

N d'ordre :10/2015-D/MT

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEURE ET  
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
Faculté de Mathématiques



THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES  
Présentée pour l'obtention du grade de Docteur  
en : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par :

**Abdelmoumène ZEKIRI** Sujet :

**Propriétés combinatoires de suites  
polynomiales classiques**

Soutenue publiquement le 02/07/2015 à 10H devant le jury composé de :

<b>M. BEBBOUCHI Rachid</b>	<b>Professeur à l'USTHB</b>	<b>Président</b>
<b>M. BENCHERIF Farid</b>	<b>Professeur à l'USTHB</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>M. BELGHABA Kacem</b>	<b>Professeur à l'Université d'Oran 1</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. BOUROUBI Sadek</b>	<b>Professeur à l'USTHB</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. DERBAL Abdallah</b>	<b>Professeur à l'ENS Kouba</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. KIHHEL Omar</b>	<b>Professeur à Université de Brock</b>	<b>Examineur</b>

*« C'est grâce à une poignée de grands hommes, dignes de la gloire que l'histoire leur réserva (comme Fermat, Lagrange, Legendre), que nous pouvons aujourd'hui accéder aux merveilles de cette science divine ; ils ont su montrer toutes les richesses qu'elle renfermait. »*

Carl Friedrich Gauss

# Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier respectueusement le professeur BEBBOUCHI Rachid pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je remercie le Professeur BENCHERIF Farid pour m'avoir initié au Nombres de Bernoulli et surtout avoir permis de découvrir le mystère de leur ubiquité et la magie qui les entoure.

Je souhaiterais témoigner mon plus profond respect et mon infinie gratitude aux professeurs BELGHABA Kacem, BOUROUBI Sadek, DERBAL Abdellah et KIHHEL Omar pour avoir eu la patience et surtout la gentillesse d'avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Enfin je ne saurais oublier d'avoir une pensée émue pour mon collègue et ami AIDER Abdelkader qui nous a malheureusement quittés le 1er octobre 2013.

# Table des matières

<b>Notations</b>	<b>iv</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Histoire des nombres de Bernoulli</b>	<b>9</b>
1.1 Introduction . . . . .	9
1.2 Les grandes étapes dans la détermination de $S_m(n)$ . . . . .	10
1.3 Importance des nombres de Bernoulli . . . . .	18
<b>2 Algèbre d'opérateurs sur <math>\mathbb{C}[x]</math></b>	<b>19</b>
2.1 Introduction . . . . .	19
2.2 Algèbre $\mathbb{C}[[z]]$ des séries formelles . . . . .	19
2.2.1 Opérations définies dans $\mathbb{C}[[z]]$ . . . . .	20
2.2.2 Séries génératrices associées à une suite de nombres ou de polynômes .	21
2.2.3 Suites de polynômes de type binomial . . . . .	22
2.3 Algèbre $End(\mathbb{C}[x])$ et delta-opérateurs . . . . .	22
2.3.1 Définitions des différents opérateurs linéaires . . . . .	22
2.3.2 Opérateurs de composition, delta-opérateurs . . . . .	24
2.3.3 Suite de Sheffer, suite d'Appell, suite basique d'un delta-opérateur . . .	29
2.4 Généralisation de la formule de Taylor . . . . .	31
2.4.1 Caractérisation des opérateurs de composition . . . . .	35
2.5 Propriétés et inversion d'opérateurs . . . . .	38
<b>3 Suites polynomiales classiques</b>	<b>41</b>

3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Nombres et polynômes de Stirling . . . . .	41
3.3	Polynômes et nombres de Bernoulli . . . . .	46
3.3.1	Définition et relations de récurrence . . . . .	46
3.3.2	Séries génératrices exponentielles . . . . .	49
3.3.3	Propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli . . . . .	50
3.3.4	Formules de Faulhaber et formules d'Euler-MacLaurin . . . . .	53
3.3.5	Formules explicites des polynômes et nombres de Bernoulli . . . . .	54
3.3.6	<b>Formules explicites du <math>n</math>-ième polynôme de Bernoulli</b> . . . . .	59
3.4	Polynômes et nombres d'Euler . . . . .	60
3.4.1	Définition et relations de récurrence pour les polynômes d'Euler . . . . .	60
3.4.2	Formules explicites pour les polynômes et les nombres d'Euler . . . . .	61
3.5	Relations entre polynômes de Bernoulli et polynômes d'Euler . . . . .	62
3.6	Nombres et polynômes de Genocchi . . . . .	66
3.7	Polynômes de Nörlund . . . . .	66
3.8	Nombres et polynômes de Fibonacci et de Lucas . . . . .	67
3.9	Polynômes de Tchebychev . . . . .	68
3.10	Polynômes d'Hermite . . . . .	68
<b>4</b>	<b>Identités combinatoires</b>	<b>70</b>
4.1	Introduction . . . . .	70
4.2	Preuve du théorème 4.1 . . . . .	72
4.3	Preuve du théorème 4.3 . . . . .	74
4.4	Applications du théorème 4.3 . . . . .	75
4.4.1	Identités pour les polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi . . . . .	75
4.4.2	Identités pour les polynômes de Fibonacci et de Lucas . . . . .	76
4.4.3	Identités pour les nombres de Fibonacci, de Lucas, de Jacobsthal et de Jacobsthal-Lucas . . . . .	77

4.4.4	Identités pour les polynômes de Tchébychev de première et de seconde espèce . . . . .	79
4.4.5	Identité pour les polynômes d’Hermite . . . . .	80
4.4.6	Identités vérifiées par les polynômes de Stirling . . . . .	80
4.4.7	Identités vérifiées par les polynômes de Nörlund . . . . .	82
<b>5</b>	<b>Calculs effectifs</b>	<b>84</b>
5.1	Introduction . . . . .	84
5.2	Les formules classiques . . . . .	85
5.3	Utilisation de la Formule de Von Staudt et Clausen. . . . .	86
5.3.1	Preuve du Théorème de Von Staudt et Clausen . . . . .	88
5.3.2	Exemples numériques . . . . .	88
5.3.3	Conséquences . . . . .	89
5.3.4	Algorithme de Kevin J.Mac Gown (25.09.2011) . . . . .	90
	<b>Conclusion</b>	<b>92</b>
	<b>Annexe 1 : Quelques commandes MAPLE</b>	<b>94</b>
	<b>Annexe 2 : Auteurs cités</b>	<b>95</b>

# Notations

1.  $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$  : ensemble des entiers naturels.
2.  $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \dots\}$  : ensemble des entiers naturels non nuls.
3.  $\mathbb{Z}$  : ensemble des entiers rationnels.
4.  $\mathbb{Q}$  : ensemble des nombres rationnels.
5.  $\mathbb{R}$  : ensemble des nombres réels.
6.  $\mathbb{C}$  : ensemble des nombres complexes.
7.  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  :  $p$ -ième corps cyclotomique .
8.  $\mathcal{H}_p$  :  $p$  - rang du groupe des classes d'idéaux de  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  .
9.  $End(\mathbb{C}[x])$  : anneau des endomorphismes du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ .
10.  $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[D]]$  : algèbre des opérateurs de composition sur le  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ .
11.  $Del(\mathbb{C}[x])$  : ensemble des delta-opérateurs du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ .
12.  $\delta$  : notation générique pour un delta-opérateur.
13.  $\delta_{i,j}$  : symbole de Kronecker valant 1 si  $i = j$  et 0 sinon.
14.  $[z^n]P(z)$  : terme de degré  $n$  du polynôme  $P$ .
15.  $\deg(P(x))$  : degré du polynôme  $P(x)$ .
16.  $\text{val}(S(z))$  : valuation de la série formelle  $S(z)$ .
17.  $\mathbb{Z}_{(n)}$  : désigne l'anneau des  $n$ -entiers .
18.  $a \equiv_n b$  : Pour  $a \in \mathbb{Q}$  et  $b \in \mathbb{Q}$  et  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $n \geq 2$ ,  $a \equiv_n b$  signifie aussi que  $a - b \in n\mathbb{Z}_{(n)}$ .
19.  $\mathbb{C}[x]$  :  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  des polynômes à coefficients complexes.
20.  $\mathbb{C}[[z]]$  : l'algèbre des séries formelles .
21.  $\mathbb{C}_0[[z]]$  : l'ensemble des séries formelles de valuation égale à 1
22.  $End(\mathbb{C}[x])$  : l'algèbre des endomorphismes du  $\mathbb{C}$  -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  .
23.  $\tau_a$  : l'opérateur de translation par  $a$  (pour  $a \in \mathbb{C}$  ).
24.  $I$  : l'opérateur identité.
25.  $E$  : l'opérateur d'avance.

26.  $D$  : l'opérateur de dérivation.
27.  $\Delta$  : le premier opérateur de différence finie.
28.  $\nabla$  : le deuxième opérateur de différence finie.
29.  $\mathcal{I}$  : l'opérateur d'intégration.
30.  $\mathcal{J}$  : l'opérateur de Bernoulli.
31.  $\mathcal{L}$  : l'opérateur de moyenne ou opérateur d' Euler.
32.  $B_n(x)$  :  $n$ -ième polynôme de Bernoulli.
33.  $E_n(x)$  :  $n$ -ième polynôme d'Euler.
34.  $B_n$  : le  $n$ -ième nombre de Bernoulli :  $B_n = B_n(0)$ .
35.  $E_n$  : le  $n$ -ième nombre d'Euler :  $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$  .
36.  $b_n$  : le  $n$ -ième nombre de Bernoulli de seconde espèce.
37.  $c_n$  : le  $n$ -ième nombre de Cauchy,  $c_n = n!b_n$
38.  $G_n(x)$  :  $n$ -ième polynôme de Genocchi.
39.  $G_n$  :  $n$ -ième nombre de Genocchi.
40.  $U_n(x, y)$  :  $n$ -ième polynôme de Fibonacci.
41.  $F_n$  :  $n$ -ième nombre de Fibonacci.
42.  $V_n(x, y)$  :  $n$ -ième polynôme de Lucas.
43.  $L_n$  :  $n$ -ième nombre de Lucas.
44.  $U_n(x, y)$  :  $n$ -ième polynôme de Fibonacci.
45.  $P_n$  :  $n$ -ième nombre de Pell.
46.  $Q_n$  :  $n$ -ième nombre de Pell-Lucas.
47.  $J_n$  :  $n$ -ième nombre de Jacobsthal.
48.  $j_n$  :  $n$ -ième nombre de Jacobsthal-Lucas.
49.  $\mathcal{U}_n(x)$  :  $n$ -ième polynôme de Tchébychev de première espèce.
50.  $\mathcal{V}_n(x)$  :  $n$ -ième polynôme de Tchébychev de seconde espèce.
51.  $H_n(x, y)$  :  $n$ -ième polynôme d' Hermite.
52.  $\sigma(x)$  :  $n$ -ième polynôme de Stirling.
53.  $B_n^{(x)}$  :  $n$ -ième polynôme de Nörlund.
54.  $s(n, k)$  : nombre de Stirling de première espèce ( signé ).
55.  $\left[ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$  : nombre de Stirling de première espèce non signé.
56.  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  : nombre de Stirling de seconde espèce, ce nombre est aussi souvent noté  $S(n, k)$ .
57.  $x^{\underline{n}} := x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$  : puissance factorielle descendante .

58.  $x^{\bar{n}} := x(x+1)(x+2)\cdots(x+n-1)$  : puissance factorielle montante .
59.  $[x]$  : désigne la partie entière d'un nombre réel  $x$ , i.e. l'unique entier rationnel  $k$  vérifiant :  
 $x-1 < k \leq x$ .
60.  $\sum_{i \in \emptyset} = 0$  : par convention ( "somme vide" ).
61.  $\prod_{i \in \emptyset} = 1$  : par convention ( " produit vide " ).

# Introduction

« *Toute la suite des hommes, pendant le cours de tant de siècles, doit être considérée comme un même homme qui subsiste toujours et qui apprend continuellement.* »

Blaise Pascal,

Préface pour le Traité du vide, 1663.

Ce travail a pour thème l'étude d'identités vérifiées par des suites de nombres et de polynômes remarquables telles que les suites de nombres et polynômes de Bernoulli, d'Euler, de Genocchi, de Fibonacci, Lucas, Pell-Lucas, Jacobsthal, Jacobsthal-Lucas. Nous avons établi de nombreuses nouvelles identités pour ces suites et avons simplifié la preuve de certaines autres déjà découvertes ; par ailleurs, certaines nouvelles formules explicites ont été établies.

La suite des nombres de Bernoulli et la suite des polynômes de Bernoulli ont une histoire particulière ; elles interviennent dans de nombreuses branches des Mathématiques et de la Physique, et très souvent de manière inattendue pour ne pas dire mystérieuse... Précisons d'abord qu'il s'agit ici des nombres de Jacques Bernoulli (1654-1705) , ainsi baptisés par A. De Moivre et des polynômes de Daniel Bernoulli (1700-1782) ; le terme de "polynômes de Bernoulli" ne fut introduit qu'en 1851 par J.-L. Raabe ([132]). D'une part, ces deux suites viennent mettre un terme à plus de vingt siècles de recherche d'une formule générale satisfaisante donnant la somme des puissances  $m$ -ièmes des  $n$  premiers entiers naturels. D'autre part, la suite des nombres de Bernoulli intervient aussi dans de nombreuses relations, là où on ne pouvait pas, *a priori*, soupçonner leur présence comme les valeurs de la fonction  $\zeta$  de Riemann aux points d'abscisses entières. Ainsi, Euler qui fut le premier à avoir déterminé la valeur de  $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ , en prouvant que  $\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}$ , montra aussi que  $q_k := \frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \in \mathbb{Q}$ , pour tout entier  $k \geq 1$ . Selon Nielsen [122], Euler mit plus de dix ans à s'apercevoir que les nombres  $q_k$  étaient en fait rationnellement liés aux nombres de Bernoulli.

Nous nous sommes attachés à retracer d'un point de vue historique la genèse de la suite des nombres de Bernoulli. Ce travail a ainsi nécessité l'étude d'une bibliographie très importante. En effet, pour le réaliser, nous avons dû consulter de nombreux documents dont certains très anciens et d'autres qui, bien que plus récents, ont été tout aussi difficiles à consulter, comme certains manuscrits de la bibliothèque numérique " Gallica " .

Ce préambule historique consiste à retracer brièvement une aventure qui a débuté avec Pythagore, il y a de cela plus de 25 siècles et qui s'est poursuivie avec Archimède puis avec d'illustres autres mathématiciens tels que Aryabatha, Ibn el Haytham, Fermat, Pascal et bien d'autres - qui ne sont pas toujours cités dans la littérature-, et ce, bien qu'ils aient apporté une contribution très appréciable dans l'étude des sommes des puissances d'entiers. Nous verrons, dans cette thèse, que de nombreuses relations concernant en particulier les nombres de Bernoulli ont été découvertes et redécouvertes à plusieurs reprises par de nombreux mathématiciens qui souvent, ont cru avoir été les premiers à les découvrir. Ainsi, pour citer un exemple, parmi beaucoup d'autres, le Théorème de Von Staudt et Clausen a été établi en même temps ( 1840 ) et indépendamment par ses deux auteurs [146], [47].]

En fait, les nombres de Bernoulli, eux-mêmes, ont été découverts, bien avant le suisse Jacques Bernoulli (1654-1705), par le mathématicien japonais Takakazu Séki Kowa (1642-1708). Curieusement, presque au même moment, ces deux auteurs, à quelques mois d'intervalle, ont, chacun de son côté, publié leurs travaux dans des ouvrages posthumes et dans des régions du monde bien éloignées l'une de l'autre. Un autre exemple assez récent d'une identité attribuée, par erreur ou par méconnaissance, à un mathématicien plutôt qu'à celui qui l'a découvert antérieurement est la relation dite de Kaneko. Il s'agit d'une identité vérifiée par les nombres de Bernoulli, redécouverte en 1995 par Masanobu Kaneko. Cette identité est en fait une relation déjà établie en 1827 par Ettingshausen puis redécouverte en 1877 par Seidel.

L'Histoire des Mathématiques, de la recherche mathématique, et de manière plus générale l'Histoire des Sciences, gagnerait donc à être mieux connue et à être surtout correctement enseignée. Aujourd'hui, avec la réforme de l'enseignement supérieur, l'Histoire des Sciences est un module du cursus des licences scientifiques du LMD. Dans ce cadre, j'ai eu l'honneur et le plaisir d'avoir eu une fructueuse collaboration avec le Professeur Abdelkader Khelladi dont je recommande la lecture de l'ouvrage qui se veut être une intéressante contribution à cet enseignement.

Je suis aussi redevable au Professeur Ahmed Djebbar pour les très originales conférences qu'il a présentées aussi bien à l'USTHB qu'à Koléa. C'est un merveilleux conteur et un scientifique averti. Il a l'art de faire partager à son assistance, son enthousiasme, sa passion pour la recherche de la vérité scientifique. Son élève, le Professeur Marc Moyon de l' Université de Limoges a également apporté une aide très appréciable grâce aux cours d'Histoire des Mathématiques qu'il a donnés aux étudiants du Master ACC de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB.

On ne saurait oublier le Professeur Daniel Lazard qui se rendait assez souvent à l'USTHB afin de nous initier à l'utilisation du calcul formel. Ses exposés m'ont été d'un grand profit ; non seulement, j'en ai fait profiter nos étudiants de Master dans mon enseignement de calcul formel mais d'autre part je dois reconnaître que le logiciel de calcul formel MAPLE, auquel il nous a élégamment initié, m'a été très utile pour m'assurer de la validité effective des relations

que j'ai pu établir avec l'aide de mon directeur de thèse.

Le Professeur Omar Kihel m'a accueilli à l'Université de Brock, Saint Catharines, au Canada, et ce dans le cadre d'un colloque international qu'il a organisé en Août 2014. J'y ai donné une conférence concernant les factorisations des nombres de Fibonacci. Invité en Novembre 2014 par le laboratoire LA3C (Laboratoire d'Arithmétique, Codage, Combinatoire et Calcul Formel), il a donné, en Novembre 2014, deux conférences à la Faculté de Mathématiques de l'USTHB, avec toute la compétence, l'humilité et la générosité qu'on lui connaît. Il m'a beaucoup encouragé à poursuivre cette recherche concernant l'étude combinatoire de ces familles remarquables de nombres et de polynômes. C'est pour nous un grand honneur qu'il ait accepté de faire partie du Jury de soutenance.

Invité par la Faculté de Mathématiques, le Professeur Michel Waldschmidt- qui n'est plus à présenter-, a séjourné durant une dizaine de jours en Janvier 2015. Il a donné plusieurs cours et conférences très appréciés, tout autant attractifs que pédagogiques, et qui nous ont littéralement envoûtés. C'est un grand mathématicien qui sillonne le monde entier, apportant partout savoir et encouragement à ceux qui ont en un réel besoin. Il s'est beaucoup intéressé au programme de recherche de notre laboratoire LA3C, et a eu des discussions très prolifiques avec les membres de notre laboratoire. Il a eu ces mots justes qui résument bien toute étude concernant les nombres de Bernoulli : "beaucoup de mystère...".

Ainsi, cette thèse se veut être la résultante de toutes ces nombreuses rencontres et des fructueuses discussions qui ont en jailli. Elle comporte cinq chapitres que nous résumons ci-après.

## Chapitre 1

Ce premier chapitre intitulé " Histoire des nombres de Bernoulli " retrace les grandes étapes de la recherche d'une formule générale donnant la somme des puissances  $m$ -ièmes des  $n$  premiers entiers naturels .

Cette histoire débute avec Pythagore qui connaissait la formule - écrite, bien sûr, avec les notations actuelles- :

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

il y a de celà plus de 25 siècles. Elle se poursuit avec Archimède qui, quelques siècles plus tard, portait son attention sur la somme des carrés ainsi que sur la somme des cubes des  $n$  premiers entiers naturels non nuls. Il savait déjà que

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + \dots + n)^2 .$$

Des générations de mathématiciens du monde entier poursuivirent ensuite cette recherche en quête d'une formule générale pouvant exprimer la somme  $S_m(n) := 1^m + 2^m + \dots + n^m$  à l'aide d'un polynôme en  $n$ . C'est ainsi que l'histoire a retenu les noms de ceux qui succédèrent à ces deux illustres mathématiciens de l'Antiquité et parmi lesquels on peut citer : Aryabhata (476-550), Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (953-1029), Abu Ali al hasan ibn al hasan ibn al Haytham (965-1039), Thomas Harriot (1560-1621), Johann Faulhaber (1580-1635), Pierre de Fermat (1601-1665), Blaise Pascal (1623-1662), Takakazu Seki Kowa (1642-1708) et enfin Jakob Bernoulli (1654-1705) à qui l'on doit l'expression générale suivante :

$$\sum_{k=1}^n k^m = \frac{1}{m+1}n^{m+1} + \frac{1}{2}n^m + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{2k} B_{2k} n^{m+1-2k},$$

dans laquelle  $(B_n)_{n \geq 0}$  désigne la suite de nombres rationnels dénommée, par A. de Moivre,[117], suite des nombres de Bernoulli et définie par les relations suivantes

$$B_0 = 1 \quad , \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \geq 1.$$

Avec cette formule, l'aventure, qui avait commencé il y a plus de deux mille ans, semblait alors avoir trouvé son épilogue. Cette formule de Bernoulli est quelquefois appelée aujourd'hui formule de Faulhaber.

Dans ce travail de recherche historique, l'ouvrage du mathématicien danois Nielsen intitulé "Traité élémentaire des nombres de Bernoulli", paru en 1923, nous a été fort utile. Il s'agit d'un ouvrage de 400 pages, écrit en français et qui n'a été réédité qu'en 2003, sans apparemment aucune traduction entre ces deux dates.

## Chapitre 2

Ce deuxième chapitre est intitulé "Opérateurs de  $\mathbb{C}[x]$ ". Ce concept d'opérateurs donne une assise rigoureuse de ce qui a été appelé calcul ombraal. Ce chapitre commence par des rappels et des compléments concernant l'algèbre des séries formelles  $\mathbb{C}[[z]]$ . Nous y précisons la définition ainsi que certaines propriétés des séries génératrices associées à une suite de nombres ou de polynômes quelconques. Le cas particulier où la suite de polynômes est de type binomial est également envisagé.

Nous passons ensuite à l'étude de l'algèbre  $End(\mathbb{C}[x])$  des endomorphismes du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ . Les éléments de cette algèbre sont appelés des opérateurs linéaires de  $\mathbb{C}[x]$  ou encore plus simplement des opérateurs. On rappelle la définition de certains opérateurs particuliers tels que l'opérateur de translation par  $a$  (pour  $a \in \mathbb{C}$ ), noté  $\tau_a$ , l'opérateur identité noté  $I$ , l'opérateur d'avance noté  $E$ , l'opérateur de dérivation noté  $D$ , les opérateurs de différence finie  $\Delta$  et  $\nabla$ , l'opérateur d'intégration noté  $\mathcal{I}$ , l'opérateur de Bernoulli noté  $\mathcal{J}$

et l'opérateur de moyenne que nous appelons ici opérateur d'Euler noté  $\mathcal{L}$ . Ces opérateurs sont définis par les relations

$$\begin{aligned}\tau_a(x^n) &= (x+a)^n, \\ I(x^n) &= x^n, \\ E(x^n) &= \tau_1(x^n) = (x+1)^n, \\ D(x^n) &= nx^{n-1}, \quad n \geq 1, \quad D(x^0) = 1, \\ \Delta(x^n) &= (x+1)^n - x^n, \\ \nabla(x^n) &= x^n - (x-1)^n, \\ \mathcal{I}(x^n) &= \frac{x^{n+1}}{n+1}, \\ \mathcal{J}(x^n) &= \frac{1}{n+1}((x+1)^{n+1} - x^{n+1}), \\ \mathcal{L}(x^n) &= \frac{1}{2}((x+1)^n + x^n).\end{aligned}$$

Les opérateurs qui commutent avec les translations sont appelés opérateurs de composition. Ils constituent une sous-algèbre de l'algèbre  $End(\mathbb{C}[x])$  notée  $\widehat{\mathcal{D}}$ . On appelle delta-opérateur tout opérateur de composition  $\delta$  tel que  $\delta(x)$  soit un polynôme constant non nul. On montre que l'image d'un polynôme de degré  $n \geq 1$  par un delta-opérateur est un polynôme de degré  $n-1$  et que de plus l'image d'un polynôme constant par un delta-opérateur est nulle. Ce résultat a deux conséquences importantes.

La première conséquence est la mise en évidence d'un important ensemble de suites, appelées suites de Sheffer associées à un delta-opérateur. Plus précisément, une suite de Sheffer associée à un delta-opérateur  $\delta$  (appelée suite d'Appell lorsque le delta-opérateur  $\delta$  est l'opérateur de dérivation) est une suite de polynômes  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[x]$  telle que pour tout  $n \geq 0$ , on a  $\deg(s_n(x)) = n$  et vérifiant de plus la condition  $\delta(s_n(x)) = ns_{n-1}(x)$ , pour  $n \geq 1$ . L'ensemble des suites de Sheffer est un groupe qui possède deux remarquables sous-groupes : celui des suites d'Appell qui en est un sous-groupe normal et abélien ; l'autre sous-groupe est celui des suites dites de type binomial qui n'est ni normal, ni abélien. L'ensemble des suites de Sheffer est produit semi-direct de ces deux sous-groupes. Une suite de Sheffer est évidemment une base de  $\mathbb{C}[x]$ . On montre qu'il existe une unique suite de Sheffer  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  associée à un delta-opérateur  $\delta$  donné et vérifiant les conditions  $s_0(x) = 1$  et  $s_n(0) = 0$  pour  $n \geq 1$ . Cette unique suite est appelée suite basique associée au delta-opérateur  $\delta$ . On peut alors démontrer l'important " théorème de Taylor " qui affirme que pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  et pour tout delta-opérateur  $\delta$  de suite basique  $(p_n(x))_{n \geq 0}$ , on a

$$P(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(x)}{k!} p_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(y)}{k!} p_k(x).$$

La deuxième conséquence est que si  $\delta$  est un delta-opérateur, toute série formelle en  $\delta$ , à coefficients dans  $\mathbb{C}$ , qui est donc un élément de l'ensemble  $\mathbb{C}[[z]]$ , définit un opérateur de composition. Nous prouvons alors qu'en désignant par  $\mathbb{C}_0[[z]]$ , l'ensemble des séries formelles de valuation égale à 1, on a  $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[\delta]]$  et  $End(\mathbb{C}[x]) = \mathbb{C}_0[[\delta]]$ . On peut alors en déduire que les opérateurs  $\tau_a$ ,  $D$ ,  $\Delta$ ,  $\nabla$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{L}$  sont des opérateurs de composition et que  $D$ ,  $\Delta$ ,  $\nabla$  sont des delta-opérateurs, on en conclut alors que ces opérateurs, éléments de

$$\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[D]] = \mathbb{C}[[\Delta]] = \mathbb{C}[[\nabla]],$$

peuvent tous s'écrire sous forme de séries formelles en  $D$  ou en  $\Delta$ . On montre ainsi qu'on a successivement

$$\begin{aligned}\tau_a &= e^{aD} = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{D^n}{n!} \\ \Delta &= e^D - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{n!} \\ \mathcal{J} &= \frac{e^D - 1}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{(n+1)!} \\ \mathcal{L} &= \frac{1}{2}(1 + e^D) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2} \left( \delta_{n,0} + \frac{1}{n!} \right) D^n\end{aligned}$$

et en fonction de l'opérateur de différence  $\Delta$ , on obtient

$$\begin{aligned}\tau_a &= (1 + \Delta)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} \Delta^n \\ D &= \log(1 + \Delta) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{\Delta^n}{n} \\ \mathcal{J} &= \frac{\Delta}{\log(1 + \Delta)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} \Delta^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \Delta^n \\ \mathcal{L} &= 1 + \frac{1}{2} \Delta.\end{aligned}\tag{1}$$

Dans la relation (1),  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  désignent respectivement les nombres de Bernoulli de deuxième espèce et les nombres de Cauchy liés par  $c_n = n!b_n$ .

On constate alors que les opérateurs  $\tau_a$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{L}$  sont inversibles, leurs inverses (ou opérateurs

réciroques) sont aussi des séries de composition et on a, à l'aide de l'opérateur  $D$

$$\begin{aligned}\tau_a^{-1} &= \tau_{-a} = e^{-aD} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a^n \frac{D^n}{n!} \\ \mathcal{J}^{-1} &= \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{D^n}{n!} \\ \mathcal{L}^{-1} &= \frac{2}{e^D + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} e_n \frac{D^n}{n!}\end{aligned}$$

En fonction de l'opérateur de différence  $\Delta$ , on obtient

$$\begin{aligned}\tau_a^{-1} &= (1 + \Delta)^{-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-a}{n} \Delta^n, \\ \mathcal{J}^{-1} &= \frac{\log(1 + \Delta)}{\Delta} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\Delta^n}{n+1}, \\ \mathcal{L}^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n} \Delta^n.\end{aligned}$$

## Chapitre 3

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions et nous démontrons les principales propriétés de certaines suites de nombres et de polynômes remarquables. Il s'agit des :

- nombres de Stirling de première et seconde espèce
- polynômes de Stirling,
- polynômes et nombres de Bernoulli,
- polynômes et nombres d'Euler,
- polynômes et nombres de Genocchi,
- polynômes et nombres de Fibonacci et de Lucas,
- polynômes de Tchébychev de première et deuxième espèce,
- polynômes de Nörlund,
- polynômes d'Hermite.

Une grande partie de ce chapitre est consacrée à une étude approfondie des polynômes et nombres de Bernoulli et d'Euler. Nous introduisons la suite des polynômes de Bernoulli  $(B_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et la suite des nombres d'Euler  $(E_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  comme images de la base canonique  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  par les opérateurs de composition  $\mathcal{J}^{-1}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  (opérateurs réciproques des opérateurs de Bernoulli  $\mathcal{J}$  et d'Euler  $\mathcal{L}$ ). On constate alors que les suites des polynômes de Bernoulli et d'Euler sont des suites d'Appell, ce qui nous permet d'obtenir de manière immédiate de nombreuses propriétés de ces polynômes. Grâce aux expressions de  $\mathcal{J}^{-1}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  sous forme de séries en  $D$  ou en  $\Delta$ , nous montrons qu'on obtient de nombreuses expressions explicites des nombres de Bernoulli et d'Euler.

## Chapitre 4

On commence par énoncer le célèbre théorème attribué à Kaneko ([103]1995) qui établit la formule :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0$$

Cette relation fut en fait découverte d'abord par Von Ettingshausen [70] en 1827, puis redécouverte par Seidel [141] en 1877 et retrouvée enfin par Kaneko en 1995 [103]. Il est à noter que Kaneko, dans son article, donne en plus de sa propre démonstration, une deuxième preuve due à Zagier.

Ce théorème a donné lieu à l'extension suivante établie par Chen et Sun en 2009,[44] par la méthode de Zeilberger

$$\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} (n+k+3)(n+k+2)(n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

En 2011, nous avons obtenu la généralisation suivante [168].

**Théorème** *Pour tout entier naturel  $n \geq 0$  et pour tout entier naturel impair  $q$ , on a*

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (n+k+q) \dots (n+k+1) B_{n+k} = 0$$

Ce dernier résultat a encore été généralisé par Benchérif et Garici en 2012, [17], à des suites de Césaro appelées aussi suites autoduales.

Dans ce chapitre, nous établissons une nouvelle preuve du théorème 4.3 ainsi qu'une preuve de la généralisation de ce théorème. Nous prouvons que pour toute suite  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$  de série génératrice exponentielle :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$$

telle que

$$S(z) = S(-z)e^{a(x)z},$$

où  $a(x) \in \mathbb{C}[x]$ , on a l'identité suivante pour tous les entiers  $n, m, q$  :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (a(x))^{m+q-k} A_{n+k}(x) \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} (a(x))^{n+q-k} A_{m+k}(x) = 0 \end{aligned}$$

En faisant  $m = n$  dans la relation précédente, on obtient alors l'identité suivante vérifiée pour tous les entiers  $n, q$ , avec  $q$  impair :

$$\sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (a(x))^{n+q-k} A_{n+k}(x) = 0$$

## Chapitre 5

Ce chapitre fait brièvement le point sur de récentes publications consacrées au calcul effectif des nombres de Bernoulli. Cette recherche est motivée, d'une part par la recherche de grands nombres premiers réguliers en raison de leur lien avec la démonstration partielle du Grand Théorème de Fermat-Wiles, et pour la vérification de la conjecture d'Agoh-Giuga, d'autre part. Cela a permis de développer de très judicieux algorithmes permettant de calculer en un temps " raisonnable " des nombres de Bernoulli avec un indice " très grand " .

# Chapitre 1

## Histoire des nombres de Bernoulli

*"On ne peut échapper à la sensation que ces formules mathématiques ont une existence indépendante et une intelligence propre, qu'elles sont plus sages que nous, plus sages que ceux qui les ont découvertes et que nous pouvons en tirer plus que nous y avons mis à l'origine."*

Heinrich

Hertz

### 1.1 Introduction

Dans son célèbre ouvrage de plus de 400 pages entièrement consacré à l'étude des nombres de Bernoulli, intitulé "Traité élémentaire des nombres de Bernoulli" paru en 1923 [122], le mathématicien danois Niels Nielsen écrit au début du chapitre XVI, en page 295 ce qui suit :

*"La détermination des sommes de puissances*

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + 3^m + \cdots + n^m,$$

*où  $m$  et  $n$  désignent des entiers positifs, problème apparemment élémentaire, a occupé les géomètres depuis la haute antiquité, et le même problème occupe certainement, même de nos jours, beaucoup de géomètres, dans leur tendre jeunesse. Or, le problème sus-dit, apparemment parfaitement élémentaire, est intimement lié à des problèmes réputés être les plus difficiles de la Théorie des Nombres, comme nous le verrons bientôt"*

Selon Nielsen ([122], p. 295) et Lucas ([114], p. 224), les Grecs connaissaient déjà les formules

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{n(n+1)}{2} \\ S_2(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\ S_3(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1(n))^2 \end{aligned}$$

Sous forme développée, ces formules s'écrivent

$$\begin{aligned} S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\ S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\ S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \end{aligned}$$

Il aura fallu près de vingt siècles pour arriver à résoudre de manière satisfaisante ce problème. La résolution de ce problème a fait apparaître une suite de nombres remarquables dénommée, par A. de Moivre et jusqu'à nos jours, suite des nombres de Bernoulli et une suite de polynômes remarquables appelée, par Raabe, suite des polynômes de Bernoulli. La suite des nombres de Bernoulli s'est avérée être bien plus qu'une simple suite de nombres rationnels utile simplement pour répondre à un vieux problème; en réalité, il ne serait pas exagéré de dire qu'elle a complètement "envahi" les mathématiques.

La suite des nombres de Bernoulli est une suite de nombres rationnels  $(B_n)_{n \geq 0}$  pouvant, entre autres, être définie par les relations

$$B_0 = 1 \text{ et } B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \geq 1$$

Ces relations permettent d'obtenir les valeurs des premiers nombres de Bernoulli

$$B_0 = 1, \quad B_1 = -\frac{1}{2}, \quad B_2 = \frac{1}{6}, \quad B_3 = 0, \quad B_4 = -\frac{1}{30}, \quad B_5 = 0, \quad B_6 = \frac{1}{42}.$$

Ces nombres interviennent dans de nombreux domaines en Mathématiques (Arithmétique, Analyse, Topologie...) et aussi en Physique. Ils ont été mis en évidence par le mathématicien suisse Jacob Bernoulli (1654 – 1705) mais un peu de temps avant lui par le savant japonais Takakazu Seki Kowa (1642-1708). Ces nombres ont permis à Jacob Bernoulli d'obtenir la formule générale suivante dans laquelle  $m$  et  $n$  désignent des entiers non nuls

$$1^m + 2^m + \dots + n^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \frac{1}{m+1} \binom{m+1}{2k} B_{2k} n^{m+1-2k}.$$

Cette formule est donnée sans démonstration par Jacques Bernoulli dans son célèbre ouvrage intitulé "*Ars conjectandi*". Selon Nielsen, la première démonstration de cette formule semble être due à Andreas von Ettingshausen. Elle ne fut donnée qu'en 1827; elle est restée complètement inaperçue ([122], p. 297).

Dans ce chapitre, nous allons décrire les grandes étapes qui ont abouti à définir les suites de nombres et de polynômes de Bernoulli.

## 1.2 Les grandes étapes dans la détermination de $S_m(n)$

### Travaux de Pythagore (-570, -490)

Mathématicien et philosophe grec, Pythagore connaissait la formule - en notations modernes - donnant  $S_1(n)$

$$S_1(n) = 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Ce résultat était obtenu de manière géométrique ; la suite  $(S_1(n))_{n \geq 1}$  étant la suite des nombres dits triangulaires.

$$S_1 = T_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

### Travaux d'Archimède (-287, -212)

Considéré comme le plus grand scientifique de l'Antiquité, Archimède avait trouvé la relation suivante :

$$(n+1)n^2 + (1+2+\dots+n) = 3(1^2+2^2+\dots+n^2).$$

### Travaux d'Aryabhata (476-550)

C'est l'un des plus grands mathématiciens indiens ; il a mis en évidence la relation :

$$(1+2+\dots+n)^2 = 1^3+2^3+\dots+n^3.$$

### Travaux d'Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji (953-1029)

On doit au mathématicien et ingénieur perse Abu Bekr ibn Muhammad ibn al-Husayn Al-Karaji qui vécut essentiellement à Baghdad, une preuve géométrique particulièrement élégante et détaillée de la relation précédente qu'il trouva indépendamment des résultats d'Archimède

$$S_3(n) = S_1^2(n).$$

### Travaux d'Abu Ali al Hasan ibn al Hasan ibn al Haytham (965-1039)

Le mathématicien Ibn Al Haytham (965 - 1039), de son nom latinisé Alhazen, est un savant musulman considéré comme le père moderne de l'optique, de la physique expérimentale et de la méthode scientifique. Il peut également être considéré comme le premier physicien théorique. Il mit en évidence la relation suivante

$$1^4 + 2^4 + \dots + n^4 = \left(\frac{n}{5} + \frac{1}{5}\right) n \left(n + \frac{1}{2}\right) \left((n+1)n - \frac{1}{3}\right),$$

relation équivalente à la formulation suivante

$$S_4(n) = \frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1).$$

### Travaux de Thomas Harriot (1560-1621)

Thomas Harriot est un mathématicien anglais qui ne fit aucune publication de son vivant mais il laissa plus de 5000 manuscrits sur divers sujets. Il fit un grand emploi du symbolisme mathématique. Harriot écrivit des formules pour la somme des carrés, la somme des cubes et celle des puissances quatrièmes i.e.  $S_2(n)$ ,  $S_3(n)$  et  $S_4(n)$ .

### Travaux de Johann Faulhaber (1580-1635)

Johann Faulhaber est un mathématicien allemand qui vécut à Ulm. J.Faulhaber donna la forme close de  $S_m(n)$  pour  $m \leq 17$ ; pour les autres valeurs, Knuth signale que les résultats publiés n'étaient pas fiables. Selon Knuth [109], c'est Johan Faulhaber (1580-1635) qui fut le premier à remarquer que  $S_m(n)$  est un polynôme de degré  $m + 1$ , mais il ne fit aucune remarque concernant ce qui sera appelée, plus tard, la suite des nombres de Bernoulli.

Faulhaber, [72], détermina les expressions des sommes  $S_m(n)$  pour  $1 \leq m \leq 17$ , sans toutefois expliquer la méthode qui lui avait permis d'obtenir ces résultats; il remarqua ([72],1631), ([108],1992) et ([66], 2013), que les sommes  $S_{2m+1}(n)$  des puissances impaires des  $n$  premiers entiers naturels non nuls pouvaient s'exprimer à l'aide d'un polynôme en  $t = \frac{n(n+1)}{2} = S_1(n)$ . Ce résultat ne fut prouvé qu'en 1834 par Jacobi [98]. Ainsi Faulhaber trouva les formules suivantes que Donald E. Knuth reprit dans son article [108] :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k^3 &= t^2 \\ \sum_{k=1}^n k^5 &= \frac{1}{3} (4t^3 - t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^7 &= \frac{1}{6} (12t^4 - 8t^3 + 2t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^9 &= \frac{1}{5} (16t^5 - 20t^4 + 12t^3 - 3t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^{11} &= \frac{1}{6} (32t^6 - 64t^5 + 68t^4 - 40t^3 + 10t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^{13} &= \frac{1}{105} (960t^7 - 2800t^6 + 4592t^5 - 4720t^4 + 2764t^3 - 691t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^{15} &= \frac{1}{12} (192t^8 - 768t^7 + 1792t^6 - 2816t^5 + 2872t^4 - 1680t^3 + 420t^2) \\ \sum_{k=1}^n k^{17} &= \frac{1}{45} (1280t^9 - 6720t^8 + 21120t^7 - 46880t^6 + 72912t^5 - 74220t^4 + 43404t^3 - 10851t^2).\end{aligned}$$

A ce propos on citera le théorème suivant, signalé par Faulhaber mais démontré beaucoup plus tard par Jacobi, voir [126], page 118 .

### Théorème de Faulhaber-Jacobi

Soit  $U := S_1(n)$ ,  $V := S_2(n)$ , alors pour tout entier  $m \geq 1$ , il existe des polynômes  $\mathcal{F}_m$  et  $\mathcal{G}_m$  à coefficients rationnels tels que

$$S_{2m+1}(x) = U^2 \mathcal{F}_m(U) , S_{2m}(x) = V \mathcal{G}_m(U)$$

En 2012, Bazso, Pinter et Srivastava, dans un article intitulé "A refinement of Faulhaber's theorem concerning sums of powers of natural numbers" généralisèrent tous ces résultats, voir [13] .

### Travaux de Pierre de Fermat (1601-1665)

Dans son ouvrage, [114], Edouard Lucas détaille la méthode de Fermat, (chapitre XIV, pages 224-225 et 229). Cette méthode peut se résumer comme suit : pour calculer la somme  $\sum_{k=1}^n f(k)$ , où  $f(x)$  est un polynôme de degré  $m$ , il suffit de développer  $f(x)$  sur la base  $(1, x, x(x+1), \dots, x(x+1)(x+2) \dots (x+m-1))$

i.e. :

$$f(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x(x+1) + c_3 x(x+1)(x+2) + \dots + c_m x(x+1)(x+2) \dots (x+m-1)$$

Cette écriture de  $f(x)$  peut s'obtenir facilement grâce à la formule d'interpolation de Newton ; on obtient alors la relation suivante qui s'établit à l'aide d'un raisonnement par récurrence

$$\sum_{k=1}^n k(k+1) \dots (k+m-1) = \frac{1}{n} n(n+1) \dots (n+m),$$

On peut alors en déduire l'expression suivante de la somme  $\sum_{k=1}^n f(k)$

$$\sum_{k=1}^n f(k) = c_0 n + \frac{c_1}{2} n(n+1) + \frac{c_2}{3} n(n+1)(n+2) + \dots + \frac{c_m}{m+1} n(n+1)(n+2) \dots (n+m)$$

Dans une lettre à Roberval du 4 novembre 1636, Fermat écrit : "*Si vous multipliez le quadruple du plus grand nombre augmenté de 2 par le carré du triangle de ce nombre, et si du produit, vous retranchez la somme de leurs carrés, vous obtiendrez la somme quintuple de leurs quatrièmes puissances. Il semble que Bachet, dans son traité des Multangulis, n'a pas voulu tâter ces questions, après avoir fait celle des carrés et des cubes. Je serais bien aise que vous vous exerciez pour trouver la méthode générale pour voir si nous nous rencontrons*".

Ce qu'exprime Fermat dans sa lettre n'est rien d'autre que la formule

$$(4n+2)S_1^2 - S_2 = 5S_4$$

Edouard Lucas signale en page 228 que la somme  $S_4$  des puissances quatrièmes avait déjà été étudiée bien avant Fermat. Il écrit à ce propos en page 228 de [114].

"Avant Fermat, la somme des  $n$  premiers bicarrés a été donnée par le médecin Djamchid Ben Mas'oud, qui prit part à la rédaction des tables astronomiques d'Ouloug-Beg. On lit dans un manuscrit conservé au British Museum, daté de 1589 (997 de l'hégire), un passage qui a été traduit ainsi : "si nous désirons connaître la somme des bicarrés, nous retranchons 1 de la somme des premiers nombres et nous prenons constamment le cinquième du reste ; nous l'ajoutons à la somme des dits nombres et nous multiplions ce qui en provient par la somme des carrés des mêmes nombres." On a donc

$$S_4 = \left( \frac{S_1 - 1}{5} + S_1 \right) S_2$$

formule équivalente à celle du texte, et préférable, dans l'application, à celle de Fermat puisqu'elle donne le quotient de  $S_4$  par  $S_2$ . Cependant, c'est à Fermat que l'on doit le principe de la méthode générale pour trouver les sommes de puissances semblables des nombres entiers. Il dit encore, dans une lettre que nous venons de rappeler : "Il faut étant donné un nombre in progression naturali, trouver la somme non seulement de tous les carrés et cubes, ce que les auteurs qui ont écrit ont déjà fait, mais encore la somme des carré-carrés, des carré-cubes, etc., ce que personne que je sache n'a encore trouvé, et pourtant cette connaissance est belle et de grand usage, et n'est pas des plus aisées ; j'en suis venu à bout avec beaucoup de peine."

### Travaux de Blaise Pascal (1623-1662)

Mathématicien, physicien et philosophe français, Pascal fut l'un des rares de son époque à donner une méthode de calcul des sommes  $S_m(n)$ . En 1654, Il prouva que la formule de récurrence donnée dans le théorème suivant ([71], p14) et [26] :

#### Théorème 1.1

$$(m+1)S_m = (n+1)^{m+1} - \binom{m+1}{m-1}S_{m-1} - \dots - \binom{m+1}{k}S_k - \dots - \binom{m+1}{1}S_1 - S_0 - 1 \quad (1.1)$$

**Preuve.** On a

$$(k+1)^{m+1} - k^{m+1} = \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} k^j.$$

Il en résulte qu'en sommant pour  $k$  variant de 1 à  $n$ , on obtient

$$\sum_{k=1}^n ((k+1)^{m+1} - k^{m+1}) = \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} \left( \sum_{k=1}^n k^j \right).$$

i.e.

$$\begin{aligned} (n+1)^{m+1} - 1 &= \sum_{j=0}^m \binom{m+1}{j} S_j \\ &= (m+1)S_m + \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m+1}{j} S_j. \end{aligned}$$

On en déduit la relation( 1.1). ■

La relation de récurrence de Pascal permet d'obtenir successivement les valeurs polynomiales des sommes  $S_j$  en partant de  $S_0 = n$ .

### Travaux de Takakazu Seki Kowa (1642-1708)

Dans son ouvrage "Katsuvo Sampo", publié à titre posthume en 1712, le mathématicien japonais Seki Kowa (1642-1708) découvrit également les nombres qui seront appelés plus tard nombres de Bernoulli par Abraham de Moivre et qui apparaissent - également à titre posthume en 1713- dans le célèbre "Ars Conjectandi" du mathématicien suisse Jacob Bernoulli (1654-1705 ).

### Travaux de Jakob Bernoulli (1654-1705)

Bernoulli ([19],p.97-98) a donné les valeurs des dix premières sommes  $S_m(n)$ . Citons un passage de "Ars conjectandi "

$$\begin{aligned}
 S_1(n) &= \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n \\
 S_2(n) &= \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n \\
 S_3(n) &= \frac{1}{4}n^4 + \frac{1}{2}n^3 + \frac{1}{4}n^2 \\
 S_4(n) &= \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n \\
 S_5(n) &= \frac{1}{6}n^6 + \frac{1}{2}n^5 + \frac{5}{12}n^4 - \frac{1}{12}n^2 \\
 S_6(n) &= \frac{1}{7}n^7 + \frac{1}{2}n^6 + \frac{1}{2}n^5 - \frac{1}{6}n^3 + \frac{1}{42}n \\
 S_7(n) &= \frac{1}{8}n^8 + \frac{1}{2}n^7 + \frac{7}{12}n^6 - \frac{7}{24}n^4 + \frac{1}{12}n^2 \\
 S_8(n) &= \frac{1}{9}n^9 + \frac{1}{2}n^8 + \frac{2}{3}n^7 - \frac{7}{15}n^5 + \frac{2}{9}n^3 - \frac{1}{30}n \\
 S_9(n) &= \frac{1}{10}n^{10} + \frac{1}{2}n^9 + \frac{3}{4}n^8 - \frac{7}{10}n^6 + \frac{1}{2}n^4 - \frac{3}{20}n^2 \\
 S_{10}(n) &= \frac{1}{11}n^{11} + \frac{1}{2}n^{10} + \frac{5}{6}n^9 - n^7 + n^5 - \frac{1}{2}n^3 + \frac{5}{66}n
 \end{aligned}$$

En désignant par  $c$  un exposant quelconque on a :

$$\begin{aligned}
 \int n^c &= \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^{c-1} + \frac{c}{2}An^{c-2} + \frac{c(c-1)(c-2)}{2.3.4}Bn^{c-3} \\
 &+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)}{2.3.4.5.6}Cn^{c-5} \\
 &+ \frac{c(c-1)(c-2)(c-3)(c-4)(c-5)(c-6)}{2.3.4.5.6.7.8}Dn^{c-7} + \dots
 \end{aligned}$$

etc ..., les exposants de  $n$  décroissant par multiple de 2 jusqu'à ce que  $n$  ou  $nn$  soit atteint.

Les majuscules  $A, B, C \dots$  dénotent dans l'ordre les derniers termes dans les expressions de  $\int nn, \int n^4, \int n^6, \int n^8, \text{ etc.}$ , à savoir  $A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}, \text{ etc.}$

Ces coefficients sont tels que chacun d'entre eux complète les autres dans une même expression de l'unité. Ainsi  $D = -\frac{1}{30}$  puisque

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{7}{15} + \frac{2}{9} + D = 1$$

A l'aide de cette table, il m'a fallu moins d'un quart d'heure pour calculer la somme des puissances dixièmes des 1000 premiers entiers, ce qui donne

$$91.409.924.241.424.243.424.241.924.242.500$$

Cet exemple montre combien est inutile l'ouvrage d'Ismael Bullialdus (1605-1694) intitulé "Arithmetica infinitorum" dans lequel il ne fait rien de plus que de calculer par un travail immense, les sommes des six premières puissances-ce qui n'est qu'une part de ce que j'ai accompli dans l'espace d'une seule page."

### Problème de Bâle et fonction dzéta de Riemann

(voir Euler et la détermination des valeurs de la fonction de Riemann  $\zeta(2n)$ , ([7], p. 6).

Ceci compris, Pietro Mengoli pose en 1644 le problème de la détermination de la valeur de cette série. Comme souvent en mathématiques, construire quelque chose est plus difficile que d'en prouver l'existence et le problème de Mengoli résiste aux efforts des mathématiciens pendant... 93 ans.

Problème de Bâle

( voir en p.47 de [51] :)

"La résolution en 1735 du fameux problème de Bâle, c'est-à-dire la détermination de la somme de la série des inverses des carrés parfaits, universellement notée  $\zeta(2)$ , est le premier grand triomphe d'Euler (alors âgé de 28 ans) qui le rend célèbre dans l'Europe entière, notamment en raison de l'élégance et de l'apparente simplicité du résultat. Ce problème avait été initialement posé par Mangoli au milieu du 17ème siècle, et les frères Jakob et Johann Bernoulli avaient déployé pendant des décennies une énergie considérable pour le résoudre, mais sans obtenir de succès décisif." Dès 1731, Euler avait découvert une brillante transformation de cette série qui permet d'en accélérer la convergence :

**Théorème 1.2** Pour tout entier naturel  $k \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{\zeta(2k)}{\pi^{2k}} \in \mathbb{Q}.$$

**Preuve.** On en trouvera une première preuve dans l'ouvrage de Boualem, H. & Brouzet, R.(2002) : "La Planète R, Voyage au Pays des Nombres Réels".[25]

La preuve qui suit reprend et prolonge celle donnée par Don Zagier dans ([38], 2000) en pages 100 et 101 (partie de la Leçon 4 intitulée : "Quelques conséquences surprenantes de la

cohomologie de  $SL_2(\mathbb{Z})$  p99–122), et aussi ([161],1994).

Considérons la fonction  $f$  de  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  à valeurs dans  $\mathbb{Q}$  définie par

$$f(m, n) = \frac{1}{mn^3} + \frac{1}{2m^2n^2} + \frac{1}{m^3n}.$$

Par un calcul élémentaire, on montre que l'on a

$$f(m, n) - f(m, m+n) - f(m+n, n) = \frac{1}{m^2n^2}. \quad (1.2)$$

Considérons la sommation

$$\sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{m^2n^2}$$

On a alors d'une part

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{m^2n^2} &= \left( \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \right) \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \right) \\ &= \zeta(2)^2, \end{aligned} \quad (1.3)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} \sum_{(m,n) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*} \frac{2}{m^2n^2} &= \left( \sum_{m,n>0} - \sum_{m>n>0} - \sum_{n>m>0} \right) f(m, n) \\ &= \sum_{n>0} f(n, n) = \frac{5}{2}\zeta(4). \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ainsi, on déduit de 1.2, 1.3 et 1.4 la relation

$$\zeta(2)^2 = \frac{5}{2}\zeta(4).$$

Comme on sait que  $\zeta(2) = \pi^2/6$ , on en déduit que  $\zeta(4) = \pi^4/90$ .

Ainsi  $\zeta(4)/\pi^4 = 1/90$  et on a bien prouvé que  $\zeta(4)/\pi^4 \in \mathbb{Q}$ .

Plus généralement, si on considère

$$f(m, n) = \frac{1}{mn^{k-1}} + \frac{1}{2} \sum_{r=2}^{k-2} \frac{1}{m^r n^{k-r}} + \frac{1}{m^{k-1}n}.$$

on montre que l'on a

$$f(m, n) - f(m, m+n) - f(m+n, n) = \sum_{0 < j < k, j \text{ pair}} \frac{1}{m^j n^{k-j}}, \quad (1.5)$$

on obtient de manière analogue

$$\sum_{0 < j < k, j \text{ pair}} \zeta(2)\zeta(k-j) = \frac{k+1}{2}\zeta(k) \quad (k \geq 4, \text{ pair}).$$

Cette relation permet à l'aide d'un raisonnement par récurrence de prouver le théorème 1.2. ■

"Dès ses premiers calculs de 1735, il n'avait pas échappé à Euler que la somme  $\zeta(2n)$  s'exprimait comme le produit de  $\pi^{2n}$  par un nombre rationnel. Cependant, ce n'est que vingt années plus tard, en 1755, qu'il établira, en dérivant logarithmiquement le produit infini de la fonction sinus, la célèbre relation

$$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n} |B_{2n}|}{2(2n)!}$$

qui ramène le calcul des sommes  $\zeta(2n)$  à celui des nombres de Bernoulli. Euler les calculera de proche en proche jusqu'à  $B_{34}$ ." (Coppo, 2009, [51])

$\zeta$  étant la fonction Zéta (qui sera appelée plus tard fonction Zéta de Riemann) et  $\gamma$  la constante qui porte son nom ou encore celui d'Euler-Mascheroni. Euler a démontré successivement les égalités :

$$\zeta(2n) := \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n} |B_{2n}|}{2(2n)!}$$

$$\gamma \simeq \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{B_{2k}}{2k}, \quad N \in \mathbb{N}^*$$

où

$$\gamma := \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \left( 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \ln n \right).$$

### 1.3 Importance des nombres de Bernoulli

Comme le rappellent P. Sebah et X. Gourdon (voir : [numbers.computation.free.fr/Constants/constants.htm](http://numbers.computation.free.fr/Constants/constants.htm)) les nombres de Bernoulli jouent un rôle important et quelque peu mystérieux dans plusieurs domaines des Mathématiques, on citera notamment :

– En Théorie des Nombres :

1. ils sont liés à la fonction Zéta de Riemann grâce aux travaux d'Euler comme on vient de le voir, [69] ;
2. ils séparent les nombres premiers en deux catégories ( les premiers réguliers et les premiers irréguliers ) grâce aux travaux de Kummer, voir [110]. Rappelons qu'un nombre premier  $p$  est dit régulier s'il ne divise pas le nombre de classes de  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ .
3. ils sont liés à la conjecture de Vandiver qui affirme que si  $p$  est un nombre premier, alors  $p$  ne divise pas le nombre de classes du sous-corps réel maximal du  $p$ -ième corps

cyclotomique  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$ . On montre alors que cette conjecture implique que le  $p$ -rang du groupe  $\mathcal{H}_p$  des classes d'idéaux de  $\mathbb{Q}(\zeta_p)$  est égal au nombre de nombres de Bernoulli qui divisent  $p$ .

– En Analyse :

1. ils figurent dans la formule d'Euler-Mac Laurin ainsi que dans la résolution de l'équation de Korteweg-de Vries,
2. ils sont utilisés en théorie de l'approximation, voir Nörlund [123]
3. en topologie différentielle : ils apparaissent dans la formule de Kervaire-Milnor donnant l'ordre du groupe cyclique des classes de difféomorphismes des  $(4n-1)$ -sphères exotiques, voir la suite A047680, sur OEIS.

Signalons enfin que la suite des nombres de Bernoulli est référencée, sur le site OEIS, A164555 pour la suite des numérateurs et A027642 pour celle des dénominateurs.

Mais sitôt ce problème, de calcul des sommes des puissances  $m$ -ièmes d'entiers consécutifs, résolu, d'autres questions liées à l'étude de ces sommes ont ressurgi. Bien que leur énoncé soit souvent très simple, un grand nombre de ces nouveaux problèmes demeurent sans réponse à ce jour. Ainsi la conjecture de Giuseppe Giuga [78], posée en 1950, qui stipule qu'un nombre  $p$  est premier si et seulement si  $S_{p-1}(p-1)$  est congrue à  $-1$  modulo  $p$  reste encore un problème ouvert jusqu'à ce jour. Il en est de même de la conjecture d'Agoh (1995) qui affirme que si  $p$  est premier,  $p > 2$ , tel que  $p-1$  divise  $2m$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$ , alors :

$$pB_{2m} \equiv -1 \pmod{p}.$$

Notons enfin que dans son article [4], Agoh montre que ces deux conjectures sont en fait équivalentes. Kellener a vérifiée ces conjectures pour  $n \leq 10^{1000}$ . Ce résultat a été améliorée en 1996 par Borwein et al. [24] qui ont vérifié ces conjectures pour  $n \leq 10^{13800}$ .

# Chapitre 2

## Algèbre d'opérateurs sur $\mathbb{C}[x]$

*“L'oeuvre d'un mathématicien est surtout un enchevêtrement de conjectures, d'analogies, de souhaits et de frustrations. La démonstration, loin d'être le noyau de la découverte, n'est souvent que le moyen de s'assurer que notre esprit ne nous joue pas des tours.”*

Gian Carlo Rota.

### 2.1 Introduction

On commence par des rappels sur l'anneau des séries formelles. Nous étudierons ensuite l'algèbre  $End(\mathbb{C}[x])$  des endomorphismes (appelés aussi opérateurs) du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ . Nous précisons ensuite la définition et les propriétés de certains opérateurs tels que les delta-opérateurs, l'opérateur de Bernoulli  $J$  et l'opérateur de moyenne  $L$  qu'on appellera aussi opérateur d'Euler.

Ces outils nous permettront non seulement de simplifier notablement la démonstration de certaines formules plus ou moins connues concernant notamment les formules explicites donnant le  $n$ -ième nombre de Bernoulli, mais aussi de découvrir aisément de nombreuses autres et nouvelles formules explicites. L'étude de certaines autres identités nouvelles vérifiées par ces suites de nombres et de polynômes remarquables sera réalisée au chapitre suivant.

### 2.2 Algèbre $\mathbb{C}[[z]]$ des séries formelles

Soit  $\mathbb{C}[[z]]$  l'ensemble des séries formelles à une indéterminée  $z$  et à coefficients dans le corps des nombres complexes  $\mathbb{C}$ . Un élément de  $\mathbb{C}[[z]]$  est une expression de la forme

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où  $a_n \in \mathbb{C}$ ; c'est en fait un élément de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . Deux séries formelles  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et  $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$  sont égales si et seulement si on a  $a_n = b_n$ , pour tout  $n \geq 0$ . Dans tout ce qui suit, nous désignerons le terme  $a_0$  par  $f(0)$ . En fait, cette notion de série formelle généralise celle de polynôme .

### 2.2.1 Opérations définies dans $\mathbb{C}[[z]]$

Nous allons d'abord rappeler les trois opérations qui font de  $\mathbb{C}[[z]]$  une algèbre sur le corps  $\mathbb{C}$  ainsi que la définition et les propriétés de la valuation d'une série formelle. Nous précisons ensuite la définition et les propriétés de l'exponentiation  $S(z)^x$  pour  $x \in \mathbb{C}$ ,  $S(z)$  étant une série formelle telle que  $S(0) = 1$ .

#### Structure de $\mathbb{C}$ -algèbre de $\mathbb{C}[[z]]$

L'addition et le produit de séries formelles sont définis comme suit

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n,$$

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k} \right) z^n.$$

Muni de cette addition et de cette multiplication,  $\mathbb{C}[[z]]$  est un anneau commutatif. L'ensemble  $\mathbb{C}[z]$  des séries formelles  $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ , pour lesquelles  $a_n$  est nul à partir d'un certain rang, est le sous-anneau de  $\mathbb{C}[[z]]$  constitué par les polynômes à une indéterminée à coefficients dans  $\mathbb{C}$ . Muni de l'addition et de l'opération externe avec de  $\mathbb{C} \times \mathbb{C}[[z]]$  dans  $\mathbb{C}[[z]]$  définie par

$$\lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n, \dots, \lambda \in \mathbb{C},$$

$\mathbb{C}[[z]]$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ .

En remarquant que la propriété

$$\lambda (ST) = (\lambda S) T = S (\lambda T)$$

est vérifiée pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $S, T \in \mathbb{C}[[z]]$ , on peut en déduire que muni des trois opérations ainsi définies,  $\mathbb{C}[[z]]$  est une algèbre sur  $\mathbb{C}$ .

#### Valuation d'une série formelle

On appelle support de la série formelle  $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  l'ensemble des indices  $n$  tels que  $a_n \neq 0$ . La valuation de  $f(z)$ , notée  $\text{val}(f)$  est le plus petit élément de son support si  $f \neq 0$ .

Par convention, on pose :  $\text{val}(0) = +\infty$ . Les propriétés suivantes de cette valuation sont classiques :

1.  $\text{val}(f + g) \geq \min(\text{val}(f), \text{val}(g))$ ,
2.  $\text{val}(fg) = \text{val}(f) + \text{val}(g)$ ,
3.  $\text{val}(fg) = 0 \iff \text{val}(f) = \text{val}(g) = 0$ ,
4.  $\text{val}(f^n) = n \text{val}(f)$ .

Remarquons que si  $n$  est un entier naturel, l'ensemble noté  $\mathbb{C}_n[[z]]$ , des séries formelles de valuation supérieure ou égale à  $n$ , est une sous-algèbre de  $\mathbb{C}[[z]]$ .

### Définition de $S(z)^x$

Si  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$  et  $T(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$  sont deux séries formelles de  $\mathbb{C}[[z]]$  et si  $\text{val}(T(z)) \geq 1$ , on peut définir  $S(T(z))$  et poser

$$S(T(z)) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (T(z))^m.$$

On a  $\text{val}(T^n(z)) \geq n$  et donc  $[z^n] (a_m (T(z))^m) = 0$  pour  $m > n$ . On peut donc définir  $S(T(z))$  en posant

$$S(T(z)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n.$$

avec

$$c_n = [z^n] \left( \sum_{m=0}^n a_m (T(z))^m \right).$$

Si  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 1 + T(z)$  avec  $a_0 = 1$  et si  $x \in \mathbb{C}$ , on définit  $S(z)^x$  en posant

$$S(z)^x = e^{x \ln(1+T(z))}$$

On a alors :

$$S(z)^x = (1 + T(z))^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} T^n(z).$$

avec  $\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!}$ .

Si  $x = m$  est un entier naturel, cette définition coïncide avec la définition classique de  $S(z)^m$  comme produit de  $m$  séries égales à  $S(z)$ .

## 2.2.2 Séries génératrices associées à une suite de nombres ou de polynômes

**Définition 2.1** La série génératrice ordinaire associée à une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes est la série formelle  $f(z)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

La série génératrice exponentielle associée à une suite  $(a_n)_{n \geq 0}$  de nombres complexes est la série formelle  $f(x)$

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

Remarquons qu'on a encore la propriété suivante

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \right) \left( \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{z^n}{n!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{z^n}{n!},$$

avec

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

## 2.2.3 Suites de polynômes de type binomial

**Définition 2.2** Soit  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$ . On dit que cette suite de polynômes est une suite de type binomial si on a

$$\deg(P_n) = n \quad \text{et} \quad P_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} P_k(x) P_{n-k}(x) \quad (n \geq 0).$$

On trouvera dans Agratini, [3] théorème 2.9, page 8 ou RKO, [135] corollaire 3, une preuve du théorème suivant :

**Théorème 2.3** Soit  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$ . Alors  $(P_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de type binomial si et seulement s'il existe une série formelle  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$  telle que

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) \frac{z^n}{n!} = S(z)^x, \quad \text{avec } a_0 = 1 \text{ et } a_1 \neq 0.$$

## 2.3 Algèbre $End(\mathbb{C}[x])$ et delta-opérateurs

L'anneau  $\mathbb{C}[x]$  des polynômes à une indéterminée  $x$  et à coefficients dans  $\mathbb{C}$  est un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$ . L'ensemble  $End(\mathbb{C}[x])$  des endomorphismes de cet espace vectoriel est à la fois un espace vectoriel sur  $\mathbb{C}$  pour l'addition et produit d'un endomorphisme par un scalaire complexe et est également un anneau non commutatif pour l'addition et la composition des endomorphismes. La relation  $\lambda(uv) = (\lambda u)v = u(\lambda v)$  étant aussi vérifiée pour tous  $\lambda \in \mathbb{C}$ ,  $u, v \in End(\mathbb{C}[x])$ , fait de  $End(\mathbb{C}[x])$  une  $\mathbb{C}$ -algèbre. Dans cette algèbre, les opérateurs que nous définirons au paragraphe suivant jouent un rôle essentiel dans certaines définitions et propriétés de suites polynômiales, comme celles des suites des polynômes de Bernoulli, d'Euler, de Genocchi, etc...Ils facilitent également l'obtention d'identités combinatoires pour toutes ces suites de polynômes et de nombres remarquables.

### 2.3.1 Définitions des différents opérateurs linéaires

Désignons par  $\tau_a, I, E, D, \Delta, \nabla, \mathfrak{J}, J$  et  $L$  les endomorphismes de  $\mathbb{C}[x]$  définis comme suit sur la base  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[x]$  :

$\tau_a$  est l'opérateur de translation par  $a$  défini par

$$\tau_a(x^n) = (x + a)^n \quad (a \in \mathbb{C}).$$

$I$  est l'opérateur identité défini par

$$I(x^n) = x^n.$$

$E$  est l'opérateur d'avance défini par

$$E(x^n) = (x + 1)^n.$$

$D$  est l'opérateur de dérivation défini par

$$D(x^n) = nx^{n-1}, \quad n \geq 1 \quad \wedge \quad D(x^0) = 0.$$

$\Delta$  est l'opérateur de différence finie défini par

$$\Delta(x^n) = (x + 1)^n - x^n$$

$\nabla$  est l'opérateur de différence finie défini par

$$\nabla(x^n) = x^n - (x - 1)^n$$

$\mathcal{I}$  est l'opérateur d'intégration défini par

$$\mathcal{I}(x^n) = \frac{1}{n+1}x^{n+1}$$

$\mathcal{J}$  est l'opérateur de Bernoulli défini par

$$\mathcal{J}(x^n) = \frac{1}{n+1} ((x+1)^{n+1} - x^{n+1})$$

$\mathcal{L}$  est l'opérateur moyenne (que nous appellerons aussi **opérateur d'Euler**) défini par

$$\mathcal{L}(x^n) = \frac{1}{2} ((x+1)^n + x^n).$$

Les opérateurs que l'on vient de définir sont liés par des relations simples

$$\begin{aligned} E &= \tau_1, \\ \Delta &= \tau_1 - \tau_0 = \tau_1 - I, \\ \nabla &= \tau_0 - \tau_{-1} = I - \tau_{-1}. \end{aligned}$$

Ces relations nous permettent d'obtenir aisément les relations suivantes, en précisant toutefois qu'il est légitime d'appliquer la formule du binôme à la somme des opérateurs  $\tau_1$  et  $-I$  ainsi qu'à la somme des opérateurs  $I$  et  $-\tau_{-1}$ , du fait qu'il s'agit dans chacun des deux cas d'opérateurs qui commutent. Pour  $k \in \mathbb{N}$ , on obtient :

$$\begin{aligned} E^k &= \tau_k \\ \Delta^k &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau_j \\ \nabla^k &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \tau_{-j} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Ainsi pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , on a

$$\begin{aligned} E^k(P(x)) &= P(x+k), \\ \Delta^k(P(x)) &= \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} P(x+j), \\ \nabla^k(P(x)) &= \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} P(x-j). \end{aligned} \tag{2.2}$$

Les opérateurs  $\Delta$  et  $\nabla$  sont parfois appelés aussi "opérateurs de pseudo-dérivation" ([20], p.2) en raison des nombreuses analogies de ces opérateurs avec l'opérateur de dérivation  $D$ .

Remarquons que :

$$\deg(\tau_a(x^n)) = \deg(\mathcal{J}(x^n)) = \deg(\mathcal{L}(x^n)) = n \quad (n \geq 0),$$

Les opérateurs  $\tau_a$ ,  $E$ ,  $\mathcal{J}$  et  $\mathcal{L}$  sont inversibles. Il est facile de constater que

$$\tau_a^{-1} = \tau_{-a},$$

par contre les opérateurs réciproques  $\mathcal{J}^{-1}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  sont moins évidents à caractériser.

**Remarque 2.4** Remarquons que si un opérateur  $\Omega$  est tel que  $\deg(\Omega(P)) = n - 1$  pour tout polynôme de degré  $n \geq 1$  et si de plus les polynômes constants ont pour image 0, alors pour toute série formelle  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ , on peut encore définir les opérateurs  $S(\Omega)$  de la manière naturelle suivante

$$\left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Omega^n \right) P(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\Omega^n(P(x))). \quad (2.3)$$

La somme figurant au membre de droite de (2.3) a un sens du fait que pour  $n$  assez grand  $\Omega^n(P(x))$  est nul et qu'ainsi la somme considérée est en fait une somme finie. De plus, il est facile de vérifier qu'on définit bien ainsi un opérateur de  $\mathbb{C}[x]$ . Les opérateurs  $D$ ,  $\Delta$  et  $\nabla$  possèdent cette particularité. Il en résulte que pour toute série formelle  $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ , on peut définir les opérateurs  $S(D)$ ,  $S(\Delta)$  et  $S(\nabla)$ .

### 2.3.2 Opérateurs de composition, delta-opérateurs

Les translations de  $\mathbb{C}[x]$  étant, par définition, les endomorphismes  $\tau_a$  du  $\mathbb{C}$ -espace-vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  définis par

$$\tau_a(x^n) = (x + a)^n,$$

où  $a \in \mathbb{C}$ , on a pour tout  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$

$$\tau_a(P(x)) = P(x + a).$$

on remarque que les endomorphismes  $\tau_a$  du  $\mathbb{C}$  espace-vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  forment un groupe abélien. En fait, l'application  $a \mapsto \tau_a$  est un morphisme du groupe additif  $\mathbb{C}$  dans le groupe des automorphismes de la  $\mathbb{C}$ -algèbre  $End(\mathbb{C}[x])$ . En particulier, on a :

$$\tau_{a+b} = \tau_a \circ \tau_b = \tau_b \circ \tau_a, \text{ pour tout } a, b \in \mathbb{C}.$$

Pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  et pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , les opérateurs  $D$  et  $\Delta$  vérifient la propriété suivante :

$$\begin{aligned} D(P(x + a)) &= (DP)(x + a), \\ \Delta(P(x + a)) &= (DP)(x + a). \end{aligned}$$

Ce qu'on peut reformuler comme suit : pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , on a :

$$\begin{aligned} D\tau_a &= \tau_a D, \\ \Delta\tau_a &= \tau_a \Delta. \end{aligned}$$

On peut exprimer ce fait en disant que  $D$  et  $\Delta$  sont des opérateurs linéaires qui commutent avec les translations de  $\mathbb{C}[x]$ . Nous dirons aussi que  $D$  et  $\Delta$  sont des opérateurs de composition selon la définition suivante.

**Définition 2.5** On appelle opérateur de composition sur  $\mathbb{C}[x]$  tout endomorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  qui commute avec tous les opérateurs de translations  $\tau_a$ , où  $a$  parcourt  $\mathbb{C}$ .

L'ensemble  $\widehat{\mathcal{D}}$  des opérateurs de composition sur  $\mathbb{C}[x]$  est une sous-algèbre unitaire de l'algèbre  $End(\mathbb{C}[x])$  des endomorphismes de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ .

i.e. :

$$\widehat{\mathcal{D}} = \{ \Omega \in End(\mathbb{C}[x]) / \forall a \in \mathbb{C}, \Omega \tau_a = \tau_a \Omega \}.$$

On vérifie aisément que les endomorphismes de  $\mathbb{C}[x]$  :  $\tau_a, I, E, D, \Delta, \nabla, J$  et  $L$  sont des opérateurs de composition. Par contre, l'opérateur d'intégration  $\mathfrak{J}$  n'est pas un opérateur de composition. En effet, pour  $a \in \mathbb{C}^*$ , on a

$$(\mathfrak{J}\tau_a)(x^n) = \frac{(x+a)^{n+1} - a^{n+1}}{n+1} \neq (\tau_a\mathfrak{J})(x^n) = \frac{(x+a)^{n+1}}{n+1}.$$

On peut remarquer que  $\mathbb{C}[[D]] \subset \widehat{\mathcal{D}}$  et que  $\mathbb{C}[[\Delta]] \subset \widehat{\mathcal{D}}$ . Nous montrerons un peu plus loin qu'en fait, on a  $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[D]] = \mathbb{C}[[\Delta]]$ .

Une autre propriété remarquable des opérateurs  $D$  et  $\Delta$  est la suivante :

$$D(x) = \Delta(x) = 1.$$

Nous dirons que  $D$  et  $\Delta$  sont des delta-opérateurs en vertu de la définition suivante ([136], p.195) :

**Définition 2.6** On appelle delta-opérateur tout opérateur de composition  $\delta$  du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  tel que  $\delta(x)$  est un polynôme constant non nul.

Désignons par  $Del(\mathbb{C}[x])$  l'ensemble des delta-opérateurs de  $\mathbb{C}[x]$  :

$$Del(\mathbb{C}[x]) = \left\{ \Omega \in \widehat{\mathcal{D}} / \Omega(x) \in \mathbb{C}^* \right\}.$$

Ainsi les opérateurs de composition de  $\mathbb{C}[x]$  :  $D, \Delta$  et  $\nabla$  sont des delta-opérateurs. Par contre, les opérateurs de composition de  $\mathbb{C}[x]$  :  $\tau_a, I, E, J$  et  $L$  ne sont pas des delta-opérateurs.

Si l'on considère les ensembles

$$E_D = \{ S(D), S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \text{val } S(z) = 1 \}$$

et

$$E_\Delta = \{ S(\Delta), S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \text{val } S(z) = 1 \}.$$

Il est aussi facile de constater que

$$E_D \subset \text{Del}(\mathbb{C}[x]) \text{ et } E_\Delta \subset \text{Del}(\mathbb{C}[x]).$$

Il suffit, pour cela, de remarquer qu'un élément de  $E_D$  (resp  $E_\Delta$ ) s'écrit  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n D^n$ , (resp  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \Delta^n$ ) avec  $a_1 \neq 0$ . Nous montrerons un peu plus loin qu'en fait, on a  $\text{Del}(\mathbb{C}[x]) = E_D = E_\Delta$ . Pour cela, le théorème suivant qui précise les propriétés essentielles des delta-opérateurs va nous être très utile.

**Théorème 2.7** 1. *L'ensemble  $\text{Del}(\mathbb{C}[x])$  des delta-opérateurs du  $\mathbb{C}$  espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  vérifie l'égalité*

$$\text{Del}(\mathbb{C}[x]) = \{S(D) / S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \text{val } S(z) = 1\}.$$

*i.e. que tout delta-opérateur  $\delta$  s'écrit*

$$\delta = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{D^n}{n!}$$

*où  $a_n = \delta(x^n) \downarrow_{x=0}$  avec  $a_1 \neq 0$ .*

2. *Pour tout  $a \in \mathbb{C}$  et pour tout delta-opérateur  $\delta$ , on a*

$$\delta(a) = 0.$$

3. *Si  $P(x)$  est un polynôme de  $\mathbb{C}[x]$  de degré  $n \geq 1$ , alors  $\delta(P(x))$  est un polynôme de degré  $n - 1$ .*

Avant d'en donner la preuve, il est intéressant de noter que les opérateurs  $D, \Delta, \nabla, \tau_a - \tau_b$  avec  $a \neq b, \tau_a D, \tau_a \Delta$  et  $\tau_a \nabla$  sont des delta-opérateurs.

**Preuve.**

1. En posant

$$E_D = \{S(D) / S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \text{val } S(z) = 1\},$$

nous avons déjà remarqué que l'on avait l'inclusion

$$E_D \subset \text{Del}(\mathbb{C}[x]).$$

Il nous reste donc à prouver que

$$\text{Del}(\mathbb{C}[x]) \subset E_D. \tag{2.4}$$

Pour cela, considérons un delta-opérateur  $\delta$  et posons

$$a_n = \delta(x^n) \downarrow_{x=0}.$$

Nous allons prouver que l'on a

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}.$$

Comme on a  $a_1 = \delta(x) \downarrow_{x=0} = c \neq 0$ , on aura bien prouvé l'inclusion (2.4), car alors on aura  $\delta = S(D)$ , avec  $S(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}[[z]]$  et  $\text{val } S(z) = 1$ .

2. Posons

$$g(x) = \delta(x^n), \quad (2.5)$$

où  $n \geq 0$  est un entier naturel fixé. On a alors

$$\begin{aligned} g(x+a) &= \tau_a(g(x)) \\ &= \tau_a(\delta(x^n)) \\ &= (\tau_a \delta)(x^n). \end{aligned} \quad (2.6)$$

Comme  $\delta$  est un delta-opérateur,  $\delta$  commute avec  $\tau_a$ . On a donc  $\tau_a \delta = \delta \tau_a$ . Par suite, la relation (2.6) implique

$$\begin{aligned} g(x+a) &= (\delta \tau_a)(x^n) \\ &= \delta(\tau_a(x^n)) \\ &= \delta((x+a)^n). \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} g(x+a) &= \delta \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} x^k \right) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} \delta(x^k). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Pour  $x = 0$ , la relation (2.7) devient

$$g(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} a_k. \quad (2.8)$$

Posons

$$h(x) = g(x) - \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} x^{n-k}.$$

La relation (2.8) prouve que

$$\forall a \in \mathbb{C}, h(a) = 0.$$

Le polynôme  $h(x)$  de  $\mathbb{C}[x]$  a donc une infinité de zéros, il ne peut-être que le polynôme nul. Par conséquent, on a  $h(x) = 0$  et

$$g(x) = \sum_{k=0}^n a_k \binom{n}{k} x^{n-k} \quad (2.9)$$

Comme on sait aussi que l'on a

$$\binom{n}{k} x^{n-k} = \frac{D^k(x^n)}{k!} \quad 0 \leq k \leq n, \quad (2.10)$$

on déduit de (2.9) et (2.10)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=0}^n a_k \frac{D^k(x^n)}{k!} \\ &= \left( \sum_{k=0}^n a_k \frac{D^k}{k!} \right) (x^n) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!} \right) (x^n) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Or on a d'après (2.5) :  $g(x) = \delta(x^n)$ . La relation (2.11) s'écrit donc

$$\delta(x^n) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!} \right) (x^n).$$

Cette dernière relation étant vérifiée pour tout entier naturel  $n$ . On en déduit que l'on a

$$\delta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}. \quad (2.12)$$

Prouvons maintenant que  $a_1 \neq 0$ . Comme  $\delta$  est un delta-opérateur, on a  $\delta(x)$  est un polynôme constant. On a donc  $a_1 = \delta(x) \downarrow_{x=0} = \delta(x)$ . On a alors d'après (2.12)

$$a_1 = \delta(x) = \left( \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!} \right) (x) = a_0 + a_1.$$

Il en résulte que  $a_0 = 0$ . On a donc

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}.$$

avec  $\delta(x) = a_1 \neq 0$ .

3. Soit  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  et soit  $\delta$  un delta-opérateur. Alors, on sait que  $\delta$  s'écrit

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}, \quad (2.13)$$

avec  $a_1 \neq 0$ . Si  $P(x) = a$ , alors on a  $D^k(a) = 0$  pour tout  $k \geq 1$  et la relation (2.13) montre qu'on a alors  $\delta(a) = 0$ . Si  $P(x)$  est un polynôme de degré  $n \geq 1$ , alors on a

$\deg(P^{(k)}(x)) = n - k$  pour  $0 \leq k \leq n$  et  $P^{(k)}(x) = 0$  pour  $k > n$ . On a d'après la relation (2.13)

$$\begin{aligned}\delta(P(x)) &= \sum_{k=1}^n a_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!} \\ &= a_1 P'(x) + \sum_{k=2}^n a_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!}.\end{aligned}$$

Comme  $a_1 \neq 0$ , on en déduit que  $\delta(P(x))$  est un polynôme de degré  $n - 1$ . La preuve du théorème 2.7 est complète.

■

Le théorème 2.7 nous permet de prouver la propriété suivante vérifiée pour tout delta-opérateur.

**Corollaire 2.8** *Soit  $\delta$  un delta-opérateur. Alors*

1.  $\delta$  est surjectif.
2. Le noyau de  $\delta$  est constitué par l'ensemble des polynômes constants de  $\mathbb{C}[x]$  :  $\ker \delta = \mathbb{C}$ .
3. Pour tout polynôme  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  et pour tout couple  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ , il existe un unique polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  tel que

$$\delta(P(x)) = Q(x) \text{ et } P(\alpha) = \beta. \quad (2.14)$$

De plus, pour  $Q(x) \neq 0$ , on a  $\deg(P(x)) = \deg(Q(x)) + 1$

**Preuve.**

1. D'après le théorème 2.7, on a pour tout entier naturel  $n$

$$\deg(\delta(x^{n+1})) = n,$$

il en résulte que la suite  $(\delta(x^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$  est une base du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ . Tout polynôme de  $\mathbb{C}[x]$  s'écrit donc comme une combinaison linéaire des vecteurs de cette base et est donc, grâce à la linéarité de  $\delta$ , l'image par  $\delta$  d'un polynôme de  $\mathbb{C}[x]$ .

2. Comme on a  $\delta(a) = 0$  pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , on a  $\mathbb{C} \subset \ker \delta$ . On a aussi  $\ker \delta \subset \mathbb{C}$ . En effet, si  $P(x) \in \ker \delta$ ,  $P(x)$  ne peut pas être un polynôme de degré  $n \geq 1$ , autrement  $\delta(P(x))$  serait de degré  $n - 1 \geq 0$  et ne pourrait pas être nul ; il ne reste donc qu'une seule possibilité pour avoir  $\delta(P(x)) = 0$ , c'est que  $P(x)$  soit un polynôme constant.

3. Soit  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$  et  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{C}^2$ , comme  $\delta$  est surjective, on sait qu'il existe un polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$  tel que  $\delta(P(x)) = Q(x)$ . Posons

$$P_1(x) = P(x) - P(\alpha) + \beta.$$

Comme  $P_1(x)$  et  $P(x)$  diffèrent d'une constante, on a alors encore  $\delta(P_1(x)) = \delta(P(x))$

$$\delta(P_1(x)) = Q(x),$$

avec  $P_1(x) = \beta$ . On a ainsi prouvé que l'équation (2.14) admet au moins une solution. Cette solution est unique car si  $P_1(x)$  et  $P_2(x)$  vérifient l'équation (2.14), alors  $P_1(x) - P_2(x)$  est dans le noyau de  $\delta$ ,  $P_1(x) - P_2(x)$  est un polynôme constant et comme  $P_1(\alpha) - P_2(\alpha) = 0$ , on a nécessairement  $P_1(x) = P_2(x)$ .

■

### 2.3.3 Suite de Sheffer, suite d'Appell, suite basique d'un delta-opérateur

Le corollaire 2.8 montre qu'étant donné un delta-opérateur  $\delta$ , pour lequel on a  $\delta(x) = c$  avec  $c \in \mathbb{C}^*$ , on peut toujours définir une suite  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$  de la manière suivante. On commence par choisir  $s_0(x) = \beta_0$ , où  $\beta_0$  est une constante non nulle arbitraire, on a alors  $\deg(s_0(x)) = 0$ . On choisit ensuite  $s_1(x)$  tel que  $\delta(s_1(x)) = s_0(x)$ , c'est à dire  $\delta(s_1(x)) = \beta_0$ . On sait que cela est possible grâce au corollaire 2.8. On sait d'ailleurs que nécessairement  $\deg(s_1(x)) = 1$ . On peut ainsi choisir  $s_1(x) = \frac{\alpha_0}{c}x + a_1$ , où  $a_1$  est encore une constante arbitraire. En supposant avoir ainsi défini  $s_0(x), s_1(x), \dots, s_{n-1}(x)$ , tels que  $\deg s_k(x) = k$  et pour  $0 \leq k \leq n-1$  et  $\delta(s_k(x)) = ns_{k-1}(x)$  pour  $1 \leq k \leq n-1$ , on choisit  $\delta(s_n(x)) = ns_{n-1}(x)$ , ce qui est encore possible d'après le corollaire;  $s_n(x)$  est alors défini à une constante près et de plus  $\deg s_n(x) = \deg s_{n-1}(x) + 1 = n$ . On a ainsi mis en évidence l'existence de suites particulières, qu'on appellera suites de Sheffer relatives à l'opérateur  $\delta$  conformément à la définition suivante.

**Définition 2.9** Soit  $\delta$  un delta-opérateur. On appelle suite de Sheffer relative à l'opérateur  $\delta$  toute suite  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$  telle que

1.  $\deg s_n(x) = n$ , pour tout  $n \geq 0$ ,
2.  $\delta(s_n(x)) = ns_{n-1}(x)$  pour tout  $n \geq 1$ .

On appelle suite d'Appell toute suite de Sheffer relative à l'opérateur de dérivation.

La suite  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Sheffer relative à  $D$ , c'est donc une suite d'Appell. Il résulte de la définition que si  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Sheffer, alors  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[x]$  et on a :

$$\delta^k(s_n(x)) = k! \binom{n}{k} s_{n-k}(x), \quad 0 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad \delta^k(s_n(x)) = 0 \quad \text{pour} \quad k > n. \quad (2.15)$$

A un delta-opérateur, on peut associer une infinité de suites de Sheffer, mais si on impose à une suite de Sheffer  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  relative à un delta-opérateur des conditions telles que  $s_n(\alpha_n) = \beta_n$  pour tout entier  $n \geq 0$ , où  $((\alpha_n, \beta_n))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite arbitraire de  $\mathbb{C}^2$  telle que  $\beta_0 \neq 0$ , alors on obtient, par construction, d'après le corollaire 2.8, l'unicité de la suite de Sheffer vérifiant ces conditions. Pour le choix de  $((\alpha_n, \beta_n))_{n \in \mathbb{N}} = ((0, \delta_{0,n}))_{n \in \mathbb{N}}$ , l'unique suite de Sheffer relative à l'opérateur  $\delta$ , vérifiant les conditions  $s_n(0) = \delta_{0,n}$ , est appelée suite basique de l'opérateur  $\delta$ , conformément à la définition suivante :

**Définition 2.10** *Soit  $\delta$  un delta-opérateur, alors il existe une unique suite de polynômes  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{C}[x]$  telle que*

1.  $\deg p_n(x) = n \quad (n \geq 0)$ ,
2.  $\delta(p_n(x)) = np_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$ ,
3.  $p_0(x) = 1, \quad p_n(0) = 0 \quad (n \geq 1)$ .

*La suite  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  est une base de  $\mathbb{C}[x]$  appelée suite basique associée au delta-opérateur  $\delta$  et est notée  $(p_n^\delta(x))_{n \in \mathbb{N}}$ .*

Le théorème suivant donne des exemples de suites basiques associées aux principaux opérateurs

**Théorème 2.11** *En désignant par  $(p_n^\delta(x))_{n \geq 0}$  la suite basique associée au delta-opérateur  $\delta$ , on a*

1.

$$p_n^D(x) = x^n.$$

2.

$$\text{pour } a \neq b, \quad p_n^{\tau_a - \tau_b}(x) = \frac{x}{(a-b)^n} \prod_{k=1}^{n-1} (x - ka - (n-k)b).$$

3.

$$p_n^\Delta(x) = x^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x - k).$$

4.

$$p_n^\nabla(x) = x^n = \prod_{k=0}^{n-1} (x + k).$$

5. .

$$\delta = \tau_a D, \quad p_n^\delta(x) = x(x - na)^{n-1}$$

**Remarque 2.12** *Cette dernière suite basique est appelée suite des polynômes d'Abel et est de type binomial. On pourra en trouver une démonstration dans la communication d' Agratini [3].*

## Propriétés des suites d'Appell

**Théorème 2.13** Soit  $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , une suite de polynômes d'Appell, alors on a :

1. Pour tout entier naturel  $n$ ,  $A_n(x)$  est un polynôme de degré  $n$  et on a dans  $\mathbb{C}[x]$

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k(y) x^{n-k} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} A_k(x) y^{n-k}.$$

2. Pour tout  $x_0 \in \mathbb{C}$ , on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x_0) \frac{z^n}{n!} \right) e^{(x-x_0)z}.$$

**Remarque 2.14** Il existe une unique suite de polynômes d'Appell  $(A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on ait  $A_n(x_0) = a_n$ .

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k (x - x_0)^{n-k}$$

ou encore

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!} \right) e^{(x-x_0)z}.$$

On pourra en trouver une preuve dans la communication d' Agratini, [3] ou dans Carlson, [35].

## 2.4 Généralisation de la formule de Taylor

Soit  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ . La formule classique de Taylor pour ce polynôme affirme que l'on a dans l'anneau  $\mathbb{C}[x]$

$$P(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k P(x)}{k!} y^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k P(y)}{k!} x^k, \quad (2.16)$$

En particulier, on a la formule de Taylor-MacLaurin

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k P(0)}{k!} x^k. \quad (2.17)$$

Remarquons que dans ces formules,  $(x^k)_{k \in \mathbb{N}}$  est la suite basique associée au delta-opérateur de dérivation  $D$ .

Une autre formule analogue connue sous le nom de formule de Grégory affirme qu'on a aussi

$$P(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(x)}{k!} y^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k P(x) \binom{y}{k}, \quad (2.18)$$

en particulier, on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k P(0) \binom{x}{k}. \quad (2.19)$$

Ici la suite  $(x^{\bar{k}})_{k \in \mathbb{N}} = (k! \binom{x}{k})_{k \in \mathbb{N}}$  est la suite basique associée au delta-opérateur  $\Delta$ .

Le théorème suivant montre que ces deux formules ( formule classique de Taylor et formule de Grégory ) sont en fait des cas particuliers de la formule de Taylor pour un polynôme .

On peut alors énoncer le résultat suivant :

**Théorème 2.15** *Soit  $\delta$  un delta-opérateur et  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  la suite basique qui lui est associée.*

*Alors, pour tout polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ , on a*

$$P(x + y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(x)}{k!} p_k(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(y)}{k!} p_k(x),$$

en particulier, on a

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(0)}{k!} p_k(x).$$

Ainsi en choisissant  $\delta = D$  (resp  $\delta = \Delta$ ) dans le théorème 2.15, on retrouve la formule classique de Taylor (2.16) (resp. la formule de Grégory (2.18)). Le théorème 2.15 permet alors d'obtenir pour le delta-opérateur  $\nabla$  la formule suivante pour un polynôme  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ .

$$\begin{aligned} P(x + y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nabla^k P(x)}{k!} y^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nabla^k P(x) \binom{-y}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nabla^k P(y)}{k!} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nabla^k P(y) \binom{-x}{k}, \end{aligned}$$

en particulier, on a

$$\begin{aligned} P(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nabla^k P(0)}{k!} x^{\bar{k}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \nabla^k P(0) \binom{-x}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \nabla^k P(0) \binom{x + k - 1}{k}. \end{aligned}$$

**Preuve.** En remarquant que  $P(x + y) = P(y + x)$ , prouver le théorème 2.15 revient en fait à montrer que pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , on a

$$P(x + a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(a)}{k!} p_k(x). \quad (2.20)$$

Comme on sait que  $(p_k(x))_{k \in \mathbb{N}}$  est une base de  $\mathbb{C}[x]$ , on peut affirmer qu'il existe une famille (unique) de scalaires  $(\lambda_j)_{j \in \mathbb{N}}$  telle que

$$P(x + a) = \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j p_j(x). \quad (2.21)$$

Soit  $k$  un entier (fixé), posons

$$g(x) = \delta^k(P(x)). \quad (2.22)$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x + a) &= \tau_a(g(x)) \\ &= (\tau_a \delta^k) P(x). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Comme  $\delta$  est un delta-opérateur,  $\delta$  commute avec  $\tau_a$ . Il en résulte que  $\delta^k$  commute aussi avec  $\tau_a$ . On a donc  $\tau_a \delta^k = \delta^k \tau_a$ .

La relation (2.23) implique alors

$$\begin{aligned} g(x + a) &= (\delta^k \tau_a) P(x) \\ &= \delta^k (\tau_a P(x)) \\ &= \delta^k (P(x + a)) \end{aligned} \quad (2.24)$$

On déduit alors des relations (2.24), (2.21) et (2.15)

$$\begin{aligned} g(x + a) &= \delta^k \left( \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j p_j(x) \right) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \lambda_j \delta^k (p_j(x)) \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j k! \binom{j}{k} p_{j-k}(x). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Pour  $x = 0$ , la relation (2.25) devient

$$\begin{aligned} g(a) &= \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j k! \binom{j}{k} p_{j-k}(0) \\ &= \sum_{j=k}^{\infty} \lambda_j k! \binom{j}{k} \delta_{j-k,0} \\ &= \lambda_k k! \end{aligned}$$

Ainsi, avec (2.22), on obtient

$$\lambda_k = \frac{1}{k!}g(a) = \frac{\delta^k P(a)}{k!} \quad (k \geq 0).$$

En remplaçant dans (2.21)  $\lambda_j$  par  $\frac{\delta^j P(a)}{j!}$ , on trouve la relation cherchée (2.20). ■

Le théorème 2.15 a aussi pour conséquence le résultat suivant :

**Corollaire 2.16** *Soit  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  la suite basique d'un delta-opérateur  $\delta$ . Alors, on a*

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y) \quad (n \geq 0).$$

*Autrement dit, la suite  $(p_n(x))_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes de type binomial.*

**Preuve.** En effet, l'application du théorème 2.15 au polynôme  $p_n(x)$  fournit la relation

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k p_n(x)}{k!} p_k(y)$$

Compte tenu de 2.15, on a alors

$$\begin{aligned} p_n(x+y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} p_{n-k}(x) p_k(y) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k(x) p_{n-k}(y). \end{aligned}$$

■

Il résulte du corollaire 2.16 que l'on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} p_n(1) \frac{z^n}{n!} \right)^x.$$

Ainsi on a :

– pour  $\delta = D$ , la suite basique de  $D$  est  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{z^n}{n!} = (e^z)^x$$

– pour  $\delta = \Delta$ , la suite basique de  $\Delta$  est  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} z^n = (1+z)^x,$$

– pour  $\delta = \nabla$ , la suite basique de  $\nabla$  est  $(x^{\bar{n}})_{n \in \mathbb{N}}$  et on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{\bar{n}} \frac{z^n}{n!} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} z^n \right)^x = \left( \frac{1}{1-z} \right)^x,$$

ce qui s'énonce aussi

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n} z^n = (1+z)^x.$$

Remarquons que si  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de Sheffer, la formule de Taylor

$$f(x+y) = \sum \frac{\delta^k f(y)}{k!} p_k(x)$$

donne pour  $f(x) = s_n(x)$

$$s_n(x+y) = \sum \binom{n}{k} p_k(x) s_{n-k}(y)$$

qui est une relation caractéristique des suites de Sheffer ; et si en particulier  $(s_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'Appell, on obtient :

$$s_n(x+y) = \sum \binom{n}{k} x^k s_{n-k}(y)$$

### 2.4.1 Caractérisation des opérateurs de composition

$\widehat{\mathcal{D}}$  désignant l'ensemble des opérateurs de composition du  $\mathbb{C}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$ , le théorème suivant montre que tout opérateur de composition peut s'exprimer sous forme d'une série. Plus précisément, on a le résultat suivant :

**Théorème 2.17** 1. Pour tout delta-opérateur  $\delta$ , on a

$$\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[\delta]]$$

2. Pour tout delta-opérateur  $\delta$  de suite basique  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ , on a pour tout opérateur de composition  $\Omega$  la relation suivante

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Omega p_n)(0)}{n!} \delta^n.$$

3. Pour tout delta-opérateur  $\delta$ , on a

$$\text{Del}(\mathbb{C}[x]) = \{S(\delta), S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \wedge \text{val}(S(z)) = 1\}$$

**Preuve.**

1. Soit  $\delta$  un delta-opérateur. L'inclusion

$$\mathbb{C}[[\delta]] \subset \widehat{\mathcal{D}}$$

est facile à montrer. En effet, si  $\Omega \in \mathbb{C}[[\delta]]$  et si  $\tau_a$  est une translation, on vérifie que l'on a  $\tau_a \Omega = \Omega \tau_a$ , du fait que  $\tau_a \delta = \delta \tau_a$ .

Prouvons l'inclusion

$$\widehat{\mathcal{D}} \subset \mathbb{C}[[\delta]].$$

Soit  $\Omega \in \widehat{\mathcal{D}}$ ,  $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ ,  $a \in \mathbb{C}$  et  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  la suite basique associée à  $\delta$ . La formule de Taylor (théorème 2.15) permet d'écrire :

$$P(x+a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(a)}{k!} p_k(x). \quad (2.26)$$

Posons

$$g(x) = \Omega(P(x)).$$

On a alors

$$\begin{aligned} g(x+a) &= \tau_a(g(x)) \\ &= \tau_a \Omega(P(x)) \\ &= \Omega \tau_a(P(x)) \\ &= \Omega(P(x+a)). \end{aligned} \quad (2.27)$$

On déduit de (2.26) et (2.27)

$$\begin{aligned} g(x+a) &= \Omega \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(a)}{k!} p_k(x) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(a)}{k!} \Omega(p_k(x)). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Pour  $x = 0$ , la relation (2.28) devient

$$g(a) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(a)}{k!} \Omega(p_k(0)).$$

Cette dernière relation étant vérifiée pour une infinité de  $a$ , on en déduit que

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(x)}{k!} \Omega(p_k(0)).$$

et donc

$$\Omega(P(x)) = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Omega p_n)(0)}{n!} \delta^n \right) (P(x)).$$

autrement dit :

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\Omega p_n)(0)}{n!} \delta^n.$$

■

**Corollaire 2.18** *L'algèbre  $\widehat{\mathcal{D}}$  est commutative. Tout opérateur de composition commute avec tout delta-opérateur. En particulier, tout opérateur de composition commute avec la dérivation  $D$ .*

**Preuve.** En effet, si  $\Omega$  est un opérateur de composition et si  $\delta$  est un delta-opérateur, on a  $\Omega \in \mathbb{C}[[\delta]]$ . Par suite  $\Omega$  s'écrit

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \delta^n$$

et donc  $\Omega$  commute avec  $\delta$ . ■

### Ordre d'un opérateur de composition

Comme  $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[D]]$ , tout opérateur de composition  $\Omega$  sur  $\mathbb{C}[x]$  s'écrit de manière unique :

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n.$$

**Définition 2.19** *On appelle ordre de  $\Omega$  la valuation de la série formelle  $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n$ . Autrement dit :*

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n \implies \text{ord } \Omega = \text{val } \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n.$$

Remarquons que comme pour tout delta-opérateur  $\delta$ , on a  $\widehat{\mathcal{D}} = \mathbb{C}[[\delta]]$ , on peut aussi écrire tout opérateur de composition  $\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n$  comme une série en  $\delta$

$$\Omega = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta^n,$$

Cette écriture est encore unique, car d'après le théorème :

$$\alpha_n = \frac{(\Omega p_n)(0)}{n!},$$

où  $(p_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite basique du delta-opérateur  $\delta$ . Il est facile de prouver que

$$\text{val} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n \delta^n \right) = \text{val} \left( \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n D^n \right)$$

Autrement dit, l'ordre d'un opérateur de composition est une notion indépendante du delta-opérateur  $\delta$ .

On peut ainsi caractériser les delta-opérateurs en affirmant qu'un delta-opérateur est un opérateur de composition d'ordre 1

**Corollaire 2.20** *Soit  $\Omega$  un opérateur de composition bijectif. Alors  $\Omega^{-1}$  est aussi un opérateur de composition. De plus  $\Omega$  et  $\Omega^{-1}$  transforment toute base de  $\mathbb{C}[x]$  en une base de  $\mathbb{C}[x]$  et toute suite d'Appell en une suite d'Appell.*

**Preuve.** Soit  $\Omega$  un opérateur de composition bijectif, alors pour tout  $a \in \mathbb{C}$ , on a  $\tau_a \Omega = \Omega \tau_a$ . En composant avec  $\Omega^{-1}$ , on en déduit que  $\Omega^{-1} \tau_a \Omega \Omega^{-1} = \Omega^{-1} \Omega \tau_a \Omega^{-1}$ , c'est à dire  $\Omega^{-1} \tau_a = \tau_a \Omega^{-1}$ . Ainsi  $\Omega^{-1}$  est un endomorphisme de  $\mathbb{C}[x]$  qui commute avec les translations, c'est donc un opérateur de composition. ■

Le corollaire qui suit nous sera très utile pour l'étude des polynômes de Bernoulli et d'Euler qui fera l'objet du chapitre 3.

**Corollaire 2.21** *Les opérateurs de Bernoulli  $\mathcal{J}$  et d'Euler  $\mathcal{L}$  ainsi que leurs inverses  $\mathcal{J}^{-1}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  sont des automorphismes de  $\mathbb{C}[x]$  qui transforment toute suite d'Appell en une suite d'Appell.*

Ainsi comme  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'Appell, il résulte du corollaire 2.21 que  $(\mathcal{J}(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\mathcal{J}^{-1}(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(\mathcal{L}(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\mathcal{L}^{-1}(x^n))_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites d'Appell.

Les opérateurs  $\tau_a$ ,  $I$ ,  $E$ ,  $D$ ,  $\Delta$ ,  $\nabla$ ,  $J$  et  $L$  sont tous des opérateurs de composition. On peut donc les écrire comme des séries en  $D$  ou en  $\Delta$ . Par contre,  $\mathfrak{J}$  n'est pas un opérateur de composition comme cela a déjà été signalé dans la définition 7.

## 2.5 Propriétés et inversion d'opérateurs

On vient de voir que si  $\delta$  est un delta-opérateur, alors tout opérateur de composition peut s'exprimer comme une série en  $\delta$ . On peut donc également exprimer les opérateurs de composition  $\mathcal{J}$ ,  $\mathcal{L}$ ,  $\mathcal{J}^{-1}$ ,  $\mathcal{L}^{-1}$ ,  $D$ ,  $\Delta$  et  $E$  comme des séries en  $D$  ou en  $\Delta$ .

On peut alors énoncer le théorème suivant :

**Théorème 2.22** *On a*

$$\tau_a = e^{aD} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{D^k}{k!} \quad (a \in \mathbb{C})$$

$$E = e^D = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

$$\Delta = e^D - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

$$D = \log(1 + \Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k}{k}$$

**Preuve.** On utilise les théorèmes 16 et 18 qui donnent l'expression de  $\Delta$  en fonction de  $D$ , i.e. :

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \Delta p_n^D(0) \frac{D^n}{n!}.$$

Or on a

$$p_n^D(x) = x^n$$

et

$$\Delta p_n^D(0) = [(x+1)^n - x^n]_{x=0} = 1$$

Par conséquent

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = e^D - I$$

Expression de  $D$  en fonction de  $\Delta$

On a

$$D = \sum_{n=0}^{\infty} D p_n^\Delta(0) \frac{\Delta^n}{n!}.$$

Or on a

$$p_n^\Delta(x) = x^n = x(x-1)\cdots(x-n+1)$$

et

$$D p_n^\Delta(0) = [(x-1)\cdots(x-n+1)]_{x=0} = (-1)^{n-1} (n-1)!$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} D &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{\Delta^n}{n} = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \dots \\ &= \log(1 + \Delta). \end{aligned}$$

Ce dernier résultat aurait pu aussi être obtenu à l'aide des propriétés des séries formelles. En effet, on a vu que l'on avait  $\Delta = e^D - I$ . On peut donc en déduire que  $D = \log(1 + \Delta)$  en exploitant les propriétés classiques des séries formelles. ■

**Théorème 2.23**

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{e^D - 1}{D} \\ \mathcal{J} &= \frac{\Delta}{\log(1 + \Delta)} \\ \mathcal{L} &= \frac{e^D + 1}{2} \\ \mathcal{L} &= I + \frac{1}{2}\Delta \\ \mathcal{J}^{-1} &= \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{D^k}{k!} \\ \mathcal{J}^{-1} &= \frac{\log(1 + \Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k \\ \mathcal{L}^{-1} &= \frac{2}{e^D + 1} = \sum_{k=0}^{\infty} e_k \frac{D^k}{k!} \\ \mathcal{L}^{-1} &= \left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \Delta^k \end{aligned}$$

**Preuve.** On a

$$J = \Delta \mathfrak{J}$$

Or

$$\Delta = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{D^n}{n!} = \left(\frac{e^D - 1}{D}\right) D$$

Où

$$\frac{e^D - 1}{D} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{D^n}{(n+1)!}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} J &= \Delta \mathfrak{J} \\ &= \left(\frac{e^D - 1}{D}\right) D \mathfrak{J} \end{aligned}$$

Comme, on a  $\mathfrak{J}D = I$ , on obtient

$$J = \frac{e^D - 1}{D}.$$

La série formelle  $\frac{e^z - 1}{z}$  est inversible, on a donc

$$J^{-1} = \frac{D}{e^D - 1}.$$

On peut aussi procéder autrement. On a

$$J = \Delta \mathfrak{J} = \mathfrak{J} \mathfrak{D}$$

Comme on a

$$\frac{\log(1 + \Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k,$$

on en déduit que

$$\begin{aligned} J \frac{\log(1 + \Delta)}{\Delta} &= \mathfrak{J} \mathfrak{D} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k \\ &= \mathfrak{J} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^{k+1} \\ &= \mathfrak{J} D \\ &= I \end{aligned}$$

■

Remarquons qu'on a aussi les relations suivantes

$$\Delta^k \binom{x}{n} = \binom{x}{n-k}, \text{ pour } 0 \leq k \leq n.$$

$$\Delta^k = \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} E^j$$

# Chapitre 3

## Suites polynomiales classiques

“Il n’est pas nécessaire qu’un problème de mathématiques ait des applications pratiques pour qu’il soit intéressant et il peut être très agréable pour l’esprit d’essayer de résoudre des questions apparemment futiles.”

Axel Thue

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous donnons les principales propriétés de certaines suites de nombres et de polynômes remarquables.

Il s’agit essentiellement des :

- nombres de Stirling de première et seconde espèce
- polynômes de Stirling,
- polynômes et nombres de Bernoulli,
- polynômes et nombres d’Euler,
- polynômes et nombres de Genocchi,
- polynômes et nombres de Fibonacci et de Lucas,
- polynômes de Tchébychev de première et deuxième espèce,
- polynômes de Nörlund,
- polynômes d’Hermite.

### 3.2 Nombres et polynômes de Stirling

Nous allons définir deux familles de nombres  $(s(n, k))_{(n, k) \in \mathbb{N}^2}$  et  $(S(n, k))_{(n, k) \in \mathbb{N}^2}$  appelées respectivement famille des nombres de Stirling non signés de première espèce et famille des

nombre de Stirling de deuxième espèce, ainsi nommées en l'honneur du mathématicien anglais James Stirling (1692 – 1770) qui les a définies et étudiées en 1730.

Soit  $(n, k) \in \mathbb{N}^2$ . Le nombre de Stirling (signé) de première espèce noté  $s(n, k)$  est défini comme étant le coefficient de  $x^k$  dans la décomposition du vecteur  $n! \binom{x}{n}$  sur la base  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[x]$ . Plus précisément

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} s(n, k) x^k$$

ce qui s'écrit aussi

$$n! \binom{x}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} s(n, k) x^k.$$

Le nombre de Stirling (non signé) de première espèce, noté  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$  ou  $|s(n, k)|$ , est par définition le coefficient de  $x^k$  dans la décomposition du vecteur  $x^{\bar{n}}$  sur la base  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[x]$ . Plus précisément

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k$$

ce qui s'écrit aussi

$$n! \binom{x+n-1}{n} = \sum_{k=0}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Le nombre de Stirling de deuxième espèce noté  $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$  - ou  $S(n, k)$  - est défini comme étant le coefficient de  $x^k$  dans la décomposition du vecteur  $x^n$  sur la base  $(x^j)_{j \in \mathbb{N}} = \left( j! \binom{x}{j} \right)_{j \in \mathbb{N}}$  de  $\mathbb{C}[x]$ . Plus précisément

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} x^k.$$

On a alors

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k}.$$

Les nombres de Stirling de première espèce signés satisfont la relation de récurrence

$$\forall k > 0, s(n+1, k) = s(n, k-1) - ns(n, k),$$

avec les conditions initiales :

$$s(0, 0) = 1, \forall n > 0 s(n, 0) = s(0, n) = 0$$

et leurs valeurs absolues satisfont (avec les mêmes conditions initiales) la relation de récurrence

$$\forall k > 0 |s(n+1, k)| = |s(n, k-1)| + n|s(n, k)|.$$

Les nombres de Stirling de seconde espèce satisfont la relation de récurrence :

$$\forall k > 0 \ S(n, k) = S(n - 1, k - 1) + kS(n - 1, k),$$

avec les conditions initiales :

$$S(0, 0) = 1, \forall n > 0 \ S(n, 0) = S(0, n) = 0.$$

On aura besoin du résultat suivant :

**Théorème 3.1** Soit  $f$  une fonction réelle  $n$  fois dérivable sur  $]0, +\infty[$ . Alors, en posant  $t = e^x$ , on a

$$\frac{d^n}{dx^n} f(t) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} t^k f^{(k)}(t) \quad , \quad (n \geq 0).$$

**Corollaire 3.2** Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{2^k} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} = - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^k k} \Delta_k(n+1) \quad (3.1)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = - \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k+1}} \Delta_k(n) \quad (3.2)$$

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1} (k-1) \cdot k!}{2^{k+2}} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} = - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{k-1}{2^{k+2}} \Delta_k(n-1) \quad (3.3)$$

avec les notations de Fékir [74]

$$\Delta_k(n) = (-1)^{k+1} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$$

**Preuve.** Avec  $f(x) = \ln(1+x)$ , on a pour  $k \geq 1$

$$f^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Par suite, en appliquant le théorème, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} &= \frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}} (\ln(1+e^x)) \Big|_{x=0} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} t^k f^{(k)}(t) \Big|_{t=1} \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^{k+1} (k-1)!}{2^k} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Avec  $g(x) = \frac{1}{1+x}$ , on a pour  $k \geq 1$

$$g^{(k)}(x) = \frac{(-1)^{k+1}(k-1)!}{(1+x)^k}.$$

Par suite, on a pour  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} &= \frac{d^n}{dx^n} \left( 1 - \frac{1}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} \\ &= - \frac{d^n}{dx^n} (g(t)) \Big|_{x=0} \\ &= - \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} t^k g^{(k)}(t) \Big|_{x=1} \\ &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{2^{k+1}} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \end{aligned}$$

Avec

$$h(x) = \frac{x}{(x+1)^2}$$

on a

$$h(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2},$$

et

$$\begin{aligned} h^{(k)}(x) &= \frac{(-1)^k k!}{(1+x)^{k+1}} - \frac{(-1)^{k+1}(k+1)!}{(1+x)^{k+2}} \\ &= \frac{(-1)^k k!(k-x)}{(1+x)^{k+2}} \end{aligned}$$

On a

$$\begin{aligned} \frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x + 1} \right) \Big|_{x=0} &= \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} (h(t)) \Big|_{t=1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} t^k h^{(k)}(t) \Big|_{t=1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}(k-1).k!}{2^{k+2}} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\} \end{aligned}$$

■

Les nombres de Stirling interviennent dans l'expression des coefficients de nombreux développements en séries. Ainsi, il est bien connu, voir le fascicule de Belbahri, [16] pages 2 et 3, exemples 1.1.1 et 1.1.3 que :

$$\frac{(\exp z - 1)^k}{k!} = \sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{z^n}{n!} \quad (3.4)$$

et

$$\frac{(\log(1+z))^k}{k!} = \sum_{n \geq 0} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!} \quad (3.5)$$

Cette dernière relation s'écrivant aussi :

$$\frac{1}{k!} \left( \log \frac{1}{1-z} \right)^k = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{z^n}{n!}$$

**Quelques propriétés des opérateurs classiques** Donnons quelques exemples d'éléments de  $\mathbb{C}[[D]]$

1. Identité de Grégory

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Delta^k P(0)}{k!} x^k$$

que l'on peut aussi écrire

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \Delta^k P(0) \binom{x}{k}$$

2. Comme

$$\Delta^k = (E - I)^k = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} E^j$$

on obtient :

$$\Delta^k(x^n) = (E - I)^k(x^n) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (x+j)^n$$

Afin d'illustrer l'utilisation de cette théorie des opérateurs, on va donner une expression explicite des nombres de Bernoulli. Nous aurons besoin des deux lemmes suivants :

**Lemme 3.3** *L'égalité suivante est vérifiée :*

$$\frac{\Delta^k(x^n)}{k!} = \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} S(n-\ell, k) x^\ell.$$

**Preuve.** On vient de voir que

$$\begin{aligned} \frac{\Delta^k(x^n)}{k!} &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (x+j)^n \\ &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \left( \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} j^{n-\ell} x^\ell \right) \end{aligned}$$

En permutant les sommations, on obtient successivement :

$$\begin{aligned}
\frac{\Delta^k(x^n)}{k!} &= \sum_{\ell=0}^n \sum_{j=0}^k \frac{1}{k!} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \binom{n}{\ell} j^{n-\ell} x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} \frac{1}{k!} \left( \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^{n-\ell} \right) x^\ell \\
&= \sum_{\ell=0}^n \binom{n}{\ell} S(n-\ell, k) x^\ell.
\end{aligned}$$

Par ailleurs, on sait que pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned}
x^{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k) k! \binom{x}{k} \\
&= x \sum_{k=1}^{n+1} S(n+1, k) (k-1)! \binom{x-1}{k-1}.
\end{aligned}$$

■

On aura besoin du résultat suivant, voir [16].

**Lemme 3.4**

$$\begin{aligned}
D \binom{x}{n} &= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} \Delta^j \binom{x}{j} \\
&= \sum_{j=1}^n \frac{(-1)^{j+1}}{j} \binom{x}{n-j}
\end{aligned}$$

*Saalschutz, [139], donne 38 expressions explicites des nombres de Bernoulli dont celle du théorème suivant : (??) du théorème 3.16*

**Théorème 3.5** *Le  $n$ -ième nombre de Bernoulli est donné par :*

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n$$

### 3.3 Polynômes et nombres de Bernoulli

Rappelons que nous avons défini l'opérateur de Bernoulli  $\mathcal{J}$  par

$$\mathcal{J}(x^n) = \frac{1}{n+1} ((x+1)^{n+1} - x^{n+1}) \quad (n \geq 0). \tag{3.6}$$

Remarquons que la relation (3.6) s'écrit

$$\mathcal{J}(x^n) = x^n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} x^k \quad (n \geq 0). \quad (3.7)$$

et qu'elle s'écrit aussi

$$\mathcal{J}(x^n) = \int_x^{x+1} t^n dt. \quad (3.8)$$

Nous avons vu que  $\mathcal{J}$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}[x]$  et que de plus

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{D}{e^D - 1} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{D^n}{n!}. \quad (3.9)$$

$(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant la suite des nombres de Bernoulli.

### 3.3.1 Définition et relations de récurrence

**Définition 3.6** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , le  $n$ -ième polynôme de Bernoulli  $B_n(x)$  est défini par*

$$B_n(x) = \mathcal{J}^{-1}(x^n) \quad \text{et} \quad B_n = B_n(0).$$

Autrement dit,  $B_n(x)$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{C}[x]$  tel que

$$\int_x^{x+1} B_n(t) dt = x^n.$$

La relation (3.9) nous fournit la caractérisation suivante des polynômes de Bernoulli

**Théorème 3.7** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a*

1.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{zx}$$

3.

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k}$$

4.

$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x)$$

5.

$$B_n(0) = B_n \text{ et } B_n(1) = B_n + \delta_{n,1}$$

6.

$$B_{2n+1} = 0 \text{ pour } n \geq 1.$$

7.

$$B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x)$$

8.

$$B_n = \delta_{n,0} - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \text{ et } \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k - B_n = \delta_{n,1}$$

9.

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1.$$

10.

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1} \text{ pour } n \geq 1.$$

### Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \mathcal{J}^{-1}(x^n) \\ &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k \frac{D^k}{k!} \right) (x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k}. \end{aligned}$$

2. Ainsi, on a

$$\frac{B_n(x)}{n!} = \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k \geq 0 \text{ et } \ell \geq 0}} \frac{B_k x^\ell}{k! \ell!}$$

relation équivalente à

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n(x)}{n!} z^n = \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} z^\ell \right),$$

c'est à dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{zx}.$$

3. On a

$$\begin{aligned}
 \frac{B_n(x+y)}{n!} &= [z^n] \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k(x+y) \frac{z^k}{k!} \right) \\
 &= [z^n] \left( \frac{z}{e^z - 1} e^{z(x+y)} \right) \\
 &= [z^n] \left( \frac{z}{e^z - 1} e^{zy} e^{zx} \right) \\
 &= [z^n] \left( \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k(y) \frac{z^k}{k!} \right) \left( \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{x^\ell}{\ell!} z^\ell \right) \right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned}
 B_n(x+y) &= n! \sum_{\substack{k+\ell=n \\ k \geq 0 \text{ et } \ell \geq 0}} \frac{B_k(y) x^\ell}{k! \ell!} \\
 &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k}
 \end{aligned}$$

4. Nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{B_n(1-x)}{n!} &= [z^n] \left( \sum_{k=0}^{\infty} B_k(1-x) \frac{z^k}{k!} \right) \\
 &= [z^n] \left( \frac{z}{e^z - 1} e^{(1-x)z} \right) \\
 &= [z^n] \left( \frac{ze^z}{e^z - 1} e^{-xz} \right) \\
 &= [z^n] \left( \frac{-z}{e^{-z} - 1} e^{-xz} \right) \\
 &= [z^n] \left( \sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{(-z)^n}{n!} \right) \\
 &= (-1)^n B_n(x)
 \end{aligned}$$

5.

$$B_n(0) = B_n \text{ et } B_n(1) = B_n + \delta_{n,1}$$

■

Il est alors immédiat de constater que l'on a pour tous entiers naturels  $n$  et  $m$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \int_0^n B_n(t) dt.$$

Le fait que  $\mathcal{J}$  soit un automorphisme de l'espace vectoriel  $\mathbb{C}[x]$  va nous permettre d'établir une relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Bernoulli et d'en déduire alors une relation de récurrence vérifiée par les nombres de Bernoulli. Plus précisément, on a le

**Théorème 3.8** *La suite  $(B_n(x))_{n \geq 0}$  des polynômes de Bernoulli vérifie les relations*

$$B_0(x) = 1 \quad \text{et} \quad B_n(x) = x^n - \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x) \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (3.10)$$

*La suite  $(B_n)_{n \geq 0}$  des nombres de Bernoulli vérifie les relations*

$$B_0 = 1 \quad \text{et} \quad B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k \quad \text{pour } n \geq 1. \quad (3.11)$$

**Preuve.** En appliquant  $\mathcal{J}^{-1}$  à chacun des deux membres de (3.7), on obtient la relation

$$x^n = B_n(x) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} B_k(x) \quad (n \geq 0),$$

de laquelle résultent (3.10) et (3.11) en faisant  $x = 0$ .

Les relations (3.10) et (3.11) montrent que la suite des polynômes de Bernoulli est une suite de polynômes à coefficients rationnels et que la suite des nombres de Bernoulli est une suite de nombres rationnels.

Les relations (3.10) et (3.11) permettent aussi d'obtenir les premières valeurs des polynômes et nombres de Bernoulli. ■

$$\begin{aligned} B_0(x) &= 1, \\ B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\ B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\ B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}, \\ B_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x, \\ B_6(x) &= x^6 - 3x^5 + \frac{5}{2}x^4 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{42}, \end{aligned}$$

et

$$(B_0, B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6) = \left(1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}\right).$$

### 3.3.2 Séries génératrices exponentielles

A partir de la relation de récurrence (3.11), il est facile de déterminer la série génératrice exponentielle associée à la suite des nombres de Bernoulli ainsi que la série génératrice exponentielle associée à la suite des polynômes de Bernoulli.

**Théorème 3.9** *La suite des polynômes de  $(B_n(x))_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes d'Appell et on a.*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} \quad (3.12)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{zx} \quad (3.13)$$

**Preuve.** De la relation (3.11), on déduit aisément que l'on a

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k - B_n = \delta_{n,1}, \quad (n \geq 0),$$

Dans cette dernière relation,  $\delta_{n,1}$  (symbole de Kronecker) vaut 1 si  $n = 1$  et 0 sinon. Par suite, on a pour tout  $n \geq 0$  :

$$\sum_{k+\ell=n} \frac{1}{\ell!} \frac{B_k}{k!} - \frac{B_n}{n!} = \frac{\delta_{n,1}}{n!}$$

En posant  $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!}$ , on en déduit alors que l'on a

$$e^z S(z) - S(z) = \sum_{k=0}^n \delta_{n,1} \frac{z^n}{n!},$$

i.e. :

$$(e^z - 1)S(z) = z$$

d'où l'on déduit la relation (3.12).

Comme il est immédiat de constater que la suite  $(x^n)_{n \geq 0}$  est une suite de polynômes d'Appell, le théorème permet d'affirmer que la suite  $(B_n(x))_{n \geq 0} = (J^{-1}(x^n))_{n \geq 0}$  est aussi une suite de polynômes d'Appell

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x_0) \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{z(x-x_0)} \quad (3.14)$$

En choisissant  $x_0 = 0$  dans (3.14), on obtient (3.13). ■

### 3.3.3 Propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli

Le théorème suivant est une conséquence directe du fait que la suite des polynômes de Bernoulli est une suite de polynômes d'Appell.

#### Théorème 3.10

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$B'_n(x) = nB_{n-1}(x)$$

2. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} B_n(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_{n-k} x^k \end{aligned}$$

3. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$\begin{aligned} B_n(x+y) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(x) y^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} B_k(y) x^{n-k} \end{aligned}$$

Le théorème suivant se prouve aisément à l'aide de la définition qu'on a donnée des polynômes de Bernoulli.

#### Théorème 3.11

1. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}$$

2. Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a

$$B_n(-x) = (-1)^n (B_n(x) + nx^{n-1})$$

**Preuve.**

1. La suite des polynômes de Bernoulli étant une suite de polynômes d'Appell, on a pour tout entier  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} B_n(x+1) - B_n(x) &= \int_x^{x+1} B_n'(t) dt \\ &= \int_x^{x+1} n B_{n-1}(t) dt \\ &= n J(B_{n-1}(x)) = n x^{n-1} \end{aligned}$$

2. Ainsi tout entier  $n \geq 0$ , on a

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$$

En changeant  $x$  en  $-x$  dans la relation précédente et en multipliant par  $(-1)^n$  les deux membres de l'égalité, on obtient

$$(-1)^n B_{n+1}(1-x) - (-1)^n B_{n+1}(-x) = (n+1)x^n$$

Posons alors  $P(x) = (-1)^{n+1} B_{n+1}(1-x)$ , l'égalité précédente s'écrit

$$P(x+1) - P(x) = (n+1)x^n.$$

autrement dit

$$\Delta(P(x)) = \Delta(B_{n+1}(x))$$

d'où

$$D(P(x)) = D(B_{n+1}(x)),$$

i.e.

$$(-1)^n B'_{n+1}(1-x) = B'_{n+1}(x),$$

ou encore

$$(-1)^n (n+1) B_n(1-x) = (n+1) B_n(x).$$

On en déduit la relation recherchée

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x).$$

3. Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a alors

$$\begin{aligned} B_n(-x) &= (-1)^n B_n(1+x) \\ &= (-1)^n (B_n(x) + (B_n(x+1) - B_n(x))) \\ &= (-1)^n (B_n(x) + n x^{n-1}). \end{aligned}$$

■

**Corollaire 3.12** *Pour tout entier  $n \geq 1$ , on a*

$$B_{2n+1} = 0$$

### 3.3.4 Formules de Faulhaber et formules d'Euler-MacLaurin

Le théorème suivant va nous être utile

**Théorème 3.13** *Soit  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ . Alors l'équation*

$$\Delta(g(x)) = f(x)$$

*admet pour solution*

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x) + C$$

où  $C$  est une constante arbitraire

**Preuve.** On a

$$\begin{aligned} x^n &= D \left( \frac{x^{n+1}}{n+1} \right) \\ &= \left( (e^D - 1) \cdot \frac{D}{e^D - 1} \cdot \mathcal{I} \right) (x^n) \end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$I = \Delta \mathcal{J}^{-1} \mathcal{I}$$

Comme on a

$$\mathcal{J}^{-1} \mathcal{I} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} D^n \mathcal{I} = \mathcal{I} - \frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} D^{2n-1},$$

On en déduit que

$$I = \Delta \circ \left( \mathcal{I} - \frac{1}{2} I + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_{2n}}{(2n)!} D^{2n-1} \right)$$

Ainsi, on a

$$f(x) = \Delta \left( \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x) \right).$$

L'égalité

$$\Delta(g(x)) = f(x)$$

équivalent donc à

$$g(x) - \left( \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x) \right) \in \ker \Delta.$$

Comme on sait que  $\ker \Delta = \mathbb{C}_0[x] = \mathbb{C}$ , le résultat du théorème en découle. ■

**Théorème 3.14** *Pour tout polynôme  $f(x) \in \mathbb{C}[x]$ , pour tout entier naturel  $m$  et pour tous entiers  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq b$ , on a*

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)).$$

**Preuve.** Posons

$$g(x) = \int_0^x f(t)dt - \frac{1}{2}f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} f^{(2k-1)}(x),$$

alors on a

$$g(x+1) - g(x) = f(x).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sum_{k=a}^b f(k) &= f(b) + \sum_{k=a}^{b-1} (g(k+1) - g(k)) \\ &= f(b) + (g(b) - g(a)) \\ &= \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)). \end{aligned}$$

■

Le théorème 3.14 admet la généralisation suivante ([149], [71]).

**Théorème 3.15** *Pour tout entier naturel  $m$ , pour tous entiers  $a$  et  $b$  tels que  $a \leq b$ , et pour toute fonction  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $[a, b]$ , on a*

$$\sum_{k=a}^b f(k) = \int_a^b f(t)dt + \frac{1}{2} (f(a) + f(b)) + \sum_{k=1}^m \frac{B_{2k}}{(2k)!} (f^{(2k-1)}(b) - f^{(2k-1)}(a)) + R_m,$$

où le reste  $R_m$  vaut

$$R_m = -\frac{1}{(2m)!} \int_a^b B_{2m}(t - [t]) f^{(2m)}(t) dt.$$

On a aussi

$$R_m = \frac{1}{(2m+1)!} \int_a^b B_{2m+1}(t - [t]) f^{(2m+1)}(t) dt.$$

### 3.3.5 Formules explicites des polynômes et nombres de Bernoulli

**Théorème 3.16** *Pout tout entier  $n \geq 0$ , on a*

1.

$$\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1} = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k+1}, \quad (3.15)$$

2.

$$\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(1)}{n+1} = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \binom{x-1}{k+1}, \quad (3.16)$$

3.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k(x^n). \quad (3.17)$$

4.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n \right) \quad (3.18)$$

5.

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{k+1-j} \binom{x}{j}, \quad (3.19)$$

6.

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{k-j} \binom{x-1}{j}. \quad (3.20)$$

**Preuve.** Soit  $n$  un entier naturel.

1. On a

$$\begin{aligned} \Delta \left( \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1} \right) &= x^n \\ &= \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k} \\ &= \Delta \left( \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k+1} \right). \end{aligned}$$

Ainsi les polynômes  $\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1}$  et  $\sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k+1}$  ont donc même image par l'opérateur  $\Delta$ . Il en résulte qu'ils diffèrent d'une constante. Comme de plus ces deux polynômes s'annulent pour  $x = 0$ . On en conclut qu'ils sont égaux.

2. De même, on a

$$\begin{aligned}
\Delta \left( \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(1)}{n+1} \right) &= \frac{1}{x} x^{n+1} = \frac{1}{x} \sum_{k=1}^{n+1} k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x-1}{k-1} \\
&= \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \binom{x-1}{k} \\
&= \Delta \left( \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \binom{x-1}{k+1} \right)
\end{aligned}$$

Ainsi les polynômes  $\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1}$  et  $\sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} \binom{x-1}{k+1}$  ont même image par l'opérateur  $\Delta$ . Il en résulte qu'ils diffèrent d'une constante. Comme de plus ces deux polynômes s'annulent pour  $x = 1$ . On en conclut qu'ils sont égaux.

3. On sait que

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= J^{-1}(x^n) \\
&= \left( \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k \right) (x^n) \\
&= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k (x^n)
\end{aligned}$$

4. La relation (3.18) se déduit de la relation (3.17) en remarquant que d'après la relation (2.2)

$$\Delta^k(x^n) = \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n$$

5. On a

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= D \left( \frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(0)}{n+1} \right) \\
&= D \left( \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \binom{x}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} D \left( \binom{x}{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^{k-j}}{k+1-j} \binom{x}{j}
\end{aligned}$$

6. De même, on a

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= D\left(\frac{B_{n+1}(x) - B_{n+1}(1)}{n+1}\right) \\
&= D\left(\sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} (x-1)^{\overline{k+1}}\right) \\
&= \sum_{k=0}^n k! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\} D\left(x-1\right)^{\overline{k+1}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} D\left(x-1\right)^{\overline{k}} \\
&= \sum_{k=1}^{n+1} (k-1)! \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right\} \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-1-j}}{k-j} (x-1)^{\overline{j}}
\end{aligned}$$

■

Dans ce qui suit, nous adoptons la notation suivante introduite par Fekih Ahmed ([74], 2012) en posant pour tous entiers  $n \geq 1$  et  $k \geq 0$  :

$$\Delta_k(n) := \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

Remarquons que l'on a aussi

$$\Delta_k(n) = (-1)^k k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \quad (3.21)$$

On en déduit d'abord :

**Corollaire 3.17 (Expressions explicites du  $n$ -ième nombre de Bernoulli)** 1.

$$B_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k+1} \Delta_k(n), \quad (n \geq 1). \quad (3.22)$$

2.

$$B_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} \Delta_k(n), \quad (n \geq 1). \quad (3.23)$$

3.

$$B_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2} \Delta_k(n+1), \quad (n \geq 0). \quad (3.24)$$

Avant de donner la preuve de ce corollaire, signalons qu'en 2012, Fekih-Ahmed ([74]) a démontré les formules (3.22), (3.23) et (3.24) par l'emploi de l'analyse complexe. Dans son

article, il signale que si la formule (3.22) est bien connue, les formules (3.23) et (3.24) le sont moins. Il constate que la formule (3.23) a été donnée par Worpitzky en 1883 ([159], formule (37)) et que cette même formule se retrouve dans l'article de 1893 de Saalschütz ([139], formule LXV, p.83). De plus la formule (3.24) est aussi mentionnée en page 82 de ce même article. Ces formules explicites semblent avoir été obtenues assez laborieusement par ces auteurs. Pour notre part, nous allons montrer qu'elles se déduisent naturellement et aisément du théorème 3.16.

**Preuve.** 1- Pour  $n \geq 1$  et pour  $x = 0$ , la relation 3.17 implique puisque  $B_n(0) = B_n$

$$\begin{aligned} B_n &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} \Delta^k(0^n) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k}{k+1} k! \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \Delta_k(n). \end{aligned}$$

2- Avec la notation (3.21), la formule (3.19) du théorème 3.16 s'écrit pour  $n \geq 1$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^n \Delta_k(n) \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{k+1-j} \binom{x}{j}.$$

On sait que  $B_n(1) = (-1)^n B_n$ . Pour  $x = 1$ , cette dernière relation implique

$$(-1)^n B_n = \sum_{k=1}^n \Delta_k(n) \left( \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k} \right).$$

La relation (3.23) en résulte.

3- De même, avec la notation (3.21), la formule (3.19) du théorème 3.16 s'écrit pour  $n \geq 0$

$$B_n(x) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} \Delta_k(n+1) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{j+1}}{k-j} \binom{x-1}{j}.$$

Pour  $x = 1$ , cette dernière relation implique la relation (3.24). ■

## Formules de Worpitzky- Garabedian

En 1940, Garabedian [76], prouve, par l'emploi de séries divergentes la formule explicite suivante

$$B_{n+1} = \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^k \frac{\Delta_k(n+1)}{k2^k}$$

où

$$\Delta_k(n) = \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

Garabedian pensait alors avoir découvert une nouvelle formule explicite pour les nombres de Bernoulli. Il a d'ailleurs intitulé son article "A new formula for the Bernoulli numbers". Ce n'est que douze années plus tard, en 1952, que Carlitz [30] signale que cette formule n'est en fait pas nouvelle et qu'elle avait déjà été donnée en 1883 par Worpitzky ([159], p.224, formule (68)). Carlitz redémontre cette formule en exploitant une propriété des polynômes d'Euler. En 2004, Rzadkowski [138], donne une preuve simple de cette même formule. Dans ce qui suit, nous allons constater que cette formule est une conséquence immédiate de théorèmes que nous avons établis.

**Théorème 3.18** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a*

$$\begin{aligned} B_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k}{k2^k} \Delta_k(n+1) \\ B_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{2^{k+1}} \Delta_k(n) \\ B_{n+1} &= \frac{(-1)^{n+1}(n+1)}{2^{n+1}-1} \sum_{k=1}^{n+1} \frac{(-1)^k(k-1)}{2^{k+2}} \Delta_k(n-1) \end{aligned}$$

**Preuve.** On a :

$$\begin{aligned} \frac{e^x}{e^x+1} &= \frac{1}{e^{-x}+1} \\ &= \frac{1}{x} \left( \frac{-2x}{e^{-2x}-1} - 1 \right) - \frac{1}{x} \left( \frac{-x}{e^{-x}-1} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{(-2x)^{n+1}}{(n+1)!} - \frac{1}{x} \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{(-x)^{n+1}}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(2^{n+1}-1) B_{n+1} x^n}{n+1} \frac{x^n}{n!} \end{aligned}$$

On en déduit que l'on a

$$\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x+1} \right) \Big|_{x=0} = (-1)^{n+1} \frac{(2^{n+1}-1) B_{n+1}}{n+1} \quad (3.25)$$

Or au corollaire 3.2, on a trouvé trois autres expressions (3.1), (3.2) et (3.3) de  $\frac{d^n}{dx^n} \left( \frac{e^x}{e^x+1} \right) \Big|_{x=0}$ . En écrivant l'égalité entre l'expression 3.25 avec chacune de ces expressions, on obtient les relations du théorème. ■

### 3.3.6 Formules explicites du $n$ -ième polynôme de Bernoulli

La recherche de formules explicites exprimant les nombres de Bernoulli a intéressé de nombreux auteurs. Ainsi, la formule suivante

$$B_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k(k+1)} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n, \quad k \geq 1$$

a été donnée en 1883 par Worpitzky ([159], formule (37)) dans lequel il donne 38 formules explicites. Cette même formule figure aussi dans l'article de Saalschütz ([139], 1893, formule LXV, p. 83). Dans ce dernier article, on trouve aussi la formule suivante ([139], formule LXIII, p.82)

$$B_n = (-1)^{n+1} \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k^2} \sum_{j=1}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{n+1}, \quad n \geq 0$$

Dans [79], Gould rappelle la formule bien connue

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{k+1} S(n, k)$$

qui s'écrit aussi

$$B_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left( \frac{1}{k!} \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right)$$

ou encore :

$$B_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^n.$$

Dans ce qui suit, nous allons montrer comment cette dernière formule peut s'obtenir simplement. La méthode utilisée va nous permettre aussi de prouver cette formule ainsi que de nouvelles autres formules explicites pour les nombres de Bernoulli et de Genocchi.

**Théorème 3.19** *Avec les notations précédentes, on a :*

$$B_{n+1}(x) - B_{n+1} = (n+1) \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) (x(x-1) \cdots (x-k))$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k+1)!} \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) \frac{d}{dx} (x(x-1) \cdots (x-k))$$

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n \left( \sum_{j=1}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n \right) \frac{d}{dx} \left( \binom{x}{k+1} \right)$$

**Définition 3.20** On note  $(C_n)_n$  la suite des nombres de Catalan, définie par :

$$C_n := \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} = \prod_{k=2}^n \frac{n+k}{k}$$

Les premiers nombres de Catalan (suite A000108 de l'OEIS) pour  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$  sont : 1, 1, 2, 5, 14, 42, 132  
Citons les expressions explicites :

**Théorème 3.21** Les nombres  $B_n$  et  $G_n$  -respectivement de Bernoulli et de Genocchi - satisfont les relations :

$$B_n = \frac{n}{2 - 2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-1-2k}}{k+1} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{n-1}$$

$$G_n = -n \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2^{n-1-2k}}{k+1} \binom{2k}{k} \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{n-1}$$

$$G_n = -n \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-2k-1} C_k \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} j^{n-1}$$

$$G_n = n \sum_{k=0}^{n-1} 2^{n-2k-1} (-1)^{k+1} k! C_k S(n-1, k)$$

**Preuve.** On utilise

$$\binom{\frac{1}{2}}{k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k+1}(k+1)} \binom{2k}{k}$$

■

En 2011, Lazhar [?] a redémontré ces formules par des méthodes d'analyse complexe.

Une formule due à Worpitsky, 170 années après *Ars Conjectandi* cité par B Mazur [116] p.4

$$B_n = \frac{(-1)^n n}{2^n - 1} \sum_{k=1}^n 2^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} (j+1)^{k-1}$$

### 3.4 Polynômes et nombres d'Euler

Rappelons que nous avons défini l'opérateur d'Euler  $\mathcal{L}$  comme étant l'endomorphisme de  $\mathbb{C}[x]$  tel que

$$\mathcal{L}(x^n) = \frac{1}{2}((x+1)^n + x^n),$$

i.e.

$$\mathcal{L}(x^n) = x^n + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^k.$$

Nous savons que  $\mathcal{L}$  est un automorphisme de  $\mathbb{C}[x]$  et que  $\mathcal{L}$  et  $\mathcal{L}^{-1}$  sont des opérateurs de composition qui transforment toute suite d'Appell en une autre suite d'Appell.

### 3.4.1 Définition et relations de récurrence pour les polynômes d'Euler

**Définition 3.22** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on appelle  $n$ -ième polynôme d'Euler le polynôme  $E_n(x)$  défini par*

$$E_n(x) = \mathcal{L}^{-1}(x^n).$$

Autrement dit,  $E_n(x)$  est l'unique polynôme de  $\mathbb{C}[x]$  tel que

$$E_n(x+1) + E_n(x) = 2x^n$$

Comme  $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite d'Appell, il en résulte que  $(E_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  est aussi une suite d'Appell.

**Théorème 3.23** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a*

1.

$$E'_n(x) = nE_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$$

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2}{e^z + 1} e^{zx}$$

3.

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x_0) (x - x_0)^{n-k}$$

4.

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

5.

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} E_k(x) y^{n-k}$$

6.

$$E_n(x) = x^n - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} E_k(x)$$

7.

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x)$$

8.

$$(-1)^{n+1} E_n(-x) = E_n(x) - 2x^n$$

**Formule sommatoire**

$$\sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} k^m = \frac{E_m(n+1) + (-1)^n E_m(0)}{2}.$$

### 3.4.2 Formules explicites pour les polynômes et les nombres d'Euler

On a

**Théorème 3.24** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (x+j)^n \right)$$

Ainsi, on a

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \left( \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{2} \Delta \right)^k \right) (2x^n) \\ &= \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^k} \Delta^k \right) (2x^n) \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} \Delta^k (x^n) \end{aligned}$$

Avec l'expression (2.2), on a ainsi

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{2^{k-1}} \left( \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (x+j)^n \right)$$

## 3.5 Relations entre polynômes de Bernoulli et polynômes d'Euler

Les formules qui suivent sont bien connues ([123], pages 18,24). Elles ont été étudiées par Nielsen ([121], page 54) et par Carlitz [34]. Ces deux auteurs ont cherché des critères très

précis pour caractériser les suites des polynômes de Bernoulli ou des polynômes d'Euler. On suivra ici l'exposé de Zagier, ([20], p.7)

**Définition 3.25** On dit qu'une fonction  $f$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  vérifie la relation de distribution d'ordre  $n$  si

$$\sum_{r=0}^{m-1} f\left(\frac{t+r}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}} f(t)$$

**Théorème 3.26** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

1.

$$B_n(x) = m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(\frac{x+k}{m}\right) \quad (m \geq 1). \quad (3.26)$$

2.

$$E_n(x) = m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n\left(\frac{x+k}{m}\right) \quad (m \geq 1 \text{ et } m \text{ impair}). \quad (3.27)$$

3.

$$E_n(x) = -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right) \quad (m \geq 2 \text{ et } m \text{ pair}). \quad (3.28)$$

La relation (3.26) ci-dessus est appelée formule de Raabe. En effet, c'est en 1851 que Joseph Ludwig Raabe a prouvé la relation (3.26) qui exprime que le  $n$ -ième polynôme de Bernoulli,  $B_n(x)$ , vérifie la relation de distribution pour l'ordre  $n$ . Nous en verrons une application au calcul de valeurs particulières de polynômes de Bernoulli. Rappelons que c'est Raabe qui a donné le nom de Bernoulli aux polynômes (de Bernoulli) en hommage à Daniel Bernoulli (1700-1782). Les nombres de Bernoulli ont été ainsi désignés en hommage à Jacques Bernoulli (1654-1705).

**Preuve.** 1- On constate que

$$\begin{aligned} \Delta \left( m^n \sum_{k=0}^{m-1} B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right) \right) &= m^n \left( B_{n+1}\left(\frac{x}{m} + 1\right) - B_{n+1}\left(\frac{x}{m}\right) \right) \\ &= m^n (n+1) \left(\frac{x}{m}\right)^n \\ &= (n+1)x^n \\ &= \Delta(B_{n+1}(x)). \end{aligned}$$

Ainsi  $m^n \sum_{k=0}^{m-1} B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right)$  et  $B_{n+1}(x)$  ayant même image par  $\Delta$ , ont aussi même image par  $D$ . On en déduit que

$$D \left( m^n \sum_{k=0}^{m-1} B_{n+1}\left(\frac{x+k}{m}\right) \right) = D(B_{n+1}(x)),$$

i.e. :

$$m^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} (n+1) B_n \left( \frac{x+k}{m} \right) = (n+1) B_n(x).$$

On obtient alors (3.26) en simplifiant par  $n+1$ .

2- On a pour  $m$  impair

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left( m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k E_n \left( \frac{x+k}{m} \right) \right) &= m^n \left( (-1)^{m-1} E_n \left( \frac{x}{m} + 1 \right) + E_n \left( \frac{x}{m} \right) \right) \\ &= m^n \left( E_n \left( \frac{x}{m} + 1 \right) + E_n \left( \frac{x}{m} \right) \right) \\ &= m^n \left( 2 \left( \frac{x}{m} \right)^n \right) \\ &= 2x^n = \mathcal{L}(E_n(x)). \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant bijectif, il en résulte l'identité (3.27).

3- On a pour  $m$  pair

$$\begin{aligned} \mathcal{L} \left( -\frac{2}{n+1} m^n \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k B_{n+1} \left( \frac{x+k}{m} \right) \right) &= \frac{2}{n+1} m^n \left( B_{n+1} \left( \frac{x}{m} + 1 \right) - B_{n+1} \left( \frac{x}{m} \right) \right) \\ &= \frac{2}{n+1} m^n \left( (n+1) \left( \frac{x}{m} \right)^n \right) \\ &= 2x^n = \mathcal{L}(E_n(x)). \end{aligned}$$

L'opérateur  $\mathcal{L}$  étant bijectif, il en résulte l'identité (3.28). ■

**Corollaire 3.27** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a*

1.

$$B_n(x) = 2^{n-1} \left( B_n \left( \frac{x}{2} \right) + B_n \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \quad (3.29)$$

2.

$$E_n(x) = 2^n \left( E_n \left( \frac{x}{2} \right) - E_n \left( \frac{x+1}{2} \right) \right) \quad (3.30)$$

3.

$$E_n(x) = \frac{2^{n+1}}{n+1} \left( B_{n+1} \left( \frac{x+1}{2} \right) - B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \quad (3.31)$$

4.

$$E_n(x) = \frac{2}{n+1} \left( B_{n+1}(x) - 2^{n+1} B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \quad (3.32)$$

**Preuve.** 1- En choisissant  $n = 2$  dans (3.26), on obtient (3.29).

2- En choisissant  $n = 2$  dans (3.27), on obtient (3.30).

3- En choisissant  $n = 2$  dans (3.28), on obtient (3.31).

4- La relation (3.31) s'écrit

$$E_n(x) = \frac{2}{n+1} \left( 2^n B_{n+1} \left( \frac{x+1}{2} \right) - 2^n B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \right). \quad (3.33)$$

On déduit de la relation (3.29) écrite pour  $n+1$  au lieu de  $n$

$$2^n B_{n+1} \left( \frac{x+1}{2} \right) = B_{n+1}(x) - 2^n B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \quad (3.34)$$

En remplaçant dans (3.33)  $2^n B_{n+1} \left( \frac{x+1}{2} \right)$  par son expression donnée dans (3.34), on trouve

$$\begin{aligned} E_n(x) &= \frac{2}{n+1} \left( B_{n+1}(x) - 2^n B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) - 2^n B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \right) \\ &= \frac{2}{n+1} \left( B_{n+1}(x) - 2^{n+1} B_{n+1} \left( \frac{x}{2} \right) \right). \end{aligned}$$

Ce qui est bien la relation (3.32). ■

Le théorème qui suit est une application de la relation de Raabe (3.26)

**Théorème 3.28** *Pour tout entier naturel  $n$ , on a*

1.

$$B_n \left( \frac{1}{2} \right) = (2^{1-n} - 1) B_n$$

2.

$$B_n \left( \frac{1}{3} \right) = B_n \left( \frac{2}{3} \right) = \frac{1}{2} (3^{1-n} - 1) B_n, \quad (n \text{ pair})$$

3.

$$B_n \left( \frac{1}{4} \right) = B_n \left( \frac{3}{4} \right) = 2^{-n} (2^{1-n} - 1) B_n, \quad (n \text{ pair})$$

4.

$$B_n \left( \frac{1}{6} \right) = B_n \left( \frac{5}{6} \right) = \frac{1}{2} (2^{1-n} - 1) (3^{1-n} - 1) B_n, \quad (n \text{ pair})$$

### 3.6 Nombres et polynômes de Genocchi

Ces nombres et polynômes ainsi nommés en hommage au mathématicien italien Angelo Genocchi (1817-1889) sont en relation étroite avec les nombres et polynômes d'Euler.

**Définition 3.29** *La suite des polynômes de Genocchi  $(G_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  et la suite des nombres de Genocchi  $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont définies par leur série génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{2ze^{xz}}{e^z + 1} \quad \text{et} \quad \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{e^z + 1}.$$

Il n'est pas difficile de voir que l'on a

$$G_0(x) = 0 \quad \text{et} \quad G_n(x) = nE_{n-1}(x) \quad \text{pour } n \geq 1.$$

Ainsi, les propriétés des polynômes de Genocchi se déduisent des propriétés vérifiées par les nombres ou polynômes d'Euler.

**Théorème 3.30** *Pour tout entier  $n \geq 0$ , on a*

$$G_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} G_k x^{n-k}$$

$$G_n(x) = 2^n \left( B_n \left( \frac{x+1}{2} \right) - B_n \left( \frac{x}{2} \right) \right)$$

$$G_{2n} \left( \frac{1}{2} \right) = G_{2n+1}(0) = 0 \quad (n \geq 1)$$

Les premières expressions des polynômes de Genocchi sont

$$\begin{aligned} G_1(x) &= 1 \\ G_2(x) &= 2x - 1 \\ G_3(x) &= 3x^2 - 3x \\ G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1 \\ G_5(x) &= 5x^4 - 10x^3 + 5x \end{aligned}$$

### 3.7 Polynômes de Nörlund

Les polynômes de Nörlund  $B_n^{(x)}$  ([123], chapitre 6) et  $b_n^{(x)}$ , ainsi nommés en hommage au mathématicien danois Niels Erik Nörlund (1885-1981), sont définis par

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(x)} \frac{z^n}{n!} = \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)^x$$

et

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n^{(x)} z^n = \left( \frac{z}{\ln(1+z)} \right)^x$$

Pour  $n \geq 0$ ,  $B_n^{(x)}$  est un polynôme de degré  $n$  à coefficients rationnels et de coefficient dominant respectivement  $(-\frac{1}{2})^n$ . On a

$$\begin{aligned} B_0^{(x)} &= 1 \\ B_1^{(x)} &= -\frac{1}{2}x \\ B_2^{(x)} &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x \\ B_3^{(x)} &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2. \end{aligned}$$

### 3.8 Nombres et polynômes de Fibonacci et de Lucas

Les suites de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$ , de Lucas  $(L_n)_{n \geq 0}$  ainsi nommées respectivement en hommage au mathématicien italien Léonard de Pise dit Fibonacci et au mathématicien français Edouard Lucas sont définies par les relations

$$\begin{aligned} F_0 &= 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \\ L_0 &= 2, L_1 = 1, L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Les suites de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$  et de Lucas  $(L_n)_{n \geq 0}$  sont répertoriées respectivement A000045 et A00032 dans l'encyclopédie des suites d'entiers Sloane.

$$(F_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots)$$

$$(L_n)_{n \geq 0} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \dots)$$

Les polynômes - à deux indéterminées - de Fibonacci et de Lucas sont définis respectivement par les relations de récurrence d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} U_0 &= 0, U_1 = 1, U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \\ V_0 &= 2, V_1 = x, V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Les premières expressions de ces polynômes sont

$$\begin{aligned} U_1(x, y) &= 1, \\ U_2(x, y) &= x, \\ U_3(x, y) &= x^2 + y \\ U_4(x, y) &= x^3 + 2xy, \\ U_5(x, y) &= x^4 + 3x^2y + y^2, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}V_1(x, y) &= 1, \\V_2(x, y) &= x + 2y, \\V_3(x, y) &= x^2 + 2xy + y, \\V_4(x, y) &= x^3 + 2x^2y + 2xy + 2y^2, \\V_5(x, y) &= x^4 + 2x^3y + 3x^2y + 4xy^2 + y^2.\end{aligned}$$

### 3.9 Polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchébychev de première espèce  $(\mathcal{T}_n(x))_n$  et de seconde espèce  $(\mathcal{U}_n(x))_n$  sont définis par les relations

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_0(x) &= 1, \mathcal{T}_1(x) = x, & \mathcal{T}_n(x) &= 2x\mathcal{T}_{n-1}(x) - \mathcal{T}_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2 \\ \mathcal{U}_0(x) &= 1, \mathcal{U}_1(x) = 2x, & \mathcal{U}_n(x) &= 2x\mathcal{U}_{n-1}(x) - \mathcal{U}_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce sont

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_0(x) &= 1, \\ \mathcal{T}_1(x) &= x, \\ \mathcal{T}_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ \mathcal{T}_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ \mathcal{T}_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ \mathcal{T}_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x.\end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de seconde espèce sont

$$\begin{aligned}\mathcal{U}_0(x) &= 1 \\ \mathcal{U}_1(x) &= 2x, \\ \mathcal{U}_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ \mathcal{U}_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ \mathcal{U}_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ \mathcal{U}_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x.\end{aligned}$$

On a

$$\mathcal{U}_n(x) = U_{n+1}(2x, -1)$$

et

$$2\mathcal{T}_n(x) = V_n(2x, -1)$$

### 3.10 Polynômes d'Hermite

La suite des polynômes d'Hermite  $(H_n(x))_{n \geq 0}$  est définie par les relations

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1 \\H_1(x) &= 2x \\H_n(x) &= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont

$$\begin{aligned}H_0(x) &= 1 \\H_1(x) &= 2x \\H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\H_5(x) &= 35x^5 - 160x^3 + 120x\end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle de cette suite est

$$S_H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2zx - z^2}$$

# Chapitre 4

## Identités combinatoires

*Un problème créé ne peut être résolu en réfléchissant de la même manière qu'il a été créé .*

Albert Einstein

### 4.1 Introduction

Le point de départ est cette fameuse identité portant sur les nombres de Bernoulli

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (n+k+1) B_{n+k} = 0 \quad (4.1)$$

Selon Cigler, on devrait l'appeler identité de Von Ettingshausen-Seidel-Kaneko. En effet, elle fut découverte successivement par Von Ettingshausen [70] en 1827, puis redécouverte par Seidel [141] en 1877 et redécouverte de nouveau par Kaneko en 1995 [103]. Il est à noter que Kaneko, dans son propre article, donne en plus de sa propre démonstration, une deuxième preuve due à Zagier.

Cette identité a fait l'objet d'extensions et de généralisations ces dernières années. Ainsi, en 2009, Chen et Sun ont prouvé le résultat suivant [44]

$$\sum_{k=0}^{n+3} \binom{n+3}{k} (n+k+3)(n+k+2)(n+k+1) B_{n+k} = 0 \quad (4.2)$$

Leur démonstration utilise l'analyse complexe et repose essentiellement sur la méthode de Zeilberger.

En décembre 2011, nous avons démontré avec Bencherif la généralisation suivante [168]

**Théorème 4.1** *Pour tout entier  $n \geq 0$  et pour tout nombre impair  $q$ , on a*

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} (n+k+q) \cdots (n+k+2)(n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

*En 2012, F. Bencherif et T. Garici ont généralisé cette dernière relation aux suites de Césaro. Selon Edouard Lucas [114], une suite de nombres complexes  $(u_n(x))_{n \geq 0}$  vérifiant la relation*

$$u_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k u_k \quad (4.3)$$

*est appelée suite de Césaro. Une telle suite est aussi appelée suite autoduale. En désignant par  $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{z^n}{n!}$  la série génératrice exponentielle associée à une suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ , on peut remarquer que la relation (4.3) est équivalente à la relation*

$$S(z) = S(-z)e^z.$$

*La généralisation obtenue par ces deux auteurs est la suivante [17]*

**Théorème 4.2** *Soit  $(u_n(x))_{n \geq 0}$  une suite de Césaro, alors pour tous entiers naturels  $n, m$  et  $q$ , on a l'identité suivante*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} u_{n+k} \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} u_{m+k} = 0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En constatant que les suites  $((-1)^n B_n)_{n \geq 0}$ ,  $\left(\frac{(-1)^n}{n+1} G_{n+1}\right)_{n \geq 0}$ ,  $\left(\frac{F_{n+1}}{n+1}\right)_{n \geq 0}$ ,  $(L_n)_{n \geq 0}$ ,  $(B_n)_{n \geq 0}$ , où  $(B_n)_{n \geq 0}$ ,  $(G_n)_{n \geq 0}$ ,  $(F_n)_{n \geq 0}$  et  $(L_n)_{n \geq 0}$  désignant respectivement la suite des nombres de Bernoulli, de Genocchi de Fibonacci et de Lucas, sont des suites de Césaro, F. Bencherif et T. Garici ont obtenu, par application de cette identité, de nombreuses identités pour ces suites de nombres.

En 2015, F. Bencherif, T. Garici et moi-même avons généralisé ce dernier théorème en prouvant le résultat suivant :

**Théorème 4.3** *Soit  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$ ,  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$  la série génératrice exponentielle associée à cette suite. On suppose qu'il existe un polynôme  $a(x) \in \mathbb{C}[x]$  tel que*

$$S(z) = S(-z)e^{a(x)z}. \quad (4.5)$$

Alors pour tous entiers  $n, m$  et  $q$ , on a l'identité suivante :

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (a(x))^{m+q-k} A_{n+k} \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} (a(x))^{n+q-k} A_{m+k} = 0 \end{aligned} \quad (4.6)$$

En choisissant  $m = n$  dans le théorème 4.3, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4** Soit  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$ ,  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$  la série génératrice exponentielle associée à cette suite. On suppose qu'il existe un polynôme  $a(x) \in \mathbb{C}[x]$  tel que

$$S(z) = S(-z)e^{a(x)z}.$$

Alors pour tous entiers  $n$ , et  $q$  tels que  $q$  soit impair, on a l'identité suivante

$$\sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (a(x))^{n+q-k} A_{n+k}(x) = 0$$

On pourra constater dans les applications que les relations du théorème et du corollaire généralisent des relations vérifiées par les nombres de Bernoulli.

Dans ce chapitre, nous allons prouver au paragraphe suivant le théorème 4.1 par une méthode différente que celle que nous avons employé dans [168]. Nous prouverons ensuite le théorème plus général 4.3 au paragraphe 3. Au paragraphe 4, nous ferons de nombreuses applications du théorème 4.3 permettant d'obtenir des identités pour les suites des nombres et polynômes de Bernoulli, d'Euler, de Fibonacci, de Lucas et aussi pour les nombres de Jacobsthal, de Jacobsthal-Lucas, de Pell, de Pell-Lucas et pour les polynômes de Tchebychev de première et seconde espèce, pour les polynômes d'Hermite, de Stirling et de Nörlund.

## 4.2 Preuve du théorème 4.1

Posons pour tout entier  $n \geq 0$  :

$$\epsilon_n = \frac{1 + (-1)^n}{2}.$$

On montre, comme dans l'article, qu'on a

$$\epsilon_n B_n = B_n + \frac{1}{2} \delta_1^n$$

Soit alors  $q$  un entier impair. Considérons pour un entier  $n \geq 0$  le polynôme

$$P(x) = \frac{1}{2} x^{n+q} (x-1)^{n+q}.$$

On a

$$\begin{aligned}
\int_x^{x+1} P'(t) dt &= P(x+1) - P(x) \\
&= \frac{1}{2}x^{n+q}(x+1)^{n+q} - \frac{1}{2}x^{n+q}(x-1)^{n+q} \\
&= \frac{1}{2}x^{n+q}((x+1)^{n+q} - (x-1)^{n+q}) \\
&= x^{n+1} \left( \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \left( \frac{1 - (-1)^{n+q-k}}{2} \right) \right) x^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} x^{n+1+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} \int_x^{x+1} B_{n+q+k}(t) dt \\
&= \int_x^{x+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} B_{n+q+k}(t) dt
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{J} \left( \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} B_{n+q+k}(x) \right) = \mathcal{J}(P'(x))$$

Comme  $\mathcal{J}$  est bijectif, on en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} B_{n+q+k}(x) = P'(x),$$

Or la dérivée du polynôme  $P(x) = x^{n+q}(x-1)^{n+q}$  s'écrit :

$$\begin{aligned}
P'(x) &= D((x^2 - x)^{n+q}) = (n+q)((x^2 - x)^{n+q-1}(2x - 1)) \\
&= (n+1)x^{n+q-1}(x-1)^{n+q-1}(2x-1).
\end{aligned}$$

On a donc prouvé que

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} B_{n+q+k}(x) = \frac{1}{2}(n+q)x^{n+q-1}(x-1)^{n+q-1}(2x-1). \quad (4.7)$$

Nous allons maintenant écrire que le coefficient de  $x^q$  dans le premier membre de (4.7) est égal au coefficient de  $x^q$  dans le second membre de (4.7). D'une part, le coefficient de  $x^q$  dans

le premier membre de (4.7) s'écrit

$$\begin{aligned}
[x^q] \left( \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \epsilon_{n+k} B_{n+q+k}(x) \right) &= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} \epsilon_{n+k} B_{n+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} (B_{n+k} + \frac{1}{2} \delta_1^{n+k}) \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} B_{n+k} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} \delta_{1-n}^k \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} B_{n+k} + \frac{1}{2} \binom{n+q}{1-n} \binom{q+1}{q} \\
&= \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} B_{n+k} + \frac{q+1}{2} \binom{n+q}{1-n} \tag{4.8}
\end{aligned}$$

D'autre part, le coefficient de  $x^q$  dans le second membre de (4.7) s'écrit

$$\begin{aligned}
[x^q] ((n+q)x^{n+q-1}(x-1)^{n+q-1}(2x-1)) &= [x^q] (D(\frac{1}{2}x^{n+q}(x-1)^{n+q})) \\
&= (q+1) [x^{q+1}] (\frac{1}{2}x^{n+q}(x-1)^{n+q}) \\
&= \frac{q+1}{2} [x^{q+1}] (\sum_k \binom{n+q}{k} (-1)^{n+q-k} x^{n+q+k}) \\
&= \frac{q+1}{2} \binom{n+q}{1-n} \tag{4.9}
\end{aligned}$$

Il en résulte qu'en égalant les coefficients de  $x^q$  données par (4.4) et(4.5), on trouve

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} B_{n+k} + \frac{q+1}{2} \binom{n+q}{1-n} = \frac{q+1}{2} \binom{n+q}{1-n}$$

Autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+k+q}{q} B_{n+k} = 0.$$

Ce qui est bien la relation qu'on voulait prouver.

### 4.3 Preuve du théorème 4.3

Il s'agit de généraliser cette identité à certaines suites de polynômes. Plus précisément, nous allons considérer les suites  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$  vérifiant une relation

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (a(x))^{n-k} A_k(x) \quad (4.10)$$

$a(x)$  étant un polynôme de  $\mathbb{C}[x]$ .

En désignant par  $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$  la série génératrice exponentielle associée à une suite de polynômes  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  de  $\mathbb{C}[x]$ , on constate que la relation (4.10) est équivalente à la relation

$$S(z) = S(-z)e^{a(x)z}.$$

Le théorème principal que nous énonçons et prouvons au paragraphe suivant généralise la relation (4.4). Il s'applique à de très nombreuses suites de polynômes. Nous examinerons ces applications dans les autres paragraphes.

Soit  $(A_n(x))_{n \geq 0}$  une suite de polynômes de  $\mathbb{C}[x]$ , de série génératrice exponentielle  $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!}$  vérifiant la relation 4.5 du théorème 4.3. Cette suite vérifie alors la relation (4.10), c'est-à-dire qu'on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (a(x))^{n-k} A_k(x). \quad (4.11)$$

Considérons alors l'application linéaire  $L_A : \mathbb{C}[x, y] \rightarrow \mathbb{C}[x]$  définie par les images suivantes des vecteurs de la base canonique  $(x^i y^j)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$  de  $\mathbb{C}[x, y]$  :

$$L_A(x^i y^j) = x^i A_j(x).$$

Un polynôme  $P(x, y) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i y^j$  de  $\mathbb{C}[x, y]$  a alors pour image par  $L_A$  le polynôme suivant de  $\mathbb{C}[x]$

$$L_A(P(x, y)) = \sum_{i,j} a_{i,j} x^i A_j(x).$$

Remarquons qu'on a alors

$$\begin{aligned} L_A(x^i) &= L_A(x^i y^0) = x^i A_0(x). \\ L_A(1) &= A_0(x). \\ L_A(y^j) &= L_A(x^0 y^j) = x^0 A_j(x) = A_j(x) \end{aligned}$$

Pour tout polynôme  $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$ , on a

$$L_A(Q(x) y^j) = Q(x) A_j(x).$$

La relation (4.11) est alors équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_A(y^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (a(x))^{n-k} L_A(y^k).$$

Ce qui s'écrit encore

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_A(y^n) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k L_A(a(x))^{n-k} y^k,$$

soit

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_A \left( y^n - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k (a(x))^k y^k \right) = 0.$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_A(y^n - (a(x) - y)^n) = 0.$$

Comme  $L_A$  est linéaire, cette dernière relation est équivalente à

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad y^n - (a(x) - y)^n \in \ker L_A. \quad (4.12)$$

La preuve du théorème repose sur le lemme suivant dans lequel  $\mathfrak{D}_y^q$  désigne la dérivation d'ordre  $q$  par rapport à  $y$ .

**Lemme 4.5** *Soit  $P(x, y) \in \mathbb{C}[x]$ ; alors pour tout entier  $q \geq 0$ , on a*

$$\mathfrak{D}_y^q (P(x, y) + (-1)^{q+1} P(x, a(x) - y)) \in \ker L_A$$

**Preuve.** En appliquant le lemme au polynôme

$$P(x, y) = y^{n+q} (a(x) - y)^{m+q},$$

on obtient la relation (4.6). ■

## 4.4 Applications du théorème 4.3

### 4.4.1 Identités pour les polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

Les suites de polynômes de Bernoulli  $(B_n(x))_{n \geq 0}$ , d'Euler  $(E_n(x))_{n \geq 0}$ , et de Genocchi  $(G_n(x))_{n \geq 0}$  sont définies par leurs séries génératrices exponentielles

$$\sum B_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1} e^{zx}$$

$$\begin{aligned}\sum E_n(x) \frac{z^n}{n!} &= \frac{2}{e^z + 1} e^{zx} \\ \sum G_n(x) \frac{z^n}{n!} &= \frac{2z}{e^z + 1} e^{zx} \\ G_n(x) &= nE_{n-1}(x)\end{aligned}$$

**Corollaire 4.6** Avec  $\lambda_x = 2x - 1$ , on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} \lambda_x^{m+q-k} B_{n+k}(x) + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} \lambda_x^{n+q-k} B_{m+k}(x) &= 0 \\ \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} \lambda_x^{m+q-k} E_{n+k}(x) + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} \lambda_x^{n+q-k} E_{m+k}(x) &= 0\end{aligned}$$

En choisissant  $m = n$  et  $q$  impair dans ces relations, on obtient

**Corollaire 4.7** Pour tous entiers naturels  $m, n$  et  $q$  tel que  $q$  soit impair, on a

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (1-2x)^{n+q-k} B_{n+k}(x) &= 0 \\ \sum_{k=0}^{n+q} \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (1-2x)^{m+q-k} E_{n+k}(x) &= 0\end{aligned}$$

#### 4.4.2 Identités pour les polynômes de Fibonacci et de Lucas

Les polynômes de Fibonacci et de Lucas sont définis par les relations

$$\begin{aligned}U_0 &= 0, U_1 = 1, U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2} \text{ pour } n \geq 2 \\ V_0 &= 2, V_1 = x, V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2} \text{ pour } n \geq 2\end{aligned}$$

On associe à ces polynômes les suites  $(u_n(t))_{n \geq 0}$  et  $(v_n(t))_{n \geq 0}$  définies par

$$\begin{aligned}u_0 &= 0, u_1 = 1, u_n = v_{n-1} + tv_{n-2} \\ v_0 &= 2, v_1 = x, v_n = v_{n-1} + tv_{n-2}.\end{aligned}$$

On a alors

$$U_n(x, y) = x^{n-1} u_n\left(\frac{y}{x^2}\right) \text{ et } V_n(x, y) = x^n v_n\left(\frac{y}{x^2}\right).$$

Avec

$$\alpha = \frac{1 + \sqrt{1 + 4t}}{2} \text{ et } \beta = \frac{1 - \sqrt{1 + 4t}}{2},$$

on a

$$u_n = \frac{1}{\sqrt{1+4t}}(\alpha^n - \beta^n), \quad v_n = \alpha^n + \beta^n$$

Les séries génératrices exponentielles associées aux suites  $\left(\frac{u_{n+1}(t)}{n+1}\right)_{n \geq 0}$  et  $(v_n(t))_{n \geq 0}$  sont

$$S_u(z) = \frac{1}{\sqrt{1+4t}} \left( \frac{e^{\alpha z} - e^{\beta z}}{z} \right)$$

et

$$S_v(z) = e^{\alpha z} + e^{\beta z}.$$

On constate aisément que

$$S_u(z) = e^z S_u(-z)$$

et

$$S_v(z) = e^z S_v(-z)$$

En appliquant le théorème 4.3, on obtient les

**Corollaire 4.8** *Pour tous entiers  $n$ ,  $m$  et  $q$ , on a les identités suivantes*

$$\sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} \frac{u_{n+k+1}}{n+k+1} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} \frac{u_{m+k+1}}{m+k+1} = 0$$

$$\sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} v_{n+k} + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} v_{m+k} = 0$$

**Corollaire 4.9** *Pour tous entiers  $n$ ,  $m$  et  $q$ , on a les identités suivantes*

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} x^{m+q-k} U_{n+k+1} \\ & + \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^{k+q+1} \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q-1} x^{n+q-k} U_{m+k+1} = 0 \\ & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} x^{m+q-k} V_{n+k} \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} x^{n+q-k} V_{m+k} = 0 \end{aligned}$$

### 4.4.3 Identités pour les nombres de Fibonacci, de Lucas, de Jacobsthal et de Jacobsthal-Lucas

On peut encore déduire de nombreuses identités du corollaire précédent.

Les suites de Fibonacci  $(F_n)_{n \geq 0}$ , de Lucas  $(L_n)_{n \geq 0}$ , Pell  $(P_n)_p$ , Pell-Lucas  $(Q_n)_{n \geq 0}$ , Jacobsthal  $(J_n)_{n \geq 0}$ , Jacobsthal-Lucas  $(j_n)_{n \geq 0}$  répertoriées A000045, A00032, A000129, A002203, A001045, A014551 dans l'encyclopédie des suites d'entiers Sloane

$$(F_n, L_n) = (U_n(1, 1), V_n(1, 1))$$

$$(P_n, Q_n) = (U_n(2, 1), V_n(2, 1))$$

$$(J_n, j_n) = (U_n(1, 2), V_n(1, 2))$$

On a

$$(F_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, \dots)$$

$$(L_n)_{n \geq 0} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, 521, \dots)$$

$$(P_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, 169, 408, 985, 2378, 5741, 13860, \dots)$$

$$(Q_n)_{n \geq 0} = (2, 2, 6, 14, 34, 82, 198, 478, 1154, 2786, 6726, 16238, \dots)$$

$$(J_n)_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365, 2731, \dots)$$

$$(j_n)_{n \geq 0} = (2, 1, 5, 7, 17, 31, 65, 127, 257, 511, 1025, 2047, 4097, 8191, \dots)$$

Ainsi, on obtient les identités suivantes

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} F_{n+k+1} \\ + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q-1} F_{m+k+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} L_{n+k} \\ + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} L_{m+k} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} 2^{m+q-k} P_{n+k+1} \\ + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q-1} 2^{n+q-k} P_{m+k+1} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} 2^{m+q-k} Q_{n+k} \\
& \quad + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} 2^{n+q-k} Q_{m+k} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} J_{n+k+1} \\
& \quad + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q-1} J_{m+k+1} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} j_{n+k} \\
& \quad + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} j_{m+k} = 0
\end{aligned}$$

En choisissant  $m = n$  et  $q$  impair, on obtient

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} F_{n+k+1} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} L_{n+k} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} 2^{n+q-k} P_{n+k+1} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} 2^{n+q-k} Q_{n+k} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} J_{n+k+1} = 0 \\
& \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} j_{n+k} = 0
\end{aligned}$$

#### 4.4.4 Identités pour les polynômes de Tchébychev de première et de seconde espèce

On obtient ainsi les identités

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} (2x)^{m+q-k} \mathcal{U}_{n+k}(x) = \\ & (-1)^q \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q-1} (2x)^{n+q-k} \mathcal{U}_{m+k}(x) : \\ & \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (2x)^{m+q-k} \mathcal{T}_{n+k}(x) = \\ & (-1)^q \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} (2x)^{n+q-k} \mathcal{T}_{m+k}(x) : \end{aligned}$$

En choisissant  $m = n$  et  $q$  impair, on obtient

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} (2x)^{n+q-k} \mathcal{U}_{n+k}(x) = 0 \\ & \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (2x)^{n+q-k} \mathcal{T}_{n+k}(x) = 0 \end{aligned}$$

Comme on sait que

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_n(\cos x) &= \cos nx \\ \mathcal{U}_n(\cos x) &= \frac{\sin(n+1)x}{\sin x} \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q-1} (2 \cos x)^{n+q-k} \sin(n+k+1)x = 0 \\ & \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (2 \cos x)^{n+q-k} \cos(n+k)x = 0 \end{aligned}$$

#### 4.4.5 Identité pour les polynômes d'Hermite

La suite des polynômes d'Hermite  $(H_n(x))_{n \geq 0}$  est définie par les relations

$$\begin{aligned} H_0(x) &= 1 \\ H_1(x) &= 2x \\ H_n(x) &= 2xH_{n-1}(x) - 2(n-1)H_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2 \end{aligned}$$

Les premiers polynômes d'Hermite sont

$$\begin{aligned}
 H_0(x) &= 1 \\
 H_1(x) &= 2x \\
 H_2(x) &= 4x^2 - 2 \\
 H_3(x) &= 8x^3 - 12x \\
 H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12 \\
 H_5(x) &= 35x^5 - 160x^3 + 120x
 \end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle de cette suite est

$$S_H(z) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{z^n}{n!} = e^{2zx - z^2}$$

On constate que l'on a, ici aussi :

$$S_H(z) = e^{4xz} S_H(-z),$$

et  $a(x) = 4x$  dans ce cas.

L'application du théorème et du corollaire à cette suite de polynômes fournit les identités suivantes pour tous entiers  $m, n$  et  $q$

$$\begin{aligned}
 &\sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (4x)^{m+q-k} H_{n+k}(x) = \\
 &(-1)^q \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} (4x)^{n+q-k} H_{m+k}(x) \quad :
 \end{aligned}$$

En choisissant  $m = n$ , on obtient pour tout entier  $q$  impair

$$\sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (4x)^{n+q-k} H_{n+k}(x) = 0$$

#### 4.4.6 Identités vérifiées par les polynômes de Stirling

La suite des polynômes de Stirling  $(\sigma_n(x))_{n \geq 0}$  est définie dans l'ouvrage de R. Graham, D. Knuth et O. Patashnick [83] par la relation

$$\left( \frac{ze^z}{e^z - 1} \right)^x = x \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_n(x) z^n.$$

A part  $\sigma_0(x)$  qui n'est pas un polynôme,

$$\sigma_0(x) = \frac{1}{x},$$

on peut prouver que  $\sigma_n(x)$  est bien un polynôme pour  $n \geq 1$ . Il s'agit donc d'un abus de langage pratique quand on parle de cette suite de polynômes en incluant  $\sigma_0(x)$ . Les premières valeurs de ces polynômes de Stirling, pour  $n \geq 1$  sont

$$\begin{aligned}\sigma_1(x) &= \frac{1}{2} \\ \sigma_2(x) &= \frac{3x-1}{24} \\ \sigma_3(x) &= \frac{x^2-x}{48} \\ \sigma_4(x) &= \frac{15x^3-30x^2+5x+2}{5760}.\end{aligned}$$

Posons

$$\mathcal{A}_n(x) = n!x\sigma_n(x),$$

La série génératrice exponentielle  $\mathcal{S}(z)$  de la suite de polynômes  $(\mathcal{A}_n(x))_{n \geq 0}$  vérifie la relation.

$$\mathcal{S}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{A}_n(x) \frac{z^n}{n!} = \left( \frac{ze^z}{e^z-1} \right)^x.$$

On constate que l'on a

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(-z) &= \left( \frac{-ze^{-z}}{e^{-z}-1} \right)^x \\ &= \left( \frac{z}{e^z-1} \right)^x \\ &= \left( \frac{ze^ze^{-z}}{e^z-1} \right)^x \\ &= e^{-zx} \mathcal{S}(z).\end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\mathcal{S}(z) = e^{zx} \mathcal{S}(-z).$$

On peut appliquer le théorème avec  $a(x) = x$ , on obtient ainsi les identités

$$\begin{aligned}& \sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} x^{m+q-k} \mathcal{A}_{n+k}(x) \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} x^{n+q-k} \mathcal{A}_{m+k}(x) = 0,\end{aligned}$$

ce qu'on peut exprimer à l'aide des polynômes de Stirling

$$\sum_{k=0}^{m+q} (-1)^k \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} x^{m+q-k} (n+k)! \sigma_{n+k}(x) \\ + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} x^{n+q-k} (m+k)! \sigma_{m+k}(x) = 0,$$

En choisissant  $m = n$  et  $q$  impair, on obtient

$$\sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} x^{n+q-k} (n+k)! \sigma_{n+k}(x) = 0.$$

#### 4.4.7 Identités vérifiées par les polynômes de Nörlund

Les polynômes de Nörlund  $B_n^{(x)}$  ([123], chapitre 6) et  $b_n^{(x)}$  sont définis par

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(x)} \frac{z^n}{n!} = \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)^x.$$

Pour  $n \geq 1$ ,  $B_n^{(x)}$  est un polynôme de degré  $n$  à coefficients rationnels et de coefficient dominant respectivement égal à  $(-\frac{1}{2})^n$

On trouve par exemple :

$$\begin{aligned} B_0^{(x)} &= 1 \\ B_1^{(x)} &= -\frac{1}{2}x \\ B_2^{(x)} &= \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{12}x \\ B_3^{(x)} &= -\frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^2. \end{aligned}$$

La série génératrice exponentielle  $\mathcal{N}(z) := \left( \frac{z}{e^z - 1} \right)^x$  de la suite de polynômes  $(B_n^{(x)})_{n \geq 0}$  vérifie la relation.

$$\begin{aligned} \mathcal{N}(-z) &= \left( \frac{-z}{e^{-z} - 1} \right)^x \\ &= \left( \frac{ze^z}{e^z - 1} \right)^x \\ &= e^{xz} \mathcal{N}(z). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a

$$\mathcal{N}(z) = \mathcal{N}(-z)e^{-xz}$$

Par application du théorème 4.3 et du corollaire, on obtient

$$S(z) = S(-z)e^{a(x)z}.$$

Alors pour tous entiers naturels  $n$ ,  $m$  et  $q$ , on a l'identité suivante

$$\begin{aligned} & \sum_{k=0}^{m+q} \binom{m+q}{k} \binom{n+q+k}{q} (-x)^{m+q-k} B_{n+k}^{(x)} \\ & + (-1)^{q+1} \sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{m+q+k}{q} (-x)^{n+q-k} B_{m+k}^{(x)} = 0 \end{aligned}$$

en choisissant  $m = n$  et  $q$  impair, on obtient l'identité

$$\sum_{k=0}^{n+q} (-1)^k \binom{n+q}{k} \binom{n+q+k}{q} x^{n+q-k} B_{n+k}^{(x)} = 0.$$

# Chapitre 5

## Calculs effectifs

*Finalemment, nous arrivons au paradis des mathématiciens : ce sont les problèmes qui, à force de réflexion, ont engendré des idées nouvelles qui, souvent, dépassent de façon incommensurable le problème qui leur a donné naissance*

Jean

Dieudonné

*« Les machines un jour pourront résoudre tous les problèmes, mais jamais aucune d'entre elles ne pourra en poser un ! »*

Albert

Einstein

*"Question : How many months have 28 days ?*

Mathematician's answer : All of them.

### 5.1 Introduction

Afin de déterminer les nombres premiers réguliers, en raison de leur importance dans la démonstration (partielle) de Kummer du Théorème de Fermat, plusieurs algorithmes de calcul des nombres de Bernoulli furent mis au point.

Le record actuel établi en 2012 par P. Holoborodko, en utilisant un algorithme de Harvey [89], a permis de calculer  $B_n$  avec  $n = 2.10^8$ .

On peut signaler aussi d'autres motivations nécessitant le calcul effectif de nombres de Bernoulli de très grand indice comme par exemple :

1. la vérification des congruences de Kummer

$$\frac{B_n}{n} \equiv \frac{B_m}{m} \pmod{p}$$

où  $p$  est un nombre premier avec  $n$  et  $m$  et ces derniers sont non divisibles par  $p - 1$ .

2. la conjecture d'Agoh (1990) [4], qui s'énonce

$$n \in P \iff nB_{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$$

3. la conjecture de Giuga (1950) [78], qui est :

$$n \in P \iff S_n := \sum_{k=1}^{n-1} k^{n-1} \equiv -1 \pmod{n}$$

En 2004, Kellner, [104], a démontré l'équivalence des deux conjectures.

4. Calcul des coefficients des développements en séries entières des fonctions usuelles comme :

$$\tan(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |B_{2n}| \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad , |x| < \frac{\pi}{2}$$

$$\tanh(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{2n} \frac{2^{2n}(2^{2n} - 1)}{(2n)!} x^{2n-1} \quad , |x| < \frac{\pi}{2}$$

## 5.2 Les formules classiques

Rappelons la désormais classique :

$$B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad B_0 = 1$$

Cette relation permet donc de calculer  $B_n$  par récurrence mais néanmoins nécessite la connaissance de  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$ , ceci exige donc beaucoup de calculs intermédiaires pour évaluer  $B_0, B_1, \dots, B_{n-1}$  et une grande place-mémoire pour pouvoir les stocker en machine.

Par ailleurs, un très grand nombre d'algorithmes de calcul des nombres de Bernoulli furent mis au point et implantés dans des logiciels de calcul formel comme Maple, Pari, Magma, Mathematica, Sage, Calcbn, ..., etc. ...

Malheureusement, ces logiciels montrèrent très vite leurs limites ; ainsi le calcul du numérateur de  $B_{2000}$ , qui compte 2000 chiffres s'avéra impossible à réaliser. On se mit alors à développer d'autres types d'algorithmes de type "multisectionning" ou utilisant un calcul de la fonction Zéta de Riemann, [82].

Le record actuel établi en 2012 par P. Holoborodko, en utilisant un algorithme de Harvey [89], a permis de calculer  $B_n$  avec  $n = 2.10^8$ .

D'autres formules existent encore, comme par exemple ([81], corollaire 6) :

$$\frac{B_{4n+2}}{8n+4} = \sum_{k \geq 0} \frac{k^{4n+1}}{e^{2k\pi} - 1}$$

ou encore (relation (3.22) du corollaire 3.17) vérifiée pour  $n \geq 1$ )

$$B_n = \sum_{k=1}^n \left( \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \frac{j^n}{k+1} \right).$$

Cependant, toutes ces formules ne permettent pas de calculer les nombres de Bernoulli d'assez grand indice en un temps raisonnable, i.e. moins d'une semaine avec un PC de 2.2Ghz, Core 2.

### 5.3 Utilisation de la Formule de Von Staudt et Clausen.

Ce théorème a été prouvé indépendamment et simultanément (1840) par K.G.C. Von Staudt et T.Clausen en donnant des preuves différentes. Il donne des informations sur la structure des dénominateurs des nombres de Bernoulli [104] et il est également utilisé dans les algorithmes de calcul direct des Nombres de Bernoulli avec un indice très grand

**Théorème 5.1 (VSC)** *Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on a :*

$$B_{2n} + \sum_{p-1|2n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}$$

la sommation se faisant sur tous les nombres premiers divisant  $2n$ .

Pour la preuve de cet important résultat, nous aurons besoin de quelques définitions et aussi de quelques propriétés.

- Définition 5.2**
1. Soit  $p$  un nombre premier et  $z = \frac{x}{y}$  un nombre rationnel. Le rationnel  $z$  est dit  $p$ -entier si  $(p, y) = 1$
  2. Pour  $a, b \in \mathbb{Z}_p$  et  $n \in \mathbb{N}$ , la notation " $a \equiv b \pmod{p^n}$ " signifie que " $(a - b) \in p^n \mathbb{Z}_p$ ".

**Remarque 5.3** *L'ensemble  $\mathbb{Z}_p$  des nombres  $p$ -entiers est un anneau.*

**Proposition 5.4** *Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $p$  un nombre premier, alors :*

1.

$$S_n(p) := \sum_{k=0}^{p-1} k^n = \frac{B_{n+1}(p) - B_{n+1}}{n+1}$$

2.  $pB_n \in \mathbb{Z}_p$ .

$$\frac{S_n(p) - pB_n}{n} \equiv \frac{p}{2} pB_{n-1} \pmod{p}.$$

3. Pour  $p > 3$ , on a :

$$\frac{S_n(p) - pB_n}{n} \equiv \frac{p}{2} pB_{n-1} \pmod{p^2}.$$

### Preuve.

1- D'après la relation 10 du théorème 3.7, on a :

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)x^n$$

d'où :

$$\begin{aligned} (n+1)S_n(p) &= (n+1) \sum_{k=0}^{p-1} k^n = (n+1) \sum_{k=0}^{p-1} (B_{n+1}(k+1) - B_{n+1}(k)) \\ &= B_{n+1}(p) - B_{n+1}(0) \\ &= B_{n+1}(p) - B_{n+1}. \end{aligned}$$

2- En utilisant la relation (4.7), on a :

$$B_{n+1}(p) - B_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+1}{k} p^k B_{n+1-k}$$

d'où :

$$S_n(p) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{k=n} \binom{n+1}{k+1} p^{k+1} B_{n-k} = pB_n + \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{p^k}{k+1} pB_{n-k}$$

Or

$$p^k \geq (1+1)^k \geq k+1,$$

et donc :

$$\frac{p^k}{k+1} \in \mathbb{Z}_p.$$

Une récurrence sur  $n$  montre alors que  $pB_n \in \mathbb{Z}_p$ .

3- On a, d'après la relation (68) :

$$\begin{aligned}
\frac{S_n(p) - pB_n}{n} &= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n}{k} \frac{p^k}{k+1} pB_{n-k} \\
&= \sum_{k=1}^{k=n} \binom{n-1}{k-1} \frac{p^k}{k(k+1)} pB_{n-k} \\
&= \frac{p}{2} pB_{n-1} + p \sum_{k=2}^{k=n} \binom{n-1}{k-1} \frac{p^{k-1}}{k(k+1)} pB_{n-k}
\end{aligned}$$

On remarque que

$$\frac{p^{2-1}}{2.3} = \frac{p}{6} \in \mathbb{Z}_p,$$

et donc que  $\frac{p}{6} \in \mathbb{Z}_p$  si  $p > 3$ .

Pour  $k \geq 3$ , on a évidemment :

$$p^{k-1} \geq (1+1)^{k-1} \geq k+1,$$

d'où :

$$p^{k-2} \geq (1+4)^{k-2} \geq 1+4(k-2) \geq k+1 \text{ pour } p \geq 5.$$

Ainsi pour  $k \geq 3$ , on a :

$$\frac{p^{k-1}}{k(k+1)} = \frac{p^{k-1}}{k+1} - \frac{p^{k-1}}{k} \in \mathbb{Z}_p$$

Ainsi, pour  $p > 3$ ,

$$\frac{p^{k-1}}{k(k+1)} \in p\mathbb{Z}_p.$$

4- Un raisonnement analogue montre que la relation est vérifiée. ■

### 5.3.1 Preuve du Théorème de Von Staudt et Clausen

Soit  $n \in 2\mathbb{N}^*$ , comme  $B_{n-1} = 0$ , d'après la propriété 3) de 2.5.1.2, on a

$$S_n(p) - pB_n \equiv \delta_n^2 p^2 B_1 \equiv 0 \pmod{p}$$

i.e. :

$$S_n(p) \equiv pB_n.$$

a) Si  $p-1$  divise  $n$ , le petit théorème de Fermat donne :

$$S_n(p) = \sum_{r=1}^{r=p-1} r^n \equiv \sum_{r=1}^{r=p-1} 1 \equiv -1 \pmod{p}$$

et donc :

$$pB_n \equiv -1 \pmod{p}$$

i.e. :

$$B_n + \frac{1}{p} \in \mathbb{Z}_p.$$

b) Si  $p - 1$  ne divise pas  $n$ , il existe  $g \in \mathbb{Z}$  tel que

$$g^n \not\equiv 1 \pmod{p}.$$

Comme

$$(g^n - 1)S_n(p) = \sum_{r=1}^{r=p-1} (gr)^n - \sum_{r=1}^{r=p-1} r^n \equiv 0 \pmod{p}$$

ainsi  $p$  divise  $S_n(p)$ , et donc  $B_n \in \mathbb{Z}_p$ .

On en déduit que

$$B_n + \sum_{p-1|n} \left(\frac{1}{p}\right) \in \mathbb{Z}_q,$$

où  $q$  est un nombre premier. Donc :

$$B_n + \sum_{p-1|n} \left(\frac{1}{p}\right) \in \mathbb{Z}.$$

ce qui achève la preuve du théorème de Von Staudt et Clausen.

### 5.3.2 Exemples numériques

$$\begin{aligned} B_1 &= -\frac{1}{2} = 0 - \frac{1}{2}, \\ B_2 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}, \\ B_4 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = -\frac{1}{30}, \\ B_6 &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{7} = \frac{1}{42}, \\ B_8 &= B_4, \\ B_{10} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{11} = \frac{5}{66} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{12} &= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} - \frac{1}{13} = \frac{-691}{2730}, \\
B_{14} &= 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{7}{6}, \\
B_{16} &= -6 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{17} = \frac{-3617}{510}, \\
B_{18} &= -56 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} - \frac{1}{19} = \frac{43867}{798}, \\
B_{20} &= -528 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{11} = \frac{-174611}{510}, \\
B_{22} &= 6193 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{23} = \frac{854513}{138}
\end{aligned}$$

### 5.3.3 Conséquences

Le Théorème de Von Staudt-Clausen montre que :

$$\text{Dénominateur } (B_{2n}) = \prod_{p-1|2n} p.$$

En notant  $B_{2n} = \frac{N_{2n}}{D_{2n}}$ , on sait que  $D_{2n} = \prod p$ , pour  $p$  divisant  $2n$ , d'après le Théorème de Von Staudt et Clausen.

C'est donc surtout le calcul du numérateur qui pose problème, pour peu que la décomposition en facteurs premiers de l'indice  $2n$  soit réalisable en un temps raisonnable.

De plus, comme on le montrera plus loin, il existe beaucoup de résultats permettant de tester la plausibilité des valeurs déterminées numériquement des numérateurs des nombres de Bernoulli.

#### Utilisation de la formule d'Euler :

Euler a montré, en 1755 que

$$|B_{2n}| = \frac{2(2n)!\zeta(2n)}{(2\pi)^{2n}}; \quad B_{2n} = (-1)^{n+1} |B_{2n}|.$$

avec

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^s}, \quad \Re(s) > 1$$

et

$$\zeta(s) = \frac{1}{1-2^{1-s}} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^s}, \quad \Re(s) > 0$$

et

$$\zeta(s) = \prod_{p \in P} (1 - p^{-s})^{-1}$$

On trouvera dans [151],(2004) une démonstration de la formule , ainsi que l'expression :

$$B_{2n} = -2n\zeta(1 - 2n)$$

$$B_{42} = \frac{1520097643918070802691}{1806}, \quad B_{1806} = \frac{2337 \dots 6443}{1806},$$

Dans [21] on utilise le calcul de la valeur numérique de la fonction Zéta. En fait, l'utilisation de la formule de récurrence n'est pas vraiment intéressante puisque les logiciels de calcul formel comme Maple, Mathematica et Pari font appel à des algorithmes basés sur la formule d'Euler-MacLaurin, qui elle-même nécessite le calcul et donc le stockage des nombres de Bernoulli.

Cependant, Borwein [22], 1993 a réussi à construire un algorithme permettant de calculer les valeurs de Zéta, indépendamment des nombres de Bernoulli, voir :

"<http://www.cecm.sfu.ca/personal/pborwein/PAPERS/P155.pdf>".

L'algorithme suivant de J. Mac Gown utilise l'expression en <<produit eulérien>> de la fonction Zéta de Riemann.

### 5.3.4 Algorithme de Kevin J. Mac Gown (25.09.2011)

K.J. Mac Gown [82] propose l'algorithme suivant, où l'entier naturel  $n$  est supposé pair et non nul :

1.  $K := \frac{2n!}{(2\pi)^n}$
2.  $d := \prod_{p-1/n} p$
3.  $N := E(Kd)^{\frac{1}{n-1}} + 1$
4.  $z := \prod_{p \leq N} (1 - p^{-n})^{-1}$
5.  $a := (-1)^{\frac{n}{2}+1} E(dKz)$
6.  $B_n = \frac{a}{d}$

**Remarque 5.5** *L'algorithme ci-dessus utilise la relation entre les nombres de Bernoulli et la fonction Zéta, mais cette dernière est "tronquée" et remplacée par :*

$$z := \prod_{p \leq N} (1 - p^{-n})^{-1} \tag{5.1}$$

et

$$N > (Kd)^{\frac{1}{n-1}}$$

Dans l'étape 3),  $E$  désigne la fonction partie entière.

**Exemple 5.6** On calcule  $B_{50}$ . Notons  $B_{50} = \frac{a}{d}$ .

Les diviseurs de 50 sont : 1, 2, 5, 10, 25, 50. Les  $p$  tels que " $p-1$ " divise 50, sont : 2, 3, 11, d'où  $d = 66$ .

On a :

$$\begin{aligned} K &= \frac{2 \cdot 50!}{(2\pi)^{50}} \\ &= 7.5008667460769577047477367155247316456403804367598821630882902193 * 10^{24} \end{aligned}$$

On trouve :

$$\begin{aligned} M &= E((Kd)^{\frac{1}{49}}) \\ &= 3.505814116481482479651891169875058408262438021025201227861086024842269 \end{aligned}$$

D'où :  $M = 4$ .

Calcul de

$$14230808979603434478967634367612193830747839065247880751037959312625$$

On prend  $z = 1$ , d'où

$$dKz = 7.500866699 * 10^{24} * 66 = 495057205241079648212477524.9999999994425778$$

d'où

$$B_{50} = \frac{495057205241079648212477525}{66}$$

**Exemple 5.7** A titre d'exemple, nous illustrons numériquement ce résultat original de Kellner [104], obtenu en Avril 2002 :

$$Den(B_n) = n \iff n = 1806 \tag{5.2}$$

Remarquons qu'on a aussi :

$$Den(B_{42}) = 1806.$$

Maple 17 affiche :

$$B_{42} = \frac{1520097643918070802691}{1806} \tag{5.3}$$

et

$$B_{1806} = \frac{23377025552416693374 \dots [\dots 3462 \text{ digits } \dots] 5326372710 \dots 443}{1806}$$

# Conclusion

*"Je ne sais ce que j'ai pu paraître aux yeux du monde, mais à mes yeux, il me semble que je n'ai jamais été qu'un enfant jouant sur une plage, heureux de trouver de temps à autre, un galet plus lisse ou un coquillage plus beau que les autres, alors que s'étendait devant moi, totalement inconnu, l'immense océan de la vérité, encore inexploré".*

Sir Isaac Newton

Cette étude nous a permis de faire un survol sur l'origine des nombres de Bernoulli, leurs utilités, leurs propriétés et leur importance en mathématiques. Cependant, si cette suite de nombres a permis de clarifier, d'unifier certaines situations, de nombreuses questions restent en suspens. Le grand théorème de Fermat a pu être prouvé par Wiles, mais la recherche d'une autre preuve en continuité avec les recherches entreprises sur ce théorème depuis de plusieurs décennies demeure encore un problème d'actualité. On dit qu'une meilleure connaissance des propriétés arithmétiques des nombres de Bernoulli pourrait conduire à une telle preuve. Les nombres de Bernoulli n'ont pas livré tous leurs secrets. Ils demeurent très mystérieux, et cela malgré le nombre considérable d'articles qui leur sont consacrés.

Enfin pour conclure d'un point de vue pédagogique, la préface d'André Amar, professeur à l'institut d'études politiques de Paris, de l'ouvrage de Peter Wolff [158]

*"...Au contraire, l'enseignement scientifique présente toujours un "état de la question", une "mise à jour" qui apporte les résultats sous une forme achevée, mais sans jamais recourir à la pensée même des grands créateurs. L'élève reçoit en classe un plat tout préparé. En quelques séances, il assimile les limites, les dérivées, les différentielles. Il croit comprendre parce qu'il reproduit un raisonnement et qu'il calcule correctement. Mais il ne sait pas que ces notions simples et évidentes en apparence ont demandé de longues et tenaces élaborations. Il se contente de consommer un produit fini. Rares sont les esprits exigeants qui demandent pourquoi, comment on en est venu à penser la limite, pourquoi on a un beau jour décidé de couper quatre droites par une cinquième et de calculer les proportions des segments, pourquoi on a pensé à cela plutôt qu'à autre chose.*

*Mais, me dira t-on, votre élève réclame une histoire des mathématiques. Ce n'est pas avec de l'histoire des sciences que l'on forme des ingénieurs ou des chercheurs. L'Histoire, même celle des sciences, c'est de la littérature et, au mieux, de la philosophie.*

*Bien sûr, l'enseignement scientifique n'a que faire de l'Histoire. Il lui suffit de pousser en avant les résultats acquis et d'en chercher de nouveaux. Mais un esprit profond ne se contente pas d'une vérité même démontrée. Il veut aller au-delà et voir quelle place elle occupe dans la généalogie d'une pensée plus ample. L'histoire des sciences n'est faite ni d'anecdotes, comme le bain d'Archimède ou la pomme de Newton, ni d'inventaire de découvertes. Elle suit la trace d'une seule et même pensée qui évolue justement parce qu'elle reste vivante ; et cette vie de la pensée, où la rencontrer, sinon dans les écrits mêmes de ceux qui l'ont fait naître ? Les textes choisis par Peter Wolff ont pour objet non point de nous transmettre des connaissances, mais de nous introduire dans l'intimité des grands penseurs. Ce contact direct avec l'oeuvre originale, qu'elle soit poétique ou mathématique, porte l'un des plus beaux noms qui soit : il s'appelle l'humanisme...."*

# Annexe 1 : Quelques commandes MAPLE

On trouvera dans cette annexe quelques commandes MAPLE qui nous ont été utiles pour vérifier les relations données dans ce mémoire.

## Calcul des nombres de Bernoulli :

> *seq*(bernoulli(*i*), *i* = 0..20);

$1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{1}{42}, 0, -\frac{1}{30}, 0, \frac{5}{66}, 0, -\frac{691}{2730}, 0, \frac{7}{6}, 0, -\frac{3617}{510}, 0, \frac{43867}{798}, 0, -\frac{174611}{330}$ .

## Calcul des nombres d'Euler :

> *seq*(euler(*i*), *i* = 0..16);

$1, 0, -1, 0, 5, 0, -61, 0, 1385, 0, -50521, 0, 2702765, 0, -199360981, 0, 19391512145$ .

## Calcul du *n*-ième polynôme de Bernoulli :

> *sort*(bernoulli(10, *x*), *x*);

$x^{10} - 5x^9 + \frac{15}{2}x^8 - 7x^6 + 5x^4 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{5}{66}$ .

## Calcul du *n*-ième polynôme d'Euler :

> *sort*(euler(10, *x*), *x*);

$x^{10} - 5x^9 + 30x^7 - 126x^5 + 255x^3 - 155x$ .

## Calcul du numérateur d'un nombre rationnel :

> *numer*( $-\frac{4}{6}$ );

-2

## Calcul du dénominateur d'un nombre rationnel :

> *denom*( $-\frac{4}{6}$ );

3

## Annexe 2 : Auteurs cités

APPELL Paul Émile (1855-1930), mathématicien français.

BERNOULLI Jacques (1654-1705), mathématicien et physicien suisse.

BERNOULLI Daniel (1700-1782) médecin, physicien et mathématicien suisse, neveu de Jacques Bernoulli.

CLAUSEN Thomas (1801-1885), mathématicien et astronome danois.

EULER Leonhard (1707-1783), mathématicien suisse.

FAULHABER Johann (1580-1635), mathématicien allemand.

FERMAT Pierre de (1601-1665), mathématicien français.

IBN AL-HAYHAM (965-1039), mathématicien, philosophe et physicien irakien.

JOYAL André, mathématicien québécois né en 1943.

KUMMER Ernst (1810-1893), mathématicien allemand.

LEHMER Emma Markovna née Trotskaia (1906-2007), américaine d'origine russe.

LEHMER Derrick Henry (1905-1991), mathématicien américain, conjoint d'Emma Lehmer.

LUCAS, François Édouard Anatole (1842-1891), mathématicien français.

NIELSEN, Niels (1865-1931), mathématicien danois.

NÖRLUND Niels (1885-1981), mathématicien danois.

RAABE Joseph Ludwig (1801-1859), mathématicien suisse.

von STAUDT, Karl Georg Christian (1798-1867), mathématicien allemand.

WIEFERICH Arthur Joseph Alwin (1884-1954), mathématicien allemand.

WILES Andrew né le 11 avril 1953, mathématicien britannique, professeur à l'université de Princeton, États-Unis.

# Bibliographie

- [1] Abramowitz M, Stegun I. (1972). Handbook of mathematical functions, with formulas, graphs and mathematical tables, Dover Publications.
- [2] Adelberg, Arnold. (1995). A finite difference approach to degenerate Bernoulli and Stirling polynomials, Discrete Mathematics 140,1-21.
- [3] Agratini, O. (2000) : Binomial polynomials and their applications in approximation theory Babes-Bolyai University.FMCS.Romania.
- [4] Agoh, T. (1995). On Giuga's Conjecture. Manuscripta Math., 87, no. 4.
- [5] Agoh, T., & Dilcher, K. (2007). Convolution identities and lacunary recurrences for Bernoulli numbers. Journal of Number Theory, 124(1), 105-122.
- [6] Aigner, M., & Ziegler, G. M. (2006). Proofs from the book. The Australian Mathematical Society, 127.
- [7] Allouche. J-P. (2010). Somme de séries de nombres réels. Images des Mathématiques, CNRS,  
[http://images.math.cnrs.fr/Sommes de séries de nombres réels.html](http://images.math.cnrs.fr/Sommes_de_séries_de_nombres_réels.html). <hal-00599367>
- [8] Amo, E. de, Carrillo D. M. , and Fernandez-Sanchez J., Another proof of Euler's formula for  $\zeta(2k)$ , Proc. Amer. Math. Soc. 139 (2011) 1441–1444.
- [9] Apostol, T.M. (1973). Another elementary proof of Euler's formula for  $\zeta(2n)$ , American Mathematical Monthly, 80 425–431.
- [10] Apostol Tom M. (2008). A primer on Bernoulli Numbers and Polynomials.Mathematics Magazine, Vol. 81, No. 3, pp. 178-190.MAA.
- [11] Appell P. E. (1882). Sur une classe de polynômes. Annales de l'école normale supérieure, s. 2, 9.
- [12] Ayad Mohamed. (2008). Sums of equal powers of successive integers. Ann. Sci. Math. Québec, 31(2) :111-126, 2007.
- [13] Bazsó, A., Pintér, Á., & Srivastava, H. M. (2012). A refinement of Faulhaber's theorem concerning sums of powers of natural numbers. Applied Mathematics Letters, 25(3), 486-489.

- [14] Beardon, A. F. (1996). Sums of powers of integers. *American Mathematical Monthly*, 201-213.
- [15] Beery, J. (2009). Sums of Powers of Positive Integers. *Loci : Convergence*, Mathematical Association of America, Mathematical Sciences Digital Library, April, 2009. *Online at [www.maa.org/publications/periodicals/convergence](http://www.maa.org/publications/periodicals/convergence)*.
- [16] Belbahri Mostefa Kamel (1988) : Opérateurs finis . O.P.U. Alger.
- [17] Bencherif, F., & Garici, T. (2012) : Suites de Cesàro et nombres de Bernoulli. *Publ. Math. Besançon ; Algèbr. Théor. Nr*, (1), 19-26.
- [18] Benchérif, T. Garici. 2013. Sur une propriété des Polynômes de Stirling. Preprint.
- [19] Bernoulli, Jakob. (1713). *Ars conjectandi*. Impensis Thurnisiorum, fratrum, Bâle.
- [20] Bisson, G., & Zagier, D. (2006) : Autour des nombres et des polynômes de Bernoulli, normalesup.org. disponible sur <http://gaati.org/bisson/tea/bernoulli.pdf>
- [21] Bober Jonathan & Hiary Ghaith, "New computations of the Riemann zeta function" , <http://sage.math.washington.edu/home/bober/www/msri-zeta-computations-talk.pdf>
- [22] Borevitch Z.I. et Chafarevitch I. R. (1967). *Théorie des nombres*. MIMM.Gauthiers-Villars.Paris.
- [23] Borwein J. M., Bradley D.M., Crandall R. E. (2000) Computational strategies for the Riemann zeta function. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 121, 247-296.
- [24] Borwein, D. ; Borwein, J. M. ; Borwein, P. B. ; and Girgensohn. (1996). R. "Giuga's Conjecture on Primality." *Amer. Math. Monthly* 103, 40-50,
- [25] Boualem, H. & Brouzet, R.(2002). *La Planète R—Voyage au Pays des Nombres Réels*. Dunod, Paris.
- [26] Boyer C.B. (1943). Pascal's formula for the sums of the powers of the integers, *Ser. Math*, 9, 237-344.
- [27] Bretti, G., Natalini, P., & Ricci, P. E. (2004). Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. In *Abstract and Applied Analysis* (Vol. 2004, No. 7, pp. 613-623). Hindawi Publishing Corporation.
- [28] Caley, T. S. (2007). A review of the von Staudt-Clausen theorem. In *Masters Abstracts International* (Vol. 45, No. 05).
- [29] Carlitz, L. (1948).  $q$ -Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Mathematical Journal*, 15(4), 987-1000.
- [30] Carlitz, L. (1952). Remark on a formula for the Bernoulli numbers.
- [31] Carlitz L. (1958), Bernoulli Numbers, *Fibonacci Quart.* 6, 71-85.
- [32] Carlitz, L. (1961). The Staudt-Clausen theorem. *Mathematics Magazine*, 131-146.
- [33] Carlitz, L. (1971). Problem 795. *Math. Mag*, 44, 107.

- [34] Carlitz, L. (1980). A Characterization of the Bernoulli and Euler Polynomials, *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*. Vol 62.
- [35] Carlson, B., C. (1970). Polynomials satisfying a binomial theorem. *Journ. Math. Anal. and Appl.* 32, 543-558.
- [36] Ciaurri, Ó., Navas, L. M., Ruiz, F. J., & Varona, J. L. (2012). A simple computation of zeta (2k) by using Bernoulli polynomials and a telescoping series. arXiv preprint arXiv :1209.5030.
- [37] Chang C.H. and Ha C.W. (2006). On identities involving Bernoulli and Euler polynomials, *Fibonacci Quart.* 44, n°1, 39-45.
- [38] Charpentier, E., & Nikolski, N. K. (Eds.). (2000). *Leçons de mathématiques d'aujourd'hui*. Cassini.
- [39] Charalambides. C. A. (2002). *Enumerative combinatorics*, Chapman & Hall/CRC.
- [40] Chellali M. Accélération du calcul des nombres de Bernoulli. *Journal of number theory*. V28, N3. 1988, 347-362.
- [41] Chen, W. Y., Fu, A. M., & Zhang, I. F. (2006). Faulhaber's Theorem for Arithmetic Progressions. 2006-10-12]. <http://arxiv.org/ps-cache/math/pdf/0606/0606090v1.pdf>.
- [42] Chen, K. W. (2007). Identities from the binomial transform. *Journal of Number Theory*, 124(1), 142-150.
- [43] Chen, W. Y., Fu, A. M., & Zhang, I. F. (2009). Faulhaber's theorem on power sums. *Discrete Mathematics*, 309(10), 2974-2981.
- [44] Chen W.Y.C. , Sun L.H. (2009). Extended Zeilberger's Algorithm for Identities on Bernoulli and Euler Polynomials, *J. Number Theory* 129, 2111-2132.
- [45] Cigler J. (2009). q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers. arXiv :90908.121v3 [math.CO].
- [46] Cigler J. (2011). Fibonacci polynomials, generalized Stirling numbers, and Bernoulli, Genocchi and tangent numbers, arXiv :1103.2610v1 [math.CO]
- [47] Clausen T. (1840) Lehrsatz aus einer Abhandlung über die Bernoullischen Zahlen, *Astr. Nach.*, 17, 351-352.
- [48] Cohen H., *Number Theory, Volume II* : (2007). Analytic and Modern tools. Springer.
- [49] Comtet (L.). 1970. – *Analyse Combinatoire*. – PUF, Paris. 2 volumes
- [50] Comtet L, (1974). *Advanced Combinatorics. The Art of Finite and Infinite Expansions*, Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland/Boston-U.S.
- [51] Coppo, M. A. (2009). Une histoire des séries infinies d'Oresme à Euler, *Gazette des Mathématiciens* 120, 39-52.
- [52] Darmon, H., & Levesque, C. (1996). Sommes infinies, équations diophantiennes et le dernier théorème de Fermat. *Gazette Sc. Math. Québec*, 18, 3-26.

- [53] Dattoli, G., Cesarano, C., & Lorenzutta, S. (2000). Bernoulli numbers and polynomials from a more general point of view. Ente per le nuove tecnologie, l'energia e l'ambiente, Serie Innovazione, Rome (Italy).
- [54] Dattoli G., Cesarano C., Lorenzutta S. (2002). Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 22, Roma, 193-202.
- [55] Bretti, G., & Ricci, P. E. (2004). Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell Polynomials. Taiwanese Journal of Mathematics, 8(3), pp-415.
- [56] Dattoli, G., Migliorati, M., & Srivastava, H. M. (2007). Sheffer polynomials, monomiality principle, algebraic methods and the theory of classical polynomials. Mathematical and computer modelling, 45(9), 1033-1041.
- [57] Bretti, G., & Ricci, P. E. (2004). Multidimensional extensions of the Bernoulli and Appell Polynomials. Taiwanese Journal of Mathematics, 8(3), pp-415.
- [58] De presle, (1886) Détermination des nombres de Bernoulli, Bulletin de la S. M. F., tome 14, p100-103.
- [59] Décaillot, A. M. (1998). L'arithméticien Édouard Lucas (1842–1891) : théorie et instrumentation. Revue d'histoire des mathématiques, 4(2), 191-236.
- [60] Décaillot, A. M. (1999). Edouard Lucas (1842-1891) : le parcours original d'un scientifique français dans la deuxième moitié du XIXè siècle, Thèse de l'Université René Descartes-Paris V.
- [61] Dere, R., & Simsek, Y. (2011). Genocchi polynomials associated with the Umbral algebra. Applied Mathematics and Computation, 218(3), 756-761.
- [62] Dilcher K., Skula L., and Slavutskii I.S. Bernoulli Numbers. Bibliography (1713(1990). Queen's Papers in Pure and Applied Mathematics, 87. Queen's University, Kingston, ON, 1991.iv+175 pp.
- [63] Dilcher K., A Bibliography of Bernoulli Numbers, <http://www.mscs.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html>.
- [64] Dilcher K. and Slavutskii Sh. <http://www.mathstat.dal.ca/~dilcher/bernoulli.html>.
- [65] Dwilewicz, R. J., & Minác, J. (2009). Values of the Riemann zeta function at integers. Materials Math., (6), 26 pp.
- [66] Dzhumadil'daev Askar and Yeliussizov Damir, "Power Sums of Binomial Coefficients", Journal of Integer Sequences, Vol. 16 (2013), Article 13.1.4
- [67] Edwards, A. W. F. (1982). Sums of powers of integers : a little of the history. The Mathematical Gazette, 22-28.
- [68] Euler L., Methodus generalis summandi progressionis, Comment. acad. sci. Petrop., 6 (1738).

- [69] Eulero, Leonardo Institutiones calculi differentialis cum ejus usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, Impensis academiae imperialis scientiarum Petropolitanae, 1755. Also, another edition, Ticini : in typographeo Petri Galeatii superiorum permissu, 1787. (Opera Omnis Ser. I (Opera Math.), Vol. X, Teubner, 1913). Online at <http://www.math.dartmouth.edu/~euler/pages/E212.html> .
- [70] Eittingshausen von, A. (1827). Vorlesungen über die höhere Mathematik, Bd. 1, Vienna : Carl Gerold.(1827).
- [71] Eymard, P., & Lafon, J. P. (1999). Autour du nombre  $\pi$  (Vol. 1443). Hermann.
- [72] Faulhaber, Johannes. Academia Algebrae, darinnen die miraculosische Inventiones, zu den höchsten Cossen weiters continuirt und profitiert werden. Ulm,1631
- [73] Fee G., Plouffe S., An efficient algorithm for the computation of Bernoulli numbers
- [74] Fekih-Ahmed L. (2012). On some explicit formulas for Bernoulli numbers and polynomials. arXiv preprint arXiv :1106.5247v2.
- [75] Fillebrown Sandra. (1992). Faster Computation of Bernoulli Numbers. Journal of algorithms, 431-445.
- [76] Garabedian,H. L.,(1940) A new formula for the Bernoulli numbers, Bull. Amer. Math. Soc. 46. 531–533.
- [77] I. M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus, Algebra Universalis 49 (2003) 397-434, dedicated to the memory of Gian-Carlo Rota.
- [78] Giuga G. Su una presumibile proprieta caratteristica dei numeri primi, Ist. Lombardo Sci. Lett. Rend. Cl. Sci. Mat. Nat. 83 (1950), 511-528.
- [79] Gould HW. Explicit formulas for Bernoulli numbers. Amer Math Monthly 1972 ;79 :44–51.
- [80] Gould, H. W., & Quaintance, J. (2014). Bernoulli numbers and a new binomial transform identity. Journal of Integer Sequences, 17(2), 3.
- [81] Gourdon X., Sebah P. (2002). Introduction to Bernoulli Numbers  
<http://numbers.computation.free.fr/Constants/Miscellaneous/bernoulli.html>.
- [82] Gown Mc K.J. Computing Bernoulli Numbers Quickly, 2005. <http://modular.math.washington.edu/projects/168/kevin/bernproj.pdf>.
- [83] Graham L. , Knuth D. E., Patashnik O. (1994). Concrete Mathematics. Addison-Wesley Publishing Company.
- [84] Granville, A., & Sun, Z. W. (1996). Values of Bernoulli polynomials. Pacific Journal of Mathematics, 172(1), 117-137.
- [85] Guo B-N. Qi F. (2014).A new explicit formula for Bernoulli and Genocchi numbers in terms of Stirling numbers, arXiv :1407.7726v1. [math.NT]
- [86] Guo B-N. Qi F. (2014). Alternative proofs of a formula for Bernoulli numbers in terms of Stirling numbers, arXiv :1401.4257v2 [math.NT].

- [87] Guo B-N. Qi F. (2014). Explicit formulae for computing Euler polynomials in terms of Stirling numbers of the second kind, arXiv :1310.5921v2 [math.CA]
- [88] Hardy G-H, Wright- E-M, An Introduction to the Theory of Numbers, Oxford University Press, 1979.
- [89] Hardy G-H, Wright- E-M, (2007). Introduction à la théorie des nombres, traduction de François Sauvageot , Introduction de Catherine Goldstein,, Vuibert.Spinger.
- [90] Harvey D. A subquadratic algorithm for computing Bernoulli Numbers. <http://arxiv.org/abs/1209.0533.2012>
- [91] Harvey D. (2010). A multimodular algorithm for computing Bernoulli numbers, Math. Comp. 79, no. 272, 2361–2370. MR 2684369.
- [92] Harvey D. (2012)Old and new algorithms for computing Bernoulli:numbers. <http://web.maths.unsw.edu.au/~davidharvey/talks/bernoulli.pdf>.
- [93] He, M. X., & Ricci, P. E. (2002). Differential equation of Appell polynomials via the factorization method. Journal of computational and applied mathematics, 139(2), 231-237.
- [94] Hellegouarch, Y. (1997). Invitation aux mathématiques de Fermat-Wiles. Enseignement des Mathématiques.
- [95] Higgins J. (1970). Double series for the Bernoulli and Euler numbers, J. London Math. Soc. 2nd Ser. 2, 722–726.  
Available online at [http://dx.doi.org/10.1112/jlms/2.Part\\_4.722.2](http://dx.doi.org/10.1112/jlms/2.Part_4.722.2)
- [96] Howard, F. T. (1995). Applications of a recurrence for the Bernoulli numbers. Journal of Number Theory, 52(1), 157-172.
- [97] Ireland K. and Rosen M. A Classical Introduction to Modern Number Theory, volume 84 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, 1990.
- [98] Jacobi C. G. J. (1834), De usu legitimo formulae summatoriae Maclauriniana, J. reine Angew. Math. 12, 263–272.
- [99] Janjic M. (2008). On a non-combinatorial definition of Stirling numbers arXiv :0806.2366v1 [math.CO].
- [100] Jensen, K.L.(1915), “Om talteoretiske Egenskaber ved de Bernoulliske Tal”, yt Tidsskrift for Matematik 26, 73-83.
- [101] Jolany H., Eizadi Alikelaye R. and Sharif Mohamad S. (2011). Some results on the generalization of Bernoulli, Euler and Genocchi polynomials, Acta Univ. Apulensis Math. Inform. (2011), no. 27, 299–306
- [102] Joyal, A.(2003). Les nombres de Bernoulli, pour le camp math. [uqam.ca/deJoyal/bernoulli.pdf](http://uqam.ca/deJoyal/bernoulli.pdf)
- [103] Kaneko, M. (1995). A recurrence formula for the Bernoulli numbers, Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. 71 (8).

- [104] Kellner, B. C. : ber irregulre Paare hherer Ordnungen. Diplomarbeit. Gttingen, Germany : Mathematischen Institut der Georg August Universitt zu Gttingen, 2002. <http://www.bernoulli.org/bk/irrpairord.pdf>.
- [105] Kellner B.C. Calcbn. A program for calculating Bernoulli numbers. <http://www.bernoulli.org/> 2003.
- [106] Kim, T., Jang, L. C., & Pak, H. K. (2001). A note on q-Euler and Genocchi numbers. Proceedings of the Japan Academy. Series A Mathematical sciences, 77(8), 139-141.
- [107] Kim, T. Note on the Euler Numbers and Polynomials, arXiv :0808.1829v1 [math.NT].
- [108] Knuth, D. E. (1992). Two notes on notation, Amer. Math. Monthly 99 (1992), no. 5, 403–422. arXiv :math/9205211v1 [math.HO]
- [109] Knuth D.(1993). Johann Faulhaber and sums of powers, Math. Comput., vol. 61, no. 203, pp. 277–294.
- [110] Kummer E., Beweis des Fermatschen Satzes der Unmglichkeit von  $x^\lambda + y^\lambda = z^\lambda$  fr eine unendliche Anzahl Primzahlen I. (1847).
- [111] Lehmer D. H. (1988) A new approach to Bernoulli Polynomials. The American Mathematical monthly.Vol. 95, N° 10. 905-911.
- [112] Lehmer E. (1938). On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson, Ann. of Math., 39, 350-360.
- [113] Lorenzutta, G. Dattoli, C. Cesarano, S. Bernoulli numbers and polynomials from a more general point of view.
- [114] Lucas, Edouard. (1891). Thrie des nombres. Vol. 1. Gauthier-Villars. (nouveau tirage, Librairie Scientifique et Technique Albert Blanchard, Paris, 1958).
- [115] Mamedov, B. A., & Ekenoğlu, A. S. (2008). On the evaluation of Bernoulli numbers using binomial coefficients. Journal of Quantitative Spectroscopy and Radiative Transfer, 109(3), 527-530.
- [116] B. Mazur, Bernoulli numbers and the unity of mathematics, [http://wstein.org/wiki/attachments/2008\(2f\)480a/Bernoulli.pdf](http://wstein.org/wiki/attachments/2008(2f)480a/Bernoulli.pdf)
- [117] de Moivre, A. Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis. London. 1730.
- [118] Momiyama, H. (2001). A new recurrence formula for Bernoulli numbers, Fibonacci Quart. 39(3), 285-288.
- [119] Natalini, P., & Bernardini, A. (2003). A generalization of the Bernoulli polynomials. Journal of Applied Mathematics, 2003(3), 155-163.
- [120] Natalini, P., & Ricci, P. E. (2006). Laguerre-type Bell polynomials. International journal of mathematics and mathematical sciences, 2006.
- [121] Nielsen, Handuch der Theorie der Gammafunktion (Leipzig, 1906, 326S)
- [122] Nielsen, N. (1923). Trait élémentaire des nombres de Bernoulli, Gauthier-villars et Cie.

- [123] Nörlund, N.E. (1924). Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer, Berlin ; Reprinted by Chelsea Publishing Company, New York, (1954)
- [124] d'Ocagne, M. (1887). Sur une classe de nombres remarquables. American journal of Mathematics, 353-380.
- [125] Osler T. J. :d Finding  $\zeta(2p)$  from a product of sines,A.M. Monthly 111 (2004) 52–54.
- [126] Prasolov, Victor V. (2009). Polynomials .(Algorithms and Computation in Mathematics). Springer.
- [127] Prodinger, H. (2009). On the expansion of Fibonacci and Lucas polynomials. Journal of Integer Sequences, 12(2), 3.
- [128] Prodinger, H. (2014). A Short Proof of Carlitz's Bernoulli Number Identity. Journal of Integer Sequences, 17(2), 3.
- [129] Qi F.(2014). An explicit formula for computing Bernoulli numbers of the second kind in terms of Stirling numbers of the first kind, arXiv :1401.4934v1 [math.NT]
- [130] Qi F.(2014). An explicit formula for Bernoulli numbers in terms of Stirling numbers of the second kind, arXiv :1401.4255v1 [math.NT]
- [131] Qi F.(2014). Explicit formulas for computing Bernoulli numbers of the second kind and Stirling numbers of the first ,arXiv :1301.6845 [math.CO]
- [132] Raabe J.L. . Zuruckfuhrung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob Bernoullische Function, Journal fur die reine and angew. math., 42. (1851), 348–376.
- [133] Ramanujan S. (1911). Some properties of Bernoulli's numbers, J. Indian Math. Soc. 3, 219–234.
- [134] Rim, S., Kim, T., & Ryoo, C. S. (2006). On the alternating sums of powers of consecutive  $q$ -integers. Bulletin-Korean Mathematical Society, 43(3), 611.
- [135] Rota, G.-C., Kahaner, D., and Odlyzko, A. (1973). On the Foundations of Combinatorial Theory VIII : Finite operator calculus, J. Math. Anal. Appl. 42, 684-760.
- [136] Robert, A. (2000). A course in  $p$ -adic analysis (Vol. 198). Springer.
- [137] Roman S. (1980). The formula of Faà di Bruno, Amer. Math. Monthly 87, 805-09.
- [138] Rzadkowski, G. (2004). A short proof of the explicit formula for Bernoulli Numbers.Amer.Math.Monthly.111, 433-435.
- [139] Saalschütz L. (1893). Vorlesungen über die die Bernoullischen zahlen, ihren zusammenhang mit den secanten-coefficienten und ihre wichtigeren anwendungen, Springer, (1893).
- [140] Schur I., Ueber eine Klasse von endlichen Gruppen Linearer Substi Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. (1905), 77-91. ( =Ges. Abh., pp. 128-142, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1973).

- [141] Seidel L. (1877). Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen. Munch. Akad. Wiss. Math. Phys. Cl. Sitzungsber.4, 157-187.
- [142] Shannon, A. G. (1972). Solution of Problem 795. Math. Mag, 45, 55-56.
- [143] Sloane N.J.A. The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences. <http://www.research.att.com/jas/sequences/>.
- [144] Sloane N.J.A. and S. Plouffe S., The Encyclopedia of Integer Sequences, Academic Press, San Diego, 1995
- [145] Srivastava, H. M. (1988). Some explicit formulas for the Bernoulli and Euler numbers and polynomials. International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 19(1), 79-82.
- [146] Staudt, K. G. C. von. (1840). Beweis eines Lehrsatzes, die Bernoullischen Zahlen betreffend. J. reine angew. Math. 21, 372-374.
- [147] Stein W., Computing Bernoulli Numbers. 2006. <http://modular.math.washington.edu/talks/bernoulli/current.pdf>.
- [148] Taekyun, K. I. M. (2006). A note on q-Bernoulli numbers and polynomials. Journal of Nonlinear Mathematical Physics, 315.
- [149] Tenenbaum, G. Introduction à la théorie analytique et probabiliste des nombres, Institut Elie Cartan (1990).
- [150] Trignan, J. (1994). Fractions Continues. Editions du Choix, Argenteuil. 208
- [151] Tsumura H. (2004). An elementary proof of Euler's formula for  $\zeta(2n)$ , Amer. Math. Monthly, 111(5).430-431
- [152] Tuenter, H. J. (2001). A symmetry of power sum polynomials and Bernoulli numbers. Amer. Math. Monthly, 108, 258-261.
- [153] Tuenter, H. J. (2006). The Frobenius problem, sums of powers of integers, and recurrences for the Bernoulli numbers. Journal of Number Theory, 117(2), 376-386.
- [154] Vassilev, P., & Vassilev-Missana, M. (2005). On one remarkable identity involving Bernoulli numbers. Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, 11, 22-24.
- [155] Whitty, R. (2014). Some Comments on Multiple Discovery in Mathematics. arXiv preprint arXiv:1412.3718.
- [156] Williams G. T. (1953). A new method of evaluating  $\zeta(2n)$ , Amer. Math. Monthly 60 (1953) 19-25.
- [157] Wimmer-Zagier, S., & Zagier, D. (2013). Some Questions and Observations Around the Mathematics of Seki Takakazu. In Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan (pp. 275-297). Springer Japan.
- [158] Wolff, P. (1950). La grande aventure des mathématiques. éd. Planète.

- [159] Worpitzky J. (1883). Studien uber die Bernoullischen und Eulerschen Zahlen, *J. Reine Angew. Math.*, vol. 94, pp. 203-232.
- [160] Wu K.-J., Sun Z.-W. and Pan H. (2004). Some identities for Bernoulli and Euler polynomials, *Fibonacci Quat.*42, 295-299.
- [161] Zagier, D. (1994, January). Values of zeta functions and their applications. In *First European Congress of Mathematics*. Paris, July 6–10, 1992 (pp. 497-512). Birkhäuser Basel.
- [162] Zékiri A. Garici T. Bencherif F.(2015). Courte preuve d’une identité concernant les nombres de Bernoulli, ArXiv.
- [163] Zékiri A. Bencherif F.(2015). Factorisations complexes des nombres de Fibonacci et de Lucas, préprint.
- [164] Zékiri A. Bencherif F. Garici T. (2015). Généralisation d’une identité pour les polynômes de Bernoulli, préprint.
- [165] Zékiri A. Bencherif F. (2015). Formules explicites pour les nombres de Bernoulli, préprint.
- [166] Zékiri A. Bencherif F. Garici T. (2015), Identités combinatoires pour certaines suites de polynômes et de nombres remarquables, préprint.
- [167] Zékiri A. Bencherif F. (2015). On some properties of Norlund’s Polynomials, préprint.
- [168] Zékiri A. et Bencherif F. (2011), A new recursion relationship for Bernoulli Numbers, *Annales Mathematicae et Informaticae* 38, pp. 123–126. <http://ami.ektf.hu>.
- [169] Zékiri A. (2014). On some properties of Norlund’s Polynomials. Communication .Congrès SMA, 11 & 12 Mai 2014 . Université de Tlemcen.
- [170] Zékiri A. (2014), On complex factorizations of the Fibonacci and Lucas numbers", » in *Conference in Number Theory and Discrete Mathematics*, from August 7th to August 8th, 2014. Brock University .Sainte-Catharines,Ontario, Canada.
- [171] Zékiri , (2013). Sur de remarquables propriétés des polynômes de Nörlund *Journées Mathématiques et Applications de Mila* 19-20-21 Octobre 2013 .
- [172] Zékiri A, (2012) «A new recursion relationship for Bernoulli Numbers», *Workshop NTCCCS 2012* du 26 au 30 avril 2012 à la Faculté des sciences d’Oujda.
- [173] Zékiri A. «Nouvelle démonstration d’une formule de récurrence sur les nombres de Bernoulli», *Colloque national sur les sciences mathématiques à Tébessa* du 17 au 19 septembre 2012.
- [174] Zékiri A. (2012) «On a new recursion formula involving Bernoulli numbers » *DIMACOS, ’12 : International Conference on Discrete Mathematics and Computer Science*, du 13 au 17 novembre 2012, Beyrouth, Liban.
- [175] Zhao, G., & Feng, H. (2007). A new q-analogue of the sum of cubes . *Discrete Mathematics*, 307(22), 2861-2865.

- [176] Zuber, M., & Robert, A. (1992). Propriétés p-adiques de polynômes classiques. Thèse de doctorat, université de Neuchâtel, CH.
- [177] Zudilin, W. W. (2002). Irrationality of values of the Riemann zeta function. *Izvestiya : Mathematics*, 66(3), 489.