

N° d'ordre : 16/2014-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité: STATISTIQUES MATHÉMATIQUES ET PROBABILITES

Par : Lynda KERAR

THÈME

Modélisation des séries chronologiques à innovations alpha stables

Soutenu publiquement, le 10/06/ 2014, devant le jury composé de :

Mr.	M.DJEDOUR	Professeur,	à l'USTHB	Président
Mme.	K. DJABALLAH	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mme.	H. SAGGOU	Maître de Conférences/A,	à l'USTHB	Examineur
Mr.	T. MEDKOUR	Maître de Conférences/B,	à l'USTHB	Invité

Remerciements

Louange à ALLAH, le miséricordieux, sans Lui rien de tout cela n'aurait pu être, je remercie Allah tout puissant qui m'a donné la force, la volonté et le courage pour terminer ce travail de mémoire de magister, et je le prie de me guider vers la bonne voie.

Je tiens à exprimer d'abord toute ma profonde gratitude à Chère promotrice madame Khadidja DJABALLAH (MCA) pour m'avoir proposé ce travail, pour son encadrement, son écoute, ses élucidations, ses conseils, ses directives et encouragements qu'il m'a afflues.

Je remercie monsieur Mohamed DJEDOUR, professeur à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance. Mes remerciements s'adressent à madame Hafida SAGGOU (MCA), ainsi monsieur Tarek MEDKOUR (MCB) pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant d'être examinateurs.

Je tiens à remercier tous ceux qui mon aidés de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire, je remercie vivement toutes mes amis qui mon aidé et encouragé au long de ce travail.

C'est un énorme remerciement que j'adresse à ma Mère et mon Père ainsi à mes frères. Vous avez su à votre manière, par vos paroles et vos gestes, m'encourager et m'accompagner dans tous les moments de ce mémoire. Je remercie vivement mes frères et toute ma famille.

Merci infiniment à vous tous.

Table des matières

Introduction	1
1 Généralités mathématiques	3
1.1 Quelques lois usuelles	3
1.1.1 Loi gaussienne	3
1.1.2 Loi de Cauchy	4
1.1.3 Loi de Student	5
1.2 Convergence de variables aléatoires	7
1.2.1 Convergence presque sûre	7
1.2.2 Convergence en probabilité	8
1.2.3 Convergence en moyenne quadratique	8
1.2.4 Convergence en distribution ou en loi	8
1.2.5 Lien entre les différents modes de convergence	9
1.3 Lois des grands nombres	10
1.3.1 Loi faible des grands nombres	10
1.3.2 Loi forte des grands nombres	11
1.4 Théorème Central limite classique	11
1.5 Théorème Central limite généralisé	12
1.5.1 Cas des variables aléatoires indépendantes (non nécessairement in- dépendantes, identiquement distribués)	12
1.5.2 Cas des variables aléatoires à variance infinie	13
1.6 Théorie des valeurs extrêmes	14

1.6.1	Loi des valeurs extrêmes	15
1.6.2	Caractérisation de domaine d'attraction	18
1.6.3	Domaine d'attraction maximum	18
1.7	Distributions à queue lourde	21
1.7.1	Classes de distributions à queues lourdes	22
1.7.2	Exposants de queues pour des lois connues	26
1.8	Processus stochastiques et séries chronologiques	27
1.8.1	Caractéristiques et propriétés des séries chronologiques	28
1.8.2	Processus stationnaires	30
1.8.3	Processus bruit blanc	31
1.8.4	Ergodicité	32
2	La famille des lois alpha-stables	33
2.1	Introduction	33
2.2	Lois infiniment divisibles	36
2.3	Caractérisation des lois stables univariées	37
2.3.1	Quelques définitions	38
2.3.2	La fonction caractéristique	39
2.3.3	Différentes formes de paramétrisations	41
2.3.4	Propriétés des Lois Stables	44
2.4	Processus stochastiques stables	49
2.5	Méthode d'estimation des lois α -stables	50
2.5.1	Estimateur de Pickand	50
2.5.2	Estimateur de Hill	51
2.6	Algorithme de simulation des lois alpha stables	52
3	La famille des modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédas-	
	tiques	55
3.1	Introduction	55
3.2	Les principales propriétés des séries financières	57

3.3	Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques généralisés . . .	63
3.3.1	Présentation des modèles GARCH	63
3.3.2	Stationnarité	65
3.3.3	Maximum de vraisemblance d'un modèle <i>GARCH</i>	66
3.4	Estimation des paramètres des modèles GARCH à innovations α -Stables . . .	68
3.4.1	Introduction	68
3.4.2	Modèle Stable-GARCH(α, p, q)	69
3.4.3	Maximum de vraisemblance d'un modèle <i>GARCH</i> avec innovations α -Stables	69
4	Simulations	72
4.1	Simulation et estimation des modèles GARCH à innovations α -Stable	72
4.1.1	Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de Cauchy $\alpha = 1$. . .	74
4.1.2	Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations α -Stable avec α quelconque ($\alpha = 1, 1; \alpha = 1, 5; \alpha = 1, 9$)	75
4.2	Etude de simulation des modèles GARCH(1,1) à innovations α -Stables . . .	79
4.2.1	Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de Cauchy $\alpha = 1$. . .	79
4.2.2	Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations α -Stable avec α quelconque	85
4.2.3	Conclusion	92
4.3	Simulation et estimation des paramètres pour des lois α -stables sous Matlab	93
	Conclusion générale	102
	Bibliographie	103

Introduction

En modélisation statistique, les lois à variance finie, en particulier la loi normale, sont largement utilisées pour étudier de nombreux phénomènes physiques et des données de nature variée. Les résultats obtenus à partir d'une telle modélisation sont généralement satisfaisants. Par exemple, l'analyse classique des séries chronologiques traite principalement de l'analyse statistique des processus stationnaires et, en particulier, des processus linéaires où les innovations à valeurs réelles sont indépendantes et identiquement distribuées de moyenne nulle et de variance finie. Malheureusement, une telle modélisation devient inefficace lorsque l'on désire étudier des phénomènes présentant de nombreuses valeurs extrêmes, qui ne peuvent être considérées comme des valeurs aberrantes. Les lois stables non-gaussiennes sont une alternative toute naturelle car elles sont une généralisation de la loi normale et prennent en compte des queues lourdes. C'est ainsi que s'est développée l'analyse statistique des processus dans lesquels les innovations sont distribuées suivant des lois α -stables.

Dans les années 60, Mandelbrot étudie des fluctuations boursières, pour lesquelles il était tout-à-fait clair que le modèle gaussien ne convenait pas. Il s'appuie alors sur les lois de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé «lois α -stables», Le paramètre α compris entre 0 et 2, représente l'exposant caractéristique des lois stables et lorsque celui-ci est strictement inférieur à 2, la variance de la loi stable est infinie, d'où la théorie de ces lois à variance infinie s'est développée petit à petit .

Depuis les travaux pionniers de Mandelbrot, les lois stables ont été l'objet d'un intérêt grandissant pour des chercheurs travaillant dans des domaines comme l'économie, les télécommunications, la météorologie, la physique, la biologie, la génétique,...etc .Elles présentent de nombreuses propriétés attractives pour les praticiens: elles prennent en compte l'asymétrie et les queues lourdes. Ce sont également les seules lois pour lesquelles le théorème

centrale limite généralisé est encore applicable, faisant ainsi de la loi normale un élément de cette grande famille avec indice de stabilité ($\alpha = 2$). Cette dernière apparaît comme une exception car c'est la seule loi ayant une variance finie.

Les séries financières étant réputées avoir des queues de distribution très lourdes, il semble pertinent d'autoriser des erreurs ayant une loi stable non nécessairement gaussienne.

Ces lois sont de plus en plus utilisées dans des modélisations des processus temporelles. D'ailleurs, plusieurs travaux consacrent une partie à l'analyse des séries chronologiques α -stables, à l'instar de la modélisation des processus linéaires *ARMA* qui utilisent des lois α -stables (thèse de Ludovic d'ESTAMPES[4]), et de celle des processus non lineaires *GARCH* à innovations α -stable (thèse Guillaume LEPAGE[16]).

Dans ce mémoire, on s'intéresse alors à adapter les α -stables au processus à une grande volatilité stochastique, ce qui nous a conduit à la modélisation *GARCH* à des innovations de lois α -stables que l'on nome *Stable GARCH*(α, p, q).

L'objet principal de la présente étude concerne les problèmes de l'estimation des paramètres des processus conditionnellement hétéroscédastiques sous l'hypothèse des innovations, qui sont de lois α -stables, afin de capturer la variabilité instantanée existant dans certaines séries telles que les séries financières. Nous établissons la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du maximum de vraisemblance.

Nous étudions ensuite le comportement de ce même estimateur dans le cas où la loi du processus des innovations n'est plus une loi α -stables mais faisant partie du domaine d'attraction de celle même loi.

Le présent mémoire comporte trois chapitres théoriques et un autre dédié aux résultats numériques. Dans le premier chapitre nous énonçons certaines notions mathématiques qui s'avèrent nécessaires à la compréhension des chapitres suivants. Dans le second, nous présentons la famille des lois α -stables en rappelant les propriétés de ces lois dans le cas univarié et nous explicitons le calcul des moments et la simulation. Quant au troisième chapitre, celui ci traite de l'inférence des modèles conditionnellement hétéroscédastiques dans le cas où le processus des innovations est distribué selon une loi α -stables. Enfin, le dernier chapitre est consacré aux résultats numériques pour illustration avec programmations et simulations.

Chapitre 1

Généralités mathématiques

Tel que énoncé précédemment, nous présentons ci-après les différentes notions mathématiques et certaines théories de probabilité que nous avons jugé utiles, car elles constituent des préalables ne compréhension des prochains chapitres (la famille des lois alpha stables et les séries chronologiques).

1.1 Quelques lois usuelles

1.1.1 Loi gaussienne

En théorie des probabilités et en statistique, la loi normale est l'une des lois de probabilité les plus adaptées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elle est en lien avec de nombreux objets mathématiques, dont le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elle est également appelée loi gaussienne, loi de Gauss ou loi de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749 – 1827) et Gauss (1777 – 1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

La densité de probabilité de la loi normale est donnée par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{1}{2} \left(\frac{x - \mu}{\sigma} \right)^2$$

La courbe de cette densité est appelée courbe de Gauss ou courbe en cloche. La loi normale de moyenne nulle et d'écart type unitaire est appelée loi normale centrée réduite ou loi normale standard.

Quelques propriétés de la loi gaussienne

-Un vecteur $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$ est gaussien, si toute combinaison linéaire $\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right)$ est une variable gaussienne à valeurs réelles.

-On caractérise la loi de X par son vecteur espérance et sa matrice de covariance

$$\Gamma = [\sigma_{i,j}]_{i=1,n;j=1,n}$$

où

$$\sigma_{i,j} = E(X_i, X_j) - E(X_i)E(X_j)$$

La loi de X admet une densité si la matrice Γ est inversible.

- Si deux variables forment un couple gaussien de covariance nulle, elles sont indépendantes.

- Si $(X; Y)$ est un vecteur Gaussien, il existe α tel que $X - \alpha Y$ est indépendant de X .

- Si X et Y sont des gaussiennes indépendantes, $aX + bY$ est une gaussienne et le couple (X, Y) est gaussien. Ce n'est en général pas vrai, si les variables ne sont pas indépendantes.

- Si X est une variable gaussienne de loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$, on a: pour tout λ réel

$$E(\exp \lambda X) = \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}\right)$$

. Réciproquement si pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(\exp^{\lambda X}) = \exp\left(\lambda m + \frac{\lambda^2 \sigma^2}{2}\right)$, la variable X est de loi $\mathcal{N}(m; \sigma^2)$.

1.1.2 Loi de Cauchy

La loi de Cauchy, appelée aussi loi de Lorentz, est une loi de probabilité pour les variables aléatoires continues.

Une variable aléatoire X suit une loi de Cauchy si elle admet une densité f_X par rapport à la mesure de Lebesgue, dépendant des deux paramètres a et b ($b > 0$) et définie par :

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi b \left[1 + \left(\frac{x-a}{b}\right)^2\right]}$$

Cette distribution est symétrique par rapport à a (paramètre de position), le paramètre b donnant une information sur l'étalement de la fonction (paramètre d'échelle).

La loi de Cauchy possède une queue décroissance lente qui donne une probabilité assez importante aux valeurs extrêmes. Il s'ensuit que la moyenne et la variance ne sont pas définies. En revanche, la médiane est gale à a .

Quelques propriétés de la loi Cauchy

- La loi de Cauchy est une loi Lévy-stable, c'est à dire que l'addition de variables tirées selon une loi de Cauchy donne une somme vérifiant aussi une loi de Cauchy.

- L'inverse d'une variable aléatoire, de loi de Cauchy, suit une loi de Cauchy.

- Le quotient de deux variables aléatoires réelles indépendantes suivant des lois normales standards suit une loi de Cauchy.

- La loi de Cauchy (avec notamment la loi normale et la loi de Lévy) est un cas particulier de lois stables.

La fonction de densité d'une loi de Cauchy rappelle celle d'une loi normale, à savoir une forme de cloche, mais avec un étalement plus large.

1.1.3 Loi de Student

La loi de Student est une loi de probabilité, faisant intervenir le quotient entre une variable suivant une loi normale centrée réduite et la racine carrée d'une variable distribuée suivant la loi du χ^2 .

C'est à dire, Si x et y sont deux variables aléatoires indépendantes, telles que x suit une loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et y suit une loi du chi-deux à ν degrés de liberté, alors la variable $T = \frac{X}{\sqrt{Y/\nu}}$ est distribuée selon une loi de Student à ν degrés de liberté

La densité de T , notée f_T , est donnée par:

$$f_T(x) = \frac{1}{\sqrt{\nu\pi}} \frac{\Gamma(\frac{\nu+1}{2})}{\Gamma(\frac{\nu}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}}, \text{ pour } \nu > 0$$

La densité f_T associée à la variable T est symétrique, centrée sur 0, en forme de cloche.

Son espérance ne peut pas être définie pour $\nu = 1$, et est nulle pour $\nu > 1$.

Sa variance est infinie pour $\nu \leq 2$ et vaut $\frac{\nu}{\nu-2}$ pour $\nu > 2$.

- Si $X \sim t(\nu = 1) \Rightarrow X \sim Cauchy(0, 1)$.

- $t(\nu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$ la loi de Student converge en distribution vers la loi normale.
- Si $t(\nu)$ suit une loi de Student alors X^2 suit une loi de Fisher $X^2 \sim F(\nu_1 = 1, \nu_2 = \nu)$

Sur le graphique, sont reportées les densités d'une loi normale et d'une loi de Student à 3 degrés de liberté. On vérifie que cette dernière admet des queues de distribution plus épaisses que celles de la loi normale: pour des degrés de liberté faibles, la distribution de Student est donc une distribution leptokurtique.

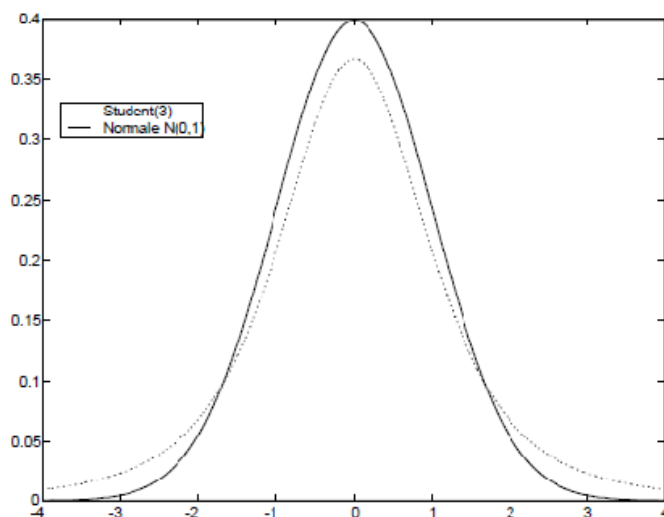


Fig. 1.1 Comparaison entre les Distributions de Student et Normale

1.2 Convergence de variables aléatoires

Dans la théorie des probabilités, il existe différentes notions de convergence de variables aléatoires. La convergence d'une suite de variables aléatoires est un concept important de la théorie des probabilités utilisé notamment en statistique et dans l'étude des processus stochastiques. Par exemple, la moyenne de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, converge presque sûrement vers l'espérance commune de ces variables aléatoires (si celle-ci existe). Ce résultat est connu sous le nom de loi forte des grands nombres.

Dans cette section, on suppose que (X_n) est une suite de variables aléatoires réelles, que X est une variable aléatoire réelle, et que toutes ces variables sont définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

On distingue plusieurs modes de convergence utilisés en économétrie, ces modes permettent :

- 1) d'apprécier la nature des valeurs extrêmes, de mesurer les queues de probabilité,
 - 2) de mesurer les erreurs associées aux estimateurs, d'en évaluer la précision et de déduire facilement la convergence en probabilité ; il s'agit de la convergence en Moyenne Quadratique ;
 - 3) de construire des tables de distribution pour les estimateurs et de réaliser des tests.
- Il s'agit de la convergence en Loi.

1.2.1 Convergence presque sûre

Définition 1.2.1 *Il existe une notion très forte de convergence : la convergence presque sûre. Il s'agit du mode le plus puissant.*

Une suite de variables aléatoires X_n converge presque sûrement vers X si pour presque tout ω ,

$$X_n(\omega) \rightarrow X(\omega) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty$$

C'est à dire

$$p(\omega \in \Omega : \lim X_n(\omega) = X(\omega)) = 1$$

On note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{ps} X$

1.2.2 Convergence en probabilité

Définition 1.2.2 Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si

$$\forall \epsilon > 0 \quad P(|X_n - X| \geq \epsilon) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

On note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} X$

1.2.3 Convergence en moyenne quadratique

Définition 1.2.3 Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en moyenne quadratique vers une variable aléatoire X si:

$$E(|X_n - X|)^2 \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

On note $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.q} X$

En général, lorsque pour $r \geq 1$, on a $\lim_{n \rightarrow \infty} E(|X_n - X|^r) = 0$, alors on dit que $(X_n, n \in \mathbb{N})$ converge en moyenne d'ordre r vers X et on écrit $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{r} X$

1.2.4 Convergence en distribution ou en loi

Définition 1.2.4 Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires de fonction de répartition $F_n(x)$. Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x)$: La suite $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers la variable aléatoire X si, pour toute fonction réelle f , continue, bornée,

$$F_n(f) \rightarrow F(f) \text{ quand } n \rightarrow \infty$$

On note $X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$ La convergence en loi est également définie par la convergence simple des fonctions caractéristiques, soit $\varphi_n(t) \rightarrow \varphi(t)$ pour tout t , où φ_n désigne la fonction caractéristique de X_n et φ celle de X .

Théorème 1.2.1 *de Levy*

On rappelle que la fonction caractéristique φ_μ d'une mesure μ est définie par

$$\varphi_\mu(t) = \int_{\mathbb{R}^d} \exp(itx) d\mu(x)$$

On rappelle aussi que la fonction caractéristique caractérise la loi : si deux mesures de probabilités μ et ν vérifient en tout point t de \mathbb{R}^d : $\varphi_\mu(t) = \varphi_\nu(t)$, alors $\mu = \nu$.

1.2.5 Lien entre les différents modes de convergence

Les résultats suivants font apparaître la relation entre les différents modes étudiés:

i) La convergence presque sûrement implique la convergence en probabilité

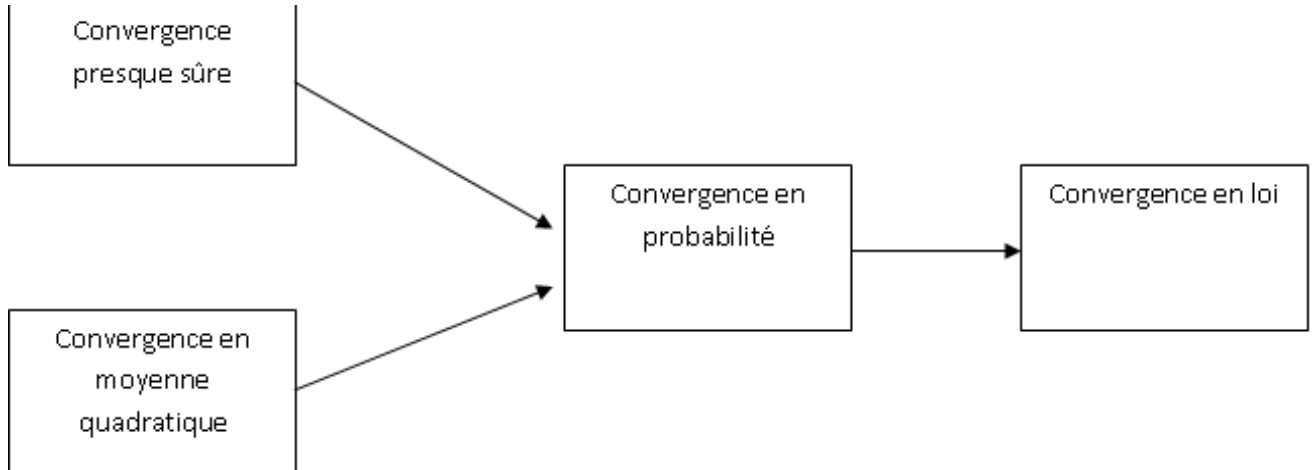
$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

ii) La convergence en moyenne quadratique implique la convergence en probabilité

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{m.q.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X$$

iii) La convergence en probabilité implique la convergence en loi

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} X$$



1.3 Lois des grands nombres

En statistiques, la loi des grands nombres indique que lorsque l'on fait un tirage aléatoire dans une série de grande taille, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus les caractéristiques statistiques de l'échantillon se rapprochent des caractéristiques statistiques de la population. On distingue loi faible et loi forte en fonction du mode de convergence, en probabilité et presque sûre, respectivement.

1.3.1 Loi faible des grands nombres

Théorème 1.3.1 Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendantes, ayant une même espérance $E(X)$ finie et même variance σ^2 finie (carré intégrable). On a alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P} E(X)$$

1.3.2 Loi forte des grands nombres

Théorème 1.3.2 Soit (X_n) une suite de variable aléatoire indépendantes, ayant une même espérance $E(X)$. On a alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow{P.S.} E(X)$$

1.4 Théorème Central limite classique

En statistiques, la somme d'un grand nombre de variables est presque gaussienne, cette approximation est à la base d'un grand nombre de tests statistiques. Indépendamment de la loi initiale d'une variable X , la moyenne de n réalisations suit approximativement une loi normale. On considère en pratique que $n \geq 30$ est suffisant dans la majorité des applications. On peut observer également que bon nombre de phénomènes naturels sont dus à la superposition de causes nombreuses, plus ou moins indépendantes. Il en résulte que la loi normale les représente de manière raisonnablement efficace. À l'inverse, on peut dire qu'aucun phénomène concret n'est vraiment gaussien car il ne peut dépasser certaines limites

Si $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variable aléatoire. équidistribuées, indépendantes définies sur l'espace (Ω, F, P) formé d'un ensemble Ω , d'une tribu ou σ -algèbre F sur Ω et d'une mesure P sur cette σ -algèbre a valeur dans \mathbb{R} , on suppose que $\mu = E(X_n) \leq \infty$ et que $\sigma^2 = V(X_n) < \infty$ alors,

$$\frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{D}} \mathcal{N}(0; 1)$$

1.5 Théorème Central limite généralisé

Le théorème central limite admet plusieurs généralisations qui donnent la convergence de sommes de variables aléatoires sous des hypothèses beaucoup plus faibles. Ces généralisations ne nécessitent pas des lois identiques mais font appel à des conditions qui assurent qu'aucune des variables n'exerce une influence significativement plus importante que les autres. Telles sont la condition de Lindeberg et la condition de Lyapounov. D'autres généralisations autorisent même une dépendance « faible ». De plus, une généralisation due à Gnedenko et Kolmogorov stipule que la somme d'un certain nombre de variables aléatoires avec une queue de distribution décroissante selon $1/|x|^{\alpha+1}$ avec $0 < \alpha < 2$ (ayant donc une variance infinie) tend vers une loi de Lévy tronquée symétrique et stable quand le nombre de variables augmente

1.5.1 Cas des variables aléatoires indépendantes (non nécessairement indépendantes, identiquement distribués)

Formellement soit $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires indépendantes définies sur l'espace (Ω, F, P) à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que $\mu = E(X_n) \leq \infty$ et que $\sigma_n^2 = E(X_n^2) < \infty$ et on pose $S_n^2 = \sum_{k=1}^n \sigma_k^2$.

Théorème 1.5.1 (*Lyapunov*)

S'il existe $\delta > 0$ telque:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n^{2+\delta}} \sum_{k=1}^n E(|X_k - \mu_k|^{2+\delta}) = 0$$

alors:

$$\frac{(X_1 - \mu_1) + \dots + (X_n - \mu_n)}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$$

Théorème 1.5.2 (*Lindeberg*)

Si

$$\forall \varepsilon, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{S_n^2} \sum_{k=1}^n E [(|X_k - \mu_k|) 1_{|X_k - \mu_k| > \varepsilon S_n}] = 0$$

alors:

$$\frac{(X_1 - \mu_1) + \dots + (X_n - \mu_n)}{S_n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} N(0, 1)$$

1.5.2 Cas des variables aléatoires à variance infinie

Pour ce cas, nous avons des variables aléatoires X_n indépendantes et identiquement distribuées avec des variances infinies.

Soit a_n, b_n une suites de constante positifs, $\frac{(X_1 + X_2 + \dots + X_n - b_n)}{a_n}$ converge en distribution vers une distribution stable .

Soit X_0, X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes, identiquement distribuées (iid). La répartition de ces variables aléatoires est appelée stable si pour tout couple de nombres réels positifs a et b , il existe un réel positif c , et d tel que $cX_0 + d$ a la même distribution que $aX_1 + bX_2$.

Les distributions stables peuvent être spécifiées par quatre paramètres .L'un des quatre paramètres est l' exposant de stabilité α tel que $0 < \alpha \leq 2$. Ce paramètre contrôle l'épaisseur des queues de distribution. Les distributions avec $\alpha = 2$ sont les distributions normales (gaussiennes). Pour $\alpha < 2$, la densité est asymptotiquement proportionnelle à $|x|^{-\alpha-1}$ et la fonction de répartition est asymptotiquement proportionnelle à $|x|^{-\alpha}$ quand $x \rightarrow \pm\infty$. Et à l'exception de la distribution normale, toutes les distributions stables ont des queues épaisses et la variance n'existe pas.

1.6 Théorie des valeurs extrêmes

Depuis quelques années, la modélisation des événements extrêmes (ouragan, tremblement de terre ou inondation, crues, crises financières, krachs, chocs pétroliers) est devenue un champ de recherche particulièrement actif, notamment par l'importance de leurs impacts économiques et sociaux. Aucun débat sérieux sur le hasard ne saurait mener sans une réflexion sur les événements rares et extrêmes, Lorsque ces événements sont le fruit du hasard, on peut étudier leur loi même si ce n'est pas toujours évident à mettre en œuvre. Pour étudier la modélisation de ces événement on fait recours a la théorie des valeurs extrêmes (*TVE*), qui a pour objectif de fournir les outils probabilistes et statistiques.

Prévoir certains événements ou comportements, à partir d'une étude des valeurs extrêmes d'une série, est donc un des principaux objectifs pour ceux qui tentent d'appliquer la théorie de ces valeurs. Cette théorie est apparue entre 1920 et 1940, grâce à Fréchet, Fisher et Tippett, Gumbel et Gnedenko. Lorsque l'on modélise le maximum d'un ensemble de variables aléatoires, alors sous certaines conditions que nous préciserons plus loin, la distribution ne peut appartenir qu'à l'une des trois lois suivantes: Weibull (à support borné), Gumbel et Fréchet (à support non borné). Ces trois lois définissent une famille de distributions statistiques appelée « famille parétienne ». Pareto s'intéresse à la distribution des revenus dans une économie donnée. Il a constaté que les revenus se répartissent toujours selon une loi mathématique décroissante d'allure entre une petite minorité de riches, une classe moyenne minoritaire, et une large majorité de pauvres. Il a montré que plus que les revenus sont élevés, plus la queue de distribution des revenus sera hyperbolique. Cette forme d'hyperbole permet une modélisation précise de la queue de distribution des revenus, et donc permet de bien décrire l'impact des grands revenus sur le revenu moyen.

Il est à noter également que les distributions α -stables de Lévy, introduites pour la première fois en finance par Mandelbrot [17], constituent une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter différentes asymétries et des queues très lourdes. Une distribution stable possède la propriété suivante: la queue de distribution d'une loi stable décroît selon une loi de Pareto.

De nombreuses études statistiques ont été réalisées sur les marchés depuis les travaux de Mandelbrot [17]. Toutefois, l'absence de formules explicites des densités de ces distributions a limité leur utilisation.

Les distributions de cette classe, ont un comportement asymptotique de Pareto avec $0 < \alpha \leq 2$. Lorsque $\alpha = 2$ on retrouve la loi Normale, cependant pour $\alpha < 2$ le moment d'ordre $r \geq 2$ n'est pas fini, ces distributions ont donc une variance infinie, et par conséquent une queue très lourde.

La théorie des valeurs extrêmes permet d'évaluer les événements rares et les pertes associées à leur apparition. En d'autres termes lorsqu'une perte importante survient, cette théorie permet d'en évaluer l'ampleur. Les résultats théoriques sur le comportement stochastique des extrêmes d'échantillon qu'offre la théorie des valeurs extrêmes permettent de proposer un cadre mathématique rigoureux pour réaliser de telles extrapolations. De plus, cette théorie acquiert une importance particulière du fait qu'elle s'intéresse directement à la queue de la loi. En fait, seules les données extrêmes sont utilisées pour estimer les paramètres des modèles de la *TVE* ce qui assure un meilleur ajustement du modèle à la queue de la loi et donc une meilleure estimation de la valeur à risque.

Enfin, l'étude et la modélisation des ces extrêmes est d'importance capitale. En effet la performance d'un investisseur, d'une banque ou d'une entreprise sur une période donnée est souvent le fait de quelques journées exceptionnelles, la plupart des journées d'activité ne contribuant que marginalement au résultat. Ainsi, on peut tenter de modéliser l'incidence des chocs ou de tensions extrêmes sur les portefeuilles des investisseurs sur le marché.

1.6.1 Loi des valeurs extrêmes

La théorie des valeurs extrêmes a pour but d'étudier la loi du maximum d'une suite des variables aléatoires réelles même si, et spécialement si, la loi du phénomène n'est pas connue. Formellement, considérons (X_1, X_2, \dots, X_n) une suite de n variables aléatoires variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (*i.i.d*) de fonction de répartition F définie par:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

Pour étudier le comportement extrême des événements, on considère la variable aléatoire $M_n = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$ le maximum d'un échantillon de taille n .

Comme les variables aléatoires sont indépendantes et identiquement distribuées, alors la fonction de répartition de M_n est donnée par

$$F_{M_n}(x) = P(M_n \leq x) = (F(x))^n \quad (1.1)$$

La formule (1.1) présente un intérêt très limité. De plus, la loi d'une variable aléatoire parente X est rarement connue avec précision et, même si la loi de cette variable parente X est connue avec exactitude, la loi du terme maximum n'est pas toujours facilement calculable. Pour ces raisons, il est intéressant de considérer les comportements asymptotiques du maximum convenablement normalisé.

la distribution asymptotique du maximum en faisant tendre n vers l'infini. On a :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_{M_n}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} [F_X(x)]^n = \begin{cases} 0 & \text{si } F(x) < 1 \\ 1 & \text{si } F(x) = 1 \end{cases}$$

Définition 1.6.1 (*lois de même type*).

On dit que deux variables aléatoires réelles X et Y sont de même type, s'il existe des constantes réelles $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ tel que $Y \stackrel{d}{=} aX + b$

C'est à dire: si F et H sont des lois respectives des variables X et Y alors on a $F(ax+b) = H(x)$.

Autrement dit, les variables « de même type » ont la même loi, à un facteur de localisation et d'échelle près.

De façon analogue au théorème central limite, peut-on trouver des constantes de normalisation : a_n et b_n avec $a_n > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et une loi non-dégénérée de loi H telle que:

$$P \left\{ \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right\} = (F(ax + b))^n \rightarrow H(x)$$

Fisher et Tippett trouvent en 1928 une solution à ce problème au moyen d'un théorème qui porte leur nom et qui est l'un des fondements de la théorie des valeurs extrêmes.

Théorème 1.6.1 (de Fisher-Tippett ou théorème des 3 types extrêmes)

S'il existe deux suites de constantes de normalisation avec $a_n > 0$ et $b \in \mathbb{R}$ et une loi non-dégénérée de loi H telle que :

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} H$$

Alors H appartient à un des types de distributions suivantes :

Fréchet :

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \alpha > 0 \end{cases}$$

Weibull:

$$H_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & \text{si } x \leq 0, \alpha > 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Gumbel :

$$H(x) = \exp\{-e^{(-x)}\}, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha = 0$$

Ces trois distributions du théorème (1.6.1) sont appelées les distributions de valeur extrême. Ils sont valables si et seulement si les séquences a_n et b_n existent et admettent une limite.

Le paramètre $\xi = \frac{1}{\alpha}$ appelé exposant des valeurs extrêmes (Extreme Value Index) détermine le type de distribution selon son signe, il désigne la forme de la distribution (paramètre de forme). α est appelé l'exposant de queue (tail index).

Nous obtenons ainsi les trois types de domaines suivants :

-si $\alpha > 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de FRECHET.

-si $\alpha < 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de WEIBULL.

-si $\alpha = 0$, on dit que F appartient au domaine d'attraction de GUMBEL.

Le graphe suivant représente les densités associées aux trois distributions précédentes.

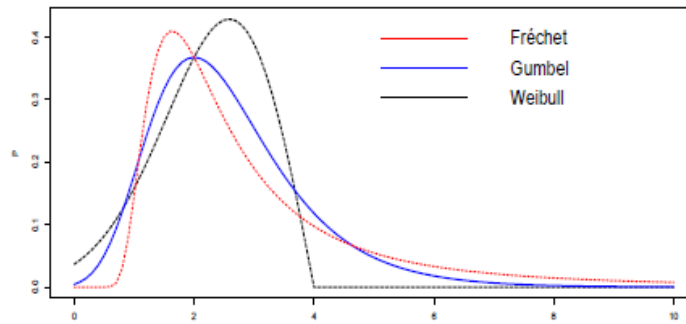


Fig. 1.2-Distributions des valeurs extrêmes

1.6.2 Caractérisation de domaine d'attraction

Pour que la fonction F appartienne à l'un des domaines d'attraction, on doit faire appel à la notion des fonctions à variation régulière et à définir le point terminal de la fonction de répartition F .

On dit qu'une fonction f est à variation régulière d'indice α à l'infini si f positive à l'infini, et si pour tout $x > 0$ on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(xt)}{f(t)} = x^\alpha$$

On dit qu'une fonction l est à variation lente à l'infini si $l(x)$ pour x assez grand on a :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{l(xt)}{l(t)} = 1$$

La variation régulière des queues des distributions apparaît comme un état naturel dans plusieurs résultats théoriques de la théorie des probabilités. Parmi ces résultats on cite à titre indicatif les lois stables, le domaine d'attraction.

1.6.3 Domaine d'attraction maximum

La variable aléatoire X est dans le domaine d'attraction maximum de la fonction de répartition H si:

$$\exists a_n > 0 \text{ et } b_n \in \mathbb{R} \text{ tel que } \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{D} H$$

On peut caractériser le domaine d'attraction maximum de chacune des fonctions de répartition limites du théorème (1.6.1).

Domaine d'attraction de Fréchet ($\alpha > 0$)

Ce domaine regroupe l'ensemble des lois à queue lourdes (aussi dite à queue épaisse), c'est à dire la vitesse à laquelle la probabilité des grandes valeurs décroît est lente de type puissance (lorsque $x \rightarrow \infty$)

$$1 - F(x) = x^{-\alpha}L(x)$$

où $L(x)$ est une fonction à variation lente.

Plus l'indice de queue est élevé en valeur absolue, plus le poids des extrêmes dans la distribution est important.

Ces distributions ont des queues épaisses, les moments d'ordre supérieurs à α n'existent pas ce qui signifie que pour $\alpha < 2$, la variance est infinie et pour $\alpha \leq 1$, l'espérance aussi est infinie.

Dans le domaine d'attraction de Fréchet on trouve par exemple les lois suivantes :

- la distribution de Pareto :

$$1 - F(x) \approx Cx^{-\alpha}, x \rightarrow \infty$$

- La loi de Cauchy,

- la loi de Student,

-les distributions α -stables avec $\alpha > 2$.

Domaine d'attraction de weibull ($\alpha < 0$)

On trouve l'ensemble des lois à queue finie c'est à dire bornée.

On dit que F appartient au domaine d'attraction de Weibull si et seulement si $x_F < +\infty$ et la fonction $F(x_F - x^{-1})$ est à variation régulière d'indice α :

Dans ce cas, un seul choix pour les suites a_n et b_n :

$$b_n = x_F - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \text{ et } a_n = x_F$$

où: x_F désigne le quantile d'ordre 1 de la loi de fonction de répartition F .

La fonction F doit vérifier ainsi :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 - F(xt)}{1 - F(t)} = x^\alpha$$

Où la fonction de variation est définie par :

$$1 - F(x_F - x^{-1}) = x^{-\alpha} L(x)$$

et L est une fonction à variation lente

Dans le domaine de Weibull on trouve par exemple :

- la loi uniforme sur $[0, 1]$,
- la loi Bêta.

Domaine d'attraction de Gumbel($\alpha = 0$)

C'est l'ensemble des lois à queue légère, c'est-à-dire la vitesse à laquelle la probabilité des grandes valeurs décroît rapidement de type exponentielle.

La caractérisation du domaine d'attraction de Gumbel est la plus délicate. Il n'existe pas une condition nécessaire et suffisante simple.

Dans le domaine d'attraction de Gumbel, on trouve par exemple les lois suivantes :

- Exponentielle
- Normale
- Gamma
- lognormal, Weibull,...

L'estimation de l'indice des valeurs extrêmes, semble très importante pour localiser le domaine d'attraction susceptible d'accueillir au mieux un échantillon de données dont on ne connaît pas la loi de probabilité.

1.7 Distributions à queue lourde

Les distributions à queues lourdes sont liées à la théorie des valeurs extrêmes et permettent de modéliser plusieurs phénomènes rencontrés dans différentes disciplines : finances, hydrologie, télécommunication, géologie...

Plusieurs définitions ont été associées à ces distributions en fonction du critère de classification. La caractérisation la plus simple est celle basée sur la comparaison avec la loi normale : On dit, alors, qu'une distribution a la queue lourde si :

$$C_k = E \left[\frac{(X - \mu_x)^4}{\sigma_x} \right] > 3$$

Ce qui est équivalent à dire qu'une distribution a une queue lourde si et seulement si son coefficient d'aplatissement, C_k , est supérieur à celui de la loi Normale (pour laquelle $C_k = 3$)

La caractérisation, donnée par l'équation précédente, est très générale et ne peut être appliquée que si le moment d'ordre 4 existe. Par conséquent, aucune discrimination, pour les distributions ayant un moment d'ordre 4 infini, ne peut être faite si on ne considère que ce critère. Malheureusement, il n'y a pas de critère pour classer toutes les distributions selon la queue droite. Cependant, on obtient un tel classement pour certaines classes de distributions.

1.7.1 Classes de distributions à queues lourdes

- les distributions avec des moments exponentiels inexistantes (**E**),
- les distributions Subexponentielles (**D**),
- les distributions à variations régulières (**C**),
- les distributions avec un comportement de Pareto (**B**) et
- les distributions α -Stables avec $\alpha < 2$, (**A**).

Toutes ces classes sont emboîtées : $A \subset B \subset C \subset D \subset E$ et peuvent être représentées selon la figure suivante (Werner et Upper, 2002)

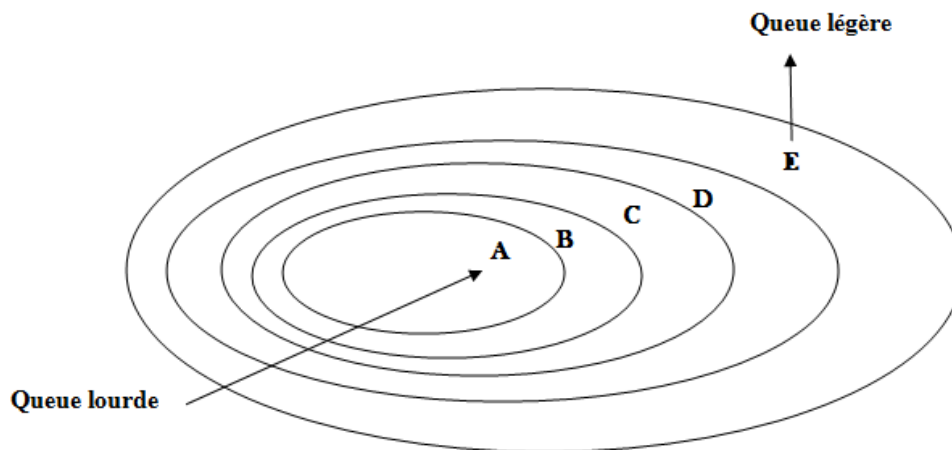


Fig. 1.3-Différentes classes de distributions de queue très légère (**E**) à très lourde (**A**)

- **Distributions avec des moments exponentiels inexistantes**

La classe **E** contient toutes les distributions telles que $E(\exp^X) = \infty$. On note que la loi Normale n'appartient pas à cette classe parce que la probabilité au dépassement, \bar{F} , pour les extrêmes de cette classe, décroît moins rapidement que celle de la loi normale. Dans ce sens, la classe E est celle des distributions ayant une queue plus lourde que celle de la loi normale.

- **Distributions Subexponentielles**

La classe D des distributions subexponentielles est caractérisée par la définition suivante (Beirlant et al. 2004): On dit qu'une distribution est subexponentielle si :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{P(X_1 + \dots + X_n > x)}{P(\max(X_1, \dots, X_n) > x)} = 1$$

C'est équivalent à dire que la somme de n distributions subexponentielles (indépendantes et identiquement distribuées (*iid*)) est extrême si et seulement si leur maximum est extrême.

La classe D contient les distributions telles que F décroît plus lentement que n'importe quelle loi exponentielle.

- **Distributions à variations régulières d'indice $\alpha > 0$**

La classe C , des distributions à variations régulières, est une sous classe des distributions Subexponentielles (Goldie et Klüppelberg 1998). Ces distributions satisfont la condition suivante (Embrechts, Klüppelberg et Mikosch 1997):

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(tx)}{\overline{F}(t)} = x^{-\alpha}$$

Ce qui est équivalent à dire que, en ce qui concerne les valeurs extrêmes (t tend vers l'infini) la distribution a le même comportement que celui de la loi de Pareto. Par conséquent, la probabilité au dépassement des extrêmes décroît suivant une fonction puissance. Le paramètre α est appelé « l'indice des valeurs extrêmes » (Tail index).

La classe des distributions à variations régulières est liée à la théorie des valeurs extrêmes. En effet, la théorie des valeurs extrêmes est basée sur le théorème de Fisher-Tippett (Fisher et Tippett 1928) qui permet de déterminer la distribution du maximum d'un échantillon de n variables indépendantes et identiquement distribuées (*iid*).

- **Comportement de Pareto avec $\alpha > 0$**

La classe B est celle des distributions ayant le comportement de Pareto. La distribution de Pareto est définie à partir de sa fonction de distribution :

$$F(x) = 1 - u^\alpha x^{-\alpha} = 1 - \left(\frac{u}{x}\right)^\alpha, \quad x \geq u \quad \text{et} \quad u > 0$$

Les fonctions de probabilité au dépassement \bar{F} , des distributions de la classe \mathbf{B} , sont de la forme $u^\alpha x^{-\alpha}$. L'indice des valeurs extrêmes peut être caractérisé à partir des moments des distributions de type Pareto. En effet, la fonction de densité de probabilité d'une loi de Pareto est :

$$f_{pareto}(x) = \alpha u^\alpha \int_u^\infty x^{k-\alpha-1} dx$$

Et les moments d'ordre k sont donnés par :

$$E[X^k] = \alpha u^\alpha \int_u^\infty x^{k-\alpha-1} dx$$

Par conséquent, seuls les moments d'ordre k , tels que $k < \alpha$, sont finis pour ce type de distributions.

• Distributions α -Stables

La propriété précédente est importante pour définir la classe \mathbf{A} , la classe des distributions α -Stables (appelées aussi distribution stables). Les distributions stables constituent une classe très riche de lois de probabilité capables de représenter différentes asymétries et des queues très lourdes. Cette classe a été caractérisée par Lévy (1925) dans ces travaux sur la somme de variables indépendantes et identiquement distribuées (*iid*). L'absence de formules explicites des densités de ces distributions a limité leur utilisation. Les distributions de cette classe ont un comportement asymptotique de Pareto avec $0 < \alpha \leq 2$. Lorsque $\alpha = 2$ on retrouve la loi Normale, cependant pour $\alpha < 2$ le moment d'ordre $r \geq \alpha$ n'est pas fini, ces distributions ont donc une variance infinie, et par conséquent une queue très lourde. Pour $\alpha = 1$ on retrouve la loi de Cauchy (avec une moyenne et une variance infinies). Cette classe a une grande importance dans la théorie des valeurs extrêmes, puisque les distributions stables peuvent être caractérisées à partir du théorème de la Limite Centrale Généralisé. En effet, le théorème de la limite centrale indique que la somme de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de variance finie tend vers une distribution normale lorsque n tend vers l'infini. Une généralisation de ce théorème par Gnedenko et Kolmogorov (1954) indique que si la condition de variance finie n'est pas respectée, la seule loi limite possible de

la somme de n variables aléatoire (*iid*), est une loi stable. L'utilisation de cette famille de distributions était très limitée à cause des problèmes de calcul : leurs fonctions de densité de probabilité et de distributions n'étant pas explicites. Récemment plusieurs logiciels ont été proposés pour permettre la résolution de ces problèmes (Nolan 2001, 2006), et on trouve des applications des distributions Stables dans plusieurs domaines tels que finances, physique et le trafic Internet.

Ils existent plusieurs définitions concernant les distributions à queues lourdes, mais on peut considérer la définition simple suivante:

Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition, on dit que X est à queue lourde s'il existe un paramètre positif $\alpha \geq 0$ tels que:

$$\bar{F}(x) = p[X > x] \sim x^{-\alpha}, x \rightarrow \infty$$

α est appelé l'exposant de queue (tail index). La queue est d'autant plus épaisse que α est petit.

$\xi = 1/\alpha$ sera appelé l'exposant des valeurs extrêmes (Extrême Value Index).

Les moments d'ordre k ne sont définis que pour $k < \alpha$, les moments d'ordre $k \geq \alpha$ sont infinis : Par exemple, si $\alpha < 4$, la kurtosis est infinie, si $\alpha < 2$, la variance est infinie.

On peut affiner l'allure de la queue, en précisant que:

$$F(x) = x^{-\alpha} I(x)$$

Avec I une fonction à variation lente

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{I(tx)}{I(x)} = 1$$

1.7.2 Exposants de queues pour des lois connues

- Pareto : l'exposant est α

$$F(x) = x^{-\alpha}$$

- la loi de t-Student a un exposant de queue égal au degré de liberté:

$$f(x) \approx \left(1 + \frac{x^2}{\alpha}\right)^{-(\alpha+1)/2}$$

$$F(x) \approx \frac{\alpha - 1}{2} x^{-\alpha}$$

- la loi de Cauchy a un exposant de queue égal à 1. La moyenne et la variance, ainsi que tous les autres moments sont infinis

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Dans ce travail, on s'intéresse à définir la classe à queue très lourde (**A**) qui est la famille des lois alpha stables. Pour cela on va consacrer tout le chapitre suivant pour donner en détail les définitions et les propriétés de cette dernière classe.

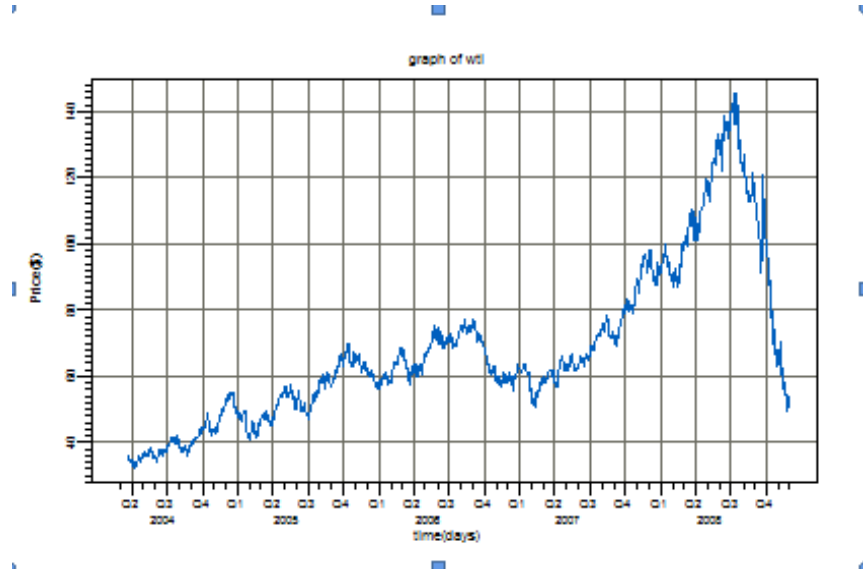
1.8 Processus stochastiques et séries chronologiques

L'objectif majeur des statistiques appliquées, est la mise en œuvre des Modèles statistiques destinés à décrire, représenter ou expliquer divers phénomènes aléatoires rencontrés dans les domaines du savoir humain tels que la physique, la chimie, la biologie, l'économie, la gestion, la sociologie, etc. On entend par modèle stochastique une représentation simplifiée d'un phénomène sous étude. Par ailleurs, L'élaboration d'un modèle de série chronologique est basée sur des outils probabilistes et un système scientifique rigoureux partant de l'observation du phénomène, de son analyse jusqu'à la validation du modèle correspondant. Une fois mis en œuvre, le modèle peut être exploité en vue de résoudre une problématique posée au préalable.

Le modèle de variable aléatoire s'avère ainsi insuffisant pour décrire les phénomènes qui évoluent par rapport à un ensemble renfermant une infinité de membres, parfois non dénombrable. Ainsi, on est amené à considérer plutôt une famille de variables aléatoires, évoluant sur un domaine, et dont chacune est destinée à décrire un moment correspondant de l'évolution du phénomène. Un tel modèle est appelé processus aléatoire ou stochastique.

Un processus stochastique est une famille de variables aléatoires, définies sur un même espace probabilisé (Ω, A, P) et à valeurs dans l'espace (E, F) appelé: espace d'états du processus stochastique. Les processus aléatoires décrivent l'évolution d'une grandeur aléatoire en fonction du temps (ou de l'espace). Il existe de nombreuses applications des processus aléatoires, lorsque le phénomène évolue en fonction du temps, notre processus aléatoire est appelée série chronologique.

Les séries temporelles, appelées aussi séries chronologiques (ou même chroniques), occupent une place importante dans tous les domaines de l'observation ou de la collection de données. Voici un exemple graphique d'une série temporelle qui représente les variations du prix du pétrole:



Les séries temporelles et les mécanismes générateurs que sont les processus, ont une structure. En d'autres termes, les variables aléatoires composant le processus ne sont pas forcément indépendantes les unes des autres mais établissent certaines relations qui donnent à l'ensemble une sorte de structure.

Avant d'aller plus en avant dans l'exploration de cette structure, il convient de se pencher sur les caractéristiques les plus importantes d'un processus aléatoire, on distingue: La moyenne et la variance, l'autocovariance.

1.8.1 Caractéristiques et propriétés des séries chronologiques

La fonction moyenne

On appelle moyenne d'un processus, la fonction définie sur \mathbb{Z} par :

$$\mu_X = E(X_t)$$

La fonction variance

De même, la variance d'un processus est définie sur \mathbb{Z} par :

$$\sigma_X^2 = Var(X_t) = E [(X_t - \mu_t)^2]$$

La fonction d'autocovariance

Soit X_t (notation simplifiée pour $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$), un processus, t et s deux instants. L'autocovariance (ou fonction d'autocovariance) de X_t pour les deux instants t et s est, par définition, la covariance des variables X_t et X_s . L'autocovariance s'écrit γ_y et :

$$\gamma(t, s) = Cov(X_t, X_s) = E [(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)]$$

La fonction d'autocovariance mesure la covariance entre deux valeurs de X_t séparées par un certain délai. Elle fournit des informations sur la variabilité de la série et sur les liaisons temporelles qui existent entre les différentes composantes de la série.

La fonction d'autocorrélation

La notion d'autocorrélation découle de la notion d'autocovariance comme la corrélation de la covariance. Par définition l'autocorrélation (ou le coefficient d'autocorrélation) de la série X_t est :

$$\rho(h) = \frac{\gamma(t, t-h)}{\gamma(t, t)} = \frac{Cov(X_t, X_{t-h})}{\sqrt{Var(X_t)}\sqrt{Var(X_{t-h})}}, \forall h \in \mathbb{Z}$$

La fonction d'autocorrélation satisfait les deux propriétés suivantes:

a) $\rho(h) = \rho(-h), \forall h \in \mathbb{Z}$

Donc on peut dans la pratique se restreindre aux autocorrélations pour $h \geq 0$

b) $\rho(0) = 1 \quad \forall h \in \mathbb{Z}$

$$|\rho(h)| \leq 1$$

Estimation $\hat{\rho}(h) = \frac{\widehat{\gamma(h)}}{\widehat{\gamma(0)}}$

Autocorrélation partielle

La fonction d'autocorrélation partielle d'ordre h mesure la corrélation entre X_t et X_{t-h} lorsque l'influence des variables X_{t-h-i} , avec $i < h$, a été retirée. Notons (h) et les fonctions respectivement d'autocorrélation et d'autocorrélation partielle de X au pas h .

1.8.2 Processus stationnaires

La stationnarité est une propriété particulièrement importante pour l'analyse des processus stochastiques, elle caractérise certaine régularité stochastique dans l'évolution du phénomène étudié.

On dit qu'un processus est stationnaire, si ses caractéristiques ne varient pas avec la définition de l'origine du temps, ou, encore, si ses caractéristiques statistiques ne varient pas le long du temps. Autrement dit, son espérance et sa variance restent stables au cours du temps. On définit plusieurs types de stationnarité.

Processus strictement stationnaire (stationnarité forte)

Soit un processus stochastique $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$, le processus est dit strictement (ou fortement) stationnaire, si $\forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n$ et $\forall h \in \mathbb{Z}, \forall n \in \mathbb{N}^*$: alors la suite

$(X_{t_1+h}, \dots, X_{t_n+h})$ a la même loi de probabilité que la suite $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, autrement dit :

$$P(X_{t_1} \leq x_1, \dots, X_{t_n} \leq x_n) = P(X_{t_1+h} \leq x_1, \dots, X_{t_n+h} \leq x_n),$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{Z}^n, \forall (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \text{ et } h \in \mathbb{Z}$$

Ainsi, un processus aléatoire est strictement stationnaire si toutes ses caractéristiques, c'est à dire ces moments, sont invariants pour tout changement de l'origine du temps. Cette définition de la stationnarité est cependant trop restrictive, c'est pour cela que l'on a défini la stationnarité au second ordre.

Processus faiblement stationnaire (ou du second ordre)

Le processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit faiblement stationnaire si :

- 1. $E(X_t) = \mu$ (Constante), $\forall t \in \mathbb{Z}$
- 2. $var(X_t) = \sigma_x^2 = \gamma_0$ (Constante), $\forall t \in \mathbb{Z}$
- 3. $cov(X_t, X_s) = E[(X_t - \mu_t)(X_s - \mu_s)] = \gamma(h), \forall t \in \mathbb{Z}$

$\gamma(h)$ est la fonction d'autocovariance du processus $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$

La première condition dit, les espérances (les moyennes) des variables X_t sont égales.

La seconde dit, que les moments du second ordre ($|X_t^2|$) et donc que les variables X_t ne doivent pas prendre des valeurs infiniment grandes.

La troisième dit, que la covariance entre deux variables ne dépend que de l'écart entre les instants respectifs de ces variables. Ceci veut dire aussi, que lorsqu'on se déplace sur l'axe du temps, la corrélation entre les variables séparées d'un certain délai est toujours la même.

La stricte stationnarité implique la stationnarité du second ordre à la condition que les moments de second ordre soient finis. La réciproque est fausse.

Les processus stationnaires occupent une place primordiale au sein des analyses de séries temporelles. Cependant, en général, les processus ne sont pas stationnaires. Aussi, pour étudier un processus, il faut le « stationnariser ».

1.8.3 Processus bruit blanc

En science appliquée, le bruit blanc est souvent pris comme idéalisation pour représenter les phénomènes de fluctuations soudaines et extrêmement grandes. Mathématiquement, un bruit blanc est le processus de second ordre faiblement stationnaire le plus simple et le plus utilisé, en analyse des séries chronologiques .

Un processus bruit blanc $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est une suite de variables aléatoires non corrélées de moyenne nulle et de variance constante σ^2 . Un processus bruit blanc est donc caractérisé par la fonction d'autocovariance particulière suivante :

$$\gamma(t) = E(\varepsilon_t \varepsilon_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2, & h = 0 \\ 0, & h \neq 0 \end{cases} \quad \forall t \in \mathbb{Z}$$

Lorsque de plus $\{\varepsilon_t\}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées alors $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit bruit blanc fort.

Remarque 1.8.1 *Les bruits blancs sont des processus stationnaires particuliers sans "mémoire". Le niveau de la série considérée aujourd'hui n'a aucune incidence sur son niveau de demain, tout comme le niveau d'hier n'a aucune incidence sur le niveau d'aujourd'hui.*

1.8.4 Ergodicité

On dira, qu'un processus stationnaire est ergodique si l'on peut calculer l'ensemble de ses caractéristiques (moyenne, variance, fonction d'autocorrélation) à partir d'une seule trajectoire du processus, c'est-à-dire à partir d'une observation du processus et, par conséquent, de façon pratique, à partir de la série temporelle observée suffisamment longtemps. En bref, on décide que la série observée est typique du processus.

Ainsi, par exemple, l'espérance du processus est la limite, quand la durée d'observation tend vers l'infini, de la moyenne des valeurs des observations de la série.

Il existe un ensemble de conditions nécessaires pour qu'un processus stationnaire soit ergodique. Ceci est l'objet de la théorie ergodique.

Avant de définir formellement la notion d'ergodicité, nous donnons d'abord le concept d'invariance d'un espace par rapport à une translation

soit \mathbb{R}^z l'espace de toutes les séquences $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ de nombre réels

i) L'application $T : \mathbb{R}^z \rightarrow \mathbb{R}^z$ est dit opérateur de translation si

$$T(\dots, X_0, X_1, X_2, \dots) = (\dots, X_1, X_2, X_3, \dots)$$

ii) Un sous ensemble $A \subset \mathbb{R}^z$ est dit T -invariant, si $T(A) = A$. autrement dit, le seul espace T -invariant est \mathbb{R} lui même

Un processus stochastique stationnaire $\{X_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est dit ergodique si

$$P((X_1, X_2, X_3, \dots) \in A) = 0 \text{ ou } 1$$

Pour chaque ensemble A T -invariant

L'ergodicité est une propriété importante qui lie les moyennes statistiques et les moyennes temporelles. Un processus aléatoire est ergodique au sens strict, si tous les moments statistiques sont égaux aux moments temporels. Un processus aléatoire est ergodique au sens large (ou du second ordre), s'il y a égalité des moyennes statistiques et temporelles.

Chapitre 2

La famille des lois alpha-stables

2.1 Introduction

La théorie générale des distributions stables a été initiée par Paul Lévy en 1924. Dans son livre Calcul des probabilités, ce dernier consacra tout un chapitre à l'étude et la caractérisation de ces lois. En 1937, Lévy développa une approche nouvelle et plus simple de toute la théorie avec la découverte des lois infiniment divisibles. à partir de ses travaux et ceux d'autres collaborateurs, les lois α -stables se sont progressivement vulgarisées.

Les lois stables sont une famille de lois qui présentent un grand intérêt dans la modélisation de nombreux problèmes physiques. La loi la plus connue de cette famille est la loi normale. La caractéristique la plus importante de ces lois est leur index de stabilité α . Encore appelé exposant caractéristique, ce paramètre compris entre 0 et 2 indique la vitesse de décroissance des queues de distributions. La loi normale, par exemple, correspond à un index de stabilité $\alpha = 2$. C'est la seule loi stable qui ne soit pas à queue lourde.

La loi normale est la première des lois stables ayant fait son apparition et a trouvé immédiatement des applications en théorie des erreurs, puis en physique statistique et dans les autres sciences. La deuxième loi stable qui a paru en physique théorique a été le profil de dispersion de Lorentz d'une raie spectrale connu en théorie des probabilités comme la loi de Cauchy, à savoir, la distribution symétrique stable avec les paramètres $\alpha = 1$ et $\beta = 0$, où β est un paramètre d'asymétrie. La distribution stable de paramètres $\alpha = 1/2$ et $\beta = 1$,

appelée distribution de Lévy, ce sont là les seules lois ayant une expression explicite de la densité.

On présente plus en détail la famille des distributions α -stables. Le seul fait que les lois stables ont une queue de type lourde ou bien asymptotiquement parétienne (pour faire référence à la loi de Pareto) ne suffit pas pour justifier leur importance. La raison profonde provient de la probabilité de stabilité qui affirme que toute combinaison linéaire de variable aléatoire réel α -stables est aussi de loi α -stable. Les lois α -stable ont été appliqué dans plusieurs domaines:

-En astronomie

La première application des distributions α -stable est apparue avant Lévy dans le domaine de l'astronomie, quand Holtsmark a montré que la force gravitationnelle exercée par le système stellaire sur un point de l'univers a une distribution α -stable d'indice $\alpha = 3/2$.

-En Finance

Si on regarde par exemple les courbes boursières représentant l'évolution du prix d'un titre au cours du temps, des périodes hautes s'altèrent à des périodes basses et ainsi de suite. De plus, des fluctuations et des périodes irrégulières peuvent être observées. Mandelbrot s'appuie alors sur la loi de Pareto pour mettre en évidence un nouveau modèle de variation des prix, appelé loi α -stable. Mandelbrot confirme que son modèle décrit de façon réaliste la variation des prix pratiqués sur certaines bourses des valeurs. Par la suite, Fama valide le modèle des lois α -stable sur le prix du marché des actions. A la fin des années 80, plusieurs travaux semblent rejeter le modèle i.i.d α -stable en se retournant vers la remise en question de l'hypothèse d'indépendance ce qui a conduit à la découverte des lois d'échelle ou loi à longue dépendance.

-En Télécommunication

Les premiers travaux effectués pour l'application des lois α -stables en traitement du signal, ont vu le jour durant les années 70 par trois chercheurs des laboratoires de BELL (Chamber, Mallow et Stuck) en prouvant que le modèle α - stable est bien adéquat pour modéliser le bruit des lignes téléphoniques. Ils ont conduit une série de travaux qui ont abouti à plusieurs résultats de références comme le critère de dispersion minimum, filtrage

de Kalman des processus α -stables et l'analyse de plusieurs algorithmes d'estimation et de détection dans un bruit non gaussien.

En 1993, Shao et Nikias ont publié dans IEEE Magazine un article qui a introduit la méthodologie de traitement du signal dans un environnement α -stable. Plus tard, l'intérêt à ce thème devient publique et plus de 120 article de revue et de conférence sont apparus dans plusieurs applications de ce modèle. D'autres applications sont beaucoup plus récentes, dans l'Internet par exemple, le temps d'apparition d'une page Web est très variable, ce qui rappelle certains modèles à variance infinie. Dans ce contexte, Adler, Feldman, et Taqqu donnent divers exemples d'application des lois à queues lourdes et en particulier les distributions α -stables. Par ailleurs, en 1999 une conférence internationale sur le sujet "application of Heavy-Tailed Distributions in Statistics, Engineering and Economic" était organisée. Quelques mois plus tard, durant la conférence IEEE Higher order statistics workshop, une session spéciale était consacrée au sujet. En 2000, la conférence ICASSP (International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing) aussi consacre une session spéciale au sujet. Récemment en 2002, un numéro spécial du journal "Signal Processing" est dédié aux modèles à queues lourdes et leurs applications en Radar, images, vidéo et en analyse des données télégraphiques.

-D'une Manière Générale

Notons toutefois que même si le modèle i.i.d α -stables n'est pas toujours approprié, il représente un bon compromis entre exactitude de modélisation et complexité d'inférence statistique. Plusieurs livres sont consacrés à ces lois: Zolotarevs qui a étudié les lois α -stables dans le contexte univarié; Samorodnitsky et Taqqu qui ont étudié de manière approfondie beaucoup de propriétés de ces lois dans le cas univarié comme dans le cas multivarié, Nikias et Shao qui ont appliqué ces lois dans le domaine du traitement du signal et Nolan pour une étude de point de vue implémentation et l'intérêt que représente cette famille de distributions, il reste bien beaucoup de question à creuser.

2.2 Loix infiniment divisibles

Avant de définir les lois α -stables, nous allons introduire une famille de lois plus générale, Il s'agit des lois infiniment divisibles, à partir desquelles sera précisée la forme de la fonction caractéristique des lois stables. L'intérêt principal de telles lois réside dans la solution du problème suivant: Déterminer la classe des distributions qui s'expriment comme limite d'une somme de n variables aléatoires réelles (v.a.r) indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d)?

Définition 2.2.1 *On dit qu'une variable aléatoire X est infiniment divisible si, pour tout $n \geq 1$, on peut trouver des variables aléatoires X_1, \dots, X_n indépendantes de distribution commune telles que*

$$X \stackrel{D}{=} X_1 + \dots + X_n \quad (2.1)$$

où $\stackrel{D}{=}$ signifie l'égalité en distribution

Il faut noter que les variables aléatoires réels X_i n'ont pas forcément la même loi que X mais elles appartiennent à la même classe de distributions.

La classe des variables aléatoires réelles infiniment divisible permet de résoudre le problème ci-dessus. En effet, on a le théorème suivant:

Une variable aléatoire réelle X est la limite d'une somme de variables aléatoires réelles indépendantes et identiquement distribuées, si et seulement si X est infiniment divisible.

Une des caractérisations des lois infiniment divisibles est que leur fonction caractéristique peut s'écrire comme puissance $n^{\text{ème}}$ d'une autre fonction caractéristique, ce qui donne:

$$\varphi_x(t) = [\varphi_{x_n}(t)]^n$$

Beaucoup de lois connues sont infiniment divisibles. Si une variable aléatoire réelle X suit :

- la loi normale $N(m, 2)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_x(t) &= \exp\left\{imt - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\} \\ \varphi_x(t) &= \left[\exp\left\{i\frac{m}{n}t - \frac{t^2\sigma^2}{2}\right\}\right]^n\end{aligned}$$

Comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi normale $N\left(\frac{m}{n}, \frac{\sigma^2}{n}\right)$.

- La loi de Cauchy $C(c)$: sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_x(t) &= \exp(-c|t|) \\ &= \exp\left[\left(-\frac{c}{n}|t|\right)\right]^n\end{aligned}$$

Comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy $C\left(\frac{c}{n}\right)$

- La loi de Poisson $P(\lambda)$, sa fonction caractéristique s'écrit

$$\begin{aligned}\varphi_x(t) &= \exp\{\lambda(\exp(it) - 1)\} \\ &= \left[\exp\left\{\frac{\lambda}{n}(\exp(it) - 1)\right\}\right]^n\end{aligned}$$

Comme puissance $n^{\text{ème}}$ de la fonction caractéristique d'une loi de Poisson $P\left(\frac{\lambda}{n}\right)$

Pour se rapprocher du théorème de la limite centrale et afin d'avoir une forme explicite de la fonction caractéristique, nous allons définir une famille de lois dont les propriétés seront intéressantes.

2.3 Caractérisation des lois stables univariées

L'intérêt des mathématiciens pour les sommes de variables aléatoires indépendantes se voit clairement dans des résultats bien connus de la théorie des probabilités, tels que la loi des grands nombres ou le théorème limite centrale. C'est aussi l'étude de ces sommes qui a permis la caractérisation des lois dites α -stables (ou simplement stables). L'écriture $\stackrel{d}{=}$ indique une égalité en distribution.

2.3.1 Quelques définitions

Définition 2.3.1 Une variable aléatoire X est dite stable si a, b deux nombres réels positifs et X_1, X_2 deux variables aléatoires indépendantes de même loi que X . Il existe $c \in \mathbb{R}^+$ et $d \in \mathbb{R}$ qui satisfont :

$$aX_1 + bX_2 \stackrel{D}{=} cX + d \quad (2.2)$$

Cette définition montre que la famille des lois stables est préservée par convolution, d'où cette notion de stabilité. On peut utiliser une autre définition des variables aléatoires stables, équivalente à la première.

Définition 2.3.2 Une variable aléatoire X est dite stable si, pour tout entier non nul n , il existe des constantes $a_n > 0$ et b_n telles que

$$\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{D}{=} a_n X + b_n \quad (2.3)$$

Lorsque $b_n = 0$, on parle de distribution strictement stable.

Les constantes de normalisation sont de la forme $a_n = n^{1/\alpha}$ avec $0 < \alpha < 2$. La démonstration est détaillée dans Feller (1971, pages 166 – 167) [7]. La constante α est appelée index de stabilité ou exposant caractéristique de X . La variable X est alors dite α -stable.

Cette définition montre qu'une variable aléatoire stable possède un domaine d'attraction. Cela veut dire, qu'il existe une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées *i.i.d.* $\{X_i\}$ $i \in \mathbb{N}$, une suite de réels positifs $\{a_n\}$ et une suite de réels $\{b_n\}$, telles que:

$$\frac{1}{a_n} \left(\sum_{i=1}^n X_i - b_n \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{D} X$$

Les lois stables sont les seules lois qui peuvent être obtenues comme limites de sommes normalisées de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, et par conséquent les seules ayant un domaine d'attraction. La définition (2.2.1) généralise le théorème limite centrale. Nous le voyons facilement à travers le théorème suivant, dû à Paul Lévy.

Définition 2.3.3 Soient X_1, \dots, X_n , des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, pour tout entier strictement positif n , $a_n > 0$ et b_n des constantes telles que

$$P \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n X_i - b_n}{a_n} < x \right\} \rightarrow G(x), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.4)$$

pour une fonction $G(x)$ qui est non dégénérée (c'est-à-dire qu'elle n'est pas réduite à un point). Alors la fonction $G(x)$ est associée à une loi stable.

Supposons que les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont de moyenne μ , de variance $\sigma^2 < \infty$. En posant $a_n = \sigma\sqrt{n}$ et $b_n = n\mu$ dans (2.4), nous retrouvons le théorème limite centrale habituel. Ce résultat fait de la loi normale un membre de la famille des lois stables. Cette loi correspond à un index de stabilité $\alpha = 2$.

Remarque 2.3.1 Le terme «stable» se réfère à la propriété que la somme des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées ont la même distribution que l'original

2.3.2 La fonction caractéristique

En général, les Variables Aléatoires Réelles continues sont définies par leur densité f . Les lois stables sont définies par leur fonction caractéristique φ_x (qui dépend de 4 paramètres) car, dans le cas des lois alpha stables, la transformée de Fourier inverse ne donne pas une expression simple de la densité f .

La fonction caractéristique joue un rôle central dans la théorie des lois stables. Dans la pratique, l'avantage principal de l'utilisation des fonctions caractéristiques ressort de cette propriété : la fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est simplement égale au produit des fonctions caractéristiques de chacune des variables aléatoires intervenant dans cette somme. Dans le théorème suivant, qui a aussi valeur de définition, nous reprenons la formulation canonique proposée par Lévy et Khintchine.

Théorème 2.3.1 (*Levy-Khinchin*)

Une variable aléatoire X a une distribution stable si et seulement s'il existe quatre paramètres uniques: $0 < \alpha \leq 2, \gamma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1$, et un réel μ tel que la fonction caractéristique de X s'écrit sous la forme:

$$\varphi_X(t) = Eexp\{itX\} = exp\{i\mu t - \gamma|t|^\alpha [1 + i\beta sign(t)\omega(t, \alpha)]\} \quad (2.5)$$

Où

$$\omega(t, \alpha) \begin{cases} -\tan\frac{\pi\alpha}{2} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ \frac{2}{\pi}\ln|t| & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

Avec t un réel, et

$$sign(t) \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Autrement dit:

$$\begin{aligned} \text{-si } \alpha = 1 \quad \varphi_X(t) &= Eexp\{itX\} = exp\{i\mu t - \gamma|t| [1 + i\beta sign(t)\frac{2}{\pi}\ln|t|]\} \\ \text{-si } \alpha \neq 1 \quad \varphi_X(t) &= Eexp\{itX\} = exp\{i\mu t - \gamma|t|^\alpha [1 - i\beta sign(t)\tan\frac{\alpha\pi}{2}]\} \end{aligned}$$

L'interprétation des quatre paramètres est donnée par :

- α paramètre principal $0 < \alpha \leq 2$: Le paramètre α est appelé exposant caractéristique ou index de stabilité. Il caractérise les queues de distribution car Il détermine la vitesse de décroissance de la queue de distribution, c'est-à-dire que plus α diminue, plus les queues sont lourdes. C'est pourquoi on parle aussi de lois α stables.

- β est le paramètre d'asymétrie, $-1 \leq \beta \leq 1$: Lorsque $\beta > 0$ ($\beta = 1$) la distribution de X est dite asymétrique (totalement asymétrique) à droite et lorsque $\beta < 0$ ($\beta = -1$)

on dit que la distribution de X est asymétrique (totalement asymétrique) à gauche. Quand $\beta = 0$, la distribution de X est symétrique par rapport à μ . Si de plus, $\mu = 0$, la loi est dite symétrique alpha-stable, de fonction caractéristique $\varphi_X(t) = \exp\{-\gamma|t|^\alpha\}$.

- μ est le paramètre de position : Il caractérise la moyenne de la loi (lorsque $\alpha > 1$).

- γ est le paramètre de dispersion ou paramètre d'échelle, il mesure la dispersion de la distribution autour du paramètre de position μ . lorsque $\alpha = 2$, la variance existe et $\gamma = \frac{1}{2}var(x) = \frac{\sigma^2}{2}$

Par convention, $X \stackrel{suit}{\sim} S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ représentera une loi stable de paramètres $\alpha, \mu, \beta, \gamma$ et $X \stackrel{suit}{\sim} S_\alpha S(\gamma)$ une loi symétrique alpha-stable de paramètre γ . Enfin, il est assez courant dans la littérature de définir la fonction caractéristique de cette loi par $\varphi_X(t) = \exp\{-\sigma^\alpha|t|^\alpha\}$.

Remarque 2.3.2 *Il existe dans la littérature plusieurs paramétrisations des distributions α -stables. La plus connue est celle décrite par Samorodnitsky et Taqqu [25]. Cependant, la plus utilisée semble être celle définie par Zolotarev [27].*

2.3.3 Différentes formes de paramétrisations

La paramétrisation Samorodnitsky and Taqqu est celle de l'équation (2.5). D'autres formes de représentations existent et sont utilisées. On se réfère à la paramétrisation de Zolotarev donnée par:

$$\begin{aligned} \text{-si } \alpha = 1 & \quad \varphi_X(t) = Eexp\{itX\} = exp\{i\mu t - |\gamma t| \left[1 + i\beta \frac{2}{\pi} sign(t) \ln |t|\right]\} \\ \text{-si } \alpha \neq 1 & \quad \varphi_X(t) = Eexp\{itX\} = exp\{i\mu t - |\gamma t|^\alpha \left[1 - i\beta \tan \frac{\alpha\pi}{2} sign(t)(|t|^{1-\alpha} - 1)\right]\} \end{aligned}$$

La paramétrisation proposée par Samorodnitsky et Taqqu n'offre pas la continuité de la fonction caractéristique aux points où $\alpha = 1$ et $\alpha = 0$, alors que celle de Zolotarev est continue par rapport à tous les paramètres. Pour cette raison calculatoire, la paramétrisation de Zolotarev est utilisée couramment.

Notation 2.3.1 $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ Ou $X \stackrel{D}{=} S(\alpha, \mu, \beta, \gamma)$, Signifie que X est distribuée selon une loi stable de paramètres $\alpha, \mu, \beta, \gamma$

On note $S_\alpha S$, la distribution centré et symétrique de variable aléatoire X , soit $\beta = 0$ et $\mu = 0$.

Une loi α -stable est dite standard si $\mu = 0$ et $\gamma = 1$. Enfin, reste à noter aussi qu'il est assez courant dans la littérature de remplacer la dispersion γ par σ^α et d'appeler σ paramètre d'échelle.

Exemple 2.1 *Les distributions α stables les plus connues, et les seules dont nous disposons d'une forme explicite pour les densités, sont les suivantes :*

- La distribution gaussienne de densité :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right); \quad -\infty < x < +\infty$$

a pour fonction caractéristique :

$$\varphi_x(t) = \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}t^2 + i\mu t\right\}$$

L'équation (2.5) correspond à la fonction caractéristique d'une loi $S_2(\mu, 0, \frac{\sigma}{\sqrt{2}})$

- La distribution de Cauchy généralisée de densité :

$$f(x) = \frac{\gamma}{\pi [(x-\mu)^2 + \gamma^2]}; \quad -\infty < x < +\infty$$

a pour fonction caractéristique :

$$\varphi_X(t) = \exp\{-\gamma|t| + i\mu t\} \quad (2.9)$$

Ce qui correspond à une loi $S_1(\mu, 0, \gamma)$

- La distribution de Levy a pour densité :

$$f(x) = \left(\frac{\gamma}{2\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{(x-\mu)^{3/2}} \exp\left\{-\frac{\gamma}{2(x-\mu)}\right\}; \quad \mu < x < \infty$$

sur (μ, ∞) , avec γ le paramètre de dispersion. Sa fonction caractéristique correspond à celle d'une loi $S_{1/2}(\gamma, 1, \mu)$

Contre exemple: – la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ n'est pas stable.

Preuve : En effet, soient X_1 et X_2 deux V.A.R. suivant une loi de Poisson. Supposons que X_1 et X_2 sont stables, alors il existe $a > 0$ et b tels que

$$X_1 + X_2 \stackrel{D}{=} aX_1 + b$$

Par égalité des moyennes et des variances, nous pouvons voir que

$$\begin{cases} 2\lambda = a\lambda + b \\ 2\lambda = a^2\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = (2 - \sqrt{2})\lambda \\ a = \sqrt{2} \end{cases}$$

Ce qui entraîne une contradiction car $X_1 + X_2$ a ses valeurs uniquement dans \mathbb{N} alors que $\sqrt{2}X_1 + (2 - \sqrt{2})\lambda$ n'a pas que des valeurs dans \mathbb{N} ■

Ci dessous la figure de ces trois lois:

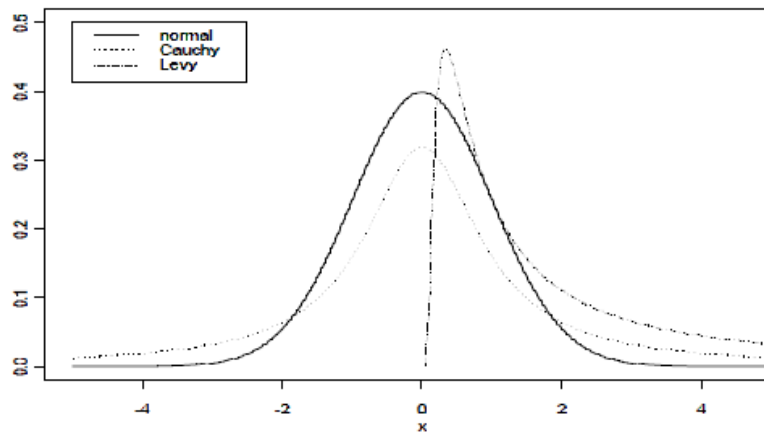


Fig. 2.1 Graphiques des différentes densités des lois alpha stables $N(0;1)$, $Cauchy(1,0)$ et $Lévy(1,0)$

Le graphe de ces trois lois montre: Les deux distributions normales et Cauchy sont des courbes symétriques, en forme de cloche. La principale distinction qualitative entre eux est que la distribution de Cauchy à queues beaucoup plus lourdes, il existe une petite quantité de probabilité au-dessus de 3, pour la distribution Normale, mais une importante s'élevant au-dessus de 3 pour la loi de Cauchy. Contrairement aux distributions normales et Cauchy, la distribution de L'Évy est fortement biaisée, avec l'ensemble de la probabilité concentrée sur $x > 0$, et il a la queue encore plus lourde que la loi de Cauchy.

Remarque 2.3.3 *Comme la loi normale, toutes les distributions stables restent stables sous des transformations linéaires. On peut ainsi, pour simplifier les calculs, choisir des valeurs standards pour les paramètres d'échelle et de position.*

2.3.4 Propriétés des Lois Stables

Dans cette partie, quelques propriétés des lois α -stables seront présentées:

- La densité

Pour la plupart des lois connues, nous avons une forme explicite de la densité (normale, Cauchy, gamma,...). Pour les variables aléatoires α -stables, il n'existe pas une expression explicite de la densité dans le cas général. Il est possible d'obtenir la fonction de densité de probabilité en effectuant une transformée de Fourier de la fonction caractéristique:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-itx) \varphi_X(t) dt \quad (2.6)$$

Cependant, la densité de probabilité d'une α -stable est difficile à représenter à partir de cette définition pour deux raisons. Tout d'abord, la fonction à intégrer est complexe. Ensuite, les bornes de l'intégrale sont infinies. Nolan propose un moyen de représenter les distributions α -stables préalablement normalisées, c'est-à-dire pour $\gamma = 1$ et $\mu = 0$. Il s'appuie principalement sur des changements de variables lui permettant d'obtenir une intégrale aux bornes finies. Si la variable aléatoire X est $S\alpha S$ standard, la relation (2.6) devient:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|^\alpha} \cos(tx) dt - i \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|^\alpha} \sin(tx) dt \right] \\
 &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} e^{-t^\alpha} \cos(tx) dt
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

- Stabilité

Pour $\alpha \neq 1$, nous avons l'équivalence suivante

$$X \text{ suit une loi } S_\alpha(\mu, \beta, \gamma) \Leftrightarrow Y = \frac{X-\mu}{\gamma^{1/\alpha}} \text{ suit } S_\alpha(0, \beta, 1)$$

Preuve : Tout d'abord, remarquons que $\varphi_{mX+p}(t) = E[e^{it(mX+p)}] = e^{itp} \varphi_X(mt)$.

Condition nécessaire : prenons $m = \frac{1}{\gamma^{1/\alpha}}$ et $p = -\frac{\mu}{\gamma^{1/\alpha}}$. Nous avons alors:

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{iut}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \varphi_X\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right)$$

$$\varphi_Y(t) = \exp\left(-\frac{iut}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \exp\left\{\frac{iut}{\gamma^{1/\alpha}} - \gamma \left|\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\}$$

Or $\operatorname{sign}\left(\frac{t}{\gamma^{1/\alpha}}\right) = \operatorname{sign}(t)$ car $\gamma > 0$, donc $\varphi_Y(t) = \exp\left\{-|t|^\alpha \left[1 - i\beta \operatorname{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}\right]\right\}$, qui est bien la forme de la fonction caractéristique d'une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$

Condition suffisante : la démonstration est similaire à la condition nécessaire en prenant

$$m = \gamma^{1/\alpha} \text{ et } p = \mu \blacksquare$$

- Queues lourdes

Proposition 2.3.1 Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ avec $0 < \alpha < 2$. Alors

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \mathbb{P}(X > t) = C_\alpha \frac{1+\beta}{2} \gamma^\alpha, \\ \lim_{t \rightarrow \infty} t^\alpha \mathbb{P}(X < -t) = C_\alpha \frac{1-\beta}{2} \gamma^\alpha, \end{cases}$$

où C_α est une constante donnée par :

$$C_\alpha = \left(\int_0^\infty x^{-\alpha} \sin x dx \right)^{-1} = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{\Gamma(2-\alpha) \cos(\frac{\pi\alpha}{2})} & \text{si } \alpha \neq 1 \\ 2/\pi & \text{si } \alpha = 1 \end{cases}$$

La démonstration est donnée dans Samorodnitsky et Taqqu (1994, pages 16 – 18)[25].

L'égalité précédente nous fait penser à la caractérisation des lois de Pareto.

En effet, une variable aléatoire réelle suit une loi du type Pareto si :

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-\alpha}h(x)$$

où $h(x)$ est une fonction à variation lente, c'est-à-dire pour tout $t > 0$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{h(tx)}{h(x)} = 1$.

Mandelbrot [17] a montré que pour les lois α -stables, nous avons:

$$\mathbb{P}(X \geq x) = x^{-\alpha} [f_1(\alpha) + f_2(\alpha)x^{-\alpha} + o(x^{-2\alpha})]$$

Par passage à la limite quand x tend vers $+\infty$, on s'aperçoit que les lois stables sont asymptotiquement parétiennes.

- Calcul des moments

La loi normale est la seule loi α -stable qui possède des moments finis de tous ordres. Pour toutes les autres lois α -stables, nous avons la propriété ci-dessous.

Soit X une variable aléatoire de loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ avec $0 < \alpha \leq 2$. Alors

1. Si $\alpha = 2$, $\forall p$, $\mathbb{E}|X|^p < +\infty$,
2. Si $0 < \alpha < 2$, $\begin{cases} \forall 0 \leq p < \alpha, \mathbb{E}|X|^p < +\infty \\ \forall p \geq \alpha, \mathbb{E}|X|^p = +\infty \end{cases}$

Preuve : En fait, pour la première partie de cette propriété, nous avons vu dans l'exemple que le cas $\alpha = 2$ correspond au cas gaussien. Et nous savons que les variables aléatoires gaussiennes ont toutes leurs moments finis. Pour la seconde partie de la propriété, remarquons tout d'abord que pour toute variable aléatoire réelle positive et intégrable, on a

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y > v)dv$$

En posant $Y = |X|^p$ et $v = u^p$, nous avons

$$E(|X|^p) = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(|X|^p > u^p)pu^{p-1}du \quad (I)$$

Or $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u)}{u^{p-1}} = \lim_{u \rightarrow 0} \mathbb{P}(|X| > u) = 1$, donc

$$u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) \underset{0}{\sim} u^{p-1}$$

$$\text{et } \int_0^M u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_0^M u^{p-1} du < +\infty \Leftrightarrow p > 0$$

Or $\lim_{u \rightarrow +\infty} \frac{u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u)}{u^{p-\alpha-1}} = \lim_{u \rightarrow +\infty} u^\alpha \mathbb{P}(|X| > u) = \gamma C(\alpha)$, donc

$$u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) \underset{-\infty}{\sim} u^{p-\alpha-1}$$

$$\text{et } \int_M^{+\infty} u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \Leftrightarrow \int_M^{+\infty} u^{p-\alpha-1} du < +\infty \Leftrightarrow p < \alpha$$

Conclusion : d'après (I), il est facile de voir que $E|X|^p < +\infty$

$$\text{Lorsque } \begin{cases} \int_0^M u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \\ \int_M^{+\infty} u^{p-1} \mathbb{P}(|X| > u) du < +\infty \end{cases} \quad \text{c'est-à-dire lorsque } 0 < p < \alpha \quad \blacksquare$$

1- Dès que α est strictement inférieur à 2, la variance d'une loi α -stable est infinie. Dès que α est strictement inférieur à 1, c'est la moyenne qui devient infinie.

2- Si α est plus grand que 1, la moyenne d'une loi α -stable est μ

Preuve : Nous savons que $\hat{\varphi}_X(0) = iE(X)$.

Or nous savons aussi que $\varphi_X(t) = \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t))\}$ où

$$g(\text{sign}(t)) = 1 - i\beta \text{sign}(t) \tan \frac{\alpha\pi}{2}$$

et donc que

$$\hat{\varphi}_X(t) = (i\mu - \gamma \text{sign}(t) |t|^{\alpha-1} g(\text{sign}(t))) \exp \{i\mu t - \gamma |t|^\alpha g(\text{sign}(t))\}$$

ce qui entraîne que

$$\hat{\varphi}_X(0) = i\mu \text{ d'où } E(X) = \mu$$

■

Illustration : La loi de Cauchy ($\alpha = 1$) et celle de Lévy ($\alpha = \frac{1}{2}$) ont chacune une espérance mathématique infinie. Dans ces deux cas, la variance n'est pas définie.

variance de Cauchy est infini car $\alpha = 1$

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{1+x^2} dx$$

Montrons que cette intégrale diverge entre 0 et l'infini.

$$\int_0^a \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} [\ln(1+x^2)]$$

Or

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} \ln(1+a^2) = +\infty$$

Il s'ensuit que l'intégrale diverge bien entre 0 et l'infini, donc a posteriori entre moins et plus l'infini et ce n'est pas une division par π qui y changera quelque chose. $E(X)$ n'existe pas.

D'où la variance de Cauchy est infinie.

Conséquence : Toutes les lois stables non-gaussiennes ont une variance infinie ou non définie. L'existence d'une variance finie pour la loi normale est simplement liée à une plus grande décroissance de queue par rapport aux autres lois stables.

Proposition 2.3.2 *Si X est stable, X est indéfiniment divisible. La réciproque est fausse.*

Soit X_1 et X_2 sont deux v.a. stables et indépendantes avec : $X_i \sim S_\alpha(\mu_i, \beta_i, \gamma_i)$ pour $i = 1, 2$, alors $X_1 + X_2 \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ où

$$\gamma = (\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha) \frac{1}{\alpha}$$

$$\beta = \frac{(\beta_1 \gamma_1^\alpha + \beta_2 \gamma_2^\alpha)}{\gamma_1^\alpha + \gamma_2^\alpha}$$

$$\mu = \mu_1 + \mu_2$$

Proposition 2.3.3 *Si $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ et $a \in \mathbb{R}$, alors : $X + a \sim S_\alpha(\mu + a, \beta, \gamma)$*

Proposition 2.3.4 Si $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ et $a \in \mathbb{R}$

Alors :

$$aX \sim \begin{cases} S_\alpha(a\mu, \text{sign}(a)\beta, |a|\gamma) & \text{pour } \alpha \neq 1 \\ S_1(a\mu - \frac{2}{\pi}a \ln |a| \gamma \beta, \text{sign}(a)\beta, |a|\gamma) & \text{pour } \alpha = 1 \end{cases}$$

Proposition 2.3.5 Si $\alpha \in (0, 2)$ et $X \sim S_\alpha(0, \beta, \gamma)$ alors $-X \sim S_\alpha(0, -\beta, \gamma)$

Remarque 2.3.4 Une variable aléatoire $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ est symétrique si et seulement si $\beta = \mu = 0$. Elle est symétrique autour de μ si et seulement si $\beta = 0$.

Soit $X \sim S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ avec $\alpha \neq 1$. Alors X est strictement stable si et seulement si $\mu = 0$. Si cette fois $\alpha = 1$, alors X est strictement stable si et seulement si $\beta = 0$.

Enfin, nous pouvons noter que la loi normale est dans la famille des lois stables. Une référence très importante sur les propriétés des lois stables est le livre de Samorodnitsky et Taqqu.

2.4 Processus stochastiques stables

Les processus stables ont joué un rôle important en modélisation en finance. Mandelbrot a proposé un modèle pour les prix du coton selon un processus stable à variance infinie. Ce modèle a été fort critiqué à cause de la non existence des seconds moments du processus. Ces processus sont une généralisation des processus gaussiens.

Un vecteur aléatoire $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)$ est α -stable si pour tout k et pour toute famille $\underline{X}^{(1)}, \dots, \underline{X}^{(k)}$ de même loi que \underline{X} , il existe $a_k > 0$ et $B^{(k)}$, tels que

$$\underline{X}^{(1)} + \dots + \underline{X}^{(k)} \stackrel{\mathcal{L}}{=} a_k \underline{X} + B^{(k)}$$

Lorsque $B^{(k)}$ est le vecteur nul, on parle de loi strictement stable .

Une conséquence de la proposition suivante est que le paramètre a_k joue le même rôle que dans le cas univarié. Il existe une constante α , $0 < \alpha \leq 2$, telle que $a_k = k^{1/\alpha}$

Pour \underline{X} un vecteur α -stable, toute combinaison linéaire des composantes de \underline{X} est une variable aléatoire réelle α -stable.

Un processus $\{X(t); t \in T \subset \mathbb{R}\}$ est α -stable si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $t_1, \dots, t_n \in T$ le vecteur aléatoire $(X(t_1), \dots, X(t_n))$ est α -stable.

Définition 2.4.1

soit $\{X(t); t \in T\}$ un processus stochastique. Alors:

1. $\{X(t); t \in T\}$ est strictement stable si et seulement si toute combinaison linéaire:

$$\sum_{k=1}^n b_k X(t_k), \quad t_1, \dots, t_n \in T, \quad n \in \mathbb{N}, \quad b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$$

est strictement stable.

2. Si $\alpha \geq 1$, alors $\{X(t); t \in T\}$ est α -stable si et seulement si toute combinaison linéaire du processus est α -stable.

Remarque 2.4.1 *Les processus stables sont une généralisation des processus gaussiens. Ils ont joué un rôle important en modélisation.*

2.5 Méthode d'estimation des lois α -stables

Il existe plusieurs méthodes pour estimer l'indice de la queue α dont l'estimateur de Hill (1955), l'estimateur de Pickands (1975), et autres. Ils sont construits à partir des statistiques d'ordres dans un échantillon. Les différentes méthodes d'estimations de paramètre α sont basées sur l'état de la queue.

2.5.1 Estimateur de Pickand

Soit $(X_n; n \geq 1)$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de fonction de répartition $F \in D(H(\xi))$, où $\xi \in \mathbb{R}$. Si $\lim_{n \rightarrow \infty} k(n) = \infty$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = 0$

alors l'estimateur de Pickand

$$\xi_{(k(n),n)}^P = \frac{1}{\log 2} \log \left(\frac{X_{(n-k(n)+1,n)} - X_{(n-2k(n)+1,n)}}{X_{(n-2k(n)+1,n)} - X_{(n-4k(n)+1,n)}} \right)$$

converge en probabilité vers ξ

$D(H(\xi))$ représente le domaine d'attraction

2.5.2 Estimateur de Hill

Hill a proposé un estimateur conditionnel du maximum de vraisemblance de l'index α de toute loi à queue lourde, c'est-à-dire qui vérifie

$$\mathbb{P}(X \geq x) \sim x^{-\alpha} L(x)$$

Où $L(x)$ est une fonction à variation lente et $\alpha > 0$. Comme nous l'avons vu précédemment, les lois α -stables vérifient cette condition avec $0 < \alpha < 2$. Pour $1 \leq j \leq n$, écrivons $X^{(j)}$ la $j^{\text{ème}}$ plus grande valeur de X_1, \dots, X_n . L'estimateur de Hill basé sur les observations X_1, \dots, X_n est:

$$H_{k,n} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln \frac{X^{(j)}}{X^{(k+1)}}$$

k c'est la taille de la queue.

Deheuvels et al. ont montré que lorsque les variables X_j sont indépendantes, $H_{k,n}$ converge presque-sûrement vers α^{-1} . Resnick et Staricaont, quant à eux, ont montré la convergence en probabilité de cet estimateur en présence d'observations dépendantes.

L'estimateur de Hill n'est utilisable que pour les distributions de Fréchet (donc telles que $\xi > 0$) pour lesquelles il fournit un estimateur de l'indice de queue plus efficace que l'estimateur de Pickands. Il est défini par la statistique suivante:

$$\hat{\alpha} = \frac{1}{\frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \ln X_{(n-j+1,n)} - \ln X_{(n-k,n)}}$$

où $X[j]$ est la j -ième statistique d'ordre. Son écart-type est :

$$\widehat{MSE}(\hat{\alpha}) = \frac{k\hat{\alpha}}{(k-1)(k-2)^{1/2}} \text{ pour } k > 2$$

Si la queue se comporte comme une loi puissance, il suffit d'effectuer une simple régression sur les quantiles en échelle logarithmique au delà d'un certain seuil, c'est l'estimateur de Hill.

Remarque 2.5.1

- On se posera la question du choix optimal de k . En effet, il est indispensable de calculer ces estimateurs sur les queues de distribution. Choisir un k trop élevé engendre le risque de prendre en compte des valeurs qui ne sont pas extrêmes, à l'inverse, un sous-échantillon trop petit ne permet pas aux estimateurs d'atteindre leur niveau de stabilité.

- Si la queue se comporte comme une loi puissance, il suffit d'effectuer une simple régression sur les quantiles en échelle logarithmique au delà d'un certain seuil, c'est l'estimateur de Hill.

Caractéristiques de la méthode:

Mason a démontré la convergence de cet estimateur, pris comme un cas particulier dans un cadre plus général, tandis que Goldie et Smith ont démontré la normalité asymptotique,

c'est à dire $(\hat{\alpha}_{Hill}^{-1} - \alpha^{-1})k^{\frac{1}{2}} \sim N(0, \alpha^{-2})$ pour certain choix de $k(n)$

2.6 Algorithme de simulation des lois alpha stables

Pour simuler les lois stables, il existe un algorithme développé par Chambers (1976)[29]. Celui-ci permet de générer une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$. Pour obtenir une loi $S_\alpha(\mu, \beta, \gamma)$ il suffit de faire un changement de variables.

- Première étape:

Elle consiste à générer une loi uniforme sur $] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} [$ et une loi W exponentielle de paramètre 1.

Pour cela, il faut d'abord générer 2 variables aléatoires réelles uniformes sur $]0, 1[$ (notées U_1 et U_2). Puis en utilisant le changement de variables suivant:

$$\begin{cases} \Phi = \pi U_1 - \frac{\pi}{2} \\ W = -\log(1 - U_2) \end{cases}$$

- Deuxième étape:

Elle consiste à calculer différentes quantités (fonction de Φ et de W).

$$\begin{cases} \varepsilon = 1 - \alpha \\ a = \tan \frac{\Phi}{2} \\ b = \tan \frac{\varepsilon \Phi}{2} \\ \tau = -\varepsilon \tan(\alpha \phi_0) \\ B = \frac{b}{\varepsilon \Phi} \\ d = \frac{z^{\varepsilon/1-\varepsilon} - 1}{\varepsilon} \\ z = \frac{\cos(\varepsilon \Phi) - \tan(\alpha \phi_0) \sin(\varepsilon \Phi)}{W \cos \Phi} \end{cases}$$

-Troisième étape:

Elle consiste à générer une loi Y stable $S_\alpha(0, \beta, 1)$. Pour obtenir cela, il faut utiliser la proposition suivante:

Soit une loi uniforme sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et W une loi exponentielle de paramètre 1, si nous posons

-pour $\alpha \neq 1$

$$\begin{aligned} Y &= (\cos(\alpha \phi_0))^{1/\alpha} \left\{ \frac{2(a-b)(1+ab) - \Phi \tau B [b(1-a^2) - 2a]}{(1-a^2)(1+b^2)} (1 + \varepsilon d) + \tau \left(d + \frac{1}{\varepsilon} \right) \right\} \\ &= \frac{\sin \alpha(\Phi - \phi_0)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos(\Phi - \alpha(\Phi - \phi_0))}{W} \right) \end{aligned}$$

$$\text{où } \phi_0 = -\frac{\pi \beta}{2} \frac{1 - |1 - \alpha|}{\alpha},$$

$$\text{-pour } \alpha = 1, Y = \frac{2}{\pi} \left(\left(\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi \right) \tan \Phi - \beta \log \left(\frac{\frac{1}{2} \pi W \cos \Phi}{\frac{1}{2} \pi + \beta \Phi} \right) \right)$$

alors la V.A.R. Y suit une loi $S_\alpha(0, \beta, 1)$.

- Dans le cas d'une loi $S_\alpha S$ (c'est-à-dire $\beta = 0$), nous avons:

$$Y = \frac{\sin(\alpha \Phi)}{(\cos \Phi)^{1/\alpha}} \left(\frac{\cos((1-\alpha)\Phi)}{W} \right)^{\frac{1-\alpha}{\alpha}}$$

- Plus particulièrement, dans le cas où est égal à $\alpha = 2$, nous avons:

$$Y = \frac{\sin 2\Phi}{\sqrt{\cos \Phi}} \left(\frac{\cos \Phi}{W} \right)^{\frac{-1}{2}} = 2\sqrt{W} \sin \Phi$$

- Enfin, dans le cas où est égal à 1 et égal à 0, nous avons:

$$Y = \tan \Phi$$

formule connue, qui permet de simuler une loi de Cauchy.

L'algorithme est bien détaillé dans Chambers (1976)[29]

Chapitre 3

La famille des modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques

3.1 Introduction

Il existe des séries temporelles, particulièrement dans le domaine de la finance (par exemple les variations des prix du pétrole, des indices boursiers *S&P500*) dont la modélisation des différentes caractéristiques est difficile à obtenir par des modèles linéaires, car ces modèles sont incapables de capter toutes les asymétries cycliques et les variations instantanées, alors un grand intérêt est accordé aux spécifications non linéaires, ces modèles introduisent une distinction significative entre les phases d'expansion et les phases de récession, il sont alors suffisamment flexibles et permettent de tenir compte des différentes spécifications et des relations correspondantes à chaque phase. Parmi les modèles non linéaires, on peut citer les modèles GARCH (Bollerslev, 1986), les modèles autorégressifs à seuil (TAR, Tiao et Say 1994), les modèles SETAR (Teräsvirta et Anderson, 1992), et les modèles à changement de régimes (Markov Switching Model, Hamilton 1989).

L'observation de certaines séries chronologiques provenant du monde économique et financier (par exemple, taux d'échanges, taux d'actions, des indices, prix du pétrole...) montre des caractéristiques spécifiques qui ne sont pas théoriquement prises en compte dans la

modélisation de Box & Jenkins. À titre d'exemple, considérons la série représentée dans la figure(3.1). Une première observation de ces exemples typiques indique que la moyenne de ces séries semble constante, alors que leur variance change au cours du temps.

Plus particulièrement, nous observons un comportement de cette variabilité en «cluster», c'est-à-dire, les variations de grande amplitude sont suivies par des variations de grande amplitude et les variations de petite amplitude sont suivies par des variations de petite amplitude. Un tel comportement (qualifié d'«hétéroscédastique») ne peut certainement pas être expliqué avec les modèles linéaires à variance constante (ou «homoscédastique»). L'agrégation de ces périodes de variabilité élevée fait partie des caractéristiques des séries financières appelées «stylized facts». Un autre phénomène de ce type concerne la distribution probabiliste de ces données est l'apparition de «chocs» (c'est-à-dire d'observations isolées extrêmement élevées en valeur absolue) n'est pas compatible avec une loi normale, mais nécessite plutôt une modélisation avec une distribution plus étalée («heavy tails»). Dans la littérature des quinze dernières années, la modélisation du type (G) ARCH s'est montrée utile dans beaucoup d'applications du monde économique et financier.

De très nombreux modèles appartenant à la famille des GARCH ont été présentés dans la littérature économétrique. On y trouve par exemple des spécifications permettant d'expliquer l'asymétrie que l'on trouve chez certaines séries financières, voir par exemple Nelson (Conditional heteroskedasticity in asset returns : a new approach 1991). On peut trouver un glossaire détaillant tous les modèles proposés chez Bollerslev (Glossary to ARCH (GARCH) 2008.)

Avant d'évoquer ce type de modélisation, nous passons en revue aux principales propriétés des séries financières de prix (action, taux de change..) et de rendement. Ce qui nous permettra au passage d'illustrer les caractéristiques des processus non linéaires par des propriétés des séries financières, un exemple d'une série chronologique non linéaire est dans la figure3.1:



Fig. 3.1 Évolution du prix du brut (West Texas Intermediate «WTI »)

3.2 Les principales propriétés des séries financières

Les séries de prix d'actif et de rendements présentent généralement un certain nombre de propriétés. Soit X_t le prix d'un actif à la date t et r_t le logarithme du rendement correspondant, tel que $r_t = \log(x_t) - \log(x_{t-1})$

Charpentier (2002) distingue ainsi les principales propriétés que nous allons successivement aborder. Ces propriétés reflètent bien le comportement des processus non linéaires tel que les modèles GARCH.

Pour illustrer les propriétés ci-dessous des séries financière nous présentons des figures des séries des prix journaliers du pétrole WTI(West Texas Intermediate) au marché américain, d'une période de 22/03/2004 au 28/11/2008.

Proposition 3.2.1 (*Non stationnarité*) *Les processus stochastiques X_t associés aux prix d'actif sont généralement non stationnaires au sens de la stationnarité du second ordre, tandis que les processus associés aux rendements sont compatibles avec la propriété de stationnarité au second ordre.*

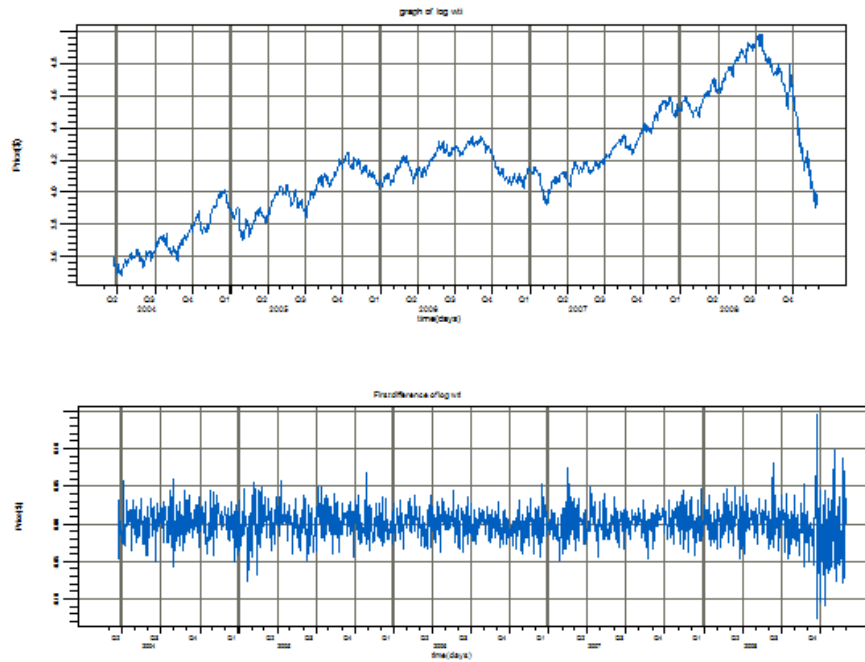
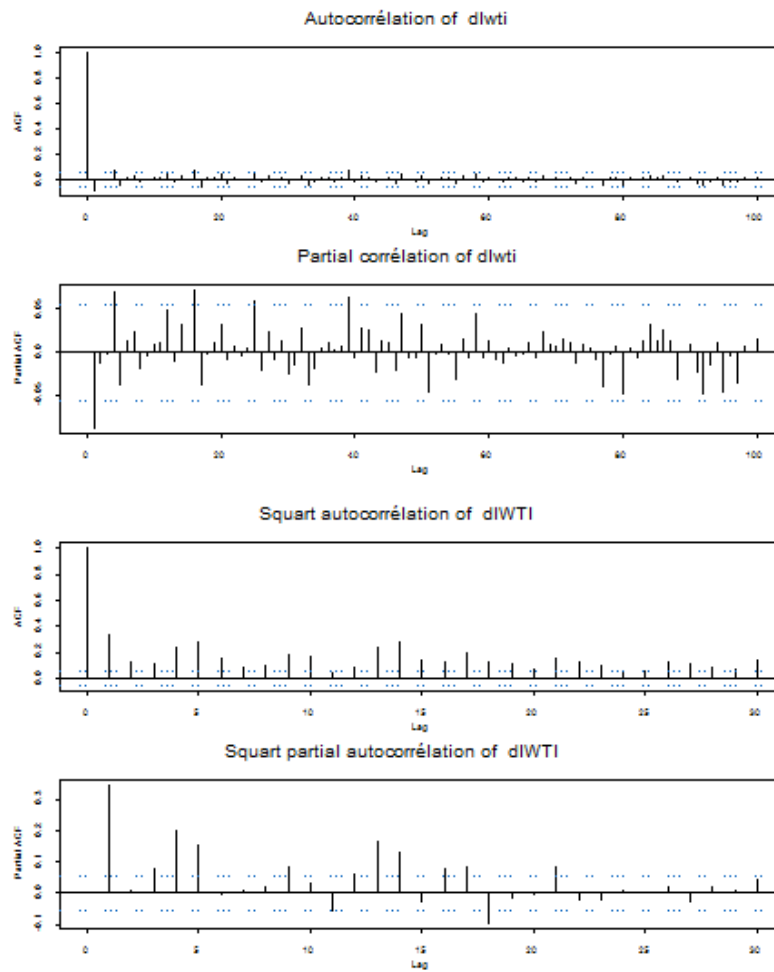
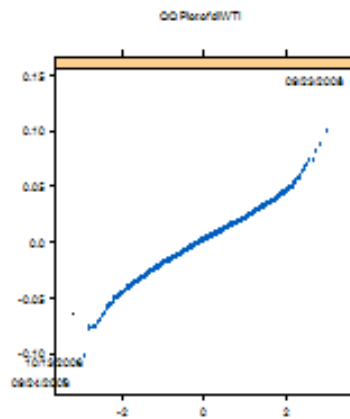


Fig. 3.2 Graphes des prix du pétrole pour illustrer la non stationnarité

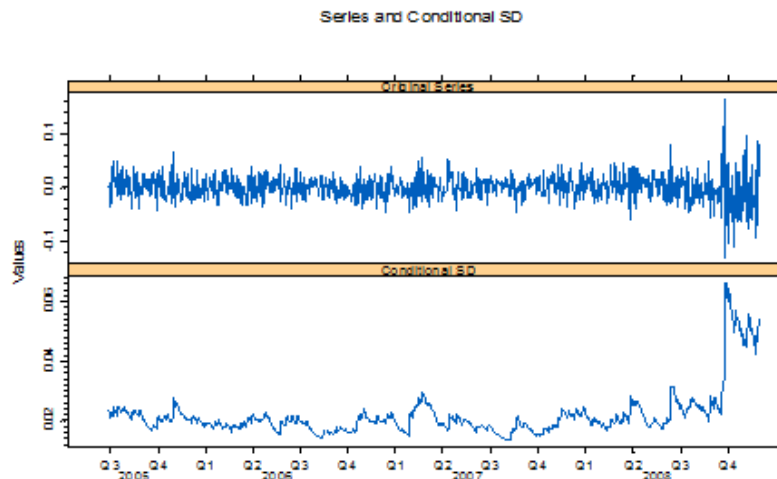
Proposition 3.2.2 *Les rendements de ces séries ne sont en général pas corrélés. Cette propriété n'est souvent plus vérifiée dans le cas de données à très haute fréquence*



Proposition 3.2.3 *Queues de distribution épaisses: Lorsque l'on considère les distributions de probabilité empiriques de séries de rendements, ou de variations de prix, ou encore du logarithme de ces variations de prix, on s'aperçoit généralement que celles-ci ne correspondent pas à une distribution gaussienne. Les tests classiques de normalité tendent à rejeter nettement l'hypothèse d'une distribution normale. Plus précisément, les densités de probabilité de ces séries présentent des queues épaisses (à décroissance plus lente que $\exp(-x^2/2)$) On parle alors de distribution leptokurtique. En conséquence, certains moments d'ordre supérieur de ces séries peuvent ne pas exister.*



Proposition 3.2.4 *Regroupement des extrêmes (Clusters de Volatilité) On observe empiriquement que les fortes variations des rendements sont généralement suivies par de fortes variations et les variations de petite amplitude sont suivies par des variations de petite amplitude. On assiste ainsi à un regroupement des extrêmes en cluster ou paquets de volatilités. C'est un phénomène connu sous le nom d'hétéroscédasticité conditionnelle (variance conditionnelle non constante).*



Proposition 3.2.5 *Queues épaisses conditionnelles : souvent, même une fois qu'on corrige les Clusters de Volatilité (en utilisant des modèles de type GARCH, par exemple), les séries ont des résidus possédant encore des queues épaisses.*

Proposition 3.2.6 *(Effet de levier) Il existe une asymétrie entre l'effet des valeurs passées négatives et l'effet des valeurs passées positives sur la volatilité des cours ou des rendements. Les baisses de cours tendent à engendrer une augmentation de la volatilité supérieure à celle induite par une hausse des cours de même ampleur.*

Proposition 3.2.7 *(Asymétrie perte/gain) : La distribution des cours est généralement asymétrique : il y a plus de mouvements forts à la baisse qu'à la hausse.*

Ces propriétés illustrent la difficulté de modéliser ce type de séries. Ces séries présentent en effet une hétéroscédasticité conditionnelle: conditionnellement aux valeurs passées, la variance du processus $(\varepsilon_t)_t$ (cette notation sera utilisée par la suite pour désigner la série des rendements étudiée) n'est pas constante. En effet, si les dernières valeurs prises par le processus sont de grandes amplitudes, alors la variance conditionnelle sera plus forte qu'après une période de faibles mouvements. Par conséquent, l'hypothèse de processus linéaire (ARMA) stationnaire ne permet pas de prendre en compte d'une part les mécanismes d'asymétrie et d'autre part les ruptures de forte amplitude, d'où la nécessité d'aller vers des modélisations

non linéaires tel que la famille des modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques (G)ARCH. On peut mathématiquement définir l'hétéroscédasticité de la façon suivante, si $(\varepsilon_t)_t$ admet une variance, alors il est conditionnellement hétéroscédastique si

$$Var [\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] \neq cste$$

Du fait de cette propriété, la modélisation classique du type ARMA (pour AutoRegressive Moving Average) est ici inopérante. On définit donc des modèles conditionnellement hétéroscédastiques, qui décomposent le processus observé ε_t de la façon suivante :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \tag{3.1}$$

où (η_t) est un processus indépendant et identiquement distribué, centré et de variance unité. Le processus positif $(\sigma_t)_t$ est appelé volatilité du processus $(\varepsilon_t)_t$. Beaucoup de modèles ont été présentés dans la littérature pour

expliquer cette hétéroscédasticité conditionnelle. On s'intéressera dans ce chapitre aux modèles issus de la famille des *GARCH*.

Si on appelle \mathcal{F}_t , la tribu engendrée par les valeurs passées du processus $(\varepsilon_t)_t$, ces modèles vérifient $\sigma_t \in \mathcal{F}_t$, la volatilité est mesurable par la tribu engendrée par les valeurs passées du processus $(\varepsilon_t)_t$. Si le processus $(\varepsilon_t)_t$ admet une variance, on peut alors identifier σ_t comme la variance conditionnelle de $(\varepsilon_t)_t$. On a dans ce cas

$$Var [\varepsilon_t \mid \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-2}, \dots] = \sigma_t$$

Les modèles de la famille GARCH permettent d'expliquer et donc de prévoir la volatilité des séries financières observées. Ces modèles sont donc particulièrement utiles pour le calcul et le contrôle des risques financiers. Une mesure de risques très répandue est la VaR (Value at Risk) de niveau α , elle est définie comme le montant des pertes qui ne devrait être dépassé qu'avec une probabilité α . Dans le cas d'une modélisation du type (3.1), la probabilité conditionnellement au passé que ε_t soit inférieure à un certain seuil peut s'exprimer comme le produit de la volatilité conditionnelle par un quantile de la distribution du processus (η_t) .

3.3 Modèles Autorégressifs Conditionnellement Hétéroscédastiques généralisés

3.3.1 Présentation des modèles GARCH

Comme mentionné dans la section précédente, la classe des modèles GARCH (General Autoregressive Conditional Heteroskedasticity) est une classe extrêmement utilisée dans le cadre de la modélisation des séries financières. Ces modèles ont apporté de grandes améliorations aux études d'applications des modèles ARCH, prenant en compte la longue mémoire observée dans la variance conditionnelle, qui transgressent (ARCH) souvent les contraintes de la non négativité. Ils furent introduits par Bollerslev en 1986. La classe des modèles *GARCH* est une classe extrêmement utilisée dans le cadre de la modélisation des séries financières. Le processus observé s'écrit comme dans l'équation (3.1). Dans le modèle ARCH, introduit par Engle (1982), on tient compte de la persistance de volatilité en faisant dépendre $(\sigma_t)_t$ des différentes valeurs passées de ε_t^2 . Ainsi, on écrit:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow iid\mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

où $(\eta_t)_t$ *i.i.d*(0; 1) indique que le processus $(\eta_t)_t$ *i.i.d* (0; 1), centré et de variance unité. Ce type de modèle permet d'obtenir des autocorrélations non nulles pour ε_t^2 , cependant on observe sur les séries financières une décroissance assez lente des autocorrélations. Une modélisation *ARCH* réaliste nécessiterait ainsi un ordre p très élevé. La généralisation *GARCH* (p, q) de Bollerslev (1986) permet d'obtenir des autocorrélogrammes plus conformes à ce qui est observé sur les séries financières sans devoir estimer un grand nombre de paramètres. Par critère de parcimonie, ce modèle est donc souvent préféré aux modèles *ARCH*. Cette spécification s'écrit

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow iid\mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

On peut noter que cette écriture fait dépendre σ_t des valeurs passées de ε_t^2 et de ses propres valeurs passées. Sous certaines conditions d'invisibilité, on obtient une écriture faisant dépendre $(\sigma_t)_t$ uniquement des valeurs passées de $(\varepsilon_t^2)_t$ et ainsi vérifier que $\sigma_t \in \mathcal{F}_t$. Il est bien sûr nécessaire d'assurer la positivité de σ_t , on impose généralement que le paramètre θ du modèle vérifie

$\theta = (a_0, a_1, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^{p+q}$ tel que $p \geq 0$; $q \geq 0$; $a_0 > 0$; $a_i \geq 0$; $i = 1, \dots, p$; $b_i \geq 0$; $j = 1, \dots, q$. avec p et q représente l'ordre du processus *GARCH*.

On note également que supposer que le processus des innovations $(\eta_t)_t$ admet une variance unité est nécessaire pour que le modèle soit identifiable.

L'équation (3.3) peut être écrite de manière symbolique sous la forme plus compacte

$$\sigma_t^2 = a_0 + A(L)\varepsilon_t^2 + B(L)\sigma_t^2$$

Et l'on suppose que les deux polynômes $A(L)$ et $B(L)$ sont donnés par : $A(L) = \sum_{i=1}^p \alpha_i L^i$ et $B(L) = \sum_{j=1}^q \beta_j L^j$

Les moments d'ordres 1 et 2 sont donnés par :

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$$

$$V(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = E(\varepsilon_t^2 / \varepsilon_{t-1}) = \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2$$

Le modèle GARCH(1,1)

Dans de nombreux cas d'applications, le modèle GARCH(1,1) est le plus convenable, ce dernier est défini comme suit:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \\ \sigma_t^2 = a_0 + a_1 \varepsilon_{t-1}^2 + b_1 \sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

3.3.2 Stationnarité

La première propriété mathématique qu'il convient d'obtenir pour étudier ce modèle est la stricte stationnarité du processus $(\varepsilon_t)_t$. Bougerol and Picard (1992)[3] ont obtenu une condition pour un modèle $GARCH(p, q)$ général. L'idée est d'écrire le modèle sous forme vectorielle Markovienne. On introduit $\underline{h}_t = (\varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_{t-p+1}^2, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-q+1}^2) \in \mathbb{R}^{p+q}$ et des matrices \underline{b}_t et A_t telles que

$$\underline{h}_t = A_t \underline{h}_{t-1} + \underline{b}_t$$

Avec de telles notations, on définit le coefficient de Lyapunov associé à la suite de matrices $(A_t)_t$ par

$$\gamma = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} E [\log \|A_t \dots A_1\|] \quad (3.4)$$

où

$$\underline{b}_t = \underline{b}(\eta_t) = \begin{pmatrix} a_0 \eta_t \\ 0 \\ \vdots \\ a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+q}, \quad A_t = \begin{pmatrix} a_1 \eta_t^2 & \cdots & a_p \eta_t^2 & b_1 \eta_t^2 & \cdots & b_q \eta_t^2 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \cdots & a_p & b_1 & \cdots & b_q \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution stationnaire (ε_t) est $\gamma < 0$. Si cette condition est vérifiée, alors le processus solution (ε_t) est non seulement stationnaire mais aussi ergodique et non anticipatif.

Ergodique: Informellement, cela signifie que la loi forte des grands nombres s'applique au processus.

Non anticipatif: Cela signifie que le processus est indépendant des innovations futures. ε_t ne dépend pas de η_k pour $k > t$

Si on veut prouver l'existence de moments pour le processus $(\varepsilon_t)_t$ ou la stationnarité au second-ordre de ce processus, on doit restreindre l'espace des paramètres et imposer:

$$\sum_{i=1}^p \alpha_i + \sum_{j=1}^q \beta_j < 1$$

Sans imposer cette condition, si $\gamma < 0$, on peut cependant prouver qu'il existe $s > 0$ tel que $E|\varepsilon_t|^{2s} < +\infty$. Cette propriété est fondamentale pour prouver les résultats statistiques que nous énoncerons sous l'hypothèse de stationnarité stricte.

3.3.3 Maximum de vraisemblance d'un modèle *GARCH*

Une fois placés dans un cadre ergodique et stationnaire, nous pouvons nous intéresser à l'estimation des modèles *GARCH*. La méthode la plus employée est certainement la méthode du Quasi Maximum de Vraisemblance (*QMV*) utilisant la densité gaussienne. Cette méthode définit un estimateur maximisant la vraisemblance du modèle sous l'hypothèse que le processus des innovations est distribué selon une loi normale. Si on utilise la loi gaussienne pour définir l'estimateur, il n'est pas nécessaire de supposer pour autant que la vraie distribution du processus $(\eta_t)_t$ est gaussienne. C'est l'absence de cette hypothèse qui distingue le *QMV* de la méthode du Maximum de Vraisemblance (*MV*) gaussien.

L'estimateur du *QMV* présente de nombreux avantages : il ne requière que de très faibles hypothèses tant sur le processus des innovations (dont la distribution reste non spécifiée mais dont on doit supposer l'existence d'un moment d'ordre 4) que sur l'espace des paramètres et sur la vraie valeur des paramètres.

On détaille maintenant la définition et ses propriétés asymptotiques du *QMV*. Le critère à minimiser construit en supposant que le processus des innovations suit une loi gaussienne et donc que la loi conditionnelle de ε_t est une loi normale centrée de variance σ_t^2 , s'écrit:

$$\tilde{I}_n = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t(\theta), \text{ où } \tilde{l}_t(\theta) = \log \tilde{\sigma}_t^2(\theta) + \frac{\varepsilon_t^2}{\tilde{\sigma}_t^2(\theta)} \quad (3.5)$$

Les $\tilde{\sigma}_t(\theta)$ sont définis de façon récurrente par,

$$\forall t \geq 1, \tilde{\sigma}_t^2(\theta) = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2$$

On doit utiliser des valeurs initiales pour cette récurrence, on peut poser par exemple

$$\varepsilon_0^2 = \dots = \varepsilon_{1-p}^2 = \tilde{\sigma}_0^2 = \dots = \tilde{\sigma}_{1-q}^2 = a_0$$

On définit également l'espace des paramètres $\Theta \subset \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^{p+q}$. Avec ces notations, on peut définir l'estimateur de quasi maximum de vraisemblance gaussien en posant

$$\theta_n = \arg \min_{\theta \in \Theta} \tilde{I}_n(\theta) \quad (3.6)$$

Sous certaines hypothèses, cet estimateur est convergent et asymptotiquement normal, on a alors

$$\theta_n \longrightarrow \theta_0, \text{ P.S}$$

On a également

$$\sqrt{n}(\theta_n - \theta_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (E\eta_t^4 - 1)J^{-1})$$

où J est défini par $J = E \left[\frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\theta_0)}{\partial \theta \partial \theta'} \right]$. La quantité $l_t(\theta_0)$ représente ici la limite stationnaire de $\tilde{l}_t(\theta_0)$ et elle est définie plus formellement dans la thèse de (Guillaume LEPAGE 2012)[16].

3.4 Estimation des paramètres des modèles GARCH à innovations α -Stables

3.4.1 Introduction

La méthodologie ARCH contribue à relâcher l'hypothèse forte de la volatilité constante à travers le temps. Suite à l'article pionnier d'Engle, plusieurs variantes du modèle ARCH (p) ont été proposées afin de donner une meilleure description et prévision de la volatilité. Les chercheurs exploitent principalement deux dimensions pour améliorer les modèles $GARCH(p, q)$. D'abord, ils s'intéressent aux autres distributions que la loi Normale pour les innovations. Aussi, ils recherchent des modèles plus flexibles expliquant mieux l'évolution de la volatilité.

Les distributions stables sont caractérisés par les mêmes propriétés que la distribution normale et ils peuvent être une extension de celle-ci. La distribution normale appartient aussi à la famille des distributions stables comme un cas particulier et les modèles financiers tels que $Stable-GARCH(\alpha, p, q)$ peuvent servir comme une extension du GARCH classique (p, q) avec le modèle de l'innovation normal.

Les modèles GARCH classiques avec innovations de loi normale sont plus populaire dans la pratique économique, mais parfois le comportement des prix de nombreux actifs n'est pas typique pour les modèles normaux, il est donc raisonnable de remplacer la distribution normale par une famille de distributions s'étendent vers la normale. L'étude des modèles conditionnellement hétéroscédastiques lorsque le processus des innovations est leptokurtique est extrêmement important. En effet, les performances du QMV gaussien peuvent être altérées par la présence d'innovations à queues épaisses. Les séries financières sur lesquelles on applique ces modèles présentent le plus souvent une forte leptokurticité. Les modèles avec innovations stables ont déjà été étudiés dans la littérature.

Dans cette section, on étudie les propriétés asymptotiques de l'estimateur du maximum de vraisemblance d'un modèle conditionnellement hétéroscédastiques lorsque le processus des innovations est distribué selon une loi alpha stable.

3.4.2 Modèle Stable-GARCH(α, p, q)

Un processus $(\varepsilon_t)_t$ est dit Stable-GARCH(α, p, q) s'il s'écrit sous la forme

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \stackrel{iid}{\sim} S_\alpha(\mu, \beta, \gamma), \quad 0 < \alpha \leq 2 \\ \sigma_t^2 = a_0 + \sum_{i=1}^p a_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q b_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases} \quad (3.7)$$

tel que $p \geq 0$; $q \geq 0$; $a_0 > 0$; $a_i \geq 0$; $i = 1, \dots, p$; $b_j \geq 0$; $j = 1, \dots, q$

hypothèse $\alpha > 1$ n'est pas très restrictive dans le contexte de la modélisation financière, parce que la plupart des séries chronologiques d'intérêts financiers semblent avoir des moyennes finies. Pour $1 < \alpha < 2$, les lois stables ont une moyenne finie

et une variance infinie. Pour $\alpha = 2$, on obtient le modèle Gaussien GARCH(p, q).

Théorème 3.4.1 *Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus GARCH(p, q) strictement stationnaire, solution du modèle (3.7) est que*

$$\gamma < 0$$

où γ est le plus grand exposant de Lyapounov de la suite A_t définie par (3.4)

Lorsqu'elle existe, la solution strictement stationnaire est unique, non anticipative et ergodique.

La démonstration du théorème est détaillé dans (Francq.C Zakoian.J.M, (2009))[9]

3.4.3 Maximum de vraisemblance d'un modèle GARCH avec innovations α -Stables

On étudie le modèle GARCH en spécifiant la distribution du processus $(\eta_t)_t$ comme une loi alpha stable de paramètre $\psi_0 = (\alpha, \beta, \mu, 1)$. Le paramètre du modèle est alors $\tau_0 = (\theta_0^\lambda, \psi_0^\lambda)$.

On pose donc $\psi_0^\lambda = (\alpha_0, \beta_0, \mu_0)$ les paramètres de la fonction alpha stable (Pour des raisons d'identifiabilité, le paramètre γ doit être fixé à 1 et est ainsi omis des estimations) et $\theta_0^\lambda = (a_0, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q)$ $\theta_0^\lambda \in \mathbb{R}^{p+q}$ paramètres du GARCH. On note la densité de la loi alpha stable par $f(\cdot, \psi) = f(\cdot, \alpha, \beta, \mu)$.

On définit l'estimateur du maximum de vraisemblance. Si Γ représente l'espace des paramètres, tel que $\Gamma = \Theta \times A \times B \times C$ avec $A \subset]0, 2[$, $B \subset]-1, 1[$ et $C \subset \mathbb{R}$.

alors pour $\tau_0 = (\theta^\lambda, \psi^\lambda) \in \Gamma$, on définit le critère à minimiser:

$$\tilde{I}_n(\tau) = \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \tilde{l}_t(\tau), \text{ où } \tilde{l}_t(\tau) = \log \tilde{\sigma}_t^2(\theta) - \log f\left(\frac{\varepsilon_t}{\tilde{\sigma}(\theta)}, \psi\right)$$

Puis on définit τ_n l'estimateur du maximum de vraisemblance du modèle (3.7) :

$$\tau_n = \arg \min_{\tau \in \Gamma} \tilde{I}_n(\tau) \tag{3.8}$$

Pour pouvoir étudier τ_n , on doit se placer dans le cas stationnaire, on fait donc l'hypothèse A_0 : (ε_t) est une solution causale, strictement stationnaire et ergodique du modèle (3.7).

Cette hypothèse est bien plus contraignante sur l'espace des paramètres que cette même hypothèse faite dans le cas où le processus des innovations est gaussien. En effet si la persistance du processus σ_t est trop forte et si le paramètre a_0 est trop faible alors $(\varepsilon_t)_t$ sera explosif.

la démonstration de la solution de l'équation (3.8) est détaillé dans (thèse de Guillaume LEPAGE 2012 chapitre 3 page 83-84)[16].

Lorsque l'on se place dans le cas du modèle conditionnellement hétéroscédastique général, on doit énoncer de nombreuses hypothèses pour obtenir la consistance et la normalité asymptotique de τ_n (il s'agit des hypothèses A1-A8 du chapitre 3 thèse de Guillaume LEPAGE 2012 page 73-74)[16]

On obtient ainsi le théorème suivant:

Théorème 3.4.2 *Sous certaines hypothèses A_0 -A5, τ_n est un estimateur consistant de τ_0 ,*

$$\tau_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \tau_0, \text{ a.s.} \tag{3.9}$$

Sous les hypothèses A6-A8 de (thèse G.LEPAGE 2012) on obtient également la normalité asymptotique de cet estimateur.

$$\sqrt{n}(\tau_n - \tau_0) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, J^{-1})$$

Où $J = E \left[\frac{\partial^2 \tilde{l}_t(\tau_0)}{\partial \tau \partial \tau'} \right] = E \left[\frac{\partial \tilde{l}_t}{\partial \tau}(\tau_0) \frac{\partial \tilde{l}_t}{\partial \tau'}(\tau_0) \right]$, avec $\tilde{l}_t(\tau) = \log \sigma_t^2(\theta) - \log \left(\frac{\varepsilon_t}{\sigma(\theta)}, \psi \right)$

La démonstration du théorème (voir thèse de Guillaume LEPAGE 2012 chapitre 3 page 85,86,87,88,89,90) [16]

Remarque 3.4.1 *En ce qui concerne l'hypothèse A0, dans le cas du modèle GARCH (p, q), nous exigeons que le plus grand exposant de Lyapunov soit strictement négative. (voir Francq et Zakoian (2009)) [9]*

Chapitre 4

Simulations

Dans ce chapitre nous présentons les résultats numériques qui illustrent la présentation théorique développée dans les chapitres précédents.

4.1 Simulation et estimation des modèles GARCH à innovations α -Stable

Afin d'illustrer la théorie des modèles de séries chronologiques à innovations de lois α -stables et pour mettre en évidence l'efficacité de cette modélisation par rapport au cas classique (cas gaussien), on a consacré cette partie pour élaborer des programmes de simulations et des programmes d'estimations des modèles $GARCH(1, 1)$ à innovations de lois alpha stables sous les logiciels R et Matlab

Nous avons procédé à une simulation des modèles non linéaires de type $GARCH(1, 1)$ à innovations de loi α -stables. Le modèle est donné par:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow S\alpha S(1), \quad 0 < \alpha < 2 \\ \sigma_t^2 = 0, 1 + 0, 3\varepsilon_{t-1}^2 + 0, 5\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Où $\{\eta_t, t \in \mathbb{Z}\}$ est de distribution α -stable symétrique de paramètres $S\alpha S(1) = S_\alpha(0, 0, 1)$. α représente le paramètre de la queue dans les lois α -stables.

On a fait des simulations du modèle $GARCH(1, 1)$ à innovations α -stables stationnaire pour des différentes valeurs de α , et on a estimé à la fois les paramètres du $GARCH$ et le

paramètre α de la loi α -stable, afin de montrer la qualité de l'estimateur dans le cas où les innovations du modèle sont de loi alpha stable, et cela revient à calculer la quantité de l'équation (3.8) du chapitre 3.

4.1.1 Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de Cauchy

$\alpha = 1$

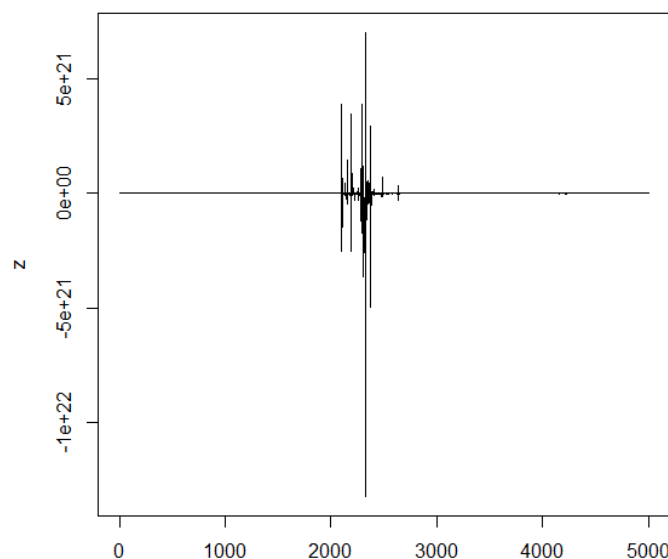


Fig. 4.1-GARCH(1,1) à innovations de lois α -stables avec $\alpha = 1$

```
Final Estimate of the Negative LLH:
LLH: 275121
Coefficient(s):
  Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
a      0.074486   0.019586   3.80303  0.000143 ***
b      0.315739   0.013873  22.75993  < 2e-16 ***
c      0.500648   0.012397  40.14203  < 2e-16 ***
alpha  1.020005   0.026301  38.78191  < 2e-16 ***
```

4.1.2 Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations α -Stable avec α quelconque ($\alpha = 1,1; \alpha = 1,5; \alpha = 1,9$)

- Pour $\alpha = 1,1$ on a

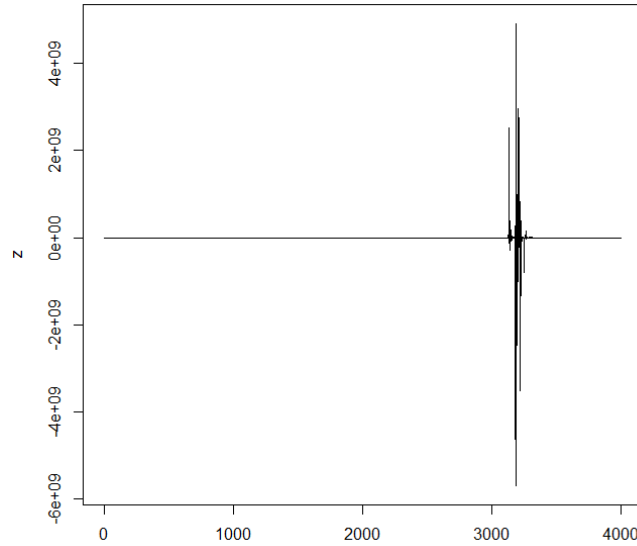


Fig. 4.2-GARCH(1,1) à innovations de lois α -stables avec $\alpha = 1.1$

Les résultats de l'estimation :

```

Final Estimate of the Negative LLH:
LLH: 12147.3
Coefficient(s):

```

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)	
a	0.097931	0.014337	6.83044	< 2e-16	***
b	0.312656	0.020747	15.06960	< 2e-16	***
c	0.499520	0.018412	27.12963	< 2e-16	***
alpha	1.099674	0.023309	47.17729	< 2e-16	***

-Pour $\alpha = 1,5$

Simulation d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de loi alpha stables avec $\alpha = 1,5$

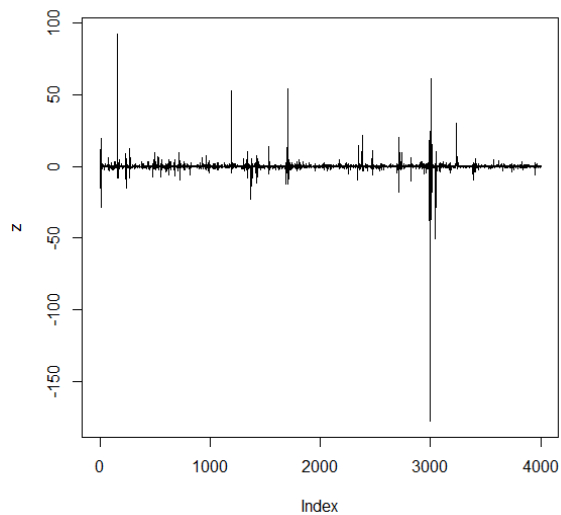


Fig. 4.3-GARCH(1,1) à innovations de lois α -stables avec $\alpha = 1.5$

Résultats de l'estimation sont donnés ci dessous:

```
Final Estimate of the Negative LLH:
Coefficient(s):
  Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
a      0.103482   0.010368   9.98079  < 2e-16 ***
b      0.298855   0.022385  13.35058  < 2e-16 ***
c      0.510831   0.028973  17.63153  < 2e-16 ***
alpha  1.495105    0.028171  53.07274  < 2e-16 ***
```

- Pour $\alpha = 1,9$ on a

Simulation d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de loi alpha stables avec $\alpha = 1,9$

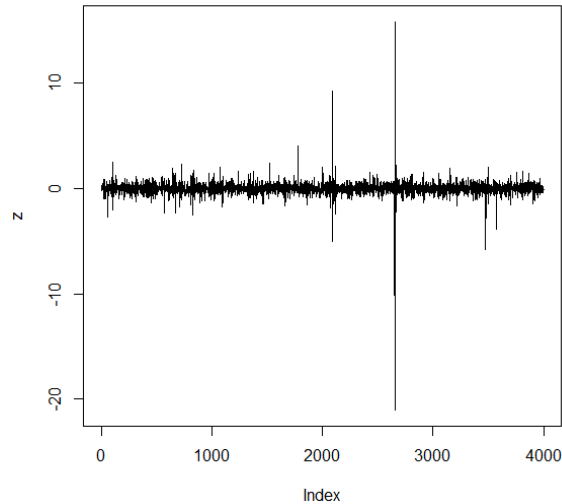


Fig. 4.4-GARCH(1,1) à innovations de lois α - stables avec $\alpha = 1.9$

Résultats de l'estimation sont donnés ci dessous:

```
Final Estimate of the Negative LLH:
LLH: 2278.884
Coefficient(s):
  Estimate  Std. Error  t value  Pr(>|t|)
a      0.095307   0.009992   9.53862  < 2e-16 ***
b      0.294186   0.019582  15.02356  < 2e-16 ***
c      0.522938   0.033391  15.66097  < 2e-16 ***
alpha  1.903587    0.015510 122.73135  < 2e-16 ***
```

A noter que pour le premier modèle, c'est à dire cas où l'indice de stabilité est égale (ou proche) de un, la série exhibe une forme extrême d'amplitudes égales à $(\pm 1.e^{+21}, \pm 4.e^{+09})$ correspondants respectivement aux cas où $\alpha = 1$ et $\alpha = 1,1$; alors que la deuxième série, dont alpha est égale à 1,5; exhibe un nombre d'excitation d'amplitude moins considérable.

La troisième série, avec un coefficient alpha un peu plus élevé, exhibe une forme moins conventionnelle.

Les résultats de l'estimation des paramètres à travers cette méthode sont résumés dans le tableau suivant:

	paramètres	la vraie valeur	Estimate
$\alpha = 1$	a	0,1	0,07
	b	0,3	0,31
	c	0,5	0,5
$\alpha = 1,1$	a	0,1	0,09
	b	0,3	0,31
	c	0,5	0,499
$\alpha = 1,5$	a	0,1	0,1
	b	0,3	0,298
	c	0,5	0,51
$\alpha = 1,9$	a	0,1	0,09
	b	0,3	0,29
	c	0,5	0,52

Du tableau précédent, on peut constater que la méthode du MV fonctionne bien vu que les valeurs des estimateurs sont proches des vraies valeurs. Autrement dit, les biais des estimations sont peu considérables.

Afin de confirmer l'efficacité de cette méthode, on s'est référé à une étude de simulation, qui fait l'objet d'étude de la section suivante de ce chapitre.

4.2 Etude de simulation des modèles GARCH(1,1) à innovations α -Stables

4.2.1 Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de Cauchy $\alpha = 1$

Les valeurs moyennes, basées sur 1000 réplifications, de l'estimateur du MV, en considérant que la taille de la série est de $n = 5000$, ainsi que les estimations de son écart-type $\sigma(\hat{\tau})$ sont portées sur la table suivante:

$E(\hat{\tau})$	$\sigma(\hat{\tau})$
0.13	0.11
0.31	0.03
0.50	0.03
1.04	0.09

avec $\hat{\tau} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$

Table 4.3.1

Les figures ci dessous représentent l'évolution des estimateurs $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$ au cours des 1000 itérations

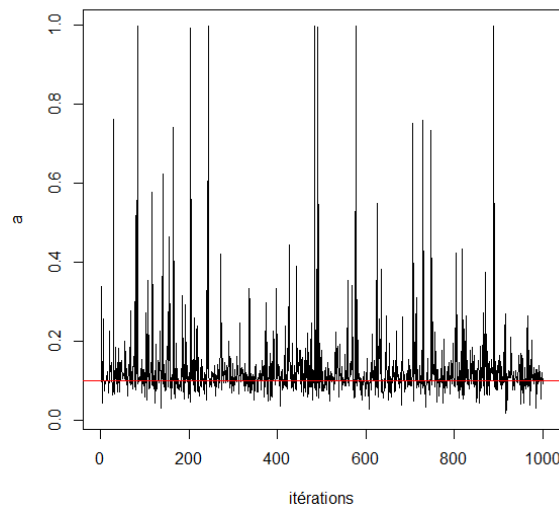


Fig. 4.5

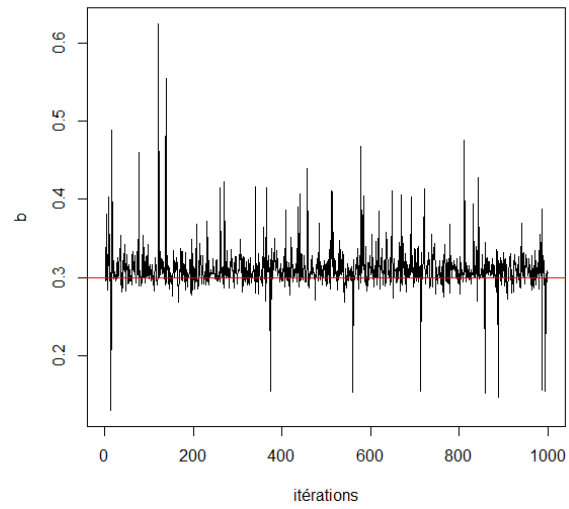


Fig. 4.6

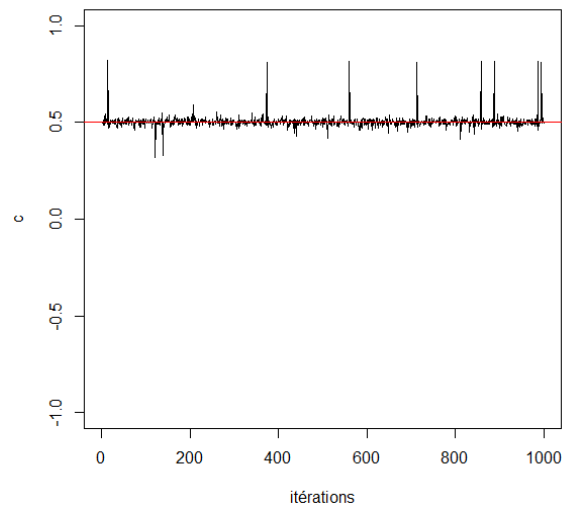


Fig. 4.7

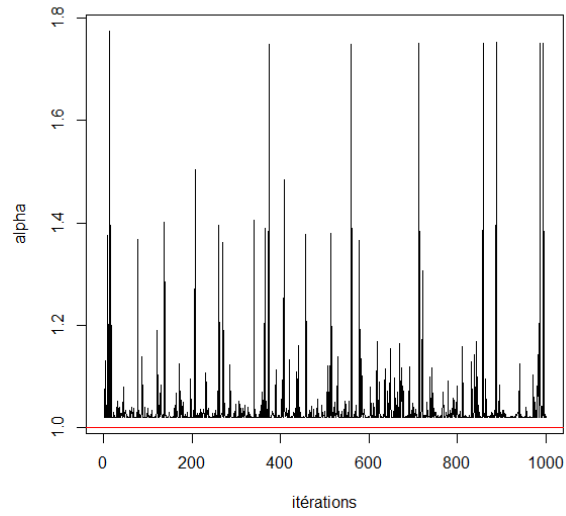


Fig. 4.8

Afin de montrer l'évolution des paramètres estimés par rapport à la taille de l'échantillon, on a effectué une simulation du processus $GARCH(1,1)$ à innovations de Cauchy ($\alpha = 1$) avec des différentes tailles d'échantillon ($n = 100, n = 500, n = 1000, n = 2500, n = 5000$), les résultats de l'estimation en fonction de la taille de l'échantillon sont donnés par le tableau ci-dessous:

4.2. Etude de simulation des modèles $GARCH(1,1)$ à innovations α -Stables

Taille de l'échantillon	la vraie valeur	$\hat{\tau}$
$n = 100$	$a = 0,1$ $b = 0,3$ $c = 0,5$ $\alpha = 1$	$\hat{a} = 0,22$ $\hat{b} = 0,30$ $\hat{c} = 0,52$ $\hat{\alpha} = 1,07$
$n = 500$	$a = 0,1$ $b = 0,3$ $c = 0,5$ $\alpha = 1$	$\hat{a} = 0,16$ $\hat{b} = 0,30$ $\hat{c} = 0,50$ $\hat{\alpha} = 1,03$
$n = 1000$	$a = 0,1$ $b = 0,3$ $c = 0,5$ $\alpha = 1$	$\hat{a} = 0,15$ $\hat{b} = 0,30$ $\hat{c} = 0,52$ $\hat{\alpha} = 1,03$
$n = 2500$	$a = 0,1$ $b = 0,3$ $c = 0,5$ $\alpha = 1$	$\hat{a} = 0,13$ $\hat{b} = 0,30$ $\hat{c} = 0,50$ $\hat{\alpha} = 1,03$
$n = 5000$	$a = 0,1$ $b = 0,3$ $c = 0,5$ $\alpha = 1$	$\hat{a} = 0,13$ $\hat{b} = 0,31$ $\hat{c} = 0,50$ $\hat{\alpha} = 1,04$

Les graphes ci-dessous présentent l'évolution des estimateurs par rapport aux tailles de l'échantillon:

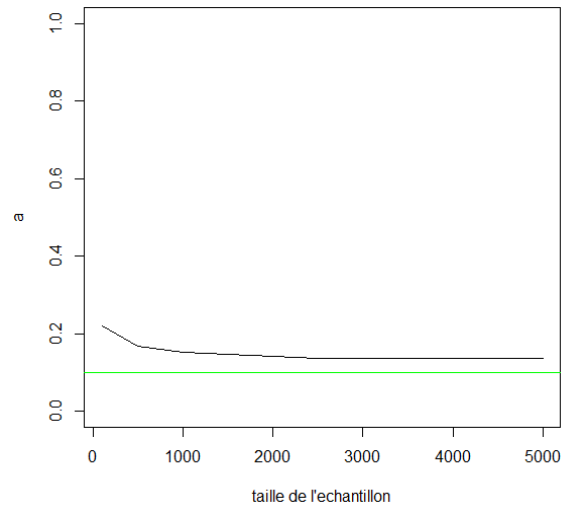


Fig. 4.9

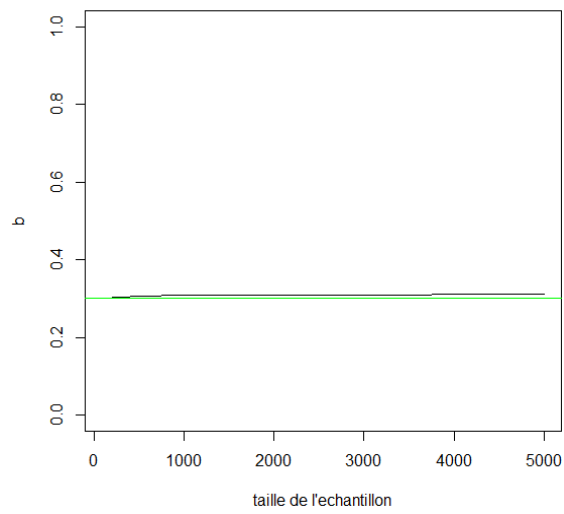


Fig. 4.10

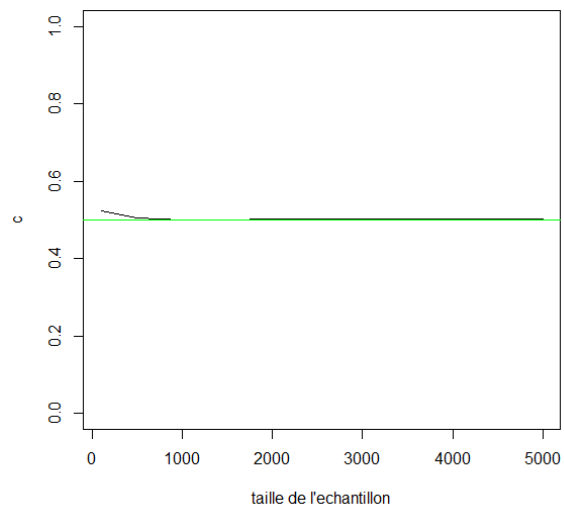


Fig. 4.11

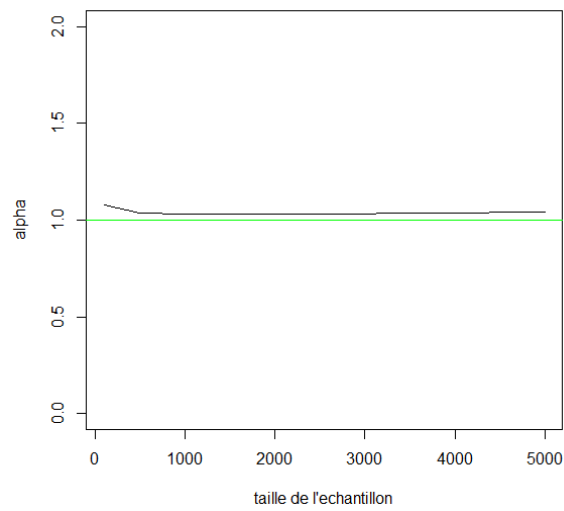


Fig. 4.12

4.2.2 Cas d'un modèle GARCH(1,1) à innovations α -Stable avec α quelconque

- Pour $\alpha = 1,1$

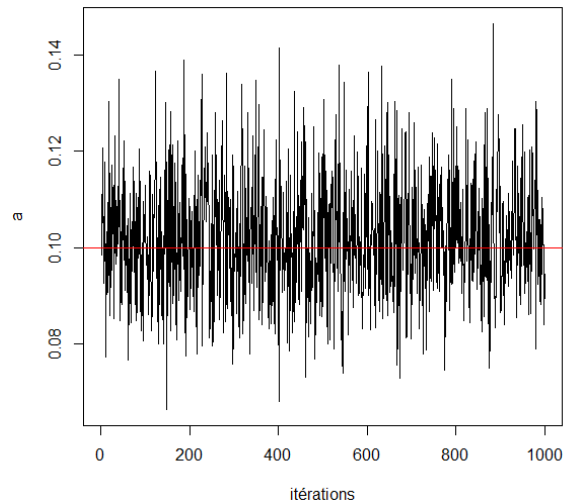
Pour $n = 4000$ avec ($N = 1000$) répétitions, on a obtenu les résultats des estimations des paramètres présentés ci dessous :

$E(\hat{\tau})$	$\sigma(\hat{\tau})$
0.10	0.0128
0.30	0.016
0.499	0.016
1.10	0.02

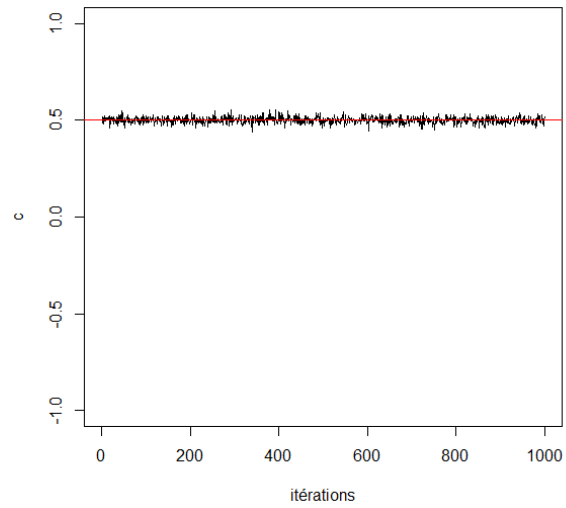
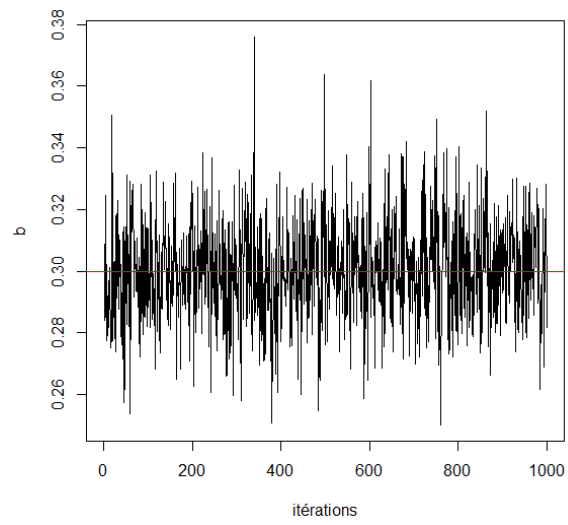
avec $\hat{\tau} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$

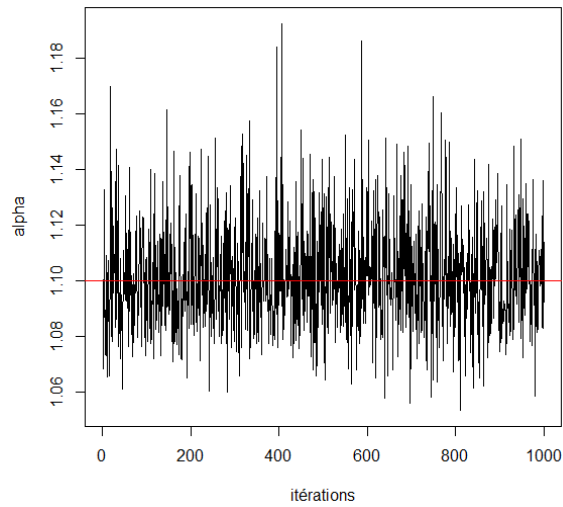
Table 4.3.2

Les figures ci dessous représentent l'évolution des estimateurs $(\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$ au cours des 1000 itérations



4.2. Etude de simulation des modèles $GARCH(1,1)$ à innovations α -Stables





- Pour $\alpha = 1, 5$

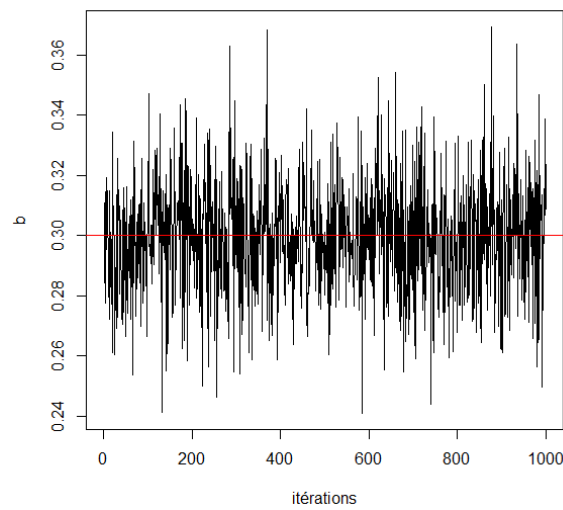
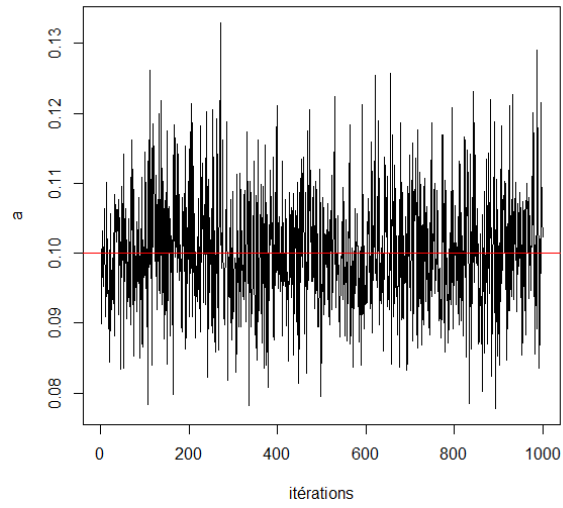
Pour $n = 4000$ avec ($N = 1000$) répétitions, on a obtenu les résultats des estimations des paramètres présentés ci dessous :

$E(\hat{\tau})$	$\sigma(\hat{\tau})$
0.10	0.008
0.299	0.019
0.50	0.025
1.5	0.02

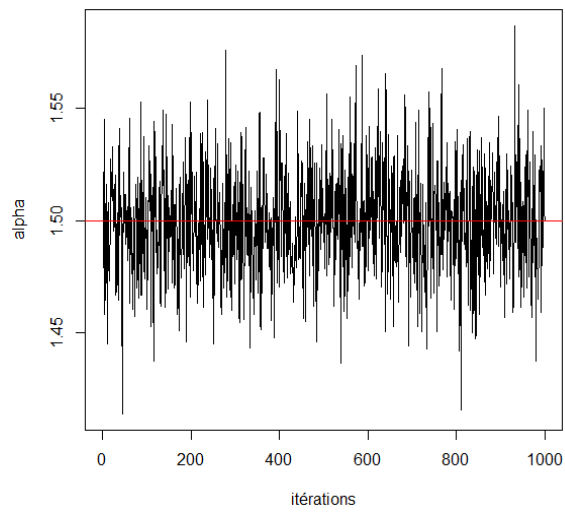
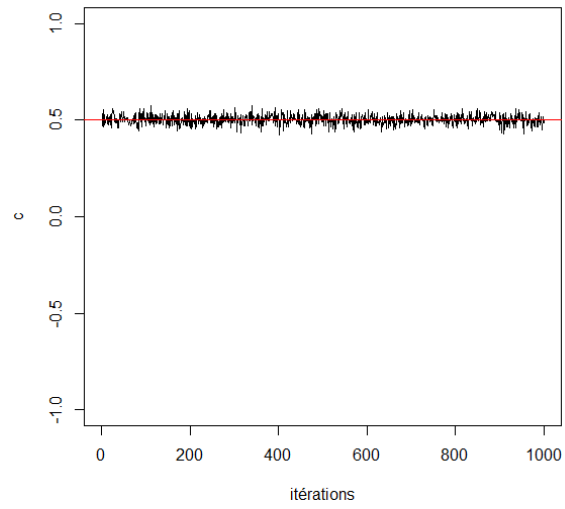
avec $\hat{\tau} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$.

Table 4.3.3

Les graphes ci- dessous présentent les estimateurs au cours des 1000 itérations



4.2. Etude de simulation des modèles $GARCH(1,1)$ à innovations α -Stables



- Pour $\alpha = 1,9$

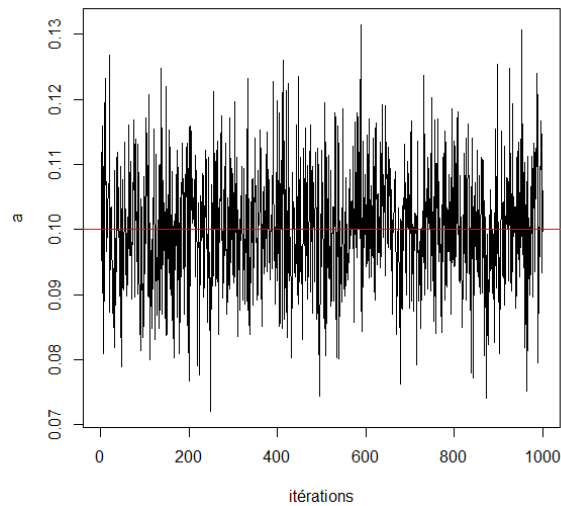
Pour $n = 4000$ avec ($N = 1000$) répétitions, on a obtenu les résultats des estimations des paramètres présentés ci dessous :

$E(\hat{\tau})$	$\sigma(\hat{\tau})$
0.10	0.0097
0.30	0.020
0.50	0.032
1.9	0.0169

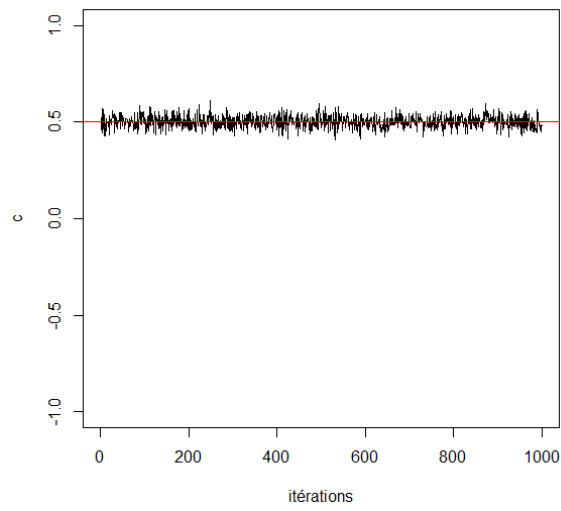
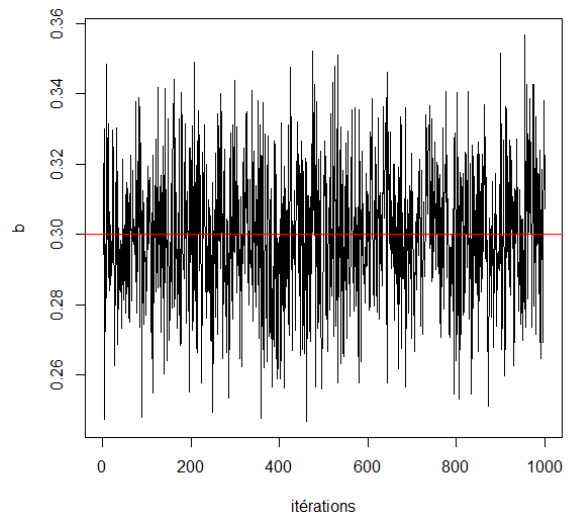
tel que $\hat{\tau} = (\hat{a}, \hat{b}, \hat{c}, \hat{\alpha})$.

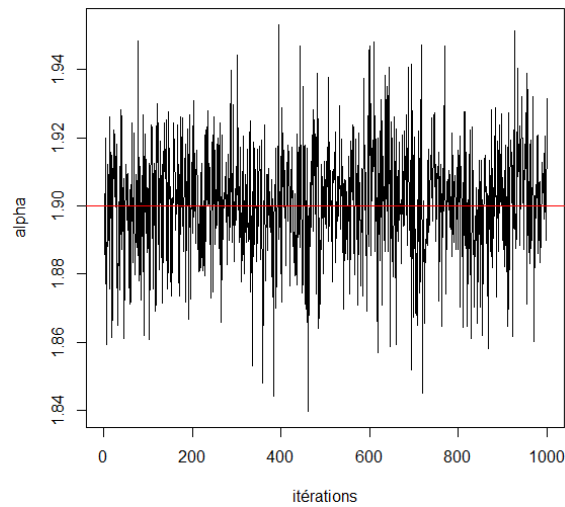
Table 4.3.4

Les graphes ci- dessous présentent les estimateurs au cours des 1000 itérations



4.2. Etude de simulation des modèles $GARCH(1,1)$ à innovations α -Stables





4.2.3 Conclusion

Dès résultats précédents, présentés dans les tables de (4.3.1) à (4.3.4), on constate qu'ils consolident les résultats théoriques concernant la consistance des estimateurs. On effet, les valeurs estimées de τ approchent de la vraie valeur $(0, 1; 0, 3; 0, 5; \alpha)$ et ceci pour tous les cas de alpha; à savoir $\alpha = 1; \alpha = 1, 1; \alpha = 1, 5$ et $\alpha = 1, 9$.

On remarque des graphes des estimateurs que plus on augmente la taille des itérations plus que les estimateurs convergent vers la vrais valeurs.

Afin de mieux voir le comportement de l'estimateur $\hat{\tau}$, dans le cas de Cauchy ($\alpha = 1$), on a fait les graphes de (4.10) jusqu'à (4.13) illustrant l'évolution de cet estimateur par rapport au vrais valeurs ($a = 0, 1; b = 0, 3; c = 0, 5; \alpha = 1$). A partir de ces derniers, il parrait clairement que les valeurs estimées des paramètres approchent rapidement des vrais valeurs.

4.3 Simulation et estimation des paramètres pour des lois α -stables sous Matlab

On a effectué sous le logiciel Matlab, des simulations de modèle GARCH(1,1) avec des innovations de lois alpha stables dans les cas particuliers suivants: la loi Normale $\alpha = 2$, la loi de Cauchy $\alpha = 1$, ensuite nous avons simulé un modèle GARCH(1,1) à innovations de loi de Student, cette loi converge vers une loi alpha stable.

On a appliqué ces programmes pour différentes tailles d'échantillons avec plusieurs itérations. Le modèle s'écrit sous la forme:

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow \text{loi } \alpha\text{-Stable}, 0 < \alpha \leq 2 \\ \sigma_t^2 = a + \sum_{i=1}^q b_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p c_j \sigma_{t-j}^2 \end{cases}$$

Pour vérifier l'efficacité des estimateurs du modèle GARCH(1,1) à innovations alpha stables, nous avons simulé des réalisations d'un processus GARCH(1,1). On a retenu des cas particuliers des lois alpha stables:

- Premier cas: $\alpha = 1 \Rightarrow GARCH(1,1)$ à innovations de loi de Cauchy.
- Deuxième cas: $\alpha = 2 \Rightarrow GARCH(1,1)$ à innovations de loi normale
- Troisième cas: comme la loi de Student est à queue lourde et appartient au même domaine d'attraction que les loi alpha stable on a simulé : $GARCH(1,1)$ à innovations de loi de Student avec $\alpha =$ degré de liberté de student

Pour ce faire dans les trois cas, on a programé l'algorithme ci dessous:

- Simulation d'un échantillon de la variable aléatoire η_t
- Simulation d'un modèle Garch(1,1) stationnaire en spécifiant que les innovations sont de lois alpha stables
- Estimation des paramètres du modèle GARCH.

On a: N nombre d'itérations

n : nombre d'échantillon

$E(\hat{\theta})$: La moyenne du paramètre

$\sigma(\hat{\theta})$: L'écart-type du paramètre

Premier Cas: $\alpha = 2$

On sait que la loi Normale appartient a la famille des lois alpha stables avec $\alpha = 2$, alors nous avons simulé un modèle $GARCH(1,1)$ stationnaire à innovations de loi gaussienne cela a été réalisé pour différents échantillons et plusieurs itérations :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad \eta_t \rightarrow \text{Normale} \\ \sigma_t^2 = 0,2 + 0,28\varepsilon_{t-1}^2 + 0,04\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

La figure ci dessous (Figure) représente l'échantillon $n = 1000$, les autres cas cas n'ont pas été présentés mais ils nous ont servis pour le calcul des estimateurs dans la suite.

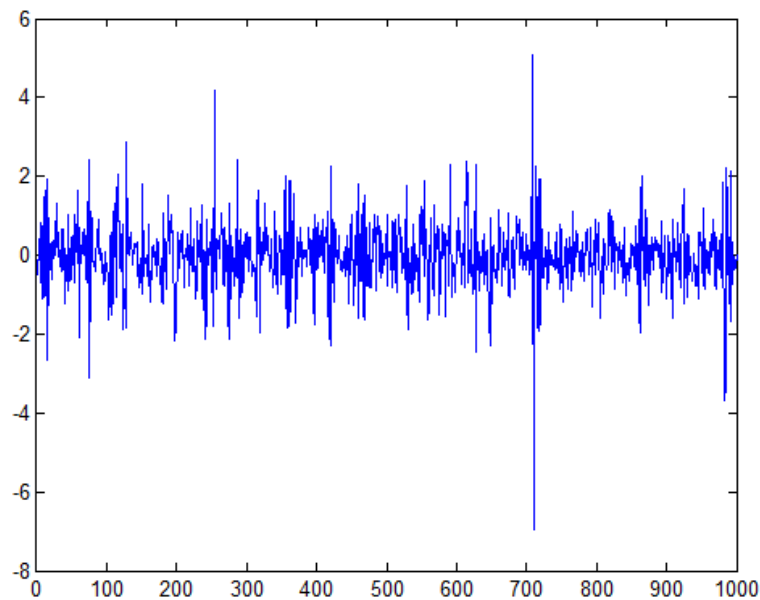


Fig. 4.13-Simulation du modèle Garch(1,1) a innovation de loi Normale ($n = 1000$)

Estimation des paramètres

$N = 100$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,18	0,06	0,19	0,03	0,19	0,02
$b = 0,28$	0,23	0,16	0,27	0,06	0,28	0,05
$c = 0,04$	0,17	0,23	0,07	0,1	0,05	0,08

$N = 500$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,17	0,06	0,19	0,03	0,19	0,02
$b = 0,28$	0,27	0,15	0,26	0,07	0,27	0,05
$c = 0,04$	0,14	0,22	0,07	0,1	0,05	0,07

$N = 1000$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,17	0,06	0,18	0,03	0,19	0,02
$b = 0,28$	0,26	0,16	0,27	0,07	0,27	0,05
$c = 0,04$	0,15	0,24	0,08	0,1	0,06	0,08

On remarque que les estimateurs des paramètres a et b restent constants en augmentant la taille de l'échantillon, par contre le paramètre c , son estimateur s'améliore en augmentant la taille de l'échantillon, autrement dit, plus la taille de l'échantillon est grande plus on rapproche de la vrai valeur. On sais que la variance conditionnel du modèle GARCH dépend du paramètre c .

Deuxième Cas: $\alpha = 1$

La loi de Cauchy appartient à la famille des lois alpha stables avec $\alpha = 1$. Nous avons simulé un modèle $GARCH(1,1)$ stationnaire à innovations de loi Cauchy avec différents échantillons et plusieurs itérations

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow Cauchy \\ \sigma_t^2 = 0,2 + 0,28\varepsilon_{t-1}^2 + 0,04\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Simulation de variable aléatoire de loi de Cauchy:

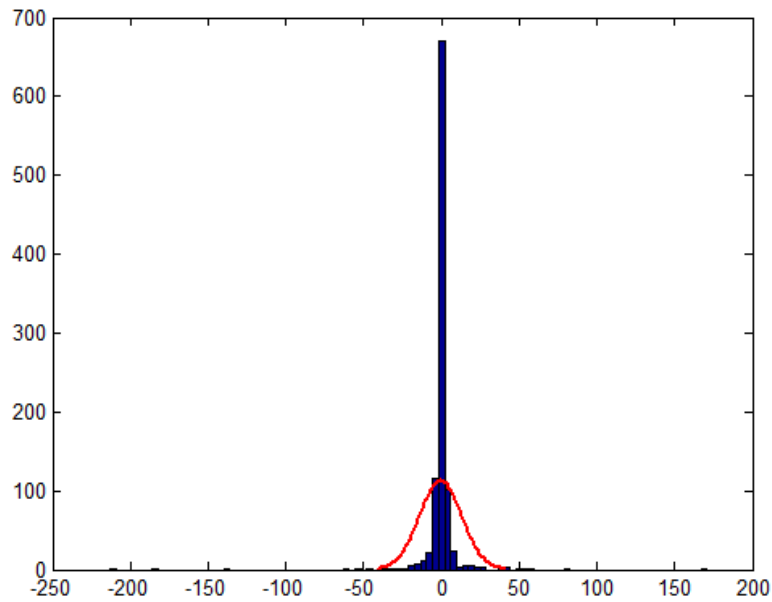


Fig. 4.14-loi de Cauchy ($n = 1000$)

La figure ci dessous (Figure) représente l'échantillon $n = 1000$, les autres cas cas n'ont pas été présentés mais ils nous on servis pour le calcul des estimateurs dans la suite.

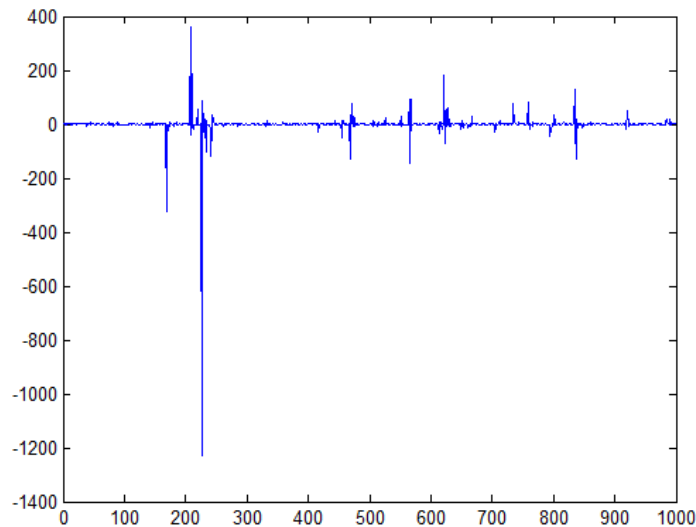


Fig. 4.15-Garch(1,1) à innovation de loi de cauchy ($n = 1000$)

On remarque du graphe du processus simulé, la présence des pics et des clusters de volatilité.

Estimation des paramètres

Les estimateurs des paramètres du $GARCH(1,1)$ à innovations de loi de Cauchy ne peuvent pas être calculées analytiquement, une procédure itérative est utilisée pour ce faire. Cela revient à maximiser la quantité suivante on faisant des itérations par rapport à la l'information jusqu'a l'instant $t - 1$:

$$\max \left(\sum_t (\log \sigma_t - \log (\sigma_t^2 + \varepsilon_t^2)) / \mathcal{F}_{t-1} \right)$$

Avec $\sigma_t > 0$

On a obtenu les résultats d'estimations repris sur les tableaux ci-dessous.

$N = 100$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,29	0.24	0,22	0.07	0,23	0.07
$b = 0,28$	0,30	0.16	0,30	0.07	0,30	0.05
$b = 0,04$	0,04	0.08	0,02	0.02	0,02	0.01

$N = 500$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,29	0.32	0,23	0.10	0,22	0.07
$b = 0,28$	0,29	0.14	0,31	0.07	0,30	0.05
$c = 0,04$	0,03	0.06	0,02	0.02	0,02	0.01

$N = 1000$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,30	0,39	0,24	0,13	0,23	0,1
$b = 0,28$	0,29	0,13	0,30	0,06	0,30	0,05
$c = 0,04$	0,03	0,06	0,02	0,02	0,02	0,01

On remarque que pour le parametre a plus on augmente la taille de l'échantillon plus sa converge vers la vrai valeur. L'estimateur du paramètre b donne des bonne résultats, et il est plus ou moins stationnaire en augmentant la taille de l'échantillon, par contre le paramètre c donne des resultats moins bonne que les autres paramètres, plus on augmente la taille de l'échantillon, plus on s'éloigne de la vrai valeur

Troisième Cas:

Comme la loi de Student est à queue lourde et elle appartient au même domaine d'attraction que la famille des lois alpha stables (domaine d'attraction de Fréchet) avec $\alpha =$ degré de liberté de la loi de Student , on a simulé une modelisation d'un GARCH(1,1) à innovation de student à 5 degrés de liberté.

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, & \eta_t \rightarrow Student \\ \sigma_t^2 = 0,2 + 0,28\varepsilon_{t-1}^2 + 0,04\sigma_{t-1}^2 \end{cases}$$

Simulation d'un modèle GARCH(1,1) à innovations de loi de Student:

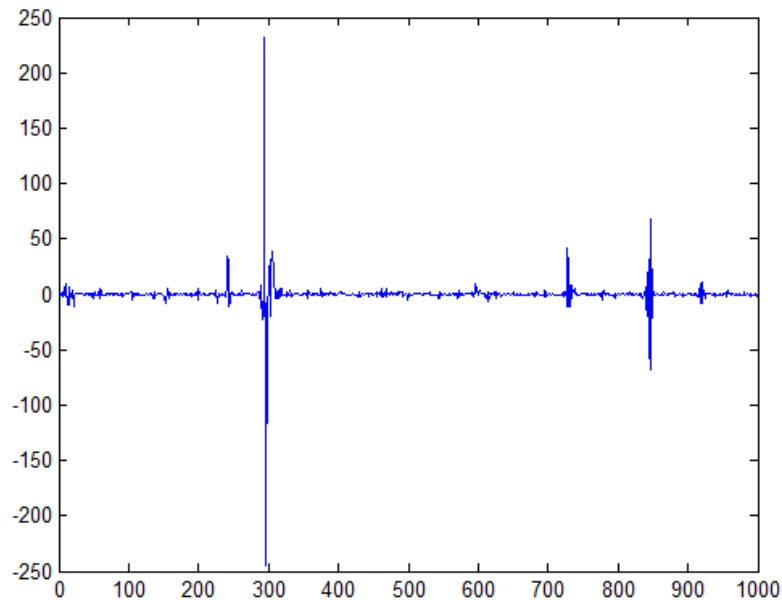


Fig. 4.16-Simulation du modèle Garch(1,1) a innovation de loi de student ($n = 1000$)

Estimations des paramètres :

Estimateurs du MV sous la loi de student

La distribution de Student est souvent utilisée pour prendre en compte un éventuel effet de kurtosis.

Définition 4.3.1 Si la variable z_t admet une distribution de Student à ν degrés de libertés, où $\nu \in \mathbb{N}$ vérifie $\nu > 2$, alors la log-vraisemblance associée à une observation z_t et à l'ensemble de paramètres θ s'écrit :

$$\log L(\theta, \varepsilon_t) = \log \left[\Gamma \left(\frac{\nu + 1}{2} \right) \right] - \log \left[\Gamma \left(\frac{\nu}{2} \right) \right] - 0,5 \left\{ \left[\log [\pi (\nu - 2)] + \log (\sigma_t) + (1 + \nu) \log \left(1 + \frac{\eta_t^2}{\nu - 2} \right) \right] \right\}$$

où $\Gamma(\cdot)$ désigne la fonction Gamma.

On rappelle que :

$$\Gamma(r) = \int_0^{\infty} \exp(-x)x^{r-1}dx \quad r > 0$$

et que

$$\Gamma(k) = (k - 1)! \quad \text{si } k \in \mathbb{N}^*$$

Les résultats des estimations sont données par les tableaux ci dessous

$N = 100$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,29	0,12	0,29	0,07	0,33	0,04
$b = 0,28$	0,37	0,26	0,44	0,15	0,45	0,1
$c = 0,04$	0,14	0,25	0,09	0,1	0,04	0,06

4.3. Simulation et estimation des paramètres pour des lois α -stables sous Matlab

$N = 500$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,2	0,12	0,31	0,07	0,32	0,05
$b = 0,28$	0,4	0,24	0,44	0,15	0,46	0,12
$c = 0,04$	0,1	0,19	0,07	0,12	0,05	0,08

$N = 1000$

	$n = 100$		$n = 500$		$n = 1000$	
	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$	$E(\hat{\theta})$	$\sigma(\hat{\theta})$
$a = 0,2$	0,29	0,15	0,31	0,1	0,32	0,08
$b = 0,28$	0,4	0,27	0,44	0,15	0,46	0,1
$c = 0,04$	0,1	0,23	0,07	0,12	0,05	0,08

Conclusion et perspectives

Les séries financières ou économiques sont fondamentalement volatiles dans la mesure où elles dépendent des facteurs difficiles à prévoir, que ce soient les facteurs géopolitiques, les aléas climatiques ou encore certains événements tels que les perspectives économiques et l'évolution des capacités de production.

Les investisseurs et les gestionnaires des risques sont particulièrement sensibles à la survenance des pertes substantielles. Dans ce contexte, il est primordial de disposer des outils permettant de mieux quantifier les risques liés aux fluctuations des séries financières.

Nous avons adopté une approche conditionnelle de la théorie des valeurs extrêmes et plus précisément la famille des lois alpha stables. Cette approche consiste à filtrer les chroniques à travers un modèle de type GARCH à innovations de α - stables.

Il importe de préciser, que les modèles GARCH(1,1) font partie des modèles les plus usités dans le domaine économique et plus précisément dans la modélisation des séries financières du fait qu'elles présentent souvent une forte volatilité stochastique et des queues lourdes.

Les modèles GARCH(1,1) à innovations de lois α - stables, possèdent des propriétés attrayantes et reflètent l'aspect dynamique de la volatilité et permettent de capturer la lourdeur des queues.

Dans ce mémoire nous avons traité les modèles GARCH(1.1) à innovations de lois α - stables, avec différentes valeurs de α tel que $0 < \alpha \leq 2$. On a constaté que la qualité de l'estimateur est satisfaisante, car elle prend en compte l'asymétrie et la lourdeur de la queue. Les simulations obtenues par $\alpha = 1$ (loi de Cauchy), nous ont permis de voir que malgré l'absence de tous les moments, les résultats de la simulation sont acceptables. L'existence du maximum de vraisemblance n'est pas garanti dans ce cas.

Les résultats de simulation ont montré que pour les autres valeurs de l'indice de stabilité α , les paramètres du modèle estimés sont proches des vraies valeurs (fixées au départ). Donc nous concluons, à part pour $\alpha = 1$ (loi de Cauchy), les estimateurs sont consistants (étude empirique).

Ce travail ouvre les portes à la recherche dans le domaine des lois α - stables adaptées aux séries chronologiques. Il serait intéressant de vérifier que le maximum de vraisemblance possède un maximum, moyennant des hypothèses supplémentaires, lorsqu'il s'agit des modèles GARCH à innovations de la loi de Cauchy.

Bibliographie

- [1] Alvarez.A et Olivares.P.(2005).Méthodes d'estimation pour des lois stables avec des applications en finance.Journal de la Société Française de Statistique, tome 146, N°4.
- [2] Banzouzi.K.(2011).Mesures de dépendance pour une modélisation alpha-stable.Application aux séries chronologiques stables.Thèse de doctorat.
- [3] Bougerol,P et Picard.N.(1992).Strict stationarity of generalised autoregressive processes.Annals of probability,20,No.4,1714-1730.
- [4] D'Estampes.L.(2003).Traitement statistique des processus alpha-stables,mesures de dépendance et identification des ar stables,tests sequentiels tronques.Thèse de doctorat.
- [5] Diongue.A.K,(2008),An investigation of the stable-Paretian Asymmetric Power GARCH model, journal des sciences.Vol.8,N°4,15 – 26.
- [6] El-Adlouni.S,Bobée.B,Ouarda. T.B.M.J.(2007).Caractérisation des distributions à queue lourde pour l'analyse des crues,Rapport de recherche No R-929.ISBN:978-2-89146-541-0.
- [7] Feller,W (1968). An Introduction to Probability,Theory and Its Applications.
- [8] Fiche.A.(2012).Distributions α -stables pour la caractérisation de phénomènes aléatoires observés par des capteurs placés dans un environnement maritime.Thèse de doctorat.
- [9] Francq.C et Zakoian.J.M.(2009).Modèles GARCH et à volatilité stochastique.<http://perso.univ-lille3.fr/~cfrancq/Christian-Francq/cours-GARCH-ENSAE/poly09.pdf>.

-
- [10] Francq.C et Zakoian.J.M.Estimating the marginal law of a time series with applications to heavy tailed distributions CREST and Université Lille 3 (EQUIPPE).
- [11] Frain.J.C.(2009).Studies on the Application of the α -stable Distribution in Economics (thèse de doctorat).
- [12] Hauksson.H.A,RACHEVS.T.(2001) Stable option pricing model,Pergamon mathematical and computer modeling 34- 1199-1212.
- [13] Hurlin.C.(2007).Value-at-Risk.Université d'Orléans.
- [14] Hurlin.C.(2007).Econométrie pour la Finance Modèles ARCH - GARCH Applications à la VaR.Université d'Orléans.
- [15] Koahemyak.A(2006).Modélisation des séries financières à l'aide de processus invariant d'échelle,Application à la prédiction du risque.Thèse de doctorat.
- [16] Lepage.G,(2012),Inférence statistique des modèles conditionnellement hétéroscédastiques avec innovations stables,contraste non gaussien et volatilité mal spécifiée.Thèse de doctorat.
- [17] Mandelbrot.B.(1963).The Variation of Certain Speculative Prices, The Journal of Business,Vol.36,No.4, pp.394-419
- [18] Messali.Z.(2000).Méthode hybride à base d'ondelettes pour la détection de contour avec la règle de fusion " AND".Thèse de doctorat.
- [19] Mittnik.S,Paolella.M.S,et S.T.Rachev.(2002).Stationarity of stable power-GARCH processes.Journal of Econometrics,106(1):97-107.
- [20] Nolan,J.(1997).Numerical calculation of stable densities and distribution functions.Communications in Statistics-Stochastic Models 13(4), 759-774.
- [21] Nolan.J.P(2009),Stable distributions models for heavy tailed(<http://academic2.american.edu/~jpnolan/stable/chap1.pdf>).

-
- [22] Omelchenko.V.(2009).Parameter Estimation of the Stable GARCH(1,1)-Model, MAT-FYZPRESS,WDS'09 Proceedings of Contributed Papers, Part I, 137–142, 2009.
- [23] Panorska.A.K,Mittnik.S et Rachev.S.T.(1995).Stable Garch models for financial time series Pergamon Appl. Math.Lett.Vol.8, No.5, pp. 33-37, 1995.
- [24] Parrini .A.(2012).Indirect estimation of GARCH models with alpha-stable innovations,Online at <http://mpa.ub.uni-muenchen.de/38544/>, MPRA Paper No. 38544, posted 4.
- [25] Samorodnitsky,G.et Taqqu, M. S.(1994).Stable non-Gaussian random processes: Stochastic Models with Infinite Variance. Stochastic Modeling.Chapman & Hall, NewYork-London.
- [26] Temam.K.(2010).Analyse des séries chronologiques à queues lourdes et valeurs extrêmes.mémoire de magister.
- [27] Zolotarev,V.M.(1986).One-dimensional Stable Distributions,Vol.65.American Mathematical Society,translation from the original 1983 russian edition..
- [28] Distribution α -stable,(<http://fordom.free.fr/loistable/Loi%20alpha%20stable.pdf>).
- [29] Chambers.J, Mallows.C. L. et Stuck.B. W.(1976). A Method for Simulating Stable Random Variables. Journal of the American Statistical Association, Vol. 71 (354), 340-343.
- [30] <http://cermics.enpc.fr/~alfonsi/mrf-quantile.pdf>.
- [31] Herlemont.D.(2007).Valeurs Extrêmes. <http://www.yats.com/doc/r-trading-tp-005-statements.pdf>.