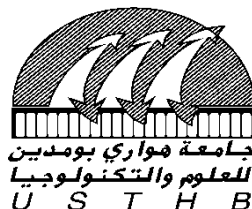


N° d'ordre :

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté d'électronique et Informatique



THESE

Présentée pour l'obtention du **diplôme de DOCTORAT 3^{ème} Cycle**

En : ELECTRONIQUE

Spécialité : Instrumentation Electronique

Par : Bahloul Lies

Sujet

Génération et Stabilisation des Structures Dissipatives dans les cavités Fibrées Microstructurées

Soutenue publiquement, le 30 / 10 / 2016, devant le jury composé de :

M /M.ATTARI	Professeur	USTHB	Président
Mme/L.BAZI(CHERBI)	Professeur	USTHB	Directrice de thèse
M /M.TLIDI	Professeur	ULB(Bruxelles)	Co- Directeur de thèse
M /A.AZRAR	Professeur	UMBB(Boumerdes)	Examineur 1
M /K.MAZIGHI	MCA	USTHB	Examineur 2
M /Y.LAMHENE	MCA	USTHB	Examineur 3

Remerciements

A l'issue de la rédaction de ce manuscrit, je suis convaincu que cette thèse est loin d'être un travail solitaire, d'ailleurs elle n'aurait jamais pu aboutir sans le soutien d'un grand nombre de personnes dont la générosité, la bonne humeur et surtout l'intérêt qu'ils manifestaient à l'égard de mon travail de recherche m'ont permis d'apprendre et de progresser dans cette phase délicate (*d'apprenti-chercheur*).

Mais tout d'abord, je remercie dieu qui m'a donné le courage et la force afin d'achever cette thèse.

Ensuite mes remerciements vont naturellement vers ma directrice de thèse, le professeur Lynda BAZI (Cherbi) qui a cru en moi dès le début de cette aventure et qui grâce à son dévouement, son enthousiasme, ses qualités humaines, sa dynamique, sa disponibilité tout le long de cette thèse et surtout son perfectionnement et sa passion pour son travail m'ont permis de me surpasser à chaque fois et de réussir finalement à terminer ce travail.

Un très grand merci aussi à mon co-directeur de thèse, le professeur Mustapha Tlidi qui grâce à lui j'ai vraiment pris conscience du vrai sens d'être chercheur, car chaque séjour que j'ai passé dans son laboratoire (qui a mon goût restaient insuffisants) représentait pour moi une phase d'apprentissage d'une grande importance que ça soit d'un point de vue scientifique ou humain. Je me rappelle très bien des différentes discussions autour des petits cafés ou lors des différentes séances de travail, je me rappelle surtout de mes questions qui ne s'arrêtaient pas à longueur de journée et même si elles n'étaient pas tout le temps très claires, Mustapha trouvait toujours le temps et manière pour me répondre et prenait le temps qu'il fallait pour expliquer les choses en me sortant à chaque fois avec un grand sourire sa réplique que j'ai piqué d'ailleurs *c'est plus clair aujourd'hui et moins clair que demain*.

Je tiens à remercier aussi mes parents à qui je dédie ce travail car sans leurs encouragements et sans leurs soutiens je n'y serais jamais arrivé, un grand merci aussi à mes frères et sœurs pour leurs encouragements continus et leurs soutiens. Et pour répondre à leurs fameuse *qui est ce que tu a fini ou pas encore ?* je leur dis oui c'est bon c'est fini.

Merci à Hafid, mon ami avec qui j'ai partagé la plus grande partie de ma vie de thésard et dont les discussions étaient pour moi d'une grande aide. des discussions jaillit la lumière n'est-ce-pas. Merci surtout pour les bons moments qu'on a partagé ensemble. Je te remercie pas d'être tout le temps en retard mais ne t'inquiète pas au bout de cinq ans je pense que je me suis habitué. Pour tout ça et le reste je te dis merci.

Je tiens à remercier mes amis, collègues et enseignants du laboratoire du bio-médical au département d'instrumentation électronique à l'USTHB et ceux du laboratoire d'optique non linéaire à l'ULB qui m'ont accueilli chaleureusement et avec qui j'ai partagé d'agréables moments et dont la gentillesse et la disponibilité m'ont beaucoup aidé, Ferhat, Aissam, Karim, Hajer, Etienne et les autres je vous dis merci les gars.

Merci à Ikram qui était présente et surtout patiente avec moi durant mes dernières années de thèse car je sais que des fois je devenais insupportable.

Je remercie aussi tous mes autres amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé durant cette période je pense à Raouf, Younes et les autres.

Finalemant, je tiens à remercier les membres du juré à savoir le professeur M.Attari, le professeur A.Azrar, le Dr.K.Mazighi et le Dr.Y.Lamhene qui ont accepté de juger mon travail et qui vont certainement m'aider à travers leurs différentes critiques à améliorer encore plus la qualité de ce travail.

Pour toutes les personnes que j'ai cité et pour les restes je vous dis merci.

sommaire

Introduction Générale	8
1 Introduction aux systèmes dynamiques	11
1.1 Notions de base	11
1.1.1 Espace des phases	12
1.1.2 Les points fixes	13
1.1.3 Stabilité des points fixes	13
1.1.4 La stabilité par linéarisation	15
1.1.5 Classification des points fixes	16
1.1.5.1 Deux valeurs propres réelles et du même signe	16
1.1.5.2 Deux valeurs propres réelles de signes opposés	17
1.1.5.3 Deux valeurs propres complexes conjuguées	17
1.2 Comportement asymptotique	18
1.3 Étude non linéaire de Bifurcation	19
1.4 Calcul multi-échelle et équation d'amplitude	19
1.4.1 Bifurcation transcritique	21
1.4.2 Bifurcation de pitchfork	22
1.4.3 Bifurcation de Hopf	24
1.5 Les structures dissipatives	25
1.5.1 Les structures dissipatives en thermodynamique	25
1.5.2 Les structures dissipatives en chimie	26
1.5.3 Les structures dissipatives en optique	27
1.6 Conclusion	30
2 Propagation de la lumière dans les fibres à cristaux photoniques	31
2.1 Introduction	31
2.2 De la fibre optique standard vers la fibre à cristaux photoniques	31
2.3 Mécanismes de guidage dans une PCF	33
2.3.1 Propagation dans un milieu homogène infini	34
2.3.2 Propagation dans un milieu périodique infini	35
2.3.3 Guidage par réflexion totale interne modifiée (RTIM)	37
2.3.4 Guidage par bande interdite photonique (BIP)	37
2.4 Caractéristiques de propagation des PCF RTIM	39

2.4.1	L'indice effectif et la fréquence normalisée	39
2.4.1.1	La fréquence normalisée	39
2.4.1.2	L'indice effectif	41
2.4.2	L'ouverture numérique	42
2.4.3	Les pertes optiques	43
2.4.3.1	Les pertes par absorption	44
2.4.3.2	Les pertes par diffusion	45
2.4.3.3	Les pertes par confinement	45
2.4.3.4	Bilan des pertes totales dans une fibre	46
2.4.4	La dispersion chromatique	46
2.4.4.1	La dispersion du matériau	48
2.4.4.2	La dispersion du guide	48
2.4.4.3	La dispersion chromatique dans les PCF	49
2.5	Effets non-linéaires dans une PCF	50
2.5.1	L'effet Kerr	52
2.5.1.1	Auto modulation de phase	52
2.5.1.2	La modulation de phase croisée	53
2.5.1.3	Mélange à quatre ondes	55
2.5.1.4	Instabilité de modulation IM	55
2.5.2	Diffusion de Raman	57
2.5.3	La diffusion de Brillouin	58
2.6	Équation de propagation généralisée	58
2.7	Conclusion	58
3	La cavité fibrée microstructurée	59
3.1	Introduction	59
3.2	Description du résonateur optique	59
3.2.1	Influence des pertes sur la résonance	62
3.2.2	Influence de la non linéarité	63
3.3	Le modèle du champ moyen	64
3.3.1	Stabilité des solutions homogènes et stationnaires	66
3.4	Instabilité de modulation (IM)	68
3.4.1	Étude de stabilité linéaire	69
3.4.2	Calcul de la fréquence de répétition des structures périodiques	72
3.4.2.1	Proposition d'un modèle de PCF à utiliser en cavité	74
3.4.3	Influence de la dispersion d'ordre trois sur l'IM	76
3.5	Conclusion	77
4	Génération et stabilisation des solitons de cavité	78
4.1	Dynamique non-linéaire au premier seuil d'instabilité de modulation	78
4.1.1	Étude faiblement non-linéaire	78
4.1.2	Équation d'amplitude des structures périodiques	81
4.1.2.1	Dynamique de la cavité en absence de B_3	82
4.1.2.2	Influence de la dispersion d'ordre 3	84

4.2	Dynamique non-linéaire au deuxième seuil d'instabilité de modulation . . .	87
4.2.1	Étude faiblement non-linéaire	87
4.2.2	Équation d'amplitude des solutions périodiques	90
4.2.3	Changement de la nature de bifurcation	90
4.2.3.1	Influence de B_3 sur la nature de la bifurcation	91
4.2.4	Amplitude et vitesse totale des structures dissipatives	92
4.3	Les solitons de cavité	94
4.3.1	Génération des solitons brillants	95
4.3.2	Génération des solitons sombres	96
4.3.3	Influence du B_3 sur la propagation des solitons de cavité	97
4.4	Interaction des solitons	98
4.5	Conclusion	103
	Conclusion Générale	105
	Annexe	108
	A Calcul non-linéaire au voisinage du premier point de bifurcation	109
	B Calcul non linéaire au voisinage du deuxième point de bifurcation	117

Table des figures

1	Exemples de structures auto-organisées dans la nature	9
1.1	Espace de phase à trois degrés de liberté [1]	13
1.2	Description géométrique de la stabilité dans le plan des phases [1]	14
1.3	Portrait de phase dans le cas d'un noeud stable et instable	17
1.4	Portrait de phase dans le cas d'un point-selle [1]	17
1.5	Portrait de phase dans le cas d'un foyer stable, foyer instable et centre	18
1.6	Diagramme de bifurcation transcritique	22
1.7	Diagramme de bifurcation pitchfork	23
1.8	Diagramme de bifurcation sous-critique avec des branches stables	24
1.9	Diagramme de bifurcation de Hopf	25
1.10	Cellules convectives de Rayleigh-Bénard	26
1.11	Résultats numériques du modèle du Brusselator [2]	27
1.12	Structure localisée obtenu dans une cavité optique	28
1.13	Schéma descriptif du système à rétro-action optique	29
1.14	Montage expérimentale de la cavité fibrée	30
2.1	Structures photoniques périodiques en une, deux et trois dimensions	32
2.2	Section transversale d'une PCF à coeur plein	33
2.3	Composante transverse \vec{k}_t et longitudinale $\vec{\beta}$ du vecteur d'onde \vec{k}	34
2.4	Diagramme de dispersion calculé dans le cas d'un milieu homogène infini [55]	35
2.5	Diagrammes de bandes pour deux milieux périodiques en deux dimensions	36
2.6	Images au MEB des sections transverses de deux PCF RTIM et BIP	38
2.7	Variation de la fréquence normalisée en fonction de λ/Λ	41
2.8	Variation de l'indice effectif et du n_{FSM} en fonction de λ/Λ	42
2.9	Réflexion et réfraction de Snell-Descartes	43
2.10	Bande de valence et une bande de conduction de la silice	44
2.11	Pertes par confinement à $1550nm$	45
2.12	Élargissement d'une impulsion gaussienne dans une fibre standard	46
2.13	Courbe de dispersion chromatique pour une fibre standard	49
2.14	Courbe de dispersion chromatique pour différentes PCF	50
2.15	Section transversale d'une PCF avec des diamètres de trous différents [79]	50
2.16	Profil temporel, spectral, chirp et phase d'une impulsion gaussienne	53

2.17	Effets de la SPM sur le profil spectral d'une impulsion gaussienne	54
2.18	Spectre correspondant au processus du mélange à quatre longueurs d'onde	55
2.19	Illustration de la diffusion de Raman spontanée Stokes et anti-Stokes	57
3.1	Description générale de la cavité fibrée micro-structurée	60
3.2	Résonance linéaire de la cavité	61
3.3	Résonance de la cavité en présence des pertes optiques	62
3.4	Influence de la non linéarité sur la résonance de la cavité	64
3.5	Réponse non linéaire de la cavité	67
3.6	Spectre du gain de l'instabilité de modulation	70
3.7	Courbes de stabilité marginale	72
3.8	Profil temporel et spectral des structures dissipatives modulées stables	73
3.9	Distribution radiale du champ électrique dans la PCF proposée	74
3.10	Caractéristiques de la PCF proposée en fonction de λ	75
3.11	Évolution temporelle des structures périodiques	76
3.12	Asymétrie spectrale provoquée par la présence de B_3	77
4.1	Décalage du seuil du changement de bifurcation en présence de β_4	83
4.2	Diagrammes de bifurcation supercritiques au 1 ^{er} seuil d'IM	84
4.3	Variation de la vitesse en fonction de B_3	85
4.4	Influence de B_3 sur le changement de la nature de bifurcation	86
4.5	Diagrammes de bifurcation supercritiques en présence de β_3	87
4.6	Fréquences instables au voisinage des seuil d'IM	88
4.7	Variation de $f(\Delta)$ au voisinage du deuxième seuil d'IM	91
4.8	Influence de B_3 sur le changement de bifurcation au deuxième seuil d'IM	92
4.9	Diagramme de bifurcation au voisinage du deuxième seuil d'IM	93
4.10	Variation de la vitesse des structures périodiques en fonction de B_3	94
4.11	Diagramme de bifurcation souscritique au voisinage du premier seuil d'IM	96
4.12	Diagramme de bifurcation souscritique au voisinage du 2 ^{eme} seuil d'IM	97
4.13	Brisure de symétrie temporelle des solitons de cavité en présence de B_3	98
4.14	Temps de réponse de l'indice de réfraction sous l'effet de l'électrostriction	100
4.15	Cluster à deux, trois et quatre pics	100
4.16	Évolution d'une paire de solitons de cavité en absence de B_3	101
4.17	Évolution d'une paire de solitons de cavité en présence de B_3	102

Introduction Générale

L'univers qui nous entoure n'est pas uniforme. Que ce soit dans les airs, sur la terre ferme ou dans la mer, nous rencontrons différents éléments qui s'organisent naturellement pour former des structures ayant des formes étranges et extraordinaires. On peut citer les rayures sur le pelage des animaux tels que les zèbres ou les reptiles, les tâches sur les girafes et les léopards, les rides dans le sable après le passage du vent, la propagation des vagues et même les motifs sur les plantes comme le tournesol ou le chou rouge comme le montre la figure (1).

Ces structures communément appelées en anglais *pattern* peuvent être interprétées comme des perturbations spatiales ou temporelles qui évoluent dans un espace initialement homogène pour créer finalement des motifs réguliers. L'ensemble des processus et mécanismes qui contrôlent l'émergence des *Patterns* est relatif au phénomène d'auto-organisation de structures connu aussi sous le nom de morphogénèse.

En 1952, Alan Turing mathématicien, cryptologue et informaticien britannique a publié l'article fondateur sur la morphogénèse intitulé "The Chemical Basis of Morphogenesis" [3] dans lequel il a établi un modèle mathématique en chimie et en biologie qui permet d'expliquer la brisure de symétrie d'un état initialement homogène et son évolution vers une structure (*Pattern*), cette brisure est connue sous le nom d'instabilité du Turing.

Turing explique que les *patterns* apparaissent dans des systèmes dynamiques non linéaires se trouvant loin de leur équilibre thermodynamique et émergent grâce à la compétition qui existe entre la non-linéarité et la diffusion du système où la non linéarité tend à briser sa symétrie et la diffusion tend à restaurer son homogénéité. Ces systèmes sont connus sous le nom de systèmes dissipatifs à réaction diffusion.

D'un point de vue macroscopique, la morphogénèse peut être aperçue comme une conséquence de la déstabilisation de l'état initial d'un système dissipatif non linéaire en présence d'une perturbation, ce système tend à rejoindre des configurations ordonnées ou des *patterns* qui émergent au delà de cette instabilité. Ces nouvelles configurations sont communément appelées structures dissipatives et elles ont été introduites par Ilya Prigogine qui a obtenu le prix Nobel en 1977 pour ses travaux sur les systèmes thermodynamiques hors équilibre [4, 5, 6, 7].

Les structures dissipatives sont présentes dans différents domaines scientifiques comme la thermodynamique où l'exemple le plus simple qui permet de les illustrer est celui des cellules convectives de Rayleigh-Bénard [8], la biologie [9], la végétation [10, 11, 12], la

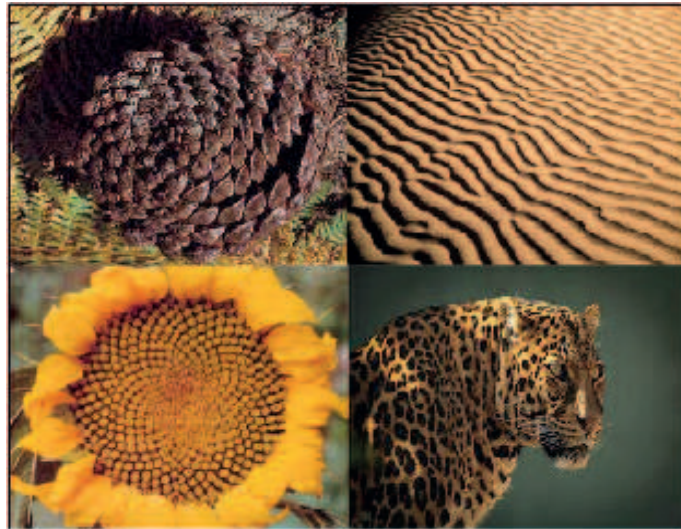


FIGURE 1 – Exemples de structures auto-organisées dans la nature

chimie[13, 6, 14, 15] et l'optique.

C'est à la fin des années 80 et au début des années 90 que la morphogénèse en optique a commencé à prendre place dans le monde scientifique, cet intérêt est relatif d'un côté à l'évolution du laser qui délivrait de puissances de plus en plus élevées, ce qui a exacerbé les effets non linéaires, et d'un autre côté, il y avait la volonté d'expliquer les phénomènes d'auto organisation présents dans d'autres domaines en faisant l'analogie avec les expériences réalisées en optique. Dans ce cas la structuration de la lumière est causée essentiellement par la combinaison entre la diffraction ou la dispersion de la lumière avec les effets non linéaires, ces derniers se manifestent lors de la propagation d'une onde optique avec une intensité importante dans un milieu non-linéaire.

D'autre part, l'étude et la compréhension des structures dissipatives en optique permet d'exploiter directement les avantages que peut offrir ce genre de systèmes et envisager ainsi des applications technologiques dans le but de concevoir des circuits tout optiques où l'application la plus intéressante est le stockage temporaire des informations, ceci se fait en générant dans le système des structures dissipatives localisées connues dans la littérature sous le nom de solitons de cavité. Ces derniers peuvent être générés à l'aide d'un processus d'écriture, qui consiste à modifier localement le faisceau lumineux présent dans le système en inscrivant dessus un faisceau secondaire, le passage du deuxième faisceau permet de générer un soliton stable qui peut se propager dans le système sans déformation ce qui fait de lui un très bon candidat pour le stockage des informations, ainsi le système utilisé sera considéré comme mémoire optique.

Nous proposons dans cette thèse d'étudier analytiquement et numériquement la formation des structures dissipatives dans une cavité fibrée microstructurée [16, 17]. La formation des structures dissipatives périodiques est causée par le phénomène d'instabi-

lité de modulation résultant d'un équilibre entre la non linéarité et la dispersion chromatique. L'originalité de notre travail sera dans l'utilisation des fibres de nouvelle génération connues sous le nom de fibres à cristaux photoniques (PCF) comme média dans la cavité, ceci offrira des degrés de liberté supplémentaires comparé aux fibres standards ainsi qu'un meilleur contrôle de la dispersion ce qui permet de tenir compte de ses ordres supérieurs. Pour ce faire, nous avons organisé ce manuscrit comme suit :

Le premier chapitre sera dédié à l'introduction des systèmes dynamiques et la description des différentes méthodes mathématiques permettant de les étudier. Nous donnerons aussi quelques exemples sur la formation des structures dissipatives dans la nature puis nous présenterons quelques résultats obtenus en optique transverse et en cavité fibrée.

Le deuxième chapitre sera consacré à l'étude des fibres à cristaux photoniques où nous détaillerons les mécanismes de guidage dans ce type de fibres et nous expliquerons l'influence de leur géométrie sur les différentes caractéristiques linéaires et non-linéaires de propagation de la lumière dans ces fibres.

Dans le troisième chapitre, nous décrirons en détail la cavité fibrée ainsi que les structures dissipatives modulées pouvant y apparaître. Une étude analytique basée sur le modèle du champ moyen nous permettra de dériver l'équation de propagation dans la cavité et d'analyser ces structures en présence des effets dispersifs d'ordre supérieurs de la PCF. Les résultats obtenus par cette méthode seront vérifiés numériquement.

Dans le quatrième chapitre, nous étudierons la génération et la stabilisation des structures localisées appelés aussi les solitons de cavité. Cette étude se fera en utilisant un calcul de bifurcation faiblement non-linéaire, ce dernier nous permettra de voir l'influence des ordres supérieurs de la dispersion sur les condition d'apparition des structures localisées. Nous verrons que l'utilisation des PCF permettra de stabiliser efficacement ces types de solitons. La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'étude de l'interaction des solitons de cavité.

Chapitre 1

Introduction aux systèmes dynamiques

Ce chapitre est considéré comme une initiation à la théorie des systèmes dynamiques non linéaires. Il a pour but de mettre en évidence les démarches et les outils mathématiques nécessaires permettant l'étude de ces systèmes. Ces méthodes seront utilisées dans les différentes études analytiques dans les prochains chapitres.

Nous commencerons d'abord par donner un état de l'art sur les systèmes dynamiques, puis nous introduisons la notion des solutions stationnaires du système ainsi que l'étude de leur stabilité/instabilité que nous évaluons à l'aide de la méthode de stabilité linéaire. Les résultats obtenus par cette méthode permettront d'effectuer une classification de ces solutions.

Par la suite nous nous intéresserons au comportement non linéaire de ces systèmes, pour ce faire nous introduirons la méthode des bifurcations qui permet d'étudier la dynamique des solutions qui émergent en présence de la non linéarité.

La dernière partie de ce chapitre sera consacrée aux systèmes dynamiques à réaction diffusion, nous verrons que ces derniers peuvent exister dans divers domaines tels que la biologie, la chimie, la thermodynamique et l'optique. L'intérêt de ces systèmes réside dans le fait qu'ils peuvent admettre des solutions qui passent d'un état homogène vers un état oscillant stable. Cette propriété très intéressante va être exploitée par la suite dans le système utilisé dans le cadre de notre travail.

1.1 Notions de base

On appelle système dynamique tout système physique qui évolue en fonction du temps, ce dernier est décrit par un ensemble d'équations différentielles (ordinaires ou partielles) telle que :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt} = F(X, \alpha, t) \\ X(0) = X_0 \end{cases} \quad (1.1)$$

Où X est un vecteur de variables de dimension n tel que $X = \{x_1 \dots x_n\}$, ces variables sont généralement appelées degrés de liberté. α représente l'ensemble des paramètres de contrôle, X_0 est définie comme la condition d'entrée évaluée à $t = 0$ et F un vecteur de fonctions de dimension n qui décrit l'évolution temporelle des degrés de liberté. Si F est indépendante de t le système est dit autonome sinon il est non autonome.

Nous pouvons classer aussi les systèmes dynamiques comme conservatifs s'ils conservent leur énergie ($\text{div}\vec{F} = 0$) au cours de leurs évolution et dissipatifs si une partie de leur énergie n'est pas conservée ($\text{div}\vec{F} \neq 0$).

La dynamique de ces systèmes a longtemps été considérée comme linéaire c'est-à-dire que la réponse d'un système est proportionnelle aux changements de l'un de ses paramètres de contrôle. Dans le cas où ce système est soumis à des changements de plusieurs de ses paramètres en même temps, sa réponse sera proportionnelle à l'ensemble de ces changements. C'est en vertu de ce raisonnement que l'on peut dire par exemple que le champ magnétique généré par plusieurs conducteurs peut être considéré comme la somme des champs générés par chaque conducteur séparément. Notons cependant que l'approche linéaire dans le traitement des systèmes dynamiques n'est en réalité qu'une approximation qui a pour but la simplification des calculs et qu'au contraire pratiquement tous les systèmes physiques ont un comportement non linéaire [1].

En général, les effets non linéaires émergent dès que l'un des paramètres de contrôle dépasse une valeur critique. Au delà de cette valeur la réponse du système peut donner lieu à des dynamiques drastiquement différentes du cas linéaire et par conséquent les solutions du système peuvent acquérir au cours de leur évolution des nouvelles propriétés telles que des transitions brusques de leurs états (bifurcation d'un état stable vers un état instable par exemple), la multiplicité, la formation des patterns (structures périodiques stables) ou même une évolution imprévisible et irrégulière dans l'espace et le temps qui tend vers le chaos.

1.1.1 Espace des phases

Le fait que la plupart des systèmes dynamiques sont naturellement non linéaires, une solution quantitative devient pratiquement impossible à évaluer. Dans ce cas, l'étude du système se fait d'une manière qualitative et pour se faire nous introduisons la notion d'espace des phases qu'on notera Γ et qui est défini comme un espace de n dimensions dont les coordonnées sont les variables du système $\{x_1 \dots x_n\}$.

Dans cette approche on considère que chaque instant t correspond à un seul état unique $S(t) = (x_1 \dots x_n)$ représenté par un point M dans l'espace des phases, on trace alors la courbe qui relie entre ces points pour créer une trajectoire dont le point de départ M_0 représente l'état initial $X(0)$, figure (1.1). La trajectoire peut être considérée comme une carte d'évolution du système en fonction de ses propres variables, la tangente en chaque point de la trajectoire est appelée vitesse de l'espace de phase [1, 18].

Nous définissons aussi le portrait de phase d'un système comme étant la représentation collective d'un ensemble de trajectoires ce qui permet de mettre en évidence les caractéristiques globales du système.

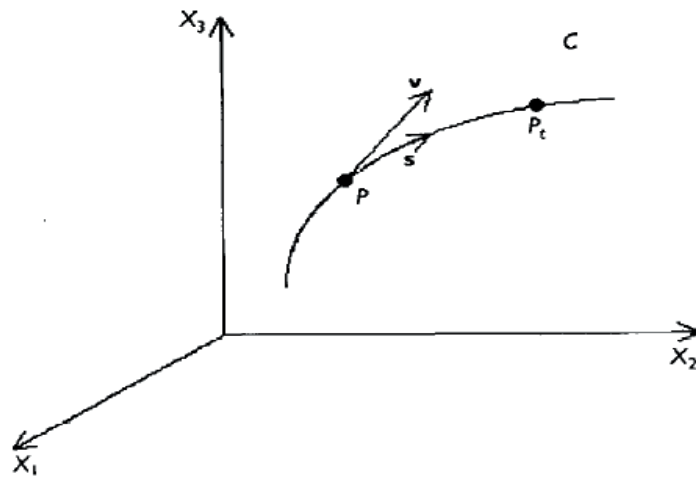


FIGURE 1.1 – Espace de phase à trois degrés de liberté [1]

1.1.2 Les points fixes

Dans tous les systèmes dynamiques, il existe des points remarquables qui ont la propriété d'être indépendants du temps et satisfont $\frac{dX}{dt} = F(X, \alpha) = 0$. Dans l'espace des phases, ils correspondent aux points pour lesquels la dynamique du système est ramenée au repos, on parle alors de solutions stationnaires ou de points fixes qu'on notera X_s .

Il est clair que X_s est une fonction de α , ceci implique qu'un changement d'un des paramètres de contrôle induit un changement de la valeur de X_s aussi. Étant donné que l'équation $F(X) = 0$ est souvent non linéaire, elle peut admettre en général plusieurs solutions.

La détermination des points fixes lors de l'étude des systèmes dynamiques est d'une importance majeure puisque c'est autour de ces points que s'organise l'ensemble du système.

1.1.3 Stabilité des points fixes

Considérons que pour des paramètres de contrôle donnés, la trajectoire du système atteint à un instant t un point fixe ou c'est son état initial qui se trouvait déjà en ce point. D'après la définition du point fixe on s'attend à ce que le système reste coincé à son niveau indéfiniment. Par conséquent, le comportement du système sera décrit uniquement par ce point. En réalité cette supposition n'est pas tout le temps correcte puisque tout système peut lors de son évolution être soumis à des fluctuations (intrinsèques ou extrinsèques) et par conséquent tout état stationnaire X_s peut s'éloigner de son état d'équilibre d'une quantité δX tel que :

$$X(t) = X_s + \delta X \quad (1.2)$$

Où δX est définie comme une perturbation de X_s .

Il est naturel d'introduire la notion de stabilité des points fixes qui est définie comme étant la manière dont évolue un système se trouvant au voisinage de son état stationnaire si on lui applique une petite perturbation (équation (1.2)). Le point fixe est stable si la solution du système reste suffisamment proche de son état stationnaire, et il est instable si elle s'en éloigne, cette approche pour définir la stabilité des points fixes est communément appelée stabilité au sens de Lyapunov [1].

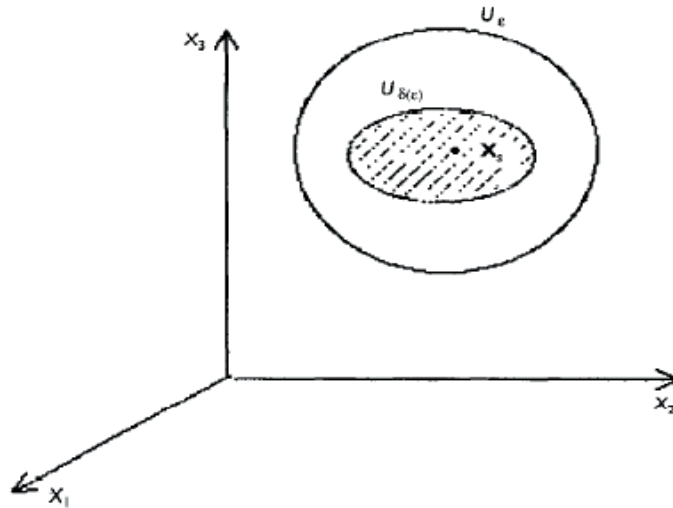


FIGURE 1.2 – Description géométrique de la stabilité dans le plan des phases [1]

Afin de mieux expliquer ce concept, nous le traitons d'abord dans l'espace des phases où on suppose que la solution stationnaire est entourée de deux régions $U_{\delta(\epsilon)}$ et U_ϵ comme le montre la figure (1.2).

Les dimensions de ces deux régions dépendent de $\delta(\epsilon)$ et ϵ . Nous introduisons les définitions suivantes :

- X_s est stable au sens de Lyapunov s'il existe une région $U_{\delta(\epsilon)}$ où toutes les trajectoires qui émergent de cette région ne quittent jamais une autre région U_ϵ .
- X_s est instable si la région $U_{\delta(\epsilon)}$ n'existe pas.
- X_s est asymptotiquement stable si la trajectoire du système tend vers X_s lorsque $t \rightarrow 0$.

D'une manière analytique, on peut dire que si pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta(\epsilon) > 0$ pour lequel une condition initiale $X(0)$ qui satisfait $|X(0) - X_s| < \delta(\epsilon)$, si pour un temps suffisamment grand $t \geq 0$ $|X(t) - X_s| < \epsilon$, X_s est stable au sens de Lyapunov.

Dans le cas où $|X(t) - X_s| \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow \infty$ X_s est asymptotiquement stable.

1.1.4 La stabilité par linéarisation

Étant donné la complexité des systèmes étudiés, il est nécessaire de développer une méthode analytique qui permettra de résoudre systématiquement le problème de stabilité des points fixes.

Il a été démontré [19, 20, 1] qu'au voisinage de ses états stationnaires, le comportement d'un système non linéaire pouvait être proche du comportement linéaire, donc l'ensemble du système peut être ramené au cas linéaire. Cette approximation facilitera l'étude de la stabilité qui dépendra dans ce cas uniquement des valeurs propres du système obtenu.

En remplaçant l'équation (1.2) dans (1.1) nous trouvons :

$$\frac{d\delta X}{dt} = L\delta X + h(\delta X) \quad (1.3)$$

Où L représente l'opérateur linéaire et $h(\delta x)$ la contribution non linéaire tel que :

$$L = \left(\frac{\partial F}{\partial X} \right)_{X_s} \quad (1.4)$$

$$h(\delta X) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial X \partial X} \right)_{X_s} \delta X \delta X \quad (1.5)$$

Il est clair d'après (1.4) que L n'est que la matrice jacobienne \mathbf{J} de F évaluée au point critique. Pour un système dynamique avec un nombre fini de degrés de liberté, la fonction $h(\delta X)$ correspond à un vecteur dans l'espace des phases et L s'écrit sous la forme suivante :

$$L_{ij} = \left(\frac{\partial F_i}{\partial X_j} \right) (i, j = 1 \dots n) \quad (1.6)$$

L'équation (1.3) devient finalement :

$$\frac{d\delta X}{dt} = L\delta X \quad (1.7)$$

L'équation (1.7) admet des solutions ayant la forme suivante :

$$\delta X(t) = \sum C_i U_i \exp(\lambda_i t) \quad (1.8)$$

Où λ_i sont les valeurs propres (qui peuvent être réelles ou complexes), U_i les vecteurs propres correspondants et C_i des constantes qui dépendent des conditions initiales, on notera les cas suivants :

- Le point fixe est asymptotiquement stable si toutes les valeurs propres de \mathbf{J} ont une partie réelle strictement négative $\Re(\lambda) < 0$, dans ce cas la perturbation décroît d'une façon exponentielle avec le temps et la solution rejoint son état stationnaire.

- Le point fixe est instable si au moins une valeur propre de \mathbf{J} a une partie réelle positive $\Re(\lambda) > 0$ ceci correspond à une croissance de la perturbation qui se traduit par un éloignement de la solution de son état stationnaire.
- le point fixe est marginalement stable lorsque la partie réelle d'une de ces valeurs propres est nulle $\Re(\lambda) = 0$, dans ce cas la solution ne s'éloigne pas mais ne se rapproche pas non plus, elle correspond à la zone critique qui sépare les domaines de stabilité et d'instabilité.

Dans le cas où la valeur propre est complexe, la présence de la partie imaginaire introduit une oscillation dans le temps.

1.1.5 Classification des points fixes

Dans cette section nous traiterons des systèmes dynamiques ayant deux degrés de liberté, ce qui correspond à une matrice jacobienne 2×2 lors du calcul de stabilité linéaire, l'équation (1.7) s'écrit dans ce cas sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{d\delta x_1}{dt} = L_{11}\delta x_1 + L_{21}\delta x_2 \\ \frac{d\delta x_2}{dt} = L_{12}\delta x_1 + L_{22}\delta x_2 \end{cases} \quad (1.9)$$

Le polynôme caractéristique P du système (1.9) est donné comme suit :

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \text{tr}(L)\lambda + \Delta \quad (1.10)$$

Où L est la matrice du système, $\text{tr}(L) = L_{11} + L_{22}$ et Δ sont respectivement la trace et le déterminant de la matrice L .

La résolution de l'équation (1.10) nous fournit l'expression des valeurs propres :

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{tr} \pm (\text{tr}^2 - 4\Delta)^{1/2}}{2} = \frac{\text{tr} \pm (D)^{1/2}}{2} \quad (1.11)$$

Où D est le discriminant de $P(\lambda)$. La nature des points fixes dépendra des signes de tr et D où on peut distinguer trois cas possibles [1, 21] :

1. λ_1 et λ_2 sont réelles du même signe
2. λ_1 et λ_2 sont réelles de signes opposés
3. λ_1 et λ_2 sont complexes conjugués.

1.1.5.1 Deux valeurs propres réelles et du même signe

Ceci correspond à $D > 0$ et $\Delta > 0$, si $\text{tr}(L) < 0$ on obtient $\lambda_1 < \lambda_2 < 0$ toutes les trajectoires convergent vers le point fixe du système qui est un **noeud stable**, si maintenant on $\text{tr}(L) > 0$, on aura des valeurs propres positives $0 < \lambda_1 < \lambda_2$ le point fixe dans ce cas est un **noeud instable**, par conséquent toutes les trajectoires s'éloignent de lui dans l'espace des phases. Les figures (1.3.a et 1.3.b) représentent le portrait de phase pour ces deux cas respectivement :

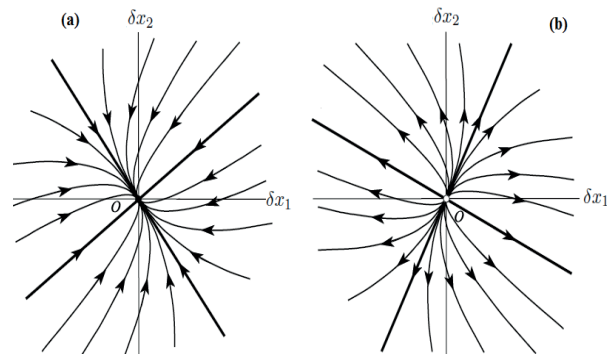


FIGURE 1.3 – Portrait de phase dans le cas : (a) noeud stable, (b) noeud instable [1]

1.1.5.2 Deux valeurs propres réelles de signes opposés

Ce cas correspond à $\Delta < 0$, et les valeurs propres satisfont $\lambda_1 < 0 < \lambda_2$. On a donc tout le temps au moins un point fixe instable. Dans le portrait de phase on remarque une zone des trajectoires qui se dirige vers le point fixe puis s'éloigne sans l'atteindre, le point fixe dans ce cas est appelé **point-selle** comme c'est le cas de la figure (1.4).

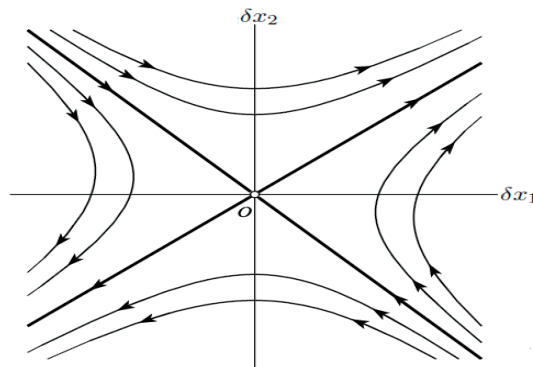


FIGURE 1.4 – Portrait de phase dans le cas d'un point-selle [1]

1.1.5.3 Deux valeurs propres complexes conjuguées

On rencontre ce cas lorsque $D < 0$ et suivant la trace de la matrice on peut citer trois cas :

- Si $tr(L) < 0$ alors $\Re(\lambda_1) < \Re(\lambda_2) < 0$. Dans ce cas le point fixe est asymptotiquement stable et la trajectoire revient vers son point fixe en faisant des tours qui ont la forme d'une spirale, on parle alors de **spirale ou foyer stable**. Figure (1.5.a).

- Si $tr(L) > 0$ alors $0 < \Re(\lambda_1) < \Re(\lambda_2)$. Dans ce cas le point fixe est défini comme **spirale ou foyer instable**. Figure (1.5.b)
- Si $tr(L) = 0$, les valeurs propres sont purement imaginaires. Dans ce cas, le point fixe est marginalement stable et la trajectoire des solutions périodiques sont représentées sous forme de cercles autour du point fixe, ce dernier est défini dans ce cas comme un **centre fixe**. Figure (1.5.c)

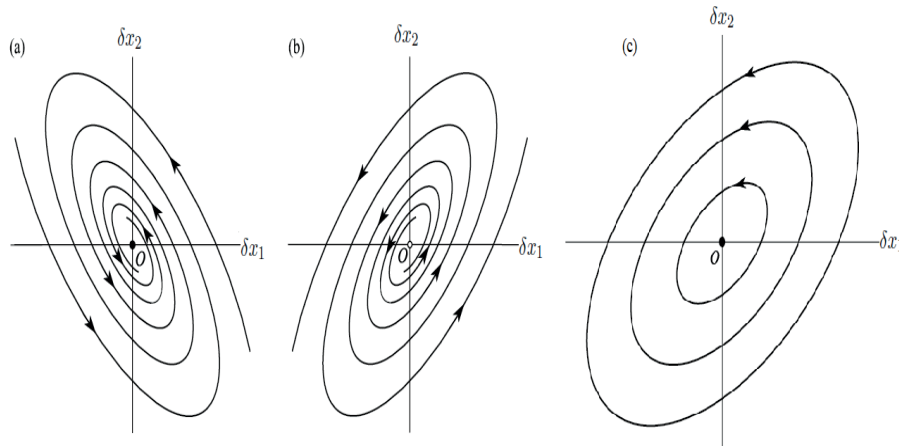


FIGURE 1.5 – Portrait de phase dans le cas : (a) foyer stable, (b) foyer instable, (c) centre [1]

1.2 Comportement asymptotique

Si le système évolue longtemps dans le temps ($t \rightarrow \infty$) il peut avoir un comportement asymptotique c'est à dire que pour un ensemble de paramètres et pour une condition d'entrée précise la trajectoire va rejoindre naturellement des objets géométriques invariants dans l'espace des phases appelés **Attracteurs**.

On peut définir trois grandes classes d'attracteurs :

- Le cas le plus courant sont les points fixes qui par définition sont des points de repos du système à condition qu'ils soient stables, dans le cas contraire (instables) la trajectoire trouvera au moins une voie (le vecteur propre correspondant à la valeur propre instable) pour s'éloigner. Le point fixe est dans ce cas un rappelant.
- La deuxième catégorie d'attracteurs sont les cycles limites, ces derniers sont définis comme des zones où la trajectoire se referme sur elle-même, on parle alors de cycle périodique et le système présentera des oscillations permanentes.
- Le dernier type sont les attracteurs étranges qui présentent des trajectoires plus complexes voir chaotiques, néanmoins une partie de leur comportement reste déterministe.

1.3 Étude non linéaire de Bifurcation

Nous avons vu que l'étude de stabilité linéaire était une étape cruciale pour comprendre le comportement d'un système dynamique non linéaire. Cette analyse permet d'évaluer suivant l'état du point fixe (stable ou instable) la trajectoire asymptotique des solutions du système. Cette approximation est suffisante si le point fixe est stable car la trajectoire finie par rejoindre son état de repos. Par contre, si le point fixe est instable cette analyse devient inadéquate car elle ne prédit qu'un éloignement de la solution vers l'infini, et par conséquent ne peut pas évaluer les nouvelles branches de solutions qui émergent de l'instabilité au voisinage du point fixe. Nous devons donc employer une autre méthode plus efficace qui permettra de les calculer. Cette méthode est connue sous le nom d'analyse de bifurcation.

Dans un système dynamique, la bifurcation est définie comme étant un changement de la nature d'un équilibre (passage d'un état stable vers un état instable par exemple), ce changement est dû en général à une variation d'un des paramètres de contrôle du système lui-même. On peut donc définir l'analyse de bifurcation comme la méthode qui étudie l'impact du changement d'un paramètre sur le comportement du système. Cette bifurcation sera donnée sous forme de diagramme appelé diagramme de bifurcation.

Considérons donc l'ensemble du système non linéaire décrit par l'équation (1.3), l'étude de stabilité linéaire permet de trouver une valeur critique (α_c) pour laquelle la partie réelle d'une des valeurs propres de l'opérateur linéaire devient nulle $\Re\lambda(\alpha_c) = 0$. et si pour cette même valeur la condition $\left[\frac{d}{d\alpha} \Re\lambda \neq 0 \right]_{\alpha_c}$ est satisfaite ce qui correspond à un changement de signe de la fonction $\Re\lambda(\alpha_c)$ lorsque que α passe par α_c . Dans ce cas α_c est appelée **point de bifurcation**.

Les solutions qui émergent de ce point vont s'étendre soit vers l'infini ou rejoindre un autre point de bifurcation, on classe alors les branches des solutions comme suit :

- Si la partie l'imaginaire de $\Im\lambda = 0$ on identifie deux types de branches de solutions stationnaires qui émergent de cette instabilité : Une branche super-critique où les solutions bifurquent dans la zone de α où le point fixe est instable et elles sont stables. Une branche sous-critique où les solutions bifurquent dans la zone de α où le point fixe est stable.
- Si la partie l'imaginaire de $\Im\lambda \neq 0$ les solutions qui émergent sont périodiques dans le temps et on parle de bifurcation de Hopf.

1.4 Calcul multi-échelle et équation d'amplitude

Une solution globale (sur l'ensemble de l'espace des phases) d'un système dynamique décrit par l'équation (1.3) est impossible à évaluer, la méthode de bifurcation permet toutefois de déterminer les solutions locales (au voisinage du point de bifurcation) du problème non linéaire. Son but est de comprendre comment se comporte le système et de quelle façon émergent les solutions si on s'éloigne un peu de son point de bifurcation.

Considérons comme première étape le cas où les valeurs propres sont réelles ($\Im\lambda = 0$)

et développons δx en fonction d'un petit paramètre ϵ qui mesure la distance par rapport au seuil $\alpha - \alpha_c$ tel que [1] :

$$\alpha - \alpha_c = \epsilon\alpha_1 + \epsilon^2\alpha_2 + \dots \quad (1.12)$$

$$\delta x = \epsilon\delta x_1 + \epsilon^2\delta x_2 + \dots \quad (1.13)$$

Où les coefficients α_1 et α_2 sont à déterminer au cours du calcul. Il a aussi été démontré que la solution δx varie lentement au voisinage du point fixe, on introduit donc la notion du temps lentement variable tel que [1] :

$$\frac{d}{dt} = \epsilon \frac{d}{dT_1} + \epsilon^2 \frac{d}{dT_2} + \dots \quad (1.14)$$

Nous remplaçons les équations (1.12 – 1.14) dans (1.3) et nous développons le système au ordre de ϵ nous trouvons les systèmes suivants [22, 1] :

1. **A l'ordre ϵ**

Nous trouvons le système suivant :

$$\mathbf{L}(\alpha_c)\delta x_1 = 0 \quad (1.15)$$

2. **A l'ordre ϵ^2**

A cet ordre nous trouvons le système suivant :

$$\mathbf{L}(\alpha_c)\delta x_2 = L_1\delta x_1 + \frac{\partial\delta x_1}{\partial T_1} + h_1(\alpha_c)\delta x_1\delta x_1 \quad (1.16)$$

Où l'opérateur L_1 et la contribution non linéaire $h_1(\alpha_c)$ dépendront des paramètres système étudié.

3. **A l'ordre ϵ^3**

De la même façon que pour l'ordre précédant nous trouvons à ce niveau :

$$\mathbf{L}(\alpha_c)\delta x_3 = L_1\delta x_2 + L_2\delta x_1 + \frac{\partial\delta x_1}{\partial T_2} + \frac{\partial\delta x_2}{\partial T_1} + h_2(\alpha_c)\delta x_1\delta x_1\delta x_1 \quad (1.17)$$

La résolution des systèmes (1.15 – 1.17) se fait à chaque ordre de ϵ séparément.

Nous remarquons qu'à l'ordre ϵ , le système obtenu est identique à celui évalué au point critique (équation 1.4), sa solution est donnée sous la forme suivante :

$$\delta x_1 = C(T_1, T_2)U \quad (1.18)$$

Où C est l'amplitude des solutions qui sera déterminée en résolvant le système au troisième ordre de ϵ et U est le vecteur propre de l'opérateur linéaire et dont l'expression est donnée en fonction des éléments de cet opérateur comme suit :

$$U = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{L_{11}(\lambda_c)}{L_{12}(\lambda_c)} \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

Nous introduisons la solution (1.18) dans (1.16) nous obtenons un système qui a la forme suivante :

$$L(\alpha_c)\delta x_2 = f(C, U) \quad (1.20)$$

Afin de trouver la solution du système (1.20), il faut satisfaire la condition de Fredholm qui stipule qu'un tel système admet une solution si la partie de droite de cette égalité est orthogonale au vecteur propre U^+ de la matrice adjointe de L ce qui correspond à un produit scalaire nul [1, 23] :

$$(U^+, f) = 0 \quad (1.21)$$

Nous réinjectons le résultat de cette condition dans le système à l'ordre ϵ^3 et en procédant de la même façon nous trouvons la condition de solvabilité du système à cet ordre. Cette condition s'écrit sous forme d'une équation différentielle et est définie comme l'équation d'amplitude de la solution qui émerge au voisinage du point de bifurcation où le type de bifurcation dépendra de la forme de l'équation obtenue.

1.4.1 Bifurcation transcritique

En résolvant le système, nous obtenons à l'ordre ϵ^3 l'équation de l'amplitude C ayant la forme suivante :

$$\frac{dC}{dT_1} = \gamma P_1 C - P_2 C^2 \quad (1.22)$$

Avec γ , P_1 et P_2 sont des coefficients qui sont déterminés à partir de la condition initiale et lors de la résolution du système aux ordres inférieurs de ϵ .

A partir de l'équation (1.13) nous déduisons la forme normale de la bifurcation transcritique à l'ordre $\epsilon\delta x_1$ qui est le terme prépondérant dans la détermination de δx . Pour cela, nous exprimons l'équation (1.22) en fonction d'une nouvelle amplitude $Z = \epsilon C$ en la multipliant par ϵ^2 , nous trouvons finalement :

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha - \alpha_c)P_1 Z - P_2 Z^2 \quad (1.23)$$

Tant que $P_2 \neq 0$ cette équation possède deux points fixes :

$$\begin{cases} Z_{1s} = 0 \\ Z_{2s} = (\alpha - \alpha_c) \frac{P_1}{P_2} \end{cases} \quad (1.24)$$

Une étude de stabilité linéaire de ces deux solutions stationnaires permet de déterminer leurs zones de stabilité et d'instabilité en fonction du paramètre de contrôle α , nous trouvons finalement :

- Z_{1s} est (stable/instable) si $(\alpha < \alpha_c / \alpha > \alpha_c)$.
- Z_{2s} est (stable/instable) si $(\alpha > \alpha_c / \alpha < \alpha_c)$.

Les figures (1.6.a) et (1.6.b) représentent les diagrammes de bifurcation transcritique décrit par l'équation (1.23) pour des signes différents du rapport $\frac{P_1}{P_2}$ où on remarque un échange de stabilité entre les points fixes au points de bifurcation.

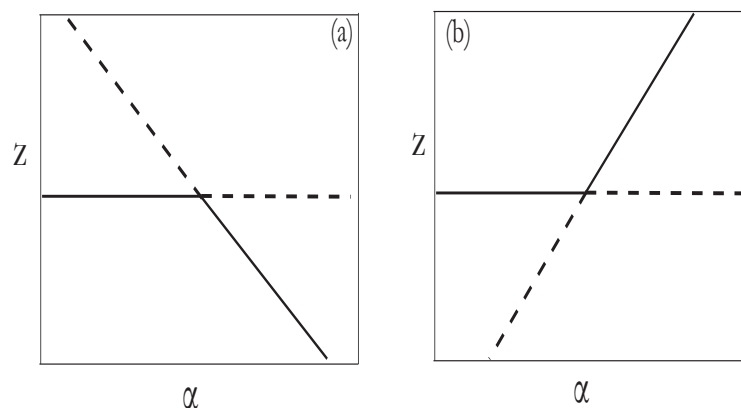


FIGURE 1.6 – Diagramme de bifurcation transcritique : (a) $\frac{P_1}{P_2} < 0$, (b) $\frac{P_1}{P_2} > 0$, traits continus (solutions stables), traits en pointillés (solutions instables)

1.4.2 Bifurcation de pitchfork

Dans ce cas la résolution du système à l'ordre ϵ^3 nous fournit l'équation d'amplitude suivante :

$$\frac{dC}{dT_2} = \gamma P_1 C \pm P_3 C^2 \quad (1.25)$$

Nous multiplions l'équation (1.25) par ϵ^3 et déduisons la forme normale de la bifurcation pitchfork en fonction de l'amplitude $Z = \epsilon C$:

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha - \alpha_c) P_1 Z \pm P_3 Z^3 \quad (1.26)$$

Cette équation admet les points fixes suivants pour $P_3 \neq 0$:

$$\begin{cases} Z_{1s} = 0 \\ Z_{2s} = \mp \sqrt{(\alpha - \alpha_c) \frac{P_1}{P_3}} \end{cases} \quad (1.27)$$

De la même manière que pour la bifurcation transcritique, la stabilité des solutions stationnaires sera déterminée par une étude de stabilité linéaire, nous résumons les résultats comme suit :

- Z_{1s} est (stable/instable) si $(\alpha < \alpha_c / \alpha > \alpha_c)$.
- Z_{2s} est (stable) si $(\alpha > \alpha_c)$ pour $\frac{P_1}{P_3} > 0$, la bifurcation est donc super-critique.
- Z_{2s} est (instable) si $(\alpha < \alpha_c)$ pour $\frac{P_1}{P_3} < 0$, la bifurcation est donc sous-critique.

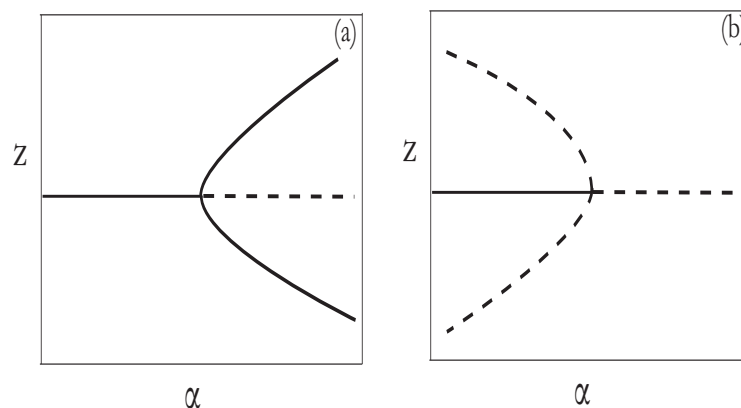


FIGURE 1.7 – Diagramme de bifurcation pitchfork : (a) bifurcation super-critique, (b) bifurcation sous-critique , traits continus (solutions stables), traits en pointillés (solutions instables)

Dans les deux cas (super-critique ou sous-critique) on obtient deux branches de solutions qui bifurquent avec les mêmes propriétés de stabilité comme le montrent les figures (1.7.a) et (1.7.b).

Si on veut maintenant stabiliser les branches de solutions sous-critiques il faut tenir compte des ordres supérieurs du développement, dans ce cas la forme normale devient :

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha - \alpha_c)P_1Z + P_3Z^3 - Z^5 \quad (1.28)$$

La présence du terme Z^5 induit une saturation de ces solutions et les points fixes sont dans ce cas :

$$\left\{ \begin{array}{l} Z_{1s} = 0 \\ Z_{2s} = 1/2\sqrt{2P_3 + 2\sqrt{P_3^2 + 4(\alpha - \alpha_c P_1)}} \\ Z_{3s} = -1/2\sqrt{2P_3 + 2\sqrt{P_3^2 + 4(\alpha - \alpha_c P_1)}} \\ Z_{4s} = 1/2\sqrt{2P_3 - 2\sqrt{P_3^2 + 4(\alpha - \alpha_c P_1)}} \\ Z_{5s} = -1/2\sqrt{2P_3 - 2\sqrt{P_3^2 + 4(\alpha - \alpha_c P_1)}} \end{array} \right. \quad (1.29)$$

Le diagramme de bifurcation dans ce cas présentera une courbe d'hysteresis dans la zone de souscriticalité comme le montre la figure (1.8) où des solutions stables peuvent exister.

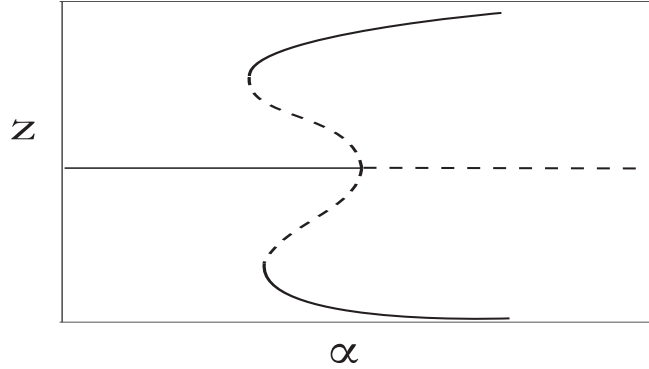


FIGURE 1.8 – Diagramme de bifurcation sous-critique avec des branches stables

1.4.3 Bifurcation de Hopf

Ce cas correspond à une valeur propre complexe ($\lambda = \lambda_r + i\Omega$), l'équation (1.18) au point critique devient alors :

$$\delta x_1 = C(T_1, T_2)U \exp(i\Omega_c T) + cc \quad (1.30)$$

L'équation (1.30) montre qu'au point critique δx varie périodiquement à une échelle de temps rapide donnée par $T = \frac{2\pi}{\Omega}$, ce temps sera introduit lors du développement multi-échelle et l'équation (1.14) devient dans ce cas :

$$\frac{d}{dt} = \Omega \frac{d}{dT} + \epsilon \frac{d}{dT_1} + \epsilon^2 \frac{d}{dT_2} + \dots \quad (1.31)$$

La résolution du système se fait de la même manière que pour le cas de la bifurcation transcritique et pitchfork et nous retrouvons la forme normale d'une bifurcation de Hopf décrite par l'équation suivante :

$$\frac{dZ}{dt} = (\alpha - \alpha_c)P_1 Z \mp P_3 Z^3 \quad (1.32)$$

Où Z , P_1 et P_3 sont tous complexes tel que :

$$Z = Z_r + iZ_{im}, P_1 = P_{1r} + iP_{1im} \text{ et } P_3 = P_{3r} + iP_{3im}.$$

Afin de résoudre l'équation (1.32), il est plus simple de la décomposer en partie réelle et imaginaire et en prenant $Z = \rho e^{(i\phi)}$ on trouve finalement [24, 25] :

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = (\alpha - \alpha_c)P_{1r}\rho \mp P_{3r}\rho^3 \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} = (\alpha - \alpha_c)P_{1im} \mp P_{3im}\rho^2 \end{cases} \quad (1.33)$$

Ce système correspond à une bifurcation pitchfork pour l'amplitude ρ (super-critique ou sous-critique selon le signe dans l'équation (1.33)), l'équation de la phase décrit la rotation de la solution à la vitesse $(\alpha - \alpha_c)P_{1im} \mp P_{3im}\rho^2$.

Les diagrammes de bifurcation de Hopf sont donnés dans la figure (1.9.a) et (1.9.b)

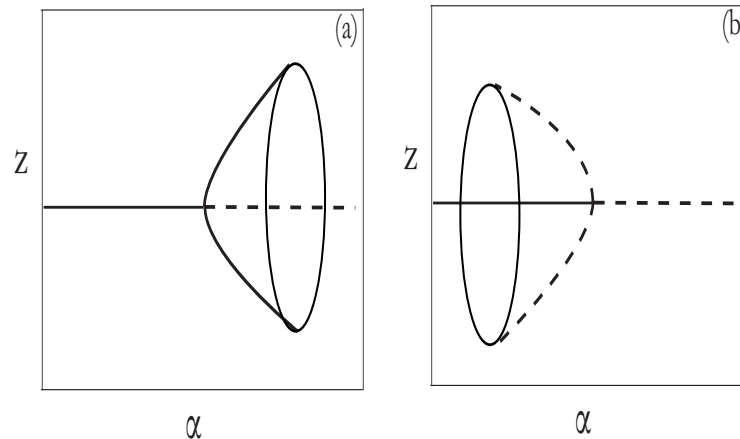


FIGURE 1.9 – Diagramme de bifurcation de Hopf : (a) super-critique, (b) sous-critique

1.5 Les structures dissipatives

Dans le cas où les états d'un système dynamique dépendent de ses coordonnées spatiales, l'équation d'évolution de ce système s'écrit sous la forme d'une équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = F(\{X, r\}, \{\nabla X\}, \alpha) \quad (1.34)$$

La présence des dérivées partielles indique que les états du vecteur X sont couplés à chaque point de l'espace. Dans les réactions chimiques, le couplage est assuré dans le cas général par le phénomène de diffusion. En optique, il est assuré soit par la diffraction spatiale soit par la dispersion temporelle de la lumière, dans tous les cas les solutions tendent vers des distributions périodiques spatiales ou temporelles, on parle dans ce cas de structures dissipatives.

1.5.1 Les structures dissipatives en thermodynamique

Nous citons dans cet exemple le cas des cellules convectives de Rayleigh-Bénard [8] qui apparaissent dans un fluide compris entre deux surfaces et chauffé par dessous. Tant que la différence de température entre les deux surfaces ΔT n'est pas importante, la conduction thermique suffit pour transférer la chaleur et la répartir uniformément dans tout le liquide conformément à la deuxième loi de la thermodynamique.

Si la température continue à augmenter, la différence de température dépassera un certain seuil critique et le transfert de chaleur se fera par le biais de la convection. Dans ce cas, le fluide proche de la zone de chauffage dont la densité volumique est moins importante que celle de la zone froide va remonter à la surface ; le contraire se produit alors pour la partie du liquide qui était dans la zone froide. Le fluide se met alors en

mouvement macroscopique et forme des cellules de convection comme le montre la figure (1.10)

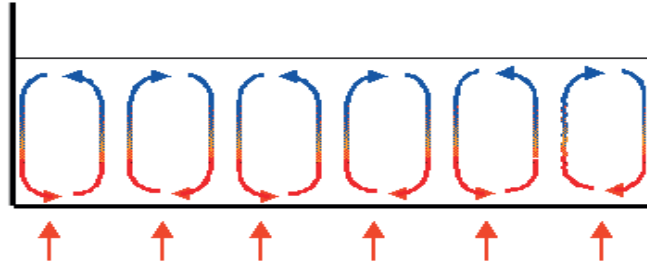
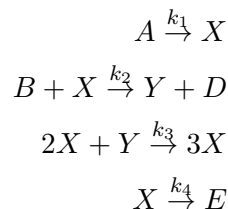


FIGURE 1.10 – Cellules convectives de Rayleigh-Bénard créées par le mouvement du fluide entre deux surfaces

1.5.2 Les structures dissipatives en chimie

En chimie, la première observation d'une structure dissipative est relative à l'expérience réalisée par Boris Belousov en 1960 [1] où un mélange d'acide citrique, de bromate, et de cérium considéré comme catalyseur sont mis ensemble dans une solution d'acide sulfurique. Le résultat observé était des changements de couleur périodiques correspondant à la formation et la disparition périodique des espèces de cérium oxydés. Après cette expérience, l'intérêt scientifique relatif à ces structures en chimie a augmenté et d'autres expériences les ont mis en évidence telle que dans la réaction acide chlorite-iode-malonique, et par la suite dans la réaction du dioxyde de chlore iode malonique réalisée par l'équipe de Castets dans les années 90.

Nous proposons dans cette section le modèle mathématique communément appelé Brusselator [6, 14, 15] qui a été proposé par Ilya prigogine en 1968 et avait pour but la description théorique des réactions chimiques auto-catalytiques permettant l'observation de structures dissipatives dans les systèmes chimiques réelles, dont la plupart sont extrêmement complexe à étudier. Ce modèle est caractérisé par les réactions suivantes :



Où A, B, X, Y, D et E représentent les concentrations des composants et K_1, K_2, K_3 et K_4 sont les taux relatifs à chaque réaction.

Les concentrations des réactifs A et B sont maintenues à une valeur loin de l'équilibre à l'aide des flux appropriés où le flux d'injection de B est considéré comme paramètre de contrôle, les produits D et E sont éjectés de la solution dès leurs formation. La non linéarité du système provient par la réaction $2X + Y \xrightarrow{k_3} 3X$, en la combinant avec la diffusion nous obtenons les équations qui régissent la variation de X et Y comme suit :

$$\frac{\partial X}{\partial t} = A - (B + 1)X + X^2Y + D_1\nabla^2 X \quad (1.35)$$

$$\frac{\partial Y}{\partial t} = BX - X^2Y + D_2\nabla^2 Y \quad (1.36)$$

Ce système devient instable lorsque $B > 1 + A^2$ et admet à ce moment là des structures dont les concentrations varient périodiquement comme le montre la figure (1.11)

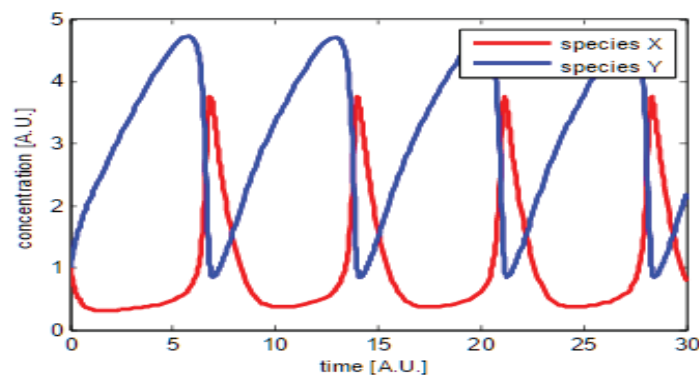


FIGURE 1.11 – Résultats numériques du modèle du Brusselator [2]

1.5.3 Les structures dissipatives en optique

La présence d'instabilité et l'émergence de structures dissipatives transverses ont fait durant les deux dernières décennies l'objet de plusieurs recherches théoriques et expérimentales. On peut citer les cavités actives comme les lasers à CO_2 , les couches de cristaux liquides, les valves optiques, les VCSELs (Vertical Cavity Surface Emitting Lasers), les cavités Fabry-Perot ou les cavités optiques comportant une non linéarité de type Kerr. Dans ces dernières, un type spécifique de structures dissipatives a fait apparition, on parle de structures localisées (LS : Localized Structures). Ces dernières sont des solutions particulières de l'équation de propagation et sont définies comme des pics lumineux solitaires localisés dans un espace restreint du système contrairement aux structures périodiques qui envahissent tout le système. Elles ont été prédites analytiquement et vérifiées expérimentalement dans le domaine spatial et temporel où elles présentent un grand intérêt grâce aux applications dans lesquelles elles peuvent être utilisées comme les mémoires optiques, les commutateurs optiques ou tout simplement dans la transmission d'information.

Dans les milieux Kerr, les structures dissipatives localisées peuvent émerger essentiellement de deux façons :

1. Sous certaines conditions, une cavité optique soumise à une injection continue et en présence de la dissipation peut avoir une réponse caractérisée par plusieurs états d'énergie coexistant tous à la fois et peuvent être stables ou instables, ce phénomène est connu sous le nom de multistabilité. On appelle front de commutation la solution non linéaire qui connecte deux états du même système, s'il connecte un état stable à un état instable, on parle de front de Fisher-Kolmogorov-Petrovsky-Piskunov (FKPP) [26, 27, 28, 29, 30]. Ces fronts sont caractérisés par une vitesse variable qui rejoint une vitesse asymptotique avec le temps [31], la structure localisée peut émerger dans ce cas de l'interaction de deux fronts comme le montre la figure (1.12.b). Un front peut aussi connecter deux états stables, dans ce cas il va se diriger toujours vers l'état d'énergie supérieur. .
2. Les solitons de cavité sont des structures localisées stables qui émergent dans les cavités optiques (à miroir ou fibrée) pompée par une onde continue. Il existe un régime de paramètres appelé en anglais Pinning Zone où une coexistence entre la solution homogène du système et la solution périodique qui émerge de l'instabilité, figure (1.12.a), le nombre de pics des solitons de cavité dépend étroitement des conditions d'entrée. Les solitons de cavité feront l'objet d'une étude détaillée dans le troisième chapitre de ce manuscrit.

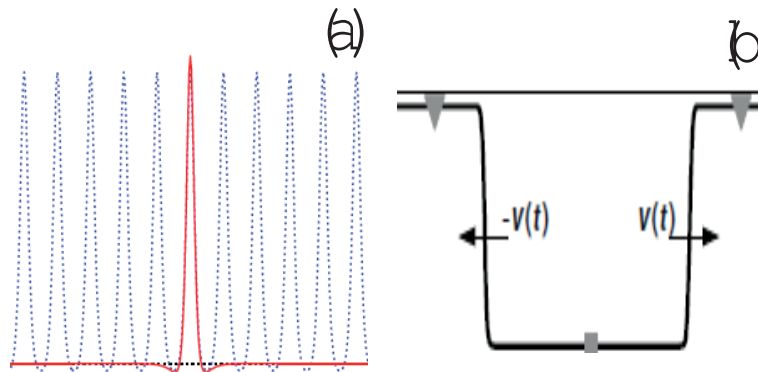


FIGURE 1.12 – Structure localisée obtenu dans une cavité optique. a : Soliton de cavité obtenu par l'intersection entre la structure modulée représentée en trait bleu et la solution homogène en pointillé noir [32]. b : Interaction de deux fronts de commutation obtenus en reliant un état haut stable à un état bas instable [31]

En 1987, un premier modèle mathématique a été dérivé par Luigi Lugiato et René Lefever dans le but de prédire l'apparition des structures dissipatives transverses dans les cavités optiques non linéaires [33]. Dans cette étude, un faisceau lumineux cohérent est injecté dans une cavité avec un milieu non-linéaire Kerr ; ce dernier se propage dans

ce milieu par réflexions au niveau des quatre miroirs qui constituent la cavité. Les résultats montrent que ce faisceau peut devenir instable en présence de perturbation. Il est possible dans ce cas d'obtenir des structures dissipatives analogues à celles décrites dans les réactions chimiques [6].

Parmi les premières configurations expérimentales qui ont donné lieu à des structurations de la lumière, il y a celle proposée dans [34, 35] en 1988 où une instabilité a été observée lorsque deux faisceaux contrapropagatifs traversent un milieu non linéaire constitué d'atomes de Sodium. En 1991, Alessandro et Firth [36, 37] ont publié un travail numérique et analytique très intéressant où ils expliquaient que des structures transverses pouvaient émerger dans un système constitué d'une fine lame d'un milieu non linéaire de type Kerr et possédant une rétroaction optique due à la présence d'un miroir réfléchissant comme le montre la figure (1.13). Les structures se forment à partir des effets combinés de la modulation d'amplitude de la lumière qui se produit lors de son passage dans le milieu Kerr et la diffraction qui agit sur l'onde lorsqu'elle parcourt le chemin en aller-retour entre le milieu et le miroir.

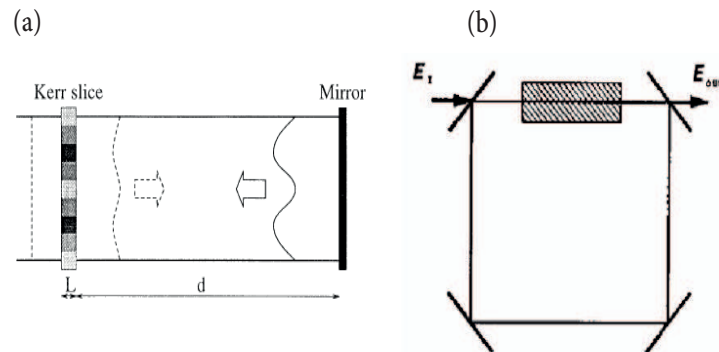


FIGURE 1.13 – schéma descriptif du système à rétro-action optique proposé dans [36, 37].
(b) : Cavité avec quatre miroirs réfléchissants

En 1997, Stéphane Coen a réussi à prouver la possibilité d'obtenir des structures dissipatives dans des cavités où le milieu non linéaire est une fibre optique [38]. La génération de ces structures comme nous le verrons en détail dans le troisième chapitre est le résultat d'un équilibre entre l'instabilité de modulation et la dispersion chromatique. Cette expérience c'est basée sur les résultats obtenus par l'équipe de Nakazawa où le régime d'instabilité de modulation a été obtenu pour des puissances élevées avec des cavités de faible finesse.

Le montage expérimental est constitué essentiellement comme le montre la figure (1.14) des éléments suivants :

Le laser qui permet de délivrer les puissances nécessaires afin de déclencher les effets non-linéaires, un contrôleur de polarisation permettant de maintenir la polarisation du mode de propagation et éviter ainsi le problème de biréfringence. L'originalité de ce travail à l'époque était d'incorporer un coupleur optique qui était un élément clef dans

cette conception puisque sa présence dans le montage a permis de réaliser un circuit tout optique et diminuer par conséquent les pertes dans le système. Un autre point important dans cette expérience était la mise en place d'un dispositif de stabilisation constitué d'un étireur de fibre piézo-électrique avec lequel on pouvait modifier la longueur de la fibre et contrôler ainsi la phase accumulée par l'onde dans le but d'assurer la résonance du système. Cette expérience a été reprise et améliorée légèrement par la suite par F.Léo [32, 39] permettant de générer un signal périodique avec un taux de répétition qui a atteint $1.6THz$ en utilisant comme milieu une fibre standard.

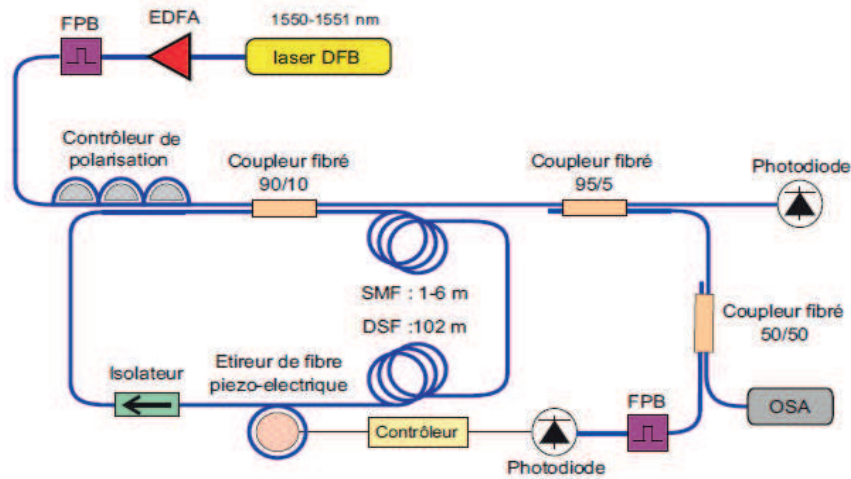


FIGURE 1.14 – Schéma descriptif du montage expérimental de la cavité fibrée [40]

Le but essentiel de notre travail, consiste à améliorer les performances de la cavité où nous allons essayer d'augmenter le taux de répétition des structures périodiques ainsi que la capacité de stockage temporaire des données. Pour ce faire, nous avons opté pour l'utilisation dans la cavité, d'un nouveau type de fibres optiques appelées fibres optiques à cristaux photoniques ou microstructurées. L'étude détaillée de ces fibres fera l'objet du prochain chapitre.

1.6 Conclusion

Nous avons présenté dans ce chapitre un état d'art sur les systèmes dynamiques, nous avons détaillé les méthodes analytiques permettant de déterminer leur stabilité ainsi que les différents types de solutions qui émergent de ces systèmes où nous nous sommes intéressés plus aux systèmes dissipatifs. En optique, ces derniers sont caractérisés par la présence simultanée de la non-linéarité et de la diffraction/dispersion de la lumière. La combinaison de ces deux effets permet à ces systèmes d'admettre une grande variété de structures dissipatives périodiques et localisées.

Chapitre 2

Propagation de la lumière dans les fibres à cristaux photoniques

2.1 Introduction

Ce chapitre a pour but d'introduire les nouvelles générations de fibres optiques dites fibres à cristaux photoniques ou microstructurées (MOF: Microstructured Optical Fiber, PCF: Photonic Crystal Fiber).

Dans un premier temps, un bref historique nous permettra de mieux cerner le contexte d'apparition des PCF et l'intérêt qu'elles présentent par rapport aux fibres standards. Par la suite nous présenterons les types des PCF et les mécanismes qui régissent la propagation de la lumière dans ces dernières. On introduira les concepts de guidage par réflexion totale interne modifiée (RTIM) qui se produit dans les fibres à coeur plein et le guidage par bande interdite photonique (BIP) dans les fibres à coeur creux. Nous verrons ensuite quelle est l'influence de la géométrie de la PCF sur les différentes caractéristiques d'un mode de propagation donné.

La deuxième partie de ce chapitre sera dédiée à l'étude des différents phénomènes (linéaires et non linéaire) liés à la propagation d'une onde lumineuse dans les PCF à guidage par RTIM. Pour finir nous présenterons l'équation de Schrödinger non linéaire qui régit cette propagation en tenant compte de tous les phénomènes étudiés.

2.2 De la fibre optique standard vers la fibre à cristaux photoniques

A cause de ses propriétés intrinsèques [41], la fibre optique conventionnelle a commencé à montrer ses limitations au début des années 90 ce qui a influencé considérablement la qualité de propagation des impulsions lumineuses. Ceci était la conséquence directe liée à la demande croissante en débit, en puissance et en bande passante. Des nouvelles techniques (amplificateurs optiques, multiplexage) ont été alors mises au point afin de corriger ces problèmes ce qui a permis une amélioration considérable de

la qualité des transmissions via fibre optique ces dernières années, de ce fait des débits pouvant atteindre des centaines de GBits/s ont pu être obtenus.

Malgré tous ces efforts, le potentiel de la fibre optique demeure inexploité à 100% [42]. Les recherches se sont orientées vers l'utilisation d'autres structures appelées cristaux photoniques dans le but de guider la lumière. Leur principale caractéristique se base sur la variation périodique de l'indice de réfraction selon une ou plusieurs dimensions dans l'espace figure(2.1) et présentent par conséquent des bandes interdites photoniques d'où la notation de structures à "BIP" [43].

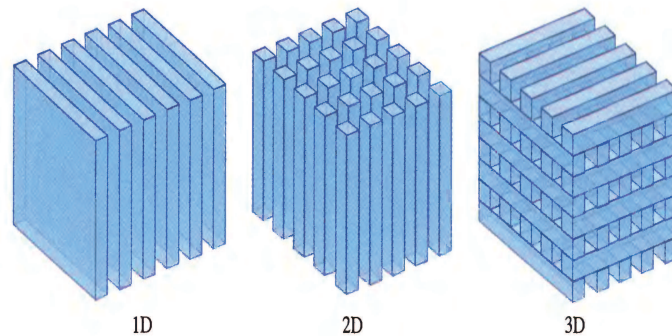


FIGURE 2.1 – Structures photoniques périodiques en une, deux et trois dimensions

Leur émergence a commencé fin des années 80 avec les travaux de E.Yablonovitch qui a réussi à faire l'analogie entre la propagation d'un signal électrique dans un cristal et la propagation d'une onde électromagnétique dans une structure périodique. [44, 45]. Le but essentiel de ses travaux était de pouvoir contrôler et annuler l'émission spontanée des photons à une longueur d'onde λ dans un milieu lorsqu'il interagit avec un champ externe en exploitant la bande interdite photonique. Pour cela il a proposé une structure diélectrique tridimensionnelle de période $\frac{\lambda}{2}$.

En pratique, il s'est avéré que la réalisation des structures à BIP en trois dimensions était très délicate à cause des dimensions très petites des motifs à réaliser [46], cela a conduit les chercheurs à partir vers des structures à BIP en deux dimensions. Ces dernières ont été adaptées par la suite pour concevoir les premières fibres optiques à cristaux photoniques. C'est en 1996 que la première fibre à cristaux photoniques [47] a été conçue, le guidage dans cette PCF est réalisé par réflexion totale interne dans le coeur constitué de silice, le même groupe de recherche a pu concevoir en 1999, une fibre PCF à guidage BIP en utilisant cette fois une fibre ayant un indice du coeur (l'air) inférieur à celui de la gaine (air-silice) [48]

La PCF peut être définie comme étant une fibre en silice dont la gaine a été modifiée en incluant des trous d'air à l'échelle de la longueur d'onde tout le long de l'axe de propagation, le coeur quant à lui peut être un trou d'air ou laissé en silice. Le diamètre des trous d'air est noté d et la distance entre chaque deux trous voisins est appelée pitch et est notée Λ . En général les PCF sont caractérisées par la fraction d/Λ comme le montre

la figure (2.2)

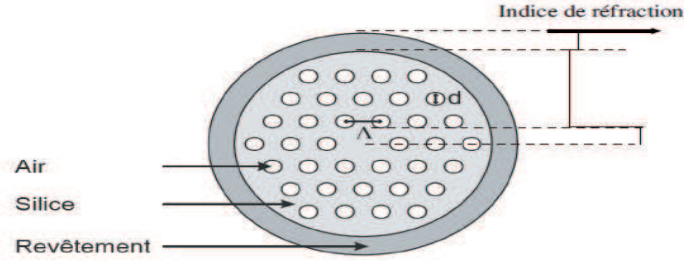


FIGURE 2.2 – Section transversale d'une PCF à coeur plein avec d le diamètre des trous et Λ la distance entre deux trous voisins [49]

A l'heure actuelle la PCF est entrain de devenir la nouvelle classe des fibres optiques puisqu'elle permet l'amélioration des propriétés des fibres standards en apportant plus de degrés de liberté, ce qui lui permet de prétendre à des meilleures performances.

2.3 Mécanismes de guidage dans une PCF

Afin de mieux comprendre les mécanismes du guidage de la lumière dans les PCF, nous devons d'abord définir la notion de mode de propagation dans le cas d'un milieu homogène (indice de réfraction constant) puis celle de bande interdite photonique (BIP) dans un milieu ayant un indice périodique.

Dans un milieu diélectrique quelconque d'indice de réfraction n , la propagation d'une onde électromagnétique monochromatique est régie par les équations de Maxwell [50] :

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{E}} = -\frac{\partial \vec{\mathbf{B}}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{\mathbf{H}} = \vec{\mathbf{J}} + \frac{\partial \vec{\mathbf{D}}}{\partial t} \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{D}} = \rho_f \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\mathbf{B}} = 0 \quad (2.4)$$

Où $\vec{\mathbf{E}}$ et $\vec{\mathbf{H}}$ représentent les vecteurs des champs électriques et magnétiques, $\vec{\mathbf{D}}$ et $\vec{\mathbf{B}}$ correspondent respectivement aux flux de densité électrique et magnétique, ρ_f est la densité de charge électrique et \mathbf{J} est la densité du courant, ces deux derniers paramètres

sont nuls dans un diélectrique. Les expressions des champs \vec{E} et \vec{H} sont données comme suit :

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \vec{h}(\vec{r}) \times \exp(i\omega t) \quad (2.5)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{e}(\vec{r}) \times \exp(i\omega t) \quad (2.6)$$

Où \vec{e} et \vec{h} correspondent aux amplitudes complexes des champs électriques et magnétiques, ω représente la pulsation propre $\omega = 2\pi c/\lambda$ (où c et λ sont respectivement la vitesse de la lumière dans le vide et la longueur d'onde).

À partir des équations (2.1 – 2.6) nous pouvons obtenir l'équation de propagation du champ électrique (ou magnétique) dans un milieu linéaire, homogène, isotrope et sans perte donnée par l'équation de Helmholtz [50] :

$$\nabla^2 E + n^2(\omega) \frac{\omega^2}{c^2} E = 0 \quad (2.7)$$

2.3.1 Propagation dans un milieu homogène infini

Dans le cas d'un milieu homogène la solution de l'équation de Helmholtz est appelée mode de propagation ; son expression est donnée sous forme d'une onde plane :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (2.8)$$

Où \vec{E}_0 représente l'amplitude complexe de l'onde qui se propage dans le milieu et \vec{k} est le vecteur d'onde indique la direction de propagation avec :

$$k = n \frac{\omega}{c} \quad (2.9)$$

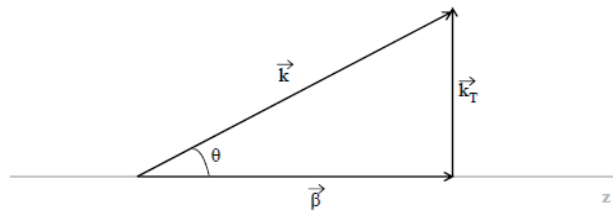


FIGURE 2.3 – Composante transverse \vec{k}_t et longitudinale $\vec{\beta}$ du vecteur d'onde \vec{k} , l'angle θ est considéré par rapport à l'axe \vec{z}

Comme le montre la figure (2.3), le vecteur d'onde peut être décomposé suivant l'axe \vec{z} considéré comme l'axe de propagation en une composante longitudinale communément appelée constante de propagation et est notée β et une composante transverse notée k_t selon l'axe des \vec{x} , on aura donc :

$$\vec{k} = \vec{\beta} + \vec{k}_t \quad (2.10)$$

$$\beta = k \cos \theta = n_{eff} \frac{\omega}{c} \quad (2.11)$$

Où n_{eff} est considéré comme étant l'indice effectif vu par le mode de propagation. Nous pouvons déduire ainsi la condition pour laquelle un mode ayant un indice n_{eff} sera autorisé à se propager dans un milieu d'indice n_{sup} et qui est donnée comme suit :

$$n_{eff} \leq n_{sup} \quad (2.12)$$

Ces résultats sont donnés sous forme de diagrammes de dispersion où les modes de propagation seront représentés par le couple (n_{eff}, λ) . Comme le montre la figure (2.4), la zone où les modes sont autorisés à se propager (partie en violet) ont tous un indice effectif qui satisfait la relation (2.12). Dans le cas contraire ($n_{eff} > n_{sup}$) la propagation sera

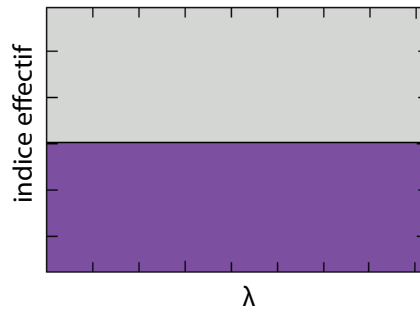


FIGURE 2.4 – Diagramme de dispersion calculé dans le cas d'un milieu homogène infini [55]

interdite (zone en gris). Il est clair aussi que dans la zone où la propagation est autorisée chaque longueur d'onde correspond à plusieurs indices effectifs et donc à plusieurs modes de propagation. C'est pour cela qu'on a obtenu une continuité de modes qui auront des indices effectifs compris entre un indice bas et celui du milieu.

2.3.2 Propagation dans un milieu périodique infini

Dans le cas des structures périodiques comme les cristaux photoniques, la permittivité diélectrique ϵ devient elle aussi une fonction périodique selon un rayon \vec{R} qui caractérise

la façon par laquelle un réseau unitaire de micros-structures va se répéter tout le long du milieu, la permittivité s'écrit donc sous la forme suivante :

$$\epsilon(\vec{r}) = \epsilon(\vec{r} + \vec{R}) \quad (2.13)$$

Les solutions de l'équation de propagation obéissent alors au théorème de Bloch qui stipule que la périodicité de la permittivité diélectrique entraîne une périodicité des amplitudes du champ électrique et magnétique et sont appelés modes de Bloch [51, 52, 53]. Ces modes s'écrivent sous la forme d'un produit d'une onde plane est d'une fonction \vec{g} qui décrit la périodicité :

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \vec{g}(\vec{r}) \exp i(\omega t - \vec{k}\vec{r}) \quad (2.14)$$

Avec :

$$\vec{g}(\vec{r}) = \vec{g}(\vec{r} + \vec{R}) \quad (2.15)$$

La résolution analytique de l'équation de propagation devient dans ce cas impossible, pour cela plusieurs méthodes numériques ont été établies [54], dans notre cas nous avons choisi de rapporter les résultats obtenus par la méthode de décomposition en ondes planes [55, 56] et qui sont représentés par les diagrammes de dispersion ou diagrammes de bandes (en raison de l'apparition de bandes spectrales contrairement au cas homogène), figures (2.5.a et 2.5.b).

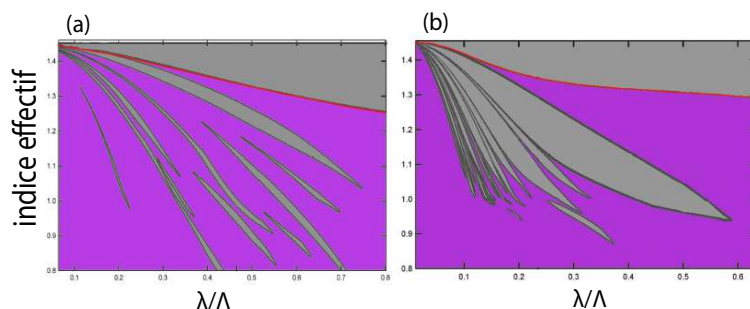


FIGURE 2.5 – Diagrammes de bandes pour deux milieux périodiques en deux dimensions avec (a) : $d/\Lambda = 0.8$ et (b) : $d/\Lambda = 0.98$ [55]

La présence de cette périodicité introduit des changements radicaux sur la manière dont les modes vont apparaître et se propager comparé au cas homogène.

Le premier changement à noter est que l'indice du milieu qui était constant dans le cas du milieu homogène et non dispersif devient fortement dépendant de la longueur d'onde (ligne rouge sur les figures (2.5.a et 2.5.b), il tend vers l'indice le plus haut n_{sup} (celui de la silice présente dans la structure) pour les petites longueurs d'onde et diminue au fur et à mesure que la longueur d'onde augmente, on parle alors d'indice équivalent du milieu qui est communément noté n_{FSM} (Fundamental Space filling Mode) et dont

la valeur est calculée à partir d'expressions empiriques que nous allons introduire dans la prochaine section de ce chapitre.

Le deuxième changement est l'apparition de bandes fréquentielles pour lesquelles aucune solution de l'équation de propagation n'est trouvée, malgré qu'elles apparaissent dans des zones où la condition de propagation (2.12) du cas homogène est satisfaite. Ceci est expliqué par le fait que la propagation des photons dans un milieu périodique est analogue à celle des électrons dans un cristal atomique où la propagation est interdite pour une certaine gamme de fréquence, ces dernières sont appelées Bandes Interdites Photoniques (BIP).

2.3.3 Guidage par réflexion totale interne modifiée (RTIM)

Le principe du guidage par réflexion totale interne est basé sur le confinement et la propagation de la lumière dans le coeur de la fibre, pour cela le mode doit être autorisé à se propager dans le coeur ($n_{eff} < n_{coeur}$) et interdit dans la gaine ($n_{eff} > n_{gaine}$). Dans les fibres standards à saut d'indice il suffit donc de choisir le milieu du coeur avec un indice supérieur à celui de la gaine afin d'obtenir le guidage :

$$n_{gaine} < n_{eff} < n_{coeur}$$

Afin d'assurer le guidage par réflexion totale interne dans les fibres PCF, on choisit un coeur solide en silice avec un indice supérieur, il sera entouré d'un réseau de trous d'air incrustés dans la silice qui constitue la gaine, si son indice moyen (n_{FSM}) est inférieur à celui du coeur, le guidage de la lumière devient analogue à celui des fibres standards, on parle dans ce cas de guidage par réflexion totale interne modifiée (RTIM). La condition de propagation sera donc :

$$n_{FSM} < n_{eff} = \frac{\beta}{k_0} < n_{coeur}$$

où β est la constante de propagation du mode le long de l'axe de la fibre et $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ est le nombre d'onde.

Les fibres PCF à RTIM figure (2.6.a) ont été conçues la première fois en 1996 [47], et continuent à nourrir l'intérêt des recherches vues les nombreux avantages et solutions qu'elles peuvent apporter. En réalité, les différentes possibilités d'arrangement géométrique des trous d'air dans la gaine offrent une infinité de caractéristiques impossible à obtenir avec une fibre standard, on peut citer par exemple la conception de fibre infiniment monomode [57], le contrôle de la dispersion chromatique [58] ainsi que la génération de supercontinuum [59].

2.3.4 Guidage par bande interdite photonique (BIP)

Ce type de guidage était la raison pour laquelle les fibres PCF ont été conçues, il a été appliqué la première fois en 1999 [48]. Son originalité réside dans le fait de pouvoir transporter l'onde lumineuse dans le coeur de la fibre dont l'indice est inférieur à celui de la gaine.

Le coeur de cette fibre sera composé d'un trou d'air ($n_{coeur} = 1$) et entouré d'une gaine constituée de trous d'air incrustés dans la silice et dont l'indice moyen n_{FSM} est supérieur à celui du coeur. L'apparition de BIP dans la gaine (puisque c'est un milieu périodique) va interdire à des modes de se propager pour une certaine gamme de fréquences, pour l'une de ces dernières un mode se trouvera alors confiné dans le coeur où il pourra se propager. La détermination des fréquences BIP est étroitement liée à l'arrangement des trous d'air dans la gaine, ceci veut dire qu'à chaque géométrie (d/Λ) correspondra une BIP, qui sera caractérisée par deux indices n_{bipinf} et n_{bipsup} .

Pour résumer, si à une fréquence donnée, la valeur de l'indice effectif du mode est comprise entre les indices de la BIP et inférieur à celle du coeur, ce dernier pourra se propager dans le coeur grâce au guidage par bande interdite photonique :

$$n_{bipinf} < n_{eff} < n_{bipsup}$$

$$n_{eff} \leq n_{coeur}$$

Les PCF à BIP offrent elles aussi des nouvelles perspectives du fait que la lumière va se propager dans l'air et non dans un coeur solide, les principales propriétés de ces fibres sont :

- une faible non linéarité,
- un seuil de dommage très élevé,
- propagation des fortes puissances,
- possibilité de doper le coeur avec des gaz spéciaux afin d'améliorer encore plus leurs performances.

En dépit des avantages qu'elle peut offrir la PCF à BIP reste limitée à cause de la restriction du spectre où existent les bandes interdites .

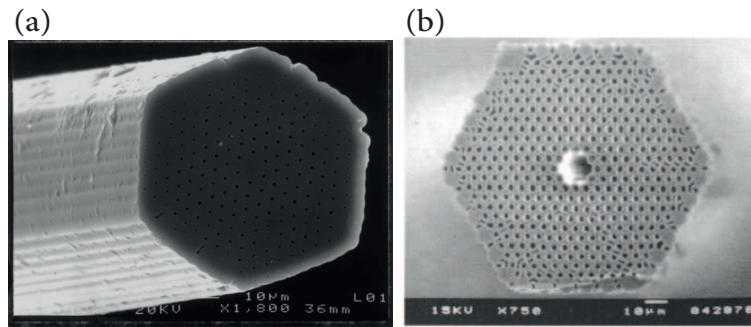


FIGURE 2.6 – Images au MEB des sections transverses de deux PCF proposées dans [57, 48], (a) PCF avec un coeur plein à RTIM, (b) PCF avec un coeur creux à guidage BIP.

2.4 Caractéristiques de propagation des PCF RTIM

2.4.1 L'indice effectif et la fréquence normalisée

La complexité de la structure des fibres PCF à RTIM (présence des trous d'air dans la gaine) fait que les méthodes de modélisation des fibres standards deviennent inexploitable [60].

Dans ce cas, la modélisation s'effectue à l'aide de méthodes numériques telles que la méthode de décomposition en ondes planes, méthode des différences finis, méthode des fonctions localisées ou la méthode des éléments finis (FEM, Finit Element Method) [61, 60, 62]. Sachant que tous ces modèles sont plutôt robustes et leurs temps de calcul sont relativement longs, un modèle plus simple appelé modèle de l'indice effectif a été adapté par T.A.Birks et al en 1997 [57, 63] dont le principe est d'évaluer d'abord la structure périodique (air-silice) de la gaine puis la remplacer par un indice équivalent noté n_{FSM} .

En se basant sur les résultats obtenus par la méthode FEM, Saitoh et al [64, 65] ont proposé des formules analytiques empiriques afin de déterminer le n_{FSM} , le n_{eff} et la fréquence normalisée V avec une précision de 99%.

Néanmoins pour la validité de ce modèle, des conditions sur la longueur d'onde et les paramètres géométriques de la fibre sont à considérer tels que :

- $V > 0.85$
- $0.2 < d/\Lambda < 0.8$
- $\lambda/\Lambda < 2$

2.4.1.1 La fréquence normalisée

La fréquence normalisée est un paramètre sans dimensions qui dépend de la longueur d'onde et des caractéristiques opto-géométriques de la fibre. Elle détermine la nature monomode et multimode de cette dernière, dans une fibre standard elle est donnée par :

$$V = \frac{2\pi a}{\lambda} \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{gaine}^2} \quad (2.16)$$

Si $V < 2.405$, la fibre est monomode sinon ($V > 2.405$) la fibre est considérée comme multimode. À partir de ce résultat, on peut déduire la longueur d'onde critique λ_c pour laquelle la fibre sera monomode ou multimode :

$$\lambda_c = \frac{2\pi a}{V} \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{gaine}^2} \quad (2.17)$$

L'équipe de Saitoh ont démontré l'applicabilité de l'équation (2.16) aux fibres PCF [65] où l'indice de la gaine de la fibre standard est remplacé par le n_{FSM} dans les PCF, cette approche permet donc de garder la même condition pour avoir une fibre monomode ($V < 2.405$). L'expression de la fréquence normalisée sera donnée dans ce cas par :

$$V = \frac{2\pi a_{eff}}{\lambda} \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{FSM}^2} = \sqrt{U^2 + W^2} \quad (2.18)$$

Avec :

$$U = \frac{2\pi a_{eff}}{\lambda} \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{eff}^2} \quad (2.19)$$

$$W = \frac{2\pi a_{eff}}{\lambda} \sqrt{n_{eff}^2 - n_{FSM}^2} \quad (2.20)$$

Où n_{eff} représente l'indice du mode fondamental, λ est la longueur d'onde et a_{eff} est le rayon effectif du coeur de la fibre égale à $\Lambda/3$.

L'équation (2.18) est donc équivalente à celle d'une fibre standard, la différence réside dans la difficulté à évaluer analytiquement le n_{FSM} du fait de sa dépendance de la longueur d'onde, pour y remédier, des expressions empiriques qui ne dépendent que des paramètres géométriques de la PCF (d et Λ) ont été établies afin de déterminer W et V :

$$V\left(\frac{\lambda}{\Lambda}, \frac{d}{\Lambda}\right) = A_1 + \frac{A_2}{1 + A_3 \exp(A_4 \lambda / \Lambda)} \quad (2.21)$$

$$W\left(\frac{\lambda}{\Lambda}, \frac{d}{\Lambda}\right) = B_1 + \frac{B_2}{1 + B_3 \exp(B_4 \lambda / \Lambda)} \quad (2.22)$$

i	1	2	3	4
a_{i0}	0,54808	0,71041	0,16904	-1,52736
a_{i2}	-10,43248	47,41496	18,96849	1,93229
a_{i3}	8,22992	-437,50962	-42,4318	3,89
b_{i1}	5	1,8	1,7	-0,84
b_{i2}	7	7,32	10	1,02
b_{i3}	9	22,8	14	13,4
c_{i0}	-0,0973	0,53193	0,24876	5,29801
c_{i1}	-16,70566	6,70858	2,72423	0,05142
c_{i2}	67,13845	52,04855	13,28649	-5,18302
c_{i3}	-50,25518	-540,66947	-36,80372	2,7641
d_{i1}	7	1,49	3,85	-2
d_{i2}	9	6,58	10	0,41
d_{i3}	10	24,8	15	6

TABLE 2.1 – Les coefficients empiriques utilisés dans les équations (2.23) et (2.24)

Avec :

$$A_i = a_{i0} + a_{i1} \left(\frac{d}{\Lambda}\right)^{b_{i1}} + a_{i2} \left(\frac{d}{\Lambda}\right)^{b_{i2}} + a_{i3} \left(\frac{d}{\Lambda}\right)^{b_{i3}} \quad (2.23)$$

$$B_i = c_{i0} + c_{i1} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^{d_{i1}} + c_{i2} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^{d_{i2}} + c_{i3} \left(\frac{d}{\Lambda} \right)^{d_{i3}} \quad (2.24)$$

La figure (2.7.a) représente la variation de V_{eff} en fonction de la longueur d'onde normalisée λ/Λ pour des valeurs fixes de d/Λ . On remarque que l'on se rapproche du caractère monomode de la fibre lorsque la longueur d'onde augmente. Cependant, la caractéristique la plus intéressante est celle de pouvoir obtenir une fibre monomode pour une large fenêtre spectrale, à condition de respecter des propriétés géométriques précises. On voit que si $d/\Lambda \leq 0.4$, la valeur de la fréquence normalisée n'atteint jamais le seuil de 2.405 et reste par conséquent tout le temps monomode. Ce concept a été introduit la première fois par l'équipe de T. A. Birks et al en 1997 [57] lorsqu'ils ont démontré qu'une fibre PCF à RTIM pouvait présenter un caractère monomode pour n'importe quelle longueur d'onde en trouvant juste les bonnes dimensions de la fibre (d et Λ) comme le montre la figure (2.7.b).

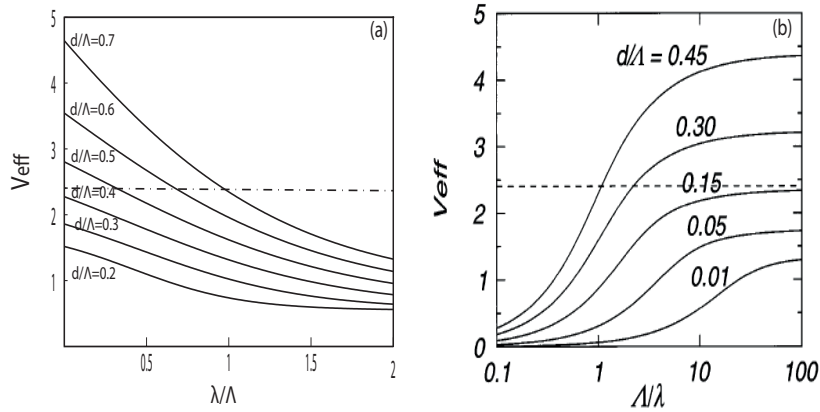


FIGURE 2.7 – Variation de la fréquence normalisée en fonction de λ/Λ pour différentes valeurs de d/Λ calculée par (a) équation (2.21), (b) calculée par [57]

2.4.1.2 L'indice effectif

Comme définis dans la section précédente le n_{SFM} et le n_{eff} représentent respectivement l'indice effectif de la gaine microstructurée et l'indice effectif vu par le mode se propageant par réflexion totale dans le coeur en silice ($n = 1.45$). Leurs expressions peuvent être déduites directement à partir des valeurs calculées de V et W ainsi que des équations (2.18) et (2.19) sans passer par une résolution numérique [66] :

$$n_{eff} = \sqrt{n_{coeur}^2 - \frac{3\lambda^2(V^2 - W^2)}{4\pi^2\Lambda^2}} = \sqrt{2.1025 - \frac{3\lambda^2(V^2 - W^2)}{4\pi^2\Lambda^2}} \quad (2.25)$$

$$n_{FSM} = \sqrt{n_{coeur}^2 - \frac{3\lambda^2 V^2}{4\pi^2 \Lambda^2}} = \sqrt{2.1025 - \frac{3\lambda^2 V^2}{4\pi^2 \Lambda^2}} \quad (2.26)$$

Les figures (2.8.a) et (2.8.b) montrent l'évolution de ces deux indices en fonction la longueur d'onde et en fonction du rapport $\frac{d}{\Lambda}$. En premier lieu, on constate que lorsque la longueur d'onde est petite (dans la figure λ est normalisée par rapport à Λ), ils tendent vers l'indice de la silice puis ils diminuent progressivement au fur et à mesure que λ augmente.

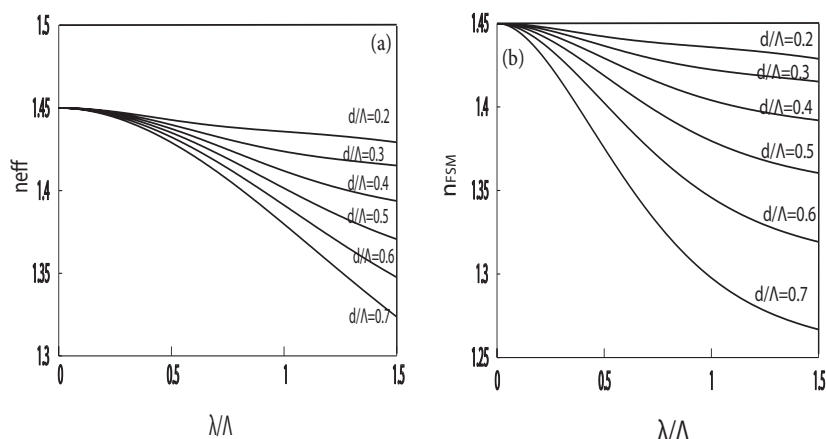


FIGURE 2.8 – a. Variation de l'indice effectif (équation 2.25) en fonction de λ/Λ . b. Variation du n_{FSM} (équation 2.26) en fonction de λ/Λ pour différentes valeurs de d/Λ

D'un autre côté, il est clair que le rapport $\frac{d}{\Lambda}$ joue un rôle prépondérant dans la détermination de ces indices. Si ce dernier est petit cela signifie que la portion de la silice dans la gaine est importante comparée à celle de l'air présent dans les trous. Dans ce cas, l'évolution des indices effectifs en fonction de λ se fait très lentement et leurs valeurs restent au voisinage de celle de la silice. Par contre, plus le $\frac{d}{\Lambda}$ augmente et plus la silice va diminuer dans la structure de la gaine, ce qui va entraîner une chute de plus en plus rapide des indices en fonction de la longueur d'onde.

2.4.2 L'ouverture numérique

Dans une fibre standard, la condition de réflexion totale interne est assurée grâce aux lois de l'optique géométrique établies par Snell-Descartes résumées sur la figure (2.9.a) [67]. Ces deux lois (réflexion et réfraction) décrivent le comportement de l'onde lumineuse considéré comme un segment de droite à l'interface qui sépare deux milieux d'indices différents. Si l'angle du rayon incident est inférieur ou égal à un angle Φ_{max} (communément appelé angle d'acceptance), alors ce rayon va se propager par réflexion totale à l'interface coeur-gaine de la fibre. En revanche une partie de ce rayon sera réfractée dans la gaine entraînant une atténuation de la puissance lumineuse.

La figure (2.9.b) illustre le principe de l'apparition d'un cône d'acceptance à partir des rayons Φ_{max} où tous les angles injectés dans ce cône vont se propager dans le coeur par réflexion totale interne.

L'ouverture numérique (ON) peut alors être définie tout simplement comme étant le paramètre qui décrit ce cône, et va être exprimée comme suit :

$$ON = \sin(\Phi_{max}) = \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{gaine}^2} \quad (2.27)$$

De ce fait, on peut déduire que plus la valeur de l'ON est grande, plus le nombre de vecteurs se propageant dans le coeur de la fibres sans subir de pertes dues à la réfraction dans la gaine sera important. Dans les fibres PCF on peut donc remplacer l'indice de la gaine par le n_{FSM} , l'équation (2.27) devient dans ce cas :

$$ON = \sin(\Phi_{max}) = \sqrt{n_{coeur}^2 - n_{FSM}^2} \quad (2.28)$$

Une autre méthode plus intéressante a été proposée par N.Mortensen [68, 69] où il donne une estimation de la valeur de l'ouverture numérique en utilisant juste l'aire effective (A_{eff}) et la longueur d'onde sans besoin de calculer le n_{FSM} :

$$ON = \sin(\Phi_{max}) \approx (1 + \frac{\pi A_{eff}}{\lambda^2})^{-1/2} \quad (2.29)$$

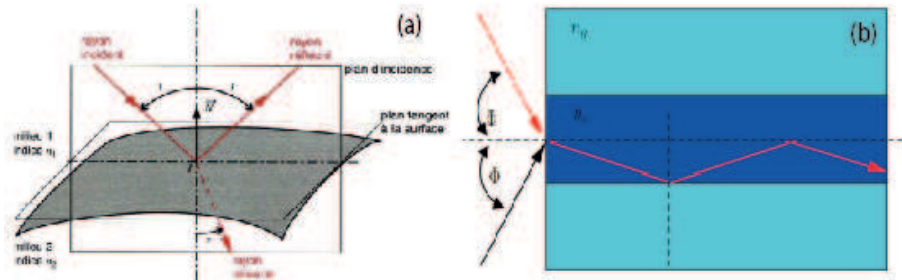


FIGURE 2.9 – (a) : Schéma illustrant les lois de réflexion et réfraction de Snell-Descartes, (b) : Description du cône d'acceptance dans une fibre standard à saut d'indice[66]

2.4.3 Les pertes optiques

L'atténuation est le paramètre qui caractérise la perte en puissance de l'onde lumineuse lorsqu'elle se propage dans une fibre optique de longueur L, la puissance transmise à la sortie de cette fibre s'exprime comme suit [50] :

$$P_t = P_0 \exp(-\alpha L) \quad (2.30)$$

Où P_0 et P_t représentent respectivement la puissance à l'entrée et à la sortie de la fibre et α est le coefficient d'atténuation exprimé en Np/Km (Np :Nepere) et L en Km.

Il est fréquent d'exprimer ce coefficient en dB/Km, on obtient donc :

$$\alpha_{dB} = \frac{-10}{L} \log \left(\frac{P_t}{P_0} \right) = 4.343\alpha \quad (2.31)$$

Les principaux facteurs responsables de ces pertes sont les mêmes que celles des fibres standards et peuvent être classées en deux catégories :

2.4.3.1 Les pertes par absorption

Une partie de l'énergie d'une onde lumineuse peut être absorbée lorsqu'elle se propage dans une fibre optique. On parle alors de pertes par absorption, elles sont dues essentiellement à deux mécanismes majeurs intrinsèques au matériau :

- a. L'absorption moléculaire : elle correspond à l'énergie d'excitation des vibrations du réseau de molécules qui constitue le matériau, ce type d'absorption n'apparaît que lorsque la fréquence de l'onde électromagnétique est voisine de celle de la résonance moléculaire (à partir de $1600nm$ dans le cas de la silice).
- b. L'absorption électronique : Elle correspond à l'énergie E_g suffisante pour arracher un électron de sa bande de valence vers la bande de conduction. Cette transition est conditionnée par le fait que la longueur d'onde soit inférieure à hc/E_g (h :constante de Plank, c : la célérité de la lumière, $E_g \approx 9ev$ pour le SiO_2), ce qui correspond à $150nm$ pour une fibre en silice.

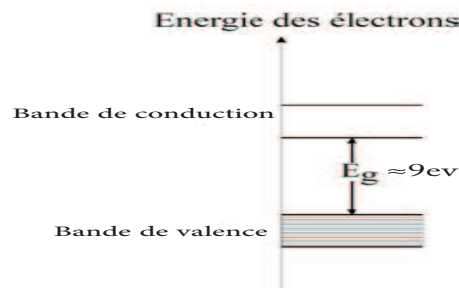


FIGURE 2.10 – Les niveaux d'énergie de la silice forment une bande de valence et une bande de conduction séparées par une bande interdite de largeur E_g

En plus de ces deux facteurs, la présence d'impuretés dans le milieu (introduites pendant le processus de fabrication de la fibre) est considérée comme un autre facteur extrinsèque pouvant lui aussi provoquer le phénomène d'absorption, le cas le plus répandu est l'absorption par liaison OH.

2.4.3.2 Les pertes par diffusion

La nature vitreuse de la silice utilisée dans les fibres (les molécules de SiO_2 sont connectées entre elles d'une manière aléatoire) induit des micro-fluctuations de l'indice de réfraction. Il en résulte que chaque fois où l'onde lumineuse rencontrera une irrégularité de dimension inférieure à sa longueur d'onde elle sera diffusée dans toutes les directions. Ce phénomène est connu sous le nom de diffusion de Rayleigh. Certains des rayons diffusés ne satisferont plus la condition de réflexion totale interne entre le coeur et la gaine ce qui engendre un couplage entre une partie du mode du coeur avec un des modes de la gaine et provoque ainsi une perte de puissance.

2.4.3.3 Les pertes par confinement

Les pertes par confinement peuvent être définies comme un couplage de puissance entre le mode du coeur avec ceux de la gaine induisant une diminution de la puissance transmise ; ces pertes sont relatives à un mauvais confinement dans le coeur.

Dans les deux types de fibres (à coeur creux ou solide), les pertes sont dues au nombre fini des trous d'air qui existent dans la section transversale de la fibre. Par conséquent tous les modes guidés dans les PCF présentent ce genre de pertes. Dans les PCF à coeur solide par exemple, la lumière est confinée dans la région centrale à cause des trous d'air. Donc la lumière va s'en éloigner si le confinement créé par ces trous est inadéquat. Par conséquent, une étude détaillée doit être effectuée afin de déterminer le nombre de trous d'air, le diamètre d , l'espacement entre deux trous Λ ainsi que le ratio entre eux permettant d'obtenir les pertes les plus faibles possibles [70].

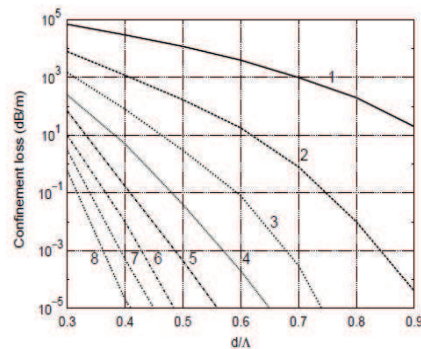


FIGURE 2.11 – Pertes par confinement évaluées à 1550nm en fonction d/Λ pour différents nombres de trous [71]

Comme le montre la figure (2.11) plus le nombre de trous augmente (les courbes de 1 à 8) et plus la fraction d'air dans la gaine augmente ce qui donne moins de pertes et un meilleur confinement. On obtient la même chose si on évalue les pertes par confinement en fonction du d/Λ où plus ce terme augmente (une augmentation de Λ ou une diminution de d) meilleur est le confinement.

Ce couplage de mode peut devenir encore plus important si la fibre subit des courbures (torsions, flexions....), on parle alors de pertes par courbures.

2.4.3.4 Bilan des pertes totales dans une fibre

Afin d'évaluer le coefficient d'atténuation α , une équation regroupant les différentes pertes citées précédemment sous forme d'une somme tel que [71] :

$$\alpha_{dB} = A/\lambda^4 + B + \alpha_{OH} + \alpha_{IR} \quad (2.32)$$

Avec A, B, α_{OH} et α_{IR} représentent respectivement le coefficient de diffusion Rayleigh, les pertes dues aux imperfections, le coefficient d'absorption OH et le coefficient d'absorption infrarouge (moléculaire).

2.4.4 La dispersion chromatique

La réponse linéaire d'un milieu diélectrique soumis à un champ électromagnétique est proportionnelle à la fréquence de ce dernier. De ce fait, l'indice de réfraction n d'une fibre optique est ainsi proportionnel à la fréquence du champ électromagnétique qui est lui appliquée. Cette dépendance est communément appelée dispersion chromatique et notée D_{ch} , dans ce cas la fibre optique est le milieu dispersif.

La dispersion se traduit par une différence de vitesse de phase ($V(\omega) = c/n(\omega)$) entre les différentes longueurs d'onde qui composent une seule impulsion lorsqu'elle se propage dans la fibre, induisant ainsi son élargissement temporel de cette impulsion.

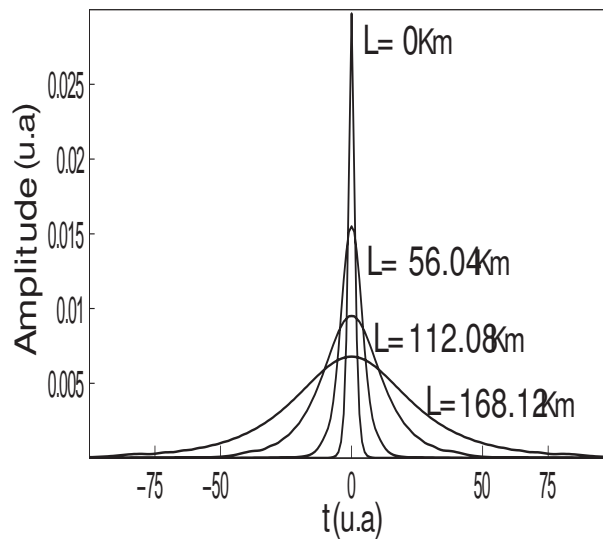


FIGURE 2.12 – Élargissement d'une impulsion gaussienne en fonction de la distance dans une fibre standard avec $D = 0.07ps/Km.nm$

Les courbes de la figure (2.12) illustrent l'influence de la dispersion chromatique ($D_c = 0,07ps/Km.nm$) sur la propagation d'une impulsion lumineuse gaussienne dans une fibre optique pour différentes distances de propagation. Les résultats ont été obtenus par la méthode SSFM (Split Step Fourier Method) [50, 72] et montrent que l'impulsion garde sa forme de départ tout au long de la propagation, néanmoins elle subit un élargissement qui est proportionnel à la distance parcourue.

La largeur de cette impulsion après une longueur L est donnée comme suit [50, 72] :

$$t(L) = t_0 \sqrt{1 + \left(\frac{L}{L_d}\right)^2} \quad (2.33)$$

Où t_0 est la largeur initiale de l'impulsion et L_d la longueur de dispersion qui est définie comme étant la distance à partir de laquelle la largeur t_0 d'une impulsion lumineuse s'élargit avec un facteur de $\sqrt{2}$, son expression est donnée comme suit :

$$L_d = \frac{t_0^2}{|\beta_2|} \quad (2.34)$$

Où β_2 est communément appelé coefficient de dispersion d'ordre 2, il caractérise la variation de la vitesse de groupe en fonction de la fréquence GVD (Group Velocity Dispersion). Sa valeur peut être déterminée en faisant un développement de Taylor de la constante de propagation $\beta(\omega)$ au voisinage de la pulsation centrale ω_0 tel que [50, 72] :

$$\beta(\omega) = \frac{c}{n(\omega)} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \frac{1}{6}\beta_3(\omega - \omega_0)^3 + \frac{1}{24}\beta_4(\omega - \omega_0)^4 + \dots \quad (2.35)$$

Où : $\beta_0 = \beta(\omega_0)$ et $\beta_m = \left(\frac{\partial^m \beta}{\partial \omega^m}\right)$ avec : $m = (1, 2, 3, \dots)$

Le coefficient de dispersion d'ordre 1 correspond à l'inverse de la vitesse de groupe ($\beta_1 = V_g^{-1}$), la dispersion chromatique et β_2 sont reliés par l'expression suivante :

$$D = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \quad (2.36)$$

Les coefficients de dispersion d'ordre 3 et 4 sont en général négligeables devant β_2 , mais si la longueur d'onde avoisine celle du zéro de dispersion λ_{zd} ce qui signifie que $\beta_2 \approx 0$, leur influence devient significative. Dans ce cas, on introduit un autre paramètre qui traduit la variation de la dispersion avec la longueur d'onde appelée pente de dispersion S , cette dernière est reliée à β_3 par la relation suivante [73, 74] :

$$S = \left(\frac{2\pi c}{\lambda^2}\right)^2 \beta_3 + \left(\frac{4\pi c}{\lambda^3}\right) \beta_2 \quad (2.37)$$

Le coefficient de dispersion β_4 peut lui aussi être pris en considération dans le cas où la pente de dispersion reste relativement petite (variation de la dispersion faible pour une large gamme de longueur d'onde)[75].

La dispersion chromatique est due à la contribution de deux phénomènes, la dispersion du matériau D_m et la dispersion du guide D_g tel que : $D = D_m + D_g$

2.4.4.1 La dispersion du matériau

Elle est intrinsèque au diélectrique et causée par l'interaction onde-matière, cette interaction induit l'oscillation des électrons excités dans le diélectrique à la même fréquence du champ appliqué. Ceci se traduit par une variation de l'indice du milieu en fonction de la fréquence.

Cet indice est donné par l'équation de Sellmeier [50, 61] :

$$n(\omega)^2 = 1 + \sum_{k=1}^m \frac{A_k \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_k^2} \quad (2.38)$$

Où A_k et λ_k sont respectivement la fréquence et la force de la k^{eme} résonance. La somme s'étend sur toutes les résonances matérielles qui contribuent dans la gamme de fréquence.

	S_iO_2 pure
A_1	0.69675
A_2	0.408218
A_3	0.890815
λ_1	0.0684043
λ_2	0.1162414
λ_3	9.896161

TABLE 2.2 – Les coefficients de Sellmeier pour une fibre en silice pure [50]

Dans le cas des fibres optiques, les paramètres dépendent des constituants du coeur et sont obtenus expérimentalement pour $m = 3$, pour la Silice pure, les valeurs de ces paramètres sont données dans le tableau (2.2), la dispersion du matériau sera fonction de cet indice et calculée comme suit :

$$D_m = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (2.39)$$

2.4.4.2 La dispersion du guide

La résolution de l'équation de propagation montre que dans le cas d'une fibre optique monomode la distribution transverse du mode de propagation n'est pas totalement confinée dans le coeur de la fibre mais une partie de ce mode se retrouvera tout le temps étalée dans la gaine. Ceci aura comme résultat la non uniformité de l'indice effectif avec lequel ce mode se propage. Cette différence entre les indices vue par le mode est appelée dispersion du guide, son expression est donnée comme suit [64, 65, 76] :

$$D_g = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \quad (2.40)$$

La contribution de cette dispersion va s'ajouter à celle du matériau pour obtenir la dispersion chromatique totale :

$$D = -\frac{\lambda}{c} \left(\frac{d^2 n}{d\lambda^2} + \frac{d^2 n_{eff}}{d\lambda^2} \right) \quad (2.41)$$

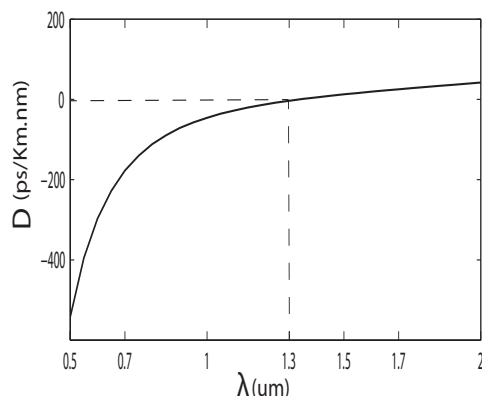


FIGURE 2.13 – Courbe de dispersion chromatique pour une fibre standard $\lambda_{zd} \approx 1.3\mu m$

La figure (2.13) illustre la courbe de dispersion chromatique en fonction de la longueur d'onde dans le cas d'une fibre standard avec un coeur en silice, dans ce type de fibre la longueur d'onde de zéro dispersion est proche de $1.3\mu m$.

2.4.4.3 La dispersion chromatique dans les PCF

Comme nous l'avons vu dans les sections précédentes, l'avènement des PCF a offert plus de degrés de liberté lors de la conception. Ceci a permis un meilleur contrôle des différents paramètres de ces fibres, comme l'atténuation, le n_{fsm} , l'indice effectif et la dispersion chromatique. Il a permis également d'obtenir des performances impossibles à atteindre avec les fibres standards.

Plusieurs recherches [64, 65, 76, 77] ont démontré que le changement de la géométrie de la PCF lors de sa conception (modification du Λ ou du diamètre d) induit un changement de l'indice effectif entraînant ainsi une modification des courbes de dispersion relatives à chaque géométrie. La figure (2.14) illustre clairement l'influence de la géométrie sur les profils de dispersion, ces derniers ont été obtenus pour quatre valeurs différentes de Λ en variant pour chaque Λ le rapport d/Λ .

Les résultats obtenus sont très intéressants vu la diversité des courbes de dispersion que nous avons pu tracer, ce qui offre la possibilité de mieux contrôler la dispersion chromatique sur une large gamme de fréquence dans la perspective d'exploiter les PCF dans diverses applications telles que la génération de Supercontinuum[59, 78]...

La figure (2.15) montre un autre type de conception de PCF où les diamètres des trous d'air sont différents. Il a été démontré [79, 80, 81] qu'avec ce type de configuration

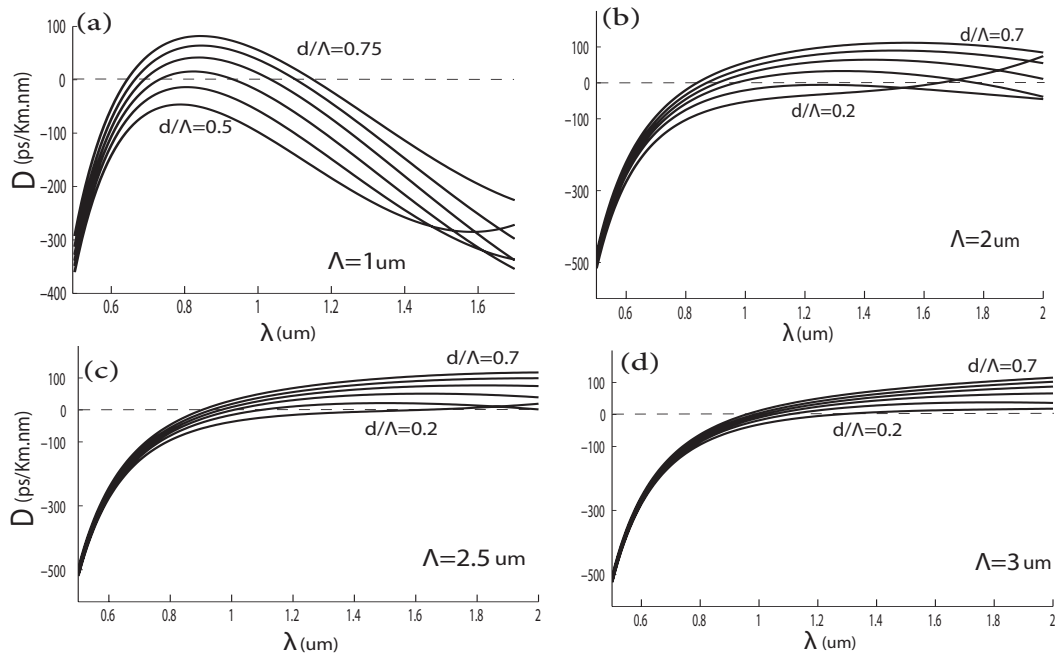


FIGURE 2.14 – Courbe de dispersion chromatique pour des fibres PCF avec quatre Λ différents

on pouvait obtenir des pentes de dispersion encore plus faibles comparées aux PCF précédentes.

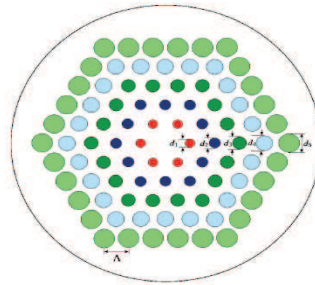


FIGURE 2.15 – Section transversale d'une PCF avec des diamètres de trous différents [79]

2.5 Effets non-linéaires dans une PCF

L'interaction d'un champ électromagnétique avec un milieu diélectrique produit un déplacement élémentaire des barycentres des charges positives et négatives initialement confondus, ce déplacement à comme conséquence la formation d'un ensemble de dipôles

électrique. On caractérise alors l'état électrique du milieu par la densité de moment dipolaire ou bien par le vecteur polarisation \vec{P} . La polarisation peut être exprimée en fonction de l'induction électrique \vec{D} comme suit [50] :

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E} \quad (2.42)$$

Où ϵ_0 et ϵ_r représentent respectivement les permittivités du vide et du matériau.

Si l'intensité du champ appliqué n'est pas très importante, le déplacement des charges est harmonique et la polarisation reste proportionnelle au champ incident et sera considérée comme linéaire :

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi^{(1)} \vec{E} \quad (2.43)$$

Avec $\chi^{(1)}$ est la susceptibilité linéaire d'ordre 1 dont la partie réelle est relative à l'indice de réfraction et la partie imaginaire aux pertes linéaires tel que :

$$n(\omega) = 1 + \frac{1}{2} Re(\chi^{(1)}(\omega)) \quad (2.44)$$

$$\alpha(\omega) = \frac{\omega}{nc} Im(\chi^{(1)}(\omega)) \quad (2.45)$$

Si l'intensité du champ est suffisamment importante, la polarisation devient non linéaire et s'écrit sous la forme suivante [50, 82] :

$$\vec{P} = \epsilon_0 (\chi^{(1)} E + \chi^{(2)} : EE + \chi^{(3)} : EEE + \dots) \quad (2.46)$$

Où $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ sont les susceptibilités d'ordre supérieur responsables des effets non linéaires.

Puisque les fibres en silice sont des matériaux centro symétriques [50, 82], la susceptibilité d'ordre deux est nulle ($\chi^{(2)} = 0$) et ses effets n'apparaissent pas lors de la propagation dans les fibres. Ceci implique que seul $\chi^{(3)}$ est à l'origine de l'apparition des effets non linéaires dans les fibres optiques, nous pouvons donc déduire à partir de sa partie réelle et imaginaire, l'indice de réfraction non linéaire n_2 ainsi que le coefficient d'atténuation non linéaire α_2 tel que :

$$n_2 = \frac{(3)}{8n} Re(\chi^{(3)}) \quad (2.47)$$

$$\alpha_2 = \frac{3\omega_0}{4nc} Im(\chi^{(3)}) \quad (2.48)$$

La présence de n_2 induit des phénomènes non linéaires sans pertes d'énergie comme l'effet Kerr, ce sont des effets élastiques. La présence de α_2 quant à elle va contribuer à l'apparition des phénomènes de diffusion comme la diffusion de Raman et Brillouin où l'onde va perdre une partie de son énergie lorsqu'elle interagit avec la silice. Ce type de phénomène est ce que l'on appelle des effets inélastiques.

2.5.1 L'effet Kerr

L'effet Kerr traduit la variation de l'indice de réfraction en fonction de l'intensité lumineuse d'une impulsion se propageant dans une fibre.

L'indice de réfraction totale s'écrit donc comme une contribution entre l'indice linéaire calculé à partir de(2.38, 2.39) et l'indice non linéaire et aura la forme suivante :

$$n(\omega, I) = n(\omega) + n_2 I = n_L + n_{NL} |E|^2 \quad (2.49)$$

Où $I = |E|^2$ représente l'intensité lumineuse, n_L et n_{NL} sont respectivement l'indice linéaire et non linéaire de la fibre.

Plusieurs phénomènes non linéaires sont des conséquences de la présence de la non linéarité Kerr dans les fibres optiques, les plus importants sont l'auto modulation de phase, la modulation de phase croisée, le mélange à quatre ondes et la modulation d'instabilité.

2.5.1.1 Auto modulation de phase

L'auto modulation de phase,(SPM self phase modulation) est le phénomène qui décrit la modification de la phase temporelle d'une impulsion lumineuse en fonction de sa propre intensité [50, 72, 83] lorsqu'elle se propage le long d'une fibre. Ceci est dû à la variation non linéaire de l'indice de réfraction (effet Kerr) vu par cette impulsion et dont l'expression est donnée comme suit :

$$E(z, t) = E_0 \exp \left[i \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_l + n_{nl} I(t)) z \right) \right] \quad (2.50)$$

A partir de l'équation (2.50), nous déduisons la phase totale de l'onde accumulée après une distance z ainsi que la phase non linéaire :

$$\phi_{tot} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_l + n_{nl} I(t)) z = \phi_l + \phi_{nl} \quad (2.51)$$

$$\phi_{nl} = \frac{2\pi}{\lambda_0} (n_{nl} I(t)) z \quad (2.52)$$

Cette phase non linéaire est représentée par la figure (2.16.d) et dont le maximum correspond à la crête de l'impulsion dans le temporel figure (2.16.a).

Il est important de noter que la variation de la phase ne modifie pas la forme temporelle de l'impulsion , par contre elle va engendrer des fréquences instantanées qui seront soit inférieures à la fréquence de la porteuse λ_0 sur le front montant de l'impulsion, soit supérieures à λ_0 sur son front descendant.

L'impulsion acquiert alors ce qu'on appelle un « chirp » ou un glissement de fréquence comme le montre la figure (2.15.c). Ce chirp est défini par l'expression suivante[50, 72, 84] :

$$\Delta\omega = -\frac{\partial\phi_{nl}}{\partial t} = -\gamma z \frac{\partial |E(0, t)|^2}{\partial t} \quad (2.53)$$

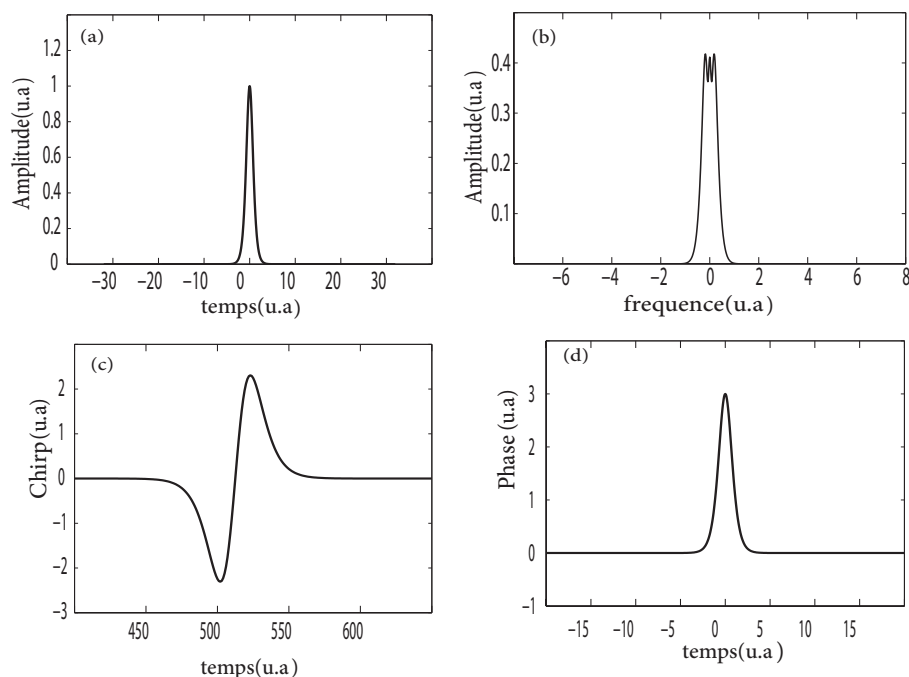


FIGURE 2.16 – (a, b, c, d) Profil temporel, spectral, chirp et phase non linéaire acquise par une impulsion gaussienne après $3Km$ de propagation dans une fibre optique standard avec $D_c = 0.07ps/Km.nm$, $\gamma = 3W^{-1}Km^{-1}$

Où γ est le coefficient de non linéarité du milieu défini par :

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_2}{A_{eff}} \quad (2.54)$$

Et A_{eff} est la surface effectivement occupée par le mode de propagation dans la section transverse de la fibre.

La génération de ces nouvelles fréquences au cours va influencer le spectre de l'impulsion, lequel va subir un élargissement en fonction de l'intensité et de la distance de propagation. La figure (2.17) montre cet élargissement pour une impulsion gaussienne pour différentes distances de propagation. Cet élargissement peut être mauvais pour la transmissions par fibre optique surtout pour des systèmes utilisant le multiplexage fréquentiel WDM (Wavelength Division Multiplexing en anglais) puisque le nouveau spectre élargi peut interagir avec les spectres des canaux voisins et provoquer d'autres phénomènes non linéaires engendrant la détérioration de la qualité de la transmission.

2.5.1.2 La modulation de phase croisée

Lorsque deux longueurs d'ondes ou plus se propagent au même temps dans une fibre optique (comme c'est le cas du multiplexage), l'indice de réfraction vu par chacune de ces

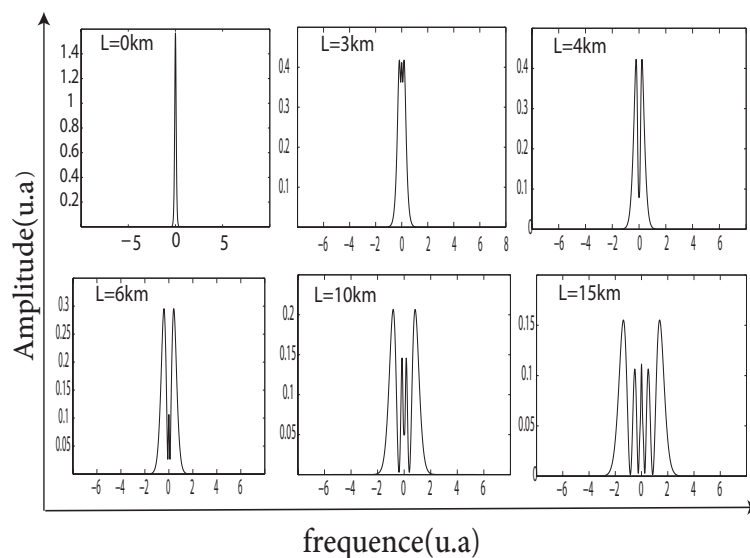


FIGURE 2.17 – Effets de la SPM sur le profil spectral d’une impulsion gaussienne pour différentes distances de propagation obtenues avec les mêmes paramètres que la figure (2.16)

ondes sera modulé par sa propre puissance (SPM) et par la puissances des ondes voisines, cette modification d’indice en fonction des puissances des autres longueurs d’ondes est appelée modulation de phase croisée (XPM Cross Phase Modulation).

Afin de mieux expliquer ce phénomène, prenons le cas de deux longueurs d’ondes ω_1 et ω_2 se propageant simultanément dans une fibre optique ; leurs indices réceptives n_1 et n_2 auront les expressions suivantes :

$$\begin{cases} n_1 = n_{(l\omega_1)} + n_{nl}(I_1(t) + 2I_2(t)) \\ n_2 = n_{(l\omega_2)} + n_{nl}(I_2(t) + 2I_1(t)) \end{cases} \quad (2.55)$$

Où $I_1(t)$ et $I_2(t)$ représentent les intensités correspondantes à chaque longueur d’onde.

La phase non linéaire accumulée par chaque onde dans ce cas aura l’expression suivante :

$$\begin{cases} \phi_{nl1} = \frac{2\pi}{\lambda_1} (n_{nl}(I_1(t) + 2I_2(t))) z \\ \phi_{nl2} = \frac{2\pi}{\lambda_2} (n_{nl}(I_2(t) + 2I_1(t))) z \end{cases} \quad (2.56)$$

La modulation de phase croisée dépend donc de la puissance transportée par chaque longueur d’onde ainsi que l’espacement entres elles où plus il est petit et plus les effets de la XPM se font ressentir. Ces effets sont semblables à ceux produits par l’auto-modulation de phase, les composantes spectrales subiront un chirp qui induit à son tour un élargissement du spectre [50, 85].

2.5.1.3 Mélange à quatre ondes

Le mélange à longueurs d'onde (FWM Four Wave Mixing) est un phénomène non linéaire qui apparaît lorsque deux longueurs d'onde ω_1 et ω_2 se propagent dans la fibre. Le résultat est l'apparition de deux autres longueurs d'ondes ayant les fréquences $\omega_s = 2\omega_1 - \omega_2$ et $\omega_a = 2\omega_2 - \omega_1$ et sont respectivement notées fréquences Stokes et anti-Stokes, ce phénomène apparaît lorsque deux champs électriques polarisés de la même manière et ayant une différence de fréquence suffisamment petite. La polarisation non linéaire totale du milieu s'écrit dans ce cas sous la forme suivante [74, 50] :

$$P_{nl} = 2n_0n_{nl}\epsilon_0 [(I_1 + 2I_2) E_1 + (I_2 + 2I_1) E_2 + E_1^2 E_2^* + E_2^2 E_1^*] \quad (2.57)$$

Où les deux premiers termes entre parenthèses dans l'équation (2.57) sont responsables de l'auto-modulation de phase et la modulation de phase croisée. Le dernier terme quant à lui traduit l'apparition de deux nouvelles fréquences ω_s et ω_{as} provoquées par le mélange à quatre ondes comme le montre la figure (2.18). Il est important de préciser que ce phénomène n'apparaît que si la condition d'accord de phase entre les quatre fréquences est satisfaite c'est-à-dire :

$$n(\omega_s)\omega_s + n(\omega_{as})\omega_{as} = n(\omega_1)\omega_1 + n(\omega_2)\omega_2 \quad (2.58)$$



FIGURE 2.18 – Spectre correspondant au processus du mélange à quatre longueurs d'onde

2.5.1.4 Instabilité de modulation IM

Une onde continue qui se propage dans une fibre optique peut devenir instable en raison de l'existence de perturbations lors de cette propagation[86, 50, 87, 88].

L'instabilité de modulation (IM) est définie comme le phénomène non linéaire qui décrit la croissance d'une petite perturbation périodique sous l'effet combiné de la non linéarité Kerr et les effets dispersifs. Comme résultat l'enveloppe de l'onde continue va se moduler sous forme d'un train d'impulsions à la fréquence de la perturbation.

La dynamique de l'instabilité de modulation est régie par la récurrence de Fermi-Pasta-Ulam [89], où l'énergie présente au départ dans la composante spectrale de l'onde continue va être transférée progressivement vers celles de la perturbation jusqu'à obtention d'un maximum d'énergie dans ces dernières. Une fois le maximum atteint, l'énergie va revenir à son état initial et l'onde retrouvera son enveloppe continue de départ puis répéter le même processus (modulation de l'onde puis revenir à son état initiale) périodiquement dans le temps.

Afin de déterminer le gain et la fréquence de la modulation d'instabilité, nous effectuons une étude de stabilité linéaire pour voir comment va évoluer cette onde par rapport à une petite perturbation qui a la forme suivante : $a(z, t) = a \exp(\lambda z - i\Omega t)$.

Sachant que l'équation de propagation de l'enveloppe du champ électrique $E(z, t)$ d'une onde continue dans une fibre PCF sans perte est donnée par [50] :

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -i\frac{\beta_2}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + \frac{\beta_3}{6}\frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + i\frac{\beta_4}{24}\frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} + i\gamma|E|^2 E \quad (2.59)$$

La solution stationnaire et homogène A_s de l'équation(2.55) satisfait la relation suivante :

$$i\gamma|A_s|^2 E_s = 0$$

Nous perturbons la solution E_s en posant $E(z, t) = E_s + a(z, t)$, et nous obtenons un système linéaire en fonction de a et a^* qui nous permet de déterminer la fréquence Ω_{max} pour laquelle le gain d'instabilité de modulation est maximum, cette fréquence se calcule comme suit [50, 72, 87] :

Dans le cas des fibres standards ($\beta_3 = \beta_4 = 0$) :

$$\Omega_{max}^2 = \frac{4\gamma P}{|\beta_2|} \quad (2.60)$$

Et dans le cas des fibres à cristaux photoniques ($\beta_3 \neq 0$ et $\beta_4 \neq 0$) on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Omega_{max1}^2 = \frac{-6\beta_2}{\beta_4} \\ \Omega_{max2}^2 = \frac{-6\beta_2 \mp 2\sqrt{9\beta_2^2 - 6P\gamma\beta_4}}{\beta_4} \end{array} \right. \quad (2.61)$$

l'équation (2.57) montre que la présence des ordres supérieurs de dispersion dans les fibres à cristaux photoniques modifient radicalement le taux de répétition de l'instabilité de modulation. Le terme β_4 va introduire deux changements importants comparés au cas d'une fibre standard où il est nul.

Le premier changement est l'apparition de deux fréquences différentes qui ont un gain d'instabilité maximum, le deuxième changement est la possibilité d'avoir une instabilité de modulation dans le régime de dispersion normale ($\beta_2 > 0$) ce qui n'était pas possible avec les fibres standard où la dispersion devait être anormale ($\beta_2 < 0$) [50, 72].

2.5.2 Diffusion de Raman

Ce phénomène est la conséquence des vibrations moléculaires résultant de l'interaction entre l'onde et la matière.

Si l'onde lumineuse incidente atteint un certain seuil de puissance Raman P_{sR} , les molécules qui sont caractérisées par des niveaux d'énergie vibratoire vont acquérir un état de vibration ayant un niveau d'énergie E' comme le montre la figure (2.19), la molécule excitée va relaxer alors très vite (le temps de relaxation pour le $SiO_2 = 75fs$) vers un état d'énergie excité E_n tel que $E_n = h\nu_r$, qui est différent de l'état fondamental de départ. Comme résultat l'onde aura perdu, due à la vibration, une portion de son énergie sous forme de phonon optique. Par conséquent l'onde diffusée aura une fréquence inférieure à celle de l'onde émise appelée fréquence Stokes tel que $h\nu - E_n = h\nu_s$.

Si maintenant l'onde incidente interagit avec une molécule qui se trouve déjà dans un état excité E_n , cette dernière va se relaxer vers son état fondamental et l'onde diffusée va quérir un phonon optique et aura par conséquent une énergie supérieur à celle de départ. On aura donc : $h\nu + E_n = h\nu_{as}$. Sa fréquence, sera elle aussi supérieure à celle de l'onde incidente et appelée fréquence anti-Stokes.

Le décalage Stokes et anti-Stokes est donc relatif au milieu de propagation. Dans le cas de la silice, ce décalage fréquentiel est égal à $13.7Thz$.

L'interprétation donnée dans le paragraphe précédant qui considère l'interaction entre la molécule et un seul photon et définie comme l'effet Raman spontané. Dans le cas où l'on a deux fréquences différentes notées ν_s et ν_{as} toutes les deux en interaction avec la molécule, la fréquence ν_{as} va être annihilée par l'effet Raman et une nouvelle onde avec la fréquence ν_s sera diffusée. Cette dernière va amplifier l'onde déjà présente et ayant la même fréquence ν_s , ceci est défini comme l'effet Raman stimulé.

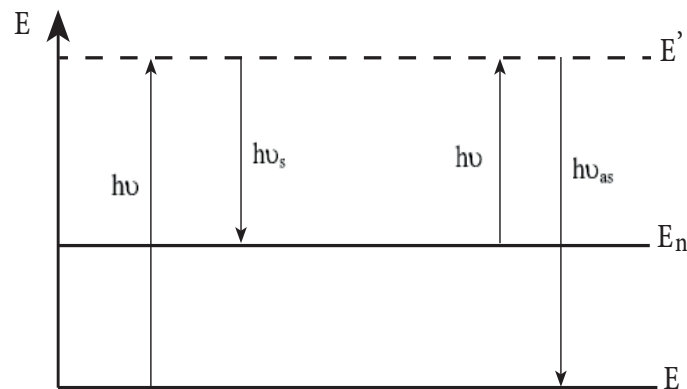


FIGURE 2.19 – Illustration de la diffusion de Raman spontanée Stokes et anti-Stokes

2.5.3 La diffusion de Brillouin

La diffusion de Brillouin est un processus similaire à celui de la diffusion Raman dans le sens où, à partir d'une onde incidente avec une puissance seuil suffisante P_{sB} on a création d'une onde Stokes.

La diffusion Brillouin trouve son origine dans l'interaction onde-matière. Cette dernière crée une agitation thermique qui va libérer un phonon acoustique. L'onde incidente va donc être diffusée dans le sens inverse de la propagation avec une fréquence inférieure dont le décalage fréquentiel égale à 10GHz dans le cas de la silice.

2.6 Équation de propagation généralisée

Considérons un champ électrique $E(z, t)$ dont l'expression est la suivante :

$$E(z, t) = E_0(z, t) \exp i(\beta_0 z - \omega_0 t) \quad (2.62)$$

Où $E_0(z, t)$ représente l'enveloppe du champ, β_0 est sa constante de propagation et ω_0 est sa fréquence porteuse.

Il a été démontré que la propagation de ce champ dans une fibre optique est régie par l'équation non linéaire de Shrodinger (ENLS) et dont l'expression est donnée par [50, 72]

$$\frac{\partial E}{\partial z} = -\frac{\alpha_l E}{2} - i\frac{\beta_2}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + \frac{\beta_3}{6} \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + i\frac{\beta_4}{24} \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} + i\gamma |E|^2 E - i\gamma T_r \frac{\partial |E|^2 E}{\partial \tau} \quad (2.63)$$

Où α_l représente les pertes linéaires, β_2, β_3 et β_4 sont respectivement les dispersions d'ordre 2, 3 et 4. γ est le coefficient de non linéarité, T_r est le temps relatif à la diffusion Raman. Enfin τ est le temps référentiel qui se déplace à la vitesse de groupe et est définie par $\tau = t - \beta_1 z$

2.7 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre la propagation des ondes lumineuses dans les fibres optiques microstructurées PCF. Ces dernières sont classées selon le processus de guidage de la lumière en deux catégories :

- Les fibres à guidage par Bande interdite photonique *BIP* où la lumière est confinée dans le coeur creux à indice bas par effet BIP.
- Les fibres à guidage par réflexion totale interne modifiée *RTIM* où la lumière est confinée dans le coeur plein de la fibre.

Nous nous sommes focalisés sur le deuxième type de fibre où on a remarqué que la géométrie de la PCF a une influence directe sur ses propres caractéristiques puisque le changement du diamètre des trous ou du rapport d/Λ induit une modification de l'indice effectif, du profil de dispersion, des pertes par confinement ainsi que le coefficient de la non linéarité.

Chapitre 3

La cavité fibrée microstructurée

3.1 Introduction

Ce chapitre est dédié essentiellement à l'étude analytique et numérique des structures dissipatives périodiques qui émergent dans une cavité fibrée microstructurée sous l'effet de l'instabilité de modulation (MI).

Nous commençons par une description générale de cette cavité, puis présenter en détail les étapes principales permettant de dériver le modèle qui régit la propagation d'une onde lumineuse dans la cavité, l'équation mathématique obtenue de ce modèle est la combinaison entre l'équation de Schrödinger non linéaire et les équations aux limites de la cavité.

Par la suite nous étudions de près l'impact de la présence des ordres supérieurs de dispersion sur les seuils de puissance relatifs à l'apparition de l'instabilité de modulation ainsi que leurs influence sur le taux de répétition des solutions périodiques qui émergent de cette instabilité, les résultats sont obtenus à l'aide de l'étude de stabilité linéaire.

Pour finir nous proposons une conception d'une fibre PCF dont les propriétés permettront la génération des solutions périodiques avec un taux de répétition pouvant atteindre les terahertz *Thz*.

3.2 Description du résonateur optique

La cavité ou le résonateur utilisé dans notre travail est composé d'un tronçon de fibre optique microstructurée monomode bouclée sur elle-même à l'aide d'un coupleur optique caractérisé par un coefficient de transmission (T) et un coefficient de réflexion (R) comme le montre la figure (3.1). A travers ce coupleur nous injectons dans la cavité une onde continue dont l'expression est donnée par l'équation (1.62) et ayant une puissance $P_{in} = |E_0(z, \tau)|^2$ avec ω_0 et β_0 sont respectivement la pulsation et la constante de propagation à la fréquence de la porteuse.

La propagation d'une onde lumineuse dans la cavité est régie par l'équation (2.63), par conséquent elle peut subir tous les phénomènes décrits par cette équation. Néanmoins la

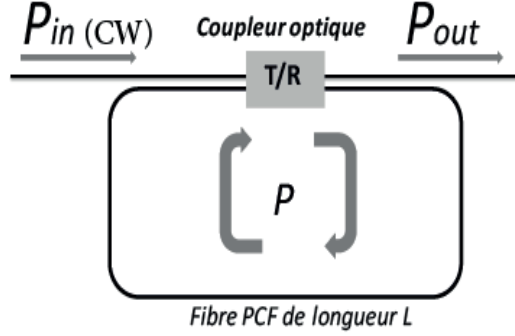


FIGURE 3.1 – Description générale de la cavité fibrée micro-structurée

réponse vibratoire de la silice relative à l'effet Raman peut être ignorée vu que la largeur temporelle des impulsions d'entrée utilisées est supérieure $1ps$ [50].

Après avoir parcouru un tour de cavité, l'onde qui se trouve dans la cavité que nous appellerons onde **intracavité** va interagir d'une manière cohérente avec la pompe continue à travers le coupleur. Les équations qui décrivent la propagation du champ intracavité et le champ en sortie de cette dernière sont les suivantes [40, 90, 32] :

$$E^{(n+1)}(0, \tau) = \sqrt{R}E^{(n)}(L, \tau)\exp(i\phi_0) + \sqrt{T}E_{in} \quad (3.1)$$

$$E_{out}^{(n+1)}(0, \tau) = \sqrt{T}E^{(n)}(L, \tau)\exp(i\phi_0) - \sqrt{R}E_{in} \quad (3.2)$$

Où E_{in} est le champ à l'entrée de la cavité, $E^{(n)}(L, \tau)$ et $E_{out}^{(n+1)}(L, \tau)$ représentent respectivement le champ intracavité et le champ en sortie après avoir effectué n tours de cavité. $\phi_0 = 2\pi nL/\lambda_0$ caractérise la phase linéaire accumulée par l'onde sur un tour de cavité .

Le but de notre travail est de pouvoir exploiter le phénomène d'instabilité de modulation pour générer un train de bit périodique avec une fréquence stable et bien déterminée. Pour ce faire, il faut garantir la résonance entre la pompe et l'onde intracavité après chaque tour de cavité ce qui correspond à une puissance maximale nous permettant ainsi de déclencher les effets non linéaires dans la cavité. Nous allons donc étudier l'influence de chaque phénomène de propagation sur la résonance séparément puis établir le modèle mathématique qui les regroupent tous à la fois. Nous commençons donc par ignorer tous les effets de la propagation en fibre (effets dispersifs, atténuation et non linéarité) et on tient compte que de la phase accumulée (ϕ_0) , ceci veut dire aussi que $E^{(n)}(0, \tau) = E^{(n)}(L, \tau) = E^{(n+1)}(L, \tau)$. Les équations 3.1 et 3.2 peuvent s'écrire sous la forme suivante :

$$\frac{E}{E_{in}} = \frac{\sqrt{T}}{1 - \sqrt{R}\exp(i\phi_0)} \quad (3.3)$$

$$\frac{E_{out}}{E_{in}} = \frac{E_{in} [\exp(i\phi_0) - \sqrt{R}]}{1 - \sqrt{R}\exp(i\phi_0)} \quad (3.4)$$

Si nous exprimons les équations 3.3 et 3.4 en terme de puissance tel que $P = |E|^2$ et $P_{in} = |E_{in}|^2$ nous trouvons :

$$\frac{P}{P_{in}} = \frac{T}{(1 - \sqrt{R})^2 + 4\sqrt{R}\sin^2(\phi_0/2)} \quad (3.5)$$

$$\frac{P_{out}}{P_{in}} = 1 \quad (3.6)$$

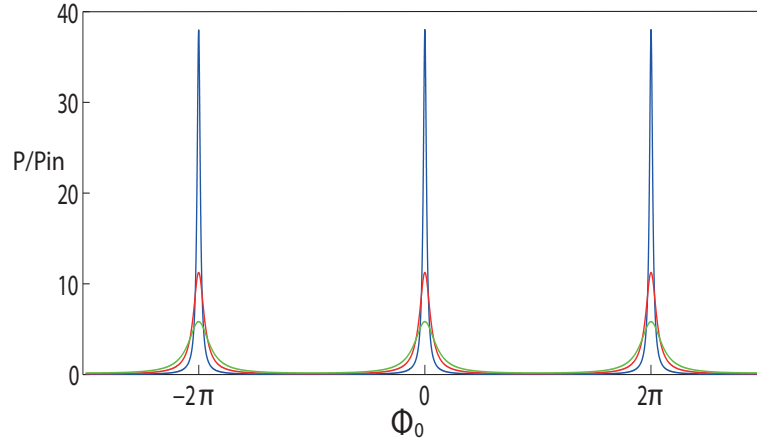


FIGURE 3.2 – Résonance linéaire de la cavité pour $T = 0.1$ (en bleu), $T = 0.3$ (en rouge), $T = 0.5$ (en vert)

D'après l'équation (3.5), Il est clair que le maximum de puissance dans la cavité est obtenu lorsque $\phi_0 = 2k\pi$. Ceci est expliqué par le fait que pour ces valeurs de la phase linéaire ϕ_0 , l'onde intracavité sera tout le temps en phase avec la pompe. Par conséquent leurs interaction donnera lieu à des résonances constructives comme le montre la figure (3.2).

Dans le cas contraire c'est-à-dire $\phi_0 = 2k(\pi + 1)$, l'interaction entre l'onde intracavité et la pompe sera cette fois destructive et comme résultat une perte optique sera observée. Afin d'assurer que $\phi_0 = 2\pi nL/\lambda_0 = 2k\pi$ on peut contrôler soit l'indice de réfraction ($\Delta n = \lambda_0/L$), soit la longueur de la fibre ($\Delta L = \lambda_0/n$) ou la longueur d'onde ($\Delta \lambda = 1/nL$) où la distance fréquentielle séparant deux résonances successives est appelée intervalle spectral libre noté ISL.

Étant donné que nous devons assurer l'instabilité de modulation dans la cavité, la puissance intracavité doit être maximale afin de déclencher les effets non linéaires après

chaque tour de cavité. Pour ce faire il faut garantir une résonance constructive à chaque interaction entre la pompe et l'onde intracavité, ceci se fait en essayant de se trouver le plus proche de la résonance après chaque tour de cavité.

L'équation (3.5) ne permet de donner qu'une estimation sur la condition de la résonance puisqu'elle décrit un milieu linéaire et sans perte. Pour obtenir une condition plus précise il faut inclure l'influence des autres effets de propagation sur la résonance.

3.2.1 Influence des pertes sur la résonance

Nous introduisons le paramètre de l'atténuation dans les équations (3.1) et (3.2), d'après l'équation (2.63) nous trouvons :

$$E^{(n+1)}(0, \tau) = \sqrt{R}E^{(n)}(0, \tau)\exp(i\phi_0)\exp(-\alpha_l L/2) + \sqrt{T}E_{in} \quad (3.7)$$

$$E_{out}^{(n+1)}(0, \tau) = \sqrt{T}E^{(n)}(0, \tau)\exp(i\phi_0)\exp(-\alpha_l L/2) - \sqrt{R}E_{in} \quad (3.8)$$

L'équation (3.5) prend dans ce cas la forme suivante :

$$\frac{P}{P_{in}} = \frac{T}{1 - 2\sqrt{R}\exp(-\alpha_l/2)\cos(\phi_0) + R\exp(-\alpha_l L)} \quad (3.9)$$

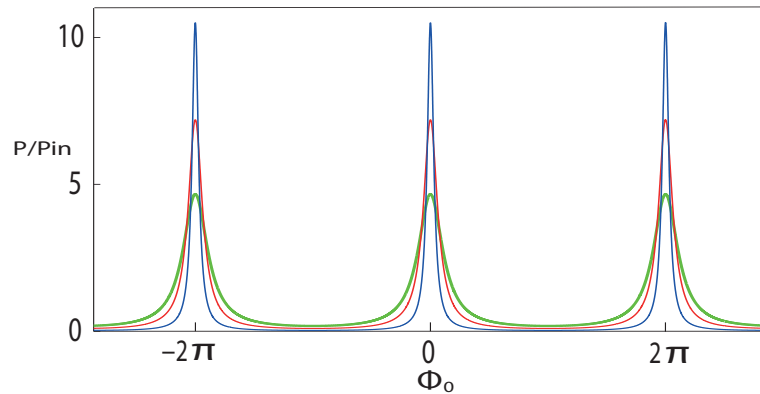


FIGURE 3.3 – Résonance de la cavité en présence des pertes optiques pour $T = 0.1$ (en bleu), $T = 0.3$ (en rouge), $T = 0.5$ (en vert) et $\alpha_l = 0.1$

La relation (3.9) caractérise l'influence des pertes optiques sur les résonances du système. Comme le montre la figure (3.3), ces dernières sont obtenues sous la même condition que dans le cas d'une fibre sans pertes c'est-à-dire $\phi_0 = 2k\pi$. Par contre, dès que les pertes sont prises en considération, le maximum n'est obtenu que si $\alpha_l L$ et le coefficient

de transmission T ont des valeurs à la fois proches et relativement petites de telle manière à avoir $\alpha_l L \ll 1$ et $T \ll 1$.

La figure (3.3) montre que la présence des pertes lors de la propagation peut modifier la forme des résonances. En fait, ces dernières deviennent de plus en plus fines au fur et à mesure que l'atténuation diminue. On introduit dans ce cas la finesse de la cavité F qui est un nouveau paramètre permettant la caractérisation de la cavité puisqu'il traduit le nombre de tours que l'onde peut faire avant qu'elle soit totalement atténuée [40]. La finesse est définie comme le rapport entre la distance qui sépare deux pics de résonances successives (ISL : Intervalle Spectral Libre en fréquence) et la largeur à mi-hauteur de celles-ci : $F = \frac{ISL}{\alpha}$ avec $ISL = \Delta f = c/nL$ et $\alpha = (\alpha_l L + T)/2$.

3.2.2 Influence de la non linéarité

Nous avons vu dans la section (2.5) qu'au delà d'un certain seuil de puissance, l'indice de réfraction varie non linéairement en fonction de la puissance équation (2.49), cette non linéarité est de type Kerr et l'une de ses conséquences est l'auto modulation de phase (SPM) équation (2.50).

La présence de la SPM change radicalement la dynamique du résonateur puisqu'après chaque tour de cavité, l'onde intracavité acquiert une nouvelle phase non linéaire ϕ_{nl} qui dépend de sa propre intensité tel que $\phi_{nl} = \gamma LP$. Dans ce cas la phase totale accumulée par l'onde lors d'un tour de cavité est considérée comme la contribution entre la phase linéaire et la phase non linéaire : $\phi_{tot} = \phi_0 + \phi_{nl}$. Ceci induit un déplacement de la résonance du système en fonction de la puissance intracavité.

Afin de tenir compte de cette non linéarité dans le système, il suffit de remplacer la phase linéaire ϕ_0 dans l'équation (3.9) par la phase totale ϕ_{tot} , on obtient dans ce cas :

$$\frac{P}{P_{in}} = \frac{T}{1 - 2\sqrt{R} \exp(-\alpha_l L/2) \cos(\phi_{tot}) + R \exp(-\alpha_l L)} \quad (3.10)$$

La résonance décrite par de l'équation (3.10) est alors obtenue d'une manière identique au cas linéaire c'est à dire seulement si l'onde intracavité et la pompe sont en phase, on obtient alors la même courbe de résonance que celle de la figure (3.3) et elle est représentée en bleu sur les figures (3.4.a.b.c).

Afin de comprendre quel est l'impact de la non linéarité sur la résonance du système, il serait plus judicieux de la tracer en fonction de la phase linéaire [91]. La figure (3.4) montre que la non linéarité fait pencher les résonances. Leurs maximums ne se trouvent plus à $\phi_0 = 2k\pi$ mais s'inclinent vers $\phi_0 = \gamma LP_{max}$. et puisque la puissance intracavité est proportionnelle à celle de la pompe il est normal de constater que l'inclinaison de la résonance sera proportionnelle à γLP_{in} comme le montre les figures (3.4.a.b.c)

Il est important de noter qu'au delà d'une certaine puissance d'entrée le déplacement des résonances devient plus important que leurs largeurs à mi-hauteur. On obtient dans ce cas trois niveaux de puissance différents pour la même phase linéaire, ce phénomène

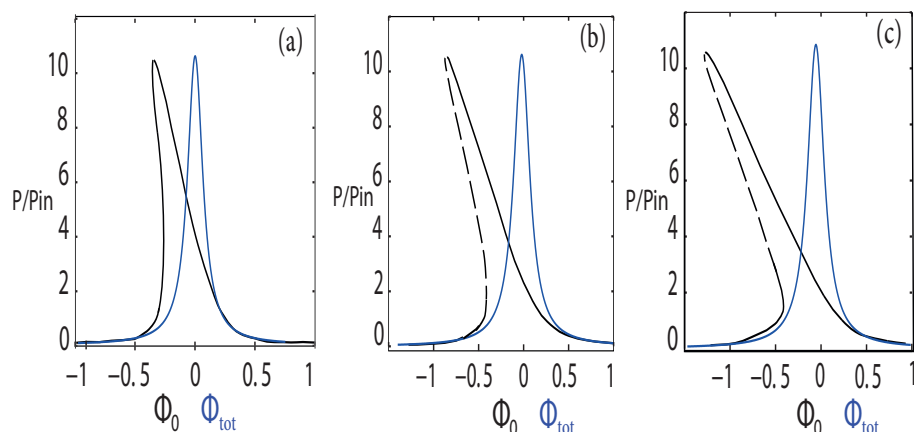


FIGURE 3.4 – Influence de la non linéarité sur la résonance avec $T = 0.1 = \alpha_l L = 0.1$. a, $\gamma L P_{in} = 0.03$. b, $\gamma L P_{in} = 0.3.8$. c, $\gamma L P_{in} = 0.12$.

est appelé bistabilité optique et il est observé dans plusieurs systèmes non linéaires avec une boucle de retour.

En générale trois branches de solutions sont obtenues pour la même puissance d'entrée où chaque branche possède un niveau de puissance différent, deux d'entre elles sont stables et la branche intermédiaire ayant une pente négative (en pointillés sur la figure (3.4)) est tout le temps instable [92]. Le modèle mathématique qui permet la description analytique du phénomène de bistabilité optique sera l'objet de la section suivante.

3.3 Le modèle du champ moyen

Le but de cette section est de dériver le modèle mathématique qui régit la propagation d'une onde lumineuse dans la cavité en tenant compte des effets dispersifs, de l'atténuation et de l'effet Kerr. Pour ce faire nous combinons l'équation (2.63) qui régit la propagation dans une PCF avec l'équation (3.1) qui tient compte des conditions de la cavité utilisée (les coefficients du coupleur).

Nous considérons dans notre travail une cavité résonante à haute finesse ($F \gg 1$) [93, 90, 32]. Cette approximation est valide si le coefficient de transmission T et les pertes lors d'un tour de cavité sont petits devant 1.

Les effets dispersifs et non linéaires affectant l'onde intracavité lors de sa propagation doivent aussi être petits devant 1, pour satisfaire cette condition la phase totale accumulée lors d'un tour de cavité devra satisfaire $\gamma L P \ll 1$ et $\beta_2 \Delta \omega^2 L \ll 1$ ce qui correspond à une longueur de dispersion supérieure à la longueur de la fibre, ($\Delta \omega$ représente la largeur spectrale de l'onde intracavité). Dans ce cas l'onde est assurée d'être au voisinage de la résonance après chaque tour de cavité et son l'enveloppe varie peut d'un tour de cavité à un autre. Notons que ces approximations ont pu être vérifiées expéri-

mentalement [39, 93] validant ainsi l'approche de ce modèle que nous utiliserons dans notre travail.

Dans le but d'alléger les calculs analytiques, nous introduisons un nouveau paramètre δ_0 appelé le désaccord en phase linéaire tel que $\delta_0 = 2k\pi - \phi_0$ avec ($\delta_0 \ll 1$). Ce paramètre caractérise la distance par rapport à la résonance due à l'accumulation de la phase linéaire après un tour de cavité.

Une fois que ces approximations sont satisfaites, le champ intracavité après un tour de cavité peut être évalué en moyennant le terme de droite de l'équation de propagation (2.63) sur une distance L comme suit :

$$E^{(n)}(L, \tau) - E^{(n)}(0, \tau) = \left(-\frac{\alpha_1 L}{2} - i\beta_2 \frac{L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \beta_3 \frac{L}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + i\beta_4 \frac{L}{24} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + i\gamma L |E|^2\right) E^{(n)}(0, \tau) \quad (3.11)$$

En injectant l'équation (3.11) dans (3.1), nous obtenons :

$$E^{(n+1)}(0, \tau) = \sqrt{R} \left(1 - \frac{\alpha_1 L}{2} - i\beta_2 \frac{L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \beta_3 \frac{L}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + i\beta_4 \frac{L}{24} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + i\gamma L |E|^2\right) E^{(n)}(0, \tau) \exp(i\phi_0) + \sqrt{T} E_{in} \quad (3.12)$$

En ne gardant que les termes du premier ordre dans l'équation (3.12) et nous trouvons finalement :

$$E^{(n+1)}(0, \tau) \approx \left(1 - \frac{T}{2} - \frac{\alpha_1 L}{2} - i\delta_0 - i\beta_2 \frac{L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \beta_3 \frac{L}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + i\beta_4 \frac{L}{24} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} + i\gamma L |E|^2\right) E^{(n)}(0, \tau) + \sqrt{T} E_{in} \quad (3.13)$$

La variation lente du champ entre deux tours successifs de cavité implique la possibilité d'introduire une nouvelle variable t_r qui caractérise le temps nécessaire pour parcourir un tour de cavité où $t_r = \beta_1 L$. Le temps de propagation total t évalué après n tours de cavité et communément appelé temps lent (contrairement à τ qui est appelé temps rapide car il représente la structure temporelle de l'enveloppe) devient dans ce cas $t = nt_r$ avec ($n = 0, 1, 2, 3, \dots$), ce dernier va être introduit dans l'expression du champ intracavité comme étant une composante continue qui va remplacer le nombre discret de tours à l'entrée de la cavité. L'enveloppe de l'onde intracavité peut être redéfinie en fonction de t de la manière suivante $E^{(n)}(0, \tau) = E(t = nt_r, \tau)$.

Nous déduisons dans ce cas la dérivée temporelle de l'enveloppe intracavité :

$$\frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = \frac{E^{(n+1)}(0, \tau) - E^{(n)}(0, \tau)}{t_r} \quad (3.14)$$

En remplaçant l'équation (3.14) dans (3.13), nous déduisons finalement l'équation qui régit la propagation de l'onde lumineuse dans une cavité fibrée microstructurée où la constante de propagation a été développée jusqu'à l'ordre 4 en série de Taylor [94] contrairement au cas, avec les fibres standards, où le développement s'arrête en général à l'ordre 2 [90] :

$$t_r \frac{\partial E(t, \tau)}{\partial t} = (-\alpha - i\delta_0 + i\gamma L |E|^2 - i\beta_2 \frac{L}{2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \beta_3 \frac{L}{6} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + i\beta_4 \frac{L}{24} \frac{\partial^4}{\partial \tau^4}) E(t, \tau) + \sqrt{T} E_{in} \quad (3.15)$$

Afin de simplifier encore plus cette équation nous introduisons les variables réduites suivantes :

$$E = E \sqrt{\frac{\gamma L}{\alpha}} \quad (3.16)$$

$$S = E_{in} \sqrt{\frac{\gamma L T}{\alpha^3}} \quad (3.17)$$

$$\tau = \tau \sqrt{2\alpha} \quad (3.18)$$

$$\Delta = \frac{\delta_0}{\alpha} \quad (3.19)$$

$$t = \frac{\alpha t}{t_r} \quad (3.20)$$

$$B_2 = \beta_2 L \quad (3.21)$$

$$B_3 = \frac{\beta_3 L}{3} \sqrt{2\alpha} \quad (3.22)$$

$$B_4 = \frac{\beta_4 L \alpha}{6} \quad (3.23)$$

Nous retrouvons finalement une équation simplifiée et sans dimension :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S - (1 + i\Delta)E + i|E|^2 E - iB_2 \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + iB_4 \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} \quad (3.24)$$

Cette équation est équivalente à celle trouvée par Lugiato et Lefever connue aussi comme le modèle de LL [33] et qui a été développée dans le cadre de l'étude sur les cavités résonantes avec des milieux non linéaires passives. Pour faire l'analogie entre les deux équations il suffit de remplacer la dérivée seconde qui représente la diffraction spatiale de la lumière dans le modèle *LL* par une dérivée seconde temporelle, qui représente dans notre cas, la dispersion de la lumière dans la fibre optique. La seule différence est la présence dans notre cas des dérivées temporelles d'ordre 3 et 4. Ceci est dû à l'utilisation des fibres PCF avec une faible dispersion comme milieu de propagation ce qui permet de tenir compte des ordres plus élevés[94].

3.3.1 Stabilité des solutions homogènes et stationnaires

Les solutions stationnaires et homogènes E_s de l'équation (3.24) qui satisfont la relation $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial \tau} = 0$ s'écrivent sous la forme suivante :

$$S = \left[1 + i(\Delta - |E_s|^2) \right] E_s \quad (3.25)$$

En exprimant l'équation (3.25) en fonction de l'intensité intracavité $Y = |E_s|^2$ et l'intensité de la pompe $X = |S|^2$, nous obtenons l'équation qui décrit la réponse non linéaire de la cavité résonante :

$$X = Y^3 - 2\Delta Y^2 + (\Delta^2 + 1) Y \quad (3.26)$$

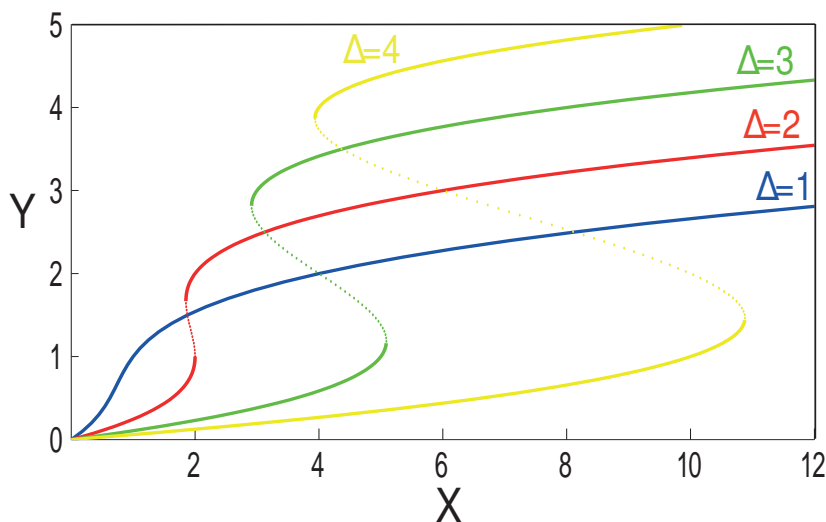


FIGURE 3.5 – Réponse non linéaire de la cavité pour différentes valeurs du désaccord en phase Δ

La figure (3.5) décrit cette réponse pour plusieurs valeurs du désaccord en phase Δ . Pour les petites valeurs de Δ nous remarquons que chaque puissance d'entrée correspond à une seule réponse intracavité, par contre lorsque la valeur du désaccord en phase devient plus importante on remarque que chaque puissance d'entrée correspond à trois niveaux de puissances intracavité différents, ceci confirme ainsi le résultat obtenu dans la section précédente qui décrit la bistabilité comme un phénomène qui dépend uniquement de la non linéarité et de la rétroaction du système. Cette dernière est caractérisée par la phase totale accumulée par l'onde intracavité.

Le phénomène de bistabilité est obtenu à partir de l'équation (3.26) lorsque $\frac{dx}{dy}$ est nulle, nous pouvons ainsi déterminer les puissances intracavités relatives aux changement de branche de solutions dans un cycle bistable :

$$Y_{\pm} = \frac{2\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 3}}{3} \quad (3.27)$$

Les puissances d'entrée correspondantes à ces changement sont données par :

$$X_{\pm} = \frac{2}{27} \left[\Delta(\Delta^2 + 9) \pm (\sqrt{\Delta^2 - 3})^3 \right] \quad (3.28)$$

D'après les équations (3.27) et (3.28), il est clair que $\Delta = \sqrt{3}$ représente le seuil de bistabilité, donc si $\Delta > \sqrt{3}$ le système est bistable sinon il est monostable.

La stabilité des solutions homogènes et stationnaires E_s est évaluée en les soumettant à des perturbations de la forme $a \exp(\lambda t)$ tel que $E = E_s + a \exp(\lambda t)$ que nous injectons dans (3.26). L'étude de stabilité linéaire autour de a nous fournit le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial t} \\ \frac{\partial a^*}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 + i(2Y - \Delta) & iY^2 \\ -iY^2 & -1 - i(2Y - \Delta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \quad (3.29)$$

Ce dernier admet des solutions non triviales si :

$$\lambda^2 + 2\lambda + 1 + 3Y^2 - 4Y\Delta + \Delta^2 = 0 \quad (3.30)$$

La réponse devient instable si l'amplitude de la perturbation λ possède une partie réelle positive ce qui signifie que la solution s'éloigne de son état stationnaire, ceci est

$$\text{vrai si } Y_{\pm} = \frac{2\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - 3}}{3}.$$

Ce résultat est très intéressant puisqu'il permet d'affirmer que les solutions stationnaires et homogènes instables sont uniquement celles qui appartiennent à la branche comprise entre les deux seuils de changement de branche bistable et dont la pente est toujours négative (représentée en pointillé sur la figure (3.5)). Par conséquent on peut déduire que le cas monostable ($\Delta < \sqrt{3}$) et dont la pente est tout le temps positive sera toujours stable par rapport aux perturbations homogènes.

Dans la prochaine section nous étudierons l'influence des effets dispersifs (B_2, B_3, B_4) sur la propagation de l'onde intracavité, leur présence se traduit par l'introduction des dérivées partielles dans notre modèle où on s'attend à ce que l'onde intracavité peut subir l'effet de l'instabilité de modulation et par conséquent la possibilité de rejoindre une structure dissipative stable.

3.4 Instabilité de modulation (IM)

Comme cela a été expliqué dans le deuxième chapitre, une onde lumineuse continue (CW) peut subir des petites perturbations lors de sa propagation dans une fibre optique, il se peut aussi que pour un certain accord de phase entre les effets dispersifs et non linéaires une de ces perturbations ressentira une amplification de son amplitude, ceci aura comme résultat la brisure de l'onde en un train d'impulsions périodiques à une fréquence bien déterminée.

En propagation libre ce phénomène est connue sous le nom de modulation d'instabilité et il est régit par la récurrence temporelle où le train d'impulsions se forme puis revient à son état initial de façon périodique dans le temps.

En cavité, l'instabilité de modulation peut être définie exactement de la même manière qu'en propagation libre, cependant quelques différences doivent quand même être précisées :

La première est l'apparition des seuils en puissance à partir desquels émerge l'instabilité de modulation ainsi que l'apparition du terme Δ dans la condition d'accord de phase ce qui n'existait pas dans le cas de la propagation libre où cette condition n'est exprimée qu'en fonction de la dispersion et la non linéarité (équations (2.60) et (2.61)).

La seconde différence est relative à la dynamique d'apparition des structures périodiques. Nous avons vu que le fait d'assurer la résonance entre la pompe et l'onde intracavité après chaque tour de cavité a pour conséquence l'augmentation des effets non linéaires, cela induit la saturation de la cavité. Dans ce cas, la périodicité temporelle qui régissait l'apparition des structures périodiques en propagation libre va disparaître et l'onde modulée intracavité ne pourra plus retrouver sa forme de départ et converge vers une structure dissipative stable.

L'étude de ces structures se fera d'abord en régime linéaire où l'étude de stabilité linéaire permet d'évaluer les seuils d'apparition de l'instabilité de modulation ainsi que les fréquences de répétition des solutions périodiques qui émergent de cette instabilité. Par la suite une étude de bifurcation faiblement non linéaire sera effectuée, son but sera l'évaluation des amplitudes des solutions obtenues ainsi que les zones de paramètres relatives à leurs existences.

3.4.1 Étude de stabilité linéaire

Nous suivons dans cette section les mêmes démarches effectuées par [90] où les solutions stationnaires et homogènes de l'équation (3.26) sont soumises à une perturbation périodique de la forme $a = a_0 \exp(\lambda t - i\Omega\tau)$, le champ intracavité prend alors la forme suivante :

$$\begin{cases} E(t, \tau) = E_s + a_0 \exp(\lambda t - i\Omega\tau) \\ E^*(t, \tau) = E_s^* + a_0^* \exp(\lambda t - i\Omega\tau) \end{cases} \quad (3.31)$$

Nous introduisons l'équation (3.31) dans l'équation de propagation (3.24) en gardant que la partie linéaire en a et a^* . Nous obtenons alors le système suivant :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial a}{\partial t} \\ \frac{\partial a^*}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i(2Y-\Delta)-iB_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + iB_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} & i(E_s)^2 \\ -i(E_s^*)^2 & -1-i(2Y-\Delta)+iB_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} - iB_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} \quad (3.32)$$

Où $Y = |E_s|^2$ correspond à la puissance intracavité de l'onde continue.

En remplaçant a et a^* par leurs expressions nous trouvons finalement :

$$\begin{pmatrix} (-\lambda-1+iB_3\Omega^3)+i(2Y-\Delta+B_2\Omega^2+B_4\Omega^4) & i(E_s)^2 \\ -i(E_s^*)^2 & (-\lambda-1+iB_3\Omega^3)-i(2Y-\Delta+B_2\Omega^2+B_4\Omega^4) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ a^* \end{pmatrix} = 0 \quad (3.33)$$

Ce système admet une solution non triviale si son déterminant est nul ce qui correspond à :

$$[\lambda+1-iB_3\Omega^3-i(2Y-\Delta+B_2\Omega^2+B_4\Omega^4)][\lambda+1-iB_3\Omega^3+i(2Y-\Delta+B_2\Omega^2+B_4\Omega^4)]-Y^2=0 \quad (3.34)$$

Et sa valeur propre λ est donnée par :

$$\lambda = -1 \mp \sqrt{Y^2 - (-\Delta + 2Y + B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4)^2 + iB_3\Omega^3} \quad (3.35)$$

Ce système devient instable si la partie réelle de l'une de ces valeurs propres est positive $\lambda > 0$, physiquement cela correspond à une zone où les fréquences de perturbation vont toutes ressentir un gain positif de leurs amplitudes. Ces fréquences appartiennent au domaine suivant :

$$\Omega_-^2 < \Omega^2 < \Omega_+^2$$

Avec :

$$\Omega_{\pm}^2 = \frac{-B_2}{B_4} + \frac{\sqrt{B_2^2 + B_4(4\Delta - 8Y) \pm 4B_4\sqrt{Y^2 - 1}}}{B_4} \quad (3.36)$$

Pour que ces fréquences aient un sens physiquement la relation (3.36) doit être réelle. Il faut assurer que :

$$\sqrt{B_2^2 + B_4(4\Delta - 8Y) \pm 4B_4\sqrt{Y^2 - 1}} \geq 0 \quad \text{et} \quad Y \geq 1 \quad (3.37)$$

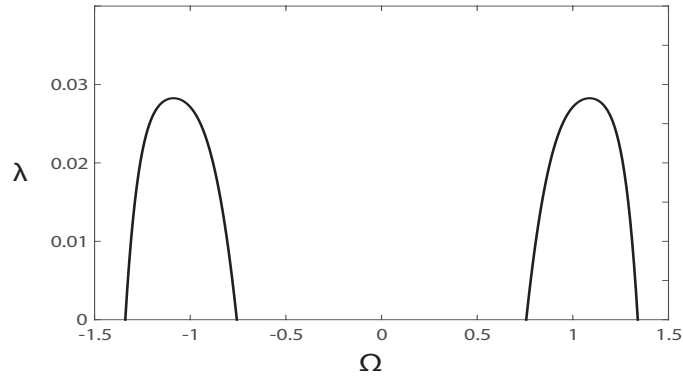


FIGURE 3.6 – Spectre du gain de l'instabilité de modulation décrit par l'équation.(3.35) avec : $\Delta = 1.3$, $B_2 = -1.1832$, $B_4 = 0.5$, $Y = 1.03$

Nous nous intéresserons par la suite aux fréquences Ω_{max}^2 ayant un gain d'instabilité de modulation maximum, ces dernières satisfont $\frac{d\lambda}{d\Omega^2} = 0$.

On évalue dans ce cas les puissances intracavités seuils (Y_{s1}, Y_{s2}) relatives à l'apparition de l'instabilité de modulation tel que :

$$\begin{cases} Y_{s1} = 1 \\ Y_{s2} = [2\kappa + \sqrt{\kappa^2 - 3}]/3 \end{cases} \quad (3.38)$$

Avec : $\kappa = B_2^2/(4B_4) + \Delta$

L'équation (3.38) montre que la présence du coefficient de dispersion d'ordre quatre B_4 limite la zone d'apparition d'instabilité de modulation qui devient comprise entre Y_{s1} et Y_{s2} , en dehors de cette zone aucune fréquence n'a de gain positif et le système rejoint son état stable [94, 16].

Comme c'est illustré dans la figure (3.7.b), dès que la puissance intracavité atteint le premier seuil d'instabilité de modulation, deux fréquences sont dégénérées simultanément ($\Omega_{l,u}^2$). Ces dernières se rejoignent au niveau du second seuil où nous retrouvons une seule fréquence (Ω_c^2). Les expressions des fréquences qui correspondent à chaque seuil sont les suivantes [95] :

$$\begin{cases} \Omega_{l,u}^2 = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 + 4B_4(\Delta - 2)}}{2B_4} \\ \Omega_c^2 = \frac{-B_2}{2B_4} \end{cases} \quad (3.39)$$

Dans le cas d'une fibre standard, la zone d'apparition de l'instabilité de modulation va être différente puisque le quatrième ordre de dispersion n'est pas pris en considération. Comme le montre la figure (3.7.a) le deuxième seuil d'instabilité de modulation disparaît totalement pour laisser place à un domaine limité par un seul seuil inférieur $Y = 1$. Au delà de ce dernier, le système observe tout le temps une instabilité de modulation [90, 40, 32]. Ceci dit de récentes recherches ont démontré qu'on pouvait obtenir des zones d'instabilité limitées semblables à celles obtenues avec les PCF en utilisant une superposition de plusieurs fibres standards ($B_4 = 0$) où chaque fibre possède son propre profil de dispersion de telle manière est ce que la dispersion totale aura un profil périodique en fonction de la longueur totale (dispersion oscillating fiber) [96], cette variation périodique permet donc un meilleur contrôle de dispersion et offre un peu plus de degrés de liberté, néanmoins l'avantage de l'utilisation des PCF reste la possibilité d'atteindre des fréquences de répétition (de l'ordre des Thérahertz) supérieures à celles obtenues avec fibres standards (de l'ordre des Gigahertz).

Dans la suite de notre travail nous avons choisi de travailler avec un régime de paramètres où on obtient qu'une seule fréquence au premier seuil d'IM, pour ce faire il faut assurer que :

$$B_2^2 + 4B_4(\Delta - 2) = 0 \quad (3.40)$$

La nouvelle fréquence obtenue au premier seuil devient alors identique à celle qui existait au deuxième seuil comme le montre la figure (3.7.c) [16] et son expression est la

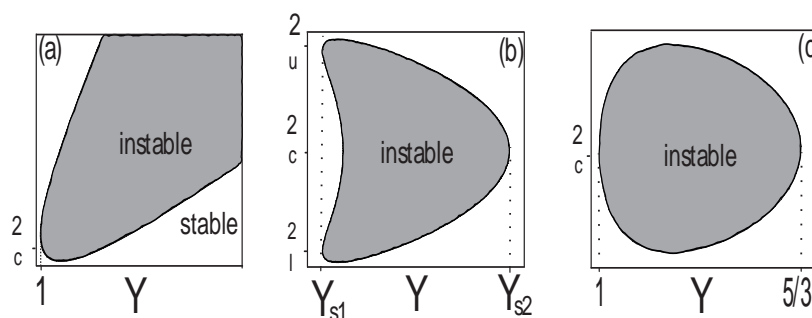


FIGURE 3.7 – Courbes de stabilité marginale des solutions homogènes et stationnaires dans le plan $(|E|^2, \Omega^2)$ avec $\Delta = 1.3$. a, $B_2 = -1$ et $B_4 = 0$. b, $B_2 = -1.5$ et $B_4 = 0.5$. c, $B_2 = -1.1832$ et $B_4 = 0.5$.

suivante :

$$\Omega_c^2 = \Omega_{l,u}^2 = \frac{-B_2}{2B_4} \quad (3.41)$$

L'expression du deuxième seuil se simplifie dans ce cas aussi et devient $Y_{s2} = 5/3$. Nous pouvons ainsi déduire les puissances pompes seuils relatives à l'apparition de l'instabilité de modulation, en remplaçant les expressions de Y_{s1} et Y_{s2} dans l'équation (3.26) nous trouvons finalement :

$$X_{s1} = |S_{s1}|^2 = (1 - \Delta)^2 + 1 \quad (3.42)$$

$$X_{s2} = |S_{s2}|^2 = \frac{5}{3} \left(\left(\frac{5}{3} - \Delta \right)^2 + 1 \right) \quad (3.43)$$

La figure (3.8) représente les profils temporels et spectraux correspondant à deux structures dissipatives obtenues en résolvant numériquement l'équation (3.24) à l'aide de la méthode des différences finies pour deux valeurs différentes de B_4 tout en respectant la condition donnée par l'équation (3.41). Les résultats obtenus confirment les prédictions théoriques puisqu'on remarque que la variation de B_4 a induit directement une modification du taux de répétition des solutions périodiques caractérisées par leurs spectres respectives, où le spectre obtenu pour $B_4 = 0.1$ est plus large que celui obtenu pour $B_4 = 0.5$.

3.4.2 Calcul de la fréquence de répétition des structures périodiques

Notre but dans cette section est de donner une estimation sur le taux de répétition réel des structures périodiques générées dans la cavité, ceci permet de mieux comprendre l'influence des termes supérieurs de dispersion sur cette fréquence et par conséquent nous

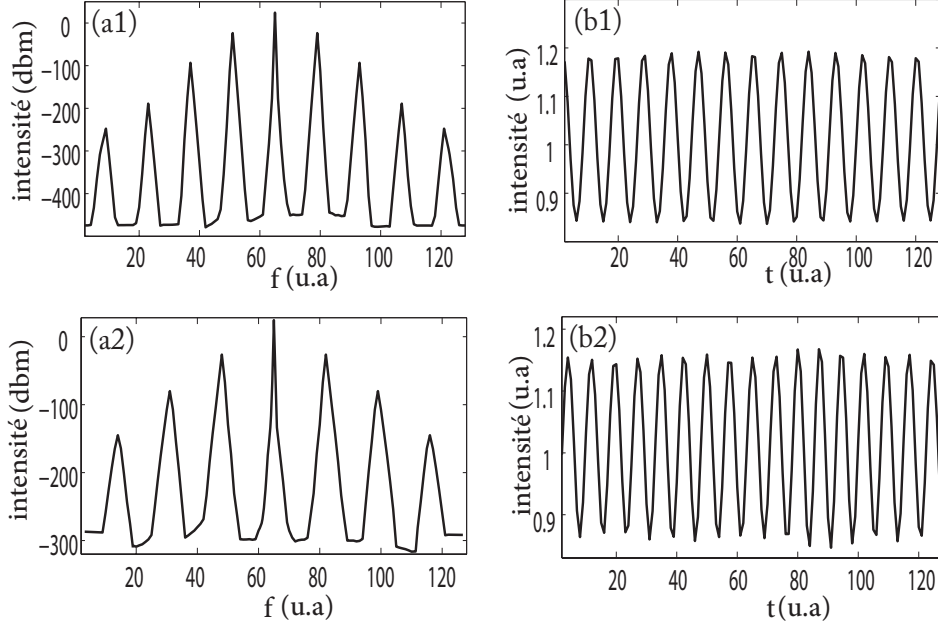


FIGURE 3.8 – Profil temporel (a_1, a_2) et spectral (b_1, b_2) des structures dissipatives modulées stables obtenues en intégrant numériquement l'équation (3.24) avec : (a_1, b_1) $B_2 = -1.1832$, $B_4 = 0.5$. (a_2, b_2) $B_2 = -0.5292$, $B_4 = 0.1$. Les autres paramètres sont $\Delta = 1.3$, $B_3 = 0$, $S = 1.048$

pourrons l'optimiser lors de la conception de la PCF à utiliser dans la cavité. L'expression du taux de répétition est donnée en remplaçant les équations (3.16 – 3.23) dans (3.41), nous trouvons alors :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{-\frac{6\beta_2}{\beta_4\alpha}} \quad (3.44)$$

D'après l'équation (3.44) la fréquence obtenue dans notre cas, ne dépend que des valeurs de β_2 , β_4 et α où la présence de β_4 représente un degré de liberté supplémentaire comparé aux cavités fibrées standards permettant ainsi d'atteindre des fréquences de répétition plus élevées dans des régimes de dispersion normale ou anormale.

L'expression de la puissance pompe P_{in} correspondant au premier seuil d'instabilité est obtenue en injectant les équations (3.16 – 3.23) dans les équations (3.40) et (3.42) ce qui donne :

$$P_{in} = \left(\left(\frac{6\beta_2^2 L^2}{4\beta_4 L \alpha} - 1 \right)^2 + 1 \right) \frac{\alpha^3}{\gamma L T} \quad (3.45)$$

3.4.2.1 Proposition d'un modèle de PCF à utiliser en cavité

Dans cette section, une géométrie de PCF est proposée afin d'être utilisée dans la cavité où les valeurs du zéro de dispersion et du coefficient de non linéarité ont été contrôlées de manière à ce que la fréquence de répétition des structures modulées soit de l'ordre des terahertz.

Comme le montre la figure (3.9), la PCF choisie possède une forme hexagonale et se compose de quatre couronnes de trous d'air avec un diamètre $d = 0.7\mu m$, un pitch $\Lambda = 1.8\mu m$, le rayon du coeur $r_c = 1.3\mu m$ et celui de la gaine $r_g = 11.658\mu m$. Le choix de ces paramètres assure une propagation infiniment monomode.

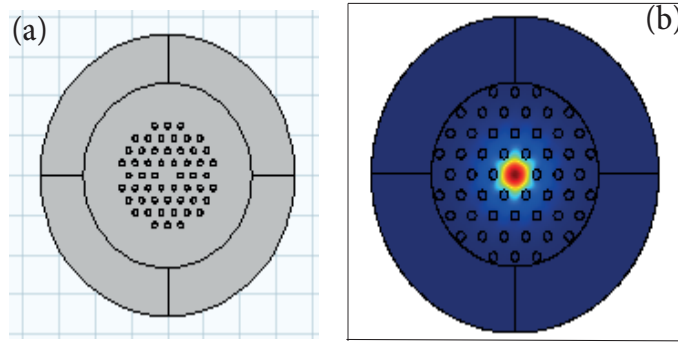


FIGURE 3.9 – a. Section transverse de la PCF proposée, b. Distribution radiale du champ électrique dans la PCF

Nous avons par la suite effectué à l'aide du logiciel Comsol, des simulations numériques qui nous ont permis de calculer les différentes caractéristiques de cette fibre à savoir l'indice effectif n_{eff} et l'air effective A_{eff} . Les coefficients de dispersion $\beta_2, \beta_3, \beta_4$ et le coefficient de non-linéarité γ ont été obtenus en utilisant les relations suivantes : [50, 72, 97] :

$$D_{ch}(\lambda) = -\frac{\lambda}{c} \frac{d^2 Re(n_{eff})}{d\lambda^2} \quad (3.46)$$

$$\beta_2 = -\frac{\lambda^2}{2\pi c} D_{ch}(\lambda) \quad (3.47)$$

$$\beta_m = \left. \frac{d^m}{d\omega^m} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (3.48)$$

$$\gamma = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{n_2}{A_{eff}} \quad (3.49)$$

La courbe de dispersion représentée par la figure (3.10.a) montre que la PCF conçue possède deux longueurs d'onde de zéro dispersion $\lambda_{01} \approx 1\mu m$ et $\lambda_{02} \approx 1.52\mu m$, nous

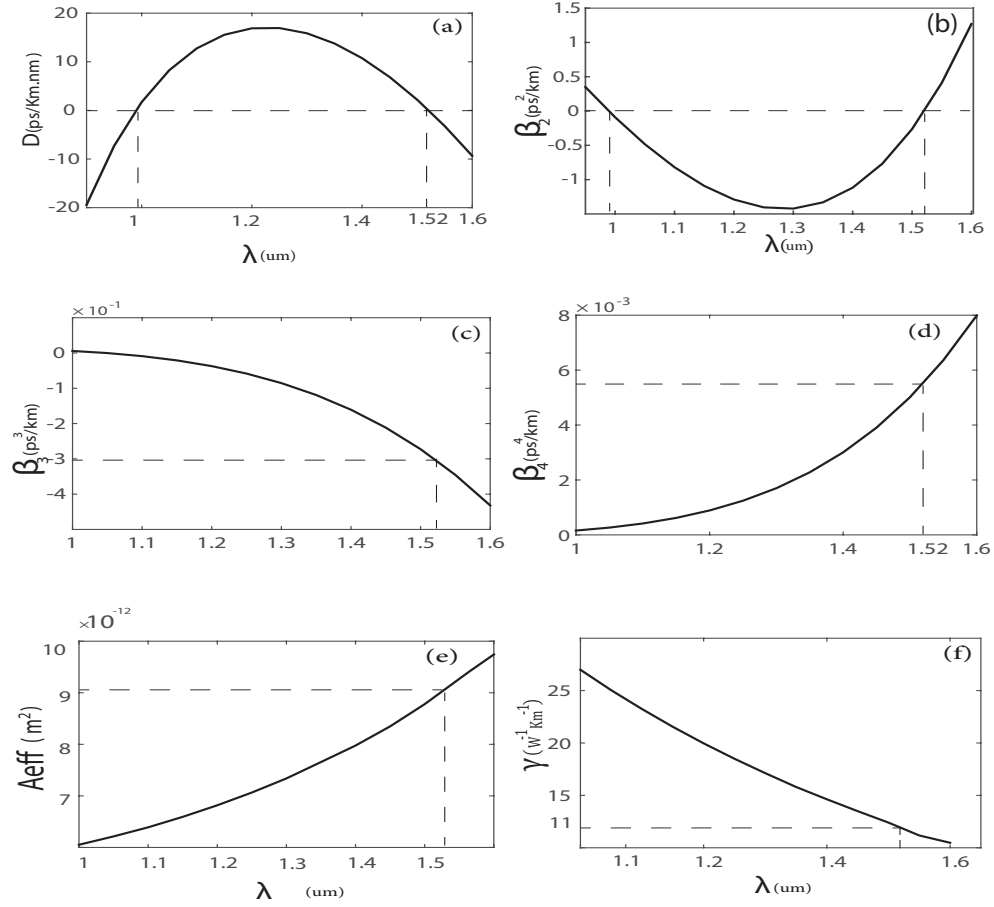


FIGURE 3.10 – Représentation des caractéristiques de la PCF proposée en fonction de la longueur d’onde : (a) Profil de dispersion. (b) β_2 . (c) β_3 . (d) β_4 . (e) l’air effective. (f) le coefficient de non- linéarité

avons choisi de travailler au voisinage de λ_{02} où les pertes de la silice sont faibles, les valeurs des autres paramètres sont obtenues à partir des figures (3.10.b.c.d.e.f) où on a trouvé respectivement :

$$\begin{aligned}\beta_2 &= -2.047 \cdot 10^{-1} \text{ps}^2 / \text{Km} \\ \beta_3 &= -3 \cdot 10^{-1} \text{ps}^3 / \text{Km} \\ \beta_4 &= 5.496 \cdot 10^{-3} \text{ps}^4 / \text{Km} \\ \gamma &= 11.88 \text{W}^{-1} \text{Km}^{-1}\end{aligned}$$

En plus des paramètres obtenus, nous choisissons des pertes optiques $\alpha_l L = 0.15$ correspondant à un tour de cavité de longueur de fibre $L = 10\text{m}$ et un coefficient de transmission du coupleur $T = 0.1$. Dans ce cas, la fréquence de la structure périodique

obtenue peut atteindre l'ordre des térahertz et sa valeur est $f = 4.57\text{Thz}$. Cette fréquence est obtenue pour une puissance pompe P_{in} tel que $P_{in} = 168.3\text{mW}$

3.4.3 Influence de la dispersion d'ordre trois sur l'IM

Nous discutons dans cette section l'influence de la dispersion d'ordre trois (DOT) sur l'instabilité de modulation dans la cavité fibrée ainsi que sur les structures périodiques qui émergent de cette instabilité. Le résultat obtenu par l'étude de stabilité linéaire permet d'affirmer que la présence du (DOT) introduit dans l'expression de la valeur propre du système Eq (3.35) une partie imaginaire proportionnelle à B_3 , sa partie réelle quant à elle reste inchangée en absence ou en présence de B_3 .

Cette partie imaginaire est définie comme une phase notée $K_c = B_3\Omega^3$ accumulée par les fréquences instables au cours de leur propagation, cette phase ne modifie ni les puissances seuils de l'apparition de l'IM ni les fréquences des structures modulées Eq (3.38 – 3.39). Néanmoins, sa présence brise la symétrie ($\tau \rightarrow -\tau$) de l'équation (3.24) ce qui provoque une dérive temporelle du train d'impulsions généré, ce dernier n'est plus stationnaire et acquiert par conséquent une vitesse linéaire V_l dont l'expression est la suivante :

$$V_l = \frac{\partial \text{Im}(\lambda)}{\partial \Omega} = \frac{3B_3\sqrt{(2-\Delta)} B_4}{B_4} \quad (3.50)$$

L'équation (3.50) indique qu'en absence du troisième ordre de dispersion $B_3 = 0$, la vitesse des structures périodiques est nulle ce qui correspond à une propagation stationnaire comme c'est le cas de la figure (3.11.a). Cette dernière illustre l'évolution de la solution en fonction du temps t où on remarque que la solution préserve sa symétrie tout le long de la propagation, ceci veut dire que la vitesse initiale n'a pas été modifiée. Par contre si $B_3 \neq 0$, chaque fréquence instable Ω va acquérir une nouvelle vitesse de propagation proportionnelle à B_3 , ceci est illustré par la figure (3.11.b) où la dérive temporelle est traduite par l'apparition d'une pente au cours du temps.

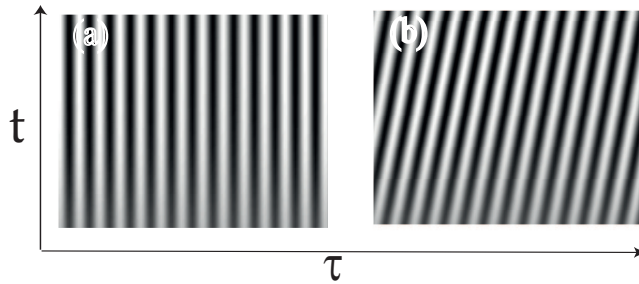


FIGURE 3.11 – Carte τ - t décrivant l'évolution temporelle des structures périodiques avec : $S = 1.05, \Delta = 1.3, B_4 = 0.5, B_2 = -1.1832$, a. $B_3 = 0$, b. $B_3 = 0.12$.

Étant donné que la vitesse V_l a été calculée au seuil d'instabilité de modulation ($Re(\lambda) = 0$), on s'attend à ce qu'elle subisse une correction dès qu'on s'éloigne de ce seuil [17, 16]. Pour évaluer cette correction une étude faiblement non-linéaire est nécessaire. Cette étude fera l'objet du prochain chapitre.

En plus de la dérive temporelle, il a été démontré [98] que la présence de DOT induit aussi une asymétrie spectrale de la structure dissipative, ceci est expliqué par le fait que deux composantes spectrales se trouvant à des cotés opposés du spectre vont accumuler des phases différentes et provoquer ainsi une brisure de symétrie spectrale. Cette dernière va dépendre du signe de B_3 comme c'est représenté par la figure (3.12).

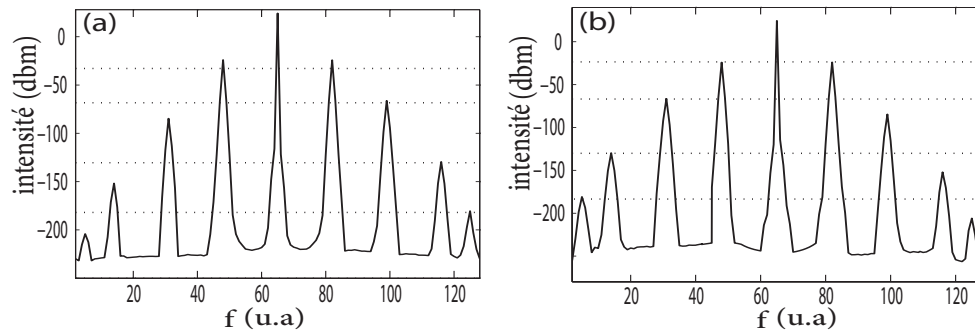


FIGURE 3.12 – Asymétrie spectrale provoquée par la présence de B_3 . (a,b) Spectre de la structure dissipative modulée stable obtenue respectivement en intégrant numériquement l'équation (3.24) pour $B_3 = 0.35$ et $B_3 = -0.35$, les autres paramètres sont : $\Delta = 1.3$, $B_2 = -1.1832$, $B_4 = 0.5$, $S = 1.05$

3.5 Conclusion

Nous avons utilisé dans ce chapitre le modèle du champ moyen afin de dériver l'équation qui régit la propagation d'une onde lumineuse dans une cavité fibrée microstructurée. Le résultat obtenu est équivalent au modèle de Lugiato-Lefever dans les cavités résonnantes. L'utilisation des PCF dans la cavité a permis d'atteindre les ordres supérieurs de dispersion, où la présence de l'ordre quatrième de dispersion limite la zone d'apparition de l'instabilité de modulation, qui devient comprise entre deux seuils de puissances.

Nous avons exploité cette instabilité afin de générer un train d'impulsion périodique dont la fréquence a atteint l'ordre de TéraHertz en présence du quatrième ordre de dispersion. La présence du troisième ordre de dispersion induit quant à elle une dérive temporelle du train généré provoquant une modification de la vitesse de propagation de la structure périodique mais sans modifier sa fréquence .

Chapitre 4

Génération et stabilisation des solitons de cavité

Le but de ce chapitre est d'étudier l'effet des ordres supérieurs de dispersion sur la dynamique non-linéaire régissant l'apparition et la stabilisation des structures dissipatives dans la cavité. Pour ce faire, nous effectuons une étude de bifurcation faiblement non-linéaire au voisinage des deux seuils d'instabilité de modulation. Ce calcul permet de dériver les équations d'amplitude des structures périodiques au voisinage de chacun de ces seuils, il permet aussi de déterminer le seuil du changement de la nature de bifurcation relative à l'apparition des structures localisées (solitons de cavité) et par la suite, évaluer aussi la correction de la vitesse des solutions périodiques en présence du coefficient β_3 . La dernière partie de ce chapitre sera consacrée à l'interaction des solitons de cavité.

4.1 Dynamique non-linéaire au premier seuil d'instabilité de modulation

4.1.1 Étude faiblement non-linéaire

Afin de déterminer l'expression analytique de la solution modulée émergeant au delà du premier seuil de modulation d'instabilité dans le régime monostable, nous effectuons un calcul multi-échelle du problème décrit par l'équation (3.24) en fonction d'un petit paramètre ϵ qui mesure l'écart au seuil tel que :

$$S = S_{s1} + \epsilon^2 \quad (4.1)$$

Nous décomposons ensuite le champ électrique $E(t, \tau)$ en une partie réelle et imaginaire comme suit :

$$E = X_1 + iX_2 \quad (4.2)$$

L'équation (3.24) s'écrit dans ce cas sous forme du système suivant :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} = S - X_1 - X_2 (X_1^2 + X_2^2 - \Delta) + B_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 X_1}{\partial \tau^3} - B_4 \frac{\partial^4 X_2}{\partial \tau^4} \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} = -X_2 + X_1 (X_1^2 + X_2^2 - \Delta) - B_2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 X_2}{\partial \tau^3} + B_4 \frac{\partial^4 X_1}{\partial \tau^4} \end{cases} \quad (4.3)$$

Les états stationnaires et homogènes (x_1, x_2) correspondants à $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} = 0$ du système (4.3) sont donnés par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 (x_1^2 + x_2^2 - \Delta) = S \\ -x_2 + x_1 (x_1^2 + x_2^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous introduisons ensuite les déviations $U(t, \tau)$ et $V(t, \tau)$ par rapports aux états stationnaires et homogènes tel que :

$$\begin{cases} X_1(t, \tau) = x_1 + U(t, \tau) \\ X_2(t, \tau) = x_2 + V(t, \tau) \end{cases} \quad (4.5)$$

Nous effectuons par la suite un développement des paramètres du système en fonction des puissances du paramètre ϵ au voisinage du premier seuil d'IM :

$$U = \epsilon U_0 + \epsilon^2 U_1 + \epsilon^3 U_2 + \dots \quad (4.6)$$

$$V = \epsilon V_0 + \epsilon^2 V_1 + \epsilon^3 V_2 + \dots \quad (4.7)$$

$$x_1 = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots \quad (4.8)$$

$$x_2 = b_0 + \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \dots \quad (4.9)$$

Où a_0 et b_0 représentent la partie réelle et imaginaire des solutions stationnaires au point d'instabilité. Au voisinage de ce dernier la dynamique du système évolue sur une échelle de temps lente tel que :

$$T_0 = t \quad (4.10)$$

$$T_1 = \epsilon t \quad (4.11)$$

$$T_2 = \epsilon^2 t \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (4.13)$$

En remplaçant les équations (4.4 – 4.13) dans le système (4.3) et en égalant les parties correspondant aux différents ordres du paramètre ϵ , nous trouvons les systèmes à résoudre suivants :

1. A l'ordre ϵ

$$L_0 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.14)$$

2. A l'ordre ϵ^2

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_1 \quad (4.15)$$

3. A l'ordre ϵ^3

$$L_0 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_2 \quad (4.16)$$

Avec :

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} & 1 - 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (4.17)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} -2a_0b_1 - 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} & -6b_0b_1 - 2a_0a_1 \\ 2b_0b_1 + 6a_0a_1 & 2a_0b_1 + 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -2a_0b_2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} & -6b_0b_2 - 2a_0a_2 - 3b_1^2 - a_1^2 \\ 2b_0b_2 + 6a_0a_2 + 3a_1^2 + b_1^2 & 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} \end{pmatrix} \quad (4.19)$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -b_0U_0^2 - 2a_0U_0V_0 - 3b_0V_0^2 \\ a_0V_0^2 + 2b_0U_0V_0 + 3a_0U_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} -2a_0(U_0V_1 + U_1V_0) - b_1(U_0^2 + 3V_0^2) - V_0(6b_0V_1 + U_0^2 + V_0^2) \\ 2b_0(U_0V_1 + U_1V_0) + a_1(V_0^2 + 3U_0^2) + U_0(6a_0U_1 + V_0^2 + U_0^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2U_0(b_0U_1 + a_1V_0) \\ +2V_0(a_0V_1 + b_1U_0) \end{pmatrix} \quad (4.21)$$

Au premier ordre de ϵ le système (4.15) est homogène, sa résolution est équivalente à une étude de stabilité linéaire au point d'instabilité de modulation ($\Omega = \Omega_c$), l'opérateur linéaire L_0 devient dans ce cas (voir Annexe A) :

$$L_0(\Omega_c) = \frac{1}{S_{s1}^2} \begin{pmatrix} (1+\rho)^2 & (\rho^2-1) \\ (\rho^2-1) & (1-\rho)^2 \end{pmatrix} \quad (4.22)$$

Où le paramètre ρ est défini comme :

$$\rho = 1 - \Delta$$

Les solutions du système à cet ordre ont la forme suivante :

$$U_0 = A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (4.23)$$

$$V_0 = \left(\frac{1+\rho}{1-\rho} \right) A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (4.24)$$

Avec $\Omega_c = -\frac{B_2}{2B_4}$, $K_c = B_3 \Omega_c^3$ et $(1, \frac{1+\rho}{1-\rho})$ est le vecteur propre de l'opérateur linéaire. Ce résultat montre que la solution est une onde modulée à la fréquence Ω_c ayant une amplitude stable A_1 et subit une accumulation de phase K_c en présence de B_3 .

Aux ordres supérieurs de ϵ , les systèmes (4.16–4.17) deviennent inhomogènes et leur résolution nécessite de satisfaire la condition de solvabilité à l'ordre deux, puis à l'ordre trois. Le détail de ce calcul est donné en annexe A.

Dans ce qui suit, nous ne donnerons que le résultat obtenu à la fin du calcul.

4.1.2 Équation d'amplitude des structures périodiques

La condition de solvabilité lors de la résolution du système à l'ordre ϵ^3 nous fournit l'équation qui décrit l'évolution de l'amplitude $A = \epsilon A_1$ au voisinage du point d'instabilité :

$$\frac{1}{2S_{s1}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s1}}{S_{s1}(2 - \Delta)^2} A - (f_1(\Delta) + i f_2(\Delta)) |A|^2 A \quad (4.25)$$

Avec

$$\begin{cases} f_1(\Delta) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ f_2(\Delta) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{cases} \quad (4.26)$$

Où

$$\begin{aligned} a &= 2 \left(200 B_3^2 (2\Delta - 3) \Omega^6 - (\Delta - 2)^2 (342\Delta - 521) \right) \\ b &= 20 B_3 (\Delta^2 - 12\Delta + 16) \Omega^3 \\ c &= -(\Delta - 2)^2 \Delta^2 (10 B_3 \Omega^3 - 9\Delta + 18) (10 B_3 \Omega^3 + 9\Delta - 18) \\ d &= 20 B_3 (\Delta - 2)^2 \Delta^2 \Omega^3 \end{aligned}$$

L'équation (4.25) contient un terme linéaire proportionnel à l'écart au seuil ($S - S_{s1}$) décrivant l'augmentation exponentielle de l'amplitude. Elle comporte aussi un terme cubique qui représente la non-linéarité du système. La partie imaginaire est synonyme de la présence du troisième ordre de dispersion.

4.1.2.1 Dynamique de la cavité en absence de B_3

Nous voulons dans cette section négliger l'effet du troisième ordre de dispersion afin de nous focaliser uniquement sur l'impact de B_4 sur le changement de la nature de bifurcation. Pour ce faire on pose $B_3 = 0$ dans l'équation (4.25), le terme $f_2(\Delta)$ s'annule et l'équation d'amplitude prend la forme suivante :

$$\frac{1}{S_{s1}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s1}}{S_{s1}(2 - \Delta)^2} A - f(\Delta) |A|^2 A \quad (4.27)$$

Avec :

$$f(\Delta) = \frac{-2(342\Delta - 521)}{81(\Delta - 2)^2 \Delta^2} \quad (4.28)$$

L'équation (4.27) est équivalente à l'équation d'amplitude d'une bifurcation Pitchfork comme celle décrite par l'équation (1.26). Elle décrit des structures périodiques stables qui émergent au delà du seuil d'instabilité de modulation. Lorsque $f(\Delta) > 0$, la bifurcation est dite dans ce cas, super-critique. Par contre lorsque $f(\Delta) < 0$, les solutions périodiques peuvent exister avant le seuil d'instabilité et leur description nécessite de porter le développement non linéaire à l'ordre 5 de ϵ . L'équation d'amplitude sera équivalente dans ce cas à l'équation (1.28) où on trouve une branche de solutions périodiques stables reliée au point d'instabilité par une autre branche de solutions instables [99]. Dans ce cas, il peut exister une région de paramètre appelée **Pinning zone** où les solutions périodiques stables et les solutions homogènes coexistent donnant lieu à des structures localisées stables connues aussi sous le nom de **solitons de cavité**.

En utilisant l'équation (4.29), nous pouvons ainsi définir le désaccord en phase $\Delta_s = 521/342$ pour lequel $f(\Delta) = 0$ comme étant le seuil correspondant au changement de la nature de bifurcation et à l'apparition des solitons de cavité. Si $\Delta < 521/342$ alors $f(\Delta) > 0$ et la bifurcation est super-critique (solutions périodiques stables), sinon $\Delta > 521/342$ on aura $f(\Delta) < 0$ et la bifurcation est sous-critique (structures localisées stables) [16].

Dans le cas des cavités fibrées standards où B_4 est négligé, la fonction $f(\Delta)$ prend la forme suivante [33, 100, 32, 99] :

$$f(\Delta) = -\frac{2(30\Delta - 41)}{9(\Delta - 2)^2 \Delta^2} \quad (4.29)$$

Dans ce cas le désaccord en phase seuil correspondant à changement de bifurcation est $\Delta_s = 41/30$.

On déduit alors qu'en plus de son influence sur les fréquences des structures périodiques, la présence de B_4 provoque un décalage du désaccord en phase seuil de $\Delta_s = 41/30$ vers $\Delta_s = 521/342$. Ce décalage est illustré par la figure (4.1) où on a tracé la fonction $f(\Delta)$ dans le cas d'une fibre standard ($B_4 = 0$) et une PCF ($B_4 \neq 0$).

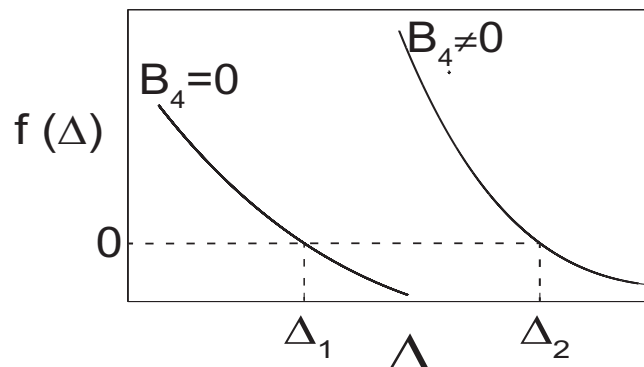


FIGURE 4.1 – Décalage du seuil du changement de bifurcation de $\Delta_1 = 1.367$ lorsque $B_4 = 0$ à $\Delta_2 = 1.523$ lorsque $B_4 \neq 0$ avec $B_3 = 0$

Une fois que les zones de **supercriticité/sous-criticité** ont été définies nous pouvons évaluer les amplitudes des structures périodiques au delà du seuil, pour cela nous cherchons des solutions de l'équation (4.27) ayant la forme suivante :

$$A = |A| \exp i(k_0 t + \Omega_c \tau) \quad (4.30)$$

En injectant cette solution dans l'équation (4.27) nous obtenons :

$$|A|^2 = \frac{1}{f(\Delta)} \frac{S - S_{s1}}{S_{s1}(2 - \Delta)^2} \quad (4.31)$$

$$k_0 = 0 \quad (4.32)$$

L'amplitude $|A|^2$ est proportionnelle à l'écart au seuil $S - S_{s1}$ et dépend aussi des paramètres de la fibre B_2 et B_4 ainsi que le désaccord en phase Δ .

Notons aussi qu'il n'y a pas d'accumulation de phase au delà du seuil, ce qui confirme les résultats obtenus par l'étude de stabilité linéaire qui prédisait des structures stationnaires lorsque $B_3 = 0$.

Dans la figure (4.2) nous avons exploité le résultat de l'équation (4.31) afin de tracer les diagrammes de bifurcation supercritique pour des différents détunings. Les résultats obtenus en utilisant la méthode de bifurcation faiblement non linéaire sont en accord avec ceux obtenues en intégrant numériquement l'équation (3.24).

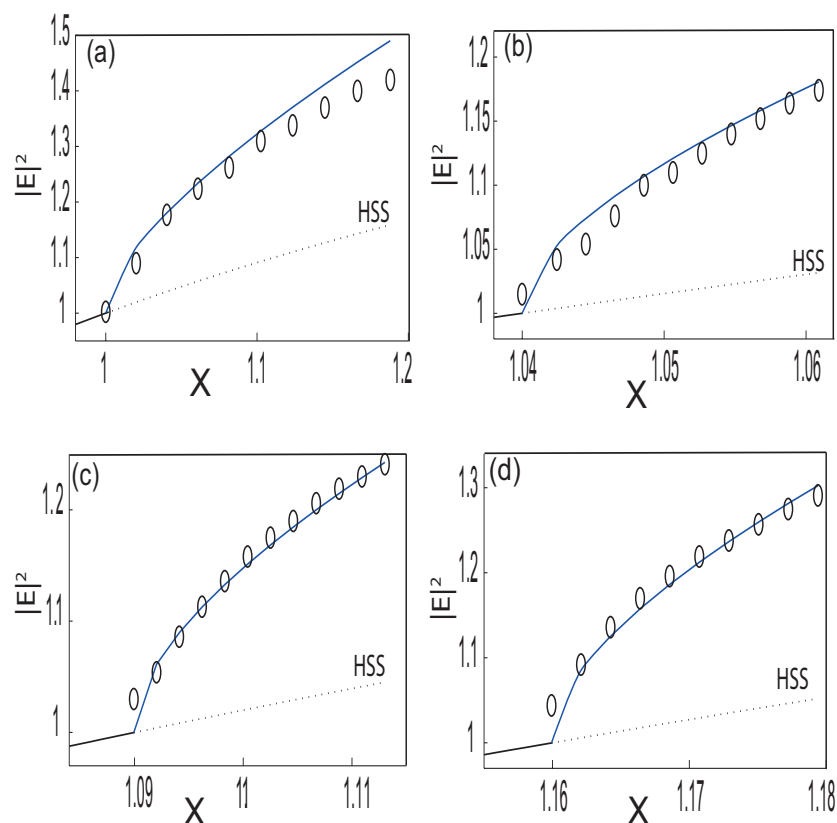


FIGURE 4.2 – Diagrammes de bifurcation supercritiques : Courbe bleu : résultats analytiques de la méthode de bifurcation. En cercles : résultats numériques. Courbe noir (solide/pointillé) : Solution homogène stationnaire (stable/instable). (a) : $\Delta = 1$, (b) : $\Delta = 1.2$, (c) : $\Delta = 1.3$, (d) : $\Delta = 1.4$, les autres paramètres sont $B_4 = 0.5$, $B_2 = -\sqrt{4B_4(2 - \Delta)}$ et $B_3 = 0$

4.1.2.2 Influence de la dispersion d'ordre 3

Nous avons vu dans la section précédente que la présence de B_3 introduisait une accumulation de phase K_c , ceci provoque la brisure de la symétrie temporelle ($\tau \rightarrow -\tau$) des structures dissipatives et induit par conséquent une dérive temporelle de ces dernières. Au delà du seuil d'instabilité, la présence du troisième ordre de dispersion se manifeste par la présence d'une partie imaginaire $f_2(\Delta)$ dans l'équation d'amplitude. Cette dernière traduit l'accumulation d'une phase non-linéaire k_0 au cours de la propagation en plus de la phase K_c introduisant ainsi une correction à la vitesse évaluée précédemment équation (3.46).

Dans ce cas, l'amplitude et la phase des structures au delà du seuil sont données comme suit :

$$|A|^2 = \frac{1}{f_1(\Delta)} \frac{S - S_{s1}}{S_{s1}(2 - \Delta)^2} \quad (4.33)$$

$$k_0 = -2S_{s1}^2 f_2(\Delta) |A_1|^2 \quad (4.34)$$

En tenant compte de la phase k_0 , la vitesse des structures dissipatives au delà du seuil prend la forme suivante :

$$V = V_l + \frac{\partial k_0}{\partial \Omega} \quad (4.35)$$

Ceci correspond à :

$$v = \frac{3B_3 \sqrt{(2 - \Delta) B_4}}{B_4} + h(\Delta, B_3, B_4)(S - S_{s1}) \quad (4.36)$$

Avec :

$$h = -\frac{\partial \left(\frac{f_2}{f_1} \right)}{\partial \Omega} \frac{2S_{s1}}{(2 - \Delta)^2} \quad (4.37)$$

La fonction h représente la correction de la vitesse, elle dépend des paramètres Δ et B_4 et est proportionnelle à B_3 et l'écart au seuil $(S - S_{s1})$.

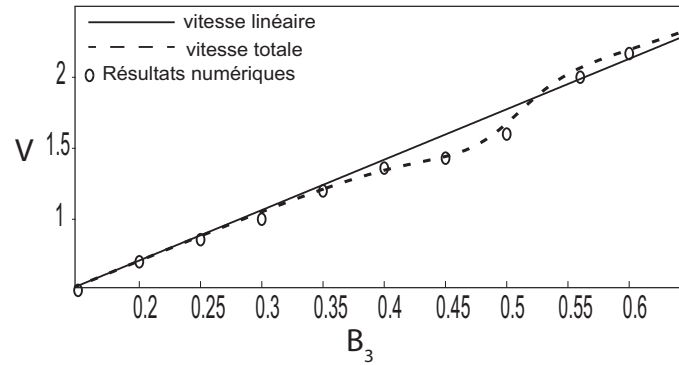


FIGURE 4.3 – Variation de la vitesse en fonction de B_3 avec : $S = 1.05$, $\Delta = 1.3$, $B_2 = -1.1832$, $B_4 = 0.5$

La variation de la vitesse des structures périodiques est donnée par la figure (4.3) où on voit que la vitesse linéaire V_l est modifiée en fonction de B_3 et l'écart au seuil d'instabilité. Nous avons évalué numériquement la variation de la vitesse totale en fonction de B_3 et un bon accord avec les résultats analytiques a été trouvé.

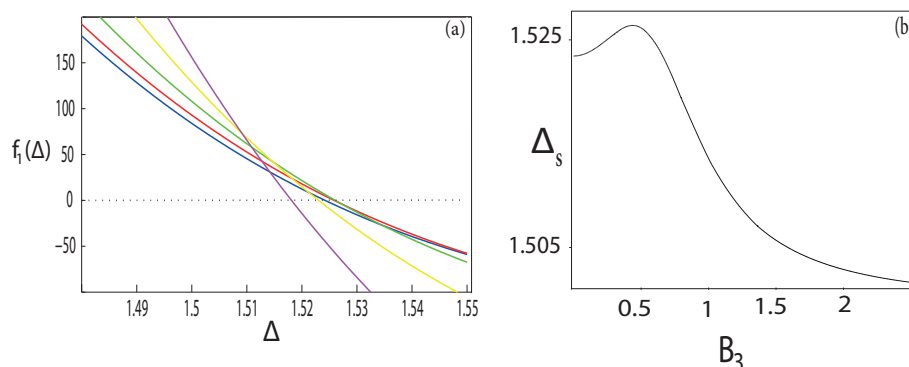


FIGURE 4.4 – Influence de B_3 sur le changement de la nature de bifurcation au premier seuil d'IM. a : Variation de $f_1(\Delta)$ en fonction de B_3 avec $B_2 = -\sqrt{4B_4(2 - \Delta)}$, $B_4 = 0.5$, $B_3 = 0.1$ (en bleu), $B_3 = 0.2$ (en rouge), $B_3 = 0.3$ (en vert), $B_3 = 0.4$ (en jaune), $B_3 = 0.5$ (en magenta). b : Variation du désaccord en phase seuil en fonction de B_3 .

En plus de son influence sur la vitesse des structures, la présence du terme B_3 dans l'expression de $f_1(\Delta)$ va affecter le seuil du changement de bifurcation ainsi que l'amplitude des structures périodiques.

Le résultat obtenu est donné par la figure (4.4.a) où la variation de $f_1(\Delta)$ a été tracée en fonction de B_3 . Nous voyons clairement que le seuil du changement de bifurcation (le zéro de cette fonction) subit une légère variation d'une valeur de B_3 à une autre.

Dans la figure (4.4.b) nous avons tracé les désaccord en phases pour lesquels $f_1(\Delta) = 0$ comme fonction de B_3 , la valeur de ces seuils varie peut autour de la valeur $\Delta_s = 1.52$ pour les faibles B_3 puis rejoint asymptotiquement la valeur $\Delta = 1.5$ pour des valeurs plus importantes de B_3 .

La figure (4.5) représente les nouveaux tracés de diagrammes de bifurcation super-critiques des structures dissipatives en présence de B_3 où une légère augmentation de l'amplitude a été observée comparé au cas où $B_3 = 0$. Ceci est un résultat inattendu puisque le troisième ordre de dispersion n'affecte théoriquement, que la phase de la solution mais il peut être justifié par le fait que ce terme modifie l'expression de $(f_1(\Delta))$ et par conséquent peut influencer légèrement l'amplitude aussi.

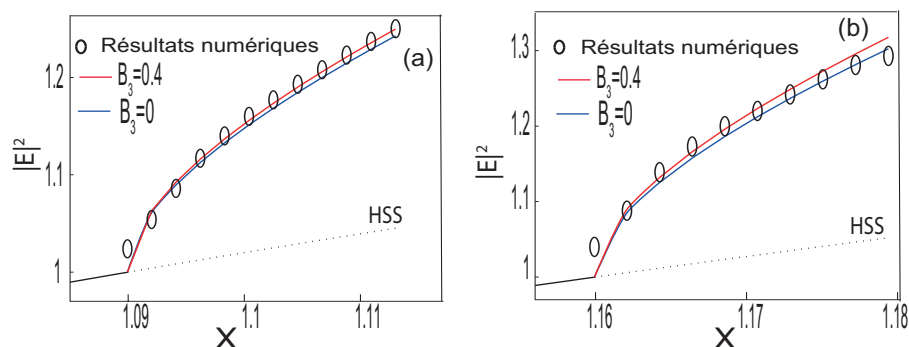


FIGURE 4.5 – Diagrammes de bifurcation supercritiques en présence de β_3 . Les paramètres sont les mêmes que pour la figure (4.2). a : $\Delta = 1.3$, b : $\Delta = 1.4$

4.2 Dynamique non-linéaire au deuxième seuil d'instabilité de modulation

Le but de cette section est de faire une étude analytique et numérique détaillée afin de comprendre la dynamique de notre système au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation.

Étant donné que ce seuil n'existe qu'en présence des PCF où l'ordre quatrième de dispersion est pris en considération (dans le cas des fibres standards il disparaît pour laisser place à une zone d'instabilité infinie) figure (3.7.a.b.c). Il est donc essentiel dans le cas d'une cavité fibrée micro-structurée d'évaluer les différentes structures dissipatives qui émergent lorsque la puissance injectée est suffisamment élevée pour atteindre ce seuil. Nous devons déterminer aussi les zones de bifurcation souscritique où des recherches récentes [101] ont démontré que la coexistence entre les structures périodiques et homogènes permet de stabiliser un nouveau type de structures localisées, appelées structures sombres ou Dark Solitons pouvant être exploitées par la suite dans le codage ou la transmissions des données.

4.2.1 Étude faiblement non-linéaire

Prenons l'équation de propagation de l'enveloppe du champ électrique dans la cavité (3.24) et de la même manière qu'au premier seuil d'instabilité, nous décomposons ce champ en partie réelle et imaginaire $E = X_1 + iX_2$, nous obtenons alors des systèmes identiques à ceux donnés par (4.3 – 4.5), la différence entre les deux seuils d'IM réside alors dans le fait que la zone instable se trouvera avant le deuxième seuil, dans ce cas

l'écart au seuil ϵ sera défini comme suit :

$$S = S_{s2} - \epsilon^2 \quad (4.38)$$

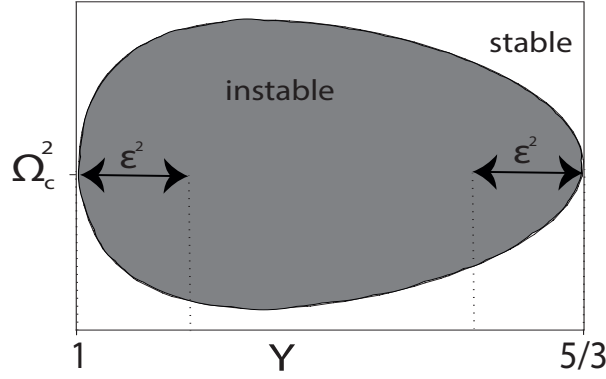


FIGURE 4.6 – Zone de fréquences instables à une distance ϵ^2 au voisinage des seuils d'instabilité de modulation

Nous introduisons les déviations $U(t, \tau), V(t, \tau)$ ainsi que les états stationnaires qui sont identiques au cas précédent (au premier seuil d'instabilité) et nous les développons en fonction de ϵ tel que :

$$U = -\epsilon U_0 - \epsilon^2 U_1 - \epsilon^3 U_2 - \dots \quad (4.39)$$

$$V = -\epsilon V_0 - \epsilon^2 V_1 - \epsilon^3 V_2 - \dots \quad (4.40)$$

$$x_1 = a_0 - \epsilon a_1 - \epsilon^2 a_2 - \dots \quad (4.41)$$

$$x_2 = b_0 - \epsilon b_1 - \epsilon^2 b_2 - \dots \quad (4.42)$$

En remplaçant les équations (4.38 – 4.42) dans (4.3) nous obtenons des systèmes aux ordres de ϵ qui ont la même forme que les systèmes donnés par (4.14 – 4.16) avec :

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} & 1 - 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (4.43)$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2a_0b_1 + 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} & 6b_0b_1 + 2a_0a_1 \\ -2b_0b_1 - 6a_0a_1 & -2a_0b_1 - 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} \end{pmatrix} \quad (4.44)$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 2a_0b_2 - 2a_1b_1 + 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} & 6b_0b_2 + 2a_0a_2 - 3b_1^2 - a_1^2 \\ -2b_0b_2 - 6a_0a_2 + 3a_1^2 + b_1^2 & -2a_0b_2 + 2a_1b_1 - 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} b_0 U_0^2 + 2a_0 U_0 V_0 + 3b_0 V_0^2 \\ -a_0 V_0^2 - 2b_0 U_0 V_0 - 3a_0 U_0^2 \end{pmatrix} \quad (4.46)$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 2a_0(U_0 V_1 + U_1 V_0) - b_1(U_0^2 + 3V_0^2) - V_0(-6b_0 V_1 + U_0^2 + V_0^2) \\ 2b_0(-U_0 V_1 - U_1 V_0) + a_1(V_0^2 + 3U_0^2) + U_0(-6a_0 U_1 + V_0^2 + U_0^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2U_0(-b_0 U_1 + a_1 V_0) \\ +2V_0(-a_0 V_1 + b_1 U_0) \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

Étant donné que nous avons opté pour des paramètres de la PCF qui permettent d'assurer la condition où la dégénérescence des deux fréquences au premier seuil est levée équation (3.40), le deuxième seuil décrit par l'équation (3.38) sera réduit dans ce cas à :

$$Y_{s2} = 5/3 \quad (4.48)$$

A l'ordre ϵ l'opérateur linéaire au deuxième point d'instabilité s'écrit sous la forme suivante :

$$L_0(\Omega_c) = \frac{5}{9S_{s2}^2} \begin{pmatrix} (\rho + 3)(3\rho + 1) & (3\rho + 1)(3\rho - 1) \\ (\rho + 3)(\rho - 3) & (3\rho - 1)(\rho - 3) \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

Avec

$$\rho = \frac{5}{3} - \Delta$$

Les solutions du système au premier ordre de ϵ s'écrivent sous la forme suivante :

$$U_0 = A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (4.50)$$

$$V_0 = \left(\frac{\rho + 3}{1 - 3\rho} \right) A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (4.51)$$

Où $\left(1, \frac{\rho+3}{1-3\rho}\right)$ est le vecteur propre de cet opérateur.

La résolution du système ordre par ordre de ϵ se fait de la même façon qu'au voisinage du premier seuil d'instabilité, le détail de ce calcul sera donné en annexe. Nous nous intéresserons dans cette section qu'au résultat final.

4.2.2 Équation d'amplitude des solutions périodiques

Au troisième ordre de ϵ , la condition de solvabilité nous fournit l'équation qui décrit l'amplitude $A = \epsilon A_1$ des structures périodiques au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation tel que :

$$\frac{1}{6S_{s_2}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s_2}}{(\Delta - 2)(3\Delta - 14)S_{s_2}} A + (f_1(\Delta) + i f_2(\Delta)) |A|^2 A \quad (4.52)$$

Avec

$$\begin{cases} f_1(\Delta) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ f_2(\Delta) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{cases} \quad (4.53)$$

Où

$$\begin{aligned} a &= -4(\Delta - 2)(a_1 + a_2) + a_3 \\ a_1 &= 59049\Delta^7 - 798255\Delta^6 + 4417983\Delta^5 - 13345641\Delta^4 \\ a_2 &= 24735807\Delta^3 - 29605896\Delta^2 + 21969258\Delta - 7708940 \\ a_3 &= 600(486\Delta^6 - 5508\Delta^5 + 24435\Delta^4 - 57654\Delta^3 + 82686\Delta^2 - 73156\Delta + 30792)B_3\Omega^3 \\ b &= -60(3\Delta - 4)(243\Delta^5 - 2268\Delta^4 + 7398\Delta^3 - 11412\Delta^2 + 11040\Delta - 7304)B_3\Omega^3 \\ c &= 3(3\Delta^2 - 20\Delta + 28)(3\Delta - 4)^2 c_1 \\ c_1 &= (9\Delta^2 - 30\Delta + 34)^2 (100(B_3\Omega^3)^2 - 81\Delta^2 + 348\Delta - 372) \\ d &= -60(\Delta - 2)(3\Delta - 14)(3\Delta - 4)^2 (9\Delta^2 - 30\Delta + 34)^2 B_3\Omega^3 \end{aligned}$$

4.2.3 Changement de la nature de bifurcation

Dans le cas où la dispersion d'ordre trois est négligée, l'équation d'amplitude prend la forme suivante :

$$\frac{1}{6S_{s_2}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s_2}}{(\Delta - 2)(3\Delta - 14)S_{s_2}} A + f(\Delta) |A|^2 A \quad (4.54)$$

Où la fonction $f(\Delta)$ est purement réelle et son signe déterminera la nature de la bifurcation. Si $f(\Delta) > 0$ alors la bifurcation est supercritique et des structures modulées stables apparaîtront avant le seuil d'instabilité, si $f(\Delta) < 0$ dans ce cas la bifurcation est sous-critique et des structures périodiques peuvent exister au delà du deuxième seuil d'instabilité, ceci permettra comme au premier seuil une possible coexistence avec les solutions stationnaires et donnera lieu, comme on le verra dans la suite de ce chapitre, à des structures dissipatives localisées sombres.

L'expression de cette fonction est donnée comme suit

$$f(\Delta) = \frac{4(f_1 + f_2)}{9(\Delta - 2)(3\Delta - 14)(3\Delta - 4)^2(27\Delta - 62)(9\Delta^2 - 30\Delta + 34)^2} \quad (4.55)$$

Avec

$$\begin{aligned} f_1 &= 59049\Delta^7 - 798255\Delta^6 + 4417983\Delta^5 - 13345641\Delta^4 \\ f_2 &= 24735807\Delta^3 - 29605896\Delta^2 + 21969258\Delta - 7708940 \end{aligned}$$

Le tracé de f comme fonction du paramètre Δ nous fournit le seuil du changement de bifurcation, comme le montre la figure (4.7), ce seuil est différent de celui évalué au voisinage du premier seuil d'IM et il est égale à $\Delta_s = 1.401$. Donc si $\Delta_s < 1.401$ la bifurcation est supercritique sinon $\Delta_s > 1.401$ la bifurcation sera sous-critique.

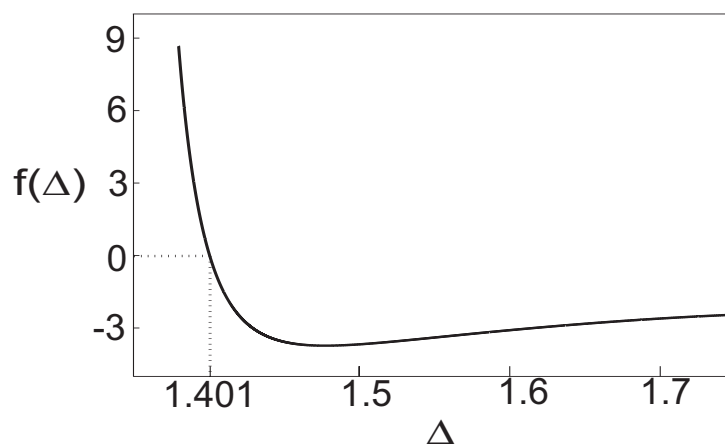


FIGURE 4.7 – Variation de $f(\Delta)$ au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation

4.2.3.1 Influence de B_3 sur la nature de la bifurcation

Dans le cas où nous tenons compte du troisième ordre de dispersion, le type de bifurcation dépendra alors du signe de la partie réelle de la fonction $f(\Delta)$ dans l'équation (4.53). Nous obtenons une bifurcation super-critique pour $f_1(\Delta) > 0$ et une bifurcation sous-critique pour $f_1(\Delta) < 0$. Le tracé du seuil du changement de la nature de bifurcation est donné par la figure (4.8.b), nous remarquons qu'il diminue jusqu'à atteindre $\Delta_s = 1.24$ pour $B_3 = 0.2$, la valeur de ce seuil remonte progressivement avec B_3 pour suivre finalement une asymptote au voisinage de $\Delta_s = 1.48$. La figure (4.8.a) donne le tracé de $f_1(\Delta)$ pour différentes valeur de B_3 où on remarque, que pour chaque valeur de B_3 correspond à une courbe de $f_1(\Delta)$.

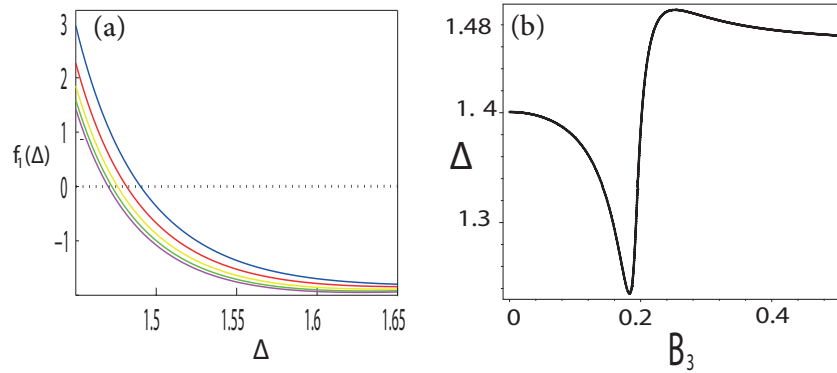


FIGURE 4.8 – Influence de B_3 sur le changement de la nature de bifurcation au deuxième seuil d'IM. a : Variation de $f_1(\Delta)$ en fonction de B_3 avec $B_2 = -\sqrt{4B_4(2 - \Delta)}$, $B_4 = 0.1$, $B_3 = 0.25$ (en bleu), $B_3 = 0.3$ (en rouge), $B_3 = 0.35$ (en jaune), $B_3 = 0.4$ (en vert), $B_3 = 0.45$ (en magenta). b : Variation du désaccord en phase seuil en fonction de B_3 .

4.2.4 Amplitude et vitesse totale des structures dissipatives

Nous voulons dans cette section évaluer l'amplitude et la phase des structures périodiques qui émergent au voisinage du deuxième seuil d'IM, pour cela nous cherchons des solutions de l'équation (4.53) qui ont la même forme que celles données par l'équation (4.32), nous trouvons finalement :

$$|A|^2 = \frac{1}{f_1(\Delta)} \frac{S_{s2} - S}{S_{s2}(\Delta - 2)(3\Delta - 14)} \quad (4.56)$$

$$K_0 = 6S_s^2 f_2(\Delta) |A|^2 \quad (4.57)$$

L'amplitude de la structure obtenue par le développement non-linéaire pour un désaccord en phase $\Delta = 1.2$ à une distance ϵ^2 du seuil d'instabilité est représentée par le diagramme de bifurcation supercritique donné par la figure (4.9). Nous avons constaté que l'influence de B_3 sur cette amplitude est pratiquement insignifiante par rapport au premier seuil d'instabilité de modulation où on a obtenu une légère variation. Dans ce cas la présence de B_3 se manifeste uniquement par la présence d'une phase non-linéaire K_0 , cette dernière dépendra directement de la distance au seuil ϵ^2 . Cette phase est synonyme aussi d'une correction non linéaire de la vitesse évaluée au seuil, elle est notée h et son expression est donnée comme suit :

$$h = \frac{\partial k_0}{\partial \Omega} = \frac{\partial \left(\frac{f_2}{f_1} \right)}{\partial \Omega} \frac{6S_{s2}}{((\Delta - 2)(3\Delta - 14))} \quad (4.58)$$

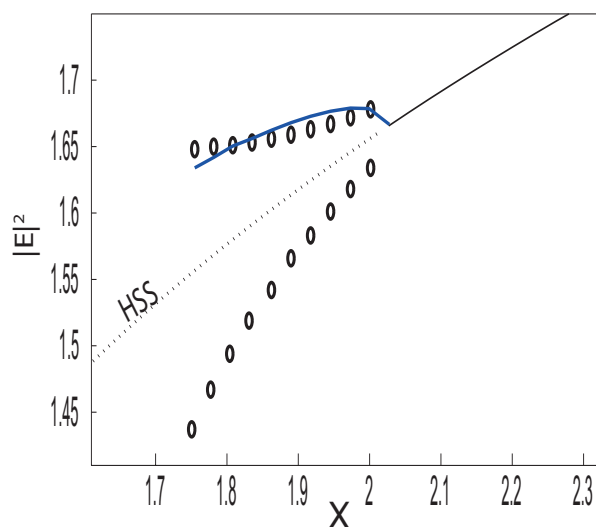


FIGURE 4.9 – Diagramme de bifurcation au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation avec : $B_2 = 0.1, B_3 = 0, B_4 = 0.1, \Delta = 1.2$. Courbe continue : résultats analytiques de la méthode de bifurcation. En cercles : résultats numériques. Courbe noir (solide/pointillé) : Solution homogène stationnaire (stable/instable)

La vitesse totale de la structure dissipative périodique qui émerge à une distance ϵ^2 du deuxième point d'instabilité sera alors la contribution de la vitesse linéaire et sa correction non-linéaire, elle s'écrit sous la forme suivante :

$$v = \frac{3B_3\sqrt{(2-\Delta)B_4}}{B_4} + h(\Delta, B_3, B_4)(S_{s2} - S) \quad (4.59)$$

La figure (4.10.a) représente la variation de la vitesse totale en fonction de B_3 pour différentes valeurs de distance au seuil ϵ^2 où il est clair que la correction de la vitesse est proportionnelle à l'écart au seuil. Ce résultat est logique car c'est cet écart qui caractérise la non-linéarité du système. Par contre, cette même correction n'apparaît que pour certaines valeurs de B_3 ($0.11 < B_3 < 0.2$ au premier seuil d'IM et $0.35 < B_3 < 0.6$ au deuxième seuil d'IM), c'est un résultat contre intuitif puisqu'on s'attendait à ce que chaque valeur de B_3 corresponde à une correction de la vitesse. Néanmoins, on peut le justifier par le fait que la vitesse totale reste pratiquement proche de la vitesse linéaire quelque soit B_3 puisque la distance au seuil doit rester petite (pour la validité du modèle).

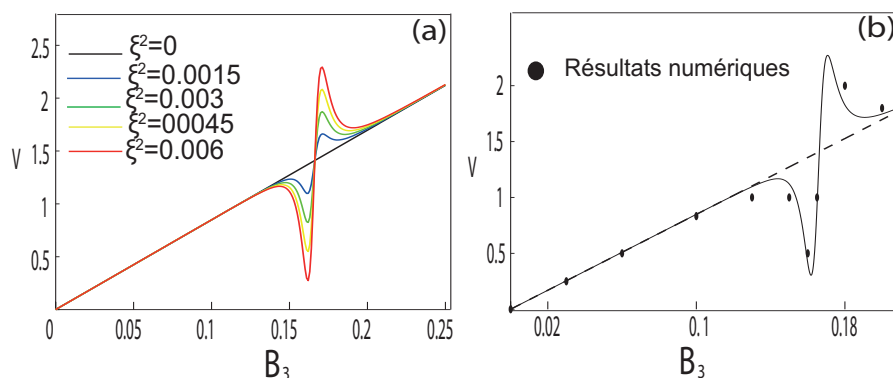


FIGURE 4.10 – (a) :Variation de la vitesse des structures périodiques en fonction de B_3 pour différentes distance au seuil d’instabilité. Courbe rouge : $\epsilon^2 = 0.006$. (b) : résultats numériques pour $\epsilon^2 = 0.006$. Les paramètres de la fibre sont $B_2 = -0.5657$, $B_4 = 0.1$, $\Delta = 1.2$

4.3 Les solitons de cavité

Comme cela a été expliqué dans les chapitres précédents, les solitons de cavité appartiennent à la classe des structures dissipatives localisées. Ces dernières sont considérées comme solutions des équations différentielles qui régissent les systèmes dynamiques à réaction-diffusion et apparaissent spontanément loin de l’équilibre thermodynamique dû à la brisure de la symétrie de l’état homogène du système lorsqu’il est soumis à une petite perturbation. On peut les trouver dans plusieurs domaines de recherches scientifiques tels que la mécanique des fluides, la végétation, l’optique[102].

D’un point de vue macroscopique, les structures dissipatives (localisées ou périodiques) sont le résultat d’un double équilibre entre la non-linéarité et la diffusion d’un côté et entre la dissipation et le paramètre d’injection d’un autre côté. Dans ce cas la brisure de l’onde continue est causée par la présence de la non-linéarité dans le système, et maintenue par l’injection externe, la diffusion quant à elle tend à rétablir l’homogénéité.

En optique, plus précisément dans le cas des cavités fibrées, les solitons de cavité sont considérés comme des pics lumineux dont le nombre dépend directement des conditions initiales. Ils émergent dans une zone de paramètres (pinning zone) où l’instabilité de modulation est sous-critique, dans ce cas une intersection entre la structure périodique et l’état homogène est possible permettant ainsi la formation des structures localisées stables.

Les solitons de cavité attirent de plus en plus l’attention grâce à leurs propriétés très intéressantes surtout lors de la conception des circuits tout-optique où ils peuvent être exploités dans diverses applications telles que la génération des signaux optiques à très haut débit, la conception des mémoires ou des commutateurs optiques.

4.3.1 Génération des solitons brillants

Nous avons démontré qu'au voisinage du premier seuil d'IM, une zone où la bifurcation sous-critique pouvait exister lorsque $\Delta > 1.52$, la largeur de la zone souscritique étant une notion très importante est proportionnelle à la valeur Δ où plus elle est large et plus la stabilité des solitons de cavité est meilleure.

Les résultats numériques obtenus sont représentés par la figure (4.11) où nous avons intégré numériquement l'équation (3.24) avec $t = 30000$ ce qui correspond pour la fibre utilisée dans le chapitre 3 à 240000 tours de cavité avec $t_r = 48.3ns$.

La figure (4.11.b) représente le profil temporel du soliton brillant obtenu. Ce dernier est constitué d'un pic où se trouve le maximum de puissance entouré des deux côtés d'un ensemble de petits pics symétriques avec une amplitude moins importante. Ces derniers constituent le piédestal oscillant du soliton de cavité. Lorsque ces oscillations deviennent faibles, elles prennent la forme suivante [103] :

$$|E|^2 - X \propto \exp(\pm -\tau/u) \cos(2\pi\tau/\lambda + cst)$$

Où λ est définie comme la longueur d'onde de l'oscillation et u la différence d'amplitude entre deux pics successifs.

Le spectre du soliton est représenté par la figure (4.11.d) où toute la puissance est concentrée aussi au niveau du pic principal, ceci veut dire que les solitons de cavité brillants présentent une grande stabilité même après leur propagation sur des milliers de kilomètres. Ceci est tout à fait normal puisque les solitons de cavité sont considérés comme des attracteurs et par conséquent ils sont naturellement immunisés contre les bruits de propagation. Cette stabilité a été étudiée et vérifiée expérimentalement dans le cas d'une fibre standard [40, 93, 32, 39] où un train de bit stable de 1.6T Hz a été généré et maintenu pendant une dizaine de millisecondes. Néanmoins l'application la plus importante est d'arriver à stocker temporairement jusqu'à 45000 bits à 25Gbit/s [32, 39].

La figure (4.11.a) représente le diagramme de bifurcation souscritique obtenue en intégrant numériquement l'équation (3.24) avec une impulsion gaussienne comme condition d'entrée au voisinage du premier seuil d'instabilité de modulation et un détuning $\Delta = 1.72$.

Le résultat obtenu nous a permis de définir exactement la zone pour laquelle on peut générer des solitons de cavité brillants et stables.

La dernière figure (4.11.c) représente à l'aide de la carte temporelle (t, τ) l'évolution du soliton en absence de B_3 , ce dernier est caractérisé par son maximum d'intensité. Au cours de sa propagation, on remarque qu'après chaque tour de cavité, le soliton conserve sa symétrie et reste stationnaire dans le référentiel qui se déplace à la vitesse de groupe V_g .

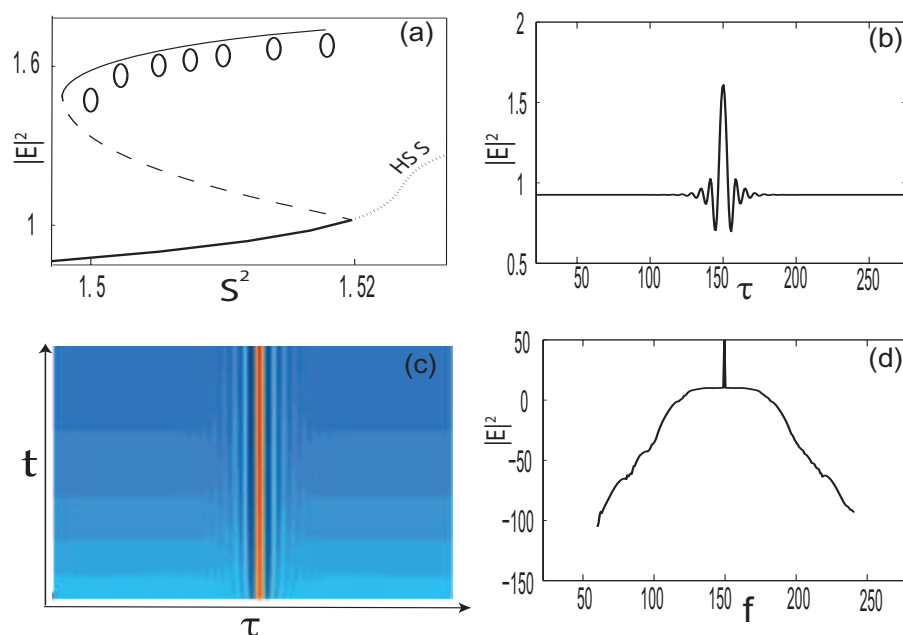


FIGURE 4.11 – (a) Diagramme de bifurcation souscritique au voisinage du 1^{er} seuil d’IM. Profil temporel du soliton brillant. (b et d) Profil temporel et spectral du soliton brillant. (c) carte $(t - \tau)$ décrivant l’évolution temporelle du soliton. Les paramètres sont : $\Delta = 1.72$, $S = 1.228$, $B_2 = -0.7483$, $B_4 = 0.5$, $B_3 = 0$

4.3.2 Génération des solitons sombres

Les solitons sombres ou noirs ont été mis en évidence théoriquement la première fois en 1973 [104, 105] et expérimentalement en 1987 [106]. Tous les résultats ont été obtenus dans le cas d’une propagation libre avec des fibres standards monomodes ayant une dispersion normale ($\beta_2 > 0$), dans ce cas les solitons noirs sont considérés comme des solutions exactes de l’équation de propagation NLS.

En cavité fibrée microstructurée, il a été démontré que la présence du quatrième ordre de dispersion permettait la stabilisation des solitons noirs au voisinage du deuxième seuil d’instabilité de modulation [101].

Nous commençons dans cette section par présenter les résultats numériques obtenus dans le cas où les solitons sont stationnaires c’est-à-dire $B_3 = 0$. Nous avons choisi en premier lieu de travailler avec le même nombre de tours de cavité que celui utilisé dans le cas des solitons brillants. On a remarqué que les piédestaux des solitons noirs présentaient des oscillations avec des amplitudes plus importantes, ce qui signifie qu’ils sont moins stables. On a donc diminué le nombre de tours que parcourt notre impulsion de 240000 à 180000 ce qui est équivalent à une distance parcourue de 2400Km et pour laquelle on a obtenu des structures plus stables.

La figure (4.12.a) représente le digramme de bifurcation souscritique obtenu numériquement avec une gaussienne inversée comme condition initiale, le désaccord en phase ($\Delta = 1.72$) était choisi de telle façon à obtenir une zone sous-critique la plus large possible tout en restant dans le régime monostable.

Les figures (4.12.b) et (4.12.d) représentent respectivement le profil temporel et spectral du soliton noir obtenu où on remarque que ces deux figures sont parfaitement symétriques puisqu'il n'y a pas d'accumulation de phase parce que $B_3 = 0$. Par conséquent les solitons noirs évoluent tout le temps avec une vitesse de groupe constante et restent stationnaires dans le temps référence qui évolue à la vitesse de groupe. Cette stationnarité est représentée comme pour le cas des solitons brillants par une carte (t, τ) donnée par la figure (4.12.c).

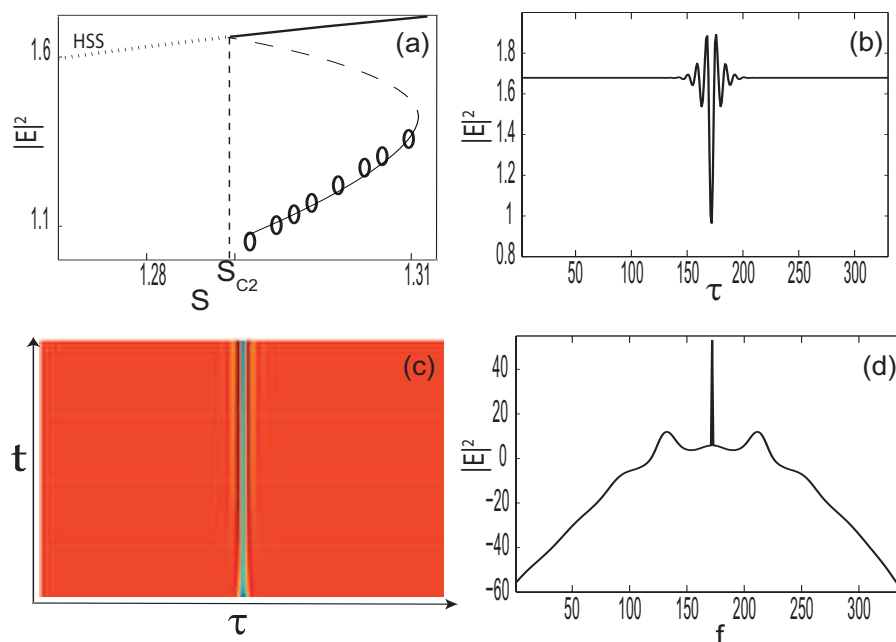


FIGURE 4.12 – (a) Diagramme de bifurcation souscritique au voisinage du deuxième seuil d'IM Profil temporel du soliton sombre. (b et d) Profil temporel et spectral du soliton sombre. (c) carte $(t-\tau)$ décrivant l'évolution temporelle du soliton. Les paramètres sont : $\Delta = 1.72$, $S = 1.2968$, $B_2 = -0.3347$, $B_4 = 0.1$, $B_3 = 0$

4.3.3 Influence du B_3 sur la propagation des solitons de cavité

Comme pour les structures périodiques, la présence du troisième ordre de dispersion provoque une accumulation de phase supplémentaire des solitons lorsqu'ils se propagent tour après tour dans la cavité. Ceci provoque une brisure de la symétrie temporelle $(\tau, -\tau)$ illustrée par les figures (4.13.a) et (4.13.c). Pour les solitons brillants et noirs, cette brisure entraîne une dérive temporelle induisant un changement dans la vitesse de

groupe de ces structures qui est définie de la même manière que dans le cas des structures périodiques ($V = V_l + V_{nl}$) où la correction non-linéaire reste à déterminer par le calcul non linéaire. L'évolution des deux types de solitons de cavité tour après tour de cavité est représentée par les cartes (t, τ) , ces dernières sont obtenues numériquement et illustrées par les figures (4.13.b) et (4.13.d).

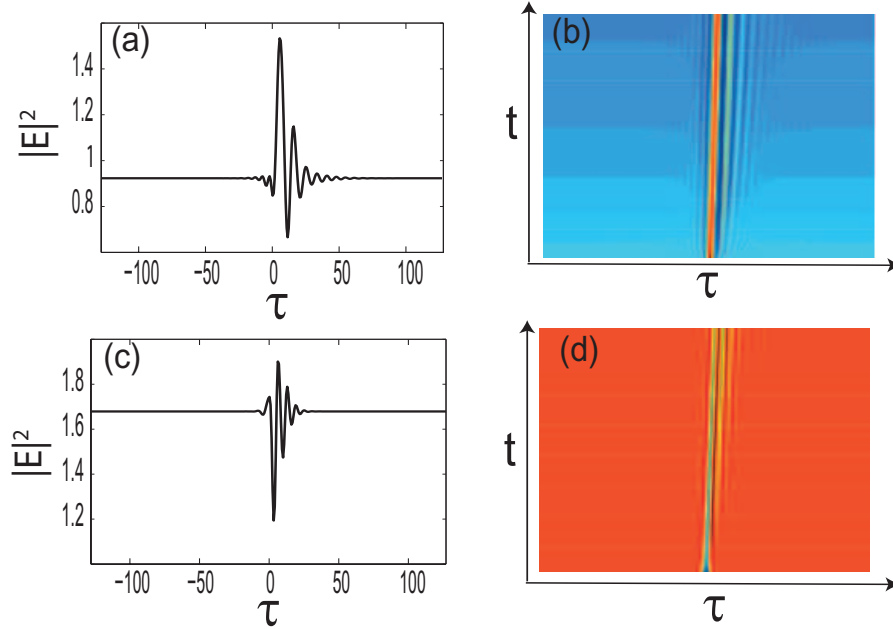


FIGURE 4.13 – (a,c) Brisure de symétrie du profil temporel du soliton brillant et sombre en présence de B_3 , (b,d) Carte $(t - \tau)$ qui décrit l'évolution des solitons en présence de B_3 , les paramètres sont les mêmes que ceux des figures (4.11 – 4.12) avec $B_3 = 0.12$

4.4 Interaction des solitons

Étant donné que les solitons de cavité présentent une très bonne stabilité lors de leur propagation, leurs principales applications seront essentiellement le transport et le stockage temporaire des données, ceci se fait en considérant chaque soliton comme un bit d'information [39].

Expérimentalement les solitons de cavité sont générés en superposant une impulsion lumineuse appelée : impulsion d'écriture avec l'onde continue qui existe déjà dans la cavité [107, 108], on distingue deux types de processus d'écritures :

- écriture cohérente où l'impulsion d'écriture et l'onde continue ont la même longueur d'onde et sont en phase,
- écriture non cohérente où l'onde continue et l'impulsion d'écriture ont des longueurs d'onde différentes. Dans ce cas, l'effet Kerr à travers la modulation de phase croi-

sée provoque la modification locale de l'indice de réfraction et la phase de l'onde continue, ceci induit une interaction entre l'impulsion d'écriture et l'onde continue permettant ainsi la création du soliton.

Une fois que le train de soliton est généré (ce qui correspond à une information codée sur n -bits), il est impératif de tenir compte de leurs interaction. Cette dernière peut provoquer un chevauchement des impulsions lors de la propagation et induire par conséquent une perte d'information.

Plusieurs phénomènes peuvent être à l'origine de cette interaction. Il a été démontré [109] qu'un couplage non local entre les différents composants d'une onde optique provoqué par phénomène tel que l'effet Raman dans les fibres optiques, pouvait dans un système bistable donner lieu à une interaction entre deux fronts, Ceci à comme résultat la création d'une structure localisée avec une largeur fixe et stable, dans ce cas, l'interaction est plutôt constructive. Par contre, dans le cas de l'interaction des solitons de cavité, l'influence de l'effet Raman reste à notre connaissance non étudiée, néanmoins ça reste un problème très intéressant à étudier lorsqu'il s'agit d'impulsions ultra-courtes (de l'ordre des femtosecondes).

L'électrostriction est un autre phénomène qui peut causer l'interaction des solitons, il peut être défini comme une légère déformation du milieu diélectrique sous l'effet d'une force exercée par champ électrique intense. Cette déformation modifie la densité du matériau et provoque un changement de sa constante de propagation et son indice de réfraction non-linéaire, telle que : [110, 111, 112, 113, 114, 115, 116, 117] :

$$\Delta n_e(t) = \frac{\Delta \epsilon(t)}{2n} \quad (4.60)$$

où : $\Delta \epsilon(t)$ est la variation de la constante du diélectrique provoquée par le changement de la densité du milieu et n est l'indice de réfraction linéaire.

Cette variation aura comme conséquence la génération d'une onde acoustique qui se propage transversalement du centre du coeur vers l'extrémité de la gaine puis réfléchit encore une fois vers le coeur. Le temps nécessaire pour que cette onde fasse le chemin aller-retour (environ $1ns$) représente le temps de réponse du phénomène de l'électrostriction où plus le nombre des allers-retours augmente et plus la variation de l'indice diminue comme le montre la figure (4.14) [118].

L'interaction entre deux solitons successives provient du fait que le passage du premier soliton dans la fibre va exciter l'onde acoustique qui interagit avec le soliton suivant, ce dernier ressentira alors un léger décalage de sa fréquence. Les deux solitons n'ayant plus la même fréquence subiront l'effet de la dispersion chromatique et vont voyager avec des vitesses de groupe différentes. Au bout d'une certaine distance de propagation le deuxième soliton peut rattraper (attraction) ou s'éloigner encore plus du soliton précédant (répulsion). La distance pour laquelle les deux solitons commencent à s'interagir est de l'ordre de million de kilomètres surtout dans le cas des cavités fibrées où les solitons sont très robustes [32, 118]. L'interaction via l'électrostriction est appelé interaction longue distance et son influence sur la qualité de l'information qui se propage dans la cavité est pratiquement insignifiante puisqu'en général le temps de la mémorisation est

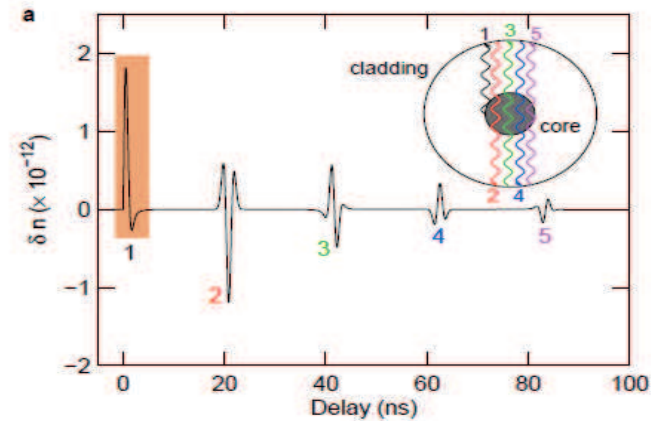


FIGURE 4.14 – Temps de réponse de l'indice de réfraction sous l'effet de l'électrostriction [118]

moins important que le temps pour lequel les solitons de cavité interagissent via l'électrostriction.

Dans notre travail, nous nous intéressons à un autre type d'interaction appelé interaction courte distance. Dans ce cas les solitons interagissent à travers leurs piédestaux oscillants où le seul paramètre contrôlant ces interactions est le temps t qui sépare deux solitons successifs. Ce temps est très important puisqu'il définit la nature de la structure qui se propage dans la cavité.

Si t est de l'ordre de la largeur temporelle des solitons, le résultat est que les deux structures se confondent pour ne devenir qu'un soliton au bout d'une certaine distance de propagation (quelques kilomètres).

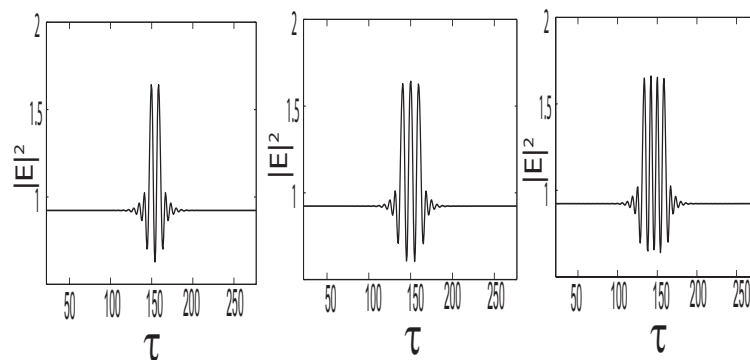


FIGURE 4.15 – Cluster à deux, trois et quatre pics

Si t augmente, une nouvelle structure émerge, cette dernière est considérée comme

une seule structure possédant plusieurs pics, on parle dans ce cas de cluster à deux, trois ou quatre pics comme le montre la figure (4.15).

Dans le cas où t augmente davantage, nous obtiendrons une configuration avec plusieurs solitons à un seul pic. Ces derniers peuvent se propager sans déformation et sans interaction et sont considérés par conséquent comme les parfaits candidats pour le stockage de l'information, puisque cette dernière ne se perd pas lors de la propagation.

Dans ce qui suit nous voulons faire une estimation du temps seuil permettant une propagation sans interaction dans le but de fournir des paramètres initiaux pour la mise en place expérimentale de la cavité.

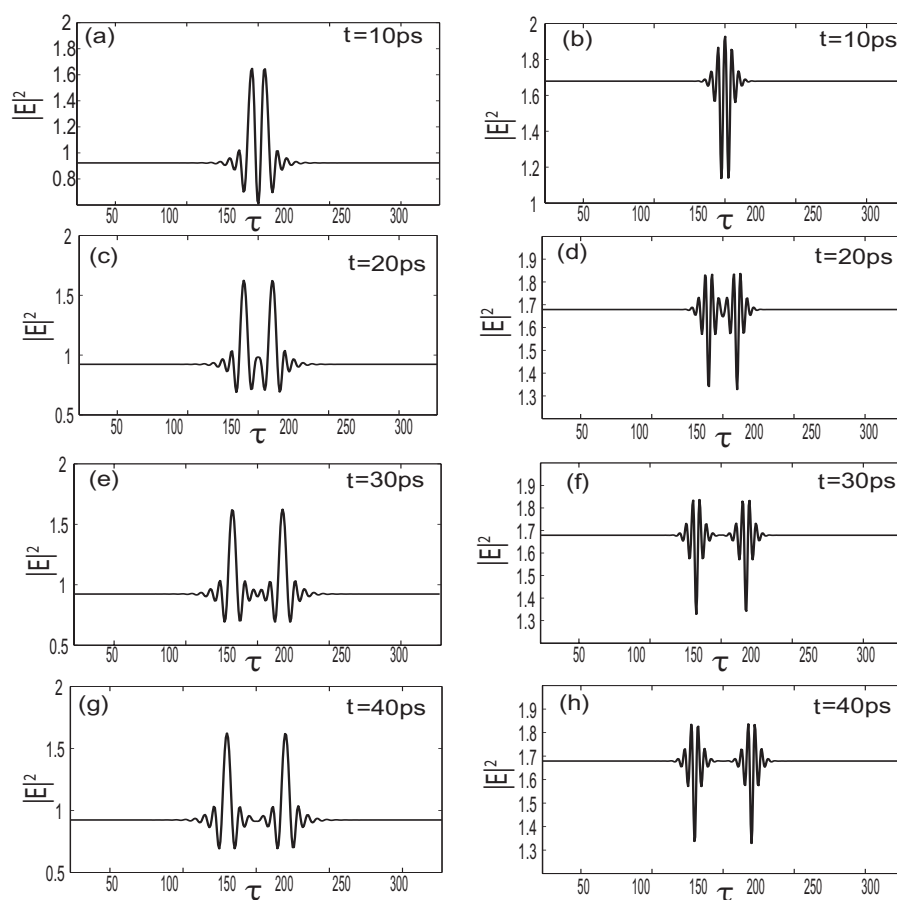


FIGURE 4.16 – Évolution d'une paire de solitons de cavité brillants et sombres en fonction de leur distance temporelle en absence de B_3

Pour ce faire, nous effectuons des simulations dans les mêmes conditions que dans le cas d'un seul soliton, la seule différence est le nombre de pics se propageant dans la cavité, ce dernier sera déterminé uniquement par les conditions d'entrée. Les résultats obtenus sont donnés par la figure (4.16) pour $B_3 = 0$ et par la figure (4.17) lorsque B_3 est

pris en considération. Dans ces deux figures, nous avons tracé les différentes structures localisées qui se propagent dans la cavité lorsqu'on injecte comme condition initiale deux pics successifs avec des distances temporelles différentes.

Les résultats obtenus montrent qu'une forte interaction se produit lorsque la séparation temporelle entre deux solitons successives est inférieure à $20ps$ ce qui se traduit par la formation de clusters comme c'est le cas des figures (4.16.a-b). Cette interaction diminue au fur et à mesure que t augmente où nous avons constaté qu'au delà d'une distance temporelle équivalent à $t_s = 40ps$, l'interaction entre les deux solitons devient très faible.

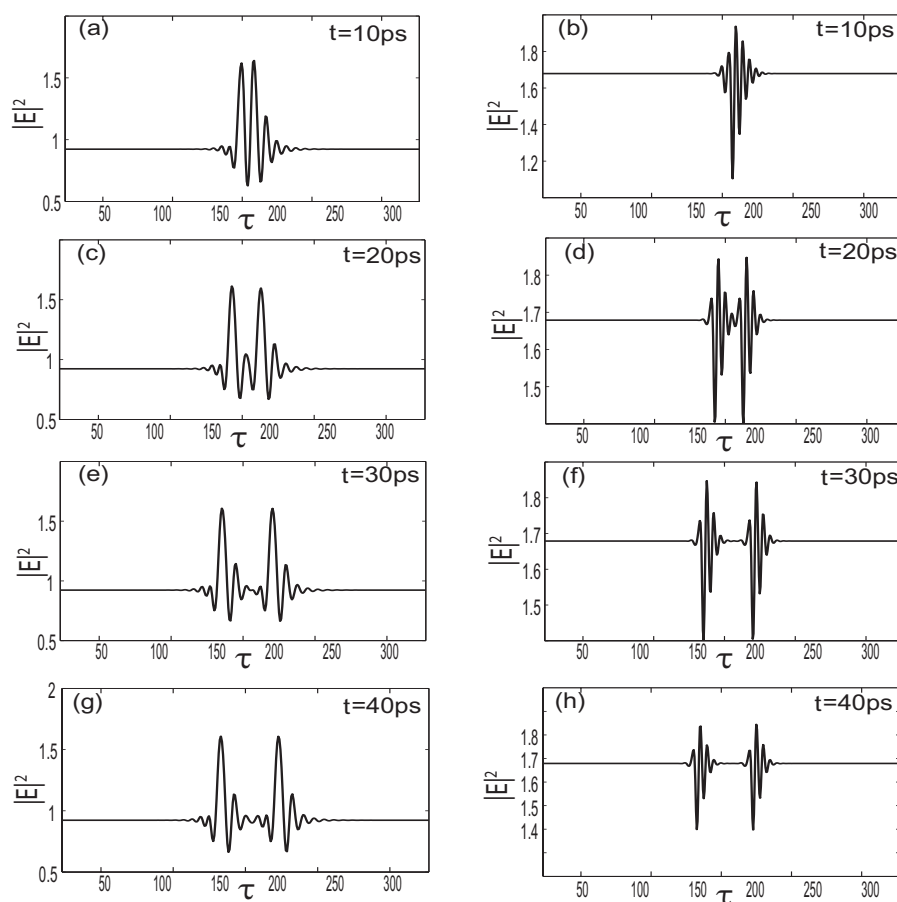


FIGURE 4.17 – Évolution d'une paire de solitons de cavité brillants et sombres en fonction de leur distance temporelle en présence de B_3

Nous déduisons ainsi que pour obtenir une propagation des solitons sans interaction, nous devons d'abord assurer que le temps minimum qui sépare deux pics ne soit pas inférieur à $40ps$ ce qui permettra de préserver l'information à transmettre. La longueur de la séquence à coder peut être considérée comme une autre contrainte qui influence la

valeur de ce temps car nous devons assurer lors de la mise en place expérimentale que la longueur temporelle de la séquence doit être inférieure au temps d'un tour de cavité. Le nombre de bit à coder sera par conséquent limité, si on veut augmenter le nombre de bits nous devons diminuer le temps de séparation. Il faut trouver donc un bon compromis permettant de coder le maximum de bits avec un minimum de perte d'information.

L'évolution d'une paire de solitons en présence de B_3 est représentée par la figure (4.17) où on remarque que pour une petite valeur de B_3 le temps nécessaire pour éviter une interaction est pratiquement le même qu'en son absence. Néanmoins il faut trouver un bon équilibre entre ce temps et le nombre de bits à envoyer, puisque le temps qui sépare les solitons et leurs nombres sont inversement proportionnels. Pour cela, la partie expérimentale est importante car c'est cette dernière qui permettra la confirmation des résultats théoriques prédits précédemment, elle permettra aussi de donner avec précision la capacité de stockage exacte de la cavité fibrée microstructurée par rapport à une cavité fibrée standard.

4.5 Conclusion

Nous avons étudié dans ce chapitre l'influence des ordres supérieurs de dispersion sur la dynamique des structures dissipatives générées dans une cavité fibrée microstructurée.

Pour ce faire, on a supposé comme première approche que l'influence du troisième ordre de dispersion est négligeable. Nous nous sommes donc intéressés qu'à l'effet de la dispersion d'ordre quatre où une étude de bifurcation faiblement non-linéaire au voisinage du premier et deuxième seuil d'instabilité de modulation a été effectuée. Cette dernière nous a permis de dériver les équations décrivant les amplitudes des structures périodiques qui émergent près de chaque seuil et dont le gain d'instabilité est maximum. On a trouvé que ces amplitudes dépendent de la distance par rapport au seuil d'instabilité ainsi que des paramètres de la fibre utilisée.

En plus des structures périodiques, nous avons pu déterminer les valeurs exactes des seuils pour lesquelles les solitons de cavité peuvent être générés et stabilisés. Nous avons constaté qu'au voisinage du premier seuil, la présence du quatrième ordre de dispersion provoque un décalage de ce seuil qui était égale à $\Delta_1 = 41/30$ dans le cas d'une cavité fibrée standard vers $\Delta_2 = 521/342$. Donc pour tous les désaccord en phase supérieurs à Δ_2 des solitons brillants stables peuvent être générés et effectuer des milliers de tour de cavité sans se déformer. Au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation, on a pu prouver l'existence des solitons sombres et évaluer dans ce cas aussi, le désaccord en phase seuil relatif à leurs apparition, ce dernier correspond à $\Delta = 1.401$.

Comme deuxième étape, nous avons ré-effectué la même étude non-linéaire tout en tenant compte cette fois de l'effet de la dispersion d'ordre trois. En sa présence les structures subissent une dérive temporelle lors de leurs propagation dans la cavité, ceci est causée par une modification de leur vitesse de propagation. La vitesse introduite par B_3 a été déterminée dans le cas des structures périodiques au voisinage des deux seuils d'instabilité de modulation, elle correspond à la somme d'une vitesse linéaire proportionnelle à B_3 et une correction non-linéaire qui dépend de B_3 , la distance par rapport au seuil

d'instabilité et des autres paramètres de la fibre.

Les résultats obtenus montrent aussi que la présence de B_3 affectent les seuils d'apparition des solitons de cavité qui deviennent dépendant de ce paramètre. Dans le cas où B_3 est petit ces seuils varient autour de la valeur du seuil initialement calculée (sans B_3), et si B_3 augmente davantage le nouveau seuil va rejoindre alors une asymptote égale à $(\Delta = 1.5/\Delta = 1.48)$ au voisinage du (premier/deuxième) seuil d'instabilité de modulation.

La dernière partie de ce travail a été consacrée à l'interaction des solitons, ce phénomène apparaît lorsqu'une succession d'impulsions lumineuses sont injectées dans la cavité. Dans notre travail, on a négligé les phénomènes susceptibles de provoquer l'interaction longue distance et nous avons considéré que le temps initial qui sépare deux impulsions successives est le seul paramètre à l'origine de cette interaction. Grâce aux simulations numériques effectuées, nous avons pu estimer le temps au delà duquel on peut prédire que la propagation est sans interaction et qui de l'ordre de $40ps$.

Conclusion Générale

Au cours de cette thèse, nous avons effectué une étude analytique et numérique détaillée sur la génération des structures dissipatives stables dans une cavité fibrée microstructurée. Notre travail de recherche a pris comme point de départ les résultats obtenus par François Leo lors de son étude expérimentale réalisée en 2010 où il avait choisi une fibre optique standard comme milieu dans la cavité résonnante. Ces résultats révèlent que deux types de structures dissipatives ont été générés :

- Une structure périodique composée d'un train d'impulsions stables avec un taux de répétition de $1.6THz$.
- Une structure localisée ou soliton de cavité où il a été démontré la possibilité de stocker des séquences de données et prouvé que la cavité a la capacité de garder en mémoire jusqu'à $45kbits$ à $25Gbits/s$.

Notre motivation principale dans ce travail était alors d'améliorer ces performances. Pour ce faire, nous avons choisi d'utiliser une fibre de nouvelle génération telle que la PCF comme média dans la cavité résonnante. Ce choix nous a offert plus de degrés de libertés nous permettant ainsi de mieux contrôler le zéro de dispersion chromatique, ce qui nous a permis de tenir compte des effets dispersifs d'ordre supérieurs. Ce travail a nécessité en premier lieu l'étude et la compréhension des systèmes dynamiques ainsi que la maîtrise des outils mathématiques analytiques et numériques nécessaires pour les étudier où nous nous sommes focalisés plus précisément sur systèmes dissipatifs. Par la suite, nous avons étudié les principes fondamentaux de la propagation dans les fibres optiques à cristaux photoniques en s'accrochant sur les mécanismes de guidage et l'influence de la géométrie de ces fibres sur leurs différentes caractéristiques tels que les effets dispersifs et les effets non linéaires. Ceci nous a permis de proposer une géométrie de PCF destinée à être utilisée en cavité fibrée et permettant d'améliorer les taux de répétition des trains d'impulsions générés.

La deuxième étape de notre travail consiste en l'étude détaillée de la cavité résonnante microstructurée. Cette étude s'est basée sur le modèle du champ moyen qui en combinant l'équation de Schrödinger non linéaire avec les conditions aux limites de la cavité a permis de dériver l'équation mathématique régissant la propagation du champ intracavité.

Par la suite, nous avons pu analyser à l'aide d'une étude de stabilité linéaire l'influence des effets supérieurs de la dispersion sur le phénomène d'instabilité de modulation. Nous avons pu voir que les zones relatives à son apparition changent lorsqu'on tient compte du quatrième ordre de dispersion, puisque sa présence est synonyme de l'apparition d'un

deuxième seuil d'instabilité. Cette étude nous a permis aussi de déterminer pour de chaque seuil, l'expression des fréquences des structures modulées dont le gain d'instabilité est maximum, où nous avons constaté aussi que le quatrième ordre de dispersion induit une dégénérescence des fréquences au premier seuil d'instabilité. Nous avons travaillé par la suite dans les conditions où cette dégénérescence a été levée. Nous avons obtenu dans ce cas, une seule fréquence instable au premier et deuxième seuil d'instabilité de modulation qui dépend de la dispersion d'ordre quatre. Ce résultat nous a fourni un degré de liberté supplémentaire par rapport aux cavités fibrées standards, ce qui nous a permis d'atteindre de très hautes fréquences de répétition dans les deux régimes de dispersion. La présence du troisième ordre de dispersion quant à elle induit d'une part une brisure de symétrie de l'onde, ceci provoque une dérive temporelle de cette dernière à une nouvelle vitesse dont la valeur est proportionnelle à β_3 , cette dérive est causée par l'accumulation de phase de l'onde après chaque tour de cavité. D'une autre part, les résultats numériques obtenus ont montré que le profil spectral des structures dissipatives périodiques générées était lui aussi asymétrique. Ce résultat peut être expliqué par le fait que l'accumulation de phase des composantes spectrales de chaque côté du spectre n'est pas la même.

Une fois que nous avons établi les seuils d'instabilité et les fréquences relatives à chaque seuil, nous avons pu proposer une géométrie de PCF permettant de générer une onde intracavité avec une fréquence de répétition optimale de l'ordre $4,57Thz$.

La dernière partie de ce travail était dédiée à l'étude de la formation des structures dissipatives localisées stables ou solitons de cavité, ces derniers sont définis comme des pics de lumières dans un fond continu où leur nombre dépendra uniquement des conditions initiales. Les solitons de cavité émergent dans une zone de paramètre appelée pinning zone où la bifurcation est souscritique. Dans ce cas, une intersection entre la structure périodique stable et la solution homogène peut exister. Grâce à une étude de bifurcation faiblement non-linéaire, nous avons pu obtenir les zones d'apparition des solitons de cavité au voisinage des deux seuils d'instabilité de modulation. Les résultats obtenus montrent qu'au premier seuil d'instabilité, la présence du quatrième ordre de dispersion provoque un décalage du seuil des solitons de cavité de $\Delta_1 = 41/30$ dans le cas d'une cavité fibrée standard vers $\Delta_2 = 521/342$. Ce qui nous mène à conclure que pour tous les désaccords en phase supérieurs à Δ_2 , des solitons brillants stables peuvent être générés et se propager sur des milliers de tours de cavité sans déformation. Au voisinage du deuxième seuil d'instabilité de modulation, on a pu prouver l'existence des solitons sombres stables en relevant aussi la valeur du désaccords en phase seuil relatif à leurs apparition, ce dernier correspond à $\Delta = 1,401$.

L'étude de bifurcation nous a permis aussi de calculer la vitesse totale des structures périodiques considérée comme la somme de la vitesse linéaire évaluée au seuil et d'une correction non linéaire évaluée à une distance de ce même seuil d'instabilité. Les résultats de cette étude montrent aussi que la présence de β_3 affecte légèrement les seuils d'apparition des solitons de cavité. Une étude numérique sur l'interaction des solitons a été menée à la fin de ce travail. Lorsque ces solitons sont injectées successivement dans la cavité, leur interaction sera contrôlée par le temps initial qui sépare deux impulsions successives. Grâce aux simulations numériques effectuées, nous avons pu estimer ce temps à $40ps$ au

delà duquel on peut prédire que la propagation des solitons est sans interaction.

Le travail réalisé au cours de cette thèse ouvre un certain nombre de perspectives :

- La validation des résultats analytiques et numériques relatifs à la formation des structures dissipatives périodiques et localisées par une étude expérimentale. Ces deux types de structures offrent une solution très prometteuse dans le traitement tout-optique de l'information. Les structures modulées permettent de générer des trains d'impulsions stables à des taux de répétition très élevés. Les structures localisées, quant à elles, sont d'excellents candidats au stockage tout-optique de l'information.
- Travailler dans un régime de paramètres où la dégénérescence au premier seuil d'instabilité n'est pas levée, dans ce cas on aura génération des deux fréquences instables qui peuvent exister en même temps avec une des deux qui sera prépondérante par rapport à l'autre.
- Les fronts de commutation sont aussi des solutions de l'équation de propagation, ces derniers existent dans le régime bistable où l'interaction de deux fronts peut générer une structure localisée. Ces structures peuvent être utilisées en commutation optique.
- L'exploitation des solitons sombres générés au deuxième seuil d'instabilité avec une étude expérimentale et voir éventuellement dans quel contexte ils peuvent être utilisés.

Annexe

Annexe A

Calcul non-linéaire au voisinage du premier point de bifurcation

Dans cette annexe, nous développons en détail la méthode de bifurcation faiblement non-linéaire permettant de dériver l'équation d'amplitude des structures dissipatives périodiques dans une cavité fibrée microstructurée au voisinage du premier seuil d'instabilité de modulation. Nous commençons ce développement par l'équation de propagation de l'enveloppe complexe du champ électrique (3.26) :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = S - (1 + i\Delta)E + i|E|^2 E - iB_2 \frac{\partial^2 E}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 E}{\partial \tau^3} + iB_4 \frac{\partial^4 E}{\partial \tau^4} \quad (\text{A.1})$$

Nous décomposons ensuite le champ en partie réelle et imaginaire tel que :

$$E = X_1 + iX_2 \quad (\text{A.2})$$

On obtient dans ce cas un système en fonction de X_1 et X_2 décrit comme suit :

$$\begin{cases} \frac{\partial X_1}{\partial t} = S - X_1 - X_2 (X_1^2 + X_2^2 - \Delta) + B_2 \frac{\partial^2 X_2}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 X_1}{\partial \tau^3} - B_4 \frac{\partial^4 X_2}{\partial \tau^4} \\ \frac{\partial X_2}{\partial t} = -X_2 + X_1 (X_1^2 + X_2^2 - \Delta) - B_2 \frac{\partial^2 X_1}{\partial \tau^2} + B_3 \frac{\partial^3 X_2}{\partial \tau^3} + B_4 \frac{\partial^4 X_1}{\partial \tau^4} \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

Les états stationnaires et homogènes (x_1, x_2) correspondants à $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \tau} = 0$ du système (A.3) sont donnés par :

$$\begin{cases} x_1 + x_2 (x_1^2 + x_2^2 - \Delta) = S \\ -x_2 + x_1 (x_1^2 + x_2^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.4})$$

Nous introduisons ensuite les déviations $U(t, \tau)$ et $V(t, \tau)$ par rapports aux états stationnaires et homogènes tel que :

$$\begin{cases} X_1(t, \tau) = x_1 + U(t, \tau) \\ X_2(t, \tau) = x_2 + V(t, \tau) \end{cases} \quad (\text{A.5})$$

En remplaçant (A.5) dans (A.3) le système s'écrit comme suit :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial V}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1-2x_1x_2+B_3\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} & -3x_2^2-x_1^2+\Delta+B_2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}-B_4\frac{\partial^4}{\partial\tau^4} \\ 3x_1^2+x_2^2-\Delta-B_2\frac{\partial^2}{\partial\tau^2}+B_4\frac{\partial^4}{\partial\tau^4} & -1+2x_1x_2+B_3\frac{\partial^3}{\partial\tau^3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -x_2U^2-3x_2V^2-2x_1UV-U^2V-V^3 \\ x_1V^2+3x_1U^2+2x_2UV+V^2U+U^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

Nous effectuons par la suite un développement des paramètres du système en fonction des puissances du paramètre ϵ au voisinage du premier seuil d'IM :

$$U = \epsilon U_0 + \epsilon^2 U_1 + \epsilon^3 U_2 + \dots \quad (\text{A.7})$$

$$V = \epsilon V_0 + \epsilon^2 V_1 + \epsilon^3 V_2 + \dots \quad (\text{A.8})$$

$$x_1 = a_0 + \epsilon a_1 + \epsilon^2 a_2 + \dots \quad (\text{A.9})$$

$$x_2 = b_0 + \epsilon b_1 + \epsilon^2 b_2 + \dots \quad (\text{A.10})$$

Où a_0 et b_0 représentent la partie réelle et imaginaire des solutions stationnaires au point d'instabilité. Au voisinage de ce dernier, la dynamique du système évolue sur une échelle de temps lente telle que :

$$T_0 = t \quad (\text{A.11})$$

$$T_1 = \epsilon t \quad (\text{A.12})$$

$$T_2 = \epsilon^2 t \quad (\text{A.13})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \epsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + \dots \quad (\text{A.14})$$

En remplaçant les équations (A.7 – A.14) dans le système (A.6) et en égalant les parties correspondantes aux différents ordres du paramètre ϵ , nous trouvons les systèmes homogènes et non homogènes suivants à résoudre :

Développement des solutions homogènes et stationnaires

À l'ordre ϵ

$$\begin{cases} S_c - a_0 - b_0(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ -b_0 + a_0(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.15})$$

À l'ordre ϵ^2

$$\begin{cases} -a_1 - b_0(2a_0a_1 + 2b_0b_1) - b_1(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ -b_1 + a_0(2a_0a_1 + 2b_0b_1) + a_1(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.16})$$

À l'ordre ϵ^3

$$\begin{cases} -a_2 + 1 - b_0(a_1^2 + b_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2) - b_1(2a_0a_1 + 2b_0b_1) - b_2(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ -b_2 + a_0(a_1^2 + b_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2) + a_1(2a_0a_1 + 2b_0b_1) + a_2(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.17})$$

Développement des solutions non homogènes

À l'ordre ϵ

$$L_0 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.18})$$

À ϵ^2

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_1 \quad (\text{A.19})$$

À ϵ^3

$$L_0 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_2 \quad (\text{A.20})$$

Avec :

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} & 1 - 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (\text{A.21})$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} -2a_0b_1 - 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} & -6b_0b_1 - 2a_0a_1 \\ 2b_0b_1 + 6a_0a_1 & 2a_0b_1 + 2a_1b_0 - \frac{\partial}{\partial T_1} \end{pmatrix} \quad (\text{A.22})$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} -2a_0b_2 - 2a_1b_1 - 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} & -6b_0b_2 - 2a_0a_2 - 3b_1^2 - a_1^2 \\ 2b_0b_2 + 6a_0a_2 + 3a_1^2 + b_1^2 & 2a_0b_2 + 2a_1b_1 + 2a_2b_0 - \frac{\partial}{\partial T_2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.23})$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} -b_0U_0^2 - 2a_0U_0V_0 - 3b_0V_0^2 \\ a_0V_0^2 + 2b_0U_0V_0 + 3a_0U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.24})$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} -2a_0(U_0V_1 + U_1V_0) - b_1(U_0^2 + 3V_0^2) - V_0(6b_0V_1 + U_0^2 + V_0^2) \\ 2b_0(U_0V_1 + U_1V_0) + a_1(V_0^2 + 3U_0^2) + U_0(6a_0U_1 + V_0^2 + U_0^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2U_0(b_0U_1 + a_1V_0) \\ +2V_0(a_0V_1 + b_1U_0) \end{pmatrix} \quad (\text{A.25})$$

Résolution du système

À l'ordre ϵ

Au premier ordre de ϵ le système (A.18) est homogène, sa résolution est équivalente à une étude de stabilité linéaire par rapport à des perturbations de la forme $e^{i(K_c T_0 - \Omega \tau)}$ au point d'instabilité de modulation tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - iB_3\Omega^3 + iK_c & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta + B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4 \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta - B_2\Omega^2 - B_4\Omega^4 & 1 - 2a_0b_0 - iB_3\Omega^3 + iK_c \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{A.26})$$

Ce système admet une solution non triviale si c'est deux conditions sont satisfaites :

$$\begin{cases} (B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4)^2 + (B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4)(4a_0^2 + 4b_0^2 - 2\Delta) + C = 0 \\ K_c = B_3\Omega^3 \end{cases} \quad (\text{A.27})$$

Avec : $C = 1 + 6a_0^2 + 4b_0^2 + 3a_0^4 - 4a_0^2\Delta + 3b_0^4 - 4b_0^2\Delta + \Delta^2$

Sachant qu'au seuil, nous avons $a_0^2 + b_0^2 = 1$ et en la remplaçant dans (A.27) nous trouvons :

$$B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4 - \Delta + 2 = 0 \quad (\text{A.28})$$

En résolvant (A.28) on obtient l'expression de la fréquence au seuil $Y = 1$:

$$\Omega^2 = \frac{-B_2 \pm \sqrt{B_2^2 + 4B_4(\Delta - 2)}}{2B_4} \quad (\text{A.29})$$

Nous résolvons maintenant le système homogène (A.15), en tenant compte que $a_0^2 + b_0^2 = 1$ et en posant $\rho = 1 - \Delta$, nous trouvons la partie réelle et imaginaire des états stationnaires et homogènes au point d'instabilité comme suit :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{S_c}{1 + \rho^2} \\ b_0 = \rho a_0 \end{cases} \quad (\text{A.30})$$

On sait d'après l'équation (3.42) que la puissance d'entrée seuil est $X = S_c^2 = \rho^2 + 1$, par conséquent $S_c = \sqrt{\rho^2 + 1}$, d'où on trouve finalement :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{1}{S_c} \\ b_0 = \frac{\rho}{S_c} \end{cases} \quad (\text{A.31})$$

L'opérateur linéaire (A.25) évalué au point d'instabilité devient :

$$L(\Omega_c) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2\rho}{S_c^2} & \frac{1}{S_c^2} + \frac{3\rho^2}{S_c^2} - 2 \\ \frac{-3}{S_c^2} - \frac{\rho^2}{S_c^2} + 2 & 1 - \frac{2\rho}{S_c^2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.32})$$

En remplaçant S_c par son expression nous trouvons :

$$L_0(\Omega_c) = \frac{1}{S_{s1}^2} \begin{pmatrix} (1 + \rho)^2 & (\rho^2 - 1) \\ (\rho^2 - 1) & (1 - \rho)^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.33})$$

Le système au premier ordre de ϵ prend la forme suivante :

$$\frac{1}{S_{s1}^2} \begin{pmatrix} (1 + \rho)^2 & (\rho^2 - 1) \\ (\rho^2 - 1) & (1 - \rho)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

Ce système admet comme solutions :

$$U_0 = A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (\text{A.35})$$

$$V_0 = \left(\frac{1 + \rho}{1 - \rho} \right) A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (\text{A.36})$$

Avec $\Omega_c = -\frac{B_2}{2B_4}$, $K_c = B_3 \Omega_c^3$ et $(1, \frac{1 + \rho}{1 - \rho})$ est le vecteur propre de l'opérateur linéaire.

À l'ordre ϵ^2

Pour que le système obtenu à cet ordre du développement soit résolu, il faut satisfaire une condition de solvabilité. Cette dernière stipule que le membre de droite de l'équation (A.19) doit être orthogonal au vecteur propre (U_0^+, V_0^+) associé à l'opérateur adjoint L^+ de l'opérateur linéaire évalué au seuil. Étant donné que ce dernier est auto-adjoint on aura alors $(U_0^+, V_0^+) = (U_0, V_0)$.

La condition de solvabilité va s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_0^\tau d\tau \left(1, \frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \exp -i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) \left[L_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_1 \right] = 0 \quad (\text{A.37})$$

Après le calcul on trouve la condition suivante :

$$a_1 = b_1 = \frac{\partial A_1}{\partial T_1} = 0 \quad (\text{A.38})$$

En injectant le résultat (A.38) dans (A.19) nous le réduisons pour obtenir finalement :

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b_0 U_0^2 - 2a_0 U_0 V_0 - 3b_0 V_0^2 \\ a_0 V_0^2 + 2b_0 U_0 V_0 + 3a_0 U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.39})$$

En remplaçant a_0 et b_0 par leurs expressions, on obtient le système suivant à résoudre :

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \frac{S_c}{(1-\rho)^2} \begin{pmatrix} -2(1+2\rho)U_0^2 \\ 2(2-\rho)U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{A.40})$$

Nous cherchons des solutions de la forme :

$$U_1 = R_0 + (R_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) + (R_{11} \exp i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) \quad (\text{A.41})$$

$$V_1 = S_0 + (S_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) + (S_{11} \exp i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) \quad (\text{A.42})$$

Nous substituons les expressions de U_1 et V_1 dans (A.40), nous égalisons les termes associés aux modes : $\exp(i0)$, $\exp \pm i(K_c T_0 + \Omega_c \tau)$ et $\exp \pm i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau)$. Nous obtenons les systèmes suivants à résoudre :

$$\begin{cases} R_0(1+2a_0b_0) + (a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta)S_0 = -4S_c \frac{(1+2\rho)}{(1-\rho)^2} |A_1|^2 \\ R_0(-3a_0^2 - b_0^2 + \Delta) + (1-2a_0b_0)S_0 = 4S_c \frac{(2-\rho)}{(1-\rho)^2} |A_1|^2 \end{cases} \quad (\text{A.43})$$

$$\begin{cases} R_1(1+2a_0b_0 + i2K_c) + S_1(a_0^2 + 3b_0^2 - 2) = 0 \\ R_1(-3a_0^2 - b_0^2 + 2) + S_1(1-2a_0b_0 + i2K_c) = 0 \end{cases} \quad (\text{A.44})$$

$$\begin{cases} R_{11}(1 + 2a_0b_0 + i10K_c) + S_{11}(a_0^2 + 3b_0^2 + 3\Delta - 8 + 12B_4\Omega^4) = \frac{-2S_c(1 + 2\rho)}{(1 - \rho)^2} A_1^2 \\ R_{11}(-3a_0^2 - b_0^2 - 3\Delta + 8 - 12B_4\Omega^4) + S_{11}(1 - 2a_0b_0 + i10K_c) = \frac{2S_c(2 - \rho)}{(1 - \rho)^2} A_1^2 \end{cases} \quad (\text{A.45})$$

Nous obtenons après le calcul :

$$R_0 = \frac{4S_c(\rho^2 - 2\rho - 1)}{(1 - \rho^2)^2} |A_1|^2$$

$$S_0 = \frac{-8S_c(\rho + 1)\rho}{(1 - \rho^2)^2} |A_1|^2$$

$$S_1 = \left[\frac{1 + \rho}{1 - \rho} - i2K_c \frac{(1 + \rho^2)}{(\rho^2 - 1)} \right] R_1$$

$$R_{11} = \frac{2S_c A_1^2}{(\rho - 1)^2} \left[\frac{12B_4\Omega^4(\rho - 2) - 3\rho^2 + 2\rho + 7 - i10K_c(2\rho + 1)}{72B_4\Omega^4(2B_4\Omega^4 - \rho - 1) + 9(\rho + 1)^2 + 20K_c(i - 5K_c)} \right]$$

$$S_{11} = \frac{-4S_c A_1^2}{(\rho - 1)^2} \left[\frac{6B_4\Omega^4(2\rho + 1) - 3\rho^2 - 5\rho - 2 + i5K_c(\rho - 2)}{72B_4\Omega^4(2B_4\Omega^4 - \rho - 1) + 9(\rho + 1)^2 + 20K_c(i - 5K_c)} \right]$$

À l'ordre ϵ^3

En tenant compte des expressions de a_0 , b_0 et des valeurs de a_1 et b_1 , nous trouvons les solutions du système homogène au troisième ordre de ϵ tel que :

$$a_2 = \frac{(1 - \rho)^2}{(1 + \rho)^2(1 + \rho^2)} \quad (\text{A.46})$$

$$b_2 = \frac{\rho^3 + \rho + 2}{(1 + \rho)^2(1 + \rho^2)} \quad (\text{A.47})$$

En remplaçant tous les résultats précédents dans (A.20), nous obtenons le système à résoudre suivant :

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + \frac{\partial}{\partial T_2} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = N \quad (\text{A.48})$$

Avec :

$$N = \begin{pmatrix} (-2a_0b_2 - 2a_2b_0)U_0 - (6b_0b_2 + 2a_0a_2)V_0 - 2a_0(U_0V_1 + U_1V_0) - 6b_0V_0V_1 - 2b_0U_0U_1 - U_0^2V_0 - V_0^3 \\ (2a_0b_2 + 2a_2b_0)V_0 + (6b_0b_2 + 2a_0a_2)U_0 + 2b_0(U_0V_1 + U_1V_0) + 6a_0U_0U_1 + 2a_0V_0V_1 + V_0^2U_0 + U_0^3 \end{pmatrix} \quad (\text{A.49})$$

Afin que le système puisse admettre des solutions, on doit satisfaire la condition de solvabilité suivante :

$$\int_0^\tau d\tau \left(1, \frac{1+\rho}{1-\rho}\right) \exp -i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) \left[N - \frac{\partial}{\partial T_2} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \right] = 0 \quad (\text{A.50})$$

Cette condition nous fournit l'équation d'amplitude de la fréquence la plus instable comme suit :

$$\frac{2S_c^2}{(1-\rho)^2} \frac{\partial A_1}{\partial T_2} = \frac{4S_c^3}{(\rho-1)^2(\rho+1)^2} A_1 - f(\rho) A_1 |A_1|^2 \quad (\text{A.51})$$

Après simplification, on obtient :

$$\frac{1}{2S_c^2} \frac{\partial A_1}{\partial T_2} = \frac{1}{S_c(\rho+1)^2} A_1 - f(\rho) A_1 |A_1|^2 \quad (\text{A.52})$$

En multipliant la relation par ϵ^3 , nous trouvons finalement l'équation 4.14 qui décrit l'amplitude $A = \epsilon A_1$ au voisinage du point d'instabilité :

$$\frac{1}{2S_{s1}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s1}}{S_{s1}(2 - \Delta)^2} A - (f_1(\Delta) + i f_2(\Delta)) |A|^2 A \quad (\text{A.53})$$

Avec

$$\begin{cases} f_1(\Delta) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ f_2(\Delta) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{cases} \quad (\text{A.54})$$

Où

$$\begin{aligned} a &= 2 \left(200 B_3^2 (2\Delta - 3) \Omega^6 - (\Delta - 2)^2 (342\Delta - 521) \right) \\ b &= 20 B_3 (\Delta^2 - 12\Delta + 16) \Omega^3 \\ c &= -(\Delta - 2)^2 \Delta^2 (10 B_3 \Omega^3 - 9\Delta + 18) (10 B_3 \Omega^3 + 9\Delta - 18) \\ d &= 20 B_3 (\Delta - 2)^2 \Delta^2 \Omega^3 \end{aligned}$$

Annexe B

Calcul non linéaire au voisinage du deuxième point de bifurcation

Nous développons dans cette annexe le détail du calcul faiblement non linéaire au voisinage du deuxième point d'instabilité de modulation où nous avons procédé de la même façon qu'au premier seuil. La différence apparaît lors du développement des paramètres en fonction de ϵ où nous avons introduit un signe négatif pour expliquer que la zone instable se trouve cette fois avant le seuil d'instabilité de modulation.

En décomposant le champ électrique en partie réelle et imaginaire et en introduisant exactement de la même façon les déviations U et V nous obtenons au final un système identique au système (A.6) donné dans l'annexe précédente.

nous développons les paramètres du système en fonction de ϵ tel que :

$$U = -\epsilon U_0 - \epsilon^2 U_1 - \epsilon^3 U_2 - \dots \quad (\text{B.1})$$

$$V = -\epsilon V_0 - \epsilon^2 V_1 - \epsilon^3 V_2 - \dots \quad (\text{B.2})$$

$$x_1 = a_0 - \epsilon a_1 - \epsilon^2 a_2 - \dots \quad (\text{B.3})$$

$$x_2 = b_0 - \epsilon b_1 - \epsilon^2 b_2 - \dots \quad (\text{B.4})$$

Dans ce cas, nous trouvons les systèmes homogènes et non homogènes suivants à résoudre :

Développement des solutions homogènes et stationnaires

À l'ordre ϵ

$$\begin{cases} S_c - a_0 - b_0(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ -b_0 + a_0(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

À l'ordre ϵ^2

$$\begin{cases} a_1 + b_0(2a_0a_1 + 2b_0b_1) + b_1(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ b_1 - a_0(2a_0a_1 + 2b_0b_1) - a_1(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

À l'ordre ϵ^3

$$\begin{cases} -1 + a_2 + b_0(-a_1^2 - b_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2) - b_1(2a_0a_1 - 2b_0b_1) + b_2(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \\ b_2 - a_0(-a_1^2 - b_1^2 + 2a_0a_2 + 2b_0b_2) + a_1(2a_0a_1 + 2b_0b_1) - a_2(a_0^2 + b_0^2 - \Delta) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Développement des solutions non homogènes

À l'ordre ϵ

$$L_0 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.8})$$

À ϵ^2

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_1 \quad (\text{B.9})$$

À ϵ^3

$$L_0 \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = L_1 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} + L_2 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_2 \quad (\text{B.10})$$

Avec :

$$L_0 = \begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta - B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta + B_2 \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - B_4 \frac{\partial^4}{\partial \tau^4} & 1 - 2a_0b_0 - B_3 \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \frac{\partial}{\partial T_0} \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

$$L_1 = \begin{pmatrix} 2a_0b_1 + 2a_1b_0 + \frac{\partial}{\partial T_1} & 6b_0b_1 + 2a_0a_1 \\ -2b_0b_1 - 6a_0a_1 & 2 - a_0b_1 - 2a_1b_0 + \frac{\partial}{\partial T_1} \end{pmatrix} \quad (\text{B.12})$$

$$L_2 = \begin{pmatrix} 2a_0b_2 - 2a_1b_1 + 2a_2b_0 + \frac{\partial}{\partial T_2} & 6b_0b_2 + 2a_0a_2 - 3b_1^2 - a_1^2 \\ -2b_0b_2 - 6a_0a_2 + 3a_1^2 + b_1^2 & -2a_0b_2 + 2a_1b_1 - 2a_2b_0 + \frac{\partial}{\partial T_2} \end{pmatrix} \quad (\text{B.13})$$

$$N_1 = \begin{pmatrix} b_0U_0^2 + 2a_0U_0V_0 + 3b_0V_0^2 \\ -a_0V_0^2 - 2b_0U_0V_0 - 3a_0U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.14})$$

$$N_2 = \begin{pmatrix} 2a_0(U_0V_1 + U_1V_0) - b_1(U_0^2 + 3V_0^2) - V_0(-6b_0V_1 + U_0^2 + V_0^2) \\ -2b_0(U_0V_1 + U_1V_0) + a_1(V_0^2 + 3U_0^2) + U_0(-6a_0U_1 + V_0^2 + U_0^2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +2U_0(b_0U_1 - a_1V_0) \\ -2V_0(a_0V_1 - b_1U_0) \end{pmatrix} \quad (\text{B.15})$$

Résolution du système

À l'ordre ϵ

Au premier ordre de ϵ le système (B.8) est homogène, sa résolution est équivalente à une étude de stabilité linéaire par rapport à des perturbations de la formes $e^{i(K_c T_0 - \Omega \tau)}$ au point d'instabilité de modulation tel que :

$$\begin{pmatrix} 1 + 2a_0b_0 - iB_3\Omega^3 + iK_c & a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta + B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4 \\ -3a_0^2 - b_0^2 + \Delta - B_2\Omega^2 - B_4\Omega^4 & 1 - 2a_0b_0 - iB_3\Omega^3 + iK_c \end{pmatrix} = 0 \quad (\text{B.16})$$

Ce système admet une solution non triviale si ces deux conditions sont satisfaites :

$$\begin{cases} (B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4)^2 + (B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4)(4a_0^2 + 4b_0^2 - 2\Delta) + C = 0 \\ K_c = B_3\Omega^3 \end{cases} \quad (\text{B.17})$$

Avec : $C = 1 + 6a_0^2 + 4b_0^2 + 3a_0^4 - 4a_0^2\Delta + 3b_0^4 - 4b_0^2\Delta + \Delta^2$

Rappelons que nous avons choisi de travailler avec des paramètres où la dégénérescence au premier seuil était levée et que le deuxième seuil d'instabilité de modulation est réduit à $Y = \frac{5}{3}$, ceci correspond à $a_0^2 + b_0^2 = \frac{5}{3}$. Le seuil de puissance d'entrée s'écrit alors sous la forme suivante :

$$S_{c2} = \sqrt{\frac{5}{3}} \sqrt{1 + \rho^2} \quad (\text{B.18})$$

Avec $\rho = 5/3 - \Delta$.

Et la solution de (B.17) nous donne finalement :

$$B_2\Omega^2 + B_4\Omega^4 - \Delta + 2 = \Delta - 2 \quad (\text{B.19})$$

La résolution du système homogène au premier ordre de ϵ nous fournit les expressions de a_0 et b_0 comme suit :

$$\begin{cases} a_0 = \frac{9S_c}{9 + (5 - 3\Delta)^2} = \frac{5}{3S_c} \\ b_0 = \rho a_0 = \frac{\rho\sqrt{\frac{5}{3}}}{\sqrt{1 + \rho^2}} \frac{5\rho}{3S_c} \end{cases} \quad (\text{B.20})$$

En remplaçant ces deux expressions dans le système (B.16) nous trouvons l'expression de l'opérateur linéaire évalué au deuxième point d'instabilité :

$$L_0(\Omega_c) = \frac{5}{9S_{s2}^2} \begin{pmatrix} (3 + \rho)(3\rho + 1) & (3\rho - 1)(3\rho + 1) \\ (\rho - 3)(\rho + 3) & (3\rho - 1)(\rho - 3) \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Le système au premier ordre de ϵ prend la forme suivante :

$$\frac{5}{9S_{s2}^2} \begin{pmatrix} (3 + \rho)(3\rho + 1) & (3\rho - 1)(3\rho + 1) \\ (\rho - 3)(\rho + 3) & (3\rho - 1)(\rho - 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.22})$$

Ce système admet comme solutions :

$$U_0 = A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (\text{B.23})$$

$$V_0 = \left(\frac{\rho + 3}{1 - 3\rho} \right) A_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C \quad (\text{B.24})$$

Avec $\Omega_c = -\frac{B_2}{2B_4}$, $K_c = B_3\Omega_c^3$ et $(1, \frac{\rho + 3}{1 - 3\rho})$ est le vecteur propre de l'opérateur linéaire.

À l'ordre ϵ^2

Pour que le système obtenu à cet ordre du développement soit résolu, il faut satisfaire une condition de solvabilité. Cette dernière stipule que le membre de droite de l'équation (B.9) doit être orthogonal au vecteur propre (U_0^+, V_0^+) associé à l'opérateur adjoint L^+ de l'opérateur linéaire évalué au seuil. Au deuxième seuil ce dernier n'est pas auto-adjoint on aura alors

$$\begin{pmatrix} U_0^+ \\ V_0^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{3\rho+1}{3-\rho} \end{pmatrix} \quad (\text{B.25})$$

La condition de solvabilité va s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_0^\tau d\tau \left(1, \frac{3\rho+1}{3-\rho}\right) \exp -i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) \left[L_1 \begin{pmatrix} U_0 \\ V_0 \end{pmatrix} + N_1 \right] = 0 \quad (\text{B.26})$$

Après le calcul on trouve la condition suivante :

$$a_1 = b_1 = \frac{\partial A_1}{\partial T_1} = 0 \quad (\text{B.27})$$

En injectant le résultat (B.27) dans (B.9) nous le réduisons pour obtenir finalement :

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 U_0^2 + 2a_0 U_0 V_0 + 3b_0 V_0^2 \\ -a_0 V_0^2 - 2b_0 U_0 V_0 - 3a_0 U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.28})$$

En remplaçant a_0 et b_0 par leurs expressions, on obtient le système suivant à résoudre :

$$L_0 \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} = \frac{6S_c}{(1-3\rho)^2} \begin{pmatrix} (2\rho+1)U_0^2 \\ -(2-\rho)U_0^2 \end{pmatrix} \quad (\text{B.29})$$

Nous cherchons des solutions de la forme :

$$U_1 = R_0 + (R_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) + (R_{11} \exp i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) \quad (\text{B.30})$$

$$V_1 = S_0 + (S_1 \exp i(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) + (S_{11} \exp i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau) + C.C) \quad (\text{B.31})$$

Nous substituons les expressions de U_1 et V_1 dans (A.40), nous égalisons les termes associés aux modes : $\exp(i0)$, $\exp \pm i(K_c T_0 + \Omega_c \tau)$ et $\exp \pm i2(K_c T_0 + \Omega_c \tau)$. Nous obtenons les systèmes suivants à résoudre :

$$\begin{cases} R_0(1 + 2a_0 b_0) + (a_0^2 + 3b_0^2 - \Delta)S_0 = 12S_c \frac{(1+2\rho)}{(1-3\rho)^2} |A_1|^2 \\ R_0(-3a_0^2 - b_0^2 + \Delta) + (1 - 2a_0 b_0)S_0 = -12S_c \frac{(2-\rho)}{(1-3\rho)^2} |A_1|^2 \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

$$\begin{cases} R_1(1 + 2a_0 b_0 + i2K_c) + S_1(a_0^2 + 3b_0^2 - 2) = 0 \\ R_1(-3a_0^2 - b_0^2 + 2) + S_1(1 - 2a_0 b_0 + i2K_c) = 0 \end{cases} \quad (\text{B.33})$$

$$\begin{cases} R_{11}(1 + 2a_0b_0 + i10K_c) + S_{11}(a_0^2 + 3b_0^2 + 3\Delta - 8 + 12B_4\Omega^4) = \frac{6S_c(1 + 2\rho)}{(1 - 3\rho)^2} A_1^2 \\ R_{11}(-3a_0^2 - b_0^2 - 3\Delta + 8 - 12B_4\Omega^4) + S_{11}(1 - 2a_0b_0 + i10K_c) = \frac{-6S_c(2 - \rho)}{(1 - 3\rho)^2} A_1^2 \end{cases} \quad (\text{B.34})$$

Nous obtenons après le calcul les solutions suivantes :

$$R_0 = \frac{-12S_c(3\rho^2 - 2\rho - 3)}{(\rho + 3)(3\rho + 1)(3\rho - 1)^2} |A_1|^2$$

$$S_0 = \frac{-24S_c(3\rho^2 + 3\rho + 2)}{(\rho + 3)(3\rho + 1)(3\rho - 1)^2} |A_1|^2$$

$$S_1 = \left[\frac{-\rho + 3}{1 - 3\rho} - i6K_c \frac{(1 + \rho^2)}{(3\rho - 1)(3\rho + 1)} \right] R_1$$

$$R_{11} = \frac{-6S_c A_1^2}{(3\rho - 1)^2} \left[\frac{36B_4\Omega^4(\rho - 2) - 9\rho(\rho - 2) - i30B_3\Omega^3(2\rho - 1) + 5}{B_4\Omega^4(432B_4\Omega^4 - 216\rho + 24) + \rho(27\rho - 6) + 60B_3\Omega^3(-5B_3\Omega^3 + i) - 5} \right]$$

$$S_{11} = \frac{12S_c A_1^2}{(3\rho - 1)^2} \left[\frac{B_4\Omega^4(36\rho + 18) - \rho(9\rho + 7) - i30B_3\Omega^3(2\rho + 1)}{B_4\Omega^4(432B_4\Omega^4 - 216\rho + 24) + \rho(27\rho - 6) + 60B_3\Omega^3(-5B_3\Omega^3 + i) - 5} \right]$$

À l'ordre ϵ^3

En tenant compte des résultats précédents et en les injectant dans (B.7), nous trouvons les expressions des solutions homogènes et stationnaires au troisième ordre de ϵ :

$$a_2 = \frac{(\rho - 3)(3\rho - 1)}{(\rho + 3)(3\rho + 1)(\rho^2 + 1)} \quad (\text{B.35})$$

$$b_2 = \frac{3\rho^3 + 3\rho + 10}{(\rho + 3)(3\rho + 1)(\rho^2 + 1)} \quad (\text{B.36})$$

En appliquant la condition de solvabilité à cet ordre, nous obtenons l'équation d'amplitude de la fréquence la plus instable comme suit :

$$\frac{18S_c^2}{5(\rho - 3)(3\rho - 1)} \frac{\partial A_1}{\partial T_2} = \frac{-108S_c^3}{5(\rho - 3)(3\rho - 1)} A_1 + f(\rho) A_1 |A_1|^2 \quad (\text{B.37})$$

Après simplification, on obtient :

$$\frac{1}{6S_c^2} \frac{\partial A_1}{\partial T_2} = \frac{-1}{S_c(\Delta - 2)(3\Delta - 14)} A_1 + f(\rho) A_1 |A_1|^2 \quad (\text{B.38})$$

En multipliant la relation par ϵ^3 , nous retrouvons finalement l'équation (4.14) qui décrit l'amplitude $A = \epsilon A_1$ au voisinage du point d'instabilité :

$$\frac{1}{S_{s1}^2} \frac{\partial A}{\partial t} = \frac{S - S_{s1}}{S_{s2}(2 - \Delta)^2} A + (f_1(\Delta) + i f_2(\Delta)) |A|^2 A \quad (\text{B.39})$$

Avec

$$\begin{cases} f_1(\Delta) = \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} \\ f_2(\Delta) = \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \end{cases} \quad (\text{B.40})$$

Où

$$\begin{aligned} a &= -4(\Delta - 2)(a_1 + a_2) + a_3 \\ a_1 &= 59049\Delta^7 - 798255\Delta^6 + 4417983\Delta^5 - 13345641\Delta^4 \\ a_2 &= 24735807\Delta^3 - 29605896\Delta^2 + 21969258\Delta - 7708940 \\ a_3 &= 600(486\Delta^6 - 5508\Delta^5 + 24435\Delta^4 - 57654\Delta^3 + 82686\Delta^2 - 73156\Delta + 30792)B_3\Omega^3 \\ b &= -60(3\Delta - 4)(243\Delta^5 - 2268\Delta^4 + 7398\Delta^3 - 11412\Delta^2 + 11040\Delta - 7304)B_3\Omega^3 \\ c &= 3(3\Delta^2 - 20\Delta + 28)(3\Delta - 4)^2 c_1 \\ c_1 &= (9\Delta^2 - 30\Delta + 34)^2 (100(B_3\Omega^3)^2 - 81\Delta^2 + 348\Delta - 372) \\ d &= -60(\Delta - 2)(3\Delta - 14)(3\Delta - 4)^2 (9\Delta^2 - 30\Delta + 34)^2 B_3\Omega^3 \end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] G.Nicolis. *Introduction to nonlinear science*. Cambridge University Press, 1995.
- [2] Wikipédia. <https://fr.wikipedia.org/wiki/brusselator>.
- [3] A.M. Turing. The chemical basis of morphogenesis. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London B*, 237 :37–72, August 1952.
- [4] I.Prigogine and G.Nicolis. On symmetry breaking instabilities in dissipative systems. *The Journal of Chemical Physics*, 46 :3542–3550, 1967.
- [5] I.Prigogine and G.Nicolis. symmetry breaking instabilities in dissipative systems ii. *The Journal of Chemical Physics*, 48 :1695–1700, 1968.
- [6] I.Prigogine and G.Nicolis. *Self Organisation in nonequilibrium Systems*. John Wiley, New York, 1977.
- [7] G. Nicolis and J. F. G. Auchmuty. Dissipative structures, catastrophes, and pattern formation : A bifurcation analysis. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA*, 71 :2748–2752, July 1974.
- [8] J.Rayleigh. Currents in a horizontal layer of fluid when the higher temperature is on the under side. *Philosophical Magazine Series*, 6 :529–546, 1916.
- [9] J.D.Murray. *Mathematical Biology I An Introduction third edition*. Springer, 2001.
- [10] K.Staliunas M.Tlidi and all. Localized structures in dissipative media from optics to plant ecology. *Phil Trans R A*, 372, Septembre 2014.
- [11] R.Lefever and O.Lejeune. On the origin of tiger bush. *Bulletin of mathematical Biology*, 52 :263–294, 1997.
- [12] F.Anthème P.Couteron and all. Plant clonal morphologies and spatial patterns as self organized response to resource limited environments. *Phil Trans R A*, 372, Septembre 2014.
- [13] B.Pena and C.Perez Garcia. Stability of turing patterns in the brusselator model. *Physical Review E*, 64 :1–9, December 2000.
- [14] I.Prigogine. *From being to becoming time and complexity in the physical sciences*. W. H. Freeman and Company, New York, 1980.
- [15] I.Prigogine Dilip Kondepudi. *Modern Thermodynamics. From Heat Engines to Dissipative Structures second edition*. wiley1, 1980.

- [16] L.Bahloul ; L.Cherbi ; H.Hafid and M.tlidi. Temporal localized srtructures in photonic crystal fiber and their spontaneous breaking symmetry. *phil.trans.R.S.A*, 372 :1–10, September 2014.
- [17] M.Tlidi ; L.Bahloul ; et all. Drift of dark cavity solitons in a photonic crystal fiber resonator. *Physical ReviewA*, 88, September 2013.
- [18] Yuri A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer Science, 1995.
- [19] Jhon Guckenheimer and Philip Hlmes. *Nonlinear Oscillations,Dynamical Systems and bifuractions od Vector fields*. Springer Science, 2002.
- [20] Paul Maneville. *Instabilities, Chaos and Turbulence*. Imperial College Press, 2004.
- [21] D.W.Jordan and P.Smith. *Nonlinear ordinary Differential equations*. Oxford University Press, 2007.
- [22] Ali Hasan Nayfeh. *The Method of Normal Forms, second edition*. Wiley-Vchverlag GmbH and Co, 2011.
- [23] Gerard Iooss and Daniel D. Joseph. *Elementary Stability and Bifurcation Theory*. Springer-Verlag New York Inc, 1980.
- [24] J. E. Marsden et M. McCracken. *The Hopf bifurcation and its applications*. Springer-Verlag New York, 1976.
- [25] Vincent Morin. *Instabilités et Bifurcations associées à la modélisation de la géodynamo*. PhD thesis, Université Paris 7, 2005.
- [26] Ute Ebert and Wim van Saarloos. Front propagation into unstable states : universal algebraic convergence towards uniformly translating pulled fronts. *Physica D*, 149 :1–99, 2000.
- [27] Wim van Saarloos. Front yroyagation into unstable states : Marginal stability as a dynamical mechanism for velocity selection. *Physical Review A*, 37 :211–229, Janvier 1988.
- [28] Wim van Saarloos Ute Eberta.b, Willem Spruijtc. Pattern forming pulled fronts : bounds and universal convergence. *Physica D*, 199 :13–32, 2004.
- [29] G. Kozyreff T. Erneux and M. Tlidi. Bifurcation to fronts due to delay. *Phil. Trans. R. Soc. A*, 368, Decembre 2009.
- [30] G. Dee and J. S. Langer. Propagating pattern selection. *Physical Review Lettres*, 50 :383–386, Fevrier 1983.
- [31] M. Taki S. Coulibaly and M. Tlidi. Universal power law for front propagation in all fiber resonators. *Optics*, 22, Janvier 2014.
- [32] Etude des strctures dissipatives dans les cavites optiques passives. *Fronçois Leo*. PhD thesis, Universite Libre de Bruxelles, 2010.
- [33] L.A.Lugiato and R.Lefever. Spatial dissipative structures in passive optical systems. *Physical Review Letters*, 58 :2209–2211, May 1987.

- [34] E.le Bihan G.Grynberg and all. Observation of instabilities due to mirrorless four wave mixing oscillation in sodium. *Optics Communications*, 67 :363–366, August 1988.
- [35] G.Giusfredi et al. Optical instabilities in sodium vapor. *J.Opt.Soc.Am.B*, 5 :1181–1192, May 1988.
- [36] G.D’Alessandro and W.J.Firth. Spontaneous hexagon formation in a nonlinear optical medium with feedback mirror. *Physical Review Letters*, 66 :2597–2599, May 1991.
- [37] G.D’Alessandro and W.J.Firth. Hexagonal spatial pattern for a kerr slice with a feedback mirror. *Physical Review A*, 46 :537–547, July 1992.
- [38] S. Coen and M. Haelterman. Modulational instability induced by cavity boundary conditions in a normally dispersive optical fiber. *Physical Review Letters*, 79 :4139–4142, November 1997.
- [39] François Leo et all. Temporal cavity solitons in one dimensional kerr media as bits in an all-optical buffer. *Nature Photonics*, 04 :471–476, July 2010.
- [40] Stephan Coen. *Passive Nonlinear Optical Resonators, Fundamentals and Applications*. PhD thesis, Université Libre de Bruxelles, 2000.
- [41] R. Chraplyvy Andrew. Limitations on lightwave communications imposed by optical-fiber nonlinearities. *Journal of lightwave technology*, 8 :1548–1557, Oct 1990.
- [42] M.Hwang et all Zou, M.Imran Hayee. Limitations in 10 gb/s wdm optical-fiber transmission when using a variety of fiber types to manage dispersion and nonlinearities. *Journal of lightwave technology*, Jun 1996.
- [43] M.C Teich B. Saleh. *Fundamentals of photonics*. John Wiley and Sons New Jersey, 2007.
- [44] E.Yablonovitchl. Inhibited spontaneous emission in solid-state physics and electronics. *Phys. Rev. Lett.*, 58 :2059–2062, May 1987.
- [45] E.Yablonovitchl. Photonic band-gap structures. *J. Opt. Soc. Am. B*, 10 :283–295, February 1993.
- [46] Brian Mangan Jonathan Knight, Tim Birks and Philip St. James Russell. Photonic crystal fiber. *Optics and Photonics News*, pages 26–30, March 2002.
- [47] P. St. J. Russell J. C. Knight, T. A. Birks and D. M. Atkin. All-silica single-mode optical fiber with photonic crystal cladding. *Optics Letter*, 21 :1547–1549, Oct 1996.
- [48] J. C. Knight T. A. Birks P. St. J. Russell P. J. Roberts R. F. Cregan, B. J. Mangan and D. C. Allan. Single-mode photonic band gap guidance of light in air. *Science*, 285 :1537–1539, Sept 1999.
- [49] Emmanuel Kerrinckx. *Les microstructurations dans les fibres optiques*. PhD thesis, Université de Lille, 2005.
- [50] Govind P. Agrawal. *Non linear Fiber Optics Fourth edition*. Academic Press Elsevier, 2007.

- [51] C.Kittel and P. Mc Euen. *Introduction to solid state physics*. Wiley New York, 1986.
- [52] R. Meade J. Joannopoulos and J.Winn. *Photonic Crystals : Modeling the flow of light*. Prinston univerty press, 1995.
- [53] G. Tayeb S. Enoch and D. Maystre. Dispersion diagrams of bloch modes applied to the design of directive sources. *Progress In Electromagnetics Research*, 10 :61–81, 2003.
- [54] M. Yan and P. Shum. Guidance varieties in photonic crystal fibers. *J. Opt. Soc. Am. B*, 23 :1684–1691, August 2006.
- [55] A. Betourne. *Conception et caractérisation de nouvelles fibres optiques à cristal photonique dites hybrides et applications à l'optique non linéaire*. PhD thesis, Université Lille 1, Laboratoire PHLAM, 2010.
- [56] V. Pureur. *Modélisation et caractérisation de fibres à guidage par bande interdite photonique à coeur solide*. PhD thesis, Université Lille 1, Laboratoire PHLAM, 2009.
- [57] J. C. Knight T. A. Birks and P. St. J. Russell. Endlessly single-mode photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 22 :961–963, July 1997.
- [58] J. J. Miret A. Ferrando, E. Silvestre and P. Andres. Nearly zero ultraflattened dispersion in photonic crystal fibers. *Optics Letters*, 25 :790–792, June 1997.
- [59] Wadsworth et al. Supercontinuum generation in photonic crystal fibers and optical fiber tapers : a novel light source. *J. Opt. Soc. Am. B*, 19 :2148–2155, September 2002.
- [60] D.J. Richardson T.M. Monro. Holey optical fibres fundamental properties and device applications. *C.R.Physique 4*, pages 175–186, 2003.
- [61] Jes Broeng Anders Bjarklev and Araceli Sanchez Bjarklev. *Photonic Crystal Fibres*. Springer Science, 2003.
- [62] R. Buczynski. Photonic crystal fibers. *Acta Physica Polonica A, Proceedings of the XXXIII International School of Semiconducting Compounds, Jaszowiec*, 106 :141–167, 2004.
- [63] T. A. Birks J. C. Knight and P. St. J. Russell. Properties of photonic crystal fiber and the effective index model. *J. Opt. Soc. Am. A*, 15 :748–752, March 1998.
- [64] Kunimasa Saitoh and Masanori Koshiba. Empirical relations for simple design of photonic crystal fibers. *Optics Express*, 13 :267–274, January 2005.
- [65] Masanori Koshiba and Kunimasa Saitoh. Applicability of classical optical fiber theories to holey fibers. *Optics Letters*, 29 :1739–1741, August 2004.
- [66] Michel Dossous. *Les modes de résonance acoustique dans les fibres optiques microstructurées Applications aux capteurs répartis*. PhD thesis, Université Lille 1, 2011.
- [67] Harry J. R. Dutton. *Understanding Optical Communications*. Copyright International Business Machines Corporation, 1998.

- [68] Niels Asger Mortensen. Effective area of photonic crystal fibers. *Optics Express*, 10 :341–348, April 2002.
- [69] Niels Asger Mortensen et al. Numerical aperture of single-mode photonic crystal fibers. *IEEE Photonics Technology Letters*, 02, August 2002.
- [70] L. Vincetti D. Ferrarini and M. Zoboli. Leakage properties of photonic crystal fibers. *Optics Express*, 10, November 2002.
- [71] A. Cucinotta F. Poli and S. Selleri. *Photonic Crystal Fibers Properties and Applications*. Springer, 2007.
- [72] Govind P. Agrawal. *Non linear Fiber Optics third edition*. Academic Press Elsevier, 2001.
- [73] Thanh Nam Nguyen. *Etude des composants optiques a base de fibres optiques non linéaire*. PhD thesis, Université de Rennes, 2009.
- [74] Coraline Fortier. *Génération de sources optiques fibrees à très haute cadence et caractérisation de fibres optiques microstructurées en verre de Chalcogénure*. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2011.
- [75] Md. Anwar Hossain and Yoshinori Namihira. Center wavelength adoption techniques for supercontinuum generating highly nonlinear noncircular core photonic crystal fiber. *Japanese Journal of Applied Physics*, 52, April 2013.
- [76] Kunimasa Saitoh and Masanori Koshiba. Numerical modeling of photonic crystal fibers. *Journal of lightwave technology*, 23 :3580–3590, November 2005.
- [77] J.C Knight et all. Anomalous dispersion in photonic crystal fiber. *IEEE Photonics Technologie Letters*, 12 :807–809, July 2000.
- [78] Yimin Wang et all. Ultrahigh resolution optical coherence tomography by broadband continuum generation from a photonic crystal fiber. *Optics Letters*, 28 :182–184, February 2003.
- [79] T. Hasegawa Kunimasa Saitoh, Masanori Koshibl and E. Sasaoka. Chromatic dispersion control in photonic crystal fibers application to ultra flattened dispersion. *Optics Express*, 11 :843–852, April 2003.
- [80] Kunimasa Saitoh and Masanori. Highly nonlinear dispersion flattened photonic crystal fibers for supercontinuum generation in a telecommunication window. *Optics Express*, 12 :2027–2032, April 2004.
- [81] Tzong.Lin Wu. A novel ultraflattened dispersion photonic crystal fiber. *IEEE Photonics Technologie Letters*, 17 :67–69, January 2005.
- [82] J. Toulouse. Optical nonlinearities in fibers review recent examples and systems applications. *Journal of lightwave technology*, 23 :3625–3641, November 2005.
- [83] Julien Fatome. *Propagation d’impulsions ultra courtes à 160 Gbits dans des lignes de fibres optiques gérées en dispersion*. PhD thesis, Université de Bourgogne, 2005.
- [84] R.H. Stolen et Q. Lin. Self-phase modulation in silica optical fibers. *Phys. Rev. A*, 17 :1448–1453, 1978.

- [85] L. F. Mollenauer M. N. Islam and R. H. Stolen. Cross phase modulation in optical fibers. *Optics Lettres*, 12 :625–627, August 1987.
- [86] Akira Hasegawal. Generation of a train of soliton pulses by induced modulational instability in optical fibers. *Optics Letters*, 09 :288–290, July 1984.
- [87] Mario F. S. Ferreira. *Nonlinear Effects In Optical Fibers*. John Wiley and Sons, 2011.
- [88] A.Hasegawa and M.Matsumoto. *Optical Solitons in Fiber*. Springer, 2003.
- [89] Ph. Emplit G. Van Simaeys and M. Haelterman. Experimental demonstration of the fermi-pasta-ulam recurrence in a modulationally unstable optical wave. *Physical Review Letters*, 87 :1–4, July 2001.
- [90] S.Trillo S M.Haelterman and S.Wabnitz. Dissipative modulation instability in a non linear dispersive ring cavity. *Optics Communication*, 91 :401–407, July 1992.
- [91] José.C Francisco.J and Miguel.A. Transmission bistability in a double coupler fiber ring resonator. *Optics Letters*, 16 :907–909, June 1991.
- [92] A. E. Kaplan and P. Meystre. Directionally asymmetrical bistability in a symmetrically pumped nonlinear ring interferometer. *Optics Communications*, 40 :229–232, 1982.
- [93] Stephane Coen and Marc Haelterman. Continuous wave ultrahigh repetition-rate pulse-train generation through modulational instability in a passive fiber cavity. *Optics Letters*, 26 :39–41, January 2001.
- [94] M.Tlidi et all. Control and removal of modulational instabilities in low dispersion photonic crystal fiber cavities. *Optics Letters*, 32 :662–664, March 2007.
- [95] Govind P. Agrawal Ravi K. Varshney Ajanta Barh, Bishnu Pada Pal and B. M. Azizur Rahman. Specialty fibers for terahertz generation and transmission : A review. *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, 2015.
- [96] Matteo Conforti et all. Modulational instability in dispersion oscillating fiber ring cavities. *Physics Optics*, May 2014.
- [97] Md.Anwar Hossain and Yoshinori Namihira. Center wavelength adoption techniques for supercontinuum generation generating highly nonlinear core photonic crystal fiber. *Japanese Journal of Applied Physics*, 52 :229–232, April 2013.
- [98] E. Louvergneaux et all A. Mussot. Optical fiber systems are convectively unstable. *Physical Review Letters*, 101 :1–4, September 2008.
- [99] M.Tlidi. *Structures transverses en optique non linéaire*. PhD thesis, Université libre de Bruxelles, 1995.
- [100] A.J. Scroggie et all. Pattern formation in a passive kerr cavity. *Chaos, Solitons and Fractals*, 04 :1323–1354, 1994.
- [101] M.Tlidi and L.Gelens. High-order dispersion stabilizes dark dissipative solitons in all fiber cavities. *Optics Letters*, 35 :306–308, February 2010.
- [102] M.tlidi et all. Llocalized srtructures in dissipative media : from optics to plant ecology. *phil.trans.R.S.A*, 372 :1–18, September 2014.

- [103] G. Kozyreff and L. Gelens. Cavity solitons and localized patterns in a finite-size optical cavity. *Physical Review A*, 84, 023819, August 2011.
- [104] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. ii. normal dispersion. *Appl. Phys. Lett*, 23, 1973.
- [105] Akira Hasegawa and Frederick Tappert. Transmission of stationary nonlinear optical pulses in dispersive dielectric fibers. i. anomalous dispersion. *Appl. Phys. Lett*, 23, 1973.
- [106] J.P.Hamaide P.Emplit. Picosecond steps and dark pulses through nonlinear single mode fibers. *Optics Communications*, 62, Fevrier 1987.
- [107] Andrei G. Vladimirov et al. Two-dimensional clusters of solitary structures in driven optical cavities. *Physical Review E*, 65, Mars 2002.
- [108] S. Barbay et al. Incoherent and coherent writing and erasure of cavity solitons in an optically pumped semiconductor amplifier. *Optics Letters*, 31, May 2006.
- [109] D. Escaff C. F.Oto, M. G. Clerc and M. Tlidi. Strong nonlocal coupling stabilizes localized structures : An analysis based on front dynamics. *Physical Review Letters*, 110, Avril 2013.
- [110] Eric L. Buckland and Robert W. Boyd. Electrostrictive contribution to the intensity dependent refractive index of optical fibers. *Optics Letters*, 21 :1117–1119, Aout 1996.
- [111] Eric L. Buckland and Robert W. Boyd. Measurement of the frequency response of the electrostrictive nonlinearity in optical fibers. *Optics Letters*, 22 :676–678, May 1997.
- [112] A.N. Pilipetskii E.M. Dianov, A.V. Luchnikov and A.M. Prokhorov. Long-range interaction of picosecond solitons through excitation of acoustic waves in optical fibers. *Appl. Phys. B*, 54 :175–180, Septembre 1992.
- [113] A. N. Pilipetskii E. M. Dianov, A. V. Luchnikov and A. N. Starodumov. Electrostriction mechanism of soliton interaction in optical fibers. *Optics Letters*, 15 :314–316, Mars 1990.
- [114] K. Smith and L. F. Mollenauer. Experimental observation of soliton interaction over long fiber paths discovery of a long-range interaction. *Optics Lettres*, 14 :1284–1286, Novembre 1989.
- [115] P. J. Hardman Paul D. Townsend, Alistair J. Poustie and K. J. Blow. Measurement of the refractive-index modulation generated by electrostriction-induced acoustic waves in optical fibers. *Optics Letters*, 21 :333–335, Mars 1996.
- [116] Andrea Melloni Andrea Fellegara and Mario Martinelli. Measurement of the frequency response induced by electrostriction in optical fibers. *Optics Letters*, 22 :1615–1617, Novembre 1997.
- [117] A. Melloni et al. Direct measurement of electrostriction in optical fibers. *Optics Letters*, 23 :691–693, May 1998.

- [118] Stuart G. Murdoch Jae K. Jang, Miro Erkintalo and Stéphane Coen. Ultra-weak long-range interactions of solitons observed over astronomical distances. *Journal of physics and optics*, 1305, May 2013.

ملخص

نعتبر تجويف الرنانة تتألف من كريستالات الألياف الضوئية تعرض للضخ المستمر. يخضع انتشار الضوء في الألياف معادلة شرودنجر غير الخطية حيث استخدام كريستالات الألياف الضوئية سمح لنا بتطوير ثابت الانتشار حتى ترتيب التشتت الرابع في سلسلة تايلور. هدفنا في هذا العمل هو أداء دراسة تسمح لنا بمعرفة مدى تأثير وجود الترتيب العالي للتشتت على النظام المدروس. البنى التي تم إنشاؤها هي نتيجة لظاهرة عدم الاستقرار الذي يعتبر حالة توازن بين اللاخطية و التشتت.

Résumé

Nous considérons une cavité à fibre à cristaux photonique (PCF) soumise à un pompage continue, la propagation de la lumière dans cette fibre est régie par l'équation de Schrödinger non linéaire où l'utilisation des PCF nous a permis le développement la constante de propagation en série de Taylor jusqu' au quatrième ordre de dispersion. Notre but dans ce travail est d'effectuer une étude analytique et numérique afin d'étudier l'impact de la présence des ordres supérieurs de dispersion sur la dynamique non linéaire des structures dissipatives périodique et localisées qui émergent dans cette cavité.

Les structures périodiques apparaissent grâce au phénomène d'instabilité de modulation considéré comme un équilibre entre la non linéarité Kerr et les effets de dispersion d'un côté et entre les pertes optique et l'injection continue, le résultat sera donc la brisure de l'onde continue en un train d'impulsions avec une fréquence bien déterminée, les structures localisées quant-à-elles apparaissent dans un régime de paramètre où une coexistence entre l'onde continue et l'onde périodique peut être réalisée, cette région est connue sous le nom de Pinning zone.

Abstract

We consider a single mode photonic crystal fiber (PCF) cavity pumped by a continuous wave, the propagation of light inside the fiber is governed by the nonlinear Schrödinger equation and the use of PCFs allows to expand the propagation constant up to the fourth order in a Taylor series. In this work, it is our aim to analyze analytically and numerically the influence of high order dispersion on the nonlinear dynamical properties of the periodic and the temporal localized structures in all photonic crystal fiber resonator.

The periodic solutions arises thanks to the modulation instability (MI) which is considered as the interplay between chromatic dispersion and the intensity-dependent refractive index (Kerr effect) in one side and between the external forcing (intensity of the input light) and cavity losses in other side. The result is then the breakup of continuous wave (CW) into trains of short pulses with well-known repetition rate, while the localized structure also known as cavity solitons are found in a region of parameters called pinning zone where the system exhibits a coexistence between the homogeneous steady state and the periodic distribution of light that emerges from subcritical modulation instability.