N° d'ordre : 08/2015-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR EN SCIENCES**

EN : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion**
Par

Souad SLIMANI

Thème

Identification et Automorphismes de Graphes

Soutenue Publiquement le **07/ 06/ 2015**, devant le jury composé de :

M. A. SEMRI	Professeur à l'USTHB	Alger	Président
M. M. AIDER	Professeur à l'USTHB	Alger	Directeur de Thèse
M. S. GRAVIER	D. Recherche à l'I. Fourier	Grenoble	Co-Directeur de Thèse
M. A. BERRACHEDI	Professeur à l'USTHB	Alger	Examinateur
M. B. SADI	Maître de Conférences /**A** à l'U.M.M. à T. O		Examinateur
M. J. MONCEL	HDR à l'IUT de Rodez	Toulouse	Examinateur

Remerciements

Je tiens d'abord à exprimer toute ma reconnaissance à mes directeurs de thèse *Méziane AÏDER* et *Sylvain GRAVIER*. Chacun a su encadrer mes débuts, à Alger comme à Grenoble, avec beaucoup de patience et bienveillance. Je les remercie vivement pour leurs soutiens et conseils, pour m'avoir suivi et encouragé durant les années de thèse.
Je tiens à remercier *AÏDER* pour sa gentillesse, sa disponibilité et son aide scientifique et humaine.
Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à *Sylvain* pour m'avoir accueillie à l'Institut Fourier et me supporter durant mon long séjour à Grenoble.

Pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury ainsi que pour ses encouragements, je remercie *Ahmed SEMRI*.

Mes vifs remerciements vont aussi à *Abdelhafid BERRACHEDI* et *Bachir SADI* qui ont accepté d'examiner mon travail. Je remercie également *Julien MONCEL* d'accepter de faire partie du jury.

Je tiens à remercier mes collègues du département de Recherche Opérationnelle qui m'ont soutenue et encouragé. Je remercie aussi mes collègues et le personnel administratif de la Faculté des Mathématiques à l'U.S.T.H.B., tout particulièrement : Fatma, Hayat, Kahina, Lamia, Meriem, Naïma, Nazahat, Saliha, Salima1, Salima2 et Zina.

J'adresse mes sincères remerciements aux membres de l'Institut Fourier, quelque soit leur fonction, tout particulièrement : Géraldine, Grégoire, Karima, Nassima et Simon. Je remercie également les thésards pour la bonne ambiance qui y règne. Une mention spéciale pour Marianne qui m'a soutenue durant mon séjour et pour mon frère scientifique Simon, je le remercie pour sa bonne humeur, ses conseils, ses remarques et ses commentaires. J'ai beaucoup apprécié les moments où nous avons travaillé ensembles. Je n'oublie pas de remercier les autres doctorants : Binbin, Elise, Izabela, Entissar et Nadia. A Berardo avec qui j'ai partagé le bureau, je le remercie pour ses encouragements. Je remercie aussi les personnes avec qui j'ai animé les ateliers et les stands de l'équipe *Maths à Modeler*. Je tiens à remercier aussi tous mes amies de Grenoble Chua'à, Hajer, Nora, Chahrazad, Marie-Noël, Axel XX, Nath, en particulier Nathalie,

merci pour tout ....

Je souhaite remercier mes parents, mes soeurs, mes frères, mes neveux, mes nièces. Enfin, merci à tous mes amis d'ici ou d'ailleurs et à toutes les personnes, qui ont, de près ou de loin, veillé sur moi et attribué pour réaliser ce travail.

Table des matières

Introduction générale **3**

1 Notions de base **7**

1.1 Graphes 8

1.1.1 Définitions classiques 8

1.1.2 Produits de graphes 10

1.1.3 Quelques graphes spécifiques 11

1.1.4 Rappels Algébriques 14

1.2 Codes et identification 15

1.2.1 (a, b)-codes 15

1.2.2 Codes identifiants 16

1.3 Coloration de graphes 18

1.4 Complexité algorithmique 18

2 (a, b)-codes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ **21**

2.1 Définitions et état de l'art 22

2.2 (a, b)-codes sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 23

2.2.1 Définitions et remarques. 23

2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.7 25

2.3 Conclusion 32

3 Nombre distinguant pour certains graphes circulants **33**

3.1 Introduction 34

3.2 Principe de base et état de l'art 36

3.2.1 Complexité 36

3.2.2 Résultats préliminaires 37

3.3 Graphes circulants 40

3.3.1 Premiers résultats 41

3.3.2 Graphes circulants $C(m, p)$ 42

3.4 Remarques et conclusion 49

4 Coloration Localement Identifiante Relaxée **51**

4.1 Introduction 52

4.2 Premiers résultats 55

4.3 Complexité 57

4.4 Relation entre γ_{id}, χ_{lid} et χ_{rlid} 61

4.5 Graphes scindés 66

4.6 Conclusion. 70

Conclusion **73**

Bibliographie **75**

Table des figures

1 Trousseaux de clefs différentes 3

1.1 Quelques graphes multipartis complets. 10

1.2 Illustrations du produit direct, cartésien et lexicographique. 11

1.3 Joint de deux graphes. 11

1.4 Le graphe P_{2k}^{k-1}. 12

1.5 Quelques graphes $C(n,k)$. 13

1.6 Une famille d'inetrvalles et son graphe d'intervalle 13

1.7 Quelques graphes non identifiables : les sommets noirs ne sont pas identifiables. 16

1.8 Problème de détecteur de feu : Plan des pièces d'une maison et son graphe associé. Les sommets $\{2,3,4,6,7\}$ déterminent l'emplacement des détecteurs de feu. 17

2.1 $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$. 24

2.2 Les $(k+1)$-blocs B_α avec $\alpha \geqslant 0$ 28

2.3 les ensembles $S_{+\alpha}$ et $S_{-\alpha}$. 29

3.1 Trousseaux de clefs différentes et une proposition de la coloration pour les distinguer. 34

3.2 Coloration distinguante avec deux couleurs d'un trousseau de clefs qui contient 16 clefs. 35

3.3 Une 2-coloration non-distinguante de C_4. 36

3.4 Une coloration distinguante de C_5 et C_8. 37

3.5 Une coloration distinguante de graphe G_5. 38

3.6 Les graphes circulants : les sommets de même couleur appartenant au même module. 43

3.7 L'automorphisme $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ appliqué au $C(4,4)$ avec les couleurs (1,2,3,4)=(noir,rouge, bleu,vert). 46

3.8 la $(m+1)$-coloration : la couleur de chaque sommet est donné à l'intérieur de cycle. 47

4.1 Une coloration localement identifiante relaxée de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage de chaque sommet. 52

4.2 Une coloration localement identifiante de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage fermé de chaque sommet. 53

4.3 Une coloration identifiante de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage fermé de chaque sommet. . 54

4.4 Graphe illustrant un code identifiant : les sommets noirs forment un code identifiant. 55

4.5 Le graphe G^* associé au graphe G où chaque arête xy de G est remplacée par la chaîne $xaby$ dans G^*. 56

4.6 Le graphe H_p et ses composantes K, S_1, S_2 et S_3. 57

4.7 Une coloration localement identifiante relaxée du $K_{1,p}$ avec $p \geqslant 2$ . . 59

4.8 Partition de l'ensemble de sommets de G en niveaux $L_0, L_1, \ldots, L_p$ suivant le sommet x. 60

4.9 Coloration *rlid* du graphe K_4^* 63

4.10 Le graphe scindé et ses composantes K et S. 67

Introduction

Albertson et Collins [3] ont introduit le *nombre distinguant* $D(G)$ d'un graphe G comme étant le plus petit nombre k tel que G admet une coloration des sommets avec k couleurs préservée par un seul automorphisme qui est l'identité. Il s'avère que ce nombre vaut 2 pour la majorité des graphes étudiés dans la littérature. Il serait intéressant de trouver d'autres classes de graphes pour lesquelles la valeur de cet invariant est différente de 2.
Ce concept a fait l'objet de nombreux travaux de recherche et le problème qui était derrière l'introduction de ce nombre est :
« *Une personne aveugle a un trousseau de clefs. Les clefs sont différentes et servent à ouvrir des portes différentes (i.e. la clef i ouvre la porte* P_i*). Le porte-clefs a une forme circulaire. Supposons qu'il existe une variété de formes de clefs disponible (les pannetons et les anneaux sont différents) de sorte que le choix de la clef est difficile au toucher, tandis que la reconnaissance d'une forme de clef est facile. La question qui se pose : quel est le nombre de formes différentes de clefs nécessaires pour que l'aveugle puisse garder toutes les clefs et soit capable de sélectionner la bonne clef au toucher ?* »

FIGURE 1 – Trousseaux de clefs différentes

Pour répondre à cette question, nous modélisons le problème à l'aide d'un graphe où les clefs seront représentées par les sommets et une arête relie deux sommets dans ce graphe si et seulement si les deux clefs correspondantes sont adjacentes dans le trousseau.

Une des manières pour résoudre ce problème est de colorier les sommets du graphe de sorte que cette coloration brise tous les automorphismes du graphe. Une telle coloration est appelée *coloration distinguante*. De plus, si le nombre de couleurs utilisées est égal à k, alors la coloration est dite k-*distinguante*. Le *nombre distinguant* d'un graphe G, noté $D(G)$, est le plus petit entier k tel que G admet une coloration k-distinguante. La valeur de ce nombre vaut 2 ou la valeur est très grande et dépend de l'ordre du graphe, pour plusieurs graphes étudiés dans la littérature. Le chapitre 3 de cette thèse est consacré à l'étude de cet invariant. Nous construisons une famille de graphes pour lesquels le nombre distinguant est différent de 2 et ne dépend pas de l'ordre du graphe.

Étant donné un graphe, le nombre distinguant est un paramètre global. On peut s'intéresser à des problèmes de manière locale. Par exemple identifier deux sommets adjacents qui n'ont pas les mêmes voisins et qui sont identifiés par l'ensemble de couleurs apparaissant dans leur voisinage. Une telle coloration est appelée *coloration localement identifiante relaxée*, notée *coloration-rlid*. Une telle coloration existe toujours pour n'importe quel graphe. En effet, il suffit de colorier tous les sommets du graphe avec des couleurs différentes. Deux sommets adjacents qui n'ont pas les mêmes voisins sont séparés par l'ensemble de couleurs existant dans leur voisinage. Si deux sommets adjacents ont les mêmes voisins (i.e. sont jumeaux), on ne s'intéresse pas à les identifier. L'objectif est de minimiser le nombre de couleurs nécessaires pour avoir une coloration-*rlid* dans un graphe même s'il contient des jumeaux. La coloration-*rlid* est une version locale d'une coloration dite *identifiante* qui est une coloration de sommets du graphe où il faut identifier toute paire de sommets (même s'ils ne sont pas adjacents). La coloration identifiante est une version coloration des *codes identifiants*. Le chapitre 4 de cette thèse est dédié à l'étude de la coloration-*rlid*. Nous montrons le lien entre cette coloration et les codes identifiants. Nous la comparons aux autres colorations : la coloration propre (où deux sommets adjacents n'ont pas la même couleur) et la coloration identifiante (localement et globalement).

La coloration-*rlid* est une manière d'identifier les sommets du graphe avec les couleurs. Une autre manière d'identifier les sommets du graphe avec un sous-ensemble C de sommets de sorte que pour chaque sommet du graphe, l'ensemble des sommets voisins de ce sommet et qui sont dans C est non vide et unique. On peut dire que l'ensemble de sommets du graphe est partitionné en deux sous-ensembles disjoints C et $\overline{C}$ tels que pour chaque sommet du graphe, la distance entre ce sommet et un

sommet dans C est inférieure ou égale à 1. Un tel sous-ensemble nous détermine un *code identifiant*. Dans cette partition de l'ensemble de sommets, si de plus chaque sommet dans C a exactement a voisins dans C, chaque sommet dans $\overline{C}$ a exactement b voisins dans l'ensemble C et que le degré de chaque sommet de $\overline{C}$ est différent de a. Cette partition de l'ensemble de sommets du graphe définit un (a, b)-*code* qui fait l'objet du chapitre 2. Nous caractérisons les valeurs de a et b pour lesquelles il existe un (a, b)-code.

Dans le chapitre 1, nous fournissons toutes les définitions et nous fixons toutes les notations utilisées dans cette thèse.

Chapitre 1

Notions de base

Sommaire

1.1 Graphes 8
1.1.1 Définitions classiques 8
1.1.2 Produits de graphes 10
1.1.3 Quelques graphes spécifiques 11
1.1.4 Rappels Algébriques 14
1.2 Codes et identification 15
1.2.1 (a, b)-codes 15
1.2.2 Codes identifiants 16
1.3 Coloration de graphes 18
1.4 Complexité algorithmique 18

Dans ce Chapitre, nous donnons les notions de base et les définitions que nous utiliserons dans ce document. Dans la partie 1.1, nous donnons la terminologie et quelques définitions relatives aux graphes. Les définitions propres à un chapitre seront données au fur et à mesure. La partie 1.2 contient quelques définitions relatives aux codes et aux problèmes d'identification. Dans la partie 1.3, nous rappelons certaines notions de la colorations de graphes. Dans la partie 1.4, nous présentons un aperçu sur la théorie de la complexité algorithmique.

1.1 Graphes

1.1.1 Définitions classiques

Graphe, sous-graphe

Un *graphe simple non orienté* G est défini par un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est l'ensemble de *sommets* de G et $E(G)$ est un sous-ensemble de paires non ordonnées de $V(G)$. Les éléments de $E(G)$ sont appelés les *arêtes*. S'il n'y a pas d'ambiguïté, nous notons simplement V et E. Une arête reliant deux sommets x et y est notée xy (ou yx).

Un graphe G est dite *simple* s'il ne comporte aucune boucle et que deux arêtes ne relient jamais la même paire de sommets.

Soit A un sous-ensemble de sommets du graphe $G = (V, E)$, $A \subseteq V$. Le *sous-graphe induit* par A de G, noté $G[A]$, est le graphe ayant A comme ensemble de sommets et dont l'ensemble d'arêtes contient toutes les arêtes de E dont les extrémités sont dans A.

Soit $u \in V$. Notons $G - u$ le sous-graphe $G[V \backslash \{u\}]$.

Le nombre de sommets de G définit son *ordre*, noté souvent n. Le nombre de ses arêtes sera désigné par m.

Voisinage et degré

Deux sommets u et v sont *adjacents* ou *voisins* si $uv \in E$. Réciproquement, si $uv \notin E$, alors u et v sont dits *non-adjacents* ou *non voisins*. Soit $e = uv$ une arête de G. Les sommets u et v sont appelés les *extrémités* de e, et e est dite *incidente* à u et à v. Deux arêtes sont *adjacentes* si elles ont une extrémité en commun. Une arête dont les extrémités sont confondues est dite *boucle*. Le *voisinage ouvert* d'un sommet u de G, noté $N_G(u)$ (ou $N(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté), est l'ensemble de ses voisins. Nous avons $N(u) = \{v \in V | uv \in E\}$. L'ensemble $N(u) \cup \{u\} = N[u]$ définit le *voisinage fermé* ou *étendu* du sommet u. Pour un sous-ensemble $S \subseteq V$, le *voisinage ouvert* est $N_G(S) = \bigcup_{v \in S} N_G(v)$ et le voisinage étendu $N_G[S] = N_G(S) \cup \{S\}$.

Deux sommets u et v sont dits *faux jumeaux* (resp. *vrais jumeaux*) si $N(u) = N(v)$ (resp. $N[u] = N[v]$). Le *degré* du sommet u dans G est noté $d_G(u)$ (ou $d(u)$), est le nombre d'arêtes incidentes à u. Nous avons $|N(u)| = d(u)$. Dans un graphe simple, on appelle *sommet isolé* un sommet de degré 0. Un sommet de degré 1 est dit *sommet pendant*, ou encore *feuille*. Le *degré maximum* de G, noté $\Delta(G)$ (si le contexte est clair), est le maximum des degrés de ses sommets. Nous avons $\Delta(G) = \max_{u \in V} d(u)$.

Chaînes, cycles

Une *chaîne* entre deux sommets u et v, noté $P(u, v)$ (ou P s'il n'y a pas d'ambiguïté), est une suite de sommets $(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_n)$ tels que $u_0 = u$, $u_n = v$ et $u_i u_{i+1}$ soit

une arête pour tout $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Le paramètre n désigne la *longueur* de P. Les sommets u et v sont les *extrémités* de P, les autres sommets sont dits *intérieurs*.
Un *cycle* d'un graphe G est une chaîne simple $C = (u_0, u_1, \ldots, u_n)$, $n \geqslant 3$, dont les extrimités coïncident. La *longueur* du cycle C est égale à n qui est le nombre de ses arêtes. Une *corde* de C est une arête reliant deux sommets non consécutifs de C, i.e. toute arête u_iu_j telle que $|j-i| > 1$. Un cycle sans corde est dit *induit*. Un cycle est dit *pair* (resp. *impair*) si sa longueur est paire (resp. *impaire*). Le cycle C_n désigne un cycle sans corde de longueur n.
La *distance* entre deux sommets u et v du graphe G, notée $d_G(u,v)$ ou $d(u,v)$, est la longueur d'une plus courte $\{u,v\}$-chaîne.
Étant donné un entier r, la *boule de rayon r centrée en u*, notée $\mathbb{B}_r(u)$, désigne les sommets à distance au plus r de u, i.e. $\mathbb{B}_r(u) = \{v \in V | d(u,v) \leqslant r\}$.
La *maille* d'un graphe G est la longueur du plus petit cycle contenu dans G.

Connexité
Un graphe G est *connexe* si toute paire de sommets de G est reliée par une chaîne. Lorsque G est non connexe, une *composante connexe* est un sous-ensemble de sommets C maximal tel que le sous-graphe induit $G[C]$ est connexe.

Complémentaire
Le *complémentaire* d'un graphe G, noté $\overline{G}$, est le graphe ayant le même ensemble de sommets $V(G)$ et où xy est une arête de $\overline{G}$ si et seulement si xy n'est pas une arête de G : $E(\overline{G}) = \overline{E(G)}$.

Couplage
Un *couplage* dans un graphe G est un ensemble d'arêtes deux à deux non-adjacentes. Un couplage de G est dit *parfait* si tout sommet du G est une extrémité d'une arête du couplage.

Graphes complets et stables
Le *graphe complet* noté K_n, est le graphe possédant n sommets tous reliés deux à deux par une arête. Le complémentaire du graphe complet K_n, noté $\overline{K_n}$, est appelé *stable* ou *ensemble indépendant*. Un sous-ensemble de sommets induisant un sous-graphe complet (resp. stable) de G est appelé *clique* (resp. *stable*).
Étant donné k un entier positif, une clique de taille k est appelée *k-clique*. La taille de la plus grande clique de G est notée $\omega(G)$.

Graphes bipartis
Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de son ensemble de sommets en deux stables disjoints V_1 et V_2 telle que chaque arête ait une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 : $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Un graphe *biparti complet* est un graphe biparti maximal en terme de nombre d'arêtes. Ainsi, le graphe biparti complet $K_{n,m}$ a pour ensemble de sommets $V_1 \cup V_2$ avec $|V_1| = n$ et $|V_2| = m$, et pour ensemble d'arêtes $\{xy |\ x \in V_1,\ y \in V_2\}$. Chaque sommet de V_1 est adjacent à tous les sommets de V_2 et réciproquement. Plus généralement, le graphe *multiparti complet*, noté $K_{n_1,n_2,\ldots,n_k}$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est partitionné en k stables disjoints : $V = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_k$ avec V_i de taille n_i et où chaque sommet de V_i est adjacent à tous les sommets de V_j avec $i, j = 1, \ldots, k$ et $i \neq j$.
Le graphe biparti complet $K_{1,n}$ est appelé *étoile*.

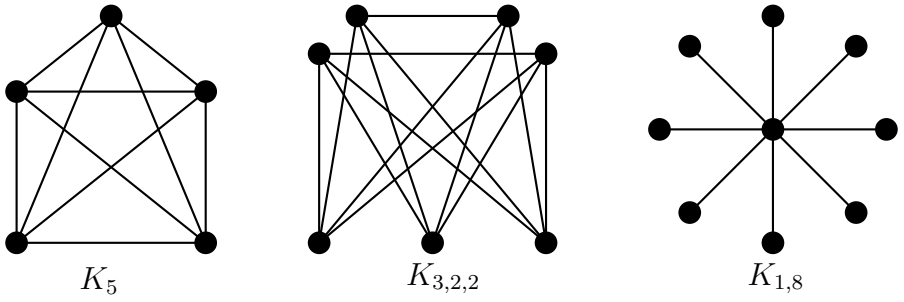


FIGURE 1.1 – Quelques graphes multipartis complets.

1.1.2 Produits de graphes

Produit direct
Le *produit direct* de deux graphes donnés G et H, noté $G \times H$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont adjacents si et seulement si $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

Produit cartésien
Le *produit cartésien* de deux graphes donnés G et H, noté $G \square H$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont reliés par une arête si et seulement si soit $x_1x_2 \in E(G)$ et $y_1 = y_2$, soit $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$.
On note $G^2 = G \square G$ et $G^r = G \square G^{r-1}$ avec $r \geqslant 2$ un entier.

Produit lexicographique
Le *produit lexicographique* de deux graphes donnés G et H, noté $G \otimes H$, est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ et dont deux sommets distincts (x_1, y_1) et (x_2, y_2) sont adjacents si et seulement si **(i)** $x_1x_2 \in E(G)$ ou **(ii)** $x_1 = x_2$ et $y_1y_2 \in E(H)$.

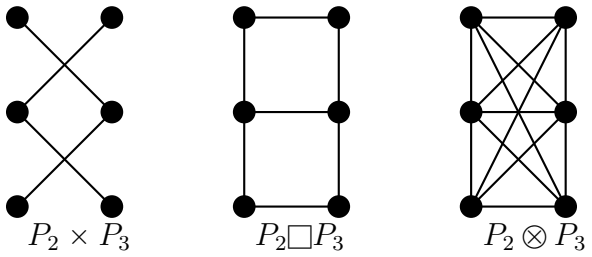


FIGURE 1.2 – Illustrations du produit direct, cartésien et lexicographique.

1.1.3 Quelques graphes spécifiques

Graphe planaire, k-régulier, k-dégénéré et graphe joint
Un graphe est *planaire* s'il peut être tracé dans un plan sans croisement d'arêtes en dehors de leurs extrimités.
Étant donné un entier positif k, un graphe G est *k-régulier* si ses sommets sont tous de degré k. Un graphe G est *k-dégénéré* si G et tous sous-graphe de G contient un sommet de degré au plus k.
Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, le *joint* de G et H, noté $G \bowtie H$, est le graphe dont l'ensemble de sommets est l'ensemble $V(G) \cup V(H)$ et l'ensemble des arêtes est l'ensemble $E(G) \cup E(H) \cup \{xy |\ x \in V(G),\ y \in V(H)\}$.

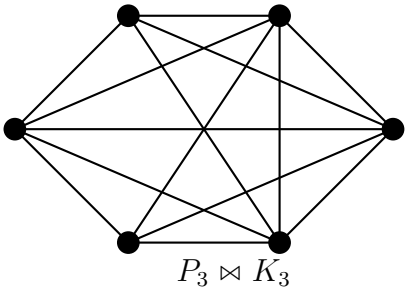


FIGURE 1.3 – Joint de deux graphes.

Graphe Premier
Un graphe est dit *premier* (par rapport au produit cartésien) s'il ne peut pas être écrit comme produit cartésien de deux graphes non triviaux.

Deux graphes G et H sont *relativement premiers* (par rapport au produit cartésien) si dans la décomposition en facteur premier de G et de H, il n'existe pas de graphe

non trivial qui est un facteur en commun.

Puissance de graphe

Étant donné un entier positif k, la k-ième *puissance* d'un graphe $G = (V, E)$, notée G^k, est le graphe ayant pour sommets l'ensemble V et où deux sommets sont adjacents dans G^k s'ils sont à distance au plus k dans G.
Si $G = P_n$ où P_n est une chaîne de longueur n, la $(k-1)$-ième puissance de la chaîne P_{2k} d'ordre $2k$, notée P_{2k}^{k-1}, est le graphe ayant pour ensemble de sommets l'ensemble $\{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{2k}\}$ et où deux sommets sont adjacents s'ils sont à distance au plus $k-1$. Si $k = 1$, $\mathrm{P}_2^0 \equiv \overline{K_2}$. Si $k = 2$, $\mathrm{P}_4^1 \equiv P_4$.

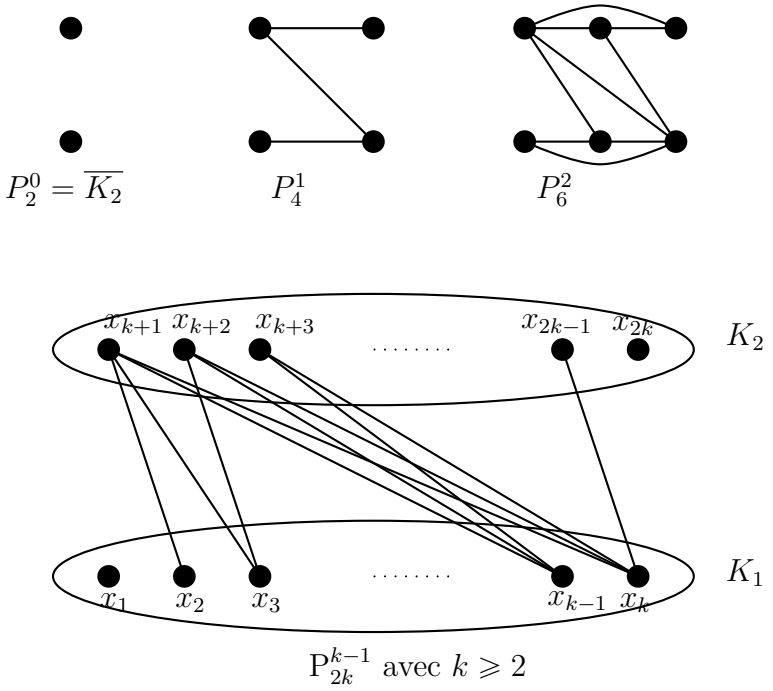


FIGURE 1.4 – Le graphe P_{2k}^{k-1}.

Graphe circulant

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ d'ordre n et soit $A \subset \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le graphe G est dit *circulant* de partie A si et seulement si $V = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et $E = \{(x, y) \in V \times V \ / \ x - y \in A\}$. Nous avons $0 \notin A$ et $-x \in A$ si et seulement si $x \in A$.
Le graphe complet K_n est le graphe circulant avec $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $A = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Le stable est le graphe circulant dont l'ensemble de sommets est $V = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ et $A = \varnothing$.
Le cycle élémentaire C_n est le graphe circulant où les sommets sont les sommets de C_n et où deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si $|x - y| = 1$.

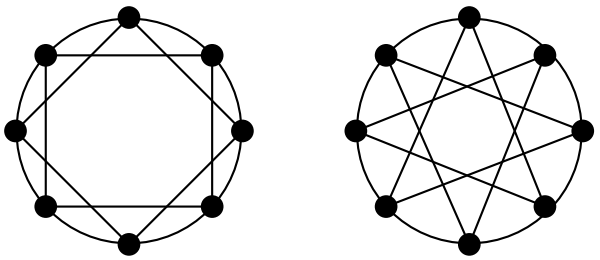


FIGURE 1.5 – Quelques graphes $C(n,k)$.

La k-ième puissance du cycle C_n, notée $C(n,k)$, est le graphe circulant dont l'ensemble de sommets est celui de C_n et où deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si $|x-y| \leqslant k$. Ce graphe est k-régulier (voir la FIGURE 1.5).

Graphes scindé

Un graphe *scindé* (ou graphe *split*) est un graphe où l'ensemble des sommets peut être partitionné en une clique et un ensemble indépendant.

Graphes d'intervalles

À partir d'une famille finie d'intervalles $\mathcal{I} = \{I_1, I_2, \ldots, I_n\}$ sur la droite réelle, le graphe d'*intersection* de la famille $\mathcal{I}$ est le graphe dont les sommets sont les intervalles,et deux sommets sont adjacents si et seulement si les intervalles correspondants s'intersectent . Un graphe est un *graphe d'intervalles* s'il existe une famille d'intervalles dont c'est le graphe d'intersection. Les intervalles peuvent être ouverts ou fermés.

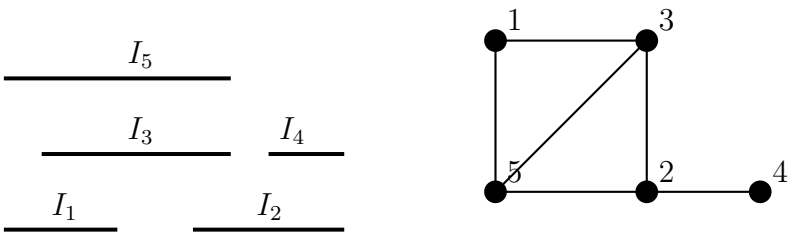


FIGURE 1.6 – Une famille d'inetrvalles et son graphe d'intervalle

1.1.4 Rappels Algébriques

Quelques définitions de base

Étant donné un nombre entier positif p, notons $[p]$ l'ensemble $\{1, 2, \ldots, p\}$ de cardinal p. L'ensemble des parties de $[p]$, noté $\mathcal{P}(p)$, est l'ensemble des sous-ensembles de $[p]$. Formellement, $\mathcal{P}(p) = \{A \mid A \subseteq [p]\}$.
La *différence symétrique* de deux ensembles A et B, notée $A \triangle B$, est l'ensemble dont les éléments sont dans A ou dans B mais n'appartenant pas à leur intersection : $A \triangle B = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$.
Le groupe symétrique $\Im_n$ est le groupe des permutations opérant sur un ensemble à n éléments. Le cardinal du groupe $\Im_n$ est $n!$. Il est engendré par les transpositions et il n'est pas commutatif sauf si $n = 1, 2$.
Un groupe *abélien*, ou groupe *commutatif*, est un groupe dont la loi de composition interne est commutative.
Nous utilisons D_n $(n \geqslant 3)$ pour désigner le groupe *dièdral* d'ordre $2n$, qui s'interprète naturellement comme le groupe des isométries du plan conservant un polygone régulier à n côtés en géométrie, et comme le groupe des automorphismes des cycles en théorie des graphes.

Groupe opérant sur un ensemble

Soit G un groupe multiplicatif d'élément unité e Soit E un ensemble non vide muni d'une loi de composition externe. On peut définir une *action* (ou opération) de G sur l'ensemble E par une application :

$$\begin{array}{ccc} G \times E & \to & E \\ (g, x) & \mapsto & g.x \end{array}$$

satisfaisant les deux conditions suivantes :

- $\forall x \in E,\ e.x = x.$
- $\forall (g_1, g_2) \in G \times G,\ \forall x \in E,\ g_1 g_2.x = g_1.(g_2.x)$

Dans ce cas on dit également que G *opère* (ou *agit*) sur l'ensemble E.

Orbite, stabilisateur, point fixe

On définit *l'orbite* d'un élément x de E par : $O_x = \{y \in E | \exists g \in G : y = g.x\}$. Autrement dit l'orbite de x est l'ensemble des éléments de E associés à x sous l'action de G.

Le stabilisateur (ou *sous-groupe d'isotropie*) d'un élément x de E est l'ensemble $G_x = \mathrm{St}_x = \{g \in G \mid g.x = x\}$ des éléments qui laissent x invariant sous leur action. L'ensemble G_x est un sous-groupe de G. Les stabilisateurs de deux éléments de la même orbite sont conjugués via la formule : $\mathrm{St}_{g \cdot x} = g \, \mathrm{St}_x \, g^{-1}$.

On définit l'ensemble $Fixg$ des *points fixés* par un élément g du groupe G comme

l'ensemble des éléments de E invariants sous l'action de g.

Une action est dite *fidèle* (on dit parfois aussi *effective*) si l'intersection de tous les stabilisateurs est réduite au neutre, autrement dit si seul le neutre fixe tous les points. Dans ce cas on dit également que G *agit fidèlement* sur l'ensemble E.

Morphisme, isomorphisme et automorphisme de graphes
Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, une application $\varphi : V(G) \longrightarrow V(H)$ qui envoie les sommets de G sur ceux de H est un *morphisme* entre G et H si pour toute arête xy de G, $\varphi(x)\varphi(y)$ est une arête de H. L'ensemble des morphismes d'un graphe G dans H sera noté $Hom(G, H)$.
Deux graphes G et H sont *isomorphes*, on note $G \backsimeq H$, s'il existe un morphisme bijectif entre G et H dont la réciproque est un morphisme. L'application φ est appelée *isomorphisme*.
Un *automorphisme* d'un graphe G est un isomorphisme de G dans G. L'ensemble des automorphismes de G sera noté $Aut(G)$.
L'ensemble $Aut(G)$ muni de l'opération de composition $(Aut(G), \circ)$ est un groupe. En effet, $Aut(G)$ est un sous-ensemble du groupe symétrique $\Im_n$ contenant l'identité. Le groupe $Aut(G)$ est $\Im_n$ si et seulement si $G = K_n$ ou $G = \overline{K_n}$. Nous avons $Aut(G) = Aut(\overline{G})$. Le groupe d'automorphismes d'une chaîne élémentaire P_n est $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. En général, la taille du groupe d'automorphismes d'un graphe G égale au nombre de symétries existant dans ce graphe. Un graphe G est dit *asymétrique* (ou *rigide* ou *trivial*) si $Aut(G) = Id$ où Id est l'application identité.

1.2 Codes et identification

1.2.1 (a, b)-codes

Étant donné un entier positif r, un *r-code correcteur d'erreur*, noté C, dans un graphe G, est un sous-ensemble de sommets tel que deux sommets quelconques du code sont à distance au moins $2r + 1$ ou alors pour toute paire de sommets $u, v \in C$: $N[u] \cap N[v] = \varnothing$. Autrement dit, les $\{0, 1\}$-boules centrées sur les sommets du code sont disjointes. Lorsque $r = 1$, nous parlons simplement de *code*.
Un code C est *parfait* si tout sommet du graphe est à distance au plus 1 d'un sommet de C. Autrement dit, $\forall x \in V(G),\ \ N[x] \cap C \neq \varnothing$. Cela signifie que tout sommet est contenu dans une $(0, 1)$-boule où le centre est un élément du code.
Étant donnés G un graphe k-régulier, a et b deux entiers tels que $0 \leqslant a \leqslant b \leqslant k$,un (a, b)-code sur le graphe G est un ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que tout sommet du code C doit avoir exactement a voisins dans le code C et tout sommet de $V \backslash C$ doit avoir exactement b voisins dans C. Formellement :

$$\begin{cases} \forall x \in C, & |N[x] \cap C| = a+1 \\ \forall x \in V \backslash C, & |N[x] \cap C| = b \end{cases}$$

Ces codes ont été largement étudiés. Ce sont des cas particuliers des codes pondérés parfaits[14]. En outre, les $(0,1)$-codes sont des 1-codes correcteurs parfaits[32, 33] et les $(1,1)$-codes sont des empilements ouverts parfaits[37].

1.2.2 Codes identifiants

Un code C d'un graphe $G = (V, E)$ *domine* un sous-ensemble de sommets S de G si tout sommet de S est à distance au plus 1 d'un sommet de C. Autrement dit, $\forall x \in S, N[x] \cap C \neq \varnothing$.
Si $S = V$, le code C est appelé *ensemble dominant* (pour les théoriciens des graphes) ou *code couvrant* (pour les théoriciens des codes). Si G est fini, la taille du plus petit ensemble dominant de G est notée $\gamma(G)$.
Un sommet x *sépare* deux sommets u et v de G s'il appartient à la différence symétrique de leur voisinage fermé, i.e. $x \in N[u] \triangle N[v]$.
Un code C *sépare* un sous-ensemble de sommets S si toutes les paires de sommets dans S sont séparées par un élément de C.
Si $S = V$, le code C est dit *ensemble séparant* de G.
Un code C de G *identifie* un sous-ensemble de sommets S s'il domine et sépare S. Autrement dit, tous les ensembles $N[x] \cap C$ où $x \in S$ sont uniques et non vides.
Si $S = V$, C est appelé *code identifiant* du graphe G . Chaque sommet x est identifié par un unique ensemble $N[x] \cap C$, appelé *identifiant* ou *étiquette* de x. La taille du plus petit code identifiant de G, lorsqu'il existe, est notée $\gamma_{id}(G)$. Un graphe n'admet pas forcément un code identifiant. En général, un graphe est *identifiable* si et seulement si il est sans jumeaux (en anglais *twin-free*), c'est-à-dire il ne contient pas de jumeaux.

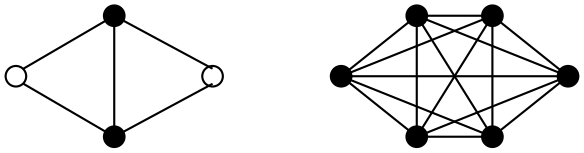


FIGURE 1.7 – Quelques graphes non identifiables : les sommets noirs ne sont pas identifiables.

Cette notion est largement étudiée, elle a été introduite par *Karpovsky et al.* [49] pour modéliser un problème d'identification de processeurs défectueux dans un réseau

multiprocesseurs. En 2004, Ungrangsi et al.[68] ont utilisé les codes identifiants pour la conception de réseaux de détecteurs d'incendie dans les immeubles. Cette application consiste à déterminer un placement de détecteurs de feu qui permettra d'identifier l'endroit exacte de l'incendie en plaçant un nombre minimum de détecteurs de feu dans l'immeuble.

L'incendie est captée par un ou plusieurs détecteurs si ce dernier est placé dans la

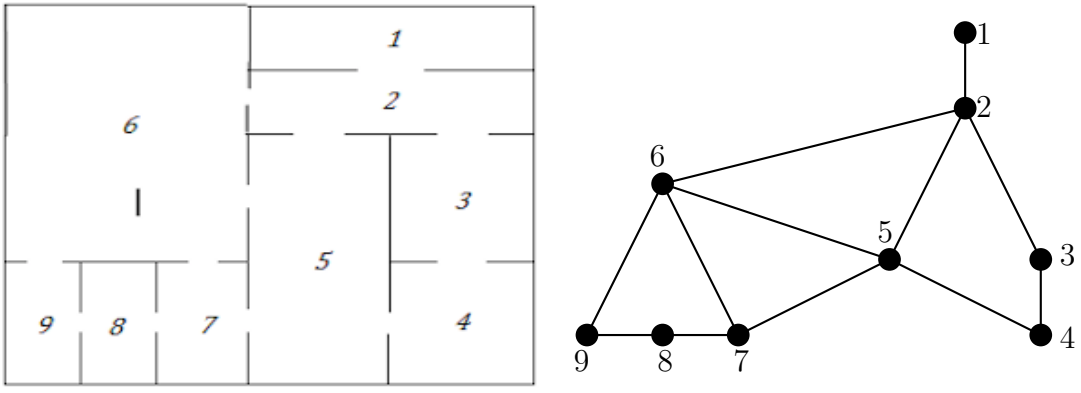


FIGURE 1.8 – Problème de détecteur de feu : Plan des pièces d'une maison et son graphe associé. Les sommets $\{2, 3, 4, 6, 7\}$ déterminent l'emplacement des détecteurs de feu.

pièce en question ou une pièce voisine. Notre but est de trouver un bon plan pour placer les détecteurs de manière qu'ils détectent l'endroit exact de l'incendie.

Par exemple, dans la FIGURE 1.8, si on place un détecteur dans la pièce 2, ce dernier permet de détecter l'incendie dans les pièces $1, 2, 3$ et 5. Pour localiser l'endroit exact de l'incendie, nous pouvons ajouter de nouveaux détecteurs.

Si un autre détecteur sera placé dans la pièce 1 et que les deux détecteurs se déclenchent en même temps cela veut dire que l'incendie est soit dans la pièce 1 soit dans la pièce 2. Si nous ajoutons un autre détecteur dans la pièce 3, et les trois se déclenchent, cela signifie que l'incendie est dans la pièce 2.

L'objectif est donc placer un minimum de détecteurs de sorte qu'ils détectent l'endroit exact de l'incendie. Dans la FIGURE 1.8, l'ensemble de sommets $\{2, 3, 4, 6, 7\}$ représente le placement des détecteurs de l'incendie. Cet ensemble forme un code identifiant.

1.3 Coloration de graphes

Étant donné un graphe $G = (V, E)$, une *coloration* de sommets de G est une fonction $c : V \longrightarrow \mathbb{N}$ et $c(x)$ représente la couleur du sommet x. Une k coloration c est une coloration des sommets avec k-couleurs : $c : V \longrightarrow \{1, 2, \ldots, k\}$. Une coloration de sommets est dite *propre* si deux sommets adjacents quelconques ne reçoivent pas la même couleur. Le *nombre chromatique* de G, noté $\chi(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaire dans une coloration propre de G.
Une k-coloration c de sommets de G est dite $k - distinguante$ si pour tout automorphisme non trivial σ de G, il existe $x \in V(G)$ tel que $c(x) \neq c(\sigma(x))$. Autrement dit, le seul automorphisme qui préserve cette coloration est l'identité.
Le nombre *distinguant* (en anglais distinguishing number) d'un graphe G, noté $D(G)$, est le plus petit entier k tel que le graphe G admet une k-coloration distinguante.
Si G est un graphe asymétrique, alors $D(G) = 1$ (car $Aut(G) = Id$).

Une coloration c de sommets d'un graphe G est dite *identifiante* si pour toute paire de sommets distincts x et y, nous avons $c(N[x]) \neq c(N[y])$. La coloration dans ce cas n'est pas nécessairement propre. Cette notion introduite par *E. Duchêne* et *J. Moncel* lors de semaine discrète de l'Institut Fourier de 2009 en posant la question suivante : *est-il possible d'identifier un graphe en utilisant des couleurs ?*
Cette coloration est étudiée en [56] sur des graphes sans jumeaux.
Un sommet x est *identifié* par l'ensemble de couleurs apparaissantes dans son voisinage fermé $c(N[x])$. Cette ensemble est unique.
Une couleur *sépare* deux sommets distincts x et y si elle est dans l'ensemble $c(N[x])\triangle c(N[y])$.
Le *nombre chromatique identifiant* d'un graphe G, noté $\chi_{Id}(G)$, est le nombre minimum de couleurs nécessaires utilisées dans une coloration identifiante.
Si x et y sont jumeaux, il n'existe pas de coloration identifiante.
On peut voir la coloration identifiante comme une partition de l'ensemble de sommets du graphe. Elle se généralise dans le cadre des graphes bipartis.
Soient $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti où les sommets à identifier sont les sommets de l'ensemble X. Ces derniers sont identifiés par les sommets de Y. Identifier ce graphe avec des couleurs revient à colorier les sommets de Y de sorte que chaque sommet de X ait un ensemble de couleurs unique dans son voisinage.

1.4 Complexité algorithmique

Dans cette section, nous introduisons les notions de base de la théorie de la complexité. Nous référons le lecteur au livre **Garey et Johnson** [30] pour plus de détails.
La complexité algorithmique est un moyen d'évaluation des performances d'un algo-

rithme.
Un algorithme de résolution d'un problème P donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires, transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quelle instance du problème P en une chaîne de caractères représentant les résultats de cette instance.
A toute instance I d'un problème P, nous pouvons associer un nombre $\mu(I)$ qui mesure la longueur des données de cette instance, appelée *la taille de l'instance* I, et qui représente la quantité de mémoire pour la stocker.

Une classification reconnue distingue les algorithmes *polynomiaux* (bons) des autres dits *exponentiels* (mauvais). Les fondateurs de la théorie de la complexité *Stephen Cook* [19] et *Richard Karp* [48] reconnaissent à *Jack Edmonds* [23] la première idée de la caractérisation des algorithmes polynomiaux.

Si A est un algorithme de résolution d'un problème P et I est une instance de ce dernier, alors l'entier $\tau(A, I)$ associé au couple (A, I), représente le nombre d'opérations élémentaires (addition, multiplication, comparaison, affectation) effectuées par l'algorithme A dans la résolution de l'instance I du problème P. Le plus grand nombre $\tau(A, I)$ sur l'ensemble de toutes les instances ayant la même taille est appelé *complexité de l'algorithme* A.

Un algorithme est dit *polynomial* si le nombre d'opérations élémentaires nécessaires pour résoudre un exemple de taille n, est borné par un polynôme en n. Un algorithme est considéré comme *efficace* ou *bon* si et seulement si il est polynomial.

Un problème appartient à la classe $\mathcal{P}$ s'il peut être résolu par un algorithme polynomial. Nous disons que les problèmes de la classe $\mathcal{P}$ sont faciles.
Un problème de reconnaissance consiste à chercher dans un ensemble fini s'il existe un élément vérifiant une certaine propriété. Il peut être formulé par un énoncé et une question dont la réponse ne peut être que 'oui' ou 'non'.

Un algorithme *non déterministe* est un algorithme contenant une instance **choix** qui opérant sur un ensemble fini, choisit un élément, sans spécifier comment ce choix est effectué. Il est caractérisé par le fait que s'il existe une manière (au moins) d'effectuer le choix qui conduise à la réponse oui, c'est suivant cette manière que le choix est fait. Plus précisément, les choix successifs seront effectués de telle sorte qu'on arrive à la réponse **VRAI** en un minimum de temps.
Les algorithmes non déterministes permettent de définir la classe $\mathcal{NP}$.
Un problème appartient à la classe $\mathcal{NP}$ [Non determinist polynomial], s'il peut être résolu en temps polynomial par un algorithme non déterministe.

Comme tout problème de la classe $\mathcal{P}$ possède un algorithme polynomial pour sa résolution, on en déduit que $\mathcal{P} \neq \mathcal{NP}$.

Un problème de reconnaissance (P_1) *se réduit polynomialement* à un autre (P_2), s'il existe un algorithme pour (P_1) qui fait appel à un algorithme de résolution de (P_2) et si cet algorithme de résolution de (P_1) est polynomial lorsque la résolution de (P_2) est comptabilisée comme une opération élémentaire.

Un problème $\mathcal{NP}$-*Complet* est un problème de $\mathcal{NP}$ auquel se réduit polynomialement tout autre problème de $\mathcal{NP}$. La question cruciale de la théorie de la complexité est de savoir si les problèmes NP-Complets peuvent être résolus polynomialement, auquel cas P = NP, ou bien si on ne leur trouve jamais d'algorithmes polynomiaux, auquel cas $\mathcal{P} \subsetneq \mathcal{NP}$. Cette question n'est pas définitivement tranchée.

La classe $\mathcal{CO} - \mathcal{NP}$ est la classe des problèmes dont le complément est dans la classe $\mathcal{NP}$-*Complet*.

Quelques problèmes $\mathcal{NP}$-complets et $\mathcal{NP}$.

Dans la suite, nous citons quelques problèmes de décision connus $\mathcal{NP}$-complets et $\mathcal{NP}$:

IDCODE
Instance : un graphe G sans jumeaux, un entier k
Question : G possède-t-il un code identifiant de taille inférieure ou égal à k ?
Complexité : NP-complet

GI
Instance :deux graphes G_1 et G_2.
Question : G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?
Complexité : NP.

GA
Instance :un graphe G.
Question : G possède-t-il un automorphisme non trivial ?
Complexité : NP.

Kölber [52] a démontré que GI ne semble pas être réductible à GA (i.e. $GA \leqslant_m GI$).

Chapitre 2

(a, b)-codes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Sommaire

2.1 Définitions et état de l'art 22
2.2 (a, b)-codes sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ 23
2.2.1 Définitions et remarques. 23
2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.7 25
2.3 Conclusion 32

Le code correcteur d'une erreur est l'un des problèmes de la théorie des graphes largement étudié. Ce chapitre est dédié à l'étude d'une généralisation de ces codes : codes pondérés de rayon un. Ces derniers ont été étudiés sur la métrique de *Hamming* et la métrique de *Lee*.
Ils ont été définis sous différents noms. Pour simplifier les notations, nous les présentons d'une manière légèrement différente mais équivalente. Nous utiliserons la notation (a, b)-code à laquelle ce chapitre est consacré.
Dans la partie 2.1, nous commençons d'abord par l'état de l'art de ce problème. Ainsi, nous rappelons quelques définitions et résultats donnés sur les (a, b)-codes. La partie 2.2 est consacrée à l'étude d'(a, b)-codes sur les graphes k-réguliers circulants. Dans la section 2.2.1., nous donnons la terminologie et quelques remarques que nous utiliserons dans la suite et nous énonçons à la fin de cette section, notre résultat principal. La section 2.2.2, est consacrée à démontrer le résultat principal.

Ce travail a fait l'objet de l'article [35] avec Sylvain Gravier et Anne Lacroix.

2.1 Définitions et état de l'art

Soient $G = (V, E)$ un graphe et r, a et b trois entiers positifs. Un ensemble $S \subseteq V$ de sommets définit un (r, a, b)-code si tout élément de S appartient exactement à $a+1$ boules de rayon r centrées sur un élément de S et tout élément de $V \backslash S$ appartient exactement à b boules de rayon r centrées sur un élément de S. Ce concept a été aussi étudié par *Axenovitch* [5] sous le nom (r, a, b)-code couvrant, et de (r, a, b)-coloration isotropique [5], et dans [58] sous le nom de *coloration parfaite*. Puzynina [58] a montré que tous les (r, a, b)-codes dans $\mathbb{Z}^2$ sont périodiques. Une caractérisation de tous les (r, a, b)-codes dans $\mathbb{Z}^2$ (la métrique *Manhattan*) a été donnée dans [5] pour $r \geqslant 2$ et $|a - b| > 4$. Nous pouvons voir un (r, a, b)-code dans $\mathbb{Z}^2$ comme une coloration particulière avec deux couleurs *noir* et *blanc*, où les sommets noirs sont les éléments du code. En d'autres termes, nous considérons cette coloration de telle sorte qu'une boule de rayon r centrée sur un sommet noir (resp. blanc) contient exactement a (resp. b) sommets noirs. Cette façon de voir a été récemment introduit par *Gravier et Vandomme*[38] sur les grilles $\mathbb{Z}^2$, appelé la 2-coloration constante (en anglais *constant 2-labelling*) d'un graphe pondéré (voir [38] pour plus de détails).

La notion de (r, a, b)-code généralise les notions de domination et de codes parfaits dans les graphes. Un r-code parfait est un $(r, 1, 1)$- code. Les codes parfaits ont été introduits par Biggs [6]. *Kratochvil* [53] a montré que le problème de détermination d'un r-code parfait dans un graphe est NP-complet. Il a été aussi démontré que le problème est NP-complet en restriction aux graphes planaires bipartis de degré maximum 3 dans [53].

Notons que si $r = 1$, un $(1, a, b)$-code est appelé un recouvrement pondéré parfait de rayon 1 où le poids associé est $(\frac{b-a}{b}, \frac{1}{b})$, on le note simplement $(a, b) - code$. Le concept de *recouvrement pondéré* a été introduit par Cohen et al. [15].

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'étude d'(a, b)-codes dans $\mathbb{Z}\backslash n\mathbb{Z}$. Rappelons qu'un (a, b)-code sur un graphe G est un ensemble de sommets $C \subseteq V$ tel que tout sommet de C doit avoir exactement a voisins dans C et tout sommet de $V \backslash C$ doit avoir exactement b voisins dans C. Autrement dit, $\forall v \in C,\ |N[v] \cap C| = a + 1$ et $\forall v \notin C,\ |N[v] \cap C| = b$. Dans un graphe, un (x, y)-recouvrement parfait non trivial existe si $\frac{1}{y}$ est un entier et x est un multiple de y avec $y > 0$. Un (x, y)-recouvrement parfait est un (a, b)-code avec $b = \frac{1}{y}$ et $a = \frac{1-x}{y}$. Cohen et al. [14, 15] ont étudié ces codes dans la métrique de Hamming. Dans [20], l'existence et l'inexistence d'(a, b)-codes dans la métrique de Lee ($\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$) ont été étudiées. Ainsi, une méthode a été proposée pour construire des (a, b)-codes en utilisant les codes parfaits déterminés par *Golomb et Welch* [32, 33]. Une autre démonstration des résultats prouvés par

Gravier et al. [37] a été donné dans [20]. Dans la métrique de Manhattan, Axenovitch [5] a donné une description de tous les (a, b)-codes.
En choisissant les valeurs de a et b, nous retrouvons le cas parfait des codes correcteurs d'erreurs et les codes pondérés décrits par *Cohen et al.* [14, 15]. *Axenovitch* [5] a étudié ce problème sous le nom de *couverture multiple*. Dans [8], cette notion est appelée *ensemble* (k, t)*-régulier*.

Remarquons que si G est un graphe k-régulier alors $\varnothing$ est un $(i, 0)$-code et $V(G)$ est un (k, i)-code de G pour tout $0 \leqslant i \leqslant k$. De plus, si G est biparti alors chacune des parties de la partition de $V(G)$ forme un $(0, k)$-code.

Nous renvoyons le lecteur aux articles [21, 22] pour plus de résultats sur les (a, b)-codes dans $\mathbb{Z}^d$ avec $d \geqslant 2$.

2.2 (a, b)-codes sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'étude des (a, b)-codes sur certains graphes circulants. Nous donnons toutes les valeurs possibles de a et b pour lesquelles un (a, b)-code existe.

2.2.1 Définitions et remarques.

Nous pouvons identifier les sommets d'un cycle C_n avec les éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ de sorte que la distance entre deux sommets x et y dans C_n soit $|x - y| \bmod n$. Pour un entier donné k, notons k*-voisinage* d'un sommet x, l'ensemble de tous les sommets y à distance au plus k de x, i.e. c'est l'ensemble $\{y \in V / \ 0 \leqslant d(x, y) \leqslant k\}$.
Un élément appartenant au code est appelé *mot du code* et un élément qui n'appartient pas au code est dit *mot du non code*.
Soient a et b deux entiers. Un (a, b)-code C de rayon k est un ensemble d'éléments tels que tout mot du code a dans son k-voisinage exactement a mots du code et tout mot du non code a dans son k-voisinage exactement b mots du code .

Une *arête de séparation* est une paire de deux éléments consécutifs $(u, u - 1)$ telle que soit $u \in C$ et $u - 1 \notin C$ ou $u - 1 \in C$ et $u \notin C$.

Exemple 2.2.1. *Dans la figure 2.1, nous avons un* $(6, 8)$*-code de rayon* $k = 9$ *et* $n = 25$ *où l'ensemble des sommets* $V = \{0, 1, 2, \ldots, 24\}$. *Les traits longs représentent les arêtes de séparation, les points (ou les sommets) représentent les mots du code et les traits courts sont des mots du non code.*

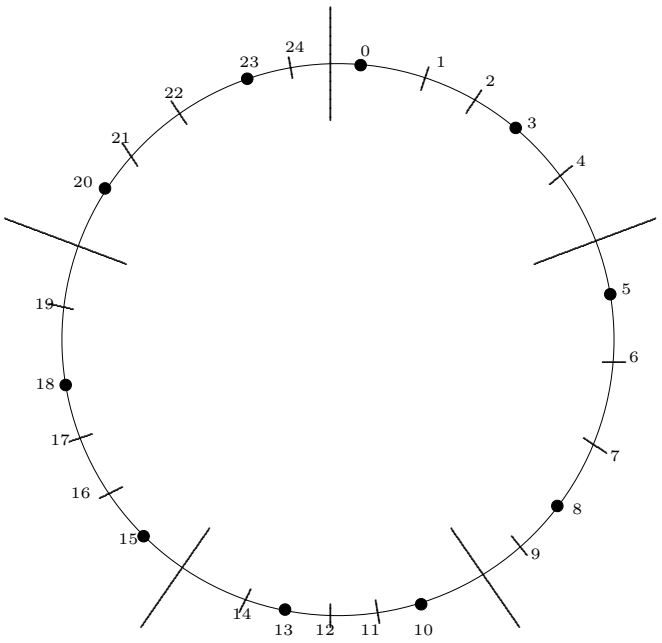


FIGURE 2.1 – $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$.

Un *q-bloc* commençant par u est un ensemble de q éléments consécutifs $\{u, u + 1, , \ldots, u + q - 1\}$ tel que $(u, u - 1)$ est une arête de séparation.

Soit B un q-bloc, considérons la partition de B en p ensembles $U_i(B)$ (avec $i = 1, \ldots, p$) tels que (u_i, u_{i-1}) est une arête de séparation avec $u_i \in U_i(B)$ et $u_{i-1} \in U_{i-1}(B)$ pour tout $i \geqslant 2$. Autrement dit, chaque U_i est un ensemble maximal de mots du code consécutifs ou mots du non code consécutifs dans l'ordre naturel de i. S'il n'y a pas de confusion, nous écrivons U_i au lieu de $U_i(B)$.

Exemple 2.2.2. *Dans la figure 2.1, les traits longs partitionnent* $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$ *en* 5*-blocs* B_j, $j = 1, \ldots, 5$, *et chaque bloc* B_j *est partitionné en* 4 *ensembles* $U_i(B_j)$, $i = 1 \ldots, 4$. *Nous avons* $B_1 = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ *un* 5*-bloc partitionné en* $U_1(B_1) = \{0\}$, $U_2(B_1) = \{1, 2\}$, $U_3(B_1) = \{3\}$ *et* $U_4(B_1) = \{4\}$

Soit C un (a, b)-code de rayon k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, avec $n \geqslant 2k + 2$. Étant donné un ensemble $X \subseteq V$ et un entier t, soit $X + t = \{x + t | x \in X\}$.
Soit $x \in V$, notons $\pi(x) = \{x + k, x - k - 1\}$. Puisque $n \geqslant 2k + 2$, alors $|\pi(x)| = 2$.

Remarque 2.2.3. *Si* x *et* $x - 1$ *sont tous les deux des mots du code ou mots du non code, alors* $|\pi(x) \cap C| = 0$ *ou* 2.

Une *p-période* X est un ensemble de p éléments consécutifs tels que pour tout t, $0 \leqslant t \leqslant p - 1$, nous avons $C \cap (X + t.p) = (C \cap X) + t.p$.

Exemple 2.2.4. *Dans la figure 2.1, chaque* 5*-bloc* B_j*,* $j = 1, \ldots, 5$*, définit aussi une* 5*-période. En effet, soit* $j \in \{1, \ldots, 5\}$*. Si* $x \in B_j$ *(resp.* $y \in B_j$*) est un mot du code (resp. mot non du code). Alors l'élément* $x + 5t$ *(resp.* $y + 5t$*) est aussi un mot du code (resp. mot du non code) pour tout* t*.*
Soit $t = 0$*. Le sommet* 0 *est un mot du code et les sommets* $0 + 5t = 5, 10, 15$ *et* 20 *sont aussi des mots du code. Le sommet* 1 *est un mot du non code, donc les sommets* $1 + 5t = 6, 11, 16, 21$ *sont des mots du non code.*

Remarque 2.2.5. *Soit* X *une* p*-période, il existe une* g*-période* T *avec* $g = pgcd(n, p)$ *qui partitionne* V *en* $\frac{n}{g}$ *ensembles* T_i *tels que* $T_i = T + i.g$*.*

Une $2p$-période est appelée *p-période alternée* $X\bar{X}$ si X est un ensemble de p élément consécutifs satisfaisant la condition : $x \in C$ si et seulement si $x + p \notin C$.

Remarque 2.2.6. *S'il existe une* p*-période alternée, alors* $\frac{n}{pgcd(n,p)}$ *est toujours pair.*

Notre résultat principal est :

Théorème 2.2.7. *Soient* a*,* b*,* k *et* n *des entiers avec* $n \geqslant 2k + 2$*. Il existe un* (a, b)*-code non trivial de rayon* k *dans* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ *si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

(1) $b = a = k$ *et* $\frac{n}{pgcd(n,k+1)}$ *est pair.*
(2) $b = a = \frac{2k}{pgcd(n,k)} \cdot c$ *pour tout* $c < pgcd(n, k)$*.*
(3) $b = a + 1 = \frac{2k+1}{pgcd(n,2k+1)} \cdot c$ *pour tout* $c < pgcd(n, 2k + 1)$*.*
(4) $b = a + 2 = k + 1$ *et* $\frac{n}{pgcd(n,k)}$ *est pair.*
(5) $b = a + 2 = \frac{2k+2}{pgcd(n,k+1)} \cdot c$ *pour tout* $c < pgcd(n, k + 1)$*.*

2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.7

Soit C un (a, b)-code non trivial de rayon k dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ avec $n \geqslant 2k + 2$. Puisque C est non trivial, supposons que $(0, -1)$ est une arête de séparation avec $0 \in C$.
Soit B le $(k + 1)$-bloc ayant les éléments $\{0, \ldots, k\}$. Considérons la partition de B en p ensembles U_i (pour $i = 1, \ldots, p$).
Le lemme suivant donne les liens possibles entre les valeurs de a et les valeurs de b :

Lemme 2.2.8. $b = \begin{cases} a + 1 \ \ ou \ \ a + 2 & si \ \ p \ \ pair \\ a \ \ ou \ \ a + 1 & si \ \ p \ \ impair \end{cases}$

Démonstration. Supposons que p est pair. Comme B est un $(k+1)$-bloc partitionné en p parties, donc la dernière partie U_p contient les mots du non code. Alors k est un mot du non code, ceci implique que $|\pi(0) \cap C| \leqslant 1$. D'où $1 \leqslant b - a \leqslant 2$.
Maintenant, si p est impair. Nous avons dans ce cas, U_p contient les mots du code. Cela veut dire que k est un mot du code et nous avons donc $|\pi(0) \cap C| \geqslant 1$. D'où $0 \leqslant b - a \leqslant 1$. □

D'après le lemme 2.2.8, nous avons donc trois cas à étudier. Pour chaque cas, nous allons donner toutes les valeurs possibles de a et b pour lesquelles un tel (a, b)-code existe et comment les construire.

Cas 1. $b = a + 1$.

D'abord, nous donnons ce résultat :

Lemme 2.2.9. *L'ensemble $S = \{0, \ldots, 2k\}$ est $(2k+1)$-périodique.*

Démonstration. Remarquons que $|\pi(x) \cap C| = 0$ ou 2 pour tout $x \in V$.
Puisque $\pi(k + 1 + i) = \{2k + 1 + i, i\}$ $(i \geqslant 1)$ alors $2k + 1 + i \in C$ si et seulement si $i \in C$ (d'après la remarque 2.2.3).
Donc, la période est $(2k + 1)$. □

Construction d'un $(a, a+1)$-code

D'après la remarque 2.2.5, considérons T la g-période avec $g = pgcd(n, 2k + 1)$. Posons $c = |T \cap C|$ et $q = \frac{2k+1}{g}$. Tout $x \in C$ possède exactement $qc - 1$ mots du code dans son k-voisinage. Donc, nous obtenons $a = qc-1$. De plus, puisque $b = a+1 \leqslant 2k$, $c < g$.

Maintenant, pour construire un $(a, a + 1)$-code non trivial avec $a + 1 = \frac{2k+1}{g} \cdot c$ pour un certain $c < g$, considérons l'ensemble $C = \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{g}-1}(\{0, ..., c - 1\} + i.g)$.

Cas 2. $b = a$

Nous donnons d'abord la remarque suivante que nous utiliserons pour étudier ce cas :

Remarque 2.2.10. *Si $a = b$, alors si $(x, x - 1)$ est une arête de séparation avec $x \in C$ alors $x + k$ est un mot du code et $x - 1 - k$ est un mot du non code.*

D'après le lemme 2.2.8, nous avons p est impair et tout les éléments de U_p appartenant à C. Donc, nous allons étudier deux sous-cas. D'abord, supposons qu'il existe un $(k+1)$-bloc B' avec $|U_p| \geqslant 2$, ensuite, B' n'existe pas avec $|U_p| \geqslant 2$.

Cas 2.1. Supposons que $|U_p| \geqslant 2$.

Considérons la paire $(k, k-1)$. Puisque nous avons $-1 \notin C$, d'après la remarque 2.2.3, nous obtenons que $2k$ est un mot du non code.
Puisque $k-1 \in C$ et $2k \notin C$, d'après la remarque 2.2.10, $2k+1$ est un mot du non code. De la même manière, puisque nous avons $0 \in C$ et $2k+1 \notin C$, d'après la remarque 2.2.3, $k+1$ est aussi un mot du non code.
Répétant cet argument, nous obtenons $\frac{n}{pgcd(n,k+1)}$ $(k+1)$-blocs B_α avec $B_0 = B$ (voir figure 2.2). Pour tout α, $|U_{p_\alpha}(B_\alpha)| \geqslant 2$ et nous avons la propriété (P0) :

$$\alpha.(k+1), \alpha.(k+1)+k-1 \text{ et} \alpha.(k+1)+k \in C \text{ si et seulement si } \alpha \text{ est pair.}$$

Nous utilisons cette propriété pour montrer le lemme suivant :

Lemme 2.2.11. *Pour tout $x \in B$, nous avons (P1) :*

$$\forall \alpha, \quad x + \alpha(k+1) \in C \text{ si et seulement si } x + (\alpha+1)(k+1) \notin C.$$

Démonstration. Soit $t \leqslant k+1$ le plus grand élément tel que $(P1)$ soit vérifiée pour tout $0 \leqslant x \leqslant t$. D'après $(P0)$, nous avons $t \geqslant 0$. Supposons que $t < k$
Par maximalité de t, nous avons $t \in C$ si et seulement si $t+k+1 \notin C$ et nous avons $t+k+1 \notin C$ si et seulement si $t+2k+2 \in C$.
Supposons que $t \in C$ (l'autre cas se traite de la même manière).
Si $t+1 \in C$ donc nous obtenons $t+k+2 \notin C$. En effet, si $t+k+2 \in C$, alors nous aurions $(t+k+2, t+k+1)$ une arête de séparation et d'après la remarque 2.2.10, nous obtiendrions $t+2k+2 \in C$ et $t+1 \notin C$ ce qui constitue une contradiction. Maintenant, si $t+1 \notin C$ alors nous avons $t+k+2 \in C$ puisque si $t+k+2 \notin C$, nous avons $t+k+1$ et $t+k+2$ sont tous les deux mots du non code. D'après la remarque 2.2.3, nous obtenons $|\pi(t+k+2) \cap C| = |\{t+2k+2, t+1\} \cap C| = 0$ ou 2. D'où nous avons $t+2k+2 \notin C$ puisque $t+1 \notin C$, ce qui constitue une contradiction avec $t \in C$. Répétant cet argument, $(P1)$ est vérifiée aussi pour $t+1$ ce qui constitue une contradiction. □

Construction d'un (k, k)**-code**

Le lemme 2.2.11 montre que BB_1 est une $(k+1)$-période alternée. Soit $c = |C \cap B|$. Un élément $x \in C \cap B$ possède exactement $c-1+k+1-c = k$ mots du code dans son k-voisinage, d'où $a = k$.

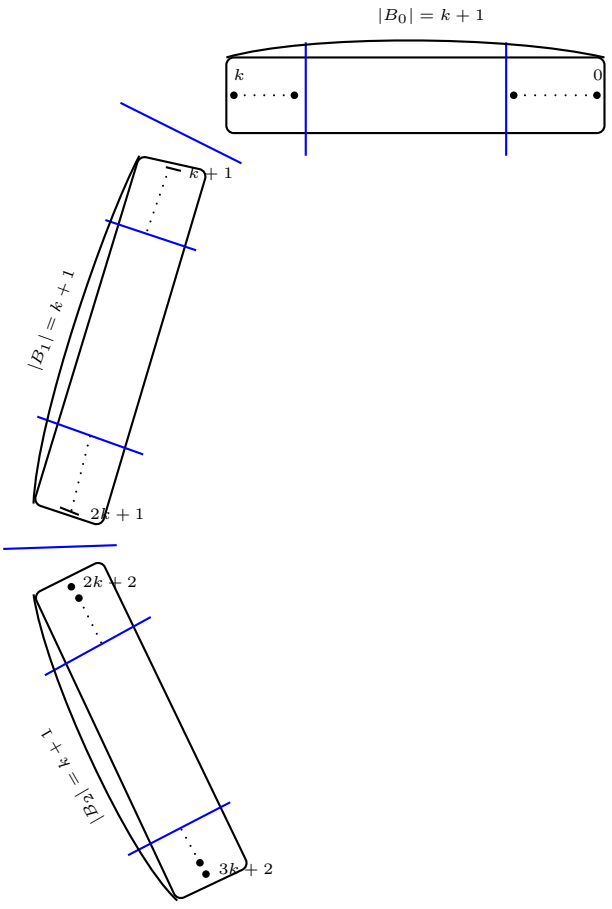


FIGURE 2.2 – Les $(k + 1)$-blocs B_α avec $\alpha \geqslant 0$

D'après la remarque 2.2.6, nous avons $\frac{n}{pgcd(n,k+1)}$ est pair.
Maintenant, pour construire un (k, k)-code avec $\frac{n}{pgcd(n,k+1)}$ pair, considérons la fonction $val_2(k+1)$ appelée la 2-évaluation de $k+1$ qui donne la plus grande puissance de 2 divisant $k+1$. Formellement, nous notons $val_2(k+1) = i$ où i est le plus grand entier tel que $k+1 = s.2^i$.
Donc, nous avons le nombre $q = \frac{n}{2^{i+1}}$ est un entier.
Posons

$$C = \bigcup_{j=0}^{q-1} (\{0, \ldots, 2^i - 1\} + 2^{i+1}.j).$$

Afin de vérifier que C est un (k, k)-code, supposons d'abord que $0 \leqslant x \leqslant 2^i - 1$ et considérons la partition de $2k+1 = (s-1)2^{i+1} + 2^i + (2^i - 1)$ éléments du k-voisinage de x comme suit :

— $S_0 = \{0, 1, \ldots, 2^i - 1\}$
— Pour tout $\alpha = 1, \ldots, \frac{s-1}{2}$,
  - $S_{-\alpha} = \{0, \ldots, 2^{i+1} - 1\} - \alpha.2^{i+1}$.
  - $S_{+\alpha} = \{0, \ldots, 2^{i+1} - 1\} + \alpha.2^{i+1} - 2^i$.
  - $S_{-(\frac{s-1}{2}+1)} = \{(1-s)2^i - 1, \ldots, x - k\}$.
  - $S_{+(\frac{s-1}{2}+1)} = \{s.2^i = k - 1, \ldots, x + k\}$.

Chaque ensemble $S_{\pm\alpha}$ avec $1 \leqslant \alpha \leqslant \frac{s-1}{2}$ contient 2^i mots du code. De plus, nous avons $S_0 \subseteq C$ et $S_{\pm(\frac{s-1}{2}+1)} \cap C = \varnothing$. Donc x contient exactement $2.\frac{s-1}{2}.2^i + 2^i - 1 = 2^i.s - 1 = k$ mots du code dans son k-voisinage.

Si $2^i \leqslant x \leqslant 2^{i+1} - 1$, nous obtenons $|S_{\pm\alpha} \cap C| = 2^i.\frac{q-1}{2}$. De plus, x possède exactement $2.\frac{s-1}{2}.2^i + 2^i - 1 = 2^i.s - 1 = k$ mots du code dans son k-voisinage (voir figure 2.3).

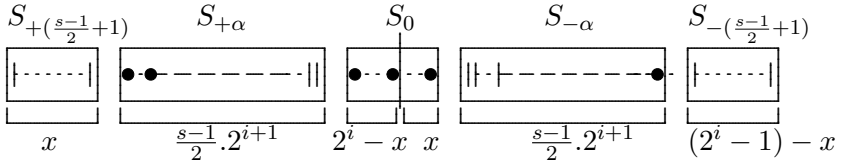


FIGURE 2.3 – les ensembles $S_{+\alpha}$ et $S_{-\alpha}$.

Cas 2.2. Il n'existe pas $(k+1)$-bloc B' avec $|U_{p'}(B')| \geqslant 2$.

Donc dans ce cas $|U_p| = 1$ et soit $B_0 = B \backslash \{k\}$.

Lemme 2.2.12. *L'ensemble B_0 est k-périodique.*

Démonstration. Soit $B_\alpha = B_0 + \alpha.k$ pour tout $\alpha = 0, \ldots, pgcd(n, k)$.
Puisque pour tout $(k+1)$-bloc B', nous avons $|U_{p'}(B')| = 1$, alors chaque B_α est un k-bloc. De plus, pour tout $(k+1)$-bloc B', le nombre p' des ensembles $U_i(B')$ est impair, ce qui donne $\alpha.k \in C$ pour tout $\alpha = 0, \ldots, pgcd(n, k)$.
Nous allons montrer que pour tout élément x, $x \in C$ si et seulement si $x + k \in C$.
Soit $t \leqslant k-1$ le plus grand entier pour lequel cette propriété est vérifiée. La remarque précédente montre que $t \geqslant 0$. Supposons que $t < k - 1$.
Considérons la paire $(t+1, t)$, nous avons $\pi(t+1) = \{t+1+k, t-k\}$. Par maximalité de t, nous avons $t - k \in C$ si et seulement si $t \in C$. D'après les remarques 2.2.3 et 2.2.10, $t + 1 \in C$ si et seulement si $t + 1 + k \in C$, ce qui contredit la maximalité de t. □

Construction d'un (a, a)-code

D'après la remarque 2.2.5, considérons la g-période T avec $g = pgcd(n, k)$. Soient $c = |T \cap C|$ et $q = \frac{k}{g}$. $\forall x \in C$, x a exactement $2qc$ mots du code dans son k-voisinage. D'où $a = 2qc$. De plus, puisque $a \leqslant 2k$, nous avons $c \leqslant g$.

Pour construire un (a, a)-code non trivial avec $a = 2\frac{k}{g}.c$ pour un certain $c < g$, considérons l'ensemble

$$C = \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{g}-1} (\{0, \ldots, c-1\} + i.g).$$

Cas 3. $b = a + 2$.

D'après le lemme 2.2.8, nous avons p est pair et aucun élément de U_p appartient à C.
Nous avons la remarque suivante :

Remarque 2.2.13. *Si $(x, x-1)$ (si $b = a+2$) est une arête de séparation avec $x \in C$, alors nous avons $x + k \notin C$ et $x - 1 - k \in C$.*

De la même manière que le cas précédent, nous avons deux sous-cas à traiter.

Cas 3.1. Supposons que $|U_p| \geqslant 2$.

Considérons dans ce cas la paire $(k, k-1)$. Puisque $-1 \notin C$, d'après la remarque 2.2.3, nous avons $2k \notin C$. Puisque $k - 1 \notin C$ et $2k \notin C$, d'après la remarque 2.2.13, nous obtenons $2k + 1 \notin C$. De la même manière, puisque $0 \in C$ et $2k + 1 \notin C$, d'après

la remarque 2.2.3, nous avons $k+1 \in C$.
Répétant cet argument, nous obtenons $\frac{n}{pgcd(n,k+1)}$ $(k+1)$-blocs B_α où $B_0 = B$. Pour tout α, $|U_{p_\alpha}(B_\alpha)| \geqslant 2$ et nous avons la propriété (Q) :

$$\alpha.(k+1) \in C,\ \alpha.(k+1)+k-1 \notin C \text{ et } \alpha.(k+1)+k \notin C.$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.2.14. *L'ensemble B est $(k+1)$-périodique.*

Démonstration. Nous allons montrer que pour tout élément x, nous avons $x+k+1 \in C$ si et seulement si $x \in C$.
Soit $t \leqslant k+1$ le plus grand entier pour lequel cette propriété est vraie. La remarque précédente montre que $t \geqslant 0$.
Supposons que $t < k$. Considérons la paire $(t+1, t)$ et donc $\pi(t+1) = \{t+1+k, t-k\}$. Par maximalité de t, nous avons $t+1+k \in C$ et seulement si $t \in C$.
D'après la remarque 2.2.3 et 2.2.13, $t+1 \in C$ si et seulement si $t-k \in C$, ce qui contredit la maximalité de t. □

Construction d'un $(a, a+2)$**-code**

D'après la remarque 2.2.5, considérons la g-période T où $g = pgcd(n, k+1)$. Soient $c = |T \cap C|$ et $q = \frac{k+1}{g}$. Tout élément $x \in C$ possède exactement $2(qc-1)$ mots du code dans son k-voisinage. Donc $a = 2qc-2$. Puisque $b = a+2 \leqslant 2k$, alors $c < g$.

Maintenant, pour construire un $(a, a+2)$-code non trivial avec $a = 2\frac{k+1}{g}.c - 2$ pour un certain $c < g$, posons

$$C = \bigcup_{i=0}^{\frac{n}{g}-1} (\{0, \ldots, c-1\} + i.g).$$

Cas 3.2. Il n'existe pas $(k+1)$-bloc B' avec $|U_{p'}(B')| \geqslant 2$.

Donc $|U_p| = 1$. Soient $B_0 = B \backslash \{k\}$ et $B_1 = B_0 + k$.

Lemme 2.2.15. *L'ensemble B_0B_1 est k-périodique alterné.*

Démonstration. Soit $B_\alpha = B_0 + \alpha.k$ pour $\alpha = 0, \ldots, pgcd(n, k)$.
Puisque pour tout $(k+1)$-bloc B', nous avons $|U_{p'}(B')| = 1$, donc chaque B_α est un k-bloc. De plus, pour tout $(k+1)$-bloc B', le nombre p' des ensembles $U_i(B')$ est pair, donc $\alpha.k, \alpha.k+k-1 \in C$ si et seulement si α est pair.

Maintenant, nous allons montrer que pour tout élément x, nous avons $x + k \in C$ si et seulement si $x \notin C$. Soit $t \leqslant k$ le plus grand entier pour lequel cette propriété est vérifié. La remarque précédente nous montre que $t \geqslant 0$.
Supposons que $t < k-1$. Considérons la paire $(t+1, t)$ et $\pi(t+1) = \{t+1+k, t-k\}$. Par maximalité de t, nous avons $t - k \in C$ si et seulement si $t \notin C$.
D'après les remarques 2.2.3 et 2.2.13, nous obtenons $t + 1 + k \in C$ si et seulement si $t + 1 \notin C$, ce qui contredit la maximalité de t. □

Construction d'un $(k-1, k+1)$-code

Soit $c = |C \cap B|$. Un élément $x \in C \cap B$ a exactement $c - 1 + k - c = k - 1$ mots du code dans son k-voisinage, d'où $a = k - 1$. De plus, d'après la remarque 2.2.6, $\frac{n}{pgcd(n,k)}$ est pair.

Pour construire un $(k-1, k+1)$-code non trivial avec $\frac{n}{pgcd(n,k)}$ pair, considérons la 2-évaluation de k, i.e. $val_2(k) = i$. Donc le nombre $q = \frac{n}{2^{i+1}}$ est un entier.
Posons

$$C = \bigcup_{j=0}^{q-1} (\{0, \ldots, 2^i - 1\} + 2^{i+1}.j).$$

2.3 Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans ce chapitre à l'étude des (a, b)-codes. Nous avons étudié l'existence des(a, b)-codes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Ces derniers sont des graphes réguliers dont la distance entre chaque paire de sommets est au plus égal k modulo n. Nous avons donné toutes les valeurs possible de a et b pour lesquelles un tel (a, b)-code existe ainsi que la méthode de construction.

Chapitre 3

Nombre distinguant pour certains graphes circulants

Sommaire

3.1 Introduction 34
3.2 Principe de base et état de l'art 36
3.2.1 Complexité 36
3.2.2 Résultats préliminaires 37
3.3 Graphes circulants 40
3.3.1 Premiers résultats 41
3.3.2 Graphes circulants $C(m, p)$ 42
3.4 Remarques et conclusion 49

Depuis son introduction en 1996 par *Albertson et al.* [3], *le nombre distinguant* d'un graphe est devenu un domaine de recherche actif en théorie des graphes. Ce chapitre est dédié à l'étude de cet invariant. Nous commençons par rappeler l'origine de ce problème. Dans la partie 3.2, nous présentons certains travaux réalisés autour du nombre distinguant, ainsi nous évoquons le problème de la complexité . La partie 3.3 est dédiée à l'étude de cet invariant pour les graphes circulants. Nous donnons une méthode pour construire une famille de graphes circulants dont le nombre distinguant est supérieur à deux et ne dépend pas de l'ordre du graphe.

Tous les résultats de cette partie ont été obtenus en collaboration avec Sylvain Gravier et Kahina Meslem [36].

3.1 Introduction

Rubin [61] a proposé dans son article paru dans "*Journal of Recreation Mathematics*" le problème des clefs comme suit :
Un professeur a un porte-clefs circulaire comportant n clefs qui ne sont pas distinguées à l'oeil nu. Pour les distinguer, il pensa à attacher une étiquette de couleur sur chaque clef. Quel est le nombre minimum d'étiquettes de couleurs nécessaire pour que le professeur puisse garder toutes les clefs et les distinguer ?

Ce problème est connu sous le nom « *problème des clefs* »ou « *problème N° 729* ». La solution proposée par *Rubin* est surprenante : si le porte-clefs contient six clefs ou plus, le professeur a besoin seulement de deux étiquettes différentes. Si le porte-clefs contient moins de six clefs (i.e. trois, quatre ou cinq), il faut trois étiquettes de couleurs différentes pour que le professeur puisse distinguer les clefs.
Si le porte-clefs est une barre droite, il faut deux étiquettes de couleurs différentes pour distinguer une clef des autres si $n \geqslant 2$.

Figure 3.1 – Trousseaux de clefs différentes et une proposition de la coloration pour les distinguer.

Cette observation a motivé Albertson et Collins [3] pour interpréter ce problème en théorie des graphes et théorie des groupes.

Le porte-clefs circulaire correspond au cycle C_n où les n clefs sont remplacées par n sommets. Deux sommets sont adjacents dans C_n si et seulement si les deux clefs correspondantes sont adjacentes dans le porte-clefs. La bande droite correspond à la chaîne P_n.
En général, la question qui se pose :" étant donné un graphe G, quel est le nombre

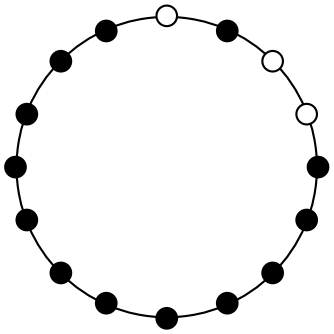


FIGURE 3.2 – Coloration distinguante avec deux couleurs d'un trousseau de clefs qui contient 16 clefs.

minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets du graphe afin de pouvoir distinguer les sommets les uns des autres ?"
La réponse à cette question a donné naissance au *nombre distinguant*, qui est l'objet d'étude de ce chapitre.
Dans ce qui suit, nous définissons le problème des clefs et le nombre distinguant formellement :
Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $c : V(G) \to \{1, 2, \ldots, r\}$ une coloration des sommets de G avec r couleurs. La coloration c est dite *r-distinguante* (en anglais *r-distinguishing coloring*) si l'identité est le seul automorphisme de G qui préserve cette coloration. Formellement, c est r-distinguante si pour tout automorphisme non trivial $\sigma \in Aut(G)$ (rappelons que $Aut(G)$ est l'ensemble des automorphismes de G), il existe $x \in V(G)$ tel que $c(x) \neq c(\sigma(x))$. Le *nombre distinguant* (en anglais *distinguishing number*) du graphe G, noté $D(G)$, introduit par Albertson et Collins [3], est le plus petit entier r tel que le graphe G admet une r-coloration distinguante.

Exemple 3.1.1. *Nous donnons un exemple d'une coloration non-distinguante de cycle C_4.*
Dans le graphe de la figure 3.3(a), la coloration considérée est : $c(x) = c(y) = c(t) = 1$ et $c(z) = 2$. Il existe un automorphisme $\delta \neq Id$ tel que $c(\delta(y)) = c(t)$ et $c(\delta(t)) = c(y)$. Nous avons $c \circ \delta = c$ et donc cette coloration n'est pas distinguante.
Dans le graphe la figure 3.3(b), considérons la coloration suivante : $c'(x') = c'(y') = 1$ et $c'(z') = c'(t') = 2$. Il existe un automorphisme $\theta \neq Id$ tel que $c'(\theta(x')) = c'(y')$, $c'(\theta(y')) = c'(x')$, $c'(\theta(z')) = c'(t')$ et $c'(\theta(t')) = c'(z')$. Donc $c' = c' \circ \theta$ et la coloration c' n'est pas distinguante.
Remarquons que deux couleurs différentes ne suffisent pas pour distinguer les sommets de C_4, donc $D(C_4) > 2$.

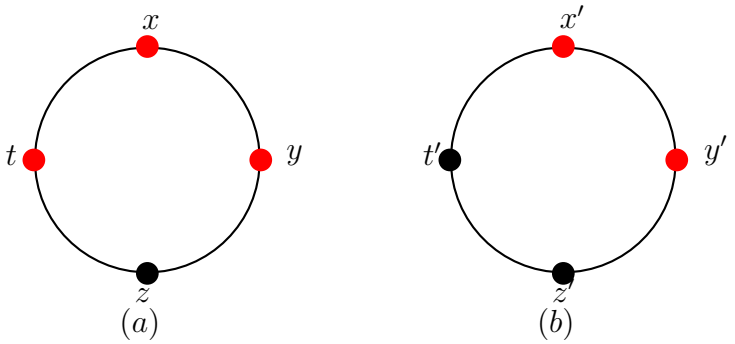


FIGURE 3.3 – Une 2-coloration non-distinguante de C_4.

3.2 Principe de base et état de l'art

3.2.1 Complexité

Déterminer le nombre distinguant pour un graphe revient à répondre à la question suivante : « si un graphe G admet une k-coloration. Cette coloration est-elle distinguante ? Et si elle est distinguante et le graphe G n'est pas asymétrique, cette coloration est-elle préservée par un automorphisme non trivial ? »
Le problème de décision pour qu'un graphe soit k-distingué est défini comme suit :
Dist
Instance : Un graphe G, un entier positif k.
Question : G admet-il une coloration k-distinguante ?.

Actuellement, le meilleur résultat connu sur le problème **Dist** est dû à *Russel et Sundaram* [62]. Ils ont montré que le problème de décision **Dist** appartient à la classe nommée AM, l'ensemble des languages contenant les jeux *Arthur et Marlin*. Ce résultat découle du fait que le problème de décision **Rigid**$= \{G/|Aut(G) = 1\}$ est dans AM (la classe AM est au dessus des classes $\mathcal{NP}$ et $Co-\mathcal{NP}$). Une conséquence de ce problème est que si le problème **Dist** est dans la classe $Co-\mathcal{NP}$ et que si $\mathcal{NP} \subset \mathcal{P}$, cela détruirait la hiérarchie polynomiale i. e. nous aurions $\mathcal{P} = \mathcal{NP}$.
Le problème **Dist** est l'un des problèmes dont nous ne savons pas s'il appartient à $\mathcal{NP}$ ou à $Co-\mathcal{NP}$.
Dans cette direction, *Cheng* [12] a montré que le problème de décision qu'un graphe admet une coloration propre k-distinguante est $\mathcal{NP}$-difficile pour $k \geqslant 3$. Le problème est aussi $\mathcal{NP}$-difficile pour $k = 3$ où le graphe est planaire de degré maximum au plus 5.
La difficulté de calcul du nombre distinguant a conduit les chercheurs à étudier le problème pour certaines familles de graphes, telles que les cycles, l'hypercube et les

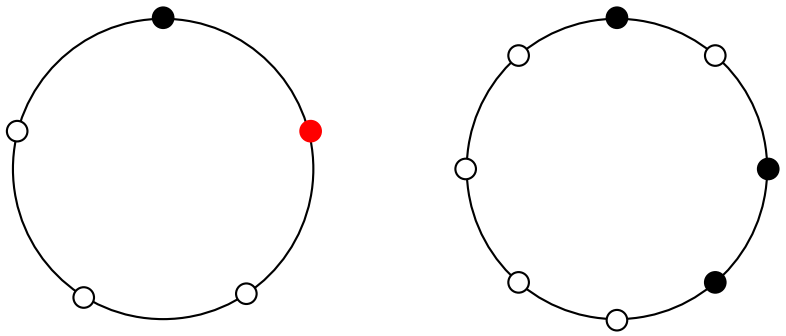
graphes acycliques où le problème peut être résolu polynomialement [3, 7, 11, 12].
En 2008, *Arvind et al.*[4] ont prouvé que si G est un graphe planaire, alors le nombre distinguant peut être calculé en $o(n^5 \log^3 n)$ où n est l'ordre de G.
Cheng [12] a montré que le problème **Dist** est polynomial pour les graphes d'intervalles en utilisant la même technique utilisée pour les graphes planaires [4].
Un algorithme polynomial en $o(n \log n)$ a été donné pour les arbre dans [13]. Quelques années plus tard, *Lozano, Mora et Seara* [55] ont amélioré cette étude en proposant un algorithme linéaire en $o(n)$ pour les arbres.

3.2.2 Résultats préliminaires

La théorie de distinction a été développée dans plusieurs directions par *Albertson et Collins* [3]. Ils ont interprété le problème des clefs et la solution proposée par Rubin[61] sur les graphes et les groupes. Ils ont donné la valeur du nombre distinguant pour les cycles et les chaînes :

$$D(C_n) = \begin{cases} 2 & \text{si } n \geqslant 6 \\ 3 & \text{si } n \in \{3,4,5\} \end{cases}$$

Pour les chaines P_n avec $n \geqslant 2$, nous avons : $D(P_n) = 2$.



(*a*) $D(C_5) = 3$ (*b*) $D(C_8) = 2$

FIGURE 3.4 – Une coloration distinguante de C_5 et C_8.

Albertson et Collins [3] ont montré que si le groupe $Aut(G)$ est abélien, alors $D(G) \leqslant 2$. Si $Aut(G) \cong D_n$ où D_n est le groupe diédral, alors $D(G) \leqslant 3$. Ils se sont intéressés à étudier la relation entre le groupe d'automorphisme $Aut(G)$ de graphe G et l'invariant $D(G)$. Puisque $Aut(G) \approx Aut(\overline{G})$, où $\overline{G}$ est le graphe complémentaire de G, alors $D(G) = D(\overline{G})$. Mais en général, si deux graphes ont le même groupe d'automorphisme, ils n'ont pas forcément le même nombre distinguant. En effet, soit G_n

le graphe obtenu à partir de la clique K_n en reliant un sommet pendant à chaque sommet de K_n. Donc le graphe G_n a $2n$ sommets. Remarquons que $Aut(G_n) \approx Aut(K_n)$. Une coloration de G_n est distinguante si et seulement si nous attribuons à chaque paire de sommets constituées par un sommet de K_n et son sommet pendant, des différentes paires ordonnées de couleurs (voir Figure 3.5). D'où $D(G_n) = \lceil \sqrt{n} \rceil$ tandis que $D(K_n) = n$.
Si G est un graphe non connexe et ses composantes connexes G_i, $(i \geqslant 2)$ ne sont pas isomorphes, alors $D(G) = \max_i D(G_i)$.

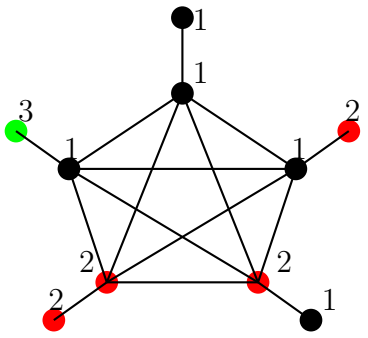


FIGURE 3.5 – Une coloration distinguante de graphe G_5.

Notons que $D(G) = 1$ pour tout graphe asymétrique. Erdös et al. [24] ont montré que la plupart des graphes finis sont asymétriques. Ceci implique que presque tous les graphes finis ont un nombre distinguant égal 1. Sinon, $D(G) \geqslant 2$ pour les autres graphes. Conder et Tucker [18] ont prouvé que parmi les graphes non asymétriques, beaucoup de classes de graphes ont un nombre distinguant égal 2.
Cependant, pour le graphe complet K_n et le graphe biparti-complet $K_{n,n}$, nous avons $D(K_n) = n$ et $D(K_{n,n}) = n + 1$.
Klavžar et al. [50] et Collins et al. [16] ont montré que $D(G) \leqslant \Delta(G)+1$, où $\Delta(G)$ est le degré maximum de G. Nous avons l'égalité si et seulement si G est soit K_n, $K_{n,n}$ ou C_p pour $p \in \{3, 4, 5\}$.
Soit Q_d un hypercube de dimension d, où d est un entier.
Bogstad et Cowen [7] ont prouvé que $D(Q_d) = \begin{cases} 3 & \text{si } d \in \{2, 3\} \\ 2 & \text{si } d \geqslant 4 \end{cases}$

Pour deux graphes connexes relativement premiers d'ordres différents, Imrich et Klavžar [44] ont prouvé : si $k \leqslant |H| \leqslant |G| \leqslant 2^k - k + 1$ (avec $k \geqslant 2$), alors $D(G) \leqslant 2$. Si $G = H = K_2$, nous avons $D(K_2 \square K_2) = 3$ et $D(K_m \square K_n) \geqslant 3$ si $m \geqslant 2$ et $n \geqslant 2^m$. Un peu plus tard, Imrich et al. [41] ont donné une généralisation pour le produit

cartésien de deux graphes complets :

Théorème 3.2.1. *[41] Soient n, m et d trois entiers tel que $d \geqslant 2$ et $(d-1)^m \leqslant n \leqslant d^m$. Alors* $D(K_m \square K_n) = \begin{cases} d & si\ \ n \leqslant d^k - \lceil \log_d(m) \rceil - 1; \\ d+1 & si\ \ n \geqslant d^k - \lceil \log_d(m) \rceil + 1 \end{cases}$
Si $n = d^k - \lceil \log_d(m) \rceil$, alors $D(K_m \square K_n)$ soit égal d ou $d+1$ et il est calculable en temps $O(log^* n)$.

D'autres résultats ont été prouvé dans [41, 51, 63, 69, 44] sur le produit direct et le produit cartésien de deux graphes relativement premiers.

Dans la théorie des groupes, Alberson et Collins [3] ont conjecturé que si $|G| > |Aut(G)|$ et que l'action du groupe $Aut(G)$ sur G n'a pas d'orbite de taille un (i.e. un singleton) alors $D(G) = 2$. Russel et al [62] ont prouvé que cette conjecture est fausse. Ils ont donné un contre-exemple à la conjecture : pour un graphe asymétrique H arbitrairement grand (au sens de taille), soit G_H le graphe obtenu par l'union disjoints de K_3 et trois copies de H. Donc $Aut(G_H) = \Im_3 \times \Im_3$ (rappelons que $\Im_3$ est le groupe symétrique à 3 éléments), le graphe G_H est sans cycles, $D(G_H) = 3$ et le graphe $|G_H|$ peut être arbitrairement grand.
Pour un automorphisme $\sigma \in Aut(G)$, nous appelons le mouvement de (en anglais the motion of) σ, noté $m(\sigma)$, le cardinal de l'ensemble $\{v \in G : \sigma(v) \neq v\}$.
Le mouvement d'un graphe G est donné par :

$$m(G) = \min_{\substack{\sigma \in Aut(G) \\ \sigma \neq id}} m(\sigma).$$

Cette notion a été introduite par Russell et al. [62]. Ils ont prouvé que si $m(G) \ln k > 2 \ln |Aut(G)|$, alors G est k-distingué. En particulier, si $k = 2$, nous avons si $m(G) > 2 \log_2 |Aut(G)|$, alors G est 2-distingué. Ce résultat peut être vu comme une version finie de la conjecture de *Tucker*[66]. D'autre travaux ont été fait dans [18, 46, 62].
Tymoczko [67] a montré que pour tout arbre T, nous avons $D(T) \leqslant \Delta(T)$ où $\Delta(T)$ représente le degré maximum de l'arbre T. Un algorithme en $O(n \log n)$ pour calculer le nombre distinguant pour les arbres a été donné par *Cheng* [13].
Le concept de nombre distinguant a fait l'objet de nombreux articles, pour les graphes finis, ainsi pour les graphes infinis dénombrables (voir [45, 64, 66, 70])

La notion du nombre distinguant a été étendu a une action de groupe arbitraire H sur un ensemble X où H est un groupe agissant fidèlement sur l'ensemble X. Le nombre distinguant, noté $D_H(X)$ est le nombre minimum de couleurs, tels qu'il existe une coloration de X où aucun élément non trivial du groupe induit une permutation préservant la coloration de X. *Chan*[10] a montré le résultat suivant :

Théorème 3.2.2. *[10] Soient G et H deux groupes agissant complètement sur les ensembles X et Y respectivement. Pour tout entier positif r, soit n_r le nombre de r-colorations distinguantes distincts de X, et soit $D_H(Y) = d < \infty$ (où d est un entier positif). Soit $S = \{r | n_r \geqslant d.|G|\}$. Alors :*

$$D_{G\otimes H}(X \times Y) = \begin{cases} \min(S) & (Si\ \ S \neq \infty) \\ \infty & (Si\ \ S = \varnothing). \end{cases}$$

Où $G \otimes H$ est le produit lexicographique de G et H. Pour en savoir plus, nous renvoyons le lecteur aux travaux [9, 50, 67, 71].
Collins et Trenk [16] ont introduit la notion du *nombre chromatique distinguant* d'un graph défini comme étant un nombre distinguant dont la coloration de sommets de graphe est propre. Ils ont donné une preuve analogue du Théorème de *Brooks* pour le nombre distinguant et le nombre chromatique distinguant, aussi pour les arbres et plus général pour les graphes connexes. Ce nombre a été étudié pour les groupes par *Collins et al.* [17]
Nombre distinguant endomorphisme du graphe G est une nouvelle extension du nombre distinguant récemment introduite par Imrich et al. [42], noté par $D_e(G)$, où la r-coloration distinguante est préservée uniquement par un endomorphisme trivial.
Une autre extension de ce nombre a été introduite par *Kalinowski et al.* [47] dite *indice distinguant* (en anglais *index distinguishing*). L'indice distinguant d'un graphe G, noté $D'(G)$, est le plus petit nombre k tel que G admet une coloration d'arêtes avec k couleurs préservée uniquement par l'automorphisme trivial.

3.3 Graphes circulants

Un graphe circulant, noté C_n^k (connus aussi sous le nom 'k-ième puissance' de C_n), est un graphe défini sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dont l'ensemble de ses sommets est $\{0, 1, \ldots, n-1\}$. Deux sommets i et j sont adjacents si et seulement si $(|j - i| \leqslant k (\mathrm{mod} n))$.
Gravier et al. [34] ont donné le résultat suivant pour ces graphes :

Théorème 3.3.1. *[34] Soient $k \geqslant 2$ et n deux entiers. Si $n \geqslant 2k+3$, alors $D(C_n^k) = 2$.*

Motivation

Dans la littérature, la majorité des classes de graphes (non asymétriques) étudiés ont un nombre distinguant soit égal à deux, soit il est très grand et dépend de l'ordre du graphe (une clique ou stable de taille n, produit cartésien de deux cliques). Dans ce travail, nous proposons une méthode pour construire une classe de graphes réguliers

dont le nombre distinguant est supérieur strictement à 2 et ne dépend pas de l'ordre du graphe. Ces graphes sont des graphes circulants générés par l'ensemble A.
Par la suite, notre motivation est de donner une réponse à la question suivante que nous notons $(\mathcal{Q})$:
Étant donné une séquence de nombres entiers distincts ordonnés $d_1, d_2, \ldots, d_r$ dans $\mathbb{N}^*\backslash\{0\}$, existe-t-il un entier n et r graphes G_i $(1 \leqslant i \leqslant r)$ d'ordre n_i tels que $D(G_i) = d_i$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$?

La proposition suivante donne une réponse à la question $(\mathcal{Q})$:

Proposition 3.3.2. *Étant donné une séquence ordonnée de r entiers distincts $d_1, d_2, ..., d_r$ où $r \geqslant 2$ et $d_i \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$. Alors il existe r graphes $G_1, G_2, ..., G_r$ d'ordre n tels que G_i contient une clique K_{d_i} et $D(G_i) = d_i$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant r$.*

Démonstration. Supposons que $d_1 \neq 2$ et $n = d_r$. Pour l'entier d_r, supposons que $G_r \simeq K_{d_r}$ et $D(G_r) = d_r$.
Pour les autres entiers, nous considérons les $(r-1)$ graphes non connexes G_i ayant deux composantes connexes C et C' tels que $C \simeq K_{d_i}$ et C' est la chaîne P_{n-d_i} pour tout $1 \leqslant i \leqslant r-1$.
Si $d_1 \neq 2$ ou $n = d_r \neq 4$, alors C et C' ne peuvent pas être isomorphes. Par conséquent, un automorphisme δ de G_i pour tout $1 \leqslant i \leqslant r-1$, agit sur la même composante connexe. En plus, nous avons $D(G_i) = \max(D(C), D(C')) = D(C) = d_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r-1$.
Si $d_1 = 2$ et $n = d_r = 4$, nous considérons les mêmes graphes G_i (pour $2 \leqslant i \leqslant r$) sauf pour le graphe G_1, pour lequel nous posons $G_1 \simeq P_4$. Donc, $D(G_1) = 2 = d_1$. □

Remarquons que les graphes de la proposition 3.3.2 ne sont pas connexes. En outre, puisque nous avons utilisé les cliques pour construire ces graphes, cela ne donne aucune information supplémentaire sur les graphes ayant un nombre distinguant très grand. Donc notre objectif dans la suite est de construire une famille de graphes réguliers, connexes qui répond à la question $(\mathcal{Q})$.

Donc, notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.3.3. *Étant donné une séquence ordonnée de r entiers distincts $d_1, d_2, ..., d_r$ où $r \geqslant 2$ et $d_i \geqslant 2$ pour $1 \leqslant i \leqslant r$, alors il existe r graphes circulants $G_1, G_2, ..., G_r$ d'ordre n tels que $D(G_i) = d_i$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant r$.*

3.3.1 Premiers résultats

Nous donnons quelques définitions et résultats essentiels que nous utiliserons dans la suite.

Définition 3.3.4. *Soient $m \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$ deux entiers. Le graphe circulant $C(m,p)$ est un graphe régulier d'ordre mp où deux sommets i et j sont adjacents si et seulement si $|i-j|$ est dans l'ensemble $A = \{p-1+(rp),\ p+1+(rp)/0 \leqslant r \leqslant m-1\}$.*

Remarquons que $A \subset \mathbb{Z}/(mp)\mathbb{Z}$ et les graphes $C(m,p)$ sont générés par A. L'ensemble A est appelé *générateur*. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe. Un module (dit aussi ensemble homogène) de G est un sous-ensemble $M \subseteq V(G)$ de sommets ayant tous le même voisinage dans $G\backslash M$, c'est-à-dire pour tout $y \in V\backslash M$: $M \subseteq N(y)$ ou bien $xy \notin E(G)$ pour tou $x \in M$.
Si $M \neq V(G)$ alors M est *propre*. Les modules *triviaux* sont les singletons et l'ensemble $V(G)$. Un module M de G est dit *maximal* si tout module non trivial M' de G satisfait $M' \supset M$, M' est réduit à M.

Nous avons $D(G) = D(\overline{G})$ (où $\overline{G}$ est le complémentaire de G) puisque $Aut(G) = Aut(\overline{G})$. Pour le graphe complet K_n d'ordre n, c'est claire que $D(K_n) = n$ et pour les graphes multipartis complets, le nombre distinguant est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.3.5. *[16] Soit $K_{a_1^{j_1},a_2^{j_2},\ldots,a_r^{j_r}}$ le graphe multiparti complet de j_i parties de taille a_i pour $i = 1,2,\ldots,r$ et $a_1 > a_2 > \cdots > a_r$.*
Alors $D(K_{a_1^{j_1},a_2^{j_2},\ldots,a_r^{j_r}}) = \min\{p : \binom{p}{a_i} \geqslant j_i \ \text{ pour tout } \ i\}$

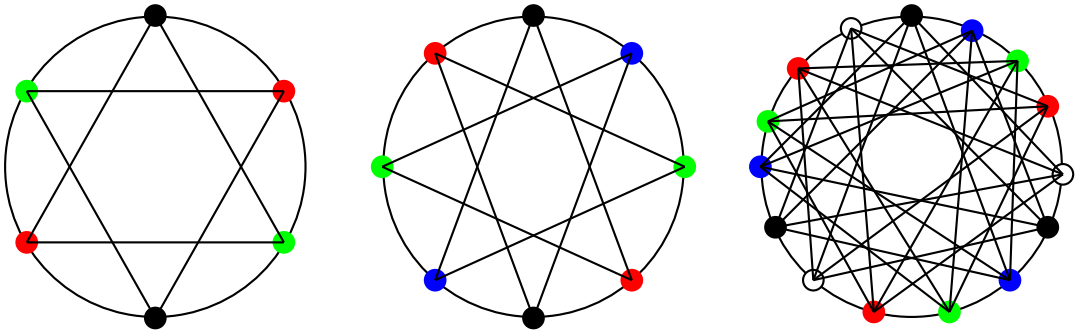
Le résultat suivant donne une estimation de la valeur du nombre distinguant du graphe en utilisant les modules :

Lemme 3.3.6. *Soient G un graphe connexe et M un module de G.*
Alors, $D(G) \geqslant D(M)$

Démonstration. Soit c une r-coloration de G tel que $r < D(M)$. Puisque $r < D(M)$, il existe un automorphisme non trivial $\delta\ |_M$ de M tel que $c(x) = c(\delta\ |_M\ (x))$ pour tout $x \in M$, i.e la restriction de c sur M n'est pas distinguante. Maintenant, soit δ une extension de $\delta\ |_M$ sur G avec $\delta(x) = x \quad \forall x \notin M$ et $\delta(x) = \delta\ |_M\ (x)$ sinon. Nous obtenons $c(x) = c(\delta(x))$ pour tout $x \in G$. De plus, $\delta \neq id$ puisque $\delta\ |_M \neq id\ |_M$. □

3.3.2 Graphes circulants $C(m,p)$

Notre étude se focalise sur les graphes circulants $C(m,p)$ d'ordre $n = m.p \geqslant 3$ où $m \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$, définis comme suit : deux sommets i et j de $C(m,p)$ sont adjacents ssi $j-i$ modulo n appartient à l'ensemble A. Si $p > 1$, ces graphes sont circulants puisque pour tout $0 \leqslant r \leqslant m-1$, le sommet $1+p+(m-r-2)$ est le symétrique de $p-1+r.p$ et les deux éléments appartiennent à A. En plus, $p > 1$ implique que



$C(2,3)$ $C(2,4)$ $C(3,5)$

FIGURE 3.6 – Les graphes circulants : les sommets de même couleur appartenant au même module.

$0 \notin A$. Par construction, l'ensemble de sommets de $C(m,1)$ constitue la clique K_m. Pour $m = 1$, $C(1,p)$ est le cycle C_p, $C(m,2) \simeq K_{m,m}$ et $C(m,3) \simeq K_{m,m,m}$.

D'après le théorème 3.3.5, $D(C(m,2)) = D(C(m,3)) = m+1$. De plus, $D(C(1,p)) = 2$ pour $p \geqslant 6$ et $D(C((m,1)) = m$.

Propriété 3.3.7. *L'ensemble de sommets de $C(m,p)$ ($m \geqslant 2$ et $p \geqslant 2$) peut être partitionné en p modules stables $M_i = \{i + r.p : 0 \leqslant r \leqslant m-1\}$ de taille m pour $i = 0, ..., p-1$.*

Démonstration. Soient a et b deux sommets appartenant au même module M_i pour $i = 1, \ldots, p-1$ et $a - b \equiv rp[n]$ pour un certain $0 < r \leqslant m-1$. Donc $a - b \notin A$, ce qui prouve que chaque M_i induit un stable.
De plus, il est clair que les $\{M_i\}_{i=0,\ldots,p-1}$ forment une partition de l'ensemble de sommets de $C(m,p)$. Montrons maintenant que M_i défini un module.
Supposons que $a = i+r_a.p$ et $b = i+r_b.p$ deux sommets distincts de M_i. Soit $c \in V \backslash M_i$ tel que ac est une arête et soit $c = j + r_c \cdot p$.
Soient $r_{bc} = \begin{cases} r_b - r_c & \text{si } r_b > r_c \\ m + (r_b - r_c) & \text{sinon} \end{cases}$ $r_{ac} = \begin{cases} r_a - r_c & \text{si } r_a > r_c \\ m + (r_a - r_c) & \text{sinon} \end{cases}$
deux nombres entiers tels que $b - c \equiv (i-j) + r_{bc} \cdot p[n]$ et $a - c \equiv (i-j) + r_{ac} \cdot p[n]$ (ou $0 \leqslant r_{ac} \leqslant m-1$ et $0 \leqslant r_{bc} \leqslant m-1$.)
Puisque $a - c \in A$, il existe un entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant r_{ac}$ tel que $i - j + kp = p - 1$ (ou$= p+1$).
Deux cas sont à considerer :

Si $k \leqslant r_{bc}$, nous obtenons $b - c \equiv i - j + kp + (r_{bc} - k) \cdot p[n]$.
Donc $b - c \equiv p - 1 + (r_{bc} - k) \cdot p[n]$ (ou $\equiv p + 1 + (r_{bc} - k) \cdot p[n]$).

Nous déduisons que $b - c \in A$ puisque $0 \leqslant k \leqslant m - 1$.

Si $r_{bc} < k \leqslant m + r_{bc}$, nous avons $b - c \equiv i - j + r_{bc} \cdot p[n]$.
Donc $b-c \equiv i-j+(m+r_{bc})\cdot p[n]$. Nous obtenons $b-c \equiv i-j+kp+(m+r_{bc}-k)\cdot p[n]$.
Ce dernier appartient à l'ensemble A puisque $0 \leqslant m + r_{bc} - k \leqslant m - 1$. □

Puisque chaque M_i (pour tout $0 \leqslant i \leqslant p - 1$) est un stable, par définition d'un module nous obtenons :

Propriété 3.3.8. *Toute permutation des éléments de* M_i *est un automorphisme de* G *pour tout* $0 \leqslant i \leqslant p - 1$.□

D'après le lemme 3.3.6 et la propriété 3.3.7, nous déduisons que $D(C(m, p)) \geqslant m$. Le résultat suivant donne une amélioration de cette borne :

Théorème 3.3.9. *Pour tout* $p \geqslant 2$ *et pour tout* $m \geqslant 2$, $D(C(m, p)) = m+1$ *si* $p \neq 4$.

Pour prouver ce théorème, nous montrons d'abord les deux lemmes suivants :

Lemme 3.3.10. *Pour tout* $p \geqslant 2$ *et pour tout* $m \geqslant 2$, $D(C(m, p)) > m$.

Démonstration. Si $p = 2$ (resp. $p = 3$) alors $C(m, 2) \cong K_{m,m}$ (resp. $C(m, 3) \cong K_{m,m,m}$). D'après le théorème 3.3.5, nous avons $D(C(m, p)) > m$.
Considérons maintenant le graphe circulant $C(m, p)$ généré par l'ensemble $A = \{p - 1 + rp, p + 1 + rp : 0 \leqslant r \leqslant m - 1\}$. Supposons que $p > 3$. Puisque les modules M_i (i=0,...,p-1) sont des stables de taille m, nous déduisons du lemme 3.3.6 que $D(C(m, p)) \geqslant m$.
Soit $c : V(C(m, p)) \to \{1, 2, ..., m\}$ une m-coloration de $C(m, p)$ (avec $m \geqslant 2$) et montrons qu'elle n'est pas distinguante.
Par contradiction, supposons que c est une coloration m-distinguante.
Pour toute paire de sommets distincts v et w appartenant à M_{i_0} où $i_0 \in \{0, 1, ..., p-1\}$, nous avons $c(v) \neq c(w)$, sinon il existerait une transposition τ de v et w vérifiant $c = c \circ \tau$, une contradiction avec le fait que c est une m-coloration distinguante. Cela veut dire que dans chaque module fixé M_i, nous avons les m-couleurs. Soit P_j $(1 \leqslant j \leqslant m)$ l'ensemble des indices $\{(j - 1)p + i, i \in \{0, ..., p - 1\}\}$. Remarquons que le sous graphe induit par P_j est une chaîne dont les sommets appartiennent aux différents modules. Considérons $v \in M_i$ ($0 \leqslant i \leqslant p - 1$) tel que $v = i + rp$ où $0 \leqslant r \leqslant m - 1$.
Maintenant, considérons l'application δ_i avec $i = 0, ..., p - 1$ défini comme suit :
$\delta_i : V \to V$ tel que $\delta_i(v) = \begin{cases} (c(v) - 1)p + i & \text{si } v \in M_i \\ v & \text{sinon} \end{cases}$
L'application δ_i est un automorphisme de G (d'après la propriété 3.3.8).

Soit $\delta = \delta_0 \circ ... \circ \delta_{p-1}$. L'application δ est un automorphisme de G car δ est composée des automorphismes δ_i $(i = 0, \ldots, p-1)$.
Soit ψ une application définit par : $\psi : V \to V$ tel que $\psi(i + rp) = p - (i + 1) + rp$.
Nous allons montrer que ψ est un automorphisme de G.
Soient $a = i+rp$ et $b = j+r'p$ deux sommets adjacents, donc $b-a = j-i+(r'-r)p \in A$.
Nous avons $\psi(b) - \psi(a) = i - j + (r' - r)p = b - a$ qui appartient à A. D'où ψ est un automorphisme de G.
Maintenant, vérifions que $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ est un automorphisme non trivial de G qui préserve la coloration c (voir la figure 3.7).
C'est clair que $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ est un automorphisme de G, puisque c'est une composition des automorphismes.
Puisque $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta(0) = \delta^{-1} \circ \psi((c(0) - 1)p + 0) = \delta^{-1}((c(0) - 1)p + (p - 1)) = u$ avec $u \in M_{p-1}$ et $c(u) = c(0)$, donc $u \neq 0$ puisque $0 \in M_0$ et $M_0 \neq M_{p-1}$ et $p > 1$. Ce qui montre que $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ est un automorphisme non trivial.
Pour compléter la démonstration, il est nécessaire de prouver que $c(u) = c(\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta(u))$ pour tout sommet u.
Soit $u = i + rp$, nous avons $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta(u) = \delta^{-1} \circ \psi((c(u) - 1)p + i) = \delta^{-1}((c(u) - 1)p + p - (i + 1)) = v$ où $v \in M_{p-(i+1)}$ et $c(v) = c(u)$. Donc l'automorphisme $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ preserve la coloration c. □

Dans la figure 3.7, nous avons $m = p = 4$ et $M_0 = \{0, 4, 8, 12\}$, $M_1 = \{1, 5, 9, 13\}$, $M_2 = \{2, 6, 10, 14\}$ et $M_3 = \{3, 7, 11, 15\}$.
Appliquons l'automorphisme δ au cycle de la figure 3.7(a), par exemple pour le sommet $v = 0 \in M_0$ colorié avec la couleur bleu qui vaut 3, nous obtenons $\delta_0(0) = (c(0) - 1).4 + 0 = (3 - 1).4 + 0 = 8$. Appliquons l'application ψ au cycle de la figure 3.7(b). Pour le sommet 0, nous avons $\psi \circ \delta(0) = \psi(\delta(0)) = \psi(2.p+0) = p-(0-1)+2p = 11$. Appliquons δ^{-1} au cycle de la figure 3.7(c) où δ^{-1} est l'application inverse du δ, nous trouvons exactement le premier cycle.

Le résultat suivant donne la valeur exacte du nombre distinguant de $C(m, p)$:

Lemme 3.3.12. *Pour tout $p \geqslant 2$ et $p \neq 4$ et pour tout $m \geqslant 2$, $D(C(m, p)) \leqslant m + 1$*

Démonstration. Si $p \in \{2, 3\}$, la proposition est vraie d'après le théorème 3.3.5.
Considérons maintenant c la $(m + 1)$-coloration suivante (voir la figure 3.8) :

$$c(v) = \begin{cases} 1 & 0 \leqslant v \leqslant \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \text{ et } v = 2p - 1 \\ 2 & \lfloor \frac{p}{2} \rfloor < v \leqslant p - 1 \\ j + 1 & v \in P_j \text{ et } 2 \leqslant j \leqslant m \text{ et } v \neq 2p - 1 \end{cases}$$

Supposons qu'il existe un automorphisme δ préservant cette coloration et montrons que δ est trivial.

Exemple 3.3.11.

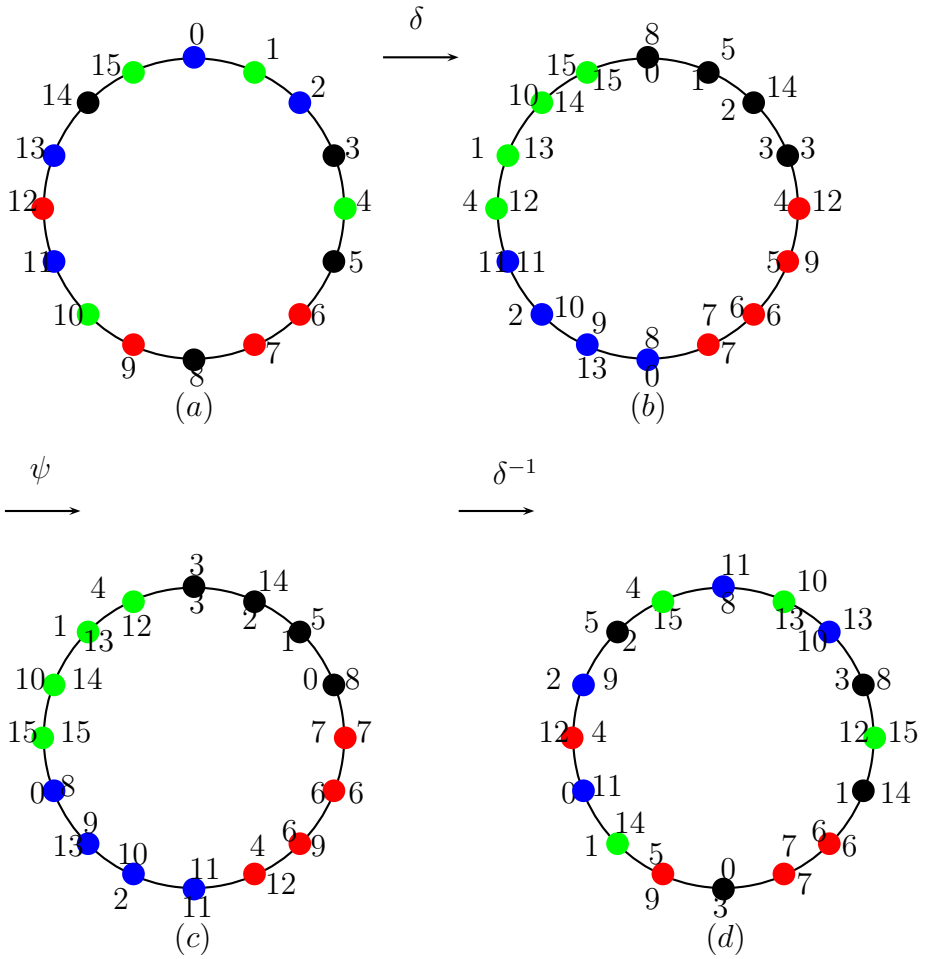


FIGURE 3.7 – L'automorphisme $\delta^{-1} \circ \psi \circ \delta$ appliqué au $C(4,4)$ avec les couleurs (1,2,3,4)=(noir,rouge, bleu,vert).

Puisque $p > 4$, le sommet 0 est l'unique sommet colorié avec 1 ayant dans son voisinage, la séquence suivante de couleurs $(1, 1, 2, 3, 4, 4, ..., m+1, m+1)$. D'où $\delta(0) = 0$, cela veut dire que le sommet 0 est fixé.
Pour démontrer la suite du lemme, nous avons besoin de prouver le résultat suivant :

Affirmation 3.3.13. *Pour chaque sommet i de $C(m,p)$ où $0 \leqslant i \leqslant p-1$, nous avons :*

$$d(0,i) = \begin{cases} i & 1 \leqslant i \leqslant \lfloor \frac{p}{2} \rfloor \\ p-i & \lfloor \frac{p}{2} \rfloor < i \leqslant p-1 \end{cases}$$

Démonstration. D'abord, remarquons que pour toute paire de sommets u et v appartenant au même module M et un sommet $z \in V \backslash M$, $d(u,z) = d(v,z)$ et $d(u,v) = 2$. Contractons les sommets de chaque module M_i de $C(m,p)$, nous obtenons un cycle

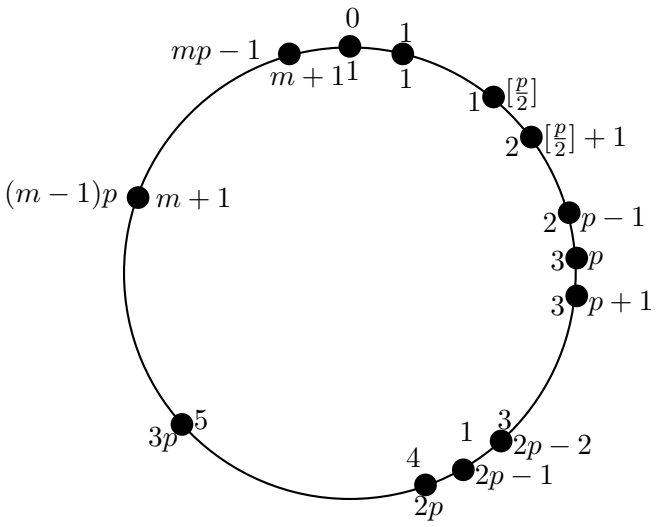


FIGURE 3.8 – la $(m+1)$-coloration : la couleur de chaque sommet est donné à l'intérieur de cycle.

de p sommets. Ce qui implique notre résultat. □

Montrons maintenant que chaque sommet de couleur 1 est fixé par l'automorphisme δ :
Considérons le tableau suivant décrivant la séquence de couleurs qui apparait au voisinage du sommet u :

u	$c(u)$	$c(N(u))$
0	1	$1,1,2,3,4,4,...m+1,m+1$
$0<i<\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$	1	$1,1,3,3,4,4,...m+1,m+1$
$\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$	1	$1,2,3,3,4,4,...m+1,m+1$
$\lfloor\frac{p}{2}\rfloor<j<p-1$	2	$2,2,3,3,4,4,...m+1,m+1$
$p-1$	2	$1,2,3,3,4,4,...m+1,m+1$
$2p-1$	1	$1,2,3,3,4,4,...m+1,m+1$

TABLE 3.1 – La séquence de couleurs au voisinage de sommet u.

Pour tout i tel que $0<i<\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$, nous avons la séquence de couleurs apparaissant dans le voisinage du sommet i est $(1,1,3,3,...m+1,m+1)$. De plus, pour chaque paire de sommets distincts u et v tels que $0<u,v<\lfloor\frac{p}{2}\rfloor$, nous avons $d(u,0)\neq d(v,0)$. Puisque $\delta(0)=0$, nous obtenons $\delta(u)=u$ et $\delta(v)=v$. Généralement, pour tout

sommet i tel que $0 < i < \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$, nous obtenons $\delta(i) = i$.
De plus, dans le voisinage du sommet $2p-1$ et le sommet $\lfloor \frac{p}{2} \rfloor$ nous avons la séquence suivante de couleurs $\{1, 2, 3, 3, 4, 4, ..., m+1, m+1\}$. Puisque $d(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor, 0) > d(2p-1, 0) = 1$, nous avons $\delta(2p-1) = 2p-1$ et $\delta(\lfloor \frac{p}{2} \rfloor) = \lfloor \frac{p}{2} \rfloor$. D'après l'affirmation 3.3.13, pour toute paire de sommets distincts u et v coloriées avec la couleur 2, $d(u, 0) \neq d(v, 0)$. Donc pour tout sommet u tel que $c(u) = 2$, nous avons $\delta(u) = u$. Enfin, montrons que chaque sommet v dans $C(m, p) \backslash (P_1 \cup \{2p-1\})$ est fixé par l'automorphisme δ. Pour cela, il suffit de montrer que pour chaque paire de sommets distincts u et v tels que $c(u) = c(v)$, nous avons $N(u) \cap \{0, 1, 2, ..., p-1\} \neq N(v) \cap \{0, 1, 2, ..., p-1\}$. Ceci implique que δ fixe tout sommet v de couleur $c(v)$ (avec $c(v) \geqslant 2$).Soient u et v deux sommets distincts tels que $c(u) = c(v)$ où $u, v \in C(m, p) \backslash (P_1 \cup \{2p-1\})$.
Puisque $c(u) = c(v)$, nous avons $u \in M_i$ et $v \in M_j$ avec $i \neq j$. Donc $i-1, i+1 \in N(u)$ et $j-1, j+1 \in N(v)$.
Si $i = 0$ alors $p-1 \in N(u)$ puisque $p \in M_i$. De manière similaire, si $i = p-1$ nous avons $0 \in N(u)$ puisque $mp - 1 \in M_i$. Par conséquent, nous obtenons $i-1, i+1 \in N(u) \cap \{0, 1, ..., p-1\}$ et $j-1, j+1 \in N(v) \cap \{0, 1, ..., p-1\}$ modulo p. De plus, remarquons que chaque sommet u a exactement deux voisins dans les p sommets consécutifs de G. Donc $N(u) \cap \{0, 1, ..., p-1\} = \{i-1, i+1 \mod p\}$ et $N(v) \cap \{0, 1, ..., p-1\} = \{j-1, j+1 \mod p\}$. Maintenant, si $N(u) \cap \{0, 1, ..., p-1\} = N(v) \cap \{0, 1, ..., p-1\}$ et $i \neq j$, alors $i+1 = j-1$ et $i-1 = j+1$. D'où $j = i-2$, $j = i+2$ et $p = 4$. Puisque $p > 4$, $N(u) \cap \{0, 1, ..., p-1\} \neq N(v) \cap \{0, 1, ..., p-1\}$. Ceci complète la preuve du théorème. □

Les lemme 3.3.10 et 3.3.12 donnent la preuve du théorème 3.3.9.
Pour le cas particulier $p = 4$, la valeur du nombre distinguant est donné par le résultat suivant :

Corollaire 3.3.14. *Pour chaque $m \geqslant 2$, $C(m, 4)$ est isomorphe à $C(2m, 2)$ (ou $K_{2m,2m}$) et $D(C(m, 4)) = 2m + 1$.*

Démonstration. Le graphe $C(m, 4)$ est partitionné en quatre modules M_0, M_1, M_2 et M_3. Nous avons : $N(M_0) = N(M_2) = M_1 \cup M_3$ et $N(M_1) = N(M_3) = M_0 \cup M_2$. Donc, le module M_i ($i \in \{0, 1, 2, 3\}$) n'est pas maximal. En outre, $M_0 \cup M_2$ et $M_1 \cup M_3$ forment des stables de taille $2m$. Alors le graphe $C(m, 4)$ est le graphe multiparti complet $K_{2m,2m}$ et $D(C(m, 4)) = D(K_{2m,2m}) = D(C(2m, 2)) = 2m + 1$. □

Preuve du Théorème 3.3.3
Soient $d_1, d_2, ..., d_r$ une séquence ordonnée d'entiers distincts. Soit $m_i = d_i - 1$ pour tout $i = 1, ..., r$ et $p_i = \prod_{j \neq i} m_j$.
Par définition, $m_i p_i = m_j p_j$ pour $i \neq j$ et $i, j = 1, ..., r$.
Si $p_i \neq 4$, alors soit $n = m_i p_i$ ou $n = 3 m_i p_i$ pour tout $i = 1, ..., r$.

D'après le théorème 3.3.9, $D(C(m_i, p_i)) = m_i + 1 = d_i$ pour tout $i = 1, ..., r$.
Ainsi, $(G_i)_i \simeq (C(m_i, p_i))_i$ où $i = 1, ..., r$, est une famille de graphes circulants connexes d'ordre n tels que $D(G_i) = d_i$. Par conséquent, ceci termine la preuve du théorème.

3.4 Remarques et conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le nombre distinguant pour certains graphes circulants $C(m, p)$ pour tout $m.p \geqslant 3$, $m \geqslant 1$ et $p \geqslant 2$. Nous résumons nos résultats qui donnent le nombre distinguant des graphes circulants $C(m, p)$ par :

$$D(C(m,p)) = \begin{cases} m & (m \geqslant 3 \text{ et } p = 1) \\ m+1 & (m = 1 \text{ et } p \geqslant 6) \text{ ou } (m \geqslant 2 \text{ et } p \geqslant 2 \text{ et } p \neq 4) \\ 2m+1 & (m = 1 \text{ et } p \in \{3,4,5\}) \text{ ou } (m \geqslant 2 \text{ et } p = 4) \end{cases}$$

Donc pour tout entier donné $n = \prod_{i=1}^{r} m_i$ pour $r \geqslant 2$ et $m_i \geqslant 1$, nous pouvons construire une famille de graphes circulants de même ordre n où le nombre distinguant dépend de diviseurs de n. Pour construire ces graphes, l'idée principale est de partitionner l'ensemble des sommets du graphes en modules de même taille.

D'après les propriétés 3.3.7 et 3.3.8, le graphe $C(m, p)$ est le produit lexicographique $C_P \otimes S_m$ (défini au chapitre 1) du cycle C_p et du stable S_m. Nous obtenons le même résultat en remplaçant le stable S_m par la clique K_m puisque $D(S_m) = D(K_m)$. Nous avons $C(m, p) = C_P \otimes S_m$ (ou $C(m, p) = C_P \otimes K_m$).
La valeur du nombre distinguant pour le produit lexicographique a été donné par *Chan*[10] (voit théorème 3.2.2). La méthode proposée ne donne pas directement la valeur du nombre distinguant. En effet, pour pouvoir déterminer le nombre distinguant, il faut connaître d'abord la valeur du nombre distinguant d'un des groupes et déterminer aussi l'ensemble $S = \{r | n_r \geqslant d|G|\}$.
Dans notre travail, nous avons donné indépendamment une méthode directe et simple pour calculer le nombre distinguant de produit lexicographique d'un cycle de longueur m et d'un stable (ou clique) de taille p dont ce nombre dépend seulement de m.

Chapitre 4

Coloration Localement Identifiante Relaxée

Sommaire

4.1 Introduction 52
4.2 Premiers résultats 55
4.3 Complexité 57
4.4 Relation entre γ_{id}, χ_{lid} et χ_{rlid} 61
4.5 Graphes scindés 66
4.6 Conclusion. 70

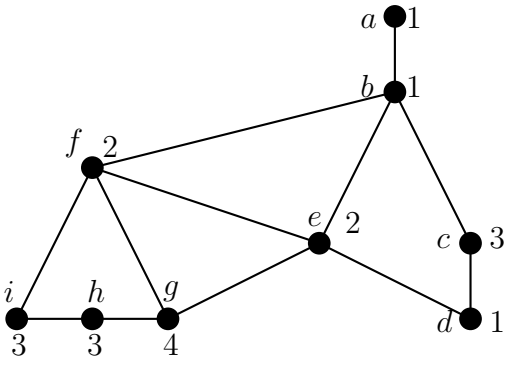
Dans ce chapitre, nous nous intéressons à une autre manière d'identifier un graphe avec les couleurs : la coloration localement identifiante relaxée que nous notons par *rlid-coloration*. Notre objectif est de déterminer le minimum de couleurs nécessaire pour avoir une telle coloration, ce nombre est noté χ_{rlid}.
Dans la partie 4.1, nous donnons quelques définitions et exemples. La partie 4.2 donne les premiers résultats que nous avons obtenus. La complexité du problème sera traitée dans la partie 4.3. La partie 4.4 est consacrée à établir la relation entre χ_{rlid}, γ_{id} et χ_{lid}.

Ce travail a fait l'objet de l'article [1] avec Méziane Aïder et Sylvain Gravier.

4.1 Introduction

Soient $G = (V, E)$ un graphe et $c : V(G) \longrightarrow \mathbb{N}$ une coloration de sommets de G. Rappelons que pour tout sommet $x \in V$, $c(x)$ représente la couleur de x. Deux sommets x et y (adjacents ou non) sont identifiés par c si et seulement si $c(N[x]) \triangle c(N[y]) \neq \varnothing$ où $\triangle$ est la différence symétrique entre $N[x]$ et $N[y]$. L'ensemble de sommets adjacents à x est noté par $N(x)$ et $N[x] = N(x) \cup \{x\}$ est le voisinage étendu de x. On dit qu'une couleur *sépare* ou *distingue* deux sommets adjacents x et y si cette couleur est dans $c(N[x]) \triangle c(N[y])$. Ce chapitre est consacré à l'étude de *la coloration localement identifiante relaxée*, noté *coloration-rlid*. C'est une coloration de sommets de graphe telle que pour toute paire de sommets adjacents distincts, la condition $(\mathcal{P})$: $c(N[x]) \neq c(N[y])$ si $N[x] \neq N[y]$ est vérifiée.
Remarquons que la coloration dans ce cas n'est pas propre, c'est-à-dire que deux sommets adjacents peuvent recevoir la même couleur.
Le nombre chromatique localement identifiant relaxé ou plus simplement le nombre chromatique-*rlid* de G, $\chi_{rlid}(G)$, est le plus petit nombre de couleurs nécessaire pour avoir une coloration-*rlid* dans G.

Exemple 4.1.1.



Sommet x	c(x)	c(N[x])
a	1	{1}
b	1	{1,2,3}
c	3	{1,3}
d	1	{1,2,3}
e	2	{1,2,4}
f	2	{1,2,3,4}
g	4	{2,3,4}
h	3	{3,4}
i	3	{2,3}

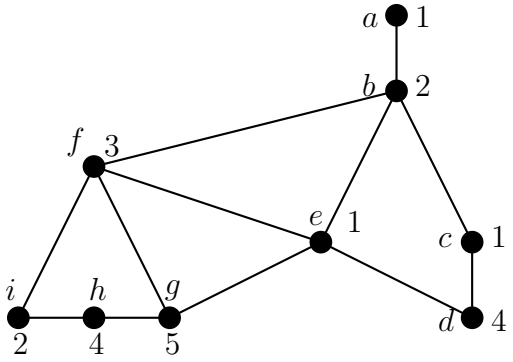
FIGURE 4.1 – Une coloration localement identifiante relaxée de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage de chaque sommet.

Le graphe G de la figure 4.1 donne une coloration-rlid avec quatre couleurs. Donc $\chi_{rlid}(G) \leqslant 4$.

Cette coloration est une version relaxée d'une coloration dite *localement identifiante* où la coloration vérifie deux conditions : la condition $(\mathcal{P})$ pour toute paire de sommets adjacents distincts et la condition $(\mathcal{Q})$: $c(x) \neq c(y)$ pour chaque paire de sommets adjacents x et y, i.e. la coloration est propre. Cette coloration est noté *coloration-lid*. Nous cherchons à minimiser le nombre de couleurs nécessaire pour avoir

une coloration-*lid*. Notons par χ_{lid} le nombre chromatique localement identifiant. Des études ont été faite dans [56, 25, 29, 39] pour cette coloration.

Exemple 4.1.2.



Sommet x	c(x)	c(N[x])
a	1	{1,2}
b	2	{1,2,3}
c	1	{1,2,4}
d	4	{1,4}
e	1	{1,2,3,4,5}
f	3	{1,2,3,5}
g	5	{1,3,4,5}
h	4	{2,4,5}
i	2	{2,3,4}

FIGURE 4.2 – Une coloration localement identifiante de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage fermé de chaque sommet.

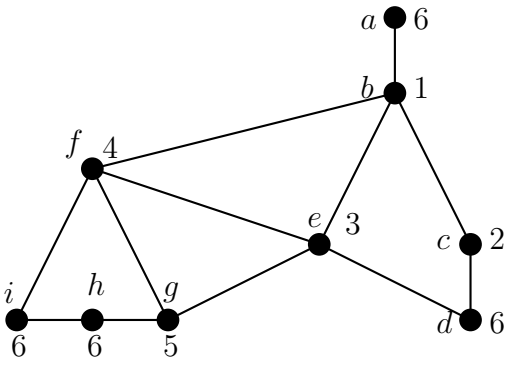
Le graphe de la Figure 4.2 donne une coloration-lid avec cinq couleurs. Donc $\chi_{lid}(G) \leqslant 5$.

La coloration-*lid* est une version locale de la coloration dite *identifiante*, notée *coloration-id*. Cette notion a été introduite par *Eric Duchêne* et *Julien Moncel* lors de la semaine discrète de l'Institut Fourier de Grenoble (2009) et étudiée par *Aline Parreau* dans [56], et définit comme étant une coloration des sommets où la condition ($\mathcal{P}$) est vérifiée pour toute paire de sommets même s'ils ne sont pas adjacents. L'objectif est de déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaire pour avoir une telle coloration dans un graphe. Ce nombre est appelé le nombre chromatique identifiant, noté χ_{id}.

Dans la Figure 4.3, nous avons une coloration-id avec 6 *couleurs. Donc* $\chi_{id}(G) \leqslant 6$.

La coloration-*id* est une version coloration des *codes identifiants*. En général, un *code* C d'un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G. Ce code est dit *identifiant* si chaque sommet x du graphe est identifié de façon unique par l'ensemble de ses voisins dans le code C. Autrement dit, tous les ensembles $N[x] \cap C$ sont uniques et non vide. Cette notion a été introduite par *Karpovsky, Chakrabarty et Levitin* [49] en 1998 pour modéliser un problème d'identification de processeurs défectueux dans un réseau multiprocesseurs. Ces codes identifiants ont été largement étudiés depuis l' introduction du concept, où la théorie a été appliquée dans la modélisation du problème d' identification de processeurs défectueux dans les réseaux multiprocesseurs et ultérieurement en 2003, par *Ray et al.* [60] dans des réseaux de capteurs d'urgences

Exemple 4.1.3.



Sommet x	c(x)	c(N[x])
a	1	{1}
b	1	{1,2,3,4}
c	2	{1,2,6}
d	6	{2,3,6}
e	3	{1,3,4,5,6}
f	4	{1,2,3,4,5}
g	5	{3,4,5}
h	6	{2,5,6}
i	2	{2,4,6}

FIGURE 4.3 – Une coloration identifiante de graphe G. Le tableau indique l'ensemble de couleurs apparaissant dans le voisinage fermé de chaque sommet.

et par *Ungransgsi et al.*[68] pour concepter les réseaux de détecteurs d'incendie dans les bâtiments. Notons par $\gamma_{id}(G)$ la taille du plus petit code identifiant de G.
La coloration identifiante correspond à une identification en partitionnant l'ensemble de sommets du graphe. En effet, soit $G = (X \cup Y, E)$ un graphe biparti où les sommets à identifier sont les sommets de X, identifiés par les sommets de Y. Alors pour avoir une coloration identifiante, il suffit de colorier les sommets de l'ensemble Y de manière que chaque sommet de X ait dans son voisinage un ensemble de couleurs unique.

Une borne du nombre chromatique identifiant en fonction de γ_{id} a été donnée dans [56].

Théorème 4.1.4. *[56] Soit G un graphe sans jumeaux, alors : $\chi_{id}(G) \leqslant \gamma_{id}(G) + 1$*

Cela veut dire que nous pouvons construire une coloration identifiante à partir d'un code identifiant C du graphe G de taille minimale $\gamma_{id}(G)$, en coloriant les sommets de C avec différentes couleurs allant de 1 à $\gamma_{id}(G)$ et pour les autres sommets du graphe $V \backslash C$, nous donnons la couleur $\gamma_{id}(G) + 1$. Mais l'inverse n'est pas vrai.

Exemple 4.1.5. *Dans le graphe de la Figure 4.4, l'ensemble des sommets noirs $C = \{b, c, d, f, g\}$ forme un code identifiant du G de taille minimale $\gamma_{id}(G) = 5$. Construisons une coloration identifiante de G à partir de C, en coloriant les sommets de C avec les couleurs $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ respectivement et donnons la couleur 6 pour les autres sommets. Nous obtenons donc $\chi_{id}(G) \leqslant 6$.*

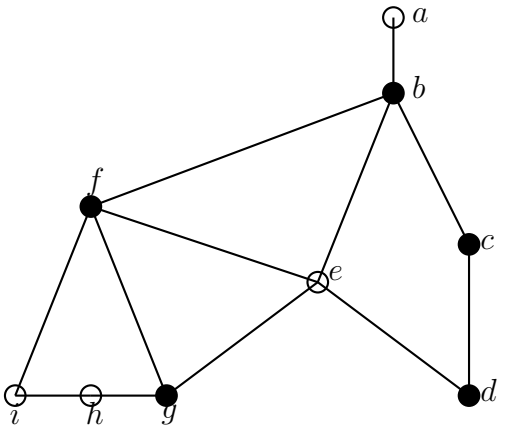


FIGURE 4.4 – Graphe illustrant un code identifiant : les sommets noirs forment un code identifiant.

4.2 Premiers résultats

Remarquons que si G contient deux jumeaux u et v alors $c(N[u]) = c(N[v])$. La question qui se pose alors est :

Question 4.2.1. *Quelle est l'influence des jumeaux dans une coloration-rlid ?*

Pour répondre à cette question, on considère $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie comme suit : pour deux sommets x et y dans $V(G)$, $x\mathcal{R}y$ ssi $N[x] = N[y]$. Notons par $G/\mathcal{R}$ le sous-graphe sans jumeaux maximal de G et $t(G)$ le nombre de classes d'équivalence contenant au moins deux sommets de G. Donc nous obtenons le résultat suivant :

Théorème 4.2.2. *Soit $G/\mathcal{R}$ un sous-graphe sans jumeaux maximal d'un graphe connexe G, alors :*

$$\chi_{rlid}(G/\mathcal{R}) - t(G) \leqslant \chi_{rlid}(G) \leqslant \chi_{rlid}(G/\mathcal{R}).$$

Démonstration. Considérons une coloration-*rlid* c de $G/\mathcal{R}$. Montrons que c est aussi une coloration-*rlid* de G. Pour tout sommet x et son jumeau y, colorions x et y avec la même couleur i.e. $c(x) = c(y)$. Puisque nous ne nous intéressons pas à distinguer les jumeaux dans G, c définit bien une coloration-*rlid* de G.
Pour montrer l'autre inégalité, soit c une coloration-*rlid* de G. Construisons une coloration c' à partir de c : affectons à chaque sommet x qui n'a pas de jumeau la couleur $c(x)$ et des couleurs différentes allant de $\chi_{rlid}(G) + 1$ à $\chi_{rlid}(G) + t(G)$ aux $t(G)$ autres sommets de $G/\mathcal{R}$. La coloration c' est une coloration-*rlid* de $G/\mathcal{R}$. □

Remarquons que si G est un graphe sans jumeaux alors $\chi_{rlid}(G) = \chi_{rlid}(G/\mathcal{R})$. Dans cette partie, nous nous intéressons à déterminer χ_{rlid} d'un graphe G. La partie 4.3 est consacrée à étudier le problème de complexité de ce problème, nous montrons que le problème de décision que $\chi_{rlid}(G) = 3$ est $\mathcal{NP}$-complet pour les graphes planaires 2-dégénérés connexes et sans jumeaux et il est polynomial pour les graphes bipartis. Dans la partie 4.4, nous commençons d'abord par prouver que la borne supérieure du Théorème 4.2.2 est serrée. Nous caractérisons les graphes dont le nombre de couleurs nécessaires dans une coloration-*rlid* est égal au nombre de sommets du graphe. Nous donnons une borne inférieure du nombre chromatique-*rlid* et nous montrons que cette borne est atteinte. Dans la section 4.5, nous étudions les graphes scindés pour lesquels nous donnons une borne supérieure et borne inférieure du nombre chromatique-*rlid* . Nous donnons un graphe scindé pour lequel la borne inférieure est serrée.
Nous donnons d'abord quelques définitions que nous aurons besoin dans la suit. Etant donné un graphe G, le graphe G^* est le graphe construit à partir de G en remplaçant chaque arête de G par une chaîne de longueur 3, et en ajoutant un sommet pendant à chaque sommet de G (voir Figure 4.5).

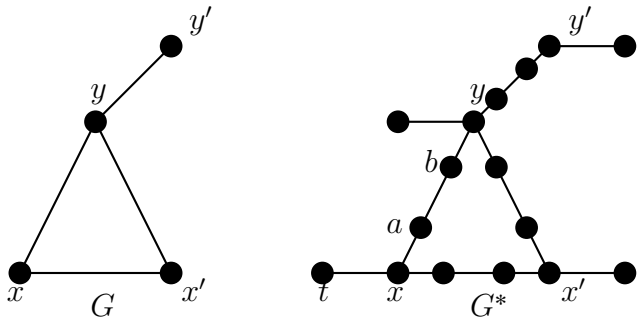


FIGURE 4.5 – Le graphe G^* associé au graphe G où chaque arête xy de G est remplacée par la chaîne $xaby$ dans G^*.

Soit $p \geqslant 2$ un entier. Le graphe H_p est défini à partir d'une clique K de taille 2^p et trois stables S_1, S_2 et S_3 de taille p comme suite (voir Figure 4.6) :
$K = \{x_Q | Q \in \mathcal{P}(p)\}$ où Q est un sous ensemble de $\{1, 2, \ldots, p\} = [p]$.
$S_1 = \{y_1, y_2, \ldots, y_p\}$, $S_2 = \{y'_1, y'_2, \ldots, y'_p\}$ et $S_3 = \{z_1, z_2, \ldots, z_p\}$.
Les arêtes sont définies comme suit :
◦ pour tout $i \in [p]$, $x_{\{i\}}y_i \in E$ et $y_iy'_i \in E$.
◦ et pour tout $Q \subseteq \mathcal{P}[p]$ avec $|Q| \geqslant 2$, $x_Qz_i \in E$ ssi $i \in Q$.

Notre résultat principal est :

Théorème 4.2.3. *Soit G un graphe d'ordre n et soit $G/\mathcal{R}$ son sous-graphe sans jumeaux maximal.*
Alors, nous avons $\log \omega(G/\mathcal{R}) + 1 \leqslant \chi(G) \leqslant n$.

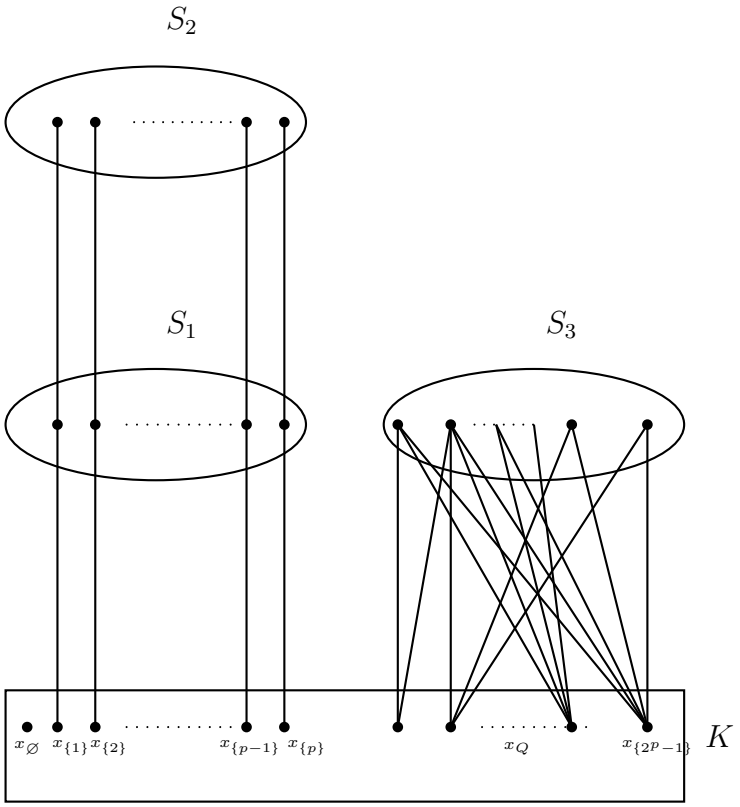


FIGURE 4.6 – Le graphe H_p et ses composantes K, S_1, S_2 et S_3.

4.3 Complexité

Cette section est consacrée à l'étude de la complexité de notre problème. Nous donnons d'abord le résultat suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un graphe G^* associé à G soit $k - rlid$-coloriable avec $k \geqslant 3$ un entier.

Théorème 4.3.1. *Soient $k \geqslant 3$ un entier et G un graphe connexe sans jumeaux. Alors G est k-coloriable si et seulement si G^* est $k - rlid$-coloriable.*

Démonstration. Soient $k \geqslant 3$ un entier et G un graphe connexe sans jumeaux d'ordre $n \geqslant 3$. Montrons d'abord que si G admet une k-coloration alors G^* est $k - rlid$-coloriable.
Soit c une k-coloration de G et soit G^* le graphe associé à G. Construisons une k-coloration c' de G^* à partir de c comme suit :
- Pour tout sommet $x \in G$, $c'(x) = c(x)$.
- Pour le sommet pendant t adjacent à x, $c'(t) = c(y)$ où y est le sommet adjacent à

x dans G.
- Pour toute arête $xy \in E(G)$, soit $xaby$ est la chaîne correspondante à xy dans G^*. Puisque $k \geqslant 3$, il suffit de choisir une couleur $q \neq c(x)$, $q \neq c(y)$ et telle que $c'(a) = c'(b) = q$.
Montrons que c' est une coloration-$rlid$ de G^*.
Utilisons les notations précédentes, nous allons étudier les arêtes xt ou xa ou ab. Si x et y deux sommets de G tels que $xy \in E(G)$, alors $xaby$ est la chaîne correspondante à xy dans G^* et $c'(t) = c(y)$. Nous avons l'ensemble $c'(N[x])$ contient $\{c(y), c(x), c'(a)\}$, donc $|c'(N[x])| \geqslant 3$. Nous avons aussi $|c'(N[t])| \leqslant 2$ car le sommet t est une feuille dans G^*.
De plus, par définition de c', pour toute subdivision $x'a'b'y'$ de l'arête xy, nous avons $c'(a') = c'(b')$ donc $|c'(N[a'])| = |c'(N[b'])| \leqslant 2$. Ceci prouve que les extrémités de xa et by sont identifiées. Pour la chaîne $xaby$, nous avons $c'(N[a]) = \{c'(a), c(x)\}$ et $c'(N[b]) = \{c'(a), c(y)\}$. Puisque $c(x) \neq c(y)$ (par définition de c dans G et $xy \in E(G)$), nous obtenons $c'(N[a]) \neq c'(N[b])$.
Montrons maintenant que si G^* est $k - rlid$-coloriable alors G est k-coloriable. Soit c une $k - rlid$-coloration de G^*. Il suffit de prouver que $c(x) \neq c(y)$ pour toute arête $xy \in E(G)$. Si $c(x) \neq c(y)$ alors soit $xaby$ la chaîne dans G^* correspondante à l'arête xy dans G. Si $c(x) = c(y)$ donc nous aurions $c(N[a]) = \{c(a) = c(b), c(x)\} = c(N[b])$, ce qui constitut une contradiction. □

Pour les graphes planaires, *Garey et al.* ont démontré le Théorème suivant :

Théorème 4.3.2. *[31] Le problème de décision qu'un graphe planaire admet une* 3*-coloration propre de ses sommets est $\mathcal{NP}$-Complet.*

Soit G un graphe planaire et G^* le graphe associe à G. Le graphe G^* est aussi planaire . D'autre part, le graphe G^* est 2-dégénéré (par construction de G^*). En vertu du Théorème 4.3.1, le graphe G est 3-coloriable si et seulement si G^* est $3 - rlid$-coloriable. D'après le Théorème 4.3.2, le problème de décision qu'un graphe planaire est 3-coloriable est un problème $\mathcal{NP}$-complet. Nous obtenons donc le résultat suivant :

Corollaire 4.3.3. *Le problème de décision qu'un graphe planaire* 2*-dégénéré connexe est $3 - rlid$-coloriable est $\mathcal{NP}$-Complet.*▫

Pour la coloration-*lid*, le problème de complexité a été abordé pour les graphes bipartis dans [25] :

Théorème 4.3.4. *[25] Pour tout entier fixé g, décider si un graphe biparti d'une maille au moins g est de degré maximum* 3 *est $3 - lid$-coloriable est $\mathcal{NP}$-complet.*

Pour la coloration localement identifiante relaxée nous avons :

Théorème 4.3.5. *Soit G un graphe biparti d'ordre $n \geqslant 3$. Alors $\chi_{rlid}(G) \leqslant 3$.*

Démonstration. Soit G un graphe biparti. Deux cas a étudier :
Cas 1 : Si G contient un sommet universel.
Alors $G \backsimeq K_{1,p}$ avec $p > 1$ un entier :
- Si $p = 2$, puisque $K_{1,2} \backsimeq P_3$, $\chi_{rlid}(K_{1,2}) \leqslant 3$.
- Si $p > 2$, il faut montrer que $\chi_{rlid}(K_{1,p}) \leqslant 3$.
Soient u le sommet universel de $K_{1,p}$ et $\{v_1, v_2, \ldots, v_p\}$ l'ensemble des autres sommets.
Soit c une coloration de $K_{1,p}$ définit comme suit : $c(u) = 1$, $c(v_1) = 2$ et $c(v_i) = 3$ pour tout $i = 2, \ldots, p$.
La coloration c telle quelle est définie est une coloration-*rlid*.

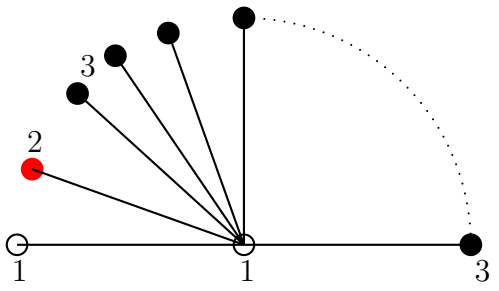


FIGURE 4.7 – Une coloration localement identifiante relaxée du $K_{1,p}$ avec $p \geqslant 2$

Cas 2 : Si G ne contient pas de sommet universel.
Soit x un sommet de G. Le sommet x n'est pas universel. Considérons une partition de sommets de G en p niveaux $L_0, L_1, \ldots, L_p$ suivant le sommet x, telles que $L_0 = \{x\}$, et $L_j = \{v \in V(G) | d_G(u, v) = j\}$ pour tout $j \geqslant 1$. Le graphe G est fini donc le nombre de niveaux est fini et de plus chaque niveau est fini.
Pour $i = 1, \ldots, p$, soient A_i et B_i une subdivision de l'ensemble L_i en deux sous-ensembles disjoints telle que $v \in A_i$ si et seulement si $N(v) \cap L_{i+1} = \varnothing$ et $N(v) \cap L_{i-1} = B_{i-1}$, et $v \in B_i$ si et seulement si $N(v) \cap L_{i+1} = L_{i+1}$ et $N(v) \cap L_{i-1} = B_{i-1}$.
Soit v un sommet de G ($v \neq x$). Considérons une coloration c de G avec trois couleurs $\{1, 2, 3\}$. Nous avons trois cas à considérer : pour $i \geqslant 0$:
2.1. **Si $\mathbf{p \equiv 0[4]}$** ou **$\mathbf{p \equiv 2[4]}$** :

$$c(v) = \begin{cases} 1 & si \ \ v \in L_{4i} \\ 1 & si \ \ v \in A_{4i+1} \\ 2 & si \ \ v \in B_{4i+1} \\ 3 & si \ \ v \in L_{4i+2} \\ 3 & si \ \ v \in A_{4i+3} \\ 2 & si \ \ v \in B_{4i+3} \end{cases}$$

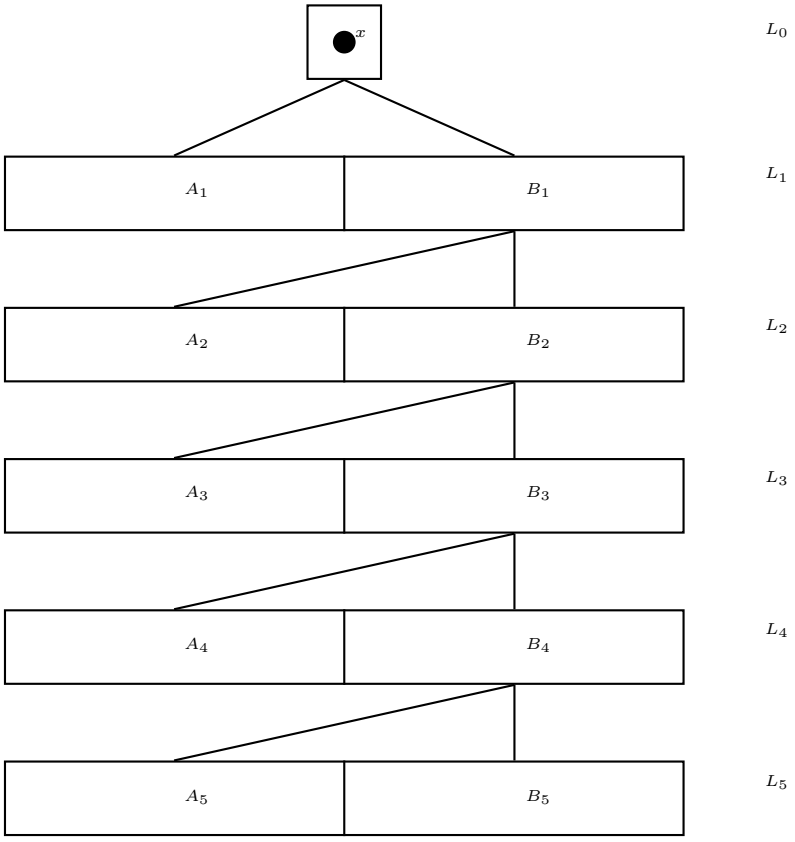


FIGURE 4.8 – Partition de l'ensemble de sommets de G en niveaux $L_0, L_1, \ldots, L_p$ suivant le sommet x.

Montrons que la coloration c est localement identifiante relaxée. Puisque G est un graphe biparti, les niveaux $L_0, L_1, \ldots, L_p$ sont des stables. De plus, l'ensemble L_2 est non vide i.e. $p \geqslant 2$.
D'abord, remarquons que pour tout $i \geqslant 0$, si $v \in L_{4i}$ alors $c(N[v]) = \{1, 2\}$.
Si $v \in A_{4i+1}$, $c(N[v]) = \{1\}$ et si $v \in B_{4i+1}$ alors $c(N[v]) = \{1, 2, 3\}$.
Si $v \in L_{4i+2}$ alors $c(N[v]) = \{2, 3\}$.
Si $v \in A_{4i+3}$ alors $c(N[v]) = \{3\}$ et $c(N[v]) = \{1, 2, 3\}$ si $v \in B_{4i+3}$.
Soient u et v deux sommets adjacents de G. Puisque G est biparti, u et v ne sont pas dans le même niveau L_i. Sans perte de généralité, supposons que $u \in L_i$ et $v \in L_{i-1}$ (ou $v \in L_{i+1}$) et que $N[u] \neq N[v]$. Nous avons quatre cas à étudier :
Cas 1 : Si $u \in L_{4i}$.
Si $u \in L_{4i}$ et $v \in B_{4i-1}$, nous avons $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{3\}$.
Si $u \in B_{4i}$ et $v \in A_{4i+1}$ alors dans ce cas la couleur 2 distingue les sommets u et v mais si $v \in B_{4i+1}$ alors u et v sont séparés par la couleur 3.
Cas 2 : Si $u \in L_{4i+1}$.
Si $u \in A_{4i+1}$ et $v \in B_{4i}$, alors $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{2\}$.

Si $u \in B_{4i+1}$, alors soit $v \in B_{4i}$ et donc la couleur 3 sépare les deux sommets u et v ou soit $v \in L_{4i+2}$ et donc $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{1\}$.
Cas 3 : Si $u \in L_{4i+2}$.
Si $u \in L_{4i+2}$ et $v \in B_{4i+1}$ alors u et v sont séparés par la couleur 1.
Si $u \in B_{4i+2}$, alors soit $v \in A_{4i+3}$ et alors $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{3\}$ ou soit $v \in B_{4i+3}$ donc $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{1\}$.
Cas 4 : Si $u \in L_{4i+3}$.
Si $u \in A_{4i+3}$ et $v \in B_{4i+2}$, la couleur 2 distingue u et v.
Si $u \in B_{4i+3}$. Alors soit $v \in B_{4i+2}$ et donc nous avons $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{1\}$ ou soit $v \in L_{4(i+1)}$ et donc les sommets u et v sont séparés par la couleurs 3.
2.2. **Si $\mathbf{p \equiv 1[4]}$** :
On garde la même coloration que la précédente (cas 2.1.) sauf pour le dernier niveau L_p, on donne la couleur 3 aux sommets de B_p, et la couleur 1 aux sommets de A_p.
Si $u \in B_{p-1} = L_{4i}$ et $v \in B_p$, dans ce cas la couleur 3 distingue les sommets u et v.
Si $u \in B_{p-1}$ et $v \in A_p$, nous avons $c(N[u]) \triangle c(N[v]) = \{2, 3\}$.
2.3. **Si $\mathbf{p \equiv 3[4]}$** :
On attribue la couleur 3 aux sommets de L_p et on garde la même coloration considérés dans le cas 2.1. pour les autres niveaux .
Si $u \in B_{p-1} = L_{4i+2}$ et $v \in L_p$, dans ce cas la couleur 2 distingue les sommets u et v.

Dans tout les cas, les deux sommets adjacents u et v sont distingués par la coloration c.

□

Remarque 4.3.6. *Il n'existe pas de graphe G tel que $\chi_{rlid}(G) = 2$. De plus, un graphe G est $1 - rlid$-coloriable ssi G est l'union disjointe de cliques K_i avec $i = 1, \ldots, p$. En effet, pour tout $i = 1, \ldots, p$, le graphe $K_i/\mathcal{R} \backsimeq \{x_i\}$ où x_i est un sommet et donc $G/\mathcal{R} \backsimeq \{x_1, \ldots, x_p\} = S$ où S est un stable.*

Dans la preuve du Théorème 4.3.5, nous avons décrit un algorithme qui determine en temps polynomial qu'un graphe biparti est $3 - rlid$-coloriable.

4.4 Relation entre γ_{id}, χ_{lid} et χ_{rlid}

La coloration identifiante et la coloration localement identifiante ont été étudiés seulement pour les graphes sans jumeaux. Pour la coloration localement identifiante relaxée, nous considérons même les graphes avec jumeaux. Dans cette partie, nous montrons d'abord que la borne inférieure du Théorème 4.2.2 est serrée. Nous donnons ensuite une borne de χ_{rlid} en fonction de γ_{id} et nous caractérisons les graphes dont le nombre nécessaire de couleurs pour avoir une coloration-$rlid$ égal au nombre de sommets du graphe. Nous donnons la borne inférieure de χ_{rlid} et nous exhibons une

famille de graphes pour lesquels cette borne est atteinte.
Pour établir la relation existant entre χ_{rlid} et les autres paramètres χ_{lid}, χ_{id} et γ_{id}, nous donnons d'abord quelques résultats pour quelques classes de graphes.
Dans la section précédente, nous avons prouvé que pour tout graphe biparti G, $\chi_{rlid}(G) \leqslant 3$ et le produit cartésien de deux graphes bipartis. En effet, Soient $G_1 = (U_1 \cup V_1, E_1)$ et $G_2 = (U_2 \cup V_2, E_2)$ deux graphes bipartis sans arêtes isolées. Le produit cartésien de G_1 et G_2, $G_1 \square G_2 = (U, E)$, est un graphe biparti où $U = \{(U_1 \times U_2) \cap (V_1 \times V_2), (U_1 \times V_2) \cup (V_1 \times U_2)\}$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) sont adjacents si et seulement si soit $u_1 = u_2$ et $v_1 v_2 \in E_2$ ou bien $u_1 u_2 \in E_1$ et $v_1 = v_2$. Le graphe $G = G_1 \square G_2$ est biparti donc $\chi_{rlid}(G) \leqslant 3$.
Pour le graphe P_{2k}^{k-1}, le nombre chromatique- *rlid* est donné par :

Théorème 4.4.1. *Si $k \geqslant 2$, alors $\chi_{rlid}(P_{2k}^{k-1}) = 2k - 1$.*

Démonstration. Utilisons les mêmes notations donnés au chapitre 1. Soit c une coloration de P_{2k}^{k-1} défini comme suit :
$c(v_1) = c(v_2) = 1$, et $c(v_i) = i - 1$ pour tout $i = 3, ..., 2k$.
Soit $v_i v_j$ une arête de P_{2k}^{k-1}. Sans perte de généralité, supposons que $i < j$. Nous distinguons trois cas :
Cas 1 : Si $j \leqslant k$. Le sommet v_{j+k-1} est adjacent à v_j mais il n'est adjacent à v_i. De plus, le sommet v_{j+k-1} est le seul sommet dans $N[v_i] \triangle N[v_j]$.
Cas 2 : Si $i > k$. Dans ce cas, les sommets v_{i-k+1} et v_i sont adjacents mais le sommet v_{i-k+1} n'est pas adjacent à v_j. Donc $v_{i-k+1} \in N[x_i] \triangle N[v_j]$.
Cas 3 : Si $i \leqslant k$ et $j > k$. Nous avons $v_{2k} \in N[x_k] \triangle N[x_{k+1}]$.
Dans tout les cas, la coloration c distingue toute paire de sommets adjacents dans G, donc $\chi_{rlid}(P_{2k}^{k-1}) \leqslant 2k - 1$.
De plus, pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, le sommet v_{i+1} est le seul sommet dans $N[v_{k+i}] \triangle N[v_{k+i+1}]$ et $N[v_{k+i}] = \{v_{i+1}, v_{i+2}, \ldots, v_{2k}\}$, ce qui implique que tous les sommets v_i avec $2 \leqslant i \leqslant 2k$ ont des couleurs différentes. Nous avons aussi $c(N[v_k]) \triangle c(N[v_{k+1}]) = \{v_1, v_{2k}\}$. Donc, nous pouvons colorier les sommets de P_{2k}^{k-1} comme suit : les sommets v_1 et v_2 reçoivent la couleur 1 et pour tout i avec $3 \leqslant i \leqslant 2k$, $c(v_i) = i - 1$. Ce qui conclut la preuve du théorème. □

Le résultat suivant montre que la borne inférieure du Théorème 4.2.2 est serrée :

Propriété 4.4.2. *Soient $p \geqslant 4$ et $t \geqslant 1$ deux entiers. Soit $t \leqslant \binom{p-1}{2}$. Il existe un graphe G tel que $\chi_{rlid}(G) = p$ et $\chi_{rlid}(G) = \chi_{rlid}(G/\mathcal{R}) - t$.*

Démonstration. Construisons le graphe G tel que $\chi_{rlid}(G) = p$ et $t \leqslant \binom{p-1}{2}$. Considérons le graphe K_{p+t} et soit $\{x_1, x_2, \ldots, x_t, \ldots, x_{p+t}\}$ l'ensemble de ses sommets. Le graphe K_{p+t}^* est le graphe associé à K_p. Notons z_i le sommet pendant de x_i pour $i = 1, \ldots, p + t$. Soient x_i^j et x_j^i $(1 \leqslant i, \quad j \leqslant p + t)$ les deux sommets subdivisant l'arête $x_i x_j$ où x_j^i (resp. x_i^j) est le sommet adjacent à x_i (resp. à x_j). Le graphe G est

obtenu à partir de K_p^* en ajoutant t sommets $y_1, y_2, \ldots, y_t$ jumeaux respectivement de $x_1, x_2, \ldots, x_t$. Observons que $G/\mathcal{R} \backsimeq K_{p+t}^*$, ce qui donne $\chi_{rlid}(G/\mathcal{R}) = t + p$.
Montrons que G admet une $p - rlid$-coloration. Soit c une coloration de G comme suit : $c(x_{t+i}) = i$ pour $i \geqslant 1$. Pour les sommets appartenant à la même classe d'équivalence , c est définie un par un et donnée par la bijection suivante : $\{(c(x_i), c(y_i)) \mid 1 \leqslant i \leqslant t\} \longrightarrow \mathcal{P}_2(p-1)$. Les sommets x_i^j et x_j^i reçoivent la même couleur p pour tout (i, j) excepté le couple $(p, t+1)$ et posons $c(x_p^{t+1}) = c(x_{t+1}^p) = p - 1$.
Assignons la couleur 1 à z_i si $i \geqslant 1$ et $c(x_i) \neq 1$. Si $c(x_i) = 1$, colorions z_i avec la couleur 2 (dans ce cas z_i est un sommet pendant et adjacent uniquement à x_i). Si $i \leqslant t$, $c(z_i) \in \{1, 2, \ldots, p-1\}$ tel que $c(z_i) \neq c(x_i)$ et $c(z_i) \neq c(x_i)$.
Soient u et v deux sommets adjacents de G. Nous ne nous intéressons pas à distinguer les jumeaux.
Remarquons que si $u = x_i^j$ et $v = x_j^i$ avec $1 \leqslant i,\ \ j \leqslant t$, nous avons $c(z_i) \in c(N[x_i^j])$ et $c(z_i) \notin c(N[x_j^i])$. Si $t + 1 \leqslant i,\ \ j \leqslant t + p$, nous avons $i = c(x_i)$ appartient à l'ensemble $c(N[x_i^j])$, et $c(x_j) = j \notin c(N[x_i^j])$ avec $c(x_i) \neq c(x_j)$. Si $1 \leqslant i \leqslant t$ et $t + 1 \leqslant j \leqslant p + t$, remarquons que $|c(N[x_i^j])| = 2$ et $|c(N[x_j^i])| = 3$.
Si $u = x_i$ et $v = x_i^j$, nous avons dans ce cas $c(z_i) \in c(N[x_i])$ avec $c(z_i) \notin c(N[x_i^j])$ si $1 \leqslant i \leqslant t$ et $|c(N[x_j^i])| = 2$ si $t + 1 \leqslant i \leqslant p + t$. Nous avons aussi $|c(N[x_i^j])| = 3$ et $|c(N[x_i])| = 4$ si $t + 1 \leqslant i \leqslant t + p$.
Si $u = x_i$ et $v = z_i$. Donc si $1 \leqslant i \leqslant t$, nous avons $|c(N[x_i])| = 4$ et $|c(N[z_i])| = 3$. Si $t + 1 \leqslant i \leqslant t + p$, nous obtenons $|c(N[x_i])| = 3$ et $|c(N[z_i])| = 2$.
Ce qui prouve que toute paire de sommets adjacents sont distingués par c. □

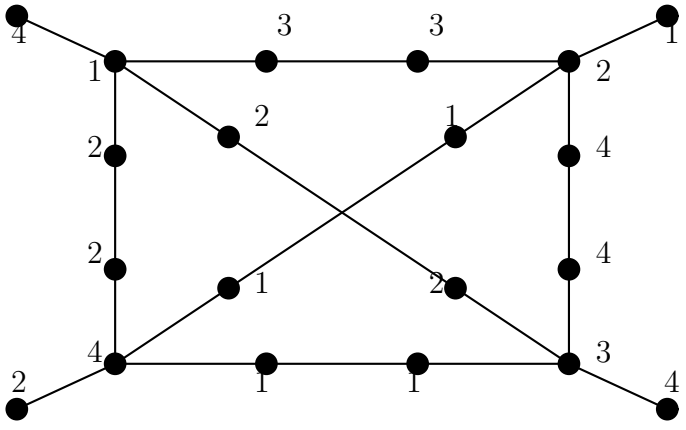


FIGURE 4.9 – Coloration *rlid* du graphe K_4^*

Le théorème 4.3.5 affirme que les graphes bipartis admettent une 3-coloration-*rlid* malgré que χ_{id} des graphes bipartis n'est pas borné. De plus dans [25], nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.4.3. *[25] Soit G un graphe sans jumeaux. Alors $\chi_{id}(G) \leqslant \gamma_{id}(G) + 1$*

Et pour la coloration localement identifiante relaxée, nous avons :

Propriété 4.4.4. *Pour tout graphe sans jumeaux G, nous avons $\chi_{rlid}(G) \leqslant \gamma_{id}(G)+1$.*

Démonstration. Nous savons $\chi_{rlid}(G) \leqslant \chi_{id}(G)$, pour tout graphe sans jumeaux G. Ceci conclut la preuve. □

Une caractérisation des graphes sans jumeaux connexe tels que $\chi_{id}(G) = n$ a été donné dans [56] :

Théorème 4.4.5. *[56] Soit G un graphe sans jumeaux connexe. Les assertions suivantes sont équivalentes :*
- *$\chi_{id}(G) = |V(G)|$;*
- *G est un graphe complet privé d'un couplage maximal ou bien $G = K_1 \bowtie H_1 \bowtie \cdots \bowtie H_t$ avec H_i de la forme P_{2k}^{k-1}, , $k \geqslant 2$ ou $G_i = \overline{K_2}$.*

Dans une coloration-*rlid*, nous avons :

Corollaire 4.4.6. *Soit G un graphe sans jumeaux connexe d'ordre $|V(G)| = n$.*
Les assertions suivantes sont équivalentes :
1. *$\chi_{rlid}(G) = n$;*
2. *$G \simeq K_1 \bowtie \mathcal{H}$ avec $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \bowtie \mathcal{H}_2 \bowtie \cdots \bowtie \mathcal{H}_l$ et $\mathcal{H}_i \backsimeq P_{2k}^{k-1}$ ou $\mathcal{H}_i = \overline{K_2}$ pour $i = 1, \ldots, l$.*

Démonstration. Soit G un graphe sans jumeaux connexe d'ordre $n \geqslant 3$.
(2) $\Longrightarrow$ (1).
• **Si** $G \simeq K_1 \bowtie \mathcal{H}$ où $\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \bowtie \mathcal{H}_2 \bowtie \cdots \bowtie \mathcal{H}_l$ avec $\mathcal{H}_i \simeq \mathrm{P}_{2k}^{k-1}$ ou bien $\mathcal{H}_i = \overline{K_2}$ pour tout $i = 1, \ldots, l$.
Soit u le sommet universel correspondant à K_1 et notons par $\{v_1, v_2, \ldots, v_{2k}\}$ l'ensemble de sommets de $\mathcal{H}_1$ tels que $\mathcal{H}_i \backsimeq \mathrm{P}_{2p}^{k-1}$.
Soit c une coloration-*rlid* de G.
Pour tout s tel que $2k > s > k$, $N[v_s] \triangle N[v_{s+1}] = \{v_{s-k}\}$. D'où, pour tout j, $t \leqslant k$, $c(v_j) \neq c(v_t)$. De plus, pour tout $s > k$, nous avons $N[v_s] \supseteq \{v_{k+1}, \ldots, v_{2k}, u\} \cup \bigcup_{t \geqslant 2} V(\mathcal{H}_t)$.
D'où pour tout $j \leqslant k$, nous avons $c(v_j) \notin c(\{v_{k+1}, \ldots, v_{2k}, u\} \cup \bigcup_{t \geqslant 2} V(\mathcal{H}_t))$. Sinon, $c(N[v_{j+k-1}]) = c(N[v_{j+k}])$.
Par symétrie, nous obtenons pour tout $j > k$, $c(v_j) \notin c(V \backslash v_j)$.
Nous obtenons les mêmes résultats pour chaque $\mathcal{H}_j$ avec $j \geqslant 2$.

• **Si $\mathcal{H}_1 \simeq \overline{K_2}$.**
Soient a et b les deux sommets correspondants à $\overline{K_2}$. Le sommet b est le seul sommet contenant dans $N[a] \triangle N[u]$. De plus, $N[a] = V\backslash\{b\}$, donc la couleur de sommet b est différente de tous les autres sommets du graphe. Nous obtenons la même chose pour le sommet a.
Finalement, tous les sommets de G ont des couleurs différentes.
(1) $\Longrightarrow$ (2).
Si $\chi_{rlid}(G) = n$ alors une coloration-$rlid$ de G est une coloration-id de G et par le Théorème 4.4.5 [56], nous obtenons le résultat. □

Nous déduisons du Corollaire 4.4.6 que pour un graphe sans jumeaux connexe, $\chi_{rlid}(G) = \chi_{id}(G)$ si $\chi_{rlid}(G) = n$. Donc, nous obtenons $\chi_{rlid}(G) = \chi_{lid}(G)$.
Maintenant, nous montrons que χ_{rlid} est plus petit pour le comparer avec χ_{lid}. D'abord, nous montrons la borne inférieure du Théorème 4.2.3 et nous donnons une famille de graphes pour lesquels cette borne est atteinte.

Théorème 4.4.7. *Soient G un graphe et $G/\mathcal{R}$ son sous-graphe maximal sans jumeaux, Donc, $\chi_{rlid}(G) \geqslant \log(\omega(G/\mathcal{R})) + 1$.*

Démonstration. Soit K une ω-clique de $G/\mathcal{R}$. Notons par $V' = V(G)\backslash K$ et soit c une coloration-$rlid$ de sommets de G.
Puisque pour toute paire de sommets adjacents distincts x et y dans K, $c(N[x]) \neq c(N[y])$ (car c est une coloration-$rlid$).
De plus, nous avons $\forall x \in K$, $c(K)$ contenant dans l'ensemble $c(N[x])$, puisque dans le voisinage fermé de x, nous avons tout les sommets de K et quelques sommets de V'.
Nous avons aussi pour toute paire de sommets adjacents x et y :
$c(N[x]) \neq c(N[y])$ ssi $c(N[x]) - c(x) \neq c(N[y]) - c(y)$.
Soit $p = |c(V)\backslash(c(K)|$. Donc, avec p couleurs différentes, nous pouvons distinguer au plus 2^p sommets distincts. Donc $2^p \geqslant |K|$. D'où $p \geqslant \log(|K|)$. Donc, le nombre total de couleurs différentes utilisées par c est au moins égal à $|c(K)| + p \geqslant p + 1$. □

Cette borne est serrée pour la famille de graphes suivante :

Corollaire 4.4.8. *. Si $p \geqslant 2$, alors $\chi_{rlid}(H_p) = \log \omega(H_p) + 1$.*

Démonstration. Définissons une coloration c de H_p comme suit :

— $c(x_Q) = p + 1$ pour tout $Q \subseteq \mathcal{P}([p])$.
— $c(y_i) = c(z_i) = i$ $\forall i \in [p]$.
— $c(y'_i) = i + 1 \ \ mod \ \ p$ pour tout $i \in [p]$.

Nous obtenons : $c(N[x_Q]) = Q \cup \{p+1\}$ pour tout $Q \subseteq \mathcal{P}([p])$, $c(N[z_i]) = \{i, p+1\}$ pour tout $i \in [p]$, $c(N[y'_i]) = \{i, i+1 \ mod \ p\}$ pour tout i et $c(N[y_i]) = \{i, i+1 \ mod \ p, p+1\}$ pour tout i. Puisque il n'existe pas d'arête entre $y \in S_1$ et $x_Q \in K$ avec $|Q| \geqslant 2$ et entre $z \in S_3$ et $x_{\{i\}}$ pour tout $i \in [p]$, il n'y a pas d'arêtes. Donc la coloration c est une coloration-*rlid*. □

En vertu de Corollaire 4.4.8, $\chi_{rlid}(H_p) = p + 1$. D'après la définition de la coloration localement identifiante, $\chi_{lid}(H_p) > 2^p$, car pour les sommets de la clique K de taille 2^p, il nous faut $\omega(H_p)$ couleurs différentes. Ce qui donne $\chi_{lid}(H_p) \geqslant \chi(H_p) \geqslant \omega(H_p) = 2^p$ et $\chi_{lid}(H_p) \geqslant 2^{\chi_{rlid}(H_p)}$.

4.5 Graphes scindés

Cette partie est consacrée à l'étude des graphes scindés (ou graphes Splits) qui sont des graphes dont l'ensemble de sommets est l'union d'une clique $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ de taille maximale ω et d'un stable $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_p\}$. L'ensemble des arêtes sont les arêtes reliants les sommets de K et les arêtes reliant les sommets de K et les sommets de S. Pour les graphes scindés, le χ_{rlid} est donné par le théorème suivant :

Théorème 4.5.1. *Soit $G = (K \cup S, E)$ un graphe connexe scindé sans jumeaux. Alors :*

$$\log(\omega(G)) + 2 \leqslant \chi_{rlid}(G) \leqslant \omega(G) + 2.$$

Démonstration. D'abord, montrons que $\chi_{rlid}(G) \geqslant \log(\omega(G)) + 2$.
Dans l'ordre d'identifier les sommets de K, nous avons $\omega(G) \leqslant 2^p$. Soit c une coloration-*rlid* de G. D'après la preuve du Théorème 4.4.7, $|c(V) \backslash c(K)| \geqslant p$. Montrons qu'il faut ajouter au moins deux couleurs dans K pour pouvoir distinguer tous les sommets de G.
Si $|c(K)| \geqslant 2$. Nous avons le résultat.
Si $\omega(G) < 2^p$. Nous avons le résultat.
Maintenant, supposons que $\omega(G) = 2^p$ et $|c(K)| = 1$. Colorions avec la couleur $p + 1$ tous les sommets $x \in K$. Soit $u \in S$ et notons $I(u)$ l'ensemble de couleurs apparaissant dans $N[u]$. Observons que l'ensemble $I(u)$ contient la couleur $p + 1$ car u est adjacent à au moins un sommet de K. Puisque $\omega(G) = 2^p$, il existe un sommet $x \in K$ tel que $c(N[x]) = \{i, p + 1\}$ où $i = c(v)$ et $v \in S$. Ceci prouve que le sommet v appartient à l'ensemble S et adjacent à x. Ce qui donne $c(N[x]) = c(N[v])$, une contradiction.
Donc, nous avons besoin d'ajouter au moins deux couleurs dans K pour distinguer deux sommets adjacents de K et S. D'où nous obtenons le résultat.
Maintenant, montrons que $\chi_{rlid}(G) \leqslant \omega(G) + 2$. Supposons que G est un graphe

connexe et K est une clique maximale de G de taille $\omega(G) = k$. Montrons d'abord que $k-1$ couleurs différentes dans S suffisent pour distinguer tous les sommets de K.
Par induction, construisons un sous-ensemble $S' \subseteq S$ avec $|S'| \leqslant k-1$ tel que pour toute paire de sommets distincts x et y de K, $N[x] \cap S' \neq N[y] \cap S'$.
Choisissons un sommet $u \in S$. Puisque K est maximale, $K \cap N[u] \neq \varnothing$. Notons $K_1 = N[u] \cap K$ et $K_2 = K \backslash K_1$. Soit G_i $(i = 1, 2)$ le graphe scindé induit par K_i et S_i, où S_i est défini par $v \in S_i$ ssi $v \in S$ et $N[v] \in K_i$. Pour $i = 1, 2$, montrons que G_i est un graphe sans jumeaux et que K_i est maximale.
Par construction, nous avons $K_i, \ \ , i = 1, 2$ est maximale.
Maintenant, supposons par l'absurde que $G_i, \ \ i = 1, 2$ contient deux jumeaux x et y. Puisque K_i est maximale, alors $x, y \in K_i$. Par définition de G_i, chaque sommet $x_i \in V(G) \backslash V(G_i)$ est soit adjacent aux sommets x et y (tous les deux) ou non. Ce qui prouve que x et y sont aussi jumeaux de G, une contradiction.
Appliquant maintenant l'hypothèse d'induction aux graphes G_1 et G_2, nous obtenons $|S'| \leqslant k-1$.
Posons donc $S' = S_1 \cup S_2$ et soit $c(s_i) = i, \ \forall s_i \in S'$. Puisque $N[x] \cap S' \neq N[y] \cap S'$ pour toute paire de sommets distincts $x, \ y \in K$, il existe au plus un sommet qu'on note $u \in K$ tel que $N[u] \cap S' = \varnothing$.
Partitionnons maintenant la clique K en deux parties K_1 et K_2 tels que chaque sommet $x \in K_1$ satisfait $|N[x] \cap S'| = 1$ et chaque sommet $y \in K_2$ satisfait $|N[x] \cap S'| \geqslant 2$.
Nous avons démontré que chaque paire de sommets $x, \ \ y \in K$ sont distingués par les couleurs de S'. Il nous reste à distinguer deux sommets adjacents $x \in K$ et $s \in S$.
Soit c une coloration-*rlid*. Nous avons deux cas à étudier :

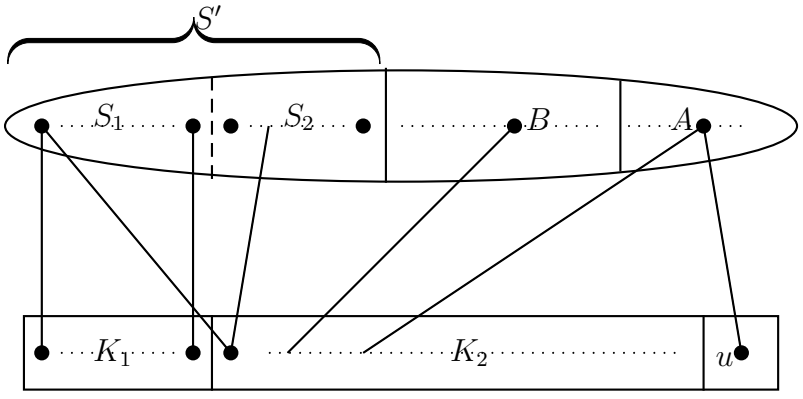


FIGURE 4.10 – Le graphe scindé et ses composantes K et S.

<u>Cas 1</u> : Il existe $u \in K$ tel que $N[u] \cap S \neq \varnothing$.
Soient $A = N[u] \cap S$ et $B = S \backslash (S' \cup A)$ (voir la figure 4.10).

Sous-cas 1.1. $K_1 \neq \varnothing$ et $A = \varnothing$.
Considéons la coloration suivante : tous les sommets de $B \cup K_1 \cup K_2$ sont coloriés avec la couleur k. Posons $c(u) = k+1$. Nous savons que tous les sommets de K sont distingués par S' et puisque $k+1 \in c(N[x])\backslash c(N[s])$, x et s sont distingués.

Sous-cas 1.2. $K_1 \neq \varnothing$ et il existe $y \in K_1$ tel que $N[y] \cap A \neq \varnothing$.
La coloration c est définie comme suit : tous les sommets de l'ensemble $K_1\backslash\{y\} \cup K_2 \cup (S\backslash S')$ reçoivent la couleur k. Assignons au sommet y la couleur $k+1$ et au sommet u la couleur $k+2$.
Chaque deux sommets adjacents de G sont discriminés. En effet, nous savons que tous les sommets de K sont distingués par les couleurs de S'. Reste à regarder les arêtes reliants K et S. Supposons que $N[x] = N[s]$.
• **Si** $x \in K_1$. Puisque $k+2 \in c(N[x])$, le sommet s appartient à l'ensemble A. Donc par hypothèse, x et s ne sont pas adjacents .
• **Si** $x \in K_2$. Puisque $c(N[x])$ contient la couleur $k+1$, $s \in B \cup S'$. Donc $k+2$ appartient à $c(N[x]) \cap c(N[s])$.
• **Si** $x = u$, alors $s \in A$. Ce qui donne $k+1 \in c(N[x]) \cap c(N[s])$, une contradiction.

Sous-cas 1.3. $K_1 \neq \varnothing$ et $\forall x \in K_1$, nous avons $N[x] \cap A \neq \varnothing$.
• **Si** $A = \{v\}$.
Il existe donc un sommet $y \in K$ non adjacent à v. Considérons la coloration c suivante : $c(v) = k$, $c(u) = k+2$, $c(y) = k+1$ et $c(z) = k$ pour tout $z \in (K\backslash\{y\}) \cup B$.
Si $x \in K$ et $s \in S\backslash A$, les sommets x et s sont distingués car $k+2 \in c(N[x])\backslash c(N[s])$. En plus, les deux sommets adjacents $x \in K$ et $s = v$ sont aussi distingués puisque $k+1 \in c(N[x])\backslash c(N[v])$.
• **Si** $|A| \geqslant 2$.
Considérons la coloration suivante : les sommets de $B \cap K$ reçoivent la couleur k. Il existe un sommet $w \in A$ tel que $c(w) = k+1$ et $\forall v \in A\backslash\{w\}$, assignons à v la couleur $k+2$.
Soient $x \in K$ et $s \in S$ deux sommets adjacents.
- **Si** $s \notin S'$ **et** $x \neq u$, la couleur $k+1 \in c(N[x])\backslash c(N[s])$.
- **Si** $s \in S' \cup B$ **et** $x = u$, les sommets x et s ne sont pas adjacents.
- **Si** $s \in A$ **et** $x = u$. Soit la couleur $k+1 \in c(N[s])$ ou soit la couleur $k+2 \in c(N[s])$ mais l'ensemble $c(N[u])$ contient les deux couleurs.
- **Si** $s \in S'$ **et** $x \in K_2$. Il existe un sommet $s' \in S'\backslash\{s\}$ tel que $c(s') \neq c(s)$. Donc, nous obtenons $c(s_j) \in c(N[x])\backslash c(N[s])$
- **Si** $x \in K_1$ **et** $s \in S'$, l'ensemble $(N[x])\backslash c(N[s])$ contient soit la couleur $k+1$, soit la couleur $k+2$.

<u>Cas 2</u> : Le sommet u **n'existe pas dans** K. Dans ce cas $A = \varnothing$, alors :
• Si $K_1 = \varnothing$. Considérons la coloration suivante : tous les sommets de $K \cup B$ reçoivent la couleur k.

- **Si** $s \in S'$. Puisque $|N[x] \cap S'| \geqslant 2$, il existe un sommet $s' \in S'$ tel que $s \neq s'$ et $c(s') \in c(N[x])\backslash c(N[s])$.
- **Si** $s \in S\backslash S'$. Le sommet x a au moins deux voisins dans S'.

• $K_1 \neq \varnothing$. S'il existe $x \in K$ tel que $|N[x] \cap S_1| = 1$, alors il existe un sommet $y \in K_2$ qui n'est pas adjacent à $s_1 \in S_1$. Considérons la coloration suivante : $c(x_1) = k+1$ (nous savons que $x_1 \in K_1$ et il a un seul voisin $s_1 \in S$) et $c(y) = k+2$ et tous les sommets dans $B \cup K\backslash\{x_1, y\}$ reçoivent la couleur k.
- **Si** $x \in K_1\backslash\{x_1\}$ **et** $s \in S'$. Donc $k+1 \in c(N[x])\backslash c(N[s])$.
- **Si** $x = x_1$ **et** s_1, nous obtenons $k+2 \in c(N[x])\backslash c(N[s])$.
- **Si** $x \in K_1$ **et** $s \in S\backslash S'$. Il existe une couleur $i = c(s_i)$ où $c(s_i) \in S'$ telle que $i \in c(N[x])\backslash c(N[s])$.
- **Si** $x \in K_2$ **et** $s \in S'$. Nous avons la couleur $j \in c(N[x])\backslash c(N[s])$ où $j = c(s_j)$, $s_j \in S'$ et $s_j \neq s$.
- **Si** $x \in K_2$ **et** $s \in S\backslash S'$. Le sommet x a au moins deux voisins dans S'. Ce qui termine la preuve. □

Si la coloration est en plus propre, nous avons le résultat suivant :

Théorème 4.5.2. *[25] Soit G un graphe scindé. Si $\omega(G) \geqslant 3$ ou G est une étoile alors $\chi_{lid}(G) \leqslant 2\omega(G) - 1$.*

Nous voyons bien que $\chi_{rlid}(G)$ est plus petit que $\chi_{lid}(G)$ où G est un graphe scindé sans jumeaux.

Dans ce qui suit, nous donnons deux graphes scindés $Q_1(p)$ et $Q_2(p)$ (avec $p \geqslant 2$) tels que la borne inférieure du Théorème 4.5.1 est atteinte pour le premier graphe et la borne supérieure du Théorème 4.5.1 est serrée pour le deuxième graphe.
Le graphe $Q_1(p)$ est un graphe scindé dont la clique $K = \{x_Q, Q \in \mathcal{P}(p)\}$ où Q est un sous-ensemble de $\{1, \ldots, p\}$ et le stable $S = \{s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}\}$. En plus, K est de taille 2^{p-1}. Le second graphe $Q_2(p)$ est un graphe scindé où l'ensemble des sommets de K est $\{v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}, v_p\}$ et l'ensemble des sommets de S est $\{s_1, s_2, \ldots, s_{p-1}\}$. Les arêtes sont définies par :

— Pour $i = 1, \ldots, p-1$, nous avons l'arête $v_i s_i$;
— Pour $j = 1, \ldots, p$, nous avons l'arêtes $v_i v_j$.

La proposition suivante montre que le borne inférieure du Théorème 4.5.1 est atteinte :

Proposition 4.5.3. *Pour $p \geqslant 2$, nous avons $\chi_{rlid}(Q_1(p)) = \log(\omega(Q_1(p))) + 2$.*

Démonstration. Soit c une coloration-*rlid* de $Q_1(p)$. Supposons qu'il existe deux sommets s_i et s_j tels que $c(s_i) = c(s_j)$ pour $1 \leqslant i,\ j \leqslant p-1,\ \ i \neq j$ and $N[x_Q] \triangle N[x_{Q'}] = \{s_i, s_j\}$, avec $x_Q,\ x'_Q \in K$. Nous obtenons $c(N[x_Q]) = c(N[x_{Q'}])$, une contradiction. Donc tous les sommets s_i $(1 \leqslant i \leqslant p-1)$ ont des couleurs différentes.

Soient x_Q et $x_{Q'}$ deux sommets de K tels que $|Q| > |Q'|$. Alors $|N[x_Q]| > |N[x_Q]|$. Dans K, s'il existe un sommet x_Q qui a un voisin unique $s_j \in S$ (avec $j = 1, \ldots, p-1$), nous aurions donc $N[x_Q] \triangle N[s_j] = \{x_\varnothing\}$, ce qui implique $c(x_\varnothing) \notin c(K \backslash \{x_\varnothing\} \cup S)$.
Nous pouvons supposer maintenant que la coloration c de $Q_1(p)$ est définie comme suit : colorions s_i avec la couleur i pour tout $1 \leqslant i \leqslant p-1$. Pour tout $Q \in \mathcal{P}(p)$, $c(x_Q) = p$ et $c(x_\varnothing) = p+1$.
Soient x_Q et x'_Q deux sommets de K tels que $|Q| > |Q'|$. Donc nous avons $|c(N[x_Q]) \cap S| > |c(N[x_Q]) \cap S|$. Le sommet $x_\varnothing$ n'a pas de voisins dans S (par définition de $Q_1(p)$), alors il est distingué de tous les autres sommets $x_Q \in K$ où $Q \in \mathcal{P}(p)$ et $Q \neq \varnothing$. De plus, le sommet $x_\varnothing$ nous permet de distinguer les sommets x_Q et s_j avec $Q \in \mathcal{P}(p)$ et $Q \neq \varnothing$ et $j = 1, 2$. □

Pour le second graphe $Q_2(p)$, nous avons :

Proposition 4.5.4. *Pour $p \geqslant 2$, nous avons $\chi_{rlid}(Q_2(p)) = \omega(Q_2(p)) + 1$.*

Démonstration. Soient $p \geqslant 2$ un entier et c une coloration-*rlid* de $Q_2(p)$. Nous avons pour tout sommet $s_i \in S, i = 1, \ldots, p-1,\ c(s_i) \notin c(V \backslash \{s_1, \ldots, s_{p-1}\})$. Sinon, nous aurions $c(N[v_i]) = c(N[v_p])$.
De plus, nous avons $c(s_i) \neq c(s_j), 1 \leqslant i,\ j \leqslant p-1$ et $i \neq j$. Si non, nous obtiendrions $c(N[v_i]) = c(N[v_j])$.
Nous pouvons donc considérer la coloration c suivante : pour $s_i \in S$ et $i = 1, \ldots, p-1,\ c(s_i) = i$. Pour les sommets $v_i \in K$ et $i = 1, \ldots, p-1,\ c(v_i) \notin \{1, \ldots, p-1\}$.
Si $|c(K)| = 1$ alors $c(N[s_i]) = c(N[v_i])$ pour tout $i = 1, \ldots, p-1$. Donc $|c(K)| \geqslant 2$, ce qui donne $\chi_{rlid}(Q_2(p)) \geqslant \omega(Q_2(p)) + 1$.
Pour conclure, observons que la coloration c est définie par :

— pour $i = 1, \ldots, p-1,\ c(s_i) = i$;
— $c(v_i) = p$ pour $i < p$ et $c(v_p) = p+1$.

La coloration c définit bien une $(p+1) - rlid$-coloration de $Q_1(p)$. □

4.6 Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons introduit une nouvelle manière d'identifier les graphes localement en utilisant des couleurs, appelée *coloration localement identifiante relaxée*, notée coloration-*rlid*. Nous nous sommes intéressés à déterminer le nombre minimum de couleurs nécessaire pour avoir une coloration-*rlid*. Ceci revient à déterminer le nombre chromatique localement identifiant relaxé χ_{rlid}. Nous avons considéré des graphes connexes sans ou avec jumeaux. Pour un graphe contenant des jumeaux, nous avons donné une borne inférieure et une borne supérieure de χ_{rlid} qui dépend de χ_{rlid} de son sous-graphe sans jumeaux maximal. Nous avons donné deux graphes pour lesquels les deux bornes sont serrées.

Nous avons abordé le problème de complexité de coloration-$rlid$. Nous sommes arrivés à montrer que le problème de décision que χ_{rlid} égal à 3 est $\mathcal{NP}$-complet pour un graphe planaire 2-dégénéré, et est polynomial pour un graphe biparti sans arête isolée.

Nous avons aussi caractérisé tous les graphes dont χ_{rlid} égal au nombre de sommets du graphe. Nous avons également donné une borne inférieure du nombre chromatique-$rlid$ pour les graphes sans jumeaux et nous avons exhibé une famille de graphes pour lesquels cette borne est atteinte. Nous avons étudié cette coloration dans les graphes scindés. La coloration localement identifiante relaxée a été comparée avec la coloration localement identifiante, la coloration identifiante et la coloration propre. Il s'est avéré qu'en général χ_{rlid} est plus petit ou égal aux χ_{lid}, χ_{id} et χ pour tous les graphes sans jumeaux connexe.

Nous avons les graphes P_{2k}^{k-1} sont des graphes d'intervalles et d'après le Théorème 4.4.1, $\chi_{rlid}(\mathrm{P}_{2k}^{k-1}) = 2k - 1$.

Conclusion

Au cours de cette thèse, nous nous sommes intéressés à l'étude de quelques problèmes de la théorie de graphes largement étudiés tels que l'identification et automorphismes de graphes.

Dans le chapitre 2, nous avons étudié un cas particulier des codes pondérés parfaits appelés (a, b)-codes. Nous nous sommes intéressés à l'étude de l'existence de ses codes dans certains graphes circulants noté C_n^k, où la distance entre chaque paire de sommets est au plus égal k. Nous avons aussi caractérisé toutes les valeurs possible de a et b pour lesquelles l'(a, b)-code existe.
Nous proposons une extension de l'(a, b)-code définie comme suit :
Données : *Soit $t \geqslant 1$ un entier. Soient a_{ij} des entiers pour tout $1 \leqslant i,\ j \leqslant t$.*
Question : *Existe-t-il une partition de l'ensemble de sommets V en t sous-ensembles disjoints $C_1, C_2, \ldots, C_t$ tels que chaque élément de C_i a exactement a_{ij} voisins dans C_j, pour tout $i,\ j \in \{1, 2, \ldots, t\}$ qui sont à distance au plus k ?*
Dans notre cas, un (a, b)-code C de rayon k donne une partition de V en deux parties disjointes $C_1 = C$ et $C_2 = V \backslash C$ avec $a_{11} = a + 1, \quad a_{12} = 2k - a, \quad a_{21} = b$ et $a_{22} = 2k - b$.
Dorbec et al. [20] ont étudié les (a, b)-codes sur la grille carré de dimension d (produit de chaînes) et de rayon 1. Une perspective intéressante serait d'étudier ses codes sur un tore de dimension d (le produit de cycles) de taille quelconque. Nous avons résolu le problème pour $d = 1$ sur un tore quelconque de rayon quelconque.

Lors de ces deux dernières années, l'étude de nombre distinguant est florissante. Plusieurs études et travaux ont été réalisés autour de ce nombre qui a fait l'objet de chapitre 3. Remarquons que pour la plupart des classes de graphes étudiées, le nombre distinguant vaut soit 2 soit il dépend de l'ordre du graphe. Nous avons donné une méthode pour construire une famille de graphes pour lesquelles ce nombre est différent de deux et ne dépend pas de l'ordre du graphe. Ces graphes sont des graphes circulants, notés $C(m, p)$ où m et p sont deux entiers positifs, définit comme étant le produit lexicographique du cycle C_p et du stable S_m (resp. Clique K_m), noté $S_m \otimes C_p$ (resp. $K_m \otimes C_p$). L'ordre du graphe $S_m \otimes C_p$ est $n = m.p$.

Question 4.6.1. *Est-il possible de construire une telle famille de graphes avec un ordre inférieur à n ?*

Pour l'instant, nous proposons une amélioration de l'ordre n de $(C(m_i, p_i))_i$ pour $i = 1, \ldots, r$ donné dans le Théorème 3.3.3 en posant $n = \frac{\prod_{i=1}^{r} m_i}{pgcd(m_i, \prod_{j<i} m_j}$.
Il serait aussi intéressant de généraliser ce résultat en étudiant le produit lexicographique de deux graphes quelconques. Cette généralisation a été traité par *Chan* dans [9] sur les groupes. Une autre perspective serait de construire d'autres famille de graphes ayant un nombre distinguant strictement supérieur à 2.

Le chapitre 4 est consacré à l'étude de problèmes d'identification. C'est une autre manière d'identifier les sommets de graphe en utilisant les couleurs. Nous nous sommes intéressés à identifier les sommets de graphe localement avec les couleurs. Autrement dit, nous avons regardé l'ensemble de couleurs présentes dans le voisinage fermé de toute paire de sommets adjacents dont leur voisinage fermé est distinct. La condition que la coloration soit propre est négligée, i.e. deux sommets adjacents peuvent recevoir la même couleur. Nous avons même considéré les graphes avec jumeaux. Dans ce cas, il n'est pas intéressant de distinguer les jumeaux. Quelques classes de graphes ont été caractérisé en déterminant le nombre chromatique localement identifiant relaxé χ_{rlid} et pour d'autres classes de graphes, des bornes ont été donné.
Dans le Théorème 4.5.1, nous avons prouvé que pour un graphe scindé G, $\chi_{rlid}(G) \leqslant \omega(G)+2$. Nous pensons que cette borne peut être améliorée. Donc, nous conjecturons :

Conjecture 4.6.2. *Si G est un graphe scindé sans jumeaux, alors $\chi_{rlid}(G) \leqslant \omega(G)+1$.*

La notion du *nombre chromatique localement identifiant relaxé* pour les graphes finis est nouvelle. Il serait intéressant d'étudier cette coloration sur d'autres classes de graphes : les graphes planaires, les graphes planaires extérieurs, les cographes, les graphes d'intervalles, line graphes et les graphes avec un degré maximum donné.
Dans notre travail, nous avons étudié le χ_{rlid} d'un graphe même s'il contient de jumeaux, ce n'est pas le cas pour les autres colorations. Il serait donc intéressant d'étudier la coloration identifiante et la coloration localement identifiante en considérant les graphes avec jumeaux.

Bibliographie

[1] M. Aïder, S. Gravier and S. Slimani. Relaxed locally identifying coloring of graphs. *Preprint*(2014) (Available http ://arxiv.org/abs/1406.3683)

[2] M. O. Albertson. Distinguishing Cartesian Powers of Graphs. *Preprint*. February(2005)

[3] M. O. Albertson and K. L. Collins. Symmetry breaking in graphs. *Electronic J. of Combinatorics*. **3**,# R18 (1996)

[4] V. Arvind, C. T. Cheng and N. R. Devanur. On Computing the distinguishing number of planar graphs and Beyond : a counting approach. *Siam J. Discrete Mathematics*. **22(4)**, 1297–1324 (2008)

[5] M. A. Axenovich, On multiple coverings of the rectangular grid with balls of constant radius, *Discrete Maths.*, 268, 31–48 (2003)

[6] N. Biggs, Perfect codes in graphs, *J. Combin. Theory* Ser .B 15, 289–296 (1973).

[7] B. Bogstad and L. Cowen. The distinguishing number of hypercubes.*Discrete Mathematics*. **383**,29–35(2004)

[8] D. M. Cardoso. Rama, Spectral results on regular graphs with (k, t)-regular sets, *Discrete Math.* 307, 1306–1316(2007).

[9] M. Chan. The distinguishing number of the direct product and wreath product action. *J. Algebraic Combinatorics*. **24**,331–345(2006)

[10] M. Chan. The maximum distinguishing number of a group. *Electronic J. of Combinatorics*. **3**,# R70 (2006)

[11] M. Chan. The distinguishing number of the augmented cube and hypercube powers. *Discrete Mathematics*. 308,2336–2339 (2008)

[12] C. T. Cheng. On computing the distinguishing and distinguishing chromatic numbers of Interval graphs and other results. *Discrete Mathematics*. **Vol 309 (16)**, 5169–5182 (2009)

[13] C. T. Cheng. On computing the distinguishing numbers of trees and forests. *Electronic J. of Combinatorics*. **13**,# R11 (2011)

[14] G. Cohen, I. Honkala, S. Litsyn and A. Lobstein, Covering Codes, *North Holland Mathematical Library, Amsterdam* (1997)

[15] G. D. Cohen, I .S. Honkala, S. Litsyn, H. F. Jr. Mattson, Weighted Coverings and Packings, *IEEE Trans. Inform. Theory*, 41, 1856–1967(1995).

[16] K. L. Collins and A. N. Trenk. The Distinguishing Chromatic Number. *Electronic J. of Combinatorics.* **13**,# R16 (2006)

[17] K. L. Collins, M.. Hovey and A. N. Trenk . Bounds on the Distinguishing Chromatic Number. *Electronic J. of Combinatorics.* **16**,# R88 (2009)

[18] M. Conder and T. Tucker. Motion and distinguishing number two. *Ars Math.Contemp.***4(1)**,63–72 (2011)

[19] S. A. Cook. The Complexity of Theorem-Proving Procedures. *Proc. 3rd Ann.ACM Symp. On Theory of Computing, Association of Comjuting Machinery.* New York ; PP :151–158(1971).

[20] P. Dorbec, S. Gravier, I. Honkala, M. Mollard, Weighted Codes in Lee Metrics, *Des. Codes Cryptogr.*, 52(2), 209–218 (2009).

[21] P. Dorbec,Empilement et Recouvrement dans les Graphes, *PhD Thesis, Grenoble* (2007).

[22] P. Dorbec, M. Mollard, Perfect Codes in Cartesian Products of 2-Paths and Infinite Paths, *Electron. J. Combin.* 12, # R 65(2005).

[23] J. Edmonds. Paths, Trees and Flowers. *Cand.J.Math.*17, 449–467 (1965).

[24] P. Erdös and A. Rényi. Asymmetric Graphs. *Acta Math. Acad. Sci. Hung.***14**, 295–315 (1963)

[25] L. Esperet, S. Gravier, M. Montassier, P. Ochem and A. Parreau. Locally identifying coloring of graphs. *The Electronic Journal of Combinatorics*, 19 (2),# P40 (2012)

[26] T. Feder. Product graph representations. *Graph Theory.* **16**, 467–488 (1992)

[27] M. J. Fisher and G. Isaak. Distinguishing colorings of Cartesian products of complete graphs. *Discrete Mathematics.* **308**, 2240–2246 (2008).

[28] M. J. Fisher and G. Isaak. Distinguishing numbers of Cartesian products of multiple complete graphs. *PARS Mathematica Comptemporanea.* **5**,159–170 (2012).

[29] F. Foucaud, I. Honkala, T. Laihonen, A. Parreau and G. Peranau. k. Locally identifying colourings for graphs with given maximum degree. *Discrete Mathematics* 312(10) : 1832–1837(2012).

[30] M. R. Garey and D. S. Jonhson. Computers and Intractability : A guide to the theory of NP-Completeness. *W. H. Freeman* (1979)

[31] M. R. Garey, D. S. Jonhson and L. Stockmeyer. Some Simplified NP-Complete graph problems. *Theoret. Comput. Sci.* 1, 237–267, (1979)

[32] S. W. Golomb, L. R. Welch, Algebraic Coding and the Lee Metric, In : *proc. Sympos. Math. Res. Center, Madison, WI, John Wiley, New York*, 175–194, (1968).

[33] S.W. Golomb, L.R. Welch, Perfect codes in the Lee Metric and the Packing of Polyominoes, *SIAM. J. App. Math.*, 18, 302–317 (1970).

[34] S. Gravier, J. Jerebic and M. Mollard. Distinguishing number of some circulant graphs. *Preprint*(2010).

[35] S. Gravier, A. Lacroix, S. Slimani, (a, b)-codes in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, *Discrete Applied Math.*, 161, 612–617 (2013).

[36] S. Gravier, K. Meslem and S. Slimani. Distinguishing number of some circulant graphs. *Preprint* (2013) (Available http ://arxiv.org/abs/1406.3844.)

[37] S. Gravier, M. Mollard, C. Payan, Variations on Tilings in Manhattan Metric, *Geom. Dedicata.*, 76(3), 265–274 (1999).

[38] S. Gravier, E. Vandomme, Weighted packing of the infinite grid $\mathbb{Z}^2$. *Preprint* (2012).

[39] D. Gonçalves, A. Parreau, A. Pinlou. Locally identifying coloring in bounded expansion classes of graphs. *Discrete Applied Mathematics* 161(18) :2946–2951(2013).

[40] C. Hoffmann. Group theoretic algorithms and graphs isomorphism. *Springer Verlag, New Yourk*(1982) (Lecture Notes in Computer Science 136)

[41] W. Imrich, J. Jerebic and S. Klavžar. The distinguishing number of Cartesian products of complete graphs. *European. J. Combin.***45**, 175–188 (2009)

[42] W. Imrich, R. Kalinowski, F. Lehner, M. Pilśniak. Endomorphism breaking in graphs. *Electronic J. of Combinatorics.***21(1)**, 1–16 (2014)

[43] W. Imrich and S. Klavžar. Product graphs : Structure and recognition. *John Wiley & Sons* .**New York**(2000).

[44] W. Imrich and S. Klavžar. Distinguishing Cartesian powers of graphs. *J. Graph Theory.***53**, 250–260 (2006)

[45] W. Imrich, S. Klavžar and V. Trofimov. Distinguishing infinite graphs. *Electronic J. of Combinatorics.***14**,# R36 (2007)

[46] W. Imrich, S. .M. Smith, T. W. Tucker and M. E. Watkins. Infinite motion and 2-distinguishability of graphs and groups. *Electronic J. of Combinatorics.***19(2)**,# P27 (2127)

[47] R. Kalinowski and M. Pilośniak. Distinguishing graphs by edge-colourings. *European J. of Combinatorics.* Volume **45**, 124–131 (2015)

[48] R. M. Karp, Reductibility Among Combinatorial Problems. *in R.E. Miller and J.W. Thatcher(eds), Complexity of Computer Computations, Plenum Press, New York* 85–103 (1972).

[49] M. G. Karpovsky, K. Chakrabarty and L. B. Levitin. On a new class of codes for identifying vertices in graphs. *IEEE Transactions on Information Theory* 44, 599–611 (1998)

[50] S. Klavžar, T. L. Wong and X. Zhu. Distinguished labelings of group action on verctor spaces and graphs. *J. Algebra.***15 Issue 2**, 626–641 (2006)

[51] S. Klavžar and X. Zhu. Cartesian powers of graphs can be distinguished by two labels. *European J. Combinatorics.***28**,303–310 (2007)

[52] J. Köbler, U. Schöning and J. Torán. The graph isomorphism problem : Its Structural Complexity. *Birkhauser, Boston.*(1993).

[53] J. Kratochvil, Perfect codes in general graphs, Colloq. Math. Soc. Janol Bolyai 52, *Proceedings of the seventh Hungarian Colloquium on Combinatorics, Eger*, 357–364 (1987).

[54] F. Lehner. Symmetry breaking in graphs and groups. *PhD thesis, Graz university of Technology, Autriche* (Mai 2014).

[55] A. Lozano, M. Mora and C. Seara. Distinguishing trees in linear time. *Electronic J. of Combinatorics.* **19(2)**,# R19 (2012)

[56] A. Parreau. Problèmes d'identification dans les graphes, *PhD Thesis*, Grenoble, France (July 2012).

[57] K. S. Potanka. Groups, Graphs and Symmetry Breaking. *Masters Thesis, Virginia Polytechnic Institute and State University, U.S.A*(1998).

[58] S. A. Puzynina, Prefect colorings of radius $r > 1$ of the infinite rectengular grid, *Siberian Electronic Mathematical Reports 5*, 283– 292 (2008).

[59] B. Ravi, H. Johan and Z. Stathis. Does Co_NP have the short interactive proof ? *Information Processing Letters.* **25**, 127–132 (1981)

[60] S. RAY, R. UNGRANGSI, F. De PELLEGRINI, A. TRACHTENBERG, and D. STAROBINSKY, *Robust Location Detection in Emergency Sensor Networks*, *INFOCOM*(2003)

[61] F. Rudin. Problem 729 in *J. Recreational Math.* **Volume 11** *(Solution in Vol.12, 1980)*(1979),128.

[62] A. Russell and R. Sundaram. A note on the asyptotics and computational comlexity of graph Distinguishability. *Electronic J. Combinatorics.* **5**,# P23 (1998)

[63] G. Sabidussi. Graph Multiplication. *Math. Z. 72*, 446–457 (1960)

[64] S. M. Smith, T. Tucker and M. E. Watkins. Distinguishability of infinite groups and graphs. *Electronic J. Combinatorics.* **19** ,# P27 (2012)

[65] J. A. Telle, Complexity of domination-type problems in graphs, *Nordic J. Comput. 1*, 157–171 (1994).

[66] T. Tucker. Distinguishing maps. *Electronic J. Combinatorics.* **18**, # R50 (2011)

[67] J. Tymoczko. Distinguishing number for graphs and groups. *Electronic J. Combinatorics*, **11(1)**,# R63 (2004).(Also available at arXiv :math.CO/0406542).

[68] R. Ungrangsi, A. Trachtenberg, and D. Starobinsky, *An implemtation of indoor location detection systems based on identifying codes*, *In Proceedings of Intelligence in Communication Systems, INTELLCOMM 2004, Volume 3283 of LNCS*, 175–189 (2003)

[69] V.G. Vizing. Cartesian product of graphs. *Vychisl. Sistemy (in Russian)*, **9**, 30–43 (1963) . English translation : Comp. El. Syst. 2 (1966) 352–365.

[70] M. E. Watkins and X. Zhou. Distinguishability of locally finite trees. *Electronic J. Combinatorics.* **14**,# R29 (2007)

[71] X. Zhu and T. L. Wong. Distinguishing labeling of group actions. *Discrete Mathematics, Vol 309.* **6**,1760–1765 (2009)

Index

action
  groupe, 14
agit, 14
  fidèlement, 15
algorithme, 19
  efficace, 19
  non-déterministe, 19
application
  automorphisme, 15
    asymétrique, 15
    trivial, 15
  isomorphisme, 15
  morphisme, 15
arête, 8

boule, 9

chaîne, 8
classe
  NP, 19
  NP-complet, 20
  P, 19
clique, 9
code, 15
  (a,b)-code, 15, 22
  (r,a,b)-code, 22
    couvrant, 22
  correcteur d'erreur, 15
  dominant, 16
  identifiant, 16, 53
  parfait, 15
  séparant, 16
coloration, 18
  (r,a,b)-coloration isotropique, 22
  2-coloration constante, 22
  identifiante, 18, 53
    localement, 52
    localement relaxée, 52
  k-coloration, 18
  k-distinguante, 18
  propre, 18
  r-distainguante, 35
complexité, 18
  algorithmique, 19
couplage, 9
  parfait, 9
cycle, 9

degré maximum, 8
distance, 9

étoile, 10

graphe
  simple
    non orienté, 8
  biparti, 9
  circulant, 12, 40
  complet, 9
  complémentaire, 9
  connexe, 9
  d'intervalles, 13
  dégénéré, 11
  joint, 11
  multiparti
    complet, 10
  planaire, 11
  premier, 11
  régulier, 11
  relativement

premiers, 11
sans jumeaux, 56
maximal, 55
scindé, 13, 66
simple, 8
sous-graphe
induit, 8
groupe
abélien, 14
dièdral, 14

instance, 19

jumeaux
faux, 8
vrais, 8

maille, 9
métrique
Manhattan, 22
module, 42
maximal, 42

nombre
chromatique, 18
identifiant, 18, 53
localement identifiant, 53
localement identifiant relaxée, 52
distinguant, 18, 35

orbite, 14

fixés, 14
problème
de reconnaissance, 20
polynomial, 19
produit
cartésien, 10
direct, 10
lexicographique, 10, 49
puissance
chaîne, 12
cycle, 13
graphe, 12

reduction polynomiale, 20

sommet
adjacent, 8
isolé, 8
pendant, 8
voisins, 8
stabilisateur, 14
stable, 9

voisinage
k-voisinage, 23
ouvert, 8
étendu, 8

Résumé

Dans cette thèse, nous étudions quelques problèmes de théorie des graphes largement étudiés : *identification et automorphismes*.
Nous étudions d'abord un problème d'identification : les (a, b)-*codes* sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ où chaque sommet est identifié par un sous-ensemble de sommets C dont chaque sommet doit avoir exactement a voisins dans C et chaque sommet qui n'appartient pas à C doit avoir b voisins dans C. Nous caractérisons l'existence d'un (a, b)-code non trivial dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Puis, nous étudions un problème d'automorphismes : le *nombre distinguant* pour certains graphes circulants. Ce nombre est le plus petit entier d tel que le graphe admet une *d- coloration* préservée uniquement par un seul automorphisme qui est l'identité. Nous construisons une famille de graphes circulants d'ordre n ayant des nombres distinguant distincts et ne dépendent pas de n.
Ensuite, nous étudions le problème d'identification d'un sommet par l'ensemble des couleurs existant dans son voisinage : *la coloration localement identifiante relaxée*, notée *coloration- rlid*. L'objectif est de calculer le *nombre chromatique* χ_{rlid} : le nombre minimum de couleurs utilisées dans une coloration-*rlid*. Nous donnons de nombreuses bornes pour ce nombre dans le cas de certaines classes de graphes, et étudions la complexité de ce problème.

Abstract

In this thesis, we study some problems of graph theory widely studied : *identification and automorphisms*.
First, we start by studying the problem of identification : the (a, b)-*codes* in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ where each vertex is identified by a subset of vertices C which have exactly a neighbors in C and each element not belonging to C have b neighbors in C. We characterize the existence of a non trivial (a, b)-code in $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
Then, we study a problem of automorphisms : *the distinguishing number* of some circulant graphs. This number is the least integers d such that there is a *d-labeling* of the vertices of a graph G that is not preserved by any non trivial automorphism of G. We show that we can built a family of circulant graphs of order n having distinct distinguishing numbers not depend on n.
Finally, we study problems on vertices identification of graph with colors appearing in the neighborhood of each vertex : *the relaxed locally identifying coloring*, noted *rlid-coloring*. The aim is to calculate the chromatic number χ_{rlid} : is the minimum number of colors used in a *rlid*-coloring. We give several bounds of for different families of graphs, and we study the complexity of this problem.