

Numéro d'ordre :04/2006-E/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumédiène

USTHB-ALGER

Faculté de Physique



**Thèse**

Présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat d'état :

**en physique**

Spécialité : Energétique et Mécanique des Fluides

par

**Madame MEZIANI OURRAD Ouerdia**

sujet

**MODELISATION STOCHASTIQUE ET PROPAGATION D'ONDES**

Soutenue publiquement le 16/12/2006 devant le jury composé de :

BOUHADEF Mustapha	Professeur/ USTHB(Alger)	Président
LIMA Ricardo	Directeur de Recherche, (Marseille)	Directeur de thèse
AISSANI Djamil	Professeur, UAMB (Béjaia)	Examineur
SI AHMED El Khider	Professeur/USTHB (Alger)	Examineur
MATAOUI Amina	Maître de conférence/USTHB(Alger)	Examineur
EROCHENKOVA Galina	Maître de conférence/CPT (Marseille)	Examinatrice
BENZAOUI Ahmed	Maître de conférence/USTHB (Alger)	Examineur

A mes enfants : *Tania & Yanis*

## Remerciements

La première page lue est la dernière écrite, l'occasion de se retourner vers le travail accompli et les personnes qui l'ont rendu possible.

Je pense tout d'abord à Monsieur Ricardo LIMA, Directeur de Recherche au CNRS qui m'a accueillie chaleureusement au sein du groupe 3, Systèmes dynamiques, au Centre de Physique théorique de Marseille, m'a guidée, soutenue et encouragée pendant toutes ces années. Pour toutes ses qualités humaines et scientifiques ainsi que sa disponibilité qui font de lui un directeur de thèse exemplaire. je lui dis un grand **MERCI**.

Je remercie Monsieur Mustapha BOUHAFED d'avoir accepté de présider le jury de ma thèse.

Je remercie également Monsieur El Khider SI AHMED, Monsieur Ahmed BENZAOUI, Monsieur Djamil AISSANI et Madame Amina MATAOUI d'avoir accepté de faire partie du jury.

Je remercie Monsieur Michel VITTOT, Monsieur Cristel CHANDRE et Monsieur André LAMBERT pour leur disponibilité et pour leurs aides précieuses.

Je remercie également, Madame Galina EROCHENKOVA, pour ses conseils, son écoute et ses encouragements qui m'ont été d'un grand réconfort durant toutes ces années où je me rendais au CPT pour effectuer ce travail et d'avoir accepté de faire partie du jury.

J'exprime ma gratitude à Nicole PAOLETTI et à sa maman Mme Susanne PAOLETTI pour tout ce qu'elles ont fait pour moi.

Ma pensée va à mon mari, Bachir, qui a subi l'envers du décor... Merci pour l'intérêt que tu portes à mon travail, pour ta patience, pour ton soutien et pour tes

encouragements.

Mes remerciements vont également à toute ma famille : mes parents, mes frères et mes soeurs qui m'ont toujours soutenue dans les moments difficiles.

Je n'oublie pas de citer tous ceux de près ou de loin ont contribué dans la réalisation de ce travail : je pense à Antoinette CASTELANO, Silvie AGUILLON, Dolly ROCHE, Nawel AMATOUSSE, etc...

## Préface

Le travail présenté dans cette thèse traite le problème de diffusion d'un scalaire passif (un colorant) injecté dans un écoulement en milieu poreux. Il s'agit de réaliser un modèle qui prend en considération les irrégularités du milieu en considérant la porosité comme un processus stochastique télégraphique.

Il existe essentiellement deux types de modèles stochastiques pour les écoulements en milieu poreux. La première catégorie regroupe les modèles qui introduisent le caractère aléatoire dans la dynamique des particules du fluides en écoulement dans un milieu homogène c'est le "Random Walk Models" [18],[11]. La deuxième classe envisage un écoulement déterministe dans un milieu aléatoire c'est le "Random Media Models" [32], [15]. A quelques exceptions près, tous les modèles proposés jusqu'à présent dans les écoulements en milieu poreux appartiennent à ces deux classes. Notre modèle rentre dans la deuxième catégorie.

Le premier chapitre est consacré à la formulation du problème et à la résolution de l'équation de la diffusion dans un milieu poreux homogène : la porosité est égale à une constante  $\varepsilon$ . La comparaison de la solution dans ce cas à une fonction correspondant à la solution quand la porosité est égale à un a fait apparaître une longueur efficace qui représente la longueur que doit parcourir le colorant dans le milieu où la porosité est égale à un pour atteindre la même concentration que dans le milieu où la porosité vaut  $\varepsilon$ .

Dans le deuxième chapitre, nous avons introduit la porosité stochastique dans l'équation de la diffusion poreuse. Après avoir rappelé quelques notions sur les processus stochastiques télégraphique et poissonnien, nous avons mis en évidence la longueur efficace, étudié son évolution en fonction de la coordonnée spatiale  $x$  et sa distribution pour des valeurs différentes de  $x$ .

Le troisième chapitre constitue la partie la plus importante de la thèse. Elle comporte l'étude des solutions de l'équation de la diffusion poreuse pour chaque réalisation du processus stochastique. Comme dans le premier chapitre, chaque solution est comparée, par un changement de variable, à une fonction qui est la solution de l'équation de la diffusion dans le cas où la porosité est égale à un. Cette comparaison fait apparaître une longueur efficace associée à  $\varepsilon_\omega(x)$ . Par la suite, nous élaborons l'équation que doit vérifier la concentration moyenne évaluée par rapport au processus stochastique. Nous verrons que l'équation fractionnaire obtenue n'est valable que pour des temps grands et que pour des temps courts les approximations faites ne sont pas valables. Pour cela, nous entreprenons dans la suite de ce chapitre de comparer les réalisations à la moyenne. En effet dans la section trois de ce chapitre nous comparons les solutions de chaque réalisations (chaque solution correspond à la mesure expérimentale) à la moyenne stochastique. Nous obtenons un résultat inattendu qui est très important : La probabilité pour que les réalisations soient tout le temps proches de la moyenne est égale à zéro. Et un autre résultat important aussi : Nous avons pu estimer la probabilité pour que les réalisations soient tout le temps proches de la fonction du chemin moyen

effectué par les particules du scalaire passif.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>INTRODUCTION</b>	<b>12</b>
1.1	Introduction . . . . .	12
1.2	Formulation du problème . . . . .	25
1.3	Cas de la porosité constante . . . . .	27
1.4	Conclusion . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Un modèle de porosité stochastique</b>	<b>32</b>
2.1	Equation du modèle . . . . .	33
2.2	La loi exponentielle et le processus télégraphique . . . . .	39
2.2.1	Loi exponentielle . . . . .	40
2.2.2	Loi d'une somme de variables aléatoires distribuées suivant la loi exponentielle . . . . .	40
2.2.3	Processus télégraphique . . . . .	41
2.3	Distribution des longueurs efficaces $X_\omega(x)$ . . . . .	43
2.3.1	Etude des longueurs efficaces $X_\omega(x)$ . . . . .	45
2.3.2	Distribution de $X_\omega(x)$ , $x$ fixé . . . . .	46
2.3.3	Densité de probabilité de $\mathbf{X}_\omega(x)$ . . . . .	57

2.4	Comportement de la distribution en variant $x$ . . . . .	57
2.4.1	Variations de la densité de probabilité $f^x(\ell)$ . . . . .	58
2.4.2	Autre propriété de la densité de probabilité $f^x(\ell)$ . . . . .	59
2.5	Conclusion . . . . .	59
<b>3</b>	<b>Statistique des réalisations (à <math>x</math> fixé)</b>	<b>60</b>
3.1	Réalisations du processus et solutions associées . . . . .	63
3.2	Equation de la moyenne stochastique . . . . .	67
3.3	Propriétés de la famille de fonctions	
	$\{\phi_\ell(t), x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}\}$ . . . . .	71
3.3.1	Frontière inférieure $K_\gamma^-$ de $\mathcal{V}_\gamma$ . . . . .	76
3.3.2	Frontière supérieure $K_\gamma^+$ de $\mathcal{V}_\gamma$ . . . . .	77
3.4	Comparaison des réalisations à la moyenne . . . . .	80
3.4.1	Position de la moyenne $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ par rapport à $K^-(t)$ et $K^+(t)$ . . . . .	81
3.4.2	Moyenne et réalisations . . . . .	82
3.5	Comparaison des réalisations à $\phi_{\bar{X}(x)}$ . . . . .	86
3.5.1	Diamètre $\delta(\gamma)$ . . . . .	87
3.5.2	Probabilité $P^x(\gamma)$ . . . . .	90
3.5.3	$\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ et les réalisations . . . . .	91
3.6	Comportement pour des positions différentes . . . . .	93
3.6.1	Evolution de la probabilité avec $x$ . . . . .	93
3.6.2	Evolution de la précision avec $x$ . . . . .	96
3.7	Conclusions . . . . .	98

<b>4 Conclusion générale</b>	<b>99</b>
4.1 Conclusion générale . . . . .	99
<b>5 Annexes</b>	<b>102</b>

# Table des figures

1.1	Allure de la concentration, résultat expérimental [13] . . . . .	24
1.2	Réalisation du milieu poreux . . . . .	26
2.1	Milieu poreux à petite échelle . . . . .	33
2.2	Volume élémentaire de milieu poreux . . . . .	35
2.3	Réalisation du processus télégraphique . . . . .	39
2.4	Une réalisation du processus $\varepsilon_\omega(x)$ . . . . .	42
2.5	Réalisations de la longueur efficace . . . . .	45
2.6	Fonction de répartition $F^x(\ell)$ pour $x = 0.2, x = 3, x = 30, x = 300$ . . . . .	56
2.7	Variations de $f^x(\ell)$ fonction de $\ell$ pour différentes valeurs de $x$ . . . . .	58
3.1	Voisinage autour de $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ . . . . .	63
3.2	Une réalisation de la porosité . . . . .	63
3.3	Point d'intersection de la courbe de $\phi_\ell(t)$ avec celle de $\phi'_\ell(t)$ . . . . .	73
3.4	Graphes de $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega(-)$ , de $K^+(t)$ (-) et de $K^-(t)$ (-) . . . . .	82
3.5	Comparaison de la moyenne $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ (—) à $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ (- - -) . . . . .	84
3.6	Graphes de $\phi_\ell(t)$ (courbes) et $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ (lignes horizontales) pour différentes valeurs du temps $t$ ; $t_1 = 3(\dots), t_2 = 12(- - -), t_3 = 50(-), \frac{x^2 \varepsilon_2}{2D} = 5, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D} = 45, x\sqrt{\varepsilon_2} = 1.58$ (première ligne verticale), $x\sqrt{\varepsilon_1} = 4.74$ (deuxième ligne verticale) . . . . .	86

3.7	Variation de $P^x(\gamma)$ en fonction de $\gamma$ , $x = 5$ ( $\gamma_0 = 0.385$ , $p_0 = 0.7$ ) . . . . .	93
3.8	Variation de $\tilde{P}^x(\tilde{\gamma})$ en fonction de $\tilde{\gamma}$ , pour différentes valeurs de $x$ ( $x$ croissant du bas vers le haut) . . . . .	95
5.1	Évolution de $g_\lambda(t)$ en fonction de $\lambda$ . . . . .	108

# Chapitre 1

## INTRODUCTION

### 1.1 Introduction

Les recherches actuelles s'intéressent de très près à l'étude des écoulements dans les milieux poreux. Les disciplines de grandes importances telles que la mécanique des sols, et la mécanique des roches, l'hydrogéologie et la géophysique ne peuvent ignorer ces études. Des secteurs industriels de grands poids économiques comme ceux du génie civil ou de l'industrie pétrolière sont largement tributaires des méthodes d'étude et de calcul concernant des structures poreuses. L'étude des propriétés des milieux poreux et des écoulements de fluides qui peuvent s'y produire fait l'objet de beaucoup d'axes de recherche théoriques et expérimentaux. Les milieux poreux constituent des systèmes extrêmement complexes de par leur géométrie et leur structure. Par conséquent, l'étude des phénomènes de transport dans ces milieux présente des difficultés particulières qui portent en effet dans ses applications sur des systèmes en général très étendus et très variés, tant par leur forme que par leur constitution. Cette diversité favorise de larges variations dans les propriétés physiques de la matrice solide et parfois aussi dans celle

des fluides. E. Redeal [1] a essayé de donner quelques caractéristiques des matériaux poreux mais il a conclu qu'il ne peut définir de façon précise un milieu poreux et qu'il n'y a qu'une définition générale qui s'applique à une grande variété de milieux poreux. Effectivement, la difficulté d'attribuer à un milieu poreux donné des caractéristiques particulières est liée à la complexité de la géométrie des surfaces solides qui agissent comme des frontières sur l'écoulement fluide dans l'espace vide. Pour cela, les travaux sur la modélisation des écoulements à travers les lits poreux demeurent insuffisants à cause des difficultés physiques rencontrées pour modéliser ces phénomènes complexes et des difficultés mathématiques pour manipuler les calculs qui en découlent.

Par ailleurs, la recherche dans les milieux poreux s'est bien développée ces dernières années avec l'apport de moyens expérimentaux importants et des méthodes numériques de plus en plus puissantes et rapides. Les problèmes des écoulements et des échanges dans ces milieux ont attiré l'attention des industriels, des ingénieurs et des chercheurs dans plusieurs disciplines telles que les mathématiques, la chimie, la mécanique, etc...

Le phénomène de diffusion occupe une place très importante dans les recherches menées dans les milieux poreux depuis plusieurs décennies. Parmi les premiers travaux effectués dans ce domaine, on cite Taylor [2] qui a traité le problème de la diffusion d'une matière soluble dans un solvant en écoulement dans un tube. Il a montré que la dispersion du soluté dépend de la diffusion moléculaire et de la vitesse de l'écoulement dans le tube, que la concentration du soluté produite en tenant compte de ces deux paramètres est centrée autour d'un point du fluide qui se déplace avec la vitesse moyenne de l'écoulement et sa distribution le long du tube est gouvernée par un coefficient de diffusivité  $K$ . Le calcul de ce facteur nous permet de remonter au calcul du coefficient de diffusion moléculaire

$D$  par  $K = \frac{a^2 v^2}{48D}$  où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement et  $a$  le rayon du tube. Plus tard, l'auteur [3] a déterminé la condition sous laquelle la solution approximée de l'équation de la diffusion est utilisée pour mesurer le coefficient de diffusion longitudinale du soluté injecté dans le solvant ; cette condition est :  $\frac{4L}{a} \gg \frac{va}{D} \gg 6.9$ . où  $v$  est la vitesse moyenne de l'écoulement et  $a$  le rayon du tube,  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire,  $L$  la longueur du tube à partir de laquelle apparaissent des variations importantes de la concentration. Les travaux de Taylor continuent à intéresser les chimistes et surtout les biologistes.

P.G. Saffman [4] s'est intéressé à l'étude de la dispersion d'un scalaire passif dans un fluide traversant un milieu poreux. Le milieu est considéré comme un assemblage de tubes droits orientés de façon aléatoire, il suppose que le chemin d'une quantité de scalaire se compose d'un ensemble d'étapes statistiquement indépendantes dont la direction et la durée changent de façon aléatoire. Il a calculé la densité de probabilité pour le déplacement d'un élément marqué simple ainsi que la concentration du traceur dispersé. Le cas examiné est celui d'un écoulement satisfaisant la loi de Darcy (i.e. la vitesse moyenne est linéairement proportionnelle au gradient moyen de pression), et la diffusivité moléculaire est suffisamment petite pour que la dispersion soit principalement due à l'aspect aléatoire des lignes de courant, sans pour autant négliger complètement les effets de la diffusion moléculaire. Il a montré que la dispersion longitudinale dans la direction de l'écoulement moyen peut être décrite asymptotiquement par une diffusivité effective qui est une fonction de  $v$ ,  $L$ ,  $a$ ,  $\kappa$  et  $T$ . ( $v$  dénote la vitesse moyenne,  $L$  la longueur du tube,  $a$  le rayon de tube qui est lié à la perméabilité,  $\kappa$  est le coefficient de la diffusion moléculaire, et  $T$  est l'instant initial). Des expressions pour le coefficient de diffusion

longitudinale  $\kappa_\ell$  sont obtenues selon les valeurs relatives de  $\frac{L}{v}$ , de  $T$ , de  $t_0 = \frac{L^2}{2\kappa}$  et de  $t_1 = \frac{a^2}{8\kappa}$ . C'est à dire que, quand  $t_0 \gg T \gg \frac{L}{v}$ ,  $\frac{\kappa L}{vL}$  est une fonction logarithmique de  $\frac{vT}{L}$  qui croît avec T et quand  $T \gg t_0 \gg \frac{L}{v}$ , qui correspond au petit  $\kappa$ ,  $\frac{\kappa L}{vL}$  est une fonction logarithmique de  $\frac{vL}{\kappa}$  indépendant de T.

Ses résultats théoriques sont comparés aux données expérimentales rapportées dans la littérature et l'accord approximatif est obtenu quand  $L$  est égal au diamètre moyen des particules composant le milieu poreux.

La dispersion latérale dans la direction perpendiculaire à celle de la vitesse moyenne s'avère être régie asymptotiquement par une diffusivité effective ( $k_L = \frac{3}{16}vL$ ). Cependant, il précise que certaines hypothèses, à savoir que les étapes successives du chemin des particules du traceur sont statistiquement indépendantes et que les propriétés statistiques du déplacement d'une particule du traceur entraîne immédiatement la dispersion d'un nuage de traceur, peuvent ne pas être valides pour la dispersion latérale. Ce qui rend le dernier résultat suspect.

Il a étudié la dispersion du traceur pour des valeurs élevées du nombre de Reynolds  $\frac{vL}{\nu}$  ( $\nu$  = viscosité cinématique) quand la loi de Darcy n'est pas vérifiée, il constate que  $\frac{\kappa L}{vL}$  diminue à mesure que  $\frac{vL}{\nu}$  augmente.

Harleman et Rumer [5] ont étudié la diffusion dans un milieu poreux isotrope. Ils ont calculé les coefficients de diffusion longitudinal  $D_1$  et latéral  $D_2$  pour un écoulement laminaire uniforme. Ils ont décrit la méthode expérimentale utilisée. Ils ont trouvé que le rapport des deux coefficients de diffusion est donné par  $\frac{D_1}{D_2} = \lambda \mathcal{R}^n$  où  $\lambda$  et  $n$  sont des coefficients adimensionnels qui dépendent de la géométrie des pores et  $\mathcal{R}$  est le nombre de Reynolds dépendant de la vitesse de l'écoulement, du diamètre des grains et de la viscosité

cinématique du fluide.

D. L. Koch et J.F. Brady, [6], se sont intéressés à l'étude du transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux constitué de particules fixées en des positions qui sont distribuées de façon aléatoire et ils ont considéré la vitesse moyenne de l'écoulement constante. Ils ont étudié les effets des particules sur le comportement dispersif du lit poreux pour toutes les valeurs du nombre de Peclet et dans le cas des lits poreux de porosité élevée. Ils ont démontré que cette dispersion induite par les particules est vraiment diffusive c'est à dire que la diffusivité effective est indépendante du temps et de l'espace ; elle est constante dans la limite des temps grands pour le champ de concentration moyen lentement variable. L'analyse asymptotique leur a permis d'élucider les mécanismes physiques fondamentaux causant la dispersion et de prévoir la dépendance de la diffusivité du nombre de Peclet même dans les milieux poreux qui ne satisfont pas la condition de porosité élevée. Les mêmes auteurs [7] ont étudié la diffusion d'un traceur dans les milieux hétérogènes. Ils ont examiné le comportement pour des temps grands, du champ de concentration. Ils ont déterminé les conditions sous lesquelles la concentration obéit à la loi de Fick. En effet quand la longueur de corrélation des fluctuations de la porosité est finie, la diffusion normale avec un déplacement quadratique moyen qui croît linéairement avec le temps est obtenue pour des temps longs. Cependant, quand la longueur de corrélation diverge, c'est la diffusion anormale qui l'emporte. Dans le cas où la diffusion est anormale, les auteurs ont observé les profils de la concentration. Ces derniers sont non gaussiens et bimodaux. Ceci a été observé dans les résultats expérimentaux [8]. Ce dernier résultat traduit la nature ondulatoire de la loi de conservation de masse c'est à dire que quand la diffusion est anormale, l'équation de conservation de la masse est tout simplement une équation

des ondes.

S. Revathi et V. Balakrishnan [9] ont considéré le problème de détermination analytique de la constante de diffusion effective  $D_{eff}$  pour la diffusion dans un milieu non homogène décrite par l'équation  $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D(x)\frac{\partial P}{\partial x})$  avec un coefficient de diffusion dépendant de la position  $D(x)$ . Ils ont utilisé deux définitions différentes pour  $D_{eff}$ . La première relative au comportement de la variance à des temps longs :  $D_{eff} = \mathcal{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (\Delta x)^2 \rangle / 2t$ . La deuxième relative au comportement pour des grandes distances du temps moyen définit par  $T(\pm x/0)$  comme étant le temps mis pour partir de l'origine et atteindre les positions  $\pm x$  :  $D_{eff} = \mathbb{D} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2T(\pm x/0)}$ . En général,  $\mathcal{D} \neq \mathbb{D}$ . Ils ont trouvé une formule exacte pour  $\mathbb{D}$ . Ils ont examiné plusieurs cas spéciaux : Si  $D(x)$  tend vers deux limites finies  $D_{\pm}$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$  alors  $\mathbb{D}$  est simplement la moyenne arithmétique  $\frac{D_+ + D_-}{2}$ . Dans le cas important où  $D(x)$  est périodique, ils ont trouvé que  $\mathbb{D}$  est la moyenne harmonique de  $D(x)$  sur une période et dans ce cas,  $\mathcal{D} = \mathbb{D}$ . Si  $D(x)$  est constante par morceaux de façon arbitraire, avec un nombre fini de discontinuités et tendant vers  $D_{\pm}$  quand  $x$  tend vers  $\pm\infty$ , alors  $\mathbb{D} = \frac{D_+ + D_-}{2}$  par contre  $\mathcal{D} = (D_+ D_-)^{1/2} + (1 - 2/\pi)(D_+^{1/2} - D_-^{1/2}) \leq \mathbb{D}$ . Ils ont aussi étudié les effets de l'inhomogénéité sur  $D_{eff}$ .

P. Indelman [10] a formulé la loi de Darcy effective reliant la vitesse moyenne au gradient de la pression moyenne. Dans l'espace de Fourier-Laplace, la loi de Darcy moyenne est donnée par une relation linéaire locale. Le coefficient de proportionnalité dépend seulement de l'hétérogénéité du milieu et il est appelé tenseur de conductivité effectif. Dans l'espace physique, la relation a une structure non locale et définit la conductivité comme un opérateur intégral de type convolution en temps et en espace. La pression

moyenne satisfait une équation intégro-différentielle.

K.R. Westerterp et ses collaborateurs [11] ont trouvé une autre approche pour modéliser le problème de la diffusion. Ils considèrent que la loi de Fick qui traduit la proportionnalité entre le flux et le gradient de la concentration  $j = -D \frac{\partial c}{\partial x}$  n'est pas suffisante pour décrire la diffusion dans les réacteurs chimiques. Ils la remplacent par la loi de Maxwell qui s'écrit  $(1 + k\tau)j + \tau \frac{\partial j}{\partial t} + \tau v \frac{\partial j}{\partial x} = -D \frac{\partial c}{\partial x}$  où  $j$  est le flux de particules de colorant,  $c$  est sa concentration et  $D$  est le coefficient de diffusion,  $k$  représente le taux de perte des particules, et  $\tau$  est le temps de relaxation des particules. Dans leur article ils expliquent pourquoi le modèle standard pour la diffusion (modèle de Fick) échoue dans beaucoup d'applications pratiques. Leur travail a démarré de l'expérience de Hiby [12] qui montre comment évolue un traceur injecté de façon continue en un point dans un milieu poreux. Ce dernier a montré que le traceur évolue tout en restant à l'intérieur d'une enveloppe parabolique. Ce qui veut dire qu'il existe des endroits dans le tube où le traceur ne passe pas alors que la loi de Fick, elle, prévoit la présence du traceur dans tout le tube.

P. Legentilhomme, J. Lagrand et J. Comiti [13] ont fait une étude expérimentale de la dispersion axiale ( dispersion radiale négligée) dans un écoulement d'électrolyte à travers un lit de particules parallélépipédiques (Packed bed composed by flat plates). Ce choix de milieu est fait pour simuler les réacteurs utilisés dans l'industrie de fabrication du papier (lit de particules en bois). Pour tester leur expérience, les auteurs ont utilisé un lit constitué de sphères en verre. Ils ont calculé les coefficients de diffusion axiale pour différents débits de l'écoulement. Ils ont ensuite utilisé un lit de particules parallélépipédiques. Ce type de lit sont des milieux poreux très anisotropes. Pour faire ce travail, les auteurs ont

utilisé la méthode polarographique et les coefficients de diffusion sont obtenus en fonction de la vitesse de l'écoulement et des paramètres géométriques des particules. Le résultat important auquel ils ont abouti est que la dispersion axiale est beaucoup plus importante dans les lits constitués de particules parallélépipédiques que dans les lits de particules sphériques qui sont des milieux poreux isotropes.

G. Erochenkova et R. Lima [14] ont étudié l'équation de diffusion pour la concentration d'un traceur, injecté dans un lit poreux irrégulier, en fonction du temps et de la position axiale. Ils ont considéré un modèle de porosité stochastique  $\varepsilon_\omega(x)$  dépendant de la coordonnée spatiale  $x$ . Ils ont montré que dans le cas où la fonction de corrélation du processus stochastique  $\varepsilon_\omega(x)$  est décroissante, le théorème de moyennisation est appliqué. C'est-à-dire que loin du point d'injection du traceur, la concentration pour chaque réalisation est proche de la moyenne des solutions par rapport au processus. L'étude a été faite dans le cas d'un processus télégraphique. Ils ont établi l'équation pour la moyenne effectuée par rapport à ce processus. Dans le cas où le coefficient de diffusion est nul, l'équation de diffusion initiale est une équation d'onde. L'équation de la moyenne, dans ce cas, présentant un terme supplémentaire : terme de dérivée seconde par rapport au temps. Le terme source présent dans l'équation initiale reste présent dans l'équation de la moyenne mais il devient petit pour les valeurs de la coordonnées spatiale  $x$  grandes par rapport à la longueur de corrélation  $\lambda = \frac{1}{\nu}$ ;  $\nu$  est le paramètre du processus télégraphique. Dans le cas général où le coefficient de diffusion est non nul, la structure de l'équation de la moyenne est plus compliquée. Dans un article plus récent [15], ces derniers auteurs ont utilisé une technique plus générale en utilisant une formule dite de différentiation "formulas of differentiation" qui leur a permis de simplifier l'équation de

la moyenne et d'aboutir à une équation de diffusion fractionnaire pour des temps grands. C'est à dire ils retrouvent une équation qui est l'équation de la diffusion de Fick avec un terme supplémentaire de dérivée fractionnaire en temps.

M.C. Néel et K. Logvinova [16], [17] ont aussi étudié la diffusion d'un traceur injecté dans un milieu poreux. Ces auteurs se sont inspiré du modèle de [15]. Ils suggèrent un modèle simple pour un milieu hétérogène dans lequel diffusent des particules. Il est basé sur l'équation aux dérivées partielles habituellement utilisée pour la diffusion normale ; les hétérogénéités du milieu sont prises en compte en remplaçant les coefficients qui, en général peuvent dépendre de la position  $x$ , par des processus stochastiques. Comme ils estiment que la démarche a plus de sens lorsqu'ils peuvent la relier à une sorte d'échantillonnage associé à la structure géométrique du milieu désordonné, alors dans cet esprit, ils considèrent plus particulièrement deux structures. L'une d'elles correspond à un milieu dont la matrice solide est composée d'agrégats à peu près sphériques (qu'ils appellent milieu poreux et la porosité dans ce cas est prise comme processus stochastique) et l'autre correspond à un milieu fait de tubes entrelacés autour d'une direction générale (qu'ils appellent milieu tubulaires. Dans ce cas c'est la pente des tubes qui est considérée comme un processus stochastique). ils ont abouti aux résultats suivants : ils ont établi les équation pour le transfert de masse en milieux poreux ou tubulaire. Ont utilisé la méthode des dérivées fonctionnelles, celle des approximations successives et la technique des diagrammes pour des milieux décrits par des processus Gaussiens qui leur ont permis d'établir l'équation pour la moyenne. Dans les deux cas de figure, l'équation trouvée est fractionnaire. L'analyse des solutions de ces équations, leur a permis de départager l'axe des temps en deux domaines l'un où la diffusion est normale et l'autre où elle est anormale.

C'est à dire que dans le cas du milieu poreux constitué d'obstacles sphériques, la diffusion est normale si  $t \ll \tau = (\frac{\chi(1-D'^2)}{D'})^2$  et est anormale si  $t \gg \tau = (\frac{\chi(1-D'^2)}{D'})^2$  où  $\chi = \frac{\lambda}{x_0}$ ,  $D' = (1 - \zeta)$ ,  $\lambda$  est la longueur de corrélation,  $x_0$  position où est injecté le soluté et  $\zeta$  est le rapport du carré de l'amplitude des fluctuations  $a_0^2$  et du carré de la moyenne de la porosité  $\bar{\varepsilon}^2$ . Dans le milieu tubulaire la diffusion est normale si  $t \ll \frac{4\zeta \frac{\ell}{x_0}}{(1-\zeta)^2(1+\zeta)^{1/2}}$  et est anormale si  $t \gg \frac{4\zeta \frac{\ell}{x_0}}{(1-\zeta)^2(1+\zeta)^{1/2}}$  ici  $\zeta$  est le rapport du carré de l'amplitude des fluctuations  $a_0^2$  et du carré  $\bar{\xi}^2 = \cos^2\theta$  où  $\theta$  est l'angle entre la tangente au tube et l'axe  $Ox$ .

L'importance des réacteurs à lits empilés, "Packed bed Reactors", en chimie industrielle a engendré beaucoup de travaux sur la dispersion axiale ces quelques dernières décennies. Cependant il n'y a pas eu de consensus sur la modélisation des écoulements dans les milieux poreux, plus particulièrement dans le cas d'un écoulement liquide. Ces fluctuations sont décrites par une loi analogue à la loi de la diffusion de Fick où on utilise un coefficient de diffusion effectif,  $D_{eff}$ , à la place du coefficient de diffusion de Fick. La concentration  $U$ , du colorant injecté de façon uniforme sur une section du lit poreux est donnée, dans le cas unidimensionnel, comme une fonction du temps  $t$ , et de la position axiale  $x$  par l'équation suivante :

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D_{eff} \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - v \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} \quad (1.1)$$

où  $v$  représente la vitesse de l'écoulement.

Le coefficient de diffusion axiale,  $D_{eff}$  est supposé indépendant de la concentration  $U$  et de la position  $x$ . La dispersion axiale est due aux effets combinés de la diffusion moléculaire et de la diffusion des remous. Dans le cas d'un écoulement d'un gaz, Edwards et Richardson [19] ont proposé l'expression suivante :

$$D_{eff} = 0.73D_F + \frac{0.5vd_p}{1 + 9.7D_F/vd_p} \quad (1.2)$$

Où  $D_F$  est le coefficient de diffusion de Fick et  $d_p$  est le diamètre des particules.

Contrairement au cas d'un écoulement gazeux, la diffusion moléculaire dans un liquide peut être négligée; ceci est expliqué par [19] par une différence dans les ordres des magnitudes des diffusivités respectives. Le coefficient de diffusion effectif peut être donné dans ce cas par la relation :

$$D_{eff} = \frac{1}{2}vd_p \quad (1.3)$$

qui correspond au terme de diffusion des remous de l'équation précédente.

En pratique, les coefficients de diffusion sont plus grands que ceux calculés par les équations précédentes. Les auteurs ont expliqué ce résultat par le fait que la dispersion est contrôlée par le régime laminaire de l'écoulement, situation qui apparaît rarement dans les systèmes gazeux car l'influence de la diffusion moléculaire est importante en dessus des valeurs modérées du nombre de Reynolds.

Dans la revue de C. Y. Wen et L. T. Fan [20], il a été montré que, dans beaucoup de travaux répertoriés, le coefficient de diffusion peut s'exprimer :

$$D_{eff} = \alpha v^m \quad (1.4)$$

avec  $0.8 \leq m \leq 1.2$  et le paramètre  $\alpha$  dépend du type de particules constituant le milieu poreux.

Dans la littérature beaucoup de travaux ont considéré des particules sphériques, ou des emballages industriels (empilements de tubes, d'anneaux, etc ...) utilisés dans les opérations de transfert de masse. Dans la plupart de ces cas, les auteurs se réfèrent à une porosité :  $\varepsilon = \frac{S_{vide}}{S_{totale}}(x)$ , moyenne constante tout au long du milieu poreux et donc le caractère irrégulier du milieu est pris en compte au prix d'un ajustement

phénoménologique du coefficient de diffusion [9],[6]. Ceci a conduit à une solution Gaussienne en  $x$ . Or, comme on le verra, ceci est en contradiction avec les mesures expérimentales, voir par exemple [13]. Dans les lits de sphères irrégulières il a été montré que la porosité est très irrégulière dépendant de la variable d'espace. Dans [14],[15], elle est prise comme un processus stochastique télégraphique et la concentration du colorant dans le milieu poreux est étudiée comme fonction du temps et de la position axiale. Il a été montré, sous certaines conditions physiques raisonnables, que le théorème de la moyennisation pour les longueurs  $L$  du conduit suffisamment grandes est applicable dans ce modèle; c'est à dire que loin de l'entrée de la colonne poreuse, les concentrations mesurées sont proches de la moyenne stochastique. Les équations d'évolution de la moyenne sont calculées dans les cas  $D = 0$  et  $D \neq 0$  pour les conditions au bord  $U(0, t) = f(t)$  et  $U(0, t) = U_0$ . Dans tous les cas, les équations trouvées diffèrent de l'équation de la diffusion de Fick par un terme supplémentaire de diffusion temporelle (terme de dérivée fractionnaire en temps) [14],[15]. Les deux travaux ont abouti à un résultat important : la valeur moyenne de la concentration effectuée par rapport au processus stochastique subit les irrégularités du milieu qui se sont traduites par l'apparition de ce terme supplémentaire dans l'équation de la diffusion. Ce résultat a conduit à un profil de la moyenne analogue à celui des résultats expérimentaux [13] (1.1). Mais la validité des hypothèses de ce résultat restent à étudier. En particulier, le résultat n'est valable que pour des temps grands (plus grands que  $\tau = (\frac{\chi(1-D'^2)}{D'})^2$ ) où  $\chi = \frac{\lambda}{x_0}$ ,  $D' = (1 - \sigma)$  sachant que  $\ell$  est la longueur de corrélation,  $x_0$  position où est injecté le soluté et  $\sigma$  est le rapport du carré de l'amplitude des fluctuations  $a_0^2$  et du carré de la moyenne de la porosité  $\bar{\varepsilon}^2$ . Or pour ces temps longs la diffusion gouvernée par les équations

fractionnaires redevient normale [17]. Par contre, pour des temps plus courts, là où la diffusion serait anormale, les approximations faites pour déduire l'équation fractionnaire ne sont plus mathématiquement justifiées. Le problème reste donc à étudier !

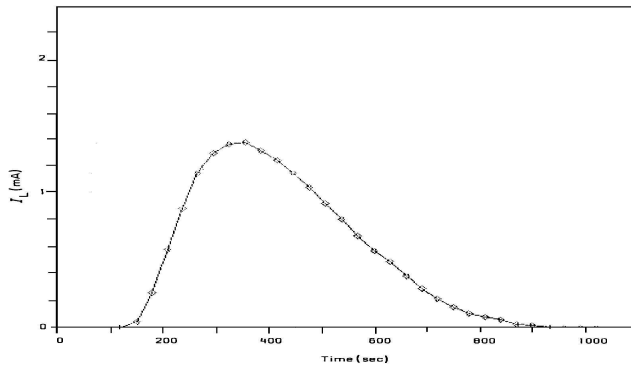


FIG. 1.1 – Allure de la concentration, résultat expérimental [13]

Dans ce chapitre, nous allons faire l'étude de la diffusion d'un colorant injecté dans un écoulement en milieu poreux irrégulier. Dans la première section, nous formulerons le problème dans le cas général. Dans la deuxième section, nous allons résoudre l'équation de la diffusion poreuse dans le cas où la porosité du milieu est prise uniforme, donc constante, le long du conduit. Nous finirons ce chapitre avec la section trois, où nous allons voir comment la comparaison de la solution trouvée, par un changement de variable, à une fonction, solution de l'équation de diffusion dans un milieu de porosité égale à 1, nous permet de faire apparaître une longueur que nous appellerons "longueur efficace" qui représente la longueur que doit parcourir le colorant dans le milieu où la porosité est égale à 1 pour atteindre la même concentration que dans le milieu où la porosité est  $\varepsilon$ .

## 1.2 Formulation du problème

Considérons un écoulement unidimensionnel dans un milieu poreux réalisé avec un empilement irrégulier de billes dans un tube. Si on injecte, à  $t = 0$  en une position  $x = 0$ , un colorant dans cet écoulement on observe [21] que le colorant avance dans la direction de l'écoulement et diffuse dans le milieu poreux. C'est un processus non stationnaire, irréversible ( en ce sens que la distribution initiale de la concentration du colorant ne peut pas s'obtenir en faisant un écoulement inverse). Soit  $U = U(x, t)$  la concentration du colorant au point de coordonnées longitudinale  $x$  et au temps  $t$ . Nous proposons un modèle pour étudier les variations de cette concentration dans le milieu poreux irrégulier.

Pour tenir compte de l'irrégularité du milieu poreux, nous considérons que sa porosité est un processus aléatoire dépendant de la variable spatiale  $x$  et de l'empilement des billes dans le tube. Pour une réalisation donnée de l'empilement nous obtenons une fonction  $\varepsilon(x)$  qui représente la porosité le long du tube. Rappelons que la porosité est définie comme le taux de vide sur une section  $x$  :  $\varepsilon = \frac{S_{vide}}{S_{totale}}(x)$

Une réalisation du milieu est représentée sur la figure 1.2.

La diffusion d'un colorant dans un milieu poreux est gouvernée par l'équation de diffusion de Fick qui s'écrit :

$$\varepsilon(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + v(x) \varepsilon(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} (D(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x}) \quad (1.5)$$

On approxime  $D(x) \simeq D = Cste$  en utilisant l'hypothèse des petites concentrations ; la loi de Bernouilli nous permet d'écrire  $\varepsilon(x)v(x) = v = Cste$  et l'équation de la diffusion poreuse devient alors :

$$\varepsilon(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + v \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (1.6)$$

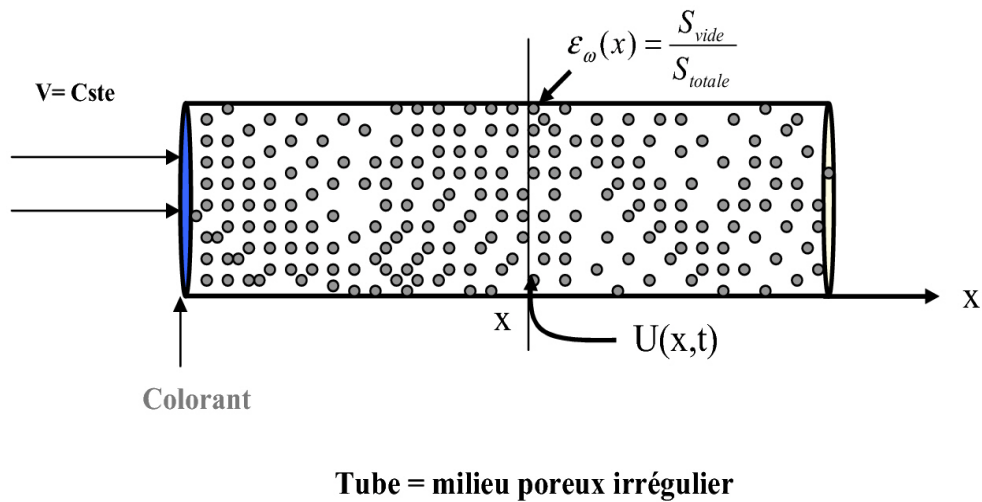


FIG. 1.2 – Réalisation du milieu poreux

Cette équation est assujettie à des conditions, initiale et au bord, qui traduisent le fait que la concentration du colorant injecté dans l'écoulement en  $x = 0$  est une fonction du temps et qu'à l'instant  $t = 0$  la concentration du colorant est nulle partout dans le tube. Ces conditions s'écrivent :

$$U(0, t) = f(t) \quad \text{et} \quad U(x, 0) = 0 \tag{1.7}$$

Où  $f(t)$  représente la concentration du colorant à l'entrée du tube.

Nous allons d'abord traiter le cas de porosité constante  $\epsilon(x) = \epsilon$ . Nous traiterons par la suite le cas où la porosité est modélisée par un processus (télégraphique)  $\epsilon_\omega(x)$ . Nous verrons comment se comportent les fluctuations des réalisations  $U_\omega(x, t)$ , par rapport à la valeur moyenne [14],[15]. Cette comparaison nous permettra de voir si la connaissance des propriétés de cette dernière suffit pour prévoir les mesures expérimentales.

### 1.3 Cas de la porosité constante

Si nous faisons l'hypothèse que la porosité du milieu poreux est constante,  $\varepsilon(x) = \varepsilon$ , nous aurons à résoudre l'équation :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + v \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = D \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (1.8)$$

avec les conditions initiale et au bord

$$\begin{aligned} U(0, t) &= f(t) & 0 < t < \infty \\ U(x, 0) &= 0 & 0 < x < \infty \end{aligned} \quad (1.9)$$

En faisant le changement de variable :

$$\tilde{U}(\tilde{x}, t) = \exp\left(-\frac{vx}{2D} + \frac{v^2 t}{4D\varepsilon}\right) U(x, t) \quad (1.10)$$

le système se transforme en

$$\begin{cases} \frac{\partial \tilde{U}}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 \tilde{U}}{\partial x^2} \\ \tilde{U}(0, t) = \exp\left(\frac{v^2 t}{4D\varepsilon}\right) f(t) = \tilde{f}(t) \\ \tilde{U}(x, 0) = 0 \end{cases} \quad (1.11)$$

avec

$$\alpha^2 = \frac{D}{\varepsilon} \quad (1.12)$$

Par la suite, nous noterons toujours  $U$  et  $f$  les nouvelles fonctions  $\tilde{U}$  et  $\tilde{f}$ .

**Lemme 1.3.1** *Si on soumet l'équation de la diffusion :*

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \alpha^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2}, \quad \alpha^2 = \frac{D}{\varepsilon} \quad (1.13)$$

*aux conditions, au bord et initiale :*

$$U(0, t) = f(t), \quad U(x, 0) = 0 \quad (1.14)$$

alors la solution de l'équation s'écrit

$$U_\varepsilon(x, t) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{e^{-\frac{x^2 \varepsilon}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} f(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

**Démonstration 1.3.1** En appliquant la transformée de Laplace par rapport au temps à

$U(x, t)$  que nous notons  $\bar{U}(x, q)$  définie par :

$$\bar{U}(x, q) = \int_0^\infty U(x, t) e^{-qt} dt \quad (1.16)$$

Le système d'équations à résoudre devient :

$$\int_0^\infty \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} e^{-qt} dt = \int_0^\infty a^2 \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} e^{-qt} dt \quad (1.17)$$

$$= U(x, t) e^{-qt} \Big|_0^\infty + q \int_0^\infty U(x, t) e^{-qt} dt = a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_0^\infty U(x, t) e^{-qt} dt \quad (1.18)$$

nous aboutissons donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{U}(x, q) - \frac{q}{a^2} \bar{U}(x, q) = 0 \quad (1.19)$$

avec les conditions aux limites :

$$\bar{U}(0, q) = F(q) \quad \text{avec} \quad F(q) = \int_0^\infty U(0, t) e^{-qt} dt \quad (1.20)$$

$$|\bar{U}(x, q)| < M \quad (1.21)$$

La solution s'écrit, dans ce cas :

$$\bar{U}(x, q) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{q}}{a} x} + C_2 e^{+\frac{\sqrt{q}}{a} x} \quad (1.22)$$

La solution doit satisfaire (1.21), et

$$\bar{U}(x, q) = C_1 e^{-\frac{\sqrt{q}}{a} x} \quad (1.23)$$

En utilisant la condition au bord, nous aurons :

$$\bar{U}(x, q) = F(q) e^{-\frac{\sqrt{q}}{a} x} \quad (1.24)$$

La solution du problème initial sera la transformée de Laplace inverse de  $\bar{U}(x, q)$  :

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \bar{U}(x, t) e^{qt} dq = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(q) e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x} e^{qt} dq \quad (1.25)$$

Pour calculer (1.25), nous allons utiliser la formule de Duhamell :

$$qF(q)G(q) = g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau \quad (1.26)$$

Où  $f(t)$  et  $g(t)$  sont les transformées de Laplace inverse de  $F(q)$  et  $G(q)$

1. Le cas le plus simple est quand  $f(t) = 1$  et donc  $F(q) = \frac{1}{q}$

$$\bar{U}(x, q) = \frac{1}{q} e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x} \quad (1.27)$$

et

$$U(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} \frac{1}{q} e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x} e^{qt} dq \quad (1.28)$$

En utilisant les tables des transformées de Laplace [22]

$$p^{-1}e^{-\sqrt{\alpha p}} = \text{Erfc}\left(\frac{1}{2}\alpha^{\frac{1}{2}}t^{-\frac{1}{2}}\right) \quad (1.29)$$

En utilisant la définition de  $\text{Erfc}(x)$  nous aboutissons à :

$$U(x, t) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t}}} e^{-\xi^2} d\xi \quad (1.30)$$

2. Pour une condition au bord quelconque  $F(q) = \int_0^\infty f(t)e^{-qt}dt$  nous pourrons écrire :

$$qF(q)\bar{U}(x, q) = qF(q)\frac{1}{q}e^{-\frac{\sqrt{q}}{a}x} = \bar{U}(x, q) \quad (1.31)$$

et donc

$$U(x, t) = g(0)f(t) + \int_0^t f(\tau)g'(t-\tau)d\tau = \frac{x}{2a\sqrt{\pi}} \int_0^t f(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}} \quad (1.32)$$

$$U(x, t) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{2\sqrt{\pi D}} \int_0^t f(\tau) \frac{1}{(t-\tau)^{-\frac{3}{2}}} e^{-\frac{x^2\varepsilon}{4D(t-\tau)}} \quad (1.33)$$

Nous constatons que la solution dépend, en plus des variables spatiale  $x$  et temporelle  $t$ , de la porosité  $\varepsilon$  du milieu poreux.

**Lemme 1.3.2** *Si la porosité du milieu est égale à 1, (milieu non poreux), la solution de l'équation de la diffusion (1.8) s'écrit :*

$$U_1(x, t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t \frac{e^{\frac{-x^2}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} f(\tau) d\tau \quad (1.34)$$

alors

1.

$$U_1^f(x\sqrt{\varepsilon}, t) = U_\varepsilon^f(x, t) \quad (1.35)$$

2.

$$U_1^f\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = U_\varepsilon^{f\varepsilon}(x, t) \quad (1.36)$$

où  $U_\varepsilon^f$  (respectivement  $U_\varepsilon^{f\varepsilon}$ ) est solution de l'équation (1.8) avec condition au bord  $U(0, t) = f(t)$  (respectivement  $U(0, t) = f_\varepsilon(t) = f(\frac{t}{\varepsilon})$ ).

### Démonstration 1.3.2

1.

$$U_1^f(x\sqrt{\varepsilon}, t) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t d\tau f(\tau) \frac{e^{\frac{-x^2\varepsilon}{4D(t-\tau\varepsilon)}}}{(t-\tau\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} = U_\varepsilon^f(x, t) \quad (1.37)$$

2.

$$U_1^f\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} d\tau f(\tau) \frac{e^{\frac{-x^2}{4D(\frac{t}{\varepsilon}-\tau)}}}{(\frac{t}{\varepsilon}-\tau)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.38)$$

qui nous donne

$$U_1^f\left(x, \frac{t}{\varepsilon}\right) = \frac{x\varepsilon^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^{\frac{t}{\varepsilon}} d\tau f(\tau) \frac{e^{\frac{-x^2\varepsilon}{4D(t-\tau\varepsilon)}}}{(t-\tau\varepsilon)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.39)$$

Posons  $y = t - \tau\varepsilon$  alors  $dy = -\varepsilon d\tau$  quand  $\tau = 0$ ,  $y = t$  et quand  $\tau = \frac{t}{\varepsilon}$ ,  $y = 0$  et

$$U_1^f(x, \frac{t}{\varepsilon}) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t dy f\left(\frac{t-y}{\varepsilon}\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dy}}}{y^{\frac{3}{2}}} \quad (1.40)$$

En remplaçant  $y$  par  $t - \tau$  dans l'équation précédente nous aboutissons à

$$U_1^f(x, \frac{t}{\varepsilon}) = \frac{x\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t d\tau f\left(\frac{\tau}{\varepsilon}\right) \frac{e^{-\frac{x^2}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \quad (1.41)$$

$$= f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) * \phi_x(t) \quad (1.42)$$

$$= f^\varepsilon(t) * \phi_x(t) \quad (1.43)$$

avec

$$f^\varepsilon(t) = f\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \quad (1.44)$$

et

$$\phi_x(t) = \frac{x}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (1.45)$$

## 1.4 Conclusion

La comparaison de  $U_\varepsilon^f(x, t)$  à  $U_1^f(x, t)$  a fait apparaître une longueur  $x\sqrt{\varepsilon}$  que nous appellerons "longueur efficace" qui représente en fait la longueur que devrait parcourir le colorant dans le milieu poreux si la porosité était  $\varepsilon = 1$  pour aboutir à la concentration  $U_\varepsilon(x, t)$ .

# Chapitre 2

## Un modèle de porosité stochastique

Dans ce chapitre, nous formulons l'équation pour la dynamique des particules de traceur passif dans les milieux poreux irréguliers. Dans ces milieux les particules diffusent entre des grains solides (par exemple des grains sphériques de différentes dimensions). Il est évident que cette diffusion dépend de la fraction volumique qu'occupent les grains dans le milieu. En gros, plus il y a des grains plus le coefficient de diffusion est petit. Dans le cas limite où il y a plus de grains il s'annule. Nous considérons un modèle où l'irrégularité du milieu est prise en compte en introduisant dans l'équation de la diffusion, un coefficient stochastique. C'est la porosité du milieu qui est un processus stochastique télégraphique. En plus de la détermination de l'équation du modèle, ce chapitre comporte quelques rappels de probabilités (loi exponentielle et processus télégraphique) qui sont des outils qui nous serviront dans l'étude des solutions de l'équation de la diffusion poreuse stochastique (équation de notre modèle). Motivés par le résultat du chapitre précédent, nous introduirons une nouvelle grandeur que nous notons,  $X_\omega(x)$ , qui est la longueur efficace. Nous verrons plus tard que les solutions de notre modèle sont des fonctions de cette grandeur, pour cela, nous consacrerons une grande partie de ce chapitre à l'étude

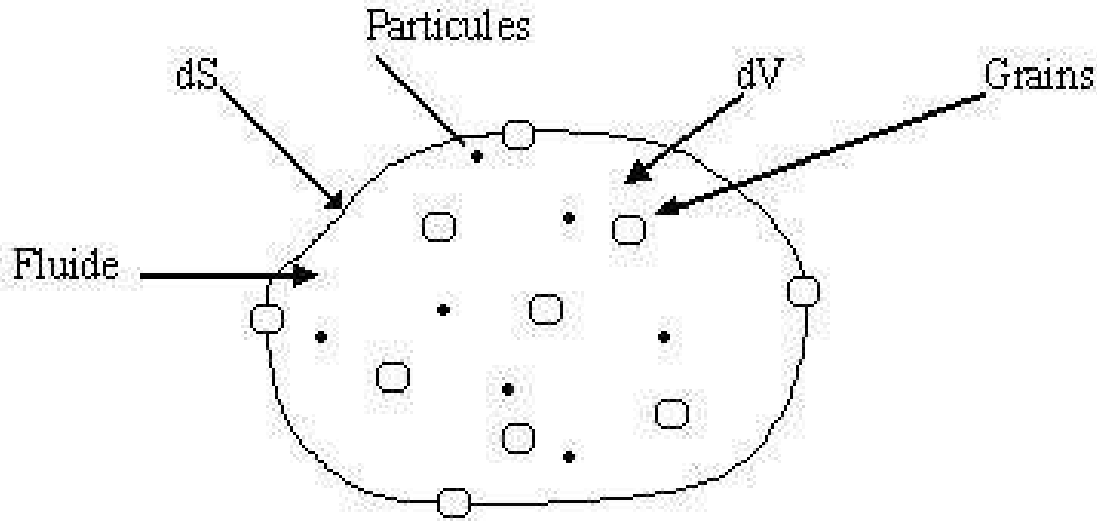


FIG. 2.1 – Milieu poreux à petite echelle

détaillée de sa distribution. Nous ferons cette étude, pour des positions  $x$  fixées dans le conduit poreux (nous décrirons la longueur efficace comme une variable aléatoire).

## 2.1 Equation du modèle

Imaginons un liquide occupant l'espace laissé par des grains solides remplissant un tube. Si ces grains sont distribués au hasard, nous avons un milieu poreux aléatoire. Si le fluide transporte des particules d'impuretés, ou aussi bien de traceur dilué, ces particules étant de nature différente des grains et beaucoup plus petites, elles diffusent dans un environnement modifié par la présence des grains (figure 2.1).

On est dans une situation analogue lorsqu'on étudie l'enveloppe refroidissant un réacteur nucléaire dans lequel on a un métal fondu, par exemple du plomb (le fluide) avec des grains de fer solide (ou d'alliages) et des impuretés de petite taille dans le fluide qui peuvent être des atomes de fer ou des complexes [23],[24]. Le transport de particules dans le plomb fondu en présence de grains solides est en fait un cas particulier de transport

dans un fluide avec des obstacles. Si la fraction volumique des grains est une fonction aléatoire de la position, on est tout simplement dans le cadre de la diffusion de particules dans un milieu aléatoire.

Supposons que les grains, de forme approximativement sphérique, constituent la matrice solide du milieu poreux. Si la fraction volumique de grains de rayon  $a$  a pour densité  $N(\vec{r}, a)$  où le vecteur  $\vec{r}$  repère un point, alors le volume occupé par les grains  $dV_{gr}$  dans l'élément de volume  $dV$ , est déterminé par l'expression

$$dV_{gr} = dV \int \frac{4}{3}\pi a^3 N(\vec{r}, a) da = dV.K(\vec{r}) \quad (2.1)$$

où  $K(\vec{r})$  est le volume de grains par unité de volume au point  $\vec{r}$ . Alors un élément de volume sans grains  $d\tilde{V}$  est la différence entre le volume total  $dV$  et le volume  $dV_{gr}$  occupé par des grains, c'est à dire

$$d\tilde{V} = dV - dV_{gr} = dV(1 - K(\vec{r})) = \varepsilon(\vec{r})dV \quad (2.2)$$

De plus, la quantité  $\varepsilon(\vec{r}) = \frac{d\tilde{V}}{dV} = (1 - K(\vec{r}))$  s'appelle porosité du milieu poreux. Comme le volume de grains  $dV_{gr}$  dans l'élément  $dV$  ne peut pas excéder  $dV$ , soit  $dV_{gr} \ll dV$ , il est évident, d'après (2.1), qu'on a  $0 \leq (1 - K(\vec{r})) \leq 1$ . Par conséquent, la porosité satisfait la même condition :  $0 \leq \varepsilon(\vec{r}) \leq 1$ . Le cas  $\varepsilon(\vec{r}) = 1$  correspond à l'absence de grains, cependant si  $\varepsilon(\vec{r}) = 0$ , au contraire l'espace est entièrement occupé par la matrice solide, et il n'y a pas de place pour le fluide, ni de possibilité de diffusion pour les impuretés.

Si nous construisons dans l'espace une surface aléatoire, elle croise certains grains. On peut montrer que l'aire libre qui n'est pas occupée par les grains dans la surface élémentaire est liée à son aire totale par la même relation que celle entre les volumes correspondants, à savoir  $d\tilde{S} = \varepsilon(\vec{r})dS$ . Pour vérifier ceci, considérons le cas d'une aire

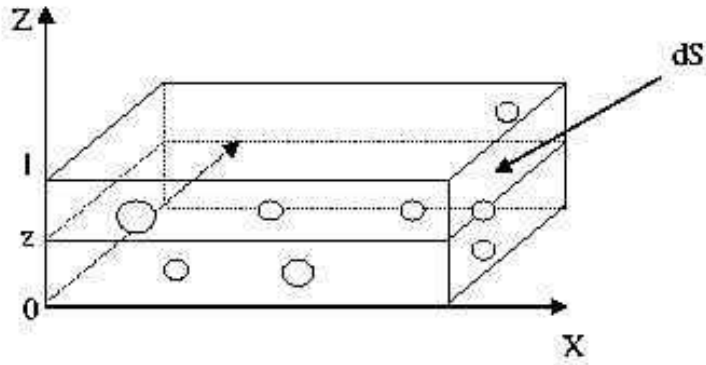


FIG. 2.2 – Volume élémentaire de milieu poreux

infiniment petite  $dS$  et construisons un parallélépipède de hauteur  $l$  (figure 2.2), avec l'axe  $OZ$  normal à la surface.

En vertu de (2.1), le volume rempli de grains est défini par  $dV_{gr} = K(\vec{r})\ell dS$ . Si nous coupons le parallélépipède avec un plan perpendiculaire à l'axe  $OZ$  au niveau  $z$ , alors ce plan croise certains grains. Notons  $dS_{gr}(z)$  l'aire commune au plan et aux grains. Le volume de grains dans le parallélépipède est relié à  $dS_{gr}(z)$  par la relation

$$dV_{gr} = \int_0^\ell dS_{gr}(z) dz. \quad (2.3)$$

L'aire sans grains dans le plan est alors égale à

$$d\tilde{V} = \int_0^\ell d\tilde{S}(z) dz. \quad (2.4)$$

Nous nous intéressons à l'aire élémentaire  $d\tilde{S}(z)$  aux échelles plus grandes que la taille caractéristique des grains, c'est-à-dire à  $\ell \gg a_0$  où  $\ell$  représente cette échelle, avec par exemple  $a_0 = 3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}$  pour un milieu fait de plomb liquide. Dans ce cas seules les surfaces moyennées par rapport à cette échelle ont un sens. Si nous moyennons  $d\tilde{S}(z)$  sur l'intervalle  $(0 \leq z \leq \ell)$ , nous obtenons

$$d\tilde{S} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell d\tilde{S}(z) dz = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell (dS - dS_{gr}(z)) dz = \frac{1}{\ell} [\ell dS - \int_0^\ell dS_{gr}(z) dz] = dS - \frac{dV_{gr}}{\ell} \quad (2.5)$$

Comme on a  $dV_{gr} = K(\vec{r}).\ell$ , nous obtenons finalement

$$d\tilde{S} = dS - K(\vec{r})dS = \varepsilon(\vec{r})dS \quad (2.6)$$

Ces arguments et, en particulier, les équations (2.2) et (2.6) permettent d'obtenir l'équation vérifiée par la concentration  $U(\vec{r}, t)$  de particules d'impuretés dans un volume sans grains. Dans un volume arbitraire  $V$  limité par la surface fermée  $S$ , la conservation du nombre total de particules permet d'écrire l'équation intégrale

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V U(\vec{r}, t) dV = - \oint_{\tilde{S}} \vec{j} dS \quad (2.7)$$

Au premier membre (à gauche) de (2.7) nous avons le taux de variation du nombre total de particules dans le volume  $V$ , et l'intégration ne porte que sur l'espace sans grains  $\tilde{V}$ . Le second membre (à droite) de l'équation est le flux de particules passant à travers la surface  $\tilde{S}$ , qui fait partie de la surface totale sans grains  $S$ . En fait, (2.7) tient compte de l'impossibilité pour les particules de traverser la surface des grains. En vertu de (2.2), de (2.6) et du Théorème d'Ostrogradsky-Gauss [25], (2.7) s'écrit sous la forme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \varepsilon(\vec{r}) U(\vec{r}, t) dV = - \int_S \vec{j} \varepsilon(\vec{r}) dS = - \int_V \text{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{j}) dV \quad (2.8)$$

où l'intégration porte sur le volume total  $V$ . Comme le volume est aléatoire, nous en déduisons

$$\varepsilon(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} + \text{div}(\varepsilon(\vec{r}) \vec{j}) = 0 \quad (2.9)$$

Si nous supposons que la loi de Fick s'applique à la densité de flux de particules dans l'espace sans grains, nous obtenons

$$\vec{j} = -D_F \nabla U(\vec{r}, t) \quad (2.10)$$

où  $D_F$  représente le coefficient de diffusion de Fick des particules dans le fluide et  $\vec{j}$  représente le flux de particules. Alors, à la place de (2.9) nous pouvons écrire

$$\varepsilon(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} - \text{div}(D_F \varepsilon(\vec{r}) \nabla U(\vec{r}, t)) = 0 \quad (2.11)$$

Si on note :

$$D_{eff} = D_F \varepsilon(\vec{r}) \quad (2.12)$$

(2.11) devient :

$$\varepsilon(\vec{r}) \frac{\partial U(\vec{r}, t)}{\partial t} - D_{eff} \nabla^2 U(\vec{r}, t) - \nabla D_{eff} \nabla U(\vec{r}, t) = 0 \quad (2.13)$$

Cette équation est à priori tridimensionnelle. Dans notre étude nous considérons un écoulement stationnaire unidirectionnel. L'équation (2.13) s'écrit :

$$\varepsilon(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} - D_F \varepsilon(x) \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} - D_F \frac{\partial \varepsilon(x)}{\partial x} \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0 \quad (2.14)$$

Si nous négligeons l'influence de la porosité du milieu sur le coefficient de diffusion effectif c'est à dire on prend  $D_{eff} = D_F \varepsilon(x) = D = cste$ . Dans ce cas, l'équation de la diffusion poreuse est réduite à :

$$\varepsilon(x) \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

utilisée dans [15]. Cette équation est assujettie à des conditions initiale et au bord qui traduisent le fait que la concentration du colorant injecté dans l'écoulement en  $x = 0$  est une fonction du temps et qu'à l'instant  $t = 0$  la concentration du colorant est nulle partout dans le tube. Ces conditions s'écrivent :

$$U(0, t) = f(t) \quad \text{et} \quad U(x, 0) = 0 \quad (2.16)$$

Où  $f(t)$  représente la concentration du colorant à l'entrée du tube. Une réalisation du milieu est représentée sur la figure 2.3.

Dans notre modèle, le transfert de particules s'effectue dans un milieu aléatoire, c'est-à-dire dans lequel la porosité est une fonction aléatoire que nous noterons  $\varepsilon_\omega(x)$ . Chaque réalisation correspond alors à un tube expérimental particulier avec une porosité égale à  $\varepsilon_\omega(x)$  où  $\omega$  représente une réalisation de ce tube. L'introduction de cette porosité est justifiée par l'impossibilité de connaître à l'avance la disposition de chaque grain dans le tube et donc sa fonction porosité spécifique. Bien sûr  $\varepsilon_\omega(x)$  sera choisie dans une famille de fonctions plausibles pour représenter la porosité dans chaque cas expérimental ainsi que pour des raisons mathématiques liées à la possibilité de calcul effectif.

Une réalisation de la porosité s'écrit sous la forme  $\varepsilon_\omega(x) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}_\omega(x)$ , où  $\tilde{\varepsilon}_\omega(x)$  est sa composante aléatoire alors que  $\varepsilon_0$  est sa moyenne qui, si nous supposons que le champ aléatoire est statistiquement homogène, ne dépend pas de la position  $x$ . Pour chaque réalisation du processus  $\varepsilon_\omega(x)$  nous aurons une équation :

$$\varepsilon_\omega(x) \frac{\partial U_\omega(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U_\omega(x, t)}{\partial x^2} = 0 \quad (2.17)$$

On fait remarquer que comme  $\varepsilon_\omega(x)$  est une fonction aléatoire, la solution  $U_\omega(x, t)$  de l'équation (2.17), est une fonction de  $\varepsilon_\omega(x)$  et par conséquent c'est aussi une fonction aléatoire.

Il est aussi important de noter que, pour chaque réalisation du processus  $\varepsilon_\omega(x)$ , l'équation (2.17) est un cas particulier de l'équation (2.15) avec une porosité  $\varepsilon_\omega(x)$ . Bien sûr, nous obtenons des équations, et donc des solutions, différentes pour des réalisations  $\omega$  différentes du processus.

Nous allons choisir un processus télégraphique pour modéliser  $\varepsilon_\omega(x)$  et une

réalisation possible de la porosité (une configuration possible du tube) correspond à une situation illustrée sur la figure (2.3) ci dessous.

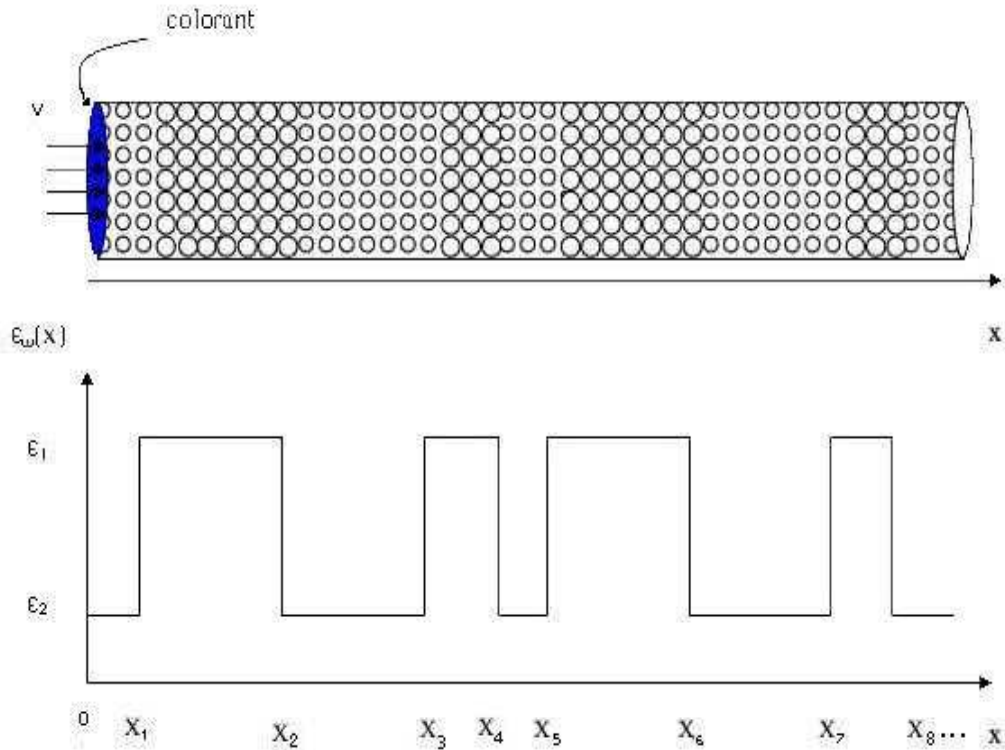


FIG. 2.3 – Réalisation du processus télégraphique

## 2.2 La loi exponentielle et le processus télégraphique

Nous allons étudier un modèle où la porosité est une fonction aléatoire télégraphique. Pour étudier les solutions de l'équation de la diffusion stochastique correspondante, nous aurons besoin de connaître les propriétés du processus. Comme ce dernier fait intervenir la loi de Poisson et la loi Exponentielle, on s'est donc proposé de faire un rappel de ces lois dans cette partie du chapitre 2.

### 2.2.1 Loi exponentielle

La loi exponentielle est définie par sa densité qui s'écrit :

$$p(x) = \nu e^{-\nu x}, \quad x \geq 0 \quad (2.18)$$

Si la variable aléatoire  $X$  est de loi exponentielle alors sa moyenne est  $\frac{1}{\nu}$  et sa variance est  $\frac{1}{\nu^2}$

### Fonction caractéristique de la loi exponentielle

Par définition la Fonction caractéristique  $f(t)$  d'une loi de probabilité c'est la transformée de fourier de sa densité  $p(x)$ . Dans le cas de la loi exponentielle nous avons :

$$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \nu e^{-\nu x} dx = \frac{\nu}{\nu - it} \quad (2.19)$$

### 2.2.2 Loi d'une somme de variables aléatoires distribuées suivant la loi exponentielle

La fonction caractéristique d'une somme de variables aléatoires indépendantes est égale au produit des fonctions caractéristiques des termes de cette somme.

$$f_{x_1+x_2+\dots+x_n}(t) = f_{x_1}(t) \cdot f_{x_2}(t) \dots f_{x_n}(t) \quad (2.20)$$

La fonction caractéristique d'une somme de  $n$  variables aléatoires de loi exponentielle est donc :

$$f_{x_1+x_2+\dots+x_n}(t) = \frac{\nu^n}{(\nu - it)^n} \quad (2.21)$$

En appliquant la transformée de Fourier inverse à cette fonction caractéristique nous trouvons la densité de probabilité de la somme de  $n$  variables aléatoires de loi

Exponentielle, soit  $h_n(x)$

$$h_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{x_1+x_2+\dots+x_n}(t) e^{-itx} dt = \frac{\nu^n x^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\nu x} \quad (2.22)$$

### 2.2.3 Processus télégraphique

Soient  $0 \leq \varepsilon_1 \leq \varepsilon_2 \leq 1$ ,  $\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2}$  et  $a_0 = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2}$

On définit

– Un ensemble  $\Omega$  (de toutes les réalisations) par :

$$\Omega = \{\omega : \omega = a_\omega; x_1^{(\omega)} < x_2^{(\omega)} < x_3^{(\omega)} \dots < x_n^{(\omega)} < \dots\} \quad (2.23)$$

où  $a_\omega = \pm a_0$  et les  $x_n$  sont des réels positifs

et

–  $N_\omega(0, x) \in \mathcal{N}$ , la fonction de comptage des événements (sauts) entre 0 et  $x$  dans

la réalisation  $\omega \in \Omega$ , par

$$N_\omega(0, x) = \max_n \{n : x_n^{(\omega)} < x\} \quad (2.24)$$

**Définition 2.2.1** Avec les notations (2.23) et (2.24), un processus aléatoire télégraphique

$\varepsilon_\omega(x)$  est défini par la formule :

$$\varepsilon_\omega(x) = \varepsilon_0 + (-1)^{N_\omega(0,x)} a_\omega, \quad \omega \in \Omega \quad (2.25)$$

où  $a_\omega$  est une variable aléatoire qui peut prendre deux valeurs  $+a_0$  et  $-a_0$  avec la probabilité égale à  $\frac{1}{2}$ ; et  $N_\omega(0, x)$  est distribuée suivant la loi de Poisson c'est à dire :

$$P\{\omega \in \Omega : N_\omega(0, x) = n\} = \frac{(\nu x)^n}{n!} e^{-\nu x} \quad (2.26)$$

Une réalisation du processus télégraphique est représentée sur la figure (2.4) ci dessous .

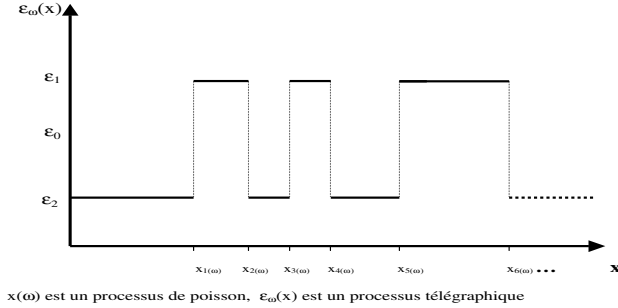


FIG. 2.4 – Une réalisation du processus  $\varepsilon_\omega(x)$

**Remarque 2.2.1** *La connaissance de la loi de  $N(0, x)$  entraîne celle du processus  $(x_n)_{n \geq 1}$*

*car :*

$$P\{\omega \in \Omega : x_1^{(\omega)} \leq \ell_1, x_2^{(\omega)} \leq \ell_2, \dots, x_n^{(\omega)} \leq \ell_n\} \quad (2.27)$$

$$= P\{\omega \in \Omega : N_\omega(0, x_1^{(\omega)}) \geq 1, N_\omega(0, x_2^{(\omega)}) \geq 2, \dots, N_\omega(0, x_n^{(\omega)}) \geq n\} \quad (2.28)$$

*Il est donc équivalent de se donner la loi du processus  $\varepsilon_\omega(x)$  par la loi de  $N(0, x)$  ou par celle des  $(x_n)_{n \geq 1}$ .*

**Définition 2.2.2** *Posons par convention,  $x_0 = 0$ . Soit  $\nu$  un réel strictement positif. Le processus  $(x_n)_{n \geq 1}$  est un processus de Poisson de paramètre  $\nu$  si les variables aléatoires  $(x_n - x_{n-1})_{n \geq 1}$  représentant la longueur entre discontinuités voisines, sont indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre  $\nu$ .*

**Remarque 2.2.2** *Le paramètre  $\nu$  a une interprétation physique importante : il représente le nombre moyen d'événements (de sauts) dans l'intervalle  $(0, 1)$ .*

$$\nu = \langle N_\omega(0, 1) \rangle_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\nu)^k}{k!} e^{-\nu} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{(\nu x)^k}{k!} e^{-\nu x} = \frac{\langle N_\omega(0, x) \rangle_\omega}{x} \quad (2.29)$$

## Propriété du processus télégraphique

### Espérance mathématique ou moyenne stochastique d'un processus télégraphique

La moyenne du processus télégraphique  $\varepsilon_\omega(x)$  par rapport à  $\omega$  est donnée par :

$$\langle \varepsilon_\omega(x) \rangle_\omega = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu x)^k}{k!} e^{-\nu x} = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2} = \varepsilon_0 \quad (2.30)$$

### Variance d'un processus télégraphique

$$\sigma^2 = \langle \varepsilon_\omega^2(x) \rangle - \langle \varepsilon_\omega(x) \rangle^2 = \frac{(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)^2}{4} = \varepsilon_0^2 \quad (2.31)$$

### Fonction de corrélation d'un processus télégraphique :

Soit  $x_1, x_2$  deux valeurs de la variable aléatoire  $x$ , ( $x_2 \geq x_1$ )

$$\langle \varepsilon_\omega(x_1) \varepsilon_\omega(x_2) \rangle = \varepsilon_0^2 + \langle a^2 (-1)^{N_\omega(0, x_1) + N_\omega(0, x_2)} \rangle = \varepsilon_0^2 + a_0^2 \langle (-1)^{N_\omega(x_1, x_2)} \rangle \quad (2.32)$$

$$= \varepsilon_0^2 + \frac{1}{4} (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \sum_{k=0}^{k=\infty} (-1)^k \frac{[\nu(x_2 - x_1)]^k}{k!} e^{-\nu(x_2 - x_1)} = \varepsilon_0^2 + a_0^2 e^{-2\nu(x_2 - x_1)} \quad (2.33)$$

**Remarque 2.2.3** *La corrélation décroît exponentiellement jusqu'à  $\varepsilon_0^2$  en fonction de la distance entre  $x_2$  et  $x_1$  et, d'autant plus rapidement que  $\nu$  est élevée.*

## 2.3 Distribution des longueurs efficaces $X_\omega(x)$

En généralisant le résultat du chapitre 1, nous allons voir que lorsqu'on injecte le colorant dans un milieu poreux de porosité  $\varepsilon_\omega(x)$  où  $\omega$  est une réalisation du processus télégraphique, la concentration en chaque position  $x$  à un instant  $t$ ,  $U_\omega(x, t)$ , serait atteinte dans un milieu de porosité  $\varepsilon = 1$  à la position  $X_\omega(x)$  que nous appellerons par conséquent

position efficace. Remarquons que  $X_\omega$  est lui même un processus aléatoire. Nous verrons au chapitre 3 que :

$$U_\omega(x, t) = U^1(X_\omega(x), t) \quad (2.34)$$

où  $U^1(y, t)$  est la solution de l'équation de la diffusion dans le milieu où  $\varepsilon = 1$  et  $X_\omega(x)$  est définie par :

$$X_\omega(x) = x_1^{(\omega)}\sqrt{\varepsilon_1} + (x_2^{(\omega)} - x_1^{(\omega)})\sqrt{\varepsilon_2} + \dots + (x - x_n^{(\omega)})\sqrt{\varepsilon_{k'}}, \quad (2.35)$$

pour  $x_n^{(\omega)} \leq x \leq x_{n+1}^{(\omega)} \quad \forall n \in \mathcal{N}, \omega \in \Omega$  déjà défini.

Commençons par étudier  $X_\omega$  dès maintenant.

D'abord nous allons étudier les variables aléatoires  $X_\omega(x)$ , avec  $x$  fixé. L'étude de la distribution de cette variable aléatoire est facilitée par une partition de  $\Omega$ , ensemble de toutes les réalisations.

Sachant qu'une réalisation  $\omega$  est une suite infinie de nombres réels positifs  $\omega = \{(a_\omega, x_1^{(\omega)}, x_2^{(\omega)}, \dots, x_k^{(\omega)}, \dots)\}$  on définit

1.  $\Omega_n^x$  comme le sous ensemble de  $\Omega$  qui comprend toutes les réalisations  $\omega$  telles qu'il y a  $n$  événements entre 0 et  $x$  (rappelons que  $x$  est fixé et chaque événement dans notre cas est un saut effectué par la porosité pour passer de la valeur  $\varepsilon_i$  vers l'autre valeur  $\varepsilon_j$ ).

$$\Omega_n^x = \{\omega \in \Omega : N_\omega(0, x) = n\} \quad (2.36)$$

Il faut remarquer que cet ensemble dépend de  $x$ . De plus

$$\Omega = \bigcup_{n=0}^{\infty} \Omega_n^x \quad (2.37)$$

2.  $\Omega^{\varepsilon_i}$  ensemble de toutes les réalisations  $\omega$  telles que la porosité démarre avec  $\varepsilon_i$
3.  $\Omega_n^{x,\varepsilon_i}$  ensemble de toutes les réalisations  $\omega$  telles que la porosité démarre avec  $\varepsilon_i$  et telles qu'il y a  $n$  événements entre 0 et  $x$ .
4.  $\Omega_{pair}^x = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_{2k}^x$  ensemble de toutes les réalisations  $\omega$  telles qu'il y a un nombre pair d'événements entre 0 et  $x$ .
5.  $\Omega_{impair}^x = \bigcup_{k=0}^{\infty} \Omega_{2k+1}^x$  ensemble de toutes les réalisations  $\omega$  telles qu'il y a un nombre impair d'événements entre 0 et  $x$ .

### 2.3.1 Etude des longueurs efficaces $X_\omega(x)$

Deux réalisations de ce processus sont représentées sur les courbes de la figure (2.5) ci dessous. La figure (a) représente une réalisation qui commence par  $\varepsilon_1$  et la figure (b), une réalisation qui commence par  $\varepsilon_1$ .

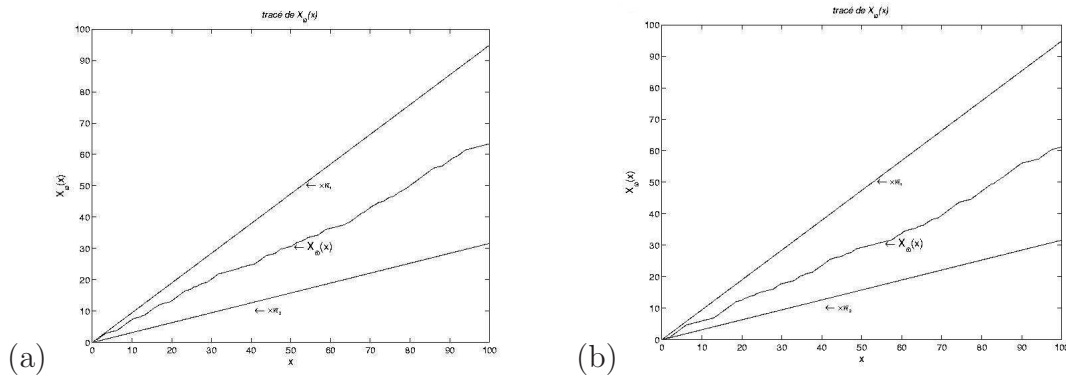


FIG. 2.5 – Réalisations de la longueur efficace

On remarque que ces courbes sont une suite de segments parallèles de façon alternée aux droites  $x\sqrt{\varepsilon_1}$  et  $x\sqrt{\varepsilon_2}$ . Ces segments correspondent aux intervalles où la porosité prend l'une ou l'autre des deux valeurs  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ . Comme  $\sqrt{\varepsilon_2} < \sqrt{\varepsilon_1}$ , il résulte facilement de la définition de  $X_\omega(x)$  que :

$$x\sqrt{\varepsilon_2} \leq X_\omega(x) \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \quad (2.38)$$

en effet

$$\begin{aligned} (x - x_n)\sqrt{\varepsilon_2} + (x_n - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_2} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_2} + x_1\sqrt{\varepsilon_2} &= x\sqrt{\varepsilon_2} \quad (2.39) \\ &\leq (x - x_n)\sqrt{\varepsilon_1} + (x_n - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_2} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_1} + x_1\sqrt{\varepsilon_2} \\ &\leq (x - x_n)\sqrt{\varepsilon_1} + (x_n - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_1} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_1} + x_1\sqrt{\varepsilon_1} = x\sqrt{\varepsilon_1} \end{aligned}$$

### 2.3.2 Distribution de $X_\omega(x)$ , $x$ fixé

#### Fonction de répartition de $X_\omega(x)$

Nous allons étudier la loi de répartition du processus  $X_\omega(x)$  pour chaque position  $x$  fixée. Nous avons défini précédemment le sous ensemble  $\Omega_n^x$ , un sous ensemble de  $\Omega$ , qui comprend les réalisations telles qu'il y a  $n$  événements entre 0 et  $x$ .  $n$  pouvant prendre des valeurs paires ou impaires à partir de zéro.  $\Omega_n^x$  est subdivisé en deux sous ensembles,  $\Omega_n^{x,\varepsilon_1}$  et  $\Omega_n^{x,\varepsilon_2}$ , suivant que la porosité prend comme valeur de départ  $\varepsilon_1$  ou  $\varepsilon_2$ .

**Théorème 2.3.1** *La fonction de répartition de la variable aléatoire  $X_\omega(x)$ , (pour une longueur  $x$  fixée) définie par :*

$$F^x(\ell) = P\{X_\omega(x) \leq \ell\} \quad (2.40)$$

s'écrit :

$$F_x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ell < x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu\sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta + \right. \\ \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu\sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right\} & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell < x\sqrt{\varepsilon_1} \\ + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ I_0(2\nu\sqrt{\xi(x-\xi)}) \right\} d\xi + \right. \\ \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ I_0(2\nu\sqrt{\xi(x-\xi)}) \right\} d\xi \right\} & \\ 1 & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_1} \leq \ell \end{cases} \quad (2.41)$$

où

$$m^x(\ell) = \frac{\ell - x\sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}} \quad (2.42)$$

**preuve 2.3.1** Pour  $x$  toujours fixé et pour  $x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}$  ;

par définition, la fonction de répartition du processus  $X_\omega(x)$  est :

$$F^x(\ell) = P\{\omega \in \Omega, X_\omega(x) \leq \ell\} = \frac{1}{2}P\{\omega \in \Omega^{\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell\} \\ + \frac{1}{2}P\{\omega \in \Omega^{\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell\} \quad (2.43)$$

$\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont définis précédemment. Pour calculer cette dernière, nous avons besoin de calculer la fonction de répartition de  $X_\omega(x)$  dans chaque domaine  $\Omega_n^x$ . Soit  $F_n^x(\ell)$  cette fonction.

$$F_n^x(\ell) = P\{\omega \in \Omega_n^x, X_\omega(x) \leq \ell\} \quad (2.44)$$

en tenant compte de cette définition,  $F^x(\ell)$  s'écrira :

$$F^x(\ell) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n^x(\ell) \quad (2.45)$$

En distinguant les  $n$  pairs des  $n$  impairs, on aura

$$F^x(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} (F_{2k}^x(\ell) + F_{2k+1}^x(\ell)), \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.46)$$

En isolant  $k = 0$  et  $k = 1$ , alors

$$F^x(\ell) = F_0^x(\ell) + F_1^x(\ell) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^x(\ell) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k+1}^x(\ell), \quad (n, k) \in \mathcal{N}^2 \quad (2.47)$$

avec

$$F_0^x(\ell) = P \{ \omega \in \Omega_0^x, X_\omega(x) \leq \ell \} \quad (2.48)$$

De même

$$F_1^x(\ell) = P \{ \omega \in \Omega_1^x, X_\omega(x) \leq \ell \} \quad (2.49)$$

etc...

**1- Calcul de  $F_0^x(\ell)$  :**

$\Omega_0^x$  comprend des réalisations où la porosité prend comme valeur de départ  $\varepsilon_1$  et celles où elle prend la valeur  $\varepsilon_2$  nous avons donc

$$\begin{aligned} F_0^x(\ell) &= \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_0^{x, \varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell \} + \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_0^{x, \varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_0^x, x\sqrt{\varepsilon_1} \leq \ell \} + \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_0^x, x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \} \\ &= \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega, x\sqrt{\varepsilon_1} \leq \ell, x_1 \geq x \} + \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega, x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell, x_1 \geq x \} \end{aligned} \quad (2.50)$$

Nous aboutissons à

$$F_0^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell < x\sqrt{\varepsilon_1} \\ e^{-\nu x} & \text{si } \ell \geq x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (2.51)$$

**2- Calcul de  $F_1^x(\ell)$  :**

$F_1^x(\ell)$  est la fonction de répartition de  $X_\omega(x)$  dans le domaine  $\Omega_1^x$  :

$$F_1^x(\ell) = P \{ \omega \in \Omega_1^x, X_\omega(x) \leq \ell \} \quad (2.52)$$

$\Omega_1^x$  comprend les réalisations où la porosité commence par la valeur  $\varepsilon_1$  et les réalisations où elle commence par  $\varepsilon_2$ , ce qui nous donne

$$F_1^x(\ell) = \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega_1^{x,\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell \} + \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega_1^{x,\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell \} \quad (2.53)$$

Or

Si  $\omega \in \Omega_1^{x,\varepsilon_1}$  alors  $X_\omega(x) = x_1\sqrt{\varepsilon_1} + (x - x_1)\sqrt{\varepsilon_2}$

et

Si  $\omega \in \Omega_1^{x,\varepsilon_2}$  alors  $X_\omega(x) = x_1\sqrt{\varepsilon_2} + (x - x_1)\sqrt{\varepsilon_1}$

Donc

$$\begin{aligned} F_1^x(\ell) &= \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega_1^x, x_1 \leq m^x(\ell) \} + \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega_1^x, x_1 \geq (x - m^x(\ell)) \} \\ &= \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega, x_1 \leq m^x(\ell), x_1 \leq x \leq x_2 \} \\ &+ \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega, (x - m^x(\ell)) \leq x_1 \leq x, x_1 \leq x \leq x_2 \} \\ &= \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega, x_1 \leq m^x(\ell), (x_2 - x_1) \geq (x - x_1) \} \\ &+ \frac{1}{2}P \{ \omega \in \Omega, (x - m^x(\ell)) \leq x_1 \leq x, (x - x_1) \leq (x_2 - x_1) \} \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{m^x(\ell)} \int_{(x-\eta)}^\infty \nu^2 e^{-\nu\eta} e^{-\nu\xi} d\eta d\xi + \frac{1}{2} \int_{x-m^x(\ell)}^x \int_{(x-\eta)}^\infty \nu^2 e^{-\nu\eta} e^{-\nu\xi} d\eta d\xi \end{aligned} \quad (2.54)$$

où  $\nu e^{-\nu x}$  est la densité de probabilité des intervalles, c'est la loi Exponentielle. D'où

$$F_1^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \nu m^x(\ell)e^{-\nu x} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \nu x e^{-\nu x} & \text{si } \ell > x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (2.55)$$

Pour calculer les fonctions de répartition  $F_{2k}^x$  et  $F_{2k+1}^x$ , nous avons besoin des définitions suivantes :

**Définition 2.3.1**

$$Y_k = \sum_{i=1}^k (x_{2i} - x_{2i-1}), \quad (2.56)$$

$$Z_k = \sum_{i=0}^k (x_{2i+1} - x_{2i}) \quad \text{et} \quad y = x_{2k+1} - x_{2k} \quad (2.57)$$

**3- Calcul de  $F_{2k}^x(\ell)$  :**

$F_{2k}^x(\ell)$ ,  $k \neq 0$  est la fonction de répartition de  $X_\omega(x)$  dans les domaines  $\Omega_{2k}^x$  qui sont des ensembles de réalisations telles qu'il y a  $2k$  sauts entre 0 et  $x$ ,

$$\begin{aligned} F_{2k}^x(\ell) &= P \{ \omega \in \Omega_{2k}^x, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_{2k}^{x,\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell \} + \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_{2k}^{x,\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= F_{2k}^{x,\varepsilon_1}(\ell) + F_{2k}^{x,\varepsilon_2}(\ell) \end{aligned} \quad (2.58)$$

**a- si  $\omega \in \Omega_{2k}^{\varepsilon_1}$ ,  $k \neq 0$ ,**

$$\begin{aligned} X_\omega(x) &= x_1\sqrt{\varepsilon_1} + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_2} + (x_3 - x_2)\sqrt{\varepsilon_1} \cdots + (x_{2k} - x_{2k-1})\sqrt{\varepsilon_2} + (x - x_{2k})\sqrt{\varepsilon_1} \\ &= [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \cdots + (x_{2k-2} - x_{2k-3}) + (x_{2k} - x_{2k-1})](\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) + x\sqrt{\varepsilon_1} \\ &= \sum_{i=1}^k (x_{2i} - x_{2i-1})(\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) + x\sqrt{\varepsilon_1} \\ &= Y_k(\sqrt{\varepsilon_2} - \sqrt{\varepsilon_1}) + x\sqrt{\varepsilon_1} \end{aligned} \quad (2.59)$$

et

$$\begin{aligned}
F_{2k}^{x,\varepsilon_1}(\ell) &= P\{\omega \in \Omega_{2k}^{\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell\} \\
&= P\{\omega \in \Omega, x - m^x(\ell) \leq Y_k \leq x, x_{2k+1} > x, Y_k \leq (Y_k + Z_k) \leq x\} \tag{2.60}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= P\{\omega \in \Omega, x - m^x(\ell) \leq Y_k \leq x, 0 \leq Z_k \leq x - Y_k, y \geq x - Y_k - Z_k\} \\
&= \int_{x-m^x(\ell)}^x d\eta h_k(\eta) \int_0^{x-\eta} d\xi h_k(\xi) \int_{x-\eta-\xi}^\infty d\tau h(\tau) \tag{2.61}
\end{aligned}$$

où

$$h_k(\eta) = \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\eta} \tag{2.62}$$

$$= \int_{x-m^x(\ell)}^x \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\eta} d\eta \int_0^{x-\eta} \frac{\nu^k \xi^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\xi} d\xi \int_{x-\eta-\xi}^\infty \nu e^{-\nu\tau} d\tau \tag{2.63}$$

**b-** si  $\omega \in \Omega_{2k}^{\varepsilon_2}$ ,  $k \neq 0$ ,

$$\begin{aligned}
X_\omega(x) &= x_1\sqrt{\varepsilon_2} + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_1} + (x_3 - x_2)\sqrt{\varepsilon_2} \cdots + (x_{2k} - x_{2k-1})\sqrt{\varepsilon_1} + (x - x_{2k})\sqrt{\varepsilon_2} \\
&= [(x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) \cdots + (x_{2k-2} - x_{2k-3}) + (x_{2k} - x_{2k-1})](\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) + x\sqrt{\varepsilon_2} \\
&= Y_k(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}) + x\sqrt{\varepsilon_2} \tag{2.64}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
F_{2k}^{x,\varepsilon_2}(\ell) &= P\{\omega \in \Omega_{2k}^{\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell\} \\
&= P\{\omega \in \Omega, 0 \leq Y_k \leq m^x(\ell), Y_k \leq (Y_k + Z_k) \leq x, y \geq x - Y_k - Z_k\}
\end{aligned}$$

$$= P\{\omega \in \Omega, 0 \leq Y_k \leq m^x(\ell), 0 \leq Z_k \leq x - Y_k, y \geq x - Y_k - Z_k\} \tag{2.65}$$

$$= \int_0^{m^x(\ell)} h_k(\eta) d\eta \int_0^{x-\eta} h_k(\xi) d\xi \int_{x-\eta-\xi}^\infty h(\tau) d\tau \tag{2.66}$$

En remplaçant  $h_k(\eta)$  par son expression (2.62) nous aurons :

$$\begin{aligned}
F_{2k}^x(\ell) &= \frac{1}{2} \int_{x-m^x(\ell)}^x \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\eta} d\eta \int_0^{x-\eta} \frac{\nu^k \xi^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\xi} d\xi \int_{x-\eta-\xi}^{\infty} \nu e^{-\nu\tau} d\tau \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^{m^x(\ell)} \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\eta} d\eta \int_0^{x-\eta} \frac{\nu^k \xi^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu\xi} d\xi \int_0^{x-\eta-\xi} \nu e^{-\nu\tau} d\tau \\
&= \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{k!(k-1)!} \int_{x-m^x(\ell)}^x \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta + \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{k!(k-1)!} \int_0^{m^x(\ell)} \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta \quad (2.67)
\end{aligned}$$

En faisant la somme sur  $k$  des  $F_{2k}^x(\ell)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^x &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{k!(k-1)!} \int_{x-m^x(\ell)}^x \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta + \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{k!(k-1)!} \int_0^{m^x(\ell)} \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta \\
&= \frac{e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu \sqrt{\eta(x-\eta)})^{2k}}{k!(k-1)!} d\eta + \int_0^{m^x(\ell)} \frac{1}{\eta} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu \sqrt{\eta(x-\eta)})^{2k}}{k!(k-1)!} d\eta \right\} + \frac{e^{-\nu x}}{2} \\
&= \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right\} \quad (2.69)
\end{aligned}$$

Nous aboutissons finalement à :

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ = \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right. \\ \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right\} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} < \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu x)^{2k}}{(2k)!} e^{-\nu x} = (ch(\nu x) - 1) e^{-\nu x} & \text{si } \ell > x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (2.70)$$

où  $I_1$  est la fonction de Bessel modifiées de première espèce d'ordres 1 :

$$I_1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta/2)^{2k+1}}{k!(k+1)!} \quad (2.71)$$

### 3- Calcul de $F_{2k+1}^x(\ell)$ :

$F_{2k+1}^x(\ell)$ ,  $k \neq 0$  est la fonction de répartition de  $X_\omega(x)$  dans les domaines  $\Omega_{2k+1}^x$  qui sont des ensembles de réalisations où nous avons  $2k + 1$  sauts entre 0 et  $x$ ,

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^x(\ell) &= P \{ \omega \in \Omega_{2k+1}^x, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_{2k+1}^{x,\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell \} + \frac{1}{2} P \{ \omega \in \Omega_{2k+1}^{x,\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= F_{2k+1}^{x,\varepsilon_1}(\ell) + F_{2k+1}^{x,\varepsilon_2}(\ell) \end{aligned} \quad (2.72)$$

**c-** si  $\omega \in \Omega_{2k+1}^{\varepsilon_1}$ ,

$$X_\omega(x) \leq \ell \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k (x_{2i+1} - x_{2i}) = Z_{k+1} \leq x - x - m^x(\ell) \quad (2.73)$$

$$X_\omega(x) \leq \ell \Leftrightarrow Y_k \leq \frac{\ell - x\sqrt{\varepsilon_2}}{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} = m^x(\ell) \quad (2.74)$$

et

$$\begin{aligned} F_{2k+1}^{x,\varepsilon_1}(\ell) &= P \{ \omega \in \Omega_{2k+1}^{\varepsilon_1}, X_\omega(x) \leq \ell \} \\ &= P \{ \omega \in \Omega, 0 \leq Z_{k+1} \leq m^x(\ell), Z_{k+1} \leq (Y_k + Z_{k+1}) \leq x, x_{2k+1} > x \} \\ &= P \{ \omega \in \Omega, 0 \leq Z_{k+1} \leq m^x(\ell), 0 \leq Y_k \leq x - Z_{k+1}, y \geq x - Y_k - Z_k \} \end{aligned} \quad (2.75)$$

$$= \int_0^{m^x(\ell)} h_{k+1}(\xi) d\xi \int_0^{x-\xi} h_k(\eta) d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty h(\tau) d\tau \quad (2.76)$$

En remplaçant  $h_k(\eta)$  par son expression (2.62), nous obtenons :

$$F_{2k+1}^{x,\varepsilon_1}(\ell) = \int_0^{m^x(\ell)} \frac{\nu^{k+1} \xi^k}{k!} e^{-\nu\xi} d\xi \int_0^{x-\xi} \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!!} e^{-\nu\eta} d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty \nu e^{-\nu\tau} d\tau \quad (2.77)$$

**d-** si  $\omega \in \Omega_{2k+1}^{\varepsilon_2}$ ,

$$X_\omega(x) \leq \ell \Leftrightarrow \sum_{i=0}^k (x_{2i+1} - x_{2i}) = Z_{k+1} \geq x - m^x(\ell) \quad (2.78)$$

et

$$\begin{aligned}
F_{2k+1}^{x,\varepsilon_2}(\ell) &= P\{\omega \in \Omega_{2k+1}^{\varepsilon_2}, X_\omega(x) \leq \ell\} \\
&= P\{\omega \in \Omega, x - m^x(\ell) \leq Z_{k+1} \leq x, Z_{k+1} \leq Y_k + Z_{k+1} \leq x, y \geq x - Y_k - Z_k\} \\
&= P\{\omega \in \Omega, x - m^x(\ell) \leq Z_{k+1} \leq x, 0 \leq Y_k \leq x - Z_{k+1}, y \geq x - Y_k - Z_k\} \\
&= \int_{x-m^x(\ell)}^x h_{k+1}(\xi) d\xi \int_0^{x-\xi} h_k(\eta) d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty h(\tau) d\tau \tag{2.79}
\end{aligned}$$

En remplaçant  $h_k(\eta)$  par son expression (2.62) nous aurons :

$$F_{2k+1}^{x,\varepsilon_2}(\ell) = \int_0^{m^x(\ell)} \frac{\nu^{k+1} \xi^k}{k!} e^{-\nu \xi} d\xi \int_0^{x-\xi} \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{k!} e^{-\nu \eta} d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty \nu e^{-\nu \tau} d\tau \tag{2.80}$$

Enfin,

$$F_{2k+1}^x(\ell) = \frac{1}{2} F_{2k+1}^{x,\varepsilon_1}(\ell) + \frac{1}{2} F_{2k+1}^{x,\varepsilon_2}(\ell) \tag{2.81}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_0^{m^x(\ell)} \frac{\nu^{k+1} \xi^k}{k!} e^{-\nu \xi} d\xi \int_0^{x-\xi} \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\nu \eta} d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty \nu e^{-\nu \tau} d\tau \\
&\quad + \frac{1}{2} \int_{x-m^x(\ell)}^x \frac{\nu^{k+1} \xi^k}{k!} e^{-\nu \xi} d\xi \int_0^{x-\xi} \frac{\nu^k \eta^{k-1}}{k!} e^{-\nu \eta} d\eta \int_{x-\eta-\xi}^\infty \nu e^{-\nu y} dy \\
&= \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{2k!k!} \int_0^x \xi^k (x-\xi)^k d\xi - \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{2k!k!} \int_0^{x-m^x(\ell)} \xi^k (x-\xi)^k d\xi \\
&\quad + \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{2k!k!} \int_0^{m^x(\ell)} \xi^{k-1} (x-\xi)^k d\xi \tag{2.82}
\end{aligned}$$

En faisant la somme sur  $k$  des  $F_{2k+1}^x(\ell)$ , nous obtenons

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}^x(\ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{k!k!} \int_{x-m^x(\ell)}^x \xi^k (x-\xi)^k d\xi + \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{k!k!} \int_0^{m^x(\ell)} \xi^k (x-\xi)^k d\xi \right) \tag{2.83}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})^{2k}}{k!k!} d\xi + \int_0^{m^x(\ell)} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})^{2k}}{k!k!} d\xi \right\} \\
&= \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi + \int_0^{m^x(\ell)} \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi \right\} \quad (2.84)
\end{aligned}$$

où  $I_0$  est la fonction de Bessel modifiées de première espèce d'ordres 1 :

$$I_0(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\theta/2)^{2k}}{k!k!} \quad (2.85)$$

$$(2.86)$$

**Remarque 2.3.1** Nous faisons la somme pour tous les  $k$  à partir de zéro pour inclure  $F_1^x(\ell)$  dans cette forme générale  $F_{2k+1}^x(\ell)$  et pouvoir faire apparaître la fonction de Bessel  $I_0(\theta)$ . (En mettant  $k = 0$  dans  $F_1^x(\ell)$ , nous retrouvons  $F_1^x(\ell)$  de l'équation (2.55))

Finalelement :

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi \right. \\ \quad \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi \right\} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu x)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\nu x} = (sh(\nu x) - \nu x)e^{-\nu x} & \text{si } \ell > x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (2.87)$$

En faisant la somme des équations : (2.51) + (2.70) + (2.87) nous aboutissons à

$$F^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ell < x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta + \right. \\ \quad \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu \sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right\} & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell < x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi + \right. \\ \quad \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \{I_0(2\nu \sqrt{\xi(x-\xi)})\} d\xi \right\} & \\ 1 & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_1} \leq \ell \end{cases} \quad (2.88)$$

**Remarque 2.3.2**  $F^x$  est continue à droite partout.

Calculons les limites de  $F^x(\ell)$  quand  $\ell$  tend vers  $x\sqrt{\varepsilon_2}$  puis vers  $x\sqrt{\varepsilon_1}$  par valeurs inférieures et supérieures :

$$\lim_{\ell \nearrow x\sqrt{\varepsilon_2}} F^x(\ell) = 0 \tag{2.89}$$

$$\lim_{\ell \searrow x\sqrt{\varepsilon_2}} F^x(\ell) = \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \tag{2.90}$$

et

$$\lim_{\ell \nearrow x\sqrt{\varepsilon_1}} F^x(\ell) = 1 - \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \tag{2.91}$$

$$\lim_{\ell \searrow x\sqrt{\varepsilon_1}} F^x(\ell) = 1 \tag{2.92}$$

donc la fonction de répartition présente des sauts en  $\ell = x\sqrt{\varepsilon_2}$  et  $\ell = x\sqrt{\varepsilon_1}$  qui valent  $\frac{\nu e^{-\nu x}}{2}$  (différence entre la limite à gauche et la limite à droite en ces points). Les figures ci contre représentent l'évolution de  $F^x(\ell)$  en fonction de  $\ell$  pour différentes valeurs de  $x$ .

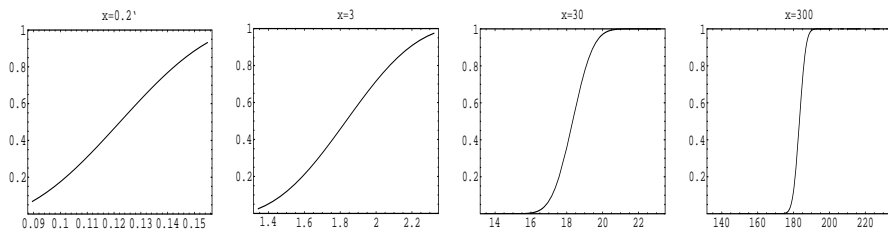


FIG. 2.6 – Fonction de répartition  $F^x(\ell)$  pour  $x = 0.2, x = 3, x = 30, x = 300$

**Remarque 2.3.3** On voit bien le saut pour les petites valeurs de  $x$  : ( $x = 0.2$ ), ( $x = 3$ ), il devient de plus en plus petit quand  $x$  augmente, il varie en  $e^{-\nu x}$ .

### 2.3.3 Densité de probabilité de $X_\omega(x)$

**Théorème 2.3.2** *La densité de probabilité  $f^x(\ell)$  de  $X_\omega(x)$  pour  $x$  fixé s'écrit*

$$f^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} [\delta(l - x\sqrt{\varepsilon_2}) + \delta(l - x\sqrt{\varepsilon_1})] + \\ + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_1[2\nu\sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] \left( \sqrt{\frac{m^x(\ell)}{x - m^x(\ell)}} + \sqrt{\frac{x - m^x(\ell)}{m^x(\ell)}} \right) + \\ + \frac{\nu e^{-\nu x}}{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_0[2\nu\sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ 0 & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_1} \leq \ell \end{cases} \quad (2.93)$$

**preuve 2.3.2** *On dérive (2.41) par rapport à  $\ell$ , en dérivant sous le signe d'intégration.*

**Remarque 2.3.4 :**

1. Nous avons bien vérifié que  $\int_0^\infty f^x(\ell) = 1$  et que  $f^x(\ell) \geq 0$
2. Nous avons conservé  $x$  comme indice de la fonction de répartition et de la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X_\omega(x)$  car celles ci sont définies pour chaque position  $x$  fixée. En effet  $x$  apparaît dans les formules ((2.51),(2.55),(2.70),(2.87)) à travers  $m^x(\ell)$ .

## 2.4 Comportement de la distribution en variant $x$

Comme nous venons de le faire remarquer,  $x$  apparaît comme un paramètre dans la densité de probabilité  $f^x(\ell)$ . Cette dépendance provient de la définition de la longueur efficace  $X_\omega(x)$ . Nous nous proposons d'étudier son évolution en fonction de la variable  $\ell$  pour différentes valeurs du paramètre  $x$ .

### 2.4.1 Variations de la densité de probabilité $f^x(\ell)$

La densité de probabilité  $f^x(\ell)$  est nulle pour  $\ell$  inférieur à  $x\sqrt{\varepsilon_2}$  et pour  $\ell$  supérieur à  $x\sqrt{\varepsilon_1}$ . Si nous regardons l'expression de  $f^x(\ell)$  dans l'intervalle  $[x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$  nous constaterons qu'elle est la somme de fonctions de Dirac en  $x\sqrt{\varepsilon_1}$  et en  $x\sqrt{\varepsilon_2}$  et de deux fonctions de Bessel modifiées de première espèce d'ordres 0 et 1,  $I_0(\theta)$  et  $I_1(\theta)$  en

$$\theta = 2\nu\sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))} \quad (2.94)$$

L'évolution de la densité de probabilité, pour différentes valeurs de  $x$  sont illustrées sur les figures (2.7) ci dessous.

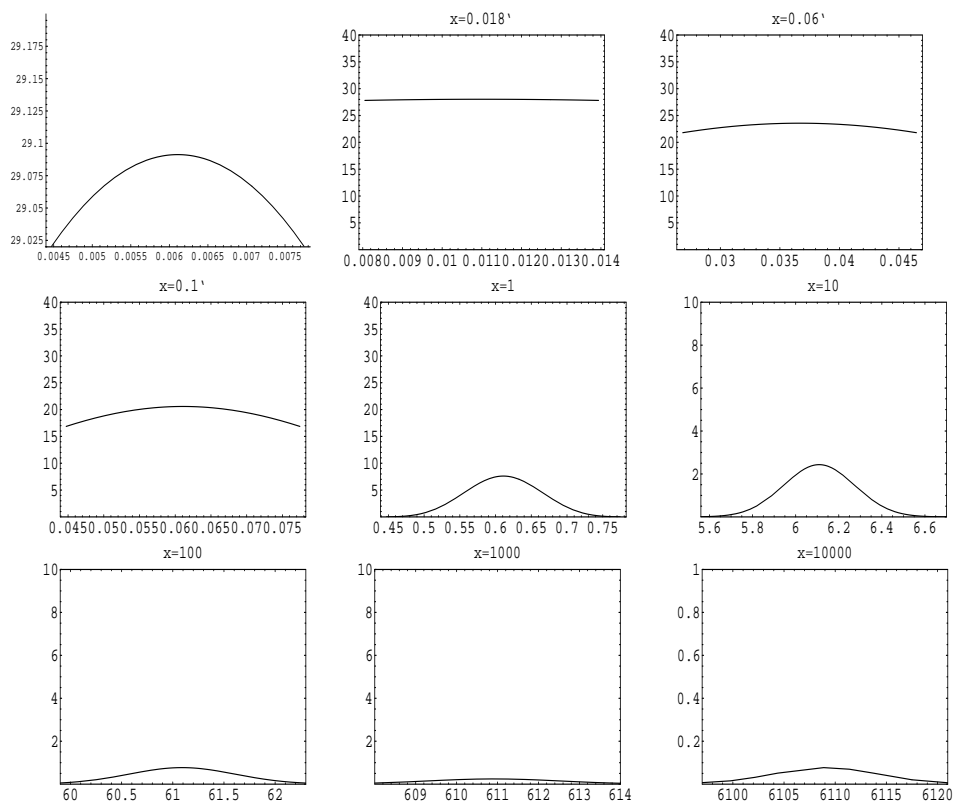


FIG. 2.7 – Variations de  $f^x(\ell)$  fonction de  $\ell$  pour différentes valeurs de  $x$

## 2.4.2 Autre propriété de la densité de probabilité $f^x(\ell)$

**Lemme 2.4.1** *La densité de probabilité admet un maximum en*

$$\ell = \bar{X}(x) = \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{2} \quad (2.95)$$

**Démonstration 2.4.1** *On dérive  $f^x(\ell)$  par rapport à  $\ell$  et on cherche la valeur de  $\ell$  qui annule la dérivée.*

## 2.5 Conclusion

Dance ce chapitre, nous avons

- Elaboré l'équation de notre modèle.
- Rappelé quelques notions de probabilité.
- Étudié l'évolution de la longueur efficace  $X_\omega(x)$ .

Nous avons vu que les valeurs de cette dernière sont distribuées suivant la loi que nous avons notée  $f^x(\ell)$  qui dépend de la position  $x$  dans le milieu poreux. Toutes les valeurs de  $X_\omega(x)$  sont comprises entre deux limites  $x\sqrt{\varepsilon_2}$  et  $x\sqrt{\varepsilon_1}$  et la moyenne de ces valeurs que nous notons  $\bar{X}(x)$  vaut  $x\frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}{2}$ , (voir Annexe C).

Ces trois propriétés nous serviront, par la suite, pour étudier les solutions de l'équation de la diffusion poreuse stochastique (notre modèle) et les comparer à la moyenne effectuée par rapport à toutes les réalisations possibles du processus. Ce chapitre a rassemblé donc les outils mathématiques nécessaires à notre étude.

# Chapitre 3

## Statistique des réalisations (à $x$ fixé)

Dans ce chapitre, nous allons étudier les solutions de l'équation de la diffusion poreuse avec porosité stochastique. Nous nous intéressons à leur comportement par rapport à la moyenne effectuée par rapport à toutes les réalisations du processus stochastique.

Dans la première section, nous allons résoudre l'équation de la diffusion poreuse avec porosité stochastique (équation du modèle obtenue au chapitre 2). Nous allons écrire la solution trouvée, pour chaque réalisation du processus et pour chaque position  $x$ , comme la solution obtenue dans un milieu où la porosité est égale à 1 mais à une position  $X_\omega(x)$  que nous appelons longueur efficace.

Dans la deuxième section, nous allons calculer l'équation d'évolution de la moyenne effectuée sur toutes les réalisations possibles de la porosité.

L'objectif de la section trois, qui représente aussi l'objectif de la thèse, est de comparer la solution de l'équation de la diffusion obtenue pour chaque réalisation de la porosité à la moyenne des solutions effectuée par rapport à toutes les réalisations possibles du processus. Dans cette section, nous limitons notre étude au cas où la position  $x$  est fixée

et nous comparons les réalisations  $U_\omega(x, t)$  et la moyenne  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  comme fonctions du temps.

Cette situation correspond aux observations d'un expérimentateur mesurant la concentration du colorant à l'extrémité d'un tube de longueur  $x$  et voulant la comparer à une prévision basée sur la moyenne.

Nous avons vu dans ce qui précède que les solutions correspondant aux réalisations  $\omega$  sont de la forme  $\phi_{X_\omega(x)}(t) = \frac{X_\omega(x)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{X_\omega^2(x)}{4Dt}}$ . La comparaison directe avec la moyenne s'avère très intéressante mais avec un résultat inattendu : avec une probabilité égale à 1, toutes les réalisations s'éloignent de la valeur moyenne pendant un certain intervalle de temps ! Dans notre étude, nous avons pu localiser ces intervalles de temps dans des valeurs intermédiaires (ni trop petites, ni trop grandes). Cependant il semble raisonnable de penser, et nos calculs numériques confirment cette idée, que cette situation est encore vraie pour des temps beaucoup plus courts que ceux pour lesquels notre démonstration est rigoureusement établie. Par contre, pour des temps très longs, toutes les réalisations tendent vers zéro et, de ce fait elles seront automatiquement proches de la valeur moyenne. C'est pourquoi, à la section quatre, nous avons aussi étudié la proximité des solutions correspondant à chaque réalisation avec une fonction de référence  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ ,  $\bar{X}(x) = \langle X_\omega(x) \rangle_\omega$ . Dans ce cas nous obtenons un résultat satisfaisant : avec une grande probabilité les solutions  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$  sont proches de la fonction de référence pour tous les temps. Il s'en suit que l'expérimentateur peut utiliser  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  avec une très bonne précision pour ses résultats expérimentaux. Cette fonction est, en outre, connue explicitement, ce qui complète son intérêt pratique. Nous précisons enfin que  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  comme  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  n'est pas une solution de l'équation de la diffusion poreuse du fait qu'il n'existe aucune

réalisation  $\omega$  qui vérifie  $X_\omega(x) = \bar{X}(x)$  pour toutes les valeurs de  $x$ . On sait tout de même que pour un  $x$  fixé  $X_\omega(x)$  peut prendre cette valeur  $\bar{X}(x)$ .

Pour évaluer les fluctuations entre les  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$  et  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  dans le cas où  $x$  est fixé, nous procédons comme suit : Nous construisons autour de  $\phi_{\bar{X}(x)}$  une famille de voisinages dont chacun est un ensemble de fonctions  $\phi_\ell$ . Les voisinages sont indexés par un paramètre  $\gamma$ . Chaque voisinage est défini par deux bornes, inférieure  $K_\gamma^-(t)$  et supérieure  $K_\gamma^+(t)$  et contient toutes les fonctions  $\phi_\ell$  qui sont entre ces bornes. En regardant la figure (3.1), on voit que chaque voisinage a un diamètre qui n'est pas constant dans le temps. Mais leur avantage est que nous pouvons relier la probabilité de présence de  $\phi_\ell$  dans le voisinage à la valeur du paramètre  $\gamma$  et ainsi optimiser le contrôle des fluctuations à des temps différents. Ces dernières ne sont importantes que pour des temps intermédiaires et sont plus petites pour des temps grands. Notons que cette échelle des temps est à comparer à celle de la diffusion et donc dépendra de la position  $x$  où l'observation est effectuée. Mais en tout état de cause le paramètre  $\gamma$ , et par conséquent le voisinage qui lui est associé, joue dans notre approche, le rôle de la "précision" de l'approximation. Nous introduisons un diamètre  $\delta(\gamma)$  pour chacun de ces voisinages. Nous regardons le comportement de  $\delta(\gamma)$  comme fonction de  $\gamma$  et nous évaluons la probabilité des réalisations correspondant à chaque voisinage.

Le résultat final auquel nous aboutissons est que, dans ce cas où  $x$  est fixé, les solutions obtenues pour chaque réalisation sont proches, quelque soit le temps considéré, de la valeur prévue par  $\phi_{\bar{X}(x)}$ . Enfin, nous avons comparé les diamètres des voisinages quand la mesure est réalisée en deux positions différentes.

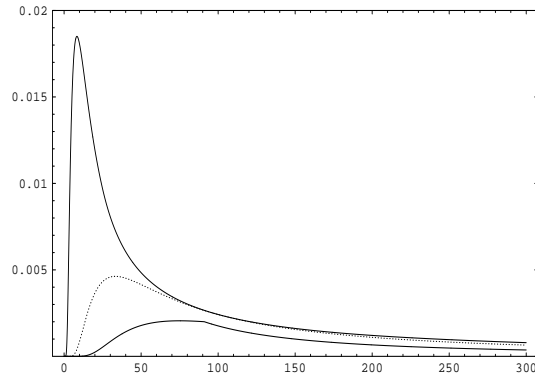


FIG. 3.1 – Voisinage autour de  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$

### 3.1 Réalisations du processus et solutions associées

Lorsque la porosité est un processus aléatoire télégraphique  $\varepsilon_\omega(x)$ , une réalisation de ce processus consiste à générer une suite d'intervalles distribués suivant la loi exponentielle, soient  $[0, x_1^\omega], [x_1^\omega, x_2^\omega], [x_2^\omega, x_3^\omega], \dots, [x_{n-1}^\omega, x_n^\omega], [x_n^\omega, x]$ . . . et la porosité prend deux valeurs de façon alternée sur ces intervalles. Pour chaque réalisation du processus (fig.3.2), l'équation de la diffusion poreuse est résolue sur chacun des intervalles où  $\varepsilon_\omega(x)$  est constante. La solution dans le cas où la porosité est constante est donnée au chapitre 1.

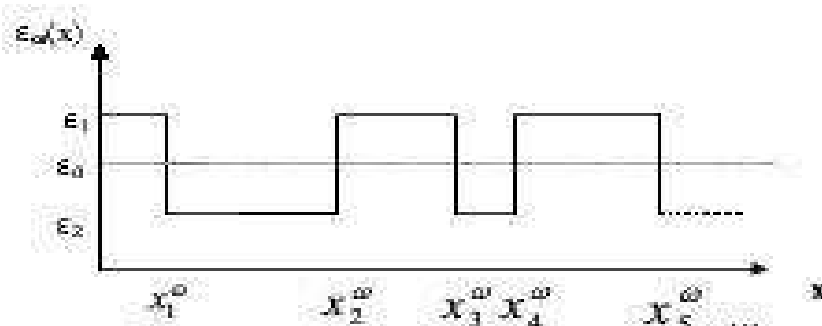


FIG. 3.2 – Une réalisation de la porosité

Considérons l'équation de la diffusion poreuse avec une porosité aléatoire  $\varepsilon_\omega(x)$  :

$$\varepsilon_\omega(x) \frac{\partial U_\omega}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U_\omega}{\partial x^2} \quad (3.1)$$

avec les conditions initiale et au bord

$$\begin{cases} U(x, 0) = 0, & 0 < x < \infty \\ U(0, t) = f(t), & f(0) = 0, \quad 0 < t < \infty \end{cases} \quad (3.2)$$

Si  $\varepsilon_\omega(x) = \varepsilon_0 = Cste$ , la solution de ce système est donnée par :

$$U_\omega(x, t) = \int_0^t d\tau f(\tau) \frac{x\sqrt{\varepsilon_0}}{\sqrt{4\pi D}(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \exp\left(-\frac{x^2 \varepsilon_0^2}{4D(t-\tau)}\right) \quad (3.3)$$

**Théorème 3.1.1** *Si la porosité  $\varepsilon_\omega(x)$  est un processus stochastique télégraphique, alors la solution de l'équation de la diffusion poreuse correspondant à la réalisation :  $\omega = (\varepsilon_i, x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ , s'écrit, pour  $x_n < x < x_{n+1}$*

$$U_\omega(x, t) = \phi_{X_\omega(x)} * f(t) \quad (3.4)$$

avec

$$X_\omega(x) = (x - x_n)\sqrt{\varepsilon_k} + (x_n - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_{k'}} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_j} + x_1\sqrt{\varepsilon_i} \quad (3.5)$$

où  $\varepsilon_i = \varepsilon_1$  (ou  $\varepsilon_2$ ) et  $\varepsilon_j = \varepsilon_2$  (ou  $\varepsilon_1$ ) si la réalisation commence par  $\varepsilon_1$  (ou  $\varepsilon_2$ ) et  $\varepsilon_k = \varepsilon_i$  (ou  $\varepsilon_j$ ),  $\varepsilon_{k'} = \varepsilon_j$  (ou  $\varepsilon_i$ ) si n est pair (ou impair). et

$$\phi_l(t) = \frac{l}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{l^2}{4Dt}} \quad (3.6)$$

**Démonstration 3.1.1** *soient  $[0, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], \dots, [x_{n-1}, x_n]$  les intervalles d'une réalisation de  $\varepsilon_\omega(x)$ .*

*Comme dans le cas de la porosité constante, nous appliquons la transformée de Laplace dans chaque intervalle.*

1<sup>ere</sup> **étape**

Si  $0 \leq x < x_1$ , le système à résoudre est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} = a_1^2 \frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} \\ U(0,t) = f(t) \\ U(x,0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

avec  $a_1^2 = \frac{D}{\varepsilon_1}$

La solution de ce système s'écrit :

$$U_\omega(x,t) = \frac{x\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t d\tau_1 \frac{e^{\frac{-x^2\varepsilon_1}{4D(t-\tau_1)}}}{(t-\tau_1)^{\frac{3}{2}}} f(\tau_1) \quad (3.8)$$

qui s'écrit encore :

$$U_\omega(x,t) = \int_0^t d\tau_1 f(\tau_1) \phi_{x\sqrt{\varepsilon_1}}(t-\tau_1) = \phi_{x\sqrt{\varepsilon_1}} * f(t) \quad (3.9)$$

### **Démonstration par récurrence**

Supposons que la formule (3.4) du théorème (3.1.1) est vraie dans le  $(n-1)$ ième intervalle, montrons qu'elle est vraie dans le  $n$ ième intervalle.

Si  $x_{n-2} \leq x < x_{n-1}$ , la solution s'écrit :

$$U_\omega(x,t) = \phi_{X_\omega(x)} * f(t) \quad (3.10)$$

où

$$X_\omega(x) = (x - x_{n-2})\sqrt{\varepsilon_k} + (x_{n-2} - x_{n-3})\sqrt{\varepsilon_{k'}} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_j} + x_1\sqrt{\varepsilon_i} \quad (3.11)$$

En posant  $x = x_{n-1}$ , on trouve la nouvelle condition au bord :

$$U(x_{n-1},t) = \phi_{X_\omega(x_{n-1})} * f(t) = f_{n-1}(t) \quad (3.12)$$

La solution dans l'intervalle  $[x_{n-1}, x_n]$  s'écrit d'après (1.39) :

$$U_\omega(x, t) = \frac{(x - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_k}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t d\tau \frac{e^{-\frac{(x-x_{n-1})^2\varepsilon_1}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} f_{n-1}(\tau) \quad (3.13)$$

En remplaçant  $f_{n-1}(\tau)$  par son expression, nous aurons :

$$U_\omega(x, t) = \frac{(x - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_k}}{\sqrt{4\pi D}} \int_0^t d\tau \frac{e^{-\frac{(x-x_{n-1})^2\varepsilon_1}{4D(t-\tau)}}}{(t-\tau)^{\frac{3}{2}}} \phi_{X_\omega(x_{n-1})} * f(\tau) = \phi_{X_\omega(x)}(t) * f(t) \quad (3.14)$$

avec

$$X_\omega(x) = (x - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_k} + (x_{n-1} - x_{n-2})\sqrt{\varepsilon_{k'}} + \dots + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_j} + x_1\sqrt{\varepsilon_i} \quad (3.15)$$

La formule est donc aussi vraie pour  $x_{n-1} < x < x_n$

**Remarque 3.1.1** La solution du système est une convolution de la condition au bord quelconque  $f(t)$  et de la fonction  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$ , définie par :

$$\phi_{X_\omega(x)}(t) = \frac{X_\omega(x)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{X_\omega(x)^2}{4Dt}} \quad (3.16)$$

**Théorème 3.1.2** La solution (3.8) du système d'équations s'écrit :

1.

$$U_\varepsilon^{\phi_a}(x, t) = \frac{a + X_\omega(x)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{(a+X_\omega(x))^2}{4Dt}} \quad (3.17)$$

si

$$f(t) = \phi_a(t) = \frac{a}{\sqrt{4\pi D}} \frac{e^{-\frac{a^2}{4Dt}}}{t^{\frac{3}{2}}} \quad (3.18)$$

2.

$$U_\omega(x, t) = \phi_{X_\omega(x)}(t) * U_0 = U_0 \int_0^t \phi_{X_\omega(x)}(t-\tau) d\tau \quad (3.19)$$

si

$$f(t) = U_0 = Cste \quad (3.20)$$

Avec, si  $x_n < x < x_{n+1}$

$$X_\omega(x) = x_1\sqrt{\varepsilon_i} + (x_2 - x_1)\sqrt{\varepsilon_j} + \cdots + (x_n - x_{n-1})\sqrt{\varepsilon_k} + (x - x_n)\sqrt{\varepsilon_{k'}}. \quad (3.21)$$

**Démonstration 3.1.2** *Ce théorème est une conséquence du cas général.*

## 3.2 Equation de la moyenne stochastique

On se propose d'étudier le comportement des solutions de l'équation de la diffusion poreuse pour chaque réalisation du processus stochastique par rapport à celui de la moyenne stochastique. Pour réaliser ce travail, nous devons étudier les propriétés de la moyenne. Pour cela nous établirons l'équation de son évolution.

L'équation de la diffusion poreuse stochastique s'écrit :

$$\varepsilon_\omega(x) \frac{\partial U_\omega(x, t)}{\partial t} = D \frac{\partial^2 U_\omega(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.22)$$

avec

$$U_\omega(0, t) = f(t) \text{ et } U_\omega(x, 0) = 0, \quad U_\omega(x, \infty) = 0 \quad (3.23)$$

$D$  est le coefficient de diffusion de Fick.

Comme  $\varepsilon_\omega(x) = \varepsilon_0 + \tilde{\varepsilon}_\omega(x)$  où  $\varepsilon_0$  est la valeur moyenne de la porosité le long du tube et  $\tilde{\varepsilon}_\omega(x)$  est la fluctuation correspondante qui est un processus stochastique télégraphique, telle que  $\langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) \rangle = 0$ . L'équation pour la concentration moyenne du colorant injecté dans le lit poreux irrégulier prend la forme :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} + \frac{\partial \langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq L, \quad t > 0 \quad (3.24)$$

Pour calculer la corrélation  $\langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) U_\omega(x, t) \rangle$ , on utilise

1. la transformée de Laplace par rapport au temps  $\tilde{U}_\omega(x, q)$  de  $U_\omega(x, t)$ , on aboutit à l'équation :

$$\frac{d^2\langle\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle}{dx^2} - \frac{\varepsilon_0 q}{D}\langle\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle = \frac{q}{D}\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\langle\tilde{U}_\omega(x, t)\rangle \quad (3.25)$$

avec la condition au bord :

$$\langle\tilde{U}_\omega(0, q)\rangle = F(q) \quad (3.26)$$

$F(q)$  est la transformée de Laplace de  $f(t)$

$$F(q) = \int_0^\infty f(t)e^{-qt} dt \quad (3.27)$$

2. On utilise la formule de différentiation (voir annexe A), on trouve alors :

$$\frac{\partial}{\partial x}\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle = -2\nu\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle + \langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{\partial^2\tilde{U}_\omega(x, q)}{\partial x^2}\rangle \quad (3.28)$$

En utilisant une deuxième fois cette formule pour  $\varepsilon_\omega(x)\frac{d^2\tilde{U}_\omega(x, q)}{dx^2}$ , on obtient :

$$\frac{d}{dx}\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{\partial\tilde{U}_\omega(x, q)}{\partial x}\rangle = -2\nu\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{\partial\tilde{U}_\omega(x, q)}{\partial x}\rangle + \langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{\partial^2\tilde{U}_\omega(x, q)}{\partial x^2}\rangle \quad (3.29)$$

en remplaçant  $\frac{d^2\tilde{U}_\omega(x, q)}{dx^2}$  dans (3.29) par (3.25) et en utilisant le fait que pour un processus télégraphique  $\tilde{\varepsilon}_\omega(x)^2 = \varepsilon_0^2$ , on aura le système d'équations différentielles :

$$\frac{d}{dx}\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle = \left(-2\nu + \frac{\nu}{D}\right)\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle + \langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{d\tilde{U}_\omega(x, q)}{dx}\rangle \quad (3.30)$$

$$\begin{aligned} \langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{d\tilde{U}_\omega(x, q)}{dx}\rangle &= -2\nu\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle + \langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\frac{d\tilde{U}_\omega(x, q)}{dx}\rangle + \\ &\frac{\varepsilon_0 q}{D}\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(x)\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle + \frac{q}{D}\varepsilon_0^2\langle\tilde{U}_\omega(x, q)\rangle \end{aligned} \quad (3.31)$$

avec la condition au bord :

$$\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(0)\tilde{U}_\omega(0, q)\rangle = F(q)\langle\tilde{\varepsilon}_\omega(0)\rangle = 0 \quad (3.32)$$

La première équation (3.30) coïncide avec (3.29) ; on note que

$$\left| \langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) \tilde{U}_\omega(x, q) \rangle \right| < \infty$$

Pour  $W(x, q) = \langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) \tilde{U}_\omega(x, q) \rangle$ , nous avons, d'après (3.30) et (3.31)

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + 4\nu \frac{dW}{dx} + \left(4\nu^2 - \frac{\varepsilon_0 q}{D}\right) W = \frac{\varepsilon_0^2 q}{D} \langle \tilde{U}_\omega(x, q) \rangle \quad (3.33)$$

avec

$$W(x, q)|_{x=0} = 0, \quad |W(x, q)| < N = Cste \quad (3.34)$$

Pour de grandes valeurs de  $x \gg \lambda$ , la solution de (3.33) tend vers :

$$W(x, q) = \frac{\varepsilon_0^2 q}{2D} \int_0^x d\eta \frac{\langle \tilde{U}_\omega(x, q) \rangle}{\sqrt{\frac{\varepsilon_0 q}{D}}} e^{-2\nu(x-\eta)} e^{-\sqrt{\frac{\varepsilon_0 q}{D}}(x-\eta)} \quad (3.35)$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de  $W(x, q)$  on trouve la corrélation  $\langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) U_\omega(x, t) \rangle$ . En l'injectant dans l'équation (3.24) on trouve, pour les grandes valeurs de  $x$  et  $t$ , l'équation suivante :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2\sqrt{\varepsilon_0 D}} \int_0^x d\xi e^{-2\nu(x-\xi)} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\pi\tau}} e^{-\frac{\varepsilon_0(x-\xi)^2}{4D\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(\xi, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} \quad (3.36)$$

En posant  $x - \xi = \eta$  cette équation peut s'écrire :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \int_0^x d\eta \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x-\eta, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} e^{-2\nu\eta} e^{-\frac{\varepsilon_0\eta^2}{4D\tau}} \quad (3.37)$$

où  $\varepsilon_0^2 e^{-2\nu\eta}$  est la fonction de corrélation du processus stochastique  $\tilde{\varepsilon}(x)$  avec la longueur de corrélation  $\lambda = \frac{1}{2\nu}$ . Pour les petites longueurs de corrélations,  $U_\omega(x-\eta, t-\tau) \approx U_\omega(x, t-\tau)$  et (3.37) devient :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} \quad (3.38)$$

$$+\frac{\varepsilon_0^2}{2\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x-\eta, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} \int_0^\infty d\eta e^{-2\nu\eta} e^{-\frac{\varepsilon_0 \eta^2}{4D\tau}}$$

On note que :

$$\int_0^\infty d\eta e^{-2\nu\eta} e^{-\frac{\varepsilon_0 \eta^2}{4D\tau}} = \sqrt{\tau} \sqrt{\frac{\pi D}{\varepsilon_0}} e^{\frac{4\nu^2 D \tau}{\varepsilon_0}} \{1 - \Phi(2\nu \sqrt{\frac{\pi D}{\varepsilon_0}})\} = F(\tau) \quad (3.39)$$

où  $\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x dz e^{-z^2}$  et  $\lim_{\tau \rightarrow \infty} F(\tau) = \frac{1}{2\nu}$

d'où (3.38) devient

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} &= D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} + \\ &\frac{\varepsilon_0^2}{2\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} \left(F(\tau) - \frac{1}{2\nu}\right) \end{aligned} \quad (3.40)$$

qui s'écrit encore :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} + V_\lambda(x, t) \quad (3.41)$$

avec

$$V_\lambda(x, t) = \frac{\varepsilon_0^2}{2\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} \left(F(\tau) - \frac{1}{2\nu}\right) \quad (3.42)$$

Pour  $t \gg T = \varepsilon_0 \lambda^2 / \pi D$  on trouve que  $|V_\lambda(x, t)| \approx \mathcal{O}(\lambda^2)$ . On voit que le second terme dans (3.42), pour les grandes valeurs de  $t$ , est une dérivée fractionnaire par rapport au temps (voir annexe B).

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t d\tau \frac{1}{\sqrt{\tau}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t-\tau) \rangle}{\partial \tau^2} &= \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \int_0^t dv \frac{1}{\sqrt{t-v}} \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, v) \rangle}{\partial v^2} \\ &= \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \frac{d}{dt} \int_0^t dv \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, v) \rangle}{\partial v^2} \sqrt{t-v} \\ &= \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \frac{d}{dt} \int_0^t dv \frac{\partial \langle U_\omega(x, v) \rangle}{\partial v} \frac{1}{\sqrt{t-v}} \\ &= \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\pi\varepsilon_0 D}} \frac{d^2}{dt^2} \int_0^t dv \langle U_\omega(x, v) \rangle \frac{1}{\sqrt{t-v}} \end{aligned}$$

$$= \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\varepsilon_0 D}} \frac{\partial^{3/2}\langle U_\omega(x, v) \rangle}{\partial t^{3/2}} \quad (3.43)$$

D'où pour  $x \gg \lambda$  et pour les grandes valeurs de  $t$ , l'équation de la moyenne de la concentration par rapport au processus aléatoire, à une erreur  $\mathcal{O}(\lambda^2)$  près est réduite à :

$$\varepsilon_0 \frac{\partial \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial t} = D \frac{\partial^2 \langle U_\omega(x, t) \rangle}{\partial x^2} + \frac{\varepsilon_0^2}{4\nu\sqrt{\varepsilon_0 D}} \frac{\partial^{3/2} \langle U_\omega(x, v) \rangle}{\partial t^{3/2}} \quad (3.44)$$

On a montré que dans le cas du modèle de porosité stochastique, la concentration moyenne du colorant injecté dans un milieu poreux, vérifie l'équation de diffusion fractionnaire.

Maintenant, nous savons que ceci n'est pas vrai !

### 3.3 Propriétés de la famille de fonctions

$$\{\phi_\ell(t), x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}\}$$

Les solutions de l'équation de la diffusion, pour chaque réalisation  $\omega$  de la porosité, s'écrivent sous la forme

$$U_\omega(x, t) = \phi_{X_\omega(x)}(t) = \frac{X_\omega(x)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{x_\omega^2(x)}{4Dt}} \quad (3.45)$$

Pour étudier ces solutions pour chaque position  $x$  fixée dans le milieu poreux, nous avons besoin d'étudier les propriétés des fonctions  $\phi_\ell(t) = \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}}$ .

**Proposition 3.3.1** .

1. Soit  $x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}$ . La fonction  $\phi_\ell(t)$ , admet un maximum en

$$t = \frac{\ell^2}{6D} \quad (3.46)$$

et

$$\phi_\ell\left(\frac{\ell^2}{6D}\right) = \sqrt{\frac{54}{\pi e^3}} \frac{D}{\ell^2} \quad (3.47)$$

2.  $\phi_\ell(t)$  est monotone croissante pour  $0 \leq t \leq \frac{\ell^2}{6D}$  et décroissante pour  $t \geq \frac{\ell^2}{6D}$

3.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \phi_\ell(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \phi_\ell(t) = 0 \quad (3.48)$$

4.  $\phi_\ell(t)$  est continue en  $t$  et en  $\ell$

### Démonstration 3.3.1 .

1. On dérive  $\phi_\ell(t)$  par rapport au temps et on cherche la valeur de  $t$  qui annule la dérivée :

$$\frac{\partial \phi_\ell(t)}{\partial t} = \frac{3\ell e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}}}{2\sqrt{4\pi Dt^3}} \left( \frac{\ell^2 - 6Dt}{6Dt} \right) = 0 \Rightarrow t = \frac{\ell^2}{6D} \quad (3.49)$$

2. En étudiant le signe de la dérivée, on conclut que

si  $t \leq \frac{\ell^2}{6D}$ ,  $\frac{\partial \phi_\ell(t)}{\partial t} \geq 0$  donc  $\phi_\ell(t)$  est monotone croissante en  $t$

si  $t \geq \frac{\ell^2}{6D}$ ,  $\frac{\partial \phi_\ell(t)}{\partial t} \leq 0$  et  $\phi_\ell(t)$  est monotone décroissante en  $t$

On vérifie bien que  $t = \frac{\ell^2}{6D}$  est un maximum.

3. les propriétés 3 et 4 sont des résultats classiques.

### Proposition 3.3.2 .

1. L'abscisse du point d'intersection (3.3) de la courbe de  $\phi_\ell(t)$  avec la courbe de  $\phi_{\ell'}(t)$ , qu'on note  $t_{\ell, \ell'}$ , est donnée par :

$$t = \frac{\ell^2 - \ell'^2}{4D \log\left(\frac{\ell}{\ell'}\right)} = t_{\ell, \ell'} \quad (3.50)$$

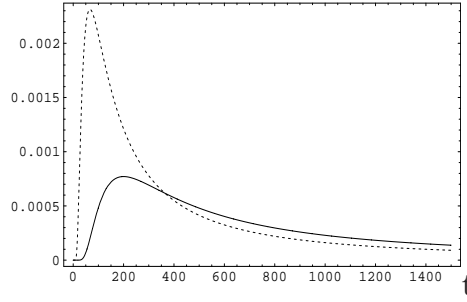


FIG. 3.3 – Point d'intersection de la courbe de  $\phi_\ell(t)$  avec celle de  $\phi_{\ell'}(t)$

2. Si  $\ell \leq \ell'$  alors

$$\begin{cases} \phi_\ell(t) \leq \phi_{\ell'}(t) & \text{si } t \geq t_{\ell, \ell'} \\ \phi_\ell(t) \geq \phi_{\ell'}(t) & \text{si } t \leq t_{\ell, \ell'} \end{cases} \quad (3.51)$$

3. Si

$$\ell \leq \ell' \leq \ell'' \quad (3.52)$$

alors

$$t_{\ell, \ell'} < t_{\ell, \ell''} < t_{\ell', \ell''} \quad (3.53)$$

4. Soit

$$\{\phi_\ell(t), a \leq \ell \leq b\} \quad (3.54)$$

alors

$$\frac{a^2}{2D} \leq t_{\ell, \ell'} \leq \frac{b^2}{2D} \quad \forall a \leq \ell \leq \ell' \leq b \quad (3.55)$$

**Démonstration 3.3.2 .**

1.

$$\phi_\ell(t) = \phi_{\ell'}(t) \Leftrightarrow \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}} = \frac{\ell'}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell'^2}{4Dt}} \Leftrightarrow t = t_{\ell, \ell'} = \frac{\ell^2 - \ell'^2}{4D \text{Log}(\frac{\ell}{\ell'})} \quad (3.56)$$

2.  $\ell \leq \ell'$  alors

Si

$$t \leq t_{\ell, \ell'} \Rightarrow e^{\frac{\ell^2 - \ell'^2}{4Dt}} \leq e^{\frac{\ell^2 - \ell'^2}{4Dt_{\ell, \ell'}}} = \frac{\ell}{\ell'} \quad (3.57)$$

$$\Rightarrow \frac{\ell'}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell'^2}{4Dt}} \leq \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}}$$

Si

$$t \geq t_{\ell, \ell'} \Rightarrow e^{\frac{\ell^2 - \ell'^2}{4Dt}} \geq e^{\frac{\ell^2 - \ell'^2}{4Dt_{\ell, \ell'}}} = \frac{\ell}{\ell'} \quad (3.58)$$

$$\Rightarrow \frac{\ell'}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell'^2}{4Dt}} \geq \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}}$$

3. Pour démontrer l'inégalité (3.53), nous commençons par démontrer que la fonction

$\psi(x) = \frac{x^2 - b^2}{4D \text{Log}(\frac{x}{b})}$  est une fonction croissante dans  $[a, b]$ . En faisant le changement de variable  $z = \text{Log}(\frac{x}{b})^2$  la fonction  $\psi(x)$  s'écrit  $\psi(z) = \frac{b^2(e^z - 1)}{2Dz}$  qui est une fonction connue croissante. Puisque le changement de variable est aussi une fonction croissante de  $x$ ,  $\psi(x)$  est croissante. Par conséquent si  $\ell \leq \ell' \leq \ell''$  alors  $\frac{\ell^2 - \ell'^2}{\text{Log}(\frac{\ell}{\ell'})} = t_{\ell, \ell'} \leq \frac{\ell^2 - \ell''^2}{\text{Log}(\frac{\ell}{\ell''})} = t_{\ell, \ell''} \leq \frac{\ell'^2 - \ell''^2}{\text{Log}(\frac{\ell'}{\ell''})} = t_{\ell', \ell''}$ . (cqfd)

4. Soit  $\{\phi_\ell(t), a \leq \ell \leq b\}$ , nous venons de voir que  $\forall a \leq \ell, \ell' \leq b$

$$t_{\ell, \ell'} = t_{\ell', \ell} = \frac{\ell^2 - \ell'^2}{4D \ln \frac{\ell}{\ell'}} \quad (3.59)$$

**Remarque 3.3.1** Les propriétés étudiées ci dessus restent valables dans les cas où  $a$  et  $b$  prennent les valeurs

1.

$$a = x\sqrt{\varepsilon_2} \quad \text{et} \quad b = x\sqrt{\varepsilon_1} \quad (3.60)$$

2.

$$a = \bar{X}(x) - \gamma \quad \text{et} \quad b = \bar{X}(x) + \gamma \quad (3.61)$$

où

$$\bar{X}(x) = \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{2} \quad (3.62)$$

et

$$0 \leq \gamma \leq \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2} \quad (3.63)$$

Nous nous intéressons au deuxième cas, car, comme on le verra, pour chaque paramètre  $\gamma$  nous allons définir un voisinage autour de  $\phi_{\bar{X}(x)}$  qui contiendra les fonctions  $\phi_\ell$ ,  $\bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma$ .

Les fonctions  $\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t)$  et  $\phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t)$  vérifient les propriétés suivantes qui sont des conséquences directes de la proposition (3.3.2).

1.  $\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t)$  présente un maximum en  $t = \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}$  et  $\phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t)$  présente un maximum en  $t = \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D}$
2. Les courbes représentatives des fonctions du temps  $\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t)$  et  $\phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t)$  présentent un point d'intersection en  $t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma}$ .
- 3.

$$\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) \geq \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t), \quad \text{si } t \leq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \quad (3.64)$$

et

$$\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) \leq \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t), \quad \text{si } t \geq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \quad (3.65)$$

4. Soit  $\{\phi_\ell, \bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma\}$ , alors

$$\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D} \leq t_{\ell, \ell'} \leq \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D} \quad \forall \bar{X}(x) - \gamma \leq \ell, \ell' \leq \bar{X}(x) + \gamma \quad (3.66)$$

5.

$$\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) \geq \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t), \quad \text{si } t \leq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \quad (3.67)$$

et

$$\phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) \leq \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t), \quad \text{si } t \geq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \quad (3.68)$$

Pour chaque  $\gamma \in [0, \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2}]$ , nous définissons un voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  de la fonction  $\phi_{\bar{X}(x)}$  par

$$\mathcal{V}_\gamma = \{\phi_\ell, \ell \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]\} \quad (3.69)$$

### 3.3.1 Frontière inférieure $K_\gamma^-$ de $\mathcal{V}_\gamma$

Pour chaque valeur du paramètre  $\gamma$  nous montrons que la borne inférieure  $K_\gamma^-$  du voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  est telle que :

#### Définition 3.3.1

$$K_\gamma^-(t) = \begin{cases} \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t) & \text{si } t \leq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \\ \phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) & \text{si } t \geq t_{\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma} \end{cases} \quad (3.70)$$

#### Proposition 3.3.3

$$\forall \ell \text{ tel que } \bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma, \quad \phi_\ell(t) \geq K_\gamma^-(t) \quad (3.71)$$

**Démonstration 3.3.3 :**

$$\begin{aligned} t_{\ell, (\bar{X}(x)-\gamma)} &= \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2 - \ell^2}{4D \ln \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)}{\ell}} \\ &\leq t_{(\bar{X}(x)-\gamma), (\bar{X}(x)+\gamma)} = \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2 - (\bar{X}(x) + \gamma)^2}{4D \ln \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)}{(\bar{X}(x)+\gamma)}} \end{aligned}$$

$$\leq t_{\ell,(\bar{X}(x)+\gamma)} = \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2 - \ell^2}{4D \ln \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)}{\ell}} \quad (3.72)$$

Si  $t \leq t_{(\bar{X}(x)-\gamma),(\bar{X}(x)+\gamma)} \leq t_{\ell,(\bar{X}(x)+\gamma)}$  ceci implique que

$$e^{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt}} \geq e^{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt_{(\bar{X}(x)-\gamma),(\bar{X}(x)+\gamma)}}} \geq e^{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt_{\ell,(\bar{X}(x)+\gamma)}}} = \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)}{\ell} \quad (3.73)$$

et donc

$$\frac{(\bar{X}(x) + \gamma)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4Dt}} \leq \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}} \quad (3.74)$$

La deuxième inégalité se retrouve de la même façon :

Si  $t \geq t_{(\bar{X}(x)-\gamma),(\bar{X}(x)+\gamma)} \geq t_{(\bar{X}(x)-\gamma),\ell}$  alors

$$e^{\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt}} \geq e^{\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt_{(\bar{X}(x)-\gamma),(\bar{X}(x)+\gamma)}}} \geq e^{\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - \ell^2}{4Dt_{(\bar{X}(x)-\gamma),\ell}}} = \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)}{\ell} \quad (3.75)$$

donc

$$\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{4Dt}} \leq \frac{\ell}{\sqrt{4\pi Dt^3}} e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}} \quad (3.76)$$

### 3.3.2 Frontière supérieure $K_\gamma^+$ de $\mathcal{V}_\gamma$

De la même façon, pour chaque valeur du paramètre  $\gamma$  nous montrons que la borne supérieure  $K_\gamma^+$  du voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  est telle que :

**Définition 3.3.2**

$$K_\gamma^+(t) = \begin{cases} \phi_{(\bar{X}(x)-\gamma)}(t), & \text{Si } t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D} \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi t}}, & \text{Si } \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D} < t < \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D} \\ \phi_{(\bar{X}(x)+\gamma)}(t), & \text{Si } t \geq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D} \end{cases} \quad (3.77)$$

**Proposition 3.3.4**

$$\forall \ell \text{ tel que } \bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma, \quad \phi_\ell(t) \leq K_\gamma^+(t) \quad (3.78)$$

**Démonstration 3.3.4 .**

Dans les domaines  $t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$  et  $t \geq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}$  la démonstration se fait de la même façon que dans la proposition (3.3.3).

Faisons la démonstration pour  $\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D} < t < \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}$ .

La valeur de  $\ell$ , qu'on note  $\ell_t$ , qui annule la dérivée de  $\phi_\ell(t)$  par rapport à  $\ell$  nous donne le maximum de la fonction  $\phi_\ell(t)$ , pour chaque instant  $t$  c'est à dire :

$$\phi_{\ell_t}(t) = \sup_{\ell} \phi_\ell(t) \quad (3.79)$$

calculons  $\ell_t$

$$\frac{\partial \phi_\ell(t)}{\partial \ell} = \frac{e^{-\frac{\ell^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt^3}} \left(1 - \frac{\ell^2}{2Dt}\right) = 0 \Rightarrow \ell = \sqrt{2Dt} = \ell_t \quad (3.80)$$

On voit bien que :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \ell_t \leq (\bar{X}(x) - \gamma) & \text{si } t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D} \\ (\bar{X}(x) - \gamma) \leq \ell_t \leq (\bar{X}(x) + \gamma) & \text{si } \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D} \\ \ell_t \geq (\bar{X}(x) + \gamma) & \text{si } t \geq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D} \end{array} \right. \quad (3.81)$$

Ce qui veut dire que  $\ell_t \in [(\bar{X}(x) - \gamma), (\bar{X}(x) + \gamma)]$  pour  $t \in \left[\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}\right]$  et  $\phi_{\ell_t}(t) \geq \phi_\ell(t)$  dans cet intervalle.

Les propositions précédentes admettent une réciproque qui achève la caractérisation du voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  :

**Proposition 3.3.5 .**

Si

$$\forall t \geq 0, \quad K_\gamma^-(t) \leq \phi_\ell(t) \leq K_\gamma^+(t) \quad (3.82)$$

alors

$$\bar{X}(t) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(t) + \gamma \quad (3.83)$$

**Démonstration 3.3.5 .**

Si (3.82) n'est pas vérifiée, alors soit  $\ell < \bar{X}(t) - \gamma$ , ou bien  $\ell > \bar{X}(t) + \gamma$ .

Dans le premier cas, d'après la proposition (3.3.1),  $\phi_\ell(t)$  a un maximum strictement plus grand que toutes les fonctions qui vérifient (3.82), donc  $\phi_\ell$  ne peut pas vérifier (3.83). Le même raisonnement s'applique dans le deuxième cas.

**Remarque 3.3.2 .**

D'après les propositions (3.3.1), (3.3.2), (3.3.3), (3.3.4), (3.3.5) nous concluons aussi que

$$K_\gamma^-(t) = \inf_{\bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma} \phi_\ell(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (3.84)$$

et

$$K_\gamma^+(t) = \sup_{\bar{X}(x) - \gamma \leq \ell \leq \bar{X}(x) + \gamma} \phi_\ell(t) \quad \forall t \geq 0 \quad (3.85)$$

Et donc, pour tout  $x$  fixé, nous avons l'égalité d'ensembles suivante :

$$\{\omega \in \Omega \text{ tq. } \bar{X}(x) - \gamma \leq X_\omega(x) \leq \bar{X}(x) + \gamma\} = \{\omega \in \Omega \text{ tq. } K_\gamma^-(t) \leq \phi_{X_\omega(x)}(t) \leq K_\gamma^+(t)\} \quad (3.86)$$

**Remarque 3.3.3 .**

Si  $\gamma$  prend la valeur  $\frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2}$  nous retrouvons le cas  $a = x\sqrt{\varepsilon_2}$  et  $b = x\sqrt{\varepsilon_1}$ . Dans ce cas

nous noterons  $K^-(t)$  la frontière inférieure et  $K^+(t)$  la frontière supérieure :

$$K^-(t) = \begin{cases} \phi_{x\sqrt{\varepsilon_1}}(t) & \text{si } t \leq t_{x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}} \\ \phi_{x\sqrt{\varepsilon_2}}(t) & \text{si } t \geq t_{x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}} \end{cases} \quad (3.87)$$

et

$$K^+(t) = \begin{cases} \phi_{x\sqrt{\varepsilon_2}}(t), & \text{Si } t \leq \frac{x^2\varepsilon_2}{2D} \\ \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{t}, & \text{Si } \frac{x^2\varepsilon_2}{2D} < t < \frac{x^2\varepsilon_1}{2D} \\ \phi_{x\sqrt{\varepsilon_1}}(t), & \text{Si } t \geq \frac{x^2\varepsilon_1}{2D} \end{cases} \quad (3.88)$$

**Remarque 3.3.4** Les expressions (3.87) et (3.88) de  $K^-$  et  $K^+$  font apparaître naturellement quatre intervalles de temps :

$$I_0 = [0, \frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}] \quad (3.89)$$

$$I_1 = [\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, t_{x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}}] \quad (3.90)$$

$$I_2 = [t_{x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}] \quad (3.91)$$

$$I_\infty = [\frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}, \infty[ \quad (3.92)$$

Pour  $t \in I_1 \cup I_2$ , soit  $\ell_t = \sqrt{2Dt}$ , la valeur de  $\ell$  telle que

$$\phi_{\ell_t}(t) = \sup_{x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}} \phi_\ell(t) = K^+(t) \quad (3.93)$$

Le Lemme suivant montre que tous les  $\ell \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$  apparaissent une fois comme  $\ell_t$  pour une et une seule valeur de  $t$ .

**Lemme 3.3.1**

$$\forall \ell \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}], \quad \exists t \in [\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}] \text{ telque } \ell = \ell_t = \sqrt{2Dt} \quad (3.94)$$

**Démonstration 3.3.6**

$$\ell = \sqrt{2Dt} \Rightarrow t_\ell = \frac{\ell^2}{2D} \quad (3.95)$$

## 3.4 Comparaison des réalisations à la moyenne

Dans la pratique, on aimerait comparer les fluctuations des mesures par rapport à une moyenne qui est calculée par rapport à toutes les réalisations du processus. Dans notre modèle, nous tenons compte de l'irrégularité du milieu en considérant la porosité comme un processus aléatoire télégraphique que nous notons  $\varepsilon_\omega(x)$  et la moyenne est

calculée par rapport à ce processus. Dans ce cas, la mesure expérimentale est la solution de l'équation de la diffusion poreuse pour une réalisation du processus qui correspond à un tube concret utilisé dans l'expérience. Il se trouve que dans notre modèle, nous allons démontrer que la moyenne n'est pas la meilleure candidate pour évaluer les fluctuations des mesures du fait qu'il existe toujours un intervalle de temps où ces dernières s'éloignent de la moyenne. Nous lui substituons alors la comparaison entre chaque réalisation et une fonction de référence  $\phi_{\bar{X}(x)}$ , dont nous donnerons l'expression explicite par la suite.

### 3.4.1 Position de la moyenne $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ par rapport à $K^-(t)$ et $K^+(t)$

Nous avons noté par  $K^-$  et  $K^+$  l'inf et le sup sur  $\ell$  pour chaque valeur de  $t$  des fonctions  $\phi_\ell(t)$ . Nous avons vu, plus haut, que tous les  $\phi_\ell(t)$ ,  $\ell \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$  sont compris entre ces deux frontières. Nous verrons, dans ce qui suit, que la moyenne y est comprise aussi. Nous avons démontré, au début du chapitre, que chaque réalisation  $U_\omega(x, t)$  s'écrit sous la forme,  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$ ,  $X_\omega(x) \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ . Nous nous proposons dans ce paragraphe d'évaluer avec quelle probabilité les réalisations sont proches de la moyenne quelque soit le temps  $t$ . Nous allons démontrer, plus loin, qu'il existe un intervalle de temps où chaque  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$  s'éloigne de la moyenne. Donc la probabilité d'avoir  $\phi_{X_\omega(x)} = U_\omega(x, t)$  près de  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  est égale à zéro.

#### Proposition 3.4.1

$$\forall t > 0, \quad K^-(t) < \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega < K^+(t) \quad (3.96)$$

Notons que l'inégalité est stricte dans cette proposition.

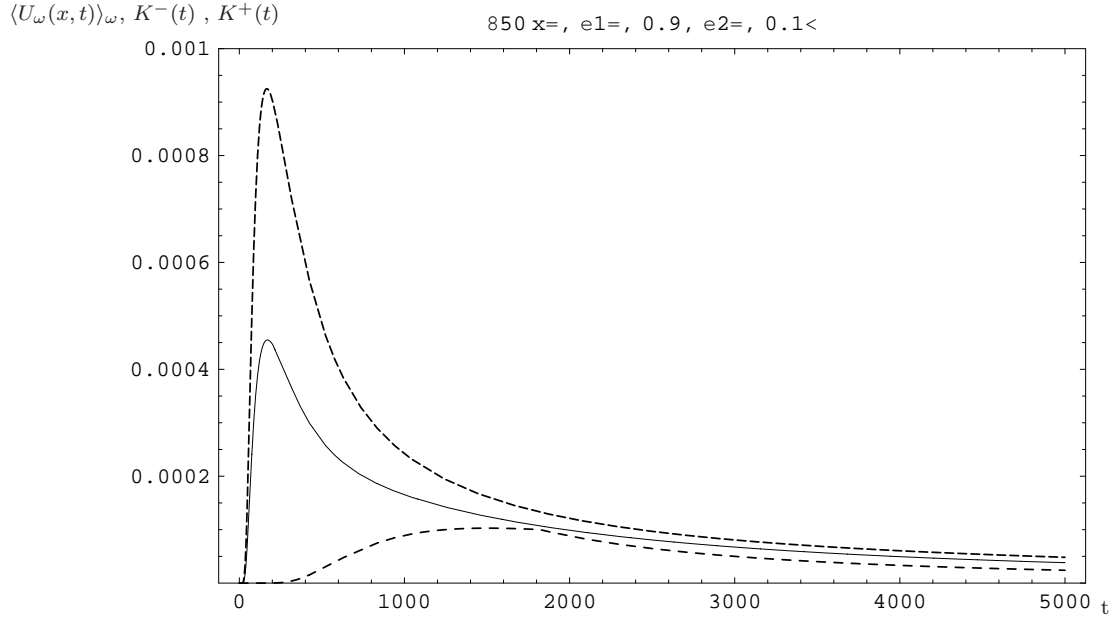


FIG. 3.4 – Graphes de  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega(-)$ , de  $K^+(t)$  (-) et de  $K^-(t)$ (-)

**Démonstration 3.4.1** *On a bien*

$$K^-(t) = \inf_{\ell} \phi_{\ell}(t) < K^+(t) = \sup_{\ell} \phi_{\ell}(t) \quad (3.97)$$

Par ailleurs, la fonction  $\phi_{\ell}(t)$  n'étant pas constante dans l'intervalle  $[x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$  et la densité de probabilité  $f^x(\ell)$  n'étant pas Dirac, alors

$$K^-(t) < \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \phi_{\ell}(t) f^x(\ell) d\ell = \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega < K^+(t) \quad (3.98)$$

Nous avons donc démontré que la moyenne est bien **strictement** entre  $K^+$  et  $K^-$  quelque soit le temps considéré.

### 3.4.2 Moyenne et réalisations

Nous avons vu que les réalisations touchent toutes une fois la frontière supérieure  $K^+$  dans l'intervalle  $I_1 \cup I_2$  (lemme (3.3.1)). Ceci est un résultat très intéressant : comme les  $\phi_{\ell}$  sont continues sur l'intervalle fermé  $I_1 \cup I_2$  alors il existe toujours un intervalle

de temps autour du point d'intersection, même petit, où les réalisations s'éloignent de la moyenne. D'où la proposition suivante.

**Proposition 3.4.2 .**

$\exists \delta > 0$ , tel que

$$P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega| < \delta\} = 0 \quad (3.99)$$

**Démonstration 3.4.2** Nous venons de démontrer que

$$\forall t \in \left[\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}\right], \quad K^-(t) < \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega < K^+(t) \quad (3.100)$$

alors

$$\exists \delta' > 0 \quad tq. \quad K^+(t) - \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega > \delta', \forall t \in \left[\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}\right] \quad (3.101)$$

$$\exists \delta'' > 0 \quad tq. \quad \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega - K^-(t) > \delta'', \forall t \in \left[\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}\right] \quad (3.102)$$

$$Si \quad \delta = \inf(\delta', \delta'') \Rightarrow K^-(t) + \delta < \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega < K^+(t) - \delta, \forall t \in \left[\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D}\right] \quad (3.103)$$

Nous savons aussi que pour  $x$  fixé,

$$\forall \omega \in \Omega, \quad U_\omega(x, t) = \phi_{X_\omega(x)}(t) \quad (3.104)$$

Soit  $t_\omega$  tel que  $t_\omega = \frac{X_\omega(x)^2}{2D}$  (l'instant où  $\phi_{X_\omega(x)}(t) = K^+(t)$ )

alors

$$U_\omega(x, t_\omega) = K^+(t_\omega) > \langle U_\omega(x, t_\omega) \rangle_\omega + \delta \quad (3.105)$$

Cela veut dire qu'il existe un intervalle  $I_{t_\omega}(\delta)$  autour de  $t_\omega$  tel que

$$\forall t \in I_{t_\omega}(\delta), U_\omega(x, t) > \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega + \delta \quad (3.106)$$

donc l'ensemble

$$\{\omega \in \Omega, \exists I_{t_\omega}(\delta), U_\omega(x, t) > \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega + \delta, \forall t \in I_{t_\omega}(\delta)\} = \Omega \quad (3.107)$$

Ceci veut dire que quelque soit le temps dans un intervalle autour de  $t_\omega$ , la réalisation s'éloigne de la moyenne de plus de  $\delta$ .

donc

$$P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega| < \delta\} = 0 \quad (3.108)$$

**Comparaison de la moyenne à  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  :**

Nous avons vu dans la proposition (3.4.2) que quelque soit  $\ell \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ , il existe toujours un intervalle de temps où  $\phi_\ell$  s'éloigne de la moyenne.

Nous allons voir par la suite que les  $\phi_\ell(t)$  sont proches de  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$

Donc il est important de comparer  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  à  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$

D'après la démonstration de la proposition (3.4.2), il existe un intervalle de temps tel que

$|\phi_{\bar{X}(x)}(t) - \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega| > \delta$ . La figure suivante montre un cas typique.

$\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega, \phi_{\bar{X}(x)}(t)$

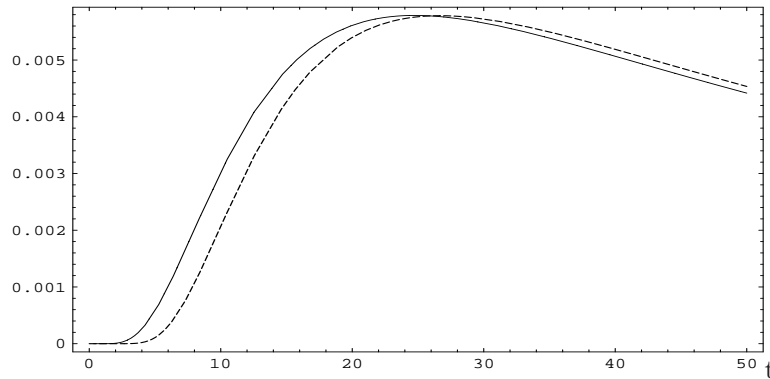


FIG. 3.5 – Comparaison de la moyenne  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  (—) à  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  (- - -)

## Quelques propriétés de la moyenne :

Nous jugeons quand même intéressant de rajouter ce paragraphe pour voir comment évolue le point d'intersection de  $\phi_\ell(t)$  avec  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  pour chaque  $t$  et ainsi décrire plus précisément  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ .

Soit  $\bar{\ell}_t$  la valeur de  $\ell$  telle que  $\phi_\ell(t) = \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ .

Pour voir son évolution, nous considérons les tracés des graphes des  $\phi_\ell(t)$  en fonction de  $\ell$  pour des temps appartenant à trois intervalles différents. Les trois intervalles en question sont  $I_0 = [0, \frac{x^2\varepsilon_2}{2D}]$ ,  $I_1 \cup I_2 = [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2\varepsilon_1}{2D}]$ ,  $I_\infty = [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, +\infty]$ .

Nous savons que

- si  $t$  est dans  $I_0 = [0, \frac{x^2\varepsilon_2}{2D}]$ , alors  $\phi_\ell(t)$  qui est une fonction de  $\ell$ , décroît dans l'intervalle  $[x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ .
- Si  $t$  est dans  $I_1 \cup I_2 = [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2\varepsilon_1}{2D}]$ , elle croit puis décroît dans  $[x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ .
- Par contre si  $t$  est dans  $I_\infty = [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, +\infty]$  elle est croissante dans  $[x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ .

Si on représente, dans les mêmes graphes, les lignes horizontales correspondant aux moyennes en chacun des temps  $t$ , on voit que

1.  $\forall t \in [0, \frac{x^2\varepsilon_2}{2D}]$  la moyenne croise  $\phi_\ell(t)$  en un point
2. Si  $t \in [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, \frac{x^2\varepsilon_1}{2D}]$ , on définit  $\bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_2}}$  l'instant où la moyenne touche  $\phi_{\sqrt{\varepsilon_2}}(t)$  et  $\bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_1}}$  l'instant où la moyenne touche  $\phi_{\sqrt{\varepsilon_1}}(t)$ . Alors si  $t \in [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, \bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_2}}[ \cup ]\bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_1}}, \frac{x^2\varepsilon_1}{2D}]$  la moyenne est égale à  $\phi_\ell(t)$  en un point seulement; par contre si  $t \in ]\bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_2}}, \bar{t}_{x\sqrt{\varepsilon_1}}[$  les deux courbes ont deux points d'intersection et donc dans ce cas, il existe deux valeurs de  $\bar{\ell}_t$
3.  $\forall t \in [\frac{x^2\varepsilon_2}{2D}, +\infty]$  elles ne se rencontrent qu'en un seul point

On conclue que quelque soit  $t > 0$ , et quelque soit  $\ell \in [x\sqrt{\varepsilon_2}, x\sqrt{\varepsilon_1}]$ , il existe toujours un

$\phi_\ell(t), \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$

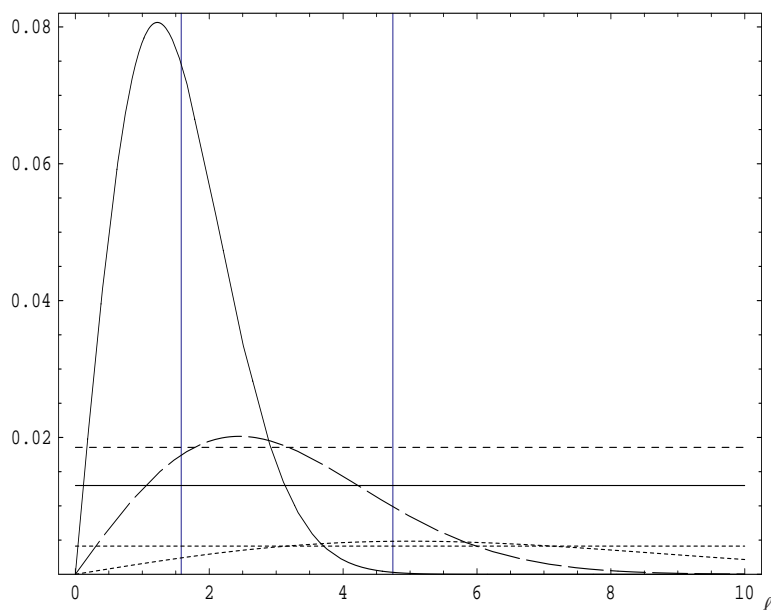


FIG. 3.6 – Graphes de  $\phi_\ell(t)$  (courbes) et  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  (lignes horizontales) pour différentes valeurs du temps  $t$ ;  $t_1 = 3(\dots), t_2 = 12(---), t_3 = 50(-)$ ,  $\frac{x^2 \varepsilon_2}{2D} = 5, \frac{x^2 \varepsilon_1}{2D} = 45, x\sqrt{\varepsilon_2} = 1.58$  (première ligne verticale),  $x\sqrt{\varepsilon_1} = 4.74$  (deuxième ligne verticale)

$t$  et un seul ou  $\phi_\ell = \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ .

### 3.5 Comparaison des réalisations à $\phi_{\bar{X}(x)}$

Nous venons de démontrer un résultat inattendu : quelque soit la réalisation  $\omega \in \Omega$  du processus aléatoire, il y a toujours un moment où la solution de l'équation de la diffusion poreuse pour cette réalisation s'éloigne de la moyenne effectuée par rapport au processus. Ceci change le point de vue qui consiste à considérer la moyenne comme la fonction appropriée pour quantifier les fluctuations de la concentration dans le milieu poreux irrégulier. Nous allons démontrer, dans ce qui va suivre, que les solutions correspondant à chaque réalisation sont beaucoup plus proches de  $\phi_{\bar{X}(x)}$ . Je rappelle que  $\bar{X}(x) = \langle X_\omega(x) \rangle_\omega$ . Pour évaluer les fluctuations entre  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$  et  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  dans le cas où  $x$  est fixé, nous

procédons comme suit : Nous construisons autour de  $\phi_{\bar{X}(x)}$  une famille de voisinages dont chacun est un ensemble de fonctions  $\phi_\ell$ . Les voisinages sont indexés par un paramètre  $\gamma$ . Chaque voisinage est défini par deux bornes, inférieure  $K_\gamma^-(t)$  et supérieure  $K_\gamma^+(t)$  et contient toutes les fonctions  $\phi_\ell$  qui sont entre ces bornes. Chaque voisinage a un diamètre qui n'est pas constant dans le temps. Mais leur avantage est que nous pouvons relier la probabilité de présence de  $\phi_\ell$  dans le voisinage à la valeur du paramètre  $\gamma$  et ainsi optimiser le contrôle des fluctuations à des temps différents. Ces dernières ne sont importantes que pour des temps intermédiaires et sont plus petites pour des temps grands. Notons que cette échelle des temps est à comparer à celle de la diffusion et donc dépendra de la position  $x$  où l'observation est effectuée. Mais en tout état de cause le paramètre  $\gamma$ , et par conséquent le voisinage qui lui est associé, joue dans notre approche, le rôle de la "précision" de l'approximation. Nous introduisons un diamètre  $\delta(\gamma)$  pour chacun de ces voisinages. Nous regardons le comportement de  $\delta(\gamma)$  en fonction de  $\gamma$  et nous évaluons la probabilité  $P^x(\gamma)$  des réalisations correspondant à chaque voisinage.

### 3.5.1 Diamètre $\delta(\gamma)$

Nous avons vu plus haut, que pour chaque  $x$ ,  $\bar{X}(x) = \langle X_\omega(x) \rangle_\omega$ . Nous lui avons associé la fonction  $\phi_{\bar{X}(x)}$ . Nous avons défini un voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  autour de  $\phi_{\bar{X}(x)}$ . Nous proposons, dans ce qui va suivre, d'évaluer le diamètre  $\delta(\gamma)$  du voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$ . Nous le définissons comme suit :

**Définition 3.5.1 :**

1.

$$\delta(\gamma, t) = K_\gamma^+(t) - K_\gamma^-(t) \tag{3.109}$$

2.

$$\delta(\gamma) = \sup_t \delta(\gamma, t) \quad (3.110)$$

**Proposition 3.5.1** .

Si  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$  :

$$\delta(\gamma) \leq C(\bar{X}(x))\gamma \quad (3.111)$$

où

$$C(\bar{X}(x)) = \frac{14D}{\bar{X}(x)^3} \quad (3.112)$$

**Démonstration 3.5.1**

$$\delta(\gamma, t) = \int_a^b g(\lambda, t) d\lambda \quad \text{ou} \quad g(\lambda, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{t^{-5/2}}{4\sqrt{\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (3.113)$$

$a$  et  $b$  dépendent de l'intervalle où on prend  $t$  et  $g(\lambda, t)$  est une fonction bornée dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$ . Elle admet un maximum en  $\lambda = \sqrt{6Dt}$  et elle s'annule en  $\lambda = \sqrt{2Dt}$ . Puis on utilise

$$\delta \leq (b - a) \sup_{\lambda \in [a, b]} |g| \quad (3.114)$$

et on étudie différents cas suivant le signe de  $g$ .

$$1. \text{ Si } t \leq \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}, \quad a = \bar{X}(x) - \gamma \text{ et } b = \bar{X}(x) + \gamma$$

$$- \text{ Si } t < \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{6D}, \quad g(\lambda, t) \text{ décroît dans } [a, b].$$

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{0 \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{6D}} 2\gamma g(\bar{X}(x) - \gamma, t) \quad (3.115)$$

En posant  $\tau = \frac{2Dt}{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}$ , on obtient :

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \frac{1}{3}} \frac{4\gamma D \tau^{-5/2}}{\sqrt{2\pi}(\bar{X}(x) - \gamma)^3} (1 - \tau) e^{-\frac{1}{2\tau}} = \frac{14\gamma D}{\bar{X}^3(x)} \equiv \delta_0(\gamma) \quad (\text{car } \gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}) \quad (3.116)$$

– Si  $\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D}$  et si  $\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$ , ( ce qui arrive si  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$ )

le maximum de  $g(\lambda, t)$  est atteint en  $\lambda = \sqrt{6Dt}$  et

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D}]} \frac{2}{\sqrt{\pi D e^3}} \gamma t^{-3/2} \leq \frac{8.7D\gamma}{\bar{X}^3(x)} \leq \delta_0(\gamma) \quad (3.117)$$

– Si  $\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} < t < \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}} 2\gamma g(\bar{X}(x) + \gamma, t) \equiv \delta_1(\gamma) \quad (3.118)$$

2. Si  $t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}]$ , ici  $a = \sqrt{2Dt}$ ,  $b = \bar{X}(x) + \gamma$

– Si  $t \geq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D}$

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}]} (b-a)g(\bar{X}(x) + \gamma, t) \equiv \delta_2(\gamma) \quad (3.119)$$

– Si  $t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}$  on a  $t \notin [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}]$  : cas impossible

– Si  $\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D}$  on a  $t \notin [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}]$  : cas impossible

3. Si  $t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}]$ , même chose que dans 2 avec  $a = \bar{X}(x) - \gamma$  et

$b = \sqrt{2Dt}$ .

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}]} (\sqrt{2Dt} - (\bar{X}(x) - \gamma))g(\bar{X}(x) - \gamma, t) \equiv \delta_3(\gamma) \quad (3.120)$$

4. Si  $t \in [\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}, \infty]$ , même chose que dans 1 avec  $|g| = -g$ .

$$\delta(\gamma) \leq \sup_{t \in [\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}, \infty]} 2\gamma g(\bar{X}(x) - \gamma, t) \equiv \delta_4(\gamma) \quad (3.121)$$

Nous prendrons pour diamètre du voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$  le plus grand de tous les  $\delta$  que nous venons de calculer.

$$\delta(\gamma) \leq \delta_0(\gamma) \vee \delta_1(\gamma) \vee \delta_2(\gamma) \vee \delta_3(\gamma) \vee \delta_4(\gamma) \quad (3.122)$$

Nous trouvons, finalement (voir annexe D)

$$\delta(\gamma) \leq \frac{14D}{\bar{X}^3(x)} \gamma \quad (3.123)$$

### 3.5.2 Probabilité $P^x(\gamma)$

Nous avons vu précédemment que la variable aléatoire  $X_\omega(x)$  suit la loi  $f^x(\ell)$ . Nous avons défini  $\mathcal{V}_\gamma$ , le voisinage autour de  $\bar{X}(x)$ . Nous avons vu que le diamètre  $\delta(\gamma)$  de ce voisinage ne dépasse pas une certaine valeur que nous venons de calculer. Dans ce qui va suivre, nous allons étudier la probabilité  $P^x(\gamma)$  pour que  $\phi_{X_\omega(x)}(t)$  soit comprise entre  $K_\gamma^-(t)$  et  $K_\gamma^+(t)$  quelque soit le temps  $t > 0$ .

**Définition 3.5.2** *D'après la remarque (3.3.2)*

$$P^x(\gamma) = \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} f^x(\tau) d\tau \quad (3.124)$$

**Propriétés de  $P^x(\gamma)$**

1.  $0 \leq P^x(\gamma) \leq 1$
2.  $P^x(0) = 0$
3.  $P^x(\gamma_{max}) = 1$
4.  $P^x(\gamma_{max} - 0) = 1 - e^{-\nu x} \neq P^x(\gamma_{max})$
5.  $\frac{dP^x(\gamma)}{d\gamma} = 2f^x(\bar{X}(x) + \gamma) = 2f^x(\bar{X}(x) - \gamma)$
6.  $\frac{d^2P^x(\gamma^2)}{d\gamma^2} \leq 0$  alors la courbe de  $P^x(\gamma)$  en fonction de  $\gamma$  est concave dans  $[0, \gamma_{max}[$
7. Si  $\gamma < \gamma_{max}$  alors  $P^x(\gamma) = 1 - e^{-\nu x}$

Nous allons maintenant trouver un minorant pour  $P^x(\gamma)$

**Proposition 3.5.2** .

$$P^x(\gamma(\delta)) \geq \frac{\bar{X}^3(x)}{4D} \frac{\nu x e^{-\nu x}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}} \left(1 + \frac{\nu x}{2}\right) \delta \quad (3.125)$$

### Démonstration 3.5.2

$$P^x(\gamma) = \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} f^x(\tau) d\tau \geq 2\gamma \min[f^x(\bar{X}(x) - \gamma_{max}), f^x(\bar{X}(x) + \gamma_{max})] \quad (3.126)$$

Or  $f^x(\ell)$  est paire et décroissante dans  $[\bar{X}(x), \bar{X}(x)+\gamma]$ , (croissante sur  $[\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)]$ ),

$\gamma \in [0, \gamma_{max}]$  et  $\gamma_{max} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{2}$ .

$$f^x(\bar{X}(x) + \gamma_{max}) = \frac{\nu x e^{-\nu x}}{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} \left(1 + \frac{\nu x}{2}\right) \quad (3.127)$$

En remplaçant  $\gamma$  par son expression en fonction de  $\delta$ , (3.123) nous trouvons :

$$P^x(\gamma) \geq \frac{\bar{X}^3(x)}{4D} \frac{\nu x e^{-\nu x}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}} \left(1 + \frac{\nu x}{2}\right) \delta \quad (3.128)$$

### 3.5.3 $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ et les réalisations

Nous venons de démontrer que la probabilité de présence des  $\phi_\ell(t), \ell \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est minorée par une fonction linéaire en  $\gamma$  équation (3.128). Nous terminons cette section en démontrant la proposition suivante :

#### Proposition 3.5.3

$$\forall \delta_0 > 0, P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \phi_{\bar{X}(x)}(t)| < \delta_0\} \geq P^x(\gamma_0) \quad (3.129)$$

Où  $\gamma_0$  est défini par  $\delta(\gamma_0) = \delta_0$

**Démonstration 3.5.3** Soit  $\mathcal{W}_\gamma$  l'ensemble des réalisations  $\omega \in \Omega$  défini comme suit :

$$\mathcal{W}_\gamma = \{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \phi_{\bar{X}(x)}(t)| \leq \delta(\gamma)\} \quad (3.130)$$

Soit  $V_\gamma$  l'ensemble des réalisations  $\omega \in \Omega$  défini par :

$$V_\gamma = \{\omega \in \Omega, \phi_{\bar{X}(x)}(t) \in \mathcal{V}_\gamma\} = \{\omega \in \Omega, \bar{X}(x) - \gamma \leq X_\omega(x) \leq \bar{X}(x) + \gamma\} \quad (3.131)$$

nous avons

$$V_\gamma \subset \mathcal{W}_\gamma \quad (3.132)$$

Donc

$$P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \phi_{\bar{X}(x)}(t)| \leq \delta(\gamma)\} = P(\mathcal{W}_\gamma(\delta)) \geq P\{V_\gamma\} = P^x(\gamma(\delta)) \quad (3.133)$$

Enfin, si nous utilisons l'inégalité (3.128) et la proposition (3.5.3) nous obtenons le résultat final de ce chapitre :

**Proposition 3.5.4**

$$\forall \delta > 0, \quad P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \phi_{\bar{X}(x)}(t)| \leq \delta(\gamma)\} \geq 3.7D\bar{X}(x)^3 f^x(\bar{X}(x))\delta \quad (3.134)$$

Nous pouvons résumer la situation de la façon suivante : si un expérimentateur fixe un seuil de confiance  $p_0$  (La probabilité avec laquelle il désire avoir notre prévision confirmée) alors il est possible d'assigner un voisinage (un moule autour) de  $\phi_{\bar{X}(x)}$  de façon à trouver la solution (i.e. la mesure)  $\phi_{X_\omega(x)}$  dans le moule avec une probabilité au moins égale à  $p_0$  (pour tout  $t$ ).

Notons que si  $p_0 \geq 1 - e^{-\nu x}$  alors le seul moule possible est  $\mathcal{V}_{\gamma_{max}}$ , c'est à dire l'ensemble de toutes les réalisations. Dans ce cas la réalisation sera dans le moule avec la probabilité 1.

Par contre si  $p_0 < 1 - e^{-\nu x}$ , le moule  $\mathcal{V}_0$  qui lui est associé correspond exactement à la probabilité  $p_0$ .

Nous avons remarqué que chaque moule a une forme dont le diamètre change avec le temps. La valeur maximale de ces diamètres nous a amené à définir  $\delta_0$  : la précision correspondante au seuil de confiance  $p_0$ .

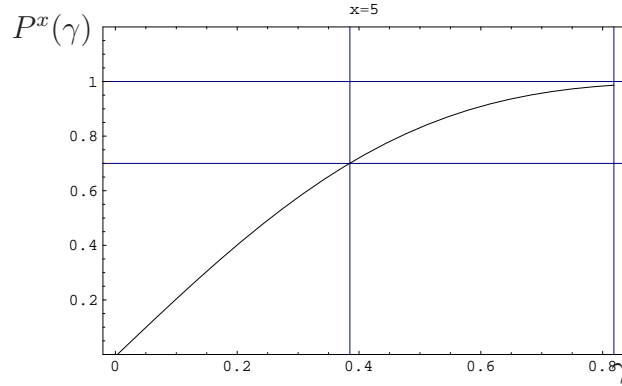


FIG. 3.7 – Variation de  $P^x(\gamma)$  en fonction de  $\gamma$ ,  $x = 5$  ( $\gamma_0 = 0.385$ ,  $p_0 = 0.7$ )

### 3.6 Comportement pour des positions différentes

Ce que nous avons fait jusque là nous permet d'évaluer les fluctuations des mesures de la concentration faites par un expérimentateur en une position  $x$  fixée dans le milieu poreux. Dans ce qui va suivre, nous allons étudier ce qui se passe quand on fait varier la position où s'effectuent les mesures. Pour mettre en évidence cette évolution, nous avons utilisé deux variables sans dimensions  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{x}$  et  $\hat{\delta} = x^2\delta$ .

#### 3.6.1 Evolution de la probabilité avec $x$

Nous avons vu au chapitre 2 que la densité de probabilité de la variable aléatoire  $X_\omega(x)$  s'écrit :

$$f^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} [\delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_2}) + \delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_1})] + \\ + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_1[2\nu\sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] \left( \sqrt{\frac{m^x(\ell)}{x - m^x(\ell)}} + \sqrt{\frac{x - m^x(\ell)}{m^x(\ell)}} \right) + \\ + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_0[2\nu\sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ 0 & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \end{cases} \quad (3.135)$$

Nous avons défini dans le section précédente,  $P^x(\gamma)$ , la probabilité pour que  $\phi_\ell(t)$  soit comprise dans le voisinage  $\mathcal{V}_\gamma$ ,  $0 \leq \gamma \leq \gamma_{max} = x \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{2}$ , par :

$$P^x(\gamma) = \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} f^x(\eta) d\eta = \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} f_1^x(\eta) d\eta + e^{-\nu x} \delta(\gamma - \gamma_{max}) \quad (3.136)$$

Pour comparer donc la variation de ces probabilités pour différentes valeurs de  $x$ , nous posons  $\tilde{\gamma} = \frac{\gamma}{x}$ , et nous définissons :

$$\tilde{P}^x(\tilde{\gamma}) = P(x\tilde{\gamma}) = \int_{\bar{X}(x)-x\tilde{\gamma}}^{\bar{X}(x)+x\tilde{\gamma}} f_1^x(\eta) d\eta + e^{-\nu x} \delta(\tilde{\gamma} - \tilde{\gamma}_{max}) \quad (3.137)$$

où  $\tilde{\gamma}_{max} = \frac{1}{x} \gamma_{max} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{2}$  et

$$f_1^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_1[2\nu \sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] \left( \sqrt{\frac{m^x(\ell)}{x - m^x(\ell)}} + \sqrt{\frac{x - m^x(\ell)}{m^x(\ell)}} \right) + \\ \quad + \frac{\nu e^{-\nu x}}{2(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} I_0[2\nu \sqrt{m^x(\ell)(x - m^x(\ell))}] & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ 0 & \text{Si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \end{cases} \quad (3.138)$$

Dans ce cas,

$$\text{Si } \tilde{\gamma} = 0 \text{ alors } \tilde{P}^x(\tilde{\gamma}) = \tilde{P}^x(0) = 0 \quad (3.139)$$

$$\text{Si } \tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{max} \text{ alors } \tilde{P}^x(\tilde{\gamma}) = \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} f_1^x(\eta) d\eta + e^{-\nu x} = 1 \quad (3.140)$$

Par contre, on a  $\tilde{P}^x(\tilde{\gamma}_{max} - 0) = 1 - e^{-\nu x}$ . La fonction  $\tilde{P}^x$  est donc discontinue en  $\tilde{\gamma}_{max}$  et son saut vaut  $e^{-\nu x}$ . Le saut est d'autant plus petit que  $x$  est grand. Ceci est bien illustré dans le graphe ci contre qui représente la variation de  $\tilde{P}^x(\tilde{\gamma})$  en fonction de  $\tilde{\gamma}$ . Sur ce graphe,  $x$  augmente du bas vers le haut.

Soit  $p_0$  une valeur donnée de  $\tilde{P}^x(\tilde{\gamma})$ , (par exemple, un seuil de confiance donné par l'expérimentateur), alors il existe  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_0$  tel que  $\tilde{P}^{x_0}(\tilde{\gamma}_0) = p_0$ , qui vaut

$$\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}_{max} \quad (3.141)$$

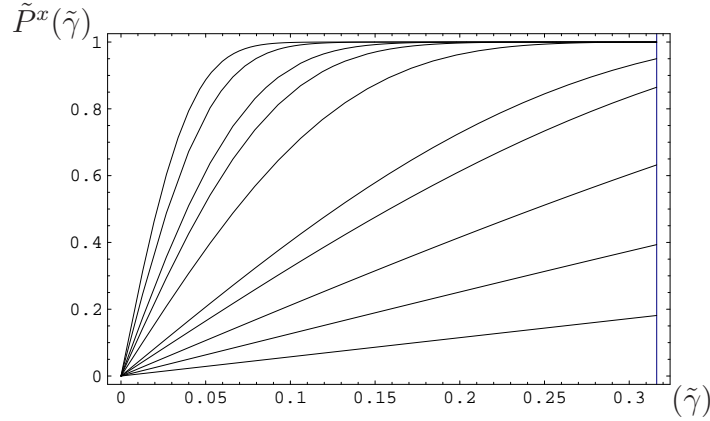


FIG. 3.8 – Variation de  $\tilde{P}^x(\tilde{\gamma})$  en fonction de  $\tilde{\gamma}$ , pour différentes valeurs de  $x$  ( $x$  croissant du bas vers le haut)

qui représente l'abscisse du point d'intersection de la droite  $P^x(\tilde{\gamma}) = p_0$  et la courbe  $P^{x_0}(\tilde{\gamma})$  donc  $x_0$  est tel que

$$p_0 = 1 - e^{-\nu x_0} \quad (3.142)$$

ce qui nous permet d'avoir sa valeur qui est :

$$x_0 = \frac{1}{\nu} \text{Log}\left(\frac{1}{1 - p_0}\right) = \text{Log}\left(\frac{1}{1 - p_0}\right)^{1/\nu} \quad (3.143)$$

La courbe  $P^{x_0}(\tilde{\gamma})$  qui correspond donc à cette valeur  $x = x_0$  sépare les courbes correspondant aux valeurs de  $x \leq x_0$  et  $x > x_0$ .

si  $x \leq x_0$ , alors  $P^x(\tilde{\gamma}) = p_0$  n'intersecte pas  $P^x(\tilde{\gamma})$  et dans ce cas  $\tilde{\gamma} = \tilde{\gamma}_{max}$

Par contre si  $x > x_0$ , alors  $P^x(\tilde{\gamma}) = p_0$  intersecte  $P^x(\tilde{\gamma})$  en un point d'abscisse  $\tilde{\gamma} < \tilde{\gamma}_{max}$ .

On voit bien que plus  $x$  est grand, plus l'abscisse  $\tilde{\gamma}$  du point d'intersection est petite, alors la précision est meilleure.

### 3.6.2 Evolution de la précision avec $x$

**Proposition 3.6.1** Soient  $(x, y) \in \mathcal{R}^2$ ,  $\gamma_x, \gamma_y > 0$  tels que  $\gamma_y = \frac{y}{x}\gamma_x$ ,

$$\delta(\gamma_y) = \frac{x^2}{y^2}\delta(\gamma_x) \quad (3.144)$$

**Démonstration 3.6.1** D'après l'équation (??), Nous pouvons écrire à la position  $y$  si

$\gamma = \gamma_y$  :

$$\delta(\gamma_y, t) = \begin{cases} \int_{\bar{X}(y)+\gamma_y}^{\bar{X}(y)-\gamma_y} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda & \text{Si } 0 \leq t \leq \frac{(\bar{X}(y)-\gamma_y)^2}{2D} \\ \int_{\bar{X}(y)+\gamma_y}^{\ell_t} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda & \text{Si } \frac{(\bar{X}(y)-\gamma_y)^2}{2D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(y)-\gamma_y)^2 - (\bar{X}(y)+\gamma_y)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(y)-\gamma_y}{\bar{X}(y)+\gamma_y}} \\ \int_{\bar{X}(y)-\gamma_y}^{\ell_t} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda & \text{Si } \frac{(\bar{X}(y)-\gamma_y)^2 - (\bar{X}(y)+\gamma_y)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(y)-\gamma_y}{\bar{X}(y)+\gamma_y}} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(y)+\gamma_y)^2}{2D} \\ \int_{\bar{X}(y)-\gamma_y}^{\bar{X}(y)+\gamma_y} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda & \text{Si } t \geq \frac{(\bar{X}(y)+\gamma_y)^2}{2D} \end{cases} \quad (3.145)$$

Si  $\gamma_y = \frac{y}{x}\gamma_x$  et  $t' = \frac{x^2}{y^2}t$ , on aura :

$$\phi_y(t) = \frac{x^2}{y^2}\phi_x(t') \quad (3.146)$$

ceci nous permet de déduire que

$$y^2\delta(\gamma_y, t) = x^2\delta(\gamma_x, t') \quad (3.147)$$

et donc

$$y^2\delta(\gamma_y) = y^2 \sup_{t \in [\bar{X}(y)+\gamma_y, \bar{X}(y)-\gamma_y]} \delta(\gamma_y, t) = x^2 \sup_{t' \in [\bar{X}(x)+\gamma_x, \bar{X}(x)-\gamma_x]} \delta(\gamma_x, t') = x^2\delta(\gamma_x) \quad (3.148)$$

Donc  $\delta(\gamma_y) \leq \delta(\gamma_x)$ . Ceci veut dire que si  $y \geq x$ , les réalisations se rapprochent plus de  $\phi_{\bar{X}(y)}$  qu'elles ne l'étaient de  $\phi_{\bar{X}(x)}$ .

Pour aller au delà de ce que nous avons expliqué dans la section précédente ( $x$  fixé) il suffit de remarquer que maintenant si un expérimentateur fixe un seuil de confiance  $p_0$  alors nos prévisions indiquent que la situation est différente suivant que  $x \leq \text{Log}(\frac{1}{1-p_0})^{\frac{1}{\nu}}$  ou  $x > \text{Log}(\frac{1}{1-p_0})^{\frac{1}{\nu}}$ .

Dans le premier cas, nous ne pouvons proposer que la précision la plus grossière ( $\tilde{\gamma}_{max}$ ) mais évidemment, la probabilité de trouver la réalisation dans ce moule est un.

Dans le deuxième cas, la précision relative sera d'autant meilleure que  $x$  est grand ( $\tilde{\gamma}_0$  diminue). Par contre, un calcul numérique nous a montré que la précision absolue diminue ( $\gamma_0 = x\tilde{\gamma}_0$ , augmente).

## 3.7 Conclusions

Nous venons d'évaluer la probabilité pour que les solutions de l'équation de la diffusion poreuse pour chaque réalisation du processus stochastique soient proches de  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ . Comme on l'a vu, il suffit de réaliser un voisinage autour d'elle et d'évaluer cette probabilité. Contrairement à ce que l'on pensait, la probabilité pour qu'elles soient proches de la moyenne effectuée par rapport au processus est égale à zéro car, comme on l'a vu plus haut, il existe toujours un intervalle de temps où les solutions  $U_\omega(x, t)$  s'éloignent de la moyenne  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$ . Ceci est un résultat inattendu car on a vu que dans la pratique les fluctuations des mesures expérimentales, qui correspondent à nos solutions pour chaque réalisation, ont toujours été évaluées, dans le passé, par rapport à la moyenne. Nous concluons que dans le cas de notre modèle, c'est  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$ , fonction qui correspond à aucune réalisation du processus, qui doit être prise comme fonction de référence pour évaluer les fluctuations des mesures dans les milieux poreux irréguliers. La comparaison des mesures faites à des positions différentes révèle que plus on s'éloigne du point où on a injecté le colorant plus les réalisations se rapprochent de  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  correspondant à la position considérée. Ce qui est en accord avec l'allure des solutions en fonction de la position qui tendent toutes vers zéro quand  $x$  est grand.

# Chapitre 4

## Conclusion générale

### 4.1 Conclusion générale

Un milieu poreux est une structure complexe composée d'un squelette solide et d'un réseau lacunaire. Ce dernier espace est le lieu où se produisent de nombreuses interactions physico-chimiques et les phénomènes de transfert de chaleur et de masse. Dans le travail effectué dans cette thèse, nous nous sommes intéressés au transfert des particules dans un milieu poreux hétérogène. Nous avons pris en compte l'hétérogénéité du milieu en considérant que sa porosité est un processus stochastique télégraphique. Ceci nous a conduit à des solutions de l'équation de la diffusion poreuse stochastique qui dépendent du processus, donc aléatoires aussi. L'objectif visé dans ce travail est l'évaluation des fluctuations des solutions pour chaque réalisation du processus, à la moyenne stochastique effectuée par rapport au processus. Pour atteindre cet objectif, nous avons réparti le travail en trois chapitres.

Dans le premier chapitre, nous avons établi l'équation de la diffusion poreuse dans le cas d'un milieu poreux homogène c'est à dire la porosité est constante égale à  $\varepsilon$  et nous

l'avons résolue.

Dans le chapitre deux, nous avons formulé l'équation pour la dynamique des particules de traceur passif dans les milieux poreux irréguliers où la porosité est considérée comme un processus stochastique. Nous avons considéré un modèle où l'irrégularité du milieu est prise en compte en introduisant dans l'équation de la diffusion, un coefficient stochastique qui est, en fait, la porosité. Nous avons fait quelques rappels de probabilités (loi exponentielle et processus télégraphique) qui sont des outils qui nous ont servi dans l'étude des solutions de l'équation de la diffusion poreuse. La plus grande partie de ce chapitre a été consacrée à l'étude détaillée de la distribution des longueurs efficaces  $X_\omega(x)$  pour des positions  $x$  fixées dans le conduit poreux. Dans ce cas, les longueurs efficaces sont des variables aléatoires.

Dans le chapitre trois, nous avons résolu l'équation de la diffusion poreuse où la porosité est un processus stochastique (équation du modèle obtenue au chapitre 2). Nous avons écrit la solution trouvée pour chaque réalisation du processus à la position  $x$  fixée comme la solution obtenue dans un milieu où la porosité est égale à un mais à une position  $X_\omega(x)$ . Nous avons calculé l'équation d'évolution de la moyenne effectuée sur toutes les réalisations possibles de la porosité. Enfin, nous avons comparé la solution de l'équation de la diffusion obtenue pour chaque réalisation de la porosité à la moyenne des solutions effectuée par rapport à toutes les réalisations possibles du processus. Nous avons fixé la position  $x$  et comparé les réalisations  $U_\omega(x, t)$  et la moyenne  $\langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega$  comme fonctions du temps puis chaque réalisation  $U_\omega(x, t) = \phi_{X_\omega(x)}(t)$  à  $\phi_{\bar{X}(x)}(t)$  où  $\bar{X}(x) = \langle X_\omega(x) \rangle_\omega$ .

Les trois chapitres nous ont conduit aux résultats suivants :

1. La comparaison de la solution obtenue  $U_\varepsilon(x, t)$  dans le milieu homogène où la

porosité est égale à  $\varepsilon$  à celle obtenue dans le milieu où la porosité est égale à un  $U_1(x, t)$  a fait apparaître une longueur  $x\sqrt{\varepsilon}$  que nous avons appelée "longueur efficace" qui représente en fait la longueur que devrait parcourir le colorant dans le milieu poreux si la porosité était 1 pour aboutir à la concentration  $U_\varepsilon(x, t)$

2. Nous avons formulé l'équation de notre modèle qui est l'équation de la diffusion poreuse avec un coefficient stochastique (la porosité est un processus aléatoire).
3. Nous avons établi la fonction de répartition et la densité de probabilité des longueurs efficaces.
4. Nous avons obtenu les solutions de l'équation de la diffusion poreuse pour chaque réalisation de la porosité qui est un processus télégraphique dans notre modèle.
5. Nous avons établi l'équation que vérifie la moyenne. C'est une équation fractionnaire valable que pour des temps grands.
6. Nous avons obtenu un résultat inattendu qui est très important : La probabilité pour que les réalisations soient tout le temps proches de la moyenne est égale à zéro. C'est le théorème suivant :

$$P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \langle U_\omega(x, t) \rangle_\omega| < \delta\} = 0 \quad (4.1)$$

7. Un autre résultat important de la thèse : On a pu estimé la probabilité pour que les réalisations soient tout le temps proches  $\phi_{\bar{X}(x)}$  :

$$\forall \delta > 0 \quad P\{\omega \in \Omega, \sup_t |U_\omega(x, t) - \phi_{\bar{X}(x)}(t)| \leq \delta(\gamma)\} \geq 3.7D\bar{X}(x)^3 f^x(\bar{X}(x))\delta \quad (4.2)$$

où  $D$  est le coefficient de diffusion,  $\bar{X}(x) = \langle X_\omega(x) \rangle_\omega$  et  $f^x(\bar{X}(x))$  est la probabilité des longueurs efficaces évaluée en  $\bar{X}(x)$  et  $\delta$  est la précision des mesures.

# Chapitre 5

## Annexes

### Annexe A

On rappelle que si  $n_\omega(0, x)$  est un processus aléatoire de loi de probabilité de Poisson

$$P\{n_\omega(0, x) = k\} =$$

$\frac{(\nu x)^k}{k!} e^{-\nu x}$ ,  $k \in \mathcal{N}$ , où  $\nu$  est le nombre moyen de sauts par unité de longueur, alors le

processus aléatoire du télégraphe est défini comme  $\tilde{\varepsilon}_\omega(x) = (-1)^{n_\omega(0, x)} a$ , où  $a$  est une

variable aléatoire indépendante de  $n_\omega(0, x)$  pouvant prendre deux valeurs équiprobables

$\pm a_0$ , avec la probabilité :  $P(a) = \frac{1}{2} [\delta(a - a_0) + \delta(a + a_0)]$ . Alors,  $\langle a \rangle_P = 0$  et  $\langle a^2 \rangle_P = a_0^2$ .

On trouve :

$$\langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) \rangle_\omega = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu x)^k}{k!} e^{-\nu x} = a e^{-2\nu x}, \quad (\text{A.1})$$

$$\langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x) \rangle_{\omega, a} = 0 \quad \text{et} \quad \tilde{\varepsilon}_\omega^2(x) = a_0^2. \quad (\text{A.2})$$

La fonction de corrélation de  $\tilde{\varepsilon}_\omega(x)$  est : Posons  $x_1 > x_2$ , alors

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varepsilon}_\omega(x_1) \tilde{\varepsilon}_\omega(x_2) \rangle &= \langle a(-1)^{n_\omega(0,x_1)} a(-1)^{n_\omega(0,x_2)} \rangle = \\ a_0^2 \langle (-1)^{2n_\omega(0,x_2)+n_\omega(x_1-x_2)} \rangle &= a_0^2 \langle (-1)^{n_\omega(x_1-x_2)} \rangle = \\ a_0^2 \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\{\nu(x_1-x_2)\}^k}{k!} e^{-\nu(x_1-x_2)} &= a_0^2 e^{-2\nu(x_1-x_2)}. \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

La “formule de différentiation” (voir [21]), pour le processus de Markov  $\alpha(x)$ , tel que  $\langle \alpha(x) \rangle = 0$ , et  $\langle \alpha(x_1) \alpha(x_2) \rangle = \sigma^2 \exp(-2\nu|x_1-x_2|)$  et une fonctionnelle  $\phi_x[\alpha]$  du processus  $\alpha(x')$ , quand  $0 < x' \leq x$ , est

$$\frac{d}{dx} \langle \alpha(x) \phi_x[\alpha] \rangle = \left\langle \alpha(x) \frac{d}{dx} \phi_x[\alpha] \right\rangle - 2\nu \langle \alpha(x) \phi_x[\alpha] \rangle. \quad (\text{A.4})$$

## Annexe B

La dérivée fractionnaire d’une fonction  $f(x)$  a été l’objet de beaucoup de papiers ; exemple [26, 27]. Nous utilisons la définition de Riemann-Liouville, [28, 29]. La dérivée fractionnaire d’ordre  $\beta > 0$  est définie par :

$$\frac{d^\beta}{dx^\beta} = \left( \frac{1}{\Gamma(n-\beta)} \int_0^x dy f(y) (x-y)^{n-\beta-1} \right); \quad (\text{B.1})$$

Avec  $n = [\beta]$ , le plus petit entier plus grand que  $\beta$ . Ici  $\Gamma(x)$  est la fonction  $\Gamma$  d’Euler.

## Annexe C

Montrons que

$$\langle X_\omega(x) \rangle = \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{2} \quad (\text{C.1})$$

où  $X_\omega(x)$  est la variable aléatoire de loi  $f^x(\ell)$  de l'équation (2.93).

Nous avons vu que la fonction de répartition de  $X_\omega(x)$  s'écrit :

$$F^x(\ell) = F_0^x(\ell) + \sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^x(\ell) + \sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}^x(\ell) \quad (\text{C.2})$$

où

$$F_0^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell < x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{e^{-\nu x}}{2} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell < x\sqrt{\varepsilon_1} \\ e^{-\nu x} & \text{si } \ell \geq x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (\text{C.3})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} F_{2k}^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ = \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu\sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right. \\ \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \left\{ \sqrt{\frac{(x-\eta)}{\eta}} I_1(2\nu\sqrt{\eta(x-\eta)}) \right\} d\eta \right\} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} < \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\nu x)^{2k}}{(2k)!} e^{-\nu x} = (ch(\nu x) - 1)e^{-\nu x} & \text{si } \ell > x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (\text{C.4})$$

et

$$\sum_{k=0}^{\infty} F_{2k+1}^x(\ell) = \begin{cases} 0 & \text{si } \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_2} \\ \frac{\nu e^{-\nu x}}{2} \left\{ \int_{x-m^x(\ell)}^x \{I_0(2\nu\sqrt{\xi(x-\xi)}) - 1\} d\xi \right. \\ \left. + \int_0^{m^x(\ell)} \{I_0(2\nu\sqrt{\xi(x-\xi)}) - 1\} d\xi \right\} & \text{si } x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1} \\ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\nu x)^{2k+1}}{(2k+1)!} e^{-\nu x} = (sh(\nu x) - \nu x)e^{-\nu x} & \text{si } \ell > x\sqrt{\varepsilon_1} \end{cases} \quad (\text{C.5})$$

Sa densité est donc :

$$f^x(\ell) = \frac{\partial F^x(\ell)}{\partial \ell} = \frac{\partial F_0^x(\ell)}{\partial \ell} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_{2k}^x(\ell)}{\partial \ell} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial F_{2k+1}^x(\ell)}{\partial \ell} \quad (\text{C.6})$$

De ce qui précède, nous obtenons, pour  $x\sqrt{\varepsilon_2} \leq \ell \leq x\sqrt{\varepsilon_1}$  :

$$\frac{\partial F_0^x(\ell)}{\partial \ell} = \frac{e^{-\nu x}}{2} [\delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_2}) + \delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_1})] \quad (\text{C.7})$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_{2k}^x(\ell)}{\partial \ell} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \ell} \left[ \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{2k!(k-1)!} \int_{x-m^x(\ell)}^x \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta + \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{2k!(k-1)!} \int_0^{m^x(\ell)} \eta^{k-1} (x-\eta)^k d\eta \right] \quad (\text{C.8})$$

En utilisant la formule de la dérivée sous le signe d'intégration, on obtient :

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\partial F_{2k}^x(\ell)}{\partial \ell} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x}}{2k!(k-1)!} \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^{2k}} (x\sqrt{\varepsilon_1} - \ell)^{k-1} (\ell - x\sqrt{\varepsilon_2})^{k-1} \quad (\text{C.9})$$

Avec le même procédé de calcul nous aboutissons à :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial F_{2k+1}^x(\ell)}{\partial \ell} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{k!k!} \frac{1}{(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^{2k+1}} (x\sqrt{\varepsilon_1} - \ell)^k (\ell - x\sqrt{\varepsilon_2})^k \quad (\text{C.10})$$

En utilisant les formules ci dessus, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \langle X_\omega(x) \rangle_\omega &= \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \eta \frac{e^{-\nu x}}{2} [\delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_2}) + \delta(\ell - x\sqrt{\varepsilon_1})] + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x} x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2k!(k-1)!(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^{2k}} \\ &\int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \eta (x\sqrt{\varepsilon_1} - \eta) (\eta - x\sqrt{\varepsilon_2}) d\eta + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x}}{k!k!(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})^{2k+1}} \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \eta (x\sqrt{\varepsilon_1} - \eta)^k (\eta - x\sqrt{\varepsilon_2})^k d\eta \end{aligned} \quad (\text{C.11})$$

Pour calculer ces intégrales, nous faisons le changement de variable :

$$x\sqrt{\varepsilon_1} - \eta = t \quad (\text{C.12})$$

ainsi, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \eta (x\sqrt{\varepsilon_1} - \eta)^{k-1} (\eta - x\sqrt{\varepsilon_2})^{k-1} d\eta &= \int_0^{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} (x\sqrt{\varepsilon_1} - t)^{k-1} (x\sqrt{\varepsilon_1} - x\sqrt{\varepsilon_2} - t)^{k-1} dt \\ &= x\sqrt{\varepsilon_1} \frac{[x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})]^{2k-1} (k-1)!(k-1)!}{(2k-1)!} - \frac{[x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})]^{2k} (k-1)!k!}{(2k)!} \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} \int_{x\sqrt{\varepsilon_2}}^{x\sqrt{\varepsilon_1}} \eta (x\sqrt{\varepsilon_1} - \eta)^k (\eta - x\sqrt{\varepsilon_2})^k d\eta &= \int_0^{x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})} (x\sqrt{\varepsilon_1} - t)^k (x\sqrt{\varepsilon_1} - x\sqrt{\varepsilon_2} - t)^k dt \\ &= x\sqrt{\varepsilon_1} \frac{[x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})]^{2k+1} k!k!}{(2k+1)!} - \frac{[x(\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})]^{2k+2} k!(k+1)!}{(2k+2)!} \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \langle X_\omega(x) \rangle_\omega &= \frac{x(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})e^{-\nu x}}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x} x^{2k+1} \sqrt{\varepsilon_1}}{(2k)!} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu^{2k} e^{-\nu x} x^{2k+1} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2(2k)!} \\ &+ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x} x^{2k+2} \sqrt{\varepsilon_1}}{(2k+1)!} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\nu^{2k+1} e^{-\nu x} x^{2k+2} (\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2})}{2(2k+1)!} \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

$$= \frac{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})e^{-\nu x}}{2} \left\{ x + \sum_1^{\infty} \frac{\nu^{2k} x^{2k+1}}{(2k)!} + \sum_0^{\infty} \frac{\nu^{2k+1} x^{2k+2}}{(2k+1)!} \right\} = x \frac{(\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2})}{2} \quad (\text{C.16})$$

## Annexe D

Nous définissons

$$\delta(\gamma) = \sup_{t \geq 0} \delta(\gamma, t) \quad (\text{D.1})$$

où  $\delta(\gamma, t)$  est défini par :

$$\delta(\gamma, t) = K_\gamma^+(t) - K_\gamma^-(t) \quad (\text{D.2})$$

$\delta(\gamma, t)$  s'écrit sur les différents intervalles :

$$\delta(\gamma, t) = \begin{cases} \phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) - \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t) & \text{Si } t \in I_0 \\ \phi_{\ell_t}(t) - \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t) & \text{Si } t \in I_1 \\ \phi_{\ell_t}(t) - \phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) & \text{Si } t \in I_2 \\ \phi_{\bar{X}(x)+\gamma}(t) - \phi_{\bar{X}(x)-\gamma}(t) & \text{Si } t \in I_\infty \end{cases} \quad (\text{D.3})$$

où

$$\ell_t = \sqrt{2Dt},$$

$$I_0 = [0, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}],$$

$$I_1 = [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}],$$

$$I_2 = [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}],$$

$$I_\infty = [\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}, \infty[$$

Ces expressions peuvent s'écrire sous la forme intégrale :

$$\delta(\gamma, t) = \begin{cases} \int_{\bar{X}(x)+\gamma}^{\bar{X}(x)-\gamma} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} (\lambda^2 - 2Dt) d\lambda & \text{Si } t \in I_0 \\ \int_{\bar{X}(x)+\gamma}^{\ell_t} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} \int_{\bar{X}(x)+\gamma}^{\ell_t} (\lambda^2 - 2Dt) d\lambda & \text{Si } t \in I_1 \\ \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\ell_t} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\ell_t} (2Dt - \lambda^2) d\lambda & \text{Si } t \in I_2 \\ \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} \frac{\partial \phi_\lambda(t)}{\partial \lambda} d\lambda = \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} (2Dt - \lambda^2) d\lambda & \text{Si } t \in I_\infty \end{cases} \quad (\text{D.4})$$

De façon générale,

$$\delta(\gamma, t) = \int_a^b g(\lambda, t) d\lambda \quad \text{ou} \quad g(\lambda, t) = \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = \frac{t^{-5/2}}{4\sqrt{\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (\text{D.5})$$

$a$  et  $b$  dépendent de l'intervalle où on prend  $t$  et  $g(\lambda, t)$  est une fonction bornée dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$ . Elle admet un maximum en  $\lambda = \sqrt{6Dt}$  et elle s'annule en  $\lambda = \sqrt{2Dt}$ .

Puis on utilise

$$\delta \leq (b - a) \sup_{\lambda \in [a, b]} |g| \quad (\text{D.6})$$

et on étudie les différents cas suivant le signe de  $g$ .

1. Si  $t \in I_0 = [0, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}]$  alors

$$\delta(\gamma) = \sup_{t \in I_0} \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} d\lambda \quad (\text{D.7})$$

Le graphe de l'évolution  $g_\lambda(t)$  en fonction de  $\lambda$  est représenté sur la figure (5.1).

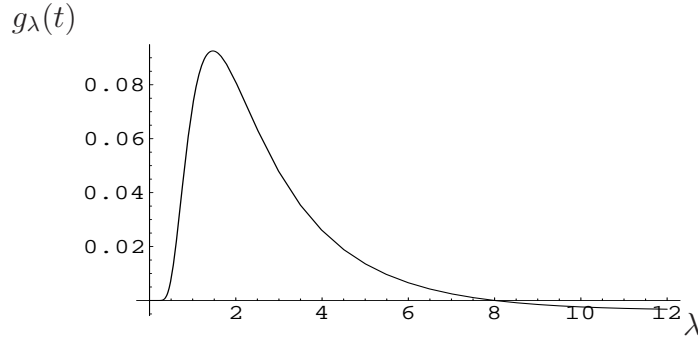


FIG. 5.1 – Évolution de  $g_\lambda(t)$  en fonction de  $\lambda$

Cette fonction admet un maximum en  $\lambda = \sqrt{6Dt}$  et s'annule en  $\lambda = \sqrt{2Dt}$ . Nous rappelons que  $\lambda \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$ .

Comme  $g_\lambda(t)$  est une fonction bornée dans cet intervalle, alors :

$$\delta(\gamma, t) = \int_{\bar{X}(x)-\gamma}^{\bar{X}(x)+\gamma} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \leq \sup_{\lambda \in [\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma]} \frac{2\gamma t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (\text{D.8})$$

on doit tenir compte de la position du maximum de  $g_\lambda(t)$  par rapport à l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$ .

- Si l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à droite de  $\sqrt{6Dt}$ , alors  $\sqrt{6Dt} < \bar{X}(x) - \gamma$   
i.e.  $t < \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}$   
dans ce cas :  $\forall t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}$ ,  $g_\lambda(t)$  décroît dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  et son

maximum est atteint en  $\lambda = \bar{X}(x) - \gamma$  alors :

$$\delta_0^1(\gamma) = \sup_{0 \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}} \delta(\gamma, t) \leq \sup_{0 \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}} 2\gamma \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} ((\bar{X}(x) - \gamma)^2 - 2Dt) e^{-\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.9})$$

En posant  $\tau = \frac{2Dt}{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}$ , on obtient :

$$\delta_0^1(\gamma) \leq \sup_{0 \leq \tau \leq \frac{1}{3}} \frac{4\gamma D}{\sqrt{2\pi}(\bar{X}(x) - \gamma)^3} (1 - \tau) \tau^{-5/2} e^{-\frac{1}{2\tau}} \quad (\text{D.10})$$

$\tau^{-5/2}(1 - \tau)e^{-\frac{1}{2\tau}}$  atteint son maximum qui vaut 3.71 en  $\tau = 0.183$  donc

$$\delta_0^1(\gamma) \leq \frac{14D}{\bar{X}^3(x)} \gamma \quad (\text{D.11})$$

– Si  $\sqrt{6Dt} \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$ , ce qui correspond à  $\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$  ce qui est possible si  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$

le maximum de  $g_\lambda(t)$  est atteint en  $\lambda = \sqrt{6Dt}$  et

$$\delta_0^2(\gamma) \leq \sup_{t \in [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}]} \frac{2}{\sqrt{\pi D e^3}} \gamma t^{-3/2} \quad (\text{D.12})$$

Comme  $\frac{2}{\sqrt{\pi D e^3}} \gamma t^{-3/2}$  décroît en t dans l'intervalle  $[\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{6D}, \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}]$ , alors

$$\delta_0^2(\gamma) \leq \frac{12D}{\sqrt{\pi} e^3} \gamma (\bar{X}(x) - \gamma)^{-3} \leq \frac{3.7D}{\bar{X}^3(x)} \gamma < \delta_0^1(\gamma) \quad (\text{D.13})$$

– Si l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à gauche de  $\sqrt{6Dt}$ , i.e.  $\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} < t < \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$ ,  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$ ;  $g_\lambda(t)$  est croissante en  $\lambda$  dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  et son maximum est atteint en  $(\bar{X}(x) + \gamma)$  :

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}} \delta(\gamma, t) \leq \sup_{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}} 2\gamma \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} ((\bar{X}(x) + \gamma)^2 - 2Dt) e^{-\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.14})$$

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}} \frac{\gamma t^{-5/2}}{\sqrt{\pi D}} \left[ \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D} - t \right] e^{-\frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.15})$$

On pose  $t_1 = \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}$ ,  $t_2 = \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}$ , et  $t_3 = \frac{(\bar{X}(x)+\gamma)^2}{2D}$

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{t_3}{3} \leq t \leq t_1} D \frac{\gamma t^{-5/2}}{\sqrt{\pi D}} (t_3 - t) e^{-\frac{t_3}{2t}} \quad (\text{D.16})$$

on pose  $t = \frac{t}{t_1}$  et  $\tau = \frac{t_3}{t_1}$ ,  $1 \leq \tau \leq \frac{5}{3}$  car  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$  on obtient :

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{\tau}{3} \leq t \leq 1} \frac{\gamma t^{-5/2}}{\sqrt{\pi D}} t_1^{-3/2} t^{-5/2} (\tau - t) e^{-\frac{\tau}{2t}} \quad (\text{D.17})$$

Si on pose  $\alpha = \frac{t}{\tau}$

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{\tau}} \frac{\gamma \tau^{-3/2} t_1^{-3/2}}{\sqrt{\pi D}} \alpha^{-5/2} (1 - \alpha) e^{-\frac{1}{2\alpha}} \quad (\text{D.18})$$

$\alpha^{-5/2}(1 - \alpha)e^{-\frac{1}{2\alpha}}$  est une fonction décroissante dans  $[\frac{1}{3}, \infty[$  elle atteint son maximum en  $\alpha = \frac{1}{3}$  et vaut 2.33

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \sup_{\frac{1}{3} \leq \alpha \leq \frac{1}{\tau}} 2.33 \frac{\gamma \tau^{-3/2} t_1^{-3/2}}{\sqrt{\pi D}} \quad (\text{D.19})$$

en remplaçant  $t_1$  par son expression et en utilisant la condition  $\gamma \leq \frac{\bar{X}(x)}{4}$  qui impose que  $1 \leq \tau \leq \frac{5}{3}$  on arrive à :

$$\delta_0^3(\gamma) \leq \frac{4.07D}{\bar{X}(x)^3} \gamma < \delta_0^1(\gamma) \quad (\text{D.20})$$

D'où

$$\delta_0(\gamma) \leq \frac{14D}{\bar{X}^3(x)} \gamma \quad (\text{D.21})$$

2. Si  $t \in I_1 = [\frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2}{2D}, \frac{(\bar{X}(x)-\gamma)^2 - (\bar{X}(x)+\gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x)-\gamma}{\bar{X}(x)+\gamma}}]$

$$\begin{aligned} \delta_1(\gamma, t) &= \int_{\sqrt{2Dt}}^{\bar{X}(x)+\gamma} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) d\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \\ &\leq \sup_{\lambda \in [\bar{X}(x)-\gamma, \bar{X}(x)+\gamma]} (\bar{X}(x) + \gamma - \sqrt{2Dt}) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (\text{D.22}) \end{aligned}$$

donc

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in I_1} \left[ \sup_{\lambda \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]} \left\{ (\bar{X}(x) + \gamma - \sqrt{2Dt}) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\lambda^2 - 2Dt) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \right\} \right] \quad (\text{D.23})$$

On étudie la position de  $\sqrt{6Dt}$  par rapport à

$$[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$$

– si l'intervalle est à gauche de  $\sqrt{6Dt}$  alors  $t \geq \frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D}$ ,  $g_\lambda(t)$  est croissante en  $\lambda$  dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  d'où :

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in I_2} ((\bar{X}(x) + \gamma) - \sqrt{2Dt}) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} ((\bar{X}(x) + \gamma)^2 - 2Dt) e^{-\frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.24})$$

qui s'écrit :

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in I_1} (\sqrt{t_3} - \sqrt{t}) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (t_3 - t) e^{-\frac{t_3}{2t}} \quad (\text{D.25})$$

$$\text{avec } t_3 = \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D}$$

En posant  $t_2 = \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2 - (\bar{X}(x) + \gamma)^2}{4D \text{Log}(\frac{\bar{X}(x) - \gamma}{\bar{X}(x) + \gamma})}$ ,  $\tau = \frac{t_3}{t_1}$  où  $t_1 = \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}$ , nous aurons :

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in [t_1, t_2]} t_1^{-1} (\sqrt{\tau} - \sqrt{\frac{t}{t_1}}) \left(\frac{t}{t_1}\right)^{-5/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\tau - \frac{t}{t_1}\right) e^{-\frac{\tau}{2\frac{t}{t_1}}} \quad (\text{D.26})$$

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in [1, t_2/t_1]} \frac{t_1^{-1} (2D)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{16\pi D^3}} (\sqrt{\tau} - \sqrt{t}) t^{-5/2} (\tau - t) e^{-\frac{\tau}{2t}} \quad (\text{D.27})$$

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in [1, t_2/t_1]} \frac{t_1^{-1} \tau^{-1}}{\sqrt{2\pi}} \left(1 - \sqrt{\frac{t}{\tau}}\right) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{-5/2} \left(1 - \frac{t}{\tau}\right) e^{-\frac{1}{2\frac{t}{\tau}}} \quad (\text{D.28})$$

$$\delta_1(\gamma) \leq \sup_{t \in [1/\tau, t_2/\tau t_1]} \frac{t_1^{-1} \tau^{-1}}{\sqrt{2\pi}} (1 - \sqrt{t}) (t)^{-5/2} (1 - t) e^{-\frac{1}{2t}} \quad (\text{D.29})$$

$(1 - \sqrt{t})(t)^{-5/2}(1 - t)e^{-\frac{1}{2t}}$  est une fonction décroissante en  $t$  d'où :

$$\delta_1(\gamma) \leq \frac{t_1^{-1}}{\sqrt{2\pi}} (1 - \sqrt{1/\tau}) (\tau)^{3/2} (1 - 1/\tau) e^{-\frac{\tau}{2}} \quad (\text{D.30})$$

en multipliant par  $\frac{\sqrt{2D}(\sqrt{\tau}-1)\sqrt{t_1}}{\sqrt{2D}(\sqrt{\tau}-1)\sqrt{t_1}}$  pour faire apparaître  $\gamma$ , on obtient

$$\delta_1(\gamma) \leq 2 \frac{t_1^{-3/2}}{\sqrt{2\pi}} (1 - \sqrt{1/\tau}) (\tau)^{3/2} (1 - 1/\tau) e^{-\frac{\tau}{2}} \frac{\gamma}{\sqrt{2D}\sqrt{\tau-1}} \quad (\text{D.31})$$

en remplaçant  $t_1$  par son expression, nous aboutissons à :

$$\delta_1(\gamma) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{2D}{(\bar{X}(x) - \gamma)^3} \gamma \frac{(1 - \sqrt{1/\tau})(\tau)^{3/2}(1 - 1/\tau)}{\sqrt{\tau - 1}} e^{-\frac{\tau}{2}} \quad (\text{D.32})$$

$\frac{(1 - \sqrt{1/\tau})(\tau)^{3/2}(1 - 1/\tau)}{\sqrt{\tau - 1}} e^{-\frac{\tau}{2}}$  est une fonction croissante dans l'intervalle des valeurs de

$\tau$  i.e. dans  $[1, 5/3]$ . Sa valeur maximale est atteinte en  $\tau = 5/3$  et vaut 0.29. Ce

qui nous donne :

$$\delta_1(\gamma) \leq \frac{1.09D}{\bar{X}(x)^3} \gamma < \delta_0(\gamma) \quad (\text{D.33})$$

– si l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à droite de  $\sqrt{6Dt}$  alors  $t \leq \frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}$  : cas impossible

– si  $\sqrt{6Dt}$  est dans l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  alors  $\frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D} \leq t \leq \frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}$  : cas impossible

3. Si  $t \in I_2 = \left[ \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2 - (\bar{X}(x) + \gamma)^2}{4D \text{Log} \frac{\bar{X}(x) - \gamma}{\bar{X}(x) + \gamma}}, \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D} \right]$  alors

$$\begin{aligned} \delta_2(\gamma, t) &= \int_{\bar{X}(x) - \gamma}^{\sqrt{2Dt}} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - \lambda^2) d\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \\ &\leq \sup_{\lambda \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]} (\sqrt{2Dt} - (\bar{X}(x) - \gamma)) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - \lambda^2) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (\text{D.34}) \end{aligned}$$

donc

$$\delta_2(\gamma) \leq \sup_{t \in I_2} (\sqrt{2Dt} - (\bar{X}(x) - \gamma)) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - \lambda^2) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \quad (\text{D.35})$$

On étudie la position de  $\sqrt{6Dt}$  par rapport à l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$

– si l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à gauche de  $\sqrt{6Dt}$  alors  $t \geq \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{6D}$   $g_\lambda(t)$

est décroissante en  $\lambda$  dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  d'où :

$$\delta_2(\gamma) \leq \sup_{t \in I_2} (\sqrt{2Dt} - (\bar{X}(x) - \gamma)) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - (\bar{X}(x) - \gamma)^2) e^{-\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.36})$$

le même raisonnement que dans l'intervalle  $I_1$  nous conduit à :

$$\delta_2(\gamma) \leq \sup_{t \in I_2} (\sqrt{2Dt} - (\bar{X}(x) - \gamma)) \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - (\bar{X}(x) - \gamma)^2) e^{-\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.37})$$

donc

$$\delta_2(\gamma) \leq \frac{1.54D}{\bar{X}(x)^3} \gamma < \delta_0(\gamma) \quad (\text{D.38})$$

- si l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à droite de  $\sqrt{6Dt}$  alors  $t \leq \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{6D}$  : cas impossible
- si  $\sqrt{6Dt}$  est dans l'intervalle  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  alors  $\frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D} \leq t \leq \frac{1}{3} \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D}$  : cas impossible

4. Si  $t \in I_\infty = [\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}, \infty[$  alors

$$\begin{aligned} \delta_\infty(\gamma, t) &= \int_{\bar{X}(x) - \gamma}^{\bar{X}(x) + \gamma} \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - \lambda^2) d\lambda e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \\ &\leq \sup_{\lambda \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]} 2\gamma \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - \lambda^2) e^{-\frac{\lambda^2}{4Dt}} \end{aligned} \quad (\text{D.39})$$

- Si  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à droite de  $\sqrt{6Dt}$ , alors  $t \leq \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{6D}$  : cas impossible.
- $\sqrt{6Dt} \in [\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  alors  $\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{6D} \leq t \leq \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{6D}$  : cas impossible.
- Si  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  est à gauche de  $\sqrt{6Dt}$ ,  $\bar{X}(x) + \gamma \leq \sqrt{6Dt}$  et  $(2Dt - \lambda^2)$  est décroissante dans  $[\bar{X}(x) - \gamma, \bar{X}(x) + \gamma]$  alors

$$\delta_\infty(\gamma) \leq \sup_{t \in I_\infty} 2\gamma \frac{t^{-5/2}}{\sqrt{16\pi D^3}} (2Dt - (\bar{X}(x) - \gamma)^2) e^{-\frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{4Dt}} \quad (\text{D.40})$$

En posant  $\tau = \frac{t_1}{t_3}$  et  $t = \frac{t}{t_3}$  où  $t_1 = \frac{(\bar{X}(x) - \gamma)^2}{2D}$  et  $t_3 = \frac{(\bar{X}(x) + \gamma)^2}{2D}$  et avec le même raisonnement que dans l'intervalle  $I_0$  en utilisant  $t_3$  au lieu de  $t_1$ , nous arrivons à :

$$\delta_\infty(\gamma) \leq \frac{0.22D}{\bar{X}(x)^3} \gamma < \delta_0(\gamma) \quad (\text{D.41})$$

d'où

$$\delta(\gamma) \leq \frac{14D}{\bar{X}(x)^3} \gamma \tag{D.42}$$

# Bibliographie

- [1] E. Rideal, *Introductory lecture*, Proc. 10th Symp. Colston Res.Soc., Butterworth, London, pp.5, (1958), **je ne l'ai pas**
- [2] G.I. Taylor, *Diffusion by Continuous Movements*. Proc. Roy. Soc., A, 219, p.186, (1953), *a traité le problème de la diffusion d'une matière soluble dans un solvant en écoulement dans un tube. Il a montré que la dispersion du soluté dépend de la diffusion moléculaire et de la vitesse de l'écoulement dans le tube, que la concentration du soluté produite en tenant compte de ces deux paramètres est centrée autour d'un point du fluide qui se déplace avec la vitesse moyenne de l'écoulement et sa distribution le long du tube est gouvernée par un coefficient de diffusivité  $K$ . Le calcul de ce facteur nous permet de remonter au calcul du coefficient de diffusion moléculaire  $D$  par  $K = \frac{a^2 U^2}{48D}$  où  $U$  est la vitesse moyenne de l'écoulement et  $a$  le rayon du tube.*
- [3] G.I. Taylor, *Condition under which dispersion of solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion*, Proc.Roy.Soc.London, A, p.225, (1954), *a déterminé la condition sous laquelle la solution approximée de l'équation de la diffusion est utilisée pour mesurer le coefficient de diffusion longitudinale du soluté injecté dans le solvant ; cette condition est :  $\frac{4L}{a} \gg \frac{Ua}{D} \gg 6.9$ .*

où  $U$  est la vitesse moyenne de l'écoulement et  $a$  le rayon du tube,  $D$  le coefficient de diffusion moléculaire,  $L$  la longueur du tube à partir de laquelle apparaissent des variations importantes de la concentration.

- [4] P.G. Saffman ***A theory of dispersion in a porous medium***, *J. Fluid Mech.*, 6, p.321, (1959), *S'est intéressé à l'étude de la dispersion d'un scalaire passif dans un fluide traversant un milieu poreux. Le milieu est considéré comme un assemblage de tubes droits orientés de façon aléatoire, il suppose que le chemin d'une quantité de scalaire se compose d'un ensemble d'étapes statistiquement indépendantes dont la direction et la durée changent de façon aléatoire. Il a calculé la densité de probabilité pour le déplacement d'un élément marqué simple ainsi que la concentration du traceur dispersé.*
- [5] D.R.F. Harleman & R.R. Rumer ***Longitudinal and lateral dispersion in an isotropic porous media***, *Fluid Mech.*, 16, P.25, (1963), *Ils ont décrit une méthode expérimentale pour la mesure des coefficients de diffusion longitudinale et latérale dans un milieu poreux isotrope.*
- [6] D.L. Koch & J.F. Brady, ***Dispersion in Fixed Beds***, *J.Fluid.Mech.*, 154, p.399, (1985), *se sont intéressés à l'étude du transfert de chaleur et de masse dans un milieu poreux constitué de particules dont les positions sont distribuées de façon aléatoire et ils considèrent la vitesse moyenne de l'écoulement constante. Ils ont étudié les effets des particules sur le comportement dispersif du lit poreux pour toutes les valeurs du nombre de Peclet et dans le cas précis de lits poreux à porosité élevée.*
- [7] D.L. Koch & J.F. Brady, ***Anomalous diffusion in heterogeneous porous media***, *Phys. Fluids*, 31, p.965, (1988), *ont étudié la diffusion d'un traceur dans*

les milieux hétérogènes. Ils ont examiné le comportement pour des temps grands, du champ de concentration. Ils ont déterminé les conditions sous lesquelles la concentration obéit à la loi de Fick. En effet quand la longueur de corrélation des fluctuations de la perméabilité (porosité) est finie, la diffusion normale avec un déplacement quadratique moyen qui croît linéairement avec le temps est obtenue pour des temps longs. Cependant, quand la longueur de corrélation diverge, c'est la diffusion anormale qui l'emporte.

[8] D.L. Freybourg, **mettre le titre**, *Water Resour. Res.*, 22, p.2069, (1986), **je ne l'ai pas**

[9] S. Revathi & V. Balakrishnan, **Effective diffusion constant for inhomogeneous diffusion**, *J. Phys. A : Math. Gen.*, 26, P.5661, (1993), ont considéré le problème de détermination analytique de la constante de diffusion effective  $D_{eff}$  pour la diffusion dans un milieu non homogène décrite par l'équation  $\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(D(x)\frac{\partial P}{\partial x})$  avec un coefficient de diffusion dépendant de la position  $D(x)$ . Ils ont utilisé deux définitions différentes pour  $D_{eff}$ . La première relative au comportement de la variance à des temps longs :  $D_{eff} = \mathcal{D} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle (\Delta x)^2 \rangle / 2t$ . La deuxième relative au comportement pour des grandes distances du temps moyen définit par  $T(\pm x/0)$  comme étant le temps mis pour partir de l'origine et atteindre les positions  $\pm x$  :  $D_{eff} = \mathbb{D} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2T(\pm x/0)}$ .

[10] P. Indelman **Averaging of unsteady flows in heterogeneous media of stationary conductivity**, *J.Fluid Mech.* , 310, P.39, (1996), a formulé la loi de Darcy effective reliant la vitesse moyenne de l'écoulement au gradient de la pression moyenne

- [11] K.R. Westerterp, A.E. Kronberg, A.H. Benneker & V.V. Dil'man, **Wave concept in the theory of hydrodynamical dispersion - A maxwellian type approach**, *Trans. IChemE.* 74, part A, p.944, (1996), *Ils ont étudié la diffusion dans les milieux hétérogènes en utilisant une équation dite de Maxwell pour décrire le transfert de masse à la place de l'équation de Fick.*
- [12] J.W. Hiby **Longitudinal and transverse mixing during single phase flow through granular beds**, in *symposium on the Interaction Between Fluids and Particles* : 312-325 5(The Institution of Chemical Engineers, London).
- [13] P. Legentilhomme, J. Legrand & J. Comiti, **Axial dispersion in electrolyte flow through anisotropic packed beds**, *Jour. of Applied Electrochemistry*, 19, p.263, (1989), *Ils ont fait une étude expérimentale de la dispersion axiale d'un traceur passif injecté dans un milieu poreux réalisé avec un empilement de particules parallélépipédiques qui sert à simuler le lit à morceaux de bois utilisé dans l'industrie de fabrication du papier.*
- [14] G.V. Erochenkova & R. Lima **Anomalous diffusion in irregular packed beds**, *Physica A* , 275, P.297, (2000)*ont étudié l'équation de diffusion pour la concentration d'un traceur, injecté dans un lit poreux irrégulier, en fonction du temps et de la position axiale. Ils ont considéré un modèle de porosité stochastique  $\varepsilon_\omega(x)$  dépendant de la coordonnée spatiale  $x$ . Ils ont montré que dans le cas où la fonction de corrélation du processus stochastique  $\varepsilon_\omega(x)$  est décroissante, le théorème de moyennisation est appliqué.*
- [15] G.V. Erochenkova & R. Lima **A fractional diffusion equation for a marker in porous media**, *Chaos*, 11, P.495, (2001), *Dans cet article, les auteurs ont*

utilisé une une formule dite de différentiation "formulas of differentiation" qui leur a permis de simplifier l'équation de la moyenne et d'aboutir à une équation de diffusion fractionnaire pour des temps grands.

- [16] K.V. Logvinova & M-Cr. Neel ***A Fractional Equation for Anomalous Diffusion in a Randomly Heterogeneous Porous Media.*** *Chaos*, v.14, N4, p.982, (2004), *Traite un modèle de milieu hétérogène qui est constitué d'un empilement de tubes entrelacés autour d'une direction générale (milieu tubulaire. La pente des tubes est considérée comme un processus stochastique. A partir de là, les auteurs ont calculé l'équation que vérifie la moyenne effectuée par rapport au processus aléatoire. L'examen de la solution de l'équation obtenu révèle que la diffusion est anormale*
- [17] K.V. Logvinova, ***Modèles mathématiques de diffusion en milieux poreux hétérogènes***, Thèse de l'Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, (décembre 2005), *Les auteurs ont modélisé le problème de diffusion dans les milieux hétérogène. Elle a considéré deux modèles dont l'un est un milieu dont la matrice solide est composée d'agrégats à peu près sphériques (qu'ils appellent milieu poreux et la porosité dans ce cas est prise comme processus stochastique) et l'autre correspond à un milieu fait de tubes entrelacés autour d'une direction générale (qu'ils appellent milieu tubulaires. Dans ce cas c'est la pente des tubes qui est considérée comme un processus stochastique). La référence ci dessus est l'une des publication du travail réalisé dans cette thèse.*
- [18] A.E. Schlidigger , ***The physics of flow through porous media***, University of Toronto Press, Toronto, third edition, (1974).

- [19] M.F. Edwards & J.F. Richardson , ***Gas Dispersion in Packed Beds***, *Chem. Eng. Sci.* 23, PP.109, (1968), *Ils ont étudié la dispersion longitudinale de l'argon injecté dans un écoulement d'air dans un lit de particules non poreuses. Les coefficients de diffusion ont été calculés à partir des courbes de réponse mesurées à l'aide d'un détecteur d'ionisation situé dans le courant gazeux. Leurs résultats indiquent que pour les faibles nombres de Reynolds c'est la diffusion moléculaire qui domine par contre pour des Reynolds élevés c'est la diffusion des remous qui prédomine.*
- [20] C.Y.Wen, L.T. Fan, ***Models for Flow Systems and Chemical Reactors***, Dekker, New York, (1975), **je ne l'ai pas**
- [21] V.E. Shapiro & M.V. Loginov ***Formulae of differentiation and their use for solving stochastic equations***, *Physica A*, 91, p.563, (1978), *Les auteurs ont trouvé une formule simple pour découpler des corrélations qui apparaissent en traitant les modèles de processus aléatoires qui vérifient la loi exponentielle tels que les processus de Poissonniens, les processus gaussiens etc...*
- [22] I.S. Gradshteyn & I.M. Rythik ***Table of integrals series and products***, Academic Press, New York, (1965)
- [23] O.R. Kozyrev, K. Logvinova ***Some fundamental properties of fractional operators*** Proceedings of Russian Academy of Eng. Science Ser. Applied Mathematics and Mechanics. V.6, p.20, (2004) (in Russian)
- [24] Yu.A. Zheltov, V.P. Morozov & V.N. Dutishev ***About the mechanism of thermocyclic intensifications of mass transfer into metal melts.*** Proceedings of Academy of Science USSR. V.5, 31, p.33, (1990) (in Russian)

- [25] A.E. Dubinov, V.D. Selemir *Generalized wave equations for electromagnetic wave dynamics for fractional stationary media. In Fractals in Applied Physics : Gorky*, p.5, (1955) (in Russian)
- [26] A.I. Saichev & G.M. Zaslavsky, *Chaos*,7,753,(1997).
- [27] K. Nishimoto, *Fractional calculus, Deacates, Koriyama*, (1984).
- [28] B. Riemann, *Gesammelte Werke*, 331, (1978)
- [29] J. Liouville, *Mémoire sur le calcul des différentielles à indices quelconques*, *J.Ec.Polytech.(Paris)*,13,221, pp. 71-162, (1832)
- [30] C.Cocozza-Thivent, *Processus stochastiques et fiabilité des systèmes*, Mathématiques et applications 28, Springer - ISBN 3-540-63390-1 Springer-verlag Berlin Heidelberg New York.
- [31] L.D. Landau & E.M. Lifshitz, *Physique théorique, Tome VI, "Mécanique des Fluides"*, Mir, (1971)
- [32] Koplík J. *Disorder and Mixing in* : E. Guyon, Y. Pomeau, J.P. Nadal (Eds.), Proceeding of the Nato Conference on disorder and mixing, Kluwer, Dordrecht, The Netherlands, pp. 107-122.