

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE «HOUARI BOUMEDIENNE»
FACULTE DE MATHEMATIQUES



Thèse

Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT d'ETAT

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par

MIHOUBI Miloud

Sujet

Polynômes Multivariés de Bell
et
Polynômes de Type Binomial

Soutenue le 25/12/2008 devant le jury composé de:

Mr. Hacène AIT HADDADENE	Professeur	USTHB	Président
Mr. Sadek BOUROUBI	Maître de Conférences	USTHB	Directeur de Thèse
Mr. Hacene BELBACHIR	Maître de Conférences	USTHB	Examineur
Mr. Farid BENCHERIF	Maître de Conférences	USTHB	Examineur
Mr. Abdelhafid BERRACHEDI	Professeur	USTHB	Examineur
Mr. Abdallah Farid MOKRANE	Professeur	Paris VIII	Examineur

**Polynômes multivariés de Bell
et
polynômes de type binomial**

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Doctorat d'Etat en Mathématiques

Miloud MIHOUBI

Table des matières

Remerciements	4
Introduction	6
1 Polynômes de Bell, polynômes binomiaux et fonctions composées	9
1.1 Polynômes de Bell exponentiels	9
1.1.1 Généralités	9
1.2 Polynômes de Bell ordinaires	11
1.3 Polynômes binomiaux	13
1.4 Dérivée d'ordre n d'une fonction composée	14
1.4.1 Formule de Faà di Bruno	14
1.5 Argument combinatoire	15
1.5.1 Version partition d'un ensemble	16
1.5.2 Version polynôme de Bell (Formule de Riordan)	17
1.5.3 Formule déterminantale	19
2 Polynômes de Bell et polynômes binomiaux	20
2.1 Polynômes de Bell et polynômes binomiaux	20
2.2 Quelques formules pour les polynômes de Bell	27
2.3 Polynômes de Bell et convolution	31
2.4 Polynômes de Bell à arguments tronqués	35

2.5	Polynômes de Bell et variables aléatoires	37
3	Polynômes de Bell et dérivées des fonctions d'une suite binomiale	41
3.1	Introduction	41
3.2	Résultats obtenus	42
3.3	Applications	44
3.3.1	Quelques application du Théorème 3.2	44
3.3.2	Quelques applications du Théorème 3.3	47
3.3.3	Quelques applications du Théorème 3.4	48
3.3.4	Quelques applications du Théorème 3.5	51
3.4	Preuves du lemme et des théorèmes	51
4	Congruences et polynômes de Bell	56
4.1	Introduction	56
4.2	Congruences et polynômes complets de Bell	57
4.3	Congruences et polynômes partiels de Bell	60
5	Polynômes de Bell et relations inverses	69
5.1	Polynômes de Bell et relations inverses	69
5.2	Applications aux suites récurrentes linéaires	71
5.3	Polynômes de Bell, polynômes binomiaux et relations inverses	73
6	Le Théorème binomial multivarié	78
6.1	Introduction	78
6.2	Le Théorème binomial multivarié	79
6.3	L'inverse du Théorème binomial multivarié	81
7	Polynômes de Bell, partitions d'un entier et convexité	85
7.1	Introduction	85

<i>Polynômes multivariés de Bell et polynômes de type binomial.....M. Mihoubi</i>	3
7.2 Nombres de partitions d'un entier et polynômes de Bell	86
7.3 Converxité des suites $\{p(n)\}$ et $\{p(n, k)\}$	88
8 Une récurrence généralisée pour les polynômes de Bell	93
8.1 Introduction et résultat obtenu	93
8.2 Preuve du résultat obtenu	94
Conclusion et Perspectives	96

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma profonde reconnaissance à mes parents qui ont toujours tout donné pour que je fasse des études. J'exprime aussi ma profonde gratitude à ma Femme Nadia qui a su prendre en charge mes caprices et mon stress, sans qui cette thèse n'aurait jamais eu lieu.

Je tiens aussi à exprimer ma reconnaissance à mon Directeur de Thèse Sadek Bouroubi. Je lui adresse mes plus sincères remerciements pour sa disponibilité à mon égard et pour ses précieux conseils.

Je suis aussi très reconnaissant à Messieurs : Hacène Belbachir d'avoir accepté d'examiner ce travail et pour son aide sans réserve durant la rédaction de cette Thèse ; Hacène Aït Haddadène d'avoir accepté de présider mon jury et à Abdelhafid Berrachedi d'avoir accepté d'examiner ce travail, ainsi que pour leur aide et leur soutien. Mes remerciements vont également à Messieurs Farid Bencherif et Abdellah Farid Mokrane qui m'ont honoré par leur présence dans mon jury.

Je n'aurai sans doute jamais achevé mes études sans le soutien, les encouragements permanents et les enseignements de notre cher Professeur Mohamed Bentarzi ainsi que ceux de Madame Hafida Guerbyenne et Messieurs Ahmed Boukhebbouze, Abdelhakim Aknouche et Fayçal Hamdi avec qui j'ai eu des discussions enrichissantes et fructueuses.

Qu'il me soit aussi permis de remercier tous ceux qui, par leur présence et leur amitié, ont contribué à cette longue épopée : Isma Bouchemakh, Mourad Boudhar, Abdenour Chabour, Mohamed Said Maamra et tous les Collègues du Département de Recherche Opérationnelle.

A la mémoire de mes parents,
A la mémoire de mon frère Ahmed,
A ma femme Nadia et à mes enfants Ahmed-Redha et Lina,
A mes frères et à mes soeurs,
A tous les membres de ma famille,
A tous mes amis.

Introduction

Les polynômes de Bell ont été étudiés par E. T. Bell [11] et apparaissent comme un outil mathématique standard. Ils interviennent fortement en analyse combinatoire [61]. Comtet, [30], a étudié les polynômes de Bell et a donné un bagage de base sur leurs propriétés. Quelques applications en analyse combinatoire ont été données par Riordan [59] et d'autres en Calculs Ombrals par S. Roman [66]. En effet, les polynômes de Bell sont considérés comme un outil mathématique important [62], et sont appliqués dans plusieurs domaines différents, on y trouve : l'évaluation de quelques intégrales et sommes alternées [28] et [63]; les relations internes des invariants orthogonaux d'un opérateur compact et positif [20]; le problème de Blissard [63, p. 46]; les règles de la somme de Newton pour les zéros des polynômes [43]; les relations récurrentes pour une classe des polynômes de type de Freud [13]; les nouveaux résultats sur la méthode d'Adomian [44]; les processus stochastiques en combinatoire [55] et plusieurs autres sujets.

L'application large des polynômes de Bell donne une motivation à développer davantage.

Récemment, en utilisant la formule d'inversion de Lagrange (LIF) et les suites binomiales, quelques identités concernant les polynômes partiels de Bell ont été établies [1]. Nous établissons d'autres identités concernant les polynômes partiels et complets de Bell et des relations entre ces derniers et les suites binomiales, voir [50], [51], [52] et [53].

Les suites binomiales, de leur part, sont très connues et anciennes. L'intérêt de telles suites dans notre travail provient du fait qu'elles présentent une forte connexion avec les polynômes de Bell. Plusieurs relations entre ces deux concepts mathématiques sont connues, nous présentons ici notre contribution à l'élaboration de nouvelles relations. Nous verrons par la suite qu'on peut déduire facilement une suite binomiale à partir d'une simple identité sur les polynômes de Bell et vice versa.

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les polynômes de Bell ont été définis par E. T. Bell. La dénomination "polynômes de Bell" a été introduite par Riordan dans [61], qui observe pour la première fois qu'ils se prêtent parfaitement à la description de la formule de Faà di Bruno [60] que nous développons de manière étendue dans le premier chapitre. Ensuite, ils ont été étudiés en combinatoire, avec les congruences, les probabilités et en d'autres problèmes par plusieurs auteurs depuis 1950 à 1980 tels que Riordan et Carlitz, et ont été utilisés d'une manière assez large dans différents domaines.

Les polynômes de Bell, par leur simplicité qui réside réellement en les expressions récurrentes d'une part, et du fait qu'ils sont fonctions des suites numériques d'autre part, ont été utilisés d'une manière très large comme un outil mathématique et combinatoire par lequel des intégrales, des identités mathématiques, des probabilités et plusieurs fonctions sont exprimées et des interprétations combinatoires sont identifiées. Une application aussi intéressante récemment apparue est les distributions de probabilités associées aux partitions de Gibbs. Cette application intervient dans les propriétés asymptotiques des nombres des partitions d'un entier et plusieurs autres aspects liés à la tendance probabiliste, voir [4]. Elle intervient aussi, fortement dans l'analyse des processus aléatoires tels que les processus de fragmentation et de congulation concernant des aspects mathématique et physique, voir [56] et [12], qu'on n'a pas développé dans ce travail.

Pour la présente étude, on met on exergue des relations entre les polynômes de Bell et les suites binomiales, leurs dérivées successives, des identités combinatoires, des congruences, des formules d'inversions, de suites multinomiales et des nombres de partitions d'un entier. Ces travaux sont organisées comme suit :

Le premier chapitre contient des concepts généraux sur les polynômes de Bell, les suites binomiales et les fonctions composées. On y présente des généralités sur les polynômes (exponentiels) partiels et complets de Bell ; quelques relations récurrentes qui les concernent ; l'interprétation combinatoire et probabiliste des polynômes (ordinaires) de Bell ; les dérivées d'ordre n d'une fonction composée et la formule de Faà di Bruno et ses différentes versions.

Dans le deuxième chapitre, on propose de montrer le lien fort qui existe entre les suites binomiales et les polynômes de Bell. Le lien qu'on présente, on l'exploite pour déduire plusieurs identités concernant les polynômes partiels et complets de Bell et des résultats exprimant les liens entre les polynômes de Bell eux mêmes.

Dans le troisième chapitre, on propose de montrer le lien fort qui existe entre les

dérivées successives des fonctions d'une suite binomiale et les polynômes de Bell.

Dans le quatrième chapitre, on propose, en utilisant certains résultats du deuxième chapitre et certains résultats de Carlitz [19], d'établir quelques identités de congruences concernant les polynômes partiels de Bell. Ces résultats seront utilisés pour déduire des identités sur les nombres de Stirling et les coefficients binomiaux, voir [8].

Dans le cinquième chapitre, on établit des formules d'inversions de certaines suites, ceci en utilisant quelques résultats du deuxième chapitre et un travail publié dans [27]. Les relations qu'on présente seront déduites à partir des fonctions inverses, des fonctions réciproques et de la formule d'inversion de Lagrange.

Dans le sixième chapitre, on propose un travail généralisant celui de Carlitz, voir [17], [18] et [40]. On montre un cas général du théorème de MacMahon en utilisant le théorème de Cauchy sur les intégrales complexes et on établit aussi un inverse en introduisant un opérateur multidimensionnel. On déduit par la suite des suites binomiales à plusieurs variables.

Dans le septième chapitre, on propose une étude sur les nombres de partitions d'un entier. On établit une relation liant ces nombres et les polynômes complets de Bell ainsi que leur convexité dans différents cas.

Dans le huitième chapitre, on propose un travail concernant l'écriture des polynômes de Bell d'une seule variable dans une famille de bases spécifiques.

Chapitre 1

Polynômes de Bell, polynômes binomiaux et fonctions composées

Les polynômes exponentiels de Bell englobent la plupart des suites de type binomial. Ils ont été introduits par E.T. Bell [11] et sont décrits dans plusieurs références dont [30], [59] et [66]. Les définitions (élémentaires) des polynômes de Bell et des suites binomiales; leur lien avec les fonctions composées et quelques propriétés générales les concernant sont données ci-dessous.

1.1 Polynômes de Bell exponentiels

1.1.1 Généralités

Définition 1.1 *Les polynômes partiels (exponentiels) de Bell sont les polynômes $B_{n,k}(a_1, a_2, \dots)$ de nombre infini de variables a_1, a_2, \dots , définis par leur fonction génératrice (exponentielle) :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!} \right)^k. \quad (1.1)$$

Définition 1.2 *Les polynômes complets (exponentiels) de Bell sont les polynômes $A_n(a_1, a_2, \dots)$ définis par leur fonction génératrice (exponentielle) par :*

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a_1, a_2, \dots) \frac{t^n}{n!}. \quad (1.2)$$

ou, en d'autre terme, sont définis par

$$A_n(a_1, a_2, \dots) := \sum_{k=1}^n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots), \quad n \geq 1, \quad \text{et} \quad A_0(a_1, a_2, \dots) := 1. \quad (1.3)$$

Théorème 1.3 [30] Les polynômes partiels de Bell, $B_{n,k}(a_1, a_2, \dots)$, admettent l'expression exacte :

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \dots, \quad (1.4)$$

où $\pi(n, k)$ est l'ensemble de toutes les solutions (k_1, k_2, \dots) des entiers naturels tels que :

$$k_1 + k_2 + k_3 + \dots = k \quad \text{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + \dots = n, \quad (1.5)$$

et

$$A_n(a_1, a_2, \dots) = \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots=n} \frac{n!}{k_1!k_2!\dots} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} \dots \quad (1.6)$$

Il résulte du Théorème 1.3 que $B_{n,k}$ contient $p(n-k, k)$ monômes, où $p(n, k)$ est le nombre de partitions de n en k (≥ 1) parts sans tenir compte de leur ordre.

Voici quelques identités célèbres :

$$\begin{aligned} B_{n,k}(1!, 2!, \dots, i!, \dots) &= \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!} \quad \text{les nombres de Lah,} \\ B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) &= s(n, k) \quad \text{les nombres de Stirling de première espèce,} \\ B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \dots) &= |s(n, k)| \quad \text{les nombres de Stirling absolus de première espèce,} \\ B_{n,k}(1, 1, 1, \dots) &= S(n, k) \quad \text{les nombres de Stirling de deuxième espèce,} \\ B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) &= \binom{n}{k} k^{n-k} \quad \text{les nombres idempotents.} \end{aligned}$$

Pour deux fonctions f et g suffisamment dérivables, la formule de Faà di Bruno donne les coefficients de Taylor de $f \circ g$, et donne lorsque $f = g$ les coefficients de Taylor de $f \circ f$, et plus généralement, elle donne les coefficients de Taylor de $f^{(r)} = f^{(r-1)} \circ f$, $r \geq 1$, avec $f^{(1)} := f$.

Théorème 1.4 [30] (Formule de Faà di Bruno). Soient f et g deux séries de Taylor avec $f(t) := \sum_{n \geq 0} f_n \frac{t^n}{n!}$; $g(t) := \sum_{n \geq 1} g_n \frac{t^n}{n!}$ et $h := f \circ g$ définie par $h(t) = f(g(t)) := \sum_{n \geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}$. Alors les coefficients h_n sont déterminés par :

$$h_0 = f_0 \quad \text{et} \quad h_n = \sum_{k=1}^n f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \dots). \quad (1.7)$$

Les relations récurrentes données ci-dessous sont bien connues, voir [30] et [73]. Elles servent de déterminer $B_{n,k}$ à partir de $B_{n-1,k-1}, B_{n-2,k-1}, \dots, B_{k-1,k-1}$ et A_n à partir de $A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0$. Nous les présentons ici en leur donnant une nouvelle preuve.

Proposition 1.5 *Pour toute suite réelle $\{a_n\}$ on a :*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} a_j B_{n-j,k-1}(a_1, a_2, \dots) &= k B_{n,k}(a_1, a_2, \dots), \\ \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} j a_j B_{n-j,k-1}(a_1, a_2, \dots) &= n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots). \end{aligned} \tag{1.8}$$

et

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j a_j A_{n-j}(a_1, a_2, \dots) = n A_n(a_1, a_2, \dots). \tag{1.9}$$

Preuve. A partir de la définition des polynômes de Bell ou du Théorème 1.3, on peut vérifier aisément que :

$$\begin{aligned} B_{n,k}(a_1 x, a_2 x, \dots) &= x^k B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \quad \text{et} \\ B_{n,k}(a_1 x, a_2 x^2, a_3 x^3, \dots) &= x^n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots), \end{aligned} \tag{1.10}$$

La preuve de la proposition résulte des Identités (1.10) et du fait qu'on a :

$$D_x B_{n,k}(f_1(x), f_2(x), \dots) = \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} (D_x f_j(x)) B_{n-j,k-1}(f_1(x), f_2(x), \dots)$$

pour toute suite $\{f_n(x)\}$ de fonctions dérivables. La relation (1.9) découle de la définition ou par sommation sur k de 1 à n de la seconde relation de (1.8). \square

Une autre relation utile pour la suite est donnée par :

Proposition 1.6 [30] *On a :*

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^k B_{n-k,k-j} \left(\frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, \dots \right) \frac{a_1^j}{j!}, \quad n \geq k \geq 1. \tag{1.11}$$

1.2 Polynômes de Bell ordinaires

Une autre classe des polynômes de Bell, appelée "polynômes de Bell ordinaires", est d'un rôle particulier. Ces polynômes possèdent des propriétés similaires à celles des polynômes (exponentiels) de Bell.

Définition 1.7 Les polynômes partiels (ordinaires) de Bell $\tilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, a_3, \dots)$ sont définis par :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \tilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, \dots) z^n = \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m z^m \right)^k, \quad (1.12)$$

et les polynômes complets (ordinaires) de Bell $\tilde{A}_n(a_1, a_2, a_3, \dots)$ sont définis par :

$$\tilde{A}_n(a_1, a_2, a_3, \dots) := \sum_{k=1}^n \tilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \quad \text{avec } \tilde{A}_0 := 1, \quad (1.13)$$

ou par leur fonction génératrice

$$\exp \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m t^m \right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}_n(a_1, a_2, \dots) t^n \quad (1.14)$$

A partir de la définition, on peut vérifier qu'on a la propriété suivante :

$$\tilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, a_3, \dots) = \frac{k!}{n!} B_{n,k}(1!a_1, 2!a_2, 3!a_3, \dots). \quad (1.15)$$

Comme dans le cas exponentiel, ce type de polynômes admet une expression explicite donnée par le Théorème de Faà di Bruno :

Théorème 1.8 Les polynômes partiels (ordinaires) de Bell $\tilde{A}_{n,k}(a_1, a_2, a_3, \dots)$ sont donnés par :

$$\tilde{B}_{n,k}(a_1, a_2, \dots) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{k!}{c_1!c_2!\dots} (a_1)^{k_1} (a_2)^{k_2} \dots$$

Interprétation. Notons que la quantité $\frac{k!}{k_1!k_2!\dots k_n!}$ présente le nombre de manière de former des mots à k lettres avec c_i lettres sont égales à a_i ($1 \leq i \leq n$). Les coefficients d'un polynôme complet (ordinaire) de Bell peuvent être interprétés comme le nombre de manière d'écrire les monômes (en variables a_i) associés à chaque partition de n . Par exemple, pour calculer \tilde{A}_4 , on écrit les monômes en variables a_i associés aux partitions du nombre $n = 4$: $a_4, a_3a_1, a_2^2, a_2a_1^2, a_1^4$. Maintenant, pour écrire a_4, a_2^2 ou a_1^4 , il y a qu'une seule façon ; pour écrire a_3a_1 , il y a deux façons : a_3a_1 et a_1a_3 et pour écrire $a_2a_1^2$, il y a trois façons : $a_2a_1^2, a_1a_2a_1$ et $a_1^2a_2$. On obtient alors $\tilde{A}_4 = a_4 + 2a_3a_1 + a_2^2 + 3a_2a_1^2 + a_1^4$.

L'interprétation précédente peut être considérée comme un processus sur une chaîne de longueur n dans laquelle on cherche le nombre de manière de passer du plus petit élément (0) de la chaîne au plus grand élément (n) de la chaîne. Par exemple, pour

une chaîne de longueur 3 : $0 \longrightarrow 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3$. On peut aller de 0 à 3 en un seul pas, ce qui donne a_3 . Pour aller de 0 à 3 en deux pas, on peut aller de 0 à 1 puis de 1 à 3 ou de 0 à 2 puis de 2 à 3, ce qui donne de $2a_1a_2$. Pour aller de 0 à 3 en trois pas, on peut aller de 0 à 1 puis de 1 à 2 puis de 2 à 3, ce qui donne de a_1^3 . Donc $\tilde{A}_3 = a_3 + 2a_2a_1 + a_1^3$. On interprète cela comme un modèle de probabilité en considérant l'événement :

E_n : se ballader sur un intervalle de longueur n avec un ou plusieurs sauts.

Du fait que chaque élément est minimal par rapport aux éléments qui le suivent, alors les événements E_n sont récurrents. Soit $g_n := P(E_n)$, donc d'après ce qui précède, l'événement E_n est la réunion disjointe des événements J_k , où J_k est l'événement : "faire un saut direct de longueur k ". Si $f_k := P(J_k)$, on obtient :

Théorème 1.9 [36] (*Equation de renouvellement*). *Pour un événement récurrent E , soit*

$$g_n := P(E \text{ se réalise à l'instant } n) \quad \text{et}$$

$$f_k := P(E \text{ se réalise pour la première fois à l'instant } k)$$

On a alors $g_n = \tilde{A}_n(f_1, f_2, \dots)$.

1.3 Polynômes binomiaux

Une famille de polynômes $\{f_n(x)\}$ est dite suite de type binomial si elle obeit à l'identité binomiale suivante :

$$f_n(x+y) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f_k(x) f_{n-k}(y) \quad \text{et} \quad f_1'(0) \neq 0. \quad (1.16)$$

Si de plus $f_0(x) = 1$, alors la condition $f_1'(0) \neq 0$ assure que la fonction $f_n(x)$, pour toute valeur de n , est un polynôme de degré n . C'est cette classe de suites binomiales que l'on considère dans notre travail. Il est connu que $f_n(x)$ peut se mettre sous la forme :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(a_1, \dots, a_{n-k+1}) x^k = A_n(xa_1, \dots, xa_n), \quad n \geq 1 \quad (1.17)$$

où $\{a_n\}$ est une suite réelle donnée avec $a_1 \neq 0$, voir [66, p. 82].

A partir de (1.17), on peut vérifier que la suite $\{a_n\}$ est donnée par :

$$a_n = f_n'(0) \quad (1.18)$$

Il est aussi connu que $f_n(x)$ peut se mettre sous la forme, voir [30, p. 141] :

$$f_n(x) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1})(x)_{(k)} \quad \text{avec } f_0(x) = 1, \quad (1.19)$$

où $(x)_{(0)} := 1$, $(x)_{(k)} := x(x-1)\dots(x-k+1)$ pour $k \geq 1$ et $\{a_n\}$ est une suite réelle donnée avec $a_1 \neq 0$.

A partir de (1.19), pour $x = 1$, on peut vérifier que la suite $\{a_n\}$ est donnée par :

$$a_n = f_n(1). \quad (1.20)$$

Pour plus de détails, voir [2], [30], [62] et [66].

Voici quelques exemples des suites binomiales :

$$f_n(x) = x^n;$$

$$f_n(x) = (x)_{(n)} \quad \text{où } (x)_{(n)} := \begin{cases} x(x-1)\dots(x-n+1) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases};$$

$$f_n(x) = (x)^{(n)} \quad \text{où } (x)^{(n)} := \begin{cases} x(x+1)\dots(x+n-1) & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases};$$

$$f_n(x) = B_n(x) := \sum_{j=1}^n S(n, j) x^j = \exp(-x) \sum_{j \geq 0} \frac{j^n}{j!} x^j;$$

$$f_n(x) = n! \binom{x}{n}_q := \sum_{j=1}^n B_{n,j} \left(\binom{1}{1}_q, \dots, i! \binom{1}{i}_q, \dots \right) (x)_{(j)},$$

où $\binom{k}{n}_q$ est le $n^{\text{ème}}$ coefficient binomial défini dans [8] et [9].

Les fonctions génératrices exponentielles des suites binomiales données ci-dessus sont, respectivement, données par :

$$\exp(xt), \quad (1+t)^x, \quad (1-t)^{-x}, \quad \exp(x(e^t-1)) \quad \text{et} \quad (1+t+t^2+\dots+t^{q-1})^x.$$

1.4 Dérivée d'ordre n d'une fonction composée

1.4.1 Formule de Faà di Bruno

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors :

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(t)) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots} g^{(k)}(f(t)) \left(\frac{f'(t)}{1!} \right)^{k_1} \left(\frac{f''(t)}{2!} \right)^{k_2} \dots, \quad (1.21)$$

La formule de Faà di Bruno est considérée comme un résultat d'analyse réelle par Goursat [35] et "de la Vallée Poussin" [24]. Riordan et Comtet [61], [29] et [30] la considèrent comme une partie d'analyse combinatoire, une grande partie des livres de Riordan et Comtet est remplacée par Stanley [70] et [71], où la formule de Faà di Bruno est mentionnée [71, p. 65]. Elle est utilisée pour les partitions [3], statistiques mathématiques [31], théorie des matrices [65], calculs des différences finies [26], science des ordinateurs [33], fonctions symétriques [48] et techniques mathématiques [49]. Faà di Bruno a publié sa formule dans [21] et [22]. La référence usuelle pour sa démonstration est l'appendice de son meilleur livre connu [23].

1.5 Argument combinatoire

Il est naturel de commencer par discuter les polynômes de Bell, qui sont associées à des ensembles de partitions. A la partition $\{1\}$ qui est la seule partition de l'ensemble $\{1\}$, on l'associe le monôme a_1 , et on définit $B_{1,1}(a_1) := a_1$. L'ensemble $\{1, 2\}$ admet deux partitions $\{1, 2\}$ et $\{1\}, \{2\}$, qu'avec elles on associe respectivement les monômes a_2 et a_1^2 , d'où $B_{2,2}(a_1, a_2) = a_2$ et $B_{2,1}(a_1, a_2) = a_1^2$. Il y a cinq partitions pour l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ dont trois sont à deux blocs : $\{1, 2\}, \{3\}$ et $\{1, 3\}, \{2\}$ et $\{2, 3\}, \{1\}$ qu'avec chacune d'elles, on associe le monôme $a_1 a_2$, d'où $B_{3,2}(a_1, a_2, a_3) = 3a_1 a_2$. On associe à la partition $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ le monôme a_1^3 et à la partition $\{1, 2, 3\}$ le monôme a_3 , c'est à dire $B_{3,3}(a_1, a_2, a_3) = a_1^3$ et $B_{3,1}(a_1, a_2, a_3) = a_3$. En général

$$B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) = \frac{1}{k!} \sum_{j_1 + \dots + j_k = n, j_i \geq 1} \binom{n}{j_1, \dots, j_k} a_{j_1} \dots a_{j_k}, \quad (1.22)$$

où $B_{0,0}(a_1) := 1$; la somme se fait sur toutes les partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ dont les tailles de leurs blocs sont j_1, \dots, j_k avec $\frac{1}{k!}$ pour les multiples répétitions à l'intérieur de la somme. Seulement $n - k + 1$ variables sont nécessaires car aucun bloc peut contenir plus de $n - k + 1$ éléments.

Si on choisit $a_i = 1$ pour chaque $i \geq 1$, on comptera simplement le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k blocs, qui n'est que le nombre de Stirling du second espèce, qu'on note par :

$$B_{n,k}(1, 1, \dots, 1) = S(n, k).$$

Cette approche par les polynômes de Bell semble avoir comme origine la référence [64]. La dénomination “polynômes de Bell” a été introduit par Riordan dans [61], et c’est lui qui a observé pour la première fois qu’ils se prêtent parfaitement à la description de la formule de Faà di Bruno [60]. Les polynômes que Bell a considéré dans [11] sont :

$$A_n(a_1, a_2, \dots, a_n) := \sum_{k=0}^n B_{n,k}(a_1, a_2, \dots, a_{n-k+1}) \text{ avec } B_{0,0}(a_1) := 1. \quad (1.23)$$

On note qu’on peut retrouver les $B_{n,k}$ à partir des A_n en regroupant les termes suivant leur degré.

De manière similaire, avec les polynômes de Bell, on peut associer l’ensemble des partitions aux dérivées successives d’une fonction composée. A $g'(f(t))f'(t)$ on associe la partition $\{1\}$ de l’ensemble $\{1\}$. Les partitions $\{1, 2\}$ et $\{1\}, \{2\}$ de l’ensemble $\{1, 2\}$ sont associées à $g''(f(t))f'(t)$ et $g'(f(t))(f'(t))^2$, respectivement. A toute partition de l’ensemble $\{1, \dots, n\}$ de k blocs, on associe le facteur $g^{(k)}(f(t))$ et les tailles des blocs déterminent ses autres facteurs qui sont des dérivées successives de f . En effet, les partitions $\{1, 2\}, \{3\}$ et $\{1, 3\}, \{2\}$ et $\{2, 3\}, \{1\}$ ont chacune un bloc de taille un et un autre bloc de taille deux, chacune correspond à $g''(f(t))f'(t)f''(t)$, et les autres partitions $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ et $\{1, 2, 3\}$ sont associées à $g'''(f(t))(f'(t))^3$ et $g'(f(t))f'''(t)$, respectivement. La formule générale est :

1.5.1 Version partition d’un ensemble

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors

$$\frac{d^n}{dt^n}g(f(t)) = \sum g^{(k)}(f(t))(f'(t))^{k_1}(f''(t))^{k_2} \dots (f^{(n)}(t))^{k_n}, \quad (1.24)$$

où, la somme se fait sur toutes les partitions de l’ensemble $\{1, \dots, n\}$, et, pour chaque partition, k est leur nombre de blocs et k_i est le nombre de blocs dont exactement i éléments. On montre cette formule par induction sur n . Toute partition de l’ensemble $\{1, \dots, n + 1\}$ peut être obtenue d’une seule manière en ajoutant $n + 1$ à une partition de l’ensemble $\{1, \dots, n\}$. Si on ajoute $\{n + 1\}$ comme un nouveau bloc, alors on augmente le nombre des blocs de taille un par un, et le nombre total des blocs par un. Ceci correspond en appliquant $\frac{d}{dt}$ à $g^{(k)}(f(t))$ pour obtenir $g^{(k+1)}(f(t))f'(t)$. D’autre part, si on ajoute $n + 1$ à un bloc existant de taille i , alors le nombre des blocs de taille i diminue par un et le nombre des blocs de taille $i + 1$ augmente par un,

et le nombre total des blocs reste le même. Afin de réaliser cet effet, si on commence avec k_i blocs de taille i , alors on doit ajouter $n + 1$ à n'importe lequel de ces k_i blocs. Ceci correspond en appliquant $\frac{d}{dt}$ à $(f^{(i)}(t))^{k_i}$ pour avoir $k_i (f^{(i)}(t))^{k_i-1} f^{(i+1)}(t)$; ce qui prouve le résultat. Un corollaire immédiat est :

1.5.2 Version polynôme de Bell (Formule de Riordan)

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors :

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(t)) = \sum_{k=0}^n g^{(k)}(f(t)) B_{n,k}(f'(t), f''(t), \dots, f^{(n-k+1)}(t)). \tag{1.25}$$

En tant que telle, elle remonte à J. Riordan [60]. La forme de la formule de Faà di Bruno donnée par (1.25) remonte au moins à Hess [41]. La formule classique (1.21) ne diffère que dans la combinaison de termes communs.

Le nombre de partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$ en k_1 1-blocs, k_2 2-blocs, etc. est :

$$\binom{n}{\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2}, \underbrace{3, \dots, 3}_{k_3}, \dots}$$

sauf que cela fait des distinctions artificielles entre les i -blocs pour chaque i . Le nombre réel de ces partitions est :

$$\binom{n}{\underbrace{1, \dots, 1}_{k_1}, \underbrace{2, \dots, 2}_{k_2}, \underbrace{3, \dots, 3}_{k_3}, \dots} \frac{1}{k_1! k_2! \dots k_n!}$$

d'en (1.21) découle. On utilise également les partitions d'un ensemble pour donner en terme de déterminant la formule de Faà di Bruno. Si $n \geq 1$, alors

$$A_n(a_1, \dots, a_n) = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0} a_1 & \binom{n-1}{1} a_2 & \cdots & \binom{n-1}{n-2} a_{n-1} & \binom{n-1}{n-1} a_n \\ -1 & \binom{n-2}{0} a_1 & \cdots & \binom{n-2}{n-3} a_{n-2} & \binom{n-2}{n-2} a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{0}{0} a_1 \end{vmatrix}. \tag{1.26}$$

$A_n(a_1, \dots, a_n) = \det(M_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec $M_{ij} = \binom{n-i}{j-1} a_{j-i+1} \delta_{(j \geq i)} - \delta_{(j=i-1)}$, où δ est la fonction indicatrice d'un ensemble.

Pour la justification de la formule déterminantale (1.26), soit par exemple $A_1(a_1) = a_1$, $A_2(a_1, a_2) = a_1^2 + a_2$. Comme ci-dessus, a_1^2 correspond à la partition $\{1\}, \{2\}$

et a_2 correspond à la partition $\{1, 2\}$. De ce point de vue, il est intéressant de développer ces déterminants suivant la première ligne. $A_3(a_1, a_2, a_3) = a_1(a_1^2 + a_2) + 2a_2(a_1) + a_3(1) = a_1^3 + 3a_1a_2 + a_3$.

Tout simplement, on peut dire que la première ligne représente les blocs contenant l'élément le plus grand. En effet, le terme $a_1(a_1^2 + a_2)$ représente toutes les partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ contenant $\{3\}$ comme un bloc d'un singleton, spécifiquement, a_1^3 correspond à la partition $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ et a_1a_2 correspond à la partition $\{1, 2\}, \{3\}$. Le terme $2a_2(a_1)$ correspond aux partitions dont 3 figure dans des blocs à deux éléments, qui sont $\{1, 3\}, \{2\}$ et $\{2, 3\}, \{1\}$ et le terme $a_3(1)$ correspond à la partition $\{1, 2, 3\}$. Si on applique ce raisonnement sur A_4 on aura : $A_4(a_1, a_2, a_3, a_4) = a_1(a_1^3 + 3a_1a_2 + a_3) + 3a_2(a_1^2 + a_2) + 3a_3(a_1) + a_4(1)$, où, le terme $a_1(a_1^3 + 3a_1a_2 + a_3)$ correspond aux cinq partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ contenant $\{4\}$ comme un bloc d'un singleton, le terme $3a_2(a_1^2 + a_2)$ correspond aux six partitions où le 4 apparaît dans des blocs à deux éléments, le terme $3a_3(a_1)$ correspond aux trois partitions où le 4 apparaît dans des blocs à trois éléments et le terme $a_4(1)$ correspond à la partition $\{1, 2, 3, 4\}$. En général, si on développe le déterminant suivant la première ligne, on aura la somme $\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n-1}{k-1} a_k a_{n,k}$, où $a_{n,k}$ est le cofacteur de $\binom{n-1}{k-1} a_k$. On note que $\binom{n-1}{k-1}$ est le nombre de manière de choisir $k-1$ éléments qui sont dans le même bloc contenant le plus grand élément n . Il résulte que $a_{n,k}$ représente toutes les partitions des $n-k$ éléments restants. Afin de prouver la formule (1.26), on utilise cette interprétation combinatoire. Supposons que (1.26) est vraie pour n et montrons qu'elle reste vraie pour $n+1$. On doit alors prouver que :

$$A_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1}) = \begin{vmatrix} \binom{n}{0}a_1 & \binom{n}{1}a_2 & \cdots & \binom{n}{n-1}a_n & \binom{n}{n}a_{n+1} \\ -1 & \binom{n-1}{0}a_1 & \cdots & \binom{n-1}{n-2}a_{n-1} & \binom{n-1}{n-1}a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{0}{0}a_1 \end{vmatrix}.$$

Par développement du dernier déterminant suivant la première colonne on trouve :

$$a_1 A_n(a_1, \dots, a_n) + \begin{vmatrix} \binom{n}{1}a_2 & \binom{n}{2}a_3 & \cdots & \binom{n}{n-1}a_n & \binom{n}{n}a_{n+1} \\ -1 & \binom{n-2}{0}a_1 & \cdots & \binom{n-2}{n-3}a_{n-2} & \binom{n-2}{n-2}a_{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{0}{0}a_1 \end{vmatrix}.$$

Par induction, le terme $a_1 A_n(a_1, \dots, a_n)$ représente toutes les partitions de l'ensemble $\{1, \dots, n+1\}$ contenant un bloc d'un singleton $\{n+1\}$. Si on développe le second

terme suivant la première ligne on obtient :

$$a_1 A_n(a_1, \dots, a_n) + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} a_{k+1} a_{n,k}, \quad (1.27)$$

avec $a_{n,k}$ est défini comme avant. Pour chaque k entre 1 et n , le terme $\binom{n}{k} a_{k+1} a_{n,k}$ représente toute les partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ où l'élément $n + 1$ se trouve dans un bloc contenant k autres éléments, car il y a $\binom{n}{k}$ façon de choisir ces k éléments, et par induction, $a_{n,k}$ représente toutes les partitions des $n - k$ éléments restants. Donc (1.27) représente toutes les partitions de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n + 1\}$ et alors elle est égale à $A_{n+1}(a_1, \dots, a_{n+1})$ et ceci prouve la formule (1.26).

1.5.3 Formule déterminantale

Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables avec $n \geq 1$, alors :

$$\frac{d^n}{dt^n} g(f(t)) = \begin{vmatrix} \binom{n-1}{0} f'g & \binom{n-1}{1} f''g & \cdots & \binom{n-1}{n-2} f^{(n-1)}g & \binom{n-1}{n-1} f^{(n)}g \\ -1 & \binom{n-2}{0} f'g & \cdots & \binom{n-2}{n-3} f^{(n-2)}g & \binom{n-2}{n-2} f^{(n-1)}g \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & \binom{0}{0} f'g \end{vmatrix}, \quad (1.28)$$

où $f^{(i)}$ désigne $f^{(i)}(t)$ et g^k (avec $g = g^1$) désigne $g^{(k)}(f(t))$. Pour la justification de la formule (1.28), il suffit de remplacer a_i dans la formule (1.26) par $f^{(i)}g$.

Chapitre 2

Polynômes de Bell et polynômes binomiaux

Ce chapitre concerne une étude sur les polynômes de Bell et sur les suites de type binomial. Nous établissons quelques relations reliant ces deux importants concepts. De plus, les résultats obtenus dans cette partie seront exploités pour déduire quelques relations permettant d'obtenir plusieurs identités remarquables. Les deux premières sections de ce chapitre ont fait l'objet de la référence [50].

2.1 Polynômes de Bell et polynômes binomiaux

Dans cette section, nous donnons trois théorèmes établissant des relations entre les polynômes de Bell et les suites binomiales. Ces théorèmes seront utilisés pour développer plusieurs identités concernant les polynômes de Bell.

Théorème 2.1 *Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels et n, k entiers, $n \geq k \geq 1$, on a :*

$$B_{n,k} \left(1, \dots, i \frac{bf_{i-1}(a(i-1)+b)}{a(i-1)+b}, \dots \right) = \binom{n}{k} \frac{bk f_{n-k}(a(n-k)+bk)}{a(n-k)+bk}. \quad (2.1)$$

Remarque 2.2 *Pour le résultat de ce Théorème, on mentionne les cas particuliers :
Pour $a = 0$ et $b = 1$, on obtient le Théorème 6 dans [1].
Pour $a = b = 1$, on obtient le Théorème 3 dans [1].*

Ce théorème est une conséquence directe des deux lemmes suivants :

Lemme 2.3 Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels et n, k entiers, $n \geq k \geq 1$, on a :

$$B_{n,k}(1, \dots, i f_{i-1}(b), \dots) = \binom{n}{k} f_{n-k}(bk). \quad (2.2)$$

Preuve. Posons $f(t)^b = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) \frac{t^n}{n!}$. Alors $g(t) := t f(t)^b = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{n-1}(b) \frac{t^n}{n!}$.

On a d'une part :

$$\frac{1}{k!} g(t)^k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n f_{n-1}(b) \frac{t^n}{n!} \right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(1, \dots, i f_{i-1}(b), \dots) \frac{t^n}{n!},$$

et d'autre part on a :

$$\frac{1}{k!} g(t)^k = \frac{1}{k!} t^k f(t)^{bk} = \frac{1}{k!} t^k \sum_{n=0}^{\infty} f_n(bk) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} f_{n-k}(bk) \frac{t^n}{n!}.$$

Donc, à partir des deux expressions de la fonction $\frac{1}{k!} g(t)^k$ on déduit l'Identité (2.2).

□

Lemme 2.4 Soient $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$ et a un nombre réel. Alors la suite définie par :

$$f_n(x; a) = \begin{cases} \frac{x}{an+x} f_n(an+x) & \text{si } n \neq 0 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases} \quad (2.3)$$

est de type binomial.

Preuve. Posons $f(t)^b = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) \frac{t^n}{n!}$. La formule d'inversion de Lagrange (LIF) assure que, pour toute fonction F analytique dans un voisinage de zéro, on a :

$$F(\omega(t)) = F(0) + \sum_{n=1}^{\infty} D_{u=0}^{n-1} (F'(u) \phi(u)^n) \frac{t^n}{n!} \quad \text{avec } \omega = t\phi(\omega).$$

Donc, pour les choix $F(t) = (f(t))^x$ et $\phi(t) = f(t)^a$, on obtient :

$$(f(\omega(t)))^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} D_{u=0}^{n-1} (x f'(u) f(u)^{na+x-1}) \frac{t^n}{n!}$$

$$\begin{aligned}
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{an+x} D_{u=0}^n (f(u)^{na+x}) \frac{t^n}{n!} \\
 &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{an+x} f_n(an+x) \frac{t^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Il résulte que la suite $\{f_n(x; a) : n \in \mathbb{N}\}$ définie par (2.3) est de type binomial.

Une autre preuve est donnée dans [75]. □

Les exemples suivants donnent quelques applications du Théorème 2.1.

Conséquence 2.5 $f_n(x) = x^n$:

$$B_{n,k} \left(1, \dots, ib(a(i-1)+b)^{i-2}, \dots \right) = \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk)^{n-k-1}.$$

Cas particuliers :

pour $a = 0$, on obtient l'Identité de S. Roman [66, p. 85],

pour $(a, b) = (0, 1)$, on trouve les nombres idempotents, voir [30, p. 91], et

pour $a = b$, on obtient le Corollaire 4 dans [1].

Conséquence 2.6 $f_n(x) = (x)_{(n)} := x(x-1) \dots (x-n+1)$:

$$B_{n,k} \left(1, \dots, ib(a(i-1)+b-1)_{(i-2)}, \dots \right) = \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk-1)_{(n-k-1)}.$$

Alors, pour $a = b = 1$, on trouve les nombres de Lah, voir [66, p. 86] et [30, p. 135].

Conséquence 2.7 $f_n(x) = (x)^{(n)} := x(x+1) \dots (x+n-1)$:

$$B_{n,k} \left(1, \dots, ib(a(i-1)+b+1)^{(i-2)}, \dots \right) = \binom{n}{k} bk(a(n-k)+bk+1)^{(n-k-1)}.$$

Pour $(a, b) = (0, 1)$, on trouve les nombres de Lah, voir [66, p. 86] et [30, p. 135].

Conséquence 2.8 $f_n(x) = B_n(x) := \sum_{k=1}^n S(n, k) x^k$:

$$B_{n,k} \left(1, \dots, i \frac{bB_{i-1}(a(i-1)+b)}{a(i-1)+b}, \dots \right) = \binom{n}{k} \frac{bkB_{n-k}(a(n-k)+bk)}{a(n-k)+bk}.$$

Alors, pour $(a, b) = (0, 1)$, on obtient le Corollaire 7 dans [1].

Conséquence 2.9 $f_n(x) = n! \binom{x}{n}_q$:

$$B_{n,k} \left(1, \dots, i! \frac{b}{a(i-1)+b} \binom{a(i-1)+b}{i-1}_q, \dots \right) = \frac{n!}{k!} \frac{bk}{a(n-k)+bk} \binom{a(n-k)+bk}{n-k}_q.$$

Autres identités peuvent être établies quand on prend $f_n(x)$ la suite binomiale suivante :

$$L_n^{(\alpha x-1)}(xt), \quad x^{n/2} H_n(t\sqrt{x}) \quad \text{or} \quad C_n^{(x)}(t), \tag{2.4}$$

où $L_n^{(\alpha)}(t)$, $H_n(t)$ et $C_n^{(x)}(t)$ représentent, respectivement, les polynômes de Laguerre, d’Hermite et de Gegenbauer définis par leurs fonctions génératrices exponentielles :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &:= (1-t)^{-1-\alpha} \exp\left(\frac{tx}{t-1}\right), \\ \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x) \frac{t^n}{n!} &:= \exp(-t^2 + 2tx) \quad \text{et} \\ \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &:= (1-2tx+t^2)^{-\alpha}. \end{aligned}$$

Théorème 2.10 Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels et n, k des entiers, $n \geq k \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n,k} \left(\frac{f_1(a+b)}{a+b}, \dots, \frac{f_i(ai+b)}{ai+b}, \dots \right) &= \frac{1}{k! b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j(-1)^{k-j} f_n(an+bj)}{an+bj} \\ &\text{pour } b \neq 0, \quad \text{et} \\ B_{n,k} \left(\frac{f_1(a)}{a}, \dots, \frac{f_i(ai)}{ai}, \dots \right) &= \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=k}^n \frac{(an)^{j-k} f_n^{(j)}(0)}{(j-k)! j}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Preuve. Posons $f(t)^b = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) \frac{t^n}{n!}$. Alors $g(t) := f(t)^b - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) \frac{t^n}{n!}$.

On a d’une part :

$$\frac{1}{k!} g(t)^k = \frac{1}{k!} \left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(b) \frac{t^n}{n!} \right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(f_1(b), \dots, f_i(b), \dots) \frac{t^n}{n!},$$

et d’autre part on a :

$$\frac{1}{k!} g(t)^k = \frac{1}{k!} \left(f(t)^b - 1 \right)^k = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f(t)^{bj}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(bj) \frac{t^n}{n!} \right) \\
 &= \frac{1}{k!} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f_n(bj) \right) \frac{t^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

Donc, à partir des deux expressions de la fonction $\frac{1}{k!}g(t)^k$ on déduit que :

$$B_{n,k}(f_1(b), \dots, f_i(b), \dots) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} f_n(bj). \quad (2.6)$$

La première Identité de (2.5) résulte en remplaçant dans (2.6) la suite binomiale $\{f_n(x)\}$ par la suite binomiale $\{f_n(x; a)\}$ définie par (2.3).

Pour prouver la deuxième Identité de (2.5), de l'Identité (1.17) on obtient :

$$\begin{aligned}
 f_n(t; a) &= \frac{t}{an + t} f_n(an + t) \\
 &= \sum_{j=1}^n B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) t (an + t)^{j-1} \\
 &= \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=k}^n \binom{k-1}{j-1} (an)^{j-k} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \right) t^k
 \end{aligned}$$

et, à partir de (1.17) et (1.18) on obtient :

$$f_n(t; a) = \sum_{k=1}^n B_{n,k}(y_1, y_2, \dots) t^k \quad \text{avec } y_i = h'_i(0) = \frac{f_i(ai)}{ai}$$

Les deux dernières expressions de $f_n(t; a)$ donnent :

$$B_{n,k}(y_1, y_2, \dots) = \sum_{j=k}^n \binom{k-1}{j-1} (an)^{j-k} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots).$$

Quand on utilise (1.17) en remplaçant dans la dernière expression $B_{n,j}(x_1, x_2, \dots)$ par $\frac{f_n^{(j)}(0)}{j!}$ et $B_{n,k}(y_1, y_2, \dots)$ par $B_{n,k}\left(\frac{f_1(a)}{a}, \dots, \frac{f_i(ai)}{ai}, \dots\right)$, la seconde part de (2.5) découle. \square

Quelques exemples du Théorème 2.10 sont données :

Conséquence 2.11 Pour $b \neq 0$ et $f_n(x) = x^n$ on a :

$$\begin{aligned}
 B_{n,k}\left(1, \dots, (ai)^{i-1}, \dots\right) &= \binom{n-1}{k-1} (an)^{n-k}, \\
 B_{n,k}\left(1, \dots, (ai+b)^{i-1}, \dots\right) &= \frac{1}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} (-1)^{k-j} j (an + bj)^{n-1}.
 \end{aligned}$$

La première identité est un cas particulier de la Conséquence 2.5 lorsque $a = b$, pour $a = 0$ dans la deuxième identité on obtient l'Identité de S. Roman [66, p. 85] et pour $a = b = 1$ on obtient les nombres idempotents, voir [30, p. 91].

Conséquence 2.12 Pour $b \neq 0$ et $f_n(x) = (x)_{(n)}$ on a :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (ai - 1)_{(i-1)}, \dots \right) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k-1}{k-1} (an)^j s(n, j+k),$$

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (ai + b - 1)_{(i-1)}, \dots \right) = \frac{1}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j (-1)^{k-j} (an + bj - 1)_{(n-1)}.$$

Soit $a = b = 1$ dans la deuxième identité, alors de la Conséquence 2.5 on déduit que les nombres de Lah satisfont :

$$B_{n,k} (1!, 2!, 3!, \dots) = \frac{n!}{k!} \sum_{j=1}^k \binom{k}{j} \binom{n+j-1}{j-1} (-1)^{k-j} = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1},$$

et pour $a = 1$, on déduit de la première identité et de [30, p. 135] que

$$B_{n,k} (0!, 1!, 2!, \dots) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k-1}{k-1} n^j s(n, j+k) = |s(n, k)|.$$

Conséquence 2.13 Pour $b \neq 0$ et $f_n(x) = (x)^{(n)}$ on a :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (ai + 1)^{(i-1)}, \dots \right) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k-1}{k-1} (an)^j |s(n, j+k)|,$$

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (ai + b + 1)^{(i-1)}, \dots \right) = \frac{(-1)^k}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} j (-1)^j (an + bj + 1)^{(n-1)}.$$

Alors pour $a = -1$, on déduit de la première identité et de [66, p. 86] que

$$B_{n,k} (0!, -1!, 2!, -3!, \dots) = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{j+k-1}{k-1} (-n)^j |s(n, j+k)| = s(n, k).$$

Conséquence 2.14 Pour $b \neq 0$ et $f_n(x) = B_n(x) = \sum_{n=1}^n S(n, k) x^k$ on a :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, \frac{B_i(ai)}{ai}, \dots \right) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=k}^n \frac{(an)^{j-k} S(n, k)}{(j-k)! j},$$

$$B_{n,k} \left(1, \dots, \frac{B_i(ai + b)}{ai + b}, \dots \right) = \frac{(-1)^k}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j (-1)^j B_n(an + bj)}{an + bj}.$$

Conséquence 2.15 $f_n(x) = n! \binom{x}{n}_q$:

$$B_{n,k} \left(\frac{1}{a+b} \binom{a+b}{1}_q, \dots, \frac{i!}{ai+b} \binom{ai+b}{i}_q, \dots \right) = \frac{1}{k!b^{k-1}} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j(-1)^{k-j}}{an+bj} \binom{an+bj}{n}_q,$$

pour $b \neq 0$, et

$$B_{n,k} \left(\frac{1}{a} \binom{ai}{1}_q, \dots, \frac{1}{ai} \binom{ai}{i}_q, \dots \right) = \frac{1}{(k-1)!} \sum_{j=k}^n \frac{(an)^{j-k} j!}{(j-k)! j} D_{x=0}^{(j)} \binom{x}{n}_q.$$

D'autres identités peuvent être obtenues en utilisant les suites données par (2.4). Le théorème suivant donne une relation reliant les suites binomiales et les polynômes complets de Bell. Cette relation sera exploitée pour en déduire quelques nouvelles identités sur les polynômes complets de Bell.

Théorème 2.16 Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour a, b des nombres réels, $a \neq 0$, et n un entier naturel on a :

$$A_n \left(\frac{bf_1(a)}{a}, \dots, \frac{bf_i(ai)}{ai}, \dots, \frac{bf_n(an)}{an} \right) = \frac{bf_n(an+b)}{an+b}. \quad (2.7)$$

Preuve. De (1.17) et (1.18) on trouve :

$$A_n(bf'_1(0), \dots, bf'_n(0)) = f_n(b).$$

Pour avoir (2.7) il suffit d'utiliser dans cette dernière identité la suite binomiale $\{f_n(b; a)\}$ définie par (2.3) à la place de la suite binomiale $\{f_n(b)\}$. \square

Conséquence 2.17 Les suites binomiales x^n , $(x)_{(n)}$, $(x)^{(n)}$, $B_n(x)$ et $n! \binom{x}{n}_q$, respectivement, impliquent :

$$\begin{aligned} A_n \left(b, \dots, b(ai)^{i-1}, \dots, b(an)^{n-1} \right) &= b(an+b)^{n-1}, \\ A_n \left(b, \dots, b(ai-1)_{(i-1)}, \dots, b(an-1)_{(n-1)} \right) &= b(an+b-1)_{(n-1)}, \\ A_n \left(b, \dots, b(ai+1)^{(i-1)}, \dots, b(an+1)^{(n-1)} \right) &= b(an+b+1)^{(n-1)}, \\ A_n \left(\frac{bB_1(a)}{a}, \dots, \frac{bB_i(ai)}{ai}, \dots, \frac{bB_n(an)}{an} \right) &= \frac{bB_n(an+b)}{an+b}, \\ A_n \left(\frac{b}{a} \binom{a}{1}_q, \dots, (i-1)! \frac{b}{a} \binom{ai}{i}_q, \dots, (n-1)! \frac{b}{a} \binom{an}{n}_q \right) &= n! \frac{b}{an+b} \binom{an+b}{n}_q. \end{aligned}$$

2.2 Quelques formules pour les polynômes de Bell

Dans cette section, nous donnons quelques formules concernant les polynômes de Bell et nous déduisons quelques relations avec les dérivées successives des fonctions d'une suite binomiale (évaluées au point $x = 0$). Le théorème suivant permet d'exprimer une relation entre les polynômes partiels de Bell. Cette relation donne naissance à plusieurs identités à partir d'une seule identité sur les polynômes partiels de Bell.

Théorème 2.18 Soit $\{x_n\}$ une suite réelle (ou complexe) telle que la série $\sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{z^n}{n!}$ soit analytique dans un voisinage de zéro avec $x_1 = 1$. Alors, pour n, k, r, s entiers, $n \geq k \geq 1, r, s \geq 0$, on a :

$$B_{n,k} \left(B(s, s), \dots, \frac{is}{r(i-1)+s} \frac{B((r+1)(i-1)+s, r(i-1)+s)}{\binom{(r+1)(i-1)+s}{r(i-1)+s}}, \dots \right) = \binom{n}{k} \frac{sk}{r(n-k)+sk} \frac{B((r+1)(n-k)+sk, r(n-k)+sk)}{\binom{(r+1)(n-k)+sk}{r(n-k)+sk}}, \tag{2.8}$$

où $B(n, k) = B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1})$.

Preuve. Soit $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x_{n+1}}{n+1} \frac{z^n}{n!} := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(1) \frac{z^n}{n!}$ et $(f(z))^x := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{z^n}{n!}$. Alors f est une fonction analytique dans un voisinage de zéro et la suite $\{f_n(x)\}$ est de type binomial. Maintenant, l'Identité (2.2) implique que :

$$f_n(k) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(x_1, \dots, x_{n+1}), \quad n \geq 0, k \geq 1, \tag{2.9}$$

et, pour $a = r$ et $b = s$, l'Identité (2.1) s'écrit ainsi :

$$B_{n,k} \left(f_0(s), \dots, i \frac{s f_{i-1}(r(i-1)+s)}{r(i-1)+s}, \dots \right) = \binom{n}{k} \frac{k s f_{n-k}(r(n-k)+ks)}{r(n-k)+ks}.$$

Donc, pour avoir (2.8), il suffit d'utiliser (2.9) pour exprimer

$$f_{i-1}(r(i-1)+s) \quad \text{et} \quad f_{n-k}(r(n-k)+ks)$$

par les polynômes partiels de Bell dans la dernière identité. □

Conséquence 2.19 De l'Identité établie dans [8, Théorème 17] et [9], donnée par :

$$B_{n,k}(1!, 2!, \dots, (q+1)!, 0, \dots) = \frac{n!}{k!} \binom{k}{n-k}_q, \quad (2.10)$$

où $\binom{L}{k}_q$ est le coefficient binomial, voir [8, Théorème 17] et [9], on déduit que :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, \frac{i!s}{r(i-1)+s} \binom{r(i-1)+s}{i-1}_q, \dots \right) = \frac{sk}{r(n-k)+sk} \frac{n!}{k!} \binom{r(n-k)+sk}{n-k}_q,$$

et de l'identité connue :

$$B_{n,k}(1!, 2!, \dots, i!, \dots) = \binom{n-1}{k-1} \frac{n!}{k!},$$

on déduit les identités :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, is \frac{((r+1)(i-1)+s-1)!}{(r(i-1)+s)!}, \dots \right) = sk \binom{n}{k} \frac{((r+1)(n-k)+sk-1)!}{(r(n-k)+sk)!}$$

De la même manière, on peut obtenir plusieurs identités à partir des identités (connues) suivantes :

$$\begin{aligned} B_{n,k}(0!, -1!, 2!, \dots) &= s(n, k), & B_{n,k}(0!, 1!, 2!, \dots) &= |s(n, k)|, \\ B_{n,k}(1, 1, 1, \dots) &= S(n, k), & B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) &= \binom{n}{k} k^{n-k}, \text{ etc.} \end{aligned} \quad (2.11)$$

Une autre version relie les dérivées successives des fonctions d'une suite binomiale (évaluées au point $x = 0$) et les polynômes de Bell est donnée par :

Corollaire 2.20 Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour n, k, r, s entiers, $n \geq k \geq 1$, $r \geq 0$, $s \geq 0$, on a :

$$\begin{aligned} B_{n,k} \left(f_s^{(s)}(0), \dots, \frac{i!s}{r(i-1)+s} \frac{f_{(r+1)(i-1)+s}^{(r(i-1)+s)}(0)}{((r+1)(i-1)+s)!}, \dots \right) = \\ \frac{n!}{k!} \frac{sk}{r(n-k)+sk} \frac{f_{(r+1)(n-k)+sk}^{(r(n-k)+sk)}(0)}{((r+1)(n-k)+sk)!} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Preuve. Il suffit de remplacer dans (2.8) x_i par $f_i'(0)$ et $B(n, k)$ par $\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$. \square

A titre d'application, on peut choisir pour $f_n^{(k)}(0)$ une de ces expressions :

$$D_{x=0}^k \left((x)_{(n)} \right), \quad D_{x=0}^k \left(x^{n/2} H_n(t\sqrt{x}) \right), \quad D_{x=0}^k \left(L_n^{(\alpha x-1)}(xt) \right) \text{ ou } D_{x=0}^k \left(C_n^{(x)}(t) \right).$$

De même qu'avant, un autre théorème peut jouer un rôle similaire qu'au Théorème précédent est donné par :

Théorème 2.21 *Sous les hypothèses du Théorème 2.18, on a pour $s \geq 1$:*

$$B_{n,k} \left(\frac{B(r+s+1, r+s)}{(r+s+1)(r+s)}, \dots, \frac{B((r+1)i+s, ri+s)}{(ri+s) \binom{(r+1)i+s}{ri+s}}, \dots \right) = \frac{1}{k!s^{k-1}} \sum_{j=0}^k (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \frac{j}{rn+sj} \frac{B((r+1)n+sj, rn+sj)}{\binom{(r+1)n+sj}{rn+sj}}, \quad (2.13)$$

où $B(n, k) = B_{n,k}(x_1, \dots, x_{n-k+1})$.

Preuve. Utiliser (2.1) et (2.5) et procéder comme dans la preuve du Théorème 2.18.

□

Une autre version du Théorème 2.21 est donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 2.22 *Sous les hypothèses du Corollaire 2.20, on a pour $s \geq 1$:*

$$B_{n,k} \left(\frac{f_{r+s+1}^{(r+s)}(0)}{(r+s+1)!(r+s)}, \dots, \frac{i!}{ri+s} \frac{f_{(r+1)i+s}^{(ri+s)}(0)}{((r+1)i+s)!}, \dots \right) = \frac{1}{s^{k-1}} \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \frac{j (-1)^{k-j}}{rn+sj} \frac{f_{(r+1)n+sj}^{(rn+sj)}(0)}{((r+1)n+sj)!} \quad (2.14)$$

Preuve. La preuve est similaire à celle du Corollaire 2.20. Utiliser (2.13) à la place de (2.8). □

Le théorème ci-dessous est aussi important dans la mesure où il peut être utilisé pour donner naissance à plusieurs identités sur les polynômes complets de Bell à partir d'une seule identité sur les polynômes partiels de Bell. Il peut servir aussi à la déduction de quelques relations de congruence comme nous le verrons par la suite.

Théorème 2.23 *Soit $\{x_n\}$ une suite réelle (ou complexe). Alors, pour n, r entiers, $n, r \geq 1$, on a :*

$$x_1^k \sum_{j=1}^n B_{n,j}(y_1, y_2, \dots) (k - nr)^{j-1} = x_1^{nr} \frac{B_{n+k,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}}, \quad (2.15)$$

avec $y_n = \frac{1}{nr \binom{(r+1)n}{nr}} B_{(r+1)n, nr}(x_1, x_2, x_3, \dots)$,

ou, d'une manière équivalente

$$x_1^s A_n \left(\frac{sB(r+1, r)}{r(r+1)}, \dots, \frac{s}{nr} \frac{B((r+1)n, nr)}{\binom{(r+1)n}{nr}} \right) = \frac{s}{nr+s} \frac{B((r+1)n+s, nr+s)}{\binom{(r+1)n+s}{nr+s}},$$

où s est un entier tel que $s \geq -nr + 1$ et $B(n, k) = B_{n,k}(x_1, x_2, \dots)$.

(2.16)

Preuve. On donne ici deux preuves lorsque $s \geq 0$.

Soit $\{f_n(x)\}$ une suite définie comme dans la preuve du Théorème 2.18 et soit $y_i = f'_i(0)$. Alors, si on pose dans le Théorème 2.16 $b = s$ et $a = r$ on obtient :

$$A_n \left(\frac{sf_1(r)}{r}, \dots, \frac{sf_i(ir)}{ir}, \dots, \frac{sf_n(nr)}{nr} \right) = \frac{sf_n(nr+s)}{nr+s}, \quad (2.17)$$

et puisque de (2.9) on a :

$$f_i(ir) = \frac{B((r+1)i, ir)}{\binom{(r+1)i}{ir}} \quad \text{et} \quad f_n(nr+s) = \frac{B((r+1)n+s, nr+s)}{\binom{(r+1)n+s}{nr+s}},$$

donc, l'Identité (2.16) résulte en remplaçant les expressions de $f_i(ir)$ et $f_n(nr+s)$ dans (2.17).

Preuve lorsque $s \geq -nr + 1$.

Soit $\{x_n\}$ une suite réelle avec $x_1 := 1$ et $\{f_n(x)\}$ une suite polynomiale définie par :

$$f_n(x) = \sum_{j=1}^n B_{n,j} \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right) (x)_j$$

avec $f_0(x) = 1, (x)_j := x(x-1)\dots(x-j+1), j \geq 1$ et $(x)_0 := 1$.

(2.18)

On a $nf_{n-1}(1) = n \sum_{j=1}^{n-1} B_{n-1,j} \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right) (1)_j = x_n$ et $D_{x=0}f_1(0) = 1 \neq 0$.

Il est connu que $\{f_n(x)\}$ présente une suite binomiale, voir [30, p. 141]. Alors, l'Identité (2.2) montre que :

$$y_n = \frac{1}{nr \binom{(r+1)n}{nr}} B_{(r+1)n, nr}(1, x_2, x_3, \dots) = \frac{f_n(nr)}{nr} = D_{x=0}f_n(x; r), \quad (2.19)$$

et

$$\frac{B_{n+k, k}(1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}} = \frac{f_n(k)}{k} = \frac{f_n(k-nr; r)}{k-nr}. \quad (2.20)$$

Mais du [66, p. 82] $f_n(k-nr; r)$ peut s'écrire sous la forme :

$$f_n(k-nr; r) = \sum_{j=1}^n B_{n,j}(D_{x=0}f_1(x; r), D_{x=0}f_2(x; r), \dots) (k-nr)^j, \quad (2.21)$$

et par substitution de (2.19) dans (2.21) et de (2.21) dans (2.20) on obtient :

$$\frac{B_{n+k, k}(1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}} = \sum_{j=1}^n B_{n, j}(y_1, y_2, \dots) (k - nr)^{j-1}. \quad (2.22)$$

On peut vérifier que (2.15) est vraie pour $x_1 = 0$, et, pour $x_1 \neq 0$ elle peut être dérivée de (2.22) en remplaçant x_n par $\frac{x_n}{x_1}$ et en utilisant les identités connues (1.10). □

Conséquence 2.24 De l'Identité (2.10) établie dans [8, Théorème 17] et [9], on déduit que :

$$A_n \left(\frac{s}{r} \binom{r}{1}_q, \dots, \frac{s}{r} (n-1)! \binom{nr}{n}_q \right) = \frac{n!s}{nr+s} \binom{nr+s}{n}_q$$

où r, s sont entiers avec $s \geq -nr + 1$ et $r \geq 1$.

Remarque 2.25 On peut construire plusieurs applications à partir d'une identité quelconque (sur les polynômes partiels de Bell) ou à partir d'une identité dérivée des Théorèmes 2.18 ou 2.21 ou du Corollaire 2.18 ou 2.22. Les identités données par la Conséquence 2.17 peuvent être déduites du théorème précédent en utilisant les identités des Conséquences 2.5, 2.6, 2.7 et 2.8.

Maintenant, comme pour les corollaires ci-dessus, le théorème précédent possède une autre version donnée par le corollaire suivant :

Corollaire 2.26 Soit $\{f_n(x)\}$ une suite binomiale avec $f_0(x) = 1$. Alors, pour n, r entiers, $n, r \geq 1$, on a :

$$A_n \left(\frac{s}{r} \frac{f_{r+1}^{(r)}(0)}{(r+1)!}, \dots, \frac{s}{r} \frac{(i-1)! f_{(r+1)i}^{(ri)}(0)}{((r+1)i)!}, \dots \right) = \frac{n!s}{rn+s} \frac{f_{(r+1)n+s}^{(rn+s)}(0)}{((r+1)n+s)!}, \quad s \geq -nr + 1. \quad (2.23)$$

Preuve. Il suffit de remplacer dans (2.16) x_i par $f'_i(0)$ et $B(n, k)$ par $\frac{f_n^{(k)}(0)}{k!}$. □

2.3 Polynômes de Bell et convolution

Le théorème suivant donne une relation de convolution simple entre les polynômes de Bell. Il admet plusieurs applications illustrées ci-dessous, en particulier avec les nombres de Stirling de deuxième espèce et les nombres de Fibonacci.

Théorème 2.27 Pour $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles, on a :

$$\sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} B_{i,k}(a_1, a_2, \dots) B_{n-i,k}(b_1, b_2, \dots) = \binom{n}{k} B_{n-k,k} \left(a_1 b_1, \dots, \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} a_i b_{m+1-i}, \dots \right). \quad (2.24)$$

Lorsque $a_n = b_n$ pour $n \geq 1$, la formule (2.24) représente le cas $(r, s) = (0, 2)$ du Théorème 2.18.

Preuve. Soit $H(t) := \frac{1}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} a_m \frac{t^m}{m!} \right)^k \frac{1}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} b_m \frac{t^m}{m!} \right)^k$.

On a d'un part,

$$\begin{aligned} H(t) &= \left(\sum_{n \geq k} B_{n,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n \geq k} B_{n,k}(b_1, b_2, \dots) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= \sum_{n \geq 2k} \frac{t^n}{n!} \sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} B_{i,k}(a_1, a_2, \dots) B_{n-i,k}(b_1, b_2, \dots), \end{aligned}$$

et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} H(t) &= \left(\frac{1}{k!} \right)^2 \left[\left(\sum_{m \geq 1} a_m \frac{t^m}{m!} \right) \left(\sum_{m \geq 1} b_m \frac{t^m}{m!} \right) \right]^k \\ &= \left(\frac{1}{k!} \right)^2 t^k \left[\sum_{m \geq 1} \frac{t^m}{m!} \frac{1}{m+1} \left(\sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} a_i b_{m+1-i} \right) \right]^k \\ &= \frac{1}{k!} t^k \sum_{n \geq k} B_{n,k} \left(a_1 b_1, \dots, \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} a_i b_{m+1-i}, \dots \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{n \geq 2k} \binom{n}{k} B_{n-k,k} \left(a_1 b_1, \dots, \frac{1}{m+1} \sum_{i=1}^m \binom{m+1}{i} a_i b_{m+1-i}, \dots \right) \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

L'identité (2.24) découle des deux expressions de $H(t)$. □

Corollaire 2.28 Pour $\{a_n\}$ et $\{b_n\}$ deux suites réelles, on a :

$$B_{n,k} \left(b_1, \dots, \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} b_i, \dots \right) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} k^i B_{n-i,k}(b_1, \dots, b_m, \dots), \quad (2.25)$$

ou d'une manière équivalente

$$B_{n,k}(c_1, \dots, c_m, \dots) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} (-k)^i B_{n-i,k} \left(c_1, \dots, \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} c_i, \dots \right). \quad (2.26)$$

Preuve. L'Identité (2.25) résulte lorsqu'on pose $a_j = j$ dans (2.24) et de la célèbre identité $B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) = \binom{n}{k} k^{n-k}$. Si $c_m = (-1)^m \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} b_i$, alors $b_m = (-1)^m \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} c_i$ et (2.25) devient (2.26). \square

Conséquence 2.29 Si on pose $b_i = (-1)^i$ dans (2.25) et on utilise l'identité connue $B_{n,k}(1, 1, \dots) = S(n, k)$, on obtient :

$$S(n, k) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} k^i (-1)^{n-k-i} S(n-i, k).$$

Conséquence 2.30 Si on pose $b_i = (-2)^i$ dans (2.25), on obtient :

$$B_{n,k}(1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots) = (-2)^{n-k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left(-\frac{k}{2}\right)^i S(n-i, k),$$

mais les Identités (1.10) prouvent que :

$$B_{n,k}(-x_1, 0, -x_3, 0, \dots) = (-1)^k B_{n,k}(x_1, 0, x_3, 0, \dots) = (-1)^n B_{n,k}(x_1, 0, x_3, 0, \dots), \tag{2.27}$$

et ceci implique que $B_{n,k}(x_1, 0, x_3, 0, x_5, 0, \dots) = 0$ lorsque $n - k$ est impair, et donc,

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left(-\frac{k}{2}\right)^i S(n-i, k) = 0 \text{ si } n - k \text{ est impair.}$$

Conséquence 2.31 Posons $b_i = F_i$ ou $(-1)^i F_i$ dans (2.25), où $\{F_n\}$ est la suite des nombres de Fibonacci ($F_0 = 0, F_1 = 1$ et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$). A partir des identités $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} F_i = F_{2n}$ et $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-1)^i F_i = -F_n$, (voir les Identités 2 et 7 dans [68]), on obtient :

$$B_{n,k}(F_1, \dots, F_m, \dots) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} k^i (-1)^{n-k-i} B_{n-i,k}(F_1, \dots, F_m, \dots)$$

$$B_{n,k}(F_2, \dots, F_{2m}, \dots) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} k^i B_{n-i,k}(F_1, \dots, F_m, \dots),$$

et, de l'identité $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} F_{i+1} = F_{2n+1} - 1$ (Identité 3 dans [68]) on obtient :

$$B_{n,k}(F_3 - 1, \dots, F_{2m+1} - 1, \dots) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} k^i B_{n-i,k}(F_2, F_3, F_4, \dots),$$

et, de l'identité $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} \Phi^i F_i = \Phi (\Phi + 2)^{n-1}$ ($\Phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$) (les Identités 4 et 5 dans [68]) on obtient :

$$\left(1 + \frac{2}{\Phi}\right)^{n-k} S(n, k) = \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left(\frac{k}{\Phi}\right)^i B_{n-i, k}(F_1, \dots, F_m, \dots),$$

et, de l'identité $\sum_{i=1}^n \binom{n}{i} (-2)^i F_i = \begin{cases} (-2) 5^{(n-1)/2} & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair} \end{cases}$ (l'Identité 3 dans [68]) et à l'aide de (2.27) on obtient :

$$\sum_{i=0}^{n-k} \binom{n}{i} \left(-\frac{k}{2}\right)^i B_{n-i, k}(F_1, \dots, F_m, \dots) = 0 \text{ si } n - k \text{ est impair.}$$

Remarque 2.32 Si $\{f_n(x)\}$ est une suite binomiale et si on choisit dans le Théorème 2.27

$$\begin{aligned} & \text{"} b_j = j f_{j-1}(x; a) \text{"} \quad \text{ou} \quad \text{"} b_j = j f_{j-1}(x; a), a_j = j \text{"} \\ & \text{ou} \quad \text{"} b_j = j f_{j-1}(x; a), a_j = f_j(y; a) \text{"} \end{aligned}$$

puis on utilise l'identité $B_{n, k}(1, 2, \dots) = \binom{n}{k} k^{n-k}$ et l'Identité (2.2), on trouve :

$$B_{n, k} \left(a_1, \dots, \sum_{i=1}^m \binom{m}{i} a_i f_{m-i}(x; a), \dots \right) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} f_{n-i}(kx; a) B_{i, k}(a_1, a_2, \dots)$$

$$B_{n, k} \left(1, \dots, m \sum_{i=0}^{m-1} \binom{m-1}{i} f_i(x; a), \dots \right) = \binom{n}{k} \sum_{i=0}^{n-k} \binom{n-k}{i} k^i f_{n-i}(kx; a)$$

$$B_{n, k}(f_1(y; a), \dots, f_m(x+y; a) - f_m(x; a), \dots) =$$

$$\sum_{i=k}^n \binom{n}{i} f_{n-i}(kx; a) B_{i, k}(f_1(y; a), f_2(y; a), \dots).$$

Remarque 2.33 Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables et si on choisit (a_i, b_i) dans le Théorème 2.27 par :

$$(D^i f(x), D^i g(x)), (iD^{i-1} f(x), D^i g(x)) \quad \text{ou} \quad (iD^{i-1} f(x), iD^{i-1} g(x)),$$

on trouve :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} B_{i, k}(Df, \dots, D^m f, \dots) B_{n-i, k}(Dg, \dots, D^m g, \dots) = \\ & \binom{n}{k} B_{n-k, k} \left(Df Dg, \dots, \frac{1}{m+1} (D^{m+1}(fg) - g D^{m+1} f - f D^{m+1} g), \dots \right), \end{aligned}$$

$$\sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} B_{i,k}(f, \dots, mD^{m-1}f, \dots) B_{n-i,k}(Dg, \dots, D^m g, \dots) =$$

$$\binom{n}{k} B_{n-k,k}(fDg, \dots, D^m(fg) - gD^m f, \dots) \quad \text{et}$$

$$\sum_{i=k}^{n-k} \binom{n}{i} B_{i,k}(f, \dots, mD^{m-1}f, \dots) B_{n-i,k}(g, \dots, mD^{m-1}g, \dots) =$$

$$\binom{n}{k} B_{n-k,k}(fg, \dots, mD^{m-1}(fg), \dots).$$

2.4 Polynômes de Bell à arguments tronqués

Le théorème suivant exprime une simple identité sur les polynômes de Bell, dans le cas où les arguments sont tronqués. Cette identité présente quelques applications qui aboutissent à de nouvelles identités.

Théorème 2.34 Soient m, n, k des entiers avec $n \geq 2$ et $k \leq m \leq k(n-1)$. Alors pour $\{a_n\}$ une suite réelle, on a :

$$B_{m,k}(a_{n-1}, \dots, j!a_{n-j}, \dots, (n-1)!a_1, 0, 0, \dots) =$$

$$\frac{m!}{(nk-m)!} B_{nk-m,k}(a_1, \dots, j!a_j, \dots, (n-1)!a_{n-1}, 0, 0, \dots) \quad (2.28)$$

et

$$B_{n,k}(1!a_1, \dots, i!a_i, \dots) =$$

$$\frac{n!}{(k(n-k+2)-n)!} B_{k(n-k+2)-n,k}(1!a_{n-k+1}, 2!a_{n-k}, \dots, (n-k+1)!a_1, 0, 0, \dots).$$

Preuve. Soit $p_n(t) = \sum_{j=1}^{n-1} a_j t^j$ et $q_n(t) = t^n p_n\left(\frac{1}{t}\right)$.

On a d'une part :

$$\frac{1}{k!} (q_n(t))^k = t^{nk} \frac{1}{k!} \left(p_n\left(\frac{1}{t}\right) \right)^k$$

$$= t^{nk} \sum_{s=k}^{(n-1)k} B_{s,k}(1!a_1, \dots, (n-1)!a_{n-1}, 0, 0, \dots) \frac{t^{-s}}{s!}$$

$$= \sum_{m=k}^{(n-1)k} \frac{m! B_{nk-m,k}(1!a_1, \dots, (n-1)!a_{n-1}, 0, 0, \dots)}{(nk-m)!} \frac{t^m}{m!}.$$

et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{k!} (q_n(t))^k &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j=1}^{n-1} j! a_{n-j} \frac{t^j}{j!} \right)^k \\ &= \sum_{m=k}^{(n-1)k} B_{m,k}(a_{n-1}, \dots, j! a_{n-j}, \dots, (n-1)! a_1, 0, 0, \dots) \frac{t^m}{m!}, \end{aligned}$$

Pour la deuxième identité du théorème, on a :

$$\begin{aligned} (k_1, k_2, \dots) &\in \pi(n, k) \Leftrightarrow \\ (k_1, \dots, k_{n-k+1}) &\in \pi_{n-k+1}(n, k) \text{ et } k_j = 0 \text{ pour } j \geq n - k + 2 \Leftrightarrow \\ (k_{n-k+1}, \dots, k_1) &\in \pi_{n-k+1}(k(n-k+2) - n, k) \text{ et } k_j = 0 \text{ pour } j \geq n - k + 2, \end{aligned}$$

et ceci implique

$$\begin{aligned} &B_{n,k}(a_1, \dots, i! a_i, \dots) \\ &= B_{n,k}(a_1, \dots, (n-k+1)! a_{n-k+1}) \\ &= \sum_{\pi_{n-k+1}(n,k)} \frac{n!}{k_1! \dots k_{n-k+1}!} a_1^{k_1} \dots a_{n-k+1}^{k_{n-k+1}} \\ &= \frac{n!}{(k(n-k+2) - n)!} \sum_{\pi_{n-k+1}(k(n-k+2) - n, k)} \frac{(k(n-k+2) - n)!}{k_1! \dots k_{n-k+1}!} a_1^{k_1} \dots a_{n-k+1}^{k_{n-k+1}} \\ &= \frac{n!}{(k(n-k+2) - n)!} B_{k(n-k+2) - n, k}(1! a_{n-k+1}, 2! a_{n-k}, \dots, (n-k+1)! a_1, 0, 0, \dots). \quad \square \end{aligned}$$

Quelques cas particuliers du Théorème 2.34 sont donnés par :

Remarque 2.35 Si on remplace $j! a_j$ par a_j , n par $2n$ dans (2.28) ensuite on pose $m = nk$, on aura :

$$\begin{aligned} &B_{nk,k}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_{2n-1}, 0, 0, \dots) = \\ &B_{nk,k} \left(\frac{a_{2n-1}}{(2n-1)!}, \dots, \frac{j! a_{2n-j}}{(2n-j)!}, \dots, (2n-1)! a_1, 0, 0, \dots \right), \end{aligned}$$

et, si on remplace $j! a_j$ par a_j , k par $2k$ dans (2.28) ensuite on pose $m = nk$, on aura :

$$\begin{aligned} &B_{nk,2k}(a_1, \dots, a_j, \dots, a_{n-1}, 0, 0, \dots) = \\ &B_{nk,2k} \left(\frac{a_{n-1}}{(n-1)!}, \dots, \frac{j! a_{n-j}}{(n-j)!}, \dots, (n-1)! a_1, 0, 0, \dots \right), \end{aligned}$$

et, si on remplace $j! a_j$ par a_j et on pose $m = k$, on aura :

$$B_{nk,k}(a_1, a_2, \dots, a_n, 0, 0, \dots) = \frac{(nk)!}{k!} \left(\frac{a_n}{n!} \right)^k.$$

Si on choisit $\{a_j\}$ dans le Théorème 2.34 de telle manière que $a_j = a_{n-j}$, ensuite on pose $b_n := n!a_n$ on obtient

$$\frac{B_{m,k}(b_1, \dots, b_{n-1}, 0, 0, \dots)}{m!} = \frac{B_{nk-m,k}(b_1, \dots, b_{n-1}, 0, 0, \dots)}{(nk-m)!}, \quad \text{avec } \frac{b_{n-j}}{(n-j)!} = \frac{b_j}{j!},$$

telle que $b_j = (n)_{(j-1)}, \quad j!(n-j)!, \quad \text{etc.}$

Conséquence 2.36 De l'Identité (2.10), si on pose $a_n = 1$ dans les deux identités du Théorème 2.34, on trouve :

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n}{nq-k}_q \quad \text{et} \quad \binom{k}{q}_q = \binom{k}{q(k-1)}_q = \binom{q+k-1}{k-1}.$$

2.5 Polynômes de Bell et variables aléatoires

Notre attention maintenant se localise sur quelques relations entre les polynômes de Bell et les variables aléatoires qui permettent de déduire des identités sur les polynômes de Bell.

Théorème 2.37 Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité. Alors si on pose $S_k := X_1 + \dots + X_k$, on aura :

$$E(S_k^n) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(1, 2E(X), \dots, mE(X^{m-1}), \dots). \quad (2.29)$$

Preuve. Soit $\varphi_X(t)$ la fonction génératrice des moments commune des variables aléatoires $X_n, n \geq 1$, et, $\varphi_{S_k}(t)$ la fonction génératrice associée à la variable aléatoire S_k . Par définition, on a

$$\varphi_{S_k}(t) = E(\exp(tS_k)) = (E \exp(tX_1))^k = (\varphi_X(t))^k.$$

On a d'une part,

$$\begin{aligned} t^k \varphi_{S_k}(t) &= E(t^k \exp(tS_k)) \\ &= (E(t \exp(tX_1)))^k \\ &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} m E(X_1^{m-1}) \frac{t^m}{m!} \right)^k \\ &= k! \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(1, 2E(X), \dots, mE(X^{m-1}), \dots) \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

et d'autre part, on a

$$t^k \varphi_{S_k}(t) = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}(S_k^m) \frac{t^{m+k}}{m!} = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{E}(S_k^{n-k}) \frac{t^n}{n!}.$$

Des deux expressions de $t^k \varphi_{S_k}(t)$ on déduit que :

$$\frac{n!}{(n-k)!} \mathbb{E}(S_k^{n-k}) = k! B_{n,k}(1, 2 \mathbb{E}(X), \dots, m \mathbb{E}(X^{m-1}), \dots), \quad n \geq k.$$

D'où l'identité recherchée découle de cette dernière identité en remplaçant n par $n+k$. □

Conséquence 2.38 *En utilisant la loi de Bernoulli de paramètre $p \in (0, 1)$ dans (2.29) puis on utilise l'Identité (1.11) on trouve :*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(S_k^n) &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(1, 2 \mathbb{E}(X), \dots, m \mathbb{E}(X^{m-1}), \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} B_{n,j}(\mathbb{E}(X), \dots, \mathbb{E}(X^m), \dots) \\ &= \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) p^j, \end{aligned}$$

et du fait que S_k suit une loi Binomiale de paramètres (k, p) , alors on obtient :

$$\mathbb{E}(S_k^n) = \sum_{j=0}^k j^n P(S_k = j) = \sum_{j=0}^k j^n \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j}. \text{ Alors,}$$

$$\sum_{j=0}^k j^n \binom{k}{j} p^j (1-p)^{k-j} = \sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) p^j \quad \text{pour tout } p \in (0, 1), \quad (2.30)$$

et pour $p = 1$ on déduit l'identité :

$$\sum_{j=0}^k \frac{k!}{(k-j)!} S(n, j) = k^n.$$

Corollaire 2.39 *Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de probabilité uniforme sur $(0, 1)$. Alors si on pose $S_k := X_1 + \dots + X_k$, on aura*

$$\mathbb{E}(S_k^n) = \frac{S(n+k, k)}{\binom{n+k}{k}} \quad \text{et} \quad S(n, k) = \frac{1}{k!} \sum_{r_1+\dots+r_k=n, r_1, \dots, r_k \geq 1} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!}, \quad (2.31)$$

où, les $S(n, k)$ sont les nombres de Stirling du second espèce.

Preuve. On a $m \mathbb{E}(X_1^{m-1}) = 1$. Il suffit donc d'appliquer (2.29).

On a aussi,

$$\mathbb{E}(S_k^n) = \sum_{i_1+\dots+i_k=n} \frac{n! \mathbb{E}(X_1^{i_1}) \dots \mathbb{E}(X_k^{i_k})}{i_1! \dots i_k!}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i_1+\dots+i_k=n} \frac{n!}{(i_1+1)! \dots (i_k+1)!} \\
 &= \sum_{r_1+\dots+r_k=k+n, i_j \geq 1} \frac{n!}{r_1! \dots r_k!}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Proposition 2.40 Soient $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $p_j := P(X_1 = j)$, $j \geq 0$ et $S_k := X_1 + \dots + X_k$. Alors,

$$\begin{aligned}
 P(S_k = n) &= \frac{k!}{(n+k)!} B_{n+k,k}(1!p_0, \dots, m!p_{m-1}, \dots) \\
 &= \tilde{B}_{n+k,k}(p_0, \dots, p_{m-1}, \dots). \tag{2.32}
 \end{aligned}$$

Preuve. Elle découle de l'identité :

$$\begin{aligned}
 t^k \sum_{r \geq 0} P(S_k = r) t^r &= t^k \mathbf{E}(t^{S_k}) \\
 &= (\mathbf{E}(t^{X_1+1}))^k \\
 &= \left(\sum_{j \geq 1} p_{j-1} t^j \right)^k \\
 &= k! \sum_{r \geq k} B_{r,k}(1!p_0, \dots, m!p_{m-1}, \dots) \frac{t^r}{r!}. \quad \square
 \end{aligned}$$

De (2.29) et (2.32), on peut déduire des cas particuliers du Théorème 2.18, donnés par le corollaire suivant :

Corollaire 2.41 Soit $\{X_n\}$ une suite de variables aléatoires indépendantes discrètes de même loi de probabilité $P(X_1 = j) = \frac{p_j}{j!}$, ($j \geq 0$) ou des moments $\mu_j = \mathbf{E}(X_1^j)$. Pour n, k, r entiers, $n \geq k \geq 1$, $r \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned}
 B_{n,k} \left(B_{r,r}(x_1, x_2, \dots), \dots, m \binom{m+r-1}{r}^{-1} B_{m+r-1,r}(x_1, x_2, \dots), \dots \right) = \\
 \binom{n}{k} \binom{n+(r-1)k}{kr}^{-1} B_{n+(r-1)k,kr}(x_1, x_2, \dots),
 \end{aligned}$$

avec $x_n = np_{n-1}$ ou $x_n = n\mu_{n-1}$.

Preuve. Montrons la première identité.

Soit $V_r(j) = X_{r(j-1)+1} + \dots + X_{r(j-1)+r}$, ($j, r \geq 1$). On a bien $V_r(1), V_r(2), \dots$ indépendantes et de même loi de probabilité, et, d'après la Proposition 2.40, cette loi

est donnée par :

$$p(V_r(1) = n) = \frac{r!}{(n+r)!} B_{n+r,r}(p_0, 2p_1, 3p_2, \dots), \quad n \geq 0.$$

Posons $U_r(k) := V_r(1) + V_r(2) + \dots + V_r(k) \equiv X_1 + \dots + X_{kr}$.

On a, d'une part, d'après la Proposition 2.40,

$$p(U_r(k) = n) = \frac{(kr)!}{(n+kr)!} B_{n+kr,kr}(p_0, 2p_1, 3p_2, \dots),$$

et d'autre part, d'après la Proposition 2.40, on a :

$$\begin{aligned} p(U_r(k) = n) &= \frac{k!}{(n+k)!} B_{n+k,k}(1!p(V_r(1) = 0), \dots, m!p(V_r(1) = m-1), \dots) \\ &= \frac{k!}{(n+k)!} B_{n+k,k} \left(p_0^r, \dots, \frac{m!r!}{(m+r-1)!} B_{m+r-1,r}(p_0, 2p_1, \dots), \dots \right). \end{aligned}$$

Donc, à partir des deux expressions de $p(U_r(k) = n)$ et après avoir remplacer n par $n - k$, on déduit la première identité du corollaire.

Montrons la deuxième identité.

D'après la Proposition 2.40, on trouve

$$E(V_r^n(1)) = \binom{n+r}{r}^{-1} B_{n+r,r}(1, 2\mu_1, \dots, m\mu_{m-1}, \dots).$$

On a d'une part,

$$E(U_r^n(k)) = E(X_1 + \dots + X_{kr})^n = \binom{n+kr}{kr}^{-1} B_{n+kr,kr}(1, 2\mu_1, \dots, m\mu_{m-1}, \dots),$$

et on d'autre part,

$$\begin{aligned} E(U_r^n(k)) &= E(V_r(1) + \dots + V_r(k))^n \\ &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k}(1, 2E V_r(1), \dots, mE V_r^{m-1}(1), \dots) \\ &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k,k} \left(1, \dots, m \binom{m+r-1}{r}^{-1} B_{m+r-1,r}(1, 2\mu_1, \dots), \dots \right). \end{aligned}$$

Des deux expressions de $E(U_r^n(k))$ on déduit :

$$\begin{aligned} B_{n+k,k} \left(1, \dots, m \binom{m+r-1}{r}^{-1} B_{m+r-1,r}(1, 2\mu_1, \dots), \dots \right) &= \\ \frac{(kr)!(n+k)!}{(n+kr)!k!} B_{n+kr,kr}(1, 2\mu_1, \dots). \end{aligned}$$

Pour avoir l'identité recherchée, il suffit de remplacer n par $n - k$ dans cette dernière identité. □

Chapitre 3

Polynômes de Bell et dérivées des fonctions d'une suite binomiale

Ce chapitre concerne une étude sur les polynômes de Bell et les dérivées successives des fonctions d'une suite de type binomial. Nous établissons de nouvelles relations et identités différentes de celles établies ci-dessus. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [51].

3.1 Introduction

Pour une suite réelle $\{x_n\}$ et des entiers naturels r, s ($r + s \geq 1$), si on note par $Y(n, k)$ le second membre de l'Identité (2.8), c'est à dire :

$$Y(n, k) := \binom{n}{k} \frac{sk}{r(n-k) + sk} \frac{B((r+1)(n-k) + sk, r(n-k) + sk)}{\binom{(r+1)(n-k) + sk}{r(n-k) + sk}}, \quad (3.1)$$

avec $B(n, k) := B_{n,k}(x_1, x_2, \dots)$, on obtient :

$$B_{n,k}(Y(1, 1), Y(2, 1), Y(3, 1), \dots) = Y(n, k). \quad (3.2)$$

En général, de la définition (1.1), pour :

$$\psi(t) = \sum_{m=1}^{\infty} x_m \frac{t^m}{m!} \quad \text{et} \quad Y(n, k) = \frac{1}{k!} D_{t=0}^n (\psi(t))^k,$$

la suite $\{Y(n, k)\}$ satisfait (3.2) pour n, k entiers, $n \geq k \geq 1$. Autrement dit, pour trouver des identités sur les polynômes partiels de Bell, il suffit de trouver des suites

$\{Y(n, k)\}$ qui satisfont l'équation (3.2).

D'une manière similaire, si on note par $sZ(n, s)$ le second membre de l'Identité (2.16), c'est à dire :

$$Z(n, s) := \frac{1}{nr + s} \frac{B((r + 1)n + s, nr + s)}{\binom{(r + 1)n + s}{nr + s}}, \text{ avec } B(n, k) := B_{n,k}(x_1, x_2, \dots), \quad (3.3)$$

on s'aperçoit que la suite $\{Z(n, s)\}$ satisfait l'équation :

$$A_n(sZ(1, 0), sZ(2, 0), \dots, sZ(n, 0)) = sZ(n, s), \quad (3.4)$$

Autrement dit, pour trouver des identités concernant les polynômes complets de Bell, il suffit de trouver des suites $\{Z(n, s)\}$ qui satisfont l'équation (3.4). Pour ce faire, on exploite la forte connexion entre les polynômes de Bell et les suites binomiales donnée par (1.17). En se basant sur des résultats obtenus au chapitre précédent, de la relation (1.17) et du lemme suivant, on donne de nouvelles relations.

3.2 Résultats obtenus

Dans la suite de cette section, pour un réel a donné, on définit à partir d'une suite binomiale $\{f_n(x)\}$ donnée, avec $f_0(x) = 1$, la suite :

$$f_n(x; a) := \frac{x}{an + x} f_n(an + x) \text{ avec } f_0(x; a) := 1. \quad (3.5)$$

La suite $\{f_n(x; a)\}$ est de type binomial, voir la preuve du Théorème 2.1.

Pour faciliter l'écriture des expressions données dans la suite de cette section, on pose :

$$\begin{aligned} T = T(n, k) &:= r(n - k) + sk, \quad r, s \text{ entiers naturels avec } r + s \geq 1, \\ R = R(n, s) &:= nr + s, \quad r, s \text{ entiers relatifs avec } r \geq 1, s \geq -nr + 1 \\ &\text{et } \{f_n(x)\} \text{ désigne une suite binomiale avec } f_0(x) = 1. \end{aligned}$$

Ci-dessous, nous énonçons les résultats qui relient les polynômes de Bell aux dérivées des fonctions d'une suite binomiale. Nous utilisons ces résultats pour déduire des identités autres que celles données au chapitre précédent. Pour ce faire, on a besoin du lemme suivant :

Lemme 3.1 Soient n, k deux entiers, $n \geq k \geq 1$, et a, α deux nombres réels. On a :

$$B_{n,k}(\alpha, 2D_{z=0}(e^{\alpha z} f_1(x+z; a)), \dots, mD_{z=0}(e^{\alpha z} f_{m-1}(x+z; a)), \dots) = \binom{n}{k} D_{z=0}^k(e^{\alpha z} f_{n-k}(kx+z; a)). \quad (3.6)$$

Cette identité peut être remplacée lorsque $\alpha = 0$ par :

$$B_{n,k}(D_x f_1(x; a), \dots, D_x f_m(x; a), \dots) = \frac{1}{k!} D_{z=0}^k f_n(kx+z; a). \quad (3.7)$$

Théorème 3.2 Soient a, x, α des nombres réels et n, k, r, s des entiers, $n \geq k \geq 1$ et $r + s \geq 1$. Alors, la suite :

$$Y(n, k) := \binom{n}{k} \frac{sk}{T} D_{z=0}^T(e^{\alpha z} f_{n-k}(Tx+z; a)), \quad (3.8)$$

satisfait (3.2). Pour $\alpha = 0$, on remplace cette suite par :

$$Y(n, k) := \frac{n!}{k!(T+n-k)!} \frac{sk}{T} D_{z=0}^T f_{T+n-k}(Tx+z; a). \quad (3.9)$$

Pour $r = s = 0$, on pose $Y(n, k) := \binom{n}{k} f_{n-k}(x; a)$.

Théorème 3.3 Soient a, x, α des nombres réels et n, r, s des entiers, $n \geq 1, r \geq 1$. Alors, pour $\alpha \neq 0$, la suite :

$$Z(n, s) := \begin{cases} \frac{1}{\alpha^s} \frac{1}{R} D_{z=0}^R(e^{\alpha z} f_n(Rx+z; a)) & \text{si } \alpha \neq 0 \\ \frac{1}{(Df_1(0))^s} \frac{1}{R} \frac{n!}{(R+n)!} D_{z=0}^R f_{R+n}(Rx+z; a) & \text{si } \alpha = 0, \end{cases} \quad (3.10)$$

satisfait (3.4).

D'une manière générale, le Théorème 3.2 peut être généralisé comme suit :

Théorème 3.4 soient $\{a_n\}$ une suite réelle, n, k, r, s, u, v des entiers, $n \geq k \geq 1, r + s \geq 1$, et $x, a, \alpha, \beta, \lambda$ des nombres réels. Alors, la suite :

$$Y(n, k) := \binom{n}{k} \frac{sk}{T} T! \sum_{j \geq T} B_{j,T}(a_1, a_2, \dots) D_{z=\beta j + \lambda T}^{ju+vT} \{e^{\alpha z} f_{n-k}(z; a)\} \frac{x^j}{j!}, \quad (3.11)$$

satisfait (3.2). Pour $\alpha = 0$, la suite ci-dessus peut être remplacée par :

$$Y(n, k) := \frac{n!}{k!} \frac{sk}{T} T! \sum_{j=T}^{h+T} B_{j,T}(a_1, a_2, \dots) \frac{D_{z=\beta j + \lambda T}^{ju+vT} f_{(u+v)T+n-k}(z; a)}{((u+v)T+n-k)!} \frac{x^j}{j!}, \quad (3.12)$$

où $h = \left\lfloor \frac{n-k}{u} \right\rfloor$ pour $u \geq 1$, $h = \infty$ pour $u = 0$ et $[x]$ désigne le plus grand entier $\leq x$.

D'une manière générale, le Théorème 3.4 peut être généralisé comme suit :

Théorème 3.5 Soient $\{a_n\}$ une suite des nombres réels, n, r, s, u, v des entiers, $r \geq 1$, et $a, \alpha, \beta, \lambda$ des nombres réels. Pour $\alpha \neq 0$, la suite :

$$Z(n, s) := \frac{R!}{\gamma^s R} \sum_{j \geq R} B_{j,R}(a_1, a_2, \dots) D_{z=\beta j + \lambda R}^{ju+vR} \{e^{\alpha z} f_n(z; a)\} \frac{x^j}{j!} \quad (3.13)$$

avec $\gamma := \alpha^v \varphi(x \alpha^u)$ et $\varphi(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$

satisfait (3.4). Pour $\alpha = 0$, la suite ci-dessus peut être remplacée par :

$$Z(n, s) := \frac{n! R!}{\gamma^s R} \sum_{j=R}^{g+R} B_{j,R}(a_1, a_2, \dots) \frac{D_{z=\beta j + \lambda R}^{ju+vR} f_{n+(u+v)R}(z; a) x^j}{(n + (u + v) R)! j!} \quad (3.14)$$

avec $\gamma := \begin{cases} a_1 x (Df_1(0))^{u+v} & \text{si } u \geq 1 \\ (Df_1(0))^v \varphi(x) & \text{si } u = 0 \end{cases}$ et $\varphi(x) := \sum_{i=1}^{\infty} a_i \frac{x^i}{i!}$,

où $g := \lfloor \frac{n}{u} \rfloor$ pour $u \geq 1$, et, $g = \infty$ pour $u = 0$.

Remarque 3.6 Pour $a_n = 0$ ($n \geq 2$) dans le Théorème 3.4 on obtient le Théorème 3.2. Pour $a_n = 0$ ($n \geq 2$) dans le Théorème 3.5 on obtient le Théorème 3.3.

Pour $x = \alpha = 0$ dans le Théorème 3.2 on obtient le Corollaire 2.20.

Pour $x = \alpha = 0$ dans le Théorème 3.3 on obtient le Corollaire 2.26.

De (3.8) la suite $Y_1(n, k) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-T} Y(n, k)$ satisfait (3.2) et donne la Proposition 2.1, et, de (3.10) la suite $Z_1(n, s) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \alpha^{-nr} Z(n, s)$ satisfait (3.4) et donne la Proposition 2.16. L'utilisation de (1.17) et (3.5) permet de construire plusieurs suites binomiales telles que $p_n(t) := t \sum_{k=1}^n Y(n, k) (bn + t)^{k-1}$, ($p_0(t) := 1$), avec $\{Y(n, k)\}$ est l'une des suites données par (3.9) ou (3.8).

3.3 Applications

Dans cette section, on donne d'autres versions des Théorèmes 3.2 et 3.3 et on présente quelques cas particuliers des Théorèmes 3.4 et 3.5.

3.3.1 Quelques application du Théorème 3.2

Le corollaire suivant constitue une version pratique du Théorème 3.2.

Corollaire 3.7 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, la suite :*

$$Y(n, k) := \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T}{j} D_{z=Tx}^j f_{n-k}(z; a) \alpha^j, \quad (3.15)$$

satisfait (3.2).

Preuve. De (3.8), on a :

$$\begin{aligned} Y(n, k) &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T}{j} D_{z=0}^{T-j} (e^{z/\alpha}) D_{z=0}^j f_{n-k}(Tx + z; a) \\ &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T}{j} D_{z=0}^j f_{n-k}(Tx + z; a) \left(\frac{1}{\alpha}\right)^{T-j}. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que $Y_1(n, k) := \alpha^T Y(n, k)$ satisfait (3.2). \square

Conséquence 3.8 *Pour $f_n(x) = x^n$, la suite $\{Y(n, k)\}$ donnée par (3.15) devient :*

$$Y(n, k) := \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T}{j} \frac{(n-k)!}{(n-k-j)!} (Tx + a(n-k))^{n-k-j-1} (Tx + aj) \alpha^j,$$

et pour $a = 0, \alpha = 1$, cette dernière suite devient :

$$Y(n, k) := T! \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} \frac{(Tx)^{n-k-j}}{(T-j)!}.$$

Le corollaire suivant constitue une version pratique du Théorème 3.2 lorsque $\alpha = 0$:

Corollaire 3.9 *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, la suite :*

$$\begin{aligned} Y(n, k) &:= \frac{sk}{T} \binom{n}{k} \binom{T+n-k}{n-k}^{-1} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T+j-1}{T-1} B(T+n-k, T+j) \times \\ &\quad (((r+1)c-b)j + b(n-k) + csk) (b(n-k) + csk)^{T+j-1}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

satisfait (3.2), et en particulier, la suite :

$$\begin{aligned} Y(n, k) &:= \frac{sk}{T} \binom{n}{k} \binom{T+n-k}{n-k}^{-1} \times \\ &\quad \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T+j-1}{T-1} B(T+n-k, T+j) (T+n-k)^j x^j, \end{aligned} \quad (3.17)$$

satisfait (3.2), où $B(n, k) := B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve. Soit $\{x_n\}$ une suite des nombres réels, $x_1 \neq 0$. Pour avoir (3.16), il suffit d'exprimer $Y(n, k)$ dans (3.9) en considérant la suite binomiale :

$$f_n(x; a) := x \sum_{k=1}^n B_{n,k}(x_1, x_2, \dots) (an + x)^{k-1} \text{ avec } f_0(x) = 1, \quad (3.18)$$

et poser ensuite $b := ra + rx + a$, $c := x + a$. Pour avoir (3.17), il suffit de choisir $b = (r + 1)c$, $c = x$ dans (3.16). \square

Conséquence 3.10 En utilisant l'identité connue $B_{n,k}(1, 2, 3, \dots) = \binom{n}{k} k^{n-k}$, si $x_n = n$, la suite donnée par (3.17) devient :

$$Y(n, k) = \frac{n!}{k!} \frac{sk}{(T + n - k)!} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T + n - k}{T + j} (T + j)^{n-k-j} (T + n - k)^j \frac{x^j}{j!},$$

et, en utilisant l'identité connue $B_{n,k}(1!, 2!, 3!, \dots) = \binom{n}{k} \frac{(n-1)!}{(k-1)!}$ (les nombres de Lah), si $x_n = n!$, la suite donnée par (3.17) devient :

$$Y(n, k) = \frac{n!}{k!} \frac{sk}{T + n - k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T + n - k}{T + j} (T + n - k)^j \frac{x^j}{j!}.$$

Plus d'autres applications peuvent être construites en remplaçant, dans (3.16) ou (3.17), x_n par 1 , $nf_{n-1}(y; a)$, $D_x f_n(x; a)$, etc.

Conséquence 3.11 Pour $r = 0$, $s = 1$, $\alpha = 0$ et $f_n(x) := B_n(x) = \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} S(n, j)$ dans (3.9), on obtient :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, \frac{x B_{m+1}(am + x) - (x^2 + amx - am) B_m(am + x)}{(am + x)^2}, \dots \right) = kx \sum_{l=0}^{n-k} \binom{l+k}{k} S(n, l+k) (an + kx)^{l-1}.$$

Pour $r = 0$, $s = 1$, $\alpha = 0$ et $f_n(x) := (x)_{(n)} = \sum_{j=1}^n s(n, j) x^j$ dans (3.9), on obtient :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (am + x - 1)_{(m-1)} \left(m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{am - i}{am + x - i} \right), \dots \right) = kx \sum_{l=0}^{n-k} \binom{l+k}{k} s(n, l+k) (an + kx)^{l-1}.$$

Pour $r = 0$, $s = 1$, $\alpha = 0$ et $f_n(x) := (x)^{(n)} = \sum_{j=1}^n |s(n, j)| x^j$ dans (3.9), on obtient :

$$B_{n,k} \left(1, \dots, (am + x - 1)^{(m-1)} \left(m - \sum_{i=1}^{m-1} \frac{am + i}{am + i + x} \right), \dots \right) = kx \sum_{l=0}^{n-k} \binom{l+k}{k} |s(n, l+k)| (an + kx)^{l-1}.$$

3.3.2 Quelques applications du Théorème 3.3

Les corollaires suivants constituent une version pratique du Théorème 3.3.

Corollaire 3.12 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3, la suite :*

$$Z(n, s) := \frac{1}{R} \sum_{j=0}^n \binom{R}{j} D_{z=Rx}^j f_n(z; a) \alpha^j, \quad (3.19)$$

satisfait (3.4).

Preuve. De (3.10) on a :

$$\begin{aligned} Z(n, s) &= \frac{\alpha^s}{R} D_{z=0}^R (e^{z/\alpha} f_n(Rx + z; a)) \\ &= \frac{\alpha^s}{R} \sum_{j=0}^n \binom{R}{j} D_{z=0}^j (f_n(Rx + z; a)) \frac{1}{\alpha^{R-j}} \\ &= \frac{1}{R} \sum_{j=0}^n \binom{R}{j} D_{z=0}^j (f_n(Rx + z; a)) \frac{\alpha^j}{\alpha^{nr}}. \end{aligned}$$

Pour terminer, il suffit de remarquer que $Z_1(n, s) := \alpha^{nr} Z(n, s)$ satisfait (3.4). \square

Conséquence 3.13 *Pour $f_n(x) = x^n$ et $r \geq 1$, la suite donnée par (3.19) devient :*

$$Z(n, s) = \frac{1}{R} \sum_{j=0}^n \binom{R}{j} \frac{n!}{(n-j)!} (Rx + an)^{n-j-1} (Rx + aj) \alpha^j,$$

et, pour $a = 0$, $x = 1$, cette dernière suite devient :

$$Z(n, s) = \frac{1}{R} \sum_{j=0}^n \binom{R}{j} \frac{n!}{(n-j)!} R^{n-j} \alpha^j.$$

Corollaire 3.14 *Sous les hypothèses du Théorème 3.3, la suite :*

$$\begin{aligned} Z(n, s) &:= \frac{1}{(Df_1(0))^s} \frac{1}{R} \binom{R+n}{n}^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{R+j-1}{R-1} B(R+n, R+j) \\ &\quad \times (cn + bs)^{j-1} \{((r+1)b - c)j + cn + bs\}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

satisfait (3.4), et en particulier, la suite :

$$Z(n, s) := \frac{1}{(Df_1(0))^s} \frac{1}{R} \binom{R+n}{n}^{-1} \sum_{j=0}^n \binom{R+j-1}{R-1} \times B(R+n, R+j) (R+n)^j x^j, \quad (3.21)$$

satisfait (3.4), où $B(n, k) := B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Preuve. Soit $\{x_n\}$ une suite des nombres réels. Pour avoir (3.20), il suffit d'exprimer $Z(n, s)$ en considérant dans (3.10) la suite binomiale définie par (3.18), on pose ensuite $b = a + x$, $c = a + ar + xr$. Pour avoir (3.21), il suffit de choisir $b = (r + 1)c$, $c = x$ dans (3.20). \square

Conséquence 3.15 Pour $x_n = n$, la suite donnée dans (3.21) devient :

$$Z(n, s) = \frac{1}{(Df_1(0))^s} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (R+j)^{n-j-1} (R+n)^j x^j,$$

et, pour $x_n = n!$, la suite donnée dans (3.21) devient :

$$Z(n, s) = \frac{(R+n-1)!}{(Df_1(0))^s} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \frac{(R+n)^j}{(R+j)!} x^j.$$

3.3.3 Quelques applications du Théorème 3.4

Quelques cas particuliers du Théorème 3.4 sont donnés par les corollaires suivants :

Corollaire 3.16 Sous les hypothèses du Théorème 3.4 et pour $v \geq u$ les suites :

$$\begin{aligned} Y_1(n, k) &:= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \sum_{j=0}^T \binom{T}{j} D_{z=\beta j+\lambda T}^{ju+vT} \{e^{\alpha z} f_{n-k}(z; a)\} x^j y^{T-j}, \\ Y_2(n, k) &:= \frac{n! sk}{k! T} \sum_{j=0}^T \binom{T}{j} \frac{D_{z=\beta j+\lambda T}^{ju+vT} f_{vT+n-k}(z; a)}{(vT+n-k)!} x^j y^{T-j}, \end{aligned} \quad (3.22)$$

satisfont (3.2).

Preuve. Posons $a_1 = p$, $a_2 = 2q$ et $a_m = 0$ pour $m \geq 3$. Pour avoir (3.22), il suffit de remplacer l'identité $B_{j,T}(p, 2q, 0, 0, \dots) = \binom{T}{j-T} p^{2T-j} q^{j-T}$ dans (3.12) et dans (3.11). \square

Conséquence 3.17 Quelques cas particuliers de (3.23) sont donnés par :

Pour $r = u = 0$, $v = 1$ ou $u = v = r = 0$ dans (3.22), les suites :

$$\begin{aligned} Y_1(n, k) &:= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{sk} \binom{sk}{j} D_{z=\beta j+\lambda k}^{sk} \{e^{\alpha z} f_{n-k}(z; a)\} x^j y^{sk-j}, \\ Y_2(n, k) &:= \frac{n!}{k!} \sum_{j=0}^{sk} \binom{sk}{j} \frac{D_{z=\beta j+\lambda k}^{sk} f_{n+(s-1)k}(z; a)}{(n + (s-1)k)!} x^j y^{sk-j}, \\ Y_3(n, k) &:= \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{sk} \binom{sk}{j} f_{n-k}(\beta j + \lambda k; a) x^j y^{sk-j}, \end{aligned} \tag{3.23}$$

satisfont (3.2), et pour $s = 1$ les dernières suites donnent :

$$\begin{aligned} &B_{n,k}(\alpha y, \dots, m(\alpha y f_{m-1}(\lambda; a) + x D_{z=\beta} f_{m-1}(z; a)), \dots) = \\ &\binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{z=0}^k \{e^{\alpha z} f_{n-k}((\beta - \lambda)j + \lambda k + z; a)\} x^j y^{k-j}, \end{aligned} \tag{3.24}$$

$$\begin{aligned} &B_{n,k}((x + y) D f_1(0), \dots, y D_{z=\lambda} f_n(z; a) + x D_{z=\beta} f_n(z; a), \dots) = \\ &\frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} D_{z=0}^k f_n((\beta - \lambda)j + \lambda k + z; a) x^j y^{k-j} \text{ et} \end{aligned} \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned} &B_{n,k}(y + x, \dots, m(y f_{m-1}(\lambda; a) + x f_{m-1}(\beta; a)), \dots) = \\ &\binom{n}{k} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} f_{n-k}((\beta - \lambda)j + \lambda k; a) x^j y^{k-j}. \end{aligned} \tag{3.26}$$

Pour $f_n(x) = x^n$, $a = 0$ et $u = 0$ ou 1 dans (3.22), les suites :

$$\begin{aligned} Y_1(n, k) &= \frac{sk}{T} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^T \binom{T}{j} (\alpha T + \beta j)^{n-k} x^{T-j} y^j \text{ et} \\ Y_2(n, k) &= \frac{n! sk}{k! T} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{T}{j} \frac{(\alpha T + \beta j)^{n-k-j}}{(n-k-j)!} x^{T-j} y^j \end{aligned}$$

satisfont (3.2), et pour $f_n(x) = x^n$, $a = 0$, $u = 0$ ou 1 , $a_n = n$ dans le Théorème 3.4, les suites :

$$\begin{aligned} Y_3(n, k) &= \frac{sk}{T} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{\infty} (\alpha T + \beta j)^{n-k} \frac{(Tx)^j}{j!} \text{ et} \\ Y_4(n, k) &= \frac{sk}{T} \binom{n}{k} \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-k}{j} (\alpha T + \beta j)^{n-k-j} (Tx)^j, \end{aligned}$$

satisfont (3.2).

Une relation entre les polynômes de Bell et les polynômes d'Appell peut être vue comme un cas particulier du Théorème 3.4 et est donnée par :

Corollaire 3.18 Pour la suite des polynômes $\{P_n(x, y, z)\}$ définis par :

$$P_n(x, y, z) := \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j ((x+y)j + x + y + z) (xj + yn + x + y + z)^{n-1-j},$$

on a :

$$B_{n,k}(P_0(x, y, z), \dots, mP_{m-1}(x, y, z), \dots) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} B_{j,k}(a_0, 2a_1, 3a_2, \dots) (jx + ny + kz)^{n-j-1} ((x+y)j + kz), \quad (3.27)$$

et, en particulier lorsque $x = y = 0$, on obtient :

$$B_{n,k}(P_0(z), \dots, mP_{m-1}(z), \dots) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} B_{j,k}(a_0, \dots, ma_{m-1}, \dots) (kz)^{n-j}, \quad (3.28)$$

où, $P_n(z) := P_n(0, 0, z) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j z^{n-j}$ est un polynôme d'Appell. On a aussi :

$$A_n(P_0(x, y), \dots, mP_{m-1}(x, y), \dots) = (x+y) \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} A_j(a_0, 2a_1, 3a_2, \dots) j (jx + ny)^{n-j-1}. \quad (3.29)$$

où, $P_n(x, y) := P_n(x, y, 0) = (x+y) \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} a_j (j+1) (x(j+1) + y(n+1))^{n-1-j}$.

Preuve. Il suffit d'utiliser (3.12) avec $x = 1, r = v = 0, s = u = 1, f_n(x; a) := x(an + x)^{n-1}$ ensuite remplacer a_n par na_{n-1} . Pour avoir (3.29) il suffit de sommer sur k les deux cotés de l'Identité (3.27). \square

Conséquence 3.19 Pour $\{\varphi_n\}$ une suite des nombres réels, soit I_n la matrice Identité d'ordre n et $\{A_n\}$ la suite des matrices définies par : $A_0 := 1, A_n := (a_{ij})$ pour $1 \leq i, j \leq n$ avec $a_{ij} = \varphi_{j-i+1}$ si $j \geq i, a_{i,i-1} = i - 1$ et $a_{ij} = 0$ ailleurs. Alors, à partir de [72, p. 110] et de (3.28) on obtient :

$$B_{n,k}(1, \dots, m \det(A_{m-1} + xI_{m-1}), \dots) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} B_{j,k}(1, \dots, m \det A_{m-1}, \dots) (kx)^{n-j}.$$

3.3.4 Quelques applications du Théorème 3.5

Quelques cas particuliers du Théorème 3.5 sont donnés par le corollaire suivant :

Corollaire 3.20 *Sous les hypothèses du Théorème 3.5 et pour $v \geq u$ les suites :*

$$\begin{aligned} Z_1(n, s) &:= \frac{1}{\gamma_1^s R} \sum_{j=0}^R \binom{R}{j} D_{z=\beta j+\lambda R}^{ju+vR} \{e^{\alpha z} f_n(z; a)\} x^j y^{R-j} \text{ et} \\ Z_2(n, s) &:= \frac{n!}{\gamma_2^s R} \sum_{j=0}^R \binom{R}{j} \frac{D_{z=\beta j+\lambda R}^{ju+vR} f_{n+(u+v)R}(z; a)}{(n+(u+v)R)!} x^j y^{R-j}, \end{aligned} \quad (3.30)$$

satisfont (3.4), où $\gamma_1 := \alpha^v (x\alpha^u + y)$ et $\gamma_2 := \begin{cases} (x+y)(Df_1(0))^v & \text{si } u \geq 1 \\ y(Df_1(0))^v & \text{si } u = 0 \end{cases}$.

Preuve. Il suffit de poser dans le Théorème 3.5 $x = 1$; $a_1 = p$, $a_2 = 2q$ et $a_m = 0$ pour $m \geq 3$, ensuite utiliser l'identité $B_{j,R}(p, 2q, 0, 0, \dots) = \binom{R}{j-R} p^{2R-j} q^{j-R}$. \square

Conséquence 3.21 *Pour $f_n(x) = x^n$, $a = 0$ et $u = 0$ ou 1 , les suites données par (3.30) deviennent :*

$$\begin{aligned} Z_1(n, s) &= (x+y)^{-s} \frac{1}{R} \sum_{j=0}^R \binom{R}{j} (\beta j + \alpha R)^n x^j y^{R-j} \text{ et} \\ Z_2(n, s) &= \frac{n!}{R} \sum_{j=0}^n \frac{1}{(n-j)!} \binom{R}{j} (\beta j + \alpha R)^{n-j} x^j \end{aligned}$$

et satisfont (3.4), et pour $f_n(x) = x^n$, $a = 0$, $x = 1$, $u = 0$ ou 1 , $a_n = nt^{n-1}$, les suites données par (3.14) deviennent :

$$\begin{aligned} Z_3(n, s) &= \frac{1}{R} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\beta j + \alpha R)^{n-j} R^j t^j \text{ et} \\ Z_4(n, s) &= \frac{\exp(-sx)}{R!} \sum_{j=0}^{\infty} (\beta j + \alpha R)^n \frac{(Rx)^j}{j!}. \end{aligned}$$

3.4 Preuves du lemme et des théorèmes

Preuve du Lemme 3.1. Soit $F(t; a)^x := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x; a) \frac{t^n}{n!}$. Alors, du fait que $f_n(x; a)$ est un polynôme de degré n , la preuve découle des développements suivants :

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} D_{z=0}^k (e^{\alpha z} f_n(kx+z; a)) \frac{t^{n+k}}{n!} &= \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} D_{z=0}^k (e^{\alpha z} f_{n-k}(kx+z; a)) \frac{t^n}{n!} \text{ et} \\
 \sum_{n=0}^{\infty} D_{z=0}^k (e^{\alpha z} f_n(kx+z; a)) \frac{t^{n+k}}{n!} &= D_{z=0}^k \left(e^{\alpha z} \sum_{n=0}^{\infty} f_n(kx+z; a) \frac{t^{n+k}}{n!} \right) \\
 &= D_{z=0}^k \left(e^{\alpha z} F(t; a)^{kx+z} t^k \right) \\
 &= t^k F(t; a)^{kx} D_{z=0}^k \left(e^{(\alpha + \ln F(t; a))z} \right) \\
 &= t^k F(t; a)^{kx} (\alpha + \ln F(t; a))^k \\
 &= t^k e^{-\alpha kx} \left((e^{\alpha} F(t; a))^x \ln(e^{\alpha} F(t; a)) \right)^k \\
 &= t^k e^{-\alpha kx} (D_x(e^{\alpha} F(t; a))^x)^k \\
 &= t^k \left(\sum_{m=0}^{\infty} e^{-\alpha x} D_x(e^{\alpha x} f_m(x; a)) \frac{t^m}{m!} \right)^k \\
 &= \left(\sum_{m=1}^{\infty} m e^{-\alpha x} D_x(e^{\alpha x} f_{m-1}(x; a)) \frac{t^m}{m!} \right)^k \\
 &= k! \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(\alpha, \dots, m e^{-\alpha x} D_x(e^{\alpha x} f_{m-1}(x; a)), \dots) \frac{t^n}{n!},
 \end{aligned}$$

et par identification, les développements ci-dessus donnent :

$$\begin{aligned}
 B_{n,k}(\alpha, 2e^{-\alpha x} D_x(e^{\alpha x} f_1(x; a)), \dots, m D_x(e^{\alpha x} f_{m-1}(x; a))) &= \\
 \binom{n}{k} D_{z=0}^k (e^{\alpha z} f_{n-k}(kx+z; a)). &
 \end{aligned}$$

Pour avoir (3.6), on utilise l'identité $e^{-\alpha x} D_x(e^{\alpha x} f_m(x; a)) = D_{z=0}(e^{\alpha z} f_m(x+z; a))$, $m \geq 1$. Lorsque $\alpha = 0$, l'Identité (3.6) est équivalente à (3.7). \square

Preuve du Théorème 3.2. Pour $r + s \geq 1$ et pour le choix

$$x_n = n D_{z=0}(e^{\alpha z} f_{n-1}(x+z; a))$$

dans (2.8), l'Identité (3.6) montre que la suite $\{Y(n, k)\}$ donnée par (3.1) devient :

$$\begin{aligned}
 Y(n, k) &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} B_{T+n-k, T}(\alpha, \dots, m D_{z=0}(e^{\alpha z} f_{m-1}(x+z; a)), \dots) \\
 &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} D_{z=0}^T \{e^{\alpha z} f_{n-k}(Tx+z; a)\}.
 \end{aligned}$$

Pour le cas particulier $\alpha = 0$, le choix $x_n = D_{z=0}(f_n(x+y; a))$ dans (2.8) et l'utilisation de l'Identité (3.7) montrent que la suite $\{Y(n, k)\}$ donnée par (3.1) devient :

$$\begin{aligned}
 Y(n, k) &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} B_{T+n-k, T}(D_{z=0}(e^{\alpha z} f_1(x+z; a)), \dots) \\
 &= \frac{n! sk}{k! T (T+n-k)!} D_{z=0}^T f_{T+n-k}(Tx+z; a).
 \end{aligned}$$

Notons que pour le cas $r = s = 0$, la suite $\{Y(n, k)\}$ donnée par (3.8) n'est pas définie. On pose dans ce cas $Y(n, k) = \binom{n}{k} f_{n-k}(x; a)$. La proposition 1 dans [50] (ou [51]) prouve que cette suite satisfait (3.2). \square

Preuve du Théorème 3.3. Cas $\alpha \neq 0$: Soit $x_n = \frac{n}{\alpha} D_{z=0} \{e^{\alpha z} f_{n-1}(x+z; a)\}$. On a $x_1 = 1$ et l'Identité (3.6) montre que la suite $\{Z(n, s)\}$ donnée par (3.3) devient :

$$\begin{aligned} Z(n, s) &= \frac{1}{\alpha^R} \frac{1}{R} \binom{R+n}{R}^{-1} B_{R+n, R}(\alpha, \dots, m D_{z=0}(e^{\alpha z} f_{m-1}(x+z; a)), \dots) \\ &= \frac{1}{\alpha^R} \frac{1}{R} D_{z=0}^R (e^{\alpha z} f_n(Rx+z; a)). \end{aligned}$$

Cas $\alpha = 0$: Soit $x_n = D_x f_n(x; a) / D_x f_1(x; a)$. Alors du fait que $D_x f_1(x) = x D f_1(0)$, on obtient : $D_x f_1(x; a) = D_x \left(\frac{x}{x+a} f_1(x+a) \right) = D f_1(0) \neq 0$. On a $x_1 = 1$ et par utilisation de l'Identité (3.7), la suite $\{Z(n, s)\}$ donnée par (3.3) devient :

$$\begin{aligned} Z(n, s) &= \frac{1}{R} \binom{R+n}{R}^{-1} \frac{B_{R+n, R}(D_{z=0}(f_1(x+z; a)), \dots, D_{z=0}(f_m(x+z; a)), \dots)}{(D_x f_1(x; a))^R} \\ &= \frac{1}{(D f_1(0))^R} \frac{1}{R} \frac{n!}{(R+n)!} D_{z=0}^R f_{R+n}(kx+z; a). \end{aligned}$$

Notons que si $Z(n, s)$ satisfait (3.4), alors $\lambda^n Z(n, s)$ satisfera (3.4). \square

Preuve du Théorème 3.4. Soit $\{a_n\}$ une suite des nombres réels, u, v des entiers naturels, $F(t)^x := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \frac{t^n}{n!}$, ($f_0(x) = 1$), et $G_k(t) := \sum_{n \geq 0} F(n, k) \frac{t^n}{n!}$ avec

$$F(n, k) := \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vk} (e^{\alpha z} f_n(\beta j + \lambda k + z; a)) \frac{x^j}{j!}. \text{ On a alors,}$$

$$\begin{aligned} t^k G_k(t) &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} \left(\sum_{n \geq 0} D_{z=0}^{ju+vk} \{e^{\alpha z} f_n(\beta j + \lambda k + z; a)\} \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} D_{z=0}^{ju+vk} \left(e^{\alpha z} \sum_{n \geq 0} f_n(\beta j + \lambda k + z; a) \frac{t^n}{n!} \right) \\ &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} D_{z=0}^{ju+vk} \left(e^{\alpha z} (F(t; a))^{\beta j + \lambda k + z} \right) \\ &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} (F(t; a))^{\beta j + \lambda k} D_{z=0}^{ju+vk} (e^{\alpha z} F(t; a)^z) \\ &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} (F(t; a))^{\beta j + \lambda k} (\alpha + \ln F(t; a))^{ju+vk} \\ &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) \frac{x^j}{j!} F(t; a)^{\beta j + \lambda k} (D_{z=0} (e^{\alpha z} (F(t; a))^z))^{ju+vk} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= t^k \sum_{j \geq k} B_{j,k}(u_1, u_2, \dots) \frac{x^j}{j!} \\
 &= \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} u_m \frac{x^m}{m!} \right)^k \\
 &= \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} a_m D_{z=0}^{mu+v} \left(e^{\alpha z} F(t; a)^{\beta m + \lambda + z} \right) \frac{x^m}{m!} \right)^k \\
 &= \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{m \geq 1} a_m \sum_{j \geq 0} D_{z=0}^{mu+v} \left(e^{\alpha z} f_j(\beta m + \lambda + z; a) \frac{t^j}{j!} \right) \frac{x^m}{m!} \right)^k \\
 &= \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{j \geq 0} \frac{t^j}{j!} \sum_{m \geq 1} a_m D_{z=0}^{mu+v} \left(e^{\alpha z} f_j(\beta m + \lambda + z; a) \right) \frac{x^m}{m!} \right)^k \\
 &= \frac{t^k}{k!} \left(\sum_{j \geq 0} F(j, 1) \frac{t^j}{j!} \right)^k \\
 &= \frac{1}{k!} \left(\sum_{j \geq 1} j F(j-1, 1) \frac{t^j}{j!} \right)^k \\
 &= \sum_{n \geq k} B_{n,k}(F(j, 1), \dots, j F(j-1, 1), \dots) \frac{t^n}{n!},
 \end{aligned}$$

où, $u_m = a_m F(t; a)^{\beta m + \lambda} (D_{z=0}(e^{\alpha z} (F(t; a))^z))^{\mu + \nu}$, $m \geq 1$.

On obtient ainsi $B_{n,k}(F(0, 1), \dots, j F(j-1, 1), \dots) = k! \binom{n}{k} F(n-k, k)$, et ceci veut dire que la suite $\{X(n, k)\}$ définie par :

$$X(n, k) := k! \binom{n}{k} \sum_{j \geq k} B_{j,k}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vk} \{e^{\alpha z} f_{n-k}(\beta j + \lambda k + z; a)\} \frac{x^j}{j!}, \quad (3.31)$$

satisfait (3.2). Pour obtenir (3.11), il suffit de prendre $x_n = X(n, 1)$ dans (2.8), où $\{X(n, k)\}$ est la suite donnée par (3.31). En effet, la suite donnée par (3.1) devient :

$$\begin{aligned}
 Y(n, k) &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} B_{T+n-k, T}(X(1, 1), X(2, 1), \dots) \\
 &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} X(T+n-k, T) \\
 &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} T! \sum_{j \geq T} B_{j,T}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vT} \{e^{\alpha z} f_{n-k}(\beta j + \lambda T + z; a)\} \frac{x^j}{j!}.
 \end{aligned}$$

Pour le cas particulier $\alpha = 0$ et $u \geq 1$ on remarque que $X(n, 1) = 0$ pour $u + \nu > n - 1$ et alors l'identité (3.31) devient :

$$B_{n,k} \left(\overbrace{0, \dots, 0}^{u+\nu}, X(u+\nu+1, 1), X(u+\nu+2, 1) \dots \right) = X(n, k), \quad (3.32)$$

ou, d'une façon équivalente, par l'utilisation de l'identité connue :

$$B_{n,k}(0, \dots, 0, a_{r+1}, a_{r+2}, \dots) = \frac{n!}{(n-rk)!} B_{n-rk,k} \left(\frac{a_{1+r}}{(1+r)!}, \dots, \frac{i!a_{i+r}}{(i+r)!}, \dots \right),$$

l'identité (3.32) devient :

$$B_{n,k}(X^*(1,1), X^*(2,1), \dots) = X^*(n,k) := \frac{n!X(n+(u+v)k,k)}{(n+(u+v)k)!}. \quad (3.33)$$

Pour avoir (3.12), il suffit de prendre $x_n = X^*(n,1)$ dans (2.8). En effet,

$$\begin{aligned} Y(n,k) &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} B_{T+n-k,T}(X^*(1,1), X^*(2,1), \dots) \\ &= \binom{n}{k} \frac{sk}{T} \binom{T+n-k}{T}^{-1} X^*(T+n-k, T) \\ &= \frac{n!sk}{k!T} T! \sum_{j \geq T} B_{j,T}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vT} \left\{ e^{\alpha z} \frac{f_{(u+v)T+n-k}(\beta j + \lambda T + z; a)}{((u+v)T+n-k)!} \right\} \frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

□

Preuve du Théorème 3.5. Pour $\alpha \neq 0$ il suffit de poser dans (2.16) $x_n = X(n,1)/X(1,1)$, où, $\{X(n,k)\}$ est la suite donnée par (3.31). On a

$$x_1 = X(1,1) = \sum_{j \geq 1} a_j \alpha^{ju+v} \frac{x^j}{j!} = \alpha^v \varphi(x \alpha^u) \quad \text{avec } \varphi(x) := \sum_{j \geq 1} a_j \frac{x^j}{j!}.$$

La suite $\{Z(n,s)\}$ donnée par (3.3) devient :

$$\begin{aligned} Z(n,s) &= \frac{1}{(X(1,1))^R} \frac{1}{R} \binom{R+n}{R}^{-1} X(R+n,R) \\ &= \frac{1}{(\alpha^v \varphi(x \alpha^u))^R} \frac{R!}{R} \sum_{j \geq R} B_{j,R}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vR} \left\{ e^{\alpha z} f_n(\beta j + \lambda R + z; a) \right\} \frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

Pour $\alpha = 0$ il suffit de poser dans (2.16) $x_n = X^*(n,1)/X^*(1,1)$, où $\{X^*(n,k)\}$ est la suite donnée par (3.33). On a :

$$X^*(1,1) = \frac{X(u+v+1,1)}{(u+v+1)!} = \begin{cases} a_1 x (Df_1(0))^{u+v} & \text{si } u \geq 1 \\ (Df_1(0))^v \varphi(x) & \text{si } u = 0. \end{cases}$$

La suite $\{Z(n,s)\}$ donnée par (3.3) devient :

$$\begin{aligned} Z(n,s) &= \frac{1}{(X^*(1,1))^R} \frac{1}{R} \binom{R+n}{R}^{-1} X^*(R+n,R) \\ &= \frac{n!(R-1)!}{(X^*(1,1))^R} \sum_{j \geq R} B_{j,R}(a_1, a_2, \dots) D_{z=0}^{ju+vR} \left\{ \frac{f_{n+(u+v)R}(\beta j + \lambda R + z; a)}{(n+(u+v)R)!} \right\} \frac{x^j}{j!}. \end{aligned}$$

□

Chapitre 4

Congruences et polynômes de Bell

On présente dans ce chapitre certaines congruences pour les polynômes complets de Bell. Nous proposons, dans la troisième section, d'autres congruences pour les polynômes partiels de Bell.

4.1 Introduction

Les congruences dans les polynômes de Bell ont été étudiées par plusieurs auteurs. Parmi eux, Bell [11] a donné quelques congruences concernant les polynômes complets de Bell [11]. Il a prouvé que pour tout nombre premier p , on a :

$$A_p(x_1, x_2, x_3, \dots) \equiv x_1^p + x_p \pmod{p}. \quad (4.1)$$

Il a déterminé aussi les résidus $(\text{mod } p)$ de A_{p+1} , A_{p+2} , A_{p+3} ainsi qu'une expression du résidu $(\text{mod } p)$ de A_{p+r} sous forme d'un déterminant d'ordre $r + 1$. En plus des résultats de Bell, d'autres congruences ont été données par Carlitz [19]. Ces congruences seront données dans la section suivante. Gertsch et Robert [39] ont donné quelques congruences concernant les nombres de Bell et les polynômes (d'une variable) de Bell. L'étude suivie par ces auteurs utilise généralement la définition et la formule récurrente (1.9) des polynômes complets de Bell, qui se ramène, à étudier le coefficient général :

$$a_n(k_1, k_2, \dots) := \frac{n!}{k_1! (1!)^{k_1} k_2! (2!)^{k_2} k_3! (3!)^{k_3} \dots}, \quad k_1 + 2k_2 + \dots = n.$$

Ce coefficient peut se mettre sous la forme :

$$a_n(k_1, k_2, \dots) = \frac{n!}{k_1! (2k_2)! (3k_3)! \dots} \frac{(2k_2)!}{k_2! (2!)^{k_2}} \frac{(3k_3)!}{k_3! (3!)^{k_3}} \dots, \quad k_1 + 2k_2 + \dots = n,$$

et du fait que le rapport

$$\frac{(jk)!}{k! (j!)^k} = \prod_{i=1}^k \binom{ij-1}{j-1}$$

est un entier naturel, on déduit que le coefficient $a_n(k_1, k_2, \dots)$ est un entier naturel.

Le coefficient $a_n(k_1, k_2, \dots)$ ressemble au coefficient multinomial :

$$c_n(k_1, k_2, \dots) := \frac{(k_1 + k_2 + k_3 + \dots)!}{k_1! k_2! k_3! \dots}.$$

Si p est un nombre premier, il est démontré dans [32] que $c_n(k_1, k_2, \dots)$ est premier avec p si, et seulement si,

$$\begin{aligned} k_i &= \sum_j r_{ij} p^j && (0 \leq r_{ij} < p) \\ k_1 + k_2 + k_3 + \dots &= \sum_j r_j p^j && (0 \leq r_j < p^j) \\ \sum_i r_{ij} &= r_j && (j = 0, 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Dans ce chapitre, nous présentons dans la section suivante quelques travaux de Carlitz [19] sur des congruences pour les polynômes complets de Bell, dont l'une est une généralisation de (4.1). Nous proposons dans la troisième section des congruences pour les polynômes partiels de Bell à arguments entiers en se basant sur le Théorème 2.23, les relations récurrentes (1.8) et sur quelques résultats de Carlitz [19].

4.2 Congruences et polynômes complets de Bell

Théorème 4.1 [19] *Si p est un nombre premier, alors :*

$$A_{pj} \equiv x_1^{p^j} + x_p^{p^{j-1}} + x_{p^2}^{p^{j-2}} + \dots + x_{p^j} \pmod{p} \quad \text{et} \quad A_{np} \equiv A_n(A_p, x_{2p}, x_{3p}, \dots) \pmod{p}.$$

Preuve. Du fait que $\binom{np}{j} \equiv 0 \pmod{p}$ si $p \nmid j$ et $\binom{np}{jp} \equiv \binom{n}{j} \pmod{p}$, il résulte de la relation :

$$A_{n+1} = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A_{n-j} x_{j+1} \tag{4.2}$$

que

$$A_{np+1} \equiv \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} A_{(n-j)p} x_{jp+1} \pmod{p}. \tag{4.3}$$

Si on pose maintenant $\varphi(t) := \sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t^j}{j!}$, on aura :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_n \frac{t^n}{n!} = \exp(\varphi(t)).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que si on dérive par cette dernière identité plusieurs fois et on utilise (4.1) on obtient :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{n+p} \frac{t^n}{n!} \equiv ((\varphi'(t))^p + \varphi^{(p)}(t)) \exp(\varphi(t)) \pmod{p}. \quad (4.4)$$

En admettant que :

$$\sum_{j=0}^{\infty} U_n \frac{t^n}{n!} \equiv \sum_{j=0}^{\infty} V_n \frac{t^n}{n!} \pmod{m}$$

désigne :

$$U_n \equiv V_n \pmod{m}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

où, U_n et V_n sont des polynômes à coefficients entiers.

Hurwitz [42, p. 345] a prouvé le lemme suivant :

Si x_1, x_2, \dots sont des entiers relatifs quelconques, alors :

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t^j}{j!} \right)^k \equiv 0 \pmod{k!}.$$

La preuve de ce résultat reste inchangé lorsque x_1, x_2, \dots sont des indéterminés, voir [19]. Il résulte du Lemme d'Hurwitz que :

$$(\varphi(t))^p = \left(x_1 + \sum_{j=1}^{\infty} x_{j+1} \frac{t^j}{j!} \right)^p \equiv x_1^p \pmod{p}.$$

Donc, les congruences données dans (4.4) montrent que :

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{n+p} \frac{t^n}{n!} \equiv \left(x_1^p + \sum_{j=0}^{\infty} x_{j+p} \frac{t^j}{j!} \right) \left(\sum_{j=1}^{\infty} x_j \frac{t^j}{j!} \right) \pmod{p},$$

et ceci montre que :

$$A_{n+p} \equiv (x_1^p + x_p) A_n + \sum_{j=1}^n \binom{n}{j} x_{j+p} A_{n-j} \pmod{p}. \quad (4.5)$$

En particulier, pour $n = 0$, on retrouve la congruence de Bell (4.1), et d'une manière similaire, on trouve :

$$\begin{aligned} A_{p+1} &\equiv (x_1^p + x_p) x_1 + x_{p+1} \equiv A_p x_1 + x_{p+1} \pmod{p}, \\ A_{p+2} &\equiv A_p A_2 + 2x_{p+1} x_1 + x_{p+2} \equiv (x_1^p + x_p) (x_1^2 + x_2) + 2x_{p+1} x_1 + x_{p+2} \pmod{p}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. Les congruences données dans (4.5) sont équivalentes à celles données par Bell en forme de déterminant. Maintenant, quand on remplace n par np dans (4.5), on obtient :

$$A_{(n+1)p} \equiv A_p A_{np} + \sum_{j=1}^{np} \binom{n}{j} x_{(j+1)p} A_{(n-j)p} \pmod{p}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (4.6)$$

Comparons maintenant (4.6) avec (4.2), il est donc clair que :

$$A_{np} \equiv A_n (A_p, x_{2p}, x_{3p}, \dots) \pmod{p}. \quad (4.7)$$

Si on remplace n par np dans (4.7), on aura :

$$A_{np^2} \equiv A_{np} (A_p, x_{2p}, x_{3p}, \dots) \equiv A_n (A_p^p + x_{p^2}, x_{2p^2}, x_{3p^2}, \dots) \pmod{p},$$

et ceci donne pour $n = 1$:

$$A_{p^2} \equiv A_p^p + x_{p^2} \equiv x_1^{p^2} + x_p^p + x_{p^2} \pmod{p}.$$

De même manière, on obtient :

$$A_{np^3} \equiv A_n (A_{p^2}^p + x_{p^3}, x_{2p^3}, x_{3p^3}, \dots) \pmod{p},$$

et ceci donne pour $n = 1$:

$$A_{p^3} \equiv A_{p^2}^p + x_{p^3} \equiv x_1^{p^3} + x_p^{p^2} + x_{p^2}^p + x_{p^3} \pmod{p}.$$

En général, on obtient :

$$A_{np^j} \equiv A_n (A_{p^j}, x_{2p^j}, x_{3p^j}, x_{4p^j}, \dots) \pmod{p}, \quad (4.8)$$

et ceci donne pour $n = 1$:

$$A_{p^j} \equiv x_1^{p^j} + x_p^{p^{j-1}} + x_{p^2}^{p^{j-2}} + \dots + x_{p^j} \pmod{p}.$$

□

Corollaire 4.2 [19] *Si p est un nombre premier alors :*

$$\begin{aligned} A_{2p^j} &\equiv A_{p^j}^2 + x_{2p^j} \pmod{p}, \\ A_{3p^j} &\equiv A_{p^j}^3 + 3A_{p^j} x_{2p^j} + x_{3p^j} \pmod{p}, \\ A_{4p^j} &\equiv A_{p^j}^4 + 6A_{p^j}^2 x_{2p^j} + 4A_{p^j} x_{3p^j} + 3x_{2p^j}^2 + x_{4p^j} \pmod{p}, \\ A_{p^{j+1}} &\equiv A_{p^j} x_1 + x_{p^{j+1}} \pmod{p}, \\ A_{2p^{j+1}} &\equiv A_{2p^j} x_1 + 2A_{p^j} x_{p^{j+1}} + x_{2p^{j+1}} \pmod{p}, \\ A_{3p^{j+1}} &\equiv A_{3p^j} x_1 + 3A_{2p^j} x_{p^{j+1}} + 3A_{p^j} x_{2p^{j+1}} + x_{3p^{j+1}} \pmod{p}, \end{aligned}$$

Preuve. Par combinaison des identités

$$A_2 = x_1^2 + x_2, \quad A_3 = x_1^3 + 3x_1x_2 + x_3, \quad A_4 = x_1^4 + 6x_1^2x_2 + 4x_1x_3 + 3x_2^2 + x_4$$

et des congruences données par (4.8), les trois premières congruences du corollaire résultent. Les trois autres résultent en utilisant (4.2) au lieu de (4.8). \square

4.3 Congruences et polynômes partiels de Bell

Rappelons que le Théorème 2.23 est donné par :

$$x_1^k \sum_{j=1}^n B_{n,j}(y_1, y_2, \dots) (k - nr)^{j-1} = x_1^{nr} \frac{B_{n+k,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}}, \quad (4.9)$$

avec $y_n = \frac{1}{nr} \binom{(r+1)n}{nr}^{-1} B_{(r+1)n, nr}(x_1, x_2, x_3, \dots)$.

Théorème 4.3 Soient p un nombre premier et k, s des entiers non-négatifs. Alors pour toute suite $\{x_j\}$ d'entiers on a :

$$(k + s + 1) B_{sp, k+s+1}(x_1, x_2, x_3, \dots) \equiv 0 \pmod{p} \quad (4.10)$$

Preuve. On montre que $kB_{sp, k} \equiv 0 \pmod{p}$, $k \geq s + 1$. A partir des identités :

$$\binom{sp}{j} \equiv 0 \pmod{p}, \text{ pour } p \nmid j \text{ et } \binom{sp}{pj} \equiv \binom{s}{j} \pmod{p}, \quad (4.11)$$

et de la première relation récurrente (1.8) donnée par :

$$kB_{n,k} = \sum_j \binom{n}{j} x_j B_{n-j, k-1},$$

avec $B_{n,k} := B_{n,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)$, $x_j = 0$ pour $j \leq 0$, on obtient :

$$(k + 1) B_{sp, k+1} = \sum_j \binom{sp}{j} x_j B_{sp-j, k} \equiv \sum_{j=1}^s \binom{s}{j} x_{jp} B_{(s-j)p, k} \pmod{p}.$$

Alors, pour $s = 0$, on a $kB_{0,k} \equiv 0 \pmod{p}$, $k \geq 0$,

pour $s = 1$, on trouve $(k + 1) B_{p, k+1} \equiv x_p B_{0,k} \equiv 0 \pmod{p}$, $k \geq 1$,

et pour $s = 2$, et par utilisation de ces dernières congruences, on obtient :

$$(k + 1) B_{2p, k+1} \equiv 2x_p B_{p, k} + x_{2p} B_{0,k} \equiv 0 \pmod{p}, \quad k \geq 2 \text{ et } p \nmid k,$$

La récurrence sur s montre que $kB_{sp, k} \equiv 0 \pmod{p}$ pour $k \geq s + 1$. \square

Conséquence 4.4 *En utilisant les Identités (2.11), on trouve*

$$(k + s + 1) S(sp, k + s + 1) \equiv (k + s + 1) s(sp, k + s + 1) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Théorème 4.5 *Soient n, k, s des entiers, $n \geq k \geq 1, s \geq 1$, et p un nombre premier, $p > n - k + 1$. Alors pour toute suite d'entiers $\{x_j\}$ telle que $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ on a :*

$$\begin{aligned} \frac{B_{n+sp, k+sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{(k + sp) \binom{n+sp}{k+sp}} &\equiv x_1^s \frac{B_{n, k}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n}{k}} \pmod{p}, \\ x_1^n \frac{B_{n+sp, sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{s \binom{n+sp}{sp}} &\equiv x_1^s \frac{B_{(p+1)n, np}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \pmod{p^2}. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Preuve. Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, la définition des polynômes partiels de Bell (donnée par la formule de Faà di Bruno) et les Identités (1.10) montrent que :

$$\begin{aligned} t_i &= ((n + 1)!)^i y_i = \frac{((n + 1)!)^i}{ir \binom{(r+1)i}{ir}} B_{(r+1)i, ir}(x_1, x_2, \dots, x_{i-j+1}) = \\ &\sum_{j=1}^i \frac{(ir - 1)!}{(ir - j)!} x_1^{ir-j} B_{i, j} \left(\frac{(n + 1)!}{2} x_2, \frac{((n + 1)!)^2}{3} x_3, \dots, \frac{((n + 1)!)^{i-j}}{i - j + 1} x_{i-j+1} \right) \end{aligned}$$

avec t_1, \dots, t_n sont des entiers. Ceci implique, en utilisant la seconde Identité de (1.10), que (4.9) peut se mettre sous la forme :

$$x_1^k \sum_{j=1}^n B_{n, j}(t_1, t_2, \dots) (k - nr)^{j-1} = x_1^{nr} \frac{((n + 1)!)^n B_{n+k, k}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}} \quad (4.13)$$

avec $B_{n, 1}(t_1, t_2, \dots), \dots, B_{n, n}(t_1, t_2, \dots)$ sont des entiers.

Alors, quand on remplace k par $\alpha + sp$ dans (4.13) on obtient :

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha+sp} \sum_{j=1}^n B_{n, j}(t_1, t_2, \dots) (\alpha + sp - nr)^{j-1} = \\ x_1^{nr} \frac{((n + 1)!)^n B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{(\alpha + sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

et quand on prend congruence dans (4.14) par rapport à p on obtient :

$$\begin{aligned} x_1^{nr} \frac{((n + 1)!)^n B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{(\alpha + sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}} \equiv \\ x_1^{\alpha+s} \sum_{j=1}^n B_{n, j}(t_1, t_2, \dots) (\alpha - nr)^{j-1} \pmod{p}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Mais par utilisation de (4.9), on trouve :

$$\begin{aligned} x_1^\alpha \sum_{j=1}^n B_{n,j}(t_1, t_2, \dots) (\alpha - nr)^{j-1} \\ = ((n+1)!)^n x_1^\alpha \sum_{j=1}^n B_{n,j}(y_1, y_2, \dots) (\alpha - nr)^{j-1} \\ = ((n+1)!)^n x_1^{nr} \frac{B_{n+\alpha, \alpha}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\alpha \binom{n+\alpha}{\alpha}}. \end{aligned}$$

Alors, la congruence donnée par (4.15) s'écrit ainsi :

$$\frac{((n+1)!)^n B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{(\alpha+sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}} \equiv x_1^s ((n+1)!)^n \frac{B_{n+\alpha, \alpha}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\alpha \binom{n+\alpha}{\alpha}} \pmod{p},$$

et si on remplace n par $n - \alpha$, la dernière congruence, ensuite on prend $p > n - \alpha + 1$ on obtient :

$$\frac{B_{n+sp, \alpha+sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{(\alpha+sp) \binom{n+sp}{\alpha+sp}} \equiv x_1^s \frac{B_{n, \alpha}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\alpha \binom{n}{\alpha}} \pmod{p}.$$

Pour la seconde part du théorème, lorsqu'on remplace k par sr dans (4.9) on trouve :

$$x_1^{sr} \sum_{j=1}^n B_{n,j}(t_1, t_2, \dots) r^{j-1} (s-n)^{j-1} = x_1^{nr} \frac{((n+1)!)^n B_{n+sr, sr}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{sr \binom{n+sr}{sr}}, \tag{4.16}$$

et du fait que $B_{n,j}(t_1, t_2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, sont entiers, l'Identité (4.16) prouve que

$$\begin{aligned} \frac{x_1^{nr} ((n+1)!)^{nr} B_{n+sr, sr}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{sr \binom{n+sr}{sr}} \equiv \\ x_1^{sr} z_n \equiv \frac{x_1^{sr} ((n+1)!)^{nr} B_{(r+1)n, nr}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}} \pmod{r}. \end{aligned}$$

Soit $r = p > n + 1$ un nombre premier. Maintenant, du fait que les expressions :

$$\frac{((n+1)!)^{np} B_{n+sp, sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{sp \binom{n+sp}{sp}} \text{ et } \frac{((n+1)!)^{np} B_{(p+1)n, np}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{np \binom{(p+1)n}{np}}$$

sont entières, on obtient $x_1^n \frac{B_{n+sp, sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{s \binom{n+sp}{sp}} \equiv x_1^s \frac{B_{(p+1)n, np}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \pmod{p^2}$.

□

Conséquence 4.6 *Cas particuliers : si on considère les cas $k = 1$ et $k = 2$ dans le Théorème 4.5, on obtient :*

$$\begin{aligned} B_{n+sp, 1+sp}(x_1, x_2, \dots) &\equiv x_1^s x_n \pmod{p} \text{ pour } p > n, \\ B_{n+sp, 2+sp}(x_1, x_2, \dots) &\equiv \frac{x_1^s}{2} \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n}{j} x_j x_{n-j} \pmod{p} \text{ pour } p > n - 1. \end{aligned} \tag{4.17}$$

Alors, en utilisant les Identités (2.11) dans (4.17), on trouve :

$$\begin{aligned} S(n+sp, 1+sp) &\equiv 1 \pmod{p} \text{ pour } p > n, \\ s(n+sp, 1+sp) &\equiv (-1)^{n-1} (n-1)! \pmod{p} \text{ pour } p > n, \\ S(n+sp, 2+sp) &\equiv 2^{n-1} - 1 \pmod{p} \text{ pour } p > n-1 \text{ et} \\ s(n+sp, 2+sp) &\equiv (-1)^{n-1} \frac{n(n+1)^2}{2} \pmod{p} \text{ pour } p > n-1. \end{aligned}$$

Théorème 4.7 Soient n, k, s, p des entiers, $n \geq k \geq 1$, $p \geq 1$ et $s \geq 1$. Alors pour toute suite d'entiers $\{x_j\}$ telle que $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ on a :

$$\begin{aligned} B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots) &\equiv 0 \pmod{n}, \\ \frac{B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{(s+1)n}{sn}} &\equiv s x_1^{n(s-1)} \frac{B_{2n,n}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{2n}{n}} \pmod{n^2}, \\ \frac{B_{n+sp,k+sp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{(k+sp) \binom{n+sp}{k+sp}} &\equiv x_1^s \frac{B_{n,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{n}{k}} \pmod{p} \text{ et} \\ x_1^n \frac{B_{n+sp,sp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{s \binom{n+sp}{sp}} &\equiv x_1^s \frac{B_{(p+1)n,np}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \pmod{p^2}. \end{aligned} \tag{4.18}$$

Preuve. Par (1.4), on peut écrire :

$$\frac{B_{n+k,k}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{k \binom{n+k}{k}} = \sum_{j=1}^n \frac{(k-1)!}{(k-j)!} x_1^{k-j} B_{n,j} \left(\frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots \right). \tag{4.19}$$

Si on pose $k = nr$ dans (4.19), on trouve :

$$z_n = \frac{B_{(r+1)n,nr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}} = \sum_{j=1}^n \frac{(nr-1)!}{(nr-j)!} x_1^{nr-j} B_{n,j}(x_2, x_3, \dots). \tag{4.20}$$

Les nombres z_i , $1 \leq i \leq m$, sont entiers et ceux-ci montrent que les nombres $B_{n,j}(z_1, z_2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, sont aussi entiers. Dans l'Identité (2.16) quand on remplace r par 1 et s par $n(s-1)$ on obtient :

$$\begin{aligned} B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots) &= \\ x_1^{n(s-1)} n s \binom{(s+1)n}{sn} \sum_{j=1}^n B_{n,j}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots) ((s-1)n)^{j-1}, \end{aligned} \tag{4.21}$$

avec $\bar{z}_n := \frac{1}{n} \binom{2n}{n}^{-1} B_{2n,n}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)$.

Donc, du fait que les nombres $B_{n,j}(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, sont entiers, l'Identité (4.21) prouve que $B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, \dots) \equiv 0 \pmod{n}$.

De plus, de la même identité, on trouve :

$$\begin{aligned} \frac{B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{(s+1)n}{sn}} &= nx_1^{n(s-1)} s \sum_{j=1}^n B_{n,j}(z_1, z_2, \dots) ((s-1)n)^{j-1} \\ &\equiv n \left\{ x_1^{n(s-1)} s z_n \right\} \\ &\equiv n \left\{ x_1^{n(s-1)} s \frac{1}{n \binom{2n}{n}} B_{2n, n}(x_1, 2x_2, \dots) \right\} \\ &\equiv x_1^{n(s-1)} s \frac{1}{\binom{2n}{n}} B_{2n, n}(x_1, 2x_2, \dots) \pmod{n^2}, \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$\frac{B_{(s+1)n,sn}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{(s+1)n}{sn}} \equiv s x_1^{n(s-1)} \frac{B_{2n,n}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{2n}{n}} \pmod{n^2}.$$

Montrons la troisième relation de (4.18). Pour $k = \alpha + sp$, l'Identité (2.15) s'écrit :

$$\begin{aligned} x_1^{\alpha+sp} \sum_{j=1}^n B_{n,j}(z_1, z_2, \dots) (\alpha + sp - nr)^{j-1} &= \\ x_1^{nr} \frac{B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{(\alpha + sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}}, \end{aligned} \quad (4.22)$$

avec z_n est donné par (4.20). Du fait que les nombres $B_{n, j}(z_1, z_2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, sont entiers, alors si on congrue par rapport à p dans (4.22), on aura :

$$x_1^{nr} \frac{B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{(\alpha + sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}} \equiv x_1^{\alpha+s} \sum_{j=1}^n B_{n,j}(z_1, z_2, \dots) (\alpha - nr)^{j-1} \pmod{p},$$

et par utilisation de (2.15), la dernière congruence devient :

$$\frac{B_{n+\alpha+sp, \alpha+sp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{(\alpha + sp) \binom{n+\alpha+sp}{\alpha+sp}} \equiv x_1^s \frac{B_{n+\alpha, \alpha}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\alpha \binom{n+\alpha}{\alpha}} \pmod{p}.$$

Pour terminer, il suffit de remplacer n par $n - \alpha$ dans la dernière congruence.

Montrons la quatrième relation de (4.18). Si kr remplace k dans (2.15) on obtient :

$$x_1^{kr} \sum_{j=1}^n B_{n,j}(z_1, z_2, \dots) (kr - nr)^{j-1} = x_1^{nr} \frac{B_{n+kr, kr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{rk \binom{n+kr}{kr}} \quad (4.23)$$

et comme les nombres $B_{n, j}(z_1, z_2, \dots)$, $1 \leq j \leq n$, sont entiers, donc, la congruence par rapport à r dans (4.23), donne :

$$x_1^{nr} \frac{B_{n+kr, kr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{rk \binom{n+kr}{kr}} \equiv x_1^{kr} z_n \equiv \frac{x_1^{kr} B_{(r+1)n, nr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}} \pmod{r}.$$

Maintenant, du fait que les expressions :

$$\frac{B_{n+kr,kr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{rk \binom{n+kr}{kr}} \quad \text{et} \quad \frac{x_1^{kr} B_{(r+1)n,nr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}}$$

sont entières et $x_1^p \equiv x_1 \pmod{p}$ pour tout nombre premier p , la dernière congruence s'écrit lorsque $r = p$:

$$x_1^n \frac{B_{n+kp,kp}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{kp \binom{n+kp}{kp}} \equiv x_1^k \frac{B_{(p+1)n,np}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{np \binom{(p+1)n}{np}} \pmod{p}.$$

Pour terminer, il suffit de multiplier par p les deux côtés de la dernière congruence. \square

Conséquence 4.8 *En utilisant l'Identité (2.10), les deux dernières congruences de (4.18) montrent que pour $s \geq 1$ et $p \nmid j$ on a :*

$$\binom{k+sp}{j}_q \equiv \binom{k}{j}_q \pmod{p} \quad \text{et} \quad j \binom{sp}{j}_q \equiv s \binom{jp}{j}_q \pmod{p^2}.$$

Corollaire 4.9 *Soient n, k, s des entiers, $n \geq k \geq 1$, et p un nombre premier. Alors pour toute suite d'entiers $\{x_j\}$ telle que $x_1 \not\equiv 0 \pmod{p}$ on a :*

$$\frac{B_{(p+1)n,np}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \equiv x_1^{n-1} \frac{B_{n+p,p}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\binom{n+p}{p}} \pmod{p^2} \quad \text{pour } p > n + 1$$

et

$$\frac{B_{(p+1)n,np}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \equiv x_1^{n-1} \frac{B_{n+p,p}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{\binom{n+p}{p}} \pmod{p^2}.$$

Preuve. A partir de la congruence donnée dans (4.12), quand on remplace s par $s - 1$, n par $n + p$ et k par p on obtient :

$$\frac{B_{n+sp,sp}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{s \binom{n+sp}{sp}} \equiv x_1^{s-1} \frac{B_{n+p,p}(x_1, x_2, x_3, \dots)}{\binom{n+p}{p}} \pmod{p^2}, \quad p > n + 1, \quad s \geq 1,$$

et par combinaison de la dernière congruence et la deuxième congruence donnée dans (4.12) on obtient :

$$\frac{B_{(p+1)n,np}(x_1, x_2, \dots)}{n \binom{(p+1)n}{np}} \equiv x_1^{n-1} \frac{B_{n+p,p}(x_1, x_2, \dots)}{\binom{n+p}{p}} \pmod{p^2}, \quad p > n + 1.$$

D'une façon similaire, on utilise la troisième et la quatrième congruence données dans (4.18) pour avoir la seconde partie du corollaire. \square

Conséquence 4.10 Comme dans la Conséquence 4.8, on trouve :

$$\binom{jp}{j}_q \equiv j \binom{p}{j}_q \pmod{p^2}.$$

Théorème 4.11 Soient $k \geq 2$, $j \geq 1$ deux entiers et p un nombre premier impair.

Alors, pour toute suite d'entiers $\{x_j\}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{B_{p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p^j+k}{k}} &\equiv x_1^{k-1} x_{p^j+1} \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid kx_1, \\ \frac{B_{(r+1)p^j,p^j r}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{p^j r \binom{(r+1)p^j}{p^j r}} &\equiv x_1^{r-1} (x_{p^j+1} - x_{p^{j-1}+1}) \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid x_1. \end{aligned} \tag{4.24}$$

Preuve. L'Identité (4.9) peut s'écrire ainsi :

$$\begin{aligned} x_1^{pr} (k-p) \frac{B_{p+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p+k}{k}} &= x_1^k A_p((k-p)z_1, (k-p)z_2, \dots), \\ \text{avec } z_n &= \frac{B_{(r+1)n,nr}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}}, \quad k \geq 1. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Bell [11] a montré, pour des indéterminés x_1, x_2, \dots , que :

$$A_p(x_1, x_2, x_3, \dots) \equiv x_1^p + x_p \pmod{p}. \tag{4.26}$$

Donc, de (4.26) et (4.25) on obtient :

$$x_1^{pr} (k-p) \frac{B_{p+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p+k}{k}} \equiv x_1^k \{(k-p)^p z_1^p + (k-p)z_p\} \pmod{p},$$

et l'Identité (1.11) montre que $\frac{B_{p+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p+k}{k}}$, et les termes de la suite $\{z_n; n \geq 1\}$ sont entiers. Maintenant, puisque $z_1 = x_1^{r-1}x_2$, alors, lorsque k n'est pas multiple de p , la dernière congruence et le petit Théorème de Fermat montrent que :

$$x_1^r \frac{B_{p+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p+k}{k}} \equiv x_1^{k-1} \{x_1^r x_2 + x_1 y_p\} \pmod{p}.$$

Pour $k = 1$ dans la dernière congruence on trouve :

$$y_p \equiv x_1^{r-1} x_{p+1} - x_1^{r-1} x_2 \pmod{p}.$$

La preuve pour $j = 1$ résulte des deux dernières congruences.

On suppose maintenant que les congruences données par (4.24) sont vraies pour l'indice j . Carlitz [19] a montré, pour des indéterminés x_1, x_2, \dots , que :

$$A_{p^j} \equiv x_1^{p^j} + x_p^{p^j-1} + x_{p^2}^{p^j-2} + \dots + x_{p^j} \pmod{p}.$$

Pour x_1, x_2, \dots entiers on trouve :

$$A_{p^j} \equiv x_1 + x_p + x_{p^2} + \dots + x_{p^j} \pmod{p}.$$

Alors, quand on utilise l'Identité (4.25) et le fait que les termes de la suites $\{z_n; n \geq 1\}$ sont entiers, on obtient dans le cas $p \nmid kx_1$:

$$\begin{aligned} x_1^r \frac{B_{p^{j+1}+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p^{j+1}+k}{k}} &\equiv x_1^k (z_1 + z_p + z_{p^2} + \dots + z_{p^{j+1}}) \\ &\equiv x_1^k (z_1 + z_p + z_{p^2} + \dots + z_{p^j}) + x_1^k z_{p^{j+1}} \\ &\equiv x_1^r \frac{B_{p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p^j+k}{k}} + x_1^k z_{p^{j+1}} \\ &\equiv x_1^{k-1} x_{p^{j+1}} + x_1^k z_{p^{j+1}} \pmod{p}. \end{aligned}$$

Pour $k = 1$ dans la dernière congruence on trouve :

$$x_1^r x_{p^{j+1}+1} \equiv x_{p^{j+1}} + x_1 z_{p^{j+1}} \pmod{p}.$$

A partir des deux dernières congruences on déduit que :

$$\begin{aligned} \frac{B_{p^{j+1}+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p^{j+1}+k}{k}} &\equiv x_1^{k-1} x_{p^{j+1}+1} \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid kx_1, \\ \frac{B_{(r+1)p^j+1,p^{j+1}r}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{p^{j+1}r \binom{(r+1)p^j+1}{p^{j+1}r}} &\equiv x_1^{r-1} (x_{p^{j+1}+1} - x_{p^j+1}) \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid x_1, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Conséquence 4.12 Comme dans la Conséquence 4.8, soit $j = 1$ la seconde congruence du Théorème 4.11. Alors :

$$\frac{(p-1)!}{r} \binom{pr}{p}_q \equiv -1 \pmod{p} \quad \text{pour } k = pr.$$

Théorème 4.13 Soient $k \geq 2, j \geq 1$ deux entiers et p un nombre premier impair. Alors, pour toute suite d'entiers $\{x_j\}$ on a :

$$\begin{aligned} \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} &\equiv x_1^{k-2} \left((k-1) x_{p^{j+1}}^2 + x_1 x_{2p^{j+1}} \right) \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid kx_1 \\ \frac{B_{2(r+1)p^j, 2p^j r}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{2p^j r \binom{2(r+1)p^j}{2p^j r}} &\equiv x_1^{2r-2} \left(x_1 x_{2p^{j+1}} - x_{p^{j+1}}^2 \right) \pmod{p} \quad \text{si } p \nmid x_1. \end{aligned} \tag{4.27}$$

Preuve. Carlitz [19] a montré, pour des indéterminés x_1, x_2, \dots que :

$$A_{2p^j} \equiv A_{p^j}^2 + x_{2p^j} \pmod{p}.$$

Pour x_1, x_2, \dots entiers, on trouve :

$$A_{2p^j} \equiv \left(x_1^{p^j} + x_p^{p^{j-1}} + \dots + x_{p^j} \right)^2 + x_{2p^j} \equiv (x_1 + x_p + \dots + x_{p^j})^2 + x_{2p^j} \pmod{p},$$

Alors, quand on utilise l'Identité (4.25), on trouve :

$$x_1^{2p^j r} (k - 2p^j r) \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} = x_1^k A_{2p^j} ((k - 2p^j r) z_1, (k - 2p^j r) z_2, \dots),$$

et par le fait que les termes de la suites $\{z_n; n \geq 1\}$ sont entiers, on obtient :

$$x_1^{2p^j r} (k - 2p^j r) \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} \equiv x_1^k \left((k - 2p^j r)^2 (z_1 + z_p + z_{p^2} + \dots + z_{p^j})^2 + (k - 2p^j r) z_{2p^j} \right) \pmod{p},$$

et, à partir de la preuve du Théorème 4.11, la dernière congruence donne dans le cas $p \nmid kx_1$:

$$\begin{aligned} x_1^k \left(x_1^{2r} \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} \right) &\equiv kx_1^{2k} (z_1 + z_p + z_{p^2} + \dots + z_{p^j})^2 + x_1^{2k} z_{2p^j} \\ &\equiv k \left(x_1^r \frac{B_{p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{p^j+k}{k}} \right)^2 + x_1^{2k} z_{2p^j} \\ &\equiv k (x_1^{r+k-1} x_{p^j+1})^2 + x_1^{2k} z_{2p^j} \pmod{p} \pmod{p}, \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$x_1^{2r} \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} \equiv x_1^k (kx_1^{2r-2} x_{p^j+1}^2 + z_{2p^j}) \pmod{p}.$$

Pour $k = 1$ dans la dernière congruence on trouve :

$$x_1^{2r-1} x_{2p^j+1} \equiv x_1^{2r-2} x_{p^j+1}^2 + z_{2p^j} \pmod{p}, \text{ c'est à dire}$$

$$z_{2p^j} \equiv x_1^{2r-2} (x_1 x_{2p^j+1} - x_{p^j+1}^2) \pmod{p},$$

et alors

$$x_1^2 \frac{B_{2p^j+k,k}(x_1, 2x_2, 3x_3, \dots)}{k \binom{2p^j+k}{k}} \equiv x_1^k ((k - 1) x_{p^j+1}^2 + x_1 x_{2p^j+1}) \pmod{p}.$$

Les deux dernière congruences sont exactement celles données par (4.27). □

Remarque 4.14 *Il est intéressant d'exploiter les résultats de Carlitz donnés ci-dessus en connexion avec le Théorème 2.23 pour obtenir autres congruences concernant les polynômes partiels de Bell.*

Chapitre 5

Polynômes de Bell et relations inverses

Dans ce chapitre, on introduit à travers le travail de Choua et al [27], quelques relations inverses relatives à la formule de Faà di Bruno. Nous apportons à ces relations quelques modifications qui montrent le lien qui existe avec les polynômes partiels de Bell et le rôle que jouent ces relations dans la résolution des équations récurrentes linéaires. Une extension aux suites binomiales sera abordé.

5.1 Polynômes de Bell et relations inverses

Théorème 5.1 [27] Soient f une fonction telle que $f(a+x)$ admet un développement en série formelle en x avec $a \in \mathbb{R}$, $f^{(-1)}$ sa fonction réciproque, $\varphi_x(t) := \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}$ et $y_n := \left[\frac{t^n}{n!} \right] f(\varphi_x(t))$. Alors, on a les relations inverses :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n D_{x=a}^j f(x) B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n D_{x=f(a)}^j f^{(-1)}(x) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \tag{5.1}$$

Preuve. Soit $\varphi_y(t) := \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{t^n}{n!}$. Sous les conditions du théorème, on a :

$$\begin{aligned} \varphi_y(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{t^n}{n!} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} D_{x=a}^j f(x) \sum_{n=1}^{\infty} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots, x_{n-j+1}) \frac{t^n}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{j=1}^{\infty} D_{x=a}^j f(x) \frac{(\varphi_x(t))^j}{j!} \\
 &= f(a + \varphi_x(t)) - f(a), \text{ et ceci montre que :}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 a + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} &= a + \varphi_x(t) \\
 &= f^{(-1)}(f(a) + \varphi_y(t)) \\
 &= a + \sum_{j=1}^{\infty} D_{x=f(a)}^j f^{(-1)}(x) \frac{(\varphi_y(t))^j}{j!} \\
 &= a + \sum_{j=1}^{\infty} D_{x=f(a)}^j f^{(-1)}(x) \left(\sum_{n=j}^{\infty} B_{n,j}(y_1, y_2, \dots) \frac{t^n}{n!} \right) \\
 &= a + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=1}^{\infty} D_{x=f(a)}^j f^{(-1)}(x) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots) \right) \frac{t^n}{n!}.
 \end{aligned}$$

D'où $x_n = \sum_{j=1}^{\infty} D_{x=f(a)}^j f^{(-1)}(x) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots)$.

Par symétrie, on obtient $y_n = \sum_{j=1}^n D_{x=a}^j f(x) B_{n,j}(x_1, x_2, \dots)$. □

Corollaire 5.2 [27] On a :

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{j=1}^n B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\
 x_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (j-1)! B_{n,j}(y_1, y_2, \dots).
 \end{aligned} \tag{5.2}$$

Preuve. Il suffit de prendre dans (5.1) $f(x) = \exp(x)$ et $a = 0$. □

Corollaire 5.3 [27] On a les relations inverses :

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{j=1}^n (\alpha)_j B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\
 x_n &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{\alpha} \right)_j B_{n,j}(y_1, y_2, \dots).
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Preuve. Il suffit de prendre dans (5.1) $f(x) = x^\alpha$ et $a = 1$. □

Remarque 5.4 Pour $\alpha = -1$ dans (5.3), on obtient :

$$\begin{aligned}
 y_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^j j! B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\
 x_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^j j! B_{n,j}(y_1, y_2, \dots).
 \end{aligned}$$

Ceci est équivalent à :

$$\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!} \right) \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} y_n \frac{t^n}{n!} \right) = 1. \tag{5.4}$$

Conséquence 5.5 Soit $\{b_n; n \geq 1\}$ une suite numérique. Une suite $\{a_n; n \geq 1\}$ s'appelle "suite de Newton" générée par la suite $\{b_n\}$ si elle satisfait l'équation récurrente linéaire suivante :

$$a_n = b_1 a_{n-1} + b_2 a_{n-2} + \dots + b_{n-1} a_1 + n b_n; \quad n \geq 1. \tag{5.5}$$

Du et al. [34] ont montré que :

$$a_n = n \sum_{k=1}^n (k-1)! \sum_{k_1+2k_2+3k_3+\dots=n} \frac{b_1^{k_1} \dots b_n^{k_n}}{k_1! \dots k_n!}.$$

Cette dernière expression peut s'écrire encore sous la forme :

$$-(n-1)! a_n = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (k-1)! B_{n,k} (-1! b_1, -2! b_2, \dots),$$

et d'après (5.2) on peut écrire :

$$b_n = -\frac{1}{n!} \sum_{k=1}^n (-1)^k B_{n,k} (0! a_1, 1! a_2, \dots).$$

5.2 Applications aux suites récurrentes linéaires

Une des applications du Théorème 5.1 est donnée par :

Théorème 5.6 [27] On considère la suite récurrente linéaire définie par :

$$y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_m y_{k-m} = 0, \quad m, k \geq 1 \tag{5.6}$$

avec $y_0 = 1, y_{-1} = \dots = y_{-m+1} = 0$.

Alors,

$$y_n = \frac{1}{n!} \sum_{j=1}^n (-1)^j j! B_{n,j} (1! a_1, 2! a_2, \dots, m! a_m, 0, 0, \dots). \tag{5.7}$$

Preuve. Soit $\varphi(t) := \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$ la série génératrice de la suite $\{y_n\}$.

En multipliant l'équation (5.6) par t^k puis en sommant sur $k \geq 1$, on trouve :

$$(\varphi(t) - 1) + a_1 t \varphi(t) + \dots + a_m t^m \varphi(t) = 0, \quad \text{c-à-d}$$

$$\varphi(t) = \frac{1}{1 + a_1 t + \dots + a_m t^m}.$$

La solution de (5.6) découle alors de la remarque (5.4). □

Remarque 5.7 La solution de l'équation $y_k + a_1 y_{k-1} + \dots + a_m y_{k-m} = 0$, $m, k \geq 1$, dans un anneau commutatif unitaire et sans conditions initiales, est donnée dans [5] et [8]

Corollaire 5.8 [27] La solution de l'équation :

$$y_{n+2} + a_1 y_{n+1} + a_2 y_n = 0 \text{ avec } n \geq 0 \text{ et } a_1 \neq 0 \tag{5.8}$$

est donnée par :

$$y_n = \sum_k \frac{(-1)^{n-k}}{n-k} \left(y_0 k - \frac{y_1}{a_1} (n-2k) \right) \binom{n-k}{k} a_1^{n-2k} a_2^k.$$

Preuve. Soit $\varphi(t) := \sum_{n=0}^{\infty} y_n t^n$.

En multipliant l'équation (5.8) par t^{n+2} puis on somme sur $n \geq 0$, on trouve :

$$\begin{aligned} (\varphi(t) - y_0 - y_1 t) + a_1 t (\varphi(t) - y_0) + a_2 t^2 \varphi(t) &= 0, \text{ c-à-d} \\ \varphi(t) &= \frac{y_0 + (a_1 y_0 + y_1) t}{1 + a_1 t + a_2 t^2}. \end{aligned}$$

En utilisant la remarque (5.4), le développement de φ découle de :

$$\begin{aligned} (1 + a_1 t + a_2 t^2)^{-1} &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{j=1}^n (-1)^j j! B_{n,j}(1!a_1, 2!a_2, 0, 0, \dots) \right) \frac{t^n}{n!} \\ &= 1 + \sum_{n \geq 1} \left(\sum_{j=n-[n/2]}^n (-1)^j \binom{j}{n-j} a_1^{2j-n} a_2^{n-j} \right) t^n, \end{aligned}$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

L'expression de y_n donnée ci-dessus découle du développement de φ . □

Conséquence 5.9 Si on prend dans le Corollaire 5.8 :

a) $y_0 = 2, y_1 = x, a_1 = -x$ et $a_2 = a \neq 0$ on aura :

$$y_n = D_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (-a)^j x^{n-2j},$$

où, $\{D_n(x)\}$ la suite des polynômes de Dickson de première espèce.

b) $y_0 = 1, y_1 = x, a_1 = -x$ et $a_2 = a \neq 0$ on aura :

$$y_n = E_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} \binom{n-j}{j} (-a)^j x^{n-2j},$$

où, $\{E_n(x)\}$ la suite des polynômes de Dickson de seconde espèce.

c) $y_0 = 1$, $y_1 = x$, $a_1 = -2x$ et $a_2 = 1$ on aura :

$$y_n = T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j},$$

où, $\{T_n(x)\}$ la suite des polynômes de Chebyshev de première espèce.

d) $y_0 = 1$, $y_1 = 2x$, $a_1 = -2x$ et $a_2 = 1$ on aura :

$$y_n = U_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j},$$

où, $\{U_n(x)\}$ la suite des polynômes de Chebyshev de seconde espèce.

e) $y_0 = 1$, $y_1 = 2x - 1$, $a_1 = -2x$ et $a_2 = 1$ on aura :

$$y_n = V_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j} - \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} (2x)^{n-1-2j},$$

où, $\{V_n(x)\}$ la suite des polynômes de Chebyshev de troisième espèce.

f) $y_0 = 1$, $y_1 = 2x + 1$, $a_1 = -2x$ et $a_2 = 1$ on aura :

$$y_n = W_n(x) = \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \binom{n-j}{j} (2x)^{n-2j} + \sum_{j=0}^{[n/2]} (-1)^j \binom{n-1-j}{j} (2x)^{n-1-2j},$$

où, $\{W_n(x)\}$ la suite des polynômes de Chebyshev de quatrième espèce.

5.3 Polynômes de Bell, polynômes binomiaux et relations inverses

Dans cette section, on s'efforce de donner une application du Théorème 5.1 en introduisant les suites binomiales ainsi que d'autres résultats. Ceci en choisissant certain type de fonctions dont les inverses peuvent être déduites à partir du théorème d'inversion de Lagrange et des suites binomiales de forme de celles données par (2.3).

Proposition 5.10 Soient a, α des nombres réels, $\{f_n(\alpha)\}$ une suite binomiale de polynômes ($f_0(\alpha) = 1$) de fonction génératrice (exponentielle) $(F(t))^\alpha$, $\varphi_x(t) :=$

$\sum_{j=1}^{\infty} x_n \frac{t^n}{n!}$ et $y_n := \left[\frac{t^n}{n!} \right] (F(\varphi_x(t)))^\alpha$. Alors, on a les relations inverses :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{j\alpha}{a(j-1) + \alpha} f_{j-1}(a(j-1) + \alpha) B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n \frac{-j\alpha}{a(j-1) - j\alpha} f_{j-1}(a(j-1) - j\alpha) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \tag{5.9}$$

Preuve. Prenons $f(x) = xF(x)^\alpha := \sum_{n \geq 1} n f_{n-1}(\alpha) \frac{x^n}{n!}$ dans (5.4). Alors l'équation :

$$t = xF(x)^\alpha, \quad \text{où, } x = tF(x)^{-\alpha}$$

admet dans un voisinage de zéro, d'après le théorème d'inversion de Lagrange, une solution unique donnée par :

$$x = f^{(-1)}(t) = \sum_{n \geq 1} f_{n-1}(-n\alpha) \frac{t^n}{n!}.$$

Ceci donne, d'après (5.4), les relations inverses :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n j f_{j-1}(\alpha) B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n f_{j-1}(-j\alpha) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned}$$

Pour avoir (5.9), il suffit de considérer la suite binomiale associée à $\{f_n(x)\}$ et définie par (2.3). □

Quand on prend $f_n(\alpha)$ dans (5.9) l'une des suites binomiales suivantes :

$$\alpha^n, \quad (\alpha)_{(n)}, \quad (\alpha)^{(n)}, \quad n! \binom{\alpha}{n}_q \quad \text{ou} \quad B_n(\alpha) := \sum_{j=1}^n S(n, k) \alpha^k,$$

on obtient les relations inverses suivantes :

Corollaire 5.11 *Pour a et α des nombres réels, on a les relations inverses :*

Pour $f_n(\alpha) = \alpha^n$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n j\alpha (a(j-1) + \alpha)^{j-2} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n (-\alpha) j (a(j-1) - j\alpha)^{j-2} B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \tag{5.10}$$

Pour $f_n(\alpha) = (\alpha)_{(n)}$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{j\alpha}{a(j-1) + \alpha} (a(j-1) + \alpha)_{(j-1)} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n \frac{(-\alpha) j}{a(j-1) - j\alpha} (a(j-1) - j\alpha)_{(j-1)} B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Pour $f_n(\alpha) = (\alpha)^{(n)}$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{j\alpha}{a(j-1) + \alpha} (a(j-1) + \alpha)^{(j-1)} B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n \frac{(-\alpha)j}{a(j-1) - j\alpha} (a(j-1) - j\alpha)^{(j-1)} B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Pour $f_n(\alpha) = n! \binom{\alpha}{n}_q$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{(j-1)! \alpha}{a(j-1) + \alpha} \binom{a(j-1) + \alpha}{j-1}_q B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n \frac{-j! \alpha}{a(j-1) - j\alpha} \binom{a(j-1) - j\alpha}{j-1}_q B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \quad (5.13)$$

Pour $f_n(\alpha) = B_n(\alpha)$ on a :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n \frac{\alpha j}{a(j-1) + \alpha} B_{j-1}(a(j-1) + \alpha) B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n \frac{-j\alpha}{a(j-1) - j\alpha} B_{j-1}(a(j-1) - j\alpha) B_{n,j}(y_1, y_2, \dots). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Conséquence 5.12 Pour $a = 0$, $\alpha = 1$ dans (5.11) on obtient :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} x_j x_{n-j} \quad \text{avec } x_0 = \frac{1}{2} \\ x_n &= \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{(2j)!}{(j)!} B_{n,j+1}(y_1, y_2, \dots), \end{aligned} \quad (5.15)$$

Quand $x_n = \sqrt{2}^{n-2}$ ou $x_n = \frac{1}{2}$ ou $x_n = \frac{1}{2^{n+1}}$, on obtient l'identité :

$$\sum_{j=0}^{n-1} \frac{(2j)!}{(j)!} (-4)^{n-j} S(n, j+1) = (-1)^n 2^{n+1}.$$

Quand $x_1 = 1$, $x_n = 0$ pour tout $n \geq 2$, on obtient l'identité :

$$\sum_{j=n-[n/2]}^{n+1} (-1)^j \binom{n+1}{j} \binom{2j}{n} = 0, \quad n \geq 0.$$

Conséquence 5.13 Pour $a = \alpha = 1$ dans (5.11), on obtient :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n j! B_{n,j}(x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! B_{n,j}(y_1, y_2, \dots), \end{aligned}$$

En utilisant l'Identité de Ceralosi, Mauro [25] :

$$\sum_{j=1}^n j! B_{n,j} (1!, 2!, 0, 0, \dots) = n! F_n, \quad n \geq 1,$$

alors, pour $a = \alpha = 1, x_1 = 1, x_2 = 2$ et $x_n = 0$ ($n \geq 3$) dans (5.11), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n (-1)^j j! B_{n,j} (1!F_1, 2!F_2, \dots) = 0, \quad n \geq 3.$$

En utilisant l'Identité de Ceralosi, Mauro [25] :

$$\sum_{j=1}^n j! B_{n,j} (0, 2!, 3!, \dots) = n! F_{n-2}, \quad n \geq 2,$$

alors, pour $a = 0, \alpha = 1, x_1 = 0, x_n = n!$ ($n \geq 2$), on obtient :

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} j! B_{n,j} (0, 2!F_0, 3!F_1, \dots) = n!, \quad n \geq 2.$$

Proposition 5.14 Soient a un entier $\geq 1, f(t) = t \left(1 + \sum_{n \geq 1} x_n \frac{t^{an}}{n!} \right)$ et sa fonction

réciproque $f^{(-1)}(t) = t \left(1 + \sum_{n \geq 1} y_n \frac{t^{an}}{n!} \right)$. Alors, on a les relations inverses :

$$\begin{aligned} y_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^j (an + j)_{(j-1)} B_{n,j} (x_1, x_2, \dots) \\ x_n &= \sum_{j=1}^n (-1)^j (an + j)_{(j-1)} B_{n,j} (y_1, y_2, \dots) \end{aligned} \tag{5.16}$$

Preuve. Elle découle du Théorème F dans [30, p. 151]. □

Conséquence 5.15 Pour $a = 1$ et $x_n = n!, n \geq 1$, on obtient

$$f(t) = \frac{t}{1-t} \quad \text{et} \quad f^{(-1)}(t) = \frac{t}{1+t},$$

c'est à dire $y_n = (-1)^n n!$. Les relations (5.16) donnent alors :

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{n+j}{n+1} = n,$$

et, pour $a = 2$ et $x_n = n!$, $n \geq 1$, on obtient

$$f(t) = \frac{t}{1-t^2} \quad \text{et} \quad f^{(-1)}(t) = \frac{1}{2t} \left(-1 + \sqrt{1+4t^2} \right),$$

c'est à dire, $y_n = (-1)^n \frac{(2n)!}{(n+1)!}$, $n \geq 1$.

Les relations (5.16) donnent alors :

$$\sum_{j=1}^n (-1)^{n-j} \binom{n}{j} \binom{2n+j}{2n+1} = \frac{n}{(n+1)} \binom{2n}{n}.$$

Proposition 5.16 Pour r entier ≥ 1 , on a les relations inverses :

$$y_n = \frac{B_{(r+1)n, nr}(1, x_1, x_2, \dots)}{nr \binom{(r+1)n}{nr}},$$

$$x_n = (n+1) \sum_{j=1}^n B_{n, j}(y_1, y_2, \dots) (-1)^{j-1} (nr-1)^{j-1}$$

Preuve. Poser dans l'Identité (2.15) $k = 1$, $x_1 = 1$, ensuite remplacer x_n par x_{n-1} .

□

Chapitre 6

Le Théorème binomial multivarié

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation des résultats données dans [18] en faisant intervenir les suites binomiales, le Théorème de Cauchy sur les intégrales complexes et un opérateur multidimensionnel.

6.1 Introduction

Soit

$$A = (a_{ij}) \quad (i, j = 1, 2, \dots, S). \quad (6.1)$$

une matrice carrée (d'ordre S) de nombres réels ou complexes, et, pour chaque $i \in \{1, \dots, S\}$, soit $\{f_n^{(i)}(x) : n \in \mathbb{N}\}$ une suite de polynômes binomiaux de fonctions génératrices :

$$(F_i(t))^x = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_k^{(i)}(x) \frac{t^k}{k!} \quad i = 1, \dots, S. \quad (6.2)$$

Dans la première partie de ce travail, nous montrons que pour tous nombres réels ou complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_S$ et x_1, \dots, x_S on a :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S) \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} = \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)}, \quad (6.3)$$

où, $\bar{m}_j = \sum_{i=1}^S a_{ij} m_i$ ($j = 1, \dots, S$), $\Delta(x_1, \dots, x_S) = \det \left(\delta_{ij} - x_i \frac{F_i'(x_i)}{F_i(x_i)} a_{ij} \right)$ et

$$u_i = x_i [(F_1(x_1))^{\alpha_{i1}} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_{iS}}]^{-1}, \quad i = 1, \dots, S. \quad (6.4)$$

et, dans la deuxième partie, nous montrons que la formule d'inversion de (6.4) doit être :

$$x_i = u_i \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + a_{i1})}{\bar{m}_1 + a_{i1}} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + a_{iS})}{\bar{m}_S + a_{iS}} D_i(m_1, \dots, m_S), \quad (6.5)$$

où, $D_i(m_1, \dots, m_S) = \det((\bar{m}_k + a_{ik}) \delta_{kj} - m_k a_{kj})$.

Lorsque $f_n^{(i)}(x) = x^n$ ou $f_n^{(i)}(x) = (x)^{(n)}$ pour tout i , les formules (6.3) et (6.4) sont prouvées dans [17] et [18], voir aussi [40].

6.2 Le Théorème binomial multivarié

Pour $S \geq 1$, nous proposons une preuve basée sur la formule de Cauchy de l'Identité (6.3).

Théorème 6.1 Soit $A = (a_{ij} : i, j = 1, 2, \dots, S)$ une matrice carrée d'ordre S de nombres réels ou complexes et soit $\{f_n^{(i)}(x)\}$ une suite de polynômes binomiaux, de fonctions génératrices $(F_i(t))^x$, $i = 1, \dots, S$. Si on pose

$$\bar{m}_j = \sum_{i=1}^S a_{ij} m_i \quad (j = 1, \dots, S), \quad \Delta(x_1, \dots, x_S) = \det \left(\delta_{ij} - x_i \frac{F'_i(x_i)}{F_i(x_i)} a_{ij} \right)$$

et $u_i = x_i [(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}]^{-1}$, $i = 1, \dots, S$,

alors, pour tout nombres réels ou complexes $\alpha_1, \dots, \alpha_S$ on a :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S) \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} = \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)}. \quad (6.6)$$

Preuve. Soit $z = (z_1, \dots, z_S) \in \mathbb{C}^S$. Considérons les fonctions

$$u_i(z) := z_i / g_i(z_1, \dots, z_S), \quad i = 1, \dots, S.$$

Si on pose $T = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{\partial^{m_1+\dots+m_S}}{\partial z_1^{m_1} \dots \partial z_S^{m_S}} (g_1^{m_1} \dots g_S^{m_S})_{z=0}$, alors, en utilisant la formule de Cauchy, on obtient :

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{(2\pi i)^S} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S} \int \dots \int \frac{g_1^{m_1} \dots g_S^{m_S}}{z_1^{m_1+1} \dots z_S^{m_S+1}} dz_1 \dots dz_S \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \int_{\gamma_1} \dots \int_{\gamma_S} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{(2\pi i)^S} \left[\prod_{j=1}^S \left(\frac{g_j(z)}{z_j} \right)^{m_j} \right] \frac{dz_1}{z_1} \dots \frac{dz_S}{z_S}, \end{aligned}$$

où, γ_i représente un contour au voisinage de zéro, $\gamma_i : |z_i| = \varepsilon_i$. Soit

$$\varphi(z_1, \dots, z_S) = (t_1, \dots, t_S) := \left(\frac{g_1(z)}{z_1}, \dots, \frac{g_S(z)}{z_S} \right).$$

Pour $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_S$ choisis assez petits, l'application φ représente un difféomorphisme. L'inverse du Jacobien est donné par $J^{-1} = \frac{t_1}{z_1} \dots \frac{t_S}{z_S} \Delta(z_1, \dots, z_S)$. On a $\Delta(z) \neq 0$ pour $|z_i| \leq \varepsilon_i$.

Maintenant, puisque les composantes de la fonction φ sont analytiques dans un voisinage de zéro et chacune d'elles s'annule seulement en zéro, alors il existe S contours dans un voisinage de zéro $\gamma'_1, \dots, \gamma'_S$ à l'intérieur du domaine délimité par $\varphi(\gamma_1, \dots, \gamma_S)$ tels que :

$$T = \frac{1}{(2\pi i)^S} \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \int_{\gamma'_1} \dots \int_{\gamma'_S} \frac{(F_1(z_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1, \dots, z_S)} \frac{dt_1 \dots dt_S}{t_1^{m_1+1} \dots t_S^{m_S+1}},$$

où, z_1, \dots, z_S dans la dernière expression sont fonctions de t_1, \dots, t_S .

D'où, par la formule de Cauchy, la dernière expression devient :

$$T = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{1}{m_1! \dots m_S!} D_{t_1=0}^{m_1} \dots D_{t_S=0}^{m_S} \left(\frac{(F_1(z_1(t)))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S(t)))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1(t), \dots, z_S(t))} \right)$$

De plus, le développement de la fonction multivariée :

$$\frac{(F_1(z_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1(t), \dots, z_S(t))}$$

au point $(t_1, \dots, t_S) = (0, \dots, 0)$ donné par :

$$\frac{(F_1(z_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1(t), \dots, z_S(t))} = \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} D_{t_1=0}^{m_1} \dots D_{t_S=0}^{m_S} \left(\frac{(F_1(z_1(t)))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S(t)))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1(t), \dots, z_S(t))} \right) \frac{t_1^{m_1} \dots t_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!}$$

prouve que :

$$T = \frac{(F_1(z_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(z_S))^{\alpha_S}}{\Delta(z_1(t), \dots, z_S(t))} \Big|_{t_1=\dots=t_S=1} = \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)}.$$

□

Conséquence 6.2 Si $(F(x))^b$ et $(G(x))^b$ désignent, respectivement, les fonctions génératrices des suites binomiales $\{f_n(b)\}$ et $\{g_n(b)\}$ avec $F(0) = G(0) = 1$ et

$$\begin{aligned} u &= x (F(x))^{-a} (G(y))^{-c} \\ v &= y (F(x))^{-b} (G(y))^{-d}, \end{aligned}$$

l'Identité (6.6) devient :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} f_m (am + bn + \alpha) g_n (cm + dn + \beta) \frac{u^m v^n}{m!n!} = \frac{(F(x))^\alpha (G(y))^\beta}{\Delta(x,y)},$$

$$\text{où, } \Delta(x_1, x_2) = \left(1 - ax \frac{F'(x)}{F(x)}\right) \left(1 - dy \frac{G'(y)}{G(y)}\right) - bcxy \frac{F'(x)}{F(x)} \frac{G'(y)}{G(y)}.$$

Soit par exemple $u = xe^{-ax} (1+y)^{-c}$ et $v = ye^{-bx} (1+y)^{-d-1}$, on a alors :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (am + bn + \alpha)^m (cm + dn + \beta - 1)_{(n)} \frac{u^m v^n}{m!n!} = \frac{(1+y)^\beta \exp(\alpha x)}{1 - ax - dy + (ad - cb)xy},$$

et, pour $u = xe^{-ax-cy}$ et $v = ye^{-bx-dy}$, on a :

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} (am + bn + \alpha)^m (cm + dn + \beta)^n \frac{u^m v^n}{m!n!} = \frac{\exp(\alpha x + \beta y)}{1 - ax - dy + (ad - cb)xy}.$$

6.3 L'inverse du Théorème binomial multivarié

Théorème 6.3 Les fonctions réciproques des fonctions :

$$u_i = x_i [(F_1(x_1))^{a_{i1}} \dots (F_S(x_S))^{a_{iS}}]^{-1}, \quad i = 1, \dots, S$$

sont données par :

$$x_i = u_i \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + a_{i1})}{\bar{m}_1 + a_{i1}} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + a_{iS})}{\bar{m}_S + a_{iS}} D_i(m_1, \dots, m_S),$$

$$i = 1, \dots, S, \tag{6.7}$$

où, $D_i(m_1, \dots, m_S) = \det((\bar{m}_k + a_{ik}) \delta_{kj} - m_k a_{kj})$.

Preuve. Afin de trouver la formule inverse de (6.6), soient h_1, \dots, h_S des fonctions analytiques dans un voisinage de zéro telles que :

$$h_i(0) = 0 \quad \text{et} \quad h_i(g_i(t)) = tg'_i(t), \quad i = 1, \dots, S$$

$$\text{avec } g_i(t) = \ln(F_i(t)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n^{(i)}\right)(0) \frac{t^n}{n!}.$$

Une telle fonction h_i existe car, si $h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \frac{t^n}{n!}$ qui satisfait l'équation $h(g(t)) = tg'(t)$ pour une fonction donnée $g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n \frac{t^n}{n!}$, alors la suite $\{h_n : n \geq 1\}$ est

définie d'une manière unique par les équations $ng_n = \sum_{k=1}^n h_k B_{n,k}(g_1, \dots, g_{n-k+1})$.

Il résulte de [40] que $\det(\delta_{ij} - x_i a_{ij})$ s'écrit sous la forme :

$$\nabla(x_1, \dots, x_k) := \det(\delta_{ij} - x_i a_{ij}) = \sum A(r_1, \dots, r_S) x_1^{r_1} \dots x_S^{r_S}, \quad r_1, \dots, r_S \in \{0, 1\}.$$

On remarque que $\nabla(x_1 g'_1(x_1), \dots, x_S g'_S(x_S)) = \Delta(x_1, \dots, x_S)$. Posons

$$\Omega = \nabla(h_1(D_{\alpha_1}), \dots, h_S(D_{\alpha_S})), \text{ où } D_{\alpha_i} \equiv \frac{\partial}{\partial \alpha_i} \text{ pour } i = 1, \dots, S. \quad (6.8)$$

Pour des fonctions h, g et F telles que :

$$F(0) = 1, \quad g(t) = \ln(F(t)), \quad h(t) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n \frac{t^n}{n!} \text{ et } h(g(t)) = tg'(t),$$

on obtient :

$$\begin{aligned} h(D\alpha)(F(x))^\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n!} D_\alpha^n [(F(x))^\alpha] \\ &= (F(x))^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_n}{n!} (\ln F(x))^n \\ &= (F(x))^\alpha h(\ln F(x)) \\ &= (F(x))^\alpha x \frac{F'(x)}{F(x)} \\ &= (F(x))^\alpha x g'(x). \\ h^r(D\alpha)(F(x))^\alpha &= (F(x))^\alpha [x g'(x)]^r \text{ pour } r \in \{0, 1\}. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Donc, par utilisation de (6.9), on obtient :

$$\begin{aligned} \Omega \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} &= \frac{1}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} \sum_{r_1, \dots, r_S} A(r_1, \dots, r_S) \prod_{i=1}^S (h_i^{r_i}(D_{\alpha_i})(F_i(x_i))^{\alpha_i}) \\ &= \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} \sum_{r_1, \dots, r_S} A(r_1, \dots, r_S) \prod_{i=1}^S (x_i g_i(x_i))^{r_i} \\ &= \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} \nabla(x_1 g'_1(x_1), \dots, x_S g'_S(x_S)) \\ &= (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}. \\ \Omega \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} &= (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}. \end{aligned} \quad (6.10)$$

En appliquant l'opérateur Ω aux deux membres de (6.6) et en utilisant (6.10), on trouve :

$$\begin{aligned} & (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S} = \\ & \Omega \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S) \right) = \\ & \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \sum_{r_1, \dots, r_S} A(r_1, \dots, r_S) \prod_{j=1}^S \left[h_j^{r_j}(D_{\alpha_j}) f_{m_j}^{(j)}(\bar{m}_j + \alpha_j) \right]. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Comme $f_{m_i}^{(i)}(\alpha) = D_{t=0}^{m_i} (F_i(t))^\alpha$, donc par utilisation de (6.9) on obtient :

$$\begin{aligned} h_i^{r_i}(D_{\alpha_i}) f_{m_i}^{(i)}(\bar{m}_i + \alpha_i) &= D_{t=0}^{m_i} \left(h_i^{r_i}(D_{\alpha_i}) (F_i(t))^{\bar{m}_i + \alpha_i} \right) \\ &= D_{t=0}^{m_i} \left((F_i(t))^{\bar{m}_i + \alpha_i} t g_i'(t) \right) \\ &= m_i \sum_{j=0}^{m_i-1} \binom{m_i-1}{j} f_{m_i-1-j}^{(i)}(\bar{m}_i + \alpha_i) \left. \frac{d}{dy} f_{j+1}^{(i)}(y) \right|_{y=0} \\ &= m_i \left. \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{\bar{m}_i + \alpha_i + y} f_{m_i}^{(i)}(\bar{m}_i + \alpha_i + y) \right) \right|_{y=0} \\ &= \frac{m_i f_n^{(i)}(\bar{m}_i + \alpha_i)}{\bar{m}_i + \alpha_i}, \end{aligned}$$

et quand on remplace la dernière expression dans (6.11) on trouve :

$$\begin{aligned} & (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S} \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S) \sum A(r_1, \dots, r_S) \prod_{i=1}^S \left(\frac{m_i}{\bar{m}_i + \alpha_i} \right)^{r_i} \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S) \nabla \left(\frac{m_1}{\bar{m}_1 + \alpha_1}, \dots, \frac{m_S}{\bar{m}_S + \alpha_S} \right) \\ &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1)}{\bar{m}_1 + \alpha_1} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S)}{\bar{m}_S + \alpha_S} D(m_1, \dots, m_S), \\ & (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S} = \\ & \sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + \alpha_1)}{\bar{m}_1 + \alpha_1} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + \alpha_S)}{\bar{m}_S + \alpha_S} D(m_1, \dots, m_S), \end{aligned} \quad (6.12)$$

où, $D(m_1, \dots, m_S) = \det((\bar{m}_i + \alpha_i) \delta_{ij} - m_i a_{ij})$.

Pour tout $i = 1, \dots, S$, le choix de $\alpha_j = a_{ij}$ ($j = 1, \dots, S$) dans (6.12) donne :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} \frac{u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S}}{m_1! \dots m_S!} \frac{f_{m_1}^{(1)}(\bar{m}_1 + a_{i1})}{\bar{m}_1 + a_{i1}} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\bar{m}_S + a_{iS})}{\bar{m}_S + a_{iS}} D_i(m_1, \dots, m_S) \quad (6.13)$$

D'où, (6.7) découle en remplaçant dans (6.13) $u_i (F_1(x_1))^{\alpha_{i1}} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_{iS}}$ par x_i .
 \square

Corollaire 6.4 Avec les notations ci-dessus, si on pose :

$$\underline{\alpha} := (\alpha_1, \dots, \alpha_S), \quad \underline{\beta} := (\beta_1, \dots, \beta_S), \quad \underline{\alpha} + \underline{\beta} := (\alpha_1 + \beta_1, \dots, \alpha_S + \beta_S),$$

$$A_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha}) = \frac{f_{m_1}^{(1)}(\overline{m}_1 + \alpha_1)}{\overline{m}_1 + \alpha_1} \dots \frac{f_{m_S}^{(S)}(\overline{m}_S + \alpha_S)}{\overline{m}_S + \alpha_S} \frac{D(m_1, \dots, m_S)}{m_1! \dots m_S!} \quad \text{et} \quad (6.14)$$

$$B_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha}) = \frac{1}{m_1! \dots m_S!} f_{m_1}^{(1)}(\overline{m}_1 + \alpha_1) \dots f_{m_S}^{(S)}(\overline{m}_S + \alpha_S)$$

on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{r_1=0}^{m_1} \dots \sum_{r_S=0}^{m_S} A_{r_1, \dots, r_S}(\underline{\alpha}) A_{m_1-r_1, \dots, m_S-r_S}(\underline{\beta}) &= A_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha} + \underline{\beta}) \quad \text{et} \\ \sum_{r_1=0}^{m_1} \dots \sum_{r_S=0}^{m_S} A_{r_1, \dots, r_S}(\underline{\alpha}) B_{m_1-r_1, \dots, m_S-r_S}(\underline{\beta}) &= B_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha} + \underline{\beta}). \end{aligned} \quad (6.15)$$

Preuve. A partir des Identités (6.6) on obtient :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} B_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha}) u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S} = \frac{(F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)}, \quad (6.16)$$

et de (6.12) on obtient :

$$\sum_{m_1=0}^{\infty} \dots \sum_{m_S=0}^{\infty} A_{m_1, \dots, m_S}(\underline{\alpha}) u_1^{m_1} \dots u_S^{m_S} = (F_1(x_1))^{\alpha_1} \dots (F_S(x_S))^{\alpha_S}. \quad (6.17)$$

Donc de la dernière identité et l'égalité suivante :

$$\prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\alpha_j + \beta_j} = \prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\alpha_j} \prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\beta_j}$$

on obtient la première Identité de (6.15), et de (6.16), (6.17) et l'identité suivante :

$$\frac{\prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\alpha_j + \beta_j}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} = \left[\prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\alpha_j} \right] \left[\frac{\prod_{j=1}^S (F_j(x_j))^{\beta_j}}{\Delta(x_1, \dots, x_S)} \right]$$

obtient la seconde Identité de (6.15). \square

Chapitre 7

Polynômes de Bell, partitions d'un entier et convexité

On donne, dans ce chapitre, quelques résultats concernant la convexité du nombre (total) de partitions et le nombre de partitions en k parts d'un entier n , et d'autres exprimant leurs liens avec les polynômes de Bell. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [15].

7.1 Introduction

Une partition d'un entier n en k parts, $k = 1, \dots, n$, est une solution entière du système :

$$n = n_1 + \dots + n_k \quad \text{avec} \quad n_1 \geq \dots \geq n_k \geq 1 \text{ et } n \geq k.$$

Pour $k = 1, \dots, n$, soient

$p(n, k)$ le nombre de toutes les partitions d'un entier n en k parts,

$p(n)$ le nombre de toutes les partitions d'un entier n , et,

$a(n, k)$ le nombre de toutes les solutions entières du système

$$n = n_1 + 2n_2 + \dots + kn_k, \quad n_1 \geq 0, \dots, n_k \geq 0 \text{ et } n \geq 0.$$

Par définition de $p(n)$, on trouve :

$$p(n) = \sum_{k=1}^{\infty} p(n, k) = \sum_{k=1}^n p(n, k), \quad p(n, k) = 0 \text{ pour } k \geq n + 1.$$

Des résultats traitant l'ensemble des partitions d'un entier, sont aussi contenus dans [14], [16], [46], [47], [69], [74].

Les principaux résultats dont nous avons besoin dans la suite de ce travail sont donnés par :

$$p(n, k) = a(n - k, k) \quad \text{et} \quad a(n, k) = a(n, k - 1) + a(n - k, k). \quad (7.1)$$

En utilisant la deuxième relation de récurrence de (7.1), on obtient :

$$p(n, k) = a(n, k) - a(n, k - 1) \quad \text{et} \quad p(n) = a(n, n). \quad (7.2)$$

Il est bien connu, voir [69], que la fonction génératrice (ordinaire) associée aux nombres $\{a(n, k); n \geq 0\}$ s'exprime comme suit :

$$f_k(z) = \frac{1}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^k)}, \quad |z| \leq 1. \quad (7.3)$$

On déduit en vertu de la relation (7.2) que la fonction génératrice associée aux nombres $p(n, k)$ s'exprime comme suit :

$$f_k(z) = \frac{z^k}{(1 - z)(1 - z^2) \dots (1 - z^k)}, \quad |z| \leq 1. \quad (7.4)$$

Ainsi, il est connu que la fonction génératrice associée à la suite $\{p(n)\}$ est donnée par

$$g(x) := 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \frac{1}{\prod_{j \geq 1} (1 - z^j)}, \quad |z| < 1.$$

7.2 Nombres de partitions d'un entier et polynômes de Bell

Si on note, respectivement, par :

$$d_n = \sum_{i: i|n} i \quad \text{et} \quad d_n(k) = \sum_{i: i|n, i \leq k} i$$

la somme des diviseurs d'un entier n , et la somme des diviseurs de n qui sont inférieurs ou égaux à k , on aura :

Théorème 7.1 On a :

$$\begin{cases} n!p(n) = A_n(0!d_1, \dots, (n-1)!d_n) \quad \text{et} \\ (n-1)!d_n = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (j-1)!B_{n,j}(1!p(1), 2!p(2), \dots), \end{cases}$$

et on a aussi :

$$\begin{cases} n!p(n+k, k) = A_n(0!d_1(k), \dots, (n-1)!d_n(k)) \quad \text{et} \\ (n-1)!d_n(k) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (j-1)!B_{n,j}(1!p(k+1, k), 2!p(k+2, k), \dots) \end{cases}$$

Preuve. Soit $h(z) := \ln(g(z))$, $|z| < 1$. On a alors :

$$h(z) = -\sum_{j=1}^{\infty} \ln(1-z^j) = \sum_{i,j=1}^{\infty} \frac{z^{ij}}{i} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \quad \text{avec}$$

$$a_n = \sum_{i: i|n} \frac{1}{i} = \frac{d_n}{n},$$

c'est à dire $1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)$. Ceci montre, par définition des polynômes complets de Bell, que :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1!a_1, \dots, n!a_n) \frac{z^n}{n!},$$

et cette identité montre le premier résultat du théorème.

D'après (7.4), pour k fixé, la fonction génératrice associée à la suite $\{p(n+k, k)\}$ est donnée par :

$$g_k(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n+k, k) z^n = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^k)}, \quad |z| < 1.$$

Soit $h_k(z) := \ln(g_k(z))$, $|z| < 1$. On a alors :

$$h_k(z) = -\sum_{j=1}^k \ln(1-z^j) = \sum_{j=1}^k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{ij}}{i} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) z^n, \quad \text{avec}$$

$$a_n(k) = \frac{1}{n} \sum_{j: j|n, j \leq k} j = \frac{d_n(k)}{n}.$$

C'est à dire $1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n+k, k) z^n = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n(k) z^n\right)$.

Ceci montre, par définition des polynômes complets de Bell, que :

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} p(n+k, k) z^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n(1!a_1(k), \dots, n!a_n(k)) \frac{z^n}{n!},$$

et cette identité montre le second résultat du théorème.

Les inversions s'obtiennent en utilisant le Corollaire 5.2. □

Corollaire 7.2 *Pour n, k entiers non-négatifs, on a :*

$$p(2n+k, n+k) = p(n).$$

Preuve. Pour $k \geq n$, on a bien $d_n(k) = d_n$. Donc, d'après le Théorème 7.1, on obtient $p(n+k, k) = p(n)$. Le corollaire découle en remplaçant k par $n+k$. □

Corollaire 7.3 *Pour n, k entiers, $n > k \geq 0$, on a :*

$$\sum_{j=1}^n d_j p(n-j) = np(n) \quad \text{et} \quad \sum_{j=1}^{n-k} d_j(k) p(n-j, k) = (n-k)p(n, k),$$

avec $p(0, 0) = p(0) = 1$.

Preuve. Quand on remplace a_j par $(j-1)!d_j$ ou par dans $(j-1)!d_j(k)$ l'identité (1.9) donnée par :

$$\sum_{j=1}^n \binom{n}{j} j a_j A_{n-j}(a_1, a_2, \dots) = n A_n(a_1, a_2, \dots),$$

ensuite on utilise le Théorème 7.1, on obtient les relations récurrentes ci-dessus. □

7.3 Convexité des suites $\{p(n)\}$ et $\{p(n, k)\}$

Les résultats suivants portent sur la convexité de quelques suites relatives aux partitions d'un entier, voir [15] et [16].

Théorème 7.4 *La suite $\{p(n)\}$ est convexe, c'est à dire :*

$$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) \geq 0, \quad n \geq 2. \tag{7.5}$$

Preuve. Soient $\mathcal{P}(n)$ l'ensemble des partitions de n de cardinalité $p(n)$, et, $\mathcal{P}'(n)$ l'ensemble des partitions de n dont les parts sont toutes supérieures ou égales à 2 et de cardinalité $p'(n)$.

On peut vérifier facilement que :

$$p'(n+1) = p(n) + p(n+1).$$

Il suffit de partitionner l'ensemble des partitions de $n+1$ en deux classes, celle-ci correspond à $\mathcal{P}'(n+1)$ et la classe du reste des partitions qui admettent au moins une part égale à 1, celle-ci est de cardinalité $p(n)$ (on peut correspondre bijectivement cette classe à $\mathcal{P}(n)$ en omettant une part égale à 1). De plus,

$$p'(n) \leq p'(n+1).$$

Il suffit d'injecter $\mathcal{P}'(n)$ dans $\mathcal{P}'(n+1)$ en ajoutant la plus grande part d'une partition de $\mathcal{P}'(n)$ le nombre 1. Donc,

$$p(n+1) - 2p(n) + p(n-1) = p'(n+1) - p'(n) \geq 0.$$

□

Théorème 7.5 Pour $n \geq 2$ et $k \geq 7$ la suite $\{a(n, k)\}$ est convexe par rapport à n , c'est à dire :

$$a(n, k) - 2a(n-1, k) + a(n-2, k) \geq 0, \quad n \geq 2, \quad k \geq 7. \quad (7.6)$$

Preuve. Posons $v_n(k) = a(n, k) - 2a(n-1, k) + a(n-2, k)$.

On peut sans nuire à la généralité supposer que $n > k$, car sinon, en vertu du Théorème 7.4, on a :

$$v_n(k) = p(n) - 2p(n-1) + p(n-2) \geq 0.$$

Pour k fixé, la fonction génératrice (ordinaire) associée à la suite $\{v_n(k)\}$ est alors donnée par :

$$h_k(z) = \frac{(1-z)^2}{(1-z)(1-z^2)\dots(1-z^k)}, \quad |z| \leq 1$$

et satisfait à la relation de récurrence :

$$h_k(z) = \frac{1}{1-z^k} h_{k-1}(z).$$

Cette dernière relation prouve que :

$$v_n(k) = \sum_{j=0}^n \alpha_k(j) v_{n-j}(k-1) \quad \text{avec} \quad \alpha_k(j) = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ divise } j \\ 0 & \text{si } k \text{ ne divise pas } j. \end{cases} \quad (7.7)$$

Montrons que $v_n(7) \geq 0$ pour tout $n \geq 8$.

La décomposition en éléments simple de la fonction génératrice associée à la suite $\{v_n(7)\}$ est :

$$\begin{aligned} h_7(z) = & \frac{1}{5040} \frac{1}{(1-z)^5} + \frac{1}{480} \frac{1}{(1-z)^4} + \frac{47}{4320} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{161}{4320} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{16051}{172800} \frac{1}{1-z} \\ & + \frac{1}{192} \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{23}{384} \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{713}{2304} \frac{1}{1+z} \\ & + \frac{1}{54} \frac{(2+z)(1-z)^2}{(1-z^3)^2} + \frac{1}{108} \frac{(21-2z)(1-z)}{1-z^3} \\ & + \frac{1}{25} \frac{(2-z+z^2-2z^3)(1-z)}{1-z^5} + \frac{1}{7} \frac{(1-z)^2}{1-z^7} \\ & + \frac{1}{36} \frac{(1-2z)(1+z)}{1+z^3} \\ & - \frac{1}{16} \frac{z}{1+z^2}. \end{aligned}$$

En effectuant une minoration de chaque coefficient de z^n , dans le développement en série entière des fonctions ci-dessus (les fonctions qui compose $h_7(z)$), on trouve :

$$\begin{aligned} v_n(7) \geq & \frac{1}{5040} \left(\frac{1}{24}n^4 + \frac{5}{12}n^3 + \frac{35}{24}n^2 + \frac{25}{12}n + 1 \right) + \frac{1}{480} \left(\frac{1}{6}n^3 + n^2 + \frac{11}{6}n + 1 \right) + \\ & \frac{47}{4320} \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right) + \frac{161}{4320} (n+1) + \frac{16051}{172800} - \frac{1}{192} \left(\frac{1}{2}n^2 + \frac{3}{2}n + 1 \right) \\ & - \frac{23}{384} (n+1) - \frac{713}{2304} - \frac{2}{7} - \frac{23}{108} - \frac{1}{54} (n+2) - \frac{1}{18} - \frac{3}{25} - \frac{1}{16}, \end{aligned}$$

c'est à dire :

$$v_n(7) \geq \frac{1}{120960} (n^4 + 52n^3 + 630n^2 - 3436n - 121567),$$

ou d'une façon équivalente :

$$v_n(7) \geq \frac{1}{120960} (720 + 34624(n-11) + 3072(n-11)^2 + 96(n-11)^3 + (n-11)^4),$$

et ceci montre que :

$$v_n(7) \geq 0 \quad \text{pour tout } n \geq 11.$$

Pour $n = 8, 9$ ou 10 , on a :

$h_7(z) = 1 - z + z^2 + z^4 + 2z^6 + 2z^8 + z^9 + 3z^{10} + z^{11} + O(z^{12})$, ce qui donne :

$$v_8(7) = 2, \quad v_9(7) = 1 \quad \text{et} \quad v_{10}(7) = 3.$$

Maintenant supposons que $v_n(j) \geq 0$ pour $7 \leq j \leq k-1$ et montrons que $v_n(k) \geq 0$.

D'après (7.7), on a d'une part :

$$\begin{aligned} v_n(k) = & \\ & \alpha_k(n) - \alpha_k(n-1) + \alpha_k(n-k-1)v_{k+1}(k-1) \\ & + \sum_{j=0, j \neq n-k-1}^{n-2} \alpha_k(j)v_{n-j}(k-1). \end{aligned}$$

Donc, d'après l'hypothèse de l'induction, on a :

$$v_n(k) \geq \alpha_k(n) - \alpha_k(n-1) + \alpha_k(n-k-1)v_{k+1}(k-1). \quad (7.8)$$

D'après la deuxième relation de (7.1), on a d'autre part :

$$v_n(k) = v_n(k-1) + v_{n-k}(k).$$

Donc,

$$v_{k+1}(k-1) = v_{k+1}(k-2) + v_2(k-1) = v_{k+1}(k-2) + 1.$$

Si $k-2 \geq 7$ alors $v_{k+1}(k-2) \geq 0$, d'après l'hypothèse de l'induction.

Si $k-2 = 6$ alors $v_{k+1}(k-2) = v_9(6) = 0$.

Ceci montre que $v_{k+1}(k-1) = v_{k+1}(k-2) + 1 \geq 1$.

Par conséquent, l'inégalité (7.8) entraîne

$$v_n(k) \geq \alpha_k(n) - \alpha_k(n-1) + \alpha_k(n-k-1).$$

Or, on a $\alpha_k(n) - \alpha_k(n-1) + \alpha_k(n-k-1) = \alpha_k(n)$, donc $v_n(k) \geq \alpha_k(n) \geq 0$. \square

Remarque 7.6 On peut démontrer que $v_n(5) \geq 0$ ($\forall n \geq 2$) de la même manière que pour $v_n(7) \geq 0$, ($\forall n \geq 2$).

On peut aussi démontrer que $v_n(6) \geq 2$ ($\forall n \geq 2$, $n \neq 7$ et $n \neq 13$).

Les décompositions en éléments simple des fonctions génératrices associées aux suites $\{v_n(5)\}$ et $\{v_n(6)\}$ sont données par :

$$h_5(z) = \frac{1}{120} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{1}{24} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{31}{288} \frac{1}{1-z}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{16} \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{11}{32} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{8} \frac{1-z}{1+z^2} + \frac{1}{9} \frac{(1-z)^2}{1-z^3} + \frac{1}{5} \frac{(1-z)^2}{1-z^5} \\
 h_6(z) = & \frac{1}{720} \frac{1}{(1-z)^4} + \frac{1}{96} \frac{1}{(1-z)^3} + \frac{17}{432} \frac{1}{(1-z)^2} + \frac{85}{864} \frac{1}{1-z} \\
 & + \frac{1}{96} \frac{1}{(1+z)^3} + \frac{1}{12} \frac{1}{(1+z)^2} + \frac{89}{288} \frac{1}{1+z} + \frac{1}{5} \frac{1-z}{1-z^5} \\
 & + \frac{1}{108} \frac{(17-13z)(1-z)}{1-z^3} + \frac{1}{18} \frac{(1-z)^2}{(1-z^3)^2} + \frac{1}{16} \frac{1-z}{1+z^2} - \frac{1}{36} \frac{(1+z)^2}{1+z^3}.
 \end{aligned}$$

Corollaire 7.7 *Pour $n \geq k + 2$ et $k \geq 7$ la suite $\{a(n, k)\}$ est convexe par rapport à n , c'est à dire :*

$$p(n, k) - 2p(n - 1, k) + p(n - 2, k) \geq 0, \quad n \geq k + 2, \quad k \geq 7. \quad (7.9)$$

Preuve. D'après (7.1), on a $p(n, k) = a(n - k, k)$, donc,

$$p(n, k) - 2p(n - 1, k) + p(n - 2, k) = a(n - k, k) - 2a(n - k - 1, k) + a(n - k - 2, k)$$

et le résultat du corollaire s'en déduit immédiatement, en utilisant le Théorème 7.5.

□

Chapitre 8

Une récurrence généralisée pour les polynômes de Bell

Etant donné $B_n(x)$ le $n^{\text{ème}}$ polynôme de Bell d'une seule variable, il est bien connu que B_n admet des coordonnées entières spécifiques dans les deux bases $\{x^i\}_{i=0,\dots,n}$ et $\{xB_i(x)\}_{i=0,\dots,n-1}$ selon, respectivement, les nombres de Stirling et les coefficients binomiaux. Notre objectif est de prouver que, pour $r + s = n$, la suite $\{x^j B_k(x)\}_{\substack{j=0,\dots,r \\ k=0,\dots,s}}$ est une famille (anti-diagonal) de l'espace vectoriel formé par les polynômes $\mathbb{Q}[x]$ pour laquelle B_n admet un coefficient de récurrence binomial. Ce chapitre a fait l'objet de la référence [10].

8.1 Introduction et résultat obtenu

Dans [6] et [7] H. Belbachir et F. Bencherif ont établi que les polynômes de Chebyshev du premier et de seconde espèce ; et plus généralement les polynômes bivariés associés à des suites récurrentes d'ordre deux, incluant les polynômes de Jacobsthal, les polynômes de Vieta, les polynômes de Morgan-Voyce et autres ; admettent des coordonnées entières remarquables dans une base spécifique. Que peut-on dire pour les polynômes de Bell à une seule variable ?

Les polynômes de Bell $\{B_n(x)\}_{n \geq 0}$ sont définis par leur fonction génératrice :

$$\sum_{n \geq 0} B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp(x(e^t - 1)).$$

Ils satisfont aussi :

$$B_n(x) = \exp(-x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i.$$

Il est bien connu que $B_n(x)$ admet des coordonnées entières dans les deux bases $\{x^i\}_{i=0,\dots,n}$ et $\{xB_i(x)\}_{i=0,\dots,n-1}$. En effet,

$$B_n(x) = \sum_{i=0}^n S(n, i) x^i \quad \text{et} \quad B_n(x) = x \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} B_i(x).$$

Notre but est de montrer que la suite $\{x^j B_k(x)\}_{\substack{j=0,\dots,r \\ k=0,\dots,s}}$, avec $s+r=n$, est une famille (anti-diagonal) de l'espace vectoriel formé par les polynômes $\mathbb{Q}[X]$ pour laquelle $B_n(x)$ admet un coefficient de récurrence binomial. Lorsque $s=0$, on obtient la première expression, et lorsque $r=1$, on obtient la seconde.

Théorème 8.1 *Si $n = s+r$ alors $B_n(x)$ s'écrit dans la famille $\{x^j B_k(x)\}_{j,k}$ comme suit :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^r j^{s-k} S(r, j) \binom{s}{k} x^j B_k(x). \tag{8.1}$$

Une conséquence immédiate de ce théorème est que si on choisit $x=1$, alors on déduit la récurrence généralisée de Spivey sur les nombres de Bell, voir [67].

Corollaire 8.2 *Les nombres de Bell satisfont la relation récurrente suivante :*

$$B_{s+r} = \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^r j^{s-k} S(r, j) \binom{s}{k} B_k.$$

8.2 Preuve du résultat obtenu

De [30, p. 157], on a :

$$\frac{\partial^r F(y)}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} = \sum_{j=1}^r S(r, j) y^{j-1} F^{(j)}(y) \quad \text{avec } y = x_1 \cdots x_r \quad (r \geq 1).$$

Soit $F(y) := \exp(y) B_s(y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^s}{i!} y^i$, avec s est un entier non-négatif, on obtient :

$$\begin{aligned} y \frac{\partial^r F(y)}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} &= y \frac{\partial^r}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^s}{i!} (x_1 \cdots x_r)^i \right) \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^s}{i!} i^r (x_1 \cdots x_r)^i \\ &= \exp(y) B_{s+r}(y), \end{aligned}$$

on a ainsi :

$$\begin{aligned}
 y \frac{\partial^r F(y)}{\partial x_1 \cdots \partial x_r} &= \sum_{j=0}^r S(r, j) y^j F^{(j)}(y) \\
 &= \sum_{j=0}^r S(r, j) y^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(i+j)^s}{i!} y^i \right) \\
 &= \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^r \binom{s}{k} S(r, j) j^{s-k} y^j \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^k}{i!} y^i \right) \\
 &= \exp(y) \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^r \binom{s}{k} S(r, j) j^{s-k} y^j B_k(y).
 \end{aligned}$$

Alors à partir des deux expressions de $y \frac{\partial^r F(y)}{\partial x_1 \cdots \partial x_r}$ on déduit :

$$B_{s+r}(y) = \sum_{k=0}^s \sum_{j=0}^r \binom{s}{k} S(r, j) j^{s-k} y^j B_k(y), \quad s \geq 0 \text{ et } r \geq 1. \quad (8.2)$$

On peut vérifier l'expression donnée par (8.1) est vraie pour $r = 0$ et, pour $r \geq 1$, on prend $x_1 := x$ et $x_2 = \dots = x_r = 1$ dans la relation (8.2).

Conclusion et Perspectives

Dans ce document, nous avons étudié les propriétés des suites binomiales en rapport avec les polynômes de Bell. Des relations intéressantes ont été établies dans le but d'enrichir les résultats concernant les polynômes de Bell en proposant de nouvelles identités, des relations récurrentes, des combinaisons entre les polynômes partiels et complets de Bell et des connexions avec les variables aléatoires. Tous ces résultats étaient l'objet du deuxième chapitre.

Un autre type de connexions a été introduit dans cette thèse, il concerne les connexions entre les dérivées successives des fonctions d'une suite binomiale et les polynômes de Bell. Ce type de connexion a fait l'objet du troisième chapitre. Les résultats obtenus ont conduit à introduire de nouvelles identités concernant les polynômes de Bell.

D'autres applications de ces résultats sont données sur les congruences et relations inverses, qui ont fait l'objet de deux chapitres.

A travers ces chapitres, on peut réaliser à quel point les polynômes de Bell peuvent être utilisés pour résoudre ou exprimer plusieurs concepts mathématiques et combinatoires. L'une des applications est le domaine des probabilités, voir par exemple [55], [56], [57] et [58].

Certainement, il est important de regarder comment on peut exploiter les polynômes de Bell dans d'autres applications.

Parmi les travaux qui peuvent présenter des perspectives et qu'on souhaite les aborder pour l'avenir on y trouve :

- Les travaux de Pitman, voir [55] et [56], nous laisse voir l'importance de ces résultats sur les distributions associées aux partitions de Gibbs et sur les processus aléatoires, tels que le processus de Poisson, le processus de Markov, les

processus de fragmentation et de congulation et autres. Ces applications peuvent, peut-être, à l'origine d'un chantier vierge plein de problèmes intéressants.

- Des applications dans d'autres domaines peuvent présenter de nouvelles perspectives comme les équations de Yule-Walker, les équations différentielles ordinaires (séries hypergéométriques), l'informatique (l'algorithmique et le calcul formel) et la physique mathématique (théorie quantique des champs)..

Bibliographie

- [1] M. Abbas and S. Bouroubi, On new identities for Bell's polynomials, *Discrete Mathematics* 293 (2005), pp. 5–10.
- [2] M. Aigner, *Combinatorial Theory*. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, (1979), pp. 99-116.
- [3] G. E . Andrews, The theory of partitions, *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, vol. 2, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, (1976) ; Cambridge University Press, Cambridge, 1984, Cambridge Mathematical Library, (1998).
- [4] R. Arratia, A. D. Barbour and S. Tavaré. *Logarithmic Combinatorial Structures : a Probabilistic Approach*, European Math. Society Monographs, 1, (2003).
- [5] H. Belbachir, F. Bencherif, Linear recurrent sequences and powers of a square matrix, *Integers* 6 (2006), A12, 17pp.
- [6] H. Belbachir, F. Bencherif, On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, *J. of Integer Seq.*, Vol. 11, Art. 08.2.6. (2008).
- [7] H. Belbachir, F. Bencherif, On some properties of Chebyshev polynomials, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.*, 28 (2), (2008).
- [8] H. Belbachir, Unimodalité et propriétés combinatoires de suites numériques, Thèse de Doctorat, USTHB, N° d'ordre : 09 /2007-E/MT, Décembre (2007).
- [9] H. Belbachir S. Bouroubi A. Khelladi. Connection between ordinary multinomials, generalized Fibonacci numbers, partial Bell partition polynomials and convolution powers of discrete uniform distribution, *Annales Mathematicae et Informaticae* 35 (2008) pp. 21–30.
- [10] H. Belbachir and **M. Mihoubi**. A generalized recurrence for Bell polynomials, Article à paraître dans "European Journal of Combinatorics".

- [11] E. T. Bell, Exponential polynomials, *Annals of Mathematics* 35, (1934), pp. 258–277.
- [12] N. Berestycki and J. Pitman. Gibbs distributions for random partitions generated by a fragmentation process, arXiv :math.PR/0512378 v2 14 Nov (2006).
- [13] A. Bernardini and P. E. Ricci, Bell polynomials and differential equations of Freud-type polynomials, *Math. Comput. Modelling* 36 (9/10) (2002), pp. 1115–1119.
- [14] S. Bouroubi, Optimisation dans les Posets, Thèse de Doctorat d’Etat en Mathématiques, USTHB, Alger, (2004).
- [15] S. Bouroubi & **M. Mihoubi**. Sur quelques relations relatives aux nombres de partitions d’un entier. *Maghreb Math. Rev.*, Vol. 11, No1, June (2002), pp. 14–19.
- [16] S. Bouroubi & **M. Mihoubi**. Sur quelques relations relatives aux nombres de partitions d’un entier. Prépublication, Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B., (2000).
- [17] L. Carlitz, An application of MacMahon’s Master Theorem, *SIAM J. Appl. Math.*, 26(1974), pp. 431–436.
- [18] L. Carlitz, Some Expansions and Convolution Formulas related to MacMahon’s Master Theorem, *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 8, No. 2, April (1977), pp. 320–336.
- [19] L. Carlitz, Some congruences for the Bell polynomials, *Pacific J. Math.* 11 (1961), pp. 1215–1222.
- [20] C. Cassisa and P. E. Ricci, Orthogonal invariants and the Bell polynomials, *Rendiconti di Matematica, Serie VII, Volume 20, Roma*, (2000), pp. 293–303.
- [21] Cavaliere Francesco Faà di Bruno, Sullo sviluppo delle Funzioni, *Annali di Scienze Matematiche e Fisiche* 6 (1855), pp. 479–480.
- [22] Cavaliere Francesco Faà di Bruno, Note sur une nouvelle formule de calcul différentiel, *Quarterly J. Pure Appl. Math.* 1 (1857) 359–360.
- [23] Cavaliere Francesco Faà di Bruno, *Theorie des formes binaires*, librairie Brero, Torino, (1876).
- [24] Charle Jean de la Vallée Poussin, *Cours d’Analyse Infinitésimale*, 3rd ed., vol. 1, Gauthier-Villars, Paris,(1914).
- [25] Cerasoli, Mauro. Two identities between Bell polynomials and Fibonacci numbers. *Boll.Un. Mat. Ital. A* (5) 18 (1981), no. 3, pp. 387–394.

- [26] Charles Jordan, *Calculus of Finite Differences*, 2nd ed., Chelsea, New York, (1950).
- [27] W. S. Choua, Leetsch C. Hsub, Peter J. S. Shiuec, Application of Faà di Bruno's formula in characterization of inverse relations. *Journal of Computational and Applied Mathematics* 190 (2006), pp. 151–169.
- [28] C. B. Collins, The role of Bell Polynomials in Integration, *Journal of computational and applied mathematics* 131, (2001), pp. 195–222.
- [29] L. Comtet, *Analyse Combinatoire*, Presses Universitaires de France, Paris, (1970).
- [30] L. Comtet, *Advanced Combinatorics*. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).
- [31] G. M. Constantine, *Combinatorial Theory and Statistical Design*, John Wiley & Sons, New York, (1987).
- [32] L. E. Dickson, Theorems on the residues of multinomial coefficients with respect to a prime modulus, *Quarterly J. Math.*, 33 (1902), pp. 378–384.
- [33] Donald E. Knuth, *The Art of Computer Programming*, Volume 1. Fundamental Algorithms, Addison-Wesley Publishing Company, Reading, Massachusetts, (1968).
- [34] B. S. Du, S. S. Huang, M. C. Li, Generalized Fermat, double Fermat and Newton sequences, *J. Number Theory* 98 (2003), pp. 172–183.
- [35] Edouard Goursat, *Cours d'Analyse Mathématique*, vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, (1902).
- [36] W. Feller. *An introduction To Probability Theory and Its Applications*, 3rd ed. John Willy and Sons, Inc., (1968).
- [37] N. J. Fine, Sums over partitions, *Report of the Institute in the Theory of Numbers*, Boulder, (1959), pp. 86–94.
- [38] C. F. Gardiner. *Algebraic structures*. Ellis Horwood Limited, (1986).
- [39] A. Gertsch, A. Robert, Some Congruences concerning the Bell Numbers, *Bull. BeIg. math. soc.* 3 (1996), pp. 467–475.
- [40] I. J. Good, Generalizations to several variables of Lagrange's expansion with applications to stochastic processes, *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 56(1960), pp. 367–379.

- [41] E. Hess, Zur Theorie der Vertauschung der unabhängigen Variablen, Zeitschrift für Mathematik und Physik 17 (1872), pp. 1–12.
- [42] A. Hurwitz, über die Entwicklungskoeffizienten der lemniscatischen Functionen, Mathematische Werke, Basel, 2, (1933), pp. 342–373.
- [43] T. Isoni, P. Natalini and P. E. Ricci, Symbolic computation of Newton sum rules for the zeros of polynomial eigenfunctions of linear differential operators, Numerical Algorithms, Special Volume in Memory of W. Gross 28 (1-4) (2001), pp. 215–227.
- [44] S. Khelifa, and Y. Cherruault. New results on Adomian method. Kybernetes. Vol. 29 ; n 3, (2000), pp. 332–354
- [45] P. Kirschenhofer, An alternating sum, Electronic Journal of Combinatorics 3 (2) (1996) #R7.
- [46] Kreweras, Sur une classe de problème de dénombrement liés aux treillis des partitions des entiers, Cahiers du BURO, 6, ISUP, (1965), pp. 9–103.
- [47] L. Lovász, *Combinatorial problems and exercises*, Akadémiai Kiado, Budapest, (1979).
- [48] I. G. Macdonald, *Symmetric Functions and Hall Polynomials*, 2nd ed., Oxford Mathematical Monographs, Oxford University Press, Oxford, (1995).
- [49] Z. A. Melzak, *Companion to Concrete Mathematics*, Wiley-Interscience, New York, (1973).
- [50] **M. Mihoubi**, Bell polynomials and binomial type sequences. Discrete Mathematics, 308 (2008), pp. 2450–2459.
- [51] **M. Mihoubi**, Bell polynomials and binomial type sequences. Les annales ROAD, Faculté de Mathématiques, (2007).
- [52] **M. Mihoubi**, The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials, Les annales ROAD, Faculté de Mathématiques, (2008).
- [53] **M. Mihoubi**, The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials, arXiv :0806.3468v1 [math.CO] 20 Jun (2008). Article à paraître dans "Ars Combinatoria".
- [54] **M. Mihoubi**, Congruences and partial Bell Polynomials. Article soumis dans "Journal of Integer Sequences".

- [55] J. Pitman. *Combinatorial stochastic processes*, volume (1875) of Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, (2006). Lectures from the 32nd Summer School on Probability Theory held in Saint-Flour, July (2002), pp. 7–24, With a foreword by Jean Picard.
- [56] J. Pitman. Poisson-Kingman partitions. In *Statistics and science : a Festschrift for Terry Speed*, volume 40 of IMS Lecture Notes Monogr. Ser., pages 1–34. Inst. Math. Statist., Beachwood, OH, (2003).
- [57] D. Port . A Characterization of Exponential and Ordinary Generating Functions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 98 (2002), pp. 219–234.
- [58] D. N. Port. Circular Numbers and n-set Partitions. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 83, (1998), pp. 57–78.
- [59] J. Riordan, *Combinatorial Identities*. Huntington, New York, (1979).
- [60] J Riordan, Derivatives of composite functions, *Bull. Amer. Math. Soc.* 52 (1946), pp. 664–667.
- [61] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, John Wiley & Sons, New York, (1958) ; Princeton University Press, Princeton, NJ, (1980).
- [62] J. Riordan, *Combinatorial Identities*, Wiley, New York, (1968).
- [63] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis*, J. Wiley & Sons, Chichester, (1953).
- [64] Roberto Frucht and Gian-Carlo Rota, Polinomios de Bell y particiones de conjuntos finitos, *Scientia* 126 (1965), pp. 5–10.
- [65] Roger A. Horn and Charles R. Johnson, *Topics in Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, (1991).
- [66] S. Roman, *The Umbral Calculus*. Academic Press, INC. (1984).
- [67] M. Z. Spivey, A generalized recurrence for Bell numbers. *Journal of integer sequences*, Vol. 11, Art. 08.2.5. (2008).
- [68] M. Z. Spivey, Combinatorial sums and finite differences, *Discrete Mathematics*, vol. 7, Issue 24, (2007), pp. 3130–3146.
- [69] R. P. Stanley, *Enumerative combinatorics*, Volume 1, Wadsworth & Books, (1986).
- [70] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 1, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 49, Cambridge University Press, Cambridge, (1997).

- [71] R. P. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, Volume 2, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 62, Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [72] R. Vein and P. Dale, *Determinants and their applications in mathematical physics*. Springer-Verlag New York, INC, (1999).
- [73] W. Wang & T. Wang, Matrices related to the Bell polynomials. *Linear Algebra and its Applications* 422 (2007) 139–154.
- [74] E. M. Wright, partition multipartite number into k parts, *J. Reine Angew-math.*, 216, (1964), pp. 101–112.
- [75] J. Zeng, Multinomial Convolution Polynomials, *Discrete Mathematics* 160 (1996), pp. 219–228.