

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

*Université des Sciences et de la Technologie **H**ouari **B**oumediene*  
*Faculté d'Electronique et d'Informatique*  
*Département d'Instrumentation et Automatique*



# MEMOIRE DE MAGISTER

En : Electronique

Option : Instrumentation

Présenté par :

**EL AFENDI MOHAMED MOUNKID**

Ingénieur d'état en électronique

**Thème:**

Etude comparative d'une ouverture  
rayonnante et ses applications

Soutenu publiquement le 25/12/2011, devant le jury composé de :

Président : HADDAD Boualem Prof USTHB

Directeur de Mémoire : TELLACHE Mohamed M.C.A USTHB

Examineurs : OUSSAID Rachid M.C.A USTHB

LAMHENE Youcef M.C.A USTHB

## Remerciements

*Je tiens à remercier tout d'abord Dieu le tout puissant qui nous a donné durant toutes ces années la santé, le courage et la foi en nous même pour arriver à ce jour.*

*Je ne saurais, réellement, trouver les expressions éloquentes que mérite mon encadreur M. : **Mohamed TELLACHE** afin de le remercier pour sa sympathie, ses encouragements, son aide, son dévouement pour le travail et sa présence totale, malgré ces occupations, au cours de cette modeste étude.*

*J'adresse mes remerciements aux membres de jury qui m'ont fait l'honneur d'évaluer, examiner, et enrichir mon modeste travail.*

*Je tiens à remercier particulièrement mes parents.*

*Mes remerciements vont également à tous les enseignants et les responsables de notre faculté.*

*Enfin, j'exprime mes remerciements à tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce travail.*

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE.....	7
----------------------------	---

## Chapitre I : Généralité sur les guides d'ondes

I.1	Introduction .....	9
I.2	Présentation de la structure guide d'onde.....	9
I.2.1	Guide d'onde rectangulaire .....	10
I.2.1.1	Propriétés des modes .....	11
I.2.1.2	Mode fondamental .....	12
I.2.1.3	Les modes d'ordre supérieur .....	14
I.2.2	Guide d'ondes circulaire .....	15
I.2.2.1	Equations de propagation et modes solutions .....	15
I.2.2.2	Les conditions aux limites .....	15
I.2.2.3	Classement des modes.....	16
I.2.2.4	Les modes d'ordre supérieur .....	17
I.2.3	La propagation dans un câble coaxial.....	18
I.3	Bilan de puissance.....	21
I.3.1	Théorème de <i>Poynting</i> .....	21
I.3.2	Régime temporel .....	21
I.3.3	Régime sinusoïdal.....	24
I.4	L'excitation d'un guide d'onde .....	25
I.5	Méthode d'analyse .....	27
I.5.1	Analyse par la méthode des operateurs transverses.....	27
I.6	Conclusion .....	28

## Chapitre II : Mise en équation du problème

II.1	Introduction .....	30
II.2	Formulation mathématique .....	30
II.2.1	L'équation de champ équivalent.....	32
II.2.2	Le principe de dualité .....	34
II.2.3	l'intensité de rayonnement .....	36

II.2.4	Les champs de rayonnement .....	38
II.2.5	La source de Huygens .....	41
II.2.6	La directivité et l'efficacité de la surface rayonnante .....	44
II.2.7	Cas des ouvertures uniformes .....	46
II.2.7.1	Les ouvertures rectangulaires.....	47
II.2.7.2	Les ouvertures circulaires .....	48
II.2.8	Le vecteur de diffraction.....	49
II.2.8.1	La diffraction de Fresnel .....	50
II.3	Conclusion .....	56

### **Chapitre III : Modélisation et résultats**

III.1	Introduction .....	57
III.2	Modélisation .....	57
III.2.1	Présentation du Logiciel « HFSS » .....	58
III.2.2	Modélisation avec HFSS .....	59
III.2.2.1	La Construction du modèle géométrique de l'antenne .....	59
III.2.2.2	Conditions aux limites et domaine de calcul.....	61
III.2.2.3	Définition des ports d'excitation et les plans de symétrie .....	62
III.2.3	Simulation sous « HFSS » .....	64
III.2.3.1	La constante de propagation.....	64
III.2.3.2	La longueur d'onde de propagation .....	65
III.2.3.3	L'impédance caractéristique.....	66
III.2.3.4	L'admittance de l'ouverture .....	66
III.2.3.5	La répartition de champ E .....	67
III.2.3.6	Puissance de champ E [V/m].....	67
III.2.3.7	Les paramètres du module $S_{ij}$ [dB] .....	68
III.2.3.8	Les paramètres de la phase $S_{ij}$ [deg].....	68
III.2.3.9	Diagramme de Smith S [deg] .....	69
III.2.3.10	Lobe en 3D .....	69

III.2.4	Généralisation du modèle avec Matlab .....	71
III.2.4.1	Programmation avec Matlab .....	71
III.2.4.2	Création d'une interface avec Matlab.....	71
III.2.4.3	Simulation du guide d'onde rectangulaire .....	72
III.2.4.4	Simulation du guide d'onde circulaire.....	74
III.3	Conclusion .....	76
CONCLUSION GENERALE.....		77
REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES.....		78
ANNEXE.....		81

### *Table des figures*

<i>Fig. I.1</i>	<i>Section droite d'une structure de guidage.....</i>	<i>9</i>
<i>Fig. I.2</i>	<i>Mécanisme de propagation dans un guide à plans parallèles.....</i>	<i>12</i>
<i>Fig. I.3</i>	<i>Section droite d'une structure de guidage.....</i>	<i>15</i>
<i>Fig. I.4</i>	<i>Câble coaxial.....</i>	<i>18</i>
<i>Fig. I.5</i>	<i>Orientation des densités de courant sur les conducteurs.....</i>	<i>20</i>
<i>Fig. I.6</i>	<i>Domaine d'application du théorème de Poynting.....</i>	<i>23</i>
<i>Fig. I.7</i>	<i>Transition entre un guide d'onde et un câble coaxial.....</i>	<i>25</i>
<i>Fig. I.8</i>	<i>Exemple de structure ouverte.....</i>	<i>28</i>
<i>Fig.II.1</i>	<i>Le champ rayonnant dans une ouverture.....</i>	<i>32</i>
<i>Fig. II.2</i>	<i>Exemple des plans d'ouvertures.....</i>	<i>33</i>
<i>Fig. II.3</i>	<i>Les champs rayonnent d'une ouverture.....</i>	<i>39</i>
<i>Fig. II.4</i>	<i>Onde plan incident a une ouverture.....</i>	<i>42</i>
<i>Fig. II.5</i>	<i>Ouverture rectangulaire et circulaire.....</i>	<i>47</i>
<i>Fig. II.6</i>	<i>Ouverture de surface S limite par le contour.....</i>	<i>50</i>
<i>Fig. II.7</i>	<i>La diffraction de Fresnel à travers l'ouverture rectangulaire.....</i>	<i>51</i>
<i>Fig. II.8</i>	<i>La diffraction de Fresnel par l'ouverture rectangulaire.....</i>	<i>54</i>
<i>Fig.III.1</i>	<i>Ondes fondamentales et ondes évanescentes.....</i>	<i>58</i>
<i>Fig.III.2</i>	<i>Construction du guide d'onde rectangulaire (antenne) RW90 sous HFSS.....</i>	<i>60</i>
<i>Fig.III.3</i>	<i>Création du plan de réflexion.....</i>	<i>60</i>
<i>Fig.III.4</i>	<i>L'assemblage des deux corps.....</i>	<i>60</i>
<i>Fig.III.5</i>	<i>Création de l'ouverture.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.III.6</i>	<i>L'espace du rayonnement.....</i>	<i>61</i>
<i>Fig.III.7</i>	<i>Définition des limites du domaine de calcul.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.III.8</i>	<i>Définition de la surface et du type d'excitation.....</i>	<i>62</i>
<i>Fig.III.9</i>	<i>Représentation de vecteur d'excitation.....</i>	<i>63</i>

<i>Fig.III.10 Décalage de plan de référence à l'ouverture de guide.....</i>	<i>63</i>
<i>Fig.III.11 Définition des plans de symétrie perfect H et perfect H.....</i>	<i>64</i>
<i>Fig.III.12 La constante de propagation en fonction de la fréquence.....</i>	<i>65</i>
<i>Fig.III.13 La variation de la longueur d'onde en fonction de la fréquence.....</i>	<i>65</i>
<i>Fig.III.14 L'impédance caractéristique en fonction de fréquence.....</i>	<i>66</i>
<i>Fig.III.15 L'admittance de l'ouverture: Susceptibilité.....</i>	<i>66</i>
<i>Fig.III.16 La répartition de champ E pour le mode TE<sub>10</sub>.....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.III.17 La répartition de la puissance de champ E en [V/m].....</i>	<i>67</i>
<i>Fig.III.19 Le module du paramètre S<sub>11</sub> en fonction de fréquence.....</i>	<i>68</i>
<i>Fig.III.20 La variation de la phase du paramètre S<sub>11</sub> en fonction de la fréquence.....</i>	<i>68</i>
<i>Fig.III.21 La représentation du paramètre S avec le diagramme de Smith.....</i>	<i>69</i>
<i>Fig.III.22 L'ouverture dans le plant YZ.....</i>	<i>69</i>
<i>Fig.III.23 L'ouverture dans le plant XY.....</i>	<i>70</i>
<i>Fig.III.24 L'animation du modèle.....</i>	<i>70</i>
<i>Fig.III.25 Vidéo complète de la simulation du modèle.....</i>	<i>71</i>
<i>Fig.III.26 Le programme développé avec Matlab.....</i>	<i>71</i>
<i>Fig.III.27 Création de la forme de l'interface avec Matlab.....</i>	<i>72</i>
<i>Fig.III.28 Simulation à basses fréquences.....</i>	<i>72</i>
<i>Fig.III.29 Simulation pour des fréquences moyennes.....</i>	<i>73</i>
<i>Fig.III.30 Simulation à hautes fréquences.....</i>	<i>73</i>
<i>Fig.III.31 Simulation à basses fréquences.....</i>	<i>74</i>
<i>Fig.III.32 Simulation pour des fréquences moyennes.....</i>	<i>75</i>
<i>Fig.III.33 Simulation à hautes fréquences.....</i>	<i>75</i>

### *Table des tableaux*

<i>Tableau I.1: Zéros de J<sub>m</sub>.....</i>	<i>16</i>
<i>Tableau I.2: Zéros de la dérivée de J<sub>m</sub>.....</i>	<i>17</i>

## **INTRODUCTION GENERALE**

Pendant les vingt dernières années, la modélisation des guides d'ondes est devenue un domaine important de recherche en électromagnétisme avec le développement des logiciels numériques de simulation très performants. Les guides d'onde sont connus par leurs caractéristiques avec une variété de forme. L'énergie transmise varie de quelques milliwatts jusqu'à des gigawatts [1].

Bien que les guides d'onde semblent être simples et faciles à fabriquer, mais chercher à obtenir les caractéristiques électromagnétiques satisfaisant toute les conditions d'application est une opération difficile à réaliser. Pour cela, des méthodes et approches de modélisation fiables sont nécessaires. L'un des paramètres importants, qui influe sur les caractéristiques des guides d'onde est le coefficient de réflexion qui dépend de l'admittance du circuit équivalent. Cependant, beaucoup de circuits équivalents sont utilisés pour modéliser un même guide. Plusieurs travaux ont été publiés sur l'ouverture rayonnante. Les résultats obtenus ne tiennent pas compte des modes d'ordre supérieur rencontrés à l'ouverture du guide [2].

L'objectif global de ce présent travail est d'une part le développement d'une approche théorique basée sur l'utilisation des fonctions de Green dans le domaine fréquentiel pour déterminer le champ rayonné à l'ouverture du guide ; et d'autre part la conception d'un modèle numérique basée sur la méthode des éléments finis permettant la modélisation et la caractérisation d'un guide d'onde rectangulaire terminé par une ouverture rayonnante [3].

Nous avons simulé un modèle de guide d'onde rectangulaire à ouverture rayonnante à travers le développement d'un algorithme basé sur le logiciel de simulation HFSS (High Frequency Structure Simulator) à trois dimensions (3D) basé sur l'utilisation de la méthode des éléments finis [4].

À travers les équations théoriques déterminées par l'utilisation des fonctions de Green dans le domaine fréquentiel des guides d'ondes rectangulaires et circulaires à ouverture rayonnante, nous avons développé un programme à l'aide du logiciel Matlab permettant d'une part de simuler les différents types d'ouvertures rectangulaires et circulaires ; et d'autre part de comparer les résultats obtenus.

Par la suite, nous avons généralisé ce programme par la création d'une interface qui nous a permis de manipuler les dimensions des guides et les fréquences de travail. Il nous a permis

également de voir l'allure du champ à l'ouverture. Les résultats obtenus en comparaison avec la littérature sont très satisfaisants. Les résultats présentés peuvent être concrétisés par la fabrication d'un guide d'onde à ouverture rayonnante afin de répondre à des problématiques industrielles dans sa gamme de fonctionnements (la bande X) [5].

Au préalable, nous avons abordé l'étude théorique permettant de déterminer les modes qui se propagent dans les guides, la fréquence de travail, la puissance propagée, la puissance rayonnée ainsi que l'influence de l'excitation sur tout le circuit [6].

Ce présent manuscrit est constitué de trois chapitres, trois annexes et une bibliographie.

Le *chapitre I*, sera consacré à une introduction sur les guides d'ondes ainsi que les caractéristiques de chaque guide.

Dans le second *chapitre*, nous aborderons la formulation mathématique du problème ainsi que les détails concernant le champ à l'ouverture rayonnante.

Nous verrons dans le *chapitre III*, l'application de la méthode des éléments finis pour la modélisation et la caractérisation des structures rectangulaires et circulaires à l'aide du logiciel HFSS (*High Frequency Structure Simulation*). Puis la généralisation de la conception d'un simulateur à travers l'utilisation du logiciel MATLAB.

# I Généralités sur les guides d'onde

## I.1 Introduction

Les ouvertures rayonnantes sont largement utilisées dans les domaines de télédétection, mesure non destructive, CEM...etc.

Les paramètres de circuit équivalent ont été étudiés par Marcuvitz en 1951 [7]. Depuis ce temps, plusieurs méthodes numériques de résolution à savoir : la méthode des moments par l'utilisation de logiciel feko [8], la méthode des éléments finis en utilisant le logiciel HFSS [9], la méthode basée sur la matrice de corrélation CM [10], la méthode des opérateurs transversaux TO [6] et la méthode d'équation intégrale KP [11] ont été développées. Ces méthodes analytiques se compliquent lorsqu'on considère que le guide est de longueur finie et le conducteur est imparfait [12].

Dans notre travail, nous avons utilisé le logiciel HFSS « *High Frequency Structure Simulation* » [13] pour la simulation de l'ouverture rayonnante. Notons l'utilisation d'un guide d'onde rectangulaire excité par le mode fondamental  $TE_{10}$  [14].

Au préalable, on doit commencer par l'étude théorique permettant de déterminer les modes qui se propagent dans les guides, la fréquence de travail, la puissance propagée, la puissance rayonnée ainsi que l'influence de l'excitation sur tout le circuit.

## I.2 Présentation de la structure guide d'onde

La figure 1.1 montre une section droite d'une structure de guidage.

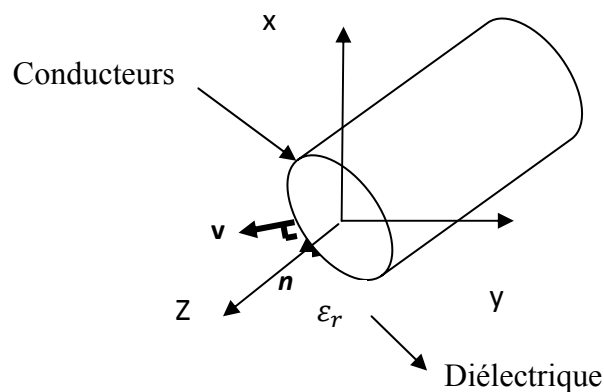


Fig. I.1 Section droite d'une structure de guidage

Pour trouver les ondes susceptibles de se propager sur une telle structure en régime sinusoïdal associé à une dépendance temporelle en «  $\exp[j\omega t]$  », on écrit les équations de Maxwell vérifiées par le champ  $(\vec{E}_0, \vec{H}_0)$ .

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E}_0 = -j\omega\mu_0 \vec{H}_0 \\ \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}_0 = j\omega\varepsilon \vec{E}_0 + \vec{J} \\ \text{div} \vec{E}_0 = \frac{\rho}{\varepsilon} \\ \text{div} \vec{H}_0 = 0 \end{cases} \quad (\text{I.1})$$

En raison de la symétrie de translation qui caractérise la géométrie de la structure considérée, on cherche les solutions des équations de Maxwell sous la forme :

$$\begin{cases} E_0(x, y, z) = E(x, y) \exp[-\gamma z] \\ H_0(x, y, z) = H(x, y) \exp[-\gamma z] \end{cases} \quad (\text{I.2})$$

Où  $\gamma$  est la constante de propagation d'un mode qui se propage dans la direction des  $z$  croissants. Les solutions sont des ondes planes non homogènes.

A partir de la géométrie du problème, on décompose usuellement les champs en composantes vectorielles transversales (plan de section droite) et scalaires longitudinales (suivant  $z$ ) :

$$\begin{cases} \vec{E} = \vec{E}_t + E_z \vec{n} \\ \vec{H} = \vec{H}_t + H_z \vec{n} \end{cases} \quad (\text{I.3})$$

Voir (Annexe A) [15].

### I.2.1 Guide d'onde rectangulaire

Il s'agit d'une structure de guidage à un seul conducteur qui est généralement utilisé pour alimenter des antennes, des radars. En plus, il peut être utilisé comme un résonateur, un filtre et autre. Cette structure peut être appliquée à des fréquences très élevées allant de quelques gigahertz à des centaines de gigahertz. Les pertes dans ces structures sont très faibles et se limitent aux pertes dans les conducteurs [16].

On résout les équations d'Helmholtz en  $\vec{E}_z$  (cas TM) ou en  $\vec{H}_z$  (cas TE) :

- Problème de Dirichlet  $\vec{E}_z + (\gamma^2 + k^2) \vec{E}_z = \vec{0}$  et  $\vec{E}_z = \vec{0}$  (champ tangentiel).
- Problème de Neumann :  $\vec{H}_z + (\gamma^2 + k^2) \vec{H}_z = \vec{0}$  et  $\frac{\partial \vec{H}_z}{\partial \vec{v}} = \vec{0}$  (champ normale).

### I.2.1.1 Propriétés des modes

Nous définissons  $f_c$  la fréquence de coupure d'un mode de constante  $k_c$

$$f_c = \frac{vk_c}{2\pi}$$

avec :  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu_0}}$

La fréquence de travail  $f$  doit être supérieure à la fréquence de coupure  $f_c$  pour que le mode correspondant puisse se propager. Ce qui se traduit par la condition suivante :

$$f \geq f_c = \frac{vk_c}{2\pi} = \frac{v}{2} \sqrt{\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)} \quad (I.4)$$

avec :

$m, n$  : les modes de propagation

$a, b$  : les dimensions de la section droite du guide.

Dans ce cas, la constante de phase  $k_g = \sqrt{k^2 - k_c^2}$  est réelle, ce qui rend possible la propagation. Un guide d'ondes se comporte donc, pour chaque mode, comme un filtre passe-haut. En dessous de la fréquence de coupure, le mode est évanescent ( $\gamma$  réelle), ce qui correspond à une atténuation exponentielle en fonction de  $z$ .

Le premier mode propagé sur le guide est le mode  $TE_{10}$  encore appelé mode fondamental ou dominant. Il sera l'unique mode propagé pour  $2b \leq \lambda \leq 2a$ . La détermination de mode suivant dépend de la valeur du facteur de forme.

En effet, il n'est pas souhaitable de propager un signal à l'aide de plusieurs modes en raison de la dispersion qui en résulterait, d'autant plus que chaque mode est déjà dispersif.

La constante de propagation guidée est donnée par :

$$\frac{1}{\lambda_g^2} = \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_c^2} \quad (I.5)$$

$\lambda = \frac{2\pi}{k}$  : La longueur d'onde dans le milieu diélectrique remplissant le guide,

$\lambda_c = \frac{2\pi}{k_c}$  : La longueur d'onde de coupure

$\lambda_g = \frac{2\pi}{k_g}$  : La longueur d'onde guidée.

De plus, on peut exprimer la vitesse de phase et la vitesse de groupe d'un mode propagé en fonction de la longueur d'onde de coupure  $\lambda_c$  :

$$\begin{cases} \vartheta_\varphi = \frac{w}{k_g} = \frac{v}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2}} > v \\ \vartheta_g = \frac{dw}{dk_g} = v \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda}{\lambda_c}\right)^2} < v \end{cases} \quad (I.6)$$

avec :

$$\vartheta_\varphi \vartheta_g = v^2$$

Notons que la vitesse de phase est supérieure à la vitesse de la lumière dans le cas d'un guide à air, et la vitesse de groupe correspondant à la vitesse réactive apparent de déplacement de l'énergie est plus petite. Le produit de deux vitesses est égal au carré de la vitesse des ondes libres dans le milieu diélectrique.

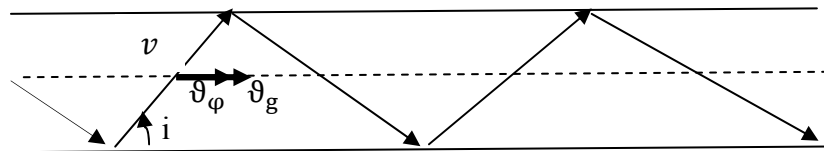


Fig. I.2 Mécanisme de propagation dans un guide à plans parallèles

$$\vartheta_g = |\vartheta_g| = |v| \cos i$$

Où  $i$  est l'angle de réflexion (angle d'incidence) et pour  $i = \frac{\pi}{2}$ , nous obtenons la fréquence de coupure.

### I.2.1.2 Mode fondamental

Il est utile de connaître l'expression du champ électromagnétique du mode fondamental TE<sub>10</sub>. Pour cela, nous calculons  $k_c = \frac{\pi}{a}$  et en partant de l'expression de la composante longitudinale, nous obtenons alors les expressions des composantes du champ électrique et magnétique suivantes :

$$H_z = A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right)$$

On déduit le gradient :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{grad}} H_z = -\frac{\pi}{a} A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{e}_x \\ \overrightarrow{\text{grad}} H_z \times \vec{n} = \frac{\pi}{a} A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{e}_y \end{cases} \quad (\text{I.7})$$

D'où

$$\begin{cases} \vec{E} = -\frac{j\omega\mu_0}{k_c^2} \overrightarrow{\text{grad}} H_z \times \vec{n} = -j\omega\mu_0 \frac{a}{\pi} A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{e}_y \\ \vec{H} = -j\frac{k_g}{k_c^2} \overrightarrow{\text{grad}} H_z + H_z \vec{n} = j\omega\mu_0 \frac{a}{\pi} A \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{e}_x + A \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{n} \end{cases} \quad (\text{I.8})$$

On appelle  $\vec{e}_x$  le vecteur unitaire dirigeant l'axe  $Ox$  et  $\vec{e}_y$  celui qui dirige l'axe  $Oy$ .

Généralement, on pose  $\vec{E} = E \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \vec{e}_y$  avec  $A = \frac{j k_c}{\eta k} E$ .

On obtient alors les expressions des composantes du champ :

$$\begin{cases} E_{0x} = 0 \\ E_{0y} = E \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-jk_g z) \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (\text{I.9})$$

$$\begin{cases} H_{0x} = -\frac{Ek_g}{\eta k} \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-jk_g z) \\ H_{0y} = 0 \\ H_{0z} = j\frac{Ek_c}{\eta k} \cos\left(\frac{\pi}{a} x\right) \exp(-jk_g z) \end{cases} \quad (\text{I.10})$$

Notons que la distribution du champ électrique dans le guide est une distribution sinusoïdale avec un maximum pour  $x = \frac{a}{2}$ .

### I.2.1.3 Les modes d'ordre supérieur

Nous pouvons alors généraliser les calculs pour obtenir les composantes du champ des modes d'ordre supérieur transportées par un guide d'ondes rectangulaire [17]. Les expressions des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  deviendront :

- Dans le cas d'un mode TM :

$$\begin{cases} H_{0x} = jA \frac{\omega \varepsilon n \pi}{b k_c^2} \sin(m\pi \frac{x}{a}) \cos(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ H_{0y} = -jA \frac{\omega \varepsilon m \pi}{a k_c^2} \cos(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ H_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I.11)$$

$$\begin{cases} E_{0x} = -A \frac{\gamma m \pi}{a k_c^2} \cos(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ E_{0y} = -A \frac{\gamma n \pi}{b k_c^2} \sin(m\pi \frac{x}{a}) \cos(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ E_{0z} = A \sin(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (I.12)$$

- Dans le cas d'un mode TE :

$$\begin{cases} E_{0x} = jA \frac{\omega \mu n \pi}{b k_c^2} \cos(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ E_{0y} = -jA \frac{\omega \mu m \pi}{a k_c^2} \sin(m\pi \frac{x}{a}) \cos(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I.13)$$

$$\begin{cases} H_{0x} = A \frac{\gamma m \pi}{a k_c^2} \sin(m\pi \frac{x}{a}) \cos(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ H_{0y} = A \frac{\gamma n \pi}{b k_c^2} \cos(m\pi \frac{x}{a}) \sin(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \\ H_{0z} = A \cos(m\pi \frac{x}{a}) \cos(n\pi \frac{y}{b}) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (I.14)$$

**I.2.2 Guide d'ondes circulaire**

Le guide d'onde circulaire est rempli d'un diélectrique de permittivité  $\epsilon$  généralement de l'air, et de perméabilité  $\mu$ . La constante de propagation est déterminée par les mêmes équations que dans le cas du guide rectangulaire [18].

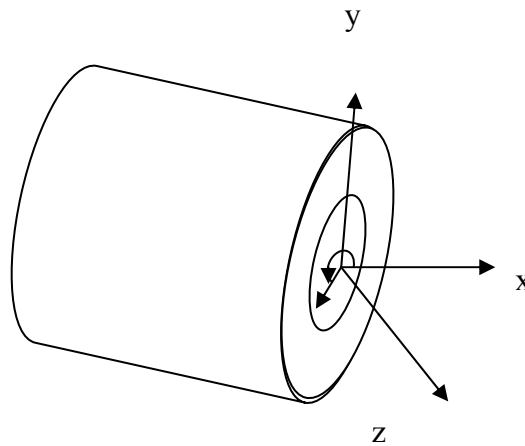


Fig. I.3 Section droite d'une structure de guidage

**I.2.2.1 Equations de propagation et modes solutions**

Les modes ayant des composantes semi-transversales électriques ou magnétiques vérifient l'équation scalaire de Helmholtz.

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + k_c^2 \right) g = 0 \tag{I.15}$$

Dans cette équation aux dérivées partielles, la fonction  $g$  désigne, soit la composante longitudinale du champ électrique  $E_z$ , soit la composante longitudinale du champ magnétique  $H_z$ , et  $k_c$  est une constante, telle que :  $k_c^2 = \gamma^2 + k^2$

Où  $\gamma$  : est la constante de propagation suivant l'axe  $O_z$ .

**I.2.2.2 Les conditions aux limites**

- Soit  $g = 0$  sur le conducteur, si  $g = E_z$  ce qui correspond aux modes TM ;
- Soit  $\frac{\partial g}{\partial \rho} = 0$  sur le conducteur, pour  $g = H_z$ , ce qui correspond aux modes TE .

On montre que la solution la plus générale est de la forme :

$$g(\rho, \varphi) = A J_m(k_c \rho) \begin{cases} \cos[m\varphi] \\ \sin[m\varphi] \end{cases} \tag{I.16}$$

Dans cette expression,  $J_m$  est la fonction de Bessel de première espèce d'ordre entier, où  $m$  et  $A$  sont des constantes. Les conditions aux limites se traduisent par les équations non linéaires[4] :

- Pour les modes TM, on a  $J_m(k_c b) = 0$  ;

$b$  : représente le rayon du guide

- Pour les modes TE, on a  $J'_m(k_c b) = 0$ .

### I.2.2.3 Classement des modes

La fréquence de coupure  $f_c$  d'un mode donné est évaluée à partir de sa constante de coupure  $k_{cmn}$  où l'indice «  $m$  » est lié à la répartition angulaire du champ et l'indice «  $n$  » à sa répartition radiale. On déduit les valeurs de  $k_{cmn}$  correspondantes en calculant les valeurs des arguments qui annulent la fonction de Bessel d'ordre «  $m$  » ou sa dérivée première, que l'on qualifiera de zéro. Pour une valeur donnée de «  $m$  », il y a une infinité de zéros possibles. On indicera ces zéros d'ordre «  $m$  » par l'entier «  $n$  », en les rangeant dans l'ordre des valeurs croissantes strictement positives.

- Pour les modes TM, on a  $k_{cmn} b = 2\pi \sqrt{\varepsilon\mu_0} f_{cmn} b = Z_{mn}$  où  $Z_{mn}$  désigne le zéro d'ordre «  $n$  » (la racine) de  $J_m$ .
- Pour les modes TE, on a  $k_{cmn} b = 2\pi \sqrt{\varepsilon\mu_0} f_{cmn} b = Z'_{mn}$  où  $Z'_{mn}$  désigne le zéro d'ordre «  $n$  » de  $J'_m$  (la dérivée de  $J_m$ ).

On doit classer ces zéros de façon à déterminer l'ordre d'apparition des modes dans le guide circulaire en fonction de la fréquence. Pour cela, il faut calculer les valeurs des racines des premières fonctions de Bessel ou de leurs dérivées, et les ordonner (voir le tableau I.1).

m \ n	0	1	2	3	4
1	2.404	3.831	5.136	6.380	7.588
2	5.520	7.015	8.417	9.761	11.065
3	8.653	10.173	11.620	13.015	14.372
4	11.791	13.324	14.796	16.223	17.616
5	14.931	16.471	17.960	19.410	20.827

Tableau I.1 Zéros de  $J_m$

A partir du tableau I.1, on déduit la classification des modes TM donnée par :

$TM_{01}, TM_{11}, TM_{21}, TM_{02}, TM_{31},$  etc.

m \ n	0	1	2	3	4
1	3.831	1.84	3.054	4.201	5.317
2	7.016	5.331	6.706	8.015	9.282
3	10.173	8.536	9.970	11.346	12.682
4	13.324	11.706	13.170	14.586	15.964
5	16.471	14.864	16.348	17.789	19.196

Tableau I.2 Zéros de la dérivée de  $J_m$

A partir du tableau (I.2), on déduit la classification des modes TE donnée par :

$TE_{11}, TE_{21}, TE_{01}, TE_{31}, TE_{41}, TE_{12}, TE_{22}, etc.$

Finalement, on déduit la classification des modes TE et TM suivante:

$TE_{11}$  ( $k_c b = 1.84$ ),  $TM_{01}$  ( $k_c b = 2.404$ ),  $TE_{21}$  ( $k_c b = 3.054$ ), les  $TM_{11}$  et  $TE_{01}$  ( $k_c b = 3.831$ ),  $TE_{31}$  ( $k_c b = 4.201$ ),  $TM_{21}$  ( $k_c b = 5.136$ ), etc .

#### I.2.2.4 Les modes d'ordre supérieur

On obtient les composantes précédentes en utilisant les expressions générales des modes TE et TM, dans le cas d'un système de coordonnées cylindriques.

Connaissant les solutions de l'équation scalaire d'Helmholtz, nous pouvons déduire les expressions générales des modes TM ou TE.

- Dans le cas d'un mode TM :

$$\begin{cases} E_{0\rho} = -A \frac{\gamma}{k_c} j'_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ E_{0\varphi} = A \frac{\gamma_m}{k_c^2 \rho} j_m(k_c \rho) \sin(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ E_{0z} = A j_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (I.17)$$

$$\begin{cases} H_{0\rho} = -jA \frac{\omega \epsilon_m}{k_c^2 \rho} j_m(k_c \rho) \sin(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ H_{0\varphi} = -jA \frac{\omega \epsilon}{k_c} j'_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ H_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I.18)$$

- Dans le cas d'un mode TE :

$$\begin{cases} E_{0\rho} = jA \frac{\omega \mu_m}{k_c^2 \rho} j_m(k_c \rho) \sin(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ E_{0\varphi} = jA \frac{\omega \mu}{k_c} j'_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I.19)$$

$$\begin{cases} H_{0\rho} = -A \frac{\gamma}{k_c} j'_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ H_{0\varphi} = A \frac{\gamma m}{k_c^2 \rho} j_m(k_c \rho) \sin(m \varphi) e^{-\gamma z} \\ H_{0z} = A j_m(k_c \rho) \cos(m \varphi) e^{-\gamma z} \end{cases} \quad (I.20)$$

Le guide circulaire a la particularité de propager un mode TE<sub>11</sub> dont les pertes décroissent avec la fréquence. Ce guide a la particularité d'avoir le mode fondamental qui se propage difficilement seul sur de grandes distances [4].

### I.2.3 La propagation dans un câble coaxial

On prendra comme hypothèses que les structures de guidage à deux conducteurs sont homogènes.

Ces hypothèses étant vérifiées, la propagation des ondes s'effectue sans dispersion. Lorsque la longueur d'onde guidée est de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques de la ligne, des ondes semi-transversales TE ou TM commencent en général à se propager et on perd l'avantage de la propagation TEM non dispersive [19].

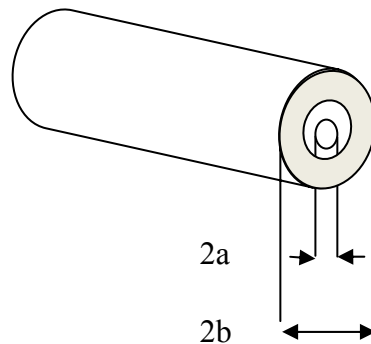


Fig. I.4 Câble coaxial

On prendra le cas du câble coaxial qui est le plus utilisé actuellement. Il est constitué par deux conducteurs de diamètres  $2a$  et  $2b$  et par un diélectrique de permittivité relative  $\epsilon_r$  qui permet de centrer le conducteur interne par rapport au conducteur externe. Sa fréquence maximale de travail se situe aux alentours de 15 GHz.

Si on suppose que la fréquence est suffisamment basse pour que la propagation s'effectue par le mode TEM uniquement, il est facile de trouver l'expression du champ en effectuant la résolution de l'équation de Laplace.

Il résulte de cette propagation que le facteur de propagation est en  $\exp[-\gamma z]$  et  $\Delta\varphi=0$

En coordonnées cylindrique  $(\rho, \theta)$ , le Laplacien a pour expression :

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} \quad (\text{I. 21})$$

Comme la structure étudiée est un cylindre de révolution, il est évident de chercher le potentiel sous la forme du produit  $\varphi(\rho, \theta) = R(\rho)T(\theta)$  avec  $\partial/\partial\theta \equiv 0$  et  $T(\theta) = \text{Constante}$ .

Finalement l'équation du potentiel à résoudre dans un condensateur coaxial, bien connue en électrostatique est donnée par :

$$\frac{\partial^2 R}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial R}{\partial\rho} = 0 \quad (\text{I. 22})$$

La double intégration de cette dérivée logarithmique fournit la solution familière :

$$R(\rho) = A' \ln \rho + B' \quad (\text{I. 23})$$

En appliquant les conditions aux limites  $\varphi_1 = A' \ln a + B'$  et  $\varphi_2 = A' \ln b + B'$ , on obtient :

$$\begin{cases} A' = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\ln(\frac{a}{b})} \\ B' = \frac{\varphi_1 \ln(b) - \varphi_2 \ln(a)}{\ln(\frac{a}{b})} \end{cases} \quad (\text{I. 24})$$

Finalement le potentiel est donné par :

$$\varphi(\rho, \theta) = \varphi_2 \frac{\ln(\frac{\rho}{a})}{\ln(\frac{b}{a})} \quad (\text{I. 25})$$

On en déduit le champ électromagnétique propagé :

$$\begin{cases} \vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \exp[-jkz] \\ \vec{H}_0 = \frac{1}{\eta} \vec{n} \times \vec{E}_0 \end{cases} \quad (I. 26)$$

Avec  $\eta$  : L'impédance caractéristique

Les composantes du champ sont exprimées en coordonnées cylindriques :

$$\begin{cases} E_{0\rho} = \frac{A}{\rho} \exp[-jkz] \\ E_{0\theta} = 0 \\ E_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I. 27)$$

$$\begin{cases} H_{0\rho} = 0 \\ H_{0\theta} = \frac{1}{\eta} \frac{A}{\rho} \exp[-jkz] \\ H_{0z} = 0 \end{cases} \quad (I. 28)$$

Le champ électrique est radial et le champ magnétique est ortho radial.

En effet, comme,  $\vec{E}_0 = -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \exp[-jkz]$ , on peut calculer l'intégrale pour  $z$  fixe :

$$\begin{aligned} V(z) &= \int_{\text{Conducteur intérieur}}^{\text{Conducteur extérieur}} \vec{E}_0 \cdot d\vec{l} = \exp[-jkz] \int_{\text{Conducteur intérieur}}^{\text{Conducteur extérieur}} -\overrightarrow{\text{grad}} \varphi \cdot d\vec{l} \\ &= A \ln\left(\frac{b}{a}\right) \exp[-jkz] \end{aligned} \quad (I. 29)$$

De même on peut calculer les intensités  $I_1$  et  $I_2$  associées aux courants surfaciques  $J_{s1}$ ,  $J_{s2}$  circulant sur les conducteurs intérieurs et extérieurs de la normale de  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$ .

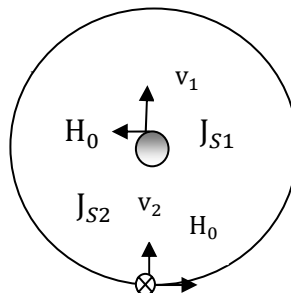


Fig. I.5 Orientation des densités de courant sur les conducteurs

On calcule les densités de courant et les courants sur chacun des conducteurs :

- Sur le conducteur intérieur, on obtient  $J_{S1} = \frac{1}{\eta} \frac{A}{a} \exp[-jkz]$  d'où le courant sur le périmètre  $2\pi a$ :  $I_1(z) = 2\pi a J_{S1} = \frac{2\pi}{\eta} A \exp[-jkz]$
- Sur le conducteur extérieur, on trouve  $J_{S2} = \frac{-1}{\eta} \frac{A}{b} \exp[-jkz]$  d'où le courant sur le périmètre  $2\pi b$ :  $I_2(z) = 2\pi b J_{S2} = \frac{-2\pi}{\eta} A \exp[-jkz]$

$$\text{avec } \overrightarrow{J_{S1}} = J_{S1} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{H_0} \text{ et } \overrightarrow{J_{S2}} = J_{S2} \overrightarrow{n} = \overrightarrow{v_2} \times \overrightarrow{H_0}$$

On remarque que  $I_1(z) = -I_2(z)$ , caractéristique de l'onde TEM qui en se propageant, impose un déphasage de  $\pi$  entre les courants des deux conducteurs.

On dispose donc de deux grandeurs ne dépendent que de la coordonnée  $z$  :

- Une tension  $v(z) = A \ln\left(\frac{b}{a}\right) \exp[-jkz]$
- Un courant  $I(z) = \frac{2\pi}{\eta} A \exp[-jkz]$

On remarque alors que le rapport  $\frac{v(z)}{I(z)}$  ne dépend pas de  $z$ .

On définit alors l'impédance caractéristique du câble coaxial, en général égale à 75 ou 50  $\Omega$ , en fonction uniquement de la géométrie et des propriétés diélectriques de la ligne par la relation :

$$z_c = \frac{v(z)}{I(z)} = \frac{\eta}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \frac{60}{\sqrt{\epsilon_r}} \ln\left(\frac{b}{a}\right) [4] \quad (I.30)$$

## I.3 Bilan de puissance

### I.3.1 Théorème de Poynting

On établit un bilan d'énergie relatif à la création d'un champ électromagnétique à l'aide du théorème de Poynting.

### I.3.2 Régime temporel

Pour créer un champ électromagnétique, il faut fournir de l'énergie à partir d'une source de densité de courant  $\overrightarrow{J}_a$ .

À chaque instant, l'énergie électromagnétique est localisée dans le milieu avec une densité :

$$\frac{1}{2} [\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{H} \cdot \vec{B}] \quad (I.31)$$

L'énergie électromagnétique contenue dans un domaine fermé  $\Omega$  et contenant les sources s'écrit sous la forme suivante :

$$T(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\vec{E} \cdot \vec{D}] dx + \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\vec{H} \cdot \vec{B}] dx = T_E(t) + T_H(t) \quad (I.32)$$

$T_E(t)$  : représente la contribution des grandeurs électriques.

$T_H(t)$  : représente la contribution des grandeurs magnétiques.

En milieu linéaire et isotrope (non nécessairement homogène) et à réaction instantanée, cette relation devient :

$$T(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\varepsilon |E|^2 + \mu |H|^2] dx \quad (I.33)$$

L'évolution de cette énergie au cours du temps est décrite par la dérivée :

$$T'(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \left[ \varepsilon E \cdot \frac{\partial E}{\partial t} + \mu H \cdot \frac{\partial H}{\partial t} \right] dx \quad (I.34)$$

Par substitution des dérivées temporelles et en utilisant les équations de Maxwell, on obtient:

$$T'(t) = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} [\vec{E} \cdot (\overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{J} - \vec{J}_a) - \vec{H} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{E}] dx \quad (I.35)$$

En regroupant les termes, et en supposant que la loi d'Ohm est vérifiée, on obtient :

$$T'(t) = \underbrace{\iiint_{\Omega} [\vec{E} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{H} - \vec{H} \cdot \overrightarrow{rot} \vec{E}] dx}_{-W_r} + \underbrace{-\iiint_{\Omega} \frac{|J|^2}{\sigma} dx}_{-W_j} + \underbrace{-\iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J}_a dx}_{W_a} \quad (I.36)$$

Trois termes apparaissent :

- $W_r$  : Le flux du vecteur de Poynting
- $W_j$  : La puissance dissipée par effet Joule dans les parties conductrices intérieures au domaine  $\Omega$  (toujours positive)

- $W_a$  : La puissance fournie par les sources appliquées contre le champ électrique (signe moins) qui n'est autre que la puissance d'alimentation.

Nous remarquons que l'expression du  $W_r$  correspond à un vecteur :

$$\vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H} - \vec{H} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} = \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) = -\text{div}(\vec{P})$$

Où  $\vec{P} = (\vec{E} \times \vec{H})$  est le vecteur de Poynting.

L'application du théorème de la divergence donne :

$$W_r = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{P}) dx = \iint \vec{P} \cdot \vec{n} ds \quad (I.37)$$

ds est la surface qui délimite  $\Omega$ , de normale sortante  $\vec{n}$

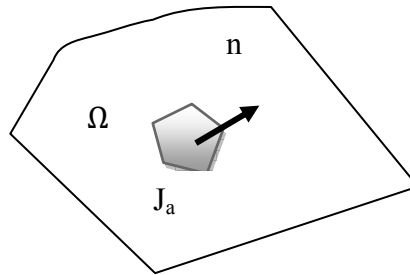


Fig. I.6 Domaine d'application du théorème de Poynting

Finalement, le bilan de puissance est donné par :

$$W_a = T'(t) + W_J + W_r \quad (I.38)$$

Notons que la puissance d'alimentation se compose de 3 termes :

$T'(t)$  : La croissance de l'énergie électromagnétique localisée dans  $\Omega$  ;

$W_J$  : L'échauffement des parties conductrices contenues dans  $\Omega$  ;

$W_r$  : La puissance rayonnée vers l'extérieur du domaine. [20]

En conclusion on peut dire que le bilan peut être considéré comme suit :

Puissance fournie = Pertes Joule + puissance électromagnétique rayonnée

Puissance fournie = Pertes Joule + puissance électromagnétique rayonnée

### I.3.3 Régime sinusoïdal

En régime sinusoïdal, l'expression complexe du vecteur de Poynting est donnée par la relation :

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \vec{E} \times \vec{H}^* = \vec{P}' + j\vec{P}'' \quad (\text{I.39})$$

Le facteur  $\frac{1}{2}$  indique la valeur moyenne du produit vectoriel en régime sinusoïdal.

Si  $J_a$  est la densité de courant appliquée par les sources, alors :

$$\begin{aligned} \text{div}(\vec{E} \times \vec{H}^*) &= \vec{H}^* \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{E} - \vec{E} \cdot \overrightarrow{\text{rot}} \vec{H}^* \\ &= j\omega(\varepsilon \|\vec{E}\|^2 - \mu \|\vec{H}\|^2) - \frac{\|\vec{J}\|^2}{\sigma} - \vec{E} \cdot \vec{J}_a^* \end{aligned}$$

En intégrant dans le volume  $\Omega$ , alors :

$$W_a = W_r + W_J + j2(\overline{T}_H - \overline{T}_E) \quad (\text{I.40})$$

$$W_a = W'_a + jW''_a = \iiint_{\Omega} \vec{E} \cdot \vec{J}_a^* dx \quad (\text{I.41})$$

$W_a$  représente la puissance d'alimentation complexe, composée d'une partie active  $W'_a$  représentant la valeur moyenne de la puissance instantanée appliquée et d'une partie réactive  $W''_a$  qui caractérise les échanges réactifs, à valeur moyenne nulle, entre la source et le domaine.

$W_J = \frac{1}{2} \iiint_{\Omega} \frac{\|\vec{J}\|^2}{\sigma} dx$  est la puissance active dissipée par effet joule dans les parties conductrices de  $\Omega$ .

- $W_r = W'_r + jW''_r = \iint \vec{P} \cdot \vec{n} ds$  représente la puissance complexe rayonnée à travers  $\Omega$  avec :  
 $W'_r$  est la partie active du flux moyen du vecteur de poynting correspondant à la puissance rayonnée, et la partie réactive.  
 $W''_r$  est la partie réactive correspondant aux échanges réactifs (à moyenne nulle) entre le domaine  $\Omega$  et le milieu extérieur.

- $\overline{T_E} = \frac{1}{4} \iiint_{\Omega} \varepsilon \|E\|^2 dx$  correspond à l'énergie électrique moyenne localisée dans  $\Omega$ .
- $\overline{T_H} = \frac{1}{4} \iiint_{\Omega} \mu \|H\|^2 dx$  correspond à l'énergie magnétique moyenne localisée dans  $\Omega$ .

On peut conclure que le théorème de Poynting en régime sinusoïdale est constitué de deux relations qui expriment la conservation des puissances actives et réactives :

$$\begin{cases} W'_a = W'_r + W_J \\ W''_a = W''_r + 2\omega(\overline{T_H} - \overline{T_E}) \end{cases} \quad (I.42)$$

- La puissance active appliquée se trouve en puissance active du champ rayonnée et en puissance dissipée par effet Joule.
- La puissance réactive de la source se répartit entre le champ rayonné et un terme proportionnel à l'excédent moyen d'énergie magnétique par rapport à l'énergie électrique dans  $\Omega$ . [20]

#### I.4 L'excitation d'un guide d'onde

Considérons le problème de l'excitation d'un guide d'onde rectangulaire à l'aide d'un câble coaxial qui débouche dans la grande cote de guide. [21]

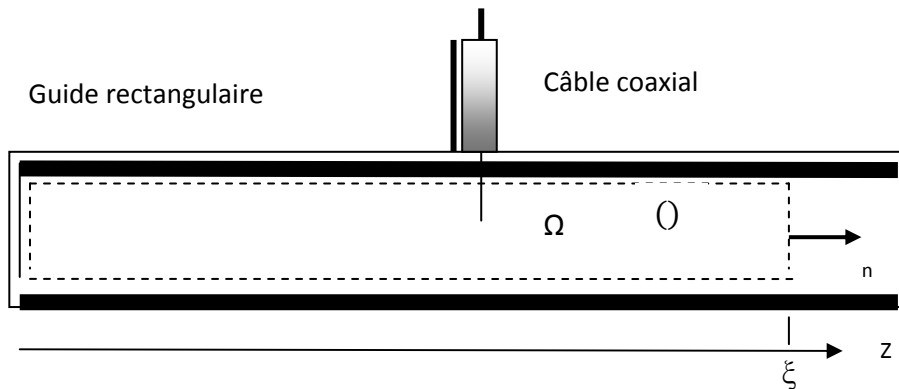


Fig. I.7 Transition entre un guide d'onde et un câble coaxial

On définit le domaine  $\Omega$  comme étant un parallélépipède remplissant le contenu du guide, de surface .

On suppose que ce courant représente de façon satisfaisante la contribution du câble coaxial, car on ne s'intéresse pas aux phénomènes de propagation dans le câble.

Le champ électrique étant normal aux conducteurs. Il est évident que le mode fondamental  $TE_{10}$  n'est pas l'unique mode créé au voisinage de la source puisqu'il est caractérisé par un champ électrique purement transversal.

Visiblement le mode fondamental ne vérifie pas les conditions aux limites au voisinage du fil. Si le guide fonctionne dans sa gamme usuelle de fréquences à grande distance, seul le mode fondamental peut se propager.

On en déduit que la source engendre dans son voisinage des modes d'ordre supérieur ( $TM_{mn}$  ou  $TE_{mn}$ ) qui sont évanescents pour la propagation suivant  $z$  et qui, en s'éloignant de la source, cèdent peu à peu l'énergie au mode fondamental  $TE_{10}$ .

La somme des modes d'ordre supérieur et du mode fondamental vérifie les conditions aux limites imposées par la présence du coaxial.

Pour compléter cette description, il est intéressant de calculer la puissance transportée dans le guide par un mode  $TE_{mn}$  ou  $TM_{mn}$ , qui n'est rien d'autre que le flux du vecteur de Poynting à travers une surface limitée à la section droite du guide  $c$ , puisque les côtés du domaine  $\Omega$  en contact avec les parois du guide d'onde apportent une contribution nulle à l'intégrale (champ électrique normal à la surface d'où annulation du produit scalaire  $\vec{P} \cdot \vec{n}$ ).

Dans le cas d'un mode  $TM$ , la puissance  $W_{TM}$  se calcule facilement à partir des expressions des champs. On trouve :

$$W_{TM} = \frac{k k_g}{2\eta k_c^4} \exp[-2\text{Re}(\gamma)z] \iint \|\text{grad}E_z\|^2 ds \quad (\text{I. 43})$$

Dans le cas de la propagation d'un mode  $TE$ , on obtient:

$$W_{TE} = \frac{\eta k k_g}{2\eta k_c^4} \exp[-2\text{Re}(\gamma)z] \iint \|\text{grad}H_z\|^2 ds \quad (\text{I. 44})$$

On a donc une dépendance en  $\exp[-2\text{Re}(\gamma)z]$  de la puissance transportée à calculer

pour  $z = \xi$ .

Dans le cas du mode  $TE_{10}$  qui se propage,  $\text{Re}(\gamma)$  est nul pour une structure sans perte et  $k_g$  est réel. La puissance transportée est constante.

Dans le cas des modes d'ordre supérieur qui sont évanescents, on a  $Re(\gamma) > 0$  et  $k_g$  imaginaire pur, donc la puissance transportée par ces modes est un imaginaire pur et son module s'atténue exponentiellement suivant  $z$ .

En appliquant le théorème de Poynting au domaine  $\Omega$ , on obtient :

$$\begin{cases} W'_a = W'_r + W_j \\ W''_a = W''_r + 2\omega(\overline{T}_H - \overline{T}_E) \end{cases} \quad (I.45)$$

En l'absence de pertes  $W_j = 0$  d'où  $W'_a = W'_r$

D'après ce qui précède, on a :

$$W'_r = W_{TE10}, \quad jW''_r = \{ \sum W_{TEmn} + \sum W_{TMmn} \} |_{(m,n) \neq (1,0)}$$

On fait une sommation sur l'ensemble des modes d'ordre supérieur excités par la transition.

En faisant croître  $\xi$  vers l'infini, on obtient :

$$W''_r = 2\omega(\overline{T}_H - \overline{T}_E) |_{\text{dans tout le guide}} \quad (I.46)$$

On en déduit que la puissance réactive appliquée par la source est le produit de  $2\omega$  par l'excès d'énergie magnétique moyenne sur l'énergie électrique moyenne, localisée dans la totalité du guide.

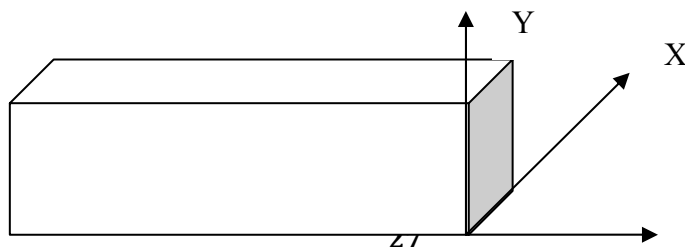
Le flux de Poynting se réduit à grande distance des sources à sa partie active et la puissance active appliquée est par conséquent la puissance transportée par les modes évanescents du guide.

En s'éloignant de la source, les échanges réactifs deviennent de plus en plus faibles. [4]

## I.5 Méthode d'analyse

### I.5.1 Analyse par la méthode des opérateurs transversaux

Cette méthode s'applique à une structure dans laquelle un guide débouche sur un espace libre voir Fig.I.8.



Z

 $Z_0$ 

Fig. I.8 Exemple de structure ouverte

$z$  désigne la direction de propagation du guide d'entrée,  $z = z_0$  est le plan de discontinuité. Comme la propagation en espace libre se fait en ondes planes, nous considérons qu'une onde guidée se décompose, dans le plan de la discontinuité, en une infinité d'ondes planes avec un angle d'incidence qui varie continûment, ce qui correspond, dans le domaine de FOURIER, à un spectre continu [14].

Le facteur  $e^{-jk_n z}$  que l'on voit apparaître souvent dans l'étude de l'onde guidé est alors remplacé par l'expression  $e^{-j\vec{k}(\lambda) \cdot \vec{r}}$  et la séparation des variables comme en coordonnées cartésiennes est impossible. Nous devons revenir alors à la formulation d'origine en opérateur transverse [22].

$$\hat{L} \cdot \Phi(x, y, z) = j\eta \frac{\partial \Phi(x, y, z)}{\partial z} \quad (\text{I.47})$$

Avec :

$$\Phi = \begin{bmatrix} E_t \\ j Z_0 H_t \end{bmatrix} \Phi_0$$

$$\eta = \begin{bmatrix} 0 & \dots & -j \\ 0 & -j & \vdots \\ j & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} k_0 \epsilon_E + \frac{1}{k_0} \partial_t \left[ \frac{1}{\mu_{33}} \partial_t^+ \right] \frac{\epsilon_{t3}}{\epsilon_{33}} \partial_t^+ - \partial_t \frac{\mu_{3t}}{\mu_{33}} \\ \frac{\mu_{t3}}{\mu_{33}} \partial_t^+ - \partial_t \frac{\epsilon_{3t}}{\epsilon_{33}} k_0 \mu_E + \frac{1}{k_0} \partial_t \left[ \frac{1}{\epsilon_{33}} \partial_t^+ \right] \end{bmatrix}$$

Dans ce cas, on obtient la matrice de diffraction de la discontinuité guide-espace libre ainsi que la distribution des champs dans l'ouverture. Afin de bien analyser le couplage entre tous les modes d'ordre supérieur. Voir (Annexe C)

## I.6 Conclusion

Lorsque la constante de propagation diffère de celle en espace libre, les champs les plus généraux se propageant en ondes planes, s'expriment entièrement en fonction des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ . Deux types de solutions sont appelées modes, les modes TM et TE, correspondant à des champs physiquement indépendants.

Dans le cas des structures non homogènes, il y a pas de séparation physique entre les modes TE et TM (modes hybrides) qui correspondent aux conditions  $E_z \neq 0$  et  $H_z \neq 0$ . Physiquement, ces conditions imposent au champ électrique  $E$  d'être normal au conducteur et au champ magnétique  $H$  d'être tangent.

Pour une structure de guidage homogène, on peut affirmer que la seule condition aux limites sur le champ électrique est qu'il doit être normal en tout point de la surface des conducteurs.

Un guide d'ondes se comporte pour chaque mode, comme un filtre passe-haut. En dessous de la fréquence de coupure, le mode est évanescent, ce qui correspond à son atténuation exponentielle en fonction de  $z$ . Le guide circulaire a la particularité de se propager en mode  $TE_{11}$ , dont les pertes décroissent avec la fréquence. Pour le câble coaxial, lorsque la longueur d'onde guidée est de l'ordre de grandeur des dimensions caractéristiques de la ligne, des ondes semi-transversales TE ou TM commencent en général à se propager et on perd l'avantage de la propagation TEM non dispersive. La puissance d'alimentation relative à la création d'un champ électromagnétique dans un guide se décompose en puissance dissipée par effet Joule et puissance rayonnée dans le régime temporel. Par contre en régime sinusoïdal, la puissance rayonnée se divise en puissance active et réactive.

La source engendre des modes d'ordre supérieur ( $TM_{mn}$  ou  $TE_{mn}$ ) qui seront atténués. Seul le mode  $TE_{10}$  qui se propage à grande distance.

Enfin, on peut obtenir l'expression du champ en un point quelconque par la méthode des opérateurs transversaux. Il nous reste à déterminer les formules qui caractérisent l'ouverture rayonnante, c'est l'objet du chapitre II.

## II Mise en équations du problème

### II.1 Introduction

Les problèmes d'électromagnétisme sont pour la plupart des problèmes d'intégration des équations de Maxwell, c'est-à-dire la résolution d'un système linéaire d'équations aux dérivées partielles.

L'un des cas les plus simples est celui des milieux parfaits (le vide) limités par des conducteurs parfaits. Les premières solutions, avant l'intervention des ordinateurs, ont été apportées pour des conducteurs avec des repères à coordonnées pour lesquelles il existe généralement une solution analytique [1].

Après avoir présenté l'étude du champ à l'intérieur du guide, nous nous intéressons dans ce chapitre à la détermination des équations des champs rayonnants à l'ouverture du guide d'onde.

### II.2 Formulation mathématique

Dans un milieu parfait, on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\text{rot}}\vec{E} + j\omega\mu\vec{H} = \vec{0} \\ \overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} - j\omega\varepsilon\vec{E} = \vec{J} \end{cases} \quad (\text{II. 1})$$

On déduit :  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = -j\omega\mu\overrightarrow{\text{rot}}\vec{H} = -j\omega\mu\vec{J} + \omega^2\varepsilon\mu\vec{E}$

On note  $k^2 = \omega^2\varepsilon\mu$

Où  $k$  est la constante de propagation.

Or,  $\overrightarrow{\text{rot}}(\overrightarrow{\text{rot}}\vec{E}) = \overrightarrow{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta\vec{E}$  et de plus,  $\text{div}\vec{J} + j\omega\rho = 0$  et  $\text{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon}$  [4].

Si l'on fait l'hypothèse que le milieu est homogène ( $\varepsilon$  est constant),

On obtient :  $\text{div}\vec{E} = \frac{\text{div}\vec{J}}{j\omega\varepsilon}$ .

Finalement, on aboutit aux deux équations vectorielles dites d'Helmholtz avec second membre

$$\begin{cases} \Delta \vec{E} + k^2 \vec{E} = \frac{j}{\omega \epsilon} (\overrightarrow{\text{grad}} \text{div} + k^2) \vec{J} \\ \Delta \vec{H} + k^2 \vec{H} = -\overrightarrow{\text{rot}} \vec{J} \end{cases} \quad (\text{II. 2})$$

Il s'agit de résoudre un problème du type :  $\Delta \vec{X} + k^2 \vec{X} = \vec{F}$

Avec :

$\vec{F}$  : la distribution vectorielle

$\vec{X}$  : le vecteur inconnu.

Ce problème équivaut aux trois équations aux dérivées partielles scalaires à seconds membres

$$X_i + k^2 X_i = F_i$$

Avec  $i = 1, 2 \text{ ou } 3$

Une solution particulière de ce type d'équations est la convolution  $X_i = G * F_i$ , où G est une solution élémentaire de l'équation

$$\Delta G + k^2 G = \delta(x) \quad (\text{II.3})$$

La solution de l'équation (II. 3) est la fonction  $G(x) = \frac{\exp[-jk|x|]}{4\pi|x|}$ , dite fonction de Green de l'espace libre.

Physiquement, cette solution peut être considérée comme étant une onde sphérique scalaire divergente (dépendance temporelle en  $\exp[j\omega t]$ ) émise par un point source situé à l'origine. La fonction de Green a une forme simple dans un milieu parfait, en particulier homogène et isotrope. Ce n'est pas le cas dans un milieu plus complexe puisque la fonction de Green ne pourrait pas se réduire à un scalaire, mais serait de nature tensorielle.

Puisque la distribution de Dirac est un élément neutre pour la convolution, on vérifie bien que :

$$\begin{aligned} \Delta X_i + k^2 X_i &= \Delta[G * F_i] + k^2 G * F_i = (\Delta G + k^2 G) * F_i = \delta(x) * F_i \\ &= F_i \end{aligned} \quad (\text{II. 4})$$

A cette solution particulière, il convient d'ajouter la solution générale de l'équation homogène  $\Delta X + k^2 X = 0$ .

En remplaçant  $X$  par  $E$  ou  $H$  dans l'expression II.4, on déduit l'expression du champ électromagnétique rayonné (solution), que l'on notera  $\vec{E}_r$  ou  $\vec{H}_r$ :

$$\begin{cases} \vec{E}_r = \frac{j}{\omega\epsilon} (\overrightarrow{grad div} + K^2)(G * \vec{J}) \\ \vec{H}_r = -\overrightarrow{rot}(G * \vec{J}) \end{cases} \quad (II.5)$$

Ces relations de convolution expriment le fait que le champ rayonné par une densité de courant  $J$  peut s'interpréter comme la contribution d'une infinité de points source (qui rayonnent  $G$ ) dont l'amplitude complexe est pondérée par la densité de courant  $J$  à opérateur différentiel près.

### II.2.1 L'équation de champ équivalent

Les champs rayonnant dans les ouvertures (antennes, les lignes, les guides à terminaison libres, les cornets, les réflecteurs) deviennent des sources de rayonnement à larges distances par principe de Huygens-Fresnel, dans laquelle chaque fin d'onde devient la source d'une seconde onde propagatrice vers l'extérieur afin de générer des ondes progressives [17].

Soient  $\vec{E}_a$  et  $\vec{H}_a$  les champs tangentiels à l'ouverture, comme illustrée sur la figure suivante :

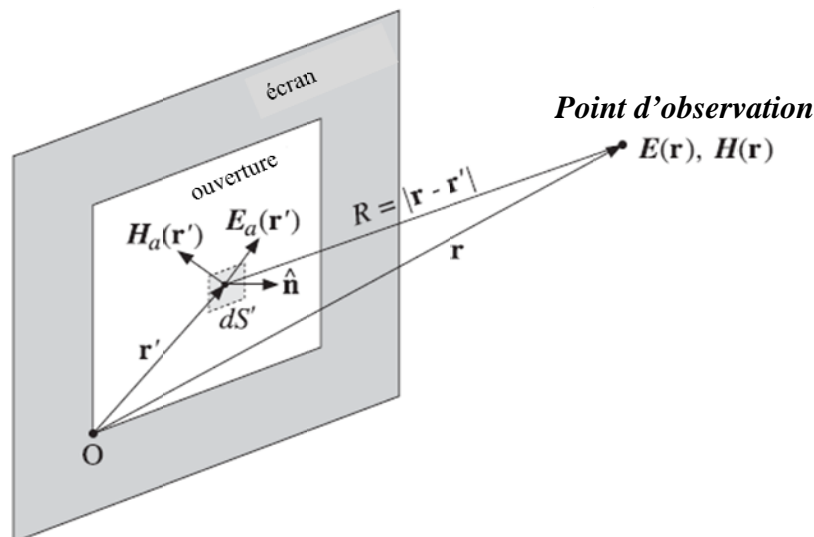


Fig.II.1 Le champ rayonnant dans une ouverture

Le problème est de déterminer les champs rayonnants  $E(r)$  et  $H(r)$  en quelques points d'observation.

Les champs rayonnants peuvent être calculés à l'aide du principe de champ équivalent, c'est-à-dire qu'on remplace les champs à ouvertures par les courants électriques et magnétiques de surface équivalents.  $\vec{E}_a$

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \vec{n} \times \vec{H}_a \\ \vec{J}_{ms} = \vec{n} \times \vec{E}_a \end{cases} \quad (II.6)$$

Avec :

$\vec{J}_s$  : le courant électrique de surface

$\vec{J}_{ms}$  : le courant magnétique de surface

$\vec{n}$  : le vecteur unité normal à la surface et au côté de champ de radiation.

L'ouverture peut être terminée par une plaque à conducteur parfait ou sans plaque, ou bien seulement une antenne réflectrice comme est illustré dans la figure II.2.

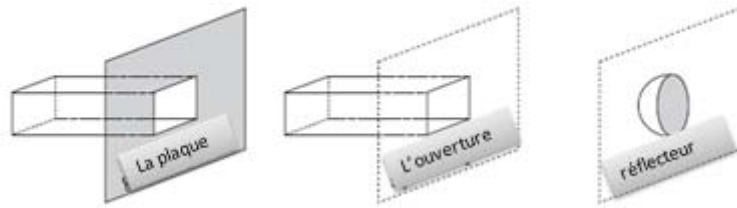


Fig. II.2 Exemples des plans d'ouvertures

Il y a deux formes alternatives du champ équivalent qui sont utilisées quand un des champs  $\vec{E}_a$  ou  $\vec{H}_a$  soit présent à l'ouverture

$$\begin{cases} \vec{J}_s = \vec{0} \\ \vec{J}_{ms} = -2 (\vec{n} \times \vec{E}_a) \end{cases} \quad \text{conducteur électrique parfait} \quad (II.7)$$

$$\begin{cases} \vec{J}_s = 2 (\vec{n} \times \vec{H}_a) \\ \vec{J}_{ms} = 0 \end{cases} \quad \text{conducteur magnétique parfait} \quad (II.8)$$

Ces deux propriétés sont quand la plaque est un conducteur électrique parfait ( $\vec{E}_a = 0$ ), ou quand on a une plaque magnétique parfaite ( $\vec{H}_a = 0$ ).

### II.2.2 Le principe de la dualité

Nous considérons la solution des équations de Maxwell (on espace libre) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{J} + j \omega \epsilon \vec{E} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\vec{J}_m - j \omega \mu \vec{H} \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = \frac{1}{\mu} \rho_m \end{array} \right. \quad (II.9)$$

Où

$\rho$  : la densité de charge

$J$  : la densité de courant ordinaire

$\rho_m$  : la densité de charge magnétique

$J_m$  : la densité de courant magnétique.

On constate qu'il y a une dualité entre la quantité électrique et magnétique et on peut vérifier facilement la dualité par l'utilisation des analogies suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} E \rightarrow H & J \rightarrow J_m & A \rightarrow A_m \\ H \rightarrow -E & \rho \rightarrow \rho_m & \varphi \rightarrow \varphi_m \\ \epsilon \rightarrow \mu & J_m \rightarrow -J & A_m \rightarrow -A \\ \mu \rightarrow \epsilon & \rho_m \rightarrow -\rho & \varphi_m \rightarrow -\varphi \end{array} \right. \quad (II.10)$$

Où  $\varphi$ ,  $A$  et  $\varphi_m$ ,  $A_m$  sont les potentiels.

Cette dualité nous donne la possibilité de déduire l'expression de champ magnétique  $\vec{H}$  à partir de l'expression du champ électrique  $\vec{E}$ .

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{E} = -\nabla \varphi - j \omega \vec{A} - \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{array} \right. \quad (II.11)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{H} = -\nabla \varphi_m - j \omega \vec{A}_m - \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A}_m \end{array} \right. \quad (II.12)$$

Les potentiels scalaires satisfaisant les conditions de Lorenz donc les équations (II.11) et (II.12) deviennent :

$$\begin{cases} \nabla \cdot A + j\omega\epsilon\mu \varphi = 0 \\ \nabla^2 \varphi + K^2 \varphi = -\frac{\rho}{\epsilon} \\ \nabla^2 A + K^2 A = -\epsilon J \end{cases} \quad (II.13)$$

$$\begin{cases} \nabla \cdot A_m + j\omega\epsilon\mu \varphi_m = 0 \\ \nabla^2 \varphi_m + K^2 \varphi_m = -\frac{\rho_m}{\mu} \\ \nabla^2 A_m + K_2 A_m = -\mu J \end{cases} \quad (II.14)$$

Les solutions de l'équation d'Helmholtz sont données par le terme  $G(r - r') = \frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|}$

$$\begin{cases} \varphi(r) = \int_V \frac{1}{\epsilon} \rho(r') G(r - r') dv' \\ A(r) = \int_V \mu J(r') G(r - r') dv' \end{cases} \quad (II.15)$$

$$\begin{cases} \varphi_m(r) = \int_V \frac{1}{\epsilon} \rho_m(r') G(r - r') dv' \\ A_m(r) = \int_V \mu J_m(r') G(r - r') dv' \end{cases} \quad (II.16)$$

Où  $V$  est le volume dans lesquels la densité de charges et le courant ne sont pas nulles. L'observateur au point  $r$  est considéré en dehors de ce volume. Les équations (II.14) ,(II.15) peuvent se présenter sous la forme suivante :  $\vec{Am}$

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) + K^2 \vec{A}] - \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{Am} \\ \vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} [\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{Am}) + K^2 \vec{Am}] + \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (II.17)$$

Elles peuvent être écrites sous la forme :

$$\begin{cases} \vec{E} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \mu \vec{J}] - \frac{1}{\epsilon} \vec{\nabla} \times \vec{Am} \\ \vec{H} = \frac{1}{j\omega\mu\epsilon} [\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{Am}) - \epsilon \vec{Jm}] + \frac{1}{\mu} \vec{\nabla} \times \vec{A} \end{cases} \quad (II.18)$$

En remplaçant  $A$  et  $A_m$  des équations (II.15), (II.16) on peut directement exprimer la solution de l'équation (II.17) en terme des densités de courant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_v [K2 JG + (J \cdot \nabla') \nabla' G - j\omega\epsilon Jm \times \nabla' G] dV' \\ H = \frac{1}{j\omega\mu} \int_v [K2 Jm G + (Jm \cdot \nabla') \nabla' G + j\omega\mu J \times \nabla' G] dV' \end{array} \right. \quad (II.19)$$

Alternativement, si nous utilisons les densités de charges, nous pouvons obtenir à partir des équations (II.11), (II.12) le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \int_v [ -j\omega\mu JG + \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' G - Jm \times \nabla' G ] dV' \\ H = \int_v [ -j\omega\epsilon Jm G + \frac{\rho_m}{\mu} \nabla' G + J \times \nabla' G ] dV' \end{array} \right. \quad (II.20)$$

En utilisant la dualité on obtient les équations des champs  $\vec{E}$  et  $\vec{H}$  à l'ouverture en fonction de densité de courant.

### II.2.3 L'intensité de rayonnement

Les champs rayonnants de la solution des équations (II.18) peuvent être obtenus par l'approximation du champ lointain, ce qui nous permet de faire les changements suivants :

$$\frac{e^{-jk|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \cong \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk \cdot r'} \quad (II.21)$$

Alors, les vecteurs potentiels des équations (II.15), (II.16) peuvent être simplifiés sous la forme :

$$\left\{ \begin{array}{l} A(r) = \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk \cdot r'} F(\theta, \varphi) \\ A_m(r) = \epsilon \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} e^{jk \cdot r'} F_m(\theta, \varphi) \end{array} \right. \quad (II.22)$$

Où les vecteurs rayonnants  $\vec{F}$  et  $\vec{F}_m$  sont les transformées de Fourier des densités de courant

$$\begin{cases} F(\theta, \varphi) = \int_v J(r') e^{jk \cdot r'} dv' \\ F_m(\theta, \varphi) = \int_v J_m(r') e^{jk \cdot r'} dv' \end{cases} \quad (II.23)$$

Si on impose  $J = J_m = 0$  dans les équations (II.21), (II.22) en supposant que les champs sont lointains des sources de courant et si on utilise l'approximation  $\nabla \cong -jK = -jK \hat{r}$  et la relation  $K/\epsilon = \omega\eta$ , ( $\eta = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$  : l'impédance intrinsèque du milieu de propagation). On détermine les expressions des champs  $E$  et  $H$  :

$$\begin{cases} E = -j\omega[\hat{r} \times (A \times \hat{r}) - \eta \hat{r} \times A_m] = -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \hat{r} \times [\eta F \times \hat{r} - F_m] \\ H = -\frac{j\omega}{\eta} [\eta \hat{r} \times (A_m \times \hat{r}) + \hat{r} \times A] = -\frac{jk}{\eta} \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \hat{r} \times [\eta F + F_m \times \hat{r}] \end{cases} \quad (II.24)$$

On sait que :

$$H = \frac{1}{\eta} \hat{r} \times E$$

$$\hat{r} \times (F \times \hat{r}) = \hat{\theta} F_\theta + \hat{\phi} F_\phi$$

$$\hat{r} \times F = \hat{\phi} F_\theta - \hat{\theta} F_\phi$$

En portant ces expressions dans l'équation (II.24), on détermine les expressions des champs  $E$  et  $H$  en composantes polaires :

$$\begin{cases} E = -jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \cdot [\hat{\theta} (\eta F_\theta + F_{m\phi}) + \hat{\phi} (\eta F_\phi - F_{m\theta})] \\ H = -\frac{jk}{\eta} \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} \cdot [-\hat{\theta} (\eta F_\phi - F_{m\theta}) + \hat{\phi} (\eta F_\theta - F_{m\phi})] \end{cases} \quad (II.25)$$

Le vecteur de Poynting est donné alors par :

$$P = \frac{1}{2} \text{Re} (E \times H^*) \quad (II.26)$$

En remplaçant les champs  $E$  et  $H$  par leurs expressions on obtient :

$$P = \hat{r} \frac{K^2}{32 \pi^2 \eta r^2} [ |\eta F_\theta + F_{m\varphi}|^2 + |\eta F_\varphi + F_{m\theta}|^2 ]$$

$$P = \hat{r} Pr \tag{II.27}$$

Et l'intensité de rayonnement est définie par:

$$U(\theta, \varphi) = \frac{dP}{d\Omega} \quad \text{avec } \Omega : \text{l'angle solide}$$

$$= r^2 Pr$$

$$U(\theta, \varphi) = \frac{K^2}{32 \pi^2 \eta} [ |\eta F_\theta + F_{m\varphi}|^2 + |\eta F_\varphi - F_{m\theta}|^2 ] \tag{II.28}$$

### II.2.4 Les champs de rayonnement

Pour une ouverture d'antenne avec un courant de surface effective donné par les équations (II.1), le volume à intégrer dans les équations (II.19) se réduit à la surface d'intégration à ouverture  $A$ .

$$\begin{cases} E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_A [ (J_s \cdot \nabla') \nabla' G + k^2 J_s G - j\omega\epsilon J_{ms} \times \nabla' G ] ds' \\ H = \frac{1}{j\omega\mu} \int_A [ (J_{ms} \cdot \nabla') \nabla' G + k^2 J_{ms} G + j\omega\mu J_s \times \nabla' G ] ds' \end{cases} \tag{II.29}$$

L'équation (II.29) peut être aussi présentée en fonction des champs équivalents à l'ouverture sous la forme suivante:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_A [ (\hat{n} \times H_a) \cdot \nabla' (\nabla' G) + k^2 (\hat{n} \times H_a) G + j\omega\epsilon (\hat{n} \times E_a) \times \nabla' G ] ds' \\ H = \frac{1}{j\omega\mu} \int_A [ -(\hat{n} \times E_a) \cdot \nabla' (\nabla' G) - k^2 (\hat{n} \times E_a) G + j\omega\mu (\hat{n} \times H_a) \times \nabla' G ] ds' \end{cases} \tag{II.30}$$

Ces formules sont connues sous nom formules de Kottler [1].

A la limite du champ lointain, les champs rayonnants sont donnés par l'équation (II.25), et le vecteur rayonnant est donné dans ce cas par la transformée de Fourier à deux dimensions sous forme d'intégrale à l'ouverture :

$$\begin{cases} F(\theta, \varphi) = \int_A J_s(r') e^{jk \cdot r'} dS' = \int_A \hat{n} \times H_a(r') e^{jk \cdot r'} dS' \\ F_m(\theta, \varphi) = \int_A J_{ms}(r') e^{jk \cdot r'} dS' = - \int_A \hat{n} \times E_a(r') e^{jk \cdot r'} dS' \end{cases} \quad (II.31)$$

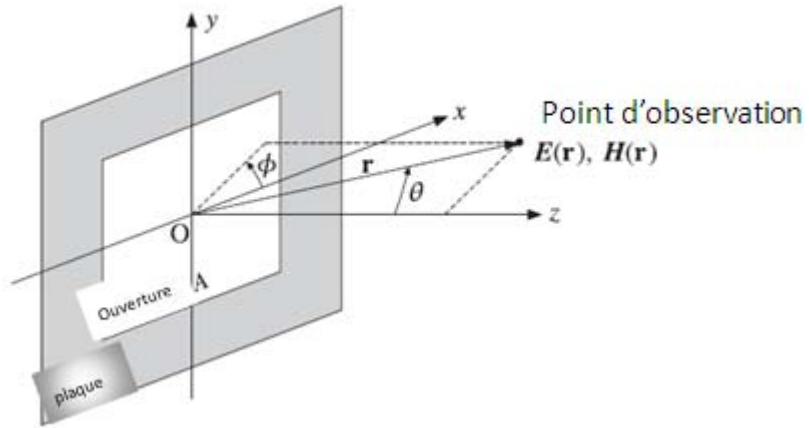


Fig. II.3 Les champs rayonnent d'une ouverture

La figure (II.3) présente les angles polaires conventionnels, où l'origine est le milieu de l'ouverture A. La normale à l'ouverture est  $\hat{n} = \hat{z}$ . La surface de l'ouverture est  $dS' = dx'dy'$ . L'équation (II.31) devient :

$$\begin{cases} F(\theta, \varphi) = \int_A J_s(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' = \hat{z} \times \int_A H_a(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' \\ F_m(\theta, \varphi) = \int_A J_{ms}(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' = -\hat{z} \times \int_A E_a(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' \end{cases} \quad (II.32)$$

Avec :  $e^{jk \cdot r'} = e^{jk_x x' + jk_y y'}$  et  $k_x = k \cos \varphi \sin \theta$ ,  $k_y = k \sin \varphi \sin \theta$ .

Les équations de Fourier à deux dimensions peuvent être écrites sous la forme:

$$\begin{cases} F(\theta, \varphi) = \int_A E_a(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' = \int_A E_a(x', y') e^{jk_x x' + jk_y y'} dx'dy' \\ g(\theta, \varphi) = \int_A H_a(r') e^{jk \cdot r'} dx'dy' = \int_A H_a(x', y') e^{jk_x x' + jk_y y'} dx'dy' \end{cases} \quad (II.33)$$

Donc les vecteurs rayonnants deviennent :

$$\begin{cases} F(\theta, \varphi) = \hat{z} \times g(\theta, \varphi) \\ F_m(\theta, \varphi) = -\hat{z} \times F(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (II.34)$$

Comme  $E_a$ ,  $H_a$  sont tangentiels au plan de l'ouverture, elles peuvent être résolues en utilisant les coordonnées cartésiennes en posant:  $E_a = \hat{x} E_x + \hat{y} E_y$ . Alors, les quantités  $f$  et  $g$  peuvent être résolues de la même manière en posant  $f = \hat{x} f_x + \hat{y} f_y$ .

Donc l'équation (II.34) devient :

$$\begin{cases} F = \hat{z} \times g = \hat{z} \times (\hat{x} g_x + \hat{y} g_y) = \hat{y} g_x - \hat{x} g_y \\ F_m = -\hat{z} \times f = -\hat{z} \times (\hat{x} f_x + \hat{y} f_y) = \hat{x} f_y - \hat{y} f_x \end{cases} \quad (II.35)$$

Les composantes polaires des vecteurs rayonnants sont :

$$f_\theta = \hat{\theta} \cdot f = \hat{\theta} \cdot (\hat{y} g_x - \hat{x} g_y) = g_x \cos \theta \sin \varphi - g_y \cos \theta \sin \theta$$

Donc

$$\begin{cases} f_\theta = -\cos \theta (g_y \cos \varphi - g_x \sin \varphi) \\ f_\varphi = g_x \cos \varphi + g_y \sin \varphi \end{cases} \quad (II.36)$$

$$\begin{cases} f_{m\theta} = \cos \theta (f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi) \\ f_{m\varphi} = -(f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi) \end{cases} \quad (II.37)$$

L'équation (II.25) peut se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} E_\theta = jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [(\eta \cos \theta (g_y \cos \varphi - g_x \sin \varphi) + (f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi))] \\ E_\varphi = \frac{jk}{\eta} \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [\cos \theta (f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi) - \eta (g_x \cos \varphi + g_y \sin \varphi)] \end{cases} \quad (II.38)$$

Les champs rayonnants résultants des formes alternatives déduites du principe du champ équivalent des équations (II.7) et (II.8) sont obtenus en remplaçant les termes  $g$  ou  $f$  par :

$$\begin{cases} E_\theta = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi] \\ E_\varphi = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [\cos \theta (f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi)] \end{cases} \quad (\text{II.39})$$

On obtient pour les cas de PCM :

$$\begin{cases} E_\theta = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [\eta \cos \theta (g_y \cos \varphi - g_x \sin \varphi)] \\ E_\varphi = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [-\eta (g_x \cos \varphi + g_y \sin \varphi)] \end{cases} \quad (\text{II.40})$$

Les champs magnétiques sont obtenus à partir des expressions :

$$\begin{cases} H_\theta = -1/\eta E_\varphi \\ H_\varphi = 1/\eta E_\theta \end{cases} \quad (\text{II.41})$$

Notons que l'équation (II.38) est la moyenne des équations (II.39) et (II.40).

La composante  $H$  est donnée par l'équation :

$$\begin{cases} H_\theta = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [g_x \cos \varphi + g_y \sin \varphi] \\ H_\varphi = 2jk \frac{e^{-jk r}}{4\pi r} [\cos \theta (g_y \cos \varphi - g_x \sin \varphi)] \end{cases} \quad (\text{II.42})$$

Pour  $\theta = 90^\circ$ , les composantes  $E_\varphi$  et  $H_\varphi$  sont tangentielles à la plaque de l'ouverture. Notons que les champs  $H_\varphi$  et  $E_\varphi$  seront affaiblis dans les cas de PEC (resp. PMC) par les conditions aux limites à cause du facteur  $\cos \theta$ .

### II.2.5 La source de Huygens

Les champs rayonnants  $E_a$ ,  $H_a$  sont considérés comme une source de Huygens si à tout point de l'ouverture elles sont reliées par la relation uniforme d'onde plane.

$$H_a = 1/\eta \hat{n} \times E_a \quad (\text{II.43})$$

Dans le cas d'une onde plane uniforme incidente normale au plan de l'ouverture comme le montre la figure II.4, les champs à l'ouverture sont supposés égaux aux champs incidents  $E_a = E_{inc}$  et  $H_a = H_{inc}$ , et les champs incidents satisfaisant l'équation :

$$H_{inc} = \hat{z} \times E_{inc} / \eta \tag{II.44}$$

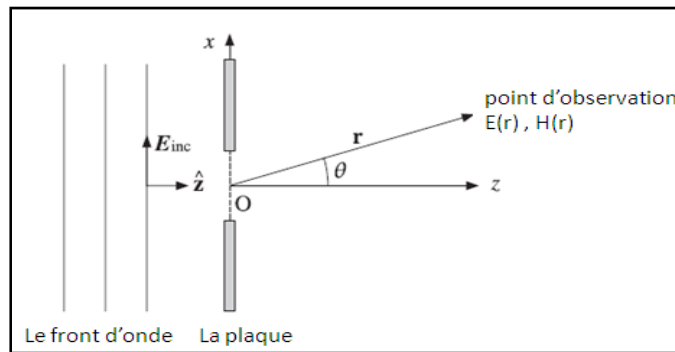


Fig. II.4 Onde plan incident à une ouverture

La condition de la source de Huygens n'est pas toujours satisfaite. Si l'onde incidente est oblique à l'ouverture, alors  $\eta$  doit être remplacé par l'impédance transverse  $\eta_t$  qui dépend de l'angle incident et de la polarisation de l'onde incidente.

De la même façon, si l'ouverture est un guide d'onde, donc  $\eta$  doit être remplacée par l'impédance transversale de guide ( $\eta_{TE}$  ou  $\eta_{TM}$ ) qui dépend du mode propagé dans le guide.

La condition de la source de Huygens est en relation avec la transformée de Fourier des champs à l'ouverture. avec ( $\hat{n} = \hat{z}$ )

$$g = 1/\eta \hat{n} \times f \longrightarrow g_x = -1/\eta f_y, \quad g_y = 1/\eta f_x$$

En portant ces équations dans l'équation (II.36), nous pouvons exprimer le champ rayonnant par le terme f.

$$\begin{cases} E_\theta = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{2} [(f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi)] \\ E_\varphi = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} \frac{1 + \cos \theta}{2} [(f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi)] \end{cases} \tag{II.45}$$

Le facteur  $\frac{1+\cos\theta}{2}$  est connu sous le nom de facteur oblique [1].

Dans le cas de PEC, l'équation (II.38) reste invariable pour une source de Huygens. Dans le cas de PMC elle devient :

$$\begin{cases} E_{\theta} = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} \cos\theta [f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi] \\ E_{\varphi} = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} [f_y \cos\varphi - f_x \sin\varphi] \end{cases} \quad (II.46)$$

Nous pouvons résumer tous ces cas par les équations des champs pour une source de Huygens

$$\begin{cases} E_{\theta} = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} c_{\theta} [f_x \cos\varphi + f_y \sin\varphi] \\ E_{\varphi} = jk \frac{e^{-jk r}}{2\pi r} c_{\varphi} [f_y \cos\varphi - f_x \sin\varphi] \end{cases} \quad (II.47)$$

Où le facteur oblique est défini pour les différents cas :

$$\begin{bmatrix} c_{\theta} \\ c_{\varphi} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos\theta \\ 1 + \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \cos\theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos\theta \\ 1 \end{bmatrix} \text{ sont les facteurs obliques}$$

Dans le cas de modification de la source de Huygens et en remplaçant  $\eta$  par  $\eta_T$ , l'équation (II.44) devient :

$$H_a = \frac{1}{\eta_t} \hat{z} \times E_a \longrightarrow g = 1/\eta_t \hat{z} \times f$$

En insérant ces expressions dans l'équation (II.38), nous obtenons une modification du facteur oblique :

$$\begin{cases} c_{\theta} = \frac{1}{2} [1 + K \cos\theta] \\ c_{\varphi} = \frac{1}{2} [1 + K \cos\theta], K = \frac{\eta}{\eta_t} \end{cases} \quad (II.48)$$

### II.2.6 La directivité et l'efficacité de la surface rayonnante

Pour n'importe quelle ouverture, l'intensité rayonnante exprimée en fonction des champs rayonnants  $E_\theta$  et  $E_\varphi$ , est donnée par :

$$U(\theta, \varphi) = \frac{dP}{d\Omega} = r^2 P_r = r^2 \frac{1}{2\eta} [ |E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2 ]$$

$$U(\theta, \varphi) = r^2 \frac{1}{2\eta} |E(\theta, \varphi)|^2 \quad (II.49)$$

A l'ouverture, les champs rayonnants sont donnés seulement pour la partie droite de l'espace  $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ . L'énergie rayonnante totale et l'intensité rayonnante effective isotopique sont données par :

$$P_{rad} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} U(\theta, \varphi) d\Omega \quad (II.50)$$

$$U_I = \frac{P_{rad}}{4\pi} \quad (II.51)$$

Le gain directif est donné par :

$$D(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_I} \quad (II.52)$$

Le gain normalisé est donné par :

$$g(\theta, \varphi) = \frac{U(\theta, \varphi)}{U_{max}} \quad (II.53)$$

Pour une ouverture typique, le maximum d'intensité  $U_{max}$  est donné à  $\theta = 0^\circ$  dans le cas d'une source de Huygens par :

$$U(\theta, \varphi) = \frac{K^2}{8\pi^2 \eta} [ c_\theta^2 |f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi|^2 + c_\varphi^2 |f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi|^2 ] \quad (II.54)$$

Pour  $\theta = 0^\circ$ , et  $c_\theta = c_\varphi = 1$ , on trouve un maximum d'intensité tel que :

$$U_{max} = \frac{K^2}{8\pi^2 \eta} [ |f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi|^2 + |f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi|^2 ]_{\theta=0}$$

$$= \frac{K^2}{8\pi^2 \eta} [ |f_x|^2 + |f_y|^2 ]_{\theta=0} = \frac{K^2}{8\pi^2 \eta} = |f|_{max}^2$$

Où  $|f|_{max}^2 = [ |f_x|^2 + |f_y|^2 ]_{\theta=0}$  et  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$

On obtient :

$$U_{\max} = \frac{1}{2\lambda^2 \eta} |f|_{\max}^2 \quad (\text{II. 55})$$

Le gain normalisé est donné par :

$$g(\theta, \varphi) = \frac{c_\theta^2 |f_x \cos \varphi + f_y \sin \varphi|^2 + c_\varphi^2 |f_y \cos \varphi - f_x \sin \varphi|^2}{|f|_{\max}^2} \quad (\text{II. 56})$$

Dans le cas de l'équation (II.49) dont  $c_\theta = c_\varphi = \frac{(1+\cos\theta)}{2}$ , l'expression du gain se simplifie et on obtient l'équation suivante :

$$g(\theta, \varphi) = c_\theta^2 \frac{|f_x|^2 + |f_y|^2}{|f|_{\max}^2} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right)^2 \frac{|f(\theta, \varphi)|^2}{|f|_{\max}^2} \quad (\text{II. 57})$$

La valeur moyenne du gain de champ est donnée par :

$$\frac{|E(\theta, \varphi)|}{|E|_{\max}} = \sqrt{g(\theta, \varphi)} = \left(\frac{1+\cos\theta}{2}\right) \frac{|f(\theta, \varphi)|}{|f|_{\max}} \quad (\text{II. 58})$$

L'équation (II.49) permet le calcul de l'énergie totale de rayonnement de demi-espace de l'ouverture en fonction de rayon  $r$ . Notons l'existence d'une autre méthode de calcul à base de la source de Huygens :

$$\begin{aligned} P_{\text{rad}} &= \int_A P_z ds' = \frac{1}{2} \int_A \hat{z} \cdot \text{Re} [E_a \times H_a^*] ds' \\ P_{\text{rad}} &= \frac{1}{2\eta} \int_A |E_a(r')|^2 ds' \end{aligned} \quad (\text{II. 59})$$

A  $\theta = 0^\circ$  on a  $k_x = k_y = 0$ , la transformé de Fourier de l'équation (II.33) devient :

$$|f|_{\max}^2 = \left| \int_A E_a(r') e^{jk_r r'} ds' \right|_{k_x=k_y=0}^2 = \left| \int_A E_a(r') ds' \right|^2$$

Ainsi, l'intensité maximale est donnée par :

$$U_{\max} = \frac{1}{2\lambda^2 \eta} |f|_{\max}^2 = \frac{1}{2\lambda^2 \eta} \left| \int_A E_a(r') ds' \right|^2 \quad (\text{II. 60})$$

En divisant (II. 60) par (II.59), on détermine la directivité :

$$D_{\max} = 4 \pi \frac{U_{\max}}{P_{\text{rad}}} = \frac{4 \pi}{\lambda^2} \frac{|\int_A E_a(r') ds'|^2}{\int_A |E_a(r')|^2 ds'}$$

$$D_{\max} = \frac{4 \pi A_{\text{eff}}}{\lambda^2} \quad (\text{I. 61})$$

avec :

$A_{\text{eff}}$  : Zone d'efficacité qui est définie par :

$$A_{\text{eff}} = \frac{|\int_A E_a(r') ds'|^2}{\int_A |E_a(r')|^2 ds'} \leq A \quad (\text{II. 62})$$

Et l'efficacité de l'ouverture :

$$e_a = \frac{A_{\text{eff}}}{A} = \frac{|\int_A E_a(r') ds'|^2}{A \int_A |E_a(r')|^2 ds'} \leq 1 \quad (\text{II. 63})$$

L'ouverture uniforme présente une grande directivité et une zone d'efficacité égale à sa surface géométrique. L'intégrale de numérateur de  $e_a$  dépend de l'amplitude et de la phase du champ  $E_a$ . Elle peut cependant être séparée en deux valeurs :

$$e_{\text{atl}} = \frac{|\int_A E_a(r') ds'|^2}{A \int_A |E_a(r')|^2 ds'}$$

$$e_{\text{pel}} = \frac{|\int_A E_a(r') ds'|^2}{|\int_A |E_a(r')| ds'|^2}$$

Avec  $e_a = e_{\text{atl}} e_{\text{pel}}$

### II.2.7 Cas des ouvertures uniformes

Dans les ouvertures uniformes, les champs  $E_a$ ,  $H_a$  sont supposés être constants sur toute l'ouverture. La figure suivante présente un exemple d'ouverture rectangulaire et circulaire.

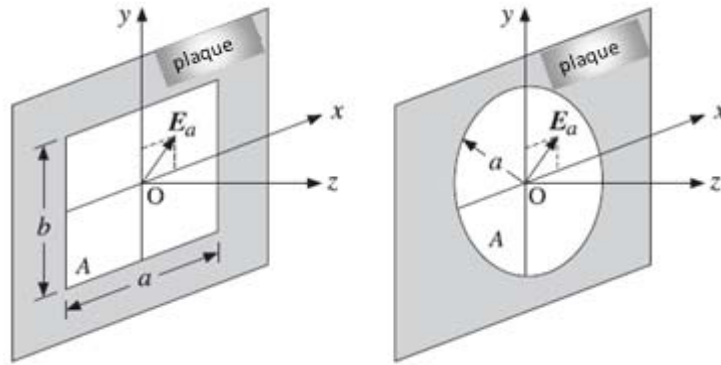


Fig. II.5 Ouverture rectangulaire et circulaire

Le champ  $E_a$  peut avoir une direction arbitraire, avec des composantes sur les axes  $X, Y$ ,

$$E_a = \hat{x}E_{0x} + \hat{y}E_{0y} \tag{II.64}$$

Comme  $E_a$  est constant, sa transformé de Fourier  $f(\theta, \varphi)$  devient :

$$f(\theta, \varphi) = \int_A E_a(r') e^{jkr'} ds' = E_a \int_A e^{jkr'} ds' \equiv A f(\theta, \varphi) E_a \tag{II.65}$$

En introduisant la normalisation de la quantité scalaire :

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{A} \int_A e^{jkr'} ds' \tag{II.66}$$

La quantité  $f(\theta, \varphi)$  dépend de la géométrie de l'ouverture et comme  $f(\theta, \varphi) = \frac{1}{A} \int_A ds' = 1$ , nous pouvons trouver le gain normalisé et la puissance du champ :

$$\frac{|E(\theta, \varphi)|}{|E|_{\max}} = \sqrt{g(\theta, \varphi)} = \left( \frac{1 + \cos \theta}{2} \right) |f(\theta, \varphi)| \tag{II.67}$$

### II.2.7.1 Les ouvertures rectangulaires

Pour les ouvertures rectangulaires de dimensions  $a, b$ , l'intégrale de surface (II.63) est déterminé par la décomposition cartésienne  $x$  et  $y$  :

$$f(\theta, \varphi) = \frac{1}{ab} \int_A \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk_x x' + jk_y y'} dx' dy'$$

$$= \frac{1}{a} \int_{-a/2}^{a/2} e^{jk_x x'} dx' \cdot \frac{1}{b} \int_{-b/2}^{b/2} e^{jk_y y'} dy$$

Le résultat de cette intégrale est un sinus cardinal.

$$f(\theta, \varphi) = \frac{\sin(k_x a/2)}{k_x a/2} \frac{\sin(k_y b/2)}{k_y b/2} = \frac{\sin(\pi v_x)}{\pi v_x} \frac{\sin(\pi v_y)}{\pi v_y} \quad (II.68)$$

Nous définissons les quantités  $v_x$  et  $v_y$  comme suit :

$$\begin{cases} v_x = \frac{1}{2\pi} k_x a = \frac{1}{2\pi} ka \sin \theta \cos \varphi = \frac{a}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi \\ v_y = \frac{1}{2\pi} k_y b = \frac{1}{2\pi} kb \sin \theta \cos \varphi = \frac{b}{\lambda} \sin \theta \cos \varphi \end{cases} \quad (II.69)$$

La formule simplifiée le long de deux plans principaux, XZ-YZ, correspondant à  $\varphi = 0^\circ$  et  $\varphi = 90^\circ$  est donnée par :

$$\begin{cases} f(\theta, 0^\circ) = \frac{\sin(\pi v_x)}{\pi v_x} = \frac{\sin((\pi a/\lambda) \sin \theta)}{(\pi a/\lambda) \sin \theta} \\ f(\theta, 90^\circ) = \frac{\sin(\pi v_y)}{\pi v_y} = \frac{\sin((\pi b/\lambda) \sin \theta)}{(\pi b/\lambda) \sin \theta} \end{cases} \quad (II.70)$$

### II.2.7.2 Les ouvertures circulaires

Pour une ouverture circulaire de rayon  $a$ , le modèle intégral (II.67) peut être résolu en utilisant les coordonnées cylindriques.

Pour que la fonction  $f(\theta, \varphi)$  devient indépendante de la variable  $\varphi$ , prenant le cas de  $\varphi = 0$ , nous aurons alors,  $k \cdot r' = k_x x' = k \rho' \sin \theta \cos \varphi' \cdot dS' = \rho' d\rho' d\varphi'$

$$f(\theta) = \frac{1}{\pi a^2} \int_0^a \int_0^{2\pi} e^{jk \rho' \sin \theta \cos \varphi'} \rho' d\rho' d\varphi' \quad (II.71)$$

L'intégrale  $\varphi'$  et  $\rho'$  peut être calculé en utilisant les fonctions de Bessel  $J_0(x)$  et  $J_1(x)$  :

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{jx \cos \varphi'} d\varphi' \quad \text{et} \quad \int_0^1 J_0(xr) r dr = \frac{J_1(x)}{x}$$

Alors l'équation (II.45) sera donnée par:

$$f(\theta) = 2 \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta}$$

$$f(\theta) = 2 \frac{J_1(2\pi u)}{2\pi u} \quad (\text{II. 72})$$

### II.2.8 Le vecteur de diffraction

Pour une ouverture de surface « S » limitée par un contour C, comme le montre la figure (II.6), les formules de Kottler et Franz sont liées par les formules d'intégrales de Stratton-chu et Kirchhoff [1].

$$E(r) = \frac{1}{j\omega\epsilon} \int_S [K^2 G(\hat{n} \times H) + ((\hat{n} \times H) \cdot \nabla') \nabla' G + j\omega\epsilon(\hat{n} \times E) \times \nabla' G] dS'$$

$$= \frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times (\nabla \times \int_S G(\hat{n} \times H) dS') + \nabla \times \int_S G(\hat{n} \times E) dS'$$

$$= \int_S [-j\omega\mu G(\hat{n} \times H) + (\hat{n} \cdot E) \nabla' G + (\hat{n} \times E) \times \nabla' G] dS' - \frac{1}{j\omega\epsilon} \oint_C (\nabla' G) H \cdot dl$$

$$E(r) = \int_S \left[ E \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial E}{\partial n'} \right] dS' - \oint_C G E \times dl - \frac{1}{j\omega\epsilon} \oint_C (\nabla' G) H \cdot dl \quad (\text{II. 73})$$

$$H(r) = \frac{1}{j\omega\mu} \int_S [-K^2 G(\hat{n} \times E) - ((\hat{n} \times E) \cdot \nabla') \nabla' G + j\omega\mu(\hat{n} \times H) \times \nabla' G] dS'$$

$$= -\frac{1}{j\omega\epsilon} \nabla \times (\nabla \times \int_S G(\hat{n} \times E) dS') + \nabla \times \int_S G(\hat{n} \times H) dS'$$

$$= \int_S [j\omega\epsilon G(\hat{n} \times E) + (\hat{n} \cdot H) \nabla' G + (\hat{n} \times H) \times \nabla' G] dS' + \frac{1}{j\omega\mu} \oint_C (\nabla' G) E \cdot dl$$

$$H(r) = \int_S \left[ H \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial H}{\partial n'} \right] dS' - \oint_C G H \times dl + \frac{1}{j\omega\epsilon} \oint_C (\nabla' G) E \cdot dl \quad (\text{II. 74})$$

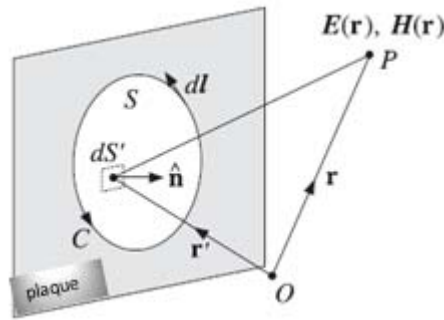


Fig. II.6 Ouverture de surface S limite par le contour

**II.2.8.1 La diffraction de Fresnel**

Nous allons présenter le problème de diffraction de l'onde sphérique par le bord de l'ouverture rectangulaire en utilisant la formule de l'intégrale de Kirchhoff.

Le champ diffracté au point  $P_2$  peut être calculé par la formule de Kirchhoff en utilisant les composantes cartésiennes du champ:

$$E = \int_S [E_1 \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial E_1}{\partial n'}] dS' \tag{II.75}$$

Où  $E_1$  est l'onde sphérique de la source  $P_1$  mesurée à l'ouverture au point  $P'$ , et G est la fonction Green de  $P'$  pour  $P_2$  :

$$E_1 = A_1 \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \tag{II.76}$$

$$G = \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \tag{II.77}$$

Où  $A_1$  est une constante. Si  $r_1$  et  $r_2$  sont respectivement les vecteurs du point original et d'observation, on obtient alors pour les distances  $R_1$  et  $R_2$  :

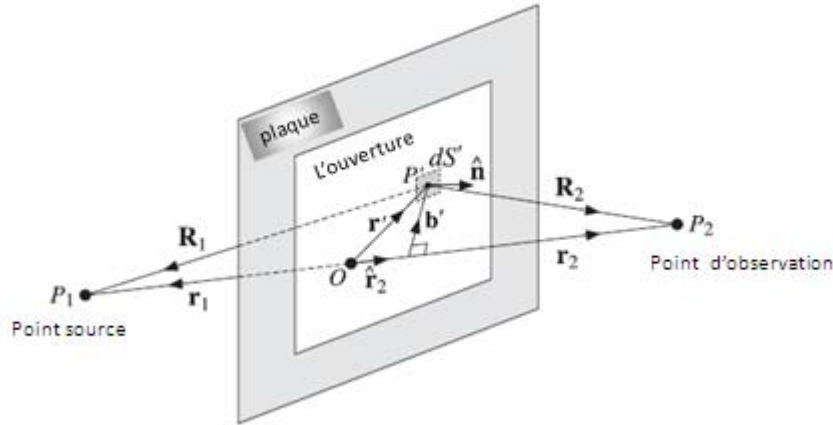


Fig. II.7 La diffraction de Fresnel à travers l'ouverture rectangulaire

$$\begin{cases} R_1 = r_1 - r', & R_1 = |r_1 - r'| = \sqrt{r_1^2 - 2r_1 \cdot r' + r'^2} \\ R_2 = r_2 - r', & R_2 = |r_2 - r'| = \sqrt{r_2^2 - 2r_2 \cdot r' + r'^2} \end{cases} \quad (78)$$

Cependant, l'opérateur gradient  $\nabla'$  peut être écrit en fonction de  $R_1$  ou  $R_2$  sous la forme:

$$\nabla' = -\widehat{R}_1 \frac{\partial}{\partial R_1}, \quad \nabla' = -\widehat{R}_2 \frac{\partial}{\partial R_2}$$

Où  $\widehat{R}_1$  et  $\widehat{R}_2$  sont les vecteurs unités dans la direction de  $R_1$  et  $R_2$ .

Ainsi, nous avons :

$$\frac{\partial E_1}{\partial n'} = \widehat{n} \cdot \nabla' E_1 = -\widehat{n} \cdot \widehat{R}_1 \frac{\partial E_1}{\partial R_1} = (\widehat{n} \cdot \widehat{R}_1) \left( jk + \frac{1}{R_1} \right) A_1 \frac{e^{-jkR_1}}{R_1} \quad (II.79)$$

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \widehat{n} \cdot \nabla' G = -\widehat{n} \cdot \widehat{R}_2 \frac{\partial G}{\partial R_2} = (\widehat{n} \cdot \widehat{R}_2) \left( jk + \frac{1}{R_2} \right) \frac{e^{-jkR_2}}{4\pi R_2} \quad (II.80)$$

En remplaçant  $R_1 \cong r_1$  et  $R_2 \cong r_2$ .

Nous trouvons l'intégrale de l'équation (II.75) :

$$E_1 \frac{\partial G}{\partial n'} - G \frac{\partial E_1}{\partial n'} = \frac{jkA_1}{4\pi r_2 r_1} [(\widehat{n} \cdot \widehat{r}_2) - (\widehat{n} \cdot \widehat{r}_1)] e^{-jk(R_2+R_1)} \quad (II.81)$$

Ainsi, nous avons pour la diffraction du champ au point  $P_2$ :

$$E = \frac{jkA_1}{4\pi r_2 r_1} [(\hat{n} \cdot \hat{r}_2) - (\hat{n} \cdot \hat{r}_1)] \int_S e^{-jk(R_2+R_1)} dS' \quad (II.82)$$

La quantité  $[(\hat{n} \cdot \hat{r}_2) - (\hat{n} \cdot \hat{r}_1)]$  est un facteur oblique. En posant  $r = r_1 + r_2$ , on définit le champ dans l'espace libre au point  $P_2$ :

$$E_0 = A_1 \frac{e^{-jk(r_1+r_2)}}{r_1+r_2} = A_1 \frac{e^{-jkr}}{r} \quad (II.83)$$

Si l'origine est un point d'interaction entre le plan de l'ouverture et la ligne  $P_2P_1$ , alors  $E_0$  peut représenter le champ au point  $P_2$  dans le cas d'absence de l'écran à l'ouverture. [22]

Le taux  $D = \frac{E}{E_0}$  peut être appelé le coefficient de diffraction, qui dépend de l'ouverture et de la géométrie relative aux points  $P_2, P_1$ :

$$D = \frac{E}{E_0} = \frac{jk}{4\pi F} [(\hat{n} \cdot \hat{r}_2) - (\hat{n} \cdot \hat{r}_1)] \int_S e^{-jk(R_2+R_1-r_1-r_2)} dS' \quad (II.84)$$

Nous définissons le point focal entre  $r_1$  et  $r_2$ :

$$\frac{1}{F} = \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{r_1 r_2}{r_2 + r_1}$$

L'approximation est obtenue par l'expression de  $R_1$  et  $R_2$  dans  $r'$  et en gardant seulement le terme du second ordre. On peut écrire l'équation (II.53) sous la forme suivante:

$$\begin{cases} R_1 = r_1 \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}_1 \cdot r'}{r_1} + \frac{r' \cdot r'}{r_1^2}} \\ R_2 = r_2 \sqrt{1 - \frac{2\hat{r}_2 \cdot r'}{r_2} + \frac{r' \cdot r'}{r_2^2}} \end{cases} \quad (II.85)$$

,

Ensuite, nous appliquons le développement en séries de Taylor de second ordre:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

Qui donne les approximations de  $R_1, R_2$  et  $R_1 + R_2 - r_1 - r_2$ :

$$R_1 = r_1 - \hat{r}_1 \cdot r' + \frac{1}{2r_1} [r' \cdot r' - (\hat{r}_1 \cdot r')^2]$$

$$R_2 = r_2 - \hat{r}_2 \cdot r' + \frac{1}{2r_2} [r' \cdot r' - (\hat{r}_2 \cdot r')^2]$$

$$R_1 + R_2 - r_1 - r_2 = -(\hat{r}_1 + \hat{r}_2) \cdot r' + \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} \right] r' \cdot r' - \frac{(\hat{r}_1 \cdot r')^2}{r_1} - \frac{(\hat{r}_2 \cdot r')^2}{r_2}$$

Pour simplifier cette expression, nous supposons que l'origine est le point d'intersection de la ligne  $P_1P_2$  avec le plan de l'ouverture. Les vecteurs  $r_1$  et  $r_2$  sont antiparallèles et alors les vecteurs unités sont  $\hat{r}_1 = -\hat{r}_2$  (Les termes linéaires s'annulent avec les termes quadratiques) :

$$R_1 + R_2 - r_1 - r_2 = \frac{1}{2F} [r' \cdot r' - (\hat{r}_2 \cdot r')^2] = \frac{1}{2F} |r' - \hat{r}_2 (\hat{r}_2 \cdot r')|^2 = \frac{1}{2F} b' \cdot b'$$

Nous définissons  $b' = r' - \hat{r}_2 (\hat{r}_2 \cdot r')$ , vecteur perpendiculaire à la droite  $P_1P_2$  au point  $p'$ , comme le montre la figure (II.49)

Suivant l'approximation de Fresnel, le coefficient de diffraction  $D$  pour une ouverture arbitraire est donné par :

$$D = \frac{E}{E_0} = \frac{jk(\hat{n} \cdot \hat{r}_2)}{2\pi F} \int_S e^{-jk(b' \cdot b')/(2F)} dS' \quad (II.86)$$

Une simplification est obtenue en supposant que le plan de l'ouverture est bien le plan  $xy$  et que la droite  $P_1P_2$  est liée au plan  $yz$  par un angle  $\theta$  sur l'axe  $z$ , comme il est illustré sur la figure (II.8)

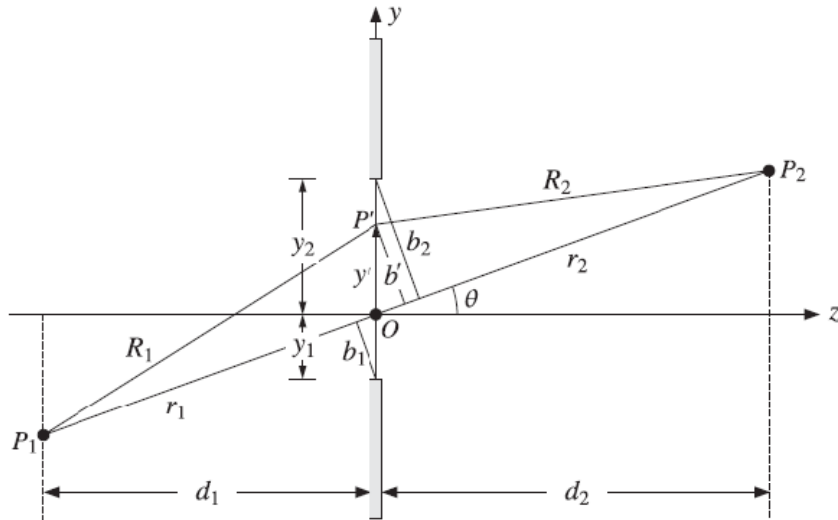


Fig. II.8 La diffraction de Fresnel par l'ouverture rectangulaire

Nous avons, dans ce cas :  $r' = x'\hat{x} + y'\hat{y}$ ,  $\hat{n} = \hat{z}$ , et  $\hat{r}_2 = \hat{z} \cos \theta + \hat{y} \sin \theta$ .

Comme  $\hat{n} \cdot \hat{r}_2 = \cos \theta$ , et les plans sont perpendiculaires, le produit scalaire «  $b' \cdot b'$  » est donné par :

$$b' \cdot b' = r' \cdot r' - (\hat{r}_2 \cdot r')^2 = x'^2 + y'^2 - (y' \sin \theta)^2 = x'^2 + y'^2 \cos^2 \theta$$

Alors, le coefficient de diffraction (II.58) devient :

$$D = \frac{jk \cos \theta}{2\pi F} \int_{-x_1}^{x_2} \int_{-y_1}^{y_2} e^{-jk(x'^2 + y'^2 \cos^2 \theta)/2F} dx' dy' \quad (II.87)$$

Nous supposons que les limites à l'ouverture sont :

$$-x_1 \leq x' \leq x_2, \quad -y_1 \leq y' \leq y_2$$

Les points terminaux  $y_1, y_2$  sont représentés sur figure (II.50). Les intégrales peuvent être exprimées en fonction des fonctions de Fresnel  $C(x)$ ,  $S(x)$ , et  $f(x) = C(x) - jS(x)$ .

La fonction complexe  $f(x)$  est défini par :

$$f(x) = C(x) - jS(x) = \int_0^x e^{-j(\pi/2)u^2} du$$

Nous opérons un changement de variable pour normaliser les variables de Fresnel :

$$\begin{cases} u = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} x' \\ v = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} y' \cos \theta \end{cases} \quad (II.88)$$

Où  $b' = y' \cos \theta$  est perpendiculaire à la droite  $P_1P_2$  au point  $p'$ , (voir figure II.50)

Les points terminaux correspondants sont :

$$\begin{cases} u_i = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} x_i \\ v_i = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} y_i \cos \theta = \sqrt{\frac{k}{\pi F}} b_i \end{cases} \quad (II.89)$$

Avec  $i=1,2$

Notons que les quantités  $b_1 = y_1 \cos \theta$  et  $b_2 = y_2 \cos \theta$  sont les distances perpendiculaires de la droite limite  $P_1P_2$ , et comme  $du dv = (k \cos \theta / \pi F) dx' dy'$ , nous obtenons le coefficient de diffraction :

$$\begin{aligned} D &= \frac{j}{2} \int_{-u_1}^{u_2} e^{-j\pi u^2 / 2} du \int_{-v_1}^{v_2} e^{-j\pi v^2 / 2} dv \\ &= \frac{j}{2} [F(u_2) - F(-u_1)] [F(v_2) - F(-v_1)] \end{aligned}$$

soient  $f(x)$  est une fonction impaire et  $j / 2 = 1 / (1 - j)^2$ , nous obtenons :

$$D = \frac{E}{E_0} = \frac{F(u_1)+F(u_2)}{1-j} \frac{F(v_1)+F(v_2)}{1-j} \quad (II.90)$$

Le facteur normalisé  $(1 - j)$  correspond a une ouverture infinie limite par  $u_1, u_2, v_1, v_2$ . [1]

### II.3 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une méthode efficace pour la dérivation de la fonction spectrale de Green. Cette fonction a une forme simple dans un milieu parfait, en particulier homogène et isotrope. Dans un milieu plus complexe, la fonction de Green ne pourrait pas se réduire à un scalaire, mais serait de nature tensorielle.

Nous avons établi les équations du champ électromagnétique rayonné  $(E_r, H_r)$ , en fonction de la densité de courant  $J$  qui peut s'interpréter comme la contribution d'une infinité de points source (qui rayonnent  $G$ ) dont l'amplitude complexe est pondérée par la densité de courant  $J$  à opérateur différentiel près. Nous avons montré encore que champs peuvent être calculés à l'aide du principe de champ équivalent.

On a constaté qu'il y a une dualité entre la quantité électrique et magnétique. Cette dualité nous donne la possibilité de déduire l'expression de champ magnétique  $H$  à partir de l'expression du champ électrique  $E$ .

Pour les ouvertures uniformes, on a remarqué qu'elle présente une grande directivité et une zone d'efficacité égale à sa surface géométrique.

La condition de la source de Huygens n'est pas toujours satisfaite. Si l'onde incidente est oblique à l'ouverture, alors  $\eta$  doit être remplacé par l'impédance transverse  $\eta_t$ , qui dépend de l'angle incident et de la polarisation de l'onde incidente.

Nous avons également présenté les problèmes de discontinuités. Il est important de modéliser ces discontinuités (indésirables ou volontairement introduites) afin de prévoir le comportement global du circuit. Les résultats de calculs numériques que nous avons obtenus seront présentés et exploités dans le chapitre qui suit.

## III Modélisation et résultats

### III.1 Introduction

La simulation électromagnétique se fait à l'aide du Logiciel « HFSS » (*High Frequency Structure Simulator*). Le terme de simulation électromagnétique implique la résolution numérique des équations de Maxwell pour les champs électromagnétiques pour une structure donnée qui est placée dans un environnement spécifique (conditions aux limites) [26].

Compte tenu du fait qu'il n'existe pas de solutions analytiques aux équations de Maxwell (à l'exception des cas simples), de nombreuses techniques numériques ont été développées au cours de ces deux dernières décennies pour résoudre ces problèmes.

Le calcul des champs peut être effectué soit dans le domaine temporel ou dans le domaine fréquentiel. Parmi les techniques de résolution dans le domaine temporel, l'approche classiquement utilisée est la méthode des différences finies (FDTD, *Finite Difference Time Domain*) [27]. Il existe également la méthode TLM (*Transmission Line Matrix*) [28]. Pour la simulation fréquentielle, les techniques les plus utilisées sont la méthode des éléments finis (FEM, *Finite Element Method*) [29], la méthode des moments (MoM, *Method of Moments*) [30], la méthode de résonance transverse,... etc.

### III.2 Modélisation

Une fois le champ électromagnétique défini, nous passons à l'élaboration d'un modèle de circuit en tenant compte de l'action (l'influence ou l'impact) de la discontinuité sur la propagation. Pour cela, nous nous sommes intéressés à la notion de filtrage des modes à grandes distances de la discontinuité, dans les deux intervalles  $|z| > L$ . Ils ne persistent, en général, que les ondes guidées sur le mode fondamental car les modes d'ordre supérieur sont évanescents. Il ne reste, pour  $n|z| < L$ , que les trois ondes schématisés sur la figure ci-dessous (Fig.III.1) relative à une discontinuité dans le guide d'ondes [25]:

- L'onde fondamentale incidente ;
- L'onde fondamentale réfléchie;
- L'onde fondamentale transmise ;

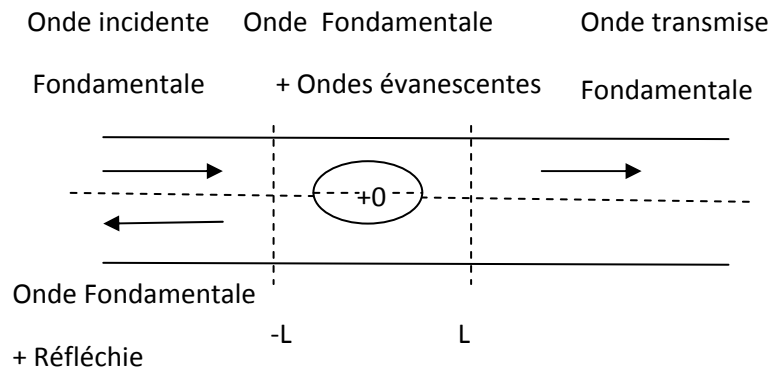


Fig. III.1 Ondes fondamentales et ondes évanescentes

Nous définissons les coefficients suivants :

- Le coefficient de réflexion  $\rho = \frac{\text{onde réfléchie fondamentale}}{\text{onde incidente fondamentale}}$
- Le coefficient de transmission  $\tau = \frac{\text{onde transmise fondamentale}}{\text{onde incidente fondamentale}}$

En pratique, il faut définir avec précision les positions des plans de référence afin de déterminer correctement les phases de ces coefficients. Il est important de placer ces plans de référence dans la zone  $|z| > L$ .

Pour qu'un circuit soit effectivement un modèle tolérable, il suffit qu'il présente le même coefficient de réflexion  $\rho$  et le même coefficient de transmission  $\tau$ . Donc le modèle peut être défini à l'aide de la matrice de répartition [4].

### III.2.1 Présentation du Logiciel « HFSS »

Comme a été déjà mentionné précédemment, le logiciel « HFSS » utilise la méthode des éléments finis, qui consiste à trouver une solution proche de la solution exacte sous la forme d'un champ électrique  $E(M,t)$  défini en morceaux sur les sous domaines de  $\Omega$ . Parmi les contraintes que nous imposons à la solution approchée recherchée, est l'existence d'une continuité simple ( $C_0$ ), au moins, aux frontières entre les sous domaines.

Le principe de la méthode est basé sur une propriété des espaces d'Hilbert qui stipule que seul le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs de cet espace.

Lors de la résolution d'un problème physique avec la méthode des éléments finis nous devons procéder par étapes successives, comme suit :

- 1) Dans un premier lieu, nous posons le problème physique sous la forme d'une équation différentielle satisfaisant, en tout point d'un domaine  $\Omega$ , les conditions aux limites nécessaires et suffisantes pour que la solution soit unique.
- 2) Nous élaborons après une formulation intégrale du système différentiel à résoudre et de ses conditions aux limites : c'est la formulation faible du problème
- 3) Nous divisons le domaine «  $\Omega$  » en sous domaines. Nous générons ainsi un maillage à notre domaine.
- 4) Nous choisissons par la suite la famille des champs locaux, c'est-à-dire à la fois la position des nœuds dans les sous domaines et les polynômes (ou autres fonctions) qui définissent le champ local en fonction des valeurs aux (des) nœuds.
- 5) Nous ramenons le problème à un problème discret : c'est la discrétisation. En effet, toute solution approchée est complètement déterminée par les valeurs aux nœuds des éléments. Il suffit donc de trouver des valeurs à attribuer aux nœuds pour montrer une solution approchée.
- 6) Pour terminer, nous passons à la résolution du problème discret [15].

### III.2.2 Modélisation avec HFSS

La modélisation et la simulation sous HFSS s'effectuent en cinq étapes distinctes :

1. La Construction géométrique de l'antenne.
2. La Définition de la source (ports, guides...).
3. Les Conditions aux limites du domaine de simulation.
4. La Recherche des plans de symétrie.
5. L'exécution de maillage [31].

#### III.2.2.1 La Construction du modèle géométrique de l'antenne

Les figures ci-dessous (Fig.III.2, 3, 4, 5, 6) représentent les différentes étapes de la construction du modèle géométrique de l'antenne.

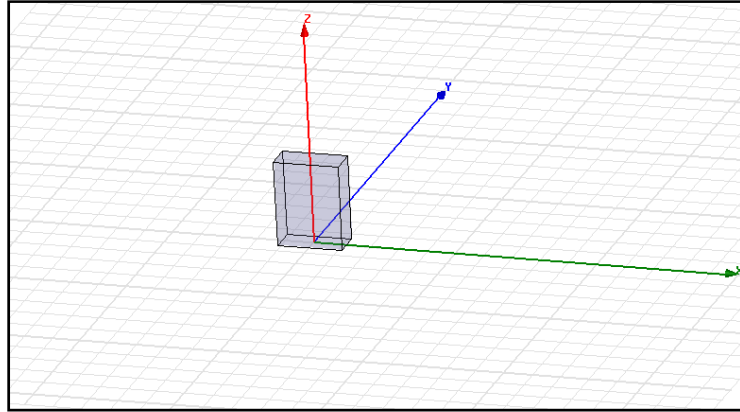


Fig. III.2 Construction du guide d'onde rectangulaire (antenne) RW90 sous HFSS

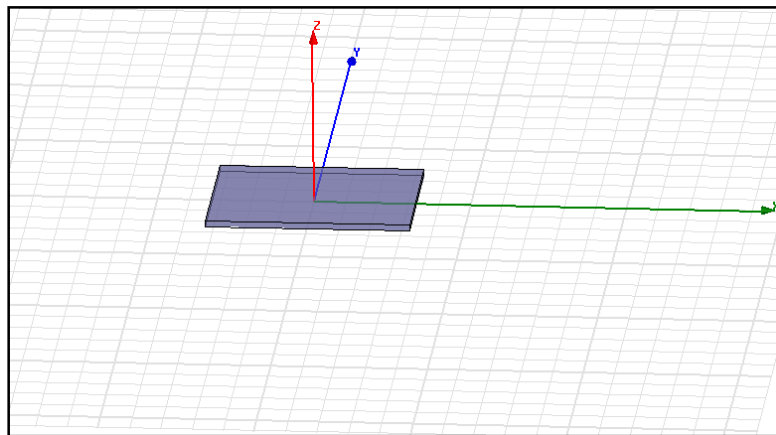


Fig. III.3 Création du plan de réflexion

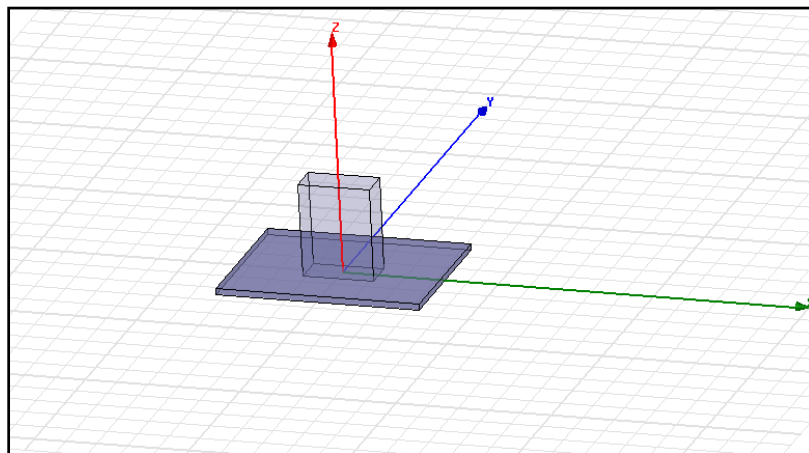


Fig. III.4 L'assemblage des deux corps



Fig. III.5. Création de l'ouverture

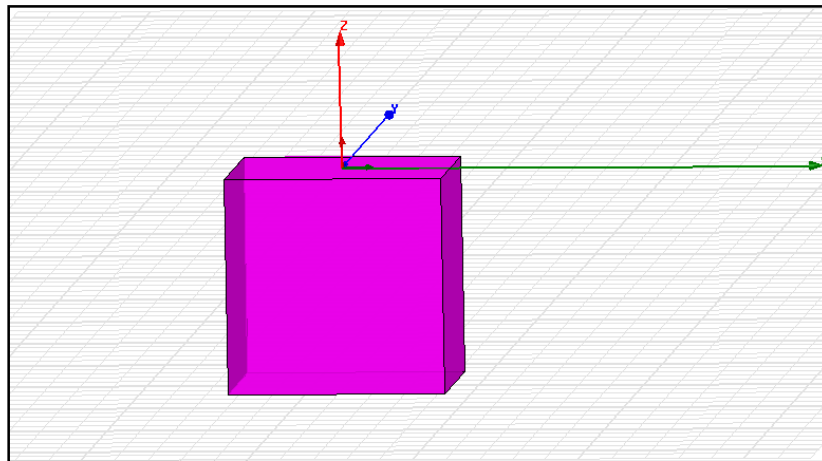


Fig. III.6 L'espace du rayonnement

En suivant ces étapes, nous avons donc construit le guide d'onde rectangulaire, l'ouverture rayonnante, le plan de réflexion et l'espace de rayonnement.

### III.2.2.2 Conditions aux limites et domaine de calcul

Le système composé des équations de Maxwell et des lois de comportement admet une infinité de solutions. Les conditions aux limites doivent être imposées à la frontière du domaine d'étude afin d'assurer l'unicité de la solution [32].

Le domaine de calcul d'HFSS est défini par une boîte d'air qui sépare (isole) l'espace de rayonnement de notre antenne (voir Fig.III.7). Nous définissons ensuite les conditions aux limites sur chaque face de ce domaine. Dans notre cas, nous avons imposé une condition absorbante (radiation) sur chaque face.

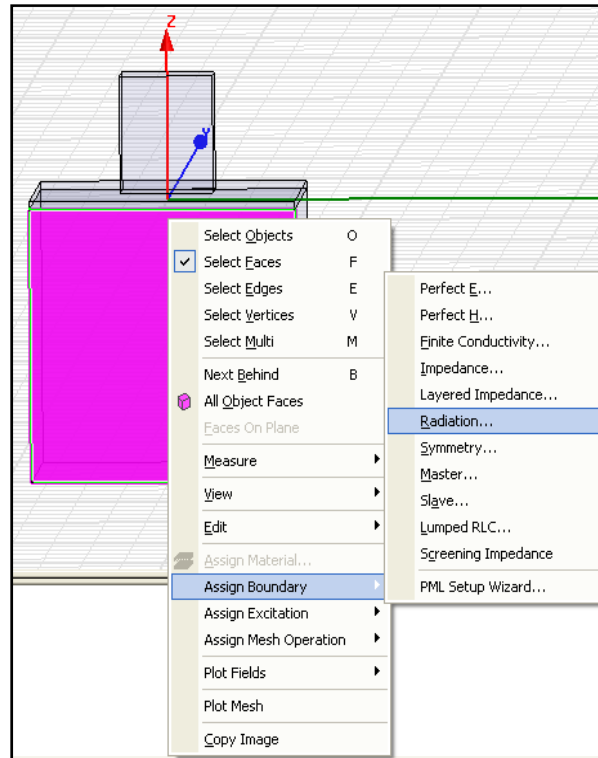


Fig. III.7 Définition des limites du domaine de calcul

### III.2.2.3 Définition des ports d'excitation et les plans de symétrie

La figure III.8 montre la définition de la surface et du type d'excitation sur HFSS.

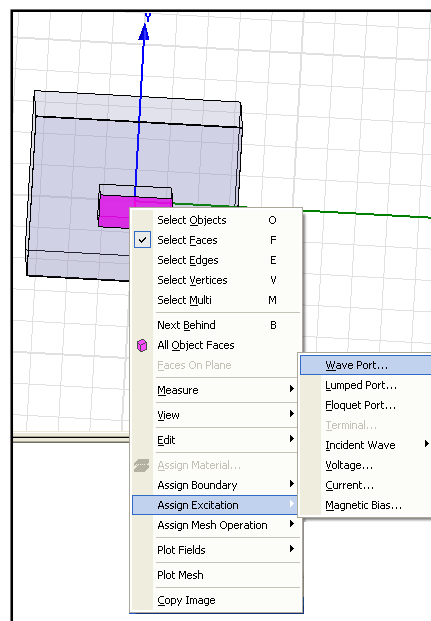


Fig.III.8 Définition de la surface et du type d'excitation

Sur la figure ci-dessus, les termes :

- **(Wave port)** : signifie une excitation externe.
- **(lumped port)** : signifie une excitation interne.

La position et la manière dont est décrit le port, nous permet de définir un plan de symétrie et donc de ne garder que la moitié de la structure pour diminuer la taille finale du maillage à générer. Le logiciel « HFSS » génère automatiquement le maillage de la structure en choisissant des éléments triangulaires dont la taille de l'arête ne dépasse pas  $\lambda/10$ .

La figure III.9 illustre le vecteur d'excitation sur le guide.

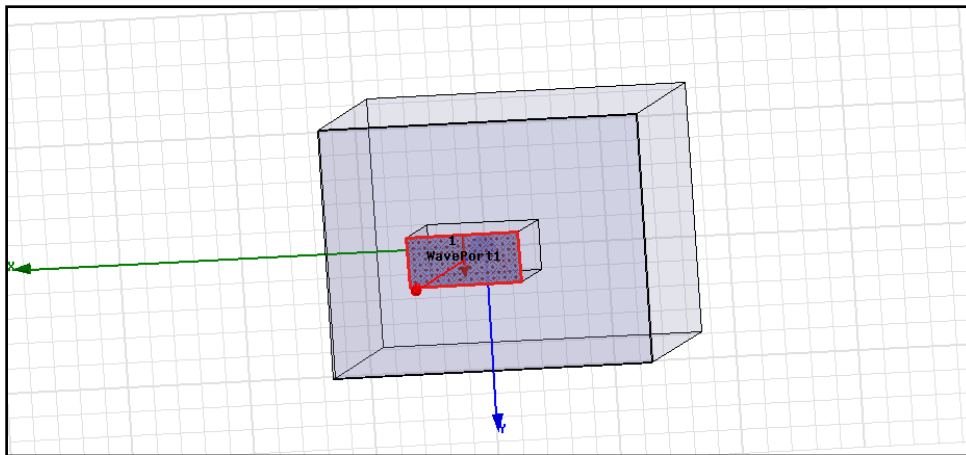


Fig.III.9 Représentation du vecteur d'excitation

La figure III.10 représente le décalage de plan de référence à l'ouverture de guide.

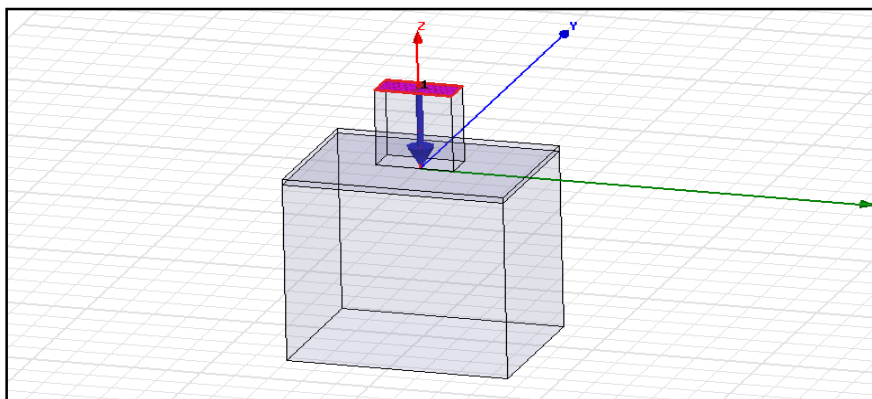


Fig. III.10 Décalage de plan de référence à l'ouverture du guide.

Le fait de travailler à haute fréquence (10 GHz) génère une très grande quantité (grand nombre) de mailles et donc des temps de calcul et des besoins en mémoire de plus en plus importants.

Il est donc judicieux d'utiliser tous les plans de symétrie possibles.

Le logiciel « HFSS » lui-même prévient l'utilisateur si la taille du maillage devient trop importante par rapport à l'ordinateur utilisé.

**Remarque :** La boîte d'air qui limite (isole) notre antenne est aussi maillée.

Dans notre cas, nous avons établi un plan de symétrie vertical parfait H selon  $zox$ . C'est-à-dire que la composante tangentielle du champ H est nulle dans ce plan, et le champ total est symétrique par rapport à celui-ci. (voir Figure.III.11).

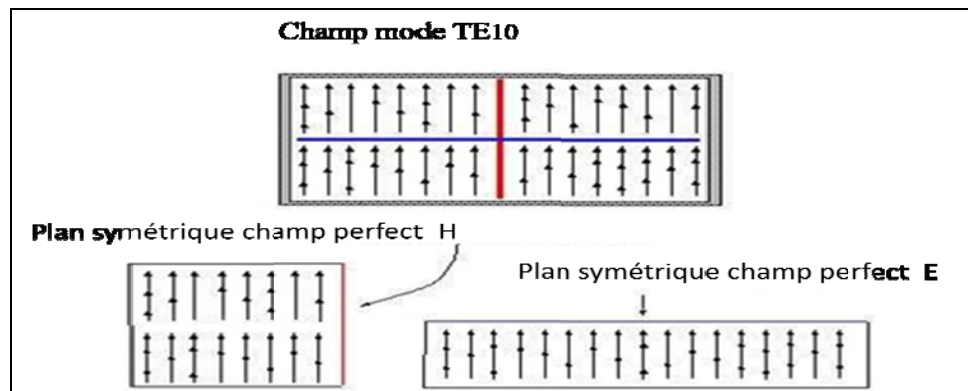


Fig. III.11 Définition des plans de symétrie *perfect H* et *perfect E*

Comme nous pouvons le voir sur la figure ci-dessus, si nous considérons le cas d'un guide d'onde rectangulaire, pour le mode TE, le champ E est symétrique par rapport au plan vertical (courbe en rouge sur Fig.III.12). Sa composante tangentielle est nulle dans le plan horizontal et sa valeur évolue symétriquement par rapport à celui-ci. Le même raisonnement est suivi pour le champ magnétique H et le plan vertical.

### III.2.3 Simulation sous « HFSS »

#### III.2.3.1 La constante de propagation

La figure III.12 montre l'évolution de la constante de propagation en fonction de la fréquence. D'après cette figure, nous constatons que la courbe est constituée de deux parties :

Pour des fréquences inférieures à 6,5 GHz, la constante de propagation est égale à zéro.

Pour des fréquences supérieures à 6,5 GHz, la partie imaginaire de la constante propagation varie en fonction de la fréquence.

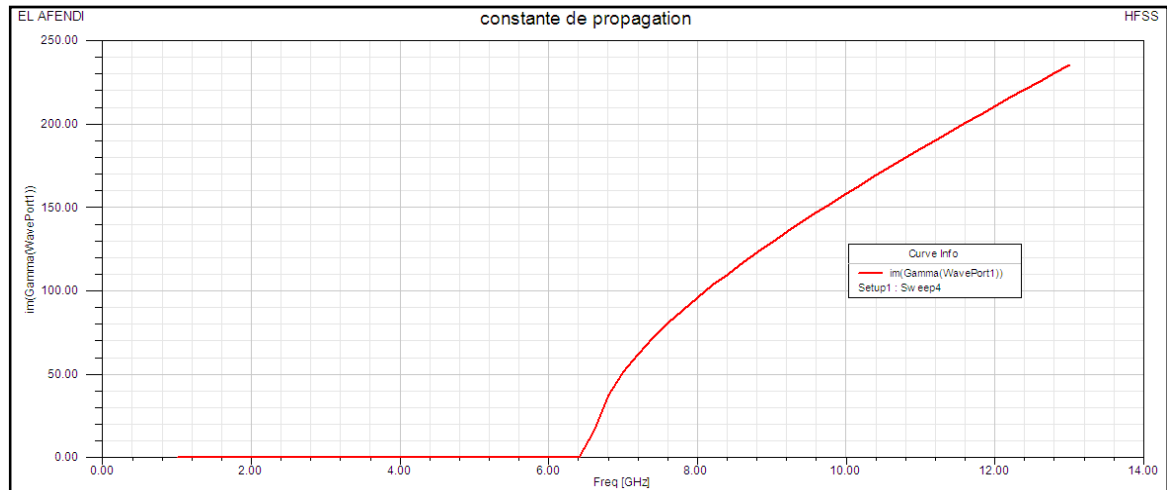


Fig.III.12 La constante du propagation en fonction de la fréquence

Pour avoir la propagation de mode, il faut que la constante de phase soit réelle et la fréquence de travail doit être supérieure à la fréquence de coupure [14].

### III.2.3.2 La longueur d'onde de propagation

La courbe de la figure III.13 représente la variation de la longueur d'onde en fonction de la fréquence du guide d'onde pour le mode  $\text{TE}_{10}$  en utilisant les données générées par le Logiciel Matlab.

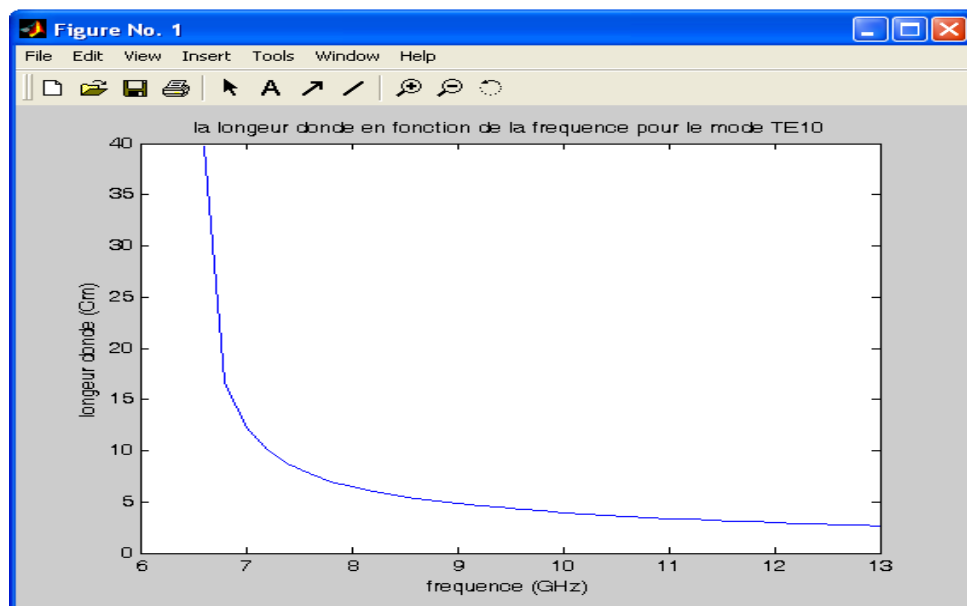


Fig. III.13 La variation de la longueur d'onde en fonction de la fréquence

La bande X varie entre 8 et 12 GHz. Pour notre guide, la fréquence de travail est de 10 GHz. Donc la longueur d'onde est de 3cm [14].

### III.2.3.3 L'impédance caractéristique

La figure III.14 montre l'évolution de l'impédance caractéristique en fonction de fréquence.

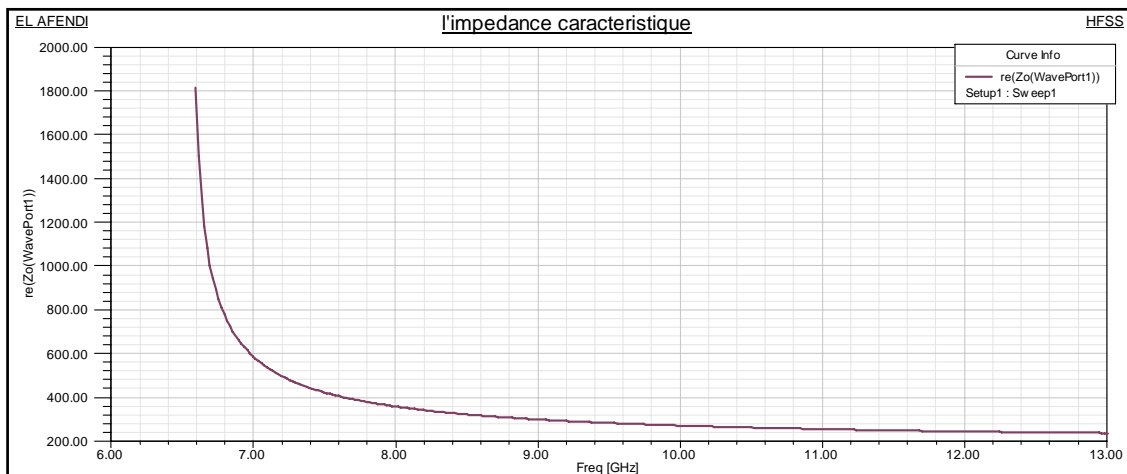


Fig. III.14 L'impédance caractéristique en fonction de fréquence

Comme le montre la figure III.14, la courbe générée par le logiciel HFSS confirme réellement le comportement du guide d'onde (filtre passe-haut) car pour les basses fréquences l'impédance est infinie [14].

### III.2.3.4 L'admittance de l'ouverture

La Figure III.15 illustre l'allure de l'admittance de l'ouverture.

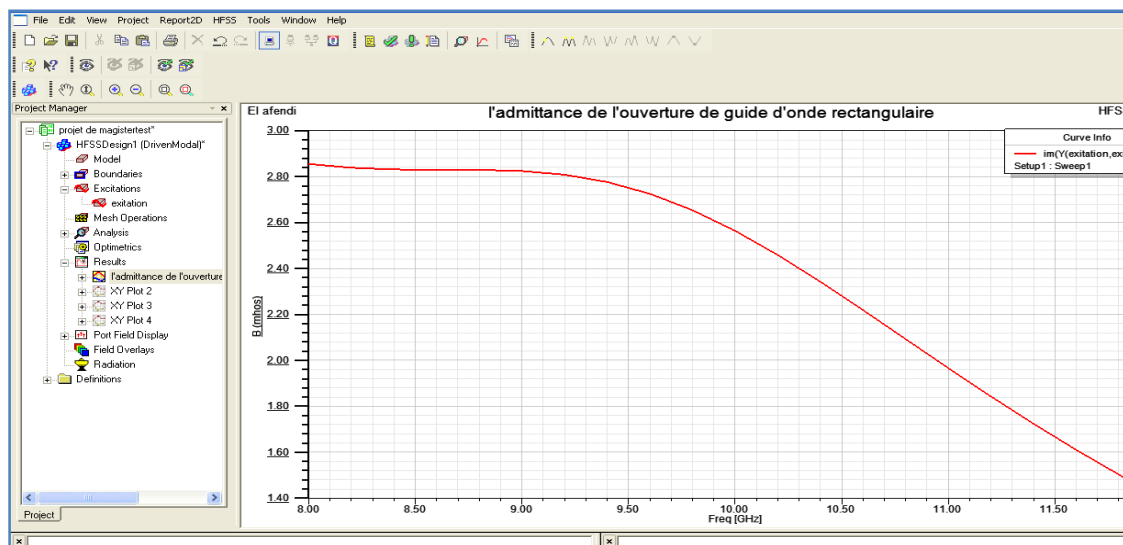


Fig. III.15 L'admittance de l'ouverture: Susceptance

### III.2.3.5 La répartition de champ E

La simulation du mode  $TE_{10}$  confirme l'existence d'un plan YoZ de symétrie champ E (voir Figure III.16).

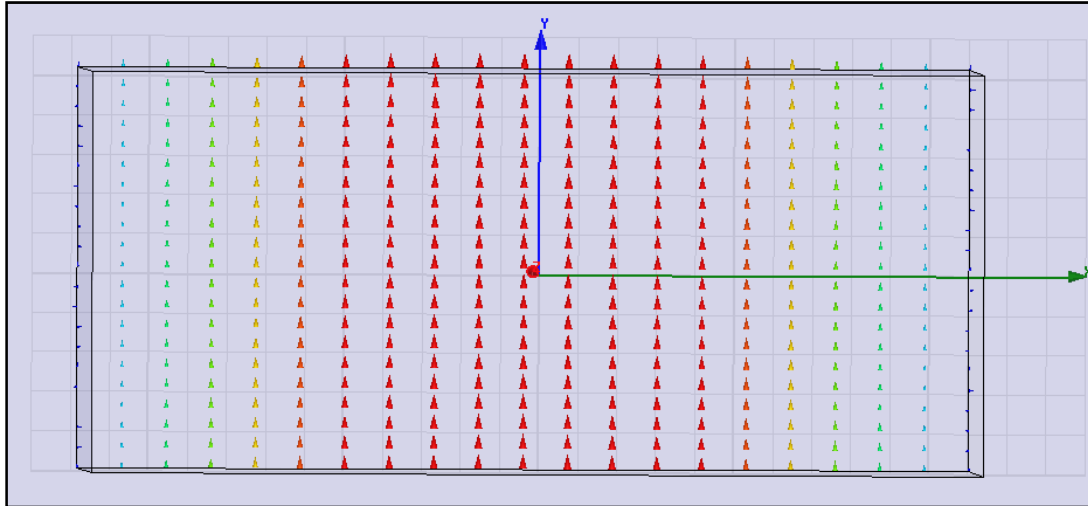


Fig.III.16 La répartition du champ E pour le mode  $TE_{10}$

### III.2.3.6 Puissance de champ E [V/m]

La Figure III.17 illustre la répartition de la puissance de champ E en [V/m].

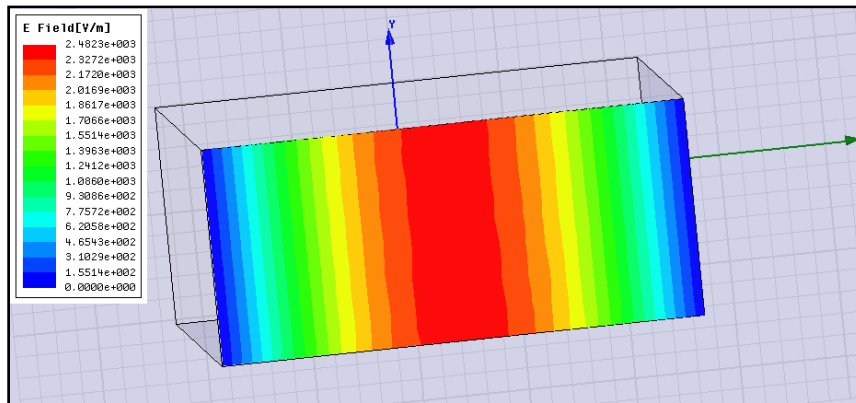


Fig.III.17 La répartition de la puissance du champ E en [V/m]

D'après la figure III.17, on remarque qu'au milieu de la structure ( $\frac{a}{2}$ ), on obtient le maximum de puissance, résultat confirmé par l'équation théorique du champ  $E_y(x) = E_0 \sin(\pi x/a)$ .

### III.2.3.7 Paramètre du module S [dB]

La courbe présentée par la Figure III.18 confirme que la réflexion diminue dans la bande X ou fonctionne notre guide.

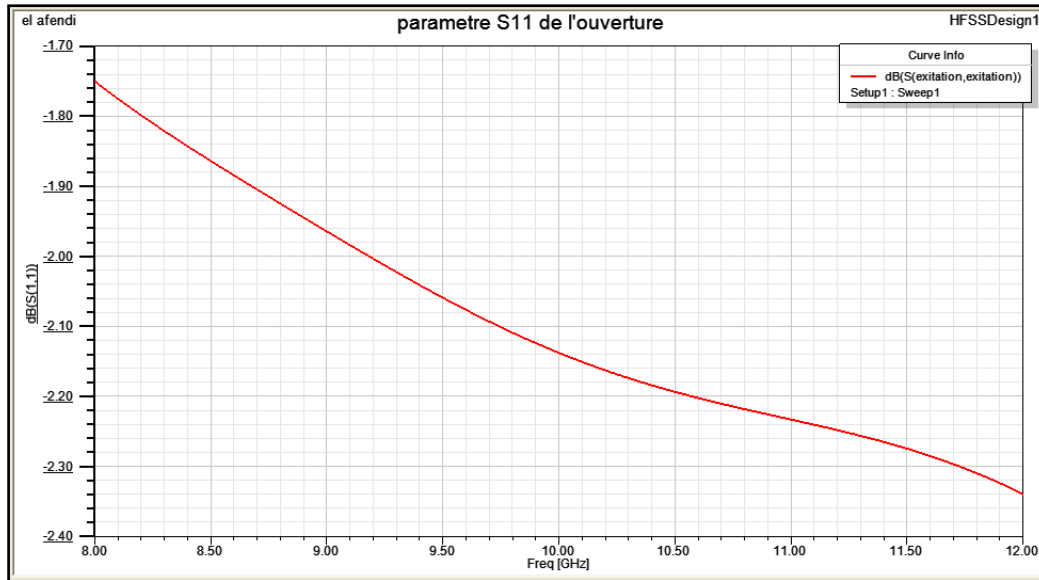


Fig.III.18 Le module du paramètre S11 en fonction de fréquence

### III.2.3.8 Paramètre de la phase S [deg]

La courbe présentée par la Figure III.19 nous a permis de déterminer la fréquence (10,7Ghz), pour laquelle nous avons le maximum de déphasage.

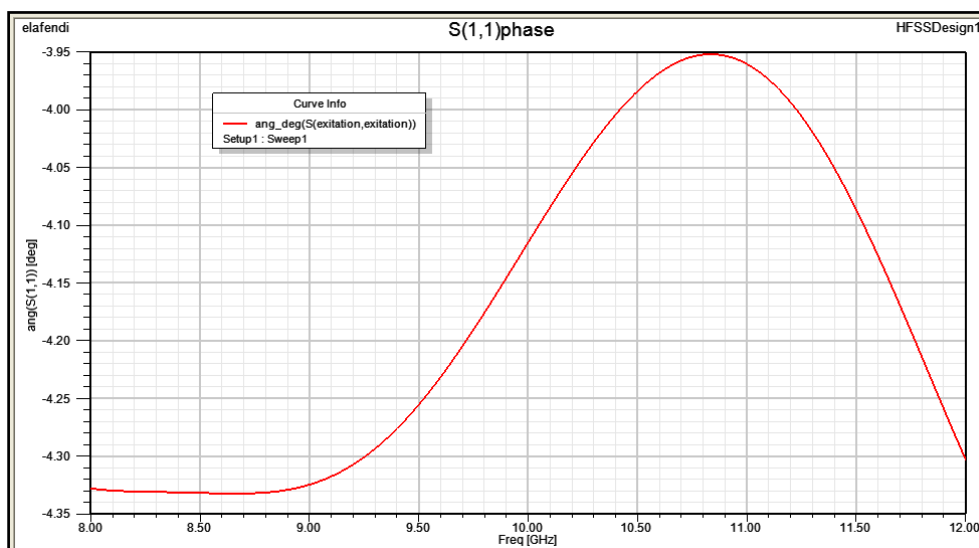


Fig. III.19 La variation de la phase du paramètre S11 en fonction de la fréquence

**III.2.3.9 Diagramme de Smith S [deg]**

Le diagramme de Smith est une manière de présenter le coefficient de réflexion en fonction de déphasage (voir Figure III.20).

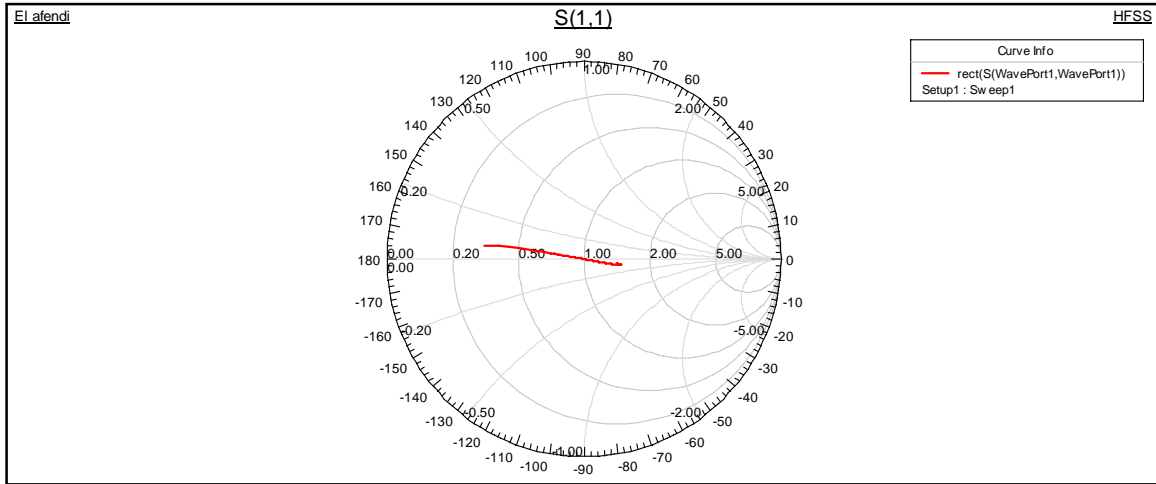


Fig.III.20 La représentation du paramètre S avec le diagramme de Smith

**III.2.3.10 Lobe en 3D**

Les figures III.21 et III.22 décrivent la simulation en 3D du champ lointain de l’ouverture du guide. On voit bien que le guide d’onde rectangulaire est devenu une antenne performante, car on a le maximum de puissance au milieu de l’ouverture et une directivité remarquable sur l’axe Z.

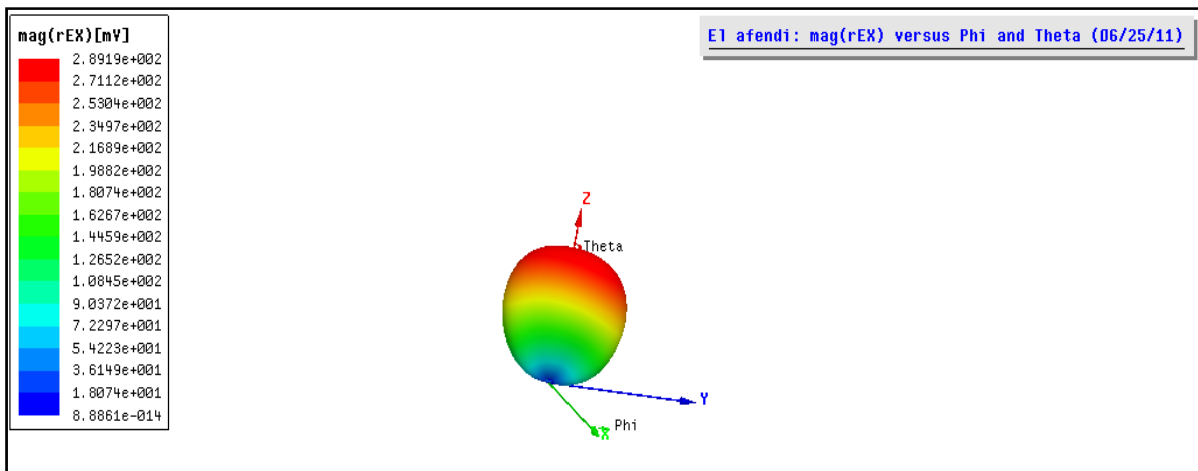


Fig.III.21 L’ouverture dans le plant YZ

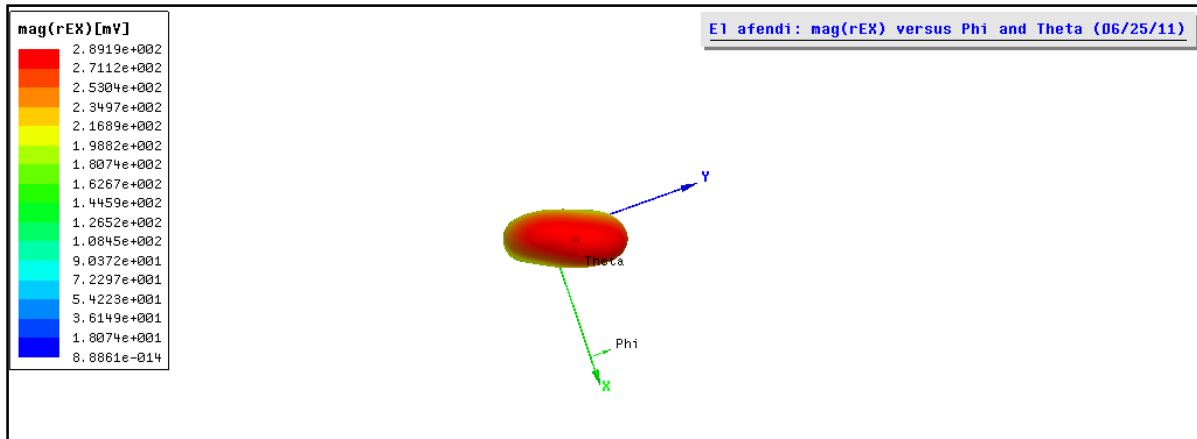


Fig.III.22 L'ouverture dans le plant XY

La figure Fig.III.23 montre l'animation du modèle sous HFSS. Ce qui nous permet de se rapprocher de la réalité en mettant tout le model en mouvement.

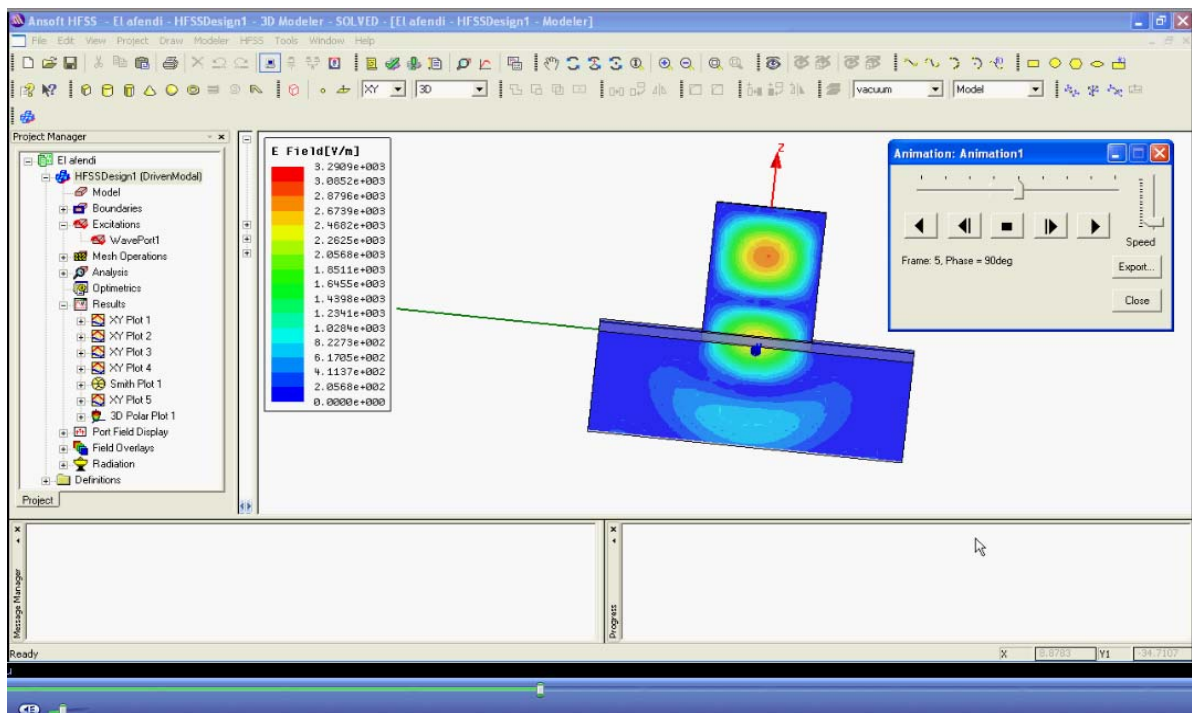


Fig.III.23 l'animation du modèle

La figure III.24 montre la vidéo complète de la simulation du modèle. Cette vidéo générée par le logiciel nous a permis de sauvegarder la simulation complète de notre modèle.



Fig.III.24 Vidéo complète de la simulation du modèle

### III.2.4 Généralisation du modèle avec Matlab

#### III.2.4.1 Programmation avec Matlab

Nous commençons par la programmation des équations théoriques de (l'ouverture, champ E, champ H) pour le guide d'onde rectangulaire et circulaire (voir Fig.III.26) [33].

```

C:\MATLAB6p5\work\simulateur_tools.m*
File Edit View Text Debug Breakpoints Web Window Help
Stack Base
201
202 % programme EL AFENDI%
203
204 a=str2num(get(handles.edit1,'string'));
205 b=str2num(get(handles.edit2,'string'));
206 f=str2num(get(handles.edit3,'string'));
207 [theta,phi] = meshgrid(0:1:90, 0:9:360);
208 theta = theta*pi/180; phi = phi*pi/180;
209 vx = a*sin(theta).*cos(phi);
210 vy = a*sin(theta).*sin(phi);
211 u = a*sin(theta);
212 E = ones(size(u));
213 i = find(u);
214 E(i) = abs(2*besselj(1,2*pi*u(i))./(2*pi*u(i)));
215 axes(handles.axes1);
216 surf(vx,vy,E);
217 shading interp; colormap(jet);
218 xlabel('vx');
219 ylabel('vy');
220 zlabel('puissance de champ');
221 title(' la simulation du ouverture d un guide onde circulaire ');
222
223 th = (0.5:0.5:90) * pi/180;
224 la=30/f;
225 vx = a/la * sin(th);
226 vy = b/la * sin(th);
227 K = sqrt(1 - (la/(2*a))^2); % alternatively, K = 0, or, K = 1
228 cE = (1 + K*cos(th))/(K+1); % normalized obliquity factors
229 cH = (K + cos(th))/(K+1);
230 m=vx+0.5
231 n=vx-0.5
232 u = a/la * sin(th);
233 E = ones(size(u));
234 i = find(u);
235 E(i) =pi/4 * [sin(pi*m(i))./(pi*m(i))+sin(pi*n(i))./(pi*n(i))];
236 gE(i) = abs(cH.*(pi/4 * [sin(pi*m(i))./(pi*m(i))+sin(pi*n(i))./(pi*n(i))])).^2; % uses sinc from SP toolbox
    
```

Fig.III.26 Le programme développé avec Matlab.

#### III.2.4.2 Création d'une interface avec Matlab

Afin de faciliter la manipulation des variables dynamiques par les utilisateurs, nous avons opté à la création d'une interface permettant de visualiser les résultats (voir Fig.III.27) [34].

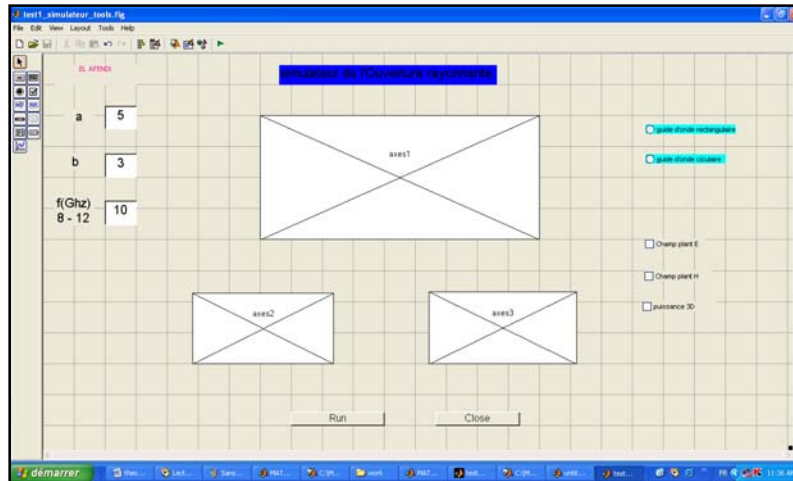


Fig.III.27 Création de la forme de l'interface avec Matlab.

### III.2.4.3 Simulation de guide d'onde rectangulaire

Les figures III.28, III.29 et III.30 illustrent les différentes simulations de guide d'onde rectangulaire en basses, moyennes et hautes fréquences pour différentes dimensions. Le champ à l'ouverture est présenté en 3D au milieu de l'interface et les angles d'ouverture dans les plans E et H au dessus de l'interface.

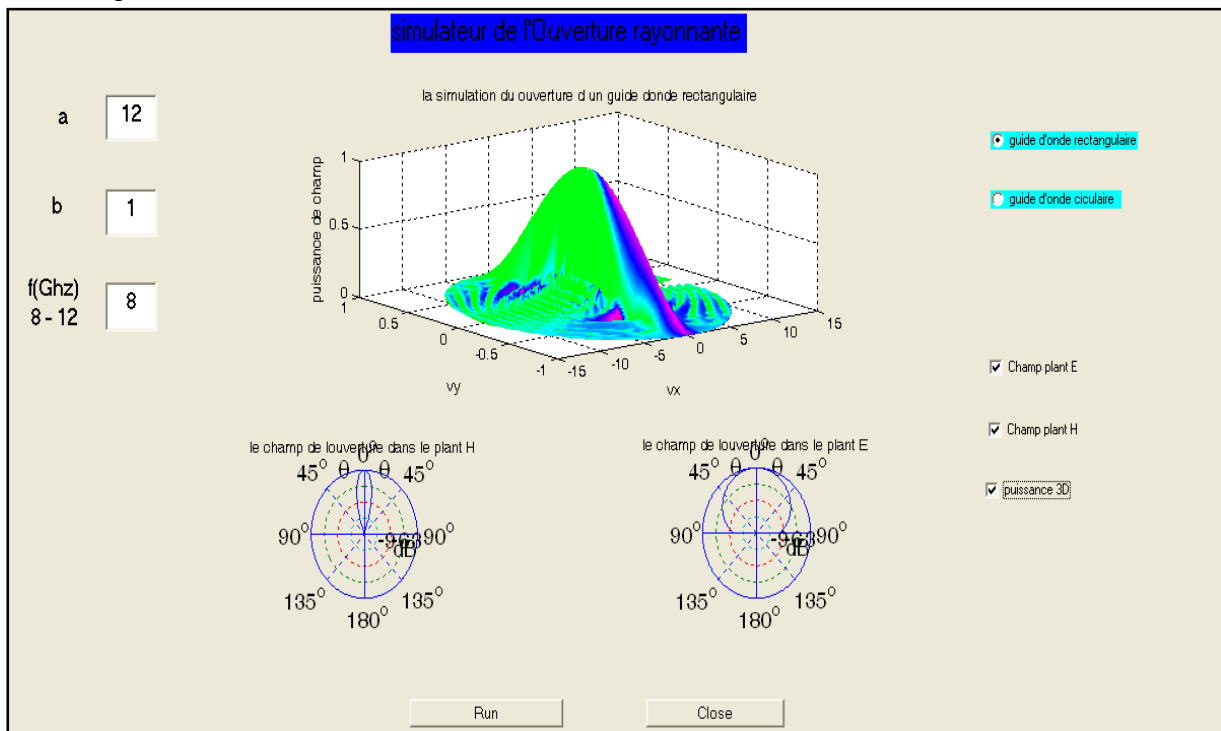


Fig.III.28 Simulation à basses fréquences

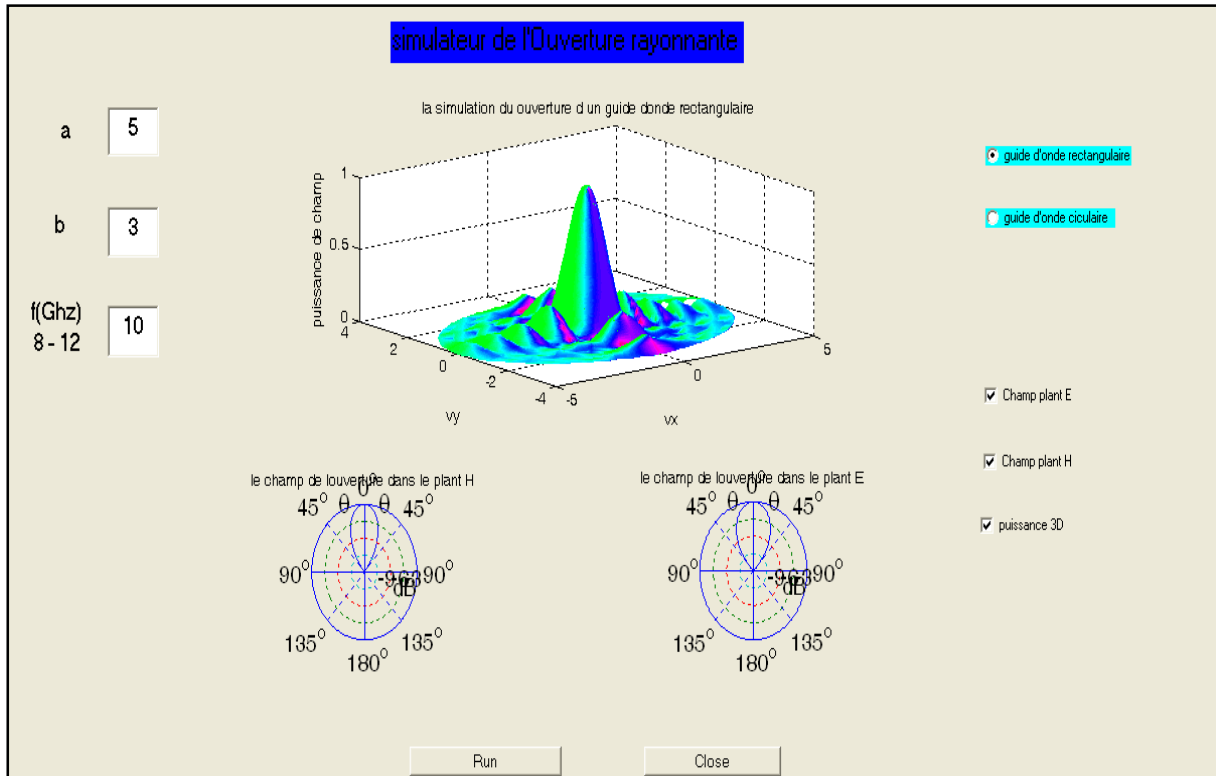


Fig.III.29 Simulation pour des fréquences moyennes

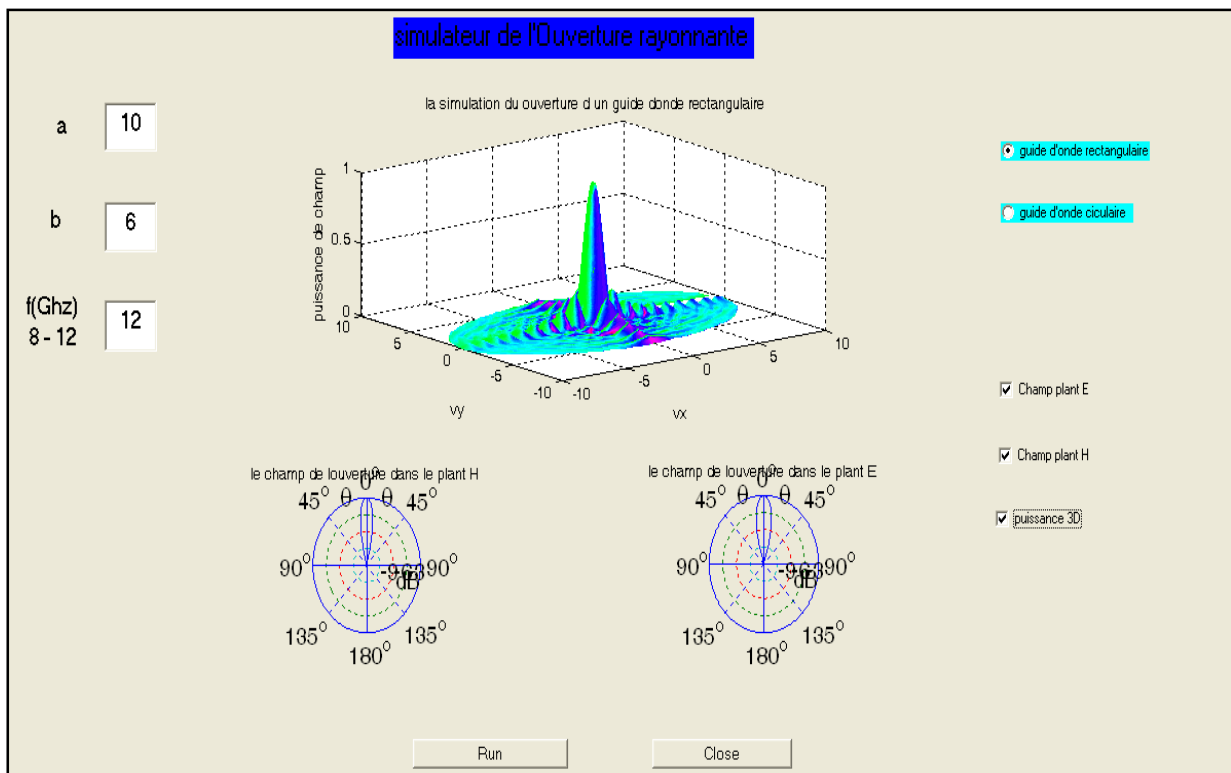


Fig.III.30 Simulation à hautes fréquences

### III.2.4.4 Simulation de guide d'onde circulaire

Les figures III.31, III.32 et III.33 illustrent les différentes simulations du guide d'onde circulaire et rectangulaire en basses, moyennes et hautes fréquences pour différentes dimensions.

Le champ à l'ouverture est présenté en 3D au milieu de l'interface et les angles d'ouverture dans les plans E et H au dessus.

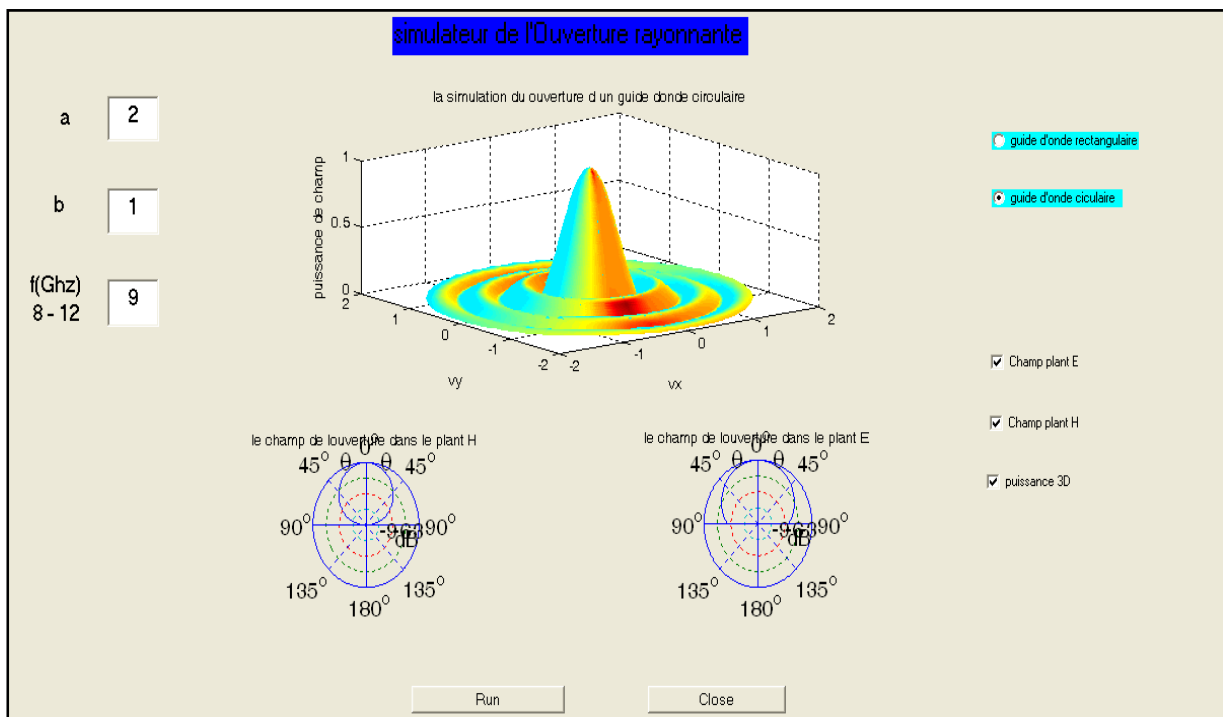


Fig.III.31 Simulation à basses fréquences

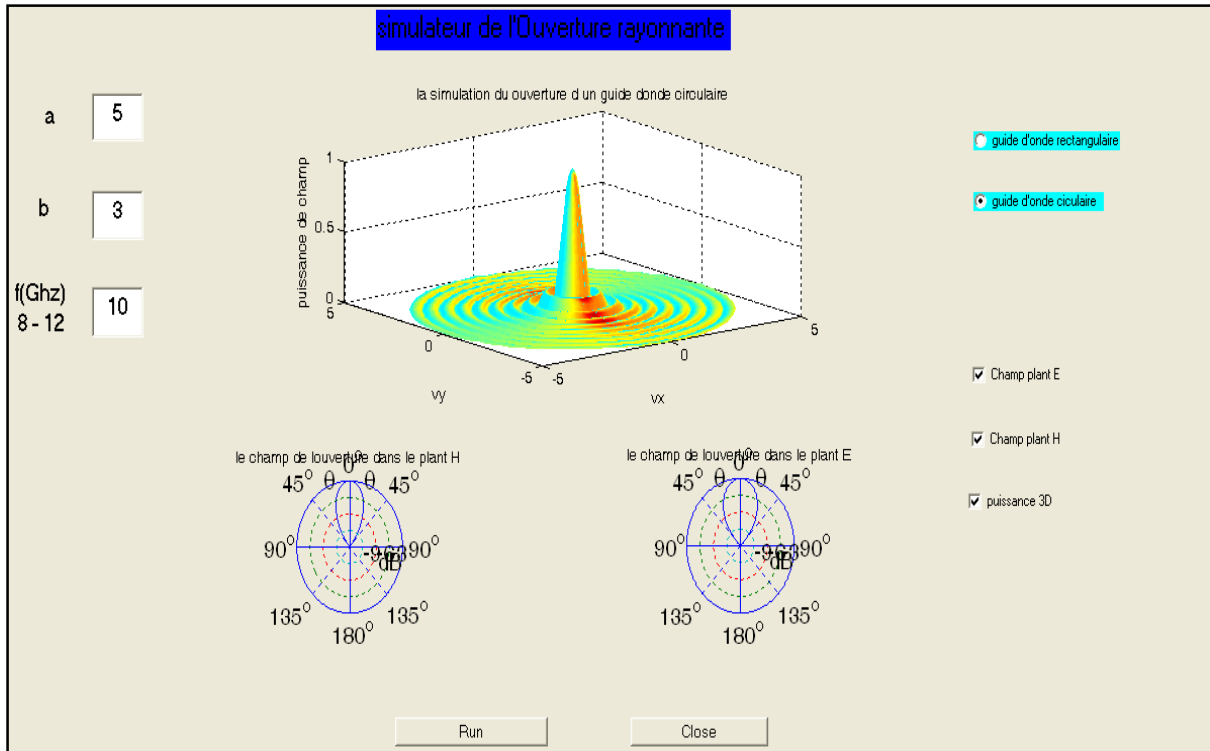


Fig.III.32 Simulation pour des fréquences moyennes

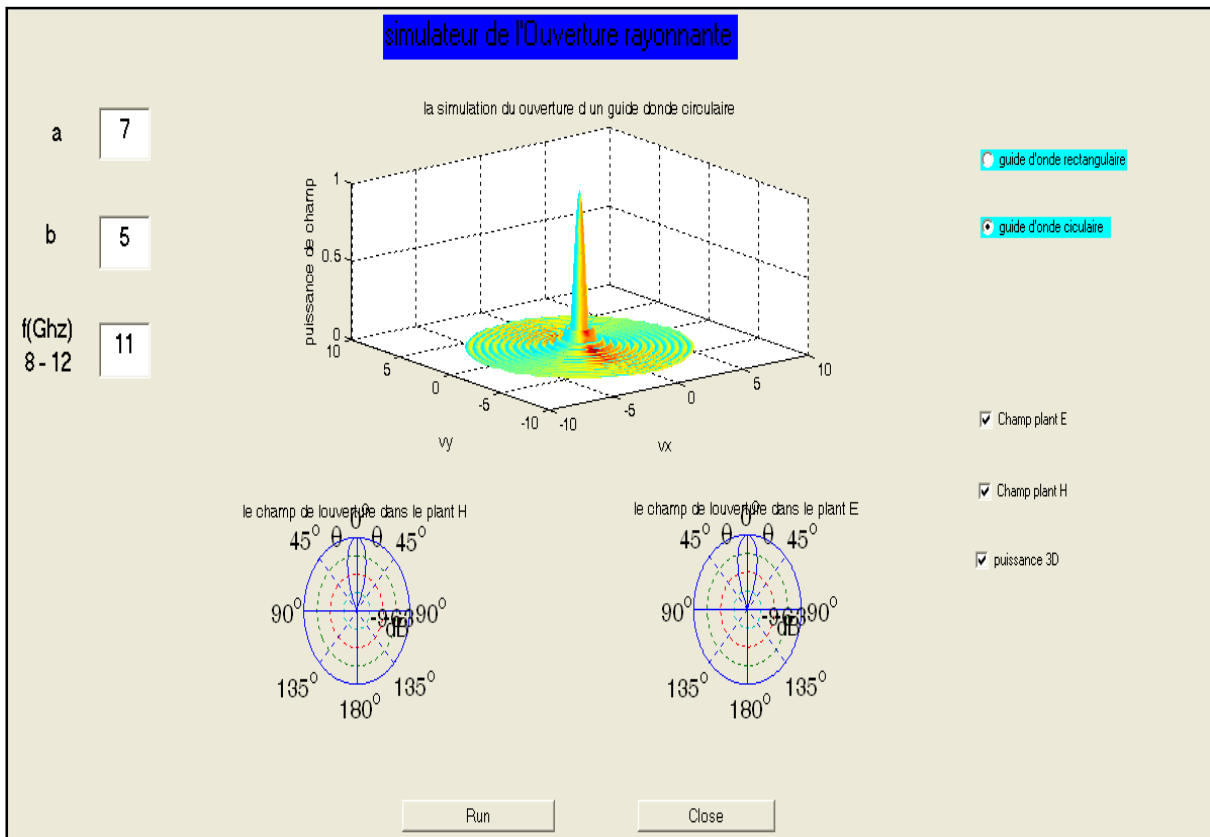


Fig.III.33 Simulation à hautes fréquences

### **III.3 Conclusion**

Les résultats des simulations effectuées nous ont permis de mettre en évidence l'influence du dimensionnement des guides d'ondes sur la forme de l'ouverture. On remarque que plus les dimensions sont importantes, plus les ouvertures deviennent étroites. Nous avons également constaté qu'en augmentant la fréquence, les lobes secondaires deviennent plus nombreux. À l'aide du programme développé, nous avons pu présenter le champ E et le champ H à l'ouverture des guides.

Dans cette partie de notre travail, nous avons constatés que la méthode des éléments finis prend un temps important lors de l'animation du modèle. Ceci nous a obligés à optimiser le modèle à plusieurs reprises. Les résultats obtenus par le modèle créé par HFSS coïncident bien avec les résultats théoriques décrits dans les précédents chapitres. La programmation reste indispensable pour présenter certains phénomènes qui nous rapprochent d'autant plus de la réalité.

## CONCLUSION GENERALE

Le principal objectif du présent travail est la caractérisation des paramètres de l'ouverture rayonnante des guides d'ondes, en particulier le guide d'onde rectangulaire. Pour cela, nous avons présenté une étude théorique des guides d'onde. Par la suite, nous avons abordé l'étude de rayonnement des guides. La détermination de la fonction de *Green* dans le domaine des transformées vectorielles de *Fourier* regroupe toutes les informations concernant la géométrie de la structure étudiée [37].

L'emploi des grandeurs électromagnétiques dans le plan (TE, TM) nous a permis de déterminer les champs rayonnants pour les ouvertures uniformes, ce qui a constitué un grand avantage pour la simplification du programme. Ensuite, nous avons formulé les différentes équations des phénomènes qui se présentent à l'ouverture [38]. L'utilisation du logiciel HFSS, basé sur la méthode des éléments finis qui est caractérisée par l'exactitude des résultats numériques obtenus pour des structures 3D malgré son inconvénient majeur qui est le temps de calcul important notamment le nombre de maillage important pour déterminer la matrice « S » qui est une fonction non analytique et à variable complexe, a permis l'élaboration de notre modèle et la détermination des différentes courbes caractéristiques [39].

À partir des équations théoriques développées sous Matlab, nous avons constaté une différence de la forme de l'ouverture entre un guide d'onde rectangulaire et un guide d'onde circulaire. En plus, nous avons remarqué que plus la fréquence augmente plus la puissance du champ se focalise au milieu de l'ouverture et nous obtenons en plus des modes d'ordres supérieurs.

En perspective, le travail présenté dans ce manuscrit peut être élargi en tenant compte de diélectrique de demi-espace libre en se basant sur le coefficient de réflexion présenté à l'ouverture rayonnante [41] [42] [43].

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [1] Sophocles J. Orfanidis , « Electromagnetic Waves and Antennas », November 2002
- [2] Yi Huang and Kevin Boyle, « Antennas From Theory To Practice ». Published 2008
- [3] Robert H. Macphie «Radiation And Impedance Characieristics of Thin-Wire Transmission Line-Dipole System », IEEE 1989
- [4] Marc Hélier « Techniques Micro-Ondes », Ellipses Édition, 2001
- [5] Fred E. Gardiol « Open-Ended Waveguides: Principles and Applications », Academic,1985
- [6] Henri Baudrand And Jun-Wu Tao and Jacques Atechian « Study of Radiating Properties of Open-Ended Rectangular –Waveguides », IEEE, august 1988
- [7] Donald G.Bodnar « New Variational Principle in Electromagnetics », IEEE, March 1970.
- [8] Zuhair M. Hejaz, « FEKO Tutorial 1 », November 2009
- [9] User's guide, «High Frequency Structure Simulator», Ansoft Corporation, 2005
- [10] Robert H. Macphie and Amir I. Zaghoul « Radiation from a Rectangular Waveguide with InfiniteF lange Exact Solution by the Correlation Matrix Method », IEEE , JULY 1980
- [11] Hirohide Serizawa and Kohei Hongo « Radiation from a Flanged Rectangular Waveguide » IEEE, December 2005
- [12] W. O'Keefe Coburn and T.K. Anthony and A.I. Zaghoul « Open-Ended Waveguide Radiation Characteristics – Full-Wave Simulation versus Analytical Solutions » , AP , 2010
- [13] User's Guide «Ansoft High Frequency Structure Simulator v10», June 2005 .
- [14] Lakshmi Achutha & Dr.Jayanti Venkatraman « Ansoft HFSS Tutorial Rectangular Waveguide », Rochester Institute of Technology
- [15] E. da Silva « High Frequency and Microwave Engineering » Butterworth–Heinemann , First published 2001.
- [16] Mehrdad Mehdizadeh « Micro Wave/RF Applications and Probes Material Heating Sensing and Plasma Generation a Design Guide », Elsevier, 2010
- [17] Dmitri Lioubtchenko & Sergei Tretyakov &Sergey Dudorov « Millimeter Wave Waveguides », Kluwer Academic Publishers, 2003.

- [18] Cam Nguyen « Analysis Methods for RF, Microwave, and Millimeter-Wave Planar Transmission Line Structures », John Wiley & Sons, 2000.
- [19] Kirk T. McDonald « Radiation from the Open End of a Coaxial Cable », Princeton University 2010.
- [20] Luiz Crezar Trintinalia « Time-frequency Analysis of Backscattering from Inlet Cavities Embedded in Complex Targets », University of Texas at Austin ,1996
- [21] R.J. Burkholder and P.H. Pathak « High-Frequency Asymptotic Methods for Analyzing the EM Scattering by Open-Ended Waveguide Cavities » ,The Ohio State University, 1989.
- [22] Pro.TAO « Caractérisation des Discontinuités Etude Tridimensionnelles » ,Version 2010
- [23] Slavi R. Baev, Svilen M. Gechev, Boyan N. Hadjistamov, and Plamen I. Dankov, « Modéleing and Simulations of Lüneburg Lens Antennas for Communication Purposes », 16 telecommunication forum TELFOR , 2008
- [24] Dr. Otman El Mrabet « High Frequency Structure Simulator (HFSS) Tutorial »,France 2005-2006
- [25] Yuriy K. Sirenko, Staffan Ström,Nataliya P. Yashina « Modéleing and Analysis of Transient Processes in Open Resonant Structures » , Springer 2007
- [26] Ansoft «Getting Started with HFSS:A 20 GHz Waveguide Combiner», 2009
- [27] Methode Maloney ,James Geoffrey,phD « Analysis and Synthesis of Transient Antennas using the Finite –Difference Time-Domain (FDTD) », Georgia institute of technology ,1992.
- [28] N. Marcuvitz, « Waveguide Handbook », New York: McGraw-Hill, 1951
- [29] IM Smith and DV Griffiths « Programming the Finite Element Method », John Wiley & Sons , 4th edition 2004
- [30] Dr. Zuhair M. Hejaz « FEKO a Method of Moments (MoM) tool », Nov. 2009
- [31] Lakshmi Achutha & Dr.Jayanti Venkatraman « Ansoft HFSS Tutorial Rectangular Waveguide », Rochester Institute of Technology
- [32] Maria Pardalopoulou and Klaus Solbach « A Novel Waveguide Radiator Array Element for Metallized Plastics Antenna Technology », Universität Duisburg-Essen
- [33] D. Bichsel & J.-M. Allenbach « introduction à Matlab », Ecole d'Ingénieurs de Genève , Edition 2006
- [34] Vikram A Bose-Mullick «Matlab GUI Tutorial »

- [35] Chih-Wei chang « Nondestructive Measurements of Electromagnetic Parameters of Anisotropic Materials using An Open-Ended Waveguide Probe System », Michigan State University
- [36] Daniela Raicu « Introduction to MATLAB », Chicago University, 2003
- [37] Stephen F. Kawalko and Motohisa Kanda « Near-Zone Gain of Open-Ended Rectangular Waveguides », IEEE, November 1997.
- [38] Jian-Ming Jin and John L. Volakis « A Finite Element-Boundary Integral Formualtion for Scattering by Three-Dimensional Cavity-Backed Apertures », The University of Michigan, 1990 .
- [39] R.J. Burkholder and P.H. Pathak « High-Frequency Asymptotic Methods for Analyzing the EM Scattering by Open-Ended Waveguide Cavities », The Ohio State University.
- [40] Chu-chieng Bright « analysis of waveguide discontinuities and aperture antenna », Texas A&M university, 1991.
- [41] Ri Chatterjee , K G Narayanan , and A Kumar « Radiation Characteristic of Solid Rectangular Dielectric Horns »
- [42] Laura Dominick Vann « Radar Cross Section of An Open-Ended Rectangulaire Waveguide Cavity », Florida Atlantic University, 1993.
- [43] Nasser Niadal Qaddoumi « Microwave Detection And Charaterization of Sub-Surface Defect Properties In Composites using An Open Ended Rectangular Waveguide » Colorado State University, 1995

## ANNEXE

### Annexe A

Pour simplifier les calculs, il est intéressant d'étudier l'action des opérateurs vectoriels fondamentaux sur cette décomposition.

Soit  $A_0$  un vecteur quelconque tel que :

$$\begin{aligned} A_0(x_1, x_2, z) &= A(x_1, x_2) \exp[-\gamma z] \\ &= \{A_t(x_1, x_2) + A_z(x_1, x_2)n\} \exp[-\gamma z] \end{aligned}$$

Appliquons les opérateurs divergence et rotationnel à un tel vecteur. On obtient :

$$\begin{aligned} \text{div} A_0 &= \text{div}(A \exp[-\gamma z]) \\ &= \exp[-\gamma z] \text{div} A + \text{grad}(\exp[-\gamma z]) \cdot A \\ &= \exp[-\gamma z] \text{div} A - \gamma \exp[-\gamma z] n \cdot A \\ &= (\text{div} A - \gamma A_z) \exp[-\gamma z] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{rot} A_0 &= \text{rot}(A \exp[-\gamma z]) \\ &= \exp[-\gamma z] \text{rot} A + \text{grad}(\exp[-\gamma z]) \times A \\ &= \exp[-\gamma z] \text{rot} A - \gamma \exp[-\gamma z] n \times A \\ &= (\text{rot} A + \gamma A \times n) \exp[-\gamma z] \end{aligned}$$

De plus, l'action des opérateurs sur  $A(x_1, x_2)$  conduit à des expressions remarquables :

$$\text{div} A = \frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{x_2}}{\partial x_2} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1} + \frac{\partial A_{x_2}}{\partial x_2} = \text{div} A_t$$

$$\begin{aligned} \text{rot} A &= \text{rot}(A_t + A_z n) \\ &= \text{rot} A_t + \text{rot}(A_z n) \\ &= \text{rot} A_t + \text{grad} A_z \times n \end{aligned}$$

On remarque que  $\text{grad} A_z$  est transversal et qu'il en résulte que  $\text{grad} A_z \times n$  est aussi transversal.

En revanche,  $\text{rot} A_t = \left( \frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1} - \frac{\partial A_{x_2}}{\partial x_2} \right) n$  est longitudinal.

En appliquant les relations précédentes, on va retrouver une décomposition des équations de Maxwell en composantes transversales et en composantes longitudinales.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}E_0 = (\text{rot}E + \gamma E_{xn}) \exp[-\gamma z] = -j\omega\mu_0 H_0 \\ \text{rot}H_0 = (\text{rot}H + \gamma H_{xn}) \exp[-\gamma z] = j\omega\epsilon E_0 \\ \text{div}E_0 = 0 \\ \text{div}H_0 = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

On peut alors simplifier, à l'aide du facteur de propagation pour obtenir des équations où n'interviennent que les fonctions auxiliaires E et H :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}E + \gamma E_{xn} = -j\omega\mu_0 H \\ \text{rot}H + \gamma H_{xn} = j\omega\epsilon E_0 \\ \text{div}E = \text{div}E_t = \gamma E_z \\ \text{div}H = \text{div}H_t = \gamma H_z \end{array} \right. \quad (\text{A.2})$$

Après la séparation des composantes longitudinales et transversales des champs, il vient :

- Pour les composantes transversales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{grad} E_z \times n + \gamma E_t \times n = -j\omega\mu_0 H_t \\ \text{grad} H_z \times n + \gamma H_t \times n = j\omega\epsilon E_t \end{array} \right. \quad (\text{A.3})$$

- Pour les composantes longitudinales :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{rot}E_t = -j\omega\mu_0 H_z n \\ \text{rot}H_t = j\omega\epsilon E_z n \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

la combinaison de ces relations vas nous permettre d'exprimer les champs vectoriels transversaux en fonction des composantes scalaires longitudinales .pour cela, on multiplie vectoriellement les composantes transversales par « n » :

$$n \times [\text{grad} E_z \times n + \gamma E_t \times n] = -j\omega\mu_0 n \times H_t \quad (\text{A.5})$$

comme  $n \times (a \times n) = a$  , on en déduit que :

$$(\text{A.6})$$

$$\text{grad } E_z + \gamma E_t = -j\omega\mu_0 \mathbf{n} \times H_t$$

or ,  $\mathbf{n} \times H_t = \frac{1}{\gamma} [\text{grad} H_z \times \mathbf{n} - j\omega\epsilon E_t]$  d'où en multipliant à droite et à gauche par  $\gamma$  , on aboutit à :

$$\gamma^2 E_t + \gamma \text{grad } E_z = -j\omega \mu_0 \text{grad} H_z \times \mathbf{n} - k^2 E_t \text{ ce qui s'écrit encore :}$$

$$(\gamma^2 + k^2) E_t = -\gamma \text{grad } E_z - j\omega \mu_0 \text{grad} H_z \times \mathbf{n} \quad (\text{A.7})$$

D'une manière similaire, on montre que :

$$(\gamma^2 + k^2) H_t = -\gamma \text{grad} H_z + j\omega\epsilon \text{grad} E_z \times \mathbf{n} \quad (\text{A.8})$$

### Type de solution:

Il s'agit de discuter les cas suivant la valeur de la quantité  $(\gamma^2 + k^2)$ .

On constate qu'on a deux types de solution  $\gamma^2 + k^2 = 0$ ,  $\gamma^2 + k^2 \neq 0$

Premier cas  $\gamma^2 + k^2 \neq 0$  :

à l'aide des deux relations qui suivent, on peut exprimer les champs auxiliaires E et H en fonction des composantes longitudinales:

$$\begin{cases} E = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k^2} \text{grad } E_z - \frac{j\omega\mu_0}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} H_z \times \mathbf{n} + E_z \mathbf{n} \\ H = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k^2} \text{grad } H_z + \frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} E_z \times \mathbf{n} + H_z \mathbf{n} \end{cases} \quad (\text{A.9})$$

Il reste de trouver les équations vérifiées par les composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$

$$\text{Or , on a } \text{div } E_t = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k^2} \text{div grad } E_z - \frac{j\omega\mu_0}{\gamma^2 + k^2} \text{div}[\text{grad } H_z \times \mathbf{n}] = \gamma E_z$$

Mais  $\text{div}[\text{grad } H_z \times \mathbf{n}] = \text{rot grad } H_z \cdot \mathbf{n} = 0$  et finalement, il reste en compléter le résultat en calculant le  $\text{div } H_t$  :

$$\begin{cases} \Delta E_z + (\gamma^2 + k^2) E_z = 0 \\ \Delta H_z + (\gamma^2 + k^2) H_z = 0 \end{cases} \quad (\text{A.10})$$

Ces équations sont appelées des équations de Helmholtz scalaire : on leur associe bien évidemment des conditions aux limites sur  $E_z$  et  $H_z$  liées à la géométrie de la structure de

guidage. On peut résumer ce résultat par l'énoncé du premier théorème fondamental de la propagation guidée par ondes planes non homogènes :

**Premier théorème :**

Lorsque la constante de propagation diffère de celle des ondes libres, les champs les plus généraux se propageant en ondes planes s'expriment entièrement en fonction des composantes longitudinales  $E_z$  et  $H_z$ , composantes qui vérifient une équation de Helmholtz scalaire à deux dimensions de type :

$$\Delta E_z + (\gamma^2 + k^2) E_z = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta H_z + (\gamma^2 + k^2) H_z = 0$$

Comme  $\gamma^2 + k^2 \neq 0$ , la vitesse de propagation des ondes n'est pas celle qu'auraient des ondes libres se propageant dans un diélectrique homogène ( $\epsilon, \mu_0$ ). Dans ces conditions, on met en évidence, dans le cas des guides d'ondes, deux types de solutions sont appelées modes, les modes TM et TE, correspondant à des champs physiquement indépendants et définis par les relations :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} E_z + E_z \mathbf{n} \\ H = \frac{j\omega\epsilon}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} E_z \times \mathbf{n} \\ H_z = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} E = -\frac{j\omega\mu_0}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} H_z \times \mathbf{n} \\ H = \frac{-\gamma}{\gamma^2 + k^2} \text{grad} H_z + H_z \mathbf{n} \\ E_z = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.11})$$

Mode transverse magnétique ou TM

Mode transverse électrique ou TE

Les relations qui suivent lient entre les champs électriques et les champs magnétiques.

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta H = \frac{-jk}{\gamma} E \times \mathbf{n} \quad (\text{cas TM}) \\ E = \frac{jk}{\gamma} \eta H \times \mathbf{n} \quad (\text{cas TE}) \end{array} \right. \quad (\text{A.12})$$

On dit alors que les modes TE et TM sont corrélatif.

On peut noter que les facteurs  $\frac{\gamma}{jk}$  (cas TM) et  $\frac{jk}{\gamma} \eta$  (cas TE) sont homogènes à des impédances dites impédances d'onde.

Ce premier théorème s'applique également dans le cas des structures non homogènes (mettant en œuvre plus d'un diélectrique), à la différence près qu'il n'y a pas de séparation physique

entre les modes TE et TM : on qualifie de modes hybrides de telles solutions, qui correspondent aux conditions  $E_z \neq 0$  et  $H_z \neq 0$ .

Physiquement, ces conditions imposent au champ électrique  $E$  d'être normal au conducteur et au champ magnétique  $H$  d'être tangent.

**Deuxième cas :  $\gamma^2 + k^2 = 0$ .**

Dans ces conditions, on pose  $\gamma = \pm jk$ , donc :

$$\begin{cases} -\gamma \text{ grad } E_z - j\omega\mu_0 \text{ grad } H_z \times n + E_z n = 0 \\ -\gamma \text{ grad } H_z + j\omega\epsilon \text{ grad } E_z \times n + H_z n = 0 \end{cases} \quad (\text{A.13})$$

Pour séparer ces deux fonctions scalaires. On peut y parvenir en prenant la divergence des égalités précédentes, ce qui permettra d'éliminer le produit vectoriel avec «  $n$  ». Ainsi, on obtient pour la première relation :

$$\text{div}(-\gamma \text{ grad } E_z - j\omega\mu_0 \text{ grad } H_z \times n) = -\gamma \Delta E_z = 0 \quad (\text{A.14})$$

en effet,  $\text{div}(\text{grad } H_z \times n) = \text{rot } \text{grad } H_z \cdot n - \text{grad } H_z \cdot \text{rot } n = 0$ .

on en déduit  $\Delta E_z = 0$  ; de même, on montrerait que  $\Delta H_z = 0$ .

Pour une structure de guidage homogène, on peut affirmer que la seule condition aux limites sur le champ électrique est qu'il doit être normal en tout point de la surface des conducteurs et

$E_z = 0$ , d'où :

$$\text{rot } E = \text{rot } E_t + \text{grad } E_z \times n = \text{rot } E_t = j\omega\mu_0 H_z \cdot n$$

or, d'après la relation

$-\gamma \text{ grad } H_z + j\omega\epsilon \text{ grad } E_z \times n = 0$  et comme  $E_z = 0$ , on sait déjà que  $\text{grad } H_z = 0$ . La fonction  $H_z$  est donc une fonction constante et le «  $\text{rot } E$  » est constant. Il reste à déterminer la valeur de cette constante.

Pour cela, nous considérons le contour ( $c$ ) de guide, et  $v$  le vecteur unitaire normale et  $\tau$  un vecteur unitaire tangent à ce contour qui délimite la surface de diélectrique  $\Sigma$ .

$$\iint \text{rot } E \cdot n \, d\sigma = \iint -j\omega\mu_0 H_z \cdot d\sigma = \oint_{(c)} E \, d\tau = -j\omega\mu_0 H_z$$

Comme  $E \parallel v$ , on conclut que  $E \cdot d\tau=0$ , donc cette intégrale est nulle et  $H_z=0$ . D'où  $\text{rot}E=0$ .

Comme le rotationnel d'un gradient est la fonction nulle, il en résulte que  $E$  est nécessairement de la forme suivante:

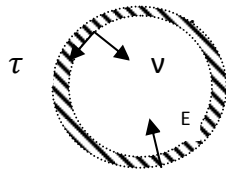


Fig A.1 Section droite  $\Sigma$ , Contour(C), vecteur tangent

$$E = -\text{grad } \Phi . \tag{A.15}$$

Comme la composante  $E_z$  est nulle,  $E = E_t$  est la composante transversale,  $\text{div } E = \text{div } E_t = \gamma E_z = 0$ , on a de plus :

$$\Delta \Phi = 0 .$$

La fonction  $\Phi$  vérifie donc l'équation de Laplace, et  $H$  est calculé à l'aide de la relation :

$$\text{rot } E + \gamma E_x n = -j\omega\mu_0 H . \tag{A.16}$$

le rotationnel est nul et il reste finalement :

$$H = H_t = \frac{-\gamma}{j\omega\mu_0} E_t \times n = \frac{1}{\eta} \text{grad } \Phi \times n = \frac{1}{\eta} n \times E_t . \tag{A.17}$$

**Deuxieme théorème :**

A toute fonction harmonique  $\Phi$  de  $R^2$  ( $\Delta\Phi=0$ ) corresponde à deux champs  $E$  et  $H$  transversaux, dans un milieu sans perte :

$$\left\{ \begin{array}{l} E = -\text{grad } \Phi = E_t . \\ H = \frac{1}{\eta} \text{grad } \Phi \times n = \frac{-\gamma}{j\omega\mu_0} E_t \times n = \frac{1}{\eta} n \times E = H_t . \end{array} \right. \tag{A.18}$$

## Annexe B

En exploitant la géométrie très simple du guide rectangulaire, il est raisonnable de chercher une solution par séparation des variables  $x$  et  $y$  sous la forme d'un produit de deux fonctions :

$X(x)Y(y)$ . On aboutit ainsi à une équation aux dérivées partielles de la forme

$$\Delta[X(x)Y(y)] + k_c^2 X(x)Y(y) = 0 \text{ en posant } k_c^2 = \gamma^2 + k^2.$$

Comme  $\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ , on a à résoudre l'équation du second ordre :

$$\frac{d^2 X}{dx^2} Y(y) + X(x) \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c^2 X(x)Y(y) = 0. \quad (\text{B.1})$$

Pour les points où  $X(x)Y(y)$  est non nul, on a la somme constante :

$$\frac{\frac{d^2 X}{dx^2}}{X(x)} + \frac{\frac{d^2 Y}{dy^2}}{Y(y)} = -k_c^2. \quad (\text{B.2})$$

Or, pour que la somme de deux fonctions de variables différentes soit constante, chacune de ces fonctions doit être une constante.

On en obtient le système d'équations différentielles :

$$\begin{cases} \frac{d^2 X}{dx^2} + k_c'^2 X(x) = 0 \\ \frac{d^2 Y}{dy^2} + k_c''^2 Y(y) = 0 \end{cases} \quad \text{Avec } k_c'^2 + k_c''^2 = k_c^2 \quad (\text{B.3})$$

En résolvant ces équations différentielles du second ordre à coefficients constants, on obtient des solutions de la forme

$$\begin{cases} X(x) = A' \sin[k_c' x] + B' \cos[k_c' x] \\ Y(y) = A'' \sin[k_c'' y] + B'' \cos[k_c'' y] \end{cases} \quad (\text{B.4})$$

Il reste alors à appliquer les conditions aux limites. Dans le cas TM, on a la condition

$E_z = X(x)Y(y) = 0$  sur les conducteurs supposés parfaits (condition de Dirichlet), d'où il résulte que :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(0)Y(y)=0|_{0 \leq y \leq b} \Leftrightarrow B'=0 \\ X(a)Y(y)=0|_{0 \leq y \leq b} \Leftrightarrow k'_c a = m\pi \quad m \in N \\ X(x)Y(0)=0|_{0 \leq x \leq a} \Leftrightarrow B''=0 \\ X(x)Y(b)=0|_{0 \leq x \leq a} \Leftrightarrow k''_c b = n\pi \quad n \in N \end{array} \right. \quad (B.5)$$

Dans le cas de TE, et la condition  $\frac{\partial H_z}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial v}[X(x)Y(y)] = 0$  sur les conducteurs (condition de Neumann), il en résulte :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX}{dx}(0)Y(y)=0|_{0 \leq y \leq b} \Leftrightarrow A'=0 \\ -\frac{dX}{dx}(a)Y(y)=0|_{0 \leq y \leq b} \Leftrightarrow k'_c a = m\pi \quad m \in N \\ X(x)\frac{dY}{dy}(0)=0|_{0 \leq x \leq a} \Leftrightarrow A''=0 \\ -X(x)\frac{dY}{dy}(b)=0|_{0 \leq x \leq a} \Leftrightarrow k''_c b = n\pi \quad n \in N \end{array} \right. \quad (B.6)$$

On constate donc qu'à chaque couple d'entiers (m , n) correspond une valeur de  $k_c^2$  associée à une fonction de la solution  $E_z$  et  $H_z$  avec :

$$k_c^2 = k_c'^2 + k_c''^2 = \pi^2 \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right) \quad (B.7)$$

- Si  $H_z=0$  partout, on note  $TM_{mn}$  les solutions (modes transversaux magnétiques) ;
- Si  $E_z=0$  partout, on note  $TE_{mn}$  les solutions (modes transversaux électriques) .

Finalement, les composantes scalaires sont de la forme :

- Modes  $TM_{mn}$  :  $E_z=0$  sur les conducteurs  $\Leftrightarrow E_z(x , y) = A \sin\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$  ;
- Modes  $TE_{mn}$  :  $\frac{\partial H_z}{\partial v}=0$  sur les conducteurs  $\Leftrightarrow H_z(x , y) = A \cos\left(\frac{m\pi}{a} x\right) \cos\left(\frac{n\pi}{b} y\right)$  ;

Pour qu'un mode  $TE_{mn}$  ou  $TM_{mn}$  puisse se propager dans le guide, sa constante de propagation  $\gamma$  doit être un nombre imaginaire pur  $\gamma = jk_g$ , avec  $k_g$  constant de propagation du guide d'onde (en toute rigueur, constante de phase).

## Annexe C

Soit  $\Phi_0$  la valeur du vecteur  $\Phi$  au plan de discontinuité correspondant à  $z = z_0$ , la solution générale est de la forme :

$$\Phi = e^{-j\eta\hat{L}(z-z_0)}\Phi_0 \quad (C.1)$$

En vue d'un traitement numérique, nous proposons une transformation en fonction de la nature des milieux considérés. Cette transformation est représentée par un système défini selon les règles suivantes:

$$\Phi(x,y) = \int_{pq} \bar{\bar{k}}(x,y,p,q) \tilde{\Phi}(p,q) dpdq$$

$$\tilde{\Phi}(p,q) = \int_{xy} \bar{\bar{k}}^+(x,y,p,q) \Phi(x,y) dx dy$$

Où  $\bar{\bar{k}}$  est le noyau de la transformation conditionné par :

$$\hat{L}.\bar{\bar{k}}(x,y,p,q) = \eta\bar{\bar{k}}(x,y,p,q)\tilde{k}(p,q)$$

$$\int_{pq} \bar{\bar{k}}(x,y,p',q')\bar{\bar{k}}(x,y,p,q) dx dy = \bar{\bar{I}}\delta(p-p')\delta(q-q')$$

$$\int_{pq} \bar{\bar{k}}(x,y,p',q')\bar{\bar{k}}(x',y',p,q) dpdq = \bar{\bar{I}}\delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$\Phi(x,y,z) = \int_{pq} \bar{\bar{k}}(x,y,p,q)e^{-j\tilde{k}(z-z_0)}\tilde{\Phi}_0(p,q) dpdq \quad (C.2)$$

Ces dernières sont prêtes à la programmation.

Nous allons définir cette transformation  $\bar{\bar{k}}$  dans les deux cas particuliers suivants: l'espace libre et l'espace stratifié.

### Espace libre

La transformée de Fourier s'adapte parfaitement au problème de l'espace libre.

En effet, si nous posons  $\bar{\bar{k}}$  tel que

$$\bar{\bar{k}}^+ = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}.\bar{\bar{I}}.e^{-j(px+qy)}$$

$$\bar{k} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \cdot \bar{I} \cdot e^{j(px+qy)}$$

Nous devons étudier le vecteur  $\Phi$  dans le domaine de la transformée de Fourier

$$\Phi(p, q, z) = \tilde{M}(p, q, z) \tilde{\Phi}_0(p, q)$$

Où

$$\tilde{M}(p, q, z) = \begin{bmatrix} \bar{I} \operatorname{ch} \gamma (z - z_0) & \frac{\tilde{A}}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma (z - z_0) \\ \frac{\tilde{A}}{\gamma} \operatorname{sh} \gamma (z - z_0) & \bar{I} \operatorname{ch} \gamma (z - z_0) \end{bmatrix}$$

$$\gamma = \begin{cases} j\sqrt{K_0^2 - p^2 - q^2} & p^2 + q^2 < K_0^2 \\ \sqrt{-p^2 - q^2 - K_0^2} & p^2 + q^2 \geq K_0^2 \\ j\sqrt{K_0^2 - p^2 - q^2} & K_0 - p^2 - q^2 \end{cases}$$

$$p^2 + q^2 \geq z_0$$

$$\tilde{A} = \frac{1}{K_0} \begin{bmatrix} -pq & p^2 - K_0^2 \\ K_0^2 - q^2 & pq \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

Une décomposition naturelle du vecteur  $\tilde{\Phi}_0$  peut se faire sur les vecteurs propres de la matrice  $\tilde{M}$ . Soient  $\tilde{\Phi}_i = 1, 2, 3, 4$ , les vecteurs propres.

$$v_1 = v_2 = e^{\gamma(z-z_0)}$$

$$v_1 = v_2 = e^{-\gamma(z-z_0)}$$

Le développement pseudo-modal s'écrit alors

$$\tilde{\Phi}_0(p, q) = a(p, q) \tilde{\Phi}_1 + b(p, q) \tilde{\Phi}_2 + c(p, q) \tilde{\Phi}_3 + d(p, q) \tilde{\Phi}_4$$

et le vecteur  $\tilde{\Phi}(p, q, z)$  obtenu s'écrit sous la forme:

$$\begin{aligned} \tilde{\Phi}(p, q, z) &= v_1(a \tilde{\Phi}_1 + b \tilde{\Phi}_2) + v_2(c \tilde{\Phi}_3 + d \tilde{\Phi}_4) \\ &= (a \tilde{\Phi}_1 + b \tilde{\Phi}_2) e^{\gamma(z-z_0)} + (c \tilde{\Phi}_3 + d \tilde{\Phi}_4) e^{-\gamma(z-z_0)} \end{aligned}$$

Les valeurs propres indiquent en effet les directions de propagation.

Par ailleurs, ces vecteurs sont orthogonaux. Cette relation s'écrit comme suit :

$$\tilde{\Phi}_i^+ \eta \tilde{\Phi}_j = 0, i \neq j$$

L'énergie totale apparaît comme la somme des énergies transportées par chaque onde.

Si la structure débouche sur un espace infini, les ondes régressives ne doivent pas exister. Les coefficients spectraux  $a(p,q)$  et  $b(p,q)$  sont annulés, ce qui donne

$$\tilde{\Phi}_0(p, q) = c\tilde{\Phi}_3 + d\tilde{\Phi}_4$$

et la solution de  $\Phi(p,q,z)$  est

$$\tilde{\Phi}(p, q, z) = (c\tilde{\Phi}_3 + d\tilde{\Phi}_4) e^{-\gamma(z-z_0)}$$

L'application des relations reliant  $\tilde{E}_{t0}$  et  $\tilde{H}_{t0}$  (cf. Annexe IV)

$$\tilde{A} \cdot \tilde{E}_{t0} = -jw \tilde{H}_{t0}$$

$$\tilde{A} \cdot \tilde{H}_{t0} = -jw \tilde{E}_{t0}$$

Avec  $w = -jr$ .

Ces deux relations sont identiques car nous avons

$$\tilde{A} \cdot \tilde{A} + \bar{w}^2 \bar{I} = \bar{0}$$

Mais les deux relations donnent des résultats différents à cause des troncatures effectuées lors du développement modal du champ. D'une manière générale, l'équation donnant le champ magnétique offre une meilleure convergence.

En introduisant un nouvel opérateur  $\bar{L}0$ , tel que

$$\bar{L}0 = j\eta_0 \bar{A}$$

Et en reprenant le vecteur  $\bar{J}_t$  nous aurons :

$$\bar{J}_{t0} = \frac{I}{\bar{w}} \cdot \bar{L}0 \cdot \bar{E}_{t0}$$

Qui nous permet d'avoir une relation entre  $\bar{E}_{t0}$  et  $\bar{J}_{t0}$  dans l'espace réel. La transformée de Fourier inverse donne

$$L^{-1} \left\{ \frac{I}{\bar{w}} \right\} = \frac{j e^{-jk_0 r}}{2\pi r}$$

$$= \frac{j}{2} G(r)$$

Où nous retrouvons la fonction de Green de l'espace libre  $G(r)$  avec  $r = \sqrt{X_t^2 + Y^2 + (z - z_0)^2}$   
 Ici, nous avons supposé que l'origine du milieu considéré est  $(0, 0, z_0)$ ,  $\bar{L}$  correspond dans l'espace réel à l'opérateur .

Appliquons la théorème de convolution nous avons :

$$J_{t0} = \frac{j}{2} G(r) * \widehat{L}_0 E_{t0}$$

Où le symbole \* indique l'opération de convolution.

Dans le cas où le guide s'ouvre sur l'espace libre, on peut déduire l'expression du champ magnétique par l'intermédiaire de  $J_{t0}$  à partir du champ électrique et vice-versa.

On effectue un développement modal sur les champs électrique et magnétique. L'espace libre étant caractérisé par la fonction de Green  $G(r)$ , le guide rectangulaire sert alors à fournir la fonction de base des modes TE et TM. Dans ce cas, on obtient la matrice de diffraction de la discontinuité guide-espace libre ainsi que la distribution des champs dans l'ouverture.

Connaissant  $\Phi_0$ , on peut obtenir l'expression du champ en un point quelconque.

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= L^{-1} \{ e^{-jw(z-z_0)} \Phi_{Z_0} \} \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \iint \tilde{\Phi}_0(p, q) e^{j[px+qy-w(z-z_0)]} dpdq \end{aligned}$$

Nous remarquons que le champ électrique et le champ magnétique sont liés par la fonction de Green de l'un des domaines considérés : l'espace libre. Nous allons reprendre cette démarche pour le guide stratifié et définir à partir de là une fonction de Green à deux dimensions pour le milieu stratifié.