ et } (\vec{E}_0)_{\text{métal}}=0$$

Des deux relations (2.99) et (2.100) il est possible d'écrire.

$$(\vec{D})_{\text{métal}} = \varepsilon_0(\vec{E})_{\text{cavité}} \Rightarrow (\vec{E}_i)_{\text{métal}} = \frac{(\vec{E})_{\text{cavité}}}{\varepsilon} \Rightarrow \vec{E}_i \vec{D} = \frac{\varepsilon_0 E^2}{\varepsilon}$$

Puisque  $H$  est tangential à  $\Sigma_1$  et vu que la composante tangentielle de  $H$  est continue à travers  $\Sigma_1$  nous avons :

$$(\vec{H} + \vec{H}_i)_{\text{métal}} = (\vec{H})_{\text{cavité}}$$

$$(\vec{B} + \vec{B}_i)_{\text{métal}} = \mu_0(\vec{H} + \vec{H}_i)_{\text{métal}}$$

Compte tenue les deux relations précédentes on a.

$$(\vec{B} + \vec{B}_i)_{\text{metal}} = \mu_0(\vec{H})_{\text{cavité}}$$

Comme  $(\vec{B})_{\text{metal}} = 0$  (Conducteur parfait  $\mu = j0$ ), la dernière expression se simplifie et permet d'exprimer l'induction additionnelle  $\vec{B}_i$

Donc

$$(\vec{B}_i)_{\text{métal}} = \mu_0(\vec{H})_{\text{cavité}}$$

On peut donc finalement écrire :

$$\vec{E}_i \vec{D} - \vec{H} \vec{B}_i = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon} E^2 + \mu_0 H^2 \dots\dots\dots (2.101)$$

Cette relation est valable seulement sur la surface  $\Sigma_1$ . Mais en pénétrant dans le métal,  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  sont atténuées de manière exponentielle :

$$\exp\left\{\left[-1+j\right]\frac{\xi}{\delta}\right\} \text{ où } \delta = \sqrt{\frac{2}{\omega\mu_0\sigma}} \dots\dots\dots(2.102)$$

$\xi$  : représente la direction normale à  $\Sigma_1$ .

$\delta$  : la profondeur de pénétration dans le mital.

En tenant compte du fait que le métal utilisé est généralement un bon, la valeur de la conductivité  $\sigma$  ou de  $\varepsilon$  ( $= -j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0}$ ) est très grande.

$$\varepsilon = -j \frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \dots\dots\dots(2.103)$$

Ce qui nous conduit à négliger  $\frac{\varepsilon_0 E^2}{\varepsilon}$  devant  $\mu_0 H^2$  :

L'expression  $(\vec{E}_i \vec{D} + \vec{H}_i \vec{D}_i)$ , donc le volume  $V_e$  peut être approximée à

$$(\vec{E}_i \vec{D} + \vec{H}_i \vec{B}_i) \approx \mu_0 H^2 \exp\left[-(1+j)\frac{\xi}{\delta}\right] \dots\dots\dots(2.104)$$

Et le numérateur se réduit à

$$N = \iiint_{\Sigma} \int_0^{\infty} \mu_0 H^2 \cdot \exp\left[-(1+j)\frac{\xi}{\delta}\right] d\xi d\Sigma = \mu_0 \frac{\delta}{2} (1-j) \iint_{\Sigma} H^2 d\Sigma \dots\dots\dots(2.105)$$

L'intégral du dénominateur peut se simplifier aussi.

$$\begin{aligned} D &= \iiint_{V_0} (\vec{E}\vec{D} - \vec{H}\vec{B})dV = \iiint_{V_0} (\varepsilon_0 E^2 - \mu_0 H^2)dV \\ &= 2\varepsilon_0 \iiint_{V_0} E^2 dV = 2\mu_0 \iiint_{V_0} H^2 dV \dots\dots\dots(2.106) \end{aligned}$$

Tenant les expressions simplifiées de numérateur et dénumérateur la formule des perturbation s'écrit.

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{1}{2} j\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{-\delta(1-j)\iint_{\Sigma} H^2 d\Sigma}{2\iiint_{V_0} H^2 dV} \dots\dots\dots (2.107)$$

Pour la cavité parfaite (état non perturbé) le coefficient de qualité est infini, alors

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q} - \frac{1}{\infty} = \frac{1}{Q} \dots\dots\dots(2.108)$$

En identifiant parties imaginaires et parties réelles de l'équation (2.107), on peut déduire l'expression de  $Q$ .

$$Q = \frac{1}{\delta} \frac{\iiint_{V_0} H^2 dV}{\iint_{\Sigma} H^2 d\Sigma} \dots\dots\dots (2.109)$$

et l'expression de la pulsation relative :

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\frac{\delta}{2} \frac{\iint_{\Sigma} H^2 d\Sigma}{2\iiint_{V_c} H^2 dV} \dots\dots\dots (2.110)$$

Pour le mode  $TM_{020}$  ou le champ magnétique est donné par

$$H_0 = jE_0 \left(\frac{\omega\mathcal{E}}{k_c}\right) J_1(k_c r) \dots\dots\dots (2.111)$$

Après intégration, les équations précédentes (2.107) et (2.110) s'écrivent.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega} = -\delta\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R_0}\right) \dots\dots\dots (2.112)$$

$$Q = \frac{1}{\delta\left(\frac{1}{L} + \frac{1}{R_0}\right)} \dots\dots\dots (2.113)$$

Ces deux relations expriment l'effet de la conductivité des parois sur la fréquence et le coefficient de qualité à travers la grandeur  $\delta$  (profondeur de pénétration et à travers les grandeurs géométrique  $R_0$  et  $L$  de la cavité).

**II-3-4-2-Effet des trous d'insertion :**

Les trous d'insertion de rayon  $r_1$  ( $r_1 \ll R_0$  rayon de la cavité) dans les cavités provoquent des variations dans les parties réelles et imaginaires de la fréquence de résonance complexe. Ces changements sont généralement minimes mais peuvent être significatifs dans des mesures de haute précision ; dans ce paragraphe, on essaiera de calculer de manière analytique et en utilisant la théorie de perturbation, l'effet des trous d'insertion sur la mesure des constantes diélectriques.

Sans les trous d'insertion la cavité entretient le mode  $TM_{020}$  dont les champs électromagnétiques sont connus de manière exacte. Par continuité les champs dans les trous d'insertion seront de type  $TM_{0v}$  et présenteront la même symétrie cylindrique que la cavité c'est-à-dire une combinaison linéaire de modes  $TM_{0v}$  d'un guide d'ondes cylindrique aux coupures  $k_v = \frac{x_{0v}}{r_1}$ . ( $k_v$  est le vecteur d'onde de coupure du mode  $v$  et  $x_{0v}$  est la racine  $v$  ième de la fonction de Bessel  $J_0$ )

L'expression générale du champ électrique (et magnétique) est une combinaison linéaire des champs électriques (et magnétiques) correspondent à chaque mode  $TM_{0v}$ .

$$E_z = \sum_{v=1}^{\infty} A_v J_0(k_v r) \exp(-\gamma_v z) \dots\dots\dots(2.114)$$

$$H_{\theta} = \sum_{v=1}^{\infty} j \frac{\omega \epsilon}{k_v} A_v J_1(k_v r) \exp(-\gamma_v z) \dots\dots\dots(2.115)$$

Les  $A_v$  sont des constantes à déterminer.  $k_v$  et  $\gamma_v$  (le vecteur de propagation dans ce mode) sont reliés par la relation

$$k_v^2 = \gamma_v^2 + \omega^2 \mu_0 \epsilon_0 \dots\dots\dots(2.116)$$

Au niveau de la paroi des trous ( $r = r_1$ ), le champ électrique associé à chaque mode est nul, par conséquent le produit  $k_v r_1$  est une racine de  $J_0$  et vérifie donc l'inégalité  $k_v r_1 \geq x_{01} \approx 2.41$

ou bien  $k_v \gg \left(\frac{1}{r_1}\right)^2$ . De même, le champs électrique (2.17) sur les parois de la cavité ( $r = R_0$ )

est nul, le terme  $\sqrt{\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0} R_0$  sera donc égal à 5.52 (2<sup>ème</sup> racine de  $J_0$ ). Comme  $R_0 \gg r_1$ , les

carrés des modules des vecteurs d'ondes de coupure  $k_v \gg \left(\frac{1}{r_1}\right)^2$  sont très grands devant

$\omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 \left( = \left(\frac{5.52}{R_0}\right)^2 \right)$ . Par conséquent la relation (2.116) peut être approximée à :  $k_v^2 \approx \gamma_v^2$  ou

bien à :  $\gamma_v \approx k_v$

Si  $E_z$  est connu à l'interface cavité trou d'insertion dans le plan  $z=0$ , on peut calculer les coefficients  $A_v$  en utilisant les propriétés des séries Fourier-Bessel. Les expressions de ces coefficients sont données par :

$$A_v = \frac{2}{r_1^2 J_1^2(x_{0v})} \int_0^{r_1} E_z(z=0) J_0(k_v r) r dr \dots\dots\dots(2.117)$$

Dans le cas du mode  $TM_{020}$ ,  $E_z(z=0)$  est parfaitement connu et peut être remplacé par son expression (2.38) dans l'intégrale :

$$A_v = \frac{2}{r_1^2 J_1^2(x_{0v})} \int_0^{r_1} E_0 J_0^2(k_0 r) J_0(k_v r) r dr \dots\dots\dots(2.118)$$

Les fonctions de Bessel sont orthogonales, l'intégrale est nulle sauf dans le cas où  $k_v = k_0$ .

L'expression de  $A_v$  se réduit à :

$$A_v = \frac{2}{r_1^2 J_1^2(x_{0v})} \int_0^{r_1} E_0 J_0^2(k_0 r) r dr \dots\dots\dots(2.119)$$

En utilisant le résultat de l'intégrale suivant

$$\int_0^{r_1} J_0^2(k_v r) r dr = \frac{r_1^2}{2} [J_1^2(k_v r_1)] \dots\dots\dots (2.120)$$

on aboutit à l'expression finale :

$$A_v = \frac{2}{r_1^2 J_1^2(x_{0v})} J_0(x_{0v} \frac{r_1}{R_0}) E_0 \dots\dots\dots (2.121)$$

A partir de la théorie des perturbations, il est possible de calculer la variation de la fréquence de résonance complexe de la cavité due aux trous d'insertion :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \frac{\Delta\omega}{\omega} + \frac{1}{2} j\Delta(\frac{1}{Q}) = \frac{\iiint_{V_{trou}} \varepsilon E_z E_z^* dV}{\iiint_{V_{cavité}} E_z^2 dV} \dots\dots\dots (2.122)$$

En remplaçant  $E_z$  existant dans la cavité par son expression (2.74) dans l'intégrale du numérateur, on obtient :

$$\iiint_{V_{cavité}} E_z^2 dV = \pi E_0^2 L R_0^2 J_1^2(k_v R_0) \dots\dots\dots (2.123)$$

De même, en remplaçant  $E_z$  existant dans le trou d'insertion par son expression (2.114) dans l'intégrale du dénominateur, on obtient :

$$\begin{aligned} \iiint_{V_{trou}} \varepsilon E_z E_z^* dV &= 2\pi \int_0^{\infty} \int_0^1 \sum_{v=1}^{\infty} A_v^2 J_0^2(k_v r) \cdot \exp(-2k_v z) \cdot r \cdot dr \cdot dz \\ &= 2\pi \sum_{v=1}^{\infty} \frac{A_v^2}{2k_v} \int_0^{r_1} J_0^2(k_v r) r dr \dots\dots\dots (2.124) \end{aligned}$$

où  $k_v = \frac{x_{0v}}{r_1}$

En remplaçant cette fois-ci  $A_v$  par son expression (2.121), on obtient finalement la formule des perturbations dans le cas d'une cavité vide :

$$\frac{\Delta\Omega}{\Omega} = \left(\frac{r_1}{R_0}\right)^2 \frac{r_1}{L} \cdot \frac{J_0^2(x_{02} \frac{r_1}{R_0})}{J_1^2(x_{02})} \sum_{v=1}^{\infty} \frac{1}{(x_{0v})^3} \dots\dots\dots (2.125)$$

**II-3-4-3-Effet de l'air :**

En réalité la cavité n'est pas vide, elle est remplie d'air. L'air est généralement humide et contient des impuretés sous forme de poussière. On supposera qu'il est toujours homogène et caractérisé par une constante diélectrique.

$$\epsilon_a = \epsilon_0(\epsilon'_a - j\epsilon''_a) \dots\dots\dots (2.126)$$

**II-3-4-3-1-Effet de  $\epsilon'_a$  :**

Pour calculer l'effet de  $\epsilon'_a$  il suffit d'exprimer le module du vecteur d'onde  $k$  en fonction de la pulsation et des caractéristiques du milieu dans les deux cas suivants :

- Cavité vide :  $k_0 = \omega_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \dots\dots\dots (2.127)$

- Cavité remplie d'air :  $k_{0a} = \omega_{0a} \sqrt{\epsilon_a \mu_0} \dots\dots\dots (2.128)$

Dans le mode  $TM_{020}$ , ces modules sont égaux au vecteur d'onde de coupure  $k_c = \frac{x_{02}}{R_0}$ .

Ceci permet de déterminer les expressions des deux pulsations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{x_{02}}{R_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_a}} \\ \text{et} \\ \omega_{0a} = \frac{x_{02}}{R_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon_a}} \end{array} \right. \dots\dots\dots (2.129)$$

et de déduire l'écart relatif de la pulsation de résonance de la cavité dû à l'effet de l'air.

$$\frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\omega_{0a}}{\omega_0} - 1 = -\frac{\sqrt{\varepsilon_a} - 1}{\sqrt{\varepsilon_a}} \dots\dots\dots (2.130)$$

**II-3-4-3-2-Effet de  $\varepsilon_a''$  :**

Pour estimer les effets de  $\varepsilon_a''$ , on suppose, par analogie aux conducteurs, que le diélectrique (l'air) possède une conductivité  $\sigma_a = \varepsilon_a'' \omega_0$  produisant une densité de courant  $J_a = \sigma_a E$ . La puissance moyenne dissipée dans le volume de la cavité  $V_c$  serait alors égale à:

$$p = \iiint_{V_c} \frac{E J_a}{2} dV = \sigma_a \iiint_{V_c} \frac{E E^*}{2} dV \dots\dots\dots (2.131)$$

et l'énergie moyenne dissipée dans ce même volume pendant une période  $T_0$  à :

$$W_d = p T_0 = p \frac{2\pi}{\omega_0} \dots\dots\dots (2.132)$$

L'énergie électromagnétique totale emmagasinée dans la cavité peut être aussi calculée :

$$W = \iiint_{V_c} \frac{(\varepsilon_0 \varepsilon_a' E^2 - \mu_0 H^2)}{2} dV = \varepsilon_0 \varepsilon_a' \iiint_{V_c} E^2 dV \dots\dots\dots (2.133)$$

Le rapport de ces deux énergies permet de calculer le coefficient de qualité  $Q_{air}$  dû aux pertes dans l'air :

$$Q_{air} = 2\pi \frac{W}{W_d} = \frac{\varepsilon_a'}{\varepsilon_a''} \dots\dots\dots (2.134)$$

La contribution de  $\varepsilon_a''$  sur le coefficient de qualité  $Q$  de la cavité :

$$\Delta\left(\frac{1}{Q}\right) = \frac{1}{Q_{air}} = \frac{\varepsilon_a''}{\varepsilon_a'} \dots\dots\dots (2.135)$$

a pour effet de diminuer du facteur de surtension.

Dans le pratique ces trois effets sont présents. Par conséquent, la fréquence de résonance  $\omega_{\text{exp}}$  de la cavité sans échantillon mesurée expérimentalement, ne correspond pas à la valeur théorique. Elle peut être corrigée par la formule établie par B.Yu.Kapilevich et al [6] :

$$\omega = \omega_{\text{exp}} \left( 1 + \frac{1}{2Q_0} \right) \dots\dots\dots(2.136)$$

où  $Q_0$  est le coefficient de la cavité sans échantillon. Ils proposent aussi une expression de la fréquence complexe de résonance de la cavité avec échantillon :

$$\Omega = \omega_{\text{exp}} \left( 1 + \frac{1}{2Q_0} \right) \left( 1 + j \frac{1}{2Q_e} \right) \dots\dots\dots(2.137)$$

où  $Q_e$  est donné par :

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{Q_{\text{echantillon}}} - \frac{1}{Q_0} \dots\dots\dots(2.138)$$

Et  $Q_{\text{echantillon}}$  : Est le coefficient de qualité de la cavité chargée d'un tube rempli de liquide.

La formule (2.137) sera utilisée dans la résolution de l'équation de dispersion.

**II-4- Calcul exact et résolution de l'équation de dispersion : [4-7, 18, 23]**

Les permittivités complexes du pyrex et du liquide sont obtenues par la résolution des équations de dispersion. Ces équations sont obtenues à partir des expressions des champs électromagnétiques et des conditions aux limites et de continuité des champs électromagnétique dans les différentes régions de la cavité.

**II-4- 1- Les expressions des champs électromagnétiques :**

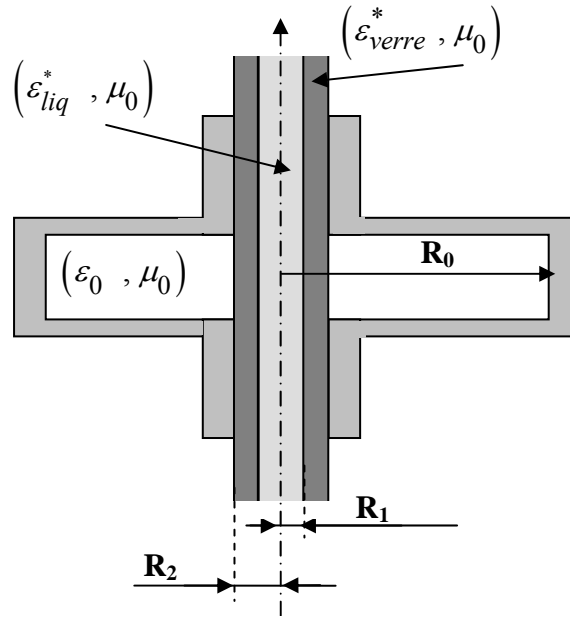


Figure 2.8 : cavité chargée d'un tube rempli de liquide

**-dans le liquide (région (1) : 0 < r < R<sub>1</sub>) :**

$$E_z = E_0 J_0(k_1 r) \dots\dots\dots (2.139)$$

$$H_\theta = \frac{E_0}{j\omega\mu_0 k_3} J_1(k_1 r) \dots\dots\dots (2.140)$$

**-dans le verre (région (2) : R<sub>1</sub> < r < R<sub>2</sub>) :**

$$E_z = E_0 [J_0(k_2 r) + C Y_0(k_2 r)] \dots\dots\dots (2.141)$$

$$H_\theta = \frac{E_0}{j\omega\mu_0 k_2} [J_1(k_2 r) + C Y_1(k_2 r)] \dots\dots\dots (2.142)$$

-dans l'air (région (3) :  $R_2 < r < R_0$ ) :

$$E_z = E_0 [J_0(k_3 r) + AY_0(k_3 r)] \dots\dots\dots(2.143)$$

$$H_\theta = \frac{E_0}{j\omega\mu_0 k_3} [J_1(k_3 r) + AY_1(k_3 r)] \dots\dots\dots(2.144)$$

où  $E_0, A$  et  $C$  sont des constantes réelles.

$J_0, J_1$  : fonctions de Bessel de 1<sup>er</sup> espèce d'ordre 0 et 1 respectivement.

$Y_0$  et  $Y_1$  : fonctions de Bessel de 2<sup>ième</sup> espèce d'ordre 0 et 1 respectivement.

on pose

$$k_0 = \frac{2\pi f_{\text{exp}}}{c} \dots\dots\dots(2.145)$$

où  $f_{\text{exp}}$  : fréquence de résonance de la cavité chargée d'un tube rempli de liquide.

$c$  : la vitesse de la lumière dans le vide.

$Q_0$  : le coefficient de qualité de la cavité sans échantillon.

$Q_e$  est donné par :

- Cas du tube vide :

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{Q_{\text{verre}}} - \frac{1}{Q_0} \dots\dots\dots(2.146)$$

- Cas du tube rempli de liquide :

$$\frac{1}{Q_e} = \frac{1}{Q_{\text{liq+verre}}} - \frac{1}{Q_0} \dots\dots\dots(2.147)$$

$Q_{\text{verre}}$  : Le coefficient de qualité de la cavité chargée d'un tube vide.

$Q_{\text{liq+verre}}$  : Le coefficient de qualité de la cavité chargée d'un tube rempli de liquide.

On note par  $k_i$  les constantes de propagation d'onde dans les différents régions ( $i=1, 2, 3$ ) de la cavité et sont données par :

$$k_3 = k_0 \left( 1 + \frac{1}{2Q_0} + \frac{j}{2Q_e} \right) \dots\dots\dots(2.148)$$

$$k_2 = \sqrt{\varepsilon_{verre}^*} k_3 \dots\dots\dots (2.149)$$

$$\varepsilon_{verre}^* = \varepsilon'_{verre} - j\varepsilon''_{verre} \dots\dots\dots(2.150)$$

$$k_1 = \sqrt{\varepsilon_{liq}^*} k_3 \dots\dots\dots (2.151)$$

$$\varepsilon_{liq}^* = \varepsilon'_{liq} - j\varepsilon''_{liq} \dots\dots\dots (2.152)$$

On convient de noter par la suite les expressions  $J_a(k_b R_c)$  ,  $Y_a(k_b R_c)$  par les expressions  $J_{abc}$  ,  $Y_{abc}$  respectivement.

**II-4- 2- Equations de dispersion :**

**II-4- 2-1-cas du tube vide :**

Dans ce cas on prendra  $k_1 = k_3$

L'équation de dispersion obtenue est la suivante :

$$\frac{J_{022} + CY_{022}}{k_2 [J_{122} + CY_{122}]} = \frac{J_{032} + AY_{032}}{k_3 [J_{132} + AY_{132}]} \dots\dots\dots(2.153)$$

où

$$A = -\frac{J_{031}}{Y_{031}} \dots\dots\dots(2.154)$$

$$C = \frac{k_2 G_1 J_{121} - J_{021}}{Y_{021} - k_2 G_1 Y_{122}} \dots\dots\dots(2.155)$$

$$G1 = \frac{J_{031}}{k_3 J_{131}} \dots\dots\dots(2.156)$$

La résolution de l'équation de dispersion (2.153) permet d'obtenir les valeurs de  $k_2$  pour les différentes valeurs du coefficient de qualité Q et des fréquences de résonance de la cavité vide ou chargé d'un tube vide. Cette résolution se fait par des méthodes itératives programmées en langage MATLAB.

Les valeurs des constantes  $\epsilon'_{verre}$  et  $\epsilon''_{verre}$  sont déduites des formules suivantes :

$$\epsilon'_{verre} = \text{Re} \left( \left( \frac{k_2}{k_3} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(2.157)$$

$$\epsilon''_{verre} = \text{Im} \left( \left( \frac{k_2}{k_3} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(2.158)$$

**2-cas du tube rempli de liquide :**

La valeur de  $\epsilon^*_{verre}$  qui servira par la suite est celle obtenue précédemment.

L'équation de dispersion obtenue dans ce cas est la suivante :

$$\frac{J_{011}}{k_1 [Y_{111}]} = \frac{J_{021} + C_1 Y_{021}}{k_2 [J_{121} + C_1 Y_{121}]} \dots\dots\dots(2.159)$$

où

$$C_1 = \frac{GJ_{122} - J_{022}}{[Y_{022} - GY_{122}]} \dots\dots\dots(2.160)$$

$$G = \left( \frac{k_2}{k_3} \right) \frac{J_{032} + AY_{032}}{[J_{132} + AY_{132}]} \dots\dots\dots(2.161)$$

$$A = \frac{-J_{030}}{Y_{030}} \dots\dots\dots(2.162)$$

De la même manière que dans le cas du tube vide on détermine les valeurs de  $k_1$  par des méthodes itératives.

Les valeurs des constantes  $\epsilon'_{liq}$  et  $\epsilon''_{liq}$  sont déduites des formules suivantes :

$$\varepsilon'_{liq} = \text{Re} \left( \left( \frac{k_1}{k_3} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(2.163)$$

$$\varepsilon''_{liq} = \text{Im} \left( \left( \frac{k_1}{k_3} \right)^2 \right) \dots\dots\dots(2.164)$$

## **Chapitre III**

# **DISPOSITIF EXPERIMENTAL ET METHODES DE MESURE**

**III - Partie expérimentale :****III -1-Dispositif expérimental :**

Le banc utilisé pour nos mesures est schématisé sur la figure (3.1).

Il se compose de :

Un groupe générateur vobulateur (1 et 2), il génère une tension en dents de scie de tension variable de 0 à 10 V. L'injection de cette tension excite la diode GUNN (3) qui génère des ondes dans la bande X (de 8.5 GHz à 12.5 GHz) à des puissances de quelques dizaines de mW. Ces ondes sont guidées par des guides d'ondes rectangulaires dans le dispositif expérimental.

Un isolateur (4) qui empêche les ondes réfléchies d'atteindre la diode GUNN.

Un Onde mètre (5), il est constitué d'une cavité cylindrique ayant une fréquence propre de résonance. Cette fréquence de résonance peut être modifiée par l'intermédiaire d'une vis micrométrique qui déplace un court circuit mobile constituant le fond de la cavité. Lorsque la fréquence de l'onde qui la traverse est égale à sa fréquence de résonance, cette cavité absorbe une partie de l'énergie électromagnétique passant dans le guide provoquant une baisse plus ou moins forte du signal détecté à la sortie de l'ondemètre.

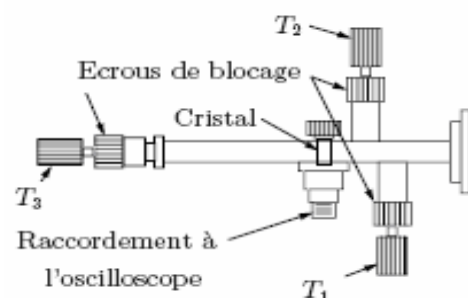
Un atténuateur variable (6), il comporte une lame métallique à profil variable pouvant s'enfoncer plus au moins à l'intérieur du guide ; en jouant sur l'enfoncement de cette lame, on peut régler le niveau de puissance de l'onde émise à la cavité.

Un ensemble (transition guide-coaxial, connecteur type N et antenne en forme de boucle) (7), il permet l'excitation de la cavité.

Une cavité [27] cylindrique à base circulaire (8). Des trous d'insertion, de faible diamètre ont été usinés au centre des deux bases du cylindre pour permettre l'introduction des tubes capillaires en pyrex remplis de liquides à étudier. Cette cellule est en laiton. Son rayon interne  $R_0$  est égal à 28.4 mm

Un Coupleur directif (9) de 10 dB de couplage, est utilisé pour prélever une partie des ondes réfléchies par la cavité.

Un Adaptateur à piston plongeur (10). C'est une cavité contenant le cristal détecteur, qui est munie de trois tige  $T_1$ ,  $T_2$  et  $T_3$  s'ajustant par



enfoncez de façon à rendre maximum le signal détecté sur l'oscilloscope.

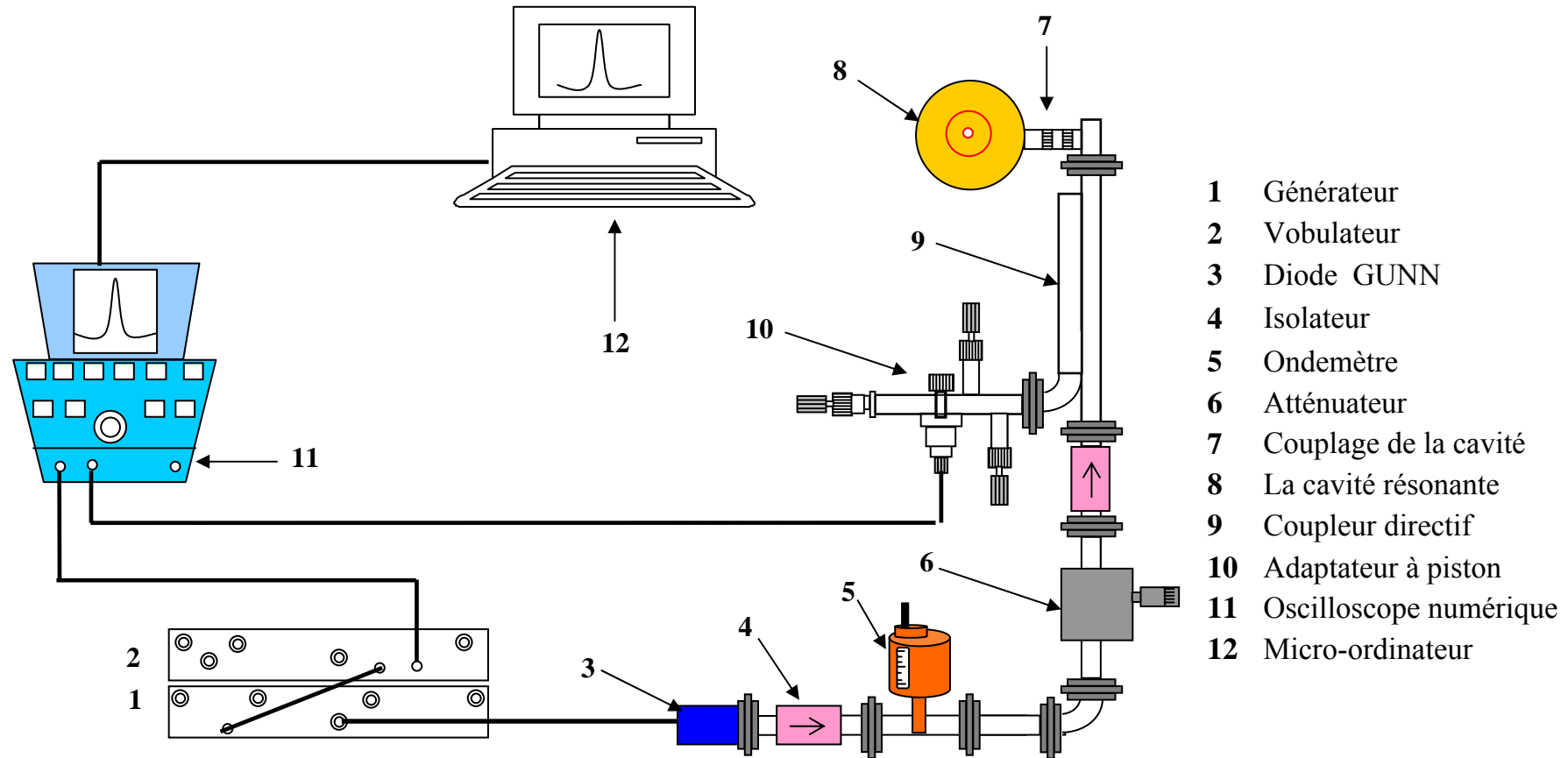


Figure 3.1 : dispositif expérimental

La commande d'accord  $T_3$  (court-circuit variable) permet de placer un ventre sur le cristal, les tubs (réglages d'adaptation)  $T_1$  et  $T_2$  effectuent l'adaptation d'impédance. C'est une adaptation à bande étroite, le réglage des tiges doit se faire à chaque changement de fréquence.

**III-2 - Caractéristiques des capillaires :**

On a utilisé 5 tubes en pyrex de type capillaire à volume  $V$  calibré. Leur forme est cylindrique à base circulaire de rayons interne  $R_1$  et externe  $R_2$  (figure 8). Des bandes de couleurs différentes (vert, orange, blanc et noir) sont marquées sur ces tubes pour les distinguer.

Si deux tubes ont un même volume mais des épaisseurs différentes, la largeur de la bande est différente, comme dans le cas des tubes à bande noire.

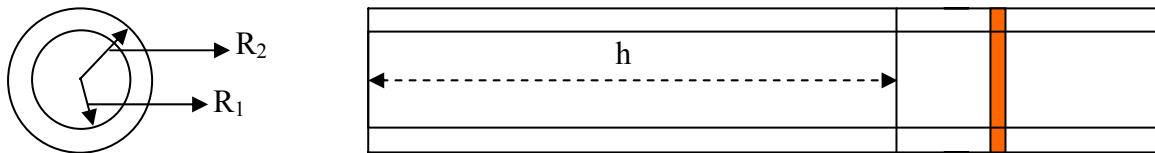


Figure 3.2 : le tube capillaire utilisé

Sur ces tubes, sont aussi marqués par des traits fins, les hauteurs  $h$  des volumes calibrés.

La valeur du rayon externe  $R_2$  est directement mesurée par un pied à coulisse, par contre la valeur de  $R_1$  est déduite par calcul à partir de la formule suivante :

$$R_1 = \sqrt{\frac{V}{\pi h}} \dots\dots\dots(3.1)$$

où  $V$  est le volume calibré donné par le constructeur et  $h$  hauteur mesurée par pied à coulisse.

**III-3-principe de fonctionnement :**

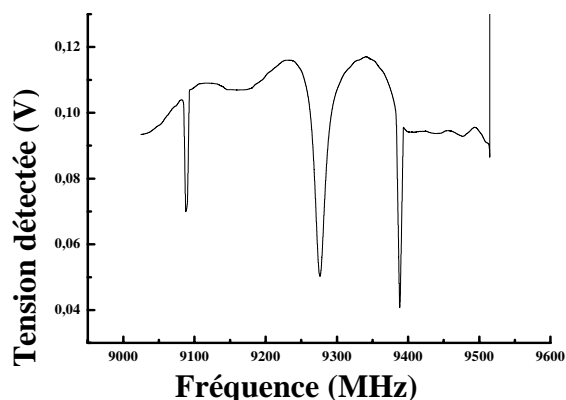
Le détail du dispositif expérimental est représenté sur la (figure 7), L'onde incidente provenant de la diode GUNN (3) après avoir traversé un isolateur (4), un ondemètre (5), un atténuateur 6, un coupleur directif (9), arrive à l'entrée de la cellule (8). Une partie de l'onde incidente est réfléchiée et l'autre partie est transmise à l'intérieur de la cavité par l'intermédiaire d'une antenne (7). Une fraction de l'onde réfléchiée est transmise à l'adaptateur à piston par le coupleur directif (9). Grâce au cristal de la sonde de l'adaptateur, une tension  $V$  proportionnelle à la puissance hyperfréquence est délivrée.

Cette tension est connectée sur la voie Y d'un oscilloscope numérique (11). Sur sa voie X, est connectée la tension de vibration en dents de scie, proportionnelle à la fréquence des ondes générées par la diode GUNN. En mode XY, on visualise ainsi les variations de la puissance réfléchie en fonction de la fréquence. Cet oscilloscope, grâce à sa carte d'acquisition incorporée, permet de numériser la tension  $V$  en un ensemble de tension  $V_N$  et fait correspondre à chaque  $V_N$  un temps  $t_N$  multiple du temps d'échantillonnage  $\Delta t$  :  $t_N = N \Delta t$ . Ces valeurs numérisées sont enregistrées dans la mémoire de l'oscilloscope sous forme de fichier. Grâce à sa sortie RS232, il est possible de transférer ces fichiers vers la mémoire d'un ordinateur.

#### III-4 - Technique de mesure :

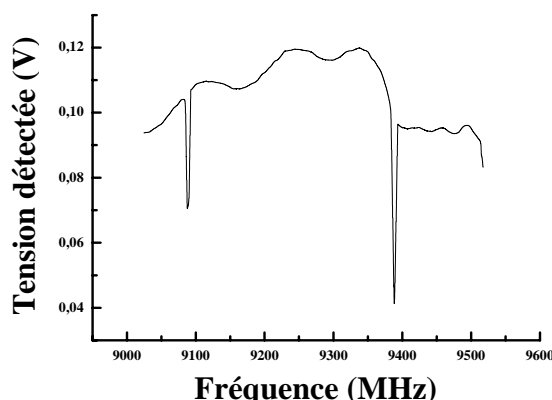
La cavité résonne à la fréquence  $f_0$ . Elle absorbe un maximum d'énergie d'onde incidente à cette fréquence. La puissance réfléchie est la différence entre la puissance incidente et la puissance absorbée par la cavité ; elle se traduit par des courbes de résonance inversée (figure III.3). Les deux courbes se trouvant de part et d'autre de la courbe de résonance indiquent les marqueurs  $m_1$  et  $m_2$  dont les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  sont mesurées à l'aide de l'ondemètre. La linéarité entre les temps  $t_N$  (ou les nombres  $N$ ) et les fréquences de l'onde, permet de graduer l'axe des X en fréquence.

Sur la (figure III.4), est représentée la puissance réfléchie lorsque la cavité est complètement désadaptée. Cette désadaptation est réalisée tout simplement par introduction d'un fil conducteur dans la cavité. Une soustraction de ces deux courbes permet de déduire, la puissance absorbée par la cavité (figure III.5)



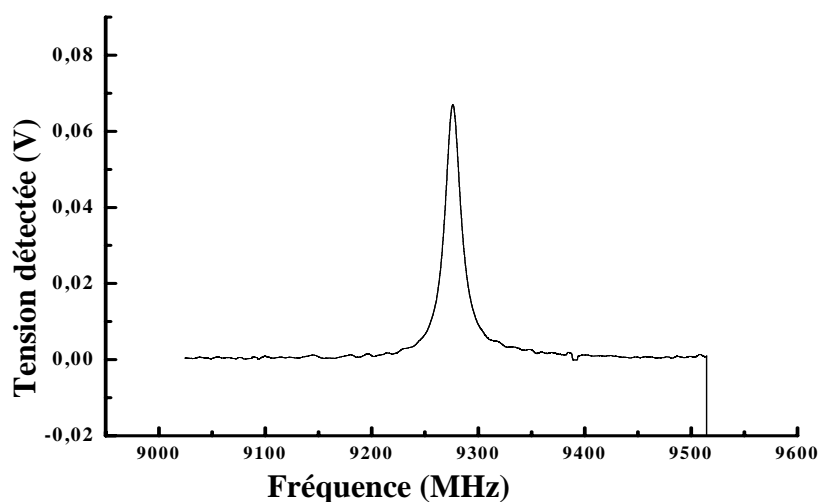
Fréquence (MHz)

Figure 3.3 : puissance hyperfréquence réfléchiée par la cavité avec ou sans échantillon



Fréquence (MHz)

Figure 3.4 : puissance hyperfréquence réfléchiée par la cavité désadaptée.



Fréquence (MHz)

Figure 3.5 : puissance hyperfréquence transmise à la cavité avec ou sans échantillon

Après le transfert des valeurs expérimentales, leur traitement se fait par programme informatique. Ce programme procède tout d'abord à un lissage des valeurs expérimentales en utilisant la méthode des moindres carrés. En deuxième étape, il détermine les valeurs de la fréquence de résonance  $f_0$  correspondant au maximum de tension  $V_{\max}$  et les deux fréquences  $f_1$  et  $f_2$  correspondant à la mi-hauteur  $\frac{V_{\max}}{2}$  (figure 17). Le coefficient de qualité

$Q$  est calculé à partir de la formule :

$$Q = \frac{f_2 - f_1}{f_0} \dots\dots\dots(3.2)$$

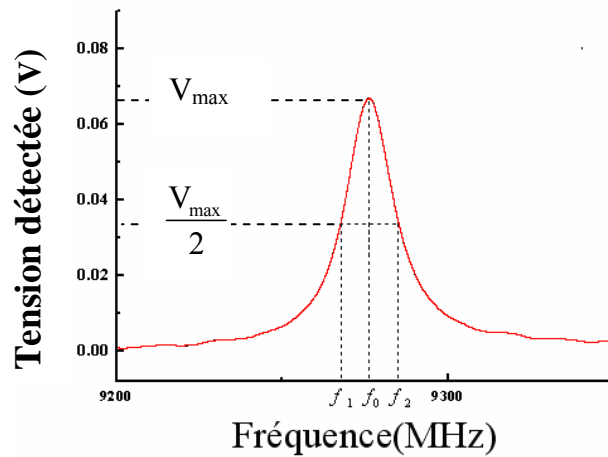


Figure 3.6 : courbe présentant la puissance absorbée

Pour s’assurer de l’efficacité du programme traitement des données, il a été nécessaire de l’appliquer sur des courbes simulées.

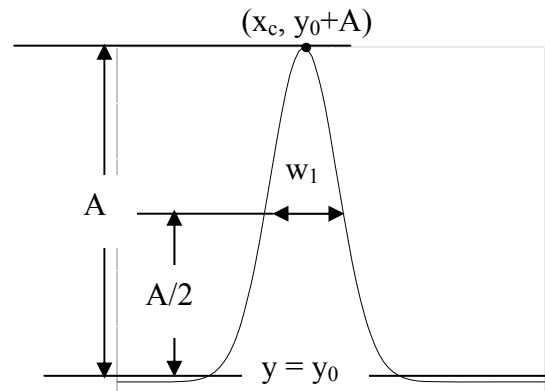
**III -5-Test du programme de traitement des données expérimentales:**

On a simulé des courbes similaires aux courbes expérimentales, à l’aide de fonctions de Gauss-Ampère dont les paramètres Q (coefficient de qualité) et  $f_0$  (fréquence de résonance) sont connus.

Equation Fonction Gauss-Ampère

$$y = y_0 + A \exp\left(-\frac{(x - x_c)^2}{2w^2}\right)$$

où  $2w = w_1 / \sqrt{\ln(4)}$



Graphe de la fonction Gauss-Ampère

Dans notre cas,  $f_0$  correspond à  $x_c$  et  $Q = \frac{f_2 - f_1}{f_0}$  correspond à  $w_1/x_c$ .

Les fonctions qui ont servi à la simulation sont les suivantes

- Fonction correspondante au marqueur  $m_1$  :  $y_1 = -0.08 \exp\left(-\frac{(x - 35000)^2}{2 * (20000 / 236)^2}\right)$ ,

la fréquence  $f_{m_1}=9376\text{MHz}$  correspond au marqueur  $m_1$  ( $x_{cm1}=35000$ )

- Fonction correspondante au marqueur  $m_2$  :  $y_2 = -0.08 \exp\left(-\frac{(x - 45000)^2}{2 * (20000 / 236)^2}\right)$ ,

la fréquence  $f_{m_2}=9140\text{MHz}$  correspond au marqueur  $m_1$  ( $x_{cm_2}=45000$ ).

- Fonction correspondante à la courbe de résonance de la puissance réfléchie par la cavité :

$y_3 = 0.127 - 0.06 \exp\left(-\frac{(x - 39364)^2}{2 * (786.6)^2}\right) + y_1 + y_2$ , la fréquence  $f_0=9273\text{MHz}$  correspond à

$x_{c0}=39364$  et  $f_2 - f_1 = 43.71\text{MHz}$  correspond à  $w_1 = 2w\sqrt{\ln(4)} = 2 * 786.6 * \sqrt{\ln(4)} = 1852.3$

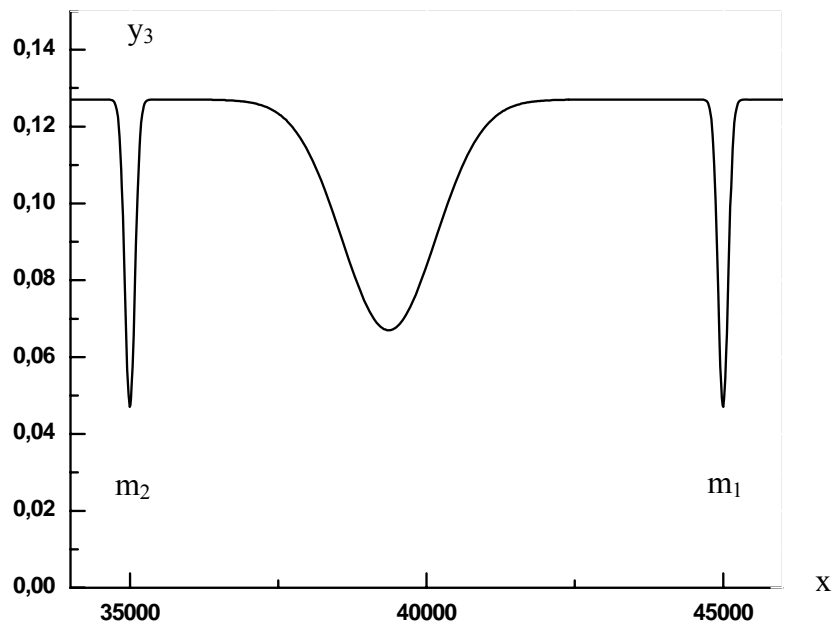
Le coefficient de qualité Q serait alors égal à 212.13.

- Fonction correspondante à la courbe de résonance de la puissance réfléchie par la cavité contenant un fil conducteur :  $y_4 = 0.127 + y_1 + y_2$

- Fonction correspondante à la courbe de résonance de la puissance transmise à la cavité :

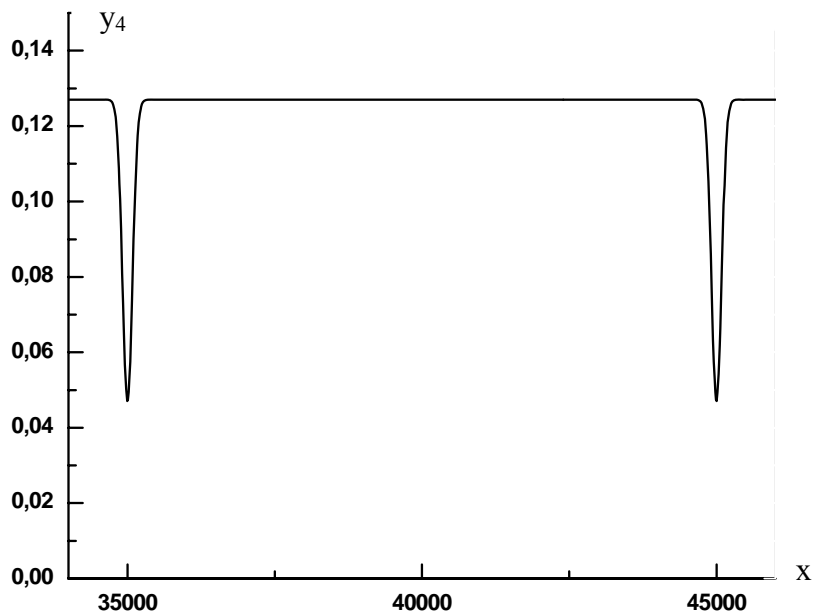
$$y_5 = y_4 - y_3 = 0.06 \exp\left(-\frac{(x - 39364)^2}{2 * (786.6)^2}\right)$$

La courbe représentative de la puissance réfléchie par la cavité a la forme suivante:

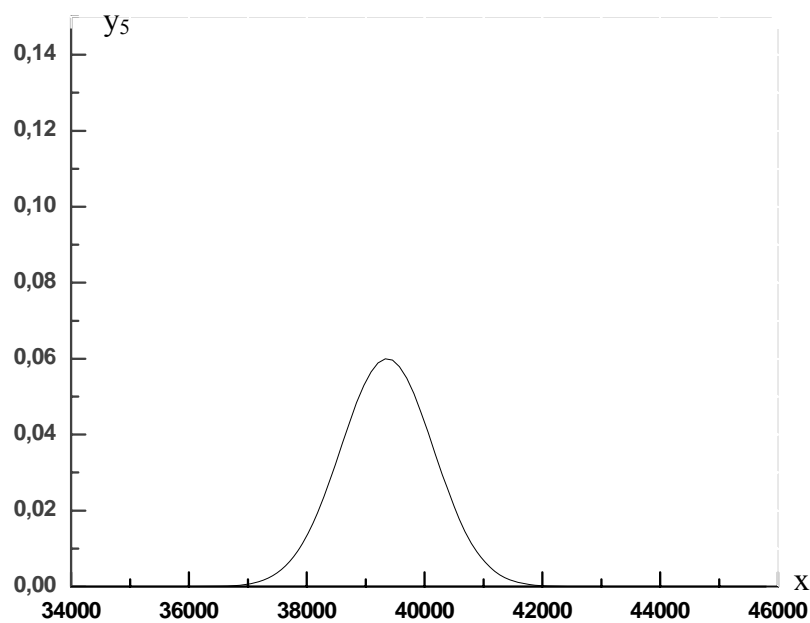


Courbe de résonance

Et celle de la courbe de la puissance réfléchiée par la cavité contenant un fil conducteur:



Par soustraction des deux courbes on obtient la courbe représentative de la puissance transmise à la cavité:



Le programme de traitement de données va tout d'abord lisser les valeurs expérimentales puis déterminer les positions  $x_{cm1}$  et  $x_{cm2}$  des marqueurs  $m_1$  et  $m_2$ . et leur faire correspondre les fréquences  $f_{cm1}$  et  $f_{cm2}$  supposées mesurées à l'aide de l'ondemètre. Cette correspondance permet de déterminer la loi de conversion des valeurs  $x$  en fréquences  $f$ :

$$f = \frac{f_{cm1} - f_{cm2}}{x_{cm1} - x_{cm2}}(x - x_{cm1}) + f_{cm1} \dots\dots\dots(3.2)$$

Ensuite il détermine la fréquence de résonance et les deux valeurs de fréquence à mi hauteur de puissance. Enfin il calculera le coefficient de qualité.

Le tableau suivant regroupe les valeurs théoriques et les valeurs déterminées par le programme de traitement de données

Tableau (3.1)

	Valeurs théoriques	Valeurs déterminées par le programme
$f_2 - f_1$ (MHz)	33.71	33.15
$f_0$ (MHz)	9273	9273.4
Q	212.13	212.31

Les erreurs relatives entre les valeurs théoriques et celles déduites par le programme sont relativement faibles ( $\frac{\Delta f_0}{f_0} = 0.05\%$  et  $\frac{\Delta Q}{Q} = 0.3\%$ ). Vu ces résultats satisfaisants, le programme fonctionne correctement.

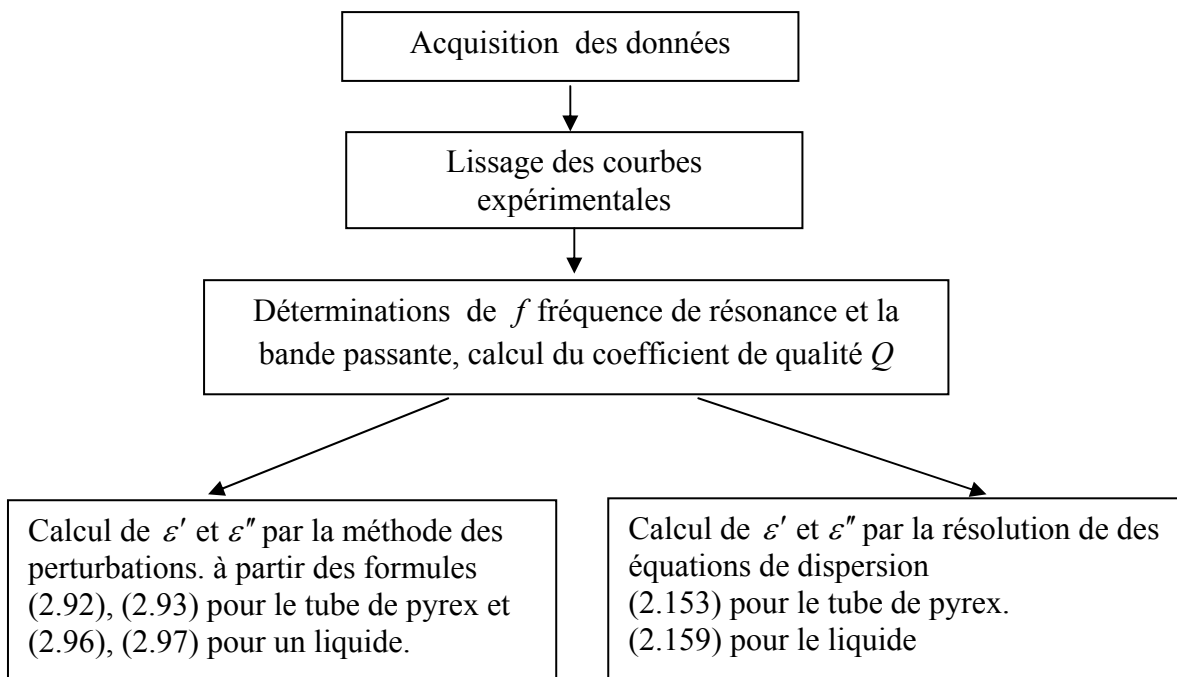
## **Chapitre IV**

### **RESULTATS ET DISCUSSION**

#### IV- Résultats expérimentaux et discussions :

Pour déterminer la permittivité diélectrique d'un liquide, il est nécessaire de mesurer les fréquences de résonance et les coefficients de qualité de la cavité vide, de la cavité avec le tube capillaire vide et de la cavité avec ce même tube rempli de liquide.

La valeur de la permittivité diélectrique complexe  $\varepsilon^*$  peut être déduite soit à partir des formules établies par la méthode des perturbations ou soit à partir du programme informatique (voir annexe 2) qu'on a conçu pour résoudre les équations de dispersion explicitées précédemment. L'organigramme de ce programme est représenté ci-dessous.



On a utilisé des tubes capillaires en pyrex ayant des volumes  $V$  calibrés et des épaisseurs différentes. Le volume de liquide introduit dans la cavité, est une fraction du volume calibré, il est proportionnel au carré du rayon interne  $R_1$  du tube utilisé et à la hauteur de la cavité.

## IV-1- Pyrex :

Les courbes de résonance de la cavité chargée de ces différents tubes sont toutes regroupées dans la figure 4.1.

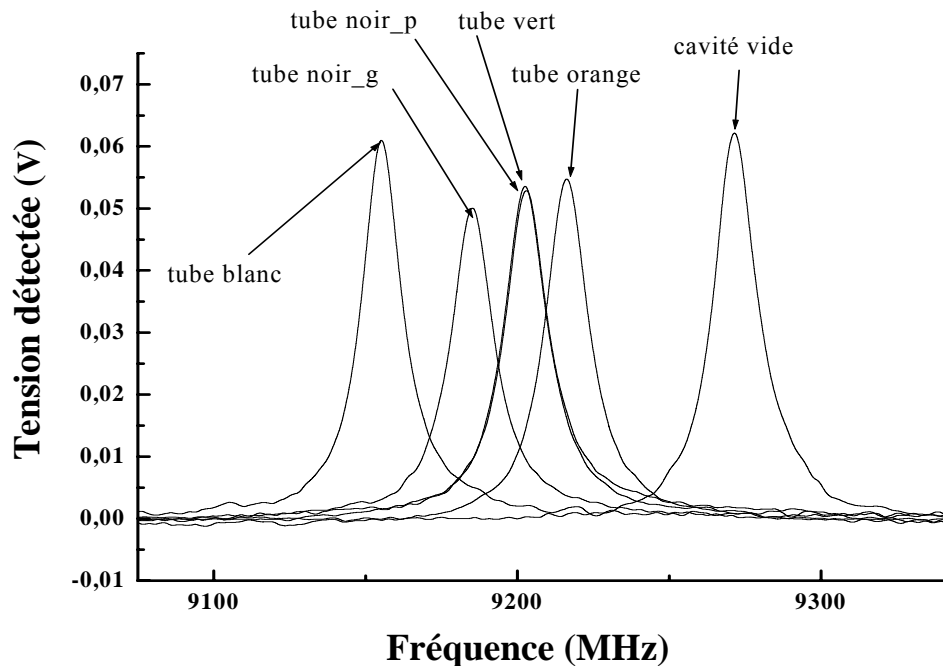


Figure 4.1: Courbes enregistrées pour différents tubes vides à  $T=20^{\circ}\text{C}$

Les valeurs obtenues des fréquences de résonance, des fréquences à mi-hauteur de puissance et les permittivités sont résumées dans les tableaux (4.1a) et (4.1b). En comparant les valeurs de  $\varepsilon'$  mesurées par la méthode de perturbation ou par la méthode de calcul exact, on remarque une légère différence entre elles. L'erreur relative associée est de l'ordre 2%, la valeur moyenne calculée à partir de la méthode de perturbation est de  $4.69 \pm 0.09$  et par le calcul exact est de  $4.54 \pm 0.09$ .

Tableau (4.1a) : permittivités diélectriques du pyrex à T=20°C

Couleur de tube	V (ul)	R <sub>ext</sub> (mm)	R <sub>int</sub> (mm)	$\epsilon'_z$ / perturbations	$\epsilon''_z$ / perturbations	$\epsilon'_z$ / exact	$\epsilon''_z$ / exact
Vert	50	0.73	0.32	4.76	$4.75 \times 10^{-4}$	4.63	$4.35 \times 10^{-4}$
Orange	10	0.59	0.19	4.58	$7.3 \times 10^{-4}$	4.46	$6.8 \times 10^{-4}$
Blanc	5	0.71	0.15	4.69	$-5 \times 10^{-4}$	4.51	$-5 \times 10^{-4}$
Noir_G	20	0.75	0.31	4.73	$-51 \times 10^{-4}$	4.55	$-35 \times 10^{-4}$
Noir_P	20	0.67	0.27	4.69	$38 \times 10^{-4}$	4.53	$43 \times 10^{-4}$

Tableau (4.1b) : fréquences de résonance de la cavité chargé de tubes vide et cavité vide et les fréquences à mi-hauteur de puissance

Couleur de tube	$f_0$ (Mhz)	$f_l$ (Mhz)	$f_2$ (Mhz)
Cavité_vide	9273.2	9265	9261.7
Orange	9216.7	9207.8	9226.5
Blanc	9184.4	9175.9	9193.4
Noir_G	9202.2	9193.7	9210.9
Noir_P	9185.6	9177	9194.4
Vert	9208.1	9217.1	9199.7

Les valeurs de la permittivité des tubes fournies par le fabricant sont regroupées dans le tableau 2. Nos valeurs ont été mesurées à température  $T=20\text{ °C}$  et dans la gamme de fréquences 9.1 à 9.2GHz qui ne correspond pas à celle proposée par le fabricant. Néanmoins, en supposant que la permittivité  $\varepsilon'$  varie très peu entre 20 et 25 °C comme à 1 MHz, cette permittivité ne devrait pas excéder 3.35 selon le tableau 2. Notre valeur déduite par la méthode de calcul exact, dans le cas le plus défavorable est égale à 4.46 légèrement supérieure à 4.45.

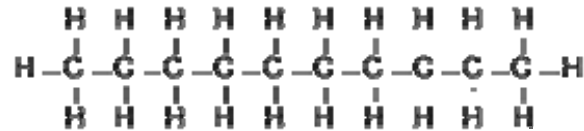
Tableau (4.2) : permittivités diélectriques du pyrex fournies par le fabricant [19]

Fréquence en MHz	$10^{-3}$	1	$3.10^3$	T (°C)	20	100	200	300
$\varepsilon'$ à 25 °C	4.65	4.55	4.45	$\varepsilon'$ à 1MHz	4.56	4.7	5.1	5.7
$\varepsilon''$ à 25 °C	0.028	0.014	0.022	$\varepsilon''$ à 1MHz	0.022	0.042	0.153	0.855

Dans le cas du pyrex la permittivité  $\varepsilon''$  est très faible. Les coefficients de qualité mesurés sont très proches. L'erreur sur l'écart  $\Delta\left(\frac{1}{Q}\right)$  et l'écart lui-même est du même ordre de grandeur. Par conséquent les mesures sur  $\varepsilon''$  ne sont pas précises, on peut même obtenir des valeurs négatives

## VI-2- Décane :

C'est une huile organique appartenant à la famille des alcanes et de haute pureté d'origine Prolabo . Elle est apolaire et de formule  $C_{10}H_{22}$ . Sa formule développée plane est :



Les mesures sur le décane ont été effectuées à  $T=20^{\circ}C$ . Les valeurs des permittivités de cet hydrocarbure, les fréquences de résonance et des fréquences à mi-hauteur de puissance sont résumées dans les tableaux (4.3a) et (4.3a). Les graphes qui ont servi à déterminer ces valeurs sont représentés sur les figures 17.

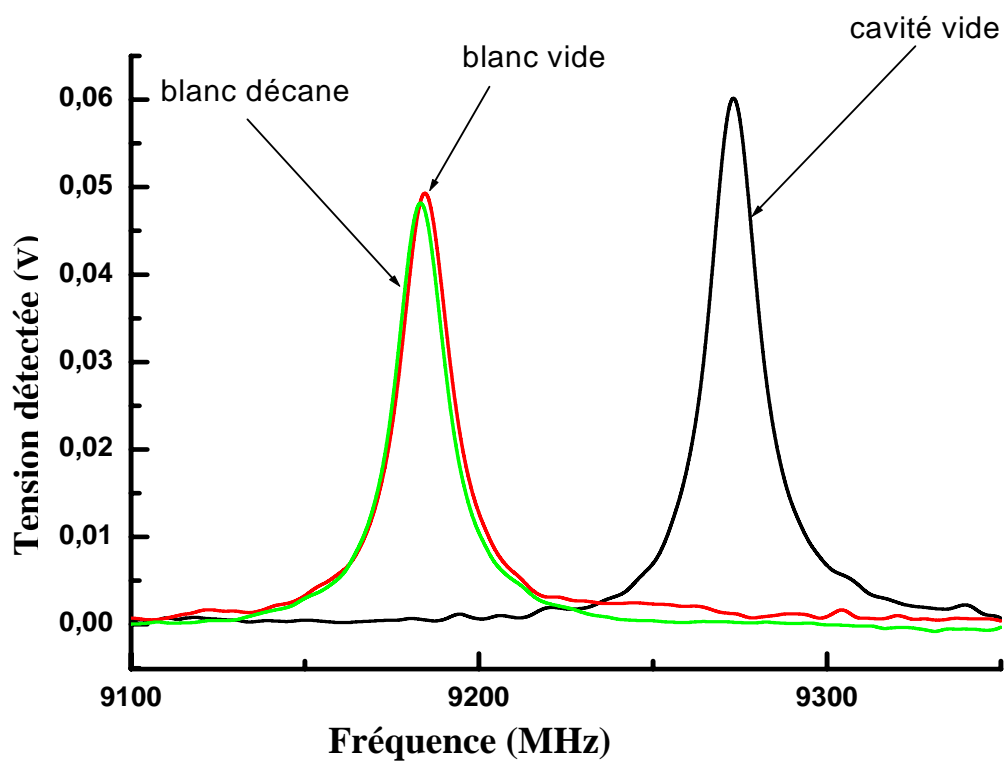
Le décalage en fréquence est plus important dans le cas du tube vert car le volume du liquide introduit dans la cavité est le plus important. Par conséquent, les mesures sont plus précises. On remarque aussi que les mesures déterminées par la méthode des perturbations sont plus proches de celles retrouvées dans la littérature. La méthode de perturbation est très conseillée pour l'étude des permittivités  $\epsilon'$  de liquides à faible perte. Par contre pour la mesure de  $\epsilon''$ , comme dans le cas du pyrex, les erreurs sont très importantes comparées aux valeurs mesurées. Les valeurs de  $\epsilon''$  ne peuvent être déterminées.

Tableau (4.3a) : Valeurs des permittivités diélectriques du décane à  $T=20^{\circ}C$

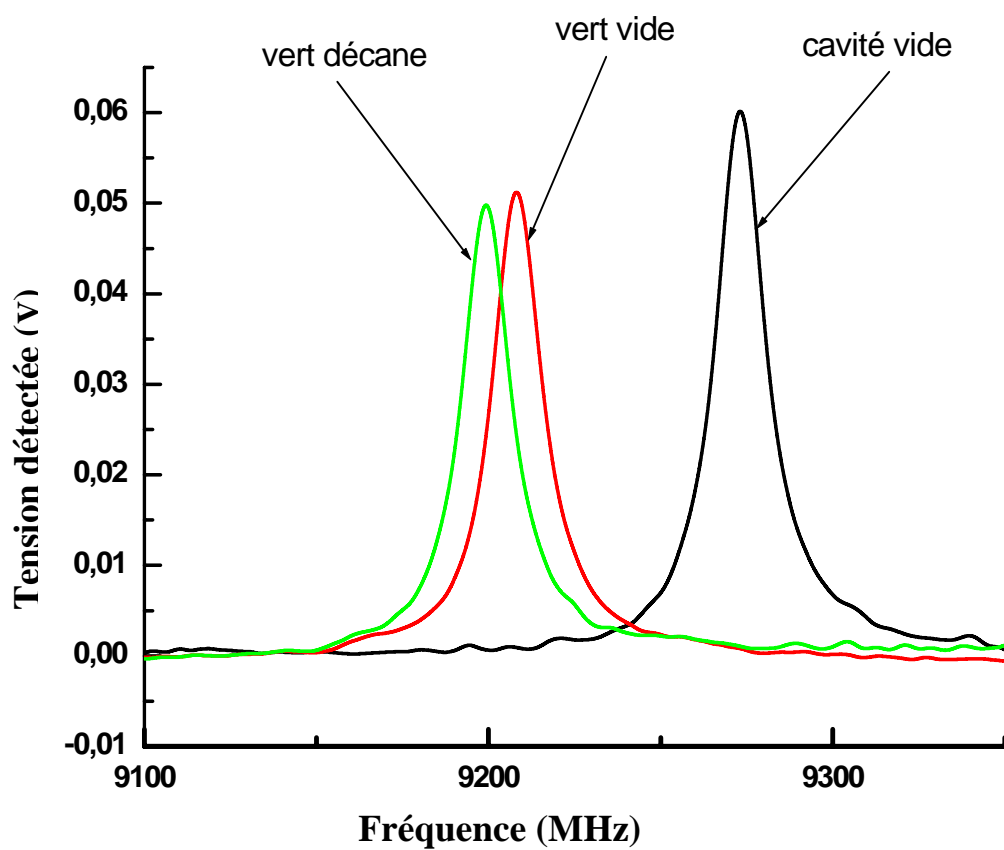
Couleur de tube	V (ul)	$R_{ext}$ (mm)	$R_{int}$ (mm)	$\epsilon'_z$ /perturbations	$\epsilon''_z$ /perturbations	$\epsilon'_z$ /exact	$\epsilon''_z$ /exact	$\epsilon'_z$ /littérature	$\epsilon''_z$ /littérature
Vert	50	0.73	0.32	2.00	-0.030	1.92	-0.028	1.99 <sup>[20]</sup>	-----
Blanc	5	0.71	0.15	2.10	-0.026	1.97	-0.023	2.00 <sup>[20]</sup>	
Noir_G	20	0.75	0.31	2.13	-0.008	2.01	-0.007		
Noir_P	20	0.67	0.27	2.01	-0.01	1.91	-0.01		

Tableau (4.3b) : fréquences de résonance de la cavité chargée des tubes remplis de décane

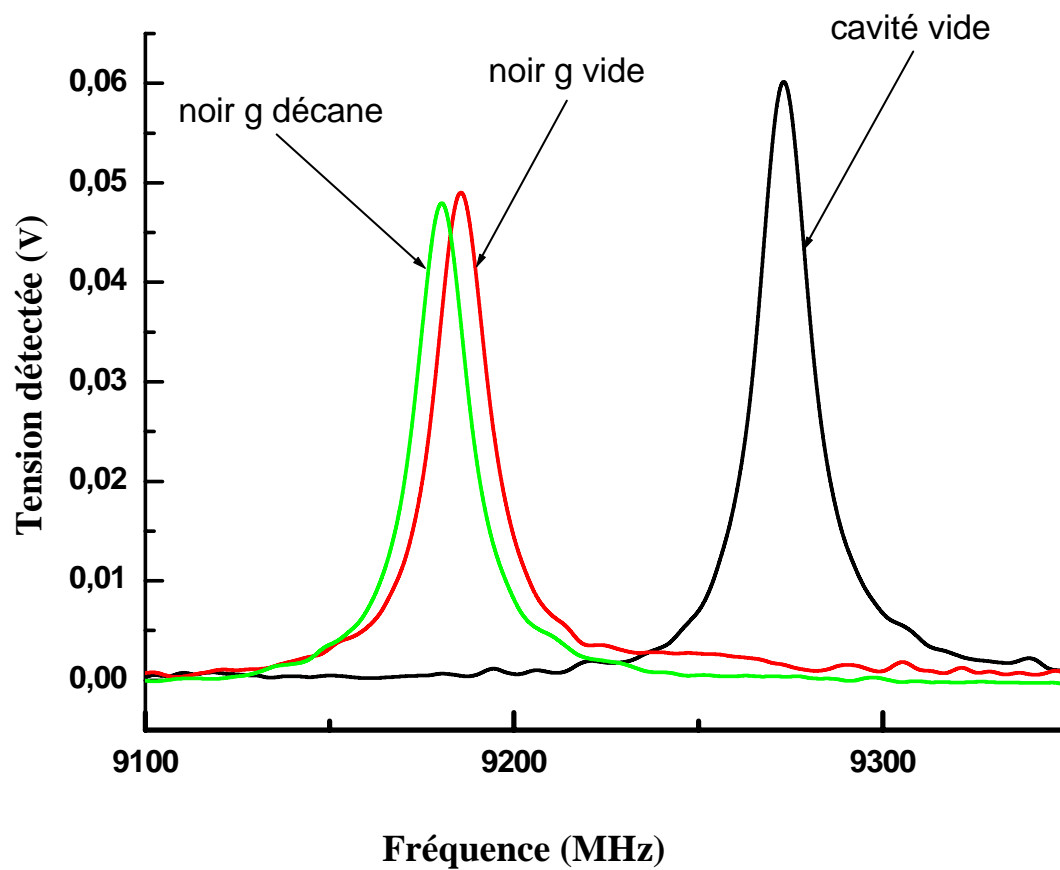
Couleur de tube	$f_0$ (Mhz)	$f_1$ (Mhz)	$f_2$ (Mhz)
Blanc_décane	9183.7	9174.7	9192
Noir_G_décane	9198.6	9190.2	9207.4
Noir_P_décane	9180.4	9171.8	9189.1
Vert_décane	9199.3	9191	9207.8



(a) : Tube Blanc



(b) : Tube vert



(c) : Tube noir g

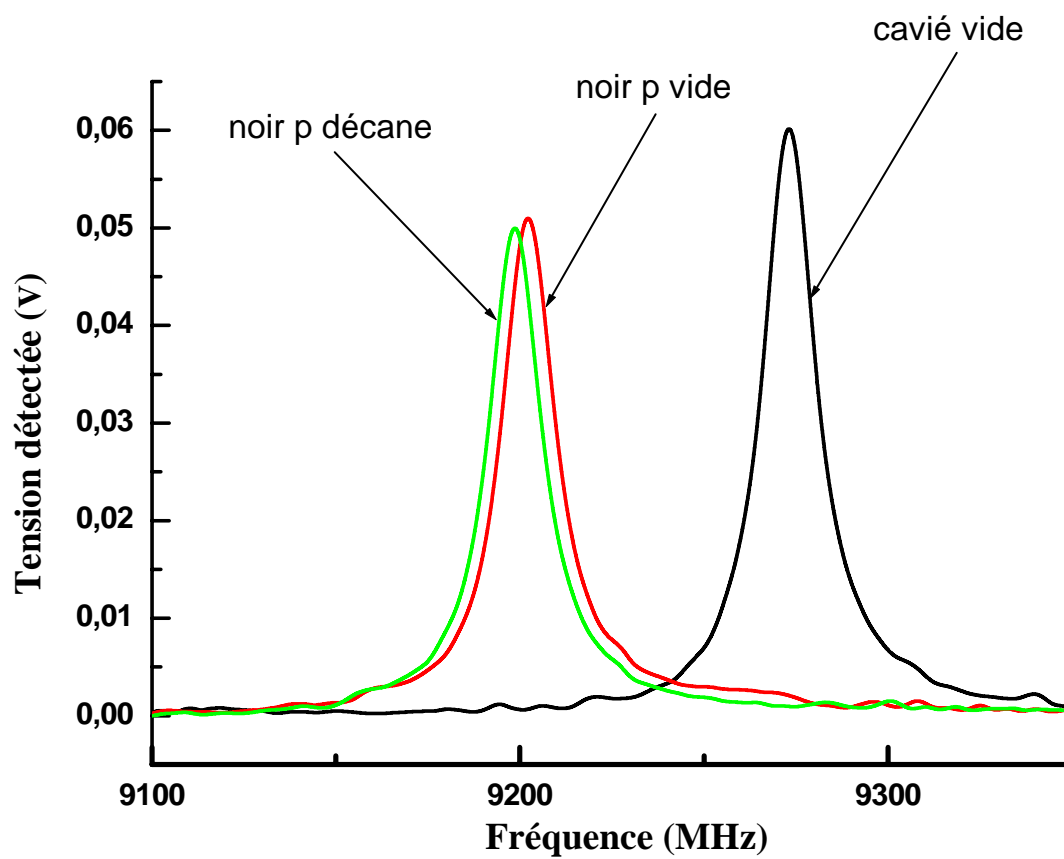
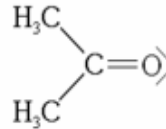


Figure (4.2) (d) : Tube noir p

Figures (4.2) : courbe de résonance de la cavité dans le cas de décane à  $T=20^{\circ}\text{C}$

**VI-3- Acétone :**

L'acétone est un liquide transparent, inflammable. C'est une molécule polaire à chaîne carbonée courte, de formule développée :



Les mesures sur l'acétone ont été effectuées à  $T=20^\circ\text{C}$ . Les valeurs des permittivités de ce liquide, les fréquences de résonance et des fréquences à mi-hauteur de puissance sont résumées dans les tableaux (4.4a) et (4.4a) pour deux tubes. Les graphes qui ont servi à déterminer ces valeurs sont représentés sur les figures 18.

Dans le cas de l'acétone la permittivité  $\varepsilon''$  est assez importante. Pour des volumes de liquide introduit dans la cavité comme dans le cas des deux tubes vert et noir\_G, l'absorption d'énergie est assez importante, les courbes de résonance sont très aplaties et par conséquent les mesures ne peuvent se faire.

Les résultats obtenus sont comparables à ceux de la littérature.

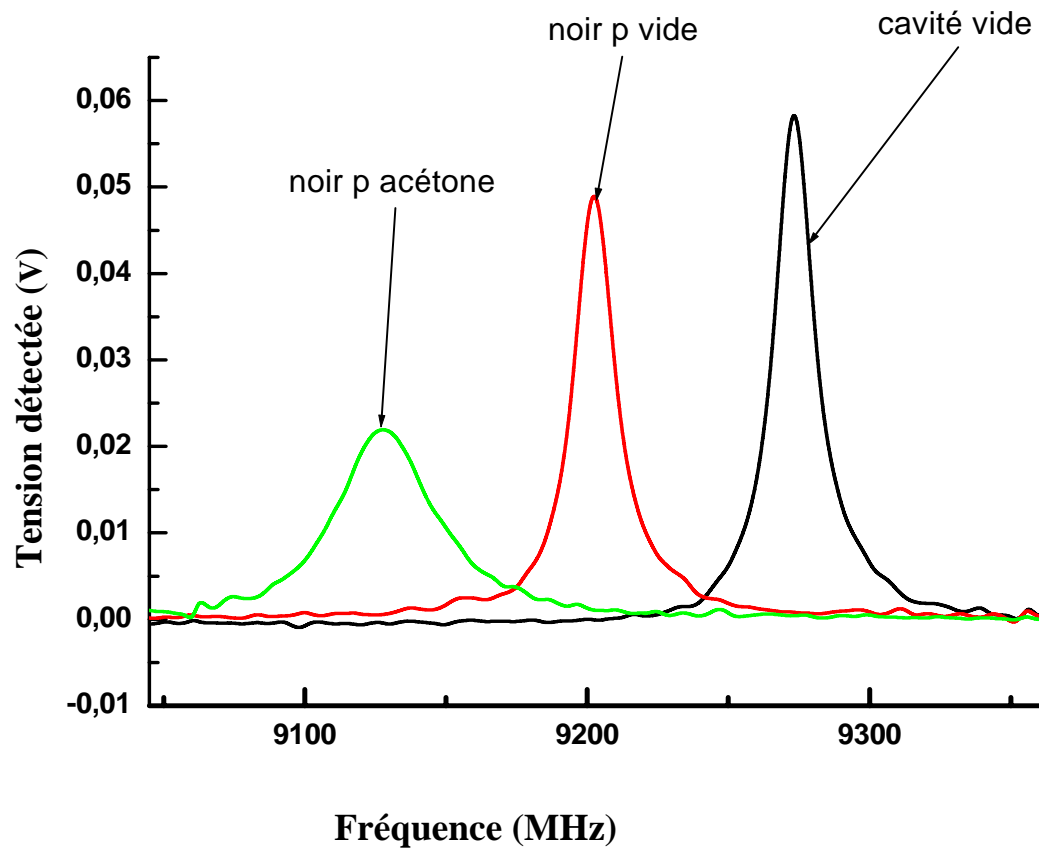
Tableau (4.4a) : permittivités diélectriques de l'Acétone à  $T=20^\circ\text{C}$

Couleur de tube	V (ul)	$R_{\text{ext}}$ (mm)	$R_{\text{int}}$ (mm)	$\varepsilon_2$ /perturbations	$\varepsilon_3$ /perturbations	$\varepsilon_2$ /exact	$\varepsilon_3$ /exact	$\varepsilon_2$ /littérature	$\varepsilon_3$ /littérature
Blanc	5	071	0.150	22.38	3.35	19.50	2.86	20.5 <sup>[22]</sup>	3.9 <sup>[22]</sup>
Noir_P	20	0.67	0.266	22.29	3.35	19.15	2.62	17.9 <sup>[22]</sup>	2.32 <sup>[22]</sup>

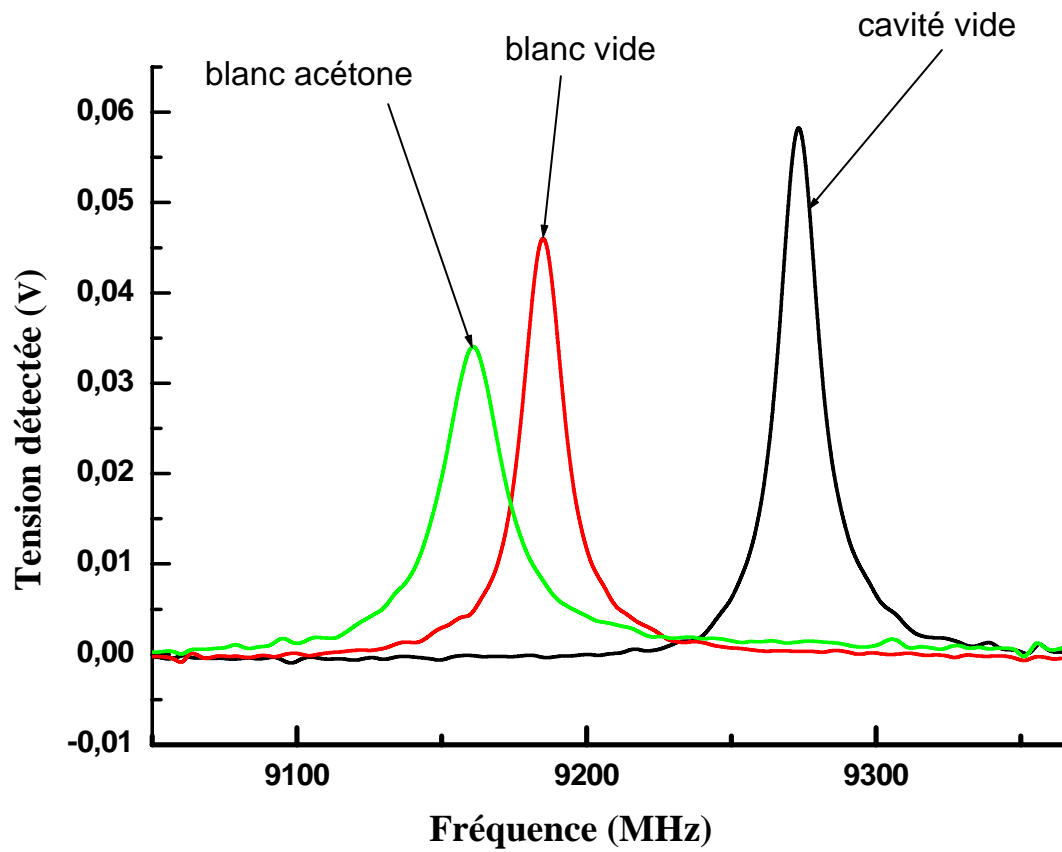
Tableau (4.4b) : fréquences de résonance de la cavité chargée des tubes remplis d'acétone

Couleur de tube	$f_0$ (Mhz)	$f_1$ (Mhz)	$f_2$ (Mhz)
Blanc_décane	9160.8	9148.1	9173.5
Noir_P_décane	9127.7	9108.1	9149.2

Nous avons tenté de mesurer la permittivité diélectrique élevée de l'eau par cette technique de mesure. Les courbes de résonance s'estompent, aucune mesure n'est possible.



(a) : tube noir p



(b) : tube blanc

Figures (4.3) : Courbes de résonance de la cavité dans le cas de l'acétone à  $T=20^{\circ}\text{C}$

## **V- Conclusion**

**V- Conclusion :**

Une fois le montage réalisé, on a élaboré un programme informatique en langage MATLAB permettant de traiter les courbes de résonance et de déduire les valeurs de la pulsation de résonance et du coefficient de qualité.

Afin de s'assurer de l'efficacité de ce programme, on l'a testé sur des courbes théoriques dont les valeurs de pulsation de résonance et du coefficient de qualité sont connues préalablement. Les valeurs obtenues sont très proches des valeurs théoriques.

La soustraction des enregistrements de la puissance réfléchiée par la cavité désadaptée par introduction de fil conducteur et de la puissance réfléchiée par la cavité avec et sans échantillon, a permis d'obtenir la puissance transmise à la cavité.

Sur ces nouveaux enregistrements, le niveau de référence de la puissance est déterminé avec exactitude. Le calcul du coefficient de qualité de la cavité est grandement amélioré.

Après l'obtention de ces deux valeurs expérimentales fréquences de résonances et coefficients de qualité, on a calculé en utilisant deux méthodes différentes, théorie des perturbations et résolution des équations de dispersion, les valeurs de permittivité de liquides polaire et apolaire.

Aussi, il a été nécessaire de réaliser un programme informatique permettant de résoudre les équations de dispersion par des méthodes itératives.

Au vu des résultats obtenus, la technique de mesure par cavité résonante se prête bien à la mesure de la permittivité diélectrique complexe des liquides à moyennes pertes.

Pour les liquides à faibles pertes les erreurs de mesure sont de l'ordre des valeurs de  $\varepsilon''$ , les résultats obtenus ne sont pas précis pour cette dernière.

Pour les liquides à fortes pertes, les courbes de résonance de la puissance réfléchiée à partir desquelles les données expérimentales sont déduites, s'estompent. Les valeurs de  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  ne peuvent plus être calculées.

## **BIBLIOGRAPHIES**

**Bibliographies :**

- [1] Mohamed Mahmoud Ould Ahmed Taleb Mohamed, *Etude Comparée de Deux Techniques de Calcul et Application à la Mesure de Permittivité Complexe d'une Résine Epoxide (DGEBA) et du Composite DGBEA/DDM/GRAPHITE par Cavité Résonnante Micro-Ondes en Bande X*
- [2] Rachid Djouaher, *Mesure de la Permittivité Complexe Micro-Ondes D'échantillon Diélectriques Solides et Liquides par la Méthode des Cavités Résonnantes sur les Modes  $TM_{0n0}$* ,
- [3] Shuh-Han Chao, *Measurement of Microwave Conductivity and Dielectric Constant by the Cavity Perturbation Method and Their Errors*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-33, No 6, June 1985-
- [4] Shihe Li, Cavdet Akyel, Renato G. Bosisio, *Precise Calculations and Measurements on the Complex Dielectric Constant of Lossy Materials Using  $TM_{010}$  Cavity Perturbation Techniques*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-29. No, 10 October 1981-
- [5] Binshen Meny, John Booske, and Reid Cooper, *Extended Cavity Perturbation Technique to Determine the Complex Permittivity of Dielectric Materials*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-33. No, 11 November 1995-
- [6] B. Yu. Kapilevich, S.Ogoursov, *An Improved Approach for Resonant Measurements of Complex Permittivity of Lossy Liquids*, IEEE –Russia Conference, Mia-Me 1999-
- [7] Richard G.Carter, *Accuracy of Microwave Cavity Perturbation Measurements*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-39. No, 5 May 2001
- [8] Shihe Li and Renato. G. Bosisio, *Composite Hole Conditions on Complex Permittivity Measurements Using Microwave Cavity Perturbation Technique*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-30. No, January 1982
- [10] Hirokazu. Kawabata, Hiroshi Tompo, and Yoshio Kobayashi, *A Rigorous Analysis Of a  $TM_{010}$  Mode Cylindrical Cavity To Measure Accurate Complex Permittivity Of Liquid*, 33 rd European Microwave Conference – Munich 2003
- [11] Sylvain Gauthier, Louis Marchildon, and Cevdet Akyel, *Shift of the Complex Resonance Frequency of a Dielectric Loaded Cavity Produced by Small Sample Insertion Holes*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-37. No, 3 April 1989
- [12] Werner Rueggeberg, *Determination of Complex permittivity of Arbitrarily Dimensioned Dielectric Modules at Microwave Frequencies*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-19. No, 6 June 1971

- [13] Adand Parkach, J.KVAid, and Abhai Mansingh *Measurement of Dielectric Parameters at Microwave Frequencies by Cavity Perturbation Technique*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-27, 9 September 1979-
- [14] Linfeng Chen, C.K.Ong, AND B.T.G.Tan, *Amendment of Cavity Perturbation Method for Permittivity Measurement of Extremely Low-Loss Dielectrics*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-38. No, 6 December 1999
- [15] D.Li, C.E.Free, K.E.G.Pitt and P.G.Barnwell, *Perturbation Method for dielectric Constant Measurement of Thick-film Dielectric Materials at Microwave Frequencies*, Electronics Letters 15<sup>th</sup> October 1998. Vol.33.No.21
- [16] Anjali Verma and Dienes C.Dube, *Measurement of Dielectric Parameters of Small Samples at X-Band Frequencies by Cavity Perturbation Technique*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-53. No, 5 October 2005
- [17] Takeshi Takahashi, Yasushi Hjima and Taro Mivra, *Measurement of Temperature Dependence of Relative permittivity by the Cavity Perturbation Method*, 1997.IEEE MTT-S-Digest-
- [18] Cevdet Akyel and Renato.G.Bosisio, *New developments on Automated-Active Circuits for Permittivity Measurements at Microwave Frequencies*, IEEE Transaction on Instruments and Measurement. Vol MTT-38. No, 2 April 1989
- [19] Fonction de Bessel.'Frédéric Laroche,2003'
- [20] CORNING FRANCE, 'Division Laboratoire 33 Avenue de Valvins BP 61
- [21] *handbook of chemistry and physics* 13<sup>th</sup> edition 1967-1968.
- [22] Haine N, Deschamps A, *détermination par mesure diélectriques en hyperfréquence du poucentage d'huile contenu dans une phase dispersée d'eau d'une émulsion de type eau dans l'huile entretenue mécaniquement*, Entropie, No.233(2002)
- [23] Christopher Anderson, B.S, *Determining the Complex Permittivity of Materials With the Waveguide-Cutoff Methode*, May 2006
- [24] Hirokazu Kawabata, Yoshio Kobayashi, *Accurate Measurments of Complex Permittivity of Liquid Based on a  $TM_{010}$  Mode Cylindrical Cavity Method*.
- [25] G.Roussy and M.Flden, *A Sensitive Method for Measuring Complex Permittivity With a Microwave Resonator*, IEEE Transaction on microwave theory and Technique. Vol MTT-13. No, 3 April 1966-
- [26] Golio .Mike "Frontmatter" *The RF Microwave Hand Book*. Editor in Chief Mike Golio. Boca Roton: CRC Press LLC.2001

- [27] H.Zaidi *Conception et Réalisation de Résonateurs micro-onde, Application à La Détermination des Permittivités Diélectriques de Matériaux et de Densités Electroniques de Pplasma*, Magistère, U.S.T.H.B, Alger, 1986

## **ANNEXE**

Annexe 1

**Définition de la fonction de Bessel :**

$$J_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(n\tau - r \sin \tau) d\tau$$

$$J_n(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^\pi e^{-i(n\tau - r \sin \tau)} d\tau$$

$$Y_n(r) = \frac{J_n(r) \cos(n\pi) - J_{-n}(r)}{\sin(n\pi)}$$

$$Y_n(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin(r \sin \theta - n\theta) d\theta - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [e^{nt} + (-1)^n e^{-at}] e^{-r \sinh t} dt$$

**Quelques propriétés de la fonction de Bessel :**

$$J'_0(r) = -J_1(r)$$

$$J'_n(r) = -\frac{n}{r} J_n(r) + J_{n+1}(r)$$

$$\int_0^R r J_n^2(ar) dr = \frac{1}{2} R^2 \left( [J'_n(ar)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{a^2 R^2}\right) [J_n(ar)]^2 \right)$$

$$Y'_0(r) = -Y_1(r)$$

$$Y'_n(r) = -\frac{n}{r} Y_n(r) + Y_{n+1}(r)$$

$$\int_0^R r Y_n^2(ar) dr = \frac{1}{2} R^2 \left( [Y'_n(ar)]^2 + \left(1 - \frac{n^2}{a^2 R^2}\right) [Y_n(ar)]^2 \right)$$

$$J_{-n}(r) = (-1)^n J_n(r)$$

$$Y_{-n}(r) = (-1)^n Y_n(r)$$

**Calcul de  $G_{020}$  :**

$$G_{020} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \frac{\int_{V_c} E_z^2 dV}{\int_{V_c} E_z^2 dV}$$

dans le cas du mode  $TM_{020}$  :  $E_z = J_0\left(\frac{x_{02} r'}{R_0}\right)$

$$G_{020} = \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \frac{\int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz}{\int_0^{R_1} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz}$$

En utilisant les résultats suivants :

$$\int_0^{R_0} r J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dr = \frac{1}{2} R_0^2 \left( \left[ J_0'\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 + \left[ J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 \right)$$

$$\int_0^{R_1} r J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dr = \frac{1}{2} R_1^2 \left( \left[ J_0'\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 + \left[ J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 \right)$$

On aboutit à:

$$G_{020} = \frac{J_1^2(x_{02})}{J_0^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right) + J_1^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right)}$$

**Calcul de  $G_{verre}$  :**

$$G_{verre} = \frac{\int_{V_c} E_z^2 dV}{\int_{V_e} E_z^2 dV}$$

dans le cas du mode  $TM_{020}$  :  $E_z = J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right)$

$$G_{verre} = \frac{\int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz}{\int_{R_1}^{R_2} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz}$$

$$G_{verre} = \frac{\int_0^{R_0} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz}{\left\{ \int_0^{R_2} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \right\} - \left\{ \int_0^{R_1} J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^L dz \right\}}$$

En utilisant les résultats suivants :

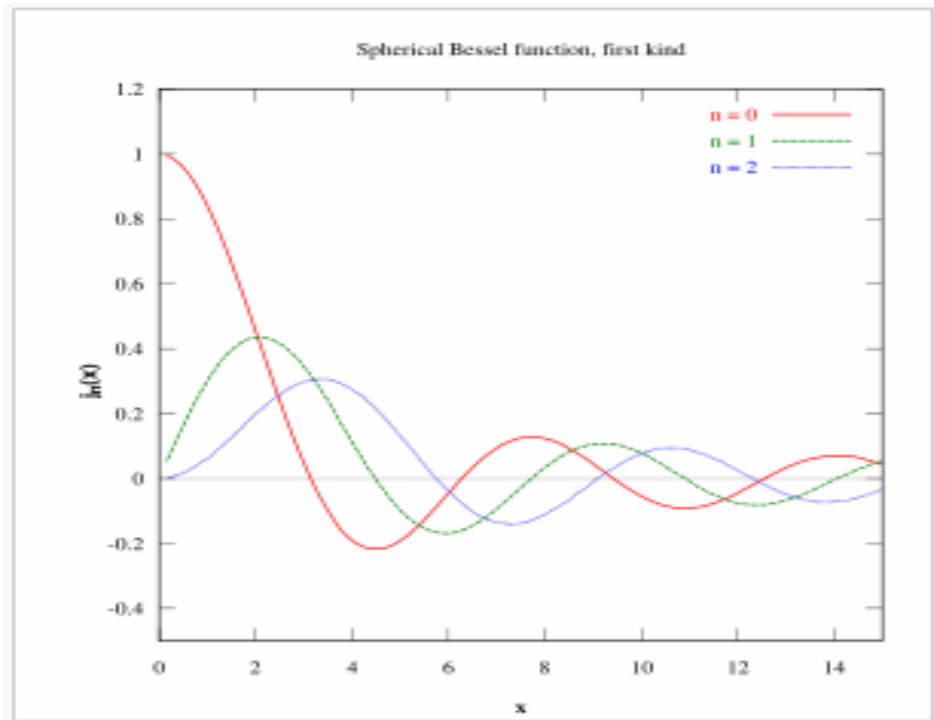
$$\int_0^{R_0} r J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dr = \frac{1}{2} R_0^2 \left( \left[ J_0'\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 + \left[ J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 \right)$$

$$\int_0^{R_1} r J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dr = \frac{1}{2} R_1^2 \left( \left[ J_0'\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 + \left[ J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 \right)$$

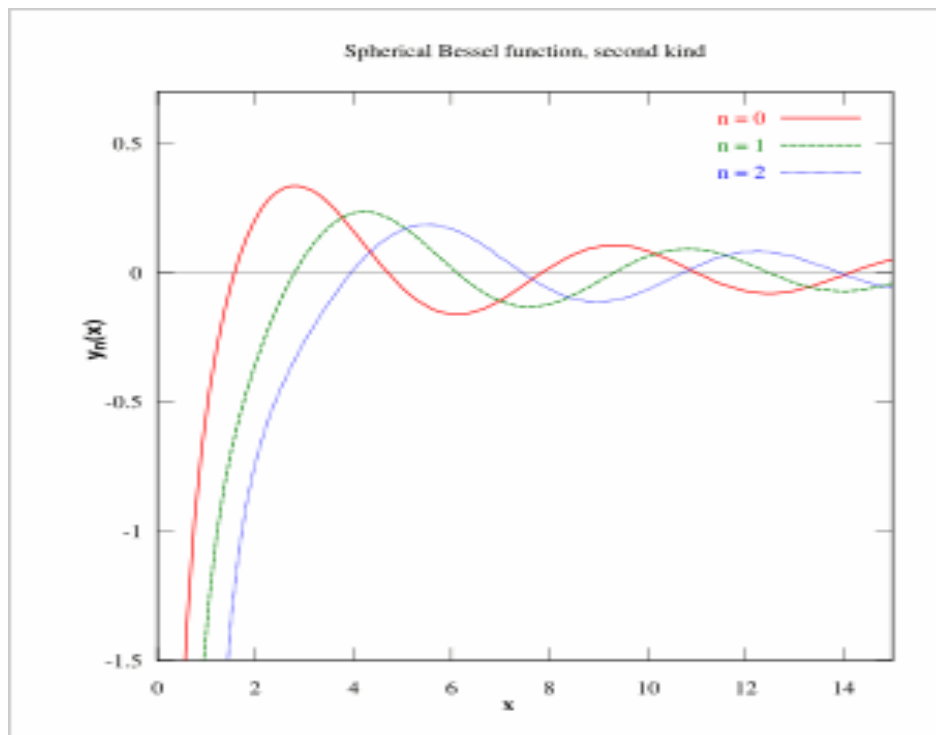
$$\int_0^{R_2} r J_0^2\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) dr = \frac{1}{2} R_2^2 \left( \left[ J_0'\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 + \left[ J_0\left(\frac{x_{02}r}{R_0}\right) \right]^2 \right)$$

On aboutit à:

$$G_{verre} = \frac{J_1^2(x_{02})}{\left(\frac{R_2}{R_0}\right)^2 \left\{ J_1^2\left(x_{02} \frac{R_2}{R_0}\right) + J_0^2\left(x_{02} \frac{R_2}{R_0}\right) \right\} - \left(\frac{R_1}{R_0}\right)^2 \left\{ J_1^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right) + J_0^2\left(x_{02} \frac{R_1}{R_0}\right) \right\}}$$



Fonction de Bessel de second  $J_n$   $n=0,1,2$



Fonction de Bessel de second  $Y_n$   $n=0,1,2$

## Annexe2

```

% Programme principal :
clear all
close all-
% Appel du sous-programme : acquisition de données, lissage des courbes expérimentales et
% détermination des valeurs des fréquences de résonance et des coefficients de qualité
fin01
% Appel du sous-programme : chois des valeurs des rayons  $R_1, R_2$  selon la couleur des tubes
Couleurs
% Appel du sous-programme : calcul de  $G_v$ 
G_verre1
% Appel du sous-programme : calcul de  $G_{020}$ 
G_02011
F_liq=f_20;
F_liq1=f_21;
F_liq2=f_22;
F_verre=f_10;
F_verre1=f_11;
F_verre2=f_12;
F_0=f_0;
F_01=f_01;
F_02=f_02;
delta_F_verre=(F_verre)-(F_0);
delta_F=F_liq-F_verre;
Q_0=F_0/abs(F_02-F_01);
Q_liq=F_liq/abs(F_liq2-F_liq1);
Q_verre=F_verre/abs(F_verre2-F_verre1);
delta_inv_Q0=((1/Q_verre)-(1/Q_0));
delta_inv_Q=((1/Q_liq)-(1/Q_verre));
% Calcul de  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  pour le tube de pyrex et le liquide par la méthode des perturbation
eps_verre_pri=1-2*(delta_F_verre/F_0)*G_v
eps_verre_sec=delta_inv_Q0*G_v
eps_liq_pri=1-2*(R_0/R_1)^2*(delta_F/F_0)*G_020
eps_liq_sec=(R_0/R_1)^2*G_020*delta_inv_Q
% Appel du sous-programme : calcul les valeurs de  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  de pyrex par la résolution de l'équation % de
dispersion (5.15)
te1
% Appel du sous-programme : calcul les valeurs de  $\varepsilon'$  et  $\varepsilon''$  du liquide par la résolution de l'équation de
dispersion (5.21)
te2
% Appel du sous-programme : affichage des résultats
Val

% Sous-programme fin01

%Appel du sous-programme : acquisition de données, lissage des courbes expérimentales
mes_fre01
for je=1:3
pl1='plot(tr,"g");'
pl2='plot(tr,"r");'
pl3='plot(tr,"bla");'
if je==1
tr=tr1;
eval(pl1)
elseif je==2
tr=tr2;

```

```

eval(pl2)
else
tr=tr3;
eval(pl3)
end

[x05 y05]=ginput(2);
k1=x05(1);k2=x05(2);
k1=round(k1);k2=round(k2);
wa1=(max(tr(k1:k2))-min(tr(k1:k2)))/2+min(tr(k1:k2));
fa=max(tr(k1:k2));
[mi in ] = max(tr(k1:k2));
in=in+k1;
f_a=fre(in);
ta=tr(k1:in);
ta01=tr(in:k2);
plot(ta);
%[g1 g2]=min(ta);
ta1=fix(ta*1e5);
w1=fix(wa1*1e5);
ta2=ta1-w1;
rr1=mean(find(ta2<50& ta2>-50));
rr1=rr1+k1;
plot(ta01);
ta01=fix(ta01*1e5);
ta02=ta01-w1;
rr2=mean(find(ta02<50& ta02>-50));
rr2=rr2+in;
rr1=round(rr1);
rr2=round(rr2);
f1=fre(rr1);
f2=fre(rr2);

if je==1
f_0=f_a;
f_01=f1;
f_02=f2;
elseif je==2
f_10=f_a;
f_11=f1;
f_12=f2;
else
f_20=f_a;
f_21=f1;
f_22=f2;
end
end

% Sous-programme mes_fre01 :
close all
clear all
n=input('donne le nombre des courbes: n= ');
for j=1:n
fichie = [chemin,nom];
str = strep(nom, 'TXT', ' ');
fic_str = ['t',int2str(j),'a;'];
eval(fic_str);
fic_str = ['t',int2str(j)];
tt=eval(fic_str);
figure(1)

```

```

m1=tt(1);
xa=m1;
corection
m1=m1+y
m2=tt(2);
xa=m2;
corection
m2=m2+y
siz=size(tt');
tt=tt(3:siz(2));
plot(tt, ':');
axis([0 50000    0.01 0.2 ])
%n1=5000;n2=15000;n3=30000;n4=40000;
[x02 y02]=ginput(4);
n1=x02(1);n2=x02(2);n3=x02(3);n4=x02(4);
n1=round(n1);n2=round(n2);n3=round(n3);n4=round(n4);
[min1 ind1 ] = min(tt(n1:n2));
[min2 ind2 ] = min(tt(n3:n4));
indm1=ind1+n1;
indm2=ind2+n3;
del=(m2-m1)/(indm2-indm1);
cosnt=-indm1*((m2-m1)/(indm2-indm1))+m1;
lim=del*(length(tt)-1)+cosnt;
fre=cosnt:del:lim;
plot(fre,tt)
x = [1:length(tt)]; y = tt;
pp = csaps(x,y, 5e-9,[],[ones(1,500), repmat(5,1,length(tt)-500-1), 0] );
fnplt(pp,'r'); %hold on, fnplt(pp1,'r'),fnplt(pp2,'g'), plot(x,y,'ok'),plot(x,z,':'), hold off
zz=(fnval(pp,[1:length(tt)]));
gg=min(length(fre),length(tt));

plot(fre(1:gg),tt(1:gg), ':');
axis([lim cosnt    0.01 0.2 ]);
tt=zz;
if j ==1
tt_1=tt;
zz_1=zz;
fre_1=fre;
elseif j==2
tt_2=tt;
zz_2=zz;
fre_2=fre;
elseif j==3
tt_3=tt;
zz_3=zz;
fre_3=fre;
elseif j==5
tt_5=tt;
zz_5=zz;
fre_5=fre;
elseif j==6
tt_6=tt;
zz_6=zz;
fre_6=fre;
else
tt_4=tt;
zz_4=zz;
fre_4=fre;
end
end

```

```

lima1=min([length(tt_1) length(tt_2) length(tt_3) length(tt_4)...
length(tt_5) length(tt_6)]);
fre_lim=min([length(fre_1) length(fre_2) length(fre_3)...
length(fre_4) length(fre_5) length(fre_6)]);
lima=min(lima1,fre_lim);
tr1=tt_1(1:lima)-tt_2(1:lima);
tr2=tt_3(1:lima)-tt_4(1:lima);
tr3=tt_5(1:lima)-tt_6(1:lima);
fre=fre_1(1:lima);

```

```

% Sous-programme couleurs
'le nombr N indique la couleur du tube de verre'
'1:vert 2:noir_G 3:blanc 4:orange 5:noir_P'
N=input('N=')
if N==1
R_0=28.4*1e-3;
R_1=0.422*1e-3;
R_2=0.74*1e-3;%0.75
elseif N==2
R_0=28.4*1e-3;
R_1=0.305*1e-3;
R_2=0.75*1e-3;%0.76
elseif N==3
R_0=28.4*1e-3;
R_1=0.1508*1e-3;
R_2=0.71*1e-3;%0.72
elseif N==4
R_0=28.4*1e-3;
R_1=0.189*1e-3;
R_2=0.59*1e-3;%0.6
elseif N==5
R_0=28.4*1e-3;
R_1=0.266*1e-3;
R_2=0.67*1e-3;%0.68
else
'Redonner la valeur de N et il doit être entre 1 et 5'
couleurs
end

```

```

% Sous-programme G_verrel
x02=5.5201;
a=(R_2/R_0);
a1=a^2;
b=(R_1/R_0);
b1=b^2;
A=besselj(1,x02);
B=besselj(0,x02*a)^2;
C=besselj(1,x02*a)^2;
D=besselj(0,x02*b)^2;
E=besselj(1,x02*b)^2;
G_v=A^2/((a1*(B+C))-(b1*(D+E)))

```

```

% Sous-programme G_02011 :
x_02= 5.5201;
'*****Calcul de G_020*****'
A=besselj(1,x_02);
A_1=A^2;
a=R_1/R_0;
B=besselj(0,x_02*a);
B_1=B^2;

```

## ANNEXE

```
C=besselj(1,x_02*a);C_1=C^2;
'-----G_020=(A_1)/(B_1+C_1)-----'
G_020=(A_1)/(B_1+C_1);
G_020

% Sous-programme te
G_verre1
G_02011
F_liq=f_20;
F_liq1=f_21;
F_liq2=f_22;
F_verre=f_10;
F_verre1=f_11;
F_verre2=f_12;
F_0=f_0;
F_01=f_01;
F_02=f_02;
Q_0=F_0/abs(F_02-F_01);
Q_verre=abs(F_verre/(F_verre2-F_verre1));
delta_inv_Q0=((1/Q_verre)-(1/Q_0));
delta_F_verre=(F_verre)-(F_0);
Q_e=((Q_0-Q_verre)/(Q_0*Q_verre))^-1;
f1=F_verre*((1+1/2/Q_0));
F_verre1=f1*(1+i/(2*Q_e));
x_02= 5.5201;
celirite=3e+8;

%constante de propagation dans l'air
k_0=(2*pi*F_verre1*1e+6)/celirite;

'calcul des fonctions de Bessel J et Y '
j_000=besselj(0,k_0*R_0);
j_001=besselj(0,k_0*R_1);
j_101=besselj(1,k_0*R_1);
j_002=besselj(0,k_0*R_2);
j_102=besselj(1,k_0*R_2);
y_000=bessely(0,k_0*R_0);
y_002=bessely(0,k_0*R_2);
y_102=bessely(1,k_0*R_2);

A=j_000/y_000;
g=j_001/(k_0*j_101);
g1=(j_002+A*y_002)/(k_0*(j_102+A*y_102));
h1(1)=R_1;
h1(2)=real(g);
h1(3)=imag(g);
h1(4)=real(g1);
h1(5)=imag(g1);
h1(6)=R_2;
rr=h1';
h1=rr;
save h1.txt h1 -ascii

x0 = [2;0.05];
options=optimset('Display','iter');
[x,fval] = fsolve(@ver,x0,options)

k1=x(1)+i*x(2);
eps1=real((k1/k_0)^2)
eps2=-imag((k1/k_0)^2)
```

```

% Sous-programme te2
G_verre1
G_02011
F_liq=f_20;
F_liq1=f_21;
F_liq2=f_22;
F_verre=f_10;
F_verre1=f_11;
F_verre2=f_12;
F_0=f_0;
F_01=f_01;
F_02=f_02;
Q_0=F_0/abs(F_02-F_01);
Q_liq=F_liq/abs(F_liq2-F_liq1);
Q_verre=F_verre/abs(F_verre2-F_verre1);
delta_inv_Q0=((1/Q_verre)-(1/Q_0));
delta_inv_Q=((1/Q_liq)-(1/Q_verre));
delta_F_verre=(F_verre)-(F_0);
eps_verre=eps1-i*eps2;
Q_e=abs((( Q_0-Q_liq)/(Q_0*Q_liq))^-1);
f1=F_liq*((1+1/2/Q_0));
F_liq1=f1*(1+i/(2*Q_e));
x_02=fzero(@(x)besselj(0,x),5);
celirite=3e+8;

% Constante de propagation dans l'air
k_0=(2*pi*F_liq1*1e+6)/celirite

% Constante de propagation dans le verre
k_2=sqrt(eps_verre)*k_0 ;

'calcul des fonctions de Bessel J et Y '
j_000=besselj(0,k_0*R_0);
j_001=besselj(0,k_0*R_1);
j_100=besselj(1,k_0*R_0);
j_101=besselj(1,k_0*R_1);
j_002=besselj(0,k_0*R_2);
j_102=besselj(1,k_0*R_2);
j_202=besselj(2,k_0*R_2);
j_122=besselj(1,k_2*R_2);
j_022=besselj(0,k_2*R_2);
j_021=besselj(0,k_2*R_1);
j_121=besselj(1,k_2*R_1);
j_221=besselj(2,k_2*R_1);
j_200=besselj(2,k_0*R_0);
j_222=besselj(2,k_2*R_2);
y_000=bessely(0,k_0*R_0);
y_001=bessely(0,k_0*R_1);
y_101=bessely(1,k_0*R_1);
y_100=bessely(1,k_0*R_0);
y_002=bessely(0,k_0*R_2);
y_102=bessely(1,k_0*R_2);
y_122=bessely(1,k_2*R_2);
y_022=bessely(0,k_2*R_2);
y_021=bessely(0,k_2*R_1);
y_121=bessely(1,k_2*R_1);
y_221=bessely(2,k_2*R_1);
y_202=bessely(2,k_0*R_2);
y_222=bessely(2,k_2*R_2);

```

```
A01=-j_000/y_000;
g01=sqrt(eps_verre)*(j_002+A01*y_002)/(j_102+A01*y_102);
c01=(j_022-g01*j_122)/(g01*y_122-y_022);
M=(j_021+c01*y_021)/(k_2*(j_121+c01*y_121));
m01=real(M);
m02=imag(M);
h(1)=R_1;
h(2)=m01;
h(3)=m02;
r=h';
h=r;
save h.txt h -ascii
```

```
x0 = [250;0.05];
options=optimset('Display','iter');
[x,fval] = fsolve(@epse,x0,options)
```

```
k1=x(1)+i*x(2);
eps_liq1=real((k1/k_0)^2)
eps2_liq=-imag((k1/k_0)^2)
```

*% Sous-programme définissant la fonction ver*

```
function H = ver(x)
load('h1.txt')
k=x(1)+i*x(2);
R_1=h1(1);
g=h1(2)+i*h1(3);
gl=h1(4)+i*h1(5);
R_2=h1(6);
c1=g*k*besselj(1,k*R_1)-besselj(0,k*R_1);
c2=bessely(0,k*R_1)-g*k*bessely(1,k*R_1);
c=c1/c2;
f_v1=besselj(0,k*R_2)+c*bessely(0,k*R_2);
f_v2=k*(besselj(1,k*R_2)+c*bessely(1,k*R_2));
f_v=f_v1/f_v2;
Re=real(f_v);
Im=imag(f_v);
H = [Re/h1(4)-1; Im/h1(5)-1];
```

*% Sous-programme définissant la fonction epse*

```
function G = myfun(y)
load('h.txt')
k=y(1)+i*y(2);
ff=besselj(0,k*h(1))/(k*besselj(1,k*h(1)));
Re=real(ff);
Im=imag(ff);
G = [Re/h(2)-1; Im/h(3)-1];
```