

N° d'ordre : 12/2015-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **Analyse et Approximation des Equations aux Dérivées Partielles**

Par : **MAHDI Mohammed Amokrane**

Sujet

**Résolution Numérique de Problèmes Différentiels à l'aide des Méthodes
d'Eléments Finis et de Volumes Finis.**

Soutenu publiquement, le 30/09/2015, devant le jury composé de

M. BEBBOUCHI Rachid	Prof	USTHB / FMT	Président
M. TOUZALINE Arezki	Prof	USTHB / FMT	Directeur de mémoire
M. SOUILAH Messaoud	MCA	USTHB / FMT	Examineur
M. KHEMMOUDJ Ammar	MCA	USTHB / FMT	Examineur
M. BELLOUT Rabah-Hacène	MCB	USTHB / FMT	Invité

Résumé

Dans ce travail, nous avons effectué la résolution numérique de problèmes différentiels de type Laplacien et de type Stockes par la méthode des éléments finis. Nous avons focalisé l'intérêt sur la mise en œuvre de cette méthode en élaborant un code de calcul (FE2D - Finite Elements 2 Dimensions) permettant la résolution numérique de ces problèmes. La convergence de la méthode a été étudiée en comparaison avec la méthode des différences finies et celle des volumes finis.

Abstract

In this work, the numerical resolution of Laplacian and Stockes differential problems by finite elements method has been carried out. The main purpose of the study is the implementation of this method, where a programming code has been elaborated (FE2D - Finite Elements 2 Dimensions). The convergence of the method has been studied in comparison with other numerical methods, such as finite differences and finite volumes methods.

Dédicace

A CEUX QUI CROIENT QUE LA SCIENCE EST CE QUI CHANGE
LE SORT DES SOCIÉTÉS.

Remerciements

Mes vifs remerciements vont à Monsieur Rabah-Hacene BELLOUT, Maître de Conférences à l'USTHB, pour sa disponibilité, son aide, son soutien moral ainsi que ses précieux conseils qu'il a su me donner tout au long de ce travail, aussi bien au sujet du présent mémoire qu'à propos du monde de la recherche scientifique en général. Aujourd'hui, je mesure la chance qui m'a été offerte de pouvoir accomplir ce travail sous l'encadrement d'un professeur d'aussi rares qualités. Merci infiniment !

Mes remerciements vont aussi à mon directeur de mémoire, Monsieur Arezki TOUZALINE, Professeur à l'USTHB, de m'avoir pris sous son encadrement. Je lui sais énormément gré de m'avoir introduit à la théorie des problèmes variationnels pendant l'année théorique. Son cours m'a prodigieusement éclairé.

Je remercie également le président du jury, Professeur Bebbouchi, ainsi que Professeur Souilah et Professeur Khemoudj d'avoir accepté d'examiner mon modeste travail.

Je suis très reconnaissant à l'ensemble de mes professeurs de l'année théorique ; Pr. Abid, Mme. Lahdiri, Pr. Kessab et Pr. Moulay, de m'avoir introduit à cette branche de mathématiques qui a toujours été un rêve pour moi.

Heureux, le jour où j'ai été accepté dans la prodigieuse Faculté de Mathématiques de l'USTHB !

Table des matières

Résumé	ii
Dédicaces	iii
Remerciements	iv
Table des matières	vi
Liste des figures	viii
Liste des tables	ix
Introduction	x
1 Maillages	1
1.1 Généralités sur le maillage	1
1.1.1 Choix du type de maillage	2
1.1.2 Techniques générales de génération de maillage	4
1.2 Tableaux de connectivité	7
1.2.1 Le nuage de points	7
1.2.2 Connectivité	8
1.2.3 Autres pointeurs	9
2 Formalisme de Ern - quadrature numérique et assemblage	12
2.1 Quadratures numériques	13
2.1.1 Principe des quadratures numériques	13
2.1.2 Le problème approché avec quadratures numériques	16
2.2 Module de quadrature	18
2.2.1 La transformation géométrique	18
2.2.2 Numérotation des fonctions de forme, connectivité	19
2.2.3 Fonctions de forme locales	20

2.2.4	Jacobien et poids de la quadrature	20
2.2.5	Dérivée d'une fonction de forme globale	20
2.2.6	Termes de bord	21
2.3	Assemblage	22
2.3.1	Assemblage de la matrice	22
2.4	Les conditions aux limites essentielles	26
2.4.1	Le problème modèle	26
2.4.2	Le système linéaire	27
2.4.3	Élimination des nœuds essentiels	28
3	Présentation du code FE2D	29
3.1	Problème physique	29
3.2	Présentation du code FE2D	31
3.3	Génération du maillage	32
3.4	Génération des tableaux de connectivité	32
3.4.1	Cas préliminaire - le maillage $R = 1$	33
3.4.2	Cas préliminaire - le maillage $R = 2$	33
3.4.3	Généralisation - le maillage $R \geq 1$	34
4	Résolution numérique	39
4.1	Configuration creuse de la matrice d'assemblage globale	39
4.2	Visualisation de la solution numérique	40
4.3	Étude de la convergence	41
4.3.1	Convergence des méthodes, caractérisée par la valeur de la déformation maximale u_{max}	45
4.3.2	Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β	46

Table des figures

1.1	Différents types de maillages.	3
1.2	Types de maillage [7].	4
1.3	Définition de la distortion [7].	5
1.4	Maillage raffiné près de la paroi [7].	5
1.5	Evolution de la taille des éléments [7].	6
1.6	Exemple d'adaptation de maillage [7].	6
1.7	Test de convergence du calcul [7].	7
1.8	Numérotation locale des nœuds d'un simplexe en 2D et 3D. . .	9
1.9	Exemple de numérotation des nœuds et des simplexes en 2D. .	9
1.10	Numérotation du voisinage d'un simplexe en 2D. Numérotation locale à gauche, numérotation globale à droite.	11
3.1	Géométrie du problème physique.	30
3.2	Bilan de forces appliquées sur un élément surfacique de la membrane.	30
3.3	Maillages adoptés et numérotation globale suivant les cas : $\hat{P} = \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ et $R = 1, 2, 3$	32
3.4	Connectivité d'un maillage en $\hat{P} = \mathbb{P}_2$ et $R = 1$	33
3.5	Connectivité d'un maillage en $\hat{P} = \mathbb{P}_2$ et $R = 2$	34
4.1	(a) La configuration creuse de la matrice d'assemblage globale d'un maillage en \mathbb{P}_1 , (b) le maillage correspondant.	40
4.2	(a) La configuration creuse de la matrice d'assemblage globale d'un maillage en \mathbb{P}_2 , (b) le maillage correspondant.	40
4.3	Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression uniforme avec un paramètre de maillage $R = 1$	41
4.4	$R = 2$	42
4.5	$R = 3$	42
4.6	$R = 4$	43
4.7	$R = 5$	43

4.8	Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression unitaire négative.	44
4.9	Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression non-uniforme $f(x, y) = 10\sin(4x(\frac{y}{2} - 2))$	44
4.10	Convergence des différentes méthodes caractérisée par la valeur de la déformation maximale u_{max}	46
4.11	Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β	47

Liste des tableaux

1.1	Qualité du maillage en fonction du facteur de distortion. . . .	5
2.1	Formules d'intégration sur le segment $[-1, 1]$	15
2.2	Formules d'intégration sur un triangle de surface S	15
2.3	Formules d'intégration sur un tétraèdre de volume V	16
4.1	Convergence des méthodes caractérisée par la valeur de la dé- formation maximale u_{max}	45
4.2	Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β	47

Introduction

Depuis le XVII-ème siècle, la physique a connu un développement sans précédent. Cette effervescence est, incontestablement, due à la technique originale et inaccoutumée de la formulation mathématique des problèmes physiques en introduisant les outils du calcul différentiel, alors tout nouveau, telles que les équations différentielles. Du point de vue de l'histoire des sciences, c'est cette approche qui a émancipé la physique dans la période moderne et pu la ramener au centre d'intérêt de la majorité des chercheurs. L'on commença, alors, de penser, à l'instar de Galilée, que les mathématiques ne sont rien sinon le langage de la physique : "La nature est un livre écrit en langage mathématique". Sur le plan épistémologique, la mathématisation de la physique constitue le pas le plus gigantesque que l'homme a pu franchir dans son interminable poursuite à la connaissance de la nature.

Les problèmes physiques liés aux phénomènes de transfert (de chaleur, de masse, de quantité de mouvement...) sont régis par les Equations aux Dérivées Partielles (EDP). La résolution analytique de ces équations est souvent très complexe et fait appel à des méthodes heuristiques applicables uniquement dans le cadre étroit des problèmes incluant des conditions et des géométries simples.

Cette réalité a été, pour de longues années, assez contraignante pour les physiciens et les ingénieurs qui se sont vus dans la nécessité immédiate de trouver les solutions explicites des problèmes physiques auxquels ils étaient confrontés. De plus, le XIX-ème siècle ainsi que la première moitié du XX-ème siècle ont connu l'émergence d'une multitude de tels problèmes touchant tous les domaines d'engineering (génie mécanique, génie civil, aéronautique, etc.).

Le besoin incessant des solutions des problèmes industriels d'un côté, et la stérilité des méthodes analytiques classiques d'un autre côté ont fait qu'au XX-ème siècle, les auteurs se sont tournés de plus en plus à l'exploration de l'alternative numérique, malgré l'inconvénient majeur de l'erreur

inévitabile qui lui est inhérent. En fait, c'est cette situation qui a émancipé les numériciens dans ce siècle en les poussant à bâtir l'édifice de l'analyse de l'erreur et de la convergence. Un des travaux pionniers, celui de Courant et al., sur *la résolution des problèmes de la physique mathématique par la méthode des différences finies* (1928), a eu un apport fondamental. Dans ce travail, l'approximation par cinq points a été développée afin d'approcher l'équation de Laplace ainsi que celle des ondes. L'étude de la convergence y a été, également, établie en fonction de la taille du maillage [8].

L'influence majeure que ce travail a pu avoir sur le développement ultérieur de l'analyse numérique des EDP est l'introduction de l'idée clef du principe de variation. En réalité, l'utilisation de la formulation variationnelle sur les problèmes aux valeurs limites trouve ses origines, bien au par avant, dans les travaux de Rayleigh et Ritz (1894~1908). L'approche de ce dernier consiste à considérer la solution de l'EDP sous forme de combinaison linéaire de fonctions type polynômiales ou polynômiales trigonométriques. C'est donc ce context d'approximation par des fonctions linéaires et continues par morceau qui a été repris plus tard par Courant (1943). Toujours est-il que ce travail est celui qui a marqué la naissance de la méthode des éléments finis, bien que l'analyse approfondie de la méthode, telle qu'elle est connue aujourd'hui, viendra bien plus tard. [1]

En résumé, aujourd'hui, il est bien connu que la méthode des éléments finis n'opère pas directement sur l'EDP qui présente la formulation forte du problème, mais nécessite d'abord le passage à la formulation faible équivalente que l'on obtient moyennant le principe de variation, pour ensuite, appliquer l'idée centrale qui consiste à chercher la solution sous forme d'une combinaison linéaire d'un ensemble fini de fonctions testes. Ces dernières sont des fonctions polynômiales par morceau. Le succès de cette méthode vient de ce choix.

D'un point de vue calculatoire, la méthode des éléments finis a été, originalement, introduite par les ingénieurs. Au milieu des années 1950, des gens de génie civil ont eu l'idée d'adapter le cadre théorique dudit principe de variation appliqué à la mécanique des milieux continus à une méthode de discrétisation dans laquelle une structure quelconque (poutre, barre, ...) est subdivisée en un ensemble d'éléments dont les contraintes et les déformations sont localement définies. La nomenclature d'éléments finis fut introduite pour la première fois par Clough (1960), et la méthode a été, par la suite, appliquée sur toute une gamme de problèmes liés à la mécanique des milieux continus. Il convient de mentionner, également, que les travaux de Zienkiewicz demeurent la référence incontestable en la matière. [9]

A titre de comparaison avec la méthode des différences finies, l'avantage majeur duquel jouit la méthode des éléments finis est le fait qu'elle peut s'adapter aux géométries non régulières et complexes, en particulier pour les problèmes de structure. Cependant, depuis ce succès, d'autres méthodes numériques similaires sont apparues parallèlement, telles que la méthode de collocation, la méthode spectrale, la méthode des intégrales de frontière ainsi que la méthode des volumes finis. Il convient de noter que cette dernière est beaucoup plus adaptée aux problèmes de fluide.

Un aspect important de l'approche numérique des EDP est celui de l'analyse des systèmes d'équations algébriques. Ces systèmes sont, généralement, extrêmement larges, mais ils ont la particularité de jouir d'une configuration creuse, ce qui fait des méthodes itératives les plus convenables pour leur résolution. Par conséquent, dans cette même période, l'analyse de convergence des méthodes itératives a connu, elle aussi, une effervescence sans précédent.

Ce travail se veut à la résolution numérique du problème différentiel classique de type Laplacien par la méthode des éléments finis, en focalisant l'intérêt sur le cadre pratique de la méthode. La contribution de ce travail en est, donc, la mise en œuvre d'un code de calcul permettant la résolution numérique dudit problème. Dans le cadre restreint de ce travail, nous avons considéré le cas simpliste d'une configuration bidimensionnelle avec, pour géométrie, le carré unitaire. Néanmoins, le code que nous avons développé (FE2D - Finite Elements 2 Dimensions) demeure ouvert à des aspects plus complexes.

Lors de l'élaboration du code, nous sommes revenus au cadre théorique présenté par Ern et al. [2] [3] [4]. Ces ouvrages se sont imposés comme référence incontestable en la matière. Ils présentent le cadre théorique général, ainsi que les outils appropriés pour la mise en œuvre de la méthode des éléments finis à la différence des autres procédés présentés antérieurement qui étaient basés sur un assemblage plus ou moins heuristique de matrices dites élémentaires. Le formalisme de Ern et de Guermonde [2] présente l'avantage de s'adapter directement au cas 2D et 3D à la différence des autres formalismes conformes beaucoup plus pour le cas 1D.

Ce mémoire est structuré en quatre chapitres. Le premier chapitre est consacré à la philosophie du maillage ainsi que les tableaux de connectivité, alors que le deuxième chapitre en est dédié à la présentation du formalisme de Ern. Nous y exhibons à la méthode de quadrature ainsi que la technique d'assemblage. Pour esquisser ces deux premiers chapitres, nous nous sommes appuyés sur lesdits ouvrages.

Le troisième chapitre est consacré à un exemple pratique de ce que peut être l'origine physique du problème laplacien. Le détail de la technique du maillage y est également présenté, suivi par l'algorithme permettant la génération des tableaux de connectivité. Enfin, le dernier chapitre, où sont exposés les résultats numériques obtenus avec l'étude de la convergence. Une conclusion globale achèvera ce mémoire accompagnée par quelques perspectives que nous nous voyons entreprendre dans le cadre de prochains travaux dans le même sens.

Chapitre 1

Maillages

L'objectif de ce travail est la mise en œuvre ou implémentation de la méthode des éléments finis. Nous présenterons d'une part les structures de données relatives au maillage et aux quadratures et décrirons d'autre part les opérations relatives à l'assemblage et au stockage de la matrice de rigidité qui sont faites à l'aide de ces structures d'une manière simple et automatique - l'algorithme d'assemblage se fait dans ces cas à l'aide de trois ou quatre boucles imbriquées évidentes. Nous présenterons aussi l'organisation générale d'un Code d'Eléments Finis, ainsi que le fonctionnement d'un mailleur et quelques techniques permettant d'implémenter les conditions aux limites de Dirichlet non-homogènes. Finalement nous illustrerons ces structures de données et les implanterons dans le cas d'un domaine rectangulaire 2D. Nous reporterons des résultats numériques ainsi que les ordres de convergence obtenus dans le cas d'éléments finis \mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2 pour l'équation de Laplace.

Nous abordons dans ce chapitre les maillages en focalisant l'intérêt sur les maillages non structurés. Nous présentons les techniques de numérotation des maillages, et décrivons l'organisation des différentes données obtenues dans les tableaux de connectivité. Mais avant, il convient de donner quelques généralités sur les maillages utilisés dans la simulation des problèmes de solide et de fluide.

1.1 Généralités sur le maillage

La génération du maillage (2D ou 3D) est une phase très importante dans toute analyse de simulation numérique, vu son influence sur la solution

recherchée. Un maillage de bonne qualité est essentiel pour l'obtention d'un résultat précis, robuste et physiquement significatif. La qualité du maillage a un sérieux impact sur la convergence, sur la précision de la solution et surtout sur le temps de calcul. Une bonne qualité de maillage repose sur la minimisation des éléments présentant des *distorsions* (skewness), et sur une bonne *résolution* dans les régions où il existe un fort gradient (couches limites, ondes de choc,...). Un bon maillage doit également être suffisamment *lisse*.

1.1.1 Choix du type de maillage

Principalement, il y a deux types de maillage : les maillages structurés, et les maillages non structurés, cf. la Figure 1.2. Mais il y a des situations où il est bon d'adopter la configuration du maillage hybride.

✓ Maillage structuré

Il jouit des avantages suivants.

- Economique en nombre d'éléments. Il présente un nombre inférieur de mailles par rapport un maillage non structuré équivalent.
- Dans les simulations type fluide, lorsque l'écoulement moyen est aligné avec le maillage, le maillage structuré réduit les risques d'erreurs numériques.

Les principaux inconvénients de ce type de maillage d'énumèrent en deux éléments.

- Difficile à gérer dans le cas d'une géométrie complexe.
- Difficile d'obtenir une bonne qualité de maillage pour certaines géométries complexes.

Techniquement, ce type de maillage est beaucoup plus facile à générer en utilisant une géométrie à blocs multiples.

✓ Maillage non structuré

Les éléments de ce type de maillage sont générés arbitrairement sans aucune contrainte quant à leur disposition. Ce type présente deux avantages majeurs.

- Il peut être généré sur une géométrie complexe tout en gardant une bonne qualité des éléments.
- Les algorithmes de génération de ce type de maillage sont très automatisés, ce qui réduit l'intervention du designer.

On peut également se contenter de citer deux inconvénients. Ce type de maillage :

- est très gourmand en nombre de mailles comparativement au maillage structuré,

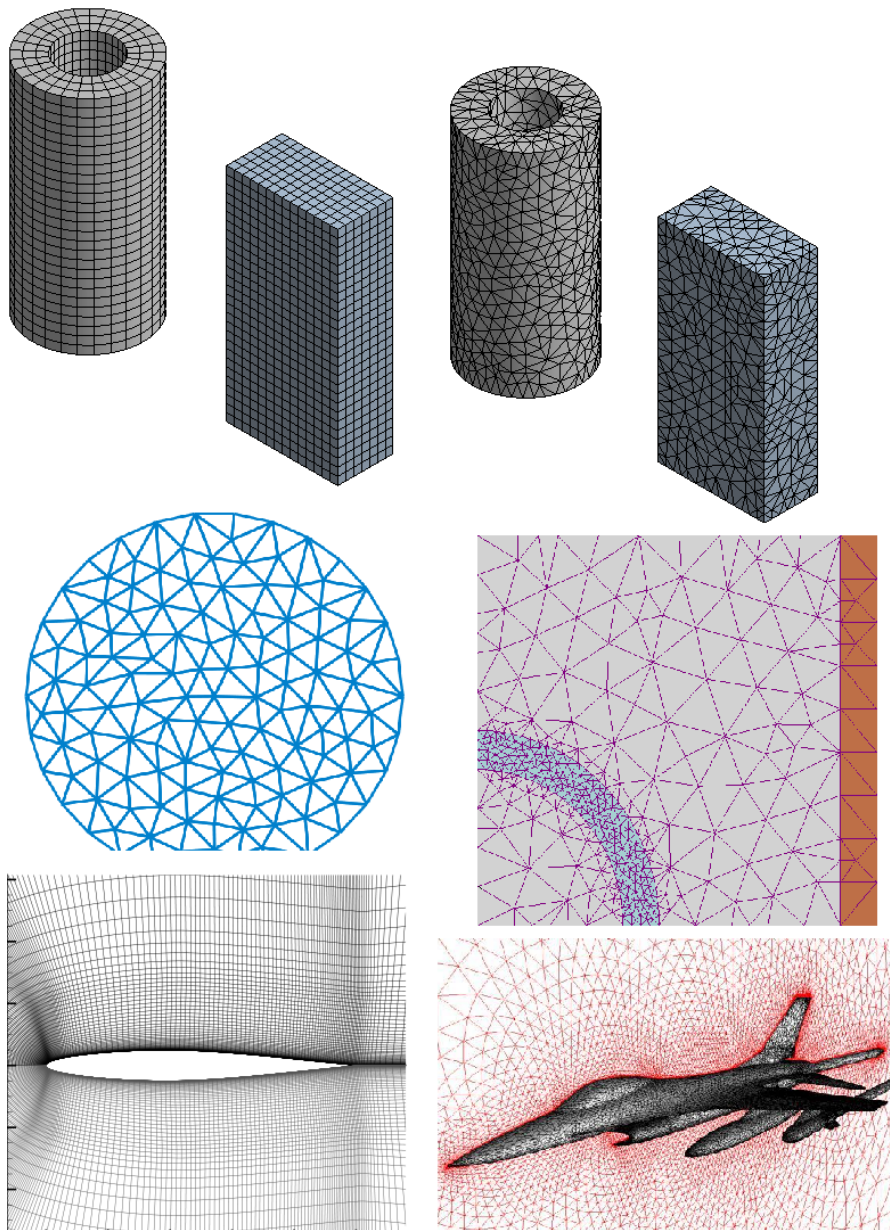


FIGURE 1.1 – Différents types de maillages.

- il engendre des erreurs numériques (fausse diffusion) qui peuvent être plus importantes si on le compare avec le maillage structuré.

✓ Maillage hybride

Ce type de maillage consiste en un mélange d'éléments de différents types, triangulaires ou quadratiques en 2D, tétraédriques, prismatiques,

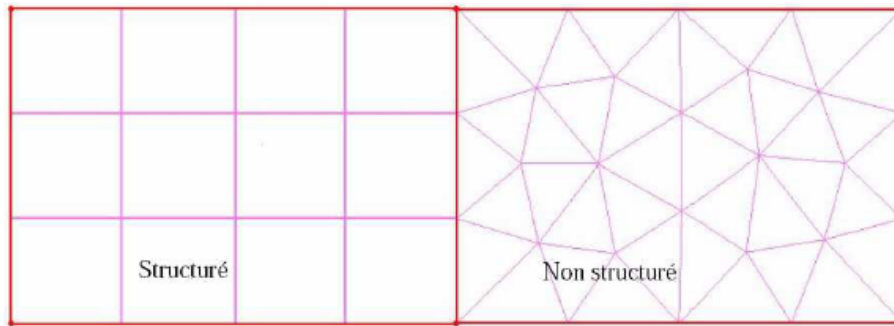


FIGURE 1.2 – Types de maillage [7].

ou pyramidaux en 3D. Son introduction étant récente, le maillage hybride présente un compromis entre lesdits types. Ainsi, il combine les avantages des maillages structurés et non structurés.

1.1.2 Techniques générales de génération de maillage

En pratique, il n'existe pas de règle précise pour la création d'un maillage valable. Cependant, il existe différentes approches permettant d'obtenir une grille acceptable. Nous pouvons résumer ces règles en quelques points.

- Maintenir une bonne qualité des éléments (**D**istortion).
- Assurer une bonne **R**ésolution dans les régions à fort gradient.
- Assurer un bon **L**issage dans les zones de transition entre les parties de maillage fin et celles de maillage grossier.
- Minimiser le **N**ombre total des éléments (temps de calcul raisonnable).

✓ **Distorsion** Le facteur de distorsion F_d (skewness) peut être défini de deux façons différentes. Pour des éléments triangulaires ou tétraédriques, le calcul est basé sur le volume équilatéral, cf. la Figure 1.3.

L'une est donnée par la formule

$$F_d = \frac{Taille_{optimale} - Taille_{generee}}{Taille_{optimale}}.$$

L'autre formulation, applicable pour tout élément, est basée sur la déviation angulaire, où θ étant l'angle de l'élément.

$$F_d = \max \left(\frac{\theta_{max} - 90}{90}, \frac{90 - \theta_{min}}{90} \right)$$

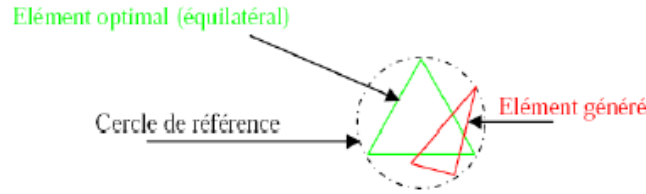


FIGURE 1.3 – Définition de la distortion [7].

Le facteur de distorsion, F_d , est nul pour les éléments parfaits (carrés ou triangles équilatéraux). Notons que les grandes valeurs du facteur de distorsion induisent des erreurs de calcul et ralentissent considérablement le processus de convergence. Quelques distorsions peuvent être tolérées si elles sont situées dans des régions à faible gradient [7]. La Table 1.1 illustre la variation de la qualité des éléments de maillage en fonction de la valeur du coefficient de distorsion F_d .

TABLE 1.1 – Qualité du maillage en fonction du facteur de distorsion.

F_d	0 - 0.25	0.25 - 0.50	0.50 - 0.80	0.80 - 0.95	0.95 - 0.99	0.99 - 1.00
Qualité	Excellente	Bonne	Acceptable	Pauvre	Très pauvre	Mauvaise

- ✓ **Résolution** La notion de résolution concerne plus particulièrement les zones qui présentent un fort gradient. Ainsi, une bonne résolution permet de mieux décrire les phénomènes physiques qui existent dans ces zones, telles que les ondes de choc, ou les phénomènes liés à la couche limite.

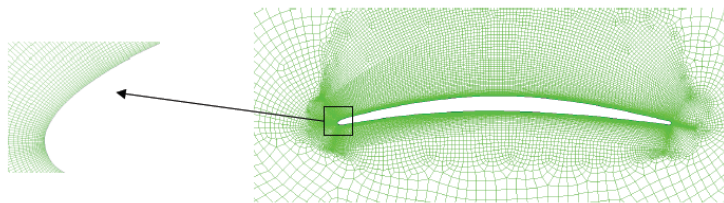


FIGURE 1.4 – Maillage raffiné près de la paroi [7].

- ✓ **Lissage** Le changement dans la taille des éléments du maillage d'une zone maillée à une autre doit être graduel. La variation de la taille des

éléments constitue une suite géométrique dont la raison, en général, est de 1.25.

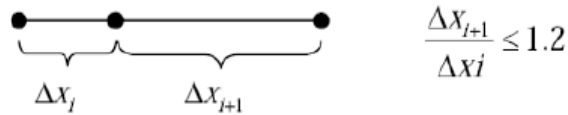


FIGURE 1.5 – Evolution de la taille des éléments [7].

- ✓ **Nombre total d'éléments** Un nombre important d'éléments de maillage permet, sans doute, d'améliorer la précision des calculs, néanmoins, cela pénalise les ressources informatiques en terme de mémoire et alourdit le système. En conséquence, un compromis entre précision et temps de calcul s'impose. Afin d'économiser le nombre d'éléments, il existe certaines techniques que voici.
- Utilisation des maillages non uniformes, en concentrant la bonne qualité du maillage uniquement dans les zones où c'est nécessaire.
 - Utilisation de la fonction adaptation de maillage pour raffiner uniquement sur des zones bien précises.
 - Utilisation des éléments de maillage hexaédriques dans les zones adéquates.

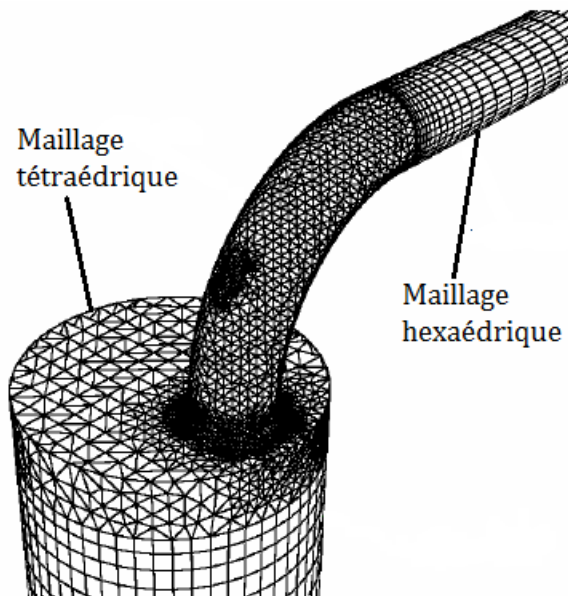


FIGURE 1.6 – Exemple d'adaptation de maillage [7].

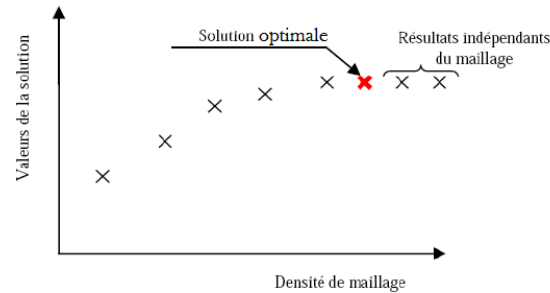


FIGURE 1.7 – Test de convergence du calcul [7].

- ✓ **Convergence en maillage** Dans une simulation numérique (de fluide ou de solide), la solution doit être indépendante de la densité du maillage, pour être sûr du réalisme de la solution que donne le solveur après la convergence. On doit réaliser un test de convergence en maillage, en rapportant l'évolution d'une grandeur (le coefficient de frottement à une paroi, la température moyenne, etc.) en fonction de degré de raffinement du maillage. Cf. la Figure 1.7.

1.2 Tableaux de connectivité

Cette section présente la structure de données pour la représentation informatique du maillage. Du point de vue informatique, un maillage est un nuage de points (également appelés nœuds) structuré par des tableaux de connectivité.

1.2.1 Le nuage de points

Soit Ng le nombre total de nœuds du maillage. Les nœuds sont numérotés de 1 à Ng . Cette numérotation est dite *globale*. Les nœuds sont repérés par leurs coordonnées stockées dans un tableau de réels à double entrée de taille (d, Ng) où d est la dimension d'espace. Par la suite, nous notons

$$\text{coord}(1 : d, 1 : Ng),$$

ce tableau. Pour $1 \leq k \leq d$ et $1 \leq n \leq Ng$, $\text{coord}(k, n)$ est la k -ième coordonnée du nœud de numéro global n .

1.2.2 Connectivité

Les nœuds du maillage sont regroupés par éléments. En notant n_g le nombre de degrés de liberté de l'élément fini considéré, chaque élément du maillage regroupe n_g nœuds.

Pour un élément donné, nous numérotions de 1 à n_g ses nœuds. Cette numérotation est dite locale. La numérotation locale est la même pour tous les éléments et résulte de la numérotation fixée dans l'élément de référence \widehat{K} . Le numéro global de chacun des nœuds d'un élément est stocké dans un tableau d'entiers à double entrée de taille (n_g, Ne) où Ne est le nombre d'éléments dans le maillage. On désigne par

$$\text{noeud_geo}(1 : n_g, 1 : Ne),$$

ce tableau. Pour $1 \leq n \leq n_g$ et $1 \leq m \leq Ne$, l'entier $\text{noeud_geo}(n, m)$ est le numéro global du nœud de numéro local n dans l'élément m .

Définition 1 noeud_geo est appelé "tableau de connectivité" du maillage.

Afin d'implémenter des conditions limites, il est nécessaire de disposer également d'un tableau de connectivité spécifique aux nœuds du maillage situés sur la frontière. Pour simplifier, nous supposons que toutes les faces de l'élément de référence \widehat{K} contiennent le même nombre de nœuds, que nous notons n_{gf} . Ces nœuds sont repérés par numérotation locale. Pour pouvoir relier les faces du bord au maillage volumique, il faut pouvoir passer de la numérotation locale des nœuds à la numérotation globale. Cette information fait intervenir un tableau de taille (n_{gf}, Ne_f) , où Ne_f est le nombre de faces du maillage situées sur le bord. Nous désignons le tableau en question par

$$\text{noeud_geo_f}(1 : n_{gf}, 1 : Ne_f).$$

Pour $1 \leq n \leq n_{gf}$ et $1 \leq m \leq Ne_f$, l'entier $\text{noeud_geo_f}(n, m)$ désigne le numéro global du nœud de numéro local n dans la face m du bord.

Exemple. Pour un maillage affine de simplexes, on a $n_g = d + 1$ et $n_{gf} = d$. La numérotation locale d'un simplexe est illustrée sur la figure 1.8.

Par ailleurs, la figure 1.9 présente un exemple de numérotation globale où nous avons

$$\begin{aligned} \text{noeud_geo}(1, 23) &= 8, \\ \text{noeud_geo}(2, 23) &= 11, \\ \text{noeud_geo}(3, 23) &= 45, \\ \text{noeud_geo}(1, 17) &= 11, \\ \text{noeud_geo}(2, 17) &= 103\dots \end{aligned}$$

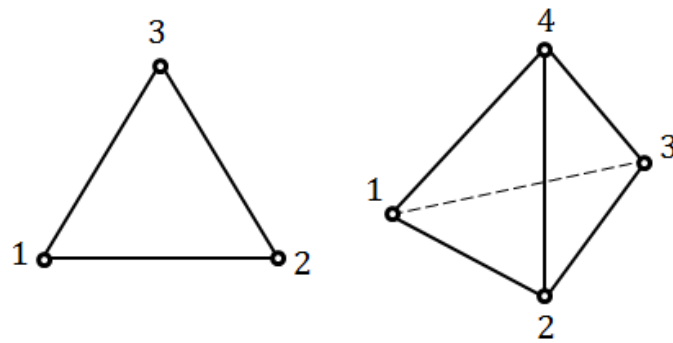


FIGURE 1.8 – Numérotation locale des nœuds d'un simplexe en 2D et 3D.

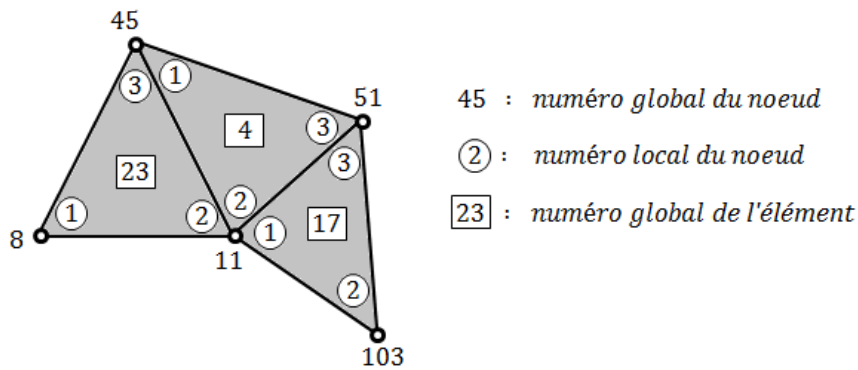


FIGURE 1.9 – Exemple de numérotation des nœuds et des simplexes en 2D.

1.2.3 Autres pointeurs

Pour des applications complexes, la quantité d'information requise pour décrire complètement le maillage peut être plus importante. La nature des tableaux et leur nombre peut varier d'un contexte à un autre. Nous donnons ci-dessous trois exemples.

Partition de la frontière

La résolution numérique des problèmes physiques fait souvent intervenir une partition de la frontière sur laquelle sont imposées des conditions limites de nature différente (e.g., essentielle ou naturelle). Supposons que la partition de la frontière Γ contienne i_f composantes : $\Gamma = \cup_{i=1}^{i_f} \Gamma_i$. Pour savoir sur

quelle composante de Γ est située une face du bord, il suffit de se donner un tableau d'entiers de dimension Ne_f contenant pour chaque face l'indice de la composante à laquelle elle appartient. Notons $\mathbf{i_front}(1 : Ne_f)$ le tableau en question. Ainsi, pour $1 \leq m \leq Ne_f$, la face m est située sur le morceau de la frontière d'indice $\mathbf{i_front}(m)$.

Partition du domaine

Dans certaines applications, le domaine physique est partitionné en i_d sous-domaines sous la forme $\Omega = \cup_{i=1}^{i_d} \Omega_i$ et la valeur de certains paramètres physiques dépend du sous-domaine Ω_i . Dans ces conditions, on se donne un tableau d'entiers de dimension Ne contenant pour chaque élément l'indice du sous-domaine auquel il appartient. Notons $\mathbf{i_dom}(1 : Ne)$ le tableau en question. Pour $1 \leq m \leq i_d$, l'élément m est situé dans le sous-domaine d'indice $\mathbf{i_dom}(m)$.

Tableau de voisinage

Il est parfois utile de définir une notion de voisinage. Dans le cas particulier des simplexes, nous entendons par voisins d'un simplexe les $d + 1$ simplexes (au plus) qui partagent une arête (ou une face en 3D) avec le simplexe en question. Pour distinguer les différents voisins, il faut définir une numérotation locale. Une définition simple consiste à donner aux voisins d'un simplexe m , $1 \leq m \leq Ne$, le numéro local du nœud de m qui est opposé à l'interface commune. Cette définition est illustrée sur la figure 1.10. Nous passons de la numérotation locale des voisins à leur numérotation globale par l'intermédiaire d'un tableau d'entiers à double entrée de taille $(d + 1, Ne)$ que nous notons $\mathbf{vois}(1 : d + 1, 1 : Ne)$. Ainsi, $\mathbf{vois}(n, m)$ est le numéro global du voisin numéro n , $1 \leq n \leq d + 1$, du triangle m , $1 \leq m \leq Ne$. Pour l'exemple de la figure 1.10, nous avons $\mathbf{vois}(1, 512) = 330$, $\mathbf{vois}(2, 512) = 318$ et $\mathbf{vois}(3, 512) = 129$. Par convention, nous posons $\mathbf{vois}(n, m) = 0$ si la face opposée à n appartient à la frontière.

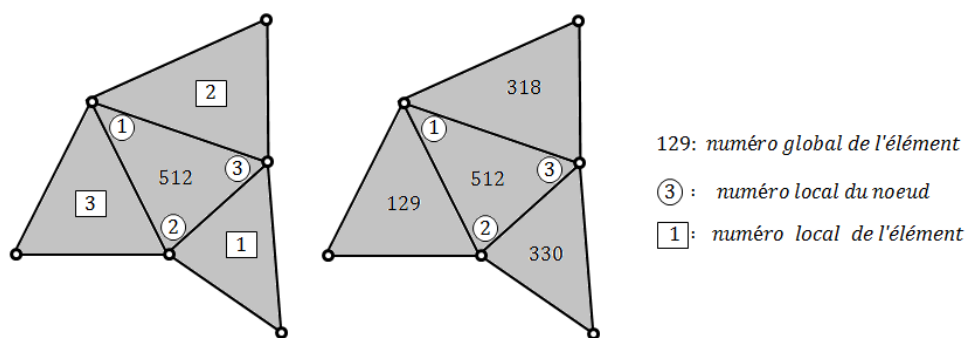


FIGURE 1.10 – Numérotation du voisinage d'un simplexe en 2D. Numérotation locale à gauche, numérotation globale à droite.

Chapitre 2

Formalisme de Ern - quadrature numérique et assemblage

Ce chapitre aborde la mise en œuvre de la méthode des éléments finis à travers deux aspects. Le premier aspect porte sur les quadratures numériques dont l'utilisation est pratiquement incontournable dans les applications, car rares sont les problèmes qui donnent lieu à des intégrales qui s'évaluent analytiquement. Dans ce cadre, nous présentons diverses formules permettant d'approcher une intégrale et nous évaluons l'impact de ce type d'approximation sur la précision globale. Ensuite, nous recensons l'ensemble des tableaux (jacobien, fonctions de base, dérivées, etc.) qui interviennent dans le code d'approximation par éléments finis. L'objectif de cette partie, relativement technique, est de donner les éléments pratiques indispensables à la réalisation d'un programme destiné à cette méthode. Le deuxième aspect, sujet de la partie suivante, concerne les techniques d'assemblage de la matrice et du vecteur second membre qui constituent le système linéaire final. Le présent chapitre sera conclu en montrant comment traiter, du point de vue informatique, les conditions aux limites essentielles, homogènes soient-elles ou non-homogènes.

2.1 Quadratures numériques

Considérons le problème approché suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.1)$$

où V_h est un espace de dimension finie construit à partir d'un maillage \mathcal{T}_h du domaine Ω et un élément fini de référence $(\widehat{K}, \widehat{P}, \widehat{\Sigma})$, a_h une forme bilinéaire définie sur $V_h \times V_h$ et f_h une forme linéaire définie sur V_h . En général, a_h et f_h se mettent sous la forme

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} A_h(x, u_h, v_h) dx, \quad f_h(v_h) = \int_{\Omega} F_h(x, v_h) dx + \int_{\Gamma_N} G_h(x, v_h) dx,$$

où Γ_N est un morceau de frontière (éventuellement vide) sur lequel une condition aux limites naturelle non homogène est imposée. La mise en œuvre numérique d'une approximation par éléments finis passe donc par l'évaluation d'intégrales sur Ω et éventuellement sur Γ_N . Cette section présente quelques méthodes d'intégration basées sur des quadratures numériques.

2.1.1 Principe des quadratures numériques

Définition 2 Soit \widehat{K} une partie compacte, connexe, d'intérieur non vide de \mathbb{R}^d . Soit un entier $lg \geq 1$. Une formule de quadrature numérique à lg points sur \widehat{K} consiste en la donnée de lg réels $(\widehat{\omega}_1, \dots, \widehat{\omega}_{lg})$ appelés poids et de lg points $(\widehat{\xi}_1, \dots, \widehat{\xi}_{lg})$ de \widehat{K} appelés points de Gauss. Le plus grand entier k tel que

$$\forall p \in \mathbb{P}_k, \quad \int_{\widehat{K}} p(\widehat{x}) d\widehat{x} = \sum_{l=1}^{lg} \widehat{\omega}_l p(\widehat{\xi}_l),$$

est noté kg et appelé "ordre" de la quadrature.

Une quadrature numérique d'ordre kg permet d'approcher à l'ordre $kg + 1$ l'intégrale sur \widehat{K} d'une fonction suffisamment régulière. En effet, en posant $h_{\widehat{K}} = \text{mes}(\widehat{K})$, on vérifie aisément à l'aide de développement de Taylor que

$$\forall \phi \in \mathcal{C}^{kg+1}(\widehat{K}), \quad \left| \int_{\widehat{K}} \phi(\widehat{x}) d\widehat{x} - \sum_{l=1}^{lg} \widehat{\omega}_l \phi(\widehat{\xi}_l) \right| \leq h_{\widehat{K}}^{kg+1} \sup_{\widehat{x} \in \widehat{K}} |\partial^{\alpha} \phi(\widehat{x})|.$$

$|\alpha| = kg + 1$

Ci-dessous quelques exemples en dimension 1,2 et 3 pour d'autres formules de quadrature.

Exemple en dimension 1

Définition 3 Les polynômes $P_n(x)$ définis par

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n, \quad n \geq 0,$$

sont appelés "polynômes de Legendre".

Lemme 1 Les polynômes de Legendre satisfont les propriétés suivantes :

1. P_n est de degré n , $P_n(1) = 1$ et ses n racines appartiennent à $] -1, 1[$;
2. relation de récurrence : $P_{n+1}(x) = \frac{1}{n+1} ((2n+1)x P_n(x) - n P_{n-1}(x))$;
3. relation d'orthogonalité : $\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0$ si $m \neq n$.

Les premiers polynômes de Legendre sont donnés par $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$. Nous avons le résultat suivant

Proposition 1 Soit $lg \geq 1$, notons $\hat{\xi}_1, \dots, \hat{\xi}_{lg}$ les lg racines du polynôme de Legendre $P_{lg}(x)$ et posons

$$\hat{\omega}_l = \int_{-1}^1 \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^{lg} \frac{t - \hat{\xi}_j}{\hat{\xi}_l - \hat{\xi}_j} dt.$$

Alors, la formule de quadrature approchée sur $[-1, 1]$ donnée par

$$\int_{-1}^1 \phi(x) dx \approx \sum_{l=1}^{lg} \hat{\omega}_l \phi(\hat{\xi}_l),$$

est d'ordre $kg = 2lg - 1$.

Le tableau 2.1 donne quelques valeurs numériques pour les poids $\hat{\omega}_l$ et les points $\hat{\xi}_l$. Par simple changement de variable, on se ramène à l'intégration sur un intervalle quelconque $[a, b]$.

kg	lg	points $\widehat{\xi}_l$	poids $\widehat{\omega}_l$
1	1	0	2
3	2	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$	1
5	3	$\pm \frac{\sqrt{3}}{3}$ 0	$\frac{5}{8}$ $\frac{8}{9}$
7	4	$\pm \sqrt{\frac{1}{35}(15 + 2\sqrt{30})}$ $\pm \sqrt{\frac{1}{35}(15 - 2\sqrt{30})}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{\frac{5}{6}}$

TABLE 2.1 – Formules d’intégration sur le segment $[-1, 1]$.

Exemple en dimension 2

Le tableau 2.2 donne quelques formules d’intégration sur le triangle en dimension 2. Dans ce tableau, nous appelons multiplicité le nombre de permutations qu’il faut réaliser sur les coordonnées barycentriques pour obtenir la liste de tous les points de Gauss de la quadrature. Par exemple, la formule d’ordre 4 possède 6 points de Gauss, dont les coordonnées barycentriques sont

$$(a_1, a_1, 1 - 2a_1; \widehat{\omega}_1), (1 - 2a_1, a_1, a_1; \widehat{\omega}_1), (a_1, 1 - 2a_1, a_1; \widehat{\omega}_1),$$

$$(a_2, a_2, 1 - 2a_2; \widehat{\omega}_2), (1 - 2a_2, a_2, a_2; \widehat{\omega}_2), (a_2, 1 - 2a_2, a_2; \widehat{\omega}_2),$$

et les poids de la première et de la seconde famille de points sont respectivement $\widehat{\omega}_1 = S \times 0.223$ et $\widehat{\omega}_2 = S \times 0.110$. S étant la surface de l’élément triangulaire.

kg	lg	coord. barycentriques	multiplicité	poids $\widehat{\omega}_l$
1	1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1	S
2	3	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{2}{3})$	3	$\frac{S}{3}$
3	4	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	1	$-\frac{9}{16}S$
		$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	3	$\frac{25}{48}S$
4	6	$(a_i, a_i, 1 - 2a_i)$ pour $i = 1, 2$ $a_1 = 0.446$ $a_2 = 0.092$	3	$S \times 0.223$ $S \times 0.110$

TABLE 2.2 – Formules d’intégration sur un triangle de surface S .

Exemple en dimension 3

Le tableau 2.3 donne les formules d'intégration sur un tétraèdre en dimension 3. Comme en dimension 2, la multiplicité désigne le nombre des permutations à réaliser sur les coordonnées barycentriques pour obtenir tous les points de Gauss de la quadrature.

kg	lg	coord. barycentriques	multiplicité	poids $\widehat{\omega}_l$
1	1	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	1	V
2	4	$(a, a, a, 1 - 3a)$ $a = \frac{5 - \sqrt{5}}{20}$	4	$\frac{V}{4}$
3	5	$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	1	$-\frac{4}{5}V$
		$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2})$	4	$\frac{9}{20}V$

TABLE 2.3 – Formules d'intégration sur un tétraèdre de volume V .

2.1.2 Le problème approché avec quadratures numériques

Commençons par considérer l'évaluation d'une intégrale du type $\int_{\Omega} \phi(x) dx$, ou ϕ est une fonction régulière. En utilisant la décomposition

$$\int_{\Omega} \phi(x) dx = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \phi(x) dx,$$

le problème se ramène à l'évaluation d'intégrales sur les éléments du maillage. Soit K un élément quelconque du maillage. L'application T_K qui transforme l'élément de référence \widehat{K} en K étant un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme, le changement de variables $x = T_K(\widehat{x})$ donne

$$\int_K \phi(x) dx = \int_{\widehat{K}} \phi(T_K(\widehat{x})) \det(J_K(\widehat{x})) d\widehat{x},$$

où $J_K(\widehat{x}) = \partial T_K(\widehat{x}) / \partial \widehat{x}$ est la matrice jacobienne de la transformation T_K au point \widehat{x} . Nous sommes ainsi ramenés à l'évaluation d'une intégrale sur l'élément de référence \widehat{K} où nous utilisons une quadrature numérique avec lg points de Gauss. Nous obtenons donc

$$\int_K \phi(x) dx \approx \sum_{l=1}^{lg} \widehat{\omega}_l \det(J_K(\widehat{\xi}_l)) \phi(T_K(\widehat{\xi}_l)) dx.$$

En introduisant les notations $\omega_l = \widehat{\omega}_l \det(J_K(\widehat{\xi}_l))$ et $\xi_l = T_K(\widehat{\xi}_l)$, nous avons finalement

$$\int_K \phi(x) dx \approx \sum_{l=1}^{lg} \omega_l \phi(\xi_l).$$

Considérons maintenant le problème modèle (2.1). Nous approchons la forme bilinéaire a_h par

$$a_h(u_h, v_h) \approx a_{hQ}(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{lg} \omega_l A_h(\xi_l, u_h(\xi_l), v_h(\xi_l)), \quad (2.2)$$

et l'intégrale de volume du second membre par

$$\int_{\Omega} F_h(x, v_h) dx \approx \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{lg} \omega_l F_h(\xi_l, v_h(\xi_l)).$$

L'intégrale de surface dans le second membre est approchée selon le même principe. Supposons, pour simplifier, que le maillage soit réalisé de telle sorte que Γ_N soit l'union d'une famille de faces d'éléments du maillage que nous appelons \mathcal{S}_h . Supposons également que toutes les faces de \widehat{K} soient équivalentes, à une transformation affine inversible près, à un élément géométrique de référence $\widehat{K}^f \subset \mathbb{R}^{d-1}$. Par exemple, lorsque \widehat{K} est le triangle unitaire de \mathbb{R}^2 , on peut prendre pour \widehat{K}^f le segment unité, il en résulte que pour toute face K^f du maillage, il existe un \mathcal{C}^1 -difféomorphisme T_{K^f} transformant \widehat{K}^f en K^f . Nous nous donnons lg_f points $(\widehat{\xi}_1^f, \dots, \widehat{\xi}_{lg_f}^f)$ de \widehat{K}^f et une famille de réels $(\widehat{\omega}_1^f, \dots, \widehat{\omega}_{lg_f}^f)$. En posant $\omega_l^f = \widehat{\omega}_l^f \det(J_{K^f}(\widehat{\xi}_l^f))$ où $J_{K^f}(\widehat{x}) = \partial T_{K^f}(\widehat{x}) / \partial \widehat{x}$ est la matrice jacobienne de la transformation T_{K^f} au point \widehat{x} et $\xi_l^f = T_{K^f}(\widehat{\xi}_l^f)$, nous approchons l'intégrale de surface selon

$$\int_{\Gamma_N} g(x) v_h(x) dx \approx \sum_{K^f \in \mathcal{S}_h} \sum_{l=1}^{lg_f} \omega_l^f G_h(\xi_l^f, v_h(\xi_l^f)).$$

Finalement, nous introduisons le membre de droite approché

$$f_{hQ}(v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{l=1}^{lg} \omega_l F_h(\xi_l, v_h(\xi_l)) + \sum_{K^f \in \mathcal{S}_h} \sum_{l=1}^{lg_f} \omega_l^f G_h(\xi_l^f, v_h(\xi_l^f)). \quad (2.3)$$

En pratique, nous cherchons à résoudre le problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_{hQ}(u_h, v_h) = f_{hQ}(v_h), \quad \forall v_h \in V_h, \end{cases} \quad (2.4)$$

avec a_{hQ} et f_{hQ} données par (2.2) et (2.3) respectivement.

Dans le cadre du présent travail, nous nous restreindrons à un problème modèle scalaire d'ordre 2 avec

$$\begin{cases} A_h(x, u_h, v_h) &= \nabla v_h \cdot \sigma(x) \cdot \nabla u_h + v_h(\beta(x) \cdot \nabla u_h) + \mu(x)u_h v_h, \\ F_h(x, v_h) &= f(x) v_h, \\ G_h(x, v_h) &= g(x) v_h. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous faisons toutes les hypothèses nécessaires pour que le problème approché (2.1) et sa version continue soient bien posés.

Théorème 1 *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons qu'il existe un entier $l \geq 1$ tel que $\widehat{P} \subset \mathbb{P}_l(\widehat{K})$ et que la quadrature volumique soit d'ordre $2l - 2$. Alors, le problème (2.4) est bien posé.*

Théorème 2 *Avec les hypothèses ci-dessus, supposons qu'il existe deux entiers $1 \leq k \leq l$ tels que $\mathbb{P}_k(\widehat{K}) \subset \widehat{P} \subset \mathbb{P}_l(\widehat{K})$, que la quadrature volumique soit d'ordre $2l - 2$ et que la quadrature surfacique soit d'ordre $k + l - 1$. Supposons de plus que $f \in W^{k,\infty}(\Omega)$, $g \in W^{k+1,\infty}(\Gamma_N)$ et que u , la solution du problème continu, soit dans $H^{k+1}(\Omega)$. Alors, il existe $h_0 > 0$ et $c > 0$ tels que la solution du problème approché (2.4) satisfait l'estimation d'erreur*

$$\forall h \leq h_0, \quad \|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq ch^k \left(\|u\|_{k+1,\Omega} + \|f\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} + h^{1/2} \|g\|_{W^{k+1,\infty}(\Gamma)} \right).$$

Exemple. Pour une approximation avec l'élément fini de Lagrange \mathbb{P}_1 , la quadrature volumique doit être d'ordre 0 et la quadrature surfacique d'ordre 1.

2.2 Module de quadrature

Dans le cas où des formules de quadrature sont utilisées pour évaluer les intégrales, il est souvent intéressant d'évaluer et de stocker préalablement un certain nombre de tableaux pour optimiser les performances de la méthode. L'objectif de cette section est d'illustrer ce point de vue.

2.2.1 La transformation géométrique

Désignons par $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}_g, \widehat{P}_g)$ l'élément fini géométrique définissant les transformations T_K . Soit n_g le nombre de degrés de liberté de $\widehat{\Sigma}_g$ et $(\widehat{a}_1, \dots, \widehat{a}_{n_g})$

les nœuds de \widehat{K} . Nous notons $(\widehat{\psi}_1, \dots, \widehat{\psi}_{n_g})$ les fonctions de forme locales pour l'élément fini géométrique.

Le mailleur fournit une liste de n_g -uplets $(a_1^m, \dots, a_{n_g}^m)_{1 \leq m \leq Ne}$ où $(a_1^m, \dots, a_{n_g}^m)$ sont les nœuds du m -ième élément noté K^m . Plus précisément, le mailleur fournit un tableau `coord` donnant les coordonnées des nœuds ainsi qu'un tableau de connectivité `noeud_geo` (voir chap. 1). Avec ces notations, la transformation géométrique T_{K^m} s'exprime sous la forme suivante

$$(T_{K^m}(\widehat{x}))_k = \sum_{n=1}^{n_g} \text{coord}(k, \text{noeud_geo}(n, m)) \widehat{\psi}_n(\widehat{x}), \quad \forall \widehat{x} \in \widehat{K}, 1 \leq k \leq d.$$

Remarque. Nous nous plaçons d'emblée dans un cadre relativement général qui inclut à la fois l'interpolation isoparamétrique et subparamétrique. En particulier, nous ne supposons pas a priori que le degré polynomial de la transformation géométrique $T_K : \widehat{K} \rightarrow K$ est le même que celui de l'élément fini de référence. Si \widehat{K} est un simplexe et T_K est affine, $\widehat{\Sigma}_g$ est composé des valeurs aux $n_g = d + 1$ nœuds de \widehat{K} et $\widehat{P}_g = \mathbb{P}_1(\widehat{K})$. Les éléments finis subparamétriques entrent dans le cadre de cet exemple.

2.2.2 Numérotation des fonctions de forme, connectivité

Désignons par $(\widehat{K}, \widehat{\Sigma}, \widehat{P})$ l'élément fini de référence, notons n_f le nombre de degré de liberté de $\widehat{\Sigma}$ et $(\widehat{\theta}_1, \dots, \widehat{\theta}_{n_f})$ les fonctions de forme locales pour l'élément fini de référence.

Etant choisie une numérotation des fonctions de forme globales $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$, on construit le tableau de connectivité qui permet de passer des fonctions de forme locales aux fonctions de forme globales. L'objet de ce tableau est, pour la fonction de forme locale θ_n , $1 \leq n \leq n_f$, de l'élément K^m , $1 \leq m \leq Ne$, de donner le numéro de la fonction de forme globale dont la restriction à K^m coïncide avec θ_n . Il s'agit donc d'un tableau d'entiers à double entrée de taille (n_f, Ne) que nous noterons par

$$\text{noeud_ref}(1 : n_f, 1 : Ne).$$

Pour $1 \leq n \leq n_f$ et $1 \leq m \leq Ne$, `noeud_ref`(n, m) est tel que

$$\forall x \in K^m, \quad \varphi_{\text{noeud_ref}(n, m)}(x) = \theta_n(x) = \widehat{\theta}_n \circ T_{K^m}^{-1}(x). \quad (2.6)$$

2.2.3 Fonctions de forme locales

Puisqu'on a fréquemment besoin d'évaluer les fonctions de forme locales aux points de Gauss, on a intérêt à stocker ces valeurs dans deux tableaux :

$$\begin{cases} \text{base_geo}(n, l) = \widehat{\psi}_n(\widehat{\xi}_l), & 1 \leq n \leq n_g, \quad 1 \leq l \leq lg, \\ \text{base_ref}(n, l) = \widehat{\theta}_n(\widehat{\xi}_l), & 1 \leq n \leq n_f, \quad 1 \leq l \leq lg. \end{cases}$$

Pour évaluer des quantités dérivées, on a besoin des dérivées partielles des fonctions de base sur \widehat{K} . On définit donc les deux tableaux :

$$\begin{cases} \text{d_base_geo}(k, n, l) = \frac{\partial \widehat{\psi}_n}{\partial x_k}(\widehat{\xi}_l), & 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq n \leq n_g, \quad 1 \leq l \leq lg, \\ \text{d_base_ref}(k, n, l) = \frac{\partial \widehat{\theta}_n}{\partial x_k}(\widehat{\xi}_l) & 1 \leq k \leq d, \quad 1 \leq n \leq n_f, \quad 1 \leq l \leq lg. \end{cases}$$

Remarque. Dans le cas de maillages affines, les dérivées partielles des fonctions $\widehat{\psi}_n$ sont constantes sur chaque simplexe si bien que le tableau `d_base_geo` n'a plus que deux indices, k et n .

2.2.4 Jacobien et poids de la quadrature

Par la suite, nous noterons $J_K(\widehat{x}) \in \mathbb{R}^{d,d}$ la matrice jacobienne de la transformation T_K au point \widehat{x} de \widehat{K} . Avec les notations ci-dessus, on a

$$(J_{K^m}(\widehat{\xi}_l))_{k_1, k_2} = \sum_{n=1}^{n_g} \text{coord}(k_1, \text{noeud_geo}(n, m)) \text{d_base_geo}(k_2, n, l),$$

pour $1 \leq k_1, k_2 \leq d$. Pour réaliser les quadratures numériques, il est commode de disposer du tableau des poids :

$$\text{poids_K}(l, m) = \widehat{\omega}_l \det(J_{K^m}(\widehat{\xi}_l)), \quad 1 \leq l \leq lg, \quad 1 \leq m \leq Ne.$$

2.2.5 Dérivée d'une fonction de forme globale

Évaluons maintenant les valeurs aux points de Gauss des dérivées partielles des fonctions de forme globales. Soit K^m un élément du maillage et φ_i une fonction de forme globale dont l'intersection du support avec K^m est non vide. Cette fonction est la restriction sur K^m d'une fonction de forme locale

θ_n avec $i = \text{noeud_ref}(n, m)$ en utilisant (2.6) et la règle de la dérivation composée, nous obtenons

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial x_{k_1}}(\xi_l) = \frac{\partial \theta_n}{\partial x_{k_1}}(\xi_l) = \frac{\partial \hat{\theta}_n \circ T_{K^m}^{-1}}{\partial x_{k_1}}(\xi_l) = \sum_{k_2=1}^d \frac{\partial \hat{\theta}_n}{\partial \hat{x}_{k_2}}(\hat{\xi}_l) \left([J_{K^m}(\hat{\xi}_l)]^{-1} \right)_{k_2, k_1}.$$

Nous distinguons deux cas :

- Dans le cas isoparamétrique où $n_g = n_f$, on a intérêt à évaluer, une fois pour toutes, les quantités $(\partial \theta_n / \partial x_k)(\xi_l)$ et à les stocker

$$\mathbf{d_base_K}(k, n, l, m) = \frac{\partial \theta_n}{\partial x_k}(\xi_l), \quad \begin{cases} 1 \leq k \leq d, & 1 \leq n \leq n_f, \\ 1 \leq l \leq lg, & 1 \leq l \leq Ne. \end{cases}$$

- par contre, si la transformation T_{K^m} est affine (souvent le cas des transformations subparamétriques), la matrice jacobienne J_{K^m} et sa matrice inverse sont constantes sur l'élément, i.e., elles ne dépendent pas des points de Gauss. Dans ce cas, on a plutôt intérêt à ne stocker que l'inverse de la matrice jacobienne :

$$\mathbf{inv_jac_K}(k_1, k_2, m) = \left([J_{K^m}]^{-1} \right)_{k_1, k_2}.$$

En effet, si $d \ll n_f \times lg$, l'espace mémoire requis pour stocker le tableau $\mathbf{inv_jac_K}(1 : d, 1 : d, 1 : Ne)$ est moins important que celui qui est nécessaire au stockage de $\mathbf{d_base_K}(1 : d, 1 : n_f, 1 : lg, 1 : Ne)$. Cependant, chaque fois on a besoin de $(\partial \theta_n / \partial x_k)(\xi_l)$, il faut réaliser les opérations suivantes :

$$\frac{\partial \theta_n}{\partial x_{k_1}}(\xi_l) = \sum_{k_2=1}^d \mathbf{d_base_ref}(k_2, n, l) \mathbf{inv_jac_K}(k_2, k_1, m).$$

Cette technique peut être utile si l'espace mémoire disponible est limité, car elle permet de faire des économies au prix de quelques calculs intermédiaires supplémentaires. C'est le cas de le dire, en effet, les limitations de mémoire peuvent être très importantes pour des simulations de grande taille en 3D.

2.2.6 Termes de bord

Pour évaluer les quadratures surfaciques, il suffit de reproduire ce qui a été fait ci-dessus pour les quadratures volumiques.

2.3 Assemblage

On appelle assemblage la phase du calcul qui consiste à construire la matrice de rigidité et le second membre. Pour illustrer ce propos, nous considérons la forme bilinéaire A_h et la forme linéaire F_h données par (2.5).

2.3.1 Assemblage de la matrice

La matrice de rigidité \mathcal{A} de terme générique

$$\mathcal{A}_{ij} = a_h(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} A_h(x, \varphi_j, \varphi_i),$$

est assemblée élément par élément, le tableau de connectivité `noeud_ref` permettant de passer de la numérotation locale à la numérotation globale i et j de la matrice de la rigidité. Cette technique se met sous la forme algorithmique suivante :

```

 $\mathcal{A} = 0$ 
pour  $m$  de 1 à  $Ne$ 
  pour  $l$  de 1 à  $lg$ 
    pour  $ni$  de 1 à  $n_f$ 
       $i = \text{noeud\_ref}(ni, m)$ 
      pour  $nj$  de 1 à  $n_f$ 
         $j = \text{noeud\_ref}(nj, m)$ 
         $\mathcal{A}_{ij} = \mathcal{A}_{ij} + \omega_l A_h(\xi_l, \varphi_j(\xi_l), \varphi_i(\xi_l))$ 
      fin pour
    fin pour
  fin pour
fin pour

```

Nous détaillons maintenant les évaluations de la quantité $A_h(\xi_l, \varphi_j(\xi_l), \varphi_i(\xi_l))$ en distinguant deux cas pour les fonctions σ , β et μ .

Cas1 : les fonctions σ , β et μ sont connues analytiquement

Nous supposons ici que les fonctions σ , β et μ sont connues analytiquement. Puisque dans la formule de quadrature nous avons besoin de la valeur de ces fonctions au point de Gauss $\xi_l = T_K(\hat{\xi}_l)$, il est nécessaire d'évaluer ξ_l

dans la boucle sur l'indice l . L'algorithme d'assemblage prend alors la forme suivant :

```

 $\mathcal{A} = 0$ 
pour  $m$  de 1 à  $Ne$ 
  pour  $l$  de 1 à  $lg$ 
    ---Evaluation des coordonnées cartésiennes du point de Gauss  $\xi_l$ 
      pour  $k_1$  de 1 à  $d$ 
         $(\xi_l)_{k_1} = \sum_{n=1}^{n_g} \text{coord}(k_1, \text{noeud\_geo}(n, m)) \text{base\_geo}(n, l)$ 

      fin pour
      pour  $ni$  de 1 à  $n_f$ 
         $i = \text{noeud\_ref}(ni, m)$ 
        pour  $nj$  de 1 à  $n_f$ 
           $j = \text{noeud\_ref}(nj, m)$ 
          ---Evaluation de  $\nabla\varphi_j \cdot \sigma \cdot \nabla\varphi_i$ 
             $x_1 = \sum_{k_1, k_2=1}^d \mathbf{d\_base\_K}(k_1, nj, l, m) \sigma_{k_1, k_2}(\xi_l) \mathbf{d\_base\_K}(k_2, ni, l, m)$ 

          ---Evaluation de  $\varphi_i(\beta \cdot \nabla\varphi_j)$ 
             $x_2 = \text{base\_ref}(ni, l) \sum_{k_1=1}^d \beta_{k_1}(\xi_l) \mathbf{d\_base\_K}(k_1, nj, l, m)$ 

          ---Evaluation de  $\varphi_i \mu \varphi_j$ 
             $x_3 = \text{base\_ref}(ni, l) \mu(\xi_l) \text{base\_ref}(nj, l)$ 

          ---Incrémentatation
             $\mathcal{A}(i, j) = \mathcal{A}(i, j) + (x_1 + x_2 + x_3) \text{poids\_K}(l, m)$ 
          fin pour
        fin pour
      fin pour
    fin pour
  fin pour

```

Cas 2 : σ , β et μ étant des fonctions discrètes

Nous supposons maintenant que ces fonctions sont dans V_h ou bien dans un produit cartésien de V_h . Afin de réaliser l'intégration, il nous faut

connaître la valeur de ces fonctions aux points de Gauss sur un élément quelconque K^m . Par exemple, la fonction scalaire μ est donnée par

$$\mu(\xi_l) = \sum_{n=1}^{n_f} \mu_{\text{noeud_ref}(n,m)} \text{base_ref}(n, l),$$

et pour obtenir les valeurs de σ , β et μ , il suffit d'appliquer la formule ci-dessus à chacune de leurs composantes cartésiennes. L'Algorithme d'assemblage prend la forme suivante :

$\mathcal{A} = 0$

pour m de 1 à Ne

 pour l de 1 à lg

 ---Evaluation de σ , β et μ au point de Gauss ξ_l

 pour k_1 de 1 à d

$$\text{beta}(k_1) = \sum_{n=1}^{n_f} (\beta_{\text{noeud_ref}(n,m)})_{k_1} \text{base_ref}(n, l)$$

 pour k_2 de 1 à d

$$\text{sigma}(k_1, k_2) = \sum_{n=1}^{n_f} (\sigma_{\text{noeud_ref}(n,m)})_{k_1, k_2} \text{base_ref}(n, l)$$

 fin pour

fin pour

$$\text{mu} = \sum_{n=1}^{n_f} \mu_{\text{noeud_ref}(n,m)} \text{base_ref}(n, l)$$

 pour ni de 1 à n_f

$i = \text{noeud_ref}(ni, m)$

 pour nj de 1 à n_f

$j = \text{noeud_ref}(nj, m)$

 ---Evaluation de $\nabla\varphi_j \cdot \sigma \cdot \nabla\varphi_i$

$$x_1 = \sum_{k_1, k_2=1}^d \mathbf{d_base_K}(k_1, nj, l, m) \text{sigma}(k_1, k_2) \mathbf{d_base_K}(k_2, ni, l, m)$$

 ---Evaluation de $\varphi_i(\beta \cdot \nabla\varphi_j)$

$$x_2 = \text{base_ref}(ni, l) \sum_{k_1=1}^d \text{beta}(k_1) \mathbf{d_base_K}(k_1, nj, l, m)$$

 ---Evaluation de $\varphi_i \mu \varphi_j$

$$x_3 = \text{mu base_ref}(ni, l) \text{ base_ref}(nj, l)$$

---Incrémation

$$\mathcal{A}(i, j) = \mathcal{A}(i, j) + (x_1 + x_2 + x_3) \text{poids_K}(l, m)$$

fin pour

fin pour

fin pour

fin pour

Remarque. Dans le cas où les trois champs σ , β et μ ne soient pas de même nature, les uns étant décrets les autres continus ; il faut utiliser l'une ou l'autre des deux techniques d'assemblage présentées ci-dessus en fonction des circonstances.

Assemblage du vecteur second membre

Le second membre de coefficients

$$b_i = f_h(\varphi_i) = \int_{\Omega} F_h(x, \varphi_i),$$

s'assemble également élément par élément. La boucle d'assemblage se met sous la forme :

$b = 0$

pour m de 1 à Ne

pour l de 1 à lg

pour ni de 1 à n_f

$$i = \text{noeud_ref}(ni, m)$$

$$b_i = b_i + \omega_l F_h(\xi_l, \varphi_i(\xi_l))$$

fin pour

fin pour

fin pour

A titre d'exemple, supposons que F_h se mette sous la forme $F_h(x, v) = \beta(x) \cdot \nabla v + f(x) v$, où β et f sont des fonctions connues analytiquement. L'algorithme s'écrit alors :

$b = 0$

pour m de 1 à Ne

pour l de 1 à lg

---Evaluation des coordonnées cartésiennes du point de Gauss ξ_l

```

pour  $k_1$  de 1 à  $d$ 

     $(\xi_l)_{k_1} = \sum_{n=1}^{n_g} \text{coord}(k_1, \text{noeud\_geo}(n, m)) \text{base\_geo}(n, l)$ 

fin pour
pour  $ni$  de 1 à  $n_f$ 
     $i = \text{noeud\_ref}(ni, m)$ 
-- -- -- -- Evaluation de  $f\varphi_i$ 

     $x_1 = f(\xi_l) \text{base\_ref}(ni, l)$ 

-- -- -- -- Evaluation de  $\beta \cdot \nabla \varphi_i$ 

     $x_2 = \sum_{k_1=1}^d \beta_{k_1}(\xi_l) \text{d\_base\_K}(k_1, ni, l, m)$ 

-- -- -- -- Incrémentation
     $b(i) = b(i) + (x_1 + x_2) \text{poids\_K}(l, m)$ 
fin pour
fin pour
fin pour

```

2.4 Les conditions aux limites essentielles

L'objectif de cette section est de montrer comment les conditions de Dirichlet non homogènes peuvent être prises en compte dans l'assemblage de la matrice et du vecteur second membre.

2.4.1 Le problème modèle

Nous considérons un problème écrit sous la forme abstraite suivante

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in V \text{ tel que} \\ a(u, v) = f(v), \quad \forall v \in L, \\ \gamma_0(u) = g. \end{cases} \quad (2.7)$$

Ici, V et L sont deux espaces de fonctions sur Ω munis d'une structure hilbertienne, $a \in \mathcal{L}(V \times L, \mathbb{R})$, $f \in L'$, $\gamma_0 : V \rightarrow B$ est un opérateur de trace linéaire continu et surjectif et $g \in B$. Nous notons $V_0 = N(\gamma_0)$ le noyau de γ_0 .

Par exemple, pour une EDP scalaire du second ordre posée sur un domaine Ω avec une condition limite non homogène imposée sur la frontière Γ , on a $V = H^1(\Omega)$, $L = H_0^1(\Omega)$, $\gamma_0 v = v|_\Gamma$, $V_0 = H_0^1(\Omega)$ et $B = H^{1/2}(\Gamma)$.

Approchons maintenant la solution de (2.7) avec des éléments finis. Soit $(\mathcal{T}_h)_h$ une famille régulière de maillages de Ω et V_h un espace d'approximation construit sur \mathcal{T}_h . Supposons pour simplifier que $V_h \subset V$. Soient $(\varphi_1, \dots, \varphi_N)$ les fonctions de forme globales. Définissons l'espace $V_{0h} = V_h \cap V_0$ et notons N_D la codimension de V_{0h} dans V_h . A une renumérotation près, nous supposons par la suite que

$$V_{0h} = \text{vect}(\varphi_{N_D+1}, \dots, \varphi_N).$$

Nous supposons maintenant que la donnée essentielle g peut être approchée par

$$g_h = \sum_{i=1}^{N_D} g_{hi} \gamma_0(\varphi_i).$$

Par exemple, si la fonction g est suffisamment régulière, on peut choisir pour g_h l'interpolé de g sur les éléments finis de surface. Pour des éléments finis de Lagrange, nous pouvons poser $g_{hi} = g(x_i)$ ou x_i est le nœud de la frontière associée à φ_i .

Le problème approché que nous proposons de résoudre est :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_h \in V_h \text{ tel que} \\ a_h(u_h, v_h) = f_h(v_h), \quad \forall v_h \in V_{0h}, \\ \gamma_0(u_h) = g_h. \end{cases} \quad (2.8)$$

Ici a_h est une approximation de la forme bilinéaire a .

2.4.2 Le système linéaire

En posant $u_h = \sum_{i=1}^N U_i \varphi_i$, la condition de Dirichlet approchée et équivalente à

$$U_i = g_{hi}, \quad 1 \leq i \leq N_D.$$

Le système linéaire se met alors sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^N a_h(\varphi_j, \varphi_i) U_j = f_h(\varphi_i), & N_D + 1 \leq i \leq N, \\ U_i = g_{hi}, & 1 \leq i \leq N_D. \end{cases} \quad (2.9)$$

Afin de distinguer les degrés de liberté intérieurs des degrés de liberté associés à la condition de Dirichlet, nous introduisons la notation suivante :

pour tout $X \in \mathbb{R}^N$, nous notons $\widehat{X} = (X_1, \dots, X_{N_D})$ et $\widetilde{X} = (X_{N_D+1}, \dots, X_N)$. Dans cet esprit, nous posons

$$\widehat{F} = (g_{h1}, \dots, g_{hN_D}) \quad \text{et} \quad \widetilde{F} = (f_h(\varphi_{N_D+1}), \dots, f_h(\varphi_N)).$$

De plus nous définissons

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{ij} &= a_h(\varphi_j, \varphi_i) \quad \text{pour} \quad N_D + 1 \leq i \leq N, \quad 1 \leq j \leq N_D, \\ \widetilde{\mathcal{A}}_{ij} &= a_h(\varphi_j, \varphi_i) \quad \text{pour} \quad N_D + 1 \leq i, j \leq N. \end{aligned}$$

La matrice $\widetilde{\mathcal{A}}$ est naturellement associée au problème de Dirichlet homogène. C'est la matrice du système linéaire qu'on obtiendrait si la condition de Dirichlet était homogène et si la solution approchée u_h était directement cherchée dans V_{0h} . Ces nouvelles notations permettent d'écrire le système linéaire à résoudre sous la forme :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ \mathcal{B} & \widetilde{\mathcal{A}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \widehat{U} \\ \widetilde{U} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{F} \\ \widetilde{F} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

2.4.3 Elimination des nœuds essentiels

Le sous-système associé aux inconnues de Dirichlet est trivial : $\widehat{U} = \widehat{F}$. Il peut donc sembler naturel d'éliminer l'inconnue \widehat{U} . Le système linéaire résultant est

$$\widetilde{\mathcal{A}}\widetilde{U} = \widetilde{F} - \mathcal{B}\widehat{F}.$$

Cette façon de procéder présente deux avantages : d'une part, les propriétés éventuelles de symétrie de la forme bilinéaire a se transportent directement sur la matrice $\widetilde{\mathcal{A}}$ alors que ce n'était pas le cas pour le système initial; d'autre part, la taille finale du système linéaire est optimale puisque seules les degrés de liberté internes sont inconnus. Toutefois, cette technique oblige à assembler deux matrices, $\widetilde{\mathcal{A}}$ et \mathcal{B} , plutôt qu'une. La matrice $\widetilde{\mathcal{A}}$ est carrée d'ordre $N - N_D$, alors que la matrice $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{N-N_D, N_D}$ est rectangulaire, et les structures creuses des deux matrices sont différentes.

Outre ladite technique d'élimination des nœuds essentiels, il existe d'autres techniques qui, au lieu de manipuler deux matrices creuses, elles consistent à utiliser les formats de stockage tels que le format CSR (Compressed Sparse Row) et Ellpack-Itpack. Ces formats ont pour objectif principal de minimiser l'espace mémoire consommé lors du stockage de ces matrices. En plus, ils jouent un rôle capital lors de la résolution par les méthodes itératives.

Chapitre 3

Présentation du code FE2D

Dans ce chapitre, nous présentons le programme FE2D. Après la mise en cadre général du problème physique, nous verrons la technique de génération des tables de connectivité ainsi que l'*automatisation* du raffinement de maillage qui présente l'un des plus grand défi de la programmation effectuée. Nous enchaînerons ensuite par la résolution numérique du problème physique.

3.1 Problème physique

Dans le cadre de cette étude, nous considérons le problème typique de l'opérateur de Laplace avec des conditions limites homogènes du type Dirichlet. Ce problème connaît des applications diverses dans le domaine d'engineering, telles que le transfert de chaleur par conduction et le problème de déformation des membranes et des cordes. Ce dernier problème qui fait l'objet de la présente application.

La figure 3.1 représente une membrane élastique et homogène en déformation sous l'effet d'un chargement f . La configuration carrée de référence Ω est délimitée par le bord fermé et fixe $\partial\Omega$.

La membrane est supposée tendue par une tension uniforme τ . La figure 3.2 illustre l'ensemble des forces agissant sur un élément surfacique infinitésimal $ds = dx dy$. Sous l'hypothèse de faibles déformations, la tension de la membrane τ reste invariable sous l'effet du chargement surfacique f et l'équation gouvernant le déplacement u , où $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, est obtenue en appliquant le principe de quantité de mouvement en état d'équilibre donné par

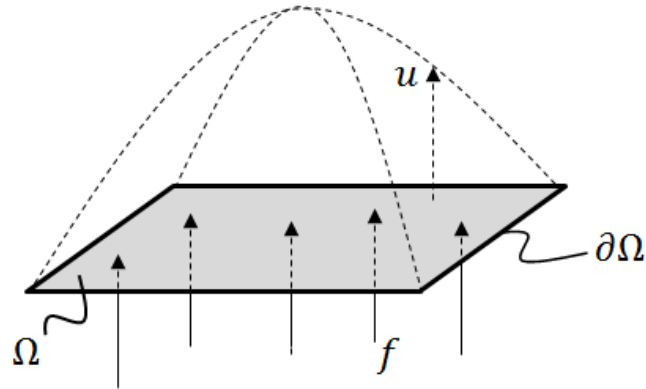


FIGURE 3.1 – Géométrie du problème physique.

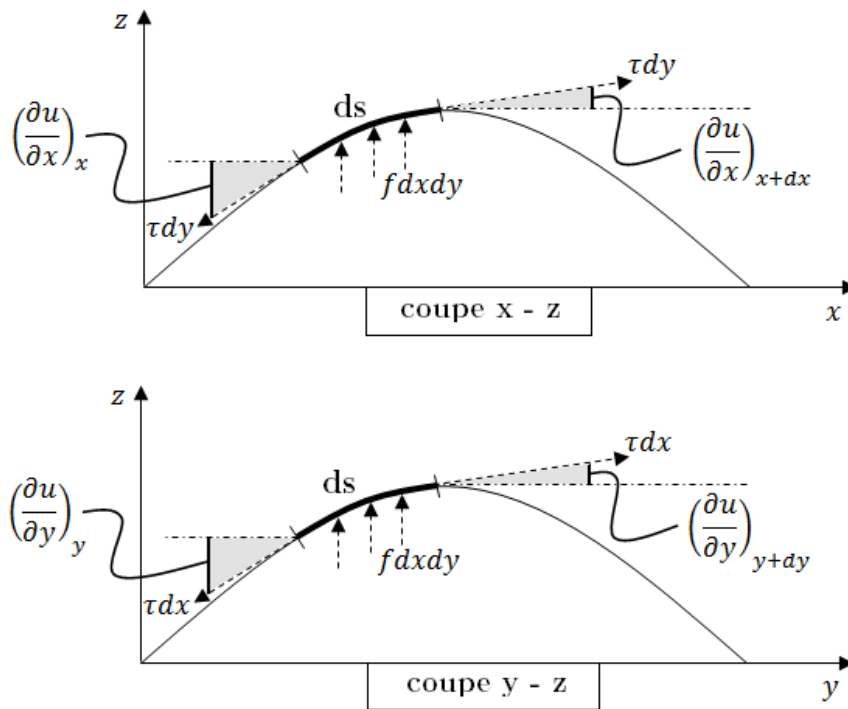


FIGURE 3.2 – Bilan de forces appliquées sur un élément surfacique de la membrane.

$$\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}.$$

En effectuant une projection sur l'axe z , on obtient

$$\tau dy \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} - \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x \right] + \tau dx \left[\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} - \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_y \right] + f dx dy = 0.$$

Un développement de Taylor en premier ordre donne

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x+dx} &= \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_x + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx, \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y+dy} &= \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_y + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} dy. \end{aligned}$$

Ce qui donne

$$-\tau \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = f,$$

ou encore

$$-\tau \Delta u = f.$$

La membrane étant maintenue fixe sur le bord, nous avons la condition limite de Dirichlet $u = 0$ sur $\partial\Omega$. Ainsi, la formulation mathématique du problème physique à résoudre est donnée par le système suivant

$$\begin{cases} -\tau \Delta u = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3.1)$$

3.2 Présentation du code FE2D

Écrit en Matlab, le code FE2D (Finite Elements 2 Dimensions) est un code maison qui se veut à la résolution numérique du problème (3.1) à l'aide de la méthode des éléments finis et en adoptant le formalisme des tableaux de connectivité décrit dans le chapitre 1.

Principalement, deux phases composent le code FE2D : (i) génération des tableaux de connectivité, (ii) assemblage, résolution et affichage des résultats. Alors que la deuxième phase est programmée dans un fichier `script`, la première est programmée dans un fichier de type `function`. En effet, alors que la phase d'assemblage et de résolution demeure standard, les tableaux de connectivité varient en fonction de la géométrie, du maillage et du degré de raffinement de celui-ci. Par conséquent, la séparation des deux phases donne plus de flexibilité au code.

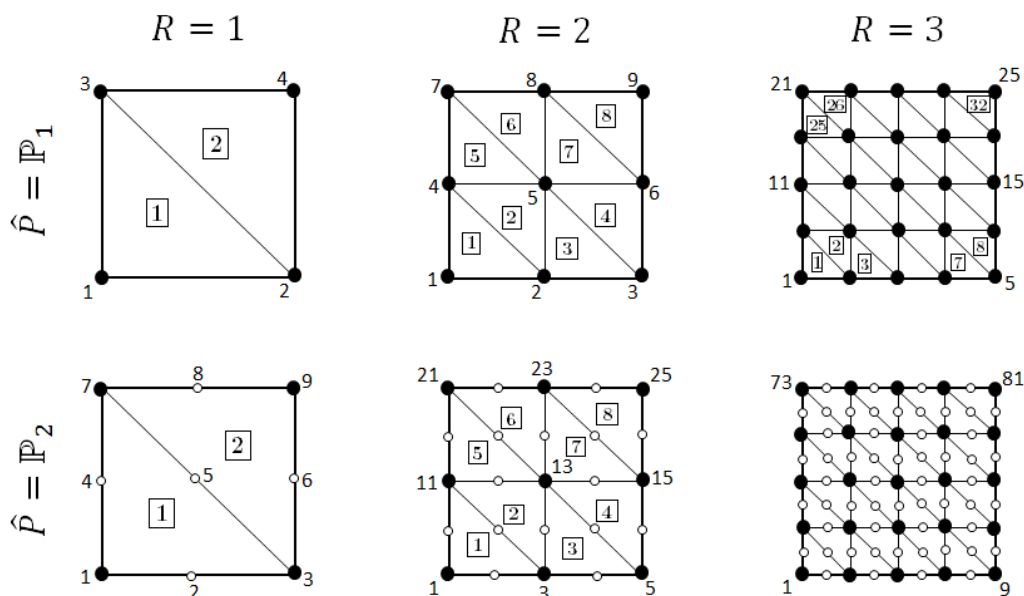


FIGURE 3.3 – Maillages adoptés et numérotation globale suivant les cas : $\hat{P} = \mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ et $R = 1, 2, 3$.

3.3 Génération du maillage

Compte tenu de la régularité de la géométrie du problème, nous adoptons un maillage triangulaire et structuré. Selon le degré de polynôme d'interpolation utilisé, nous traitons dans le cadre de notre travail deux cas : (i) l'élément fini \mathbb{P}_1 , (ii) l'élément fini \mathbb{P}_2 . La figure 3.3 illustre les maillages correspondant avec différents degrés de raffinement $R = 1, 2$ et 3 . La figure montre également la numérotation globale des nœuds. On voit figurer, dans le cas \mathbb{P}_2 , les nœuds principaux (pleins) ainsi que les nœuds secondaires (creux).

Les nœuds sont numérotés de bas en haut, de gauche à droite. Cette numérotation est appelée : *Numérotation lexicographique*. Cf. figure 3.3.

3.4 Génération des tableaux de connectivité

Dans cette section, nous allons voir le procédé par lequel nous concevons les tableaux de connectivité `noeud_ref`, `noeud_geo` et `noeud_ref_f`, cf. Chap. 1. Dans un premier temps, nous allons développer les tableaux

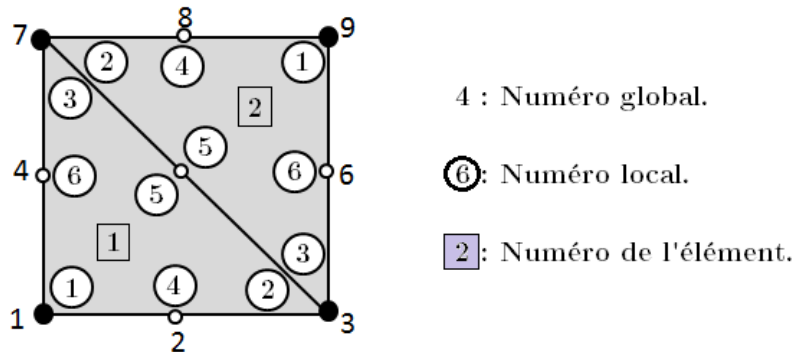


FIGURE 3.4 – Connectivité d'un maillage en $\hat{P} = \mathbb{P}_2$ et $R = 1$.

de connectivité de l'élément fini \mathbb{P}_2 . Ceux de l'élément fini \mathbb{P}_1 en découlent directement.

3.4.1 Cas préliminaire - le maillage $R = 1$

A titre d'exemple introductif, nous prenons le maillage au degré de raffinement $R = 1$. La figure 3.4 illustre :

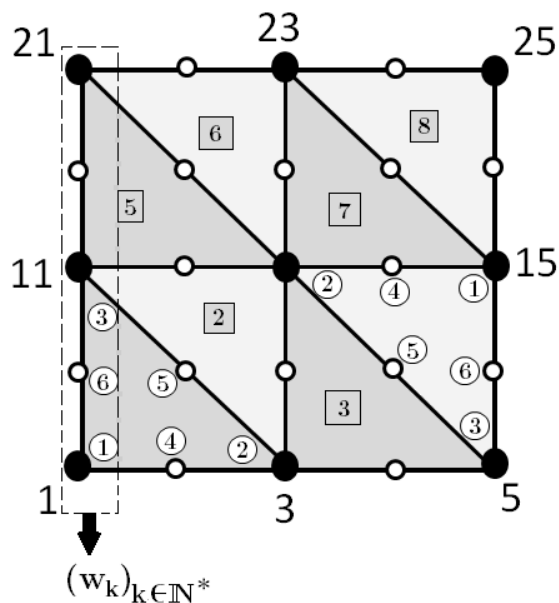
- la numérotation globale des nœuds,
- la numérotation locale des nœuds,
- la numérotation des éléments triangulaires.

La figure 3.4 montre bien l'ordre choisi pour la numérotation locale. Avec seulement deux éléments finis, les tableaux de connectivité résultant sont donnés par

$$\text{noeud_ref} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 7 & 3 \\ 2 & 8 \\ 5 & 5 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}, \text{noeud_geo} = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 3 & 7 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}, \text{noeud_ref_f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 & 7 \\ 2 & 6 & 8 & 4 \\ 3 & 9 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.2 Cas préliminaire - le maillage $R = 2$

La figure 3.5 montre la connectivité du maillage au degré de raffinement $R = 2$. Dans ce cas, nous avons un nombre d'éléments valant $Ne = 8$, ainsi


 FIGURE 3.5 – Connectivité d'un maillage en $\hat{P} = \mathbb{P}_2$ et $R = 2$.

$$\text{noeud_ref} = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & 15 & 11 & 23 & 13 & 25 \\ 3 & 11 & 5 & 13 & 13 & 21 & 15 & 23 \\ 11 & 3 & 13 & 5 & 21 & 13 & 23 & 15 \\ 2 & 12 & 4 & 14 & 12 & 22 & 14 & 24 \\ 7 & 7 & 9 & 9 & 17 & 17 & 19 & 19 \\ 6 & 8 & 8 & 10 & 16 & 18 & 18 & 20 \end{pmatrix},$$

$$\text{noeud_geo} = \begin{pmatrix} 1 & 13 & 3 & 15 & 11 & 23 & 13 & 25 \\ 3 & 11 & 5 & 13 & 13 & 21 & 15 & 23 \\ 11 & 3 & 13 & 5 & 21 & 13 & 23 & 15 \end{pmatrix},$$

$$\text{noeud_ref_f} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 15 & 25 & 23 & 21 & 11 \\ 2 & 4 & 10 & 20 & 24 & 22 & 16 & 6 \\ 3 & 5 & 15 & 25 & 23 & 21 & 11 & 1 \end{pmatrix}.$$

3.4.3 Généralisation - le maillage $R \geq 1$

Dans ce paragraphe, nous développons le procédé de l'automatisation du maillage. Il s'agit de décrire les tableaux de connectivité `noeud_ref`, `noeud_geo` et `noeud_ref_f`, en fonction du degré de raffinement R . Cette

étape est déterminante car elle permet d'établir l'indépendance des résultats numériques du maillage, condition sine qua non pour l'étude de convergence de la méthode.

Pour mettre en lumière l'algorithme d'automatisation, les étapes suivantes sont suivies.

Etape 1

Le nombre total d'éléments triangulaires est $Ne = 2^{2R-1}$. Le nombre de faces élémentaires sur le bord est $Ne_f = 2^{R+1}$. Le nombre de nœuds (principaux et secondaires) sur chaque côté de la géométrie est $Nn_c = 2^R + 1$. Le nombre de côtés du carré étant quatre, celui des éléments sur chaque côté est donné par $Ne_c = Ne_f/4 = 2^{R-1}$.

Etape 2

On distingue deux types d'éléments finis dans le maillage adopté.

- ⊗ **Type I** Éléments triangulaires d'ordre j , où $j = 1 : 2 : Ne - 1$ (triangles foncés sur la figure 3.5).
- ⊗ **Type II** Éléments triangulaires d'ordre j , où $j = 2 : 2 : Ne$ (triangles clairs sur la figure 3.5).

Remarquons, par conséquent, que la connectivité des éléments type II en découle de celle des éléments type I.

Etape 3

On définit la suite numérique $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui décrit la numérotation globale des nœuds se situant sur le côté gauche de la géométrie. Ainsi, pour $R = 1$ nous avons $w_1 = 1, w_2 = 4$ et $w_3 = 7$ (cf. fig. 3.4). De même, pour $R = 2$ nous avons $w_1 = 1, w_2 = 6, w_3 = 11, w_4 = 16$ et $w_5 = 21$ (cf. fig. 3.5). Dans le cas général ($R \geq 1$), les termes de la suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ sont obtenus par l'algorithme que voici :

```

pour k de 1 à Nn_c
    w_k = 1 + (k - 1)Nn_c
fin pour

```

Etape 4

Tous les nœuds du maillage sont numérotés à la base de ladite suite. Le tableau `noeud_ref` relatif aux éléments type I est obtenu par l'algorithme suivant :

```

- - - - - éléments type I :
k = 1
s = 0
pour m de 1 à Ne - 1 [pas= 2]
  pour q de Nnc à (Ne - Nnc + 2) [pas= 2]
    si q = m alors
      s = 2
      arrêter
    sinon
      s = 0
    fin si
  fin pour
k = k + s
r = [(m + 1)/2] mod [Ne/(Nnc - 1)] [mod est le rest de division]
i = (Nnc - 1)δr0 + (2r - 1) [δ est le symbole de Kronecker]
noeud_ref(1, m) = wk + i - 1
noeud_ref(2, m) = wk + i + 1
noeud_ref(3, m) = wk+2 + i - 1
noeud_ref(4, m) = wk + i
noeud_ref(5, m) = wk+1 + i
noeud_ref(6, m) = wk+1 + i - 1
fin pour
- - - - - éléments type II :
pour m de 2 à Ne [pas= 2]
  noeud_ref(2, m) = noeud_ref(3, m - 1)
  noeud_ref(1, m) = noeud_ref(2, m) + 2
  noeud_ref(3, m) = noeud_ref(2, m - 1)
  noeud_ref(4, m) = noeud_ref(2, m) + 1
  noeud_ref(5, m) = noeud_ref(5, m - 1)
  noeud_ref(6, m) = noeud_ref(5, m) + 1
fin pour

```

Etape 5

Le tableau `noeud_geo` se déduit directement à partir du tableau précédent. En effet, il suffit de remarquer que

$$\text{noeud_geo} = \text{noeud_ref}(1\dots 3, 1\dots Ne)$$

Etape 6

L'algorithme suivant illustre comment obtenir le tableau `noeud_ref_f`. Quatre boucles sont utilisées pour l'obtention de ce tableau, conformément au nombre de côtés que possède le carré définissant la géométrie du problème.

```

pour  $k$  de 1 à  $Ne_c$ 
- - - - - côté bas :
  pour  $i$  de 1 à 3
     $\text{noeud\_ref\_f}(i, k) = 2k - 2 + i$ 
  fin pour
- - - - - côté droit :
  pour  $i$  de 1 à 3
     $\text{noeud\_ref\_f}(i, Ne_c + k) = Nn_c(2k - 2 + i)$ 
  fin pour
- - - - - côté haut :
  pour  $i$  de 1 à 3
     $\text{noeud\_ref\_f}(i, 2Ne_c + k) = Nn_c^2 - 2k + 3 - i$ 
  fin pour
- - - - - côté gauche :
  pour  $i$  de 1 à 3
     $\text{noeud\_ref\_f}(i, 3Ne_c + k) = Nn_c(2Ne_c - 2k + 3 - i) + 1$ 
  fin pour
fin pour

```

Une fois les tableaux de connectivité obtenus, il suffit de s'appuyer sur la section 2.2 pour générer des tableaux `base_geo`, `base_ref`, `poids_K`, `d_base_geo`, `d_base_ref`, `poids_K`, `inv_jac_K` et `d_base_K`. Ensuite, les algorithmes d'assemblage sont utilisés pour l'obtention de la matrice et du second membre du système linéaire à résoudre (cf. 2.3).

Nous présentons dans l'annexe l'ensemble des programmes Matlab, constituant le code FE2D, que nous avons élaborés pour la mise en œuvre du formalisme relatif à cette méthode.

Chapitre 4

Résolution numérique

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à la résolution numérique du problème physique décrit dans la section 3.1 (Déformation élastique d'une membrane tendue). En appliquant un chargement $f(x, y)$ sur la membrane carrée encastrée sur le bord, nous considérons deux cas : (i) éléments finis \mathbb{P}_1 (ii) éléments finis \mathbb{P}_2 . Une comparaison avec le résultat obtenu par la méthode des différences finies sera effectuée et l'on aura, ainsi, la possibilité de tirer une conclusion en matière de vitesse de convergence de notre solution vers la solution exacte.

4.1 Configuration creuse de la matrice d'assemblage globale

La figure 4.1.a illustre la configuration creuse de la matrice d'assemblage globale \mathcal{A} . Cette matrice est obtenue par une discrétisation du domaine en éléments finis de type \mathbb{P}_1 . La figure 4.1.b montre le maillage correspondant. La matrice est 9×9 . Les points en gras dénotent les composantes non-nulles de la matrice creuse. Notons, ainsi, que dans ce cas de figure (élément fini \mathbb{P}_1), chaque fonction de forme interagit avec, au plus, 7 autres fonctions de forme. La figure 4.2 illustre la même configuration pour la discrétisation en éléments finis \mathbb{P}_2 . Dans ce cas, chaque fonction de forme interagit avec, au plus, 19 autres fonctions de forme.

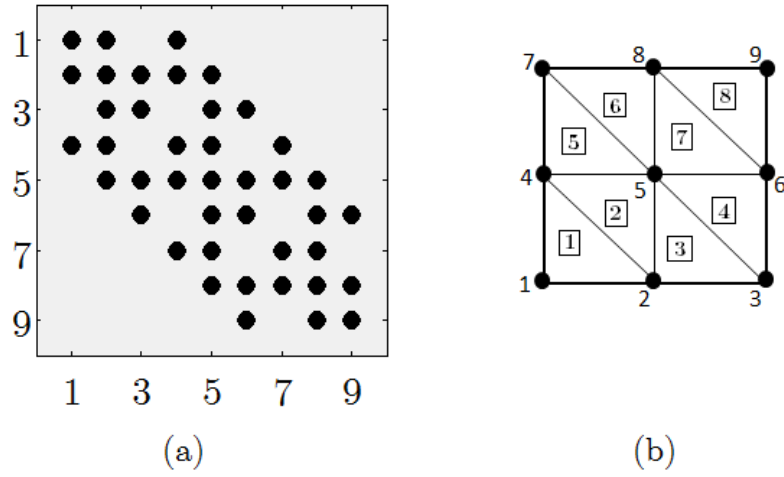


FIGURE 4.1 – (a) La configuration creuse de la matrice d’assemblage globale d’un maillage en \mathbb{P}_1 , (b) le maillage correspondant.

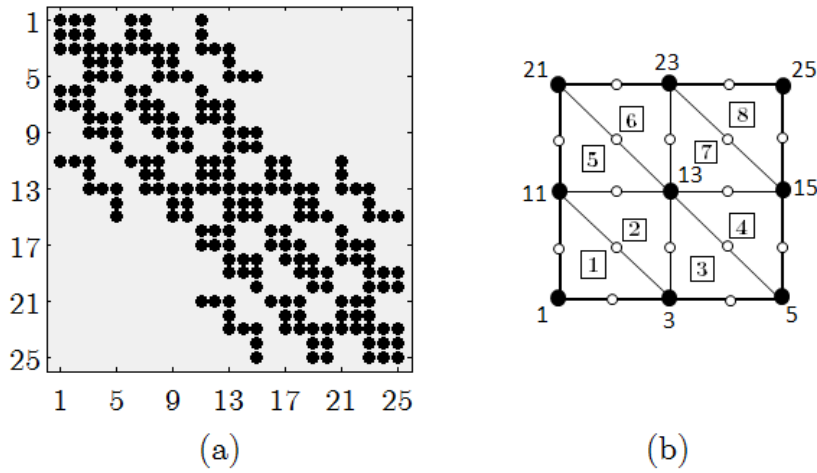


FIGURE 4.2 – (a) La configuration creuse de la matrice d’assemblage globale d’un maillage en \mathbb{P}_2 , (b) le maillage correspondant.

4.2 Visualisation de la solution numérique

On se donne, pour la résolution du problème, l’ensemble des données physico-géométriques que voici.

- La membrane a une forme carrée de dimensions $[0, 1] \times [0, 1]$.
- Une pression unitaire et uniformément répartie sur la membrane est considérée, i.e., $f(x,y)=1$.
- On suppose, également, une tension unitaire. C'est-à-dire $\tau = 1$.

Dans le cadre de ces données, on exécute le code pour différentes qualités de maillage, allant du grossier au raffiné. Les figures 4.3, 4.4, ..., 4.7 illustrent les résultats obtenus par le code FE2D en utilisant l'élément fini \mathbb{P}_2 .

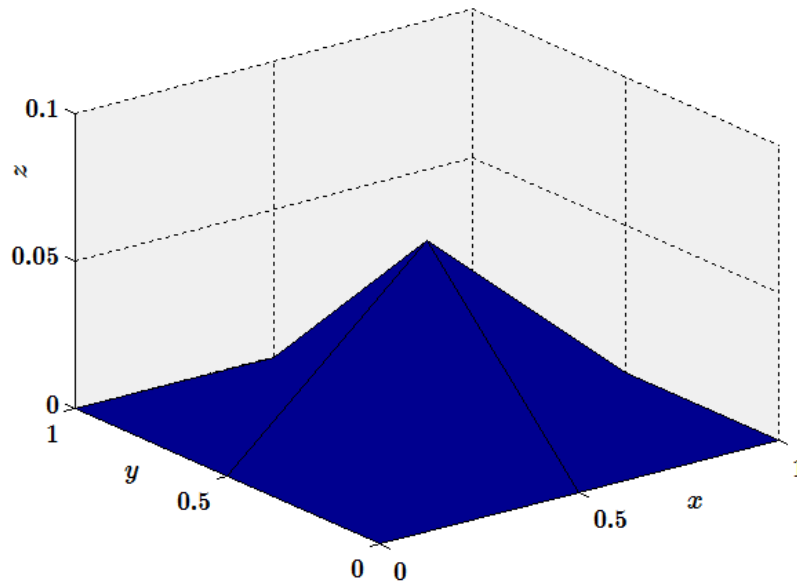


FIGURE 4.3 – Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression uniforme avec un paramètre de maillage $R = 1$.

La forme obtenue de la membrane qui converge vers celle d'une calotte présente une validation pour la méthode numérique utilisée. La figure 4.8 illustre la forme obtenue sous l'effet d'une pression unitaire mais négative. Pour une pression non-uniforme, soit $f(x, y) = 10\sin(4x(\frac{y}{2} - 2))$, la forme finale de la membrane est illustrée par la figure 4.9.

4.3 Etude de la convergence

Dans cette section, nous allons étudier la convergence de la méthode des éléments finis utilisée dans la résolution numérique du problème. Pour ce

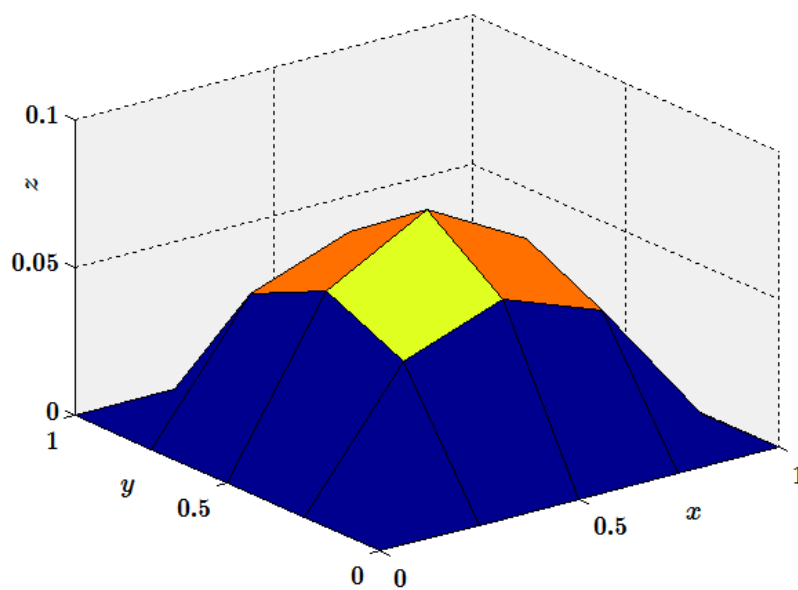


FIGURE 4.4 – $R = 2$.

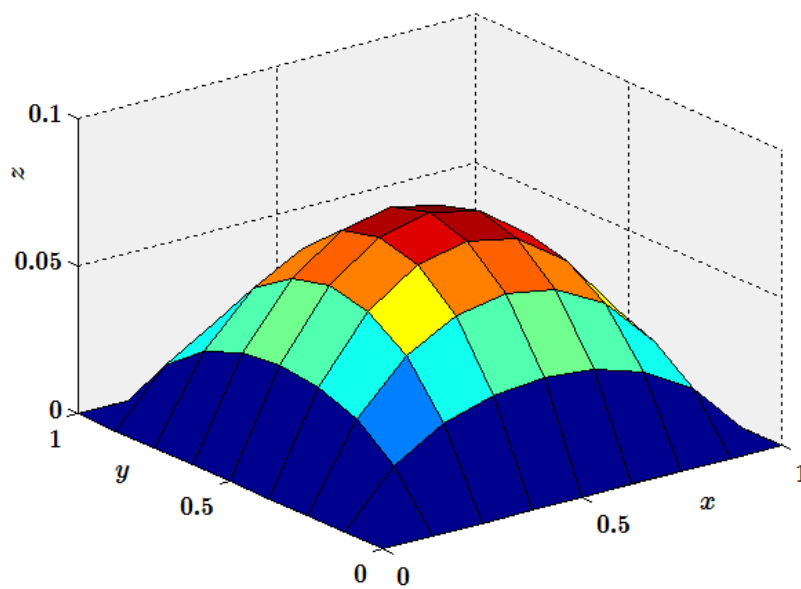
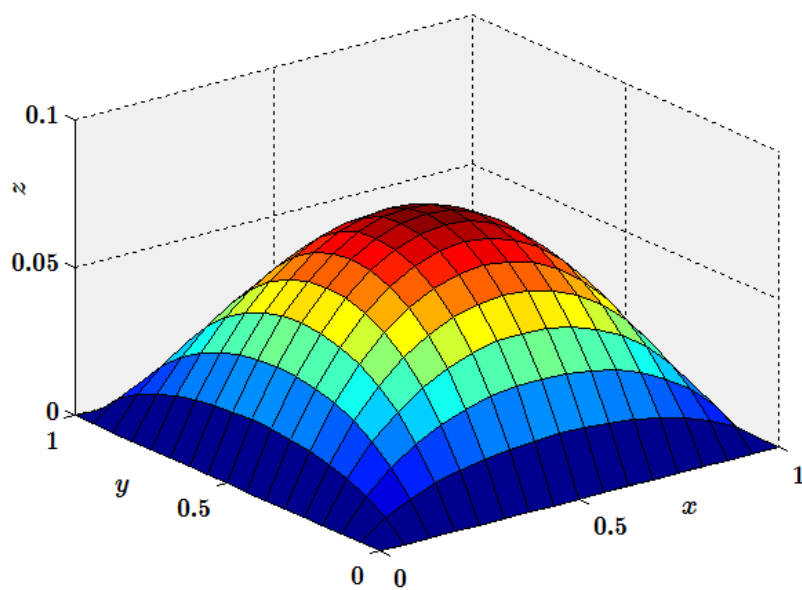
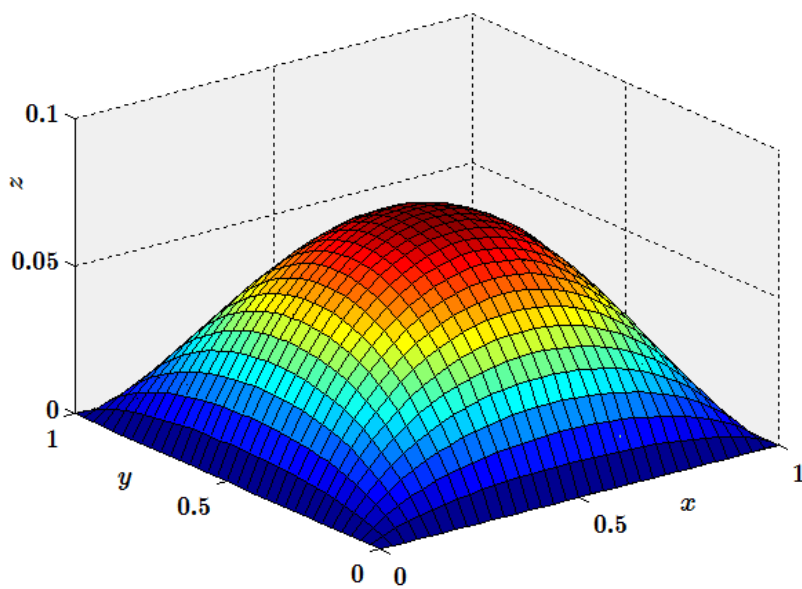


FIGURE 4.5 – $R = 3$.

FIGURE 4.6 – $R = 4$.FIGURE 4.7 – $R = 5$.

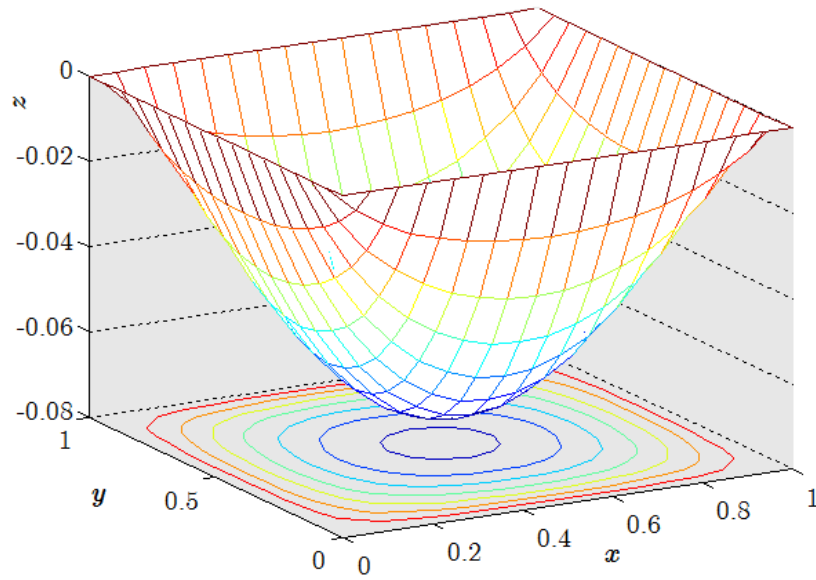


FIGURE 4.8 – Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression unitaire négative.

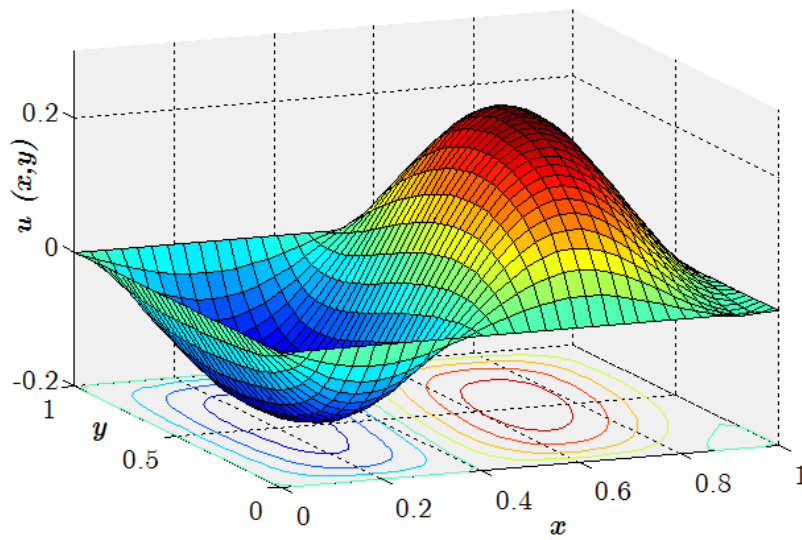


FIGURE 4.9 – Déformation de la membrane carrée sous l'effet d'une pression non-uniforme $f(x,y) = 10\sin(4x(\frac{y}{2} - 2))$.

TABLE 4.1 – Convergence des méthodes caractérisée par la valeur de la déformation maximale u_{max} .

R	N	u_{max} (Diff. finies)	u_{max} (FE2D - \mathbb{P}_1)	u_{max} (FE2D - \mathbb{P}_2)
1	4	–	–	0.0625
2	9	–	0.0625	0.0749
3	25	0.0703	0.0703	0.0737
4	81	0.0727	0.0727	0.0736
5	289	0.0734	0.0734	0.0736
6	1089	0.0736	0.0736	0.0736
7	4225	0.0736	–	–

faire, nous considérons la pression unitaire et uniforme sur tout le domaine de calcul. Dans un premier temps, nous nous intéressons à la valeur de la déformation maximale atteinte au milieu de la membrane (sommet de la calotte). Ensuite, nous focalisons l'intérêt sur le rapport de normes des qualités de maillage successives, i.e., le rapport β .

4.3.1 Convergence des méthodes, caractérisée par la valeur de la déformation maximale u_{max}

Afin de valider encore la méthode utilisée, il serait intéressant de comparer les résultats obtenus par le code FE2D avec le résultat obtenu par la méthode classique des différences finies. La table 4.1 exhibe la convergence des trois méthodes caractérisée par la valeur de u_{max} en fonction de la qualité du maillage adopté. La figure 4.10 montre la convergence de la déformation maximale calculée par les deux méthodes numériques : (i) la méthode des éléments finis avec ses deux variantes (\mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2), (ii) la méthode des différences finies. Comme la figure le montre, toutes les méthodes convergent vers la même valeur, 0.0737. Cependant, il est à noter que la méthode des éléments finis en \mathbb{P}_2 converge plus vite. En effet, elle commence à atteindre la limite avec seulement 25 nœuds. Tandis que les la méthode des éléments finis en \mathbb{P}_1 comme celle des différences finies n'atteignent ladite valeur qu'avec 1089 nœuds. Ceci nous donne une idée sur l'efficacité, mais aussi sur la rapidité de la méthode des éléments finis en \mathbb{P}_2 .

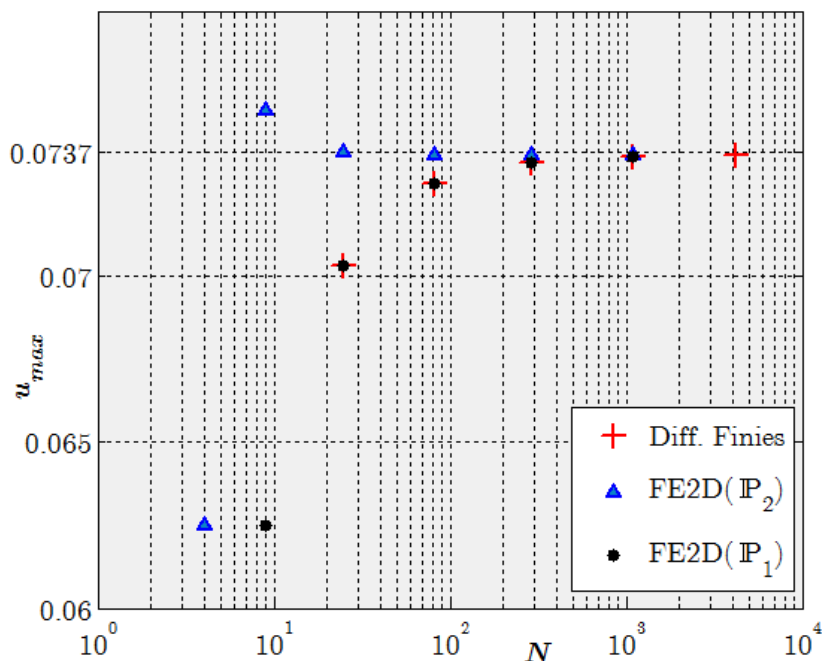


FIGURE 4.10 – Convergence des différentes méthodes caractérisée par la valeur de la déformation maximale u_{max} .

4.3.2 Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β

On définit le rapport de normes des qualités de maillage successives, noté β , par :

$$\beta = \frac{\|u_R - u_{R+1}\|}{\|u_{R+1} - u_{R+2}\|}, \quad (4.1)$$

où u_R dénote la solution correspondant à la qualité de maillage R , ($R = 1, 2, 3, \dots$).

En faisant correspondre, à chaque qualité de maillage R , la longueur h de l'élément fini triangulaire résultant, on obtient

$$\|u_h - u_{h/2}\| \sim h^\alpha \quad \text{et} \quad \|u_{h/2} - u_{h/4}\| \sim \left(\frac{h}{2}\right)^\alpha,$$

où h dénote la longueur de l'élément fini triangulaire du maillage de qualité R . α est l'ordre d'approximation de la fonction u , qui vaut 1 dans le cas de

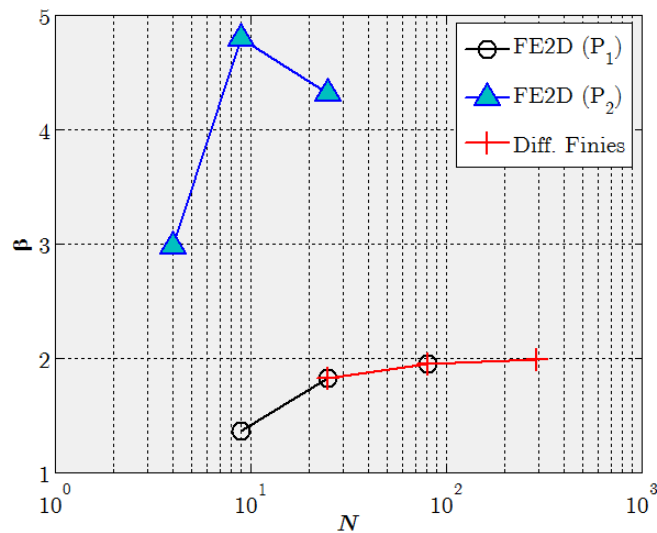
TABLE 4.2 – Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β .

R	N	β (Diff. finies)	β (FE2D - \mathbb{P}_1)	β (FE2D - \mathbb{P}_2)
1	4	–	–	2.9725
2	9	–	1.3631	4.7974
3	25	1.8237	1.8237	4.3149
4	81	1.9500	1.9500	–
5	289	1.9856	–	–

l'approximation en éléments finis \mathbb{P}_1 et 2 dans le cas d'approximation en \mathbb{P}_2 . En substituant dans la relation (4.1), on obtient

$$\beta = \frac{\|u_h - u_{h/2}\|}{\|u_{h/2} - u_{h/4}\|} \sim 2^\alpha.$$

La table 4.2 ainsi que la figure 4.11 illustrent la convergence dudit rapport calculé avec les deux méthodes : (i) la méthode des éléments finis avec ses deux variantes (\mathbb{P}_1 et \mathbb{P}_2), (ii) la méthode des différences finies.

FIGURE 4.11 – Convergence des méthodes caractérisée par le rapport β .

A partir de ces illustrations, nous constatons bien la pertinence de la méthode des éléments finis, mais aussi la robustesse du code FE2D. Nous

observons, également, que la méthode des différences finies et la méthode des éléments finis en \mathbb{P}_1 sont d'ordre 1, alors que la méthode des éléments finis en \mathbb{P}_2 est d'ordre 2.

Conclusion et perspectives

Dans ce travail, nous avons approché les problèmes différentiels classiques de type Laplacien par la méthode des éléments finis. Nous avons focalisé l'intérêt notamment sur l'aspect pratique de la méthode, en procédant à la mise en œuvre d'un code informatique (FE2D – Finite Elements 2 Dimensions) basé sur le formalisme de connectivité présenté dans les ouvrages de référence.

Lors de la programmation du code FE2D, nous sommes partis de la définition locale d'un élément fini pour construire, à l'aide d'un maillage, des espaces d'approximation et des opérateurs d'interpolation globaux.

Nous avons appliqué le code sur un problème physique classique, celui de la déformation élastique d'une membrane tendue. Compte tenu de la régularité de la géométrie du problème (carré unitaire), nous avons adopté un maillage triangulaire et structuré. Les nœuds sont repérés selon la numérotation dite *lexicographique*. La généralisation du maillage a été établie en appliquant un contrôle uniparamétrique sur le degré de raffinement du maillage, ce qui nous a permis d'avoir une flexibilité lors de l'exécution du code.

Afin de stocker les données du maillage (coordonnées des nœuds du maillage, numérotations locale et global, etc.), ainsi que les différentes fonctions qui interviennent dans le code (fonctions de base, dérivées, poids d'intégration, jacobien, etc.) nous avons procédé à la technique des tableaux de connectivité selon le formalisme présenté dans les ouvrages de référence.

Après la mise en œuvre du code de calcul FE2D, nous l'avons utilisé afin d'effectuer les différentes simulations. La programmation uniparamétrique du maillage nous a permis de jouer sur le degré du raffinement de celui-ci. D'une autre part, nous avons considéré deux cas ; selon l'uniformité de la distribution de la pression exercée sur la membrane tendue. Les résultats obtenus se sont avérés d'une grande concordance avec les résultats connus.

L'étude de la convergence a été, également, établie en comparaison avec la méthode des différences finies. A cet effet, deux paramètres ont été considérés : un paramètre physique (la déformation maximale atteinte au milieu de la membrane) et un paramètre numérique (rapport de superconvergence). Ainsi, des conclusions pertinentes ont pu être tirées.

Dans le cadre pratique de ce travail, nous nous sommes limités à un problème de géométrie simple. Ceci nous a permis d'investiguer le cas d'un maillage structuré. Cependant, la philosophie des tableaux de connectivité que nous avons adoptée a donné au code un caractère flexible. En effet, pour des géométries complexes, nécessitant des maillages non-structurés, il suffit d'importer les tableaux de connectivité générés par les mailleurs utilisant les techniques de maillage avancées, telles que la technique de Delauney.

Toujours est-il que le code FE2D reste ouvert à de nouvelles améliorations que nous nous projetons à apporter dans le cadre de prochains travaux. Notamment, sur l'aspect de génération de maillage. Nous prévoyons, également, de concevoir une Interface Graphique d'Utilisateur pour le code afin de lui donner une facilité d'usage.

Aussi enrichissante qu'elle soit, l'expérience menée dans le cadre de ce travail nous a permis d'avoir, principalement, deux acquis : d'une part, le cadre abstrait des problèmes différentiels suivi par le fondement théorique de la méthode des éléments finis, et d'une autre part, la mise en œuvre du code FE2D qui nous a ouvert la porte vers le vaste monde de la simulation numérique des problèmes liés à la physique.

Aujourd'hui, nous sommes déterminés d'entreprendre ce chemin dans l'objectif de réaliser, à la base du présent travail, un code robuste et solide qui constituerait une articulation entre la recherche académique et les problèmes industriels et technologiques.

Bibliographie

- [1] Courant R., Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **49** (1943), 1 – 23.
- [2] Ern A., Guermond J.-L., Les éléments finis, théorie applications et mise en œuvre, *Springer*, New York, (2002).
- [3] Ern A., Guermond J.-L., Theory and practice of finite elements, *Springer*, USA, (2000).
- [4] Ern A., Aide-mémoire, Eléments finis, *DUNOD*, Paris, (2005).
- [5] Hadamard J., Le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques, *MSM. Hermann, Paris*, (1932).
- [6] Nečas J., Sur une méthode pour résoudre les équations aux dérivées partielles de type elliptique, voisine de la variationnelle, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **16** (1962), 305 - 326.
- [7] Nouri H., Ravelet F., Tutoriel introductif à la simulation numérique des écoulements, *Arts et Metiers ParisTech*, (2011).
- [8] Thomée V., From finite differences to finite elements - A short history of numerical analysis of partial differential equations, *Jour. of Comp. and App. Mathematics*, **128** (2001), 1 – 54.
- [9] Zienkiewicz O. C., The Finite Element Method, *McGraw-Hill*, London, (1977).