

N° d'ordre : 05/2014 - D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR EN SCIENCES**

En : Mathématiques

Spécialité : *Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion*

Par : KABYL Kamal

Thème

Plongements de graphes dans des structures de type hypercube

Soutenue publiquement le 11/10/ 2014 devant le jury composé de :

| | | |
|---------------------------------|-----------------------------------|--------------------|
| M ^{me} . I. BOUCHEMAKH | Professeur à l'USTHB | Présidente |
| M. A. BERRACHEDI | Professeur à l'USTHB | Directeur de Thèse |
| M. M. AIDER | Professeur à l'USTHB | Examineur |
| M. M. BLIDIA | Professeur à l'USD Blida | Examineur |
| M. M. CHELLALI | Professeur à l'USD Blida | Examineur |
| M. B. SADI | Maître de conférences/A à l'UMMTO | Examineur |

Remerciements

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance au professeur A. BERRACHEDI pour l'honneur qu'il m'a fait en assurant la direction et le suivi de la présente thèse. Je le remercie pour sa rigueur scientifique, sa disponibilité et toute l'aide qu'il m'a apportée à chaque étape de la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement le professeur I. BOUCHEMAKH qui m'a fait l'honneur de juger ce travail en présidant le jury de cette thèse.

J'adresse mes remerciements les plus sincères et les plus chaleureux aux professeurs M. AIDER, M. BLIDIA, M. CHELLALI et B. SADI pour avoir accepté d'examiner ce travail et de consacrer une partie précieuse de leur temps pour le lire.

Je remercie le professeur E. SOPENA qui m'a invité et reçu plusieurs fois dans son laboratoire, LaBRI, Université Bordeaux 1, où j'ai réalisé une bonne partie de cette thèse.

Enfin j'adresse mes remerciements à tous les membres de ma famille pour leurs soutiens et leurs encouragements.

Table des matières

| | |
|--|-----------|
| Introduction | 8 |
| 1 Définitions de base et notations | 11 |
| 1.1 Graphes | 11 |
| 1.1.1 Chaînes et Cycles | 12 |
| 1.1.2 Connexité dans les graphes | 13 |
| 1.1.3 Couplage | 13 |
| 1.2 Opérations classiques sur les graphes | 13 |
| 1.2.1 Somme Cartésienne de deux graphes | 13 |
| 1.2.2 Produit Cartésien de deux graphes | 14 |
| 1.2.3 Subdivisions de graphes | 14 |
| 1.2.4 Morphismes de graphes | 14 |
| 1.2.5 Isomorphismes | 15 |
| 1.2.6 Homéomorphismes | 16 |
| 1.3 Distances et intervalles dans les graphes | 16 |
| 1.3.1 Distances dans les graphes | 16 |
| 1.3.2 Intervalles | 17 |
| 1.3.3 Décomposition en niveaux à partir d'un sommet | 18 |
| 1.3.4 Décomposition en niveaux à partir d'intervalle | 19 |
| 1.4 Quelques graphes particuliers | 19 |
| 2 Hypercube et quelques caractérisations | 22 |
| 2.1 Hypercube Q_n | 22 |
| 2.1.1 Propriétés élémentaires de l'hypercube | 24 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.1.2 | Distance de Hamming | 24 |
| 2.1.3 | Décomposition en niveaux de l'hypercube | 24 |
| 2.1.4 | Caractérisation de l'hypercube : | 25 |
| 2.2 | Plongement de graphe dans l'hypercube | 27 |
| 2.2.1 | Conditions nécessaires de plongement d'un graphe G dans l'hypercube | 30 |
| 2.3 | C_n -valuation des arbres | 30 |
| 3 | Quelques classes d'arbres plongeables dans l'hypercube | 32 |
| 3.1 | Quelques types d'arbres binaires plongeables dans Q_n | 32 |
| 3.1.1 | Arbres binaires complets | 33 |
| 3.1.2 | Arbres obtenus par transformation des arbres binaires | 34 |
| 3.1.3 | Arbres binaires de recherche | 39 |
| 3.1.4 | Arbres AVL (Adelson-Velskii et Landis) | 39 |
| 3.1.5 | Arbres de Fibonacci | 40 |
| 3.2 | Autres graphes plongeables dans Q_n | 41 |
| 3.2.1 | Arbres n-aires complets | 42 |
| 3.2.2 | Chenilles | 42 |
| 3.2.3 | Quasi-étoiles et doubles quasi-étoiles | 46 |
| 4 | Nouvelles classes d'arbres plongeables dans l'hypercube | 50 |
| 4.1 | Classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet D_n | 50 |
| 4.1.1 | Classe $D_n^{(k)}$ | 50 |
| 4.1.2 | Classe AD_n^k | 52 |
| 4.1.3 | Classe $\hat{A}D_n^k$ | 53 |
| 4.1.4 | Classe $\hat{\hat{A}}D_n^k$ | 54 |
| 4.1.5 | Classe \bar{D}_n | 54 |
| 4.1.6 | Classe \bar{D}_n^2 | 57 |
| 4.2 | Classes d'arbres binaires équilibrés | 59 |
| 4.2.1 | Classe A_n | 59 |

| | | |
|----------|--|-----------|
| 4.2.2 | Classe \hat{A}_n | 61 |
| 4.2.3 | Classe $\hat{\hat{A}}_n$ | 63 |
| 4.3 | Classes d'arbres obtenus par une double subdivision de l'arbre $\hat{\hat{D}}_n$ | 65 |
| 5 | Critères de plongement optimal des arbres récursifs dans l'hypercube | 77 |
| 5.1 | Arbres binaire parfaitement équilibrés | 77 |
| 5.2 | Décomposition de Q_n en des Copies disjointes de Q_i | 78 |
| | Conclusion | 88 |
| | Bibliographie | 94 |

Table des figures

| | | |
|------|---|----|
| 1.1 | Exemple d'un graphe à 8 sommets et 9 arêtes | 12 |
| 1.2 | Somme Cartésienne $H = C_4 \square K_2$ | 13 |
| 1.3 | Produit cartésien $K = G_1 \times G_2$ | 14 |
| 1.4 | Homomorphisme de G dans H | 15 |
| 1.5 | Homomorphisme de G_1 dans G_2 et isomorphisme de G dans H | 16 |
| 1.6 | Décomposition en niveaux à partir d'un sommet | 18 |
| 1.7 | Décomposition en niveaux à partir d'intervalle | 19 |
| 1.8 | Graphe complet K_5 | 19 |
| 1.9 | Graphe biparti complet $K_{2,4}$ | 20 |
| 1.10 | Graphe biparti équilibré $K_{2,2}$ | 20 |
| 2.1 | Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3 | 23 |
| 2.2 | Décomposition canonique de Q_3 suivant la direction 1 | 23 |
| 2.3 | Décomposition en niveau de Q_3 | 25 |
| 2.4 | Graphe biparti non cubique | 29 |
| 2.5 | Arbre équilibré à 2^4 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4 | 30 |
| 3.1 | Arbres binaires complets D_1, D_2 et D_3 | 33 |
| 3.2 | C_5 -valuation de l'arbre binaire complet D_3 | 34 |
| 3.3 | Arbres binaires B_2, B_3 et B_4 | 34 |
| 3.4 | Arbre binaire B_3^2 | 35 |
| 3.5 | Arbre binaire complet à double racines \hat{D}_2 | 36 |
| 3.6 | Arbres binaires \hat{D}_2 et \check{D}_2 | 37 |
| 3.7 | Arbre binaire D_3^2 | 37 |
| 3.8 | Arbre binaire F_1 | 38 |

| | | |
|------|---|----|
| 3.9 | Arbre binaire F_2 | 38 |
| 3.10 | Exemple d'arbre de recherche à 10 sommets | 39 |
| 3.11 | Exemple d'un arbre AVL à 12 sommets | 40 |
| 3.12 | Arbres de Fibonacci $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et \mathcal{F}_4 | 41 |
| 3.13 | Arbre 3-aires complet T_2^3 | 42 |
| 3.14 | Chenille de degré maximum 4 | 42 |
| 3.15 | Stricte 3-chenille | 44 |
| 3.16 | $CAT[0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0]$ | 45 |
| 3.17 | Arbre de la classe Γ_K | 46 |
| 3.18 | Étoile $K_{1,6}$ | 47 |
| 3.19 | Quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 2, 3)$ | 47 |
| 3.20 | Double quasi-étoile $S(1, 2, 3, 1, 1, 2)$ | 48 |
| 3.21 | $MD(2, 4, 8)$ graphe | 49 |
| 4.1 | Arbres binaires $D_n^{(2)}, D_n^{(3)}$ et $D_n^{(n)}$ | 50 |
| 4.2 | C_4 valuation de l'arbre D_2^2 | 51 |
| 4.3 | C_5 -valuation de D_3^2 et C_5 -valuation de D_3^3 | 52 |
| 4.4 | Arbres binaires AD_n^1 et AD_n^3 | 52 |
| 4.5 | Arbres binaires $\hat{A}D_n^3$ et $\hat{A}D_n^4$ | 53 |
| 4.6 | Arbres binaires $\hat{\hat{A}}D_n^1$ et $\hat{\hat{A}}D_n^3$ | 54 |
| 4.7 | Arbres binaires \bar{D}_2, \bar{D}_3 et \bar{D}_4 | 55 |
| 4.8 | C_3 -valuation de \bar{D}_2 et \bar{D}_3 | 55 |
| 4.9 | C_4 -valuation de $\bar{D}_4, \bar{D}_5, \bar{D}_6$ et \bar{D}_7 | 56 |
| 4.10 | Arbre équilibré plongeable dans Q_4 | 57 |
| 4.11 | Arbres binaires \bar{D}_2^2 et \bar{D}_3^2 | 57 |
| 4.12 | C_4 -valuation de \bar{D}_1^2 et \bar{D}_2^2 | 58 |
| 4.13 | C_5 -valuation de $\bar{D}_3^2, \bar{D}_4^2, \bar{D}_5^2$ et \bar{D}_6^2 | 58 |
| 4.14 | Arbres binaires équilibrés A_3 et A_4 | 59 |
| 4.15 | Plongement de A_4 dans Q_4 | 60 |
| 4.16 | C_4 -valuation de A_4 et C_5 -valuation de A_5 | 61 |
| 4.17 | Arbres binaires équilibrés \hat{A}_4 et \hat{A}_5 | 62 |

| | | |
|------|---|----|
| 4.18 | C_4 -valuation de \hat{A}_4 et C_5 -valuation de \hat{A}_5 | 62 |
| 4.19 | Plongement de \hat{A}_4 dans Q_4 | 63 |
| 4.20 | Arbres binaires équilibrés \hat{A}_4 et \hat{A}_5 | 63 |
| 4.21 | C_4 -valuation de $\hat{\hat{A}}_4$ et C_5 -valuation de $\hat{\hat{A}}_5$ | 64 |
| 4.22 | Plongement de $\hat{\hat{A}}_4$ dans Q_4 | 65 |
| 4.23 | Arbres binaires A_2^0 et A_2^2 | 66 |
| 4.24 | Arbres binaires B_2^1 et B_2^2 | 66 |
| 4.25 | Arbres binaires C_2^1 et C_2^2 | 66 |
| 4.26 | Arbres binaires $D_2^{0,2}$ et $D_2^{1,2}$ | 67 |
| 4.27 | Arbre binaire $E_2^{1,2}$ | 67 |
| 4.28 | Arbre binaire $F_2^{1,2}$ | 68 |
| 4.29 | \bowtie -collage de T_1 et T_2 le long de $\{u_1v_1, u_2v_2\}$ | 69 |
| 4.30 | Décomposition structurelle de A_n^1 et de $A_n^k, k \geq 1$ | 70 |
| 4.31 | Décomposition structurelle de B_n^1 et de $B_n^k, k \geq 1$ | 71 |
| 4.32 | C_4 -valuation de A_2^2 obtenu par le \bowtie -collage A_1^1 et \hat{D}_1 | 72 |
| 4.33 | C_4 -valuation de B_2^2 obtenu par le \bowtie -collage B_1^1 et \hat{D}_1 | 72 |
| 4.34 | Plongement de C_n^k dans \hat{D}_{n+1} | 73 |
| 4.35 | Plongement de $D_n^{k,l}$ dans $\hat{\hat{D}}_{n+1}$ | 74 |
| 4.36 | Plongement de $E_n^{k,l}$ dans $\hat{\hat{D}}_{n+1}$ | 75 |
| 4.37 | C_5 -valuation de $F_2^{1,2}$ | 76 |
| 5.1 | Représentation des sommets de Q_3 | 79 |
| 5.2 | Décompositions de Q_3 | 79 |
| 5.3 | Plongement de $ext(ext(T))$ dans $Q_{dim(T)+2}$ | 80 |
| 5.4 | Arbres binaires T', T'' et T''' | 81 |
| 5.5 | C_4 -valuation de T' et T'' et C_3 -valuation T''' | 82 |
| 5.6 | C_5 -valuation de $ext(T')$ et $ex(T'')$ et C_4 -valuation $ext(T''')$ | 83 |
| 5.7 | Plongement de $ext(ext(T'''))$ dans Q_5 | 84 |
| 5.8 | Plongement de $ext(ext(T''))$ dans Q_6 | 84 |
| 5.9 | Plongement de $ext(ext(T'))$ dans Q_6 | 85 |
| 5.10 | Plongement de \hat{D}_4 et D_4 dans Q_6 | 87 |

Introduction

La théorie des graphes a eu un développement bien étrange, d'abord apparue sous forme de curiosité mathématiques les *ponts de Königsberg*, puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (*Kirchhoff*). Elle a été utilisée par la chimie (*Modélisation des structures*), la psychosociologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Un important effort de synthèse a été opéré en particulier par Claude Berge. Son ouvrage *Théorie des graphes et ses applications* publié en 1958 marque sans doute l'avènement de l'ère moderne de la théorie des graphes par l'introduction d'une théorie des graphes unifiée et abstraite rassemblant de nombreux résultats épars dans la littérature. Depuis, cette théorie a pris sa place, en subissant de très nombreux développements essentiellement dus à l'apparition des calculateurs, au sein d'un ensemble plus vaste d'outils et méthodes généralement regroupées sous l'appellation *Recherche Opérationnelle* ou *Mathématiques Discrètes*.

L'hypercube a suscité de nombreuses études engendrant une littérature très dense aussi bien en mathématiques discrètes qu'en informatique. Cet intérêt, sans cesse croissant, est largement motivé par l'utilisation de sa structure dans de nombreux domaines (Architectures parallèles, transfert de l'information, décision multicritère, théorie des codes, etc.). Il demeure encore le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes comme étant des sous-graphes de l'hypercube (problème de plongement de graphes dans l'hypercube). Ce problème est très étudié en théorie des graphes. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer les conditions (nécessaires et/ ou suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous-graphe de l'hypercube Q_n . Une classe importante à étudier est celle des arbres dans l'hypercube. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines, à savoir : Informatique, Sciences

Sociales, Recherche Opérationnelle, Théorie des réseaux électriques, etc.

Il a été démontré que tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube Q_n [25]. *Le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné T y est plongeable.* On parle alors d'hypercube optimal et de la dimension cubique de l'arbre T notée $dim(T)$. Ce problème a été traité par plusieurs auteurs, citons : Havel [36, 37, 35, 38, 40, 41], Harary [29, 30, 31, 33, 32], Kobeissi [56, 57, 58], Berrachedi [9], Nebeský [64, 65, 66], Choudum [18, 19], Dvorák [24, 23], etc. Leurs travaux ont permis de caractériser certaines classes d'arbres de dimensions cubiques déterminées. Cette thèse est développée en cinq chapitres :

Le premier chapitre est consacré aux rappels et aux notations essentielles, il comporte les concepts de base nécessaires.

Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de l'hypercube et ses caractéristiques. Nous présentons aussi dans ce chapitre la définition de plongement de graphe dans l'hypercube et ses quelques paramètres usuels. Enfin, nous donnons les conditions nécessaires et/ ou suffisantes pour lesquelles un graphe donné y est plongeable dans l'hypercube, ainsi que la définition de la C_n -valuation spécifique aux arbres, qui est importante dans la détermination de la dimension cubique.

Le troisième chapitre s'intéresse à certaines classes d'arbres plongeables dans l'hypercube. Nous commençons par l'arbre binaire complet D_n , puis nous présentons des résultats de plongement sur certaines classes d'arbres obtenus par transformation des arbres binaires. Nous donnons par la suite la conjecture de Ivan Havel [35] sur les arbres binaires équilibrés ayant 2^n sommets. Pour vérifier que les étoiles et les doubles quasi-étoiles sont plongeables dans l'hypercube nous présentons les MD -graphes comme étant des sous-graphes de l'hypercube de dimension donnée.

Dans le quatrième chapitre nous introduisons quelques nouvelles classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet D_n en donnant leurs dimensions cubiques. Par la suite nous avons introduit trois nouvelles classes d'arbres binaires équilibrés pour lesquels la conjecture de Ivan Havel est vérifiée. Enfin, nous avons réussi à donner toutes les familles des arbres binaires obtenus par la double subdivision de l'arbre binaire complet à double racines \hat{D}_n et nous avons montré que dans le cas équilibré ces arbres vérifient la conjecture de Ivan Havel [35].

Dans le cinquième chapitre nous présentons des critères de plongement optimal de tous les arbres obtenus d'une manière recursive dans l'hypercube. Ces critères recouvrent également les plongements de certaines classes d'arbres binaires pour lesquels la dimension cubique est connue.

Définitions de base et notations

On donne dans ce premier chapitre, les définitions classiques de la théorie des graphes ainsi que les conventions de notations, qui permettent à ce document d'être *auto-contenu*. On adoptera la terminologie de Berge [7]. D'autres définitions peuvent être retrouvées avec plus de détails dans [12, 21, 62, 63]

1.1 Graphes

Définition 1.1.1. Un *graphe non orienté* G (ou plus simplement *graphe*) est un couple d'ensembles finis $(V(G), E(G))$ où $E(G)$ est constitué de paires (non ordonnées) de $V(G)$. Les éléments de $V(G)$ sont appelés *sommets* de G et ceux de $E(G)$ *arêtes* de G . Si aucune confusion n'est possible on note V au lieu de $V(G)$ et E au lieu de $E(G)$. On utilisera les notations simplifiées uv ou vu pour l'arête $\{u, v\}$. Une arête de type uu est appelée *boucle* de G . L'ordre d'un graphe est le cardinal de son ensemble de sommets, noté $|V(G)|$. Si $e = uv$ est une arête de G on dit que u et v sont voisins dans G et qu'il forment les extrémités de e . Deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont une extrémité en commune. On définit le *voisinage* d'un sommet u dans un graphe G comme l'ensemble de ses voisins, on le note $N_G(u)$ ou $N(u)$ s'il n'existe pas d'ambiguïté sur le graphe considéré. Le degré d'un sommet u dans G , noté $d_G(u)$ est le cardinal de $N_G(u)$, avec le maximum des degrés des sommets de G est noté par $\Delta(G)$ et le minimum des degrés des sommets de G est noté par $\delta(G)$. Un sommet de degré 0 est dit *sommet isolé* et un sommet de degré 1 est dit *sommet pendant*. Si tous les sommets ont le même degré, on dira que le graphe G est *régulier* et si $\Delta(G) = \delta(G)$, alors G est dit $\Delta(G)$ -*régulier*. Un exemple d'un graphe à 8 sommets et 9 arêtes est montré dans la Figure 1.1.

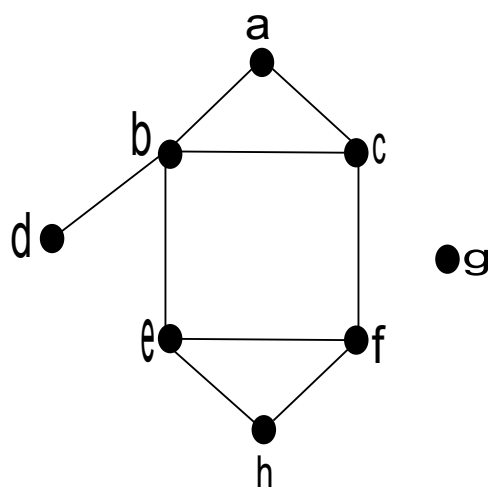


FIG. 1.1 – Exemple d'un graphe à 8 sommets et 9 arêtes

Le graphe complémentaire de G , noté \bar{G} , est le graphe dont l'ensemble de sommets est $V(G)$ et deux sommets distincts de \bar{G} sont adjacents si et seulement s'ils ne sont pas adjacents dans G . On dit qu'un graphe $H = (W(H), F(H))$ est un sous-graphe de $G = (V(G), E(G))$ si $W(H) \subseteq V(G)$ et $F(H) \subseteq E(G)$. Le sous-graphe, noté $G[W]$, ayant $W(H)$ comme ensemble de sommets et toutes les arêtes de G contenues dans $W(H)$ comme ensemble d'arêtes est appelé sous-graphe de G induit par $W(H)$. Dans le cas où $W(H) = V(G)$ et $F(H) \subseteq E(G)$, $H = (W(H), F(H))$ est appelé graphe partiel de G . (H peut être vu comme étant le graphe obtenu en supprimant certaines arêtes de G).

1.1.1 Chaînes et Cycles

On appelle chaîne entre deux sommets u et v d'un graphe G , une suite de sommets u_1, \dots, u_k dont deux consécutifs sont adjacents, avec $u_1 = u$ et $u_k = v$. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite élémentaire et une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple. Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple. Une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues est appelée cycle. Une chaîne utilisant tous les sommets de G (respectivement. Un cycle utilisant tous les sommets de G) une et une seule fois est appelée chaîne Hamiltonienne (respectivement. Cycle Hamiltonien). La longueur d'une chaîne est donnée par le nombre des ses arêtes.

1.1.2 Connexité dans les graphes

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit connexe si pour toute paire de sommets (u, v) de $V(G) \times V(G)$, il existe une chaîne reliant u et v .

1.1.3 Couplage

Un couplage d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un sous-ensemble d'arêtes $M \subseteq E(G)$, tel que deux arêtes quelconques de M ne sont pas adjacentes. Un sommet u est dit saturé par le couplage M , s'il existe une arête de M incidente à u . Dans le cas contraire, u est dit insaturé. Un couplage qui sature tous les sommets de G est appelé couplage parfait. Un couplage M est dit maximum si pour tout couplage M' de G on a $|M| \geq |M'|$.

1.2 Opérations classiques sur les graphes

Plusieurs opérations courantes permettent de construire à partir de deux graphes d'autres graphes. Commençons par les plus simples.

1.2.1 Somme Cartésienne de deux graphes

Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, la *somme Cartésienne* de G avec H , notée $G \square H$, est le graphe défini sur l'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ tel que deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si $(u = v \text{ et } u'v' \in E(H))$ ou $(u' = v' \text{ et } uv \in E(G))$. La Figure 1.2 montre la somme Cartésienne $H = C_4 \square K_2$.

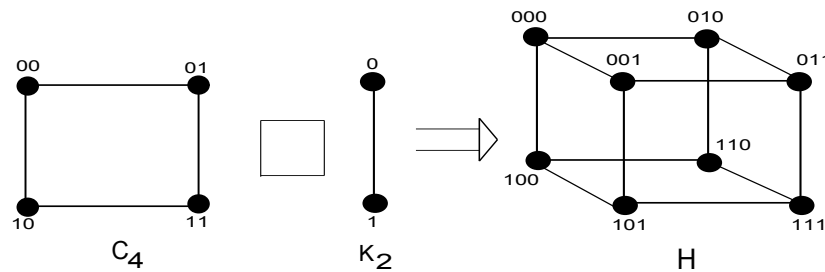


FIG. 1.2 – Somme Cartésienne $H = C_4 \square K_2$

Il est à noter que le graphe $G \square H$ possède $|V(G)| \times |V(H)|$ sommets et $|V(G)| \times |E(H)| + |V(H)| \times |E(G)|$ arêtes.

1.2.2 Produit Cartésien de deux graphes

Étant donnés deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$, le *produit Cartésien* de G par H , noté $G \times H$, est le graphe défini sur l'ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$ tel que deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si $uv \in E(G)$ et $u'v' \in E(H)$. La Figure 1.3 montre le produit Cartésien $K = G_1 \times G_2$.

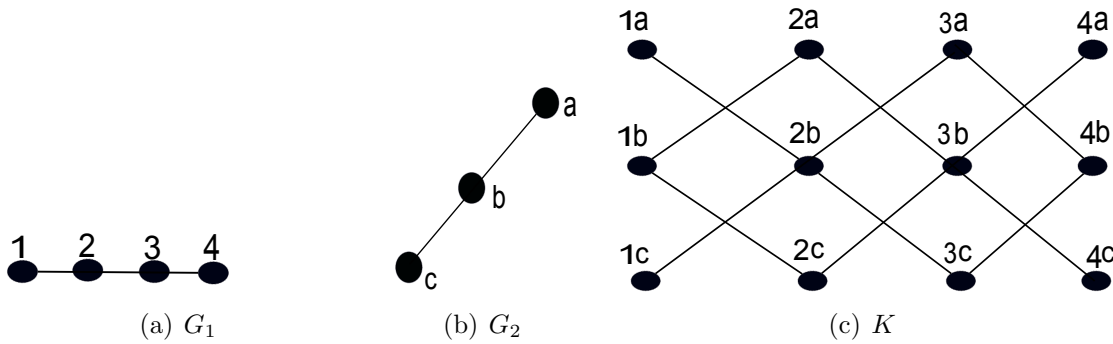


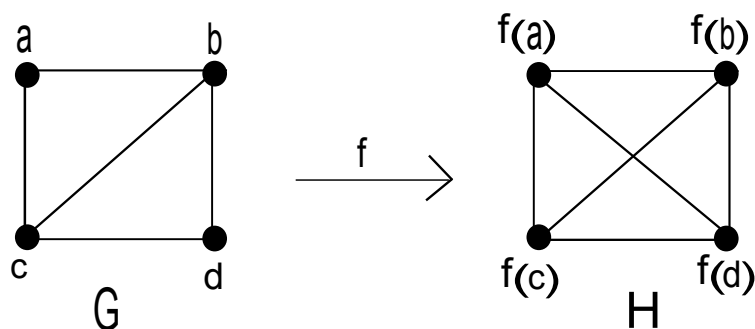
FIG. 1.3 – Produit cartésien $K = G_1 \times G_2$

1.2.3 Subdivisions de graphes

En remplaçant les arêtes d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ par des chaînes disjointes intérieurement, on obtient une subdivision de G . Une subdivision d'une arête uv du graphe G est le remplacement de cette arête par une chaîne $u = u_0, u_1, \dots, u_{p-1}, u_p = v$, où les u_i sont les nouveaux sommets insérés sur l'arête uv pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p - 1\}$.

1.2.4 Morphismes de graphes

Soient $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ deux graphes. Un homomorphisme de G dans H est une application f de $V(G)$ dans $V(H)$, telle que pour toute arête uv de G on a $f(u)f(v)$ est une arête de H , c'est à dire $(\forall (u, v) \in V(G) \times V(G), uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H))$. La Figure 1.4 montre l'homomorphisme de G dans H .

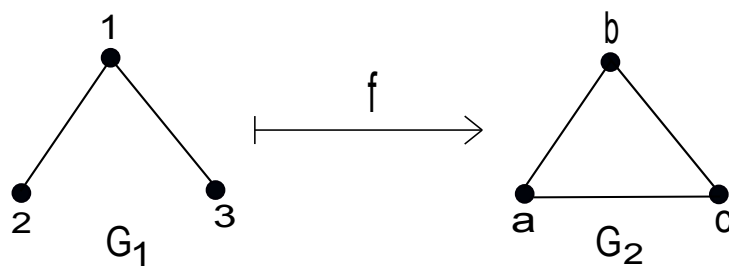
FIG. 1.4 – Homomorphisme de G dans H

1.2.5 Isomorphismes

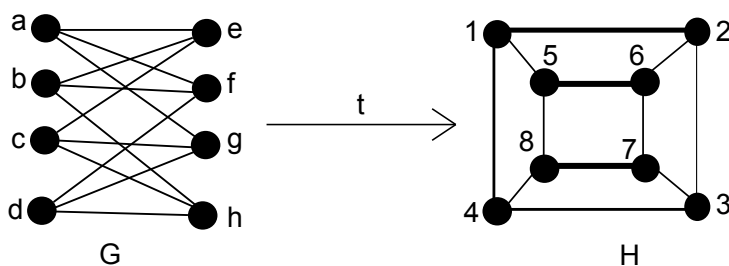
Deux graphes $G = (V(G), E(G))$ et $H = (V(H), E(H))$ sont dits isomorphes si et seulement si il existe une application bijective $\varphi : V(G) \rightarrow V(H)$ qui vérifie la condition suivante :

$$uv \in E(G) \Leftrightarrow \varphi(u)\varphi(v) \in E(H).$$

Ceci signifie aussi que φ est un morphisme et φ^{-1} est un morphisme. Un isomorphisme de G dans lui même est appelé Isomorphisme intérieur ou bien automorphisme. On voit facilement dans la Figure 1.5(a), que l'application f de $V(G_1)$ dans $V(G_2)$, telles que $f(1) = b$, $f(2) = a$ et $f(3) = c$. f présente bien un homomorphisme, mais on ne peut pas trouver un homomorphisme g de $V(G_2)$ dans $V(G_1)$. Donc f n'est pas un isomorphisme, par contre dans la Figure 1.5(b), l'application t de $V(G)$ dans $V(H)$, telles que $t(a) = 1$, $t(b) = 6$, $t(c) = 8$, $t(d) = 3$, $t(e) = 5$, $t(f) = 2$, $t(g) = 4$ et $t(h) = 7$ montre que G et H sont isomorphes.



(a) Homomorphisme de G_1 dans G_2



(b) Isomorphisme entre G et H

FIG. 1.5 – Homomorphisme de G_1 dans G_2 et isomorphisme de G dans H

1.2.6 Homéomorphismes

Une Application f de $G = (V(G), E(G))$ dans $H = (V(H), E(H))$ est dite homéomorphisme, si f est un homomorphisme tel que pour tout arête $uv \in E(H)$, $f^{-1}(\{u, v\})$ est une chaîne dans G . Dans ce cas G est dit homéomorphe à H , on dira aussi que G est une subdivision de H .

Définition 1.2.1. Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit sommet transitif si pour toute paire de sommets $u, v \in V(G)$ il existe un automorphisme φ de G , tel que $\varphi(u) = v$. Si pour toute paire d'arêtes $uv, u'v' \in E(G)$ il existe un automorphisme ψ de G , tel que $\{\psi(u), \psi(v)\} = \{u', v'\}$ on dira que le graphe G est arête transitif.

1.3 Distances et intervalles dans les graphes

1.3.1 Distances dans les graphes

Étant donné deux sommets u et v d'un graphe $G = (V(G), E(G))$. On appelle distance entre u et v , la longueur d'une plus courte (u, v) -chaîne (en terme de nombre d'arêtes) qui

les relie et on la note par $d_G(u, v)$ (ou $d(u, v)$ s'il n'y a pas de confusion). Une telle chaîne s'appelle *géodésique*.

- L'excentricité d'un sommet u notée $e_G(u)$ (ou $e(u)$ s'il n'y a pas de confusion) est le nombre suivant :

$$e_G(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v).$$

- Le diamètre de G noté $D(G)$ (ou D s'il n'y a pas de confusion) est la plus grande excentricité :

$$D(G) = \max_{u \in V(G)} [e(u)].$$

Un sommet $u \in V(G)$ est dit diamétral de $v \in V(G)$ si $d_G(u, v) = D(G)$. Si chaque sommet de G admet un unique sommet diamétral, on dira que G est diamétral.

- Le rayon de G noté $R(G)$ (ou R s'il n'y a pas de confusion) est la plus petite excentricité :

$$R(G) = \min_{u \in V(G)} [e(u)]$$

- Le centre de G est l'ensemble des sommets de G dont l'excentricité est égale au rayon.
- La distance entre deux arêtes u_1v_1 et u_2v_2 dans un graphe $G = (V(G), E(G))$ est définie par :

$$d_G(u_1v_1, u_2v_2) = \min\{d_G(u_1, u_2), d_G(u_1, v_2), d_G(v_1, u_2), d_G(v_1, v_2)\}.$$

1.3.2 Intervalles

L'intervalle $I_G(u, v)$ (ou $I(u, v)$ s'il n'y a pas de confusion) c'est l'ensemble des sommets de G appartenant aux plus courtes (u, v) -chaîne. $I_G(u, v) = \{w \in V(G)\}$, avec w est sur une plus courte (u, v) -chaîne. Trivialement, un sommet $w \in I(u, v)$ si et seulement si :

$$d_G(u, w) + d_G(w, v) = d_G(u, v).$$

Les propositions suivantes sont données par Mulder [62]

Proposition 1.3.1. [62]

Soient u et v deux sommets d'un graphe G . Alors :

1. $u, v \in I_G(u, v)$.
2. $I_G(u, v) = I_G(v, u)$.
3. Si $w \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, w) \subset I_G(u, v)$.
4. Si $w \in I_G(u, v)$, alors $I_G(u, w) \cap I_G(w, v) = \{w\}$.
5. Si $w \in I_G(u, v)$ et $z \in I_G(u, w)$, alors $w \in I_G(z, v)$.

Proposition 1.3.2. [62]

Pour tout triplet u, v et w d'un graphe G , il existe un sommet $z \in I_G(u, w) \cap I_G(u, v)$, tel que

$$I_G(z, w) \cap I_G(z, v) = \{z\}.$$

Proposition 1.3.3. [62]

Soient u, v, w et z quatre sommets d'un graphe G . z est l'unique sommet de $I_G(u, w) \cap I_G(u, v)$, tel que $I_G(z, w) \cap I_G(z, v) = \{z\}$ si et seulement si $I_G(u, w) \cap I_G(u, v) = I_G(u, z)$.

1.3.3 Décomposition en niveaux à partir d'un sommet

On appelle décomposition en niveaux (couches) à partir d'un sommet donné u la partition de $V(G)$ en $N_0(u), N_1(u), N_2(u), \dots, N_{e(u)}(u)$, tel que $N_i(u)$ est l'ensemble des sommets de $V(G)$ qui sont à distance i de u et on écrit $N_i(u) = \{v \in V(G) / d_G(u, v) = i, \text{ avec } i \in \{0, 1, \dots, e(u)\}\}$. La Figure 1.6 montre la décomposition en niveaux du graphe G à partir du sommet 1.

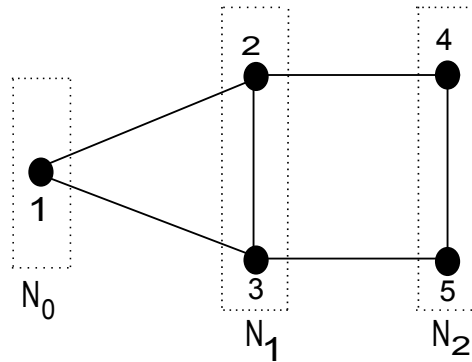


FIG. 1.6 – Décomposition en niveaux à partir d'un sommet

1.3.4 Décomposition en niveaux à partir d'intervalle

Le i -ème niveau de $I_G(u, v)$ noté $N_i(u, v)$ est défini comme suit :
 $N_i(u, v) = N_i(u) \cap I(u, v)$, pour tout $i \in \{0, 1, \dots, d_G(u, v)\}$. On peut aussi écrire $N_i(u, v) = \{w \in I_G(u, v) / d_G(u, w) = i, i \in \{0, 1, \dots, d_G(u, v)\}\}$. Donc d'après la définition de l'intervalle $I_G(u, v)$ on a : $N_i(u, v) = N_{d_G(u, v)-i}(v, u)$. La Figure 1.7 montre la décomposition en niveaux d'un graphe G à partir de l'intervalle $I_G(1, 4)$.

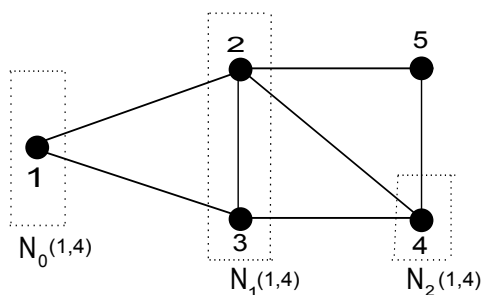


FIG. 1.7 – Décomposition en niveaux à partir d'intervalle

1.4 Quelques graphes particuliers

Graphes complets : Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit complet si tous ses sommets sont deux à deux adjacents. Le graphe complet (ou *clique*) à n sommets est noté K_n . K_5 est montré dans la Figure 1.8.

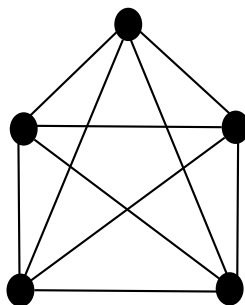


FIG. 1.8 – Graphe complet K_5

Graphes bipartis : Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit biparti, si l'ensemble de ses sommets $V(G)$ peut être partitionné en deux sous-ensembles $V_1(G)$ et $V_2(G)$ de sorte que deux sommets du même ensemble ne sont pas adjacents. Généralement on le note par

$G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$. Si de plus tout sommet de $V_1(G)$ est adjacent à tout sommet de $V_2(G)$, on dira que $G = (V(G), E(G))$ est biparti complet. Un tel graphe est noté $K_{p,q}$, avec $p = |V_1(G)|$ et $q = |V_2(G)|$. Si $p = q$, on dira que $G = (V_1(G) \cup V_2(G), E(G))$ est biparti équilibré. $K_{2,4}$ est montré dans la Figure 1.9.

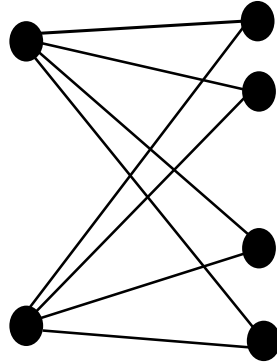


FIG. 1.9 – Graphe biparti complet $K_{2,4}$

Les cycles de longueurs pairs sont des graphes bipartis équilibrés. La Figure 1.10 montre le graphe équilibré $K_{2,2}$.

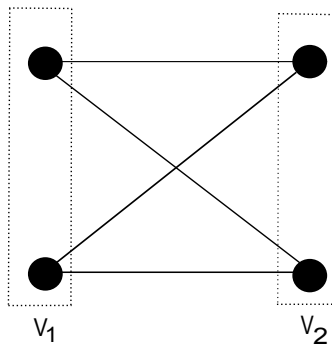


FIG. 1.10 – Graphe biparti équilibré $K_{2,2}$

Arbres : Un arbre T est un graphe connexe sans cycle. Si $\Delta(T) \leq 3$, on dira que l'arbre T est binaire.

Théorème 1.4.1. [7]

Soit G un graphe d'ordre n . Les propriétés suivantes sont équivalentes.

1. G est sans cycle et connexe,
2. G est sans cycle et possède $n - 1$ arêtes,
3. G est connexe et possède $n - 1$ arêtes,
4. G est sans cycle et maximal pour cette propriété (lorsqu'on lui ajoute une arête on crée un cycle et un seul),
5. G est connexe et minimal pour cette propriété (lorsque on lui supprime une arête quelconque on le déconnecte),
6. Tout couple de sommet (u, v) est relié par une chaîne et une seule.

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ vérifiant au moins l'une des propriétés ci-dessus est un arbre d'ordre n .

Théorème 1.4.2. [7]

Tout arbre d'ordre $n \geq 2$, admet au moins deux sommets pendants.

Graphes intervalles réguliers : Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit intervalle régulier si pour toute paire de sommets (u, v) de G , le nombre de voisins de u appartenant à $I_G(u, v)$ est égal à la distance entre u et v .

Graphes médians : Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit médian si pour tout triplet de sommets u, v et w de G on a $|I_G(u, v) \cap I_G(v, w) \cap I_G(u, w)| = 1$. Autrement dit pour tout triplet de sommets u, v et w de G , il existe un unique sommet x qui vérifie :

$$x \in I_G(u, v) \cap I_G(v, w) \cap I_G(u, w).$$

(0, 2)-graphes : Un graphe simple connexe $G = (V(G), E(G))$ est un (0, 2)-graphe si et seulement si pour tout couple de sommets (u, v) de $V(G) \times V(G)$, il existe soit exactement deux chaînes de longueur 2 reliant u à v , soit aucune chaîne de longueur 2 reliant u à v .

Graphes distance monotones : Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit distance monotone si, pour tout intervalle $I_G(u, v)$ et pour tout sommet $w \notin I_G(u, v)$, $\exists w' \in I_G(u, v)$ tel que $d_G(w, w') > d_G(u, v)$.

Hypercube et quelques caractérisations

Que ce soit dû à un regain actuel d'utilisation pratique (architectures parallèles, transfert de l'information, réseaux d'interconnexion, décisions multicritères, codage, etc.), à son utilisation pour modéliser des problèmes ou simplement à l'intérêt de sa topologie, l'hypercube est un objet d'étude particulièrement intéressante en combinatoire. Il demeure le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes plongeables dans l'hypercube. Dans ce chapitre nous donnons quelques propriétés sur les hypercubes qui seront utilisées par la suite. Nous donnons aussi une présentation générale de l'hypercube Q_n , ainsi que ses différentes caractérisations. Enfin, nous présentons le problème de plongement, ses quelques paramètres, ainsi que les conditions nécessaires et/ou suffisantes pour qu'un graphe soit plongeable dans l'hypercube Q_n .

2.1 Hypercube Q_n

Définition 2.1.1. L'hypercube de dimension n , noté Q_n est le graphe dont l'ensemble des sommets est formé des n -uplets binaires, et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent par exactement une seule composante (coordonnée).

Notons que $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et d'une manière générale, Q_n peut être défini récursivement en utilisant la somme Cartésienne de Q_{n-1} avec K_2 .

Il est clair que pour tout $n \geq 2$, Q_n est isomorphe à $\underbrace{K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2}_{n \text{ fois}}$. Donc

$$Q_{n+s} = Q_n \square Q_s.$$

L'hypercube Q_n est construit récursivement à partir de deux copies disjointes Q'_{n-1} et Q''_{n-1} de Q_{n-1} et 2^{n-1} nouvelles arêtes comme suit :

Soit $V(Q'_{n-1}) = \{0U = 0u_2u_3 \dots u_n, \text{ avec } u_i \in \{0, 1\}\}$ et $V(Q''_{n-1}) = \{1V = 1v_2v_3 \dots v_n, \text{ avec } v_i \in \{0, 1\}\}$, tel que un sommet $0U$ est relié à un sommet $1V$ si et seulement si $u_i = v_i$ pour tout $i \in \{2, \dots, n\}$.

La Figure 2.1 montre les premiers hypercubes.

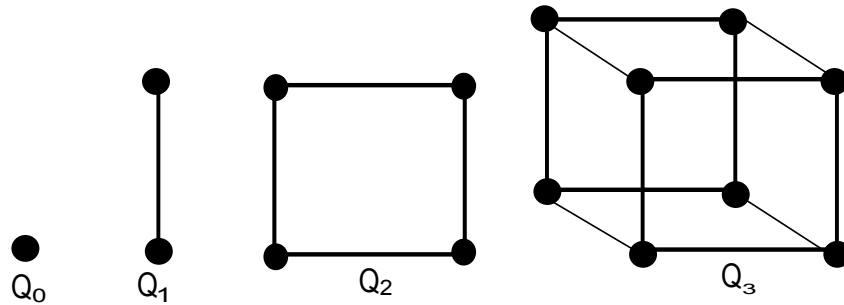


FIG. 2.1 – Q_0, Q_1, Q_2 et Q_3

Une direction i dans l'hypercube de dimension n ($i \leq n$) est l'ensemble des arêtes de Q_n , dont les extrémités ont des vecteurs associés qui diffèrent à la i -ème composante.

La Figure 2.1 montre la décomposition de Q_3 en deux copies disjointes de Q_2 suivant la direction 1.

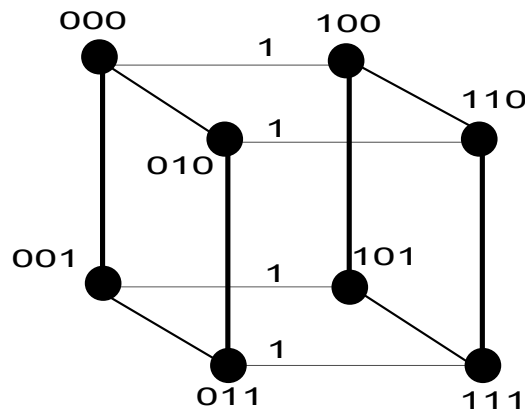


FIG. 2.2 – Décomposition canonique de Q_3 suivant la direction 1

Il est facile de voir qu'une direction définit un couplage parfait de 2^{n-1} arêtes qui décompose Q_n en deux copies disjointes (notées par Q'_{n-1} et Q''_{n-1}). Une telle décomposition s'appelle canonique suivant la direction i . Des arêtes de même direction sont appelées arêtes parallèles. Il existe n directions distinctes dans l'hypercube Q_n .

2.1.1 Propriétés élémentaires de l'hypercube

L'hypercube de dimension n est un graphe biparti équilibré, n -régulier ayant 2^n sommets et $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes.

Théorème 2.1.1. [62] *Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit intervalle-régulier si et seulement si pour tout couple de sommets (u, v) de $V(G)$, le sous graphe induit par l'ensemble des arêtes entre niveaux de $I_G(u, v)$ est un hypercube de dimension $d_G(u, v)$.*

Proposition 2.1.1. [26]

Pour deux sommets u et v qui sont à distance k dans Q_n , il existe $k!$ plus courtes (u, v) -chaînes.

2.1.2 Distance de Hamming

La distance de Hamming entre deux sommets u, v de Q_n est le nombre de composantes dont ils diffèrent, une telle distance est notée $\vartheta(u, v)$ et elle coïncide avec la distance au sens de la théorie des graphes $d(u, v)$ entre les deux sommets associés (le nombre d'arêtes d'une plus courte (u, v) -chaîne).

2.1.3 Décomposition en niveaux de l'hypercube

Soit $\{u, N_{1(u)}, N_{2(u)}, \dots, N_{e(u)}(u)\}$ une décomposition en niveaux à partir d'un sommet u choisit arbitrairement dans Q_n . On a les propriétés suivantes :

- i) Pour tout sommet v de $N_i(u)$, v admet exactement i voisins dans $N_{i-1}(u)$.
- ii) $|N_i(u)| = C_n^i, \forall i = 1, 2, \dots, e(u)$.

Il est facile de voir que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet u dans Q_n est égal à 2^{n-1} et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de u est

égal à $2^{n-1} - 1$.

La Figure 2.3 montre la décomposition en niveaux de l'hypercube Q_3 .

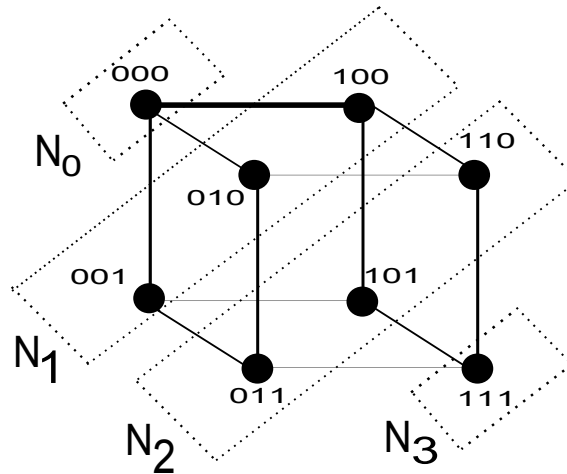


FIG. 2.3 – Décomposition en niveau de Q_3

2.1.4 Caractérisation de l'hypercube :

Une première caractérisation de l'hypercube est due à Foldes [26].

Théorème 2.1.2. [26]

Un graphe connexe $G = (V(G), E(G))$ est un hypercube si et seulement s'il vérifie les conditions suivantes :

- a. G est biparti.
- b. Pour tout couple de sommets u et v de G , le nombre de plus courtes (u, v) -chaînes est $d_G(u, v)!$.

Laborde[59] et Mulder[62] ont caractérisé l'hypercube en terme de $(0, 2)$ -graphes

Théorème 2.1.3. [62] Soit $G = (V(G), E(G))$ un $(0, 2)$ -graphe, biparti avec $D(G) = n$ et soit o et \check{o} deux sommets diamétraux de G . Si $|I_G(o, u) \cap N_G(u)| = d_G(o, u)$ et $|I_G(u, \check{o}) \cap N_G(u)| = d_G(u, \check{o})$ pour tout sommet u de G , alors G est un hypercube.

Théorème 2.1.4. [59]

Soit $G = (V(G), E(G))$ un $(0, 2)$ -graphe. Alors :

- i. G est régulier de degré n .

ii. $|V(G)| \leq 2^n$.

iii. $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est un hypercube de dimension n .

Bandelt [6] et Mulder [63] ont caractérisé l'hypercube en termes d'intervalles.

Théorème 2.1.5. [6] Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe biparti connexe. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. G est un hypercube ;
2. Tout intervalle dans G engendre un hypercube ;
3. Tout intervalle dans G engendre un $(0, 2)$ -graphe ;
4. Tout intervalle $I_G(u, v)$ contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets ;
5. Tout intervalle $I_G(u, v)$ engendre un graphe avec exactement $d(u, v) \times 2^{d(u,v)-1}$ arêtes.

Théorème 2.1.6. [63] Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un hypercube si et seulement si G est biparti et intervalle-régulier.

Théorème 2.1.7. [62]

Un graphe connexe $G = (V(G), E(G))$ est un hypercube si et seulement si G est un graphe médian régulier.

Remarque 2.1.1. L'hypercube est Hamiltonien, de plus par toute arête passe un cycle Hamiltonien.

D'autres caractérisations de l'hypercube en termes d'intervalles ont été données, en particulier des caractérisations en termes de graphes distance monotones [15], en termes de graphes intervalles réguliers et des graphes sphériques [8] peuvent être trouvées.

Définition 2.1.2. Une projection (resp. anti projection) d'un sommet u d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ sur un ensemble de sommets S de G est un sommet v de S à distance minimum (resp. maximum) de u . Pour tout ensemble de sommets S de G et pour tout sommet u , on désigne par $P(u, S)$ (resp. $AP(u, S)$) l'ensemble des projections (resp. anti projections) de u sur S .

Considérons les propriétés suivantes :

a. Pour tout triplet de sommets (u, v, w) , on a $|P(u, I_G(v, w))| = 1$ P_1 .

b. Pour tout triplet de sommets (u, v, w) , on a $|AP(u, I_G(v, w))| = 1$ P_2 .

Un graphe vérifiant l'une des deux propriétés P_1 et P_2 est un graphe biparti.

Mollard [60] a donné une caractérisation de l'hypercube en termes d'anti projections sur les intervalles.

Proposition 2.1.2. [60]

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est un hypercube si et seulement s'il vérifie la propriété P_2 .

Berrachedi [8] a donné un résultat analogue en considérant les projections sur les intervalles.

Proposition 2.1.3. [8]

Un $(0, 2)$ -graphe qui vérifie la propriété P_1 est un hypercube.

Les graphes de Hamming, somme Cartésienne de graphes complets sont une généralisation naturelle de l'hypercube.

Définition 2.1.3. Soient a_1, a_2, \dots, a_n des entiers positifs. Le graphe de Hamming H_{a_1, a_2, \dots, a_n} est le graphe dont l'ensemble des sommets est $\prod_{i=1}^n \{0, 1, \dots, a_i - 1\}$ et dont lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si leur vecteur correspondant diffèrent exactement d'une seule composante.

On peut également le définir, comme étant la somme Cartésienne de n graphes complets :

$$H_{a_1, a_2, \dots, a_n} = K_{a_1} \square K_{a_2} \square \dots \square K_{a_n}$$

2.2 Plongement de graphe dans l'hypercube

Définition 2.2.1. Un plongement de $G = (V(G), E(G))$ dans l'hypercube Q_n est défini par la donnée d'une application injective de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de Q_n , et d'une application P_ϕ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des chaînes de Q_n , qui associe à chaque arête uv de G une chaîne reliant les sommets $\phi(u)$ et $\phi(v)$ dans Q_n .

Plusieurs paramètres ont été définis pour mesurer la qualité de plongement de graphes dans l'hypercube. Les plus utilisés sont : dilatation, expansion et congestion qui sont définis comme suit :

a. Dilatation : La *dilatation* d'une arête uv d'un graphe G est la longueur de la chaîne entre $\phi(u)$ et $\phi(v)$ dans Q_n . Donc la dilatation d'un plongement ϕ d'un graphe G dans un hypercube Q_n , notée $dil(\phi)$ est la longueur maximale des chaînes $P_\phi(uv)$ de Q_n associées aux arêtes uv de G . Dans le cas où on considère des chaînes de plus courte longueur, la longueur de la chaîne entre $\phi(u)$ et $\phi(v)$ est alors égale à la distance $d_{Q_n}(\phi(u), \phi(v))$ et la dilatation s'exprime en fonction de ϕ comme suit : $dil(\phi) = \max_{uv \in E(G)} d_{Q_n}(\phi(u), \phi(v))$. Si la dilatation de plongement d'un graphe G dans Q_n vaut 1 on dira que G est un sous-graphe de l'hypercube Q_n . Si de plus $|V(G)| = 2^n$, alors G est un graphe partiel de Q_n .

b. Expansion : L'*expansion* d'un plongement ϕ d'un graphe G dans un hypercube Q_n , est le rapport du nombre de sommets de G sur le nombre de sommets de Q_n . l'expansion est une mesure du degré d'utilisation des processeurs dans le cas d'un algorithme modélisé par G , et implémenté sur le réseau de processeurs modélisé par l'hypercube Q_n .

c. Congestion : La *Congestion* d'un plongement ϕ d'un graphe G dans l'hypercube Q_n , notée $cong(\phi)$, est le maximum, pris sur toutes les arêtes e de Q_n , du nombre de chaînes $P_\phi(uv)$ de Q_n , images d'arêtes de G , qui contiennent e . Dans la littérature, le calcul de la *congestion* n'est généralement fait que pour un plongement qui optimise d'abord des contraintes sur la dilatation et l'expansion.

Dans notre étude on considère que des plongements de dilatation une. La recherche d'un plongement optimal d'un graphe G dans un hypercube Q_n , consiste à trouver la plus petite dimension n de l'hypercube dans lequel G y est plongeable, l'entier n sera appelé dimension de G et notée $dim(G)$.

Un graphe $G = (V(G), E(G))$ est dit cubique s'il est plongeable dans Q_n pour un certain n . Firsov [25] a remarqué que les arbres sont des graphes cubiques, il a aussi montré que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas toujours vraie.

Un exemple de graphe biparti qui n'est pas cubique c'est le graphe $K_{2,3}$ montré dans la

Figure 2.4

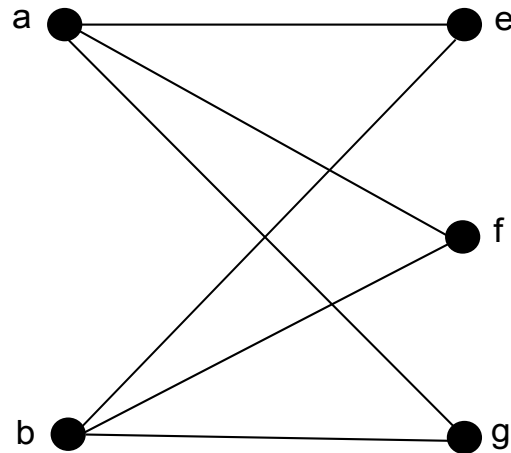


FIG. 2.4 – Graphe biparti non cubique

Le graphe $K_{2,3}$ n'est pas plongeable dans Q_n , car dans $K_{2,3}$ les sommets a et b sont à distance 2 et appartiennent à 3 plus courtes (a, b) -chaînes de longueur 2, par contre dans Q_n pour tout couple de sommets (u, v) de Q_n , le nombre de plus courtes (u, v) -chaînes est $d(u, v)!$.

Remarque 2.2.1. Soit $G = (V(G), E(G))$ un graphe d'ordre 2^n . Si G est plongeable dans Q_n , alors G doit être équilibré.

Arfati, Papadimitriou et Papegeorgiou [5] ont montré que le problème de décider si un graphe G est plongeable dans Q_n est N.P-complet. Wagner et Corneil [67] ont montré que ce problème reste N.P-complet même dans le cas où G serait un arbre. Dans notre étude, nous cherchons les dimensions cubiques de quelques classes d'arbres. Le graphe de Q_n est biparti connexe et équilibré. Si G est plongeable dans Q_n , tel que G est connexe, alors G est biparti. Si de plus $|V(G)| = 2^n$, alors G est aussi équilibré.

Si un graphe G est plongeable dans un graphe H , H est plongeable dans Q_n , alors G est aussi plongeable dans Q_n .

2.2.1 Conditions nécessaires de plongement d'un graphe G dans l'hypercube

Si un graphe $G = (V(G), E(G))$ est plongeable dans Q_n , alors :

- i. $|V(G)| \leq 2^n$.
- ii. G est biparti.
- iii. Le degré maximum de G , $\Delta(G) \leq n$.

Si de plus $|V(G)| = 2^n$, alors G doit être équilibré.

Toutes ces conditions sont nécessaires pour qu'un graphe G soit plongeable dans Q_n , mais ne sont pas suffisantes, comme le montre le graphe de la Figure 2.5.

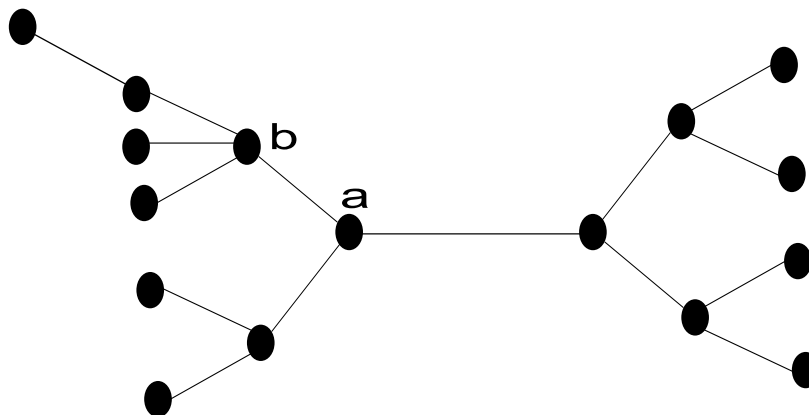


FIG. 2.5 – Arbre équilibré à 2^4 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4 .

Cet arbre n'est pas plongeable dans Q_4 . En effet, dans T tous les sommets sont à distance au plus 3 du sommet a , alors que dans Q_n , pour tout sommet donné v , il existe un unique sommet u tel que $d(u, v) = n$ (Q_n est antipodal), donc l'antipodal de a devrait être à distance 4 dans Q_4 .

2.3 C_n -valuation des arbres

La notion de la C_n -valuation a été introduite par Havel et Moravek [41]. La C_n -valuation d'un arbre est définie comme suit :

Définition 2.3.1. Un arbre T est C_n -valué si les arêtes de T sont marquées par les entiers de l'ensemble $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ de sorte que pour toute chaîne P de T , il existe un entier $K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$ pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par K .

Étant donné une C_n -valuation d'un arbre T et soit P une chaîne de T . On définit l'ensemble impair de P par :

$O(P) = K \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, pour lequel un nombre d'arêtes de P sont marquées par K .

Par la C_n -valuation d'arbres certains plongements d'arbres dans Q_n peuvent être associés. Havel et Morávek [41] ont prouvé le résultat suivant sur le plongement d'arbres dans l'hypercube.

Théorème 2.3.1. [41]

Un arbre T est plongeable dans Q_n si et seulement s'il existe un C_n -valuation de T .

Quelques classes d'arbres plongeables dans l'hypercube

La mise en oeuvre d'algorithmes parallèles sur des architectures microprocesseurs à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de *plongement* d'un graphe $G = (V(G), E(G))$ dans un graphe $H = (V(H), E(H))$.

Bien souvent, un algorithme distribué \mathcal{A} est défini en supposant l'existence d'une structure logique \mathcal{S} , sur laquelle l'algorithme \mathcal{A} est défini. Une méthode pour implementer sur un réseau \mathcal{R} un algorithme \mathcal{A} et sa topologie logique associée \mathcal{S} , consiste à *simuler* \mathcal{S} sur \mathcal{R} . Cette *simulation* peut être faite par le plongement de \mathcal{S} dans \mathcal{R} . Nous donnons dans ce chapitre quelques résultats connus sur les plongements. Nous présentons aussi la conjecture de Havel [35] sur le plongement des arbres binaires équilibrés ayant 2^n sommets dans l'hypercube Q_n . Enfin, nous présentons quelques classes d'arbres binaires pour lesquels la dimension cubique est déterminée.

3.1 Quelques types d'arbres binaires plongeables dans Q_n

Soit T un arbre d'ordre n . L'hypercube $Q_{dim(T)}$ est appelé hypercube optimal de T . Comme tous les arbres sont cubiques [25]. Donc on s'intéressera à la recherche de la dimension cubique de ces arbres (plongement optimal de ces arbres dans l'hypercube).

Un résultat concernant les arbres binaires a été donné par Havel [35].

Proposition 3.1.1. [35]

Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$. Si T est équilibré et possède deux sommets de degré 3, alors T est plongeable dans Q_n .

3.1.1 Arbres binaires complets

Définition 3.1.1. L'arbre binaire complet D_n est le graphe défini inductivement comme suit : Pour $n = 1$, $D_1 = K_{1,2}$ est un graphe biparti complet, pour $n \geq 2$, D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1, T_2 de D_{n-1} et d'un nouveau sommet u , tel que u est relié aux sommets de degré 2 de T_1 et T_2 .

D_n possède 2^n sommets pendants, $2^n - 2$ sommets de degré 3 et un seul sommet de degré 2. Le sommet de degré 2 sera appelé la racine de D_n . Donc D_n possède $2^{n+1} - 1$ sommets. D_1, D_2 et D_3 sont montrés dans la Figure 3.1.

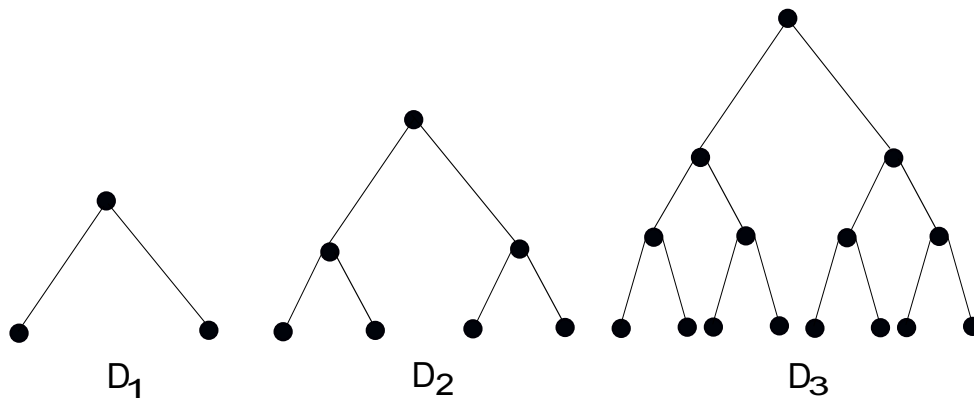


FIG. 3.1 – Arbres binaires complets D_1, D_2 et D_3

Le résultat suivant est dû à Havel [38].

Théorème 3.1.1. [38]

$\dim(D_1) = 2$ et pour tout $n \geq 2$, $\dim(D_n) = n + 2$.

La Figure 3.2 montre la 5-valuation de l'arbre binaire complet D_3 .

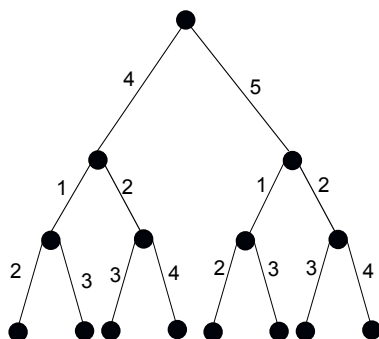


FIG. 3.2 – C_5 -valuation de l'arbre binaire complet D_3

3.1.2 Arbres obtenus par transformation des arbres binaires

Dans cette section nous présentons quelques classes d'arbres plongeables dans l'hypercube, qui sont obtenus par modification des arbres binaires.

Havel [38] a étudié les arbres binaires B_n , B_n^k et \hat{D}_n définis comme suit :

1. Pour $n \geq 2$, B_n est un arbre binaire obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_{n-1} et d'un sommet u , tel que u soit relié à la racine de D_{n-1} par une arête. B_n possède $2^{n-1} + 1$ sommets pendants et $2^{n-1} - 1$ sommets de degré 3. Donc B_n possède 2^n sommets. B_2 , B_3 et B_4 sont montrés dans la Figure 3.3.

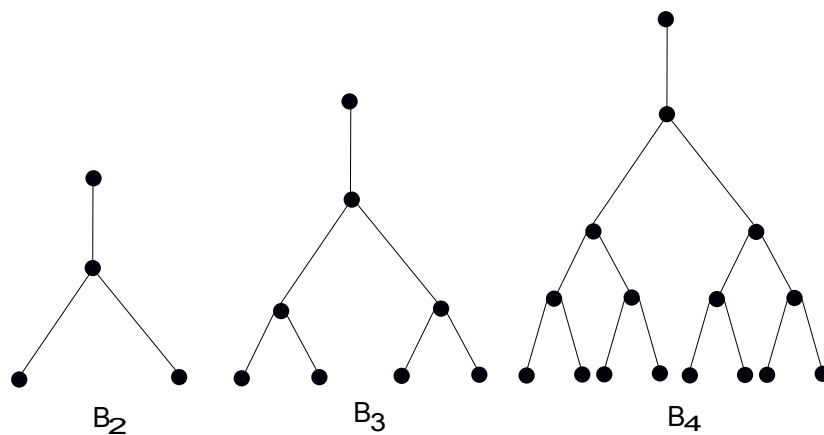


FIG. 3.3 – Arbres binaires B_2 , B_3 et B_4

Théorème 3.1.2. [38]

Pour tout $n \geq 2$, $\dim(B_n) = n + 1$.

2. Soit $n \geq 2$ et $k \geq 1$, $B_n^{(k)}$ est formé de la manière suivante :

Pour $k = 1$, $B_n^{(1)}$ est l'arbre binaire B_n , pour $k \geq 2$, $B_n^{(k)}$ est l'arbre obtenu à partir de B_n par subdivision de chaque arête de l'arbre binaire complet D_{n-1} par $k - 1$ sommets et l'arête pendante de B_n incidente à la racine de D_{n-1} par $2(k - 1)$ sommets. Il est clair que $|V(B_n^{(k)})| = k \cdot 2^n$.

Proposition 3.1.2. [38]

Pour $n \geq 2$, $\dim(B_n^2) = n + 1$.

B_3^2 est représenté dans la Figure 3.4.

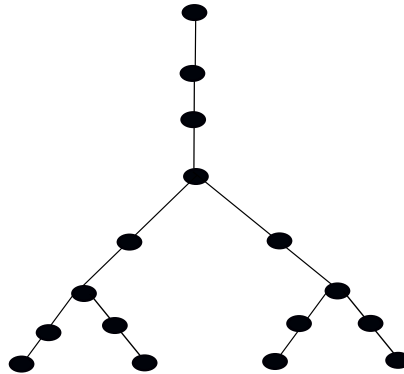


FIG. 3.4 – Arbre binaire B_3^2

Proposition 3.1.3. [38]

Pour $n \geq 2$ et $s \geq 1$, $\dim(B_n^{2^s}) = n + s$.

3. Pour $n \geq 1$, on désigne par \hat{D}_n l'arbre formé à partir de deux copies disjointes de D_n , tel que leurs racines sont reliées par une arête appelée arête axiale de \hat{D}_n . Cet arbre possède 2^{n+1} sommets pendants et $2^{n+1}-2$ sommets de degré 3. Donc \hat{D}_n a $2^{n+2}-2$ sommets.

\hat{D}_2 est montré dans la Figure 3.5.

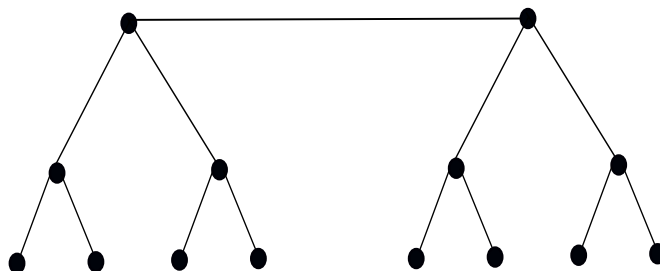


FIG. 3.5 – Arbre binaire complet à double racines \hat{D}_2

Théorème 3.1.3. [38]

Pour tout $n \geq 1$, $\dim(\hat{D}_n) = n + 2$.

Dans le cas des arbres binaires équilibrés, Havel [35] a donné la conjecture suivante :

Conjecture 3.1. [35]

Tout arbre binaire équilibré ayant 2^n sommets est plongeable dans Q_n .

Cette conjecture est toujours ouverte. Cependant, elle a été démontrée dans plusieurs cas particuliers.

Nebeský [64] a introduit deux arbres binaires équilibrés vérifiant cette conjecture.

4. Soit $n \geq 1$, on désigne par :

- \hat{D}_n l'arbre formé à partir de l'arbre \hat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets de degré 2 au niveau de l'arête axiale de \hat{D}_n . (La chaîne obtenue à partir de l'arête axiale sera appelée chaîne axiale de \hat{D}).
- \check{D}_n l'arbre formé à partir de l'arbre \hat{D}_n en insérant deux nouveaux sommets de degré 2 au niveau d'une arête pendante de \hat{D}_n

Il est clair que \hat{D}_n et \check{D}_n sont équilibrés ayant chacun 2^{n+2} sommets.

Les arbres \hat{D}_2 et \check{D}_2 sont montrés dans la Figure 3.6.

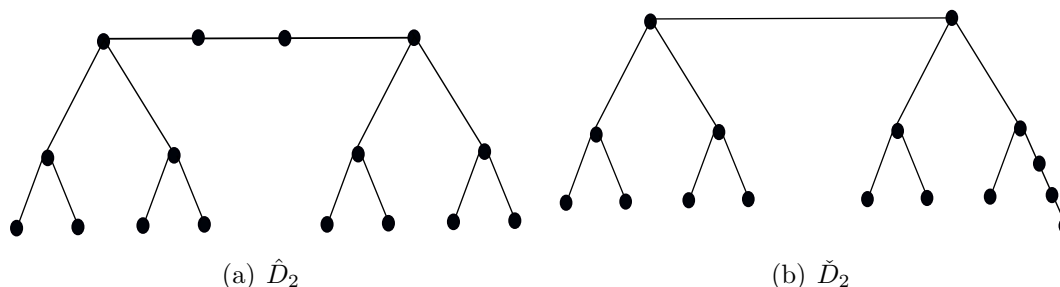


FIG. 3.6 – Arbres binaires \hat{D}_2 et \check{D}_2

Théorème 3.1.4. [64]

Pour tout $n \geq 1$, $\dim(\hat{D}_n) = \dim(\check{D}_n) = n + 2$.

Berrachedi [9] a introduit l'arbre binaire D_n^k formé de la manière suivante :

5. Soit $n \geq 2$, l'arbre D_n^k est formé à partir de D_n en supprimant k sommets pendants, avec $k \leq 2^n$. D_n^2 possède $2^n - 1$ sommets pendants, $2^n - 3$ sommets de degré 3 et un sommet de degré 2. D_3^2 est montré dans la Figure 3.7.

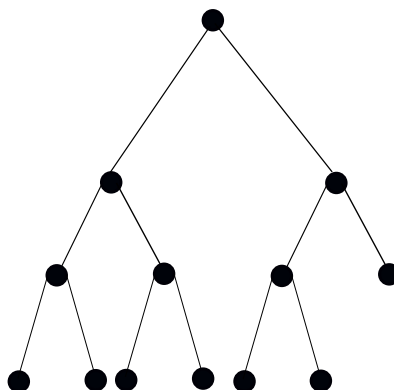


FIG. 3.7 – Arbre binaire D_3^2

Théorème 3.1.5. [9]

Pour $n \geq 2$, $2 \leq k \leq 2^n$ $\dim(D_n^k) = n + 1$.

Arbouz [3] a introduit l'arbre binaire suivant :

6. F_1 est donné dans la Figure 3.8.

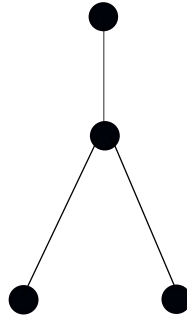


FIG. 3.8 – Arbre binaire F_1

F_2 est l'arbre de la Figure 3.9.

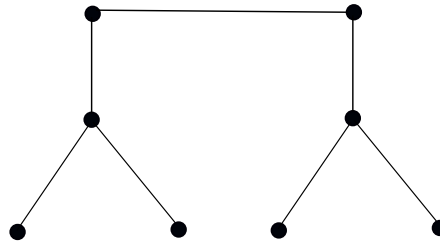


FIG. 3.9 – Arbre binaire F_2

Pour tout $n \geq 3$, F_n est obtenu en joignant un sommet de degré 2 de F_{n-1} à un sommet pendent de F_1 .

F_n possédera alors $4 \times n$ sommets parmi lesquels :

- $2n - 2$ sommets de degré 3.
- 2 sommets de degré 2.
- $2n$ sommets pendants.

Proposition 3.1.4. [3]

$\dim(F_1) = 3$ et pour tout $k \geq 1$, $\dim(F_{2^k}) = k + 2$.

Le corollaire suivant donne la dimension de F_n pour n quelconque :

Corollaire 3.1.1. [3]

Pour tout $n \geq 1$, $\dim(F_n) = 2 + \lceil \log_2(n) \rceil$ où $\lceil \log_2(n) \rceil$ désigne la partie entière supérieure du réel $\log_2(n)$.

Choudum [19] a montré les plongements des arbres AVL et les arbres de Fibonacci dans l'hypercube. Le nom AVL vient du nom des auteurs Adelson-Velskii et Landis [2].

3.1.3 Arbres binaires de recherche

Définition 3.1.2. Soit T un arbre binaire tel que chaque sommet est représenté par son poids (valeur entière positive). On dit que T est un arbre de recherche si pour tout sommet u de T et pour tout sommet v du sous-arbre gauche (resp. droit) de u , on a le poids de v est strictement inférieur (resp. strictement supérieur) au poids de u .

La Figure 3.10 montre un exemple d'arbre de recherche à 10 sommets.

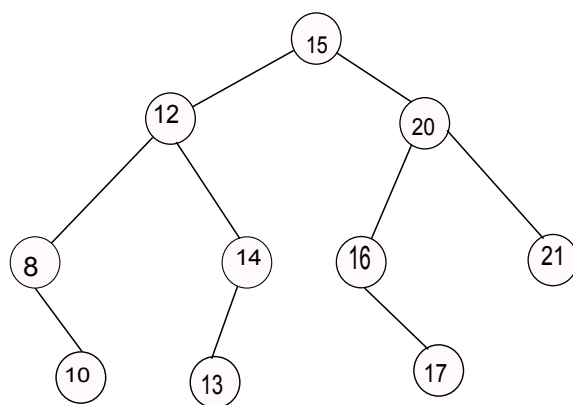


FIG. 3.10 – Exemple d'arbre de recherche à 10 sommets

3.1.4 Arbres AVL (Adelson-Velskii et Landis)

Définition 3.1.3. Un arbre de recherche T est un arbre AVL, si que pour tout sommet u de T , la différence $b_T(u)$ entre les hauteurs des sous-arbres gauche et droit de u est au plus 1, par convention la hauteur d'un sous-arbre vide est égale à -1 .

La différence $b_T(u)$ est appelée facteur d'équilibrage du sommet u . L'arbre AVL est aussi appelé Arbre équilibré en hauteur. La Figure 3.11 montre un exemple d'un arbre AVL à 12 sommets.

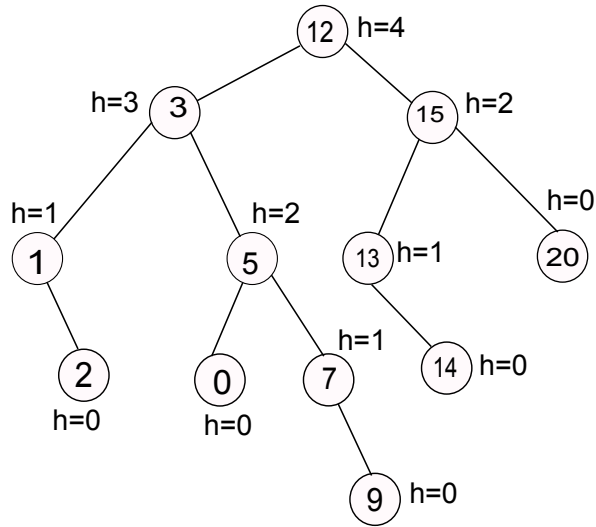


FIG. 3.11 – Exemple d'un arbre AVL à 12 sommets

Clairement tout arbre à hauteur équilibré de hauteur h , T_h est un sous-arbre de l'arbre binaire complet D_h . Comme D_h est plongeable dans Q_{h+2} , alors T_h est aussi plongeable dans Q_{h+2} . Un arbre à hauteur équilibré T_h contenant une chaîne P allant de la racine à un sommet pendant l , tel que pour tout sommet $u \neq l$ de P on a $b_{T_h}(u) = 1$ est noté par T_{Ph} .

Proposition 3.1.5. [19]

Pour tout $h \geq 0$, l'arbre à hauteur équilibré T_{Ph} est plongeable dans Q_{h+1} .

3.1.5 Arbres de Fibonacci

Définition 3.1.4. Les arbres de Fibonacci, sont des arbres binaires obtenus de la manière suivante :

\mathcal{F}_0 est l'arbre réduit à un seul sommet, \mathcal{F}_1 est une chaîne de longueur 1 (une arête) et pour $n \geq 2$, \mathcal{F}_n est un arbre contenant une racine avec \mathcal{F}_{n-1} pour un sous-arbre gauche et \mathcal{F}_{n-2} pour un sous-arbre droit.

Il est clair qu'un arbre de Fibonacci \mathcal{F}_h est un arbre à hauteur équilibré T_{Ph} . Donc pour tout $h \geq 0$, l'arbre de Fibonacci \mathcal{F}_h est plongeable dans Q_{h+1} .

$\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$ et \mathcal{F}_3 sont donnés dans la Figure 3.12.

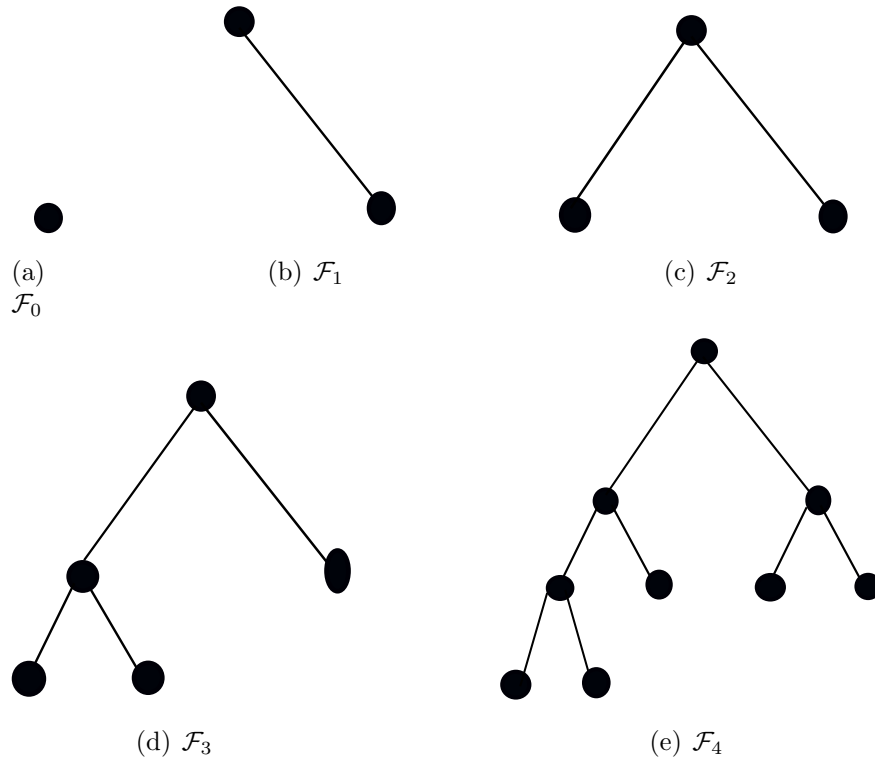


FIG. 3.12 – Arbres de Fibonacci $\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2, \mathcal{F}_3$ et \mathcal{F}_4

Proposition 3.1.6. [19]

Pour tout $h \geq 0$, \mathcal{F}_h est plongeable dans Q_{d_h} où $d_h = \begin{cases} \frac{3 \times h + 4}{4}, & \text{si } h \equiv 0 \pmod{4} \\ \frac{3 \times h + 5}{4}, & \text{si } h \equiv 1 \pmod{4} \\ \frac{3 \times h + 6}{4}, & \text{si } h \equiv 2 \pmod{4} \\ \frac{3 \times h + 3}{4}, & \text{si } h \equiv 3 \pmod{4} \end{cases}$

3.2 Autres graphes plongeables dans Q_n

Dans cette section nous présentons certains résultats connus sur certains types d'arbres non binaires.

3.2.1 Arbres n -aires complets

Les arbres n -aires complets sont tout naturellement une généralisation des arbres binaires, où le degré de la racine est égal à n . Un tel arbre de degré n et de hauteur k est noté T_k^n . T_k^n est considéré comme une n - étoile de k rayons, chaque point final d'un rayon devient le centre d'une nouvelle n - étoile, cette procédure est répétée k fois. L'arbre 3-aires complet T_2^3 est montré dans la Figure 3.13.

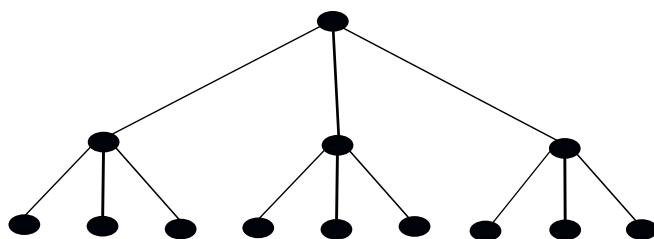


FIG. 3.13 – Arbre 3-aires complet T_2^3

Havel [39] a montré le plongement de ces arbres dans l'hypercube.

Proposition 3.2.1. [39] T_2^n est plongeable dans l'hypercube et $\dim T_2^n = \lceil (3n + 1)/2 \rceil$.

3.2.2 Chenilles

Définition 3.2.1. Une chenille C est un arbre avec au moins trois sommets, qui devient une chaîne P si tous les sommets pendants de cet arbre sont supprimés. Cette chaîne est appelée colonne de C (ou épine dorsale), les sommets de P sont appelés sommets vertébraux (ou sommets épineux).

Un exemple d'une chenille de degré maximum 4 est donné par la Figure 3.14.

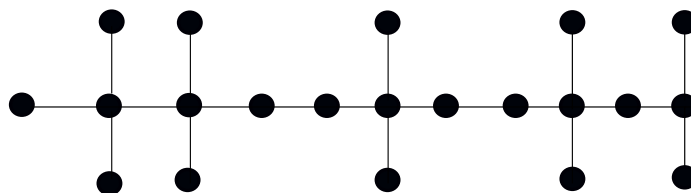


FIG. 3.14 – Chenille de degré maximum 4

Pour $k \geq 1$, soient L_i ($i = 1, 2, \dots, k$) des entiers positifs tel que $k + L_1 + L_2 + \dots + L_k \geq 3$.

On note par $CAT[L_1, L_2, \dots, L_k]$ la chenille à k vertèbres ou bien une chenille qui est formée par une épine P à k sommets [24]. L_i étant le nombre de sommets non épineux adjacents au i -ème vertèbre (Sommet i de l'épîne P). Le nombre de sommets dans $CAT[L_1, L_2, \dots, L_k]$ est $k + L_1 + L_2 + \dots + L_k$, la chenille $CAT[0, L_2, \dots, L_k]$ à k sommets épineux est isomorphe à la chenille $CAT[L_2 + 1, \dots, L_k]$ à $k - 1$ sommets épineux.

Pour simplifier les notations, dans certains cas on utilisera des parenthèses et des puissances. Comme le montre l'exemple suivant :

$$CAT[3, 3, 3] = CAT[(3)^3], \quad CAT[0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2] = CAT[0, (2.0)^3, (0, 2)^2] \text{ et } \\ CAT[0, 2, 0, 2] = CAT[(0, 2)^2].$$

Soit ζ l'ensemble des chenilles de degré au plus 3, et soit ζ_n le sous-ensemble de ζ formé par les chenilles équilibrées à 2^n sommets.

Soit C une chenille dans ζ et soit P son épine. On note par $\{v_1, v_2, \dots, v_s\}$ l'ensemble des sommets de P).

Pour deux sommets $x, y \in V(P)$, on note par $C_{x,y}$ le sous-graphe de C engendré par les sommets v_x, \dots, v_y .

Havel et Liebl [40] ont montré le Théorème suivant sur les chenilles de degré maximum 3.

Théorème 3.2.1. [40]

Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 3 est plongeable dans Q_n .

Leur preuve repose sur le Lemme suivant :

Lemme 3.2.1. [40]

Pour $n \geq 2$, soit $C \in \zeta_{n+1}$. Soit P une colonne de C , telle que $|V(p)| = s$. Alors il existe x, y dans P ($1 \leq x < y < s$) tel que $C_{x,y}$ soit dans ζ_n .

Harary et Lewinter [34] Ont montré un résultat identique pour les chenilles de degré maximum 4.

Théorème 3.2.2. [34]

Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 4 est plongeable dans Q_n .

Dvorák, Havel et Laborde [24] ont montré d'autres plongements de ce type de graphes. Ils ont aussi montré, en utilisant les propriétés de l'hypercube, que certaines chenilles particulières n'admettent pas de plongement optimal dans l'hypercube de dimension n . citons les résultats suivants :

Lemme 3.2.2. [24]

Pour tout $n \geq 3$ et pour tout $k \geq 0$, $CAT[n-1, (0, n-3)^k, 0, n-1] \not\subseteq Q_n$.

Proposition 3.2.2. [24]

- i) Pour $n \geq 4$, $CAT[(3)^{2^n}] \subseteq Q_{n+2}$,
- ii) Pour $0 \leq n \leq 3$, $CAT[(3)^{2^n}] \not\subseteq Q_{n+2}$.

Harary et Lewinter [34] ont introduit aussi les k -chenilles définies comme suit :

Définition 3.2.2. Une k -chenille C , $k \geq 1$ est une chenille de degré maximum $k+2$. Si le degré des sommets de C est dans l'ensemble $\{1, 2, k+2\}$, on dira que C est une stricte k -chenille.

Un exemple d'une stricte 3-chenille est donné par la Figure 3.15.

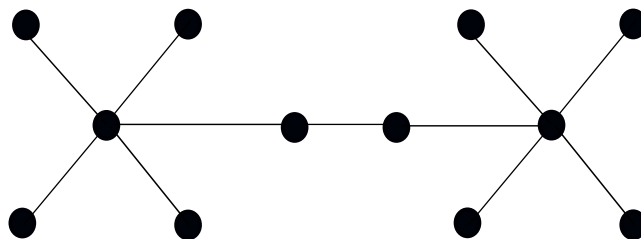


FIG. 3.15 – Stricte 3-chenille

Théorème 3.2.3. [34]

Une 1-chenille équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans Q_n .

Théorème 3.2.4. [34]

Pour $n \geq 4$. Soit C une stricte 2-chenille équilibrée d'ordre 2^n . Si C possède 2 sommets de degré 4, alors C est plongeable dans Q_n .

Théorème 3.2.5. [34]

Pour $n \geq 4$. Soit C une stricte 2-chenille d'ordre 2^n . Si

$C = CAT[0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0, \dots, 0, 2, 2, 0]$, alors C est plongeable dans Q_n .

$\underbrace{\hspace{10em}}_{2^{n-3} \text{ fois}}$

$CAT[0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0]$ est montrée dans la Figure 3.16.

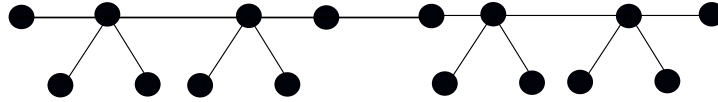


FIG. 3.16 – $CAT[0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, 0]$

Arbouz [4] a introduit une classe d'arbre Γ_K vérifiant la conjecture formulée par Havel [35]. La classe Γ_K est définie comme suit :

Soit $G = (V(G), E(G))$ une 1-chenille ayant une épine de longueur $\frac{|V|}{2} - 1$ où $\frac{|V|}{2}$ est le nombre de sommets pendants. Ce type d'arbre est appelé une complète 1-chenille (complete one legged caterpillars) ($C.O.C$).

Soit ξ une famille de $C.O.C$ et $H = (V(H), E(H))$ un arbre de la classe Γ_K , obtenu comme suit :

Remplacer chaque sommet u de H par $P_u \in \xi$, avec P_u doit être d'ordre supérieur ou égal à $2 \times d_H(u)$. Si $uv \in E(H)$, alors on identifie une arête pendante de P_u à une arête pendante de P_v . Un arbre de la classe Γ_K est montré dans la Figure 3.17.

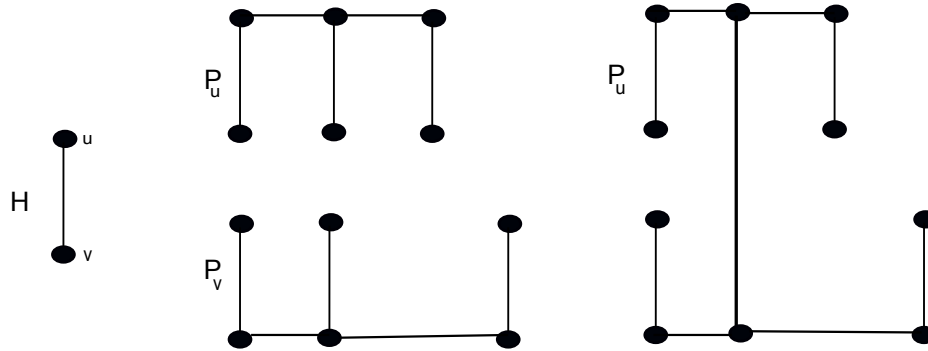


FIG. 3.17 – Arbre de la classe Γ_K

Théorème 3.2.6. [4]

Un arbre binaire $G = (V(G), E(G))$ admet un couplage parfait si et seulement s'il appartient à la classe Γ_K .

Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n qui contient un couplage parfait M , (ie. $T \in \Gamma_K$). Considérons deux sous-arbres T_1 et T_2 de T , tels que pour tout $i \in \{1, 2\}$, T_i n'est pas forcément connexe. Donc l'arbre T possède aux moins deux composantes connexes qui sont soit une chaîne, soit un sommet isolé. Ainsi, soit P_i le nombre de composantes connexes de T_i . Alors $P_1 + P_2 = 2^{n-1} + 1$.

Si $P_1 = k$ avec $k \geq 1$, on dira que T appartient à la classe Γ_k .

Théorème 3.2.7. [4]

Un arbre binaire T à 2^n sommets, $n \geq 1$ est plongeable dans l'hypercube Q_n si $T \in \Gamma_k$ avec $k \leq 2$.

3.2.3 Quasi-étoiles et doubles quasi-étoiles

Définition 3.2.3. Une étoile est un arbre avec exactement un sommet u qui n'est pas pendant, ce sommet est appelé jonction, et son degré est le nombre d'arêtes incidentes à u . Un tel arbre est noté $K_{1,n}$.

L'étoile $K_{1,6}$ est montré dans la Figure 3.18.

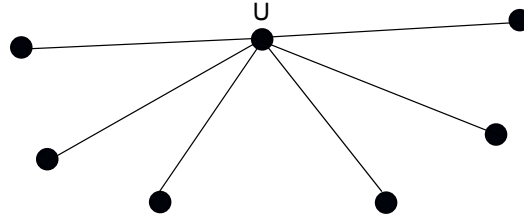


FIG. 3.18 – Étoile $K_{1,6}$

Il est évident qu'une étoile est cubique est que $\dim(K_{1,n}) = n$.

Définition 3.2.4. Une quasi-étoile est une étoile dont les arêtes sont subdivisées.

Le Lemme suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une quasi-étoile soit équilibrée.

Lemme 3.2.3. [35]

Une quasi-étoile est équilibrée si et seulement si elle possède exactement une seule chaîne de longueur impaire.

Le degré d'une quasi-étoile est le nombre de chaînes ayant u comme une jonction commune. On notera par $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$ une quasi-étoile de degré k , dont les chaînes sont d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k . Une quasi-étoile de degré k à 2^n sommets, est appelée k -quasi-étoile. La quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 2, 3)$ est montrée dans la Figure 3.19.

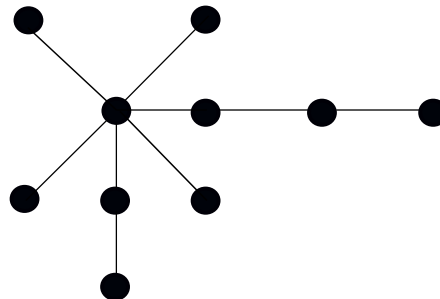


FIG. 3.19 – Quasi-étoile $S(1, 1, 1, 1, 2, 3)$

Définition 3.2.5. Une double étoile est formée de deux étoiles dont les centres u et v sont reliés par une arête.

À noter que u et v ne sont pas forcément de même degré.

Définition 3.2.6. Une double quasi-étoile est une subdivision d'une double étoile, dans laquelle l'arête reliant u et v n'est pas subdivisée. Une double quasi-étoile dont les sommets u et v sont de degré respectif k et s ($k \geq s$), est notée par $S(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_s)$.

La quasi-étoile $S(1, 2, 3, 1, 1, 2)$ est montrée dans la Figure 3.20.

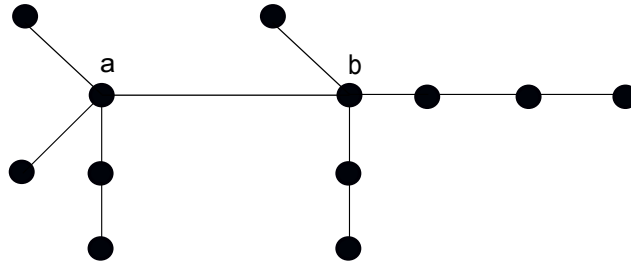


FIG. 3.20 – Double quasi-étoile $S(1, 2, 3, 1, 1, 2)$

Il est clair qu'une double quasi-étoile est équilibrée si et seulement si le nombre de chaînes d'ordres impairs incidentes à u est égal au nombre de chaînes d'ordres impairs incidentes à v . Une double quasi-étoile équilibrée $S(a_1, a_2, \dots, a_k, b_1, b_2, \dots, b_s)$ est appelée k -double quasi-étoile équilibrée.

Havel [35] a montré que les 3-quasi-étoiles équilibrées à 2^n sommets sont plongeables dans Q_n , Nebeský [65] a étendu ce résultat aux 4-quasi-étoiles équilibrées et 5-quasi-étoiles équilibrées.

Kobeissi [56] a introduit les $MD(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphes suivants afin de prouver que les quasi-étoiles et doubles quasi-étoiles sont plongeables dans l'hypercube.

Définition 3.2.7. Soit uv une arête donnée, on désigne par $MD(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphe, le graphe formé par l'arête uv et de k chaînes distinctes d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k où les a_i sont des entiers positifs pairs et $k \geq 1$, tels que les extrémités de chaque chaîne soient reliées l'une par une arête à u et l'autre par une arête v , avec $a_1 + a_2 + \dots + a_k = 2^n - 2$.

Le $MD(2, 4, 8)$ graphe est montré dans la Figure 3.21.

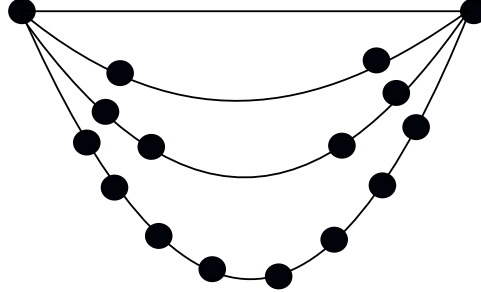


FIG. 3.21 – $MD(2, 4, 8)$ graphe

Il est clair que $MD(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphe est biparti si et seulement si a_i est pair pour tout i .

Il est facile de voir qu'un $MD(a_1, a_2, \dots, a_k)$ graphe biparti est équilibré. Ce graphe est noté par MD graphe k -équilibré.

Propriété 3.2.1. [56]

Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans un certain MD graphe $(k - 1)$ -équilibré.

Propriété 3.2.2. [56]

Toute k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans un certain MD graphe k -équilibré.

Théorème 3.2.8. [56]

Tout MD graphe k -équilibré à 2^n sommets, avec $k \leq n - 1$ est plongeable dans Q_n .

Comme toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans un certain MD graphe $(k - 1)$ -équilibré, alors pour tout $k \leq n$, toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans Q_n , même cas pour les k -double quasi-étoile, on a toute k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans un certain MD graphe k -équilibré, alors pour tout $k \leq n - 1$, toute k -double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans Q_n .

Nouvelles classes d'arbres plongeables dans l'hypercube

Dans ce chapitre nous introduisons des nouvelles classes d'arbres binaires pour lesquels la dimension cubique est déterminée.

4.1 Classes d'arbres obtenus à partir de l'arbre binaire complet D_n

4.1.1 Classe $D_n^{(k)}$

L'arbre binaire $D_n^{(k)}$ est obtenu de la manière suivante : Pour $n \geq 2$, $D_n^{(1)}$ est l'arbre binaire équilibré \hat{D}_{n-1} , pour $n \geq k \geq 2$, $D_n^{(k)}$ est obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_n en insérant un nouveau sommet au niveau d'une arête à distance k de la racine de D_n . Il est clair que pour tout $n \geq k \geq 2$, l'arbre $D_n^{(k)}$ n'est pas équilibré et possède 2^{n+1} sommets. $D_n^{(2)}$, $D_n^{(3)}$ et $D_n^{(n)}$ sont montrés dans la Figure 4.1, tel que chaque triangle représente l'arbre binaire complet D_{n-3} .

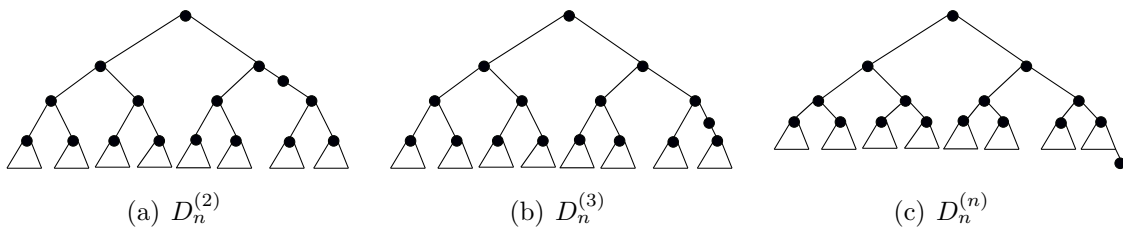


FIG. 4.1 – Arbres binaires $D_n^{(2)}$, $D_n^{(3)}$ et $D_n^{(n)}$

Théorème 4.1.1. *Pour tout $n \geq k \geq 2$, $\dim(D_n^{(k)}) = n + 2$*

Preuve. Il est clair que pour tout $n \geq k \geq 2$, l'arbre $D_n^{(k)}$ n'est pas plongeable dans Q_{n+1} car $D_n^{(k)}$ n'est pas équilibré et possède 2^{n+1} sommets. Donc pour tout $n \geq k \geq 2$, $\dim(D_n^{(k)}) \geq n + 2$. Montrons maintenant par induction sur k que pour tout $n \geq k \geq 2$, $\dim(D_n^{(k)}) = n + 2$.

Pour $n = k = 2$, la C_4 valuation de l'arbre D_2^2 est montrée dans la Figure 4.2

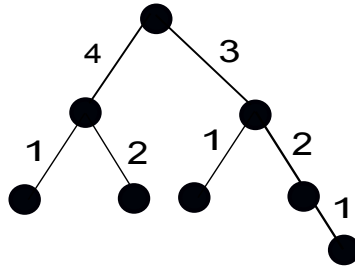


FIG. 4.2 – C_4 valuation de l'arbre D_2^2

Pour $n > 2$, l'arbre $D_n^{(2)}$ peut être obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_{n-1} , l'arbre binaire équilibré \hat{D}_{n-2} et un nouveau sommet u , tel que u est relié par une arête à la racine de D_{n-1} et par une autre arête à un sommet de degré 2 de \hat{D}_{n-2} . Comme $\dim(D_{n-1}) = n + 1$ et $\dim(\hat{D}_{n-2}) = n$, alors lorsque on marque l'arête reliant u à un sommet de degré 2 de l'arbre \hat{D}_{n-2} par $n + 1$ et l'arête reliant u à la racine de l'arbre D_{n-1} par un entier $n + 2$ on obtient la C_{n+2} -valuation de $D_n^{(2)}$. Donc la propriété est vraie pour $k = 2$. Soit $k \geq 3$ et supposant que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $k - 1$ (c'est à dire pour tout $n \geq k - 1 \geq 2$, $\dim(D_n^{(k-1)}) = n + 2$) et montrons qu'elle reste vraie pour l'ordre k . Il est clair que pour tout $n \geq k \geq 3$, l'arbre $D_n^{(k)}$ peut être obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_{n-1} , l'arbre binaire $D_{n-1}^{(k-1)}$ et un nouveau sommet u , tel que u est relié par une arête à la racine de D_{n-1} et par une autre arête à la racine de $D_{n-1}^{(k-1)}$. Comme pour tout $n \geq k - 1 \geq 2$, $\dim(D_{n-1}) = \dim(D_{n-1}^{(k-1)}) = n + 1$ (hypothèse d'induction), alors si on marque l'arête reliant u à la racine de $D_{n-1}^{(k-1)}$ par $n + 2$, et l'arête reliant u à la racine de D_{n-1} par un entier $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ on obtient la C_{n+2} -valuation de l'arbre $D_n^{(k)}$, d'où pour tout $n \geq k \geq 2$, $\dim(D_n^{(k)}) = n + 2$. \square

Remarque 4.1.1. Dans cette démonstration on marque l'arête reliant u à la racine de

l'arbre binaire complet D_{n-1} par un entier $k \in \{1, 2, \dots, n + 1\}$ car lorsque on relie le sommet u à la racine de D_{n-1} on obtient l'arbre binaire B_n , qui est C_{n+1} -valué.

La C_5 -valuation de D_3^2 et la C_5 -valuation de D_3^3 sont montrés dans la Figure 4.3

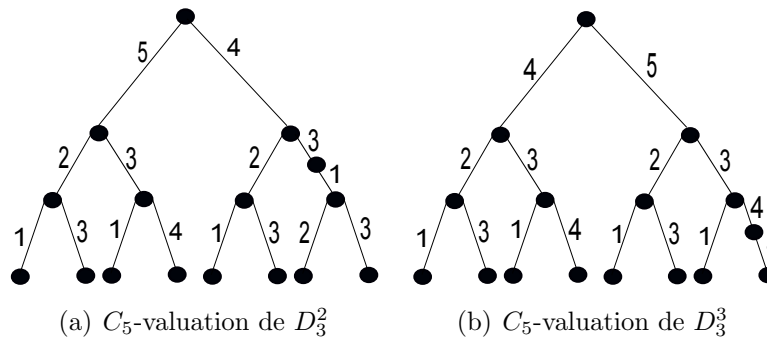


FIG. 4.3 – C_5 -valuation de D_3^2 et C_5 -valuation de D_3^3

4.1.2 Classe AD_n^k

L'arbre AD_n^k est défini de la façon suivante : Pour tout $n \geq 2$, $k \geq 1$, l'arbre AD_n^k est obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_n et une chaîne de longueur k , notée P_k , telle que la racine de D_n est reliée par une arête à un sommet pendant de P_k . Il est clair que AD_n^k possède $2^{n+1} + k$ sommets. AD_n^1 et AD_n^3 sont montrés dans la Figure 4.4, tel que chaque triangle représente l'arbre binaire complet D_{n-3} .

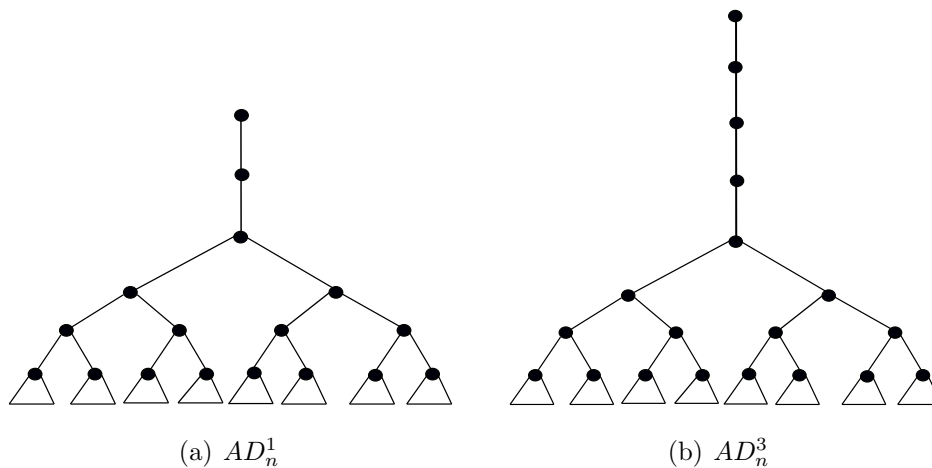


FIG. 4.4 – Arbres binaires AD_n^1 et AD_n^3

Théorème 4.1.2. *Pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, $\dim(AD_n^k) = n + 2$.*

Preuve. Il est facile de vérifier que pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, l'arbre AD_n^k est plongeable dans \hat{D}_n et que D_n est plongeable dans AD_n^k . Comme $\dim(D_n) = \dim(\hat{D}_n) = n + 2$, alors $\dim(AD_n^k) = n + 2$. \square

4.1.3 Classe \hat{AD}_n^k

On définit l'arbre binaire \hat{AD}_n^k comme suit : Pour $n \geq 2, k \geq 1$, l'arbre \hat{AD}_n^k est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1, T_2 de D_n et d'une chaîne de longueur $2k + 1$, notée P_{2k+1} , tel que la racine de T_1 est reliée par une arête à un sommet pendant de P_{2k+1} et la racine de T_2 est reliée par une autre arête à l'autre sommet pendant de P_{2k+1} . Il est clair que \hat{AD}_n^k possède $2^{n+2} + 2k$ sommets. \hat{AD}_n^3 et \hat{AD}_n^4 sont montrés dans la Figure 4.5.

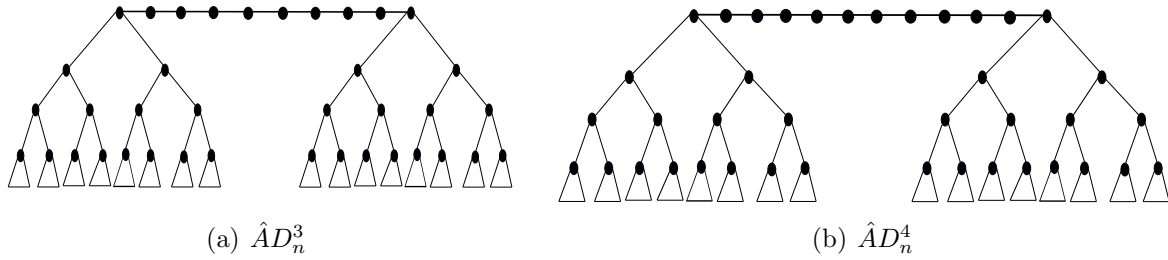


FIG. 4.5 – Arbres binaires \hat{AD}_n^3 et \hat{AD}_n^4

Théorème 4.1.3. *Pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, $\dim(\hat{AD}_n^k) = n + 3$.*

Preuve. Il est clair que pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, l'arbre \hat{AD}_n^k n'est pas plongeable dans Q_{n+2} car \hat{AD}_n^k possède $2^{n+2} + 2k$ sommets. Donc pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, $\dim(\hat{AD}_n^k) \geq n + 3$. Montrons maintenant que $\dim(\hat{AD}_n^k) = n + 3$.

Pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, l'arbre \hat{AD}_n^k peut être obtenu à partir de deux copies disjointes T et T' de AD_n^k , tel que un sommet pendant adjacent à un sommet de degré 2 dans T est relié par une arête à son analogue dans T' . Comme l'arbre AD_n^k est C_{n+2} valué, pour tout $n \geq 2$ et pour tout $1 \leq k \leq n + 2$. Alors si on marque l'arête reliant T à T' par $n + 3$ on obtient la C_{n+3} -valuation de \hat{AD}_n^k . Donc pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, $\dim(\hat{AD}_n^k) = n + 3$. \square

4.1.4 Classe $\hat{A}D_n^k$

On définit l'arbre binaire $\hat{A}D_n^k$ de la façon suivante : Pour $n \geq 2, k \geq 1$, l'arbre $\hat{A}D_n^k$ est obtenu à partir de deux copies disjointes T et T' de AD_n^k , tel que un sommet de degré 2 de T est relié par une arête à un sommet de degré 2 de T' . Il est clair que $\hat{A}D_n^k$ possède $2^{n+2} + 2k$ sommets. $\hat{A}D_n^1$ et $\hat{A}D_n^3$ sont montrés dans la Figure 4.6.

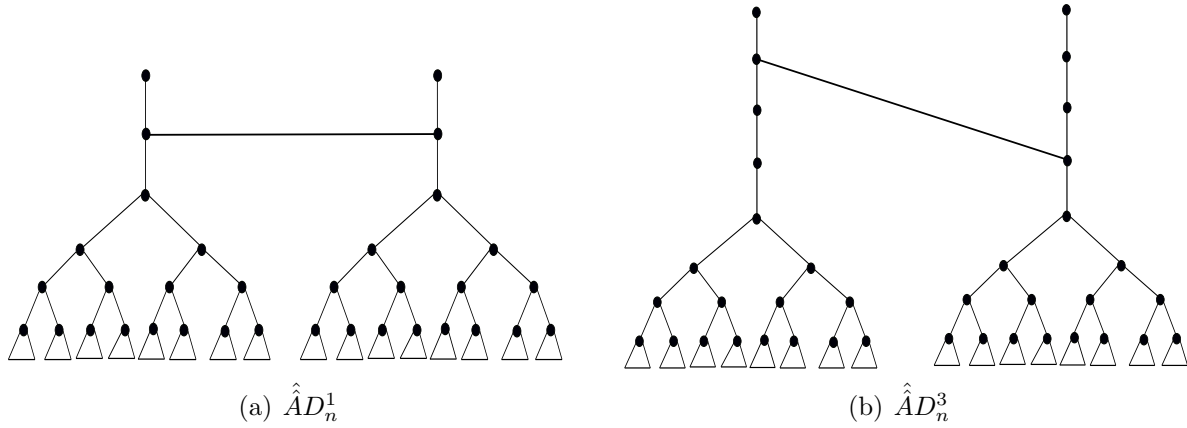


FIG. 4.6 – Arbres binaires $\hat{A}D_n^1$ et $\hat{A}D_n^3$

Théorème 4.1.4. *Pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2, \dim(\hat{A}D_n^k) = n + 3$.*

Preuve. Il est clair que pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2$, l'arbre $\hat{A}D_n^k$ n'est pas plongeable dans Q_{n+2} car $\hat{A}D_n^k$ possède $2^{n+2} + 2k$ sommets. Comme les deux copies disjointes T et T' de AD_n^k sont C_{n+2} -valuées. Alors si on marque l'arête reliant T à T' par $n + 3$ on obtient une C_{n+3} -valuation de l'arbre $\hat{A}D_n^k$. D'où pour tout $n \geq 2, 1 \leq k \leq n + 2, \dim(\hat{A}D_n^k) = n + 3$. \square

4.1.5 Classe \bar{D}_n

On définit l'arbre binaire \bar{D}_n de la manière suivante :

\bar{D}_1 est l'arbre binaire complet D_1 . Pour $n \geq 2$ l'arbre \bar{D}_n est obtenu à partir de l'arbre binaire \bar{D}_{n-1} en reliant un seul sommet pendant à distance $n - 1$ de l'unique sommet de degré 2 de \bar{D}_{n-1} à deux nouveaux sommets.

\bar{D}_2 , \bar{D}_3 et \bar{D}_4 sont montrés dans la Figure 4.7.

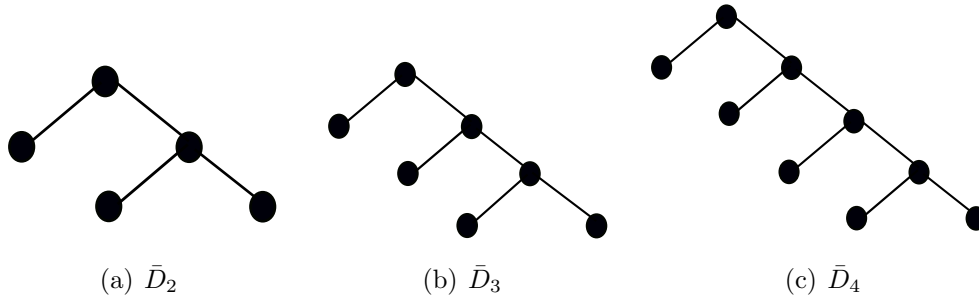


FIG. 4.7 – Arbres binaires \bar{D}_2 , \bar{D}_3 et \bar{D}_4

Théorème 4.1.5. *Pour tout $n \geq 2$, $2^{n-2} \leq p \leq 2^{n-1} - 1$, $\dim(\bar{D}_p) = n$.*

Preuve. Il est clair que pour $p = 1$, $\dim(\bar{D}_1) = \dim(D_1) = 2$.

Pour $P \in \{2, 3\}$, la C_3 -valuation de \bar{D}_p est montrée dans la Figure 4.8.

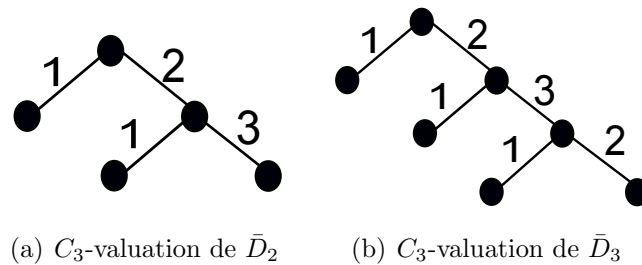


FIG. 4.8 – C_3 -valuation de \bar{D}_2 et \bar{D}_3

Pour $p \in \{4, 5, 6, 7\}$, la C_4 -valuation de \bar{D}_p est montrée dans la Figure 4.9.

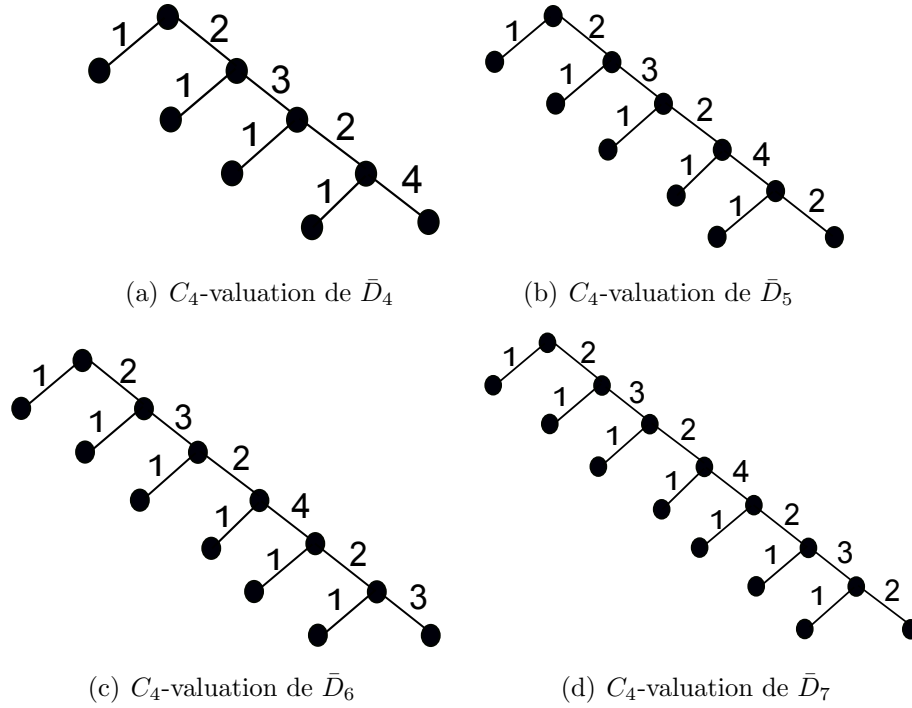


FIG. 4.9 – C_4 -valuation de \bar{D}_4 , \bar{D}_5 , \bar{D}_6 et \bar{D}_7

Pour $p \in \{8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15\}$, on fait de la même manière pour avoir la C_5 -valuation de \bar{D}_8 , \bar{D}_9 , \bar{D}_{10} , \bar{D}_{11} , \bar{D}_{12} , \bar{D}_{13} , \bar{D}_{14} et \bar{D}_{15} .

Dans la cas général pour tout $P \in \{2^{n-2}, \dots, 2^{n-1} - 1\}$ la C_n -valuation de \bar{D}_p est donnée comme suit :

On marque les deux arêtes de $\bar{D}_{\min(p)}$ qui n'appartiennent pas à $\bar{D}_{\min(p)-1}$, l'une par 1 et l'autre par n , puis pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-2} - 1\}$ on marque les arêtes de l'arbres $\bar{D}_{\min(p)+k}$ qui n'appartiennent pas à l'arbre $\bar{D}_{\min(p)}$ de la même manière que celles de l'arbre \bar{D}_k . Comme le montre le cas de \bar{D}_2 , \bar{D}_3 et le cas de \bar{D}_4 , \bar{D}_5 , \bar{D}_6 et \bar{D}_7 . □

Lemme 4.1.1. *Il y a exactement 2^{n-2} arbres de type \bar{D}_p plongeables dans Q_n .*

Preuve. Il suffit d'utiliser le Théorème 4.1.5 et de déterminer combien de nombres entiers qui se trouvent dans l'intervalle $[2^{n-2}; 2^{n-1} - 1]$. Comme exemple dans l'intervalle $[2^{4-2}, 2^{4-1} - 1] = [4, 7]$ il y a exactement 4 entiers : 4, 5, 6 et 7, donc il y a 4 arbres de type \bar{D}_p plongeables dans Q_4 . Dans l'intervalle $[2^{5-2}, 2^{5-1} - 1] = [8, 15]$ il y a exactement 8 entiers : 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, et 15, donc il y a 8 arbres de type \bar{D}_p plongeables dans Q_5 . □

Remarque 4.1.2. Il est clair que lorsque on relie un sommet pendant à distance $2^{n-1} - 1$ de l'unique sommet de degré 2 de $\bar{D}_{2^{n-1}-1}$ à un nouveau sommet, on obtient un arbre équilibré plongeable dans Q_n .

Comme le montre le graphe de la Figure 4.10 obtenu à partir de \bar{D}_7 , en reliant un sommet pendant à distance 7 de l'unique sommet de degré 2 de \bar{D}_7 à un nouveau sommet.

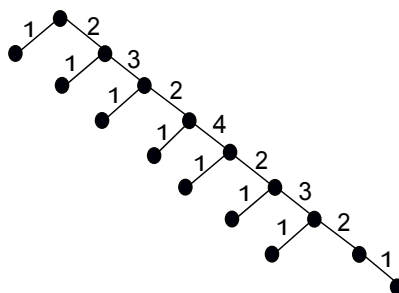


FIG. 4.10 – Arbre équilibré plongeable dans Q_4

4.1.6 Classe \bar{D}_n^2

On définit la classe \bar{D}_n^2 de la manière suivante :

Pour $n \geq 2$, \bar{D}_n^2 est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1, T_2 de \bar{D}_n et un sommet u , tel que u est relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 de T_1 et par une autre arête à l'unique sommet de degré 2 de T_2 . L'arbre \bar{D}_1^2 est l'arbre binaire complet D_2 , \bar{D}_2^2 et \bar{D}_3^2 sont montrés dans la Figure 4.11.

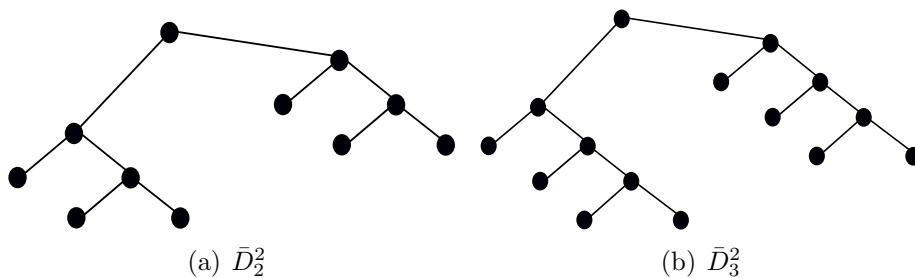


FIG. 4.11 – Arbres binaires \bar{D}_2^2 et \bar{D}_3^2

Théorème 4.1.6. *Pour tout $n \geq 4$, $2^{n-3} - 1 \leq p \leq 2^{n-2} - 2$, on a $\dim(\bar{D}_p^2) = n$.*

Preuve. Pour $p \in \{1, 2\}$ la C_4 -valuation de \bar{D}_p^2 est montrée dans la Figure 4.12.

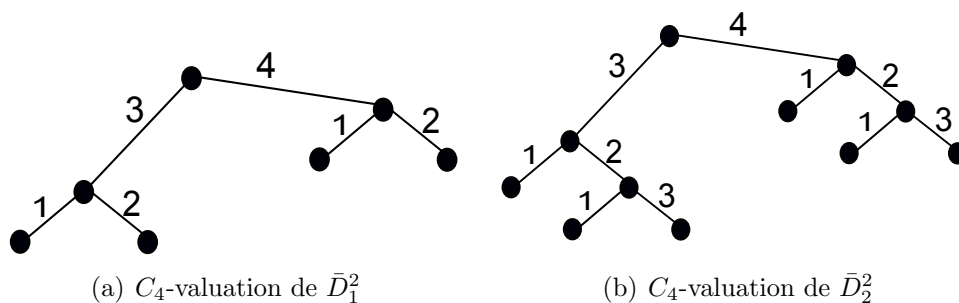


FIG. 4.12 – C_4 -valuation de \bar{D}_1^2 et \bar{D}_2^2

Pour $p \in \{3, 4, 5, 6\}$ la C_5 -valuation de \bar{D}_p^2 est montrée dans la Figure 4.13.

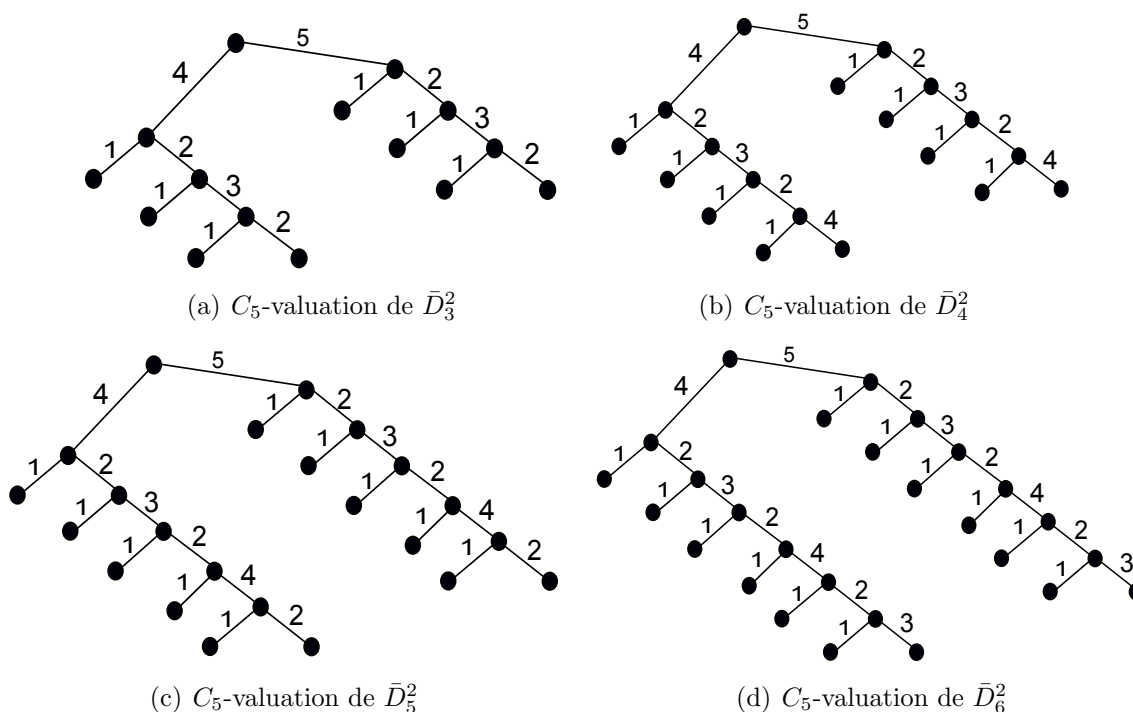


FIG. 4.13 – C_5 -valuation de \bar{D}_3^2 , \bar{D}_4^2 , \bar{D}_5^2 et \bar{D}_6^2

On peut faire de la même manière pour la C_6 -valuation de l'arbre \bar{D}_p^2 , pour tout $p \in \{7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

Dans la cas général pour tout $P \in \{2^{n-3} - 1, \dots, 2^{n-2} - 2\}$ la C_n -valuation de \bar{D}_p^2 est donnée de la manière suivante : On marque les deux arêtes de $\bar{D}_{min(p)}^2$ qui n'appartiennent pas à $\bar{D}_{min(p)}$, l'une par $n - 1$ et l'autre par n , puis pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 2^{n-3} - 1\}$ on marque les arêtes de l'arbres $\bar{D}_{min(p)+k}^2$ qui n'appartiennent pas à l'arbre $\bar{D}_{min(p)}^2$ de la même manière que celles de l'arbre $\bar{D}_{min(p)+k}$. Comme le montre le cas de \bar{D}_1^2, \bar{D}_2^2 et le cas de $\bar{D}_3^2, \bar{D}_4^2, \bar{D}_5^2$ et \bar{D}_6^2 . \square

Lemme 4.1.2. *Il y a exactement 2^{n-3} arbres de type \bar{D}_p^2 plongeables dans Q_n .*

Preuve. Il suffit seulement d'utiliser le Théorème 4.1.6 et de déterminer combien de nombres entiers qui se trouvent dans l'intervalle $[2^{n-3} - 1, 2^{n-2} - 2]$. Par exemple dans l'intervalle $[2^2 - 1, 2^3 - 2] = [3, 6]$, il y a 4 entiers : 3, 4, 5 et 6. Donc il y a 4 arbres de type \bar{D}_p^2 plongeables dans Q_5 . \square

Remarque 4.1.3. On peut construire une infinité de classes de \bar{D}_n^k , pour tout $k \geq 3$. En faisant de la même manière que les Théorèmes 4.1.5 et 4.1.6, on peut donner $\dim(\bar{D}_n^k)$.

4.2 Classes d'arbres binaires équilibrés

4.2.1 Classe A_n

On définit l'arbre binaire équilibrés A_n de la manière suivante : A_1 est une chaîne de longueur 1 (une arête), A_2 est une chaîne de longueur 3. Pour $n \geq 3$, A_n est formé à partir de deux copies disjointes T_1 et T_2 de A_{n-1} , tel que un sommet de degré 2 de T_1 est relié par une arête à son analogue de T_2 . Il est clair que A_n possède 2^{n-1} sommets pendants, 2 sommets de degré 2 et $2^{n-1} - 2$ sommets de degré 3. Donc A_n possède 2^n sommets. A_3 et A_4 sont montrés dans la Figure 4.14.

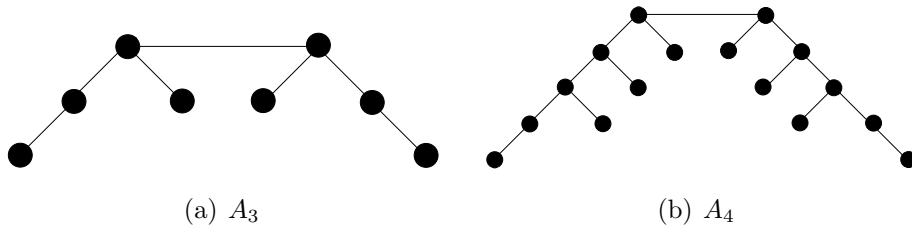


FIG. 4.14 – Arbres binaires équilibrés A_3 et A_4

Théorème 4.2.1. *Pour tout $n \geq 1$, l'arbre A_n est plongeable dans Q_n .*

Preuve. Pour la preuve nous allons utiliser l'induction sur n . Il est clair que A_1 est plongeable dans Q_1 , et que A_2 est plongeable dans Q_2 , donc la propriété est vraie pour $n = 1$ et $n = 2$. Soit $n \geq 3$, supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $n - 1$ et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre n . Comme l'hypercube Q_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1 et T_2 de Q_{n-1} , donc il faut prendre dans chaque copie de Q_{n-1} l'arbre A_{n-1} et prendre dans Q_n seulement l'arête qui forme l'arbre A_n . Pour $n = 4$, le plongement de A_4 dans Q_4 est montré dans la Figure 4.15.

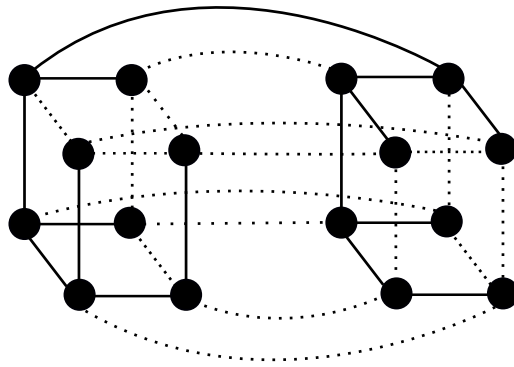
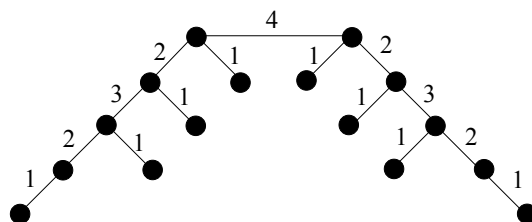


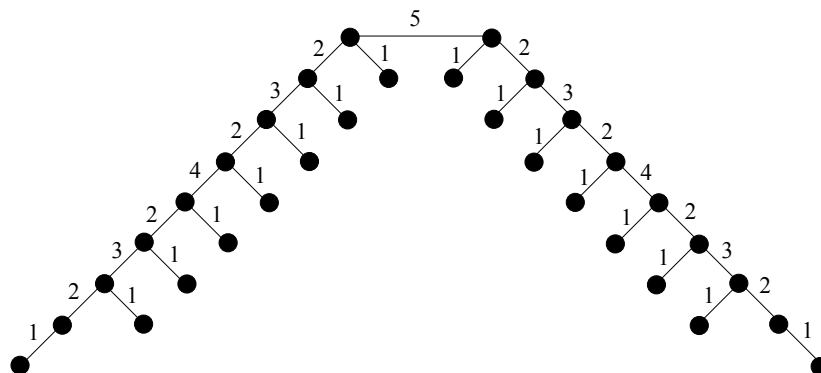
FIG. 4.15 – Plongement de A_4 dans Q_4

La C_n -valuation de A_n est obtenue en prenant la C_{n-1} -valuation de chaque copie de A_{n-1} et marquant l'arête reliant les deux copies disjointes de A_{n-1} par n . \square

La C_4 -valuation de A_4 et C_5 -valuation de A_5 sont montrées dans la Figure 4.16.



(a) C_4 -valuation de A_4



(b) C_5 -valuation de A_5

FIG. 4.16 – C_4 -valuation de A_4 et C_5 -valuation de A_5

4.2.2 Classe \hat{A}_n

On définit l'arbre binaire équilibré \hat{A}_n comme suit :

Pour $n \leq 3$, l'arbre \hat{A}_n est l'arbre A_n . Pour $n \geq 4$, l'arbre \hat{A}_n est formé à partir de deux copies disjointes T_1 et T_2 de \hat{A}_{n-1} , tel que un sommet pendant adjacent à un sommet de degré 3 de T_1 est relié par une arête à son analogue de T_2 . Il est clair que \hat{A}_n possède $2^{n-2} + 2$ sommets pendants, $2^{n-1} - 2$ sommets de degré 2 et 2^{n-2} sommets de degré 3. Donc \hat{A}_n possède 2^n sommets.

\hat{A}_4 et \hat{A}_5 sont montrés dans la Figure 4.17.

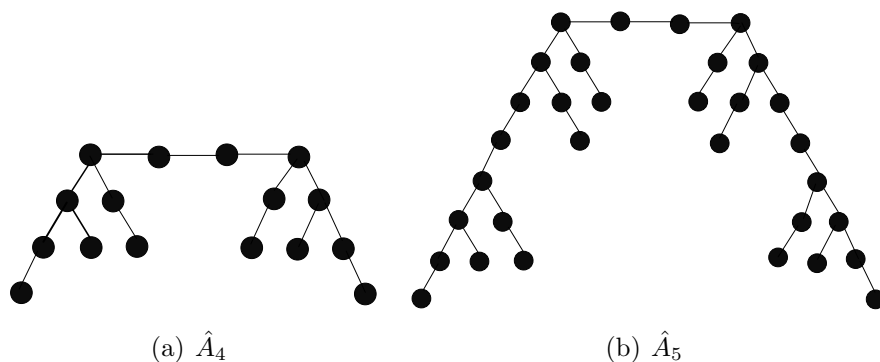


FIG. 4.17 – Arbres binaires équilibrés \hat{A}_4 et \hat{A}_5

Théorème 4.2.2. *Pour tout $n \geq 1$, l'arbre \hat{A}_n est plongeable dans Q_n .*

Preuve. Il est clair que \hat{A}_1 , \hat{A}_2 et \hat{A}_3 sont respectivement plongeables dans Q_1 , Q_2 et Q_3 . Comme Q_n peut être obtenu à partir de deux copies disjointes T_1 et T_2 de Q_{n-1} . Alors si on prend dans chaque copie de Q_{n-1} l'arbre \hat{A}_{n-1} et dans l'hypercube Q_n l'arête formant l'arbre \hat{A}_n à partir des deux copies disjointes de \hat{A}_{n-1} , on obtient \hat{A}_n plongeable dans Q_n . \square

La C_4 -valuation de \hat{A}_4 et C_5 -valuation de \hat{A}_5 sont montrées dans la Figure 4.18.

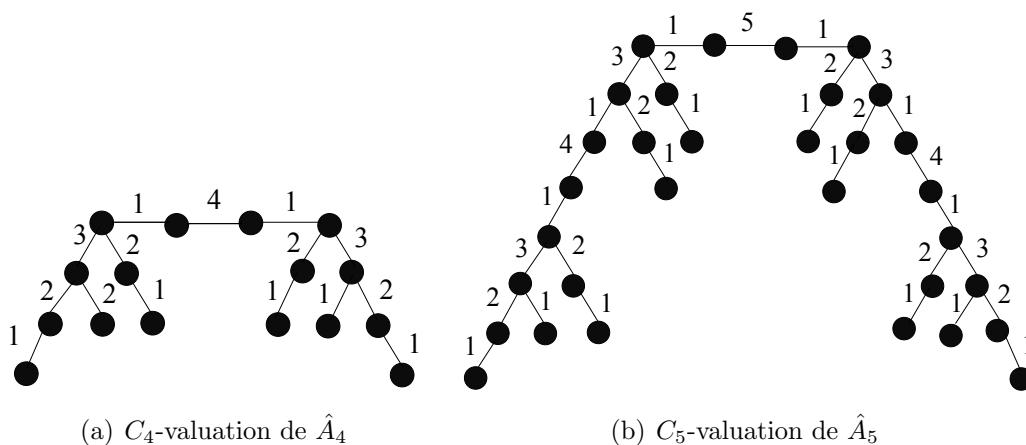


FIG. 4.18 – C_4 -valuation de \hat{A}_4 et C_5 -valuation de \hat{A}_5

Le plongement de \hat{A}_4 dans Q_4 est montré dans la Figure 4.19.

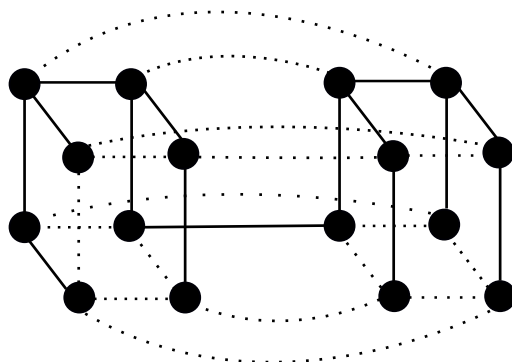


FIG. 4.19 – Plongement de \hat{A}_4 dans Q_4

4.2.3 Classe \hat{A}_n

On définit l'arbre binaire équilibré \hat{A}_n de la manière suivante :
 Pour $n \leq 3$, l'arbre \hat{A}_n est l'arbre A_n . Pour $n \geq 4$, l'arbre \hat{A}_n est obtenu à partir de deux copies disjointes T_1 et T_2 de l'arbre \hat{A}_{n-1} , tel que un sommet pendent adjacent à un sommet de degré 2 de T_1 et relié par une arête à son analogue de T_2 . Il clair que \hat{A}_n possède $2^{n-2} + 2$ sommets pendants, $2^{n-1} - 2$ sommets de degré 2 et 2^{n-2} sommets de degré 3. \hat{A}_n possède 2^n sommets. \hat{A}_4 et \hat{A}_5 sont montrés dans la Figure 4.20.

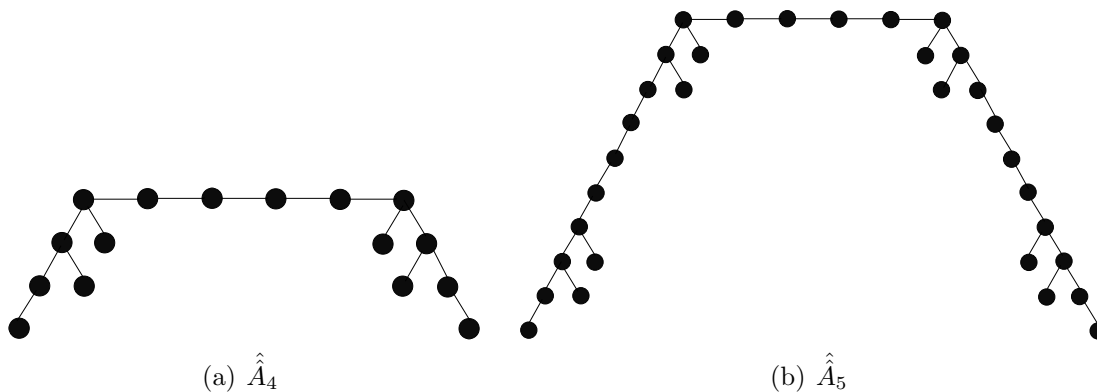


FIG. 4.20 – Arbres binaires équilibrés \hat{A}_4 et \hat{A}_5

Théorème 4.2.3. *Pour tout $n \geq 1$, l'arbre \hat{A}_n est plongeable dans Q_n .*

Preuve. On procède de la même manière que le Théorème 4.2.2. La C_n -valuation de \hat{A}_n est obtenue en prenant la C_{n-1} -valuation de chaque copie de \hat{A}_{n-1} , et marquant l'arête reliant les deux copies disjointes de \hat{A}_{n-1} par n . □

La C_4 -valuation de l'arbre \hat{A}_4 et la C_5 -valuation de l'arbre \hat{A}_5 sont montrées dans la Figure 4.21.

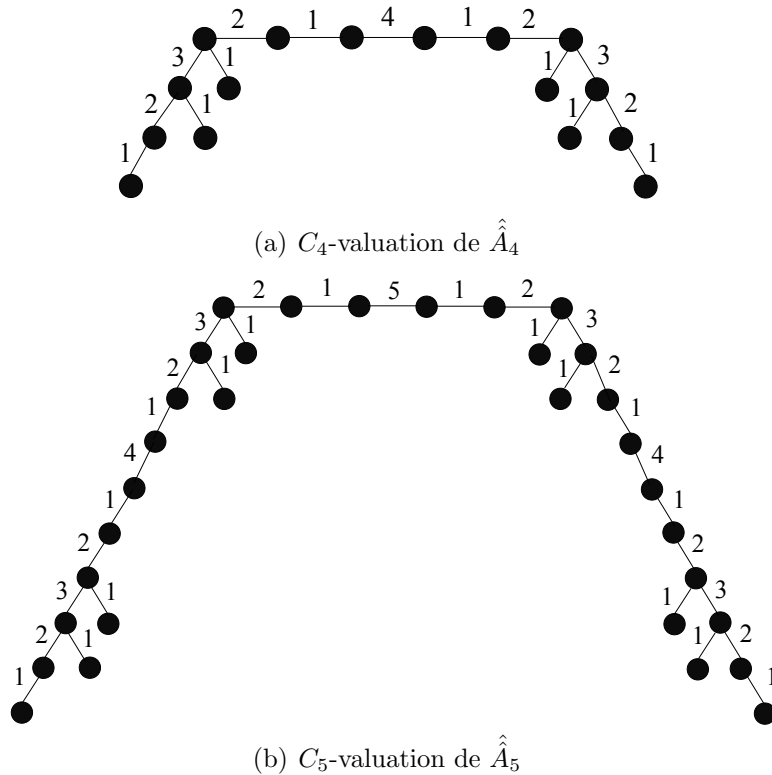


FIG. 4.21 – C_4 -valuation de \hat{A}_4 et C_5 -valuation de \hat{A}_5

Remarque 4.2.1. En utilisant cette manière de construction d'arbres. On peut définir plusieurs classes d'arbres équilibrés ayant 2^n sommets plongeables dans Q_n .

La Figure 4.22 montre le plongement de l'arbre \hat{A}_4 dans l'hypercube Q_4 .

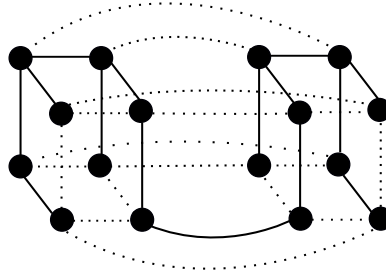


FIG. 4.22 – Plongement de \hat{A}_4 dans Q_4

4.3 Classes d'arbres obtenus par une double subdivision de l'arbre \hat{D}_n

Soit T un arbre de racine r . Le niveau d'une arête uv dans T est donné par $\max\{d(r, u), d(r, v)\}$. Le niveau d'une arête uv de \hat{D}_n est égal à 0 si uv est l'arête axiale de \hat{D}_n , si non le niveau de uv est donné par $\max\{d(r, u), d(r, v)\}$ dans la copie de D_n qui contient uv . Une arête uv de D_n est dite *ancêtre* de l'arête xy si uv et xy se trouvent à la fois sur une chaîne reliant la racine de D_n à un sommet pendant et le niveau de uv est inférieur à celui de xy . Dans notre cas la subdivision d'une arête uv consiste à remplacer uv par deux nouvelles arêtes ux et xv et la double subdivision d'une arête uv consiste à remplacer uv par trois nouvelles arêtes ux , xy et yv avec x et y sont des nouveaux sommets de degré 2. Donc nous considérons par une double subdivision d'un arbre T comme une subdivision de deux arêtes distinctes ou bien une double subdivision d'une arête de T . Par une double subdivision de l'arbre \hat{D}_n nous obtenons les types d'arbres binaires suivants :

1. **Type (A)** : Pour tout $n \geq 1$, $0 \leq k \leq n$, l'arbre A_n^k est obtenu par une double subdivision de l'arête de niveau k dans \hat{D}_n . A_2^0 et A_2^2 sont montrés dans la Figure 4.23.

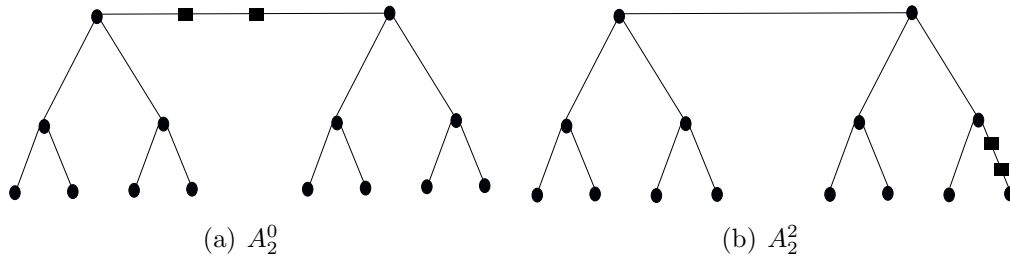


FIG. 4.23 – Arbres binaires A_2^0 et A_2^2

2. **Type (B)** : Pour tout $n \geq k \geq 1$, l'arbre B_n^k est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n , en subdivisant une seule arête de niveau k dans chaque copie de D_n . B_2^1 et B_2^2 sont montrés dans la Figure 4.24.

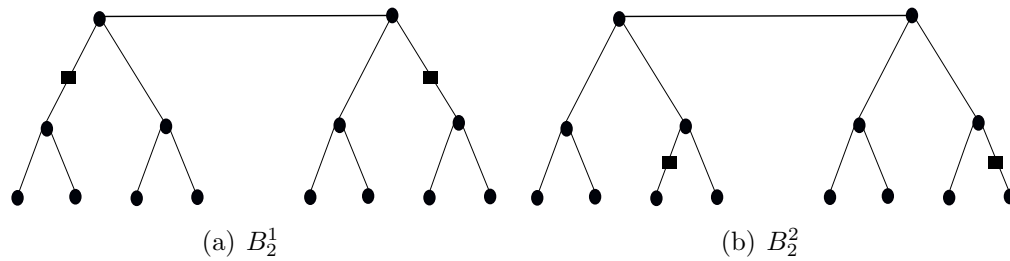


FIG. 4.24 – Arbres binaires B_2^1 et B_2^2

3. **Type (C)** : Pour tout $n \geq k \geq 1$, l'arbre C_n^k est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n , en subdivisant deux arêtes de niveau k dans une même copie de D_n . C_2^1 et C_2^2 sont montrés dans la Figure 4.25.

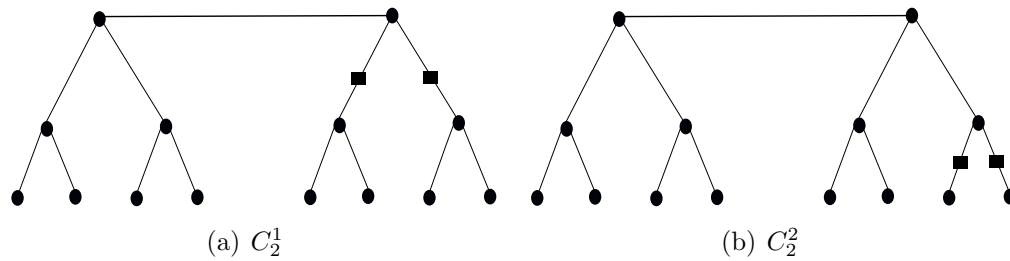


FIG. 4.25 – Arbres binaires C_2^1 et C_2^2

4. **Type (D)** : Pour tout $n \geq l > k \geq 0$, l'arbre $D_n^{k,l}$ est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n , en subdivisant une arête de niveau k dans une copie de D_n et une arête de niveau l dans l'autre copie de D_n . $D_2^{0,2}$ et $D_2^{1,2}$ sont montrés dans la Figure 4.26.

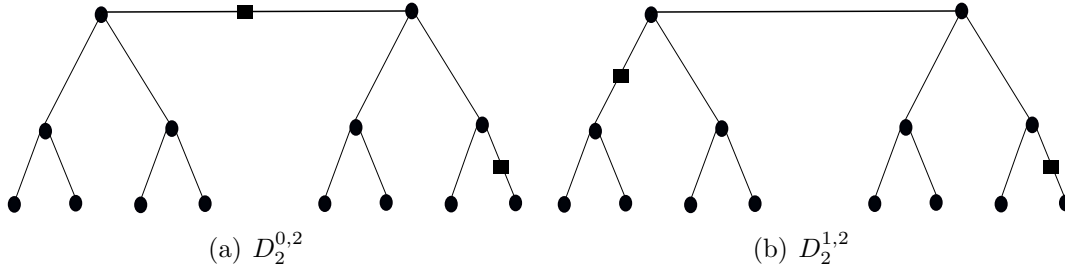


FIG. 4.26 – Arbres binaires $D_2^{0,2}$ et $D_2^{1,2}$

5. **Type (E)** : Pour tout $n \geq l > k \geq 1$, l'arbre $E_n^{k,l}$ est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n , en subdivisant deux arêtes de D_n , l'une de niveau k et l'autre de niveau l , tel que aucune des deux n'est l'ancêtre de l'autre. $E_2^{1,2}$ est montré dans la Figure 4.27.

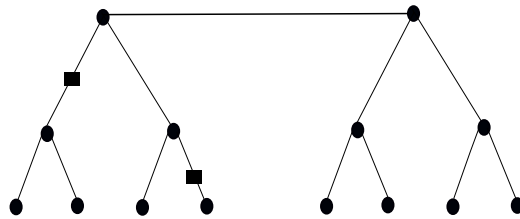


FIG. 4.27 – Arbre binaire $E_2^{1,2}$

6. **Type (F)** : Pour tout $n \geq l > k \geq 1$, l'arbre $F_n^{k,l}$ est obtenu à partir de l'arbre \hat{D}_n , en subdivisant deux arêtes de D_n , l'une de niveau k et l'autre de niveau l , tel que l'arête de niveau k et l'ancêtre de l'arête de niveau l . $F_2^{1,2}$ est montré dans la Figure 4.28.

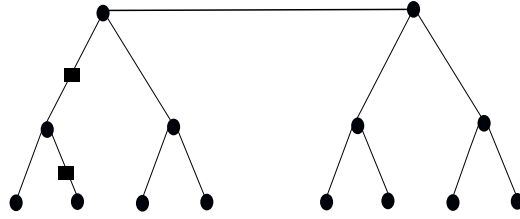


FIG. 4.28 – Arbre binaire $F_2^{1,2}$

Dans les Figures 4.23, 4.24, 4.25, 4.26, 4.27 et 4.28 le carré représente le nouveau sommet inséré sur une arête.

Théorème 4.3.1. *Soit T un arbre obtenu par une double subdivision de l'arbre binaire à double racines \hat{D}_n .*

1. *Si T est de type A ou B , alors $\dim(T) = n + 2$,*
2. *Si T est de type C , D , E , ou F , alors $\dim(T) = n + 3$.*

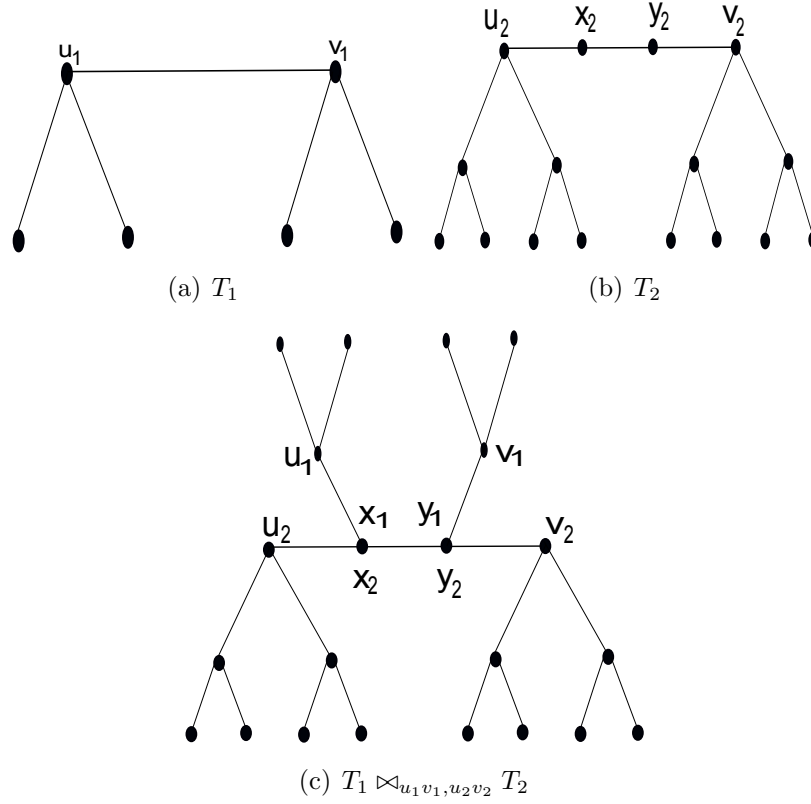
Il est clair que tout arbre binaire T de type A , B , C , D , E ou F possède 2^{n+2} sommets et que T est équilibré si et seulement s'il est de type A ou B . Notre résultat montre que les arbres de type A ou B satisfont la conjecture de Havel [35]. Nous généralisons ainsi les résultats de Nebesky' [64] qui considéraient les arbres obtenus en subdivisant deux fois l'arête axiale ou l'arête pendante de \hat{D}_n .

Il est clair que si l'arbre T est C_n -valué, alors tout sous-arbre T' de T est aussi C_n -valué. On peut vérifier facilement l'observation suivante :

Observation 4.3.1. *Si T' est un sous-arbre de T , alors $\dim(T') \leq \dim(T)$.*

La preuve du Théorème 4.3.1 revient au même de démontrer les Lemmes suivants :
Le résultat suivant sera utile pour prouver les décompositions structurelles des arbres de type A et B .

Soient T_1 et T_2 deux arbres binaires, u_1v_1 une arête de T_1 et $u_2x_2y_2v_2$ une chaîne induite dans T_2 (x_2 et y_2 sont des sommets de degrés 2). Le \bowtie -collage de T_1 et T_2 le long de $\{u_1v_1, u_2v_2\}$, noté $T_1 \bowtie_{u_1v_1, u_2v_2} T_2$ est l'arbre obtenu par une double subdivision de l'arête u_1v_1 de T_1 en trois arêtes u_1x_1 , x_1y_1 et y_1v_1 et par l'identification des deux arêtes x_1y_1 et x_2y_2 (voir la Figure 4.29).


 FIG. 4.29 – \bowtie -collage de T_1 et T_2 le long de $\{u_1v_1, u_2v_2\}$

Lemme 4.3.1. Soient T_1 et T_2 deux arbres, tels que T_1 possède une arête u_1v_1 et T_2 possède une chaîne $u_2x_2y_2v_2$, avec x_2 et y_2 sont des sommets de degré 2. Si $\dim(T_1) = \dim(T_2) = k$, alors $\dim(T_1 \bowtie_{u_1v_1, u_2v_2} T_2) \leq k + 1$.

Preuve. Comme $\dim(T_1) = \dim(T_2) = k$, alors il existe une C_k -valuation γ_1 de T_1 et une C_k -valuation γ_2 de T_2 . Sans perte de généralité on peut supposer que $\gamma_1(u_1v_1) = \gamma_2(x_2y_2)$. Alors on peut construire la valuation γ de $T = T_1 \bowtie_{u_1v_1, u_2v_2} T_2$ comme suit :

- $\gamma(u_1x_1) = \gamma(y_1v_1) = k + 1$,
- $\gamma(z_1t_1) = \gamma_1(z_1t_1)$ pour tout arête z_1t_1 de T_1 ,
- $\gamma(z_2t_2) = \gamma_2(z_2t_2)$ pour tout arête z_2t_2 de T_2 .

On peut vérifier facilement que γ est une C_{k+1} -valuation de T . Soit P une chaîne quelconque dans T . Si P ne contient pas d'arêtes marquées par $k + 1$, alors P est aussi une chaîne de T_1 ou bien de T_2 . Donc P possède une C_k -valuation car γ_1 et γ_2 sont des

C_k -valuations. Si P contient seulement une seule arête marquée par $k + 1$, alors P possède une C_{k+1} -valuation car l'entier $k + 1$ apparaît une seule fois. Finalement si P contient deux arêtes marquées par $k + 1$, alors la chaîne P' obtenue à partir de P en contractant les deux arêtes marquées par l'entier $k + 1$ est une chaîne de T_1 . Donc P est C_{k+1} -valué car γ_1 est une C_k -évaluation de T_1 . \square

Lemme 4.3.2. *Pout tout $n \geq k \geq 0$, $n \geq 1$, $\dim(A_n^k) = n + 2$.*

Preuve. Comme l'arbre A_n^k possède 2^{n+2} , alors $\dim(A_n^k) \geq n + 2$. Montrons maintenant par induction sur k que pour tout $n \geq 1$, $\dim(A_n^k) = n + 2$. Pour $k = 0$, on a $\dim(A_n^0) = \dim(\hat{D}_n) = n + 2$, $\forall n \geq 1$ [64], donc la propriété est vraie pour $k = 0$.

Supposons maintenant que pour tout $n \geq 1$, $\dim(A_n^{k-1}) = n + 2$. Comme illustré dans la Figure 4.30.

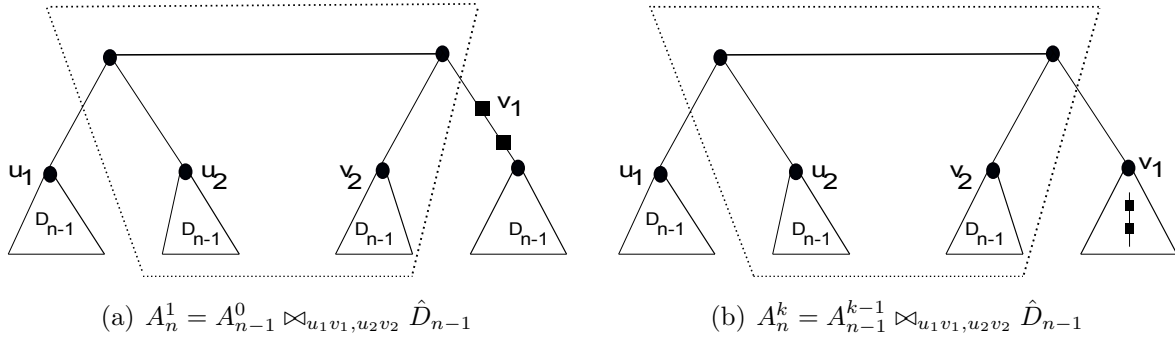


FIG. 4.30 – Décomposition structurelle de A_n^1 et de A_n^k , $k \geq 1$

Il est facile de vérifier que pour $k \geq 1$, l'arbre A_n^k est un \bowtie -collage de A_{n-1}^{k-1} et \hat{D}_{n-1} le long de l'arête axiale de A_{n-1}^{k-1} et la chaîne axiale de \hat{D}_{n-1} . Comme $\dim(\hat{D}_{n-1}) = n + 1$ [64] et $\dim(A_{n-1}^{k-1}) = n + 1$ (hypothèse de l'induction). Donc d'après le Lemme 4.3.1, $\dim(A_n^k) = n + 2$. \square

Lemme 4.3.3. *Pour tout $n \geq k \geq 1$, $\dim(B_n^k) = n + 2$.*

Preuve. La preuve est similaire à celle du Lemme 4.3.2. Il est clair que l'arbre B_n^k n'est pas plongeable dans Q_{n+1} car il possède 2^{n+2} sommets, donc $\dim(B_n^k) \geq n + 2$. Montrons maintenant par induction sur k que pour tout $n \geq 1$, $\dim(B_n^k) = n + 2$. Comme illustré dans la Figure 4.31(a).

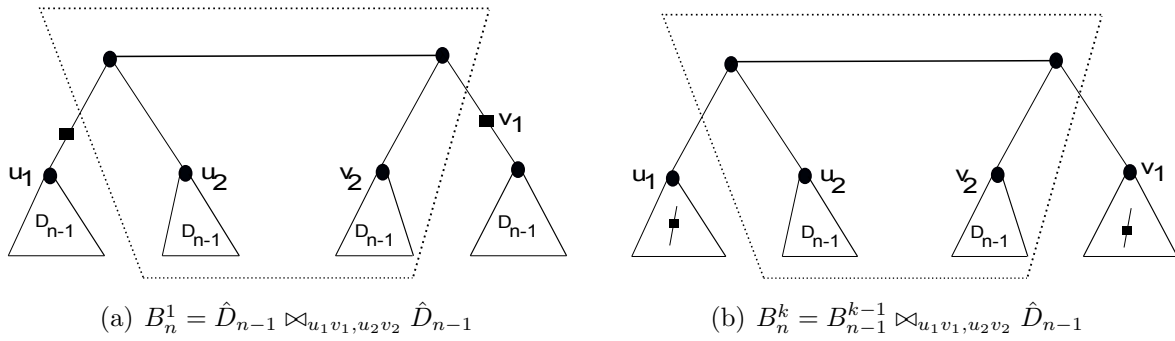


FIG. 4.31 – Décomposition structurelle de B_n^1 et de B_n^k , $k \geq 1$

B_n^1 est un \bowtie -collage de deux copies de \hat{D}_{n-1} le long de l'arête centrale de la première copie et la chaîne axiale de la deuxième copie. Comme $\dim(\hat{D}_{n-1}) = n + 1$ [64], donc d'après le Lemme 4.3.1, $\dim(B_n^1) = n + 2$. Supposons que pour tout $n \geq 1$, $\dim(B_n^{k-1}) = n + 2$. Comme illustré dans la figure 4.31(b), B_n^k est un \bowtie -collage de B_{n-1}^{k-1} et \hat{D}_{n-1} le long de l'arête axiale de B_{n-1}^{k-1} et de la chaîne axiale de \hat{D}_{n-1} . Comme $\dim(\hat{D}_{n-1}) = n + 1$ [64] et $\dim(B_{n-1}^{k-1}) = n + 1$ (hypothèse de l'induction), donc d'après le Lemme 4.3.1, $\dim(B_n^k) = n + 2$. \square

La Figure 4.32 montre la C_4 -valuation de \bowtie -collage de A_1^1 et \hat{D}_1 .

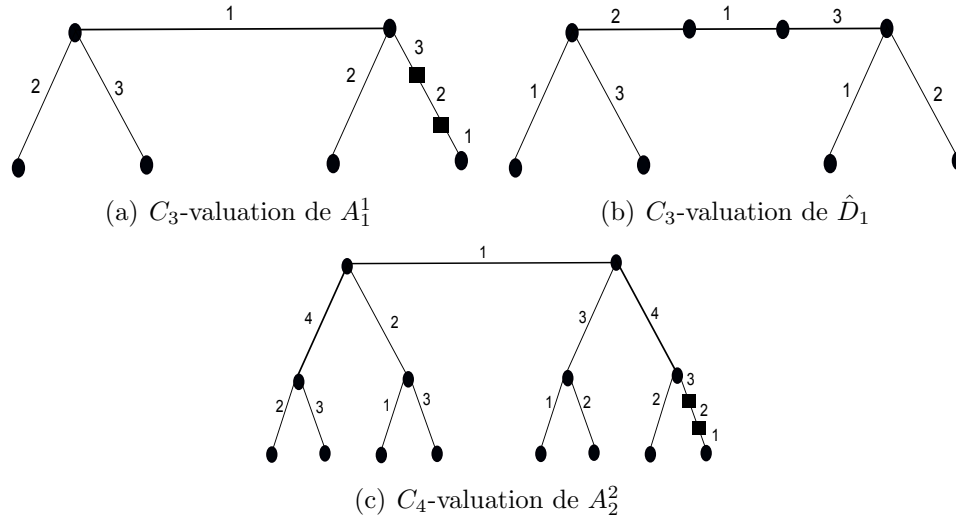


FIG. 4.32 – C_4 -valuation de A_2^2 obtenu par le \bowtie -collage A_1^1 et \hat{D}_1

La Figure 4.33 montre la C_4 -valuation de \bowtie -collage de B_1^1 et \hat{D}_1 .

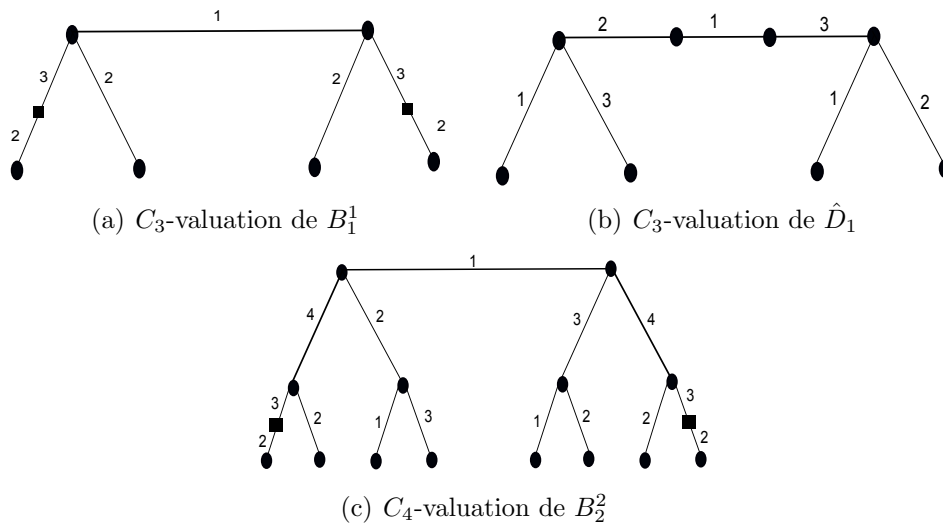


FIG. 4.33 – C_4 -valuation de B_2^2 obtenu par le \bowtie -collage B_1^1 et \hat{D}_1

Lemme 4.3.4. *Pour tout $n \geq k \geq 1$, $\dim(C_n^k) = n + 3$.*

Preuve. Comme l'arbre C_n^k n'est pas équilibré et possède 2^{n+2} sommets, alors $\dim(C_n^k) \geq n + 3$. Montrons que $\dim(C_n^k) = n + 3$. Il est clair que pour tout $n \geq k \geq 1$, l'arbre C_n^k est un sous-arbre de \hat{D}_{n+1} (voir la Figure 4.34).

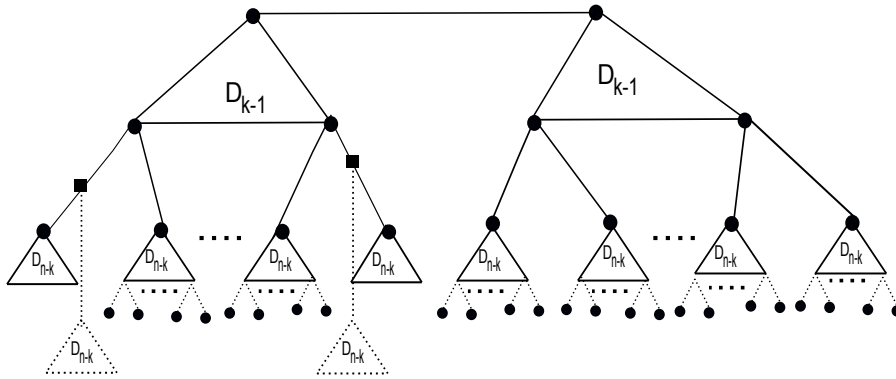
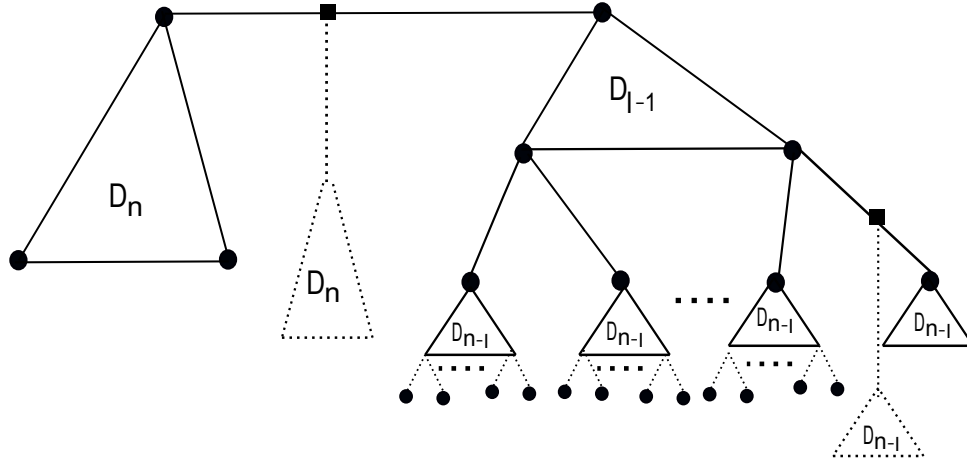


FIG. 4.34 – Plongement de C_n^k dans \hat{D}_{n+1}

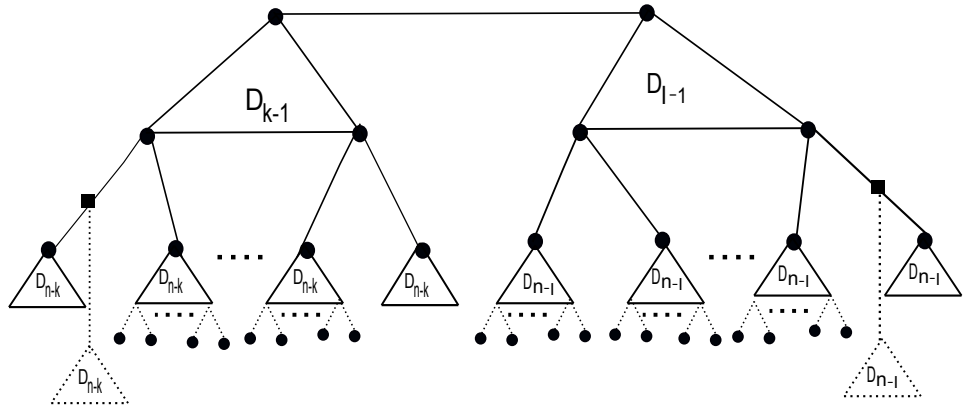
Donc d'après l'observation 4.3.1 on obtient $\dim(C_n^k) = n + 3$. □

Lemme 4.3.5. *Pour tout $n \geq l > k \geq 1$, $\dim(D_n^{k,l}) = n + 3$.*

Preuve. Comme l'arbre $D_n^{k,l}$ n'est pas équilibré et possède 2^{n+2} sommets, alors $\dim(D_n^{k,l}) \geq n + 3$. Montrons que $\dim(D_n^{k,l}) = n + 3$. Il est clair que pour tout $n \geq l > k \geq 1$, l'arbre $D_n^{k,l}$ est un sous-arbre de l'arbre \hat{D}_{n+1} (voir la Figure 4.35).



(a) $D_n^{0,l} \subset \hat{D}_{n+1}$



(b) $D_n^{k,l} \subset \hat{D}_{n+1}, k \geq 1$

FIG. 4.35 – Plongement de $D_n^{k,l}$ dans \hat{D}_{n+1}

Donc d'après l'observation 4.3.1 on obtient $\dim(D_n^{k,l}) = n + 3$. □

Lemme 4.3.6. *Pour $n \geq l > k \geq 1$, $\dim(E_n^{l,k}) = n + 3$.*

Preuve. Comme l'arbre $E_n^{k,l}$ n'est pas équilibré et possède 2^{n+2} sommets, alors $\dim(E_n^{k,l}) \geq n + 3$. Montrons que $\dim(E_n^{k,l}) = n + 3$. Il est clair que pour tout $n \geq l > k \geq 1$, l'arbre $E_n^{k,l}$ est un sous-arbre de l'arbre \hat{D}_{n+1} (voir la Figure 4.36).

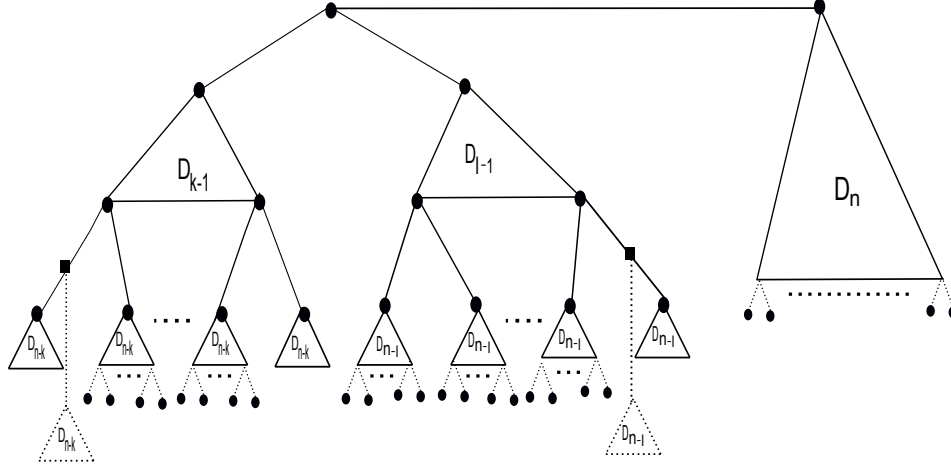


FIG. 4.36 – Plongement de $E_n^{k,l}$ dans \hat{D}_{n+1}

Donc d'après l'observation 4.3.1 on obtient $\dim(E_n^{k,l}) = n + 3$. □

Lemme 4.3.7. *Pour tout $n \geq l > k \geq 1$, $\dim(F_n^{k,l}) = n + 3$.*

Preuve. Comme l'arbre $F_n^{k,l}$ n'est pas équilibré et possède 2^{n+2} sommets, alors $\dim(F_n^{k,l}) \geq n + 3$. Montrons que $\dim(F_n^{k,l}) = n + 3$. Soient $u_k v_k, u_l v_l$ les arêtes subdivisées dans \hat{D}_n , x_k le sommet de degré 2 inséré sur l'arête $u_k v_k$ et x_l le sommet de degré 2 inséré sur l'arête $u_l v_l$. Soit γ_0 la C_{n+2} -valuation de l'arbre \hat{D}_n et γ la valuation de l'arbre $F_n^{k,l}$ définie comme suit :

$$\gamma(u_k x_k) = \gamma_0(u_k v_k), \quad \gamma(u_l x_l) = \gamma_0(u_l v_l),$$

$$\gamma(x_k v_k) = \gamma(x_l v_l) = n + 3,$$

Pour tout arête $uv \notin \{u_k x_k, x_k v_k, u_l x_l, x_l v_l\}$, $\gamma(uv) = \gamma_0(uv)$.

Vérifions que γ est une C_{n+3} -valuation de l'arbre $F_n^{k,l}$. Soit P une chaîne quelconque dans $F_n^{k,l}$. Si P ne contient pas d'arêtes marquées par $n + 3$, alors la chaîne P est aussi une chaîne de \hat{D}_n , donc la propriété requise découle du fait que γ_0 est une C_{n+2} -valuation de l'arbre \hat{D}_n . Si P contient une seule arête marquée par $n + 3$, alors $\exists k = n + 3 \in \{1, 2, \dots, n + 2, n + 3\}$, telle que une seule arête de P marquée par k , donc la propriété requise est vérifiée.

Finalement si deux arêtes de P sont marquées par $n + 3$, alors la chaîne P' obtenue à partir de P en contractant les deux arêtes marquées par $n + 3$ est une chaîne de \hat{D}_n . Donc la propriété requise découle du fait que γ_0 est une C_{n+2} -valuation de l'arbre \hat{D}_n . \square

La C_5 -valuation de $F_2^{1,2}$ est montrée dans la Figure 4.37.

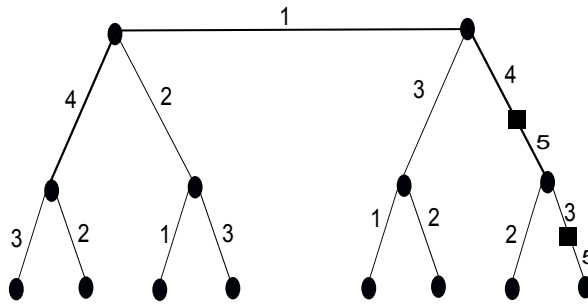


FIG. 4.37 – C_5 -valuation de $F_2^{1,2}$

Critères de plongement optimal des arbres récursifs dans l'hypercube

5.1 Arbres binaire parfaitement équilibrés

Soit T un arbre. Si les deux parties de $V(T)$ contiennent le même nombre de sommets pendants, on dira que les sommets pendants de T sont équilibrés. Si de plus T est équilibré, on dira que T est parfaitement équilibré.

Lemme 5.1.1. *Soit T un arbre parfaitement équilibré. Alors l'arbre $ext(T)$ obtenu à partir de l'arbre T , tel que chaque sommet pendent de T est relié à deux nouveaux sommets pendants est aussi parfaitement équilibré.*

Preuve. Soient $V_1(T)$ et $V_2(T)$ les deux parties disjointes de $V(T)$, telles que $|V_1(T)| = n_1$ et $|V_2(T)| = n_2$. Soient f_1 et f_2 le nombre de sommets pendants dans $V_1(T)$ (resp. $V_2(T)$). Comme T est parfaitement équilibré, donc $n_1 = n_2$ et $f_1 = f_2 = f$. Soit x_i^j un sommet pendent de $V_i(T)$ et u_i^j, v_i^j les deux nouveaux sommets reliés à x_i^j , ($i \in \{1, 2\}$ et $1 \leq j \leq f$). Alors l'ensemble des sommets $W_1 = V_1(T) \cup \{u_2^j, v_2^j\}$ et $W_2 = V_2(T) \cup \{u_1^j, v_1^j\}$ sont clairement les parties disjointes de $V(ext(T))$ et que $|W_1| = n_1 + 2f_2$, $|W_2| = n_2 + 2f_1$ et le nombre de sommets pendants dans W_1 (resp. dans W_2) est égal à $2f_2$ (resp. $2f_1$). Comme $n_1 = n_2$ et $f_1 = f_2$, alors $ext(T)$ est parfaitement équilibré. \square

Lemme 5.1.2. *Soit T un arbre d'ordre $2^{dim(T)}$, tel que $dim(ext(T)) = dim(T) + 1$. Alors le nombre de sommets pendants dans chacune des deux parties disjointes de $V(T)$ est inférieur ou égal à $2^{dim(T)-2}$.*

Preuve. Soient $V_1(T)$ et $V_2(T)$ les deux parties disjointes de $V(T)$, tel que le nombre de sommets pendants dans $V_i(T)$ est égal à f_i , $i \in \{1, 2\}$. Comme T est plongé dans $Q_{\dim(T)}$, alors pour tout $i \in \{1, 2\}$ on a $|V_i(T)| = 2^{\dim(T)-1}$. Soit x_i^j un sommet pendent de $V_i(T)$ et u_i^j, v_i^j les deux nouveaux sommets reliés à x_i^j , ($1 \leq j \leq f_i$ et $i \in \{1, 2\}$). Comme l'arbre $ext(T)$ est plongé dans $Q_{\dim(T)+1}$, alors $|W_1| = |V_1(T)| + 2f_2 \leq 2^{\dim(T)}$ et $|W_2| = |V_2(T)| + 2f_1 \leq 2^{\dim(T)}$. Donc pour tout $i \in \{1, 2\}$ on a $2f_i \leq 2^{\dim(T)} - 2^{\dim(T)-1}$, d'où $f_i \leq 2^{\dim(T)-2}$. \square

5.2 Décomposition de Q_n en des Copies disjointes de Q_i

Il est clair que les sommets de Q_n sont répartis en deux parties disjointes $V_1(Q_n)$ et $V_2(Q_n)$, tels que $|V_1(Q_n)| = |V_2(Q_n)| = 2^{n-1}$ et que pour tout $n \geq 3$, Q_n peut être décomposé en 2^{n-i} copies disjointes de Q_i , $0 \leq i \leq n$. Comme Q_2 est décomposé en une copie de $K_{1,2}$ et une copie de Q_0 , donc Q_n peut être décomposé en 2^{n-2} copies disjointes de $K_{1,2}$ et 2^{n-2} copies disjointes de Q_0 .

Supposons que les sommets de $V_1(Q_n)$, de $V_1(T)$, de $V_1(Q_1^{(i)})$, de $V_1(Q_0^{(i)})$ et de $V_1(K_{1,2}^{(i)})$ sont représentés par des cercles et ceux de $V_2(Q_n)$, de $V_2(T)$, de $V_2(Q_i^{(1)})$ de $V_2(Q_0^{(i)})$ et de $V_2(K_{1,2}^{(i)})$ sont représentés par des carrés. Nous considérons les deux décompositions suivantes :

1. Q_n est décomposé en 2^{n-1} copies disjointes de Q_1 , notées $Q_1^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$.
2. Q_n est décomposé en 2^{n-2} copies disjointes de $K_{1,2}$, notées $K_{1,2}^{(i)}$ et 2^{n-2} copies disjointes de Q_0 , notées $Q_0^{(i)}$, tels pour tout $j \in \{1, 2, \dots, 2^{n-3}\}$, le nombre de sommets de degré 2 de $V_1(K_{1,2}^{(2j)})$ est égal au nombre de sommet de degré 2 de $V_2(K_{1,2}^{(2j-1)})$ et est égal à 1 et $|V_1(Q_0^{(2j)})| = |V_2(Q_0^{(2j-1)})| = 1$.

La Figure 5.1 montre la représentation des sommets de $V_1(Q_3)$ par des cercles et ceux de $V_2(Q_3)$ par des carrés.

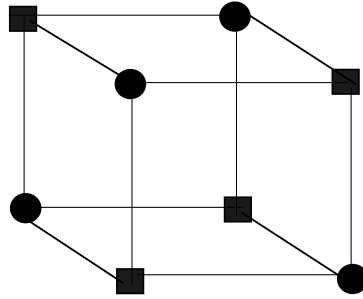


FIG. 5.1 – Représentation des sommets de Q_3

La Figure 5.2(a) montre la décomposition de Q_3 en 8 sommets isolés, la Figure 5.2(b) montre la décomposition de Q_3 en 4 copies disjointes de Q_1 et la Figure 5.2(c) montre la décomposition de Q_3 en 2 copies disjointes de $K_{1,2}$ et 2 copies disjointes de Q_0 .

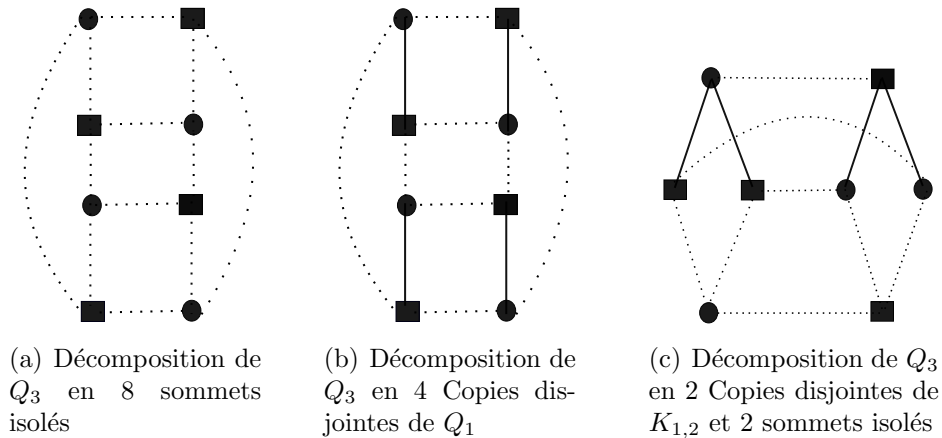


FIG. 5.2 – Décompositions de Q_3

Théorème 5.2.1. *Soit T un arbre, tel que $\dim(\text{ext}(T)) = \dim(T) + 1$. Si le nombre de sommets pendants dans chacune des deux parties disjointes de $V(T)$ est inférieur ou égal à $2^{\dim(T)-2}$, alors $\dim(\text{ext}^2(T)) = \dim(T) + 2$.*

Preuve. Considérons une copie $Q_{\dim(T)+1}^{(1)}$ de $Q_{\dim(T)+1}$ et deux copies disjointes $Q_{\dim(T)}^{(1)}$ et $Q_{\dim(T)}^{(2)}$ de $Q_{\dim(T)}$, tels que dans $Q_{\dim(T)}^{(2)}$ on prend seulement l'arbre T , dans $Q_{\dim(T)}^{(1)}$ on prend seulement $2^{\dim(T)-1}$ copies disjointes de Q_1 , notées $Q_1^{(i)}$ et dans $Q_{\dim(T)+1}^{(1)}$ on prend seulement $2^{\dim(T)-1}$ sommets isolés, notés $Q_0^{(i)}$ et $2^{\dim(T)-1}$ copies disjointes de $K_{1,2}$, notées

$K_{1,2}^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^{\dim(T)-1}\}$, tels que pour tout entier $j \in \{1, 2, \dots, 2^{n-2}\}$, le nombre de sommets de degré 2 dans $V_1(K_{1,2}^{(2j)})$ est égal au nombre de sommets de degré 2 dans $V_2(K_{1,2}^{(2j-1)})$ et $|V_1(Q_0^{(2j)})| = |V_2(Q_0^{(2j-1)})|$. Soient a et b deux entiers de l'ensemble $\{1, 2\}$, $a \neq b$. Si on relie chaque sommet de $V_a(Q_0^{(i)})$ à un sommet de $V_b(Q_1^{(i)})$ on obtient $2^{\dim(T)-1}$ nouvelles copies disjointes de $K_{1,2}$, notées $K_{1,2}^{(i)}$, $i \in \{1, 2, \dots, 2^{\dim(T)-1}\}$. Maintenant si on relie chaque sommet pendant de $V_a(T)$ par une arête à un sommet de degré 2 de $V_b(K_{1,2}^{(i)})$ et par une autre arête à un sommet de degré 2 de $V_b(K_{1,2}^{(i)})$ on obtient l'arbre $ext(ext(T))$. Comme la somme cartésienne de $Q_{\dim(T)}^{(1)}$ avec $Q_{\dim(T)}^{(2)}$ donne l'hypercube $Q_{\dim(T)+1}$ et que la somme cartésienne de $Q_{\dim(T)+1}$ et $Q_{\dim(T)+1}^{(1)}$ donne $Q_{\dim(T)+2}$. Donc l'arbre $ext(ext(T))$ est plongable dans $Q_{\dim(T)+2}$. \square

La Figure 5.3 montre le plongement de l'arbre $ext(ext(T))$ dans $Q_{\dim(T)+2}$.

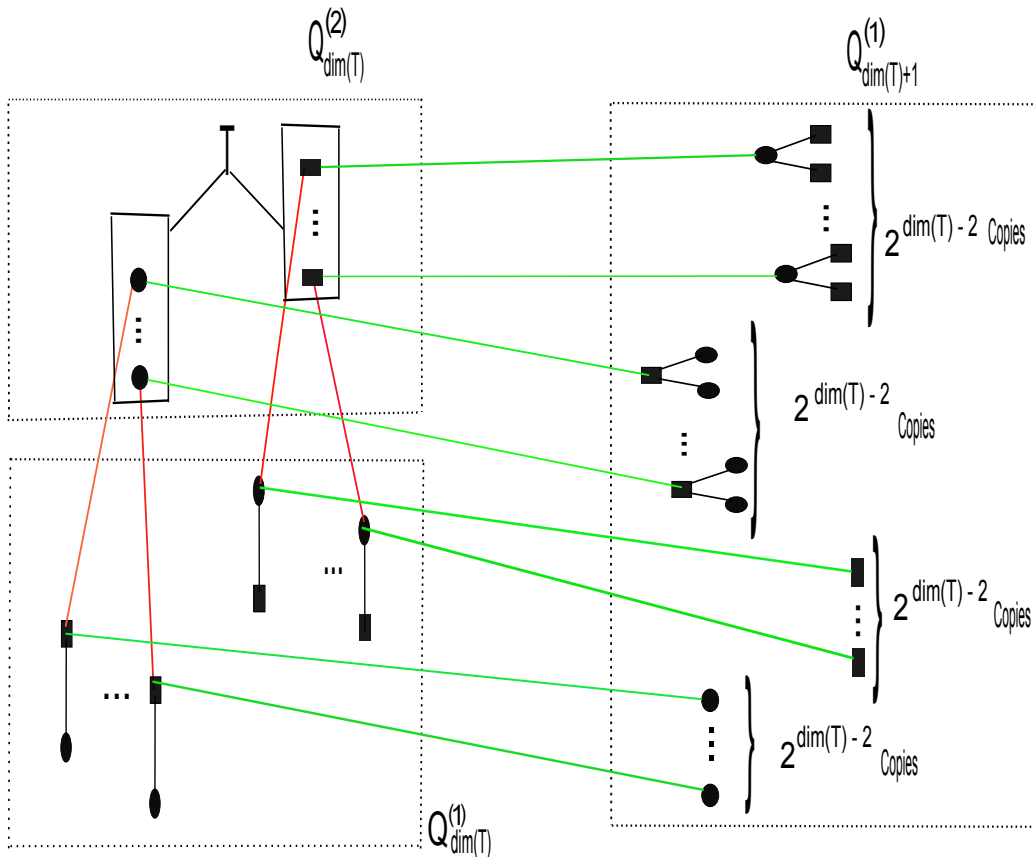


FIG. 5.3 – Plongement de $ext(ext(T))$ dans $Q_{\dim(T)+2}$

Comme exemples d'applications, considérons les arbres de la Figure 5.4.

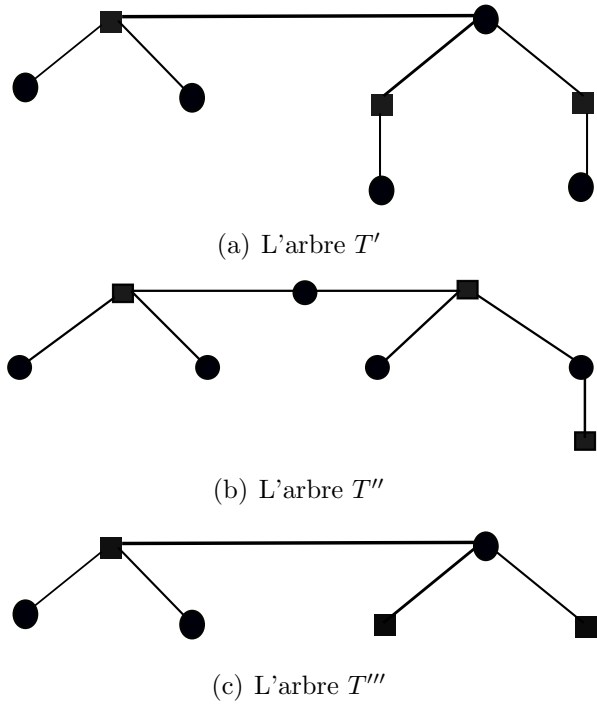


FIG. 5.4 – Arbres binaires T' , T'' et T'''

Il est clair que T''' est plongable dans Q_3 et que T' et T'' sont plongables dans Q_4 . La Figure 5.5(a) montre la C_4 -valuation de T' , la Figure 5.5(b) montre la C_4 -valuation T'' et la Figure 5.5(c) montre la C_3 valuation de T''' .

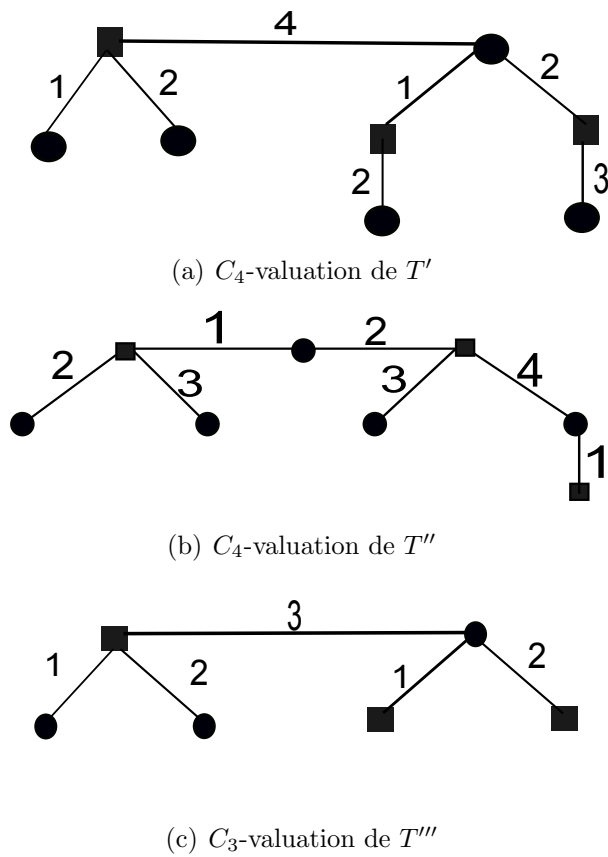


FIG. 5.5 – C_4 -valuation de T' et T'' et C_3 -valuation T'''

Il est clair que $ext(T''')$ est plongeable dans Q_4 et que $ext(T'')$ et $ext(T')$ sont plongeables dans Q_5 .

La Figure 5.6(a) montre la C_5 -valuation de $ext(T')$, la Figure 5.6(b) montre la C_5 -valuation de $ext(T'')$ et la Figure 5.6(c) montre la C_4 -valuation de $ext(T''')$.

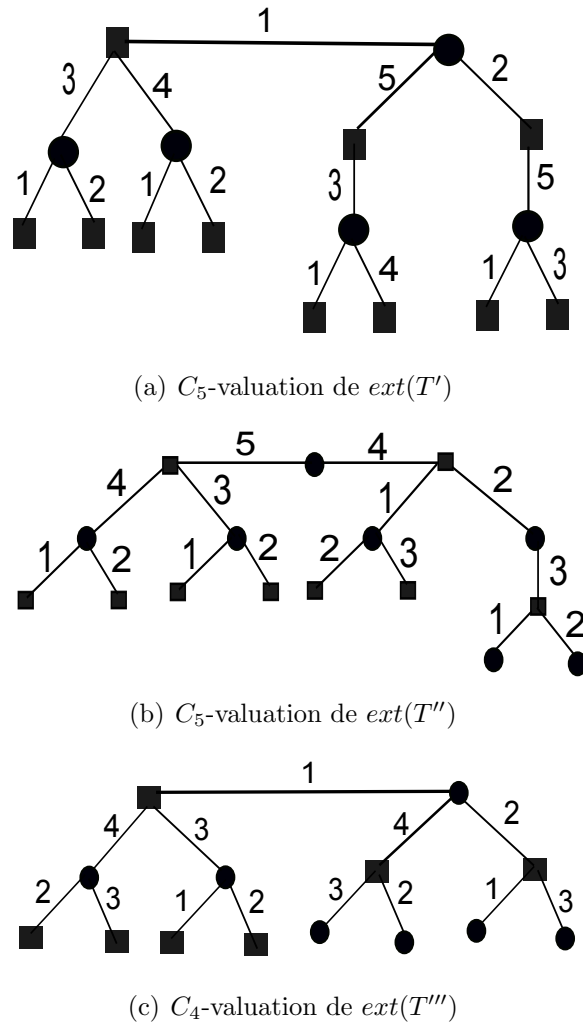


FIG. 5.6 – C_5 -valuation de $ext(T')$ et $ext(T'')$ et C_4 -valuation $ext(T''')$

Comme T' et T'' vérifient les conditions du Théorème 5.2.1. Alors $dim(ext(ext(T')))$ = $dim(ext(ext(T'')))$ = $4 + 2 = 6$. Comme T''' vérifie les conditions du Théorème 5.2.1. Alors $dim(ext(ext(T''')))$ = $3 + 2 = 5$. Les plongements de $ext(ext(T'''))$ dans Q_5 , de $ext(ext(T''))$ et de $ext(ext(T'))$ sont montrés respectivement par les Figures 5.7, 5.8 et 5.9.

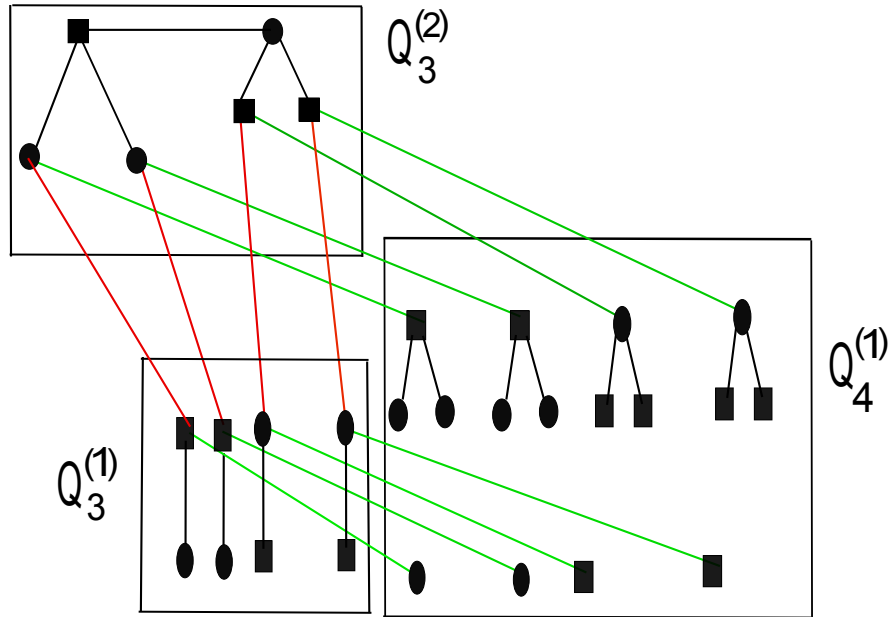


FIG. 5.7 – Plongement de $ext(ext(T'''))$ dans Q_5

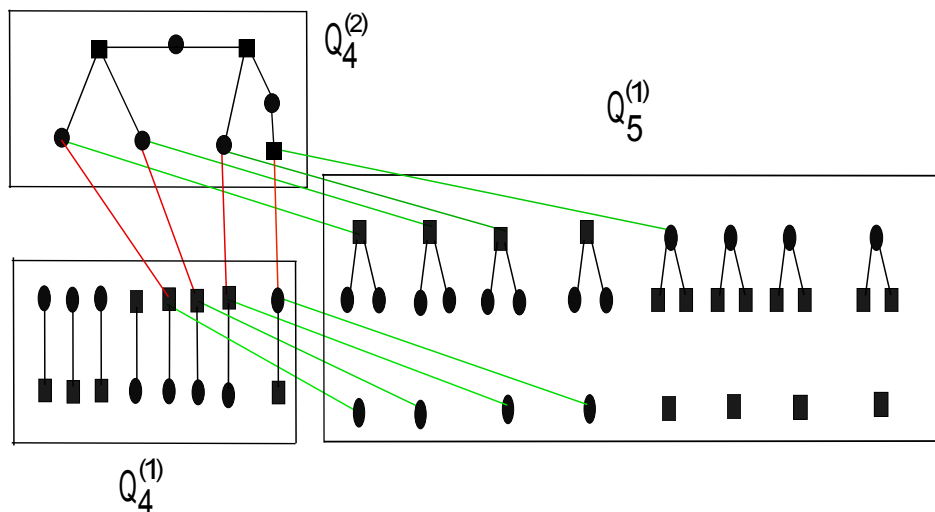


FIG. 5.8 – Plongement de $ext(ext(T''))$ dans Q_6

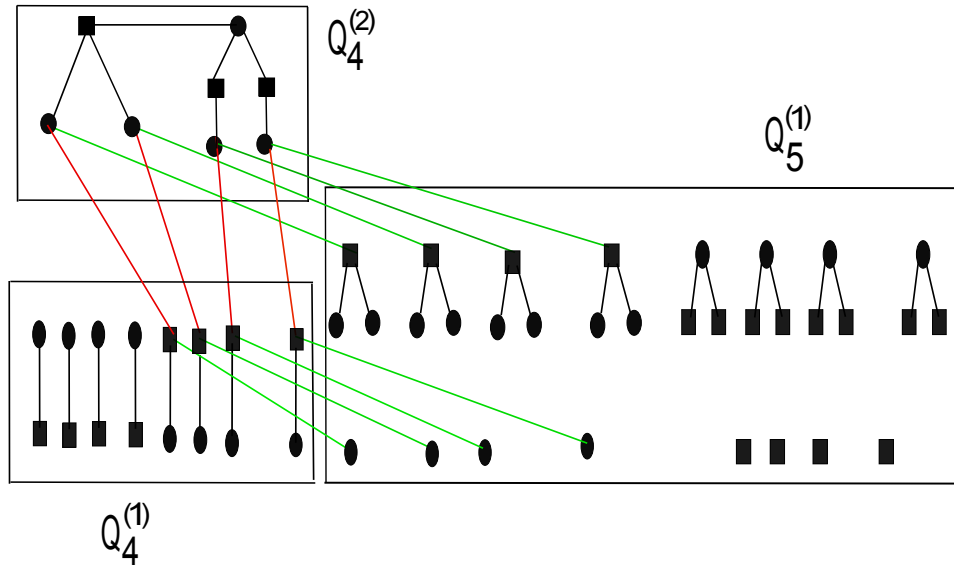


FIG. 5.9 – Plongement de $ext(ext(T'))$ dans Q_6

En utilisant le Théorème 5.2.1, on a le Corollaire suivant :

Corollaire 5.2.1. *Soit T un arbre, tel que $dim(ext(T)) = dim(T) + 1$. Si le nombre de sommets pendants dans chacune des deux parties disjointes de $V(T)$ est inférieur ou égal à $2^{dim(T)-2}$, alors $dim(ext^p(T)) = dim(T) + p$.*

Preuve. Pour $p = 3$ on a $ext^3(T) = ext^2(ext(T))$. Comme $dim(ext^2(T)) = dim(T) + 2 = dim(ext(T)) + 1$, alors d'après le Théorème 5.2.1, on a $dim(ext^3(T)) = dim(ext^2(ext(T))) = dim(ext(T)) + 2 = dim(T) + 3$, d'où la propriété est vraie pour $p = 3$. Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $p - 1$ (c'est à dire pour tout $p \geq 3$, $dim(ext^{p-1}(T)) = dim(T) + p - 1$) et montrons qu'elle reste vraie à l'ordre p . $ext^p(T) = ext^2(ext^{p-2}(T))$, comme $dim(ext^{p-1}(T)) = dim(T) + p - 1 = dim(ext^{p-2}(T)) + 1$ (hypothèse d'induction). Donc d'après le Théorème 5.2.1, on a $dim(ext^p(T)) = dim(ext^2(ext^{p-2}(T))) = dim(ext^{p-2}(T)) + 2 = dim(T) + p - 2 + 2 = dim(T) + p$. \square

On peut construire plusieurs types d'arbres T_j pour lesquels l'utilisation du Corollaire 5.2.1 donne facilement la dimension cubique de $ext(ext(T_j))$, $j \in \{1, 2 \dots n\}$.

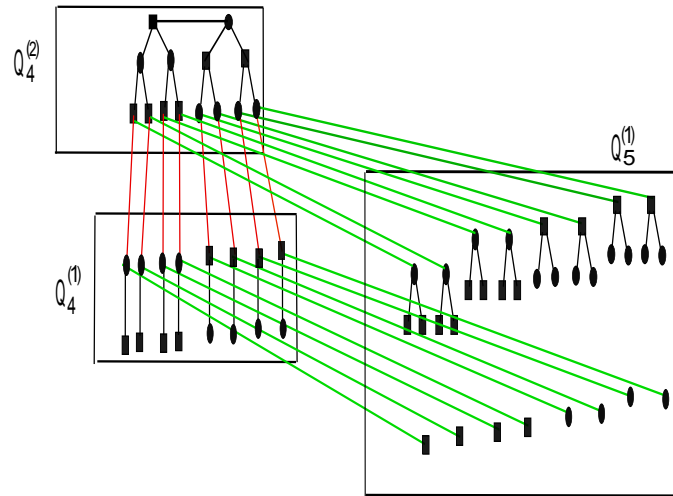
Plusieurs plongements connus sur les arbres peuvent être confirmés facilement via le Corollaire 5.2.1. Citons les arbres suivants :

1. Soit T_1 est l'arbre \hat{D}_2 , alors pour $n \geq 2$, $ext^{n-1}(T_1)$ est bien l'arbre \hat{D}_n qui est plongeable dans Q_{n+2} (résultat de Havel) [38]. On peut confirmer ce plongement par le Corollaire 5.2.1 comme suit : T_1 est un arbre binaire tel que $dim(T_1) = 3$ et $dim(ext(T_1)) = dim(\hat{D}_2) = 4 = dim(T_1) + 1$, alors $dim(ext^{n-1}(T_1)) = dim(T_1) + n - 1 = 3 + n - 1 = n + 2$.

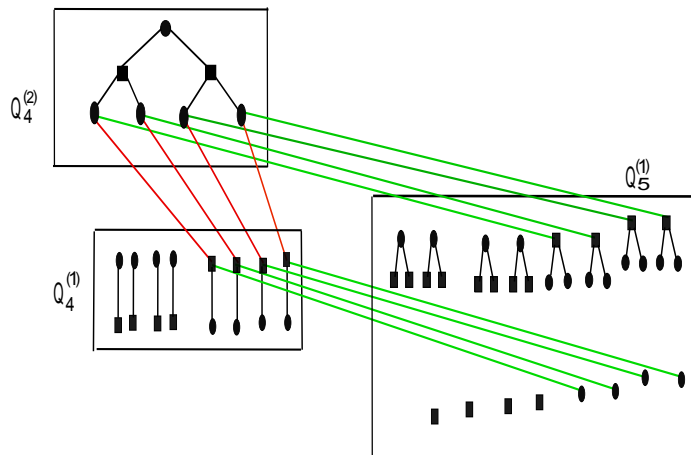
2. Soit T_2 est l'arbre \hat{D}_2 , alors pour $n \geq 2$, $ext^{n-1}(T_2)$ est bien l'arbre \hat{D}_n qui est plongeable dans Q_{n+2} [64]. On peut confirmer ce plongement par le Corollaire 5.2.1 comme suit : \hat{D}_1 est un arbre binaire parfaitement équilibré tel que $dim(T_2) = 3$ et $dim(ext(T_2)) = dim(\hat{D}_2) = 4 = dim(T_2) + 1$. Alors d'après le Corollaire 5.2.1, on a $dim(ext^{n-1}(T_2)) = dim(T_2) + n - 1 = 3 + n - 1 = n + 2$.

3. Soit T_3 est l'arbre D_2 , alors pour $n \geq 2$, $ext^{n-1}(T_3)$ est bien l'arbre D_n qui est plongeable dans Q_{n+2} [38]. On peut confirmer ce plongement par le Corollaire 5.2.1 comme suit : D_n est un arbre binaire tel que $dim(T_3) = 4$ et $dim(ext(T_3)) = dim(\hat{D}_3) = 5 = dim(T_3) + 1$. Alors d'après le Corollaire 5.2.1, on a $dim(ext^{n-1}(T_3)) = dim(T_3) + n - 1 = 4 + n - 1 = n + 3$.

Le plongement de \hat{D}_4 dans Q_6 et le plongement de D_4 dans Q_6 sont montrés respectivement dans les Figures 5.10 (a) et 5.10 (b).



(a) Plongement de \hat{D}_4 dans Q_6



(b) Plongement de D_4 dans Q_6

FIG. 5.10 – Plongement de \hat{D}_4 et D_4 dans Q_6

Conclusion

Dans cette thèse nous nous sommes intéressés au plongement d'arbres dans l'hypercube. Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à ce problème, leurs travaux ont permis de caractériser quelques classes d'arbres plongeables dans l'hypercube. Tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube, le problème consiste à trouver la plus petite dimension de l'hypercube dans lequel un arbre donné y est plongeable, on parle alors d'hypercube optimal et de la dimension cubique de l'arbre. Dans le même contexte nous avons introduit de nouvelles classes d'arbres pour lesquels nous avons déterminé la dimension cubique. Nous avons donné toutes les familles des arbres binaires obtenus par la double subdivision de l'arbre binaire complet à double racines et nous avons montré que dans le cas équilibré ces arbres vérifient la conjecture de Ivan Havel [35]. Enfin, nous avons présenté des critères de plongement optimal de tous les arbres obtenus d'une manière recursive dans l'hypercube. Ces critères recouvrent également les plongements de certaines classes d'arbres binaires pour lesquels la dimension cubique est connue. Comme perspectives nous allons essayer de trouver d'autres critères de plongement optimal des arbres obtenus par les subdivisions des arêtes pour qu'on puisse avoir de nouvelles classes d'arbres plongeables d'une manière optimale dans l'hypercube. Nous allons aussi essayer de présenter un algorithme permettant la détermination de la C_n -valuation d'une famille d'arbres obtenus d'une manière recursive.

Bibliographie

- [1] H.L. Abbott. Hamiltonian circuits and paths in the n -cube. *Canad. Math. Bull.* **233**, pp. 557-562, (1966).
- [2] G.M. Adelson-Velskii and E.M. Landis. An algorithm for the organisation of information.
- [3] P. Arbouz. Plongements de graphes dans l'hypercube. *Prépublication, Institut de Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène*, N° 4, (1990).
- [4] P. Arbouz. Perfect matching graph. *Prépublication, Institut de Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène*, No. 55, (1990).
- [5] J. Arfati, C.H. Papadimitriou, and P. Papageorgiou. The complexity of cubical graphs. *Proceedings of 11 th international Kolloquium on Automata, Languages and Programming* pp. 51-57, (1984).
- [6] H.J. Bandelt and H. M. Mulder. Infinite median graphs, $(0, 2)$ -graphs and hypercubes. *Journal of Graph Theory* **7**, pp. 487-492, (1983).
- [7] C. Berge. *Graphs and hypergraphs*. Dunod, Paris, 1973.
- [8] A. Berrachedi. Sur quelques propriétés métriques du graphe de type hypercube. *PhD Thesis, Institut de Mathématiques, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène*, (1997).
- [9] A. Berrachedi and M. Nekri. Two new classes of trees embeddable into hypercubes. *Rairo Oper. Res.* **38**, pp. 295-303, (2004).
- [10] S. Bezrukov, B. Monien, W. Unger, and G. Wechsung. Embedding ladders and caterpillars into hypercube. *Discrete Applied Mathematics* **83**, pp. 21-29, (1998).

-
- [11] S.N. Bhatt, F.R.K. Chung, F.T. Leighton, and A.L. Rosenberg. Efficient embedding of trees in hypercube. *SIAM J. Comput.* **21**, No. 1, pp. 151-162, (1980).
- [12] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. Graphs Theory with Applications. *North Holland*, (1976).
- [13] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. Graph theory. *Graduate texts in Mathematics, 244*, Springer, London, (2008).
- [14] M. Buratti. Edge-colourings characterizing a class of cayley graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics* **161**, pp. 291-295, (1996).
- [15] G. Burosch, I. Havel, and J.M. Laborde. Distance monotone graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics* **110**, pp. 9-16, (1992).
- [16] R. Caha and V. Koubek. Spanning regular caterpillars in hypercubes. *Europ. J. Combinatorics* **18**, pp. 249-266, (1997).
- [17] C.C. Chen and R.Y. Chen. Compact embedding of binary trees into hypercubes. *Inform. Proc. Lett.* **54**, No. 2, pp. 69-72, (1995).
- [18] S.A. Choudum and S. Lavanya. Embedding a subclass of trees into hypercubes. *Discrete Math.* **311**, No. 10-11, pp. 866-871, (2011).
- [19] S.A. Choudum and I. Raman. Embedding height balanced trees and Fibonacci trees in hypercubes. *J. Appl. Math. Computing* **30**, No. 1-2, pp. 39-52, (2009).
- [20] P. Van den Cruyce. A characterization of the n -cube by convex subgraphs. *Discrete Mathematics* **41**, pp. 109-110, (1982).
- [21] R. Diestel. Graph theory. *Third Edition*, springer, (2006).
- [22] D.Z. Djorkovic. Distance-preserving subgraphs of hypercubes. *Jour. Comb. Th. (b)*, **14**, pp. 263-267, (1973).
- [23] T. Dvorák. Dense sets and embedding binary trees into hypercubes. *Discrete Appl. Math.* **155**, pp. 506-514, (2007).
- [24] T. Dvorák, I. Havel, J.M. Laborde, and M. Mollard. Spanning caterpillars of a hypercube. *Journal of Graph Theory* **21**, No. 1, pp. 9-19, (1997).
- [25] V. Fersov. On isometric embeddings of a graph into a Boolean cube. *Cybernetics (in Russian)* **1**, No. 6, pp. 112-113, (1965).

- [26] S. Foldes. A characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics* **17**, pp. 155-159, (1977).
- [27] M.R. Garey and R.I. Graham. On cubical graphs. *Journal of combinatorial Theory (b)*, **18**, pp. 84-95, (1975).
- [28] F. Harary. Recent results and unsolved problems on hypercube theory. *Graph Theory, Combinatorics and Applications* **2**, pp. 661-632, (1991).
- [29] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube *ii* : Double starlike trees. *Math. Comput. Modelling* **11**, pp. 216-217, (1988).
- [30] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube *ii* : Meshes. *Comput. Math. Appl.* **15**, pp. 299-302, (1988).
- [31] F. Harary and M. Lewinter. The starlike trees which span a hypercube. *Inter. Jour. Computer Math.* **25**, pp. 20-24, (1988).
- [32] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube *iv* : Survey and unsolved problems. *Graph Theory. Combinatorics and Applications* **2**, pp. 633-637, (1991).
- [33] F. Harary and M. Lewinter. Spanning subgraphs of hypercube *iv* : Rooted trees. *Math. Comput. Modelling* **17**, No. 11, pp. 85-88, (1993).
- [34] F. Harary, M. Lewinter, and W. Widulski. On two legged caterpillars which span hypercubes. *Congress. Numerantium* **66**, pp. 103-108, (1988).
- [35] I. Havel. On hamiltonian circuits and spanning trees of hypercubes. *Časopis Pěst. Mat.* **109**, No. 2, pp. 135-152, (1984).
- [36] I. Havel. On certain trees in hypercube. *R. Bodedick, R. Henn (Eds.), Topics in Combinatorics and Graphs Theory, Physica-Verlag, Heidelberg*, pp. 353-358, (1990).
- [37] I. Havel and J.M. Laborde. On distance monotone graphs. *Colloquia Mathematica societatis Janos, Combinatorics Eger (Hungary)* **52**, pp. 557-561, (1987).
- [38] I. Havel and P. Liebl. Embedding the dichotomic tree into the n -cube. *Časopis Pěst. Mat.* **97**, No. 2, pp. 201-205, (1972).
- [39] I. Havel and P. Liebl. Embedding the polytomic tree into the n -cube. *Časopis Pěst. Mat.* **98**, pp. 307-314, (1973).

- [40] I. Havel and P. Liebl. One-legged caterpillars span hypercubes. *J. Graph Theory*. **10**, No. 1, pp. 69-77, (1986).
- [41] I. Havel and J. Morávek. B-valuation of graphs. *Czech. Math. J.* **22**, No. 2, pp. 338-351, (1972).
- [42] K. Kabyl. Sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres. *Thèse de Magistère, Université Houari Boumediène, Alger*, (2003).
- [43] K. Kabyl and A. Berrachedi. Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres. *2ème Colloque International sur l'Optimisation des Systèmes d'Information, Béjaia 11-14 juin*, (2005).
- [44] K. Kabyl and A. Berrachedi. Plongement de deux nouvelles classes d'arbres dans l'hypercube. *3ème Colloque International sur l'Optimisation des Systèmes d'Information, Bab-Ezzouar 11-13 juin*, (2006).
- [45] K. Kabyl and A. Berrachedi. Sur la dimension cubique de quatre nouvelles classes d'arbres. *Colloque International sur les Méthodes et Outils d'Aide à la Décision, Béjaia 18-20 Novembre*, (2007).
- [46] K. Kabyl and A. Berrachedi. Plongement optimal de certaines classes d'arbres. *Symposium International en Recherche Opérationnelle, Bab-Ezzouar 02-06 Novembre*, (2008).
- [47] K. Kabyl and A. Berrachedi. Sur le plongement de nouvelles classes d'arbres dans l'hypercube. *6ème Colloque International sur l'Optimisation des Systèmes d'Information, Annaba 25-27 Mai*, (2009).
- [48] K. Kabyl and A. Berrachedi. Plongement et placement de certaines classes d'arbres dans l'hypercube. *7ème Colloque International sur l'Optimisation des Systèmes d'Information, Ouargla 17-21 Avril*, (2010).
- [49] K. Kabyl and A. Berrachedi. Embedding balanced binary trees in hypercube. *AFG'11 15th Austrian-French-German Conference on optimization, Toulouse 19-23 Septembre*, (2011).
- [50] K. Kabyl and A. Berrachedi. On the cubic dimension of some classes of trees. *Optimization 2011, LISBON 24-27 Juillet*, (2011).

- [51] K. Kabyl and A. Berrachedi. On the cubic dimension of certain classes of balanced binary trees into hypercube. *24th European Conference on Operational Research, Vilnius 08-11 Juillet*, (2012).
- [52] K. Kabyl and A. Berrachedi. On the cubical dimension of new classes of binary trees. *Journées Scientifiques du laboratoire de Recherche Opérationnelle et de Mathématiques de la Décision, Tizi-Ouzou 28-30 Octobre*, (2013).
- [53] K. Kabyl and A. Berrachedi. On the embedding of new classes of balanced binary trees in the hypercube. *25th European Conference on Operational Research, Rome 01-04 Juillet*, (2013).
- [54] K. Kabyl and A. Berrachedi. Optimal embedding of some new classes of binary trees into hypercubes. *Workshop international sur l'évaluation des performances et qualité de service, Béjaia 05-06 Mai*, (2013).
- [55] K. Kabyl, A. Berrachedi, and Éric Sopena. A note on the cubical dimension of new classes of binary trees. *Czechoslovak Mathematical Journal*, (2014).
- [56] M. Kobeissi. Plongement de graphes dans l'hypercube. *PhD Thesis, l'Université Joseph Fourier - Grenoble 1 U.F.R. IMA*, (2001).
- [57] M. Kobeissi and M. Mollard. A counter-exemple about embedding graphs into hypercubes. *Computers and Mathematics with Applications* **41**, pp. 669-670, (2001).
- [58] M. Kobeissi and M. Mollard. Spanning graphs of hypercubes : Starlike and double starlike trees. *Discrete Math.* **244**, No. 1-3, pp. 231-239, (2002).
- [59] J.M. Laborde and S.P. Rao Hebbare. Another characterization of hypercubes. *Discrete Mathematics* **39**, pp. 161-166, (1982).
- [60] M. Mollard. Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de hamming. *PhD Thesis, l'Université Joseph Fourier*, (1989).
- [61] M. Mollard and A. Berrachedi. Median graphs and hypercubes, some new characterizations. *Discrete Mathematics*, (1989).
- [62] H.M. Mulder. The interval function of a graph. *Mathematical centre tracts 132, Mathemaisch centrum, Amesterdam*, (1980).
- [63] H.M. Mulder. Interval-regular graphs. *Discrete Mathematics* **41**, pp. 253-269, (1982).

- [64] L. Nebeský. On cubes and dichotomic trees. *Časopis Pěst. Mat.* **99**, No. 2, pp. 164-167, (1974).
- [65] L. Nebeský. On quasistars in n -cubes. *Časopis Pěst. Mat.* **109**, pp. 153-156, (1984).
- [66] L. Nebeský. Embedding m -quasistars into n -cubes. *Czechoslovak Mathematical Journal* **38**, No. 4, pp. 705-712, (1988).
- [67] A. Wagner and D.G. Corneil. Embedding trees in a hypercube is NP-complete. *SIAM J. Comput.* **19**, N° 3, pp. 570-590, (1980).

RÉSUMÉ

Le plongement de graphes dans l'hypercube Q_n est un problème très étudié. En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer les conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous-graphe de l'hypercube. Plusieurs auteurs se sont intéressés à l'étude de plongements d'arbres dans l'hypercube. Leurs travaux ont permis de caractériser quelques classes d'arbres pour lesquels la dimension cubique est déterminée. Nous avons introduit de nouvelles classes d'arbres pour lesquels nous avons déterminé la dimension cubique. Nous avons donné toutes les familles des arbres binaires obtenus par la double subdivision de l'arbre binaire complet à double racines et nous avons montré que dans le cas équilibré ces arbres vérifient la conjecture de Ivan Havel [35]. Enfin, nous avons présenté des critères de plongement optimal de tous les arbres obtenus d'une manière recursive dans l'hypercube. Ces critères recouvrent également les plongements de certaines classes d'arbres binaires pour lesquels la dimension cubique est connue.

Mots clés : Hypercube, Plongement, Graphes, Arbres, Isomorphisme.