

N° d'ordre : 09/2016-D/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

EN MATHÉMATIQUE

Spécialité : Recherche opérationnelle

Option : Génie mathématique

Amine BELKHIR

Thème

**Combinatoire bijective des pavages
et des partitions**

Soutenu publiquement le 23 Octobre 2016, devant le jury composé de :

M. Mourad BOUDHAR	Prof	USTHB	Président
M. Hacène BELBACHIR	Prof	USTHB	Directeur de thèse
Mme. Fatma Zohra BELKREDIM	MCA	U. Chlef	Examinatrice
M. Istvan MEZÖ	Prof	U. Nanjing - Chine	Examineur
M. Miloud MIHOUBI	Prof	USTHB	Examineur
M. Hamza SI KADDOUR	HDR	Univ. Lyon 1 - France	Examineur

REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer mes sincères remerciements à toutes les personnes qui ont rendu possible l'aboutissement de cette thèse.

Je voudrais tout d'abord remercier grandement mon directeur de thèse, le Professeur Hacène Belbachir, pour ses multiples conseils et pour toutes les heures qu'il a consacrées à diriger cette thèse. Je me sens très chanceux d'être un de ses étudiants. J'admire non seulement sa vaste connaissance, mais aussi son humilité remarquable. Je le remercie aussi pour avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires, en particulier son bureau le D212, pour mener ma thèse à terme. Bref, un GRAND MERCI.

Je remercie profondément Mourad BOUDHAR, Professeur à l'USTHB, de me faire l'honneur de présider mon jury.

Mes sincères remerciements vont également aux Professeurs, Fatma Zohra BELKREDIM de l'université de Chlef, Istvan MEZŐ de l'université Nanjing, Chine, Miloud MIHOUBI de l'USTHB et Hamza Si KADDOUR de l'université Lyon 1, France ; pour le temps qu'ils ont consacré à examiner ma thèse.

Je tiens à remercier encore Miloud MIHOUBI pour ses encouragements tout au long de mes années de thèse, j'apprécie énormément ses qualités scientifiques et humaines.

Je remercie également Jean-Gabriel LUQUE, Professeur à l'université de Rouen, pour son accueil chaleureux au sein de son équipe *Combinatoire et algorithmes* du laboratoire LITIS. Qu'il soit remercié pour toute l'aide qu'il a pu m'apporter lors de mon séjour en France.

Je remercie aussi les collègues de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB et en particulier les membres du laboratoire RECITS. Nombre d'entre eux m'ont soutenu, soit par leurs actes, soit par leurs encouragements. Je leur exprime toute ma reconnaissance.

Merci à mes coauteurs : Imad Eddine Bousbaa et Moussa Ahmia ; les discussions que nous avons eues durant les séances de travail m'ont beaucoup apportées.

Finalement un merci spécial, bien qu'insuffisant, à mes parents pour leur soutien au cours de ces années et sans lesquels je n'en serais pas là aujourd'hui.

RÉSUMÉ

Combinatoire bijective des pavages et des partitions

Cette thèse se situe dans le domaine de la combinatoire énumérative, elle porte sur l'étude de deux importantes structures combinatoires : les pavages linéaires et les partitions ordonnées.

Dans la première partie, nous proposons une interprétation combinatoire de la suite incomplète de Fibonacci et de la suite hyper-Fibonacci en termes des pavages restreints. Nous décrivons une bijection entre les polyominos dirigés verticalement convexes et les mots d'un alphabet issu des pavages linéaires, cette bijection nous a permis de construire et de compter les polyominos verticalement convexes dirigés selon les paramètres aire, nombre de colonnes et hauteur. Il s'avère que cette méthode reste valable pour d'autres classes de polyominos convexe et dirigés tels que : les polyominos parallélogramme, diagrammes de Ferrer, polyominos tas. Ensuite, nous étudions une approche unifiée des q -polynômes de Fibonacci bivarié par la distribution d'une statistique sur l'ensemble des pavages linéaires.

La seconde partie est consacrée à l'étude des propriétés combinatoires des nombres r -Lah. A l'aide de leur interprétation combinatoire en termes de partitions d'ensembles ordonnés nous établissons différentes relations de récurrence et les formes explicites associées, nous proposons également un modèle combinatoire pour interpréter une généralisation des nombres r -Lah. Enfin, nous prolongeons le modèle de Garsia et Remmel pour introduire les q et p, q -analogues des nombres r -Lah par la distribution conjointe des statistiques "*nombre d'inversions*" et "*nombre de co-inversions*" sur les mots associés aux partitions ordonnées.

Mots clés : suite de Fibonacci, suite incomplète de Fibonacci, suite hyper Fibonacci, pavage linéaire, polyominos, q et p, q -analogues, nombres de Lah, nombre r -Lah, nombre r -Stirling, partitions ordonnées, statistiques.

ABSTRACT

Bijjective combinatorics of the tilings and the set partitions

This thesis comes within the scope of bijective and enumerative combinatorics. It focuses on the study of two important combinatorial structures : linear tilings and ordered partitions.

In the first part, we propose a combinatorial interpretation of the incomplete Fibonacci numbers and the hyper-Fibonacci numbers in term of the restricted linear tiling. We describe a bijection between the directed column convex polyominoes and the words of an alphabet stemming from linear tiling, the proposed bijection permits us to build and count directed column convex polyominoes according to the parameters area, number of columns and height. It turns out that this coding still valid for other classes of directed and convex polyominoes such as : parallelogram polyominoes, Ferrer diagrams and polyominoes tas. Furthermore, we study the distribution of the mahonian statistics on set of linear tilings, this allows us to propose a unified approach for the q -Fibonacci polynomials.

In the second part, we are interested in combinatorial properties of the r -Lah numbers. Using their combinatorial interpretation in term of ordered partitions, we study various recurrence relations and exhibit the explicit formula. We also suggest a combinatorial model to interpret a recent generalization of r -Lah numbers. Finally, we extend the model of Garsia and Remmel to introduce q and p, q -analogues of the r -Lah numbers using the joint distribution of the statistics "*number of inversions*" and "*number of co-inversions*" on the words associated to the ordered partitions.

Key words : Fibonacci numbers, incomplete Fibonacci numbers, hyper-Fibonacci numbers, linear tiling, polyominoes, q and p, q -analogues, Lah numbers, r -Lah numbers, r -Stirling numbers, partitions, statistics.

TABLE DES MATIÈRES

Notation	xi
Introduction générale	1
1 Notions de combinatoire énumérative	6
1.1 Quelques objets combinatoires	6
1.1.1 Pavages et m -pavages linéaires	6
1.1.2 Polyominos	7
1.1.3 Chemins de Dyck	8
1.1.4 Partitions, listes et permutations	9
1.1.5 Permutations et partitions à motifs exclus	10
1.1.6 Partition d'entiers et diagramme de Young	10
1.2 Définitions élémentaires	10
1.2.1 Coefficients binomiaux et multinomiaux	10
1.2.2 Statistiques et fonctions génératrices	11
1.2.3 Les q -nombres	12
1.3 Suites classiques	13
1.3.1 Les nombres de Fibonacci	13
1.3.2 Les nombres de Stirling de première et deuxième espèces	14
1.3.3 Les nombres r -Stirling	15
1.3.4 Nombres harmonique et hyperharmonique	16
1.4 Matrice d'Euler-Seidel	16
1.5 Matrice symétrique Euler-Seidel	17
I Combinatoire des pavages linéaires	18
2 La suite incomplète de Fibonacci	19

2.1	Introduction	19
2.2	Interprétation combinatoire	21
2.3	Preuves bijective de quelques identités	22
2.4	Sommes des termes d'indices pairs et impaires de la suite incomplète de Fibonacci	24
2.5	La relation avec la suite hyper-Fibonacci	27
2.5.1	Interprétation combinatoire	28
2.5.2	Identités combinatoires	30
2.6	Norme de la matrice de type circulante	31
3	Codage des polyominos verticalement convexes dirigés par les pavages linéaires	34
3.1	Introduction	34
3.2	Polyominos dirigés verticalement convexes	35
3.3	La bijection	37
3.3.1	Pavage linéaire vers polyomino	37
3.3.2	Polyomino vers pavage linéaire	39
3.4	L'énumération suivant l'aire et le nombre de colonnes	43
3.5	L'énumération suivant l'aire et la hauteur	47
4	Aspect combinatoire des q-polynômes de Fibonacci bivarié	49
4.1	Introduction	49
4.2	Une approche unifiée des q -polynômes Fibonacci	50
4.3	Cas particuliers du polynôme $F_n(x, y; m, p)$	53
4.4	Interprétation combinatoire	54
4.5	Le q -analogue des polynômes de Lucas	56
4.6	Identités combinatoires	57
II	NOMBRES r-LAH ET LEUR q-ANALOGUE	59
5	Les nombres r-Lah	60
5.1	Introduction	60
5.2	Les nombres r -Lah	61
5.2.1	Relations de récurrence	64
5.2.2	Preuve combinatoire de l'équation (5.6)	66
5.3	Une généralisation des nombres r -Lah	66
5.3.1	Interprétation combinatoire	67

5.3.2	Preuves combinatoires	69
5.3.3	Forme explicite	70
5.3.4	Ecriture en termes de fonction symetrique	72
5.3.5	La fonction génératrice exponentielle	73
6	Le q et p, q-analogues des nombres r-Lah	75
6.1	Introduction	75
6.2	Le q -analogue des nombres r -Lah	78
6.3	Relations de récurrence	80
6.4	La fonction génératrice q -exponentielle	83
6.5	La relation avec le q -analogue des nombres r -Stirling	84
6.5.1	Le q -analogue des nombres r -Stirling de première & deuxième es- pèces	84
6.5.2	Le q -analogue des propriétés classiques	86
6.6	Le p, q -analogue des nombres r -Lah	88
	Conclusion et prespectives	91
	Bibliographie	92

TABLE DES FIGURES

1	Un polyomino verticalement convexe dirigé.	2
1.1	La génération récursive des pavages linéaires.	6
1.2	(a) Un pavage de longueur 8 ; (b) un 3-pavage de longueur 11.	7
1.3	Un polyomino et l'animal associé.	8
1.4	Un chemin de Dyck de longueur 18 et le mot qui lui associé.	8
1.5	Diagramme de Young associé à la partition $\lambda = (4, 3, 1, 1)$	10
2.1	Enumération des ensembles $\mathcal{T}(3, 1)$, $\mathcal{T}(4, 1)$ et $\mathcal{T}(6, 2)$	21
2.2	Un $(n + 2h - 1)$ -pavage avec au plus $k + h$ dominos.	23
2.3	Un chemins de Dyck croissant.	26
3.1	Polyomino sous contrainte de convexité.	35
3.2	Polyomino verticalement convexe dirigé Nord-Est.	35
3.3	Classes de polyominos sous contraintes de convexité et de direction.	36
3.4	Polyominos verticalement convexes dirigés d'aires 1, 2, 3 et 4.	37
3.5	Polyomino verticalement convexe dirigé d'aire 29 et de hauteur 15.	37
3.6	L'ensemble des configurations associées à un pavage de longueur 12.	38
3.7	Exemple de conversion d'un pavage de longueur 12 en polyomino d'aire 7.	39
3.8	Un polyomino verticalement convexe dirigé d'aire 18 et de largeur 7.	39
3.9	Un polyomino d'aire 10 et de largeur 5.	40
3.10	Transformation d'un polyomino d'aire 10 contenant 4 colonnes en pavage linéaire de longueur 16.	41
3.11	La bijection des pavages de longueur 6 et les polyominos d'aire 4.	42
3.12	La décomposition récursive d'un polyomino d'aire n	44
3.13	La décomposition d'un polyomino verticalement convexe dirigé.	45
3.14	Le polyomino d'aire n et de hauteur k engendré par l'ensemble $\Lambda = \{d^l d^r, x_2, \dots, x_{n-1}\}$	48

3.15	Polyominos d'aire n et de hauteur k	48
4.1	Un pavage contenant 5 tuiles ($t = dsdds$).	54
4.2	La distribution des statistiques $(\Phi_{m,p}, \nu)$ sur l'ensemble $T(4)$	55
4.3	Transformation d'un ruban circulaire n	56
5.1	Les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en 3 listes.	69

LISTE DES TABLEAUX

1.1	Le triangle des nombres de Stirling de première espèce.	14
1.2	Le triangle des nombres de Stirling de deuxième espèce.	15
2.1	Les valeurs de la suite incomplète de Fibonacci ($1 \leq n \leq 14$).	20
2.2	Les valeurs de la suite hyper-Fibonacci pour $r = 1, 2, 3$ et $1 \leq n \leq 10$	27
2.3	Illustration de l'identité (2.25) sur le triangle de Pascal, pour $r = 3$	30
3.1	Les valeurs de a_j, b_j ($1 \leq j \leq 7$) du polyomino de la Figure 3.8.	39
3.2	Les valeurs de a_j, b_j ($1 \leq j \leq 7$) du polyomino de la Figure 3.9.	40
3.3	Le triangle engendré par la suite double $\{G_{n,k}\}$, OEIS A121460.	47
4.1	Les premiers polynômes $F_n(x, y; m, p)$	52
5.1	Les premiers nombres de Lah, OEIS A008297.	60
5.2	Les premiers nombres 2-Lah.	63
5.3	Les premiers nombres 3-Lah.	63
5.4	Les premiers nombres 4-Lah.	63
5.5	Les premiers polynômes 1-Lah généralisés, pour $n, k = 1, \dots, 5$	68
5.6	Les premiers polynômes 2-Lah généralisés, pour $n, k = 1, \dots, 5$	68
6.1	Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.	76
6.2	La table des coefficients q -Lah pour $n, k = 0, \dots, 4$	77
6.3	Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ et leurs nombres d'inversion.	78
6.4	Les mots de l'ensemble $\mathcal{B}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.	85
6.5	L'ensemble $\mathcal{C}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.	86
6.6	Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(1)}$ et leurs nombres d'inversion et co-inversion.	88
6.7	Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs des statistiques inversion et co-inversion.	89

NOTATION

Les notations adoptées dans cette thèse sont issues du livre *Enumerative Combinatorics* [Sta12].

\mathbb{N}	l'ensemble des entiers naturels
$[n]$	l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, pour $n \in \mathbb{N}$
$[k, n]$	l'ensemble $\{k, k + 1, \dots, n\}$, pour $k, n \in \mathbb{N}$
$\#\mathcal{S}$	le cardinal d'un ensemble fini \mathcal{S}
t	la longueur d'un pavage t
$:=$	égalité par définition (affectation)
\uplus	union disjointe d'ensembles
$\mathcal{S} \subset \mathcal{T}$	\mathcal{S} est un sous ensemble de \mathcal{T}
$\mathcal{S} \setminus \mathcal{T}$	complémentaire de \mathcal{T} dans \mathcal{S}
$\delta_{i,j}$	delta de Kronecker égal à 1 si $i = j$ et 0 sinon
$\lfloor x \rfloor$	plus grand entier par défaut de x
$x^{\overline{n}}$	le produit $x(x + 1) \cdots (x + n - 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\overline{0}} = 1$
$x^{\underline{n}}$	le produit $x(x - 1) \cdots (x - n + 1)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $x^{\underline{0}} = 1$
$[n]_q$	le q -analogue de l'entier n ($[n]_q = 1 + q + \dots + q^{n-1}$)
$[n]_q!$	la q -factorielle de l'entier n et $[0]_q! = 1$
$[x]_q^{\downarrow n}$	la q -factorielle de descendante n et $[0]_q^{\downarrow 0} = 1$
$[x]_q^{\uparrow n}$	la q -factorielle ascendante et $[0]_q^{\uparrow 0} = 1$
$[n]_{p,q}!$	la p, q -factorielle de l'entier n et $[0]_{p,q}! = 1$
$\binom{n}{k}_q$	coefficient q -binomial (Gaussien)
$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_r}_q$	coefficient q -multinomial
inv	statistique d'inversion
maj	statistique d'indice majeur
$coinv$	statistique coinversion

*"Science is what we understand
well enough to explain to a computer.
Art is everything else."
Don. KNUTH*

INTRODUCTION GÉNÉRALE

Cette thèse intitulé "*Combinatoire bijective de quelques suites numériques*" regroupe des travaux de recherche réalisés dans le domaine de la combinatoire énumérative et en particulier la combinatoire bijective.

La combinatoire énumérative est la branche des mathématiques qui s'intéresse aux structures discrètes, et en particulier à leur dénombrements. Soient \mathcal{A} une famille de structures discrètes (permutations, polyominos, graphes,...) et s une fonction, appelée aussi une *statistique*, qui associe à chaque objet une valeur dans \mathbb{N} , souvent cette valeur correspond à la taille de la structure (la longueur d'une permutations ou d'un pavage, nombre de blocs d'une partition,...), en espérant obtenir une formule exacte, ou au moins, des informations sur le nombre de ces objets lorsque leur taille tend vers l'infini. On peut aussi chercher à connaître le nombre d'objets en fonction non plus d'un paramètre mais de deux ou plus, et résumer l'information obtenue sous forme d'une série génératrice, que l'on peut alors étudier analytiquement.

Une preuve bijective d'une identité $A = B$ est associée à une paire (S, T) est une bijection $\Phi : S \rightarrow T$ avec une preuve que $\#S = \#T$. Les preuves bijectives sont très utilisées par les combinatoristes car ils fournissent souvent des interprétations d'identités combinatoires. Prenons par exemple l'identité qui exprime la symétrie des coefficients binomiaux

$$\binom{n}{k} = \binom{n-k}{k},$$

le membre de gauche $\binom{n}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de k éléments d'un ensemble E à n éléments, tandis que $\binom{n-k}{k}$ est le nombre de sous-ensembles de $n - k$ éléments de ce même ensemble. Il y a une bijection simple entre les deux familles de sous-ensembles de E , qui associe à chaque sous-ensemble à k éléments son complémentaire, lequel contient précisément les $n - k$ éléments restants.

Nos travaux se situent dans le même contexte, à savoir développer des bijections entre des ensembles d'objets combinatoires afin d'étudier les propriétés de certaines suites d'entiers et de polynômes.

Cette thèse, structurée en deux parties, traite le sujet de l'énumération et la q -énumération des pavages linéaires et les partitions ordonnées.

La première partie est composée de trois chapitres, elle concerne l'étude des pavages linéaires, les polyominos verticalement convexes dirigés et les suites engendrées par ces

objets. Le second thème abordé dans cette thèse concerne l'étude des nombres r -Lah et leurs q et p, q -analogues à l'aide des partitions ordonnées.

Le **chapitre 1** regroupe les notions principales de la combinatoire utilisée dans cette thèse. Nous rappelons les définitions des objets combinatoires : pavages linéaire, polyominos, partitions,...etc., ainsi que les suites des nombres classiques.

Partie I : La combinatoire des pavages linéaires

Chapitre 2 : La suite incomplète de Fibonacci

La première partie de ce chapitre est consacrée à la suite incomplète de Fibonacci $\{F_n(k)\}_n$ introduite par Fiblipponi en 1996. Contrairement à la suite de Fibonacci classique, cette suite prend en paramètre deux indices et satisfait la relation de récurrence double :

$$F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_{n-2}(k-1).$$

Nous proposons d'abord une interprétation combinatoire par des pavages restreints. Ensuite, nous redémontrons par des preuves bijectives quelques identités classiques. Il se trouve que dans la plupart des cas, les démonstrations sont simples et mettent bien en valeur l'interprétation combinatoire.

Dans la deuxième partie, nous démontrons d'une manière totalement combinatoire, en utilisant le modèle des pavages restreints, la complémentarité (additive) entre la suite incomplète de Fibonacci et la suite hyper-Fibonacci introduite par Dil et Mező, [DM08], et définie par la relation suivante, pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$:

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(r-1)}, \text{ avec } F_n^{(0)} = F_n \text{ et } F_0^{(r)} = 0,$$

Dans la troisième partie, nous établissons la valeur exacte de la norme de Frobenius de la matrice circulante associée à la suite incomplète de Fibonacci et l'hyper-Fibonacci.

Chapitre 3 : Codage des polyominos verticalement convexes dirigés par les pavages linéaires

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'énumération des polyominos *dirigés verticalement convexes* à l'aide d'une bijection avec les pavages linéaires.

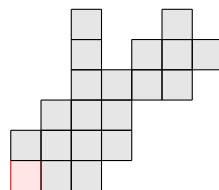


FIG. 1 – Un polyomino verticalement convexe dirigé.

Nous présentons deux algorithmes permettant de construire des polyominos à partir des mots d'un alphabet issu des pavages linéaires, et inversement. Cette bijection nous a fourni un nouvel éclairage et un outil efficace pour énumérer ces structures.

Nous étudions également certaines propriétés liées à l'énumération des polyominos verticalement convexes dirigés suivant l'aire, le nombre de colonnes et la hauteur. Dans certains cas, les formules d'énumérations obtenues sont différentes de celles établis par Barucci, Penzani et Sprugnoli [BPS93a, BPS93b, BPS95].

Chapitre 4 : Aspect combinatoire des q -polynômes de Fibonacci bivarié

Ce chapitre traite l'aspect combinatoire des q -polynômes de Fibonacci bivarié, nous proposons une version unificatrice de ces polynômes comme suit :

$$F_{n+1}(x, y; m, p) = \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}.$$

Dans un premier temps, nous déterminons des relations de récurrence ainsi que la fonction génératrice de ces polynômes. Ensuite, nous définissons la statistique $\Phi_{m,p}$ sur un pavage linéaire par :

$$\Phi_{m,p}(t) = m \cdot occ(t) + p \cdot (occ + \sigma)(t) + inv(t),$$

où $occ(t)$, $inv(t)$ et $v(t)$ désignent respectivement le nombre d'occurrence, le nombre d'inversions et le nombre de dominos dans le pavage t .

Nous montrons que la distribution conjointe des statistiques $(\Phi_{m,p}, v)$ sur l'ensemble des pavages linéaires de longueur n correspond au polynôme $F_{n+1}(x, y; m, p)$.

La distribution conjointe des statistiques $(\Phi_{m,p}, v)$ sur les pavages circulaires nous a suggéré deux q -analogues des polynômes de Lucas bivarié.

Partie II : Nombres r -Lah et leur q -Analogue

Chapitre 5 : Les nombres r -Lah

La première partie de ce chapitre est consacrée aux diverses relations de récurrence des nombres r -Lah. Ces nombres sont définis d'une manière similaire aux nombres r -Stirling [Bro84] qui dénombrent les partitions ordonnées de l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$ en k listes de telle sorte que les entiers $1, 2, \dots, r$ soient dans des listes distinctes. D'un point de vue algébrique, les nombres r -Lah correspondent aux coefficients de changement de base :

$$(x+r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (x-r)^k.$$

La deuxième partie, fruit d'une collaboration avec Imad Eddine Bousbaa, concerne une extension des nombres r -Lah proposée par Shattuck [Sha14b]. Cette généralisation est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ n \end{bmatrix}_r^{a,b} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{a,b} + (an + bk + (a+b)r) \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{a,b}.$$

Notre objectif dans cette partie est de développer un modèle combinatoire en terme de partitions ordonnées avec poids pour interpréter les nombres $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{a,b}$. Des preuves bijectives sont données pour les relations de récurrence horizontale, verticale et une expression à l'aide des fonctions symétriques élémentaires. De plus, nous donnons à partir du modèle et du principe d'inclusion-exclusion la forme explicite des nombres $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{a,b}$. Nous terminons par en déduire la fonction génératrice exponentielle.

Chapitre 6 : q et p, q -analogues des nombres r -Lah

Remmel et Garsia [GR80] ont définis le q -analogue des nombres de Lah par la fonction génératrice double suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} x^k \frac{u^n}{[n]_q!} = E_q(-x) \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{[k]_q!} \frac{1}{(1-u)(1-uq) \cdots (1-uq^{k-1})}.$$

Le coefficient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)}$ est interprété comme le polynôme générateur de l'ensemble des mots associés aux partitions ordonnées pour la statistique d'inversion,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} = \sum_{w \in \mathcal{WP}_{n,k}} q^{\text{inv}(w)}.$$

Dans ce chapitre, nous allons étendre cette interprétation pour définir le q -analogue des nombres r -Lah par la distribution de la statistique *nombre d'inversions* sur l'ensemble des mots issus des partitions ordonnées restreintes.

Dans un premier temps, nous donnons le q -analogue des différentes relations de récurrence étudiées dans le chapitre précédent ainsi que la fonction génératrice q -exponentielle. Ensuite, nous définissons un q -analogue des nombres r -Stirling de première et deuxième espèces. Nous verrons que l'expression des nombres r -Lah en termes des nombres r -Stirling se généralise naturellement comme suit :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix}_r^{(q)}.$$

Mentionnons que pour $r = 1$ on obtient le q -analogue des nombres de Stirling introduits par Milne [Mil78, Mil82] et interprétés par la distribution de la statistique "*right smaller*" sur des *fonctions à croissance restreinte*.

Enfin, nous introduisons le p, q -analogue des nombres r -Lah par la distribution conjointe des statistiques *nombre d'inversions* et *nombre de co-inversions* sur l'ensemble des mots issus des partitions ordonnées.

Publications scientifiques

Articles dont est issu le contenu de cette thèse :

Articles publiés ou acceptés :

- [BB13a] H. Belbachir and A. Belkhir. Cross recurrence relations for r -Lah numbers. *Ars Combin.*, 110 :199–203, 2013.
- [BB13b] H. Belbachir and A. Belkhir. Tiling approach to obtain identities for generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Ann. Math. Inform.*, 41 :13–17, 2013.
- [BB14a] H. Belbachir and A. Belkhir. Combinatorial expressions involving Fibonacci, hyperfibonacci, and incomplete Fibonacci numbers. *J. Integer Seq.*, 17(4) :Article 14.4.3, 7, 2014.
- [BB16] H. Belbachir and A. Belkhir. On generalized hyper-Fibonacci polynomials and incomplete Fibonacci polynomials. *Siauliai Math. Semin.*, 11 (19), 1–12, 2016.

Prépublication :

- [BBB14] H. Belbachir, A. Belkhir, and I. E. Bousbaa. Combinatorial approach of certain generalized stirling numbers. *arXiv*, 1412.8721, 2014.

Articles soumis ou en cours de rédaction :

- [BBB] H. Belbachir, A. Belkhir, and I. E. Bousbaa. The generalized r -Lah numbers revisited.
- [BBa] H. Belbachir, A. Belkhir, Coding various classes of directed convex polyominoes with linear domino arrangements.
- [BBc] H. Belbachir, A. Belkhir, Statistic on linear domino arrangements and generalized q -Fibonacci polynomials.
- [BBb] H. Belbachir, A. Belkhir, Statistic on ordered set partition and p, q -analogue of r -Lah numbers.

Autres travaux :

L'article suivant traite la question de la log-concavité et la log-convexité des suites hyperpell and hyperpell-lucas, et n'a pas été utilisé dans la rédaction de cette thèse.

- [ABB14] M. Ahmia, H. Belbachir, and A. Belkhir. The log-concavity and log-convexity properties associated to hyperpell and hyperpell-lucas sequences. *Ann. Math. Inform.*, 43 :3–12, 2014.

NOTIONS DE COMBINATOIRE ÉNUMÉRATIVE

Nous présentons dans ce chapitre les principales notions de la combinatoire énumérative essentielles pour la lecture de cette thèse. Les principales références utilisées pour la rédaction de ce chapitre sont [Sta12, Com74, GKP94, Man13]. Nous commençons par décrire quelques objets fondamentaux en combinatoire.

1.1 Quelques objets combinatoires

1.1.1 Pavages et m -pavages linéaires

Les pavages linéaires sont engendrés par la grammaire algébrique

$G = \langle \{ \square, \blacksquare \}, \{ F \}, R, F \rangle$, où R désigne l'ensemble de règles de productions suivant :

$$R_0 : F \rightarrow \varepsilon$$

$$R_1 : F \rightarrow \square F$$

$$R_2 : F \rightarrow \blacksquare F$$

L'exemple suivant illustre la construction récursive des pavages linéaires.

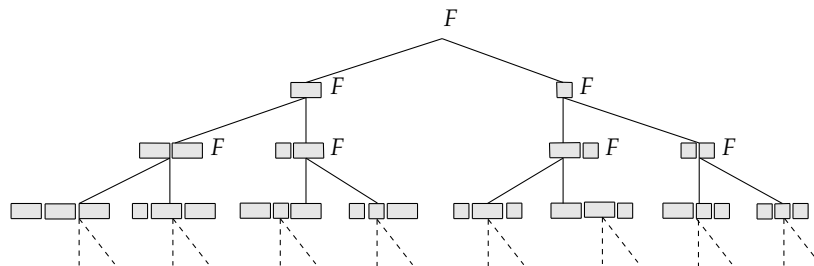


FIG. 1.1 – La génération récursive des pavages linéaires.

La longueur d'un pavage t , noté $|t|$, est donnée par

$$|t| = \#monomino + 2 \cdot \#domino.$$

Plus généralement, on définit un m -pavage linéaire comme un mot formé par l'alphabet $\mathcal{A}_m = \{monomino, domino, \dots, m - mino\}$, ainsi la longueur est donnée par

$$|t| = \#monomino + 2 \cdot \#domino + \dots + m \cdot \#m - mino.$$

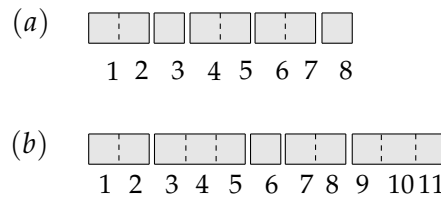


FIG. 1.2 – (a) Un pavage de longueur 8; (b) un 3-pavage de longueur 11.

Quelques opérations sur les pavages :

- Etant données deux pavages $a = a_1a_2 \cdots a_n$ et $b = b_1b_2 \cdots b_k$, le *produit* ou la *concaté- nation* des deux pavages a et b est le pavage t composé par les éléments de a suivies des éléments de b

$$t = a * b = a_1a_2 \cdots a_nb_1b_2 \cdots b_k.$$

- Soit le pavage $t = t_1t_2 \cdots t_n$, on appelle un *sous-pavage* de t , tout pavage de la forme $t_{i_1}t_{i_2} \cdots t_{i_k}$ avec $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$ ($1 \leq k \leq n$).
- Soit le pavage $t = t_1t_2 \cdots t_n$, le *dual* du pavage t , est obtenu en substituant chaque carré par un domino et inversement.

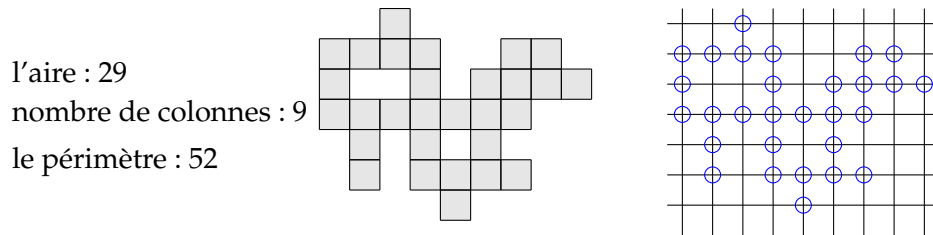
1.1.2 Polyominos

Considérons le plan $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, une *cellule* est définie comme un carré unitaire $[i, i + 1] \times [j, j + 1]$ où i et j sont des entiers. Un *polyomino* se définit comme un ensemble de cellules deux à deux adjacentes par un coté.

Un *polyomino* possède plusieurs paramètres, par exemple :

- l'*aire* d'un polyomino est le nombre de cellules qui le composent ;
- une *colonne* est l'intersection du polyomino avec une bande verticale infinie $[i, i + 1] \times \mathbb{R}$;
- le *périmètre* est la longueur de son contour.

Si on remplace chaque cellule de polyomino par son centre, l'ensemble des points obtenus forme un *animal*, cette structure équivalente est étudié par les physiciens.



l'aire : 29
 nombre de colonnes : 9
 le périmètre : 52

FIG. 1.3 – Un polyomino et l'animal associé.

1.1.3 Chemins de Dyck

Un chemin de Dyck est un chemin $(s_0, s_1, \dots, s_{2n})$ de $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ tel que le point de départ $(s_0 = (0, 0))$ et le point d'arrivée $(s_{2n} = (2n, 0))$, et pour tout $0 \leq i \leq 2n - 2$, le pas (s_i, s_{i+1}) est un pas élémentaire Nord-Est ou Sud-Est.

Les mots de Dyck sont engendrés par la grammaire algébrique suivante $\langle \{a, \bar{a}\}, \{D\}, R, D \rangle$

$$\begin{aligned} R_0 : D &\rightarrow \varepsilon \\ R_1 : D &\rightarrow aD\bar{a}D \end{aligned}$$

Les chemins de Dyck de longueur $2n$ sont en bijection avec les mots de Dyck de longueur $2n$, il suffit d'associer chaque pas dans la direction Nord-Est à une lettre a et chaque pas dans la direction Sud-Est à une lettre \bar{a} .

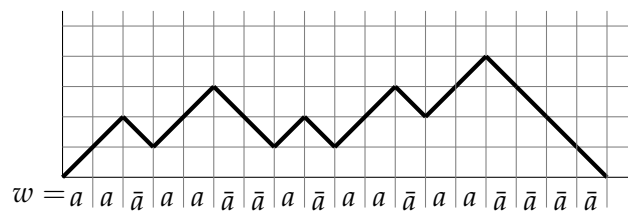


FIG. 1.4 – Un chemin de Dyck de longueur 18 et le mot qui lui associé.

Soit D_n l'ensemble des chemins de Dyck de longueur $2n$,

$$|D_n| = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}.$$

Dans un chemin de Dyck

- un *pic* est un facteur $a\bar{a}$ dans le mot w ;
- une *vallée* est un facteur $\bar{a}a$ dans le mot w ;
- une *pyramide* de hauteur h est un facteur $a^h\bar{a}^h$ dans le mot w ;

1.1.4 Partitions, listes et permutations

Soit $[n] = \{1, 2, \dots, n\}$, une **partition** π de $[n]$ est une famille B_1, B_2, \dots, B_k de sous ensembles non vides, disjoints deux à deux, tels que $\bigsqcup_{i=1}^k B_i = [n]$. Les sous ensembles sont appelés *blocs* de la partition π . Une k -partition est une partition comportant k blocs. Les blocs d'une partition sont ordonnés par rapport

$$\min B_1 < \min B_2 < \dots < \min B_k.$$

où $\min B_j$ désigne le plus petit élément du bloc B_j . Par exemple, l'ensemble de partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est donnée par

$$1/2/3; 1/23; 12/3; 13/2; 123.$$

Dans la représentation canonique d'une partition on indique pour chaque élément $j \in [n]$ l'indice du bloc où il apparait. Ainsi la forme canonique de l'ensemble des partitions ci-dessus est donnée par

$$123; 122; 112; 121; 111.$$

Une **partition en listes** de $[n]$ est une famille B_1, B_2, \dots, B_k de sous ensembles *ordonnés* disjoints, non vides, tels que $\bigsqcup_{i=1}^k B_i = [n]$.

Par exemple, l'ensemble de partitions de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ est donnée par

$$\begin{aligned} &123; 132; 312; 213; 231; \\ &13/2; 31/2; 1/32; 1/23; 1/2/3; \end{aligned}$$

Une **permutation** de l'ensemble $[n]$, est une bijection de $[n]$ sur lui-même. On note Π_n l'ensemble des permutations de $[n]$, on peut représenter une permutation σ par un tableau

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Une permutation est dite cyclique s'il existe $a_1, a_2, \dots, a_r \in [n]$ différents tels que σ envoie a_1 vers a_2 , puis a_2 vers a_3, \dots, a_{r-1} vers a_r et enfin a_r vers a_1 , tandis que les $n - r$ éléments restants de l'ensemble sont fixés par σ .

Un **Multi-ensemble** (multiset) est un couple $M = (A, \mu)$ où A est un ensemble appelé support et μ une fonction de A dans l'ensemble des entiers naturels ($\mu : A \rightarrow \mathbb{N}$), appelée multiplicité (notée μ). Dans le multi-ensemble (A, μ) , l'élément x apparaît $\mu(x)$ fois. Le cardinal de multi-ensemble est $\sum_{x \in A} \mu(x)$. On dit qu'un multi-ensemble (A, μ) est *m-filtré* [Mun97] si l'ordre de multiplicité de chaque élément $x \in A$ est strictement inférieur à m c'est-à-dire $\mu(x) < m$ pour tout $x \in A$.

Par exemple, $\{1, 2, 1, 2, 2, 4\} = \{1^2, 2^3, 4^1\}$ représente le multi-ensemble $(\{1, 2, 3, 4\}, \mu)$ où μ est la fonction telle que $\mu(1) = 2, \mu(2) = 3, \mu(3) = 0$ et $\mu(4) = 1$.

1.1.5 Permutations et partitions à motifs exclus

Soient $\pi \in \Pi_n$ et $\tau \in \Pi_k$ deux permutations, avec $n > k$. On dit que π **contient** τ s'il existe une sous-séquence $\pi_{i_1} \pi_{i_2} \cdots \pi_{i_k}$ avec $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k \leq n$ qui est isomorphe en ordre à τ , c'est-à-dire telle que les coefficients π_{i_j} soient dans le même ordre que les coefficients de τ . Dans ce cas τ est appelé un *motif*.

Si π ne contient pas le motif τ , on dit que π **évite** τ . Par exemple, si $\tau = 231$, alors $\pi = 24531$ contient 231. En effet, la sous séquence $\pi_2 \pi_3 \pi_4 = 453$ est isomorphe à 231. Cependant, $\pi = 24531$ évite le motif 312.

1.1.6 Partition d'entiers et diagramme de Young

Etant donné un entier strictement positif n , on appelle **partition de n** une suite d'entiers strictement positifs $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $p \geq 1$, telle que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_p$ et $\sum_{i=1}^p \lambda_i = n$.

Soit la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$:

- Les *parts* de λ sont les entiers $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$.
- La *longueur* de λ est le nombre de parts.
- La *taille* de λ est la somme des parts de $|\lambda| = \sum_{i=1}^p \lambda_i$.

Un **diagramme de Ferrer** associé à la partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ est une suite de n cases alignées sur la gauche, ayant p lignes, telle que la ligne i contient λ_i cases.

Par exemple, pour $n = 9$, $p = 4$ et $\lambda = (4, 3, 1, 1)$, on obtient le diagramme de Young suivant :

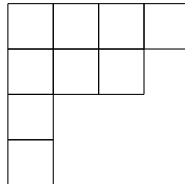


FIG. 1.5 – Diagramme de Young associé à la partition $\lambda = (4, 3, 1, 1)$.

1.2 Définitions élémentaires

1.2.1 Coefficients binomiaux et multinomiaux

Soient x un nombre réel et k un entier positif. La facotrielle descendente de x d'ordre k est définie par

$$x^{\underline{k}} = x(x-1) \cdots (x-k+1), \quad \text{avec } x^{\underline{0}} = 1.$$

De la même manière on peut définir la facotrielle ascendente de x

$$x^{\overline{k}} = x(x+1) \cdots (x+k-1), \quad \text{avec } x^{\overline{0}} = 1.$$

La facorielle ascendente généralisée de x est définie par,

$$(x|m)^k = x(x-m) \cdots (x-(k-1)m), \quad \text{avec } x^0 = 1.$$

Le coefficient binomial est défini pour tous entiers n et k ($0 \leq k \leq n$) par

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

avec la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k \leq 0$ ou $k \geq n$. Le coefficient $\binom{n}{k}$ peut être interprété comme le nombre de façons de choisir k éléments parmi n .

Le nombre

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} := \frac{n!}{k_1! k_2! \cdots k_s!}$$

avec $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n$, est appelé coefficient multinomial. Il correspond au coefficient dans le développement suivant

$$(x_1 + x_2 + \cdots + x_s)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \cdots + k_s = n} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \cdots x_s^{k_s}. \quad (1.1)$$

Les coefficients multinomiaux peuvent être interprétés, voir par exemple [Sta12], comme le nombre de permutation du multi-ensemble $(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \mu)$ avec $\mu(x_i) = a_i$ ($1 \leq i \leq n$) et $\sum_{i=1}^n \mu(x_i) = n$. Par exemple, il y a $\binom{4}{2,1,1} = 12$ permutations du multi-ensemble $\{1, 1, 2, 3\}$,

$$\begin{aligned} &1123, 1132, 1213, 1312, 1231, 1321, \\ &2131, 2311, 3112, 3121, 3211, 2113. \end{aligned}$$

Maintenant, en posant $x_i = t^{i-1}$ ($1 \leq i \leq s$) dans la relation (1.1), on obtient

$$(1 + t + \cdots + t^{s-1})^n = \sum_k \binom{n; s}{k} t^k,$$

où le coefficient $\binom{n; s}{k}$ est appelé coefficient bi-s-nomial [BB14b] ou encore coefficient d'André [Com74] ou encore multinomial ordinaire [Bol86, AB87].

$$\binom{n; s}{k} = \sum_{k_2 + \cdots + k_{s-1} = k} \binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s}.$$

1.2.2 Statistiques et fonctions génératrices

Soit \mathcal{A} un ensemble d'objets combinatoires (pavages, partitions, permutations,...). Une statistique f sur l'ensemble \mathcal{A} est une application qui associe à chaque élément de \mathcal{A} un entier de \mathbb{N} , i.e $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$.

Soit \mathcal{A} un ensemble fini d'objets et $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{N}$ une statistique, alors

$$E(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}} x^{f(a)}.$$

est un polynôme à coefficients entiers. Le polynôme $E(x)$ est appelé **fonction génératrice** (ou polynôme générateur) de l'ensemble \mathcal{A} associé à f . Les principales statistiques étudiées dans cette thèse sont :

Inversion : soit $a = a_1a_2 \cdots a_n$ un mot d'un alphabet, la statistique d'inversion sur le mot a est définie par

$$inv(a) = |\{(i, j) : i < j \text{ et } a_i > a_j\}|.$$

Descente : soit $a = a_1a_2 \cdots a_n$ un mot d'un alphabet, l'ensemble de descentes est définie par

$$Des(a) := \{1 \leq i \leq n-1 : a_i > a_{i+1}\}.$$

Ainsi le nombre de descentes est :

$$des(a) = \#Des(a).$$

Indice Majeur : soit $a = a_1a_2 \cdots a_n$ un mot d'un alphabet, la statistique d'indice majeur sur le mot a est définie par

$$maj(a) = \sum_{i \in Des(a)} i.$$

1.2.3 Les q -nombres

Le q -analogue d'un nombre n est une expression $f(n, q)$ telle que $\lim_{q \rightarrow 1} f(n, q) = n$. Par convention le q -analogue d'un nombre n est $[n]_q = \frac{1-q^n}{1-q} = 1 + q + \cdots + q^{n-1}$.

La q -factorielle d'un entier n , dénoté $[n]_q!$, est égal à $[n]_q! = [n]_q[n-1]_q \cdots [1]_q$. Le coefficient $[n]_q!$ est interprété comme la fonction génératrice de l'ensemble des permutations pour la statistique d'inversion,

$$[n]_q! = \sum_{\pi \in \Pi_n} q^{inv(\pi)}.$$

La q -factorielle descendente de $[n]_q$ est donnée par

$$[n]_q^{\downarrow k} = [n]_q[n-1]_q \cdots [n-k+1]_q.$$

Le coefficient Gaussien (ou q -binomial) est défini pour tous entiers n and k par

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n - 1)(q^{n-1} - 1) \cdots (q^{n-k+1} - 1)}{(q^k - 1)(q^{k-1} - 1) \cdots (q - 1)}.$$

Les coefficients $\binom{n}{k}_q$ vérifient les relations de récurrence suivantes :

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q,$$

et

$$\binom{n}{k}_q = q^{n-k} \binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q.$$

Soit $P_{k,n}$ l'ensemble de toutes les partitions d'entiers de longueur au plus k telles que chaque part est de taille au plus n . Alors on a, voir [Sta12],

$$\binom{n}{k}_q = \sum_{\lambda \in P_{k,n-k}} q^{|\lambda|}.$$

Plus généralement, le p, q -analogue d'un nombre n est $[n]_{p,q} = \frac{p^n - q^n}{p - q} = p^{n-1} + p^{n-2}q + \dots + q^{n-1}$, la p, q -factorielle $[n]_{p,q}! = [n]_{p,q}[n-1]_{p,q} \dots [1]_{p,q}$ et le p, q -coefficient binomial, voir [Cor08],

$$\binom{n}{k}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!}.$$

Le q -analogue de coefficient multinomial est défini par

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s}_q := \frac{[n]!}{[k_1]![k_2]! \dots [k_s]!}.$$

$$\binom{n}{k_1, k_2, \dots, k_s}_q = \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} q^{inv(\omega)} = \sum_{\omega \in \mathfrak{R}} q^{maj(\omega)}.$$

1.3 Suites classiques

1.3.1 Les nombres de Fibonacci

Les nombres de Fibonacci sont la suite des nombres entiers, (oeis A000045)

$$0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$$

où chaque nombre est la somme des deux précédents. La relation de récurrence pour cette suite s'écrit comme,

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad \text{pour } n \geq 2, \quad (1.2)$$

avec $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Les nombres de Fibonacci correspondent aux sommes sur les diagonales principales du triangle de Pascal,

$$F_n = \sum_{k \geq 0} \binom{n-k}{k},$$

on peut calculer les nombres de Fibonacci à l'aide de la forme de Binet qui s'écrit comme suit :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right], \quad (1.3)$$

où $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à la relation (1.2).

La fonction génératrice des nombres de Fibonacci est

$$\sum_{n \geq 0} F_n x^n = \frac{x}{1 - x - x^2}.$$

1.3.2 Les nombres de Stirling de première et deuxième espèces

Les nombres de Stirling de première espèce, dénoté $s(n, k)$, sont définis comme le nombre de permutations d'un ensemble de n éléments en k cycles. Les nombres de Stirling de première espèce se définit aussi comme les coefficients du polynôme $x^{\underline{n}}$ dans la base $\{1, x, x^2, \dots, x^n\}$. C'est-à-dire

$$x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} s(n, k) x^k. \quad (1.4)$$

Les nombres de Stirling de première espèce satisfont la relation de récurrence

$$s(n, k) = s(n-1, k-1) + (n-1)s(n-1, k). \quad (1.5)$$

De la récurrence (1.5) on calcule les premières valeurs de la suite $s(n, k)$,

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	2	3	1						
4	6	11	6	1					
5	24	50	35	10	1				
6	120	274	225	85	15	1			
7	720	1764	1624	735	175	21	1		
8	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1	
9	40320	109584	118124	67284	224449	4536	546	36	1

TAB. 1.1 – Le triangle des nombres de Stirling de première espèce.

Les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle sont

$$\sum_{n \geq 0} s(n, k) t^n = \frac{t^k}{(1-t)(1-2t) \cdots (1-kt)},$$

et

$$\sum_{n \geq 0} s(n, k) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \ln^k(1+t).$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce, noté par $\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\}$, compte le nombre de partitions de $[n]$ en k blocs.

$$x(x-1) \cdots (x-n+1) = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} x^k. \quad (1.6)$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce satisfont la relation de récurrence

$$\left\{ \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\} = \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\} + k \left\{ \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\}. \quad (1.7)$$

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1								
2	1	1							
3	1	3	1						
4	1	7	6	1					
5	1	15	35	10	1				
6	1	31	90	65	15	1			
7	1	63	301	350	140	21	1		
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1	
9	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1

TAB. 1.2 – Le triangle des nombres de Stirling de deuxième espèce.

La forme explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce est

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k (-1)^k \binom{k}{j} (k-j)^n.$$

Les fonctions génératrices ordinaire et exponentielle sont données respectivement par

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} t^n = \frac{t^k}{(1-t)(1-2t) \cdots (1-kt)},$$

et

$$\sum_{n \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (e^k - 1)^k.$$

1.3.3 Les nombres r -Stirling

Les nombres r -Stirling de première espèce [Bro84], $s_r(n, k)$, sont définis comme le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ en k cycles disjoints, de sorte que les entiers $1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des cycles distincts. Les nombres $s_r(n, k)$ correspondent aux coefficients dans la base

$$(x+r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n s_r(n+r, k+r) x^k.$$

Les nombres r -Stirling de première espèce vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} s_r(n, k) &= 0, & n < r; \\ s_r(n, k) &= \delta_{k,r}, & n = r; \\ s_r(n, k) &= s_r(n-1, k-1) + (n-1)s_r(n-1, k), & n > r. \end{aligned}$$

Les nombres r -Stirling de seconde espèce, que nous noterons ici $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$, sont définis comme le nombre de partitions $[n]$ en k blocs non-vides, de telle sorte que les entiers $1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des blocs distincts.

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r x^k.$$

Ils vérifient la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \{k\}_r^n &= 0, & n < r; \\ \{k\}_r^n &= \delta_{k,r}, & n = r; \\ \{k\}_r^n &= \{k-1\}_r^{n-1} + k\{k\}_r^{n-1}, & n > r. \end{aligned}$$

1.3.4 Nombres harmonique et hyperharmonique

Pour tout $n \geq 0$, le n -ième nombre harmonique est défini définis par

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Les nombres harmonique peuvent être exprimés en fonction des nombres de Stirling de première espèce

$$H_n = \frac{1}{n!} s(n+1, 2).$$

Les premières valeurs des nombres harmonique sont

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_n	0	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{11}{6}$	$\frac{25}{12}$	$\frac{137}{60}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{363}{140}$	$\frac{761}{240}$	$\frac{7129}{2520}$	$\frac{3781}{2520}$

Posons, $H_n^{(1)} := H_n$, les nombres *hyperharmonique* [JC96] sont définis, pour tout $r \geq 1$, par

$$H_n^{(r)} = \sum_{k=1}^n H_k^{(r-1)}.$$

Les nombres hyperharmonique s'expriment en fonction des nombres harmonique comme suit

$$H_n^{(r)} = \binom{n+r-1}{r-1} (H_{n+r-1} - H_{r-1}).$$

1.4 Matrice d'Euler-Seidel

Soit (a_n) une suite, la matrice d'Euler-Seidel associée à la suite (a_n) est la suite double (a_n^k) ($n \geq 0, k \geq 0$) donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} a_n^0 &= a_n, \quad (n \geq 0), \\ a_n^k &= a_n^{k-1} + a_{n+1}^{k-1} \quad (n \geq 0, k \geq 1). \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_n^{k-1} & a_{n+1}^{k-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \downarrow & \swarrow & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_n^k & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Le passage de la suite initiale à la suite finale est donné par les identités de Dumont [Dum81] :

$$a_0^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_k^0, \quad (1.8)$$

$$a_n^0 = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^{n-k} a_0^k. \quad (1.9)$$

La relation entre la fonction génératrice de la suite initiale (a_n^0) et la fonction génératrice de la suite finale est donnée par la proposition suivante :

Proposition 1.4.1. (Euler) Soit $a(t) = \sum_{n \geq 0} a_n^0 t^n$ la fonction génératrice de la suite initiale (a_n^0) , alors la fonction génératrice de la suite finale est

$$\sum_{n \geq 0} a_n^n t^n = \frac{1}{1-t} a\left(\frac{1}{1-t}\right). \quad (1.10)$$

Dumont a proposé une application de cette matrice qui permet un calcul rapide de certains nombres et polynômes remarquables tels que les nombres de Bell, les nombres harmoniques, les polynômes exponentiels,...etc.

1.5 Matrice symétrique Euler-Seidel

Soient (a_n) et (a^n) deux suites réelles, la matrice symétrique d'Euler-Seidel est la suite double (a_n^k) ($n \geq 0, k \geq 0$) définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} a_n^0 &= a_n, \quad a_0^n = a^n \quad (n \geq 0), \\ a_n^k &= a_{n-1}^k + a_n^{k-1} \quad (n \geq 1, k \geq 1). \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & a_n^{k-1} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & a_{n-1}^k \rightarrow & a_n^k & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Dil et Mező [DM08] ont donné une formule qui permet d'exprimer l'élément a_n^k de la matrice en fonction des éléments de la première ligne et de la première colonne :

$$a_n^k = \sum_{i=1}^k \binom{n+k-i-1}{n-1} a_i^0 + \sum_{j=1}^n \binom{n+k-j-1}{k-1} a_j^0. \quad (1.11)$$

Première partie

Combinatoire des pavages linéaires

LA SUITE INCOMPLÈTE DE FIBONACCI

2.1 Introduction

La suite incomplète de Fibonacci a été introduite par Filipponi [Fil96]. Elle est définie par la forme explicite :

$$F_n(k) = \sum_{j=0}^k \binom{n-j-1}{j}, \quad (n = 1, 2, \dots; 0 \leq k \leq \lfloor (n-1)/2 \rfloor). \quad (2.1)$$

Mentionnons que les termes de la suite incomplète de Fibonacci correspondent aux sommes tronquées sur les diagonales (principales) ascendantes du triangle de Pascal.

Les relations entre les nombres de la suite incomplète de Fibonacci et les nombres de Fibonacci sont données par

$$F_{2k+1}(k) = F_{2k+1}, \quad F_{2k+2}(k) = F_{2k+2}, \quad F_n(k) = 0 \quad \text{et} \quad 0 \leq n \leq 2k+1.$$

La suite incomplète de Fibonacci vérifie la relation de récurrence suivante :

$$F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_{n-2}(k-1). \quad (2.2)$$

La relation (2.2) peut être généralisée comme suit, voir [Fil96],

$$F_{n+2h}(k+h) = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} F_{n+j}(k+j), \quad (0 \leq k \leq \lfloor n-h-1/2 \rfloor). \quad (2.3)$$

En utilisant la matrice d'Euler-Seidel et en posant $a_n^0 = F_{n+r}(s+k)$, Dil et Mezö [DM08] ont obtenu la forme dual de la relation précédente,

$$F_{n+r}(k+h) = \sum_{j=0}^h (-1)^{h-j} \binom{h}{j} F_{r+2j}(k+j), \quad (0 \leq k \leq \lfloor n-h-1/2 \rfloor). \quad (2.4)$$

n	$F_n(0)$	$F_n(1)$	$F_n(2)$	$F_n(3)$	$F_n(4)$	$F_n(5)$	$F_n(6)$
1	1						
2	1						
3	1	2					
4	1	3					
5	1	4	5				
6	1	5	8				
7	1	6	12	13			
8	1	7	17	21			
9	1	8	23	33	34		
10	1	9	30	50	55		
11	1	10	38	73	88	89	
12	1	11	47	103	138	144	
13	1	12	57	141	211	232	233
14	1	13	68	188	314	370	377

TAB. 2.1 – Les valeurs de la suite incomplète de Fibonacci ($1 \leq n \leq 14$).

Les premières valeurs de la suite incomplète de Fibonacci sont données dans la Table 2.1. On peut constater que les termes qui apparaissent sur le bord du triangle correspondent aux nombres de Fibonacci.

Pinter et Strivastava, [PS99], ont fourni une relation de récurrence non homogène dont le paramètre k est fixé.

$$F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_{n-2}(k) - \binom{n-k-3}{n-2k-3}, \text{ pour } n \geq 2k+3. \quad (2.5)$$

À l'aide de cette récurrence, les mêmes auteurs ont établi la série génératrice horizontale qui s'écrit en termes des nombres de Fibonacci.

$$\sum_{n \geq 0} F_n(k) t^n = t^{2k+1} \frac{(F_{2k+1} + F_{2k}t)(1-t)^{k+1} - t^2}{(1-t)^{k+1}(1-t-t^2)}. \quad (2.6)$$

Chu et Vicenti, [CV03], ont proposé une autre écriture de la série génératrice,

$$\sum_{n \geq 0} F_n(k) t^n = \frac{1}{1-t-t^2} - \frac{(t^2/(1-t))^{k+1}}{1-t-t^2}, \quad (2.7)$$

de plus, ils ont fourni la double série génératrice,

$$\sum_{k, n \geq 0} F_n(k) t^k z^n = \frac{1}{(1-t)(1-z-zt^2)}. \quad (2.8)$$

Durant ces dernières années, de nombreux auteurs ont étudié et généralisé la suite incomplète de Fibonacci de différentes manières. Nous citons à ce sujet : Djordjević, [Djo04], a défini et étudié les suites incomplètes de Fibonacci et de Lucas généralisées. Djordjević

et Srivastava, [DS05], ont défini les suites incomplètes de Jacobsthal et de Jacobsthal-Lucas. Tasci et Firengiz, [TF10, TFT12], ont défini les suites incomplètes p -Fibonacci et p -Lucas. Ramírez, [Ram13a], a introduit les suites incomplètes k -Fibonacci, k -Lucas et les polynômes incomplets $h(x)$ -Fibonacci et $h(x)$ -Lucas, ainsi que la suite incomplète de Fibonacci bi-périodique, [Ram13b].

A notre connaissance il n'existe aucune interprétation combinatoire de cette suite dans la littérature, d'où l'intérêt de ce chapitre. Dans la section 2.2, nous donnerons une interprétation combinatoire de la suite incomplète de Fibonacci. Cette interprétation nous a permis non seulement de retrouver les identités établies par Filipponi [Fil96], mais aussi d'établir de nouvelles identités. Ensuite, dans la section 2.4, nous étudions à l'aide des fonctions génératrices les sommes des termes d'indices pairs et impairs de la suite incomplète de Fibonacci. Dans la section 2.5 nous nous sommes intéressés à la suite hyper-Fibonacci introduite par Dil et Mező [DM08, MD09] et étudiée en outre par [BB16, BMS14, CZ10, LZ12]. Nous démontrons que la suite incomplète de Fibonacci et l'hyper-Fibonacci sont deux suites complémentaires (additives) par rapport à la suite de Fibonacci.

2.2 Interprétation combinatoire

Cette section a pour but de présenter une interprétation combinatoire de la suite incomplète de Fibonacci.

Définition 2.2.1. Soit $\mathcal{T}(n, k)$ l'ensemble de tous les pavages linéaires de longueur n formés par des monominos et dominos tels que le nombre de dominos dans chaque pavage est au plus égal à k , pour $0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$.

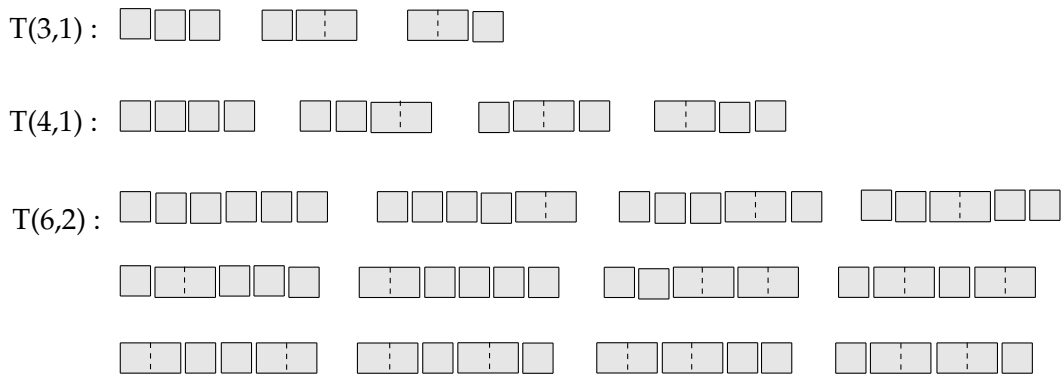


FIG. 2.1 – Enumération des ensembles $\mathcal{T}(3, 1)$, $\mathcal{T}(4, 1)$ et $\mathcal{T}(6, 2)$.

Lemme 2.2.2. [BQ03] Le nombre de pavages de longueur n contenant exactement k dominos et $n - 2k$ monominos est $\binom{n-k}{k}$.

Théorème 2.2.3. Pour tous entiers $n \geq 0$ et k ($0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor$), $F_{n+1}(k)$ compte le nombre de pavages de l'ensemble $\mathcal{T}(n, k)$,

$$F_{n+1}(k) = \#\mathcal{T}(n, k).$$

Preuve. Soit $t \in \mathcal{T}(n, k)$, un n -pavage contenant au plus k dominos. Alors t peut soit se terminer avec un monomino ou par un domino. Ainsi, le pavage t est obtenu à partir d'un pavage de l'ensemble $\mathcal{T}(n-1, k)$ auquel on a ajouté un monomino à son extrémité droite ou bien à partir d'un pavage de l'ensemble $\mathcal{T}(n-2, k-1)$ auquel on a ajouté un domino. D'où on a,

$$\mathcal{T}(n, k) = \mathcal{T}(n-1, k) * \{s\} \cup \mathcal{T}(n-2, k-1) * \{d\}.$$

Comme le cardinal de l'ensemble $\mathcal{T}(0, k)$ est égal à 0 car $\mathcal{T}(0, k)$ est un ensemble vide, on déduit que $F_{n+1}(k) = \#\mathcal{T}(n, k)$. \square

Théorème 2.2.4. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$|\mathcal{T}(n, k)| = \sum_{j=0}^k \binom{n-j}{j} \quad (0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor). \quad (2.9)$$

Preuve. Le résultat découle du Lemme 2.2.2. \square

2.3 Preuves bijective de quelques identités

En partant de la simple interprétation combinatoire présentée dans la section précédente, nous décrivons ici comment on retrouve les identités de Filipponi. Commençons par la relation de récurrence non-homogène (2.5),

$$F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_{n-2}(k) - \binom{n-k-3}{n-2k-3}.$$

Preuve. Reprenons la relation (2.2),

$$F_n(k) = F_{n-1}(k) + F_{n-2}(k-1).$$

Le terme $F_{n-2}(k-1)$ compte le nombre de pavages de l'ensemble $\mathcal{T}(n-3, k-1)$ et comme $\mathcal{T}(n-3, k-1)$ est un sous ensemble de $\mathcal{T}(n-3, k)$, on a alors :

$$\mathcal{T}(n-3, k-1) = \mathcal{T}(n-3, k) \setminus \{t \mid t \text{ un } (n-3)\text{-pavage contenant exactement } k \text{ dominos}\}.$$

Ainsi, on déduit

$$\begin{aligned} F_{n-2}(k-1) &= \#\mathcal{T}(n-3, k) - \binom{n-k-3}{k}, \\ &= F_{n-2, k} - \binom{n-k-3}{n-2k-3}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Enfin, en substituant (2.10) dans (2.2), on obtient l'identité. \square

Nous passons maintenant à l'identité (2.3).

$$F_{n+2h}(k+h) = \sum_{j=0}^h \binom{h}{j} F_{n+j}(k+j), \quad (0 \leq k \leq n-h/2).$$

Preuve. Soient $\mathcal{T}(n+h, k+1)$ l'ensemble de pavages de longueur $n+h$ contenant au plus $k+1$ dominos et $\mathcal{T}^1(n+h, k+1)$ le sous ensemble de $\mathcal{T}(n+h, k+1)$ contenant uniquement des monominos de la cellule $n+1$ jusqu'à la cellule $n+h$. On peut enlever cette partie du pavage, alors après cette opération les pavages obtenus constituent l'ensemble $\mathcal{T}(n, k+1)$. Par conséquent, on a

$$\#\mathcal{T}(n+h, k+1) - \#\mathcal{T}^1(n+h, k+1) = F_{n+h+1}(k+1) - F_{n+1}(k+1),$$

ce qui correspond au membre de droite de l'identité.

Pour obtenir le membre de gauche, on considère le sous ensemble $\mathcal{T}^2(n+h, k+1)$ de $\mathcal{T}(n+h, k+1)$ constitué des pavages contenant au moins un domino de la cellule $n+1$ jusqu'à la cellule $n+h$, notons que les sous ensembles $\mathcal{T}^1(n+h, k+1)$ et $\mathcal{T}^2(n+h, k+1)$ sont complémentaire par rapport à $\mathcal{T}(n+h, k+1)$.

$$\mathcal{T}(n+h, k+1) = \mathcal{T}^1(n+h, k+1) \cup \mathcal{T}^2(n+h, k+1).$$

Soient $t \in \mathcal{T}^2(n+h, k+1)$ et $(j, j+1)$ ($n+1 \leq j \leq n+h-1$), les coordonnées du dernier domino dans t , alors il y a $F_{n+j}(k)$ façons de construire la partie du pavage considéré et une seule façon pour compléter le reste. \square

2.4 Sommes des termes d'indices pairs et impaires de la suite incomplète de Fibonacci

Nous explorons dans cette section la somme des termes d'indices pairs et impairs de la suite incomplète de Fibonacci. Nous commençons par le lemme suivant qui sera utilisé pour établir le résultat principal de cette section.

Lemme 2.4.1. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$\sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{k} = \frac{1}{5} [(6n+1)F_{2n+1} - (2n+1)F_{2n+2}], \quad (2.13)$$

et

$$\sum_{k=0}^n k \binom{2n+1-k}{k} = \frac{2}{5} [(2n+1)F_{2n+2} - (n+1)F_{2n+1}]. \quad (2.14)$$

Preuve. A l'aide d'un simple calcul algébrique, on obtient la fonction génératrice ordinaire du membre de gauche de l'équation (2.13),

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{k} t^n = \frac{(t^2 - t + 1)t}{(t^2 - 3t + 1)^2}. \quad (2.15)$$

De plus, les fonctions génératrices des suites $\{F_{2n}\}_n$ et $\{F_{2n+1}\}_n$ sont données, respectivement, par

$$G(F_{2n}) = \sum_{n \geq 0} F_{2n} t^n = \frac{t}{t^2 - 3t + 1}'$$

et

$$G(F_{2n+1}) = \sum_{n \geq 0} F_{2n+1} t^n = \frac{1-t}{t^2-3t+1}.$$

Maintenant, étant donnée que $\sum_{n \geq 0} n F_{2n} t^n = t \frac{d}{dt} G(F_{2n})$ et $\sum_{n \geq 0} n F_{2n+1} t^n = t \frac{d}{dt} G(F_{2n+1})$, on a

$$\sum_{n \geq 0} n F_{2n} t^n = \frac{(1-t^2)t}{(t^2-3t+1)^2},$$

et

$$\sum_{n \geq 0} n F_{2n+1} t^n = \frac{(2-2t+t^2)t}{(t^2-3t+1)^2}.$$

On décompose la fraction (2.15) en éléments simples dans \mathbb{R} et par identification on obtient le membre de droite de l'identité (2.13).

La relation (2.14) est obtenue de la même manière en considérant la fonction génératrice ordinaire suivante :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k+1}{k} t^n = \frac{2(1-t)t}{(t^2-3t+1)^2}.$$

□

Théorème 2.4.2. Pour tout $n \geq 0$, on a

$$\sum_{k=0}^n F_{2n+1}(k) = \frac{2n+1}{5} F_{2n+2} - \frac{n-4}{5} F_{2n+1}, \quad (2.16)$$

et

$$\sum_{k=0}^n F_{2n+2}(k) = \frac{2n}{5} F_{2n+1} + \frac{2-n}{5} F_{2n}. \quad (2.17)$$

Preuve. En utilisant la définition (2.1) pour réécrire le membre de gauche de l'équation (2.16) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n F_{2n+1}(k) &= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \binom{2n-j}{j} \\ &= \sum_{k=0}^n (n-k+1) \binom{2n-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^n (n+1) \binom{2n-k}{k} - \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{k} \\ &= (n+1) F_{2n+1} - \sum_{k=0}^n k \binom{2n-k}{k}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'identité (2.13) donnée dans le Lemme 2.4.1, on obtient la relation (2.16). L'expression (2.17) est obtenue de la même manière en utilisant l'identité (2.14). □

Soit $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_p})$ l'ensemble des vallées dans P . On dit que P est croissant si [BDLFP97]

$$\text{alt}(s_{i_1}) \leq \text{alt}(s_{i_2}) \leq \dots \leq \text{alt}(s_{i_p}).$$

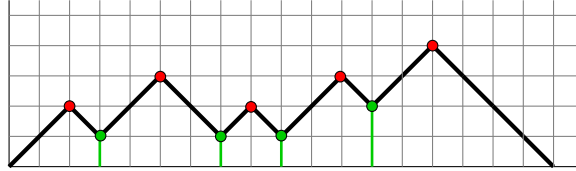


FIG. 2.3 – Un chemins de Dyck croissant.

$$1 \leq 1 \leq 1 \leq 2.$$

Notons par $q_s(n; k_1, \dots, k_s)$ le nombre de chemins de Dyck croissant de longueur $2n$ ayant s pics et la hauteur de la j -ième pyramide est k_j .

$$Q_s(z; t_1, \dots, t_s) := \sum_{n, k_1, \dots, k_s} q_s(n; k_1, \dots, k_s) z^n \prod_{j=1}^s t_j^{k_j}.$$

La fonction génératrice vérifie [CFJ15] les relations suivantes :

$$Q_s(z; t_1, \dots, t_s) = \frac{z t_s}{(1-z)(1-z t_s)} Q_{s-1}(z; t_1, \dots, t_{s-1}),$$

et

$$Q_s(z; t_1, \dots, t_s) = \frac{z^s}{(1-z)^{s-1}} \prod_{j=1}^s \frac{t_j}{1-z t_j}.$$

Théorème 2.4.3. Pour tout $n \geq 1$, on a

– La nombre total de pics

$$\sum_{s, k_1, \dots, k_s} s q_s(n; k_1, \dots, k_s) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2n-1}(k). \quad (2.18)$$

– La somme des hauteurs des pyramides

$$\sum_{s, k_1, \dots, k_s} (k_1 + \dots + k_s) q_s(n; k_1, \dots, k_s) = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2n}(k). \quad (2.19)$$

Remarque 2.4.4. Les suites $\{\sum_{k=0}^n F_{2n+1}(k)\}_n$ et $\{\sum_{k=0}^n F_{2n+2}(k)\}_n$ apparaissent dans l'encyclopédie des suites numériques OEIS sous les références A038731 et A030267, respectivement,

1, 3, 10, 32, 99, 299, 887, 2595, 7508, 21526, 61251, 173173, ...

0, 1, 4, 14, 46, 145, 444, 1331, 3926, 11434, 32960, 94211, 267384, ...

2.5 La relation avec la suite hyper-Fibonacci

Par analogie aux nombres hyperharmonique Dil et Mező ont introduit les nombres hyper-Fibonacci. L'objet de cette section est dans un premier temps proposé une interprétation combinatoire de cette suite. Ensuite, nous démontrerons par une approche bijective que les suites incomplète de Fibonacci et l'hyper-Fibonacci sont complémentaires par rapport à la suite de Fibonacci.

Définition 2.5.1. Pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$, la suite hyper-Fibonacci $(F_n^{(r)})_n$ est définie par :

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=0}^n F_k^{(r-1)}, \text{ avec } F_n^{(0)} = F_n \text{ et } F_0^{(r)} = 0, F_1^{(r)} = 1, \quad (2.20)$$

où F_n est le n -ième nombre de Fibonacci.

Les termes de la suite $\{F_n^{(r)}\}_n$ peuvent être obtenus à partir de la matrice symétrique d'Euler-Seidel en posant $a_n^0 = F_n, a_0^1 = 1$ et on construit le reste de la matrice par la relation de récurrence suivante :

$$F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_n^{(r-1)}. \quad (2.21)$$

c'est-à-dire

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 & \dots & & & & F_n^{(0)} & \dots & \\ 1 & 2 & 4 & 7 & & & & & & & \\ 1 & 3 & 7 & 14 & \dots & & & & & & \\ \vdots & & & & & & & & \vdots & & \\ & & & & & & & & F_n^{(r-1)} & \dots & \\ & & & & & & & & \downarrow & & \\ & & & \dots & F_{n-1}^{(r)} & \longrightarrow & F_n^{(r)} & & & & \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots & & & \ddots & \end{bmatrix}.$$

Les premières valeurs de $F_n^{(r)}$ sont données dans la table ci-dessous.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
$F_n^{(1)}$	0	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	A000071
$F_n^{(2)}$	0	1	3	7	14	26	46	79	133	221	364	A001924
$F_n^{(3)}$	0	1	4	11	25	51	97	179	309	530	894	A014162

TAB. 2.2 – Les valeurs de la suite hyper-Fibonacci pour $r = 1, 2, 3$ et $1 \leq n \leq 10$.

En particulier pour $r = 1$ et $r = 2$, on retrouve les identités classiques, [LZ12].

$$F_n^{(1)} = \sum_{k=0}^{n-2} kF_{n-k-3},$$

et

$$F_n^{(2)} = \sum_{k=0}^n (n-k)F_k = F_{n+4} - n - 3.$$

La fonction génératrice des nombres hyper-Fibonacci est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} F_n^{(r)} x^n = \frac{x}{(1-x-x^2)(1-x)^r}. \quad (2.22)$$

Comme application de la suite hyper-Fibonacci, Dil and Mezö ont établi l'identité suivante qui permet d'exprimer la suite incomplète de Fibonacci en fonction de la suite hyper-Fibonacci.

$$F_n(k) = \begin{cases} 0, & \text{si } 0 \leq n \leq 2k+1; \\ F_{2k+1}, & \text{si } n = 2k+1; \\ A_{n-2k,k} + B_{n-2k,k} - F_{n-2k-2}^{(k+1)}, & \text{si } n > 2k+1. \end{cases}$$

où $A_{n,k} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n+k-i-2}{n-1} F_{2i+1}$ et $B_{n,k} = \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n+k-i-2}{k-1} F_i$.

2.5.1 Interprétation combinatoire

Définition 2.5.2. Soit $H(n, r)$ l'ensemble de tous les pavages de longueur $n + 2r$ formés par des monominos et dominos tel que le nombre de dominos dans chaque pavage est au moins égal à r .

Théorème 2.5.3. Pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$, le terme $F_{n+1}^{(r)}$ compte le nombre de pavages de l'ensemble $H(n, r)$,

$$F_{n+1}^{(r)} = \#H(n, r). \quad (2.23)$$

Preuve. Nous commençons par vérifier les conditions initiales. Pour $n = 0$, il y a une façon de construire un $2r$ -pavage avec au moins r dominos, et pour $r = 0$, il existe F_n façons de construire un n -pavage avec au moins 0 dominos (il n'y a aucune restriction sur le nombre de dominos).

Maintenant, si $n \geq 2$, chaque pavage de l'ensemble $H(n, r)$ peut être obtenu de deux façons différentes : on peut soit ajouter un domino à un pavage de l'ensemble $H(n, r - 1)$, soit un monomino à un pavage de l'ensemble $H(n - 1, r)$. En considérant les deux situations possibles on obtient

$$\#H(n, r) = \#H(n, r - 1) + \#H(n - 1, r).$$

Par identification avec la relation (2.21), on obtient le résultat souhaité. \square

De la relation (2.20), on déduit une relation de récurrence non-homogène [BB14a] :

Corollaire 2.5.4. Pour tout $n \geq 2$, on a

$$F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_{n-2}^{(r)} + \binom{n+r-2}{r-1}. \quad (2.24)$$

A l'aide la relation de récurrence non-homogène (2.24) et le lemme suivant, nous allons retrouver la fonction génératrice ordinaire de la suite $(F_n^{(r)})_n$.

Lemme 2.5.5. [PS99] Soit $(s_n)_n$ une suite de nombres satisfaisant la relation de récurrence non homogène de seconde degré

$$s_n = as_{n-1} + bs_{n-2} + r_n, \quad (2.25)$$

avec $a, b \in \mathbb{C}$ et $(r_n)_n$ est une suite donnée. Alors la fonction génératrice de $(s_n)_n$ est donnée par

$$\sum_{n \geq 0} s_n x^n = \frac{G(x) + s_0 - r_0 + (s_1 - as_0 - r_1)}{1 - ax - bx^2},$$

avec $G(x)$ est la fonction génératrice de la suite $(r_n)_n$.

En effet, posons

$$s_0 = F_0^{(r)}, \quad s_1 = F_1^{(r)},$$

$$s_n = F_n^{(r)} = F_{n-1}^{(r)} + F_{n-2}^{(r)} + \binom{n+r-2}{r-1}.$$

et

$$r_0 = 0, \quad r_1 = 1 \quad \text{et} \quad r_n = \binom{n+r-2}{r-1}.$$

La fonction génératrice de $(r_n)_n$ est $G(x) = \frac{x}{(1-x)^r}$. Par l'application du Lemme 2.5.5 on obtient le résultat donné par (2.22).

La formule explicite des nombres hyper-Fibonacci s'écrit comme suit :

Théorème 2.5.6. Pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$, on a

$$F_n^{(r)} = \sum_{k=r}^{\lfloor n/2 \rfloor + r} \binom{n+2r-k}{k} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+r-k}{k+r}. \quad (2.26)$$

Preuve. Le résultat est obtenu de l'interprétation combinatoire et du Lemme 2.2.2. \square

La relation (2.26) est une somme tronquée sur les diagonales ascendantes du Triangle de Pascal.

Du Théorème précédent et de la relation (2.1), on déduit la relation entre la suite incomplète de Fibonacci et l'hyper-Fibonacci.

Corollaire 2.5.7. Pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$, on a

$$F_{n+2r} = F_n^{(r)} + F_{n+2r}(r-1). \quad (2.27)$$

Cette relation signifie que tout terme de la suite de Fibonacci peut être exprimer comme une somme des termes de la suite incomplète de Fibonacci et l'hyper-Fibonacci.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TAB. 2.3 – Illustration de l’identité (2.25) sur le triangle de Pascal, pour $r = 3$.

2.5.2 Identités combinatoires

Dans la proposition suivante on généralise la relation de récurrence (2.21).

Proposition 2.5.8. *Pour tous $n \geq 0$ et $r \geq 1$, on a*

$$F_{n+r}^{(r)} = \sum_{k=0}^r \binom{r}{k} F_{n+k}^{(r-k)}. \tag{2.28}$$

Preuve. Le nombre de façons de construire un pavage de longueur $n + 2r - 2$ avec au moins $r - 1$ dominos est $F_n^{(r-1)}$. Maintenant, pour obtenir un $(n + 2r)$ -pavage avec au moins r dominos à partir d’un $(n + 2r - 2)$ -pavage avec au moins $r - 1$ dominos, il suffit d’ajouter un domino. Soit k ($r - 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor + r - 1$) le nombre de dominos dans un $(n + 2r - 2)$ -pavage, alors il contient $n + 2r - 2k - 2$ monominos, il y a donc $n + 2r - k - 2$ tuiles (monominos et dominos) dans le $(n + 2r - 2)$ -pavage. D’où le nombre de façons de placer un domino dans un $(n + 2r - 2)$ -pavage avec k ($r - 1 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor + r - 1$) dominos est $n + 2r - k - 1$. \square

Dans la matrice symétrique d’Euler-Seidel, la relation (2.28) signifie que tout terme de

Soit $A_n = C_n(a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ une $n \times n$ -matrice circulante de la forme,

$$A_n = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-2} & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-3} & a_{n-2} \\ a_{n-2} & a_{n-1} & a_0 & \cdots & a_{n-4} & a_{n-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_{n-1} & a_0 \end{bmatrix}.$$

Il est bien connue que la norme de Frobenius (ou Euclidienne) de la matrice $A = (a_{i,j})_{1 \leq i, j \leq m, n}$ est donnée par

$$\|A\|_F = \left[\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n a_{ij}^2 \right]^{1/2}, \quad (2.31)$$

Théorème 2.6.1. *Pour tout $n \geq 2k + 3$, soit $A = C_n(F_0(k), F_1(k), \dots, F_{n-1}(k))$ la matrice circulante d'ordre n . Alors on a*

$$\|A\|_F = \sqrt{n \left(F_{n-1}(k)F_n(k) + \sum_{j=0}^{n-2k-3} \binom{k+j}{j} F_{j+2k+2}(k) \right)}.$$

Preuve. La matrice A a la forme suivante

$$A = \begin{bmatrix} F_0(k) & F_1(k) & \cdots & F_{n-2}(k) & F_{n-1}(k) \\ F_{n-1}(k) & F_0(k) & \cdots & F_{n-3}(k) & F_{n-2}(k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_2(k) & F_3(k) & \cdots & F_0(k) & F_1(k) \\ F_1(k) & F_2(k) & \cdots & F_{n-1}(k) & F_0(k) \end{bmatrix}$$

alors

$$\|A\|_F^2 = n \sum_{j=0}^{n-1} (F_j(k))^2,$$

et de la relation (2.5), on obtient

$$\begin{aligned} \|A\|_F^2 &= n \sum_{j=0}^{n-1} F_j(k) \left(F_{j+1}(k) - F_{j-1}(k) + \binom{j-k-2}{k} \right), \\ &= n \left(\sum_{j=0}^{n-1} F_j(k) (F_{j+1}(k) - F_{j-1}(k)) + \sum_{j=2k+2}^{n-1} \binom{j-k-2}{k} F_j(k) \right). \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{n-1} (F_j(k)F_{j+1}(k) - F_j(k)F_{j-1}(k)) &= F_0(k)F_1(k) + F_1(k)F_2(k) - F_1(k)F_0(k) + \\ &\quad \cdots + F_{n-1}(k)F_n(k) - F_{n-1}(k)F_{n-2}(k) \\ &= F_{n-1}(k)F_n(k), \end{aligned}$$

enfin, nous posons le changement de variable $j \leftarrow j - 2k - 2$ dans $\sum_{j=2k+2}^{n-1} \binom{j-k-2}{k} F_j(k)$, on obtient

$$\|A\|_F^2 = n \left(F_{n-1}(k)F_n(k) + \sum_{j=0}^{n-2k-3} \binom{k+j}{j} F_{2k+j+2}(k) \right).$$

□

Dans [BS14], les auteurs ont proposé les bornes suivantes pour la norme de Frobenius de la matrice circulante associée à la suite hyper-Fibonacci,

$$F_{n-1}^{r+1} \leq \|B\|_F \leq \sqrt{n} F_{n-1}^{r+1}.$$

Dans le théorème suivant, nous allons donner la valeur exacte de cette norme.

Théorème 2.6.2. Soit $B = C_n(F_0^{(r)}, F_1^{(r)}, \dots, F_{n-1}^{(r)})$ la matrice circulante d'ordre $n \times n$ associée à la suite hyper-Fibonacci, alors

$$\|B\|_F = \sqrt{n \left(F_{n-1}^{(r)} F_n^{(r)} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+r-1}{k} F_k^{(r)} \right)}, \quad (2.32)$$

Preuve. La matrice B a la forme suivante

$$B = \begin{bmatrix} F_0^{(r)} & F_1^{(r)} & \cdots & F_{n-2}^{(r)} & F_{n-1}^{(r)} \\ F_{n-1}^{(r)} & F_0^{(r)} & \cdots & F_{n-3}^{(r)} & F_{n-2}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ F_2^{(r)} & F_3^{(r)} & \cdots & F_0^{(r)} & F_1^{(r)} \\ F_1^{(r)} & F_2^{(r)} & \cdots & F_{n-1}^{(r)} & F_0^{(r)} \end{bmatrix},$$

ainsi

$$\|B\|_F^2 = n \sum_{k=0}^{n-1} \left(F_k^{(r)} \right)^2,$$

de la relation de récurrence non homogène (2.24), on obtient

$$\begin{aligned} \|B\|_F^2 &= n \sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(r)} \left(F_{k+1}^{(r)} - F_{k-1}^{(r)} - \binom{k+r-1}{k} \right) \\ &= n \left(\sum_{k=0}^{n-1} F_k^{(r)} \left(F_{k+1}^{(r)} - F_{k-1}^{(r)} \right) - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+r-1}{k} F_k^{(r)} \right) \\ &= n \left(F_{n-1}^{(r)} F_n^{(r)} - \sum_{k=0}^{n-1} \binom{k+r-1}{k} F_k^{(r)} \right). \end{aligned}$$

CODAGE DES POLYOMINOS VERTICALEMENT CONVEXES DIRIGÉS PAR LES PAVAGES LINÉAIRES

3.1 Introduction

Les polyominos sont des objets discrets étudiés depuis longtemps pour leurs propriétés, de plus ces structures sont utilisées par les combinatoristes pour interpréter et résoudre différents problèmes d'énumérations tels que la partition d'un entier, le q -analogue des suites et des polynômes classiques comme les coefficients q -binomiaux, les polynômes q -Stirling,...etc. En physique statistique, les polyominos sont utilisés sous une forme équivalente appelée "*animaux*" pour modéliser certains phénomènes telle que la *transition de phase* dans le modèle de percolation, voir Viennot [Vie84].

L'énumération des polyominos reste jusqu'à présent un problème entièrement ouvert et le nombre de polyominos d'aire n n'est connu que pour $n \leq 56$, [Jen03]. Cependant, certaines classes qui obéissent aux contraintes de *convexité* et de *direction privilégiée* ont pu être énumérées à l'aide des méthodes bijectives.

Nous nous sommes intéressés à l'énumération des polyominos *verticalement convexes dirigés*. De nombreux travaux ont été consacrés à ce sujet, citons par exemple : Delest, Dulucq, [DD93]; et Feretić, [Fer93], ont établi une bijection avec les mots d'un langage algébrique et les permutations cycliques, respectivement. Ces bijections ont permis d'énumérer cette classe de polyominos suivant les deux paramètres aire et périmètre. Barcucci, Penzani et Sprugnoli, [BPS93a], ont établi des relations de récurrence et des fonctions génératrices en termes de la hauteur.

Nous allons décrire, dans ce chapitre, deux algorithmes permettant d'établir une bijection entre les polyominos verticalement convexes dirigés et les pavages linéaires. Il s'avère que ce codage reste valable pour d'autres classes de polyominos convexes et dirigés telles que les polyominos parallélogrammes, les diagrammes de Ferrer et les polyominos tas. Dans la section 2, nous rappelons les définitions de bases concernant cette classe de polyominos. Dans la section trois, nous présentons notre principal résultat; la bijection entre les polyominos verticalement convexes dirigés et les pavages linéaires. Cette bijection nous a fourni un nouvel éclairage sur ces structures et un moyen efficace

pour énumérer cette classe de polyominos. Finalement, nous étudions des relations de récurrence, établis dans les travaux [BPS93a, BPS93b, BPS95], relatives à l'énumération des polyominos verticalement convexes dirigés suivant les paramètres aire, nombre de colonnes et hauteur.

3.2 Polyominos dirigés verticalement convexes

Dans cette section nous allons présenter quelques définitions et propriétés liées aux polyominos dirigés verticalement convexes.

Définition 3.2.1. *Un polyomino P est dit verticalement (resp. horizontalement) convexe si toutes ses colonnes (resp. lignes) sont connexes. Un polyomino est tout simplement convexe si toutes ses colonnes et ses lignes sont connexes.*

Le polyomino à gauche de la figure 3.1 est verticalement convexe mais il n'est pas horizontalement convexe car les cellules des lignes 2, 3, 5 et 6 ne sont pas connexes.

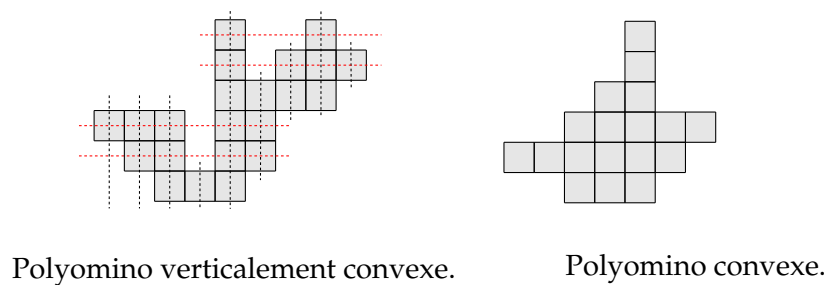


FIG. 3.1 – Polyomino sous contrainte de convexité.

Définition 3.2.2. *Un polyomino dirigé selon une direction privilégiée est un polyomino qui peut être obtenu à partir d'une cellule appelée source en ajoutant des cellules dans deux directions (par exemple Nord et Est, c'est-à-dire au-dessus et à droite des cellules déjà présentes). De cette façon le polyomino se développe dans une direction (par exemple Nord-Est).*

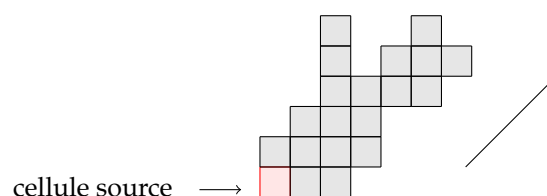


FIG. 3.2 – Polyomino verticalement convexe dirigé Nord-Est.

En combinant les deux contraintes de convexité et de direction on obtient une large famille de polyominos telle que : les diagrammes de Ferrer, polyominos tas et polyominos parallélogrammes.

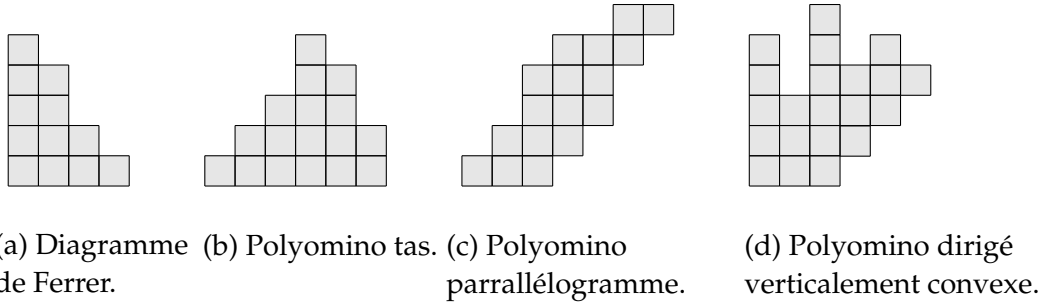


FIG. 3.3 – Classes de polyominos sous contraintes de convexité et de direction.

Définition 3.2.3. *Un polyomino verticalement convexe dirigé est un polyomino qui peut être construit en partant d'une seule cellule et en ajoutant de nouvelles cellules sur la droite ou au-dessus d'une cellule existante et chaque colonne est formée par des cellules connexes.*

Le nombre de polyomino verticalement convexe dirigé d'aire n et de k ($1 \leq k \leq n$) colonnes, noté $V_{n,k}$, est

$$V_{n,k} = \binom{n+k-2}{n-k}, \quad (3.1)$$

avec $V_{0,0} = 1$ et $V_{n,0} = 0$ pour $n \geq 1$. En sommant sur les valeurs de k on déduit que le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés, V_n , est égal au nombre de Fibonacci F_{2n-1} , voir Delest et Dulucq [DD93].

La suite des nombres $\{V_n\}$ satisfait la relation de récurrence suivante [BPS93a] :

$$V_n = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} kV_{n-k}, \quad (3.2)$$

avec la valeur initiale $V_0 = 1$. La fonction génératrice de la suite $\{V_n\}$ est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} V_n x^n = \frac{1-2x}{1-3x+x^2}. \quad (3.3)$$

Définition 3.2.4. *Soit P un polyomino dirigé, la hauteur de P est égale au nombre de droites d'équations $y = -x + k$ ($k \in \mathbb{N}$) qui passent par les centres des cellules du polyomino c'est-à-dire le nombre de droites perpendiculaires à la direction (Nord-Est).*

Dans certains travaux la hauteur d'un polyomino est définie comme le nombre de lignes. Pour éviter la confusion entre ces deux définitions, nous utilisons le terme "niveau" pour désigner le nombre de lignes d'un polyomino.

Le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés d'aire n et de hauteur k , noté $H_{n,k}$, satisfait la relation de récurrence suivante, [BPS93b, BPS95], pour $n > 1$ et $k > 1$:

$$H_{n,k} = H_{n-1,k-1} + \sum_{j=1}^{k-1} H_{n-k,j} + \sum_{i=1}^{k-1} H_{n-j,k-1}, \text{ rechautpoly} \quad (3.4)$$

avec $H_{1,1} = 1$ et $H_{n,k} = 0$ pour $n \leq 0, k \leq 0$.

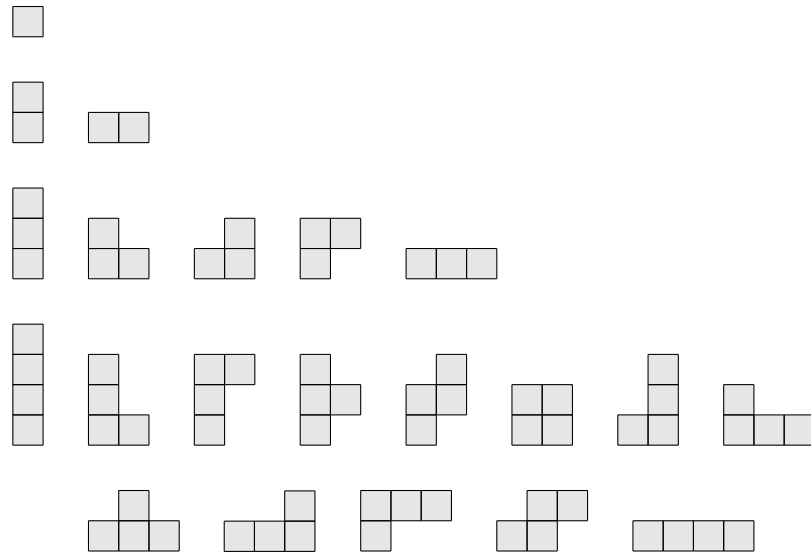


FIG. 3.4 – Polyominoes verticalement convexes dirigés d’aires 1, 2, 3 et 4.

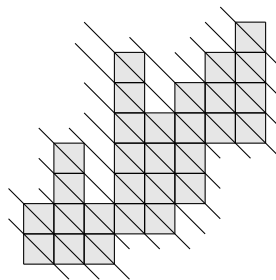


FIG. 3.5 – Polyomino verticalement convexe dirigé d’aire 29 et de hauteur 15.

3.3 La bijection

Nous allons présenter dans cette section le résultat principal de ce chapitre. Nous proposons une bijection entre les polyominoes verticalement convexes dirigés et les pavages linéaires.

3.3.1 Pavage linéaire vers polyomino

Définition 3.3.1. Soit $T_{2n-2,k}$ un pavage de longueur $2n - 2$ contenant exactement k dominos. Pour tout i ($1 \leq i \leq n - 1$), les cellules de coordonnées $(2i - 1, 2i)$ dans le pavage $T_{2n-2,k}$ ont l’une des configurations suivantes :

- ss : deux monominos,
- sd^l : un monomino et la partie gauche d’un domino,
- $d^r s$: la partie droite d’un domino et un monomino,
- $d^l d^r$: un domino,
- $d^r d^l$: la partie droite d’un domino et la partie gauche d’un autre domino.

Nous désignons par Λ l'ensemble des configurations du pavage $T_{2n-2,k}$.

Par exemple, pour le pavage de la figure ci-après on a : $\Lambda = \{d^l d^r, sd^l, d^r d^l, d^r s, d^l d^r, ss\}$.

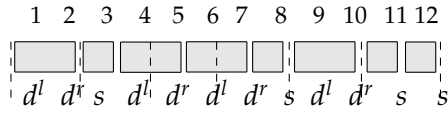


FIG. 3.6 – L'ensemble des configurations associées à un pavage de longueur 12.

L'algorithme suivant nous permet de construire un polyomino verticalement convexe dirigé d'aire n à partir des configurations associées à un pavage de longueur $2n - 2$.

Algorithme 1 Pavage vers polyomino verticalement convexe dirigé

- 1: **Données :** un pavage de longueur $2n - 2$ contenant $2k - 2$ monominos
 - 2: **Résultats :** un polyomino verticalement convexe dirigé d'aire n ayant k colonnes
 - 3: Déterminer l'ensemble des configurations Λ associées au pavage ;
 - 4: Ajouter la cellule source ;
 - 5: $k \leftarrow 1$;
 - 6: **Pour** j de 1 à $n - 1$ **faire**
 - 7: **Selon que**
 - 8: $\Lambda(j) = d^l d^r$:
 - 9: **Si** $k = 1$ **alors**
 - 10: ajouter une cellule à la k -ème colonne
 - 11: **Sinon**
 - 12: ajouter une cellule à la $(k - 1)$ -ème colonne ;
 - 13: **Fin si ;**
 - 14: $\Lambda(j) = ss$ ou $\Lambda(j) = sd^l$:
 - 15: ajouter une cellule à droite de la dernière cellule de la k -ème colonne ;
 - 16: $k \leftarrow k + 1$;
 - 17: $\Lambda(j) = d^r s$ ou $\Lambda(j) = d^r d^l$:
 - 18: ajouter une cellule à la k -ème colonne ;
 - 19: **Fin Selon que**
 - 20: **FinPour**
 - 21: **Fin.**
-

Exemple 3.3.2. Soit $\Lambda = \{d^l d^r, sd^l, d^r d^l, d^r s, d^l d^r, ss\}$ l'ensemble des configurations de la Figure 3.6, on construit séquentiellement le polyomino associé à Λ comme suit :

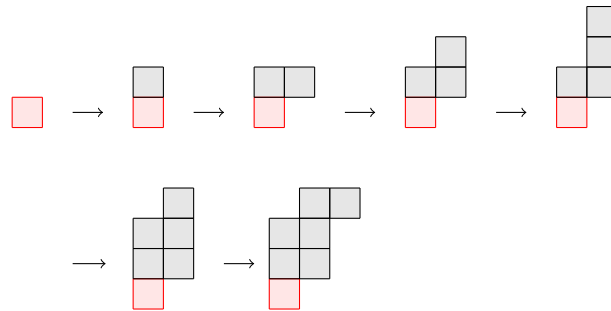


FIG. 3.7 – Exemple de conversion d’un pavage de longueur 12 en polyomino d’aire 7.

Proposition 3.3.3. *L’Algorithme 1 transforme un pavage linéaire de longueur $2n - 2$ ayant $2k - 2$ monominos en polyomino verticalement convexe dirigé d’aire n et de k colonnes. La complexité de l’Algorithme est $O(n)$.*

Preuve. En effet, à partir de la cellule source on ajoute des cellules dans deux directions Nord et Est (d’après les instructions 10, 12 et 15) ainsi le polyomino est dirigé dans la direction Nord-Est. Maintenant, étant donné que les cellules de chaque colonne sont connexes (instructions 10, 12) alors le polyomino est verticalement convexe. D’où, le polyomino généré à partir du pavage est verticalement convexe dirigé. La complexité de l’Algorithme est donnée par l’étape 6.

3.3.2 Polyomino vers pavage linéaire

Nous allons à présent donner un algorithme qui permet de construire un pavage linéaire de longueur $2n - 2$ à partir d’un polyomino P d’aire n . Soit P un polyomino verticalement convexe dirigé, notons par k la largeur de P (nombre de colonnes) et par a_j à b_j ($1 \leq j \leq k$) le niveau inférieur et supérieur de la j -ème colonne, respectivement.

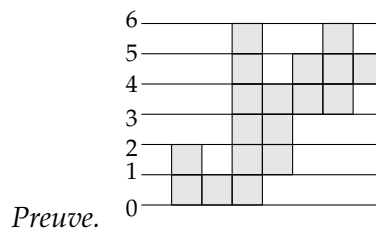


FIG. 3.8 – Un polyomino verticalement convexe dirigé d’aire 18 et de largeur 7.

j	1	2	3	4	5	6	7
a_j	0	0	0	1	3	3	4
b_j	2	1	6	4	5	6	5

TAB. 3.1 – Les valeurs de $a_j, b_j(1 \leq j \leq 7)$ du polyomino de la Figure 3.8.

Soient c_0 et c_k la longueur de la frontière gauche de la première colonne et la frontière droite de la dernière colonne, respectivement. Le périmètre du polyomino est obtenu en termes de a_j , b_j et c_j ($0 \leq j \leq k$), comme suit

$$R_k = 2k + \sum_{j=0}^k |(b_{j+1} - a_{j+1}) - (b_j - a_j)|.$$

Pour le polyomino de la Figure 3.8, on a : $c_0 = 2$ et $c_7 = 1$, d'où le périmètre est égal à $R_7 = 32$.

Algorithme 2 Polyomino verticalement convexe dirigé vers pavage

- 1: **Données** : un polyomino verticalement convexe dirigé d'aire n ayant k colonnes
 - 2: **Résultats** : un pavage de longueur $2n - 2$ contenant $2k - 2$ monominos
 - 3: **Pour** j de k à 2 **faire**
 - 4: **Si** $b_{j-1} > 1 + a_j$ **alors**
 - 5: ajouter $(b_{j-1} - a_j - 1)$ dominos ;
 - 6: supprimer les cellules de b_{j-1} à $a_j + 1$ de la $(j - 1)$ -ème colonne ;
 - 7: **Fin Si** ;
 - 8: ajouter un monomino, $(b_j - a_j - 1)$ dominos et monomino ;
 - 9: supprimer la j -ième colonne
 - 10: **FinPour** ;
 - 11: ajouter $(b_1 - a_1 - 1)$ dominos ;
 - 12: **Fin**.
-

Exemple 3.3.4. Soit le polyomino verticalement convexe dirigé d'aire 10 et de largeur 5 suivant :

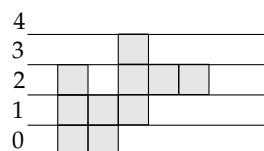


FIG. 3.9 – Un polyomino d'aire 10 et de largeur 5.

j	1	2	3	4	5
a_j	0	0	1	2	2
b_j	3	2	4	3	3

TAB. 3.2 – Les valeurs de a_j , b_j ($1 \leq j \leq 5$) du polyomino de la Figure 3.9.

L'application de l'Algorithme 2 sur le polyomino de la Figure 3.9 nous donne le résultat suivant :

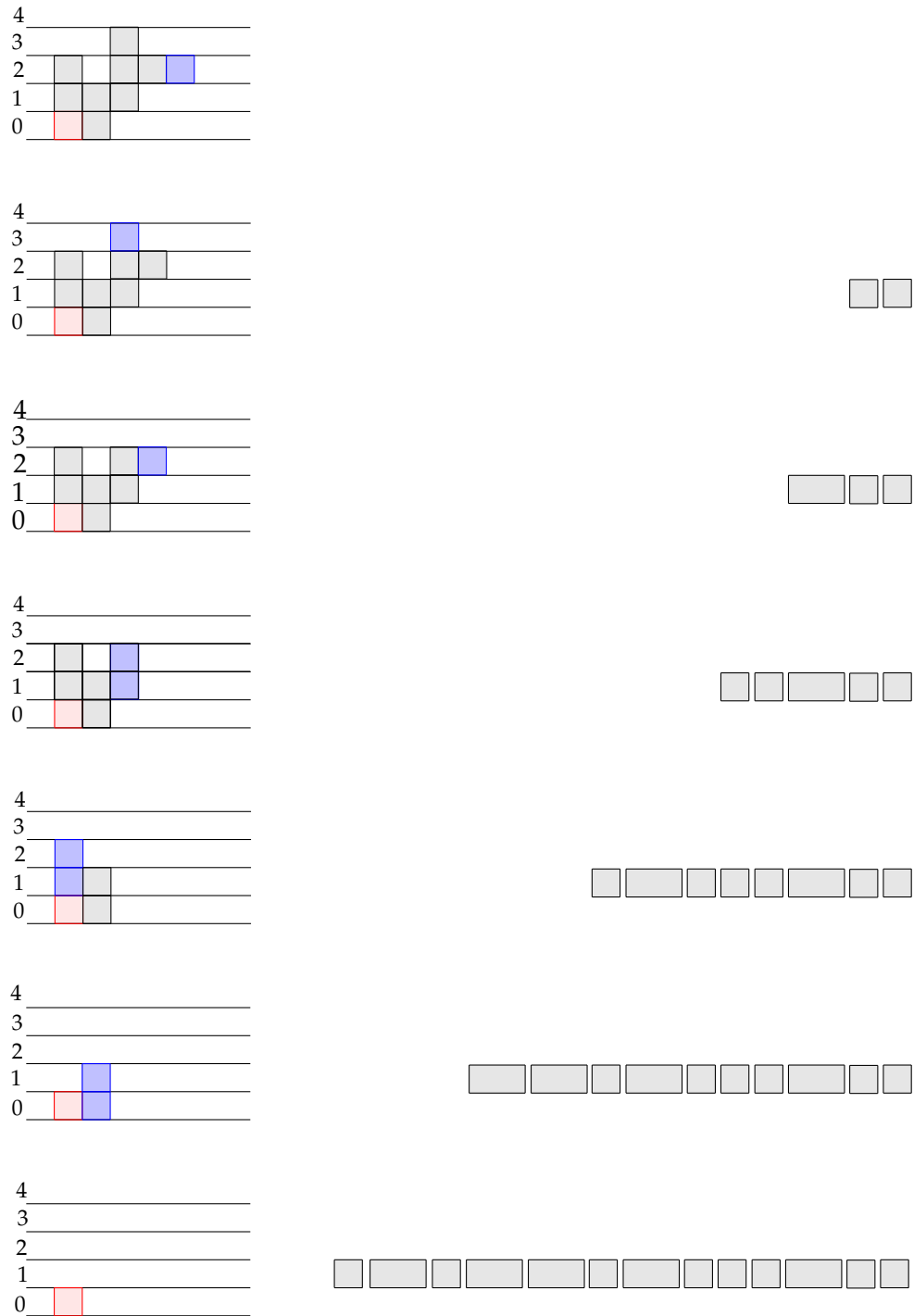


FIG. 3.10 – Transformation d'un polyomino d'aire 10 contenant 4 colonnes en pavage linéaire de longueur 16.

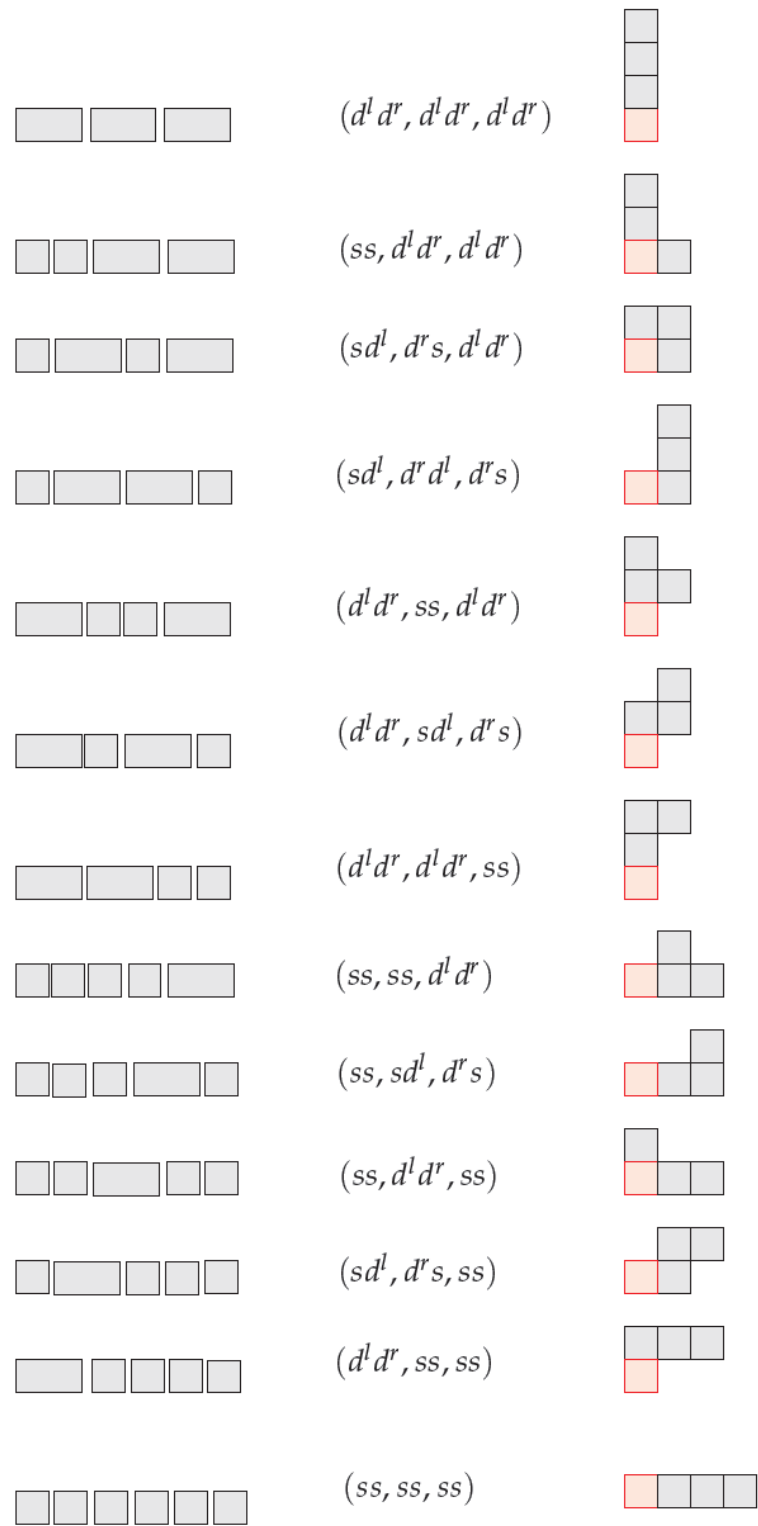


FIG. 3.11 – La bijection des pavages de longueur 6 et les polyominos d'aire 4.

3.4 L'énumération suivant l'aire et le nombre de colonnes

Nous donnons ici quelques propriétés obtenues directement de la bijection présentée dans la section précédente.

Théorème 3.4.1. *Pour tout $n \geq 1$, soient $T(2n - 2)$ un pavage de longueur $2n - 2$ contenant exactement $2k - 2$ ($1 \leq k \leq n$) monominos et P le polyomino verticalement convexe dirigé d'aire n qui lui est associé. Alors, le nombre de colonnes de P est égal à k .*

Preuve. Ce résultat est déduit de l'Algorithme 1. En effet, il suffit de remarquer que seulement si on a les configurations "ss" ou " $sd^l, \dots, d^r s$ " qu'on ajoute une colonne au polyomino, ainsi le nombre de colonne dans le polyomino P est $((2k - 2)/2) + 1$. \square

Corollaire 3.4.2. *Pour tout $n \geq 1$, le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés d'aire n et ayant exactement k colonnes est $\binom{n+k-2}{n-k}$.*

Preuve. Etant donnée que le pavage $T(2n - 2)$ contient $2k - 2$ monominos, alors le nombre de dominos dans $T(2n - 2)$ est égal à $n - k$. Ainsi, en utilisant le Lemme 2.2.2 on déduit le résultat. \square

Théorème 3.4.3. *Pour tout $n \geq 2$, on a*

1. *le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés d'aire n satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$V_n = V_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} V_{n-j}. \quad (3.5)$$

avec les valeurs initiales $V_0 = V_1 = 1$,

2. *le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés d'aire n ayant exactement k colonnes satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$V_{n,k} = V_{n-1,k} + \sum_{j=1}^{n-1} V_{n-j,k-1}. \quad (3.6)$$

Preuve. Nous commençons par la relation de récurrence (3.5).

1. Soit $\Lambda = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des configurations associées au pavage $T(2n - 2)$, alors x_{n-1} peut prendre l'une des configurations suivantes :
 - Si $x_{n-1} = "ss"$ ou " $d^l d^r$ ". Dans ce cas, il reste à construire un polyomino d'aire $n - 1$ à partir de sous ensemble $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-2}\}$ et il y a V_{n-1} manières possibles.
 - Si $x_{n-1} = "d^r s"$, alors cette configuration est forcément précédées par j ($0 \leq j \leq n - 3$) configurations de la forme " $d^r d^l$ ", puis par la configuration " sd^l ", c'est-à-dire,

$$\Lambda^* = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-j-3}, sd^l, \underbrace{d^r d^l, \dots, d^r d^l}_j, d^r s\},$$

ainsi, il reste à construire un polyomino d'aire $n - j - 2$ avec le sous ensemble des configurations $\{x_1, x_2, \dots, x_{n-j-3}\}$, il y a V_{n-j-2} façons possibles de le faire.

En considérant toutes les possibilités on obtient,

$$\begin{aligned} V_n &= 2V_{n-1} + \sum_{j=0}^{n-3} V_{n-j-2} \\ &= V_{n-1} + \sum_{j=1}^{n-1} V_{n-j}. \end{aligned}$$

2. Pour la relation de récurrence (3.6), on procède de la même manière. De plus, si $x_{n-1} = "ss"$ ou $"d^r s"$, alors on ajoute une nouvelle colonne au polyomino, sinon ($x_{n-1} = "d^l d^r"$) le nombre de colonnes ne change pas.

La Figure 3.12 illustre la décomposition utilisée dans la relation de récurrence (3.5). □

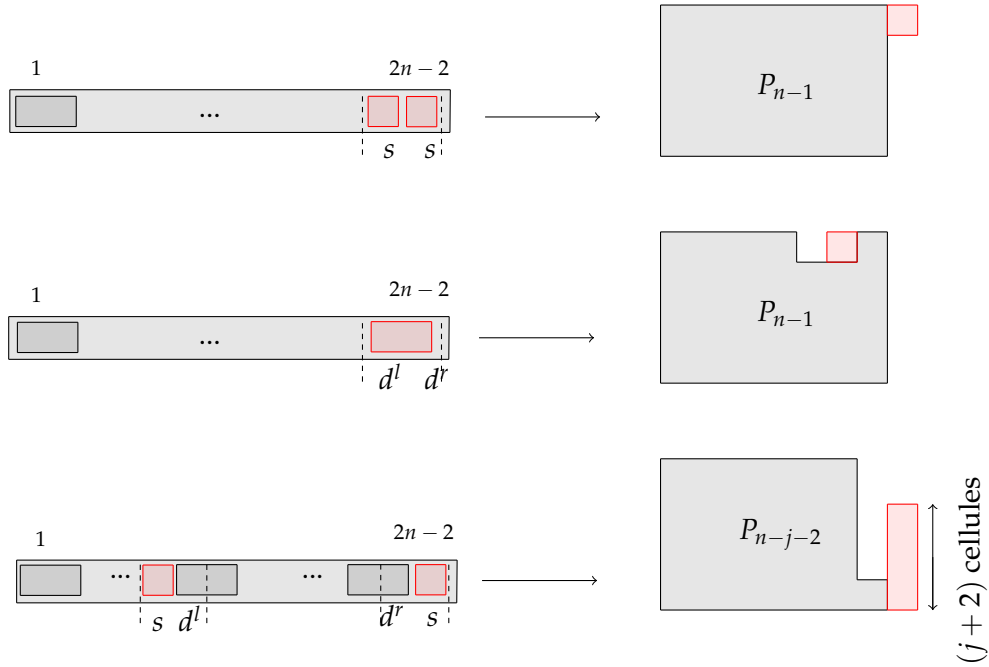


FIG. 3.12 – La décomposition récursive d'un polyomino d'aire n .

Théorème 3.4.4. Soit $P(z, t)$ la fonction génératrice double des polyominos verticalement convexes dirigés

$$P(z, t) = \sum_{p \in \mathcal{P}} z^{c(p)} t^{a(p)}, \tag{3.7}$$

où $c(p)$ et $a(p)$ désignent le nombre de colonnes et l'aire du polyomino p . Alors $P(z, t)$ vérifie l'équation suivante :

$$P(z, t) = \frac{zt}{1-t} + t \left(P(z, t) - \frac{zt}{1-t} \right) + \frac{zt}{1-t} P(z, t), \tag{3.8}$$

la forme explicite de la fonction $P(z, t)$ est donnée par,

$$P(z, t) = \frac{(1-t)zt}{t^2 - (z+2)t + 1}. \tag{3.9}$$

Preuve. Soit p un polyomino verticalement convexe dirigé d'aire $a(p)$ ayant $c(p)$ colonnes. Si $c(p) = 1$ alors le polyomino p se réduit une colonne dans ce cas la fonction génératrice $P(z, t)$ est donnée par

$$P(z, t) = \frac{zt}{1-t},$$

sinon ($c(p) > 1$) alors le polyomino p est obtenu soit à partir d'un autre polyomino p' d'aire $a(p) - 1$ ayant $c(p)$ colonnes auquel on ajoute une cellule à l'avant dernière colonne ou bien à partir d'un polyomino p'' d'aire $a(p) - j$ ayant $c(p) - 1$ colonnes auquel on ajoute une colonne contenant j ($1 \leq j \leq n - 1$) cellules (voir la Figure 3.13). Ainsi on a

$$P(z, t) = t \left(P(z, t) - \frac{zt}{1-t} \right) + \frac{zt}{1-t} P(z, t).$$

En considérant les trois situations on obtient la relation (3.8). La relation (3.9) est obtenue directement de l'équation (3.8). \square

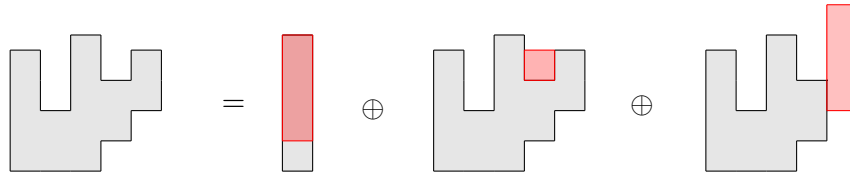


FIG. 3.13 – La décomposition d'un polyomino verticalement convexe dirigé.

Théorème 3.4.5. Pour tout $n \geq 1$, le nombre de colonnes de tous les polyominos dirigés verticalement convexes d'aire n est,

$$D_n = \sum_{k=0}^{n-1} F_{2n-1}(k), \tag{3.10}$$

où $F_n(k)$ est le n -ème terme de la suite incomplète de Fibonacci.

La forme explicite de D_n est donnée par :

$$D_n = \frac{(2n-1)}{5} F_{2n} - \frac{(n-5)}{5} F_{2n-1}. \tag{3.11}$$

Preuve. D'après le Corollaire 3.4.2, le nombre de polyominos d'aire n ayant $n - k$ colonnes est $\binom{2n-2-k}{k}$, ainsi le nombre total de colonnes est :

$$\begin{aligned} D_n &= \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) \binom{2n-2-k}{k} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^k \binom{2n-2-j}{j} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} F_{2n-1}(k). \end{aligned}$$

La forme explicite (3.11) est obtenue à partir de l'identité (2.16) du Théorème 2.4.2. \square

Théorème 3.4.6. *Le nombre de polyominos d'aire n ayant exactement k cellules dans la première ligne est :*

$$\begin{aligned} G_{n,1} &= F_{2n-3}, & n \geq 1 \\ G_{n,2} &= 1 + \sum_{j=0}^{n-3} F_{2(n-j)-5}, & n \geq 2 \\ G_{n,k} &= \binom{n-2}{k-2} + \sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{k+j-3}{k-3} F_{2(n-k-j)}. & n \geq k \geq 3. \end{aligned}$$

Preuve. Soit $\Lambda = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des configurations associées à un polyomino contenant k cellules dans la première ligne. Nous allons étudier la composition de Λ selon la valeur de k .

1. Pour $k = 1$, l'ensemble des configurations associées à un polyomino contenant une seule cellule dans la première ligne (cellule source) doit avoir $x_1 = "d^l d^r"$. Ainsi, il reste à choisir le sous ensemble $\{x_2, \dots, x_{n-1}\}$ et il y a F_{2n-3} possibilités de le faire.
2. Pour $k = 2$, on distingue deux situations possibles :
 - (a) Soit $x_1 = "ss"$. Dans ce cas, le sous ensemble restant contient uniquement des configurations de la forme $"d^l d^r"$. D'où, Λ correspond à l'ensemble suivant :

$$\{ss, d^l d^r, \dots, d^l d^r\},$$

il y a une façon de construire un tel ensemble.

- (b) Soit $x_1 = "sd^l"$. Dans ce cas, x_1 est suivi par j ($0 \leq j \leq n-3$) configurations de type $d^r d^l$, puis par la configuration $d^r s$. Ainsi, l'ensemble des configurations a la forme suivante :

$$\{sd^l, \underbrace{d^r d^l, \dots, d^r d^l}_j, d^r s, x_{j+3}, \dots, x_{n-1}\},$$

le nombre de polyominos engendrés par des configurations de la forme ci-dessus est $\sum_{j=0}^{n-3} F_{2(n-j)-5}$.

3. Pour $k \geq 3$, on distingue aussi deux situations possibles :
 - (c) La première configuration $x_1 = "ss"$, suivi par $k+j-3$ ($0 \leq j \leq n-k-1$) configurations de type $"ss"$ ou $d^l d^r$, puis par la configuration $"sd^l"$,

$$\{ss, \underbrace{d^l d^r, ss, \dots, d^l d^r}_{k+j-3}, \underbrace{sd^l, \dots, d^r s}_s, x_{k+j+s-1}, \dots, x_{n-1}\}.$$

Donc, il y a $\binom{k+j-3}{k-3}$ façons de choisir le sous ensemble $\{ss, d^l d^r, ss, \dots, d^l d^r\}$ et $F_{2(n-k-j)}$ possibilités pour compléter l'ensemble Λ . Ainsi, on a

$$\sum_{j=0}^{n-k-1} \binom{k+j-3}{k-3} F_{2(n-k-j)}.$$

- (d) La première configuration $x_1 = "ss"$ et le sous ensemble restant $\{x_2, \dots, x_{n-1}\}$ est formé par $k - 2$ configurations de la forme $"ss"$ et $n - k$ configurations de la forme $d^l d^r$. Le nombre de façons de construire un tel ensemble est $\binom{n-2}{k-2}$.

□

La Table 3.3, illustre les premières valeurs de la suite double $\{G_{n,k}\}$.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	1									
1	1	1								
2	2	2	1							
3	5	4	3	1						
4	13	9	7	4	1					
5	34	22	16	11	5	1				
6	89	56	38	27	16	6	1			
7	233	145	94	65	43	22	7	1		
8	610	378	239	159	108	65	29	8	1	

TAB. 3.3 – Le triangle engendré par la suite double $\{G_{n,k}\}$, OEIS A121460.

3.5 L'énumération suivant l'aire et la hauteur

Nous allons fournir dans cette section une démonstration bijective de la relation de récurrence des nombres de polyominos verticalement convexes dirigés d'aire n et de hauteur k ($n, k \geq 2$).

$$H_{n,k} = H_{n-1,k-1} + \sum_{i=0}^{k-1} H_{n-k,i} + \sum_{j=1}^{k-1} H_{n-j,k-1}.$$

avec les conditions initiales $H_{n,0} = 0$ pour $n \geq 0$ et $H_{1,1} = 1$.

Preuve. Soit $\Lambda = \{x_1, x_2, \dots, x_{n-1}\}$ l'ensemble des configurations associées à un polyomino d'aire n et de hauteur k , noté $P_{n,k}$. Suivant la composition Λ , nous allons compter le nombre de façons de construire $P_{n,k}$.

1. Si $x_1 = d^l d^r$, alors $P_{n,k}$ contient une seule cellule dans la première ligne (cellule source S). La contribution de cette cellule pour la hauteur est égale à 1. D'autre part, le sous ensemble des configurations $\{x_2, \dots, x_{n-1}\}$ engendrera un polyomino d'aire $n - 1$ et de hauteur $k - 1$, $P_{n-1,k-1}$, dont la cellule source S' correspond à la configuration x_1 , voir la Figure 3.14. On a alors $H_{n-1,k-1}$ façons de construire un tel polyomino.
2. Si $x_1 = ss$ et $x_{j+2} = d^l d^r$ pour $0 \leq j \leq k - 1$. Dans ce cas, il y a une cellule, noté S' , du côté droit de la cellule source S et j cellules au dessus de S . suivant la valeur de j on distingue deux situations possibles :

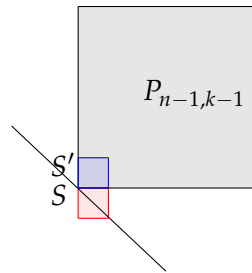


FIG. 3.14 – Le polyomino d'aire n et de hauteur k engendré par l'ensemble $\Lambda = \{d^l d^r, x_2, \dots, x_{n-1}\}$.

- (a) Soit $j = k - 1$, alors la hauteur de la première colonne est égale à k . Donc, le sous ensemble restant $\{x_{k+1}, \dots, x_{n-1}\}$ doit engendrer un polyomino d'aire $n - k$ et de hauteur i ($1 \leq i \leq k - 1$) dont S' est la cellule source, il y a $\sum_{i=1}^{k-1} H_{n-k, i}$ manières de le faire, voir la Figure (a)-3.15.
- (b) Soit $j < k - 1$, alors le sous ensemble restant $\{x_{j+1}, \dots, x_{n-1}\}$ engendre forcément un polyomino d'aire $n - j - 1$ et de hauteur $k - 1$. Le nombre de façons de construire un tel polynomio est $\sum_{j=0}^{k-2} H_{n-j-1, k-1}$, voir la Figure (b)-3.15

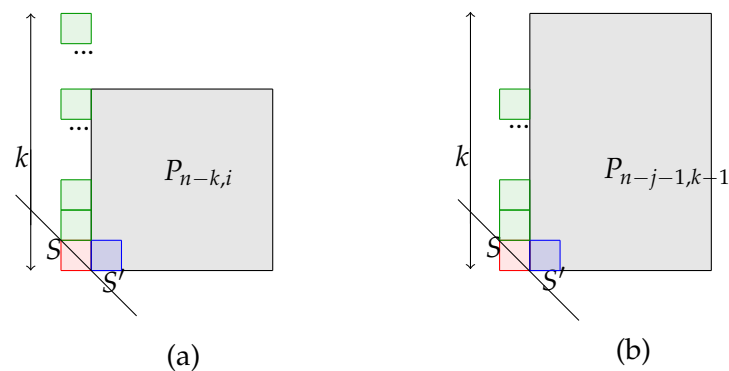


FIG. 3.15 – Polyominos d'aire n et de hauteur k .

□

ASPECT COMBINATOIRE DES q -POLYNÔMES DE FIBONACCI BIVARIÉ

4.1 Introduction

Depuis longtemps les mathématiciens ont accordé un intérêt considérable pour la suite de Fibonacci et ses q -analogues, ces derniers possèdent des propriétés remarquables, prenons à titre d'exemple le q -analogue suivant :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(q) &= \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{2\binom{j+1}{2}} \binom{n-j}{j}_q \\ &= \sum_{j=-\infty}^{+\infty} (-1)^j q^{j(5j-3)/2} \binom{n+j}{\lfloor \frac{n+1-5j}{2} \rfloor + 1}_q, \end{aligned} \quad (4.1)$$

Schur [HW08] a démontré que si n tend vers l'infini ($n \rightarrow \infty$) dans la formule (4.1), on obtient la célèbre identité de Rogers-Ramanujan, [And98][Cig04], qui s'écrit comme suit :

$$1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{q^{j^2+j}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^j)} = \prod_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(1-q^{5k+2})(1-q^{5n+3})},$$

cette dernière équation correspond à la fonction génératrice de l'ensemble des partitions de la forme $5k + 2$ et $5k + 3$ de l'entier n .

D'autres mathématiciens ont exploré différents q -analogues de la suite de Fibonacci à l'aide de modèles combinatoires [Car75, Cig03, Goy08, GM09, MS13b]. En 2011, Cigler [Cig11] a proposé un q -analogue des polynômes de Fibonacci, permettant d'unifier certains q -analogues de nombres de Fibonacci, par la forme explicite suivante :

$$F_{n+1}(x, y; m) = \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{\binom{j+1}{2} + m\binom{j}{2}} \binom{n-j}{j}_q y^j x^{n-2j}.$$

Nous remarquons que les q -analogues de nombres de Fibonacci étudiés par Schur et Andrew [And04] n'apparaissent pas dans la version de Cigler. Dans ce chapitre, nous allons combler ce manque en ajoutant un paramètre p dans le polynôme $F_n(x, y; m)$ afin de

trouver d'autres cas en spécialisant les deux paramètres m et p . Nous étudions les relations de récurrence de cette extension des polynômes q -Fibonacci. Ensuite, nous fournissons une interprétation combinatoire par la distribution d'une statistique sur l'ensemble des pavages linéaires.

4.2 Une approche unifiée des q -polynômes Fibonacci

Définition 4.2.1. Pour tout $n \geq 0$, on définit les q -polynômes Fibonacci bivarié par

$$F_{n+1}(x, y; m, p) = \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.2)$$

De l'expression (4.2), on déduit les deux relations de récurrences suivantes :

$$F_{n+1}(x, y; m, p) = xF_n(x, y; m, p) + q^{n+p-2}yF_{n-1}(x, yq^{m+p-2}; m, p), \quad (4.3)$$

et

$$F_{n+1}(x, y; m, p) = xF_n(x, qy; m, p) + yq^p F_{n-1}(x, q^{m+p}y; m, p), \quad (4.4)$$

avec les valeurs initiales $F_0(x, y; m, p) = 0$ et $F_1(x, y; m, p) = 1$.

Pour démontrer la théorème suivant on a besoin de la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q &= q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k-1}{k}_q + q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2} - k} \binom{n-k-1}{k-1}_q \\ &\quad + (q-1)[n-2k+1]q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2} - k} \binom{n-k}{k-1}_q. \end{aligned} \quad (4.5)$$

En effet, en développant le membre de gauche on obtient :

$$q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q = q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k-1}{k}_q + q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2} + n - 2k} \binom{n-k-1}{k-1}_q,$$

ensuite, il suffit de remplacer q^{n-k} par $1 + (q-1)[n-k]_q$ dans le membre de droite de la relation ci-dessus pour obtenir (4.5).

Nous rappelons également la notion de la q -dérivation. Soit $f(x)$ une fonction réelle continue, la q -dérivé de la fonction f est définie par

$$\frac{d_q}{d_q x} f(x) = \frac{f(qx) - f(x)}{(1-q)x},$$

par exemple, la q -dérivé de la fonction exponentielle est $\frac{d_q}{d_q x}(x^t) = \frac{(qx)^t - x^t}{(q-1)x} = [t]_q x^{t-1}$.

Théorème 4.2.2. Pour tout $n \geq 0$, les polynômes $F_n(x, y; m, p)$ satisfont la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, y; m, p) &= xF_n(x, y; m, p) + yq^{p-1}F_{n-1}(x, q^{m+p-1}y; m, p) \\ &\quad + (q-1)q^{p-1}y \frac{d_q}{d_q x} F_n(x, q^{m+p-1}y; m, p). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Preuve. En utilisant l'expression (4.2) et relation de récurrence (4.5), on a

$$\begin{aligned}
F_{n+1}(x, y; m, p) &= \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k-1}{k}_q y^k x^{n-2k} + \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2} - k} \binom{n-k-1}{k-1}_q \\
&\quad \cdot y^k x^{n-2k} + \sum_{k \geq 0} (q-1)[n-2k+1] q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2} - k} \binom{n-k}{k-1}_q y^k x^{n-2k} \\
&= x \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k-1}{k}_q y^k x^{n-2k-1} + y q^{p-1} \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \\
&\quad \cdot \binom{n-k-2}{k}_q (y q^{p+m-1})^k x^{n-2k-2} + (q-1)y \sum_{k \geq 0} [n-2k-1] q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \\
&\quad \cdot \binom{n-k-1}{k}_q (q^{m+p-1}y)^k x^{n-2k-2} \\
&= x F_n(x, y; m, p) + y q^{p-1} F_{n-1}(x, y q^{m+p-1}; m, p) \\
&\quad + (q-1) q^{p-1} y \frac{d_q}{d_q x} F_n(x, y q^{m+p-1}; m, p)
\end{aligned}$$

□

Théorème 4.2.3. Pour tout $n \geq 0$, la fonction génératrice ordinaire de la suite de polynômes $\{F_n(x, y; m, p)\}_n$ est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} F_{n+1}(x, y; m, p) t^n = \sum_{k \geq 0} \frac{q^{m \binom{k}{2} + p \binom{k+1}{2}} y^k t^{2k}}{(1-xt)(1-qrt)(1-q^2xt) \cdots (1-q^k xt)}. \quad (4.7)$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} F_{n+1}(x, y; m, p) t^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k} t^n \\
&= \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} y^k \sum_{n \geq 2k} \binom{n-k}{k}_q x^{n-2k} t^n \\
&= \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} y^k t^{2k} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k}_q (xt)^n,
\end{aligned}$$

en tenant compte du fait que la fonction génératrice des coefficients q -binomiaux s'écrit comme suit :

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k}{k}_q z^n = \frac{1}{(1-z)(1-qtz) \cdots (1-q^k z)},$$

on obtient le résultat. □

$$F_1(x, y; m, p) = 1,$$

$$F_2(x, y; m, p) = x,$$

$$F_3(x, y; m, p) = x^2 + q^p y,$$

$$F_4(x, y; m, p) = x^3 + (q^{p+1} + q^p)yx,$$

$$F_5(x, y; m, p) = x^4 + (q^{p+2} + q^{p+1} + q^p)yx^2 + q^{m+3p}y^2,$$

$$F_6(x, y; m, p) = x^5 + (q^{p+3} + q^{p+2} + q^{p+1} + q^p)yx^3 + (q^{m+3p+2} + q^{m+3p+1} + q^{m+3p})y^2x,$$

$$F_7(x, y; m, p) = x^6 + (q^{p+4} + q^{p+3} + q^{p+2} + q^{p+1} + q^p)yx^4 + (q^{m+3p+4} + q^{m+3p+3} + q^{m+3p+2} + q^{m+3p+1} + q^{m+3p})y^2x^2 + q^{3m+6p}y^3.$$

TAB. 4.1 – Les premiers polynômes $F_n(x, y; m, p)$.

4.3 Cas particuliers du polynôme $F_n(x, y; m, p)$

Nous allons présenter dans cette section certains cas particuliers du polynôme $F_n(x, y; m, p)$ et leur interprétations combinatoires.

- Pour $p = 1$, on obtient le q -analogue des polynômes de Fibonacci généralisés [Cig11],

$$F_{n+1}(x, y; m, 1) = \sum_{k \geq 0} q^{\binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.8)$$

- Pour $m = 0$ et $p = 1$, on retrouve les q -polynômes de Fibonacci bivarié introduit par Cigler, [Cig03],

$$F_{n+1}(x, y; 0, 1) = \sum_{k \geq 0} q^{\binom{k+1}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.9)$$

Shattuck et Wegner, [SW06b, SW06a], ont interprété le polynôme $F_{n+1}(x, y; 0, 1)$ comme le polynôme générateur de l'ensemble de pavages de longueur n pour la statistique π qui compte la somme des nombres de tuiles précédant chaque domino dans le pavage,

$$\pi(t) = \sum_{i: t_i = \text{domino}} i,$$

c'est-à-dire

$$F_{n+1}(x, y; 0, 1) = \sum_{t \in T(n)} q^{\pi(t)}.$$

- Pour $m = 1$ et $p = 1$, on obtient les q -polynômes de Fibonacci étudiés par Schur [And04] et Carlitz [Car75],

$$F_{n+1}(x, y; 1, 1) = \sum_{k \geq 0} q^{k^2} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.10)$$

Dans [MS12b], les auteurs ont interprété le polynôme $F_{n+1}(x, y; 1, 1)$ comme le polynôme générateur de l'ensemble $T(n)$ pour la statistique $v(t)$ qui correspond à la somme des nombres couverts par les moitiés gauches des dominos.

$$F_{n+1}(1, 1; 1, 1) = \sum_{t \in T(n)} q^{v(t)}.$$

- Pour $p = 0$ et $m = 2$, on retrouve les q -polynômes de Fibonacci étudiés par Carlitz, [Car75],

$$F_{n+1}(x, y; 2, 0) = \sum_{k \geq 0} q^{k(k-1)} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.11)$$

- Pour $p = 2$ et $m = 0$, on retrouve le q -analogue des polynômes de Fibonacci étudiés par Shur, [And04],

$$F_{n+1}(x, y; 0, 2) = \sum_{k \geq 0} q^{k(k+1)} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.12)$$

Le polynôme $F_{n+1}(x, y; 0, 2)$ correspond à la distribution conjointes des statistiques (maj, des) sur l'ensemble $T(n)$, [SS12],

$$F_{n+1}(x, y; 0, 2) = \sum_{t \in T(n)} q^{maj(t)} t^{des(t)}.$$

4.4 Interprétation combinatoire

Soit t un pavage contenant s tuiles, $t = t_1 t_2 \cdots t_s$, on définit les statistiques inv , occ et σ sur t comme suit :

$$inv(t) = \#\{(i, j) : i < j \text{ et } |t_i| > |t_j|\},$$

$$occ(t) = \#\{(i, j) : i < j \text{ et } t_i = t_j = \text{domino}\},$$

et

$$\sigma(t) = \text{le nombre de dominos dans } t.$$

Par exemple, si $s = 5$ et $t = dsdds$ (voir la figure ci-dessous), alors $inv(t) = \#\{(1, 2), (1, 5), (3, 5), (4, 5)\} = 4$, $occ(t) = \#\{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\} = 3$ et $\sigma(t) = 3$.

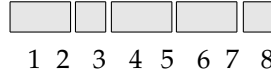


FIG. 4.1 – Un pavage contenant 5 tuiles ($t = dsdds$).

Soit $T(n, k)$ l'ensemble de pavages de longueur n contenant k dominos, il est clair que l'ensemble $T(n + k, k)$ est en bijection avec les permutations du multi-ensemble $M = \{1^{n-k}, 2^k\}$ et d'après [Proposition 1.7.3, [Sta12]], on a

$$\sum_{t \in T(n+k, k)} q^{inv(t)} = \binom{n}{k}_q. \quad (4.13)$$

Définition 4.4.1. Soit $t = t_1 t_2 \cdots t_s$ un pavage contenant s tuiles, on définit la statistique $\Phi_{m,p}(t)$ comme suit

$$\Phi_{m,p}(t) = m \cdot occ(t) + p \cdot (occ + \sigma)(t) + inv(t). \quad (4.14)$$

Théorème 4.4.2. Pour tout $n \geq 0$, $F_{n+1}(x, y; m, p)$ est le polynôme générateur de l'ensemble $T(n)$ pour les statistiques $(\Phi_{m,p}, \nu)$,

$$F_{n+1}(x, y; m, p) = \sum_{t \in T(n)} q^{\Phi_{m,p}(t)} y^{\nu(t)} x^{n-2\nu(t)}. \quad (4.15)$$

Preuve. Pour tout entier k , les valeurs des statistiques occ et σ de l'ensemble $T(n, k)$ sont $occ = \sum_{i=0}^{k-1} i = \binom{k}{2}$ et $\sigma = k$, respectivement, d'où on a :

$$\sum_{t \in T(n, k)} m \cdot occ(t) + p \cdot (occ + \sigma)(t) = m \binom{k}{2} + p \binom{k+1}{2},$$

en utilisant la relation (4.13) on obtient :

$$\sum_{t \in T(n,k)} q^{\Phi_{m,p}(t)} y^{\nu(t)} x^{n-\nu(t)} = q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k},$$

enfin, il suffit de sommer sur toutes les valeurs de k pour trouver $F_{n+1}(x, y; m, p)$. \square

Exemple 4.4.3. La distribution conjointe des statistiques $(\Phi_{m,p}, \nu)$ sur l'ensemble des pavages de longueur 4 est donnée par,

$$\begin{array}{l} \boxed{} \boxed{} \longrightarrow occ(t) = 1, \quad inv(t) = 0, \quad \nu(t) = 2, \quad \Phi_{m,p}(t) = 3p + m, \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \longrightarrow occ(t) = 0, \quad inv(t) = 2, \quad \nu(t) = 1, \quad \Phi_{m,p}(t) = p + 2, \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \longrightarrow occ(t) = 0, \quad inv(t) = 1, \quad \nu(t) = 1, \quad \Phi_{m,p}(t) = p + 1, \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \longrightarrow occ(t) = 0, \quad inv(t) = 0, \quad \nu(t) = 1, \quad \Phi_{m,p}(t) = p, \\ \boxed{} \boxed{} \boxed{} \boxed{} \longrightarrow occ(t) = 0, \quad inv(t) = 0, \quad \nu(t) = 0, \quad \Phi_{m,p}(t) = 0, \end{array}$$

FIG. 4.2 – La distribution des statistiques $(\Phi_{m,p}, \nu)$ sur l'ensemble $T(4)$.

$$\sum_{t \in T(4)} q^{\Phi_{m,p}(t)} y^{\nu(t)} x^{4-2\nu(t)} = q^{m+3p} y^2 + q^{p+2} y x^2 + q^{p+1} y x^2 + q^p y x^2 + x^4.$$

Nous allons expliquer les relations de récurrence (4.3) et (4.4) en utilisant le modèle combinatoire proposé ci-dessus.

Soit le pavage $t \in T(n, k)$, en tenant compte du fait que la première tuile est soit un monomino ou un domino, on obtient

$$\Phi_{m,p}(t) = \begin{cases} \Phi_{m,p}(t'), & \text{si } t_1 = \text{monomino}; \\ (mk + p(k+1) + n - 2k - 2)\Phi_{m,p}(t''), & \text{si } t_1 = \text{domino}. \end{cases}$$

avec $t' \in T(n-1, k)$ et $t'' \in T(n-2, k-1)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, y; m, p) &= x \sum_{k \geq 0} \sum_{t' \in T(n-1, k)} q^{\Phi_{m,p}(t')} y^k x^{n-2k-1} \\ &\quad + y q^{n+p-2} \sum_{k \geq 0} \sum_{t'' \in T(n-2, k-1)} q^{\Phi_{m,p}(t'')} (y q^{(m+p-2)})^k x^{n-2k-2} \\ &= x F_n(x, y; m, p) + q^{n+p-2} y F_{n-1}(x, y q^{m+p-2}; m, p). \end{aligned}$$

Maintenant, pour trouver la deuxième relation de récurrence, on raisonne sur la dernière tuile du pavage,

$$\Phi_{m,p}(t) = \begin{cases} k\Phi_{m,p}(t'), & \text{si } t_{n-k} = \text{monomino}; \\ (mk + p(k+1))\Phi_{m,p}(t''), & \text{si } t_{n-k} = \text{domino}. \end{cases}$$

avec $t' \in \mathcal{T}_{n-1,k}$ et $t'' \in \mathcal{T}_{n-2,k-1}$. Alors,

$$\begin{aligned} F_{n+1}(x, y; m, p) &= x \sum_{k \geq 0} \sum_{t' \in \mathcal{T}_{n-1,k}} q^{\Phi_m(t')} (qy)^k x^{n-2k-1} + yq^p \sum_{k \geq 0} \sum_{t'' \in \mathcal{T}_{n-2,k}} q^{\Phi_m(t'')} (yq^{m+p})^k x^{n-2k-2} \\ &= xF_n(x, qy; m, p) + yq^p F_{n-1}(x, q^{m+p}y; m, p). \end{aligned}$$

□

4.5 Le q -analogue des polynômes de Lucas

Soit R_n l'ensemble des pavages circulaires de taille n , on définit le q -analogue des polynômes de Lucas par la distribution de la statistique $\Phi_{m,p}$ sur R_n ,

$$L_n(x, y; m, p) = \sum_{c \in \tilde{R}(n)} q^{\Phi_{m,p}(c)} y^{v(c)} x^{n-2v(c)}. \quad (4.16)$$

En considérant que tout pavage circulaire c_n contient deux sous pavages linéaires isomorphe à t_n et à t_{n-2} , voir la Figure 4.3, on déduit les relations de récurrence suivantes :

$$\widehat{L}_n(x, y; m, p) = F_{n+1}(x, y; m, p) + q^p y F_{n-1}(qx, q^{m+p}y; m, p), \quad (4.17)$$

et

$$\widetilde{L}_n(x, y; m, p) = F_{n+1}(x, y; m, p) + q^p y F_{n-1}(x, q^{m+p}y; m, p). \quad (4.18)$$

La relation de récurrence (4.17) est obtenue en considérant qu'un pavage circulaire est transformé en pavage linéaire ce sont les cas (a) et (b) de la Figure 4.3,

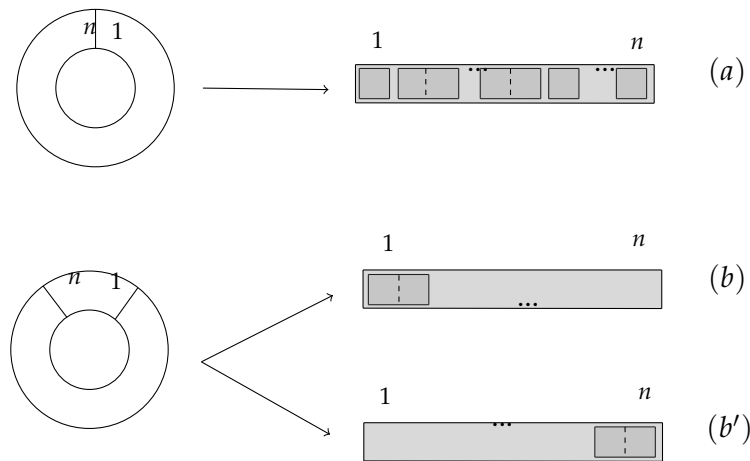


FIG. 4.3 – Transformation d'un ruban circulaire n .

Théorème 4.5.1. Pour tout $n \geq 0$, les polynômes $\widehat{L}_n(x, y; m, p)$ et $\widetilde{L}_n(x, y; m, p)$ admettent les formes explicite suivantes :

$$\widehat{L}_n(x, y; m, p) = \sum_{k \geq 0} q^{p \binom{k+1}{2} + m \binom{k}{2}} \left(1 + q^{n-2k} \frac{[k]_q}{[n-k]_q} \right) \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}, \quad (4.19)$$

et

$$\tilde{L}_n(x, y; m, p) = \sum_{k \geq 0} q^{p\binom{k+1}{2} + m\binom{k}{2}} \left(1 + \frac{[k]_q}{[n-k]_q}\right) \binom{n-k}{k}_q y^k x^{n-2k}. \quad (4.20)$$

Preuve. Le résultat est obtenu à partir des relations de récurrence (4.17) et (4.18). \square

4.6 Identités combinatoires

Nous terminons ce chapitre par des preuves combinatoires de quelques identités classiques.

Proposition 4.6.1. *Pour tout $n \geq 0$, on a*

$$F_{2n}(x, y; m, p) = \sum_{k=0}^{n-1} q^{m\binom{k}{2} + p\binom{k+1}{2}} \binom{n}{k}_q y^k x^{n-k} F_{n-k}(q^k x, yq^{p(k+1)+mk}; m, p).$$

Preuve. Soit t un pavage de longueur $2n - 1$ (t contient au moins n tuiles), nous considérons qu'il y a exactement k ($0 \leq k \leq n - 1$) dominos parmi les n premières tuiles et la partie restante du pavage contient l ($0 \leq l \leq \lfloor n - k - 1/2 \rfloor$) dominos. La contribution des n premières tuiles est $q^{m\binom{k+l}{2} + p\binom{k+l+1}{2} + k(n-k-2l-1)} y^k x^{n-k}$ et la contribution de ce qui reste du pavage est $q^{m\binom{l}{2} + p\binom{l+1}{2}} \binom{n-k-l-1}{l}_q y^l x^{n-k-2l-1}$, ainsi

$$\begin{aligned} F_{2n}(x, y; m, p) &= \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l \geq 0} q^{m\binom{k+l}{2} + p\binom{k+l+1}{2} + k(n-k-2l-1)} y^k x^{n-k} q^{m\binom{l}{2} + p\binom{l+1}{2}} \\ &\quad \binom{n-k-l-1}{l}_q y^l x^{n-k-2l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{m\binom{k}{2} + p\binom{k+1}{2}} y^k x^{n-k} \sum_{l \geq 0} q^{m\binom{l}{2} + p\binom{l+1}{2}} \binom{n-k-l-1}{l}_q \\ &\quad (q^{p(k+1)+mk} y)^l (q x)^{n-k-2l-1} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} q^{m\binom{k}{2} + p\binom{k+1}{2}} y^k x^{n-k} F_{n-k}(q^k x, yq^{p(k+1)+mk}; m, p). \end{aligned}$$

\square

Proposition 4.6.2. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a*

$$F_{n+2}(x, y; m, p) = x^{n+2} + \sum_{k=1}^n q^{p+1} y x^{n-k} F_k(x, yq^{m+p+n-k}; m, p). \quad (4.21)$$

Preuve. Soient $T(n+1)$ l'ensemble des pavage de longueur $n+1$ et $T^*(n+1)$ le sous ensemble de pavages qui contiennent au moins un domino. Alors, la distribution de la statistique $\Phi_{m,p}$ sur l'ensemble $T^*(n+1)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T^*(n+1)} q^{\Phi_{m,p}(t)} &= \sum_{t \in T(n+1)} q^{\Phi_{m,p}(t)} - x^{n+2} \\ &= F_{n+2}(x, y; m, p) - x^{n+2}, \end{aligned}$$

où x^{n+2} est la contribution du pavage qui contient uniquement des monominos.

Maintenant, nous considérons les pavages de $T^*(n+1)$ où la position du dernier domino (en partant de la droite du pavage) occupe les cellules $(k, k+1)$ ($1 \leq k \leq n$), alors il y a $n-k$ monominos occupant les cellules $k+2, \dots, n+1$. La distribution de la statistique $\Phi_{m,p}$ sur ces pavages est donnée par :

$$\begin{aligned} \sum_t q^{\Phi_{m,p}(t)} &= \sum_{j \geq 0} q^{p \binom{j+1}{2} + m \binom{j}{2}} \binom{k-1-j}{j}_q y^j x^{k-1-2j} q^{mj+(j+1)(p+n-k)} y x^{n-k} \\ &= y q^{p+n-k} x^{n-k} F_k(x, y q^{m+p+n-k}; m, p). \end{aligned}$$

Enfin, nous sommes sur toutes les valeurs de k pour obtenir le membre de droite de l'identité. \square

Deuxième partie

**NOMBRES r -LAH ET LEUR
 q -ANALOGUE**

LES NOMBRES r -LAH

5.1 Introduction

Les nombres de Lah, introduits par le mathématicien slovène Ivo Lah en 1955, sont définis par la relation de récurrence triangulaire suivante :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right] + (n+k-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right], \text{ pour } 0 \leq k \leq n \quad (5.1)$$

avec les conditions $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right] = \delta_{n,0}$ et $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = 0$ pour $n < k$ ou $k < 0$.

Lah a démontré que ces nombres correspondent aux coefficients de changement de base entre la base $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ et la base $(1, x, x^2, \dots, x^n)$, c'est-à-dire

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] x^k. \quad (5.2)$$

Les premières valeurs des $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ peuvent ainsi être calculées facilement de proche en proche en utilisant la relation de récurrence (5.1), et sont donnés dans la Table 5.1.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0
3	6	6	1	0	0	0	0	0
4	24	36	12	1	0	0	0	0
5	120	240	120	20	1	0	0	0
6	720	1800	1200	300	30	1	0	0
7	5040	15120	12600	4200	630	42	1	0
8	40320	141120	141120	58800	11760	1176	56	1

TAB. 5.1 – Les premiers nombres de Lah, OEIS A008297.

Il est bien connu que le nombre $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]$ peut être interprété comme le nombre de façons de partitionner $[n]$ en k listes non vides. Par exemple, le nombre de partitions de $[4]$ en 3 listes correspond à $\left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right] = 12$.

$$\begin{aligned}
&14/2/3; 41/2/3; 1/24/3; 1/42/3; 1/2/34; \\
&1/2/43; 12/3/4; 21/3/4; 1/23/4; 1/32/4; \\
&13/2/4; 31/2/4.
\end{aligned}$$

A l'aide d'un simple raisonnement bijectif sur la partition de $[n]$ en k listes, on trouve que les nombres de Lah ont la forme explicite suivante :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}. \quad (5.3)$$

En utilisant les équations (1.4) et (1.6) qui expriment les nombres de Stirling de première et deuxième espèces en termes des moments factoriels et par identification avec l'équation (5.2) on déduit que les nombres de Lah peuvent s'écrire comme une somme du produit des nombres de Stirling de première et seconde espèce,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right] = \sum_{j=0}^n \left\{ \begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right\} \left[\begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right]. \quad (5.4)$$

Récemment, une généralisation des nombres de Lah a été mentionné dans un travail de Cheon et Jung [CJ12]. Les auteurs ont défini les nombres r -Whitney-Lah, notés $L_{m,r}(n,k)$, comme étant les coefficients dans le changement de base dans la relation suivante :

$$(x + 2r|m)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n L_{m,r}(n,k) (x|m)^{\underline{k}}. \quad (5.5)$$

En posant $m = 1$ dans l'équation (5.5), on obtient les nombres r -Lah, aussi appelés nombres de Lah non-centrés selon Charalambides [Cha04].

Contrairement aux nombres r -Stirling, les nombres r -Lah sont peu étudiés, et à notre connaissance, il n'existe aucun travail dédié entièrement à ces nombres, ce qui justifie partiellement notre motivation pour explorer certaines propriétés.

Dans la première partie de ce chapitre, on s'intéresse aux différentes relations de récurrence des nombres r -Lah à savoir la relation de récurrence triangulaire croisée, la relation de récurrence verticale et la relation de récurrence horizontale. Ces relations (sauf la première) sont obtenues directement de l'interprétation combinatoire et du principe de double comptage. Dans la deuxième partie, fruit d'une collaboration avec Imad-Eddine Bousbaa [BBB], nous proposons un modèle combinatoire pour interpréter une généralisation des nombres r -Lah introduite par Shattuck [Sha14b] en 2014. Ce modèle nous a permis d'établir principalement : la forme explicite, la fonction génératrice et une écriture en termes de fonction symétrique.

5.2 Les nombres r -Lah

Comme nous l'avons souligné dans l'introduction, les nombres r -Lah sont définis de la même manière que les nombres r -Stirling. Les nombres r -Lah, que nous noterons $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$, sont définis par :

$$(x+r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (x-r)^{\bar{k}}. \quad (5.6)$$

Pour tous entiers n, k et r , les nombres r -Lah vérifient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= 0 & n < r; \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \delta_{k,r} & n = r; \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r + (n+k-1) \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r & n > r. \end{aligned}$$

Soit $\mathcal{P}_{n,k}^{(r)}$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k listes non vides de telle sorte que les entiers $1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des listes distinctes. Il est bien clair que le nombre $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r$ correspond au nombre de partitions dans l'ensemble $\mathcal{P}_{n,k}^{(r)}$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \#\mathcal{P}_{n,k}^{(r)}.$$

De l'interprétation combinatoire on déduit la forme explicite des nombres r -Lah,

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \frac{(n+r-1)!}{(k+r-1)!} \binom{n-r}{k-r}, \quad (n \geq k \geq r). \quad (5.7)$$

En effet, pour trouver le membre de droite de l'équation (5.7) premièrement, nous commençons par placer les éléments $1, 2, \dots, r$ dans les r premières listes (un élément par liste). En suite, on choisit un sous ensemble S de $k-r$ éléments parmi $\{r+1, r+2, \dots, n\}$ pour compléter les $k-r$ listes restantes, il y a $\binom{n-r}{k-r}$ possibilités. Maintenant, on ajoute les $n-2r$ éléments du sous ensemble restant, en considérant que chacun des $k-r$ éléments de l'ensemble S est le début de la liste, ce qui n'est pas le cas pour les éléments $1, 2, \dots, r$ (on peut mettre un élément avant ou après le premier élément de la liste). Notons qu'il y a $2r + (k-r) = r+k$ possibilités de placer le premier élément, $r+k+1$ possibilités pour le second élément, ...etc. Ainsi, au total on a $(k+r)(k+r+1) \cdots (n+r-1)$ possibilités.

En utilisant l'expression (5.7), on obtient la fonction génératrice exponentielle, voir [CJ12, NR15],

$$\sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r \frac{x^n}{n!} = \frac{x^k}{k!} (1-x)^{-k-2r}. \quad (5.8)$$

$n \setminus k$	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	20	10	1	0	0	0	0	0	0
5	120	90	18	1	0	0	0	0	0
6	840	840	252	28	1	0	0	0	0
7	6720	8400	3360	560	40	1	0	0	0
8	60480	90720	45360	10080	1080	54	1	0	0
9	604800	1058400	635040	176400	25200	1890	70	1	0
10	6652800	13305600	9313920	3104640	554400	55440	3080	88	1

TAB. 5.2 – Les premiers nombres 2-Lah.

$n \setminus k$	3	4	5	6	7	8	9	10
3	1	0	0	0	0	0	0	0
4	6	1	0	0	0	0	0	0
5	42	14	1	0	0	0	0	0
6	336	168	24	1	0	0	0	0
7	3024	2016	432	36	1	0	0	0
8	30240	25200	7200	900	50	1	0	0
9	332640	332640	118800	19800	1650	66	1	0
10	3991680	4656960	1995840	415800	46200	2772	84	1

TAB. 5.3 – Les premiers nombres 3-Lah.

$n \setminus k$	4	5	6	7	8	9	10
4	1	0	0	0	0	0	0
5	8	1	0	0	0	0	0
6	72	18	1	0	0	0	0
7	720	270	30	1	0	0	0
8	7920	3960	660	44	1	0	0
9	95040	59400	13200	1320	60	1	0
10	1235520	926640	257400	34320	2340	78	1

TAB. 5.4 – Les premiers nombres 4-Lah.

5.2.1 Relations de récurrence

Nous allons présenter dans cette section les différentes relations de récurrence. Nous commençons par le résultat suivant où on propose une relation de récurrence triangulaire croisée dont les coefficients sont des fractions.

Théorème 5.2.1. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = (k-r+1) \frac{(n+r-2)}{(k+r-1)} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{r-1} + \frac{(n+r-2)}{(k+r-2)} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}. \quad (5.9)$$

Preuve. D'après l'expression (5.7) et la relation de récurrence des coefficients binomiaux on a :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \left(\frac{(n+r-2)}{(k+r-1)} + \frac{(n+r-2)}{(k+r-1)} \right) \\ &= \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \left(\frac{n+r-2}{k+r-1} \frac{(n+r-3)}{(k+r-2)} + \frac{n+r-2}{k+r-2} \frac{(n+r-3)}{(k+r-3)} \right) \\ &= (k-r+1) \frac{(n+r-2)}{(k+r-1)} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_{r-1} + \frac{(n+r-2)}{(k+r-2)} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}. \end{aligned}$$

□

Dans le résultat suivant, nous exprimons les nombres r -Lah en terme des nombres $(r-1)$ -Lah, la formule proposée est une relation de récurrence verticale croisée.

Théorème 5.2.2. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{i=0}^{n-k} (i+1)! \binom{n-r}{i} \left[\begin{matrix} n-i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}. \quad (5.10)$$

Preuve. On suppose que la première liste contient l'élément "1" et i autres éléments ($0 \leq i \leq n-k$) choisis de l'ensemble $\{r+1, r+2, \dots, n\}$. Ainsi, il y a $\binom{n-r}{i}$ façons de choisir les i éléments et $(i+1)!$ possibilités de construire la première liste. Il reste à partitionner les $n-i-1$ éléments restants sur $k-1$ listes de telle sorte que l'ensemble $\{2, 3, \dots, r\}$ soit distribué dans des listes distinctes. Ainsi au total, on a $\binom{n-r}{i} (i+1)! \left[\begin{matrix} n-i-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_{r-1}$ façons de construire une telle partition. Enfin, il suffit de sommer sur toutes les valeurs de i pour obtenir le résultat. □

Exemple 5.2.3. *On peut calculer $\left[\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix} \right]_3$ de la façon suivante :*

$$\left[\begin{matrix} 7 \\ 4 \end{matrix} \right]_3 = \binom{4}{0} \left[\begin{matrix} 6 \\ 3 \end{matrix} \right]_2 + 2! \binom{4}{1} \left[\begin{matrix} 5 \\ 3 \end{matrix} \right]_2 + 3! \binom{4}{2} \left[\begin{matrix} 4 \\ 3 \end{matrix} \right]_2 + 4! \binom{4}{3} \left[\begin{matrix} 3 \\ 3 \end{matrix} \right]_2.$$

La relation (5.10) peut être généralisée comme suit.

Théorème 5.2.4. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r = \sum_{s=0}^{n-k} \sum_{i_1+i_2+\dots+i_r=s} (i_1+1)! \cdots (i_r+1)! \binom{n-r}{i_1, \dots, i_r, n-r-s} \left[\begin{matrix} n-r-s \\ k-r \end{matrix} \right]. \quad (5.11)$$

Preuve. Pour trouver le membre de droite de l'identité, nous considérons que les r premières listes contiennent les r premiers éléments et i_1, i_2, \dots, i_r autres éléments, respectivement, de sorte que $i_1 + i_2 + \dots + i_r = s$ ($0 \leq s \leq n - k$). Ainsi, il y a $\binom{n-r}{i_1, i_2, \dots, i_r, n-r-s}$ façons de choisir les i_1, i_2, \dots, i_r éléments et $(i_1 + 1)!(i_2 + 1)! \dots (i_r + 1)!$ possibilités de construire les r premières listes. Ensuite, on partitionne les $n - r - s$ éléments restants sur les $k - r$ listes vides et il y a $\lfloor \begin{smallmatrix} n-r-s \\ k-r \end{smallmatrix} \rfloor$ possibilités.

Par conséquent, on a $(i_1 + 1)!(i_2 + 1)! \dots (i_r + 1)! \binom{n-r}{i_1, i_2, \dots, i_r, n-r-s} \lfloor \begin{smallmatrix} n-r-s \\ k-r \end{smallmatrix} \rfloor$ manières de partitionner l'ensemble $[n]$ en k listes de sorte que les r premières listes contiennent $i_1 + 1, i_2 + 1, \dots, i_r + 1$ éléments, respectivement. Enfin, on somme sur toutes les valeurs de s pour en déduire notre identité. \square

Théorème 5.2.5. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$\left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j (n+k+1)^{\bar{j}} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r. \quad (5.12)$$

Preuve. On procède par construction, l'ensemble des partitions de $[n]$ en k listes peut être obtenu à partir des partitions de l'ensemble $[n+1]$ en $k+1$ listes en excluant les partitions qui ne contiennent pas l'élément " $n+1$ " comme un singleton. D'où, $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r = \lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \rfloor_r - ((k+1) + n) \lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \rfloor_r$.

Ensuite, le nombre $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k+1 \end{smallmatrix} \rfloor_r$ est obtenu de l'ensemble des partitions de $[n+1]$ en $k+2$ listes en excluant les partitions qui ne contiennent pas l'éléments " $n+1$ " comme un singleton, ainsi on a :

$$\begin{aligned} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r &= \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r - ((k+1) + n) \left(\left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r - ((k+2) + n) \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r \right) \\ &= \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+1 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r - ((k+1) + n) \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r + ((k+1) + n) ((k+2) + n) \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k+2 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r \\ &\quad \vdots \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j ((k+1) + n)^{\bar{j}} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r. \end{aligned}$$

\square

Corollaire 5.2.6. *Pour $r = 1$, les nombres de Lah classiques satisfont les relations de récurrence suivantes :*

$$\begin{aligned} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor &= (n-1) \left\lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor + \frac{(n-1)}{(k-1)} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rfloor. \\ \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor &= \sum_{j=0}^{n-k} (j+1)! \binom{n-1}{j} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n-j-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rfloor. \\ \left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor &= \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j (n+k+1)^{\bar{j}} \left\lfloor \begin{smallmatrix} n+1 \\ k+j+1 \end{smallmatrix} \right\rfloor. \end{aligned}$$

5.2.2 Preuve combinatoire de l'équation (5.6)

Nous donnons dans ce paragraphe une démonstration combinatoire de l'équation (5.6), qui peut s'écrire comme suit :

$$(x + 2r)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (x)^{\bar{k}}. \quad (5.13)$$

Preuve. Soit $\mathcal{EP}_{n+r, x+r}^{(r)}$ l'ensemble des partitions de $[n+r]$ en $x+r$ listes (nous autorisons que quelques listes restent vides) telles que les r premiers éléments sont placés dans des listes distinctes. Le membre de gauche de la relation (5.13) compte le nombre de partitions de l'ensemble $\mathcal{EP}_{n+r, x+r}^{(r)}$. En effet, on commence par placer les r premiers éléments dans les r premières listes (un élément par liste). Puis on ajoute les éléments $[r+1, n+r]$. On a $x+2r$ façons de placer l'élément " $r+1$ " dans une liste, $x+2r+1$ façons d'ajouter l'élément $r+2$, ainsi de suite, jusqu'à l'élément " $n+r$ " qui a $x+2r+n-1$ façons d'être placé dans une liste. D'où, on a au total $(x+2r)(x+2r+1) \cdots (x+2r+n-1) = (x+2r)^{\bar{n}}$ façons de partitionner l'ensemble $[n+r]$ en $x+r$ listes.

Maintenant, nous montrons que la partie droite de la relation compte le cardinal du même ensemble. Soit p une partition de l'ensemble $EP_{n+r, x+r}^{(r)}$ qui contient $k+r$ ($0 \leq k \leq n$) listes non vides. Pour construire p , nous partitionnons d'abord l'ensemble $[n+r]$ en $k+r$ listes de telles sortes que les r premiers éléments soient dans des listes distinctes, il y a $\left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r$ possibilités. Ensuite, ajoute $x-k+1$ cloisons "/" pour construire les $x-k$ listes vides. \square

Remarque 5.2.7. La forme duale de la relation (5.6) est donnée pour tous $n \geq k \geq r$, par

$$(x-r)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^n (-1)^{n+k} \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r (x+r)^{\bar{k}}.$$

5.3 Une généralisation des nombres r -Lah

Récemment, Shattuck [Sha14b] a proposé une généralisation des nombres r -Lah, notés $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b}$, et définis par la relation de récurrence triangulaire suivante :

$$\left[\begin{matrix} n+1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} = \left[\begin{matrix} n \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{a,b} + (an + bk + (a+b)r) \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b}, \quad (5.14)$$

avec les valeurs initiales $\left[\begin{matrix} 0 \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} = \delta_{k,0}$ et $\left[\begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right]_r^{a,b} = \prod_{j=0}^{n-1} (a(j+r) + br)$.

Les nombres $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b}$ correspondent aux coefficients dans le développement suivant :

$$(x + (a+b)r|a)^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} (x|b)^{\bar{k}}. \quad (5.15)$$

Notons que, si $a = b = 1$ on obtient les nombres r -Lah $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{1,1} = \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r$ et pour $a = 0$, $b = 1$ (resp. $a = 1$, $b = 0$) on retrouve les nombres r -Stirling de seconde espèce $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{0,1} =$

$\{n+r\}_r$ (resp. r -Stirling de première espèce $\lfloor n \rfloor_r^{1,0} = [n+r]_r$). Aussi, pour $r = 0$, on obtient les nombres de Stirling généralisés, $\lfloor n \rfloor_0^{a,b} = \lfloor n \rfloor^{a,b}$, étudiés par [BBB14, MSS11, MS12a].

Soient λ une partition de $[n]$ en k listes et $i \in [n]$, on dit que i est un *enregistrement faible* de λ s'il n'y a pas un élément j (dans la liste contenant i) à gauche de i , tel que $j < i$.

Par exemple, si $\lambda = 6, 5, 8, 1/4, 2, 9, 3/7$ alors les éléments 6, 5 et 1 sont des enregistrements faibles de la première liste, les éléments 4, 2 sont les enregistrements faibles de la deuxième liste et l'élément 7 est l'enregistrement faible de la troisième liste.

La statistique rec^* est définie comme le nombre total d'enregistrement faibles de λ et qui ne sont pas les plus petits éléments dans leurs listes et la statistique $nrec$ correspond au nombre total d'éléments qui ne sont pas des enregistrements faibles [MSS11]. Pour l'exemple précédent, la valeur de la statistique $rec^* = \#\{5, 6, 4\} = 3$ et $nrec = \#\{8, 9, 3\} = 3$.

Le coefficient $\lfloor n \rfloor_r^{a,b}$ a été interprété par Shattuck [Sha14b] comme la distribution conjointe des statistiques $(nrec, rec^*)$ sur l'ensemble $\mathcal{P}_{n+r, k+r}^{(r)}$, c'est-à-dire

$$\lfloor n \rfloor_r^{a,b} = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}_{n+r, k+r}^{(r)}} a^{nrec(\lambda)} b^{rec^*(\lambda)}.$$

5.3.1 Interprétation combinatoire

Nous proposons dans cette partie un modèle combinatoire basé sur les partitions avec poids pour interpréter les coefficients $\lfloor n \rfloor_r^{a,b}$.

Soit $\Omega_{n,k}$ l'ensemble des distributions de $[n+r]$ sur $k+r$ listes non vides (un élément à la fois) tel que les r premiers éléments soient tous distribués dans des listes distinctes avec les conditions suivantes :

- (i) on attribue un poids b pour l'élément en tête de liste ;
- (ii) on attribue un poids a pour les autres éléments de la liste ;
- (iii) le premier élément placé dans une liste a un poids égal à 1.

Soit $\varepsilon \in \Omega_{n,k}$ une distribution ordonnée, on définit le poids de la distribution ε , notée $\omega(\varepsilon)$, par le produit des poids de chacun de ses éléments. Ainsi, le poids total de l'ensemble $\Omega_{n,k}$ est égal à la somme des poids de toutes les distributions de $\Omega_{n,k}$.

Ce raisonnement nous suggère le résultat suivant.

Théorème 5.3.1. *Pour tous $n \geq k \geq 0$, on a*

$$\lfloor n \rfloor_r^{a,b} = \sum_{\varepsilon \in \Omega_r(n,k)} \omega(\varepsilon). \quad (5.16)$$

n	k	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	$3a + 3b$	1			
3	1	$11a^2 + 18ab + 7b^2$	$6a + 6b$	1		
4	1	$50a^3 + 105a^2b + 70ab^2 + 15b^3$	$35a^2 + 60ab + 25b^2$	$10a + 10b$	1	
5	1	$274a^4 + 675a^3b + 595a^2b^2 + 225ab^3 + 31b^4$	$225a^3 + 510a^2b + 375ab^2 + 90b^3$	$85a^2 + 150ab + 65b^2$	$15a + 15b$	1

TAB. 5.5 – Les premiers polynômes 1-Lah généralisés, pour $n, k = 1, \dots, 5$.

n	k	1	2	3	4	5
1	1	1				
2	1	$5a + 5b$	1			
3	1	$26a^2 + 45ab + 19b^2$	$9a + 9b$	1		
4	1	$154a^3 + 335a^2b + 266ab^2 + 65b^3$	$71a^2 + 126ab + 55b^2$	$14a + 14b$	1	
5	1	$1044a^4 + 2900a^3b + 2945a^2b^2 + 1300ab^3 + 211b^4$	$580a^3 + 1395a^2b + 1100ab^2 + 285b^3$	$155a^2 + 280ab + 125b^2$	$20a + 20b$	1

TAB. 5.6 – Les premiers polynômes 2-Lah généralisés, pour $n, k = 1, \dots, 5$.

avec le poids β . Ainsi, le poids total de construire une telle partition est $(a(n+r) + b(k+r)) \lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$.

□

L'identité suivante est la relation de récurrence horizontale,

$$\left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r^{a,b} = \sum_{i=k}^n \left\lfloor \begin{smallmatrix} i-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right\rfloor_r^{a,b} (bk + (a+b)r|a)^{\overline{n-i}}. \quad (5.17)$$

Preuve. Pour obtenir le membre de droite de l'identité, nous commençons par placer l'élément " $n+r$ " dans une liste, puis on partitionne l'ensemble $[i+r-1]$ ($k \leq i \leq n$) en $k+r-1$ listes restantes, le poids total de ces partitions est $\lfloor \begin{smallmatrix} i-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$. Maintenant, on répartit les éléments de $[i+r, n+r-1]$ sur $k+r$ listes, le poids de cette répartition est $(bk + (a+b)r|a)^{\overline{n-i}}$. Enfin, il suffit d'additionner sur i pour trouver le résultat. □

$$\left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r^{a,b} = \sum_{i=0}^k (a(n+r-i-1) + b(k+r-1)) \left\lfloor \begin{smallmatrix} n-i-1 \\ k-i \end{smallmatrix} \right\rfloor_r^{a,b}. \quad (5.18)$$

Preuve. Soit i ($0 \leq i \leq k$) le nombre de listes qui contiennent exactement un élément, le poids de ces listes est égal à 1. Maintenant, il reste à compter le poids de distribuer les éléments de $[n+r-i]$ dans $k+r-1$ listes de telle sorte que r éléments sont dans des listes distinctes. Ainsi, le poids de la distribution de $[n+r-i-1]$ est $\lfloor \begin{smallmatrix} n-i-1 \\ k-i \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$, et il y a $n+2r-2i+k-1$ façons d'ajouter l'élément " $n+r-i$ " dans une liste avec un poids $(n+r-i-1) + (k+r-i)$. Nous concluons en additionnant sur i . □

$$\left\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_{r+s}^{a,b} = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} \left\lfloor \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \right\rfloor_r^{a,b} ((a+b)s|a)^{n-i}. \quad (5.19)$$

Preuve. Le membre de gauche compte le poids de la répartition de $[n+r+s]$ en $k+r+s$ listes telles que $r+s$ éléments sont dans des listes distinctes. Maintenant, nous montrons que le membre de droite compte le poids de la même distribution. Nous choisissons i ($k \leq i \leq n$) éléments de l'ensemble de n éléments. Il y a $\binom{n}{i}$ façons de le faire et le poids de la distribution des éléments $[i+r]$ en $k+r$ listes, telles que r éléments sont dans des listes distinctes, est donnée par $\lfloor \begin{smallmatrix} i \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$; et le poids de la distribution des $n-i+s$ éléments restants en s listes telles que s éléments soient dans s listes différentes est $((a+b)s|a)^{n-i}$. En additionnant sur i pour obtenir le résultat désiré.

□

5.3.3 Forme explicite

Nous allons fournir à présent la forme explicite pour les nombres $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$. Le résultat est obtenu par l'application du principe d'inclusion-exclusion.

Théorème 5.3.3. *Pour tous entiers $n \geq k \geq r$, on a*

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} = \frac{1}{b^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (b(k+r-j) + ar|a)^{\bar{n}}. \quad (5.20)$$

Preuve. Soit Φ l'ensemble de toutes les distributions de $[n+r]$ (un élément à la fois) sur $k+r$ listes ordonnées (pas nécessairement non-vides), telles que :

- (i) on assigne un poids b pour l'élément en tête de liste ;
- (ii) on assigne un poids a pour les autres l'éléments de liste.

Le poids total de l'ensemble Φ est égal au poids de ses partitions.

Maintenant, posons ∇ le sous ensemble des partitions qui ne contiennent pas des listes vides. Notre but est de calculer le poids du sous ensemble ∇ .

Pour tout j ($1 \leq j \leq k+r$), soit A_j le sous ensemble des partitions dont la j -ième liste est vide. Alors on a

$$\nabla = \overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+r}},$$

où $\overline{A_j} = \Phi \setminus A_j$ et $|\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap \cdots \cap \overline{A_{k+r}}| = |\Phi| - |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{k+r}|$.

Par l'application du principe d'inclusion-exclusion, on obtient,

$$|\nabla| = |\Phi| - \sum_{j=1}^{k+r} (-1)^j \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq k+r} |A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|.$$

Calculons le terme $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}|$. Pour un j fixé, il y a $\binom{k+r}{j}$ façons de choisir j listes vides parmi $k+r$. Et pour distribuer les $n+r$ éléments sur les $k+r-j$ listes telle que r éléments soient dans des listes distinctes. On commence par distribuer les r éléments sur r listes distinctes, d'où le premier élément a $k+r-j$ façons d'être placé ce qui donne un poids de $b(k+r-j)$. Le second élément a $k+r-j-1$ façons d'être placé avec un poids de $b(k+r-j-1)$, ainsi de suite jusqu'au r -ième élément qui a un poids de $b(k-j+1)$. D'où le poids des r éléments est

$$b(k+r-j)b(k+r-j-1) \cdots b(k-j+1) = b^r (k+r-j)^r.$$

Maintenant, il reste à distribuer les n éléments,

$$(b(k+r-j) + ar)(b(k+r-j) + a(r+1)) \cdots (b(k+r-j) + a(n+r-1)) = ((k+r-j)b + ar|a)^{\bar{n}}.$$

Ainsi, on a

$$|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_j}| = \binom{k+r}{j} b^r (k+r-j)^r ((k+r-j)b + ar|a)^{\bar{n}}.$$

et

$$|\nabla| = \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (b(k+r-j) + ar|a)^{\bar{n}}.$$

□

5.3.4 Ecriture en termes de fonction symétrique

Théorème 5.3.4. *Pour tous $n \geq k \geq r \geq 0$, on a*

$$\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r^{a,b} = \sum_{r \leq i_1 \leq \dots \leq i_k \leq n+r} \prod_{j=1}^k ((a+b)i_j + a(j-1)). \quad (5.21)$$

Preuve. La membre gauche de l'équation $\left[\begin{matrix} n+k \\ n \end{matrix} \right]_r^{a,b}$ compte le poids total de distribution de ensemble $[n+r+k]$ en $n+r$ listes ordonnées non-vides. Maintenant, on montre que le membre droite de l'équation compte la même chose :

D'abord, on constitue $n+r$ listes avec les éléments de $[n+r]$ (un par liste ayant chacun un poids 1). Puis on évalue le poids des éléments restants $[n+r+1, n+r+k]$.

Pour insérer l'élément " $n+1$ ", nous avons deux situations :

- (A1) si nous l'affectons aux r premières listes contenant un des éléments de $[r]$, on a r possibilités de l'affecter avec le poids $(a+b)r$,
- (A2) sinon, nous l'affectons à une liste désignée i_1 ($r+1 \leq i_1 \leq n+r$), nous devons considérer toutes les situations possibles de l'élément se trouvant dans la liste i_1 et nous distinguons deux autres cas :

- (i) en premier lieu, l'élément initial de la liste i_1 reste dans la liste (i1), l'élément " $n+1$ " est inséré avant l'élément initial avec un poids b ou après avec un poids a ,
- (ii) en second lieu, l'élément initial de la liste i_1 est déplacé dans les $i_1 - 1$ listes précédentes avec un poids $(a+b)(i_1 - 1)$ et nous insérons l'élément " $n+1$ " dans la liste i_1 avec un poids 1. Notons que l'on déplace les éléments seulement de droite à gauche pour éviter le double comptage des situations.

Ainsi, de (i) et (ii), le poids de l'élément $n+r+1$ est $(a+b)i_1$.

De (A1) et (A2), et en sommant sur toutes les insertions possibles de l'élément " $n+r+1$ ", on obtient le poids total des éléments de $[n+r+1]$ comme étant $\sum_{r \leq i_1 \leq n+r} (a+b)i_1$.

Maintenant, afin d'insérer l'élément " $n+r+2$ ", on considère les éléments des listes $1, \dots, i_1$ comme étant fixés. Ceci vient en conséquence de l'insertion de l'élément précédent $n+r+1$ où nous avons considéré toutes les distributions possibles. De même, nous avons deux situations (les mêmes que précédemment) :

- (B1) si l'on ajoute l'élément $n+r+2$ à l'une des listes $1, \dots, i_1$, le poids est égal à $((a+b)i_1 + a)$,
- (B2) sinon, il appartient à une liste i_2 ($i_1+1 \leq i_2 \leq n$), avec un poids $((a+b)i_2 + a)$ (en effet, le poids de l'élément $n+r+2$ est $(b+a)$ s'il est inséré avant ou après l'élément initial de la liste i_2 ou bien $(a+b)(i_2 - 1) + a$ s'il est inséré dans la liste i_2 , ensuit l'élément initial de la liste i_2 est déplacé dans les listes précédentes).

Alors, de (B1) et (B2) le poids de l'élément $n + r + 2$ est

$$((a + b)i_1 + a) + \sum_{i_2=i_1+1}^{n+r} (a + b)i_2 + a = \sum_{i_2=i_1}^{n+r} (a + b)i_2 + a.$$

En effet, le poids des éléments $n + 1$ et $n + 2$ est

$$\sum_{i_1=r}^{n+r} (a + b)i_1 \sum_{i_2=i_1}^{n+r} ((a + b)i_2 + a) = \sum_{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq n+r} ((a + b)i_1)((a + b)i_2 + a).$$

On procède de la même manière pour les $k - 2$ éléments restants. Ainsi, pour le dernier élément " $n + r + k$ ", on considère les éléments des listes $1, \dots, i_{k-1}$ comme étant fixés, alors le poids de l'élément $n + r + k$ est $(a + b)(i_{k-1} - 1) + a(k - 1)$ s'il est inséré dans ces listes ou alors, $(a + b)i_k + a(k - 1)$ s'il est inséré dans une liste i_k ($i_{k-1} + 1 \leq i_k \leq n + r$). Cela donne le poids total de distribution d'un ensemble $[n + r + k]$ sur $n + r$ listes ;

$$\sum_{r \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_k \leq n+r} ((a + b)i_1)((a + b)i_2 + a) \cdots ((a + b)i_k + a(k - 1)).$$

□

5.3.5 La fonction génératrice exponentielle

Théorème 5.3.5. La fonction génératrice exponentielle des coefficients $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \right\}_n$

$$\mathcal{G}_k(t; a, b) = \sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n}{n!}$$

satisfait la relation de récurrence différentielle suivante :

$$(1 - at) \frac{d}{dt} \mathcal{G}_k(t; a, b) - (bk + (a + b)r) \mathcal{G}_k(t; a, b) = \mathcal{G}_{k-1}(t; a, b), \quad (5.22)$$

avec la condition initiale $\mathcal{G}_0(t; a, b) = (1 - at)^{-(a+b)r/a}$.

Preuve. La relation (5.22) est obtenue en utilisant la relation de récurrence triangulaire :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} &= \sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k-1 \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + \sum_{n \geq k} (a(n-1) + bk + (a+b)r) \\ &\quad \cdot \left[\begin{smallmatrix} n-1 \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Cette dernière équation peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{G}_k(t; a, b) &= \mathcal{G}_{k-1}(t; a, b) + at \sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} + (bk + (a+b)r) \\ &\quad \cdot \sum_{n \geq k} \left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'où, on a

$$(1 - at) \frac{d}{dt} \mathcal{G}_k(t; a, b) - (bk + (a + b)r) \mathcal{G}_k(t; a, b) = \mathcal{G}_{k-1}(t; a, b).$$

□

Théorème 5.3.6. Les nombres r -Lah ont la fonction génératrice exponentielle suivante,

$$\sum_{n \geq k} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} (1 - at)^{-(a+b)r/a} \left(\frac{(1 - at)^{-b/a} - 1}{b} \right)^k. \quad (5.23)$$

Preuve. En multipliant l'expression (5.20) par $\frac{t^n}{n!}$ et en additionnant sur n , on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n}{n!} &= \sum_{n \geq 0} \frac{1}{b^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (b(k+r-j) + ar|a) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{b^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r \sum_{n \geq 0} (b(k+r-j) + ar|a) \frac{t^n}{n!} \\ &= \frac{1}{b^k (k+r)!} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} (k+r-j)^r (1 - at)^{\frac{-b(k+r-j)}{a} - r} \\ &= \frac{1}{b^k k!} (1 - at)^{-r(a+b)/a} \sum_{j=0}^{k+r} (-1)^j \binom{k+r}{j} \left((1 - at)^{b/a} \right)^{k-j} \\ &= \frac{1}{k!} (1 - at)^{-r(a+b)/a} \left(\frac{(1 - at)^{-b/a} - 1}{b} \right)^k. \end{aligned}$$

□

Corollaire 5.3.7. Soit $\mathcal{G}(t, u; a, b)$ la fonction génératrice double des coefficients $\left\{ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} \right\}_{n,k}$

$$\mathcal{G}(t, u; a, b) = \sum_{n,k \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n u^k}{n!},$$

alors, $\mathcal{G}(t, u; a, b)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$(1 - at) \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{G}(t, u; a, b) - bu \frac{\partial}{\partial u} \mathcal{G}(t, u; a, b) = ((a + b)r + u) \mathcal{G}(t, u; a, b). \quad (5.24)$$

La solution de l'équation (5.24) est donnée par,

$$\sum_{n,k \geq 0} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{a,b} \frac{t^n u^k}{n!} = (1 - at)^{-(a+b)r/a} \exp \left[\frac{u}{a} \left((1 - bt)^{-b/a} - 1 \right) \right]. \quad (5.25)$$

Preuve. Les équations (5.24) et (5.25) sont obtenues en utilisant les relations (5.22) et (5.23), respectivement. □

LE q ET p, q -ANALOGUES DES NOMBRES r -LAH

6.1 Introduction

Dans le chapitre précédent nous avons étudié certaines propriétés combinatoires des nombres r -Lah en utilisant l'interprétation combinatoire, il est aussi intéressant d'explorer le q -analogue des identités produites. Nous commençons ce chapitre par présenter le q -analogue des nombres de Lah introduit par Garsia et Remmel [GR80].

Par analogie au q -analogue des nombres de Stirling introduit par Gould et en utilisant les propriétés de la fonction génératrice q -exponentielle, Garsia et Remmel ont défini le q -analogue des nombres de Lah par la fonction génératrice double :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} x^k \frac{u^n}{[n]_q!} = E_q(-x) \sum_{k \geq 0} \frac{x^k}{[k]_q!} \frac{1}{(1-u)(1-uq) \cdots (1-uq^{k-1})}, \quad (6.1)$$

où $E_q(z)$ désigne la fonction génératrice q -exponentielle, $E_q(z) = \sum_{k \geq 0} q^{\binom{k}{2}} \frac{z^k}{[k]_q!}$.

Mentionnons qu'on peut obtenir la fonction génératrice (6.1) en utilisant la méthode présentée dans [GR86a] et qui consiste à résoudre une équation aux q -dérivées partielles.

Les auteurs ont également démontré par un argument combinatoire, que les coefficients $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)}$ correspondent aux coefficients dans le changement de base des q -polynômes factoriels

$$[x]_q [x+1]_q \cdots [x+n-1]_q = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} [x]_q [x-1]_q \cdots [x-k+1]_q.$$

Les coefficients q -Lah vérifient la récurrence suivante :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}^{(q)} = q^{n+k-1} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}^{(q)} + [n+k]_q \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)},$$

et ayant la forme explicite suivante

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} = q^{k(k-1)} \frac{[n]_q!}{[k]_q!} \binom{n-1}{k-1}_q.$$

Cette version de q -analogue est liée à celle proposée par Wagner [Wag96], notés $L_q(n, k)$, par la relation suivante :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} = q^{\binom{k}{2}} L_q(n, k).$$

Le coefficient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)}$ est interprété comme le polynôme générateur de l'ensemble des mots associés aux partitions de $[n]$ en k listes pour la statistique d'inversion. En effet, soient $\mathcal{P}_{n,k}$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k listes et π une partition de $\mathcal{P}_{n,k}$, pour construire le mot associé à la partition π on commence par arranger les listes de la partition π selon l'ordre décroissant du plus petit élément de chaque liste. Puis, nous remplaçons chaque cloison "/" par un "0", on obtient ainsi le mot associé à la partition. Il est clair que le mot obtenu est de longueur $n + k - 1$.

Par exemple, le mot associé à la partition $13/26/457 \in \mathcal{P}_{7,3}$ est 457026013.

Si on note par $\mathcal{WP}_{n,k}$ l'ensemble des mots issus des partitions de l'ensemble $\mathcal{P}_{n,k}$, alors

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^{(q)} = \sum_{\pi \in \mathcal{WP}_{n,k}} q^{\text{inv}(\pi)}.$$

Par exemple, le polynôme générateur de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}$ est $\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}^{(q)} = q^5 + 2q^4 + 2q^3 + q^2$. La table suivante représente les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}$ ainsi que les valeurs de la statistique d'inversion.

Partitions	Mots	nombre d'inversion
12/3	3012	$\text{inv}(3012) = 3$
21/3	3021	$\text{inv}(3021) = 4$
1/23	2301	$\text{inv}(2301) = 4$
1/32	3201	$\text{inv}(3201) = 5$
13/2	2013	$\text{inv}(2013) = 2$
31/2	2031	$\text{inv}(2031) = 3$

TAB. 6.1 – Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.

Suivant le modèle combinatoire proposé par Garsia et Remmel, nous définissons dans la première partie le q -analogue des nombres r -Lah par la distribution de la statistique d'inversion sur l'ensemble des mots associés aux partitions restreintes. Nous donnons le q -analogue des relations de récurrence présentées dans le chapitre précédent. En outre, nous définissons le q -analogue des nombres r -Stirling, quelques propriétés seront établis. Dans la seconde partie, nous prolongeons le modèle pour introduire le p, q -analogue des nombres r -Lah par la distribution conjointe des statistiques inversion et co-inversion sur les mots.

$n \ k$	0	1	2	3	4
0	1				
1	0	1			
2	0	$q+1$	q^2		
3	0	q^3+2q^2+2q+1	$q^5+2q^4+2q^3+q^2$	q^6	
4	0	$q^6+3q^5+5q^4+6q^3+5q^2+3q+1$	$q^9+3q^8+6q^7+8q^6+8q^5+6q^4+3q^3+q^2$	$q^{11}+2q^{10}+3q^9+3q^8+2q^7+q^6$	q^{12}

TAB. 6.2 – La table des coefficients q -Lah pour $n, k = 0, \dots, 4$.

6.2 Le q -analogue des nombres r -Lah

Soit $\mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$ l'ensemble des mots issus des partitions de $[n]$ en k listes non vides de sorte que les entiers $1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des listes distinctes. On définit le q -analogue des nombres r -Lah par la distribution de la statistique d'inversion sur l'ensemble $\mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$, c'est-à-dire

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \sum_{\pi \in \mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}} q^{\text{inv}(\pi)}. \quad (6.2)$$

Par exemple, le polynôme générateur de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ est $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]^{(q)} = q^5 + q^4 + q^3 + q^2$. La table suivante représente les mots associés aux partitions ainsi que les valeurs de la statistique d'inversion.

Partitions	Mots	nombre d'inversion
1/23	2301	$\text{inv}(2301) = 4$
1/32	3201	$\text{inv}(3201) = 5$
13/2	2013	$\text{inv}(2013) = 2$
31/2	2031	$\text{inv}(2031) = 3$

TAB. 6.3 – Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ et leurs nombres d'inversion.

De cette définition combinatoire on déduit immédiatement les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= q^{r(r-1)} [2r]_q [2r+1]_q \cdots [2r+n-1]_q, \\ \left[\begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= q^{n(n-1)} [2n-2]_q, \\ \left[\begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= q^{n(n-1)}. \end{aligned}$$

Théorème 6.2.1. *Pour tous entiers n, k, r tels que $0 \leq r \leq k \leq n$, les coefficients $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)}$ vérifient la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= 0, & n < r; \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= q^{r(r-1)} \delta_{k,r}, & n = r; \\ \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= q^{n+k-2} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} + [n+k-1]_q \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)}. & n > r. \end{aligned}$$

Preuve. Pour $n < r$ le résultat est évident. Pour $n = r = k$, l'ensemble $\mathcal{WP}_{r,r}^{(r)}$ contient un seul mot de longueur $2r - 1$ et il est de la forme suivante :

$$\pi = r0(r-1)0(r-2)0 \cdots 0201,$$

et son nombre d'inversion est $inv(\pi) = 2r - 2 + 2r - 4 + \cdots + 2 = r(r - 1)$.

Pour $n > r$, la relation de récurrence est obtenue en raisonnant sur le n -ème élément d'une partition $\pi \in \mathcal{P}_{n,k}^{(r)}$. Soit " n " est un singleton, alors le mot associé à cette partition a la forme $w = n0w'$, d'où la contribution de " n " pour la statistique d'inversion est $n - k - 2$ et le sous mot $w' \in \mathcal{WP}_{n-1,k-1}^{(r)}$. Soit " n " n'est pas un singleton, dans ce cas on construit un sous mot w'' associé à une partition de l'ensemble $\mathcal{P}_{n-1,k}^{(r)}$ puis on ajoute " n ", il y a $n + k - 2$ possibilités de le faire. D'où la contribution de " n " est $1 + q + q^2 + \cdots + q^{n+k-2} = [n + k - 1]_q$. En considérant les deux situations on obtient le résultat. \square

La forme explicite du q -analogue des nombres r -Lah est donnée par le théorème suivant.

Théorème 6.2.2. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = q^{k(k-1)} \frac{[n+r-1]_q!}{[k+r-1]_q!} \binom{n-r}{k-r}_q. \quad (6.3)$$

Preuve. Soit π' une partition de l'ensemble $\mathcal{P}_{n,k}^{(r)}$, on construit π' comme suit :

On commence par placer les r premiers éléments dans r listes différentes, et on choisit un sous ensemble S de $k - r$ éléments parmi $[r + 1, n]$ pour former les $k - r$ listes restantes (on considère que les $k - r$ éléments sont les têtes de listes). Le mot associé à cette partition ordonnée à la forme suivante :

$$w' = x_1 0 x_2 0 \cdots x_{k-r} 0 r 0 (r-1) 0 \cdots 01,$$

la valeur d'inversion de w' est donnée par le nombre d'inversion de l'ensemble S plus le nombre d'inversion de π' , ainsi :

$$inv(w') = inv(S) + k(k-1).$$

Ensuite, on ajoute les $n - k$ éléments restants, tout en autorisant que ces éléments puissent être placés soit avant ou après les r premiers éléments ou bien uniquement après les éléments de S .

$$q^{k(k-1)} \binom{n-r}{k-r}_q [k+r]_q [k+r+1]_q \cdots [n+r-1]_q,$$

ce qui correspond au membre de droite de l'équation (6.3). \square

Théorème 6.2.3. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$[x + 2r]_q^{\uparrow n} = q^{-r(r-1)} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^{(q)} [x]_q^{\downarrow k}. \quad (6.4)$$

Preuve. Notons par $\mathcal{WEP}_{n+r,x+r}^{(r)}$ les mots issus des partitions de l'ensemble $\mathcal{EP}_{n+r,x+r}^{(r)}$ voir la sous section 6.2.2. L'équation (6.4) correspond à la distribution de la statistique d'inversion sur les mots de $\mathcal{WEP}_{n+r,x+r}^{(r)}$, c'est-à-dire

$$\sum_{w \in \mathcal{WEP}_{n+r,x+r}^{(r)}} q^{\text{inv}(w)}.$$

Pour compter cette somme, nous allons utiliser la construction présentée dans la démonstration de l'identité (6.13). On commence par compter le nombre d'inversions du mot

$$w' = 00 \cdots 0r0r - 10 \cdots 01,$$

ainsi, le nombre d'inversions de w' est $2r - 2 + 2r - 4 + \cdots + 2 = r(r - 1)$. Ensuite, on ajoute les éléments de $[r + 1, n + r]$ au mot w' , la contribution du i -ème élément de l'ensemble $[r + 1, n + r]$ pour le nombre d'inversion est $[x + 2r + i - 1]_q$. Ainsi, on obtient

$$\sum_{w \in \mathcal{WEP}_{n+r,x+r}^{(r)}} q^{\text{inv}(w)} = q^{r(r-1)} [x + 2r]_q [x + 2r + 1]_q \cdots [x + 2r + n - 1]_q.$$

Maintenant, nous considérons un mot w de l'ensemble $\mathcal{WEP}_{n+r,x+r}^{(r)}$ associé à une partition contenant k ($0 \leq k \leq n$) listes non vides, alors w peut être obtenu à partir d'un mot $w'' \in \mathcal{P}_{n+r,k+r}^{(r)}$ auquel on ajoute $x - k$ "0". Ainsi le nombre d'inversion de w est donné par

$$q^{\text{inv}(w)} = q^{\text{inv}(w'')} [x - k + 1]_q [x - k + 2]_q \cdots [x]_q.$$

où $[x - k + 1]_q [x - k + 2]_q \cdots [x]_q$ est le nombre d'inversion entre les w'' et les $x - k$ "0". Enfin, il suffit de sommer sur k pour trouver le membre de droite de l'équation. \square

Corollaire 6.2.4. *Pour tous $n \geq k \geq r$, l'équation (6.4) s'écrit aussi comme suit :*

$$[x + r]_q^{\uparrow n} = q^{-r(r-1)} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n + r \\ k + r \end{bmatrix}_r^{(q)} [x - r]_q^{\downarrow k}. \quad (6.5)$$

l'équation (6.5) a la forme dual suivante :

$$[x - r]_q^{\downarrow n} = q^{-r(r-1)+n(x-r)-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} q^{-k(x+r)-\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n + r \\ k + r \end{bmatrix}_r^{(q)} [x + r]_q^{\uparrow k}. \quad (6.6)$$

Preuve. La relation (6.6) est obtenue en substituant x par $-x$ dans la relation (6.5) et en tenant compte du fait $[-z]_q = -[z]_q / q^z$. \square

6.3 Relations de récurrence

Nous allons donner dans cette section le q -analogue des relations de récurrence présentées dans le chapitre précédent.

Théorème 6.3.1. Pour tous $n \geq k \geq r$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = q^{k+r-1} [k-r+1]_q \frac{[n+r-2]_q}{[k+r-1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{r-1}^{(q)} + q^{2k-2} \frac{[n+r-2]_q}{[k+r-2]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(q)}. \quad (6.7)$$

Preuve. L'expression est obtenue en utilisant le Théorème 6.2.2 et la relation de récurrence triangulaire des coefficients q -binomiaux. \square

Corollaire 6.3.2. Pour $r = 1$, les q -nombres de Lah classiques satisfont la relation de récurrence suivante

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^k [n-1]_q \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^{(q)} + q^{2k-2} \frac{[n-1]_q}{[k-1]_q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}^{(q)}. \quad (6.8)$$

Théorème 6.3.3. Pour tous $n \geq k \geq r \geq s$, la relation de récurrence verticale est donnée par :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = \sum_{j=0}^{n-k} q^{2(n-j-1)} [j+1]_q! \binom{n-r}{j}_q \begin{bmatrix} n-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(q)}. \quad (6.9)$$

Preuve. Soit le mot $w \in \mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$ alors π a la forme suivante :

$$w = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n+k-j-3}} 0 x_{i_{n+k-j-2}} x_{i_{n+k-j-1}} \cdots x_{i_{n+k}}.$$

Le mot w est obtenu à partir du triplet (S, μ, π') où S représente un sous ensemble contenant l'élément "1" et j autres éléments choisis parmi $\{r+1, r+2, \dots, n\}$, μ est le sous ensemble des permutations de S et w' est le sous mot formé de l'ensemble $\mathcal{WP}_{n-j-1, k-1}^{(r-1)}$. Ainsi, on a

$$\text{inv}(w) = \text{inv}(w') + \text{inv}(S) + \text{inv}(\mu) + 2(n-j),$$

où $2(n-j)$ correspond au nombre d'inversions entre le sous mot $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n+k-j-3}}$ et "0", "1".

$$q^{\text{inv}(\pi)} = q^{2(n-j-1)} [j+1]_q! \binom{n-r}{j}_q \begin{bmatrix} n-j-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1}^{(q)}.$$

En sommant sur toutes les valeurs de j , on obtient la relation (6.9). \square

La relation de récurrence (6.9) peut être généralisée comme suit :

Théorème 6.3.4. Pour tous $n \geq k \geq r \geq s$, on a

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = \sum_{m=0}^{n-k} \sum_{i_1+\dots+i_s=m} q^{2s(n-m-s)} [i_1+1]! \cdots [i_s+1]! \binom{n-r}{i_1, \dots, i_s, n-r-m}_q \begin{bmatrix} n-m-s \\ k-s \end{bmatrix}_{r-s}^{(q)}. \quad (6.10)$$

Preuve. Soit le mot $\pi \in \mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$, alors π peut avoir la forme suivante :

$$\pi = x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_{n+k-j-3}} 0 x_{j_{1,1}} \cdots x_{j_{1,i_1}} 0 x_{j_{2,1}} \cdots x_{j_{2,i_2}} 0 \cdots 0 x_{j_{s,1}} \cdots x_{j_{s,i_s}}.$$

Le mot π est obtenu à partir du triplet (S, μ, π') où $S = (S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_s})$ avec $\sum_{j=1}^s S_{i_j} = m$, représente des sous ensembles contenant les s premiers éléments et i_1, i_2, \dots, i_s éléments choisis parmi $\{r+1, r+2, \dots, n\}$, respectivement. $\mu = (\mu_{i_1}, \mu_{i_2}, \dots, \mu_{i_s})$ où μ_{i_l} ($1 \leq l \leq s$) est l'ensemble des permutations de S_{i_l} et π' est un mot de l'ensemble $\mathcal{WP}_{n-m-1, k-s}^{(r-s)}$.

Ainsi, le nombre d'inversion sur le mot π est

$$\text{inv}(\pi) = \text{inv}(\pi') + \sum_{l=1}^s \text{inv}(S_{i_l}) + \text{inv}(\mu_{i_l}) + 2s(n-m-s),$$

d'où

$$q^{\text{inv}(\pi)} = q^{2s(n-m-s)} [i_1 + 1]! \cdots [i_s + 1]! \binom{n-r}{i_1, \dots, i_s, n-r-m}_q \left[\begin{matrix} n-m-s \\ k-s \end{matrix} \right]_{r-s}^{(q)}.$$

En sommant toutes les valeurs de m on obtient la relation (6.10). \square

Théorème 6.3.5. Pour tous $n \geq k \geq r$, la relation de récurrence horizontale est donnée par :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \sum_{j=0}^{n-k} (-1)^j \frac{[n+k+1]_{\uparrow j}}{q^{(j+1)(n+k)+\binom{j+1}{2}}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+j+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)}. \quad (6.11)$$

Preuve. De la relation de récurrence triangulaire, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \frac{1}{q^{n+k}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} - \frac{[n+k+1]}{q^{n+k}} \left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)},$$

on développe encore le terme $\left[\begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)}$ par la relation de récurrence, on obtient :

$$\begin{aligned} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} &= \frac{1}{q^{n+k}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} - \frac{[n+k+1]}{q^{2(n+k)+1}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+2 \end{matrix} \right]_r^{(q)} + \frac{[n+k+1][n+k+2]}{q^{2(n+k)+1}} \left[\begin{matrix} n \\ k+2 \end{matrix} \right]_r^{(q)} \\ &= \frac{1}{q^{n+k}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} - \frac{[n+k+1]}{q^{2(n+k)+1}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+2 \end{matrix} \right]_r^{(q)} + \frac{[n+k+1][n+k+2]}{q^{3(n+k)+3}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+3 \end{matrix} \right]_r^{(q)} \\ &\quad - \frac{[n+k+1][n+k+2][n+k+3]}{q^{3(n+k)+3}} \left[\begin{matrix} n \\ k+3 \end{matrix} \right]_r^{(q)} \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{1}{q^{n+k}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} - \frac{[n+k+1]}{q^{2(n+k)+1}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+2 \end{matrix} \right]_r^{(q)} + \frac{[n+k+1][n+k+2]}{q^{3(n+k)+3}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ k+3 \end{matrix} \right]_r^{(q)} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{n-k} \frac{[n+k+1][n+k+2] \cdots [2n]}{q^{(n-k+1)(n+k)+\binom{n-k+1}{2}}} \left[\begin{matrix} n+1 \\ n+1 \end{matrix} \right]_r^{(q)}. \end{aligned}$$

Ainsi on obtient le résultat. \square

6.4 La fonction génératrice q -exponentielle

Nous donnons ici la fonction génératrice q -exponentielle de la suite $\{\lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)}\}_n$.

Théorème 6.4.1. Pour tous $n \geq k \geq r \geq 0$, soit $\mathcal{G}_{k,r}(t; q)$ la fonction génératrice exponentielle de $\{\lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)}\}_n$ donnée par :

$$\mathcal{G}_{k,r}(t; q) = \sum_{n \geq k} \lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)} \frac{t^n}{[n]_q!}.$$

Alors, la suite $\{\mathcal{G}_{k,r}(t; q)\}_k$ vérifie la relation de récurrence suivante :

$$(1 - q^{k+2r}t) \frac{d_q}{d_q t} \mathcal{G}_{k,r}(t; q) - [k+2r]_q \mathcal{G}_{k,r}(t; q) = q^{k+2r-1} \mathcal{G}_{k-1,r}(qt; q). \quad (6.12)$$

avec la condition initiale $\mathcal{G}_{0,r}(t; q) = \frac{q^{r(r-1)}}{(1-t)(1-tq)\cdots(1-tq^{2r-1})}$.

Preuve. Le résultat est obtenu en utilisant la relation de récurrence triangulaire et le fait que $[z-s]_q = q^{-s}([z]_q - [s]_q)$ et $[-z]_q = -[z]_q/q^z$. \square

Théorème 6.4.2. Pour tous $n \geq k \geq r$, on a

$$\sum_{n \geq k} \lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)} \frac{t^n}{[n]_q!} = q^{2\binom{k+r}{2}} \frac{t^k}{[k]_q! (1-t)(1-tq)\cdots(1-tq^{k+2r-1})}. \quad (6.13)$$

Preuve. En utilisant le Théorème 6.2.2, on a

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq k} \lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)} \frac{t^n}{[n]_q!} &= \sum_{n \geq k} q^{2\binom{k+r}{2}} \frac{[n]_q!}{[k]_q!} \binom{n+2r-1}{k+2r-1}_q \frac{t^n}{[n]_q!} \\ &= q^{2\binom{k+r}{2}} \frac{t^k}{[k]_q!} \sum_{n \geq k} \binom{n+2r-1}{n-k}_q t^{n-k} \\ &= q^{2\binom{k+r}{2}} \frac{t^k}{[k]_q!} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k+2r-1}{n}_q t^n. \end{aligned}$$

En tenant compte du fait que la fonction génératrice des coefficients q -binomiaux s'écrit comme suit :

$$\sum_{j \geq 0} \binom{j+k-1}{j}_q t^j = \frac{1}{(1-t)(1-tq)\cdots(1-tq^{k-1})},$$

on obtient le résultat. \square

L'identité suivante est une conséquence directe du Théorème 6.4.2, cette identité est obtenue par le développement du produit des fonctions génératrices exponentielles des suites $\{\lfloor_{k+r}^{n+r}\rfloor_r^{(q)}\}_n$ et $\{\lfloor_{l+s}^{n+s}\rfloor_s^{(q)}\}_n$.

Corollaire 6.4.3. Pour tous $n \geq k \geq r$, on a

$$\binom{k+l}{k}_q \lfloor_{k+l+r+s}^{n+r+s}\rfloor_{r+s}^{(q)} = \sum_{j=0}^{n-k} \binom{n-r}{n-r-s}_q \lfloor_{k-r}^{j-r}\rfloor_r^{(q)} \lfloor_{l-s}^{n-j-s}\rfloor_s^{(q)}. \quad (6.14)$$

6.5 La relation avec le q -analogue des nombres r -Stirling

La présente section a pour objet d'introduire un q -analogue des nombres r -Stirling de première et deuxième espèces et d'étudier le q -analogue de certaines propriétés.

6.5.1 Le q -analogue des nombres r -Stirling de première & deuxième espèces

On définit le q -analogue des nombres r -Stirling de première et deuxième espèces par les relations de récurrence suivantes :

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = q^{n-1} \left[\begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right]_r^{(q)} + [n-1]_q \left[\begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)}. \quad (6.15)$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = q^{k-1} \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\}_r^{(q)} + [k]_q \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)}. \quad (6.16)$$

avec les conditions initiales $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = 0$ si $n < r$, $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = q^{\binom{n}{2}} \delta_{k,r}$ si $n = r$.

Pour $r = 1$, on obtient le q -analogue des nombres de Stirling de deuxième espèce introduit par Milne [Mil78, Mil82] et interprété par la distribution de la statistique "right smaller" sur des fonctions à croissance restreinte, aussi Garssia et Remmel [GR86b] ont proposé un modèle combinatoire en terme de placement de tours sur le diagramme de Ferrer. Le coefficient $q^{-\binom{k}{2}} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(q)}$ correspond à la version introduite Carlitz [Car33, Car48] et étudié par Gould [Gou68]. Le coefficient $q^{-\binom{n}{2}} \left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(q)}$ correspond au q -analogue des nombres de Stirling de première espèce définis par Gould [Gou68]. On peut trouver dans la littérature d'autres q -analogues des nombres r -Stirling [Cor14], [SCJB10]. Mentionnons aussi que ce q -analogue des nombres r -Stirling est lié à la version proposée par Charalambides [Cha04] par la relation suivante :

$$\left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = q^{\binom{k+r}{2}} S_q(n, k; r) \quad \text{et} \quad \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(q)} = (-1)^{n+r} q^{\binom{n+r}{2}} s_q(n, k; r).$$

Nous allons à présent fournir une interprétation combinatoire des coefficients $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}^{(q)}$ et $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]^{(q)}$.

Une *inversion*, notée inv^p , dans une partition $\pi = B_1/B_2/\dots/B_k$ est une paire de la forme (b, B_j) , où $b \in B_i$, $i < j$ et $b > \min B_j$, voir [Sag91]. Le nombre d'inversions d'une partition en blocs est donnée par :

$$inv^p(\pi) = \#\{(b, B_j) \text{ où } b \in B_i \text{ et } b > \min B_j \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Par exemple, l'ensemble des inversions de la partition $\pi = 143/28/659/7$ est $\{(4, 2), (3, 2), (8, 3), (8, 4), (9, 4)\}$, d'où le nombre d'inversion est $inv^p(\pi) = 5$.

Soit $\mathcal{B}_{n,k}^{(r)}$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k blocs de telle sorte que les blocs sont arrangés selon l'ordre décroissant du plus petit élément de chaque bloc et les entiers

$1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des blocs distincts. Ainsi, le coefficient $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)}$ est interprété comme la distribution de la statistique inv^p sur l'ensemble $\mathcal{B}_{n,k}^{(r)}$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = \sum_{\gamma \in \mathcal{B}_{n,k}^{(r)}} q^{inv^p(\gamma)}. \quad (6.17)$$

Par exemple, la distribution de inv^p sur l'ensemble $\mathcal{B}_{4,2}^{(2)}$ nous donne $\left\{ \begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right\}_2^{(q)} = q^3 + 2q^2 + q$. La table ci-dessous illustre les partitions de $\mathcal{B}_{4,2}^{(2)}$ et le nombre d'inversions de chaque partition.

Partition π	Partition π^*	nombre d'inversions
134/2	2/134	$inv^p(2/134) = 1$
234/1	234/1	$inv^p(234/1) = 3$
13/24	24/13	$inv^p(24/13) = 2$
14/23	23/14	$inv^p(23/14) = 2$

TAB. 6.4 – Les mots de l'ensemble $\mathcal{B}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.

Similairement, on définit une inversion dans une partition en cycles $[C_1][C_2] \cdots [C_k]$ par la paire (c_i, c_j) où $c_i > c_j$ et $i < j$. Le nombre d'inversions d'une partition en cycles est donnée par

$$inv^c(C) = \#\{(c_i, c_j) \text{ où } c_i > c_j \text{ pour } 1 \leq i < j \leq n\}.$$

Par exemple, l'ensemble des inversions de la partition en cycle $C = [1, 5, 3][6, 4][2, 7]$ est $\{(5, 3), (5, 4), (5, 2), (3, 2), (6, 4), (6, 2), (4, 2)\}$, d'où le nombre des inversions dans cette partition est $inv^c(C) = 7$.

Soit $\mathcal{C}_{n,k}^{(r)}$ l'ensemble des partitions de $[n]$ en k cycles de telle sorte que les cycles sont arrangés selon l'ordre décroissant du plus petit élément de chaque cycle et les entiers $1, 2, \dots, r$ soient tous distribués dans des blocs distincts. Le coefficient $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)}$ correspond à la distribution de la statistique inv^c sur l'ensemble $\mathcal{C}_{n,k}^{(r)}$

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \sum_{C \in \mathcal{C}_{n,k}^{(r)}} q^{inv^c(C)}. \quad (6.18)$$

Par exemple, la distribution de inv^c sur l'ensemble $\mathcal{C}_{4,2}^{(2)}$ nous donne $\left[\begin{matrix} 4 \\ 2 \end{matrix} \right]_2^{(q)} = q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q$, le nombre d'inversions de chaque partition en cycles est donnée dans la table suivante :

Partition π	Partition π^c	nombre d'inversions
[1, 3][2, 4]	[2, 4][1, 3]	$inv^c([2, 4][1, 3]) = 3$
[1, 3, 4][2]	[2][1, 3, 4]	$inv^c([2][1, 3, 4]) = 1$
[1, 4, 3][2]	[2][1, 4, 3]	$inv^c([2][1, 4, 3]) = 2$
[1, 4][2, 3]	[2, 3][1, 4]	$inv^c([2, 3][1, 4]) = 2$
[1][2, 3, 4]	[2, 3, 4][1]	$inv^c([2, 3, 4][1]) = 3$
[1][2, 4, 3]	[2, 4, 3][1]	$inv^c([2, 4, 3][1]) = 4$

TAB. 6.5 – L'ensemble $\mathcal{C}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs de la statistique d'inversion.

6.5.2 Le q -analogue des propriétés classiques

Théorème 6.5.1. Pour tous $n \geq k \geq r \geq p \geq 0$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = \sum_{j \geq 0} q^{r(n-p-j) + \binom{j}{2}} \binom{n-r}{j} \begin{bmatrix} n-p-j \\ k-p \end{bmatrix}_{r-p}^{(q)} [p]_q^j. \quad (6.19)$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = \sum_{j \geq 0} q^{r(n-p-j) + \binom{j}{2}} \binom{n-r}{j} \left\{ \begin{matrix} n-p-j \\ k-r \end{matrix} \right\}_{r-p}^{(q)} [p]_q^j. \quad (6.20)$$

Si on pose $p = r$ dans les relations précédentes on obtient la relation qui exprime le q -analogue des nombres r -Stirling en termes du q -analogue des nombres de Stirling :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(q)} = \sum_{j \geq 0} q^{rj + \binom{j}{2}} \binom{n-r}{j} \begin{bmatrix} j \\ k-r \end{bmatrix}_r^{(q)} [r]_q^{\uparrow n-r-j},$$

et

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} = \sum_{j \geq 0} q^{rj + \binom{j}{2}} \binom{n-r}{j} \left\{ \begin{matrix} j \\ k-r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [r]_q^{n-r-j}.$$

Théorème 6.5.2. Pour tous $n \geq k \geq r \geq 0$, on a la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n = z^k q^{\binom{k}{2}} \prod_{j=0}^k q^{r+j} (1 - z[r+j]_q)^{-1}. \quad (6.21)$$

Preuve. En multipliant la relation de récurrence (6.16) par z^n et en sommant sur toute les valeurs de $n \geq k$, on a

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n = q^{k+r-1} \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r-1 \\ k+r-1 \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n + [k+r]_q \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r-1 \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n.$$

En posant $G_k(z; q) := \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n$, on obtient la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} G_k(z; q) &= q^{k+r-1} z G_{k-1}(z; q) + z[k+r]_q G_k(z; q) \\ &= \frac{q^{k+r-1} z}{1 - z[k+r]_q} G_{k-1}(z; q), \end{aligned}$$

en réitérant cette relation de récurrence k -fois tout en tenant compte de la valeur initiale de la suite $\{G_k(z; q)\}_k$, on obtient

$$G_0(z; q) = \sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} z^n = \sum_{n \geq k} q^{\binom{n}{2}} [r]_q^n z^n = q^{\binom{n}{2}} (1 - z[r]_q)^{-1}.$$

□

Théorème 6.5.3. Pour tous $n \geq k \geq r \geq 0$, on a

$$[x+r]_q^n = q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^n \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [x]_q^{\downarrow k}. \quad (6.22)$$

et

$$[x+r]_q^{\uparrow n} = q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k=0}^n \left[\begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right]_r^{(q)} [x]_q^k, \quad (6.23)$$

Preuve. Pour démontrer la relation (6.23) on procède par induction sur n . Pour $n = 0$ le résultat est évident, maintenant supposons que le résultat est vrai pour tout $m \leq n$

En utilisant la relation de récurrence (6.16) et en tenant compte du fait que $[x]_q [x]_q^{\downarrow k} = q^k [x]_q^{\downarrow k+1} + [k]_q [x]_q^{\downarrow k}$, on a

$$\begin{aligned} [x+r]_q [x+r]_q^n &= q^{-\binom{n}{2}} [x+r]_q \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [x]_q^{\downarrow k} \\ &= q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [r]_q [x]_q^{\downarrow k} + q^{-\binom{n}{2}+r} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [x]_q [x]_q^{\downarrow k} \\ &= q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [r]_q [x]_q^{\downarrow k} + q^{-\binom{n}{2}+r} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} q^k [x]_q^{\downarrow k+1} \\ &\quad + q^{-\binom{n}{2}+r} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [k]_q [x]_q^{\downarrow k} \\ &= q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [k+r]_q [x]_q^{\downarrow k} + q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r-1 \end{matrix} \right\}_r^{(q)} q^{k+r-1} [x]_q^{\downarrow k} \\ &= q^{-\binom{n}{2}} \sum_{k \geq 0} \left\{ \begin{matrix} n+r+1 \\ k+r \end{matrix} \right\}_r^{(q)} [x]_q^{\downarrow k}, \end{aligned}$$

ainsi, s'achève la preuve.

Pour l'équation (6.23) on procède de manière similaire en considérant la relation de récurrence (6.15). □

Dans le résultat suivant, nous donnons la relation entre le q -analogue des nombres r -Stirling et des nombres r -Lah.

Théorème 6.5.4. Pour tous $n \geq k \geq r$, on a

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(q)} = \sum_{j=k}^n \left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}_r^{(q)} \left[\begin{matrix} n \\ j \end{matrix} \right]_r^{(q)}. \quad (6.24)$$

Preuve. Le résultat est obtenu directement à partir des relations (6.23), (6.22) et (6.4). \square

6.6 Le p, q -analogue des nombres r -Lah

Nous introduisons dans cette dernière section le p, q -analogue des nombres r -Lah.

Soit $w = w_1 w_2 \dots w_n$, la statistique co-inversion, notée $coinv$, est définie par

$$coinv = \#\{(i, j) : 1 \leq i < j \leq n \text{ et } w_i < w_j\}.$$

Par exemple, si $w = 326415$, alors l'ensemble des co-inversion est $\{(3, 6), (3, 4), (2, 6), (2, 4), (2, 5), (4, 5), (1, 6)\}$, d'où la valeur de statistique co-inversion est $coinv(w) = 7$.

Définition 6.6.1. Pour tous entiers n, k et r de sorte que $0 \leq r \leq k \leq n$, on définit le p, q -analogue des nombres r -Lah par

$$\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(p,q)} = \sum_{\pi \in \mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}} p^{inv(\pi)} q^{coinv(\pi)}.$$

Le coefficient $\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]_r^{(p,q)}$ est défini comme le polynôme générateur de l'ensemble $\mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$ pour la paire de statistique $(inv, coinv)$.

Par exemple, la distribution des statistiques $(inv, coinv)$ sur l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}$ est $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_2^{(p,q)} = p^5 q + 2p^4 q^2 + 2p^3 q^3 + p^2 q^4$. La table suivante représente les mots associés aux partitions ainsi que les valeurs des statistiques d'inversion et co-inversion.

Partitions	Mots	valeur d'inversion	valeur co-inversion
12/3	3012	$inv(3012) = 3$	$coinv(3012) = 3$
21/3	3021	$inv(3021) = 4$	$coinv(3021) = 2$
1/23	2301	$inv(2301) = 4$	$coinv(2301) = 2$
1/32	3201	$inv(3201) = 5$	$coinv(3201) = 1$
13/2	2013	$inv(2013) = 2$	$coinv(2013) = 4$
31/2	2031	$inv(2031) = 3$	$coinv(2031) = 3$

TAB. 6.6 – Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(1)}$ et leurs nombres d'inversion et co-inversion.

La distribution sur l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ nous donne $\left[\begin{matrix} 3 \\ 2 \end{matrix} \right]_2^{(p,q)} = p^5 q + p^4 q^2 + p^3 q^3 + p^2 q^4$.

Théorème 6.6.2. Pour tous entiers n, k, r tels que $0 \leq r \leq k \leq n$, les nombres $\left[\begin{matrix} n \\ r \end{matrix} \right]_r^{(p,q)}$ vérifient la relation de récurrence suivante :

Partitions	Mots	valeur d'inversion	valeur co-inversion
1/23	2301	$inv(2301) = 4$	$coinv(2301) = 2$
1/32	3201	$inv(3201) = 5$	$coinv(3201) = 1$
13/2	2013	$inv(2013) = 2$	$coinv(2013) = 4$
31/2	2031	$inv(2031) = 3$	$coinv(2031) = 3$

TAB. 6.7 – Les mots de l'ensemble $\mathcal{WP}_{3,2}^{(2)}$ et les valeurs des statistiques inversion et co-inversion.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)} &= 0, & n < r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)} &= p^{r(r-1)} q^{\binom{r}{2}} \delta_{k,r}, & n = r; \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)} &= p^{n+k-2} q^{n-2} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r^{(p,q)} + [n+k-1]_{p,q} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)}, & n > r. \end{aligned}$$

Preuve. La relation de récurrence est obtenue d'une manière similaire que la relation de récurrence donnée par le Théorème 6.2.1. \square

Théorème 6.6.3. Pour tous $n \geq k \geq r$, on a

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)} = q^{\binom{k}{2}} p^{k(k-1)} \frac{[n+r-1]_{p,q}!}{[k+r-1]_{p,q}!} \binom{n-r}{k-r}_{p,q}. \quad (6.25)$$

Preuve. Soit π un mot de l'ensemble $\mathcal{WP}_{n,k}^{(r)}$ on construit π' comme suit :

On commence par placer les r premiers éléments dans des r listes différentes, et on choisit un sous ensemble S formé de $k-r$ éléments parmi les $n-r$ éléments restants pour former les $k-r$ listes restantes (on considère que les $k-r$ éléments sont les têtes des listes). Le mot associé à cette partition ordonnée à la forme suivante

$$\pi' = x_1 0 x_2 0 \cdots x_{k-r} 0 r 0 (r-1) 0 \cdots 0 1,$$

d'où la valeur d'inversion de π' est donnée par le nombre d'inversion de l'ensemble S plus le nombre d'inversion des éléments de π' :

$$inv(\pi') = inv(S) + k(k-1), \quad coinv(\pi') = coinv(S) + \binom{k}{2}.$$

Maintenant, on ajoute les $n-k$ éléments restants, tout en autorisant que ces éléments puissent être placés avant ou après les r premiers éléments. Ainsi,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(p,q)} = q^{\binom{k}{2}} p^{k(k-1)} \binom{n-r}{k-r}_{p,q} [k+r]_{p,q} [k+r+1]_{p,q} \cdots [n+r-1]_{p,q}.$$

\square

Théorème 6.6.4. *Pour tous $n \geq k \geq r$, on a*

$$[x + 2r]_{p,q}^{\uparrow n} = q^{-\binom{r}{2}} p^{-2\binom{r}{2}} \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}^{(p,q)} [x-r]_{p,q}^{\downarrow k}. \quad (6.26)$$

Preuve. Cette relation est obtenue de la même manière que la relation (6.4). \square

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Au cours de cette thèse, nous avons apporté une contribution à l'énumération et la q -énumération des pavages linéaires et les partitions ordonnées.

Dans la première partie, nous avons étudié la suite incomplète de Fibonacci et la suite hyper-Fibonacci à l'aide des modèles combinatoires. Cette approche nous a permis de donner une explication combinatoire de certaines identités. Ensuite, nous avons proposé deux algorithmes permettant d'établir une bijection entre les pavages linéaires et les polyominos verticalement convexes dirigés. Dans cette étude il reste de nombreux problèmes à résoudre : par exemple caractériser les ensembles de pavages linéaires qui sont en bijection avec les familles de polyominos convexes et/ou dirigés, généraliser les algorithmes proposés pour établir une bijection avec les polycubes verticalement convexes dirigés ou encore étudier la distribution des statistiques Mahoniennes sur les polyominos. Dans le chapitre 3, une version unificatrice des q -polynômes Fibonacci bivarié a été proposée en considérant la distribution d'une statistique sur les pavages.

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous avons exploré les propriétés combinatoires des nombres r -Lah à l'aide des partitions ordonnées restreintes. Après avoir étudié les différentes relations de récurrence des nombres r -Lah dans la première partie du chapitre 5, nous nous sommes intéressés à une généralisation de ces nombres, noté $\lfloor \begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix} \rfloor_r^{a,b}$, où a et b sont des indéterminées. Nous avons établi certaines propriétés combinatoires à l'aide d'une interprétation en termes de partitions avec poids. Dans le chapitre 6, nous avons introduit les q et p, q -analogues des nombres r -Lah par la distribution des statistiques inv et $(inv, coinv)$ sur les mots associés aux partitions ordonnées, respectivement. Cette interprétation nous a permis d'établir le q -analogue des propriétés étudiées dans le chapitre précédent ainsi qu'une relation avec le q -analogue des nombres r -Stirling. Il serait intéressant d'étudier la distribution conjointe d'autres statistiques tels que le nombre d'indice majeur et le nombre de descentes sur les partitions ordonnées.

BIBLIOGRAPHIE

- [AB87] G. E. Andrews and R. J. Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model. III. q -trinomial coefficients. *J. Statist. Phys.*, 47(3-4) :297–330, 1987. (Cité en page 11.)
- [ABB14] M. Ahmia, H. Belbachir, and A. Belkhir. The log-concavity and log-convexity properties associated to hyperpell and hyperpell-lucas sequences. *Ann. Math. Inform.*, 43 :3–12, 2014. (Cité en page 5.)
- [ACMS14] T. Amdeberhan, X. Chen, Victor H. Moll, and B. E. Sagan. Generalized Fibonacci polynomials and Fibonomial coefficients. *Ann. Comb.*, 18(4) :541–562, 2014. (Non cité.)
- [And98] G. E. Andrews. *The theory of partitions*. Cambridge Mathematical Library. Cambridge University Press, Cambridge, 1998. Reprint of the 1976 original. (Cité en page 49.)
- [And04] G. E. Andrews. Fibonacci numbers and the Rogers-Ramanujan identities. *Fibonacci Quart.*, 42(1) :3–19, 2004. (Cité en pages 49 et 53.)
- [BBa] H. Belbachir and Belkhir. Coding various classes of directed convex polyominoes with linear domino arrangements. *soumis*. (Cité en page 5.)
- [BBb] H. Belbachir and Belkhir. On p, q -analogue of r -Lah numbers. *soumis*. (Cité en page 5.)
- [BBc] H. Belbachir and Belkhir. Statistic on set of linear domino arrangements and generalized q -Fibonacci polynomials. *soumis*. (Cité en page 5.)
- [BB08] H. Belbachir and F. Bencherif. On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. *J. Integer Seq.*, 11(2) :Article 08.2.6, 10, 2008. (Non cité.)
- [BB13a] H. Belbachir and A. Belkhir. Cross recurrence relations for r -Lah numbers. *Ars Combin.*, 110 :199–203, 2013. (Cité en page 5.)
- [BB13b] H. Belbachir and A. Belkhir. Tiling approach to obtain identities for generalized Fibonacci and Lucas numbers. *Ann. Math. Inform.*, 41 :13–17, 2013. (Cité en page 5.)
- [BB14a] H. Belbachir and A. Belkhir. Combinatorial expressions involving Fibonacci, hyperfibonacci, and incomplete Fibonacci numbers. *J. Integer Seq.*, 17(4) :Article 14.4.3, 7, 2014. (Cité en pages 5 et 28.)

- [BB14b] H. Belbachir and A. Benmezai. A q -analogue for bi^snomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 352(3) :167–171, 2014. (Cité en page 11.)
- [BB14c] H. Belbachir and I. E. Bousbaa. Combinatorial identities for the r -Lah numbers. *Ars Combin.*, 115 :453–458, 2014. (Non cité.)
- [BB16] H. Belbachir and A. Belkhir. On generalized hyper-Fibonacci polynomials and incomplete Fibonacci polynomials. *Siauliai Math. Semin.*, (11)19 :1–12, 2016. (Cité en pages 5 et 21.)
- [BBB] H. Belbachir, A. Belkhir, and I. E. Bousbaa. The generalized r -Lah numbers revisited. *soumis*. (Cité en pages 5 et 61.)
- [BBB14] H. Belbachir, A. Belkhir, and I. E. Bousbaa. Combinatorial approach of certain generalized stirling numbers. *arXiv*, 1412.8721, 2014. (Cité en pages 5 et 67.)
- [BDLFP97] E. Barucci, A. Del Lungo, S. Fezzi, and R. Pinzani. Nondecreasing Dyck paths and q -Fibonacci numbers. *Discrete Math.*, 170(1-3) :211–217, 1997. (Cité en page 25.)
- [BES09] A. T. Benjamin, A. K. Eustis, and M. A. Shattuck. Compression theorems for periodic tilings and consequences. *J. Integer Seq.*, 12(6) :Article 09.6.3, 15, 2009. (Non cité.)
- [BM91] M. Bousquet-M lou. q -énumération de polyominos convexes. In *Publications du LACIM*, volume 9. Thèse de doctorat, Universit  Bordeaux I, 1991. (Non cité.)
- [BM96] M. Bousquet-M lou. A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Math.*, 154(1-3) :1–25, 1996. (Non cité.)
- [BMS14] M. Bah i, I. Mez o, and S. Solak. A symmetric algorithm for hyper-Fibonacci and hyper-Lucas numbers. *Ann. Math. Inform.*, 43 :19–27, 2014. (Cité en page 21.)
- [Bol86] R. C. Bollinger. A note on Pascal- T triangles, multinomial coefficients, and Pascal pyramids. *Fibonacci Quart.*, 24(2) :140–144, 1986. (Cité en page 11.)
- [BPS93a] E. Barucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. Directed column-convex polyominoes by recurrence relations. In *TAPSOFT '93 : theory and practice of software development (Orsay, 1993)*, volume 668 of *Lecture Notes in Comput. Sci.*, pages 282–298. Springer, Berlin, 1993. (Cité en pages 3, 34, 35 et 36.)
- [BPS93b] E. Barucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. La hauteur des polyominos dirigés verticalement convexes. In *Actes 31e Séminaire Lotharingien de Combinatoire*, Publi. IRMA. Université Strssbourg I, 1993. (Cité en pages 3, 35 et 36.)
- [BPS95] E. Barucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. Une série génératrice pour la hauteur dea polyominos dvc. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 13(6) :259–264, 1995. (Cité en pages 3, 35 et 36.)
- [BQ03] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. *Proofs that really count*, volume 27 of *The Dolciani Mathematical Expositions*. Mathematical Association of America, Washington, DC, 2003. The art of combinatorial proof. (Cité en page 21.)

- [Bro84] A. Z. Broder. The r -Stirling numbers. *Discrete Math.*, 49(3) :241–259, 1984. (Cité en pages 3 et 15.)
- [BS14] M. Bah ı and S. Solak. On the norms of r -circulant matrices with the hyper-Fibonacci and Lucas numbers. *J. Math. Inequal.*, 8(4) :693–705, 2014. (Cité en page 33.)
- [Car33] L. Carlitz. On abelian fields. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 35 :122–136, 1933. (Cité en page 84.)
- [Car48] L. Carlitz. q -bernoulli numbers and polynomials. *Duke Math. J.*, 15 :987–1000, 1948. (Cité en page 84.)
- [Car75] L. Carlitz. Fibonacci notes. IV. q -Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quart.*, 13 :97–102, 1975. (Cité en pages 49 et 53.)
- [Car79] L. Carlitz. Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers. *Utilitas Math.*, 15 :51–88, 1979. (Non cité.)
- [Car80] L. Carlitz. Weighted Stirling numbers of the first and second kind. II. *Fibonacci Quart.*, 18(3) :242–257, 1980. (Non cité.)
- [CFJ15]  va Czabarka, Rigoberto Fl rez, and Leandro Junes. Some enumerations on non-decreasing Dyck paths. *Electron. J. Combin.*, 22(1) :Paper 1.3, 22, 2015. (Cité en page 26.)
- [Cha04] Ch. A. Charalambides. Non-central generalized q -factorial coefficients and q -Stirling numbers. *Discrete Math.*, 275(1-3) :67–85, 2004. (Cité en pages 61 et 84.)
- [Cha05] Ch. A. Charalambides. *Combinatorial methods in discrete distributions*. Wiley Series in Probability and Statistics. Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], Hoboken, NJ, 2005. (Non cité.)
- [CHZ97] R. J. Clarke, G. N. Han, and J. Zeng. A combinatorial interpretation of the Seidel generation of q -derangement numbers. *Ann. Comb.*, 1(4) :313–327, 1997. (Non cité.)
- [Cig03] J. Cigler. A new class of q -Fibonacci polynomials. *Electron. J. Combin.*, 10 :Research Paper 19, 15 pp. (electronic), 2003. (Cité en pages 49 et 53.)
- [Cig04] J. Cigler. q -Fibonacci polynomials and the Rogers-Ramanujan identities. *Ann. Comb.*, 8(3) :269–285, 2004. (Cité en page 49.)
- [Cig11] J. Cigler. Some beautiful q -analogues of Fibonacci and Lucas polynomials. *arXiv :1104.2699*, 2011. (Cité en pages 49 et 53.)
- [CJ12] G. S. Cheon and J. H. Jung. r -Whitney numbers of Dowling lattices. *Discrete Math.*, 312(15) :2337–2348, 2012. (Cité en pages 61 et 62.)
- [Com74] L. Comtet. *Advanced combinatorics*. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, enlarged edition, 1974. The art of finite and infinite expansions. (Cité en pages 6 et 11.)
- [Cor01] R. B. Corcino. Some theorems on generalized Stirling numbers. *Ars Combin.*, 60 :273–286, 2001. (Non cité.)
- [Cor08] R. B. Corcino. On p, q -binomial coefficients. *Integers*, 8 :A29, 16, 2008. (Cité en page 13.)

- [Cor14] R. B. Corcino. A combinatorial approach for q -analogue of r -Stirling numbers. *BJMCS*, 9 :1268–1279, 2014. (Cité en page 84.)
- [CV03] W. Chu and V. Vicenti. Funzione generatrice e polinomi incompleti di Fibonacci e Lucas. *Bollettino U. M. I.*, 6 :286–308, 2003. (Cité en page 20.)
- [CZ10] N. N. Cao and F. Z. Zhao. Some properties of hyperfibonacci and hyperlucas numbers. *J. Integer Seq.*, 13(8) :Article 10.8.8, 11, 2010. (Cité en page 21.)
- [DD93] M. Delest and S. Dulucq. enumeration of directed column-convex animals with a given perimeter and area. *Croat. Chem. Acta*, 1 :59–80, 1993. (Cité en pages 34 et 36.)
- [Djo04] G. B. Djordjević. Generating functions of the incomplete generalized Fibonacci and generalized Lucas numbers. *Fibonacci Quart.*, 42(2) :106–113, 2004. (Cité en page 20.)
- [DM08] A. Dil and I. Mezö. A symmetric algorithm for hyperharmonic and Fibonacci numbers. *Appl. Math. Comput.*, 206(2) :942–951, 2008. (Cité en pages 2, 17, 19 et 21.)
- [DP03] E. Deutsch and H. Prodinger. A bijection between directed column-convex polyominoes and ordered trees of height at most three. *Theoret. Comput. Sci.*, 307(2) :319–325, 2003. (Non cité.)
- [DS05] G. B. Djordjević and H. M. Srivastava. Incomplete generalized Jacobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. *Math. Comput. Modelling*, 42(9-10) :1049–1056, 2005. (Cité en page 21.)
- [Dum81] D. Dumont. Matrices d’euler-seidel. *Sémina Lotharingien de Combi.*, 312(15) :2337–2348, 1981. (Cité en page 17.)
- [Fer93] Feretić. A new coding for column-convex directed animals. *Croat. Chem. Acta*, 1 :81–90, 1993. (Cité en page 34.)
- [Fil96] P. Filipponi. Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 45(1) :37–56, 1996. (Cité en pages 19, 21 et 23.)
- [GKP94] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete mathematics*. Addison-Wesley Publishing Company, Reading, MA, second edition, 1994. A foundation for computer science. (Cité en page 6.)
- [GM09] A. M. Goyt and D. Mathisen. Permutation statistics and q -Fibonacci numbers. *Electron. J. Combin.*, 16(1) :Research Paper 101, 15, 2009. (Cité en page 49.)
- [GM10] M. Griffiths and I. Mezö. A generalization of stirling numbers of the second kind via a special multiset. *J. Integer Seq.*, 13(2) :Article 10.2.5, 23, 2010. (Non cité.)
- [Gou68] H. G Gould. The q -Stirling numbers of the first and second kinds. *Duke Math. J.*, 28 :281–289, 1968. (Cité en page 84.)
- [Goy08] A. M. Goyt. Avoidance of partitions of a three-element set. *Adv. in Appl. Math.*, 41(1) :95–114, 2008. (Cité en page 49.)
- [GR80] A. M. Garsia and J. Remmel. A combinatorial interpretation of q -derangement and q -Laguerre numbers. *European J. Combin.*, 1(1) :47–59, 1980. (Cité en pages 4 et 75.)

- [GR86a] A. M. Garsia and J. Remmel. A nouvel form of q -Lagrange inversion. *Houston J. Math.*, 12(4) :503–523, 1986. (Cité en page 75.)
- [GR86b] A. M. Garsia and J. B. Remmel. Q -counting rook configurations and a formula of Frobenius. *J. Combin. Theory Ser. A*, 41(2) :246–275, 1986. (Cité en page 84.)
- [Gri10] Ralph P. Grimaldi. Tilings, compositions, and generalizations. *J. Integer Seq.*, 13(6) :Article 10.6.5, 21, 2010. (Non cité.)
- [GS09] A. M. Goyt and B. E. Sagan. Set partition statistics and q -Fibonacci numbers. *European J. Combin.*, 30(1) :230–245, 2009. (Non cité.)
- [Hen94] F. Hennecart. Stirling distributions and Stirling numbers of the second kind. Computational problems in statistics. *Kybernetika (Prague)*, 30(3) :279–288, 1994. (Non cité.)
- [How85] F. T. Howard. Degenerate weighted Stirling numbers. *Discrete Math.*, 57(1-2) :45–58, 1985. (Non cité.)
- [HS98] L. C. Hsu and P. J. S. Shiue. A unified approach to generalized Stirling numbers. *Adv. in Appl. Math.*, 20(3) :366–384, 1998. (Non cité.)
- [HW08] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford University Press, Oxford, sixth edition, 2008. Revised by D. R. Heath-Brown and J. H. Silverman, With a foreword by Andrew Wiles. (Cité en page 49.)
- [JC96] R.K. Guy J.H. Conway. *The Book of Numbers*. Springer-Verlag, New York, 1996. (Cité en page 16.)
- [Jen03] I. Jensen. Counting polyominoes : A parallel implementation for cluster computing. *Lect. Notes in Comp. Sci*, 2659 :203–212, 2003. (Cité en page 34.)
- [JLW07] C. Z. Jia, H. M. Liu, and T. M. Wang. q -analogs of generalized Fibonacci and Lucas polynomials. *Fibonacci Quart.*, 45(1) :26–34, 2007. (Non cité.)
- [Kla65] D. A. Klarner. Some results concerning polyominoes. *Fibonacci Quart*, 3 :9–20, 1965. (Non cité.)
- [Kos01] T. Koshy. *Fibonacci and Lucas numbers with applications*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience, New York, 2001. (Non cité.)
- [LZ12] R. Liu and F. Zhao. On the sums of reciprocal hyperfibonacci numbers and hyperlucas numbers. *J. Integer Seq.*, 15(4) :Article 12.4.5, 10, 2012. (Cité en pages 21 et 27.)
- [Man13] T. Mansour. *Combinatorics of set partitions*. Taylor Francis group, 2013. (Cité en page 6.)
- [MD09] I. Mező and A. Dil. Euler-Seidel method for certain combinatorial numbers and a new characterization of Fibonacci sequence. *Cent. Eur. J. Math.*, 7(2) :310–321, 2009. (Cité en page 21.)
- [Mil78] S. C. Milne. A q -analog of restricted growth functions, Dobinski’s equality, and Charlier polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 245 :89–118, 1978. (Cité en pages 4 et 84.)

- [Mil82] S. C. Milne. Restricted growth functions, rank row matchings of partition lattices, and q -Stirling numbers. *Adv. in Math.*, 43(2) :173–196, 1982. (Cité en pages 4 et 84.)
- [MS12a] T. Mansour and M. Schork. The generalized Stirling and Bell numbers revisited. *J. Integer Seq.*, 15(8) :Article 12.8.3, 47, 2012. (Cité en page 67.)
- [MS12b] T. Mansour and M. A. Shattuck. Generalizations of two statistics on linear tilings. *Appl. Appl. Math.*, 7(2) :508–533, 2012. (Cité en page 53.)
- [MS13a] T. Mansour and M. A. Shattuck. Free rises, restricted partitions, and q -Fibonacci polynomials. *Afr. Mat.*, 24(3) :305–320, 2013. (Non cité.)
- [MS13b] T. Mansour and M. A. Shattuck. Generalization of a statistic on linear domino arrangements. *Online J. Anal. Comb.*, (8) :16, 2013. (Cité en page 49.)
- [MSS11] T. Mansour, M. Schork, and M. A. Shattuck. On a new family of generalized Stirling and Bell numbers. *Electron. J. Combin.*, 18(1) :Paper 77, 33, 2011. (Cité en page 67.)
- [Mun97] E. Munarini. A combinatorial interpretation of the generalized Fibonacci numbers. *Adv. in Appl. Math.*, 19(3) :306–318, 1997. (Cité en page 9.)
- [Mun05] E. Munarini. Generalized q -Fibonacci numbers. *Fibonacci Quart.*, 43(3) :234–242, 2005. (Non cité.)
- [NR15] G. Nyul and G. R acz. The r -Lah numbers. *Discrete Math.*, 338(10) :1660–1666, 2015. (Cité en page 62.)
- [PS99]  . Pint r and H. M. Srivastava. Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers. *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 48(3) :591–596, 1999. (Cité en pages 20 et 29.)
- [Ram13a] J. Ramírez. Incomplete k -Fibonacci and k -Lucas numbers. *Chinese J. of Mathematics*, 10 :Research Paper 19, 15 pp. (electronic), 2013. (Cité en page 21.)
- [Ram13b] J. L. Ramírez. Bi-periodic incomplete Fibonacci sequences. *Ann. Math. Inform.*, 42 :83–92, 2013. (Cité en page 21.)
- [Sag91] B. E. Sagan. A maj statistic for set partitions. *European J. Combin.*, 12(1) :69–79, 1991. (Cité en page 84.)
- [SCJB10] S. Z. Song, G. S. Cheon, Y. B/ Jun, and L. B. Beasley. A q -analogue of the generalized factorial numbers. *J. Korean Math. Soc.*, 47(3) :645–657, 2010. (Cité en page 84.)
- [Sha08] M. A. Shattuck. Tiling proofs of some Fibonacci-Lucas relations. *Integers*, 8 :A18, 6, 2008. (Non cité.)
- [Sha11] M. A. Shattuck. On some relations satisfied by the p, q -binomial coefficient. *Šiauliai Math. Semin.*, 6(14) :69–84, 2011. (Non cité.)
- [Sha14a] M. A. Shattuck. Generalizations of Bell numbers formulas of Spivey and Mez . *arXiv*, 1412.1110v1, 2014. (Non cité.)
- [Sha14b] M. A. Shattuck. Generalized r -lah numbers. *arXiv*, 1412.8721, 2014. (Cité en pages 3, 61, 66, 67 et 69.)

- [SI06] J. P. O. Santos and M. Ivković. Colored partitions and the Fibonacci sequence. *TEMA Tend. Mat. Apl. Comput.*, 7(1) :119–126, 2006. (Non cité.)
- [SS12] B. E. Sagan and C. D. Savage. Mahonian pairs. *J. Combin. Theory Ser. A*, 119(3) :526–545, 2012. (Cité en page 54.)
- [Sta12] R. P. Stanley. *Enumerative combinatorics. Volume 1*, volume 49 of *Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 2012. (Cité en pages xi, 6, 11, 13 et 54.)
- [SW06a] M. A. Shattuck and C. G. Wagner. A new statistic on linear and circular r -mino arrangements. *Electron. J. Combin.*, 13(1) :Research Paper 42, 15 pp. (electronic), 2006. (Cité en page 53.)
- [SW06b] M. A. Shattuck and C. G. Wagner. Periodicity and parity theorems for a statistic on r -mino arrangements. *J. Integer Seq.*, 9(3) :Article 06.3.6, 18, 2006. (Cité en page 53.)
- [SW07] M. A. Shattuck and C. G. Wagner. Some generalized Fibonacci polynomials. *J. Integer Seq.*, 10(5) :Article 07.5.3, 11, 2007. (Non cité.)
- [TF10] D. Tasci and M. C. Firengiz. Incomplete Fibonacci and Lucas p -numbers. *Math. Comput. Modelling*, 52(9-10) :1763–1770, 2010. (Cité en page 21.)
- [TFT12] D. Tasci, M. Cetin Firengiz, and N. Tuglu. Incomplete bivariate Fibonacci and Lucas p -polynomials. *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, pages Art. ID 840345, 11, 2012. (Cité en page 21.)
- [Vie84] G. X. Viennot. Problèmes combinatoires posés par la physique statistique. *Séminaire N. Bourbaki*, 626 :225–264, 1983–1984. (Cité en page 34.)
- [Wac94] M. L. Wachs. σ -restricted growth functions and p, q -Stirling numbers. *J. Combin. Theory Ser. A*, 68(2) :470–480, 1994. (Non cité.)
- [Wag96] C. G. Wagner. Generalized Stirling and Lah numbers. *Discrete Math.*, 160(1-3) :199–218, 1996. (Cité en page 76.)
- [WW91] M. Wachs and D. White. p, q -Stirling numbers and set partition statistics. *J. Combin. Theory Ser. A*, 56(1) :27–46, 1991. (Non cité.)