

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE**  
**SCIENTIFIQUE**

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
(ALGER)

Faculté de Mathématiques



**THÈSE**

**Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTORAT**

en : **MATHÉMATIQUES**

Spécialité : **RECHERCHE OPÉRATIONNELLE**

Par : **Fatima AFFIF CHAOUCHE**

Sujet :

***PROBLEMES D'EXISTENCE EN  
STRUCTURES DISCRETES***

Soutenue le : 13 / 02 / 2008, devant le jury composé de :

AIDER	Méziane	Prof, USTHB	Président
BERRACHEDI	Abdelhafid	Prof, USTHB	Directeur de Thèse
AIT-HADDADENE	Hacène	Prof, USTHB	Examineur
BLIDIA	Mostafa	Prof, USD Blida	Examineur
BOUCHEMAKH	Isma	Prof, USTHB	Examinatrice
CHELLALI	Mustapha	MC, USD Blida	Examineur

## **REMERCIEMENTS**

*J'exprime toute ma gratitude à mon directeur de thèse, le Professeur Abdelhafid BERRACHEDI (Faculté de Mathématiques, USTHB). Je le remercie pour son soutien et son suivi le long de la réalisation de cette thèse. Pour tout l'intérêt qu'il a accordé à ce travail et toute sa patience afin qu'il aboutisse, je lui formule toute ma reconnaissance.*

*Mes remerciements vont pour le Professeur Méziane AIDER (Faculté de Mathématiques, USTHB), pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury. Pour le soutien qu'il ne cesse d'apporter afin que le travail de recherche avance et tout l'intérêt qu'il a porté à ce travail, je le remercie vivement.*

*Pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en faisant partis de jury, je tiens à formuler mes plus vifs remerciements au Professeur Hacène AÏT-HADDADENE (Faculté de Mathématiques, USTHB), au Professeur Mostafa BLIDIA (Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, USD Blida), à M<sup>me</sup> Isma BOUCHEMAKH (Professeur à la Faculté de Mathématiques, USTHB) et à M. Mustapha CHELLALI (Maître de Conférences à la Faculté des Sciences, Département de Mathématiques, USD Blida).*

*Toute ma gratitude, va aussi pour le Professeur R.A.Bailey de l'Université Queen Mary de Londres (Co-directeur de l'Ecole de Mathématiques) pour son accueil au sein de département le long des différents séjours et de m'avoir donné une chance de découvrir et d'apprécier plus les problèmes de Combinatoire en général. Je la remercie pour sa disponibilité et toutes les séances de travail très bénéfiques que j'ai pu avoir avec elle. A tous les autres professeurs, docteurs et personnel de département de Mathématiques de QMUL, j'exprime toute ma reconnaissance pour leur aide, soutien, gentillesse et leurs marques de sympathie ; en particulier le Professeur P.J.Cameron, C.G.Rutherford et R.F.Bailey. Merci aussi au professeur D.H.Smith de l'université de Glamorgan, Pontypridd (Grande Bretagne) pour m'avoir reçu au sein de son département, pour ses orientations et particulièrement pour les séances de travail en théorie des codes, dont j'ai bénéficié.*

*Je remercie, tous ceux qui de près ou de loin ont manifesté leurs soutien et encouragement pour mener ce travail à terme. Je pense surtout à mes amis de département de Recherche Opérationnelle de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB et à mes collègues et amis de l'Ecole Supérieure de Commerce d'Alger. Je remercie particulièrement M. A.SABOUA, le directeur actuel de l'ESC, pour ses marques de sympathie et son soutien pour bien terminer cette thèse.*

*Mes vifs remerciements vont enfin à mes parents, mes frères et particulièrement mes sœurs pour leurs soutiens, aide, sympathie et surtout leur compréhension le long de ces années. A tous je dédie ce travail.*

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>3</b>
<b>1 Définitions et notations</b>	<b>7</b>
1.1 Graphes . . . . .	7
1.1.1 Notions élémentaires . . . . .	7
1.1.2 Distances, décompositions en niveaux . . . . .	9
1.1.3 Groupe d'automorphismes d'un graphe . . . . .	9
1.1.4 Opérations classiques . . . . .	10
1.1.5 Graphes particuliers . . . . .	12
1.2 Quelques notions d'algèbre combinatoire . . . . .	18
1.2.1 Action d'un groupe sur un ensemble . . . . .	18
1.2.2 Produit de groupes . . . . .	20
1.3 Quelques invariants de graphes . . . . .	21
<b>2 Graphes de Hamming et l'amplement régularité</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Propriétés de base des graphes de Hamming . . . . .	23
2.3 La classe des graphes amplement réguliers . . . . .	24
2.4 Une caractérisation de $H(d,3)$ . . . . .	32
2.5 Caractérisation des graphes de Hamming . . . . .	34
<b>3 Graphes de Hamming et la quasi-amplement régularité</b>	<b>39</b>
3.1 Introduction . . . . .	39
3.2 Propriétés de base des graphes de Hamming . . . . .	39
3.3 La Quasi-Amplement régularité d'un graphe . . . . .	41
3.4 Produit cartésien de <i>deux</i> classes de graphes amplement réguliers	44
3.5 Caractérisation des graphes de Hamming . . . . .	48

<b>4</b>	<b>Symétrie et régularité des graphes de Hamming</b>	<b>53</b>
4.1	Introduction . . . . .	53
4.2	Quelques résultats préliminaires d’algèbre combinatoire . . . . .	55
4.3	Exemples de Groupes d’automorphismes de graphes . . . . .	59
4.4	Les graphes de Hamming et les groupes de permutations . . . . .	61
4.5	Cas de groupes d’automorphismes transitifs et abéliens . . . . .	68
4.6	Quelques autres types de symétries . . . . .	71
4.7	Transitivité des graphes amplement réguliers . . . . .	74
4.8	Graphes de Hamming et le graphe de Shrikhande . . . . .	79
<b>5</b>	<b>La <math>b</math>-coloration des graphes de Hamming</b>	<b>83</b>
5.1	Introduction . . . . .	83
5.2	Quelques propriétés de base du nombre $b$ -chromatique . . . . .	84
5.3	Cas de graphes réguliers . . . . .	89
5.4	Le nombre $b$ -chromatique de quelques graphes particuliers . . . . .	91
5.5	La $b$ -coloration de produit cartésien de graphes . . . . .	94
5.6	Le nombre $b$ -chromatique des graphes de Hamming . . . . .	97
5.7	Le produit total et la $b$ -coloration . . . . .	103
	<b>Conclusion générale</b>	<b>109</b>
	<b>Problèmes ouverts</b>	<b>111</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>115</b>
	<b>ANNEXE 1</b>	<b>121</b>
	<b>ANNEXE 2</b>	<b>141</b>
	<b>ANNEXE 3</b>	<b>151</b>

# Introduction

Les mathématiques jouent un rôle vital dans notre société. La Recherche Opérationnelle est à l'origine de résolution de plusieurs problèmes de la vie quotidienne, posés en économie, informatique, défense, stratégie et autres. La combinatoire est, vaguement, la science des comptes. C'est une branche de mathématiques pures qui s'intéresse à l'étude des objets discrets. Elle s'occupe plus de la résolution des problèmes que de construction théorique; bien qu'elle a développée des méthodes théoriques très puissantes, particulièrement depuis le 20<sup>ème</sup> siècle. Une des plus anciennes et accessible parties de la combinatoire est la théorie des graphes, qui de son coté a plusieurs connections avec d'autres domaines.

Face à un nouveau objet combinatoire, *deux* questions fondamentales apparaissent. La première est une question d'existence. En effet, les structures rencontrées sont généralement définies dans le terme de certains paramètres et la question à se poser est : pour quelles valeurs de ces paramètres des objets existent? La recherche d'une réponse à une telle question nous amène, parfois, à un problème de construction. Le deuxième problème est un problème d'unicité, dans le sens où si un exemple existe pour un choix donné de paramètres, combien d'exemples y'en a t-il?

Les graphes sont des structures combinatoires de base et le produit de structures est une construction fondamentale en mathématiques. En effet des théorèmes s'obtiennent en théorie des ensembles et l'algèbre universel; donc il n'est pas surprenant de voir des résultats importants s'obtenir en faisant le produit de graphes et ainsi beaucoup d'idées parfois apparaissent, prenant en compte le coté combinatoire et algébrique. Le développement de la théorie des graphes est lié à plusieurs autres notions de la théorie des structures discrètes. On cite à titre d'exemples : groupes de

permutations, automorphismes de graphes, partitions régulières, primitivité, configurations, codes et d'autres. Chose qui a donné naissance à plusieurs travaux de recherches ([29], [37], [38], [46], [50], [51], ...). Les graphes de Hamming par exemple, et plus particulièrement les graphes des hypercubes, sont utilisés dans la représentation des réseaux et l'architecture parallèle ou en série. Et de là, découle un intérêt pratique porté à certains graphes.

Les graphes de Hamming constituent une famille de graphes distance-réguliers. Ils peuvent être considérés comme un cas de graphes dual polaires, graphes bilinéaires, graphes de codes et graphes de Coxeter pour  $q = 2$ . Hikoe Enomoto [36] avait caractérisé la classe de graphes de Hamming, produit cartésien de  $d$  cliques de même ordre  $n$ . Ces graphes, considérés comme une des familles à paramètres classiques, étaient et demeurent sujet de plusieurs études et recherches ([19], [24], [56], [60], [65], ...), et ainsi de plusieurs caractérisations. En s'inspirant des études déjà réalisées sur ces graphes, d'autres propriétés combinatoires et métriques seront démontrés, le long des *cinq* chapitres constituant cette thèse. Ces dernières induisent alors différentes caractérisations, dus à la régularité parfois et à la symétrie une autre fois, des graphes de Hamming obtenus par produit cartésien de différents graphes complets.

Le chapitre 1 regroupe toutes les définitions et concepts de base et notations, à utiliser le long de ce travail.

Au chapitre 2, nous établissons les propriétés de la classe de graphes amplement réguliers en général et nous couvrons l'essentiel des propriétés des graphes de Hamming d'une manière particulière. Ces graphes présentent plusieurs propriétés de régularités intéressantes.

Il est bien connu et démontré de différentes manières que les hypercubes (graphes de Hamming  $H(d,2)$ ) représentent les  $(0,2)$ -graphes d'ordre maximum pour un degré donné ([36], [56], [65], ...). Ces graphes préservent alors la même propriété dans la classe des graphes amplement réguliers de paramètre  $\lambda$  nul. Une caractérisation des autres graphes de Hamming est établie, d'abord dans la classe des graphes amplement réguliers; puis parmi les graphes distance-réguliers ([1], [3]).

Au chapitre *trois*, nous allons discuter un cas plus général, à savoir les graphes quasi-amplement réguliers et les graphes de Hamming.

L'outil algébrique est utilisé en plusieurs sens en combinatoire en général et en théorie des graphes en particulier; ainsi les graphes s'élevèrent naturellement dans l'étude des groupes. Et c'est dans ce contexte qu'a été la naissance de la théorie algébrique des graphes à côté d'autres théories ([21], [28], [40], [42], [61], ...). Ainsi, en plus des propriétés combinatoires des graphes relativement simple, il existe des propriétés plus avancées qui sont liées à l'algèbre et à la théorie des groupes. Le groupe d'automorphismes d'un graphe est un invariant algébrique dans le sens où *deux* graphes isomorphes aient le même groupe d'automorphismes. L'algèbre combinatoire est une partie importante des mathématiques discrètes, elle s'occupe des structures algébriques où la symétrie a un intérêt spécial. C'est alors au chapitre 4 que ces notions sont exploitées. Ainsi la nécessité de se familiariser avec quelques résultats principaux d'algèbre et certaines méthodes algébriques utilisées en structures discrètes; aussi bien que des méthodes combinatoires qui aident à obtenir et comprendre les variétés des résultats algébriques. Un rappel de quelques résultats de base est bien fondamental.

L'objectif est de développer d'autres caractérisations, et notre approche au niveau de ce chapitre est plutôt algébrique. Cependant, après avoir traité la régularité des graphes amplement réguliers et les graphes de Hamming dans les chapitres précédents, on s'occupe ici de la transitivité qui est obtenue à partir des caractéristiques algébriques. Les propriétés élémentaires découlent facilement, plusieurs nouveaux résultats sont démontrés et les graphes de Hamming obtenus par produit cartésien de différents graphes complets sont de nouveau caractérisés sous certaines conditions.

Le chapitre *cinq* s'intéresse à la coloration des graphes. Il s'agit d'un outil mathématique permettant de mettre en évidence certaines de leurs propriétés. Il existe plusieurs paramètres de coloration et les plus exploités sont le nombre de stabilité et le nombre chromatique. Un nouveau paramètre introduit récemment (1999) par Robert.W.Irving et David.F.Manlove [48], est le nombre  $b$ -chromatique.

L'étude des différents invariants de graphes est initiée pour les besoins de la vie active. Le nombre  $b$ -chromatique a été étudié pour quelques familles particulières de graphes. Une première étude, réalisée par B.Effantin et H.Kheddouci [34], s'est focalisée sur *trois* graphes particuliers : les graphes puissances d'une chaîne, d'un cycle et d'un arbre  $k$ -aire complet. Le degré des sommets de ces

graphes évolue très rapidement avec la puissance et l'évaluation de cette évolution revient à déterminer le nombre  $b$ -chromatique de leurs graphes puissances. Ces classes de graphes sont intéressantes; et c'est dû à leur utilité pratique; car certains parmi eux sont utilisés dans des problèmes liés aux réseaux par exemple. En raison de la difficulté de la recherche de ce paramètre, Mario Valencia-Pabon et J. Vera [76] se sont aussi intéressés au problème d'approximation du nombre  $b$ -chromatique d'un graphe.

Le nombre  $b$ -chromatique  $\varphi(G)$  du graphe  $G$  est un paramètre significatif. Nous allons s'intéresser dans ce chapitre au nombre  $b$ -chromatique de certaines classes de graphes.

Ce manuscrit se termine par une conclusion générale ainsi que des perspectives de recherche envisagées.

# Chapitre 1

## Définitions et notations

### 1.1 Graphes

La terminologie adoptée dans ce travail est particulièrement due à C.Berge [18] et N.Biggs [21].

#### 1.1.1 Notions élémentaires

La définition de graphe à considérer correspond uniquement aux cas de graphes simples, finis et non orientés. Un graphe  $G$  consiste en *deux* éléments : un ensemble fini  $V(G)$ , dont les éléments sont appelés sommets et un ensemble de paires non ordonnées de sommets distincts  $E(G)$ , dont les éléments sont appelés arêtes. S'il n'y a pas risque de confusion, on note  $V$  à la place de  $V(G)$  et  $E$  à la place de  $E(G)$ .

Le nombre de sommets est appelé ordre de  $G$ .

Une arête  $\{u,v\}$  est noté  $uv$ . On dira :

- $u$  et  $v$  sont adjacents,
- $uv$  joint  $u$  et  $v$ , on notera  $u \sim v$ ,
- $u$  et  $v$  sont voisins et ils sont incidents avec  $uv$ ,
- $uv$  est incidente à  $u$  et  $v$  et que  $u$  et  $v$  sont les *deux* extrémités de  $uv$ .

Ainsi un graphe sera représenté par une figure géométrique où les sommets sont représentés par des points; une arête est une ligne joignant les *deux* points représentant ses *deux* extrémités.

Un graphe  $G$  est vide si  $V(G)$  est vide.  $uv$  est une non-arête de  $G$  si  $uv \notin E(G)$ .

Le complémentaire d'un graphe  $G$  est le graphe  $\bar{G}$  où l'ensemble de sommets est  $V(G)$  et l'ensemble de ses arêtes est constitué des non-arêtes de  $G$ . Un graphe  $G$  est dit auto-complémentaire s'il est isomorphe à son graphe complémentaire.

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Un sous graphe de  $G$  est un graphe  $G'$ , défini par un ensemble de sommets  $V' \subset V$  et celui de ses arêtes est  $E' \subset E$  et tel que toute arête de  $E'$  joint deux sommets de  $V'$ . Dans le cas où  $V' = V$ , on dira que  $G'$  est un graphe partiel de  $G$ .

Un sous graphe induit  $G'$  de  $G$ , est un sous graphe de  $G$  où  $E(G')$  est formé de toutes les arêtes de  $G$  ayant leurs extrémités dans  $V(G')$ .

Le degré d'un sommet  $u$  est le nombre d'arêtes pour lesquelles  $u$  est une extrémité. Le degré minimum des sommets de  $G$  est noté par  $\delta(G)$ , tandis que le degré maximum est  $\Delta(G)$ .

On définit comme chaîne de longueur  $l$  de  $v_i$  à  $v_j$ , noté  $P_{l+1}$ , la séquence finie de sommets de  $G$ ,  $v_i = u_0, u_1, \dots, u_l = v_j$  tel que  $u_{t-1}$  et  $u_t$  sont adjacents pour  $1 \leq t \leq l$ . On parle aussi d'une  $(v_i, v_j)$ -chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple. Elle est dite élémentaire si elle ne rencontre pas deux fois le même sommet. Un graphe est dit connexe si toute paire de sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont reliés par au moins une chaîne. L'arête connectivité de graphe  $G$  est le nombre minimum d'arêtes, qu'il faut éliminer afin de déconnecter le graphe  $G$ . Elle est noté par  $\theta(G)$ . On appelle sommet-connectivité de  $G$  le nombre minimum de sommets qu'il faut éliminer afin de le déconnecter.

L'intervalle entre deux sommets  $u$  et  $v$  dans  $G$ , noté  $I_G(u, v)$  (ou  $I(u, v)$  s'il n'y a pas risque de confusion) est l'ensemble de sommets de  $G$  appartenant aux plus courtes  $(u, v)$ -chaînes.

Un cycle de longueur  $l$  ou un  $l$ -cycle est une séquence de sommets distincts  $v_1, v_2, \dots, v_l$  tels que  $v_i \sim v_{i+1}, \forall i \in \{1, 2, \dots, l-1\}$  et  $v_l \sim v_1$ . Un triangle  $T$  est un cycle de longueur 3. Un pentagone est un cycle de longueur 5, tels que deux sommets  $v_i$  et  $v_j$  sont adjacents si et seulement si  $(i - j) \equiv \mp 1[5]$ . Un graphe connexe et sans cycle est appelé arbre.

On appelle couplage un ensemble d'arêtes  $E_0$ , tel que *deux* quelconques des arêtes de  $E_0$  sont non-adjacentes. Si pour tout sommet  $u$  de  $G$ , il existe une arête de  $E_0$  attachée à  $u$ .

### 1.1.2 Distances, décompositions en niveaux

Etant donné un graphe  $G$ , la distance  $d_G(u,v)$  (noté aussi  $d(u,v)$  s'il n'y a pas risque de confusion) est la longueur d'une plus courte  $(u,v)$ -chaîne de  $G$ . L'excentricité d'un sommet  $u$ , notée  $e_G(u)$ , est la longueur de la plus grande plus courte chaîne issue de  $u$ . Le diamètre d'un graphe  $G$ , noté  $diam(G)$ , est la plus grande excentricité dans  $G$ .

Pour un sommet  $u$  de  $G$ ,  $N(u)$  est l'ensemble des sommets voisins à  $u$ .  $\{u\} \cup N(u)$  est appelé voisinage fermé de  $u$ , il est noté  $N[u]$ . Pour  $i$  un entier,  $N_i(u)$  est l'ensemble des sommets à distance  $i$  de  $u$ . Le cas de  $i = 1$ , on retrouve exactement  $N(u)$ . Une décomposition de  $G$  en niveaux relative au sommet  $u$ , est une partition des sommets en  $N_0(u), N_1(u), \dots, N_p(u)$ ; où  $p = e_G(u)$ .

Soit  $F$  une propriété. Un graphe  $G$  est dit localement  $F$  si pour tout sommet  $u$  de  $G$ , le sous graphe induit par  $N(u)$  possède la propriété  $F$ . Il est alors dit localement connexe si pour tout sommet  $u$ , le sous graphe induit par  $N(u)$  est connexe.

### 1.1.3 Groupe d'automorphismes d'un graphe

Une première notion à définir est d'abord celle de permutation. On sous-entend par une permutation dans un ensemble  $\Omega$  de  $n$  sommets, une bijection dans cet ensemble. Sous l'opération de composition de fonctions, si on note  $\Omega$  par  $\{1,2,\dots,n\}$ , l'ensemble  $S_n$  de toutes les permutations d'éléments de  $\Omega$  est appelé groupe symétrique de degré  $n$ . Un groupe de permutations  $H$  est un sous groupe de  $S_n$ .  $H$  est dit abélien si  $\forall g,g' \in H$ , on a  $gg' = g'g$ .

- Homomorphisme : il existe plusieurs définitions pour la notion d'homomorphisme entre graphes, la plus classique est la suivante :

$g$  est un homomorphisme de graphe  $G$  dans le graphe  $G'$ , s'il existe une application de  $V(G)$  dans  $V(G')$  qui conserve l'adjacence. Autrement dit  $G$  est homomorphe à  $G'$  s'il existe une application  $g$  de  $V(G)$  dans  $V(G')$  telle que : si  $uv \in E(G)$  alors  $g(u) = g(v)$  ou  $g(u)g(v) \in E(G')$ .

- Isomorphisme : *Deux* graphes  $G$  et  $G'$  sont isomorphes s'il existe une application bijective  $f$  telle que  $f$  est un homomorphisme de  $G$  dans  $G'$  et  $f^{-1}$  est un homomorphisme de  $G'$  dans  $G$ . *Deux* graphes isomorphes sont usuellement non distinguables.
- Automorphisme : un automorphisme de  $G$  est un isomorphisme de  $G$  dans lui même. En d'autres termes, un automorphisme est une permutation  $g$  de  $V(G)$  ayant la propriété : pour  $u, v \in V(G)$ ,  $u \sim v$  si et seulement si  $g(u) \sim g(v)$ .

L'ensemble de tous les automorphismes d'un graphe  $G$  muni de l'opération de composition d'applications est le groupe d'automorphismes de  $G$  noté par  $Aut(G)$ . Il s'agit d'un groupe de permutations de  $n$  sommets où  $n = |V(G)|$ .  $Aut(G)$  est un sous groupe de  $S_n$ . La recherche de  $Aut(G)$  est en général un problème  $NP$ -complet; il consiste à prendre tout élément  $g$  de  $S_n$ , où  $n$  est le nombre de sommets de  $G$  et tester la condition :  $\forall u, v \in V(G)$ ,  $u \sim v$  si et seulement si  $g(u) \sim g(v)$ .

Un groupe trivial est celui réduit à un seul élément, à savoir l'identité. Il est bien signalé (Peter.J.Cameron [28]) que la proportion des graphes  $G$  dont le groupe d'automorphismes  $Aut(G)$  n'est pas trivial tend vers 0. Mais en raison de l'intérêt que ce groupe engendre, il reste toujours important de le déterminer.

#### 1.1.4 Opérations classiques

Les opérations entre objets en mathématiques discrètes est un moyen de construction combinatoire. Les opérations fondamentales entre graphes à exploiter sont les suivantes.

- Produit cartésien : Le produit cartésien de *deux* graphes  $G$  et  $G'$  est le graphe  $G \square G'$  tel que  $V(G \square G') = V(G) \times V(G')$  et  $(u, u')$  est adjacent

à  $(v,v')$  si et seulement si : soit  $u = v$  et  $u'v' \in E(G')$  ou bien  $u' = v'$  et  $uv \in E(G)$ .

Exemple : Le graphe  $K_3 \square K_2$  (Fig 1.1).

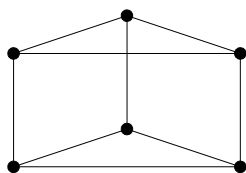


FIG. 1.1

Une des propriétés du produit cartésien est qu'il préserve les structures d'espaces métriques.

On dit qu'un graphe  $G$  est *premier* relativement au produit cartésien de graphes, s'il ne peut être représenté comme produit cartésien de *deux* graphes non triviaux. Donc l'égalité  $G = G_1 \square G_2$  implique nécessairement que  $G_1$  ou  $G_2$  est le graphe complet  $K_1$ . *Deux* graphes sont dits premiers entre eux s'ils n'ont pas d'éléments communs dans leurs décompositions en produits cartésien de facteurs premiers. Il est facile de voir que tout graphe admet une décomposition en éléments *premiers*. Cette décomposition est un problème polynomial.

- Produit catégoriel : On définit le produit catégoriel de *deux* graphes  $G$  et  $G'$  par le graphe  $G \otimes G'$  dont l'ensemble des sommets est  $V(G) \times V(G')$  et *deux* sommets  $(u,u')$  et  $(v,v')$  sont adjacents si et seulement si  $uv \in E(G)$  et  $u'v' \in E(G')$ . Ce produit est aussi appelé produit tensoriel, produit direct, produit de Kroneker ou produit cardinal.

Exemple : Le graphe  $K_3 \otimes K_2$  (Fig 1.2).

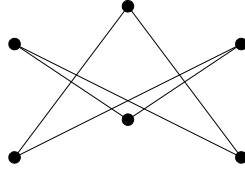


FIG. 1.2

- Produit total : Le produit total de *deux* graphes  $G$  et  $G'$  est le graphe  $G \boxtimes G'$  défini par  $V(G) \times V(G')$  comme ensemble de sommets et  $(u, u')$  est adjacent à  $(v, v')$  si et seulement si :  
soit  $u = v$  et  $u'v' \in E(G')$  ou  $u' = v'$  et  $uv \in E(G)$ , ou bien  $uv \in E(G)$  et  $u'v' \in E(G')$ .

Exemple : Le graphe  $K_3 \boxtimes K_2$  (Fig 1.3).

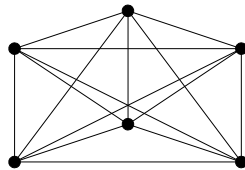


FIG. 1.3

### 1.1.5 Graphes particuliers

- Graphe complet : Un graphe  $G = (V, E)$  est dit complet si pour *deux* sommets quelconques  $u$  et  $v$  de  $V$ ,  $uv \in E$ . Un graphe complet de  $n$  sommets se dénote par  $K_n$  et s'appelle une  $n$ -clique.

- Graphe biparti et biparti complet :  $G$  est dit biparti si  $V$  peut être partitionné en *deux* sous ensembles  $V_1$  et  $V_2$  et tel que *deux* sommets d'un même sous ensemble ne sont pas adjacents. Il est dit biparti complet si tout sommet de  $V_1$  est adjacent à tout sommet de  $V_2$ . Il est dans ce cas noté  $K_{n_1, n_2}$  où  $n_1 = |V_1|$  et  $n_2 = |V_2|$ .

Exemple : Le graphe  $K_{3,2}$  (Fig 1.4).

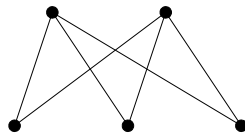


FIG. 1.4

Une généralisation de cette notion, donne :

- Graphe multiparti et multiparti complet : Un graphe  $G$  est dit  $p$ -parti si  $V$  peut être partitionné en  $p$  sous ensembles  $V_1, V_2, \dots, V_p$  et tels que les sommets d'un même sous ensemble ne sont pas adjacents. Si la valeur de  $p$  est inconnu,  $G$  est juste dit multiparti.  
 $G$  est dit  $p$ -parti complet si *un* sommet quelconque de  $V_i$  est adjacent à *un* sommet quelconque de  $V_j$ ,  $\forall i, j \in \{1, 2, \dots, p\}$  et  $i \neq j$ . Il est dans ce cas noté  $K_{v_1, v_2, \dots, v_p}$  où  $v_j = |V_j|$ ,  $\forall j \in \{1, 2, \dots, p\}$ .
- Graphe de Mulder :  $G$  est dit graphe de Mulder ou  $(0, \lambda)$ -graphe, si toute paire de sommets admet 0 ou bien  $\lambda$  voisins communs.

Exemple : Le 4 - *cycle* induit (Fig 1.5) est un  $(0, 2)$ -graphe.

- Graphe puissance : Le graphe  $p$ -puissance d'un graphe  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  en ajoutant une arête entre toute paire de sommets à distance  $p$  ou moins, avec  $p \geq 1$ .

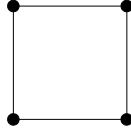


FIG. 1.5

- Graphe de l'hypercube: L'hypercube de dimension  $d$ , noté  $Q_d$  est le graphe dont les sommets représentent les  $d$ -uplets de  $\{0,1\}^d$ . Deux sommets sont adjacents si et seulement si ils diffèrent exactement d'une composante.

$$Q_0 = K_1, Q_1 = K_2 \text{ et } Q_{d+1} = Q_d \square K_2.$$

- Graphe de Hamming: On distingue *deux* cas.
  - Le graphe de Hamming  $H(d,n)$  est le graphe obtenu par produit cartésien de  $d$  graphes complets  $K_n$ . Le cas particulier  $H(d,2)$  est le graphe de l'hypercube  $Q_d$ .

Exemple: Le graphe  $H(2,3)$  (Fig 1.6).

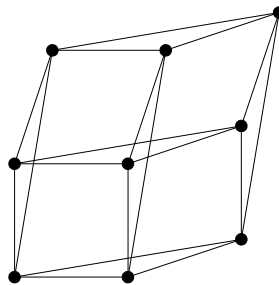


FIG. 1.6

- Pour  $k$  différents entiers positifs non nuls  $n_i$ , le graphe produit cartésien de plusieurs graphes complets  $K_{n_i}$ , est aussi appelé graphe de Hamming. Si le graphe  $K_{n_i}$  apparaît  $d_i$  fois dans le produit cartésien, on retrouve le produit cartésien de différents graphes de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \cdots \square H(d_k, n_k)$ , noté  $H(d_1, n_1; d_2, n_2; \cdots; d_k, n_k)$ . Si les  $d_i$  sont identiques pour toutes les valeurs de  $i$ , on note  $H(d_i; n_1, n_2, \dots, n_k)$ .  
Exemple : Le graphe  $H(2; 3, 2) = H(2, 2) \square H(2, 3)$  (Fig 1.7).

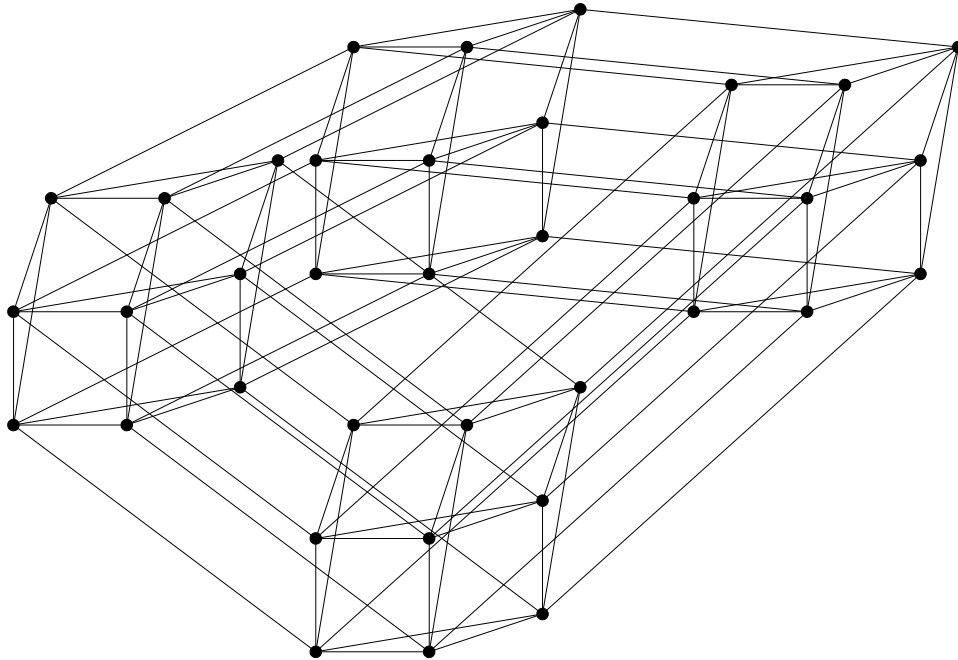


FIG. 1.7

- Graphe distance-régulier : Un graphe  $G$  est dit distance-régulier s'il est régulier de degré  $k$  et il existe des entiers  $b_i, c_i, i \geq 0$  tels que pour une quelconque paire de sommets  $u$  et  $v$  avec  $d(u, v) = i$ , il existe

précisément  $c_i$  voisins de  $v$  dans  $N_{i-1}(u)$ ,  $b_i$  voisins de  $v$  dans  $N_{i+1}(u)$  et donc  $a_i = k - b_i - c_i$  voisins de  $v$  dans  $N_i(u)$ .

On définit dans ce cas le tableau d'intersection de  $G$  comme étant la séquence  $L(G) = \{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$  où  $d$  est le diamètre;  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  sont les nombres d'intersection. Il est clair que  $b_0 = k$ .

Exemple: Le graphe de Shrikhande est distance-régulier, de degré 6, diamètre 2 et de tableau d'intersection  $L(G) = \{6, 3; 1, 2\}$ . Une représentation détaillée de ce graphe est donné en Fig 1.8

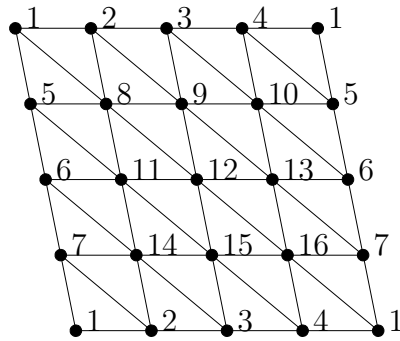


FIG. 1.8

Pour  $i$  un entier allant de 1 à 16,  $A_i$  est l'ensemble de tous les sommets portant l'étiquette  $i$ . En remplaçant l'ensemble  $A_i$  par un seul sommet; à qui on relie tous les voisins de  $A_i$ , on obtient le graphe de Shrikhande présenté en Fig 1.9.

- Graphe arête-régulier et co-arête-régulier : Plusieurs graphes distance-réguliers se présentent comme cas des graphes extrémaux avec une des propriétés de régularité faible suivantes :
  - $R_1$  : toute paire de sommets adjacents possèdent  $\lambda$  voisins communs.
  - $R_2$  : toute paire de sommets à distance 2 possèdent  $\mu$  voisins communs.

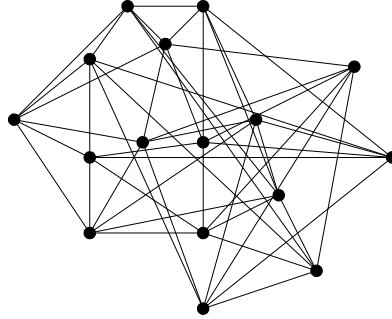


FIG. 1.9

$R_3$  : toute paire de sommets non adjacents possèdent  $\nu$  voisins communs.

Le graphe régulier  $G$  est dit arête-régulier de paramètres  $(n, k, \lambda)$  si  $R_1$  est réalisé. Il est dit co-arête-régulier de paramètres  $(n, k, \mu)$  si  $R_3$  est réalisé.

- Graphe amplement régulier : Un graphe amplement régulier  $G$  de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  est le graphe d'ordre  $n$ , régulier de degré  $k$  et vérifie  $R_1$  et  $R_2$ .

$\mathcal{G}_\lambda$  désigne la classe de graphes amplement réguliers, tels que *deux* sommets adjacents admettent  $\lambda$  voisins communs et *deux* sommets à distance 2 ont 2 voisins communs.

Il est dit fortement régulier si  $R_1$  et  $R_3$  sont réalisées. Il est facile de remarquer qu'un tel graphe est de diamètre au plus 2 et de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$ .

Signalons qu'une relation étroite existe entre les graphes fortement réguliers et les configurations symétriques, où le problème consiste à remplir une matrice carré  $n \times n$  avec  $n$  chiffres de 1 à  $n$ , de telle sorte qu'aucune ligne ou colonne ne contient le même nombre *deux* fois.

**Remarque 1.1.1.** *Le graphe en Fig 1.10, vérifie la condition  $R_1$  avec  $\lambda = 1$  et  $R_3$  avec  $\nu = 1$ . Mais remarquons que dans ce cas, la régularité n'est pas vérifiée. Ainsi le graphe n'est pas fortement régulier.*

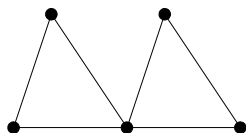


FIG. 1.10

- Graphe quasi-ablement régulier : Le graphe  $G$  d'ordre  $n$  est dit quasi-ablement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ , s'il est d'ordre  $n$ , régulier de degré  $k$ , une paire de sommets adjacents possèdent  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  voisins communs et toute paire de sommets à distance *deux* possèdent  $\mu_1$  ou  $\mu_2$  voisins communs. Si  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ , le graphe est représenté par les paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ .  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  correspond au cas où  $\mu = 2$ ; avec hypothèse  $\lambda_1 < \lambda_2$ .

Exemple : Le graphe  $K_3 \square K_4$  est quasi-ablement régulier de paramètres  $(12, 5, 1, 2, 2)$ .

## 1.2 Quelques notions d'algèbre combinatoire

A titre d'exemple liant la théorie des graphes et l'algèbre, on cite les contraintes algébriques dans les tableaux d'intersections. En effet, considérant un tableau d'intersection donné  $L$ , existe-t-il un graphe  $G$ , tel que  $L(G) = L$ ? Un paramètre très significatif de certaines régularités d'un graphe est son tableau d'intersection. Certaines propriétés de ce dernier peuvent nous aider dans la recherche de la réponse à la question précédente. A l'aide d'une méthode algébrique, il a été prouvé qu'un grand nombre de tableaux d'intersections ne correspondent à aucun graphe.

### 1.2.1 Action d'un groupe sur un ensemble

On dit que le groupe  $H$  agit sur un ensemble  $X$  s'il existe une application de  $H \times X$  dans  $X$ , qui fait correspondre à un élément  $(g, x)$ , l'élément  $g(x)$ .

L'application doit vérifier :

- Pour tous  $g$  et  $g'$  de  $H$  et pour tout  $x$  de  $X$ , on a  $gg'(x) = g(g'(x))$ ;
- L'élément neutre  $e$  de  $H$  vérifie :  $\forall x \in X, e(x) = x$ .

De ces *deux* axiomes, il s'ensuit que pour tout  $g$  de  $H$ , la fonction qui envoie  $x$  de  $X$  vers  $g(x)$  est bijective dans  $X$ .

Il existe plusieurs types d'action d'un groupe sur un ensemble donné. On a :

- $H$  agit transitivement sur  $X$  si et seulement si  $\forall u, v \in X, \exists g \in H$  tel que  $v = g(u)$ .
- L'action de  $H$  est  $n$ -transitive si pour  $x_1, x_2, \dots, x_n, n$  éléments *deux à deux* distincts et  $y_1, y_2, \dots, y_n, n$  éléments aussi *deux à deux* distincts,  $\exists g \in H$  tels que  $g(x_k) = y_k$  pour  $1 \leq k \leq n$ . Cas où  $n = 2$ , l'action de  $H$  sur  $X$  est dit doublement transitive.

Dans ce travail, nous allons nous intéresser au cas où  $H$  est un groupe de permutations. Pour un graphe  $G$ , on considère  $H$  le groupe de tous les automorphismes de  $G$ , noté  $Aut(G)$  agissant sur  $V(G)$ . On distingue *deux* notions élémentaires.

- Graphe sommet-transitif :  $G$  est dit graphe sommet-transitif si l'action de  $Aut(G)$  sur  $V(G)$  est transitive. Donc pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ ,  $\exists g \in Au(G)$  tel que :  $u = g(v)$ .
- Graphe distance-transitif :  $G$  est dit distance-transitif si pour tout quadruplet  $u, v, x$  et  $y$  tel que  $d(u, v) = d(x, y)$ ,  $\exists g$  un automorphisme de  $G$  tel que :  $g(u) = x$  et  $g(v) = y$ .

Si la propriété est vraie uniquement pour le cas où  $d(u, v) = d(x, y) = 1$ , c'est à dire  $uv \in E(G)$  et  $xy \in E(G)$ , le graphe est dit symétrique.  $G$  est dit asymétrique si  $Aut(G) = \{Id\}$ .

**Remarque 1.2.1.** *La distance-transitivité est une forte propriété de symétrie et la distance-régularité est la propriété de régularité conséquente.*

## 1.2.2 Produit de groupes

Parmi les opérations définies entre groupes de permutations on a :

- Le produit direct : Soient  $H_1$  et  $H_2$  deux groupes. Le produit direct de  $H_1$  et  $H_2$  agissant sur deux ensembles disjoints  $V_1$  et  $V_2$  respectivement est le groupe  $H_1 \times H_2$  agissant sur  $V_1 \cup V_2$ ; tels que :  $H_1 \times H_2 = \{(g_1, g_2) / g_1 \in H_1 \text{ et } g_2 \in H_2\}$  et

$$(g_1, g_2)(v) = \begin{cases} g_1(v) & \text{si } v \in V_1 \\ g_2(v) & \text{si } v \in V_2 \end{cases}$$

Cette définition est étendue au produit direct d'un nombre quelconque de groupes de permutations.

- Le produit semi-direct : soient  $H$  et  $K$  deux groupes tels que  $H$  agit sur  $K$  en préservant sa structure et pour tout élément  $g$  de  $H$ , la fonction qui correspond à  $u$ , son image  $g(u)$  est un automorphisme de  $K$ . On définit le produit semi-direct de  $K$  par  $H$ , par :  
 $K \rtimes H = \{(u, g) / u \in K, g \in H\}$  et  $(u, g)(v, g') = (ug^{-1}(v), gg')$ .
- Le produit en couronne : Il s'agit d'un exemple de produit semi-direct. Soit  $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n / X_i = X$ ;  
 $K^n = K_1 \times K_2 \times \dots \times K_n / K_i = K$  et  $K_i$  est une copie de groupe  $K$  agissant sur  $X_i$ .  $K_i$  admet alors une fonction induite sur  $Y$ .  
On considère maintenant le groupe de permutations  $H$  agissant sur l'ensemble d'indices  $\{1, 2, \dots, n\}$ . Alors  $H$  admet une fonction induite sur  $Y$  et  $K^n$ . Le produit semi-direct de  $K^n$  par  $H$  est le produit en couronne de  $K$  par  $H$ . Il est noté  $K \wr H$ .

Si  $K_2$  est un groupe de permutations agissant sur  $\{1, 2, \dots, n\}$ , le produit en couronne  $K_1 \wr K_2$  est généré par le produit direct de  $n$  copies de  $K_1$ , tels que les éléments de  $K_2$  agissent sur les  $n$  copies de  $K_1$ .

### 1.3 Quelques invariants de graphes

Les paramètres préservés sous automorphismes de graphes sont appelés les invariants. Parmi les invariants de graphes largement étudiés, ceux liés à la coloration de sommets ou d'arêtes. Les plus élémentaires sont :

- Nombre de stabilité : On appelle un stable d'un graphe  $G$ , un sous ensemble  $S$  de sommets de  $G$ , 2 à 2 non adjacents. Le nombre de stabilité, noté  $\alpha(G)$ , est défini comme étant la cardinalité maximum d'un stable de  $G$ .
- Nombre chromatique : Une  $k$ -coloration de graphe  $G$  est une application  $c$  de  $V(G)$  dans l'ensemble  $\{1,2,\dots,k\}$ , telle que pour toute paire de sommets adjacents  $u$  et  $v$  de  $G$ , on a  $c(u) \neq c(v)$ . Le nombre chromatique d'un graphe  $G$  est le nombre minimum  $k$  tel que  $G$  admet une  $k$ -coloration. Il est noté  $\chi(G)$ .
- Indice chromatique : On appelle indice chromatique  $q(G)$  de graphe  $G$ , le plus petit entier  $q$  ayant la propriété suivante : il est possible de colorier les arêtes de  $G$  avec  $q$  couleurs de sortes que *deux* arêtes ayant une extrémité commune ne portent pas de la même couleur.
- Taille d'une clique maximum : la taille d'une clique maximum de  $G$  est la taille de la plus grande clique de  $G$ , noté par  $W(G)$ .

D'autres paramètres de coloration sont récemment introduits. Le nombre achromatique d'un graphe  $G$  est défini ci-après et le nombre  $b$ -chromatique sera présenté au chapitre 4.

- Le nombre achromatique d'un graphe  $G$  est le plus grand nombre de couleurs, qu'on peut utiliser pour colorier les sommets de  $G$  de sorte que les sommets adjacents aient des couleurs différentes et toute paire de distinctes couleurs apparait dans les extrémités d'au moins une arête.



# Chapitre 2

## Graphes de Hamming et l'amplement régularité

### 2.1 Introduction

La notion de graphe de Hamming a été introduite par Richard W. Hamming. Hikoe Enomoto [36] s'est intéressé à la caractérisation de ces graphes parmi d'autres ayant certaines propriétés de régularités communes. Il s'agit en particulier d'une caractérisation en fonction de nombre de sommets et de degré dans la classe de graphes, dites amplement réguliers.

La classe des graphes de Hamming constitue une généralisation de celle des hypercubes. Les graphes de Hamming ont une structure très particulière, riche en différentes propriétés. Ils ont un grand degré de régularité; la notion de codes de Hamming est défini en conséquence par le même auteur. La notion de configuration est défini par Bose et Shimamoto en 1952; et Delsarte, Bannai et Ito ont fait correspondre aux graphes distance-réguliers les configurations symétriques. Les Configurations de Hamming sont définies par R.A. Bailey [15].

### 2.2 Propriétés de base des graphes de Hamming

Pour  $d$  et  $n$  deux entiers non nuls, le graphe de Hamming  $H(d,n)$  est d'ordre  $n^d$  et de degré  $d(n-1)$ . Deux quelconques sommets de ce graphe ont

$(n - 2)$  voisins communs s'ils sont adjacents et *deux* voisins communs s'ils sont à distance 2.  $H(d,n)$  est aussi un graphe sans  $K_4 - e$ .

Des résultats particuliers sont obtenus pour le cas particulier de graphes de l'hypercube. Nous rappelons ici les plus pertinents.

**Proposition 2.2.1.** (*A.Berrachedi, [19], J.M.Laborde et S.P.Rao Hebbare, [56]*) Soit  $G$  un graphe admettant une décomposition en niveaux où tout 4-cycle rencontre 3-niveaux, alors  $G$  est un hypercube.

M.Mollard [64] s'est intéressé à l'étude des hypercubes dans la classe des  $(0,2)$ -graphes; la proposition suivante constitue une caractérisation de ces graphes.

**Proposition 2.2.2.** (*M.Mollard, [64]*) Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe  $d$ -régulier. On a alors :

1.  $diam(G) \leq d$
2.  $diam(G) = d$  si et seulement si  $G$  est le graphe de l'hypercube  $Q_d$ .

Une des propriétés saillantes des graphes de Hamming est la suivante.

**Proposition 2.2.3.** (*Wilfried Imrich, Sandi Klazar [47]*) Soit  $u$  et  $v$ , deux sommets d'un graphe de Hamming tels que  $d(u,v) = r$  dans un graphe de Hamming. Alors  $I(u,v)$  induit un hypercube de dimension  $r$ .

## 2.3 La classe des graphes amplement réguliers

Un graphe amplement régulier  $G$  d'ordre  $n$  et de degré  $k$  est donné par les paramètres  $(n,k,\lambda,\mu)$  où  $\lambda$  et  $\mu$  sont le nombre de voisins communs de *deux* sommets adjacents et de *deux* sommets à distance *deux* respectivement.  $K_{\lambda+2}$  est un graphe amplement régulier. Quelques autres exemples sont donnés ci-après.

Exemple 1: Graphe de Johnson.

Considérons  $X = \{1,2,\dots,n\}$  et soit  $X_{n,k}$  l'ensemble de tous les sous ensembles

de  $X$  d'ordre  $k$ . Le graphe sous ensemble uniforme  $J(n,k,i)$ , admet comme ensemble de sommets  $X_{n,k}$ . Deux sommets  $u = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}$  et  $v = \{j_1, j_2, \dots, j_k\}$  sont adjacents si et seulement si  $|u \cap v| = i$ . Un tel graphe est appelé le graphe de Johnson. Il est le premier exemple de la famille de graphes sous ensembles uniformes.

Le graphe de Johnson  $J(4,2,1)$  (Fig 2.1), est le graphe de l'octaèdre. Il est amplement régulier de paramètres  $(6,4,2,4)$ . Ce graphe est sans  $K_4$ .

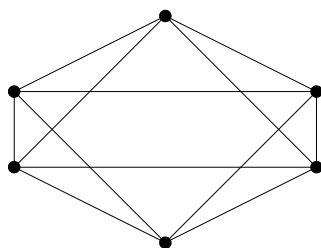


FIG. 2.1

Exemple 2 : Le graphe de l'icosaèdre.

Un autre graphe amplement régulier est le graphe de l'icosaèdre (Fig 2.2). Il est de paramètres  $(12,5,2,2)$ . Il est aussi sans  $K_4$ .

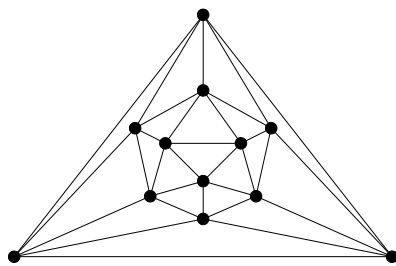


FIG. 2.2

**Remarque 2.3.1.** Soient  $X = \{1, 2, \dots, n\}$  un ensemble de  $n$  sommets et un ensemble  $L = \{i_1, i_2, \dots, i_k\} \subset X$ . Le graphe circulaire  $Ci_n(i_1, i_2, \dots, i_k)$  est le graphe d'ensemble de sommets  $X$  et tel que le  $i^{\text{ème}}$  sommet est adjacent au sommet  $(i - j)[n]$  et  $(i + j)[n]$  pour tout  $j$  de  $L$ . Le graphe de Johnson  $J(4, 2, 1)$  est isomorphe au graphe  $Ci_6(1, 2)$ .

Une caractérisation de graphe de l'icosaèdre est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 2.3.1.** (A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier, [24]) Soit  $G$  un graphe localement un pentagone; alors  $G$  est isomorphe à l'icosaèdre.

Un des résultats préliminaires sur les graphes amplement réguliers est donné par A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier [24]. Les auteurs ont prouvé qu'un graphe amplement régulier, connexe, mais pas localement connexe est un graphe multiparti complet.

Hikoe Enomoto [36] a démontré la régularité des graphes amplement réguliers. Pour le cas où  $\mu = 2$ , une autre preuve est donnée dans ce qui suit.

**Proposition 2.3.2.** Soient  $\lambda$  un entier non nul et  $G$  un graphe tels que deux sommets adjacents ont  $\lambda$  voisins communs et deux sommets à distance deux ont 2 voisins communs. Alors  $G$  est régulier de degré  $k$ . De plus si  $G$  est sans  $K_4 - e$  alors  $k \equiv 0[(\lambda + 1)]$ .

**Preuve.**

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets adjacents de  $G$ . On considère  $N(u, v)$  l'ensemble des voisins communs de  $u$  et  $v$  et nous démontrons que  $|N(u) \setminus N(v)| = |N(v) \setminus N(u)|$ .

Il suffit alors de vérifier que  $|N(u) \setminus N(v)| = |N(v) \setminus N(u)|$ .

Nous définissons d'abord une injection de  $N(u) \setminus N(v)$  dans  $N(v) \setminus N(u)$  et une injection de  $N(v) \setminus N(u)$  dans  $N(u) \setminus N(v)$ .

Soit  $t$  un élément de  $N(u) \setminus N(v)$ .

$t$  et  $v$  sont à distance 2; ils possèdent un second voisin commun  $w$ . On distingue deux cas :

Si  $w \in N(v) \setminus N(u)$ , alors on correspond au sommet  $t$  de  $N(u) \setminus N(v)$ , un sommet de  $N(v) \setminus N(u)$ .

Dans le cas où  $w \in N(u,v)$ , on a :

$|N(u,w)| = \lambda$  et  $t$  et  $v$  sont *deux* voisins communs de ces sommets. Il existe alors un élément  $s$  de  $N(u,v)$  tel que  $s \notin N(u,w)$ .

Ainsi  $s$  n'est pas adjacent à  $w$ .

D'une façon similaire pour  $v$  et  $w$ ; comme  $|N(v,w)| = \lambda$ , ces sommets ont exactement *un* voisin commun  $x$  dans  $N(v) \setminus N(u)$ .  $x$  est l'image de  $t$  et la fonction qui fait correspondre à  $v$  le sommet  $x$ , est une injection; autrement les *deux* sommets qui sont adjacents vont avoir plus de  $\lambda$  voisins communs.

Il s'ensuit qu'à tout sommet de  $N(u) \setminus N(v)$ , on associe un sommet de  $N(v) \setminus N(u)$ . Inversement, on obtient  $|N(v) \setminus N(u)| \leq |N(u) \setminus N(v)|$ .

Donc  $|N(u) \setminus N(v)| \leq |N(v) \setminus N(u)|$  et  $|N(v) \setminus N(u)| \leq |N(u) \setminus N(v)|$ .

On a alors la double inégalité. D'où l'égalité et ainsi  $G$  est régulier.

Supposons maintenant que  $G$  ne contient pas de sous graphe induit  $K_4 - e$ .

Et soit  $v$  un sommet de  $N(u)$ .  $u$  et  $v$  possèdent  $\lambda$  voisins communs.

Dans ce cas, les sommets de  $N(u)$  induisent des composantes connexes de  $\lambda + 1$  sommets qui sont des cliques.

Ainsi  $|N(u)|$  est un multiple de  $\lambda + 1$ ; donc  $k \equiv 0[(\lambda + 1)]$ .  $\square$

**Remarque 2.3.2.** *Le résultat est aussi vraie si  $\lambda = 0$ . En effet; si  $u$  et  $v$  sont adjacents, à tout voisin de  $u$ , on fait correspondre un et un seul voisin de  $v$ .*

Pour  $\lambda$  un entier positif,  $\mathcal{G}_\lambda$  est la classe de graphes amplement réguliers tels que *deux* sommets adjacents ont  $\lambda$  voisins communs et *deux* sommets à distance *deux* ont 2 voisins communs. Afin de construire de nouveaux graphes dans cette classe, nous avons la proposition suivante.

**Proposition 2.3.3.** *Soit la classe de graphes tels que deux sommets adjacents ont  $\lambda$  voisins communs et deux sommets à distance deux ont 2 voisins communs, avec  $\lambda$  et  $\mu$  deux entiers positifs. Le produit cartésien est une opération interne dans cette classe de graphes si et seulement si  $\mu = 2$ .*

**Preuve.**

Soient  $G$  et  $G'$  *deux* graphes amplement réguliers de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  et  $(n', k', \lambda, \mu)$  respectivement. Et considérons *deux* sommets  $(u, u')$  et  $(v, v')$  de  $G \square G'$  à distance  $i = 1$  ou 2.

1<sup>er</sup> cas:  $(u,u')$  et  $(v,v')$  sont adjacents. Sans perte de généralités, on suppose que  $u = v$  et  $u'v' \in E(G')$ , dans quel cas  $u'$  et  $v'$  possèdent  $\lambda$  voisins communs dans  $G'$ .

Considérons alors les sommets  $w'_i; i \in \{1,2,\dots,\lambda\}$ , les voisins communs de  $u'$  et  $v'$  dans  $G'$ . Alors  $(u,w'_i); i = 1,2,\dots,\lambda$  sont les voisins communs de  $(u,u')$  et  $(v,v')$  dans  $G \square G'$ .

De la définition de  $G \square G'$ , on déduit que  $(u,u')$  et  $(v,v')$  ne peuvent avoir un autre voisin commun.

2<sup>ème</sup> cas:  $(u,u')$  et  $(v,v')$  sont à distance 2,  $(w,w')$  est l'un de leurs voisins communs. Comme  $(w,w')$  est adjacent à  $(u,u')$  et  $(v,v')$ . Sans perte de généralités, on suppose en premier lieu que  $w = u = v$ ,  $w'u', w'v' \in E(G')$  et  $d(u',v') = 2$ . Alors, il existe  $\mu - 1$  autres sommets  $t'_i$  qui sont des voisins communs de  $u'$  et  $v'$  dans  $V(G')$ .

$(w,t'_i)$  sont les voisins communs de  $(u,u')$  et  $(v,v')$  dans  $G \square G'$ .

En second lieu, on suppose que  $u = w$  et  $w' = v'$  alors  $wv \in E(G)$  et  $u'w' \in E(G')$  et les deux sommets ont alors deux voisins communs.

Ainsi deux sommets à distance deux ont deux ou bien  $\mu$  voisins communs.

$G \square G'$  est dans la même classe de graphes si et seulement si  $\mu = 2$ .  $\square$

On déduit facilement que  $\mathcal{G}_\lambda$  est stable par produit cartésien et que le graphe de Hamming  $H(d,\lambda + 2)$  est dans  $\mathcal{G}_\lambda$ .

Une propriété élémentaire des graphes amplement réguliers est donnée par A.E.Brouwer par le lemme suivant :

**Lemme 2.3.1.** (*A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier, [24]*) *Dans un graphe amplement régulier de paramètres  $(n,k,\lambda,\mu)$ , le nombre  $k_2$  de sommets à distance 2 d'un sommet  $u$  est indépendant de  $u$  et vérifie la relation  $k_2 \cdot \mu = k(k - 1 - \lambda)$ .*

Nous précisons que pour un graphe  $G$ , les deux conditions:  $G$  est sans pentagone et  $\forall u,v \in V(G)$ , le sous graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  ne contient pas de pentagone, ne sont pas équivalentes.

Cependant l'unique graphe amplement régulier de paramètres  $(19,6,1,2)$  vérifie la condition  $\forall u,v \in V(G)$ , le sous graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone; mais ce graphe contient au moins un pentagone.

**Proposition 2.3.4.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_\lambda$  de degré  $k$ . Alors pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , on a :*

1.  $|N(u) \cap I(u,v)| \geq d(u,v)$  et  $\text{diam}(G) \leq k$
2. Si  $G$  est sans  $K_4 - e$  et pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  le graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone, alors  $\text{diam}(G) \leq \frac{k}{\lambda+1}$ .

**Preuve.**

1. La preuve est par induction sur  $d = d(u,v)$ .

Le résultat est immédiat pour  $d = 1$ .

Comme  $G$  est dans  $\mathcal{G}_\lambda$ , une paire de sommets  $u$  et  $v$  possèdent deux voisins communs s'ils sont à distance 2. L'inégalité est alors vraie.

Considérons  $u$  et  $v$  deux sommets à distance  $d + 1$ ; et soit  $w$  un voisin de  $v$  dans  $I(u,v)$ .

Selon l'hypothèse de récurrence,  $w$  admet au moins  $d$  voisins dans  $I(u,w)$ . Dénotons ces sommets par  $w_1, w_2, \dots, w_d$ .

Pour  $i = 1, 2, \dots, d$ ,  $w_i$  et  $v$  sont à distance 2.  $w$  est un voisin commun de ces deux sommets. Leur deuxième voisin commun dénoté  $v_i$  est dans  $I(u,v) \cap N(v)$ .

Pour  $w_i \neq w_j$ , certainement  $v_i \neq v_j$ ; car sinon  $v_i$  et  $w$  auront trois voisins communs.

Les sommets  $v_i$  ( $i = 1, \dots, d$ ) et  $w$ , constituent  $d + 1$  voisins de  $v$  dans  $N(u) \cap I(u,v)$ . Alors  $|N(v) \cap I(u,v)| \geq d(u,v)$ .

Soient maintenant  $u$  et  $v$  deux sommets tels que  $d(u,v) = \text{diam}(G)$  et  $w$  un sommet de  $I(u,v)$ . On a  $I(u,w) \cap I(w,v) = \{w\}$ .

Donc  $k \geq |N(w) \cap I(u,w)| + |N(w) \cap I(w,v)|$ .

Ainsi  $k = |N(w)| \geq d(u,w) + d(w,v)$ .

On a alors  $k \geq d(u,v) = \text{diam}(G)$ .

2. Supposons que  $G$  ne contient pas de  $K_4 - e$  et pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone.

Pour un sommet  $u$  de  $G$ , on considère un sommet  $v$  de  $N_i(u)$ . Montrons par induction sur  $i$  que pour  $v \in N_i(u)$ , le nombre de voisins de  $v$  dans  $N_{i-1}(u) \cup N_i(u)$ , dénoté par  $d_{i-1,i}(v)$ , vérifie  $d_{i-1,i}(v) \geq (\lambda + 1)i$ . Immédiat pour  $i = 1$ .

Comme  $G$  est sans  $K_4 - e$ , la propriété est aussi vraie pour  $i = 2$ .

Pour  $i = 3$ , supposons que  $w$  est un sommet adjacent à  $v$  dans  $N_2(u)$  et  $x$  et  $y$  sont les deux voisins de  $w$  dans  $N_1(u)$ .  $x$  et  $y$  induisent deux

sommets distincts  $w_1$  et  $w_2$  dans  $N_2(u)$ , qui sont les *seconds* voisins communs des paires de sommets  $(w_1, v)$  et  $(w_2, v)$  respectivement.  $v$  admet alors au moins  $3(\lambda + 1)$  voisins dans  $N_2(u) \cup N_3(u)$ .

Supposons que la propriété est vraie pour  $i$  et prouvons la pour  $i + 1$ .

Soit  $v \in N_{i+1}(u)$  et  $w$  un voisin de  $v$  dans  $N_i(u)$ .

De la propriété précédente:  $v$  admet au moins  $i + 1$  voisins  $v_1, v_2, \dots, v_i$  et  $w$  dans  $N_i(u)$ .

Si les sommets de l'ensemble  $\{v_1, v_2, \dots, v_i, w\}$  sont *deux à deux* non adjacents;  $v$  possèdera au moins  $(\lambda + 1)(i + 1)$  voisins dans  $N_i(u) \cup N_{i+1}(u)$ .

Supposons que  $v$  et  $w$  possèdent un voisin commun dans  $N_i(u)$ , et soit  $t$  ce sommet.

Par hypothèse,  $I(u, v) \setminus N[v]$  est sans pentagone; alors  $w$  admet au moins  $i$  voisins non adjacents dans  $N_{i-1}(u)$ . Chacun de ces sommets admet  $\lambda$  voisins communs avec  $w$ .

$w$  admet alors au moins  $(\lambda + 1)i$  voisins dans  $N_{i-1}(u) \cup N_i(u)$ .

Ces sommets sont tous à distance 2 de  $v$  puisque  $G$  est sans  $K_4 - e$  et un deuxième voisin commun est induit à chaque fois.

Et comme  $v$  et  $w$  ont  $\lambda$  voisins communs, alors  $v$  admettra au moins  $(\lambda + 1)(i + 1)$  voisins dans  $N_i(u) \cup N_{i+1}(u)$ .

Si maintenant  $u$  et  $v$  sont *deux* sommets diamétraux, alors  $k \geq d_{diam(G)-1, diam(G)}$  et  $d_{diam(G)-1, diam(G)} \geq (\lambda + 1)diam(G)$ .

Alors  $k \geq (\lambda + 1)diam(G)$ . Ainsi  $diam(G) \leq \frac{k}{\lambda + 1}$ .

□

**Proposition 2.3.5.** *Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$ . Pour tout sommet  $u$  de  $G$ , on a:  $|N_2(u)| = \frac{k(k-\lambda-1)}{2}$  et  $|N_i(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \binom{k}{i}$  pour  $i$  un entier tel que  $i \geq 3$ .*

*Si de plus,  $G$  est sans  $K_4 - e$  et le sous graphe induit par  $I(u, v) \setminus N[v]$  est sans pentagone pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ ; alors*

$$|N_i(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{\frac{k}{\lambda + 1}}{i} \text{ et } |V(G)| \leq (\lambda + 2)^{\frac{k}{\lambda + 1}}.$$

**Preuve.**

Considérons la décomposition en niveaux de  $G$  relative au sommet  $u$ . Le sommet  $v$  de  $N_1(u)$  admet  $\lambda$  voisins communs avec  $u$ . Donc  $d_{0,1}(v) = \lambda + 1$  et  $d_2(v) = k - \lambda - 1$ .

Un sommet quelconque de  $N_2(u)$  admet 2 voisins dans  $N_1(u)$ .

On compte le nombre d'arêtes entre  $N_1(u)$  et  $N_2(u)$  de *deux* manières différentes.

On retrouve  $|N_1(u)|(k - \lambda - 1) = 2 \cdot |N_2(u)|$ .

Ainsi  $|N_2(u)| = \frac{k(k-\lambda-1)}{2}$ .

Montrons par induction la propriété  $|N_i(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \binom{k}{i}$  pour un entier positif  $i$  non nul.

Soient  $w$  et  $v$  *deux* sommets adjacents dans  $N_i(u)$  et  $N_{i+1}(u)$  respectivement.

On a  $d_{i+1}(w) \leq k - i$  et  $d_i(v) \geq i + 1$ , alors en comptant dans les *deux* sens les arêtes entre  $N_i(u)$  et  $N_{i+1}(u)$ , on retrouve :

$|N_{i+1}(u)|(i + 1) \leq |N_i(u)|(k - i)$ , ainsi  $|N_{i+1}(u)| \leq |N_i(u)| \frac{k-i}{i+1}$ .

Comme  $|N_i(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \binom{k}{i}$ , alors  $|N_{i+1}(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \frac{k-i}{i+1} \binom{k}{i}$ .

Donc  $|N_{i+1}(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \binom{k}{i+1}$ .

Considérons maintenant le cas où  $G$  est sans  $K_4 - e$  et pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone.

On a  $d_{i+1}(w) \leq k - (\lambda + 1)i$  et  $d_i(v) \geq (i + 1)$ .

De la même manière que précédemment, on compte le nombre d'arêtes entre  $N_i(u)$  et  $N_{i+1}(u)$  de *deux* manières différentes. On retrouve  $|N_{i+1}(u)| \cdot (i + 1) \leq |N_i(u)|(k - (\lambda + 1)i)$ .

Donc :  $|N_{i+1}(u)| \leq |N_i(u)| \cdot \frac{k-(\lambda+1)i}{i+1}$ .

Si  $|N_i(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{\frac{k}{\lambda+1}}{i}$  alors  $|N_{i+1}(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{\frac{k}{\lambda+1}}{i} \frac{k-(\lambda+1)i}{i+1}$ .

Comme  $k$  est un multiple de  $\lambda + 1$ , il existe un entier  $d$  tel que  $k = (\lambda + 1)d$ .

Il s'ensuit que  $|N_{i+1}(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{d}{i} \frac{(\lambda+1)d-(\lambda+1)i}{i+1}$ .

Alors  $|N_{i+1}(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{d}{i} (\lambda + 1) \frac{d-i}{i+1}$ .

On obtient ainsi  $|N_{i+1}(u)| \leq (\lambda + 1)^{i+1} \binom{d}{i+1}$ .

Donc  $\forall i = 1, 2, \dots, \frac{k}{\lambda+1}$ ,  $|N_i(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{\frac{k}{\lambda+1}}{i}$ .

Comme  $|V(G)| = \sum_{i=1}^{diam(G)} |N_i(u)|$  et  $diam(G) \leq \frac{k}{\lambda+1}$ .

On retrouve  $|V(G)| \leq (\lambda + 2) \frac{k}{\lambda+1}$ .  $\square$

**Remarque 2.3.3.** Pour toute valeur de  $\lambda$ ,  $K_{\lambda+2}$  est le graphe de  $\mathcal{G}_\lambda$  de diamètre 1. Les graphes de  $\mathcal{G}_\lambda$  de diamètre 2, sont d'ordre  $\frac{2+k(1-\lambda)+k^2}{2}$  où  $k$  est le degré. Un tel graphe est dit fortement régulier.

## 2.4 Une caractérisation de $H(d,3)$

Une des caractérisations des graphes des hypercubes est donnée par J.M.Laborde, S.P.Rao Hebbare et H.M.Mulder dans la classe des  $(0,2)$ -graphes. Elle est rappelée par le théorème suivant.

**Théorème 2.4.1.** (*J.M.Laborde et S.P.Rao Hebbare [56], H.M.Mulder [65]*)  
Soit  $\varphi$  la classe des  $(0,2)$ -graphes connexes et  $G$  est un graphe de  $\varphi$ .  $G$  est l'hypercube de degré fini  $d$  si et seulement si  $G$  possède  $2^d$  sommets.

Il est facile de constater que  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_2$  sont deux sous classes de la classe des  $(0,2)$ -graphes. Ainsi la proposition suivante :

**Proposition 2.4.1.** *Pour  $G$  un élément de  $\mathcal{G}_0$  d'ordre  $n$  et de degré  $k$ .  $n$  vérifie la relation :  $n \leq 2^k$ . De plus,  $n = 2^k$  si et seulement si  $G$  est isomorphe au graphe de l'hypercube  $Q_k$ .*

**Preuve.**

Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_0$  d'ordre  $n$  et de degré  $k$ . Alors, toute paire de sommets adjacents aient 0 voisins communs et toute paire de sommets à distance 2 aient deux voisins communs.  $G$  est un  $(0,2)$ -graphe. D'après J.M.Laborde et S.P.Rao Hebbare [56], on a  $n \leq 2^k$ .

Il est aussi démontré que l'unique  $(0,2)$ -graphe de degré  $k$  et d'ordre  $n = 2^k$  est le graphe de l'hypercube  $Q_k$ .

Comme  $Q_k$  est un graphe de  $\mathcal{G}_0$ , alors  $n = 2^k$  si et seulement si  $G$  est le graphe de l'hypercube  $Q_k$ .  $\square$

Pour le cas  $\lambda = 1$ ; dans ce qui suit, une autre caractérisation sous d'autres contraintes, est fournie pour les graphes de Hamming  $H(d,3)$ .

Remarquons que pour  $G$  un élément de  $\mathcal{G}_1$ ;  $G$  est sans  $K_4 - e$  et le degré de  $G$  est un nombre pair qu'on note par  $2d$ . D'après la proposition 2.3.5, si pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone alors  $|V(G)| \leq 3^d$ .

Nous appelons  $i$ -star un graphe formé par  $i$  triangles, arêtes disjointes ayant un sommet commun; ce sommet est appelé le centre du  $i$ -star. Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_1$  ayant comme sous graphe induit un  $i$ -star  $E$ ;  $G'$  le plus petit

sous graphe induit de  $G$  contenant  $E$  et tel que  $G' \in \mathcal{G}_1$ . Un tel graphe est appelé la  $G$ -fermeture de  $E$ .

**Proposition 2.4.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_1$ , la  $G$ -fermeture d'un  $i$  – star  $E$  de  $G$ , est le graphe  $H(i,3)$ .*

**Preuve.**

Par induction sur  $i$ .

Le résultat est vraie pour  $i = 1$  et  $i = 2$ .

Soit  $H$  la  $G$  – fermeture de  $(i + 1)$  – star  $E$  centré en  $u$  et soient  $uu'_j u''_j$  ( $j = 1, \dots, i$ ) et  $uvw$  ses  $(i + 1)$ –triangles.

Pour toute valeur de  $j$ ,  $u'_j$  (respectivement  $u''_j$ ) admet un deuxième voisin commun avec le sommet  $v$  dans  $N_2(u)$  et un autre voisin commun avec le sommet  $w$ .

Les voisins de  $v$  sont adjacents *deux à deux*, et toute paire de sommets adjacents constituent avec  $v$  un triangle.

On obtient  $i$  triangles centrés en  $v$  et  $i$  autres triangles centrés en  $w$ . D'où un  $i$  – star centré en  $v$  et un autre  $i$  – star centré en  $w$ .

Soient  $H_u$ ,  $H_v$  et  $H_w$  les  $G$ -fermetures de  $i$  – star centré en  $u$ ,  $v$  et  $w$  respectivement.

D'après l'hypothèse de récurrence  $H_u$ ,  $H_v$  et  $H_w$  sont isomorphes au graphe de Hamming  $H(i,3)$ . Ils sont disjoints *deux à deux*.

En effet, *deux* graphes parmi les trois sont non disjoints, le graphe  $G$  ne sera pas un élément de  $\mathcal{G}_1$ .

Soient maintenant  $x$ ,  $y$  et  $z$  trois sommets à distance  $i$  de  $u$ ,  $v$  et  $w$  respectivement tels que  $yz \in E(G)$ .

Dans  $H_u$ ,  $H_v$  et  $H_w$  respectivement,  $d_{i-1}(x) = d_i(x) = i$ ,  $d_{i-1}(y) = d_i(y) = i$  et  $d_{i-1}(z) = d_i(z) = i$ .  $y, z \in N_{i+1}(u)$  et  $|N_i(v)| = |N_i(w)| = 2^i$ .

Il s'ensuit que  $H_u \cup H_v \cup H_w \setminus N_{i+1}(u)$  est isomorphe au graphe  $H(i + 1,3)$ , duquel le dernier niveau est éliminé.

A partir des hypothèses précédentes, les sommets  $x$ ,  $y$  et  $z$  constituent un triangle. Il reste à démontrer que  $N_i(v) \cup N_i(w)$  induits le graphe de l'hypercube  $Q_{i+1}$ .

Comme  $|N_i(v)| = |N_i(w)| = 2^i$ . Le sommet  $x$  est nécessairement adjacent aux sommets  $y$  et  $z$ , car les *deux* sommets  $y$  et  $z$  constituent avec le sommet  $x$  un triangle. Les sommets de  $N_{i+1}(u)$  constituent un  $(0,2)$ -graphe de degré  $i + 1$ . Comme  $|N_{i+1}(u)| = 2^{i+1}$ , alors  $N_i(v) \cup N_i(w)$  induit le graphe de l'hy-

percute  $Q_{i+1}$ .

Donc toute arête est dans un unique triangle et comme *deux* sommets à distance 2, admettent *deux* voisins communs; alors,  $H_u \cup H_v \cup H_w$  constituent le graphe  $H(i+1,3)$ .  $\square$

**Théorème 2.4.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_1$  de degré  $2d$ . Les deux assertions suivantes sont équivalentes.*

1.  $|V(G)| = 3^d$ ;
2.  $G$  est le graphe  $H(d,3)$ .

**Preuve.**

Si  $G$  est le graphe  $H(d,3)$  alors  $|V(G)| = 3^d$ .

Supposons maintenant que  $|V(G)| = 3^d$ . D'après la proposition précédente,  $G$  contient la  $G$ -fermeture de  $d$ -star centré en  $u$ , qui est le graphe  $H(d,3)$ . Alors  $G$  contient le graphe  $H(d,3)$ .

$G$  est un graphe de  $\mathcal{G}_1$ , contient  $H(d,3)$ , d'ordre  $3^d$  et de degré  $2d$ ; ainsi  $G$  est le graphe  $H(d,3)$ .  $\square$

## 2.5 Caractérisation des graphes de Hamming

Plusieurs caractérisations des graphes de Hamming existent dans la littérature. Parmi, on trouve :

1. Caractérisation géométrique ;
2. Caractérisation par des paramètres ;
3. Caractérisation par le spectre.

Le théorème de H.Enomoto donné ci-après représente une caractérisation géométrique des graphes de Hamming.

**Théorème 2.5.1.** *(Hikoe ENOMOTO [36]). Soit  $G = (V,E)$  un graphe simple et connexe. Supposons*

1.  $|N(u)| = k$  pour tout  $u \in V$ ,
  2.  $|N(u) \cap N(v)| = \lambda$  si  $v \in N(u)$ ,
  3.  $|N(u) \cap N(v)| = \mu$  si la distance  $d(u,v)$  de  $u$  à  $v$  est deux,
  4.  $N(u) \cap N(v)$  ne contient pas d'arête si  $d(u,v) = 2$
- et

5.  $(V,E)$  ne contient pas de pentagone, c'est à dire il n'existe pas cinq sommets  $u_i$ ,  $0 \leq i \leq 4$ , tels que  $u_i$  et  $u_j$  sont adjacents si et seulement si  $(i - j) \equiv \mp 1[5]$ .

Donc :

- $r = \frac{k}{\lambda+1}$  est un entier,
- Si  $\mu \geq 2$ , alors  $|N_i(u)| \leq \binom{r}{i} (\lambda + 1)^i$ , pour tout  $u \in V$  et tout  $i \geq 0$ , le diamètre de  $G$  est au plus  $r$  et  $|V| \leq (\lambda + 2)^r$ .
- De plus, si  $|V| = (\lambda + 2)^r$ , alors  $(V,E)$  est isomorphe à  $H(r,\lambda + 2)$ .

En exploitant la proposition 2.3.4, on obtient le théorème suivant.

**Théorème 2.5.2.** *Soit  $G$  un graphe vérifiant :*

1.  $|N(u)| = k$  pour tout  $u \in V$ ,
2.  $|N(u) \cap N(v)| = \lambda$  si  $v \in N(u)$ ,
3.  $|N(u) \cap N(v)| = \mu$  si la distance  $d(u,v)$  de  $u$  à  $v$  est deux.
4.  $N(u) \cap N(v)$  ne contient pas d'arête si  $d(u,v) = 2$  et
5. Pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le sous graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone.

Alors :

- $r = \frac{k}{\lambda+1}$  est un entier,
- Si  $\mu \geq 2$ , alors  $|N_i(u)| \leq \binom{r}{i} (\lambda + 1)^i$ , pour tout  $u \in V$  et tout  $i \geq 0$ , le diamètre de  $G$  est au plus  $r$  et  $|V| \leq (\lambda + 2)^r$ .
- De plus,  $|V| = (\lambda + 2)^r$  si et seulement si  $G$  est isomorphe à  $H(r,\lambda + 2)$ .

**Preuve.**

D'après la proposition 2.3.6, les mêmes résultats de précédent théorème sont obtenus en remplaçant la condition 5 par la condition :  
pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le sous graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone. Ainsi, la preuve en découle.  $\square$

La notion de graphe amplement régulier est liée à celle de la distance-régularité. Les graphes de Hamming forment une famille de base des graphes distance-réguliers.

**Proposition 2.5.1.** *Tout graphe distance-régulier est amplement régulier.*

**Preuve.**

Soit  $G$  est un graphe distance-régulier, d'ordre  $n$  et de degré  $k$ .

$\{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$  est son tableau d'intersection où  $d$  est le diamètre.

Alors  $k = b_0$  et  $c_1 = 1$ .

Soient  $u$  et  $v$ , deux sommets adjacents de  $G$ . Donc  $v \in N(u)$  et le nombre de voisins communs de ces deux sommets est  $k - b_1 - c_1$ . On pose alors  $\lambda = k - b_1 - 1$ .

Si maintenant les deux sommets sont à distance deux, alors le nombre de leurs voisins communs est  $c_2$ .

On a alors  $\mu = c_2$  et ainsi  $G$  est un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, b_0, k - b_1 - 1, c_2)$ .  $\square$

**Remarque 2.5.1.** *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie.*

En effet, soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$ . Si  $\text{diam}(G) = 2$ , alors il est distance-régulier et son tableau d'intersection est  $L(G) = \{k, k - 1 - \lambda; 1, \mu\}$ . Mais si  $\text{diam}(G) > 2$ ,  $G$  n'est pas nécessairement distance-régulier comme le montre l'exemple suivant.

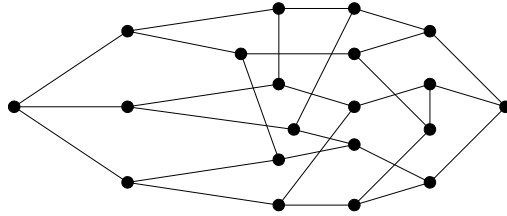


FIG. 2.3

Le graphe en Fig 2.3 est amplement régulier de paramètres  $(20, 3, 0, 1)$ , mais pas distance-régulier.

La caractérisation des graphes de Hamming par les paramètres revient à étudier ces graphes dans la classe des graphes distance-réguliers.

Pour  $d \leq 1$ , le graphe de Hamming  $H(d, q)$  est une clique. Pour  $d = 2$ , si

$n \neq 4$ ,  $H(d,q)$  est complètement déterminé par ses paramètres dans la classe des graphes fortement réguliers. Si  $n = 4$ , il existe un autre graphe ayant les mêmes paramètres, à savoir le graphe de Shrikhande.

La classe des graphes distance-réguliers est stable par produit cartésien. Le produit cartésien de graphe de Hamming  $H(d,4)$  avec le graphe produit cartésien de  $m$  graphes de Shrikhande est distance-régulier. Il admet les mêmes paramètres que le graphe de Hamming  $H(d + 2m,4)$  et il est appelé le graphe de Doob.

**Proposition 2.5.2.** *(A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier, [24]) Tout graphe connexe et amplement régulier de paramètres  $(n,k,\lambda,\mu) = (q^3, 3(q-1), q-2, 2)$  avec  $q > 7$  ou bien  $a_2 = 2(q-2)$  est le graphe de Hamming ou le produit cartésien de  $K_4$  et le graphe de Shrikhande (qui correspond à  $q = 4$ ).*

Un autre résultat fondamental est le suivant :

**Théorème 2.5.3.** *(A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier [24]) Le graphe amplement régulier  $G$  de paramètres  $(q^d, d(q-1), q-2, 2)$  tel que  $a_2(G) = 2(q-2)$  et  $c_3(G) = 3$  est le graphe de Hamming ou le graphe de Doob.*

**Proposition 2.5.3.** *Soit  $G$  un graphe distance-régulier d'un tableau d'intersection  $L(G) = \{2d, 2(d-1), \dots, 2; 1, 2, \dots, d\}$ . Alors  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d,3)$ .*

**Preuve.**

Les valeurs de  $b_i$  et  $c_i$  sont données par le tableau d'intersection  $L(G) = \{2d, 2(d-1), \dots, 2; 1, 2, \dots, d\}$ .

Par induction sur  $i$ . On a  $|N_0(v)| = 1$  et  $|N_1(v)| = k$ .

Supposons que  $|N_{i-1}(v)| = 2^{i-1} \binom{d}{i-1}$ . On a alors :

$$|N_i(v)| \cdot c_i = |N_{i-1}(v)| \cdot b_{i-1}.$$

$$\text{Et on obtient } |N_i(v)| = 2^{i-1} \binom{d}{i-1} \frac{2(d-i+1)}{i}.$$

Selon l'hypothèse de récurrence, on a  $|N_i(v)| = 2^i \cdot \binom{d}{i}$ . Ainsi  $n = 3^d$ .

Comme tout graphe distance-régulier est aussi amplement régulier; alors  $G$  est un graphe amplement régulier avec  $\lambda = 1$ ,  $\mu = 2$ , d'ordre  $n = 3^d$  et de degré  $k = 2d$ .

D'après le théorème 2.4.2,  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d,3)$ .  $\square$

**Corollaire 2.5.1.** *Soit  $G$  un graphe distance-régulier de tableau d'intersection  $L(G) = \{d(\lambda + 1), (d - 1)(\lambda + 1), \dots, (\lambda + 1); 1, 2, \dots, d\}$ , sans  $K_4 - e$  et tel que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ ,  $I(u, v) \setminus N[v]$  est sans pentagone. Alors  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d, \lambda + 2)$ .*

**Preuve.**

Pour  $v$  un sommet de  $G$ , on calcule le nombre de sommets dans chaque niveau  $N_i(v)$  et ainsi le nombre total de sommets de  $G$ .

On a  $|N_0(v)| = 1$  et  $|N_1(v)| = d(\lambda + 1)$ .

Par induction sur  $i$ .

On suppose que  $|N_i(v)| = (\lambda + 1)^i \binom{d}{i}$ .

Puisque  $|N_i(v)| \cdot c_i = |N_{i-1}(v)| \cdot b_{i-1}$ , on obtient :

$$|N_i(v)| = (\lambda + 1)^{i-1} \binom{d}{i-1} \cdot \frac{2(d-i+1)}{i}$$

Ainsi  $|N_i(v)| = (\lambda + 1)^i \binom{d}{i}$

Et donc  $n = (\lambda + 2)^d$ .

L'ordre de  $G$  est alors  $n = (\lambda + 2)^d$ .

D'après le théorème 2.5.2,  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d, \lambda + 2)$ .  $\square$

# Chapitre 3

## Graphes de Hamming et la quasi-amplement régularité

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons la classe des graphes quasi-amplement réguliers ainsi que le cas particulier des graphes de Hamming, produit cartésien de différents graphes complets. Ces *deux* classes représentent une généralisation des classes des graphes amplement réguliers et les graphes de Hamming, produit cartésien d'une même clique respectivement.

### 3.2 Propriétés de base des graphes de Hamming

Les propriétés des graphes de Hamming produit cartésien de différents cliques, proviennent de celles des graphes de Hamming obtenus par produit cartésien d'une même clique.

Soient  $d_1, d_2, \lambda_1$  et  $\lambda_2$ , *quatre* entiers positifs, tels que  $d_1$  et  $d_2$  sont non nuls.  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$ . Alors  $G$  est d'ordre  $(\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$  et de degré  $d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . *Deux* sommets adjacents de ce graphe admettent  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  voisins communs et *deux* sommets à distance *deux* ont *deux* voisins communs. Il est aussi un graphe sans  $K_4 - e$ .

**Proposition 3.2.1.** *Soient  $u$  et  $v$ , deux sommets de graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$ . Le sous graphe induit par  $I(u, v)$  est un graphe de l'hypercube.*

**Preuve.**

Pour  $u$  et  $v$ , deux sommets de  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$ . Trois situations sont à distinguer.

1. Les deux sommets sont dans une même copie de graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2)$ ;
2. Les deux sommets sont dans une même copie de  $H(d_2, \lambda_2 + 2)$ ;
3. Les deux sommets ne correspondent ni au premier cas ni au deuxième.

Dans les cas 1 et 2; d'après les propriétés des graphes de Hamming,  $I(u, v)$  induit le graphe de l'hypercube. Dans le troisième cas,  $I(u, v)$  est un produit cartésien de deux graphes de l'hypercube, qui est aussi un graphe de l'hypercube.  $\square$

**Proposition 3.2.2.** *Soient  $d_1, d_2, \lambda_1$  et  $\lambda_2$  un quadruplet d'entiers positifs avec  $d_1 \neq 0$  et  $d_2 \neq 0$  et  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$ . Tout 4-cycle de  $G$  est constitué d'arêtes de cliques de même ordre ou d'arêtes alternativement dans  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques.*

**Preuve.**

Il est clair que pour deux quelconques sommets  $u$  et  $v$  à distance 2 de  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$ ,  $I(u, v)$  induit un intervalle isomorphe au graphe 4-cycle induit.

Supposons qu'il existe deux sommets pour lesquels, ce 4-cycle n'est pas constitué d'arêtes de mêmes types de cliques et non plus d'arêtes de cliques alternativement d'ordres  $\lambda_1 + 2$  et  $\lambda_2 + 2$ . Il existe alors dans ce cycle, deux arêtes incidentes  $e_1$  et  $e_2$  de cliques de même ordre, et une troisième arête  $e_3$  incidente à  $e_2$  d'une clique d'ordre différent.

Sans perte de généralités, on suppose que  $e_1$  relie les sommets  $(u, x)$  et  $(v, x)$  et que  $e_2$ , relie  $(v, x)$  à  $(w, x)$  et  $e_3$  relie  $(w, x)$  à  $(w, y)$ . Une quatrième arête incidente à  $e_3$  ne peut donc être incidente à  $e_1$ . Ainsi la contradiction. La proposition est alors vraie.  $\square$

### 3.3 La Quasi-Amplement régularité d'un graphe

Comme la classe des graphes quasi-amplement réguliers est une généralisation de la classe des graphes amplement réguliers, quelques propriétés sont préservées dans cette nouvelle classe.

Exemple : Le graphe de la figure 3.1 est un graphe quasi-amplement régulier avec  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ,  $\mu_1 = 1$  et  $\mu_2 = 2$ . Il est donc de paramètres  $(12,3,0,0,1,2)$ .

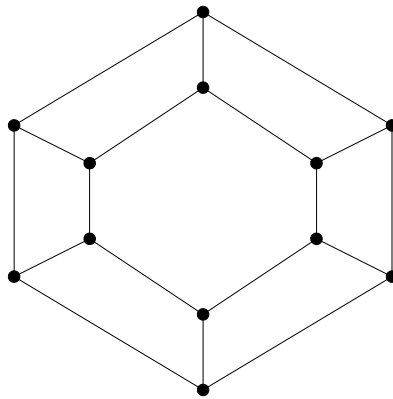


FIG. 3.1

**Proposition 3.3.1.** *Soit  $G$  un graphe où toute paire de sommets adjacents ont  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  voisins communs et deux sommets à distance deux ont  $\mu$  voisins communs. Si  $\mu \neq 1$  et  $\forall u \in V(G)$ ,  $d(u) \neq \lambda_1 + 1$  et  $d(u) \neq \lambda_2 + 1$ , alors  $G$  est régulier de degré  $k$ .*

**Preuve.**

Supposons que  $u$  et  $v$  sont deux sommets adjacents de  $G$  tels que  $|N(u)| = k$  et  $|N(v)| = l$ .

On pose  $S = \{(w,t)/w \in N(u) \setminus \{v\}, t \in N(v) \setminus \{u\} \text{ et } d(w,t) = 1\}$ .

Soit  $u$  et  $v$  possèdent  $\lambda_1$  voisins communs, alors :

$$|S| = \lambda_1(\lambda_1 - 1) + (k - \lambda_1 - 1)(\mu - 1).$$

Mais aussi  $|S| = \lambda_1(\lambda_1 - 1) + (l - \lambda_1 - 1)(\mu - 1)$ . Puisque  $\mu \neq 1$ ,  $k \neq \lambda_1 + 1$  et  $l \neq \lambda_1 + 1$ , on obtient  $k = l$ .

Ou bien,  $u$  et  $v$  possèdent  $\lambda_2$  voisins communs, et on retrouve de la même manière que  $k = l$ .  $\square$

Si  $G$  est un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  sans  $K_4 - e$ ; alors pour tout sommet  $u$ ,  $N(u)$  est constitué de  $d_1$  et  $d_2$   $(\lambda_1 + 1)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 1)$ -cliques respectivement. D'une façon similaire à la définition du  $i$ -star, on désigne par  $(d_1, d_2)$ -bistars le graphe défini par les sommets des  $d_1$   $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et des  $d_2$   $(\lambda_2 + 2)$ -cliques et ayant un sommet commun; appelé le centre du  $(d_1, d_2)$ -bistars.

Un graphe  $G$  est dit localement  $(d_1, d_2)$ -bistars si pour tout sommet  $u$ ,  $N(u)$  est constitué de  $d_1$   $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $d_2$   $(\lambda_2 + 2)$ -cliques.

**Proposition 3.3.2.** *Soit  $G$  un graphe quasi-amplement régulier de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$   $(d_1, d_2)$ -bistars. Il est possible de correspondre à tout sommet  $u$  de  $G$ ,  $\frac{1}{2}[(\lambda_1 + 1)((\lambda_1 + 1)(d_1 - 1) + d_2(\lambda_2 + 1)) + (\lambda_2 + 1)((\lambda_2 + 1)(d_2 - 1) + d_1(\lambda_1 + 1))]$  cycles de longueur 4.*

**Preuve.**

Soit  $u$  un sommet. Le nombre de 4-cycles incident au sommet  $u$  est le total de 4-cycles utilisant une arête  $uv$  tel que  $v$  est dans une  $(\lambda_1 + 1)$ -clique et ceux tels que  $v$  est dans une  $(\lambda_2 + 1)$ -cliques. Ainsi on fait correspondre à  $u$   $\frac{1}{2}[(\lambda_1 + 1)((\lambda_1 + 1)(d_1 - 1) + d_2(\lambda_2 + 1)) + (\lambda_2 + 1)((\lambda_2 + 1)(d_2 - 1) + d_1(\lambda_1 + 1))]$  4-cycles.  $\square$

**Proposition 3.3.3.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  localement  $(d_1, d_2)$ -bistars. Toute arête est dans  $(d_1 - 1)(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$  ou bien  $(d_2 - 1)(\lambda_2 + 1) + d_1(\lambda_1 + 1)$  4-cycles. Le nombre total de 4-cycles de graphe  $G$  est donc  $\frac{n}{8}[d_1(\lambda_1 + 1)((d_1 - 1)(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1))] + \frac{n}{8}[d_2(\lambda_2 + 1)((d_2 - 1)(\lambda_2 + 1) + d_1(\lambda_1 + 1))]$ .*

**Preuve.**

Soit  $u$  un sommet,  $N(u)$  est constitué de  $(\lambda_1 + 1)$ -cliques et de  $(\lambda_2 + 1)$ -cliques.

Dans  $N(u)$ , tout sommet  $v$  d'une  $(\lambda_1 + 1)$ -clique constitue avec tout sommet d'une  $(\lambda_2 + 1)$ -clique un 4-cycle.

Donc le nombre de 4-cycles utilisant l'arête  $uv$  est  $(d_1 - 1)(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . Si  $v$  est dans une  $(\lambda_2 + 1)$ -clique, alors le nombre de 4-cycles utilisant  $uv$  est  $(d_2 - 1)(\lambda_2 + 1) + d_1(\lambda_1 + 1)$ .

De cette manière tout 4-cycle est considéré 4 fois, ainsi le nombre de 4-cycles dans le graphe  $G$  est  $\frac{n}{8}[d_1(\lambda_1 + 1)((d_1 - 1)(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1))] + \frac{n}{8}[d_2(\lambda_2 + 1)((d_2 - 1)(\lambda_2 + 1) + d_1(\lambda_1 + 1))]$ .  $\square$

**Proposition 3.3.4.** *Soit la classe des graphes quasi-amplement réguliers tels que deux sommets adjacents ont  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$  voisins communs et deux sommets à distance deux ont  $\mu$  voisins communs. Cette classe est stable par produit cartésien si et seulement si  $\mu = 2$ .*

**Preuve.**

La preuve est similaire à celle de la proposition 2.3.3. Nous avons à remplacer  $\lambda$  par l'expression  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ .

En effet, soient *deux* sommets à distance *deux* dans  $G \square G'$ , si les *deux* sommets sont d'une même copie de  $G$  ou d'une même copie de  $G'$ , ils possèdent  $\mu$  voisins communs. S'ils sont de *deux* différentes copies, d'après la définition de produit cartésien, ils possèdent 2 voisins communs.  $\square$

**Proposition 3.3.5.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  d'ordre  $n$  et de degré  $k$ . Alors pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  de  $G$ , on a :*

1.  $|N(u) \cap I(u, v)| \geq d(u, v)$  et  $\text{diam}(G) \leq k$ .
2. Si de plus  $G$  est sans  $K_4 - e$ , alors  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ .  
Dans le cas où  $d_1 = d_2$ ,  $k \equiv 0[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)]$ .

**Preuve.**

1. La preuve est similaire à celle donnée pour la proposition 2.3.4. Elle est donc par induction sur  $d(u, v)$ .

La propriété est vraie si  $d(u, v) = 1$  et pour  $d(u, v) = 2$ . Si elle est vraie pour  $d(u, v) = i$ , elle sera certainement vraie pour  $d(u, v) = i + 1$ .

En effet, le résultat découle comme précédemment, du fait que *deux* sommets à distance *deux* ont 2 voisins communs.

En considérant le cas de *deux* sommets diamétraux, on retrouve la relation  $\text{diam}(G) \leq k$ .

2. Supposons maintenant que  $G$  ne contient pas de  $K_4 - e$ . Donc en considérant la décomposition en niveaux de graphe  $G$  relative au som-

met  $u$ ,  $N(u)$  est constitué de  $(\lambda_1 + 1)$ -cliques et de  $(\lambda_2 + 1)$ -cliques.  
 $|N(u)| = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . Si  $d_1 = d_2$ ,  $k$  est un multiple de  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2$  et dans ce cas  $k \equiv 0[(\lambda_1 + \lambda_2 + 2)]$ .

□

**Proposition 3.3.6.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  sans  $K_4 - e$ , de degré  $k$  et d'ordre  $n$ . Si  $\text{diam}(G) \geq 2$  alors  $n \geq 1 + d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1) + (1 + \lambda_1)^2 \frac{d_1(d_1-1)}{2} + (1 + \lambda_2)^2 \frac{d_2(d_2-1)}{2} + d_1 d_2 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$ .*

**Preuve.**

$\forall u \in V(G)$ ,  $|N_0(u)| = 1$  et  $|N_1(u)| = k$ . Il suffit de compter le nombre d'arêtes entre  $N_1(u)$  et  $N_2(u)$  pour retrouver  $|N_2(u)|$ .

On a  $2|N_2(u)| = d_1(\lambda_1 + 1)(k - 1 - \lambda_1) + d_2(\lambda_2 + 1)(k - 1 - \lambda_2)$ .

Comme  $n \geq 1 + k + |N_2(u)|$ ; le résultat en découle. □

**Remarque 3.3.1.** *Un graphe quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, 2)$ , sans  $K_4 - e$  et d'ordre  $n = 1 + d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1) + (1 + \lambda_1)^2 \frac{d_1(d_1-1)}{2} + (1 + \lambda_2)^2 \frac{d_2(d_2-1)}{2} + d_1 d_2 (1 + \lambda_1)(1 + \lambda_2)$  est appelé graphe quasi-fortement régulier.*

### 3.4 Produit cartésien de deux classes de graphes amplement réguliers

On note par  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  la classe des graphes produit cartésien de deux graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.

$\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  est une sous classe de la classe des graphes quasi-amplement réguliers  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ ; mais pas tout graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  est un produit cartésien de deux graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.

En effet le graphe suivant (Fig.3.2) est dans  $\mathcal{G}_{0,1}$  mais pas dans  $\mathcal{G}_0 \square \mathcal{G}_1$ .

De plus des propriétés générales des graphes quasi-amplement réguliers, il existe des propriétés propres aux graphes obtenus par produit cartésien de deux graphes amplement réguliers. Ces propriétés particulières, sont présentées dans les propositions suivantes. Il est aussi important de reconnaître dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , les graphes qui sont produit cartésien de deux graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$

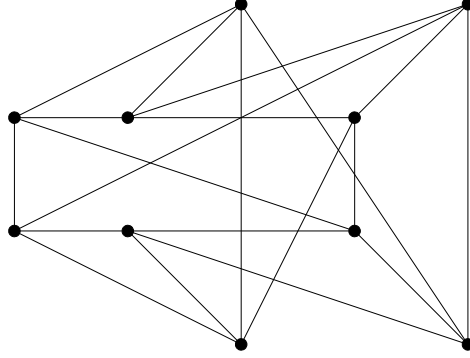


FIG. 3.2

respectivement.

Afin de simplifier l'étude de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ , on représente les sommets d'une copie de graphe  $G_1$  dans le graphe  $G_1 \square G_2$ , par l'ensemble de sommets  $\{(u,v), \forall u \in V(G_1) \text{ étant donné } v \text{ un sommet donné de } V(G_2)\}$ . De même, les sommets d'une copie de  $G_2$  est l'ensemble de sommets  $\{(u,v), \forall v \in V(G_2) \text{ étant donné } u \text{ un sommet donné de } V(G_1)\}$ .

**Proposition 3.4.1.** *Soient  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  de paramètres  $(n_1, k_1, \lambda_1, 2)$  et  $G'$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  de paramètres  $(n_2, k_2, \lambda_2, 2)$ . On a :*

1.  $\forall x \in V(G)$ , si  $u$  et  $v$  sont deux sommets adjacents de  $G$ , alors  $(u,x)$  et  $(v,x)$  sont adjacents dans  $G \square G'$  et ils ont  $\lambda_1$  voisins communs .
2. Le nombre de triangles de  $G \square G'$  est  $n_1 n_2 \frac{k_1 \cdot \lambda_1 + k_2 \cdot \lambda_2}{6}$ .
3. Si  $G$  et  $G'$  ne contient pas de  $K_4 - e$ , il est de même pour  $G \square G'$ .  
Sinon le nombre de  $K_4 - e$  est une fonction du nombre de  $K_4 - e$  dans les deux graphes.

**Preuve.**

1. On a  $u$  et  $v$  deux sommets adjacents de  $G$ . D'après la définition de produit cartésien,  $\forall x \in V(G')$ ,  $(u,x)$  et  $(v,x)$  sont adjacents dans  $G \square G'$ . Les voisins de  $(u,x)$  sont  $\{(w,x), (u,y)\}$  pour tout sommet  $w$  voisin de  $u$  dans  $G$  et  $y$  voisin de  $x$  dans  $G'$ . Ainsi,  $(u,x)$  et  $(v,x)$  ont  $\lambda_1$  voisins communs  $\{(w,x)\}$ , où  $w$  est un voisin commun de  $u$  et  $v$ .

2. Le nombre de triangles de graphe  $G$  est  $\frac{n_1 \cdot k_1 \cdot \lambda_1}{6}$  et le nombre de triangles de graphe  $G'$  est  $\frac{n_2 \cdot k_2 \cdot \lambda_2}{6}$ . Un triangle ne peut être constitué d'arêtes de  $G$  et d'autres de  $G'$ .  
Ainsi le nombre total de triangles de  $G \square G'$  est  $n_2 \frac{n_1 \cdot k_1 \cdot \lambda_1}{6} + n_1 \frac{n_2 \cdot k_2 \cdot \lambda_2}{6}$ .
3. D'après la définition de produit cartésien, un  $K_4 - e$  de  $G \square G'$  est constitué d'arêtes de graphe  $G$  ou celles de graphe  $G'$ . Ainsi, tout  $K_4 - e$  dans  $G$  ou  $G'$  induit des  $K_4 - e$  dans  $G \square G'$ .

□

**Proposition 3.4.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  de degré  $k$  et sans  $K_4 - e$ . Alors pour tout sommet  $u$  de  $G$ , il existe deux entiers positifs  $d_1$  et  $d_2$  tels que  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$  et le sous ensemble de sommets  $N[u]$  induit un  $(d_1, d_2) - \text{bistars}$ .*

*Si  $d_1$  est constant pour tous les sommets, il est alors de même pour  $d_2$ ; et donc  $G$  est localement  $(d_1, d_2) - \text{bistars}$ .*

**Preuve.**

Raisonnons par absurde.

Supposons qu'il existe un sommet  $u$  tel que  $N[u]$  n'induit pas un  $(d_1, d_2) - \text{bistars}$ . Alors il existe au moins un sommet  $v$  ayant  $\lambda_1$  voisins communs avec  $u$ , parmi lesquels deux sommets au moins ne sont pas adjacents. Ces sommets constituent alors avec  $u$  et  $v$  un  $K_4 - e$ . Ce qui contredit l'hypothèse.

Supposons que pour tout sommet  $u$ , la valeur de  $d_1$  est la même. Comme  $G$  est régulier, alors par conséquent  $d_2$  sera identique pour tous les sommets.  $G$  ne contient pas de  $K_4 - e$ , il s'ensuit que les voisins de  $u$ , constituent des  $(\lambda_1 + 1)$ -cliques ou des  $(\lambda_2 + 1)$ -cliques. □

**Corollaire 3.4.1.** *Si  $G$  et  $G'$  sont deux graphes sans  $K_4 - e$ , alors  $G \square G'$  est sans  $K_4 - e$  et ce graphe est localement bistars.*

**Preuve.**

On a  $G$  et  $G'$  ne contient pas de  $K_4 - e$ ; de la proposition précédente, il est de même pour  $G \square G'$ . Donc, pour tout sommet  $u$ , le sous graphe induit par l'ensemble de sommets  $N[u]$  est isomorphe au graphe bistars de  $(\lambda_1 + 1)$  et  $(\lambda_2 + 1)$  sommets. Et ainsi ce graphe est localement bistars. □

**Proposition 3.4.3.** *Soient  $G$  et  $G'$  deux graphes et  $G \square G'$  leur graphe produit cartésien.  $u$  est un sommet de  $G$  et  $u'$  est un sommet de  $G'$ . Si  $G(u, u')$  est une copie de  $G$  qui contient le sommet  $(u, u')$  et  $G'(u, u')$  est une copie de  $G'$  qui contient  $(u, u')$ , alors  $V(G(u, u')) \cap V(G'(u, u')) = \{(u, u')\}$ .*

**Preuve.**

Par définition de produit cartésien de deux graphes, tout sommet de  $G \square G'$  est dans une seule copie de  $G$  et une seule copie de  $G'$ . Ces deux copies ne peuvent avoir plus d'un sommet commun.

□

La proposition suivante constitue une propriété de certains graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ .

**Proposition 3.4.4.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ ,  $(d_1, d_2)$  – bistars; alors les 4 arêtes d'un quelconque 4–cycle sont toutes dans des  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques ou toutes dans des  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques ou alternativement dans  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques.*

**Preuve.**

On définit d'abord le graphe partiel  $G_{\lambda_1}$  de  $G$  tel que  $E(G_{\lambda_1})$  est l'ensemble de toutes les arêtes  $uv$  de  $G$  avec  $u$  et  $v$  deux sommets ayant  $\lambda_1$  voisins communs.  $G_{\lambda_2}$  est le graphe partiel de  $G$  tel que  $E(G_{\lambda_2}) = E(G) \setminus E(G_{\lambda_1})$ .

Considérons deux sommets  $u$  et  $v$  à distance deux dans  $G$  et soient  $w$  et  $t$  leurs voisins communs. Si les quatre arêtes  $uw, vw, vt$  et  $ut$  sont dans  $(\lambda_1 + 2)$  – cliques, alors ils ont aussi deux voisins communs dans  $G_{\lambda_2}$ .

Sinon sans perte de généralités, supposons que  $ut \in E(G_{\lambda_2})$ . On a alors nécessairement  $vw \in E(G_{\lambda_2})$ , car sinon  $t$  et  $w$  vont avoir un unique voisin commun dans  $G_{\lambda_1}$  et donc  $G_{\lambda_1} \notin \mathcal{G}_{\lambda_1}$ . Ainsi  $G$  ne peut être un produit cartésien de deux graphes amplement régulier et le graphe partiel  $G_{\lambda_2}$  ne peut être un élément de  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$ . □

**Proposition 3.4.5.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ , localement  $(d_1, d_2)$  – bistars. Alors  $G$  est un produit cartésien de deux graphes amplement réguliers sans  $K_4 - e$ ,  $G_1$  de degré  $d_1(\lambda_1 + 1)$  et  $G_2$  de degré  $d_2(\lambda_2 + 1)$  dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.*

**Preuve.**

$G \in \mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ , il est alors un produit cartésien de *deux* graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.

Soit  $G_{\lambda_1}$  le graphe partiel de  $G$  obtenu par élimination de toutes les arêtes des cliques de  $G$  d'ordre  $\lambda_2 + 2$ .  $G_{\lambda_2}$  est le graphe partiel tel que  $E(G_{\lambda_2})$  est l'ensemble des arêtes éliminées.

$G_{\lambda_1}$  et  $G_{\lambda_2}$  sont réguliers de degré  $d_1(\lambda_1 + 1)$  et  $d_2(\lambda_2 + 1)$  respectivement.

Une paire de sommets adjacents dans  $G_{\lambda_1}$  admettent  $\lambda_1$  voisins communs.

Dans  $G_{\lambda_2}$ , *deux* sommets adjacents ont  $\lambda_2$  voisins communs. *Deux* sommets à distance 2 ont *deux* voisins communs. Les *deux* graphes ne contiennent pas de  $K_4 - e$  comme sous graphe induit, autrement  $G$  ne peut être localement  $(d_1, d_2) - \text{bistars}$ . On déduit que  $G_{\lambda_1}$  est constitué de composantes connexes isomorphes  $G_1$ ,  $G_{\lambda_2}$  est constitué de composantes connexes isomorphes à  $G_2$  et  $G$  est le graphe  $G_1 \square G_2$ .  $\square$

### 3.5 Caractérisation des graphes de Hamming

Un graphe amplement régulier se décompose en produit cartésien de graphes premiers et amplement-réguliers. Si  $G$  est un graphe dont la décomposition est  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$ , alors  $G$  est un graphe quasi-amplement régulier dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  si et seulement si  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}, G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_1}$  ou  $G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_2}$ .

Soit  $G$  est un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ . On considère la décomposition de ce graphe en niveaux relative au sommet  $u$  et soit  $v$  un sommet de  $N(u)$ . Puisque  $G$  est sans  $K_4 - e$ , l'ensemble des voisins communs de  $u$  et  $v$  constitue une clique d'ordre  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2$ . Donc  $N(u)$  est composé de  $d_1$  cliques d'ordre  $(\lambda_1 + 1)$  et  $d_2$  cliques d'ordre  $(\lambda_2 + 1)$ .

**Remarque 3.5.1.** *Dans la sous classe de graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  sans  $K_4 - e$ , il existe plusieurs graphes de Hamming de même degré  $k$ .*

*En effet, plusieurs valeurs de  $d_1$  et  $d_2$  donnent  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . Le graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \square H(d_2, \lambda_2 + 2)$  est à chaque fois un élément de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ .*

La proposition suivante caractérise le graphe de Hamming d'ordre maximum parmi ceux de la classe des graphes quasi-amplement réguliers  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ .

**Proposition 3.5.1.** *L'ordre maximum d'un graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$  dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  correspond à la plus grande valeur possible de  $d_1$ , donnée par  $\lfloor \frac{k}{\lambda_1 + 1} \rfloor$  si  $(\lambda_1 + 2)^{\lambda_2 + 1} > (\lambda_2 + 2)^{\lambda_1 + 1}$ . Le diamètre maximum est la plus grande valeur possible de  $d_1$ .*

**Preuve.**

On cherche le maximum de la fonction  $(\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$  pour toutes les valeurs possible de  $d_1$  et  $d_2$  tels que  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . On retrouve  $\lfloor \frac{k}{\lambda_1 + 1} \rfloor$  si  $(\lambda_1 + 2)^{\lambda_2 + 1} > (\lambda_2 + 2)^{\lambda_1 + 1}$ . Comme par hypothèse  $\lambda_1 < \lambda_2$ , la solution optimale de  $d_1 + d_2$  qui représente  $\text{diam}(G)$  est donné par la plus grande valeur de  $d_1$  telle que  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ .  $\square$

**Proposition 3.5.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , localement  $(d_1, d_2)$ -bistars et tel que tout 4-cycle utilise des arêtes de cliques de mêmes ordres ou des arêtes alternativement de  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques. Alors  $G$  est un produit cartésien de deux graphes amplement réguliers sans  $K_4 - e$ ,  $G_1$  et  $G_2$  dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.*

**Preuve.**

Soit le graphe partiel de  $G$  obtenu par élimination de toutes les arêtes des  $d_2$   $(\lambda_2 + 2)$ -cliques. Ce graphe est régulier d'ordre  $d_1(\lambda_1 + 1)$  et toute paire de sommets adjacents admet  $\lambda_1$  voisins communs. Considérons deux sommets  $u$  et  $v$  à distance deux dans ce graphe partiel et  $w$  et  $t$  leurs voisins communs dans  $G$ .

Soit, les quatre arêtes  $uw, vw, vt$  et  $ut$  sont dans les  $d_1$   $(\lambda_1 + 2)$ -cliques; dans quel cas ils ont les mêmes voisins communs dans ce sous graphe.

Ou bien sans perte de généralités, on suppose que  $ut$  est une arête d'une  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques. Donc nécessairement  $v$  et  $w$  ne sont pas adjacents dans ce graphe partiel; autrement le graphe partiel de  $G$  dont les arêtes sont celles des  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques, ne sera pas dans  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$ . Donc  $G$  ne peut être un produit cartésien de deux graphes amplement réguliers.

Le même raisonnement si on considère le graphe partiel obtenu par élimination de toutes les arêtes des  $d_1$   $(\lambda_1 + 2)$ -cliques.  $\square$

Ainsi une caractérisation dans le théorème suivant.

**Théorème 3.5.1.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2, (d_1, d_2)}$  – bistars. Un 4–cycle de  $G$  est constitué d’arêtes de cliques de même ordre ou alternativement de  $(\lambda_1 + 2)$ –cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ –cliques si et seulement si  $G$  est un produit cartésien de deux graphes sans  $K_4 - e$ ,  $G_1$  et  $G_2$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et de  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.*

**Preuve.**

Il est trivial que si  $G = G_1 \square G_2$  tel que  $G_1 \in \mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $G_2 \in \mathcal{G}_{\lambda_2}$  alors  $G$  est un graphe  $(d_1, d_2)$  – bistars et tout 4 – cycle est constitué d’arêtes de même type de cliques ou d’arêtes de  $(\lambda_1 + 2)$ –cliques et de  $(\lambda_2 + 2)$ –cliques alternativement.

Supposons maintenant que  $G$  est un graphe  $(d_1, d_2)$  – bistars et que tout 4 – cycle est constitué d’arêtes de cliques de même ordre ou alternativement de  $(\lambda_1 + 2)$ –cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ –cliques.

D’après la proposition 3.5.2  $G$  est le produit cartésien de  $G_1$  et  $G_2$ . Ainsi l’équivalence.  $\square$

**Remarque 3.5.2.** *Si  $d_1 = d_2$ , alors  $k$  est un multiple de  $\lambda_1 + \lambda_2 + 2$  et  $G$  a le même degré que  $H(d_1, \lambda_1 + \lambda_2 + 3)$  qui est un élément d’une autre classe de graphes amplement réguliers  $\mathcal{G}_{\lambda_1 + \lambda_2 + 1}$ .*

D’après la dernière caractérisation des graphes produit cartésien de graphes amplement réguliers, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 3.5.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , d’ordre  $n$ , de degré  $k$ , localement  $(d_1, d_2)$  – bistars et tel que pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le sous graphe induit par  $I(u, v) \setminus N[v]$  est sans pentagone. Si les 4 arêtes d’un quelconque 4–cycle sont toutes dans des cliques de même ordre ou bien alternativement dans  $(\lambda_1 + 2)$ –cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ –cliques alors,  $G \in \mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ ,  $n \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$  et l’égalité découle si et seulement si  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \square H(d_2, \lambda_2 + 2)$ .*

**Preuve.**

On a  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . De la proposition précédente, on déduit que  $G$  est un produit cartésien de deux graphes amplement réguliers  $G_1$  et  $G_2$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement, tels que  $d(G_1) = d_1(\lambda_1 + 1)$  et  $d(G_2) = d_2(\lambda_2 + 1)$ .

De plus, ces graphes ne contiennent pas de  $K_4 - e$  comme sous graphe induit et pour *deux* quelconque sommets  $u$  et  $v$ ,  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone.  $|V(G_1)| \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1}$  et  $|V(G_2)| \leq (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ , alors  $n \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ .  $n = (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$  si et seulement si  $|V(G_1)| = (\lambda_1 + 2)^{d_1}$  et  $|V(G_2)| = (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ .

Ainsi,  $G_1$  est isomorphe à  $H(d_1, \lambda_1 + 2)$  et  $G_2$  est isomorphe à  $H(d_2, \lambda_2 + 2)$ . Inversement, si  $G$  est le graphe  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \square H(d_2, \lambda_2 + 2)$  alors il est localement  $(d_1, d_2)$ -bistars, pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le sous graphe induit par  $I(u,v) \setminus N[v]$  est sans pentagone et les 4 arêtes d'un quelconque 4-cycle sont toutes dans des cliques de même ordre ou bien alternativement dans  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques.  $\square$



# Chapitre 4

## Symétrie et régularité des graphes de Hamming

### 4.1 Introduction

L'algèbre, la théorie des graphes et celle des configurations sont *trois* concepts fortement liés. La littérature de la théorie algébrique des graphes s'est largement développée depuis 1974. On sous-entend par la représentation graphique régulière, symbolisé GRR, d'un groupe donné  $H$ , le graphe  $G$  dont le groupe d'automorphismes,  $Aut(G)$  qui agit sur l'ensemble de ses sommets est isomorphe à  $H$ . Le théorème suivant est un des résultats élémentaires.

**Théorème 4.1.1.** *(Peter.J.Cameron [28]) Tout groupe (fini ou infini)  $H$ , est isomorphe au groupe d'automorphismes  $Aut(G)$  d'un graphe  $G$ .*

Le résultat le plus célèbre en théorie algébrique des graphes est donné par le théorème de Frucht. Cependant; en 1938, R.Frucht a répondu positivement à la question posée par D.König, en prouvant qu'un groupe est isomorphe au groupe d'automorphismes de quelques graphes. En 1949, Frucht a étendu ce résultat en prouvant que pour un groupe  $H$ , il existe un graphe  $G$  3-régulier dont le groupe d'automorphismes est isomorphe à  $H$ .

Plus loin, G.Sabidussi a encore étendu ce résultat. Il prouve que pour un groupe  $H$ , il existe un graphe  $G$  d'un groupe d'automorphismes  $Aut(G)$  isomorphe à  $H$  et tel que :

- $G$  admet un sommet-connectivité fixé,
- $G$  a un nombre chromatique fixé,  
ou
- $G$  est  $k$ -régulier pour un certain entier  $k$  donné,  
ou
- $G$  admet un sous graphe partiel  $\tilde{X}$  homéomorphe à un graphe connexe donné  $X$ .

Il existe plusieurs constructions de graphes à partir de groupes. Certaines peuvent être mises à profit pour construire les graphes de Cayley; qui par conséquent, ont beaucoup de propriétés importantes.

Pour tout groupe de permutations  $H \leq S_n$ , on désigne  $S$  un système générateur de  $H$ . Le graphe de Cayley  $Cay(H,S)$  est défini comme suit :

- Les sommets de graphe sont les éléments de  $H$ ,
- Deux sommets  $g$  et  $h$  sont adjacents dans  $Cay(H,S)$  si et seulement si  $\exists s \in S$  tel que  $h = gs$ .

Exemple :

$H$  est le groupe de permutations  $\{12345, 23451, 34512, 45123, 51234\}$  et  $S = (12345)$ . Alors  $Cay(H,S)$  est le cycle de 5 sommets  $C_5$ .

Pour le même groupe de permutations  $H$ , si  $S = \{(12345), (13524)\}$  alors  $Cay(H,S)$  est le graphe complet  $K_5$ .

La construction de Cayley confirme le précédent théorème. Les différentes propriétés de l'action de  $Aut(G)$  sur  $G$  sont alors fondamentales, quand à la détermination de ses différentes transitivités.

Le groupe d'automorphismes  $Aut(G)$  de graphe de Hamming  $H(d,n)$  est un exemple classique; il est déterminé à base de groupe symétrique sur l'ensemble  $\{1,2,\dots,n\}$ . Le problème de recherche de  $Aut(G)$  est facile dans ce cas, aussi bien que dans le cas de graphes de Hamming produit cartésien de cliques de d'ordres différents.

## 4.2 Quelques résultats préliminaires d'algèbre combinatoire

Avant de présenter les notions fondamentales d'algèbre à exploiter, il est d'abord intéressant de rappeler quelques résultats de la théorie spectrale. Cependant, certains paramètres importants des graphes finis sont approchés plus ou moins efficacement par des méthodes spectrales. Par exemple, le nombre de stabilité et le diamètre.

Soit  $G$  un graphe et  $A$  sa matrice d'adjacence.  $A$  est alors symétrique et de trace nulle. On sous-entend par une valeur propre d'un graphe  $G$ , une valeur propre de  $A$ . Le spectre de cette matrice est l'ensemble de ses valeurs propres, présentées avec leurs multiplicités; qui est aussi le spectre du graphe  $G$ . Le spectre de graphe de Shrikhande est  $6^1 2^6 (-2)^9$ .

Parmi les conséquences de certaines régularités combinatoire des graphes, on cite les caractéristiques importantes du spectre. La régularité, qui est la première qui se manifeste dans un graphe, induit des conséquences importantes sur les valeurs propres. Les techniques spectrales sont aussi utilisées dans la coloration des graphes.

Il a été démontré par Hoffman que le graphe de Hamming  $H(d,q)$  est caractérisé par son spectre dans le cas où  $d \leq 3$ . Pour le cas  $d = 4$ , le spectre de graphe de Hamming  $H(4,2)$  est  $(-4)^1 (-2)^4 0^6 2^4 4^1$ . L'unique graphe qui lui est isospectral est le graphe de Hoffman présenté en Fig 4.1. Ce graphe est biparti, d'ordre 16 et régulier de degré 4. Le graphe de Hoffman n'est pas distance-régulier.

La matrice Laplacienne  $L$  est aussi définie pour tout graphe  $G$ .  $L = D - A$ , où  $D$  est la matrice diagonale telle que  $D_{ii}$  est le degré de sommet  $i$ . Là aussi, le spectre de la matrice Laplacienne est attaché au graphe, et non à l'ordre choisi pour les sommets. On parle de spectre Laplacien du graphe. Pour un graphe régulier, chacun de ces spectres se calcule aisément à partir de l'autre. Parmi les résultats préliminaires, les propositions suivantes.

**Proposition 4.2.1.** (*Joseph.A.Gallian [40]*) *Soit  $G$  un graphe  $k$ -régulier de  $n$  sommets. Alors :*

1.  $k \in \text{Spec}(G)$
2.  $k$  est de multiplicité 1.
3.  $\forall \lambda \in \text{Spec}(G), |\lambda| \leq k$ .

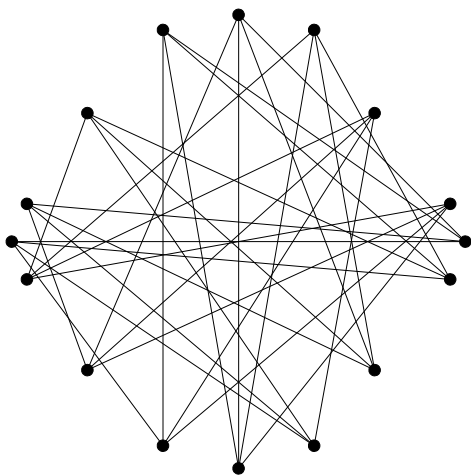


FIG. 4.1

**Théorème 4.2.1.** (*Joseph.A.Gallian [40]*) *Le nombre de chaînes de longueur  $l$ , de sommet  $v_i$  au sommet  $v_j$  dans  $G$  est donné par l'élément  $(i,j)$  de  $A^l$ .*

$\mathfrak{D}$  est l'algèbre des polynômes de  $A$ . Elle est l'algèbre d'adjacence du graphe  $G$ .  $\mathfrak{D}$  est l'ensemble de toutes les combinaisons linéaire des puissances de  $A$  à coefficients complexes. Il s'agit d'un espace vectoriel où les éléments peuvent être multipliés entre eux, pour former ainsi, une algèbre.

**Proposition 4.2.2.** (*Joseph.A.Gallian [40]*) *Soit  $G$  un graphe de diamètre  $d$ . Alors la dimension de  $\mathfrak{D}$  est au moins  $d + 1$ .*

**Corollaire 4.2.1.** (*Joseph.A.Gallian [40]*) *Pour  $A$  une matrice d'adjacence d'un graphe  $G$  de diamètre  $d$ .  $A$  admet au moins  $d + 1$  valeurs propres distinctes.*

Dans un graphe  $G$  de diamètre  $d$ , on définit pour tout entier  $i$ ,  $0 \leq i \leq d$

la  $i^{\text{ème}}$  matrice de distance, noté par  $A_i$ . Pour tout  $v_r, v_s \in V(G)$ ,

$$(A_i)_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } d(v_r, v_s) = i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il s'agit d'une généralisation de la notion de matrice d'adjacence ( $A_1 = A(G), A_0 = I$  et  $d(v_r, v_s) = 0$  si et seulement si  $v_r = v_s$ ). La somme de toutes les matrices de distance est la matrice  $J$  dont les éléments sont tous égaux à 1. Un résultat particulier est connu dans le cas de graphe distance-régulier.

**Théorème 4.2.2.** (Joseph.A.Gallian [40]) *Pour un graphe distance-régulier  $G$  de degré  $k$  et de diamètre  $d$ ,  $\mathcal{D}$  est de dimension  $d + 1$  et  $\{A_0, \dots, A_d\}$  est une base de  $\mathcal{D}$ .*

$\{A^0, A^1, \dots, A^d\}$  est une autre base de  $\mathcal{D}$  (Joseph.A.Gallian [40]). Si  $u_i$  est un vecteur propre à gauche de  $A$  correspondant à  $\lambda_i$ , et  $v_i$  est le vecteur propre correspondant à droite. Alors :

**Théorème 4.2.3.** (Joseph.A.Gallian [40]) *La multiplicité  $m_i$  de  $\lambda_i$  est donnée par  $m_i = \frac{\langle u_0, v_0 \rangle}{\langle u_i, v_i \rangle}$ , où  $\langle u_i, v_i \rangle$  dénote le produit scalaire des deux vecteurs  $u_i$  et  $v_i$ .*

La caractérisation spectrale des graphes de Hamming est donnée dans la proposition suivante.

**Proposition 4.2.3.** (A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier [24]) *Si  $d = 3$ , le graphe de Hamming  $H(d, q)$  est caractérisé comme étant le graphe amplement régulier  $G$  de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$ , connexe, régulier et tel que  $n = q^3$ ,  $|N_2(u)| = 3(q - 1)^2 \forall u \in V(G)$  et ses valeurs propres sont  $3q - 3$ ,  $2q - 3$ ,  $q - 3$  et  $(-3)$ . La condition en  $N_2(u)$  peut être remplacé par la condition :  $\mu \geq 2$ .*

Le concept d'action d'un groupe sur un ensemble, nous amène à définir d'autres notions importantes. Pour  $H$  un groupe agissant sur  $X$ , on a :

- L'orbite d'un élément  $u \in X$  dans le groupe de permutations  $H$  est l'ensemble de tous les éléments de  $X$ , qui sont images de  $u$  par une permutation  $g$  de  $H$ . On note  $Orb(u) = \{g(u)/g \in H\}$ .

- Le stabilisateur d'un élément  $x \in X$  est l'ensemble de toutes les permutations qui translate  $x$  en  $x$ ;  $stab_H(x) = \{g \in H/g(x) = x\}$ .
- $H$  est transitif sur  $X$  si  $\forall x, y \in X, \exists g \in H/g(x) = y$ .

On déduit facilement que, dans un graphe  $G$  si  $u$  et  $v$  sont deux sommets ayant une même orbite, alors  $u$  et  $v$  ont le même degré. On a aussi :

**Proposition 4.2.4.** (*Joseph.A.Gallian [40]*)

- $\forall x \in X, Stab_H(x)$  est un sous groupe de  $H$ .
- Un groupe  $H$  est transitif dans  $X$  si et seulement si  $\forall x \in X, Orb(x) = X$ .
- $|H| = |Orb_H(x)| \cdot |stab_H(x)|$ .

D'autres propriétés élémentaires sont données par Wojciech Peisert. Rappelons d'abord que l'ordre d'un groupe est sa cardinalité et l'ordre d'un élément de groupe est sa période.

Pour un graphe  $G$  sommet-transitif, si pour tout  $u$  et  $v$  de  $V(G)$ , il existe un unique automorphisme  $\phi$  de  $Aut(G)$  tel que  $\phi(u) = v$ , on dit que  $G$  admet un groupe d'automorphismes régulier.

$Aut(G)$  est le groupe de tous les automorphismes de  $G$  et tout sous groupe  $H$  de  $Aut(G)$  est appelé sous groupe d'automorphismes de  $G$ . Pour un groupe de permutations  $\mathcal{A}$  donné, s'il existe un graphe  $G$  tel que  $\mathcal{A} = Aut(G)$ , alors  $\mathcal{A}$  est dit représentable par le graphe  $G$ , ou  $G$  représente  $\mathcal{A}$ . Si  $\mathcal{A}$  est représenté par un seul graphe  $G$ , à isomorphisme près, alors  $\mathcal{A}$  est dit unique. Dans quel cas aussi le graphe  $G$  représentant  $\mathcal{A}$  est dit unique. Deux groupes de permutations  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  agissant respectivement sur  $N_1$  et  $N_2$ , sont isomorphes au sens de groupes de permutations (ou équivalent) si  $|N_1| = |N_2|$  et s'il existe une bijection  $\gamma : N_1 \longleftrightarrow N_2$  tel que  $\mathcal{A}_2 = \{\gamma^{-1}g\gamma : g \in \mathcal{A}_1\}$ . On note  $(\mathcal{A}_1, N_1) \equiv (\mathcal{A}_2, N_2)$ .

Au sujet de graphes correspondant aux produit direct de groupes, les résultats suivants sont dus à Wojciech Peisert.

**Lemme 4.2.1.** (*Wojciech Peisert[69]*) Soient  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  deux groupes de permutations représentables. Si ces deux groupes ne sont pas équivalents, alors le produit direct  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  est représentable.

**Théorème 4.2.4.** (*Wojciech Peisert[69]*) Soit  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  deux groupes de permutations représentables. Alors le produit direct  $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$  n'est pas représentable si et seulement si  $\mathcal{A}_1$  et  $\mathcal{A}_2$  sont transitifs, uniques et isomorphes au sens de la théorie des groupes de permutations.

On déduit facilement que pour un groupe de permutations  $\mathcal{A}$  non unique,  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  est représentable. Mais, si  $\mathcal{A}$  est unique  $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$  n'est pas représentable.

### 4.3 Exemples de Groupes d'automorphismes de graphes

Exemples :

- Soit le graphe  $G$ , appelé "Creu-Grid" (Fig 5.1) et symbolisé  $G_{2,3}$ .

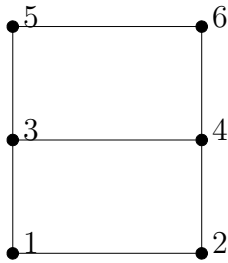


FIG. 4.2

$G$  admet 4 automorphismes et  $Aut(G) = \{(1,2,3,4,5,6), (2,1,4,3,6,5), (5,6,3,4,1,2), (6,5,4,3,2,1)\}$ . En effet :

1. La permutation  $(1,2,3,4,5,6)$  décrit le graphe lui même;
2.  $(2,1,4,3,6,5)$  décrit la translation du gauche à droite;
3.  $(5,6,3,4,1,2)$  décrit la translation du haut au bas;
4.  $(6,5,4,3,2,1)$  décrit la translation du haut au bas et du gauche à droite.

- On s'intéresse à la recherche du groupe d'automorphismes du cycle de longueur  $n$   $C_n$ , tel que  $n \geq 3$ .

Une source importante des groupes est la symétrie dans les figures géométriques. Considérons le graphe 4-cycle de sommets 1,2,3,4. On distingue alors 8 axes de symétries; 4 rotations données par l'identité, (1,2,3,4), (1,3)(2,4), (1,4,3,2) et 4 réflexions (1,2)(3,4), (1,4), (2,3), (2,4)(1,3).

Le graphe  $n$ -cycle admet  $2n$  symétries,  $n$  rotations et  $n$  réflexions, qui constituent le groupe, dit groupe dihedral  $D_n$ . Les  $n$  rotations forment un sous groupe cyclique. Pour les  $n$  réflexions, si  $n$  est impair, tout axe de réflexion joint un sommet au milieu de l'arête opposée. Si  $n$  est pair,  $\frac{n}{2}$  axes de réflexions joints les milieux des arêtes opposées, et les autres  $\frac{n}{2}$  joints les sommets opposés.

Alors  $Aut(G)$  est le groupe dihedral  $D_n$ .

- Soit le graphe simple suivant.

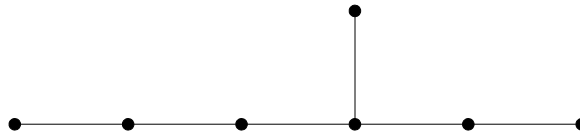


FIG. 4.3

Le graphe  $G$  (Fig 4.3) est le plus petit graphe tel que  $Aut(G)$  est trivial. Il s'agit de  $Aut(G) = \{e\}$  où  $e$  est l'identité.

Parmi les questions importantes posées en théorie algébrique des graphes, on a :

- Comment déterminer  $Aut(G)$  pour un graphe  $G$  de  $n$  sommets?
- Quels sont les groupes de permutations  $H$ , pour lesquels il existe un graphe  $G$  tels que  $H = Aut(G)$ ?

Afin de retrouver une autre caractérisation des graphes de Hamming obtenus par produit cartésien de cliques d'ordres différents, nous allons se baser sur les groupes d'automorphismes des graphes de Hamming  $H(d,n)$ , où  $d$  et  $n$  sont *deux* entiers positifs non nuls. Ces dernières découlent principalement du théorème fondamental suivant, donné par P.J.Caperon.

**Théorème 4.3.1.** *(Peter.J.Cameron [28])*

1. *Un graphe et son complémentaire ont le même groupe d'automorphismes;*
2. *Soient les composantes connexes de  $G$  représentées en  $n_1$  copies de  $G_1, \dots, n_r$  copies de  $G_r$ , où  $G_1, \dots, G_r$  sont des graphes deux à deux non isomorphes. Alors  $\text{Aut}(G) = (\text{Aut}(G_1) \wr S_{n_1}) \times \dots \times (\text{Aut}(G_r) \wr S_{n_r})$ ;*
3.  $\text{Aut}(K_n) = S_n$ .

A partir de ce théorème, il s'ensuit qu'il est suffisant de limiter l'étude de groupes d'automorphismes aux cas de graphes connexes.

Signalons qu'en général, il n'y a pas de liens entre le groupe d'automorphismes d'un graphe  $G$  et celui d'un sous graphe de  $G$ ; mais la situation est toute différente dans le cas d'un graphe  $G$  écrit comme produit cartésien d'autres graphes. Cependant, dans ce cas tout automorphisme de  $G$  est induit par des automorphismes des graphes  $G_i$  qui sont facteurs de produit cartésien.

## 4.4 Les graphes de Hamming et les groupes de permutations

Peter.J.Cameron a bien signalé que la question :

Quels sont les groupes de permutations  $H$ , pour lesquels il existe un graphe  $G$  de  $n$  sommets tel que  $\text{Aut}(G) = H$ , n'admet pas une réponse facile! Au moment où la question : est ce que tout groupe est isomorphe à un groupe d'automorphismes d'un graphe est facile.

**Proposition 4.4.1.** *(Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]) Soit  $G$  un graphe,  $\text{Aut}(G) = \text{Sym}(V(G))$  si et seulement si  $G$  est le graphe complet ou le graphe sans arêtes.*

**Proposition 4.4.2.** (*A.E.Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier[24]*) *Le groupe d'automorphismes de graphe de Hamming  $H(d,n)$  est donné par  $(S_n \times S_n \times \dots \times S_n) \rtimes S_d$ , noté aussi  $S_n \wr S_d$ ; qui non seulement agit transitivement sur chaque composante, mais aussi permute les composantes transitivement. La distance de Hamming entre les sommets est préservée par les automorphismes de  $S_n \wr S_d$ .*

Donc le groupe d'automorphismes de graphe de Hamming  $H(d,n)$  est  $S_n \wr S_d$ . Où  $S_n$  est le groupe d'automorphismes de graphe complet  $K_n$ .

**Remarque 4.4.1.**  $S_2 \wr S_d$  est connu sous le nom de groupe hyperoctaédrale.

Il est connu que le groupe d'automorphismes de produit cartésien de  $d$  copies de graphe  $G$ , contient comme sous groupe le produit en couronne de  $Aut(G)$  par le groupe symétrique  $S_d$ . Dans beaucoup de cas, ça constitue le groupe d'automorphismes de ce graphe.

**Corollaire 4.4.1.** *Soit  $G$  un graphe obtenu par produit cartésien de  $d_1$  copies d'un graphe connexe  $G_1$ .  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_{d_1}$  si et seulement si  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1)$  où  $n_1 = |V(G_1)|$ . De plus  $Aut(G)$  est aussi le groupe d'automorphismes de produit cartésien de graphe complet  $K_{n_1}$  par le stable d'ordre  $d_1$ .*

**Preuve.**

Si  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1)$ , alors  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_{d_1}$ . Supposons maintenant que  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_{d_1}$ . Comme  $G$  est un produit cartésien de  $d_1$  copies de graphe  $G_1$ , alors  $Aut(G_1) \wr S_{d_1} \subset Aut(G)$ . Mais comme  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_{d_1}$ ; donc:  $Aut(G_1) = Sym(V(G_1))$ . En effet; si  $Aut(G_1) \subsetneq Sym(V(G_1))$ ; il existe une permutation  $g$  de  $Sym(V(G_1))$ , tel que  $g \notin Aut(G_1)$ . Donc  $(g^n, Id) \notin Aut(G_1) \wr S_d \subset Aut(G)$ . Mais  $Aut(G) = Aut(G_1) \wr S_d$ , et alors  $(g^n, Id) \in Aut(G)$ , ce qui constitue une contradiction. Ainsi  $Aut(G_1) = Sym(V(G_1))$ .

Puisque  $G_1$  est connexe, on déduit qu'il est isomorphe au graphe complet  $K_{n_1}$ .

D'après le théorème 5.3.1, le groupe d'automorphismes de graphe constitué de  $d_1$  copies de graphe  $G_1$  est  $Aut(G_1) \wr S_{d_1}$ .

Donc si  $G_1$  est le graphe  $K_{n_1}$ , on obtient  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_{d_1}$ . Ce graphe est exactement le produit cartésien de graphe complet  $K_{n_1}$  par le stable d'ordre  $d_1$ .  $\square$

Soit  $G$  un graphe connexe et produit cartésien de  $d$  graphes isomorphes  $G_1$ . On a  $d(G) = d.d(G_1)$ . Si  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \wr S_d$  alors  $Aut(G_1) = Sym(V(G_1))$ . Il s'ensuit que  $G_1$  est un graphe complet. Ainsi  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d, |V(G_1)|)$ . Le théorème suivant constitue une caractérisation des graphes de Hamming.

**Théorème 4.4.1.** *Soit  $G$  un graphe connexe de degré  $d(n-1)$ . Alors,  $Aut(G) = (S_n \times S_n \times \dots \times S_n) \rtimes S_d = S_n \wr S_d$  si et seulement si  $G$  est isomorphe au graphe de Hamming  $H(d, n)$ .*

**Preuve.**

Si  $G$  est isomorphe au graphe de Hamming  $H(d, n)$ ; il est déjà prouvé que  $Aut(G) = S_n \wr S_d$ .

Supposons maintenant que  $Aut(G) = S_n \wr S_d$ . Alors  $G$  est d'ordre  $n^d$ . Les graphes connexes  $G$  dont  $Aut(G) = S_n \wr S_d$  sont produit cartésien de graphes  $G_i$ . Le degré  $d(n-1)$  est atteint si  $G_i$  est isomorphe au graphe complet  $K_n$ . Donc, parmi ces graphes  $G$  vérifiant la propriété  $Aut(G) = S_n \wr S_d$ , le *seul* qui est régulier de degré  $d(n-1)$  est le graphe de Hamming  $H(d, n)$ .  $\square$

La décomposition d'un graphe  $G$  en produit cartésien d'éléments premiers est exploitée dans la recherche de groupe d'automorphismes de  $G$ . Les résultats de base sont donnés par Wilfried Imrich et Sandi Klavzar [47].

**Théorème 4.4.2.** *(Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]) Soit  $g$  un automorphisme de graphe connexe  $G$ .  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  est la décomposition de  $G$  en éléments premiers. Il existe une permutation  $\pi : \{1, 2, \dots, k\}$  avec un isomorphisme  $\psi_i : G_i \rightarrow G_{\pi_i}$ ; tel que*  

$$g(v_1, v_2, \dots, v_k) = (\psi_{\pi^{-1}1} v_{\pi^{-1}1}, \psi_{\pi^{-1}2} v_{\pi^{-1}2}, \dots, \psi_{\pi^{-1}k} v_{\pi^{-1}k}).$$

**Corollaire 4.4.2.** *(Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]) Le groupe d'automorphismes  $Aut(G)$  d'un graphe connexe  $G$  ayant une décomposition en facteurs premiers  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  est généré par les automorphismes et les transpositions des facteurs premiers.*

Un autre résultat équivalent est le suivant :

**Corollaire 4.4.3.** *(Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]) Soit  $G$  le graphe produit cartésien de  $k$  graphes  $G_i$   $1 \leq i \leq k$ , connexes et premiers entre eux. Alors tout automorphisme  $g$  de  $G$  préserve la structure de  $G$  respectivement à une décomposition donnée et peut être écrit dans la forme  $g(v_1, v_2, \dots, v_k) = (\psi_1 v_1, \psi_2 v_2, \dots, \psi_k v_k)$  où  $\psi_i$  est un automorphisme de  $G_i$ .*

**Proposition 4.4.3.** *Soit  $G$  le graphe produit cartésien des deux graphes complets d'ordres  $m$  et  $n$  respectivement. Alors si  $g \in \text{Aut}(G)$ ,  $\exists g_1 \in \text{Aut}(K_m)$  et  $\exists g_2 \in \text{Aut}(K_n)$  tel que  $g(u, v) = (g_1(u), g_2(v))$ .*

**Preuve.**

$K_m \square K_n$  est la décomposition en facteurs premiers de graphe  $G$ . D'après le théorème 5.4.2, en considérant l'identité comme une permutation  $\pi$  sur  $\{1, 2\}$ , l'isomorphisme  $\psi_1 : K_m \longrightarrow K_m$  et  $\psi_2 : K_n \longrightarrow K_n$ ; tout automorphisme  $g$  de  $\text{Aut}(K_m \square K_n)$  vérifie  $g(v_1, v_2) = (\psi_1 v_1, \psi_2 v_2)$ , où  $\psi_1$  est un automorphisme de  $K_m$  et  $\psi_2$  est un automorphisme de  $K_n$ .  $\square$

**Corollaire 4.4.4.** *Soit  $G$  le graphe  $K_m \square K_n$ . Le groupe d'automorphismes de  $G$  est donné par  $S_m \times S_n$ .*

**Preuve.**

A partir de dernier corollaire, pour  $m \neq n$ ,  $K_m$  et  $K_n$  sont deux graphes premiers entre eux. Alors tout automorphisme  $\varphi$  de  $G$  peut être écrit dans la forme  $\varphi(v_1, v_2) = (\psi_1 v_1, \psi_2 v_2)$  où  $\psi_1$  est un automorphisme de  $K_m$  et  $\psi_2$  est un automorphisme de  $K_n$ . Et ainsi, d'après la définition du produit direct de groupes, on conclut que  $\text{Aut}(G) = S_m \times S_n$ .  $\square$

D'où la caractérisation de graphe  $K_m \square K_n$ .

**Théorème 4.4.3.** *Soient  $G_1$  et  $G_2$  deux graphes connexes de  $m$  et  $n$  sommets respectivement avec  $m \neq n$ , et  $G$  est le graphe  $G_1 \square G_2$ .  $\text{Aut}(G) = \text{Sym}(V(G_1)) \times \text{Sym}(V(G_2))$  si et seulement si  $G = K_m \square K_n$ .*

**Preuve.**

Si  $G = K_m \square K_n$ , le résultat est trivial.

Inversement, supposons que  $Aut(G) = Sym(V(G_1)) \times Sym(V(G_2))$ , alors pour tout automorphisme  $g$  de  $G$ ,  $g = (g_1, g_2)$  tel que  $g_1 \in Sym(V(G_1))$ ,  $g_2 \in Sym(V(G_2))$  et  $(g_1, g_2)(u, v) = (g_1(u), g_2(v))$ . Donc le sommet  $u$  de  $G_1$  est adjacent à tout autre sommet. Ainsi  $G_1$  est le graphe complet  $K_m$  et  $G_2$  est le graphe complet  $K_n$ .

$G$  est alors le graphe  $K_m \square K_n$ .  $\square$

Afin de généraliser ces résultats obtenus pour les graphes de Hamming  $H(d, n)$  aux autres graphes de Hamming, on rappelle d'abord les propriétés élémentaires de ces graphes.

**Proposition 4.4.4.** *La décomposition de  $H(d, n)$  en produit cartésien de facteurs premiers est  $K_n \square K_n \square \dots \square K_n$ . Celle de graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  est  $K_{n_1} \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_k} \square K_{n_k} \square \dots \square K_{n_k}$  où  $K_{n_i}$  apparaît  $d_i$  fois  $\forall i$  et  $n_i \neq n_j \forall i \neq j$ .*

**Preuve.**

Tout graphe complet  $K_n$  est premier. Alors :

$K_{n_1} \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_k} \square K_{n_k} \square \dots \square K_{n_k}$  où  $\forall i$ ,  $K_{n_i}$  apparaît  $d_i$  fois, est la décomposition en facteurs premiers de graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$ .  $\square$

**Proposition 4.4.5.** *Soit  $G$  le graphe obtenu par produit cartésien des deux graphes de Hamming  $H(d, m)$  et  $H(d', n)$  avec  $m \neq n$ . En considérant un sommet de  $H(d, m)$  et  $v$  un sommet de  $H(d', n)$ ; si  $g \in Aut(G)$  alors  $g(u, v) = (g_1(u), g_2(v))$  tel que  $g_1 \in Aut(H(d, m))$  et  $g_2 \in Aut(H(d', n))$ . Ainsi on a :  $Aut(G) = (S_m \wr S_d) \times (S_n \wr S_{d'})$ .*

**Preuve.**

La décomposition de  $G$  en facteurs premiers est donnée par

$(K_m \square \dots \square K_m) \square (K_n \square \dots \square K_n)$ ; qui est le produit cartésien de  $d$  graphes complets  $K_m$  et  $d'$  graphes complets  $K_n$ .

D'après les résultats précédents, il existe une permutation  $\pi : \{1, 2, \dots, d + d'\}$  qui est un produit direct de deux permutations agissant sur  $\{1, 2, \dots, d\}$  et

$\{d+1, d+2, \dots, d+d'\}$  respectivement et un isomorphisme  $\psi_i : G_i \longrightarrow G_{\pi_i}$  tel que  $g(v_1, v_2, \dots, v_{d+d'}) = (\psi_{\pi^{-1}1} v_{\pi^{-1}1}, \psi_{\pi^{-1}2} v_{\pi^{-1}2}, \dots, \psi_{\pi^{-1}(d+d')} v_{\pi^{-1}(d+d')})$ . Comme  $\pi_i \in \{1, \dots, d\}$  si  $i \in \{1, \dots, d\}$  et  $\pi_i \in \{d+1, \dots, d+d'\}$  si  $i \in \{d+1, \dots, d+d'\}$ , alors pour  $(u, v) \in V(H(d, m) \square H(d', n))$ ,  $g(u, v) = (g_1(u), g_2(v))$  avec  $g_1 \in \text{Aut}(H(d, m))$  et  $g_2 \in \text{Aut}(H(d', n))$ . Ainsi, on déduit que  $\text{Aut}(G) = (S_m \wr S_d) \times (S_n \wr S_{d'})$ .  $\square$

En exploitant les résultats précédents, on obtient le corollaire suivant :

**Corollaire 4.4.5.** *Soit  $G \square G'$  un graphe connexe, tel que  $G$  et  $G'$  sont deux graphes premiers entre eux.  $G$  et  $G'$  sont aussi produit cartésien de  $d_1$  copies d'un graphe  $G_1$  et  $d_2$  copies de  $G_2$  respectivement. Alors :  $\text{Aut}(G \square G') = (\text{Sym}(V(G_1)) \wr S_{d_1}) \times (\text{Sym}(V(G_2)) \wr S_{d_2})$  si et seulement si  $G \square G'$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2)$  avec  $n_1 = |V(G_1)|$  et  $n_2 = |V(G_2)|$ .*

**Preuve.**

Si  $G \square G'$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2)$ , alors  $\text{Aut}(G \square G') = (\text{Sym}(V(G_1)) \wr S_{d_1}) \times (\text{Sym}(V(G_2)) \wr S_{d_2})$ .

Inversement, on suppose que  $\text{Aut}(G) = (\text{Sym}(V(G_1)) \wr S_{d_1}) \times (\text{Sym}(V(G_2)) \wr S_{d_2})$ . Puisque  $G$  et  $G'$  sont premiers entre eux, alors  $\text{Aut}(G \square G') = \text{Aut}(G) \times \text{Aut}(G')$ .

D'après le théorème 4.4.1,  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d, m)$  et  $G'$  est le graphe de Hamming  $H(d, n)$ .  $\square$

**Remarque 4.4.2.**  $H(d, m) \square H(d, n) = (K_m \square K_n) \square (K_m \square K_n) \square \dots \square (K_m \square K_n)$ ; ( $d$  fois), alors le résultat précédent est aussi valable pour ce produit cartésien de  $d$  graphes  $K_m \square K_n$ .

Ainsi la généralisation pour n'importe quel produit cartésien de graphes de Hamming.

**Proposition 4.4.6.** *Soit  $G$  le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  tel que  $n_i \neq n_j$  pour  $i \neq j$  et  $\text{Aut}(G)$  son groupe d'automorphismes. Alors  $\text{Aut}(G)$  est généré par les permutations de  $S_{n_i} \wr S_{d_i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .*

**Preuve.**

On rappelle que  $Aut(K_{n_i}) = S_{n_i}$  et  $Aut(H(d_i, n_i)) = S_{n_i} \wr S_{d_i}; \forall i \in \{1, \dots, k\}$ .  
 Le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  est le produit cartésien de graphes complets  $K_{n_i}, 1 \leq i \leq k$ .

Alors,  $Aut(G)$  est généré par les permutations de  $K_{n_i}$  et leurs transpositions.

D'où  $Aut(G)$  est généré par les permutations de  $S_{n_i} \wr S_{d_i} \forall i = 1, 2, \dots, k$ .

□

**Proposition 4.4.7.** *On considère les entiers positifs non nuls  $d_i$  et  $n_i$  tels que  $i \in \{1, 2, \dots, k\}$  et  $n_i \neq n_j \forall i \neq j$ . Le groupe d'automorphismes  $Aut(G)$ , de graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  est donné par  $(S_{n_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{n_k} \wr S_{d_k})$ .*

**Preuve.**

Il s'agit d'une généralisation de la dernière proposition.

$H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  est le produit cartésien des graphes de Hamming  $H(d_i, n_i), i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Alors  $G = K_{n_1} \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_1} \square \dots \square K_{n_k} \square \dots \square K_{n_k}$ ; où  $K_{n_i}$  apparaît  $d_i$  fois. Alors:  $g(v_1, v_2, \dots, v_{d_1+d_2+\dots+d_k}) =$

$$(\psi_{\pi^{-1}1} v_{\pi^{-1}1}, \psi_{\pi^{-1}2} v_{\pi^{-1}2}, \dots, \psi_{\pi^{-1}(d_1+d_2+\dots+d_k)} v_{\pi^{-1}(d_1+d_2+\dots+d_k)}).$$

On a  $\pi : \{1, 2, \dots, k\}$  et  $\psi_i$  permute les éléments de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, d_i\}$  pour  $i = 1, \dots, k$ . De la dernière proposition, on déduit que :

$$\begin{aligned} & Aut(H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)) \\ &= (S_{n_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{n_k} \wr S_{d_k}). \quad \square \end{aligned}$$

En combinant tous les résultats précédemment démontrés, on obtient le théorème suivant qui fournit une caractérisation des graphes de Hamming produit cartésien de différentes cliques.

**Théorème 4.4.4.** *Soit  $G$  un graphe connexe et produit cartésien de  $k$  graphes premiers entre eux  $G_i$  de degré  $d_i(n_i - 1), \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Alors  $Aut(G) = (S_{n_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{n_k} \wr S_{d_k})$  si et seulement si  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$ .*

**Preuve.**

La première implication est évidente à partir de la proposition précédente.

Pour la deuxième, les facteurs de la décomposition de  $G$  sont premiers entre eux. Il s'ensuit que si  $Aut(G) = (S_{n_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{n_k} \wr S_{d_k})$  alors  $Aut(G_i) = S_{n_i} \wr S_{d_i}$ . Le graphe de Hamming  $H(d_i, n_i)$  est l'unique graphe connexe ayant comme groupe d'automorphismes  $S_{n_i} \wr S_{d_i}$  et un degré  $d_i(n_i - 1)$ . Donc  $G$  est nécessairement le graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$ .  $\square$

## 4.5 Cas de groupes d'automorphismes transitifs et abéliens

Dans la littérature, le cas de groupes d'automorphismes transitifs et abéliens est séparément étudié. Parmi les résultats connus, on cite :

**Théorème 4.5.1.** (*Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]*) *Soit  $G$  un graphe non trivial ayant un groupe d'automorphismes transitif et abélien. Alors  $Aut(G)$  est un deux-groupe élémentaire et abélien; ainsi, tout élément de  $Aut(G)$  admet un ordre deux. De plus si  $G$  admet plus de deux sommets, il est alors connexe et contient un graphe partiel isomorphe au graphe de l'hypercube.*

Pour les graphes de Hamming, les groupes d'automorphismes sont faciles à déterminer.  $S_n$  n'est pas abélien si  $n \geq 3$ , ainsi  $S_n \wr S_d$  est transitif et abélien si et seulement si  $n = 2$ . Les groupes d'automorphismes transitifs et abéliens correspondents aux graphes des hypercubes. On déduit que si un graphe  $G$  ne contient pas de graphe partiel de type hypercube,  $Aut(G)$  ne peut être transitif et abélien.

**Proposition 4.5.1.** *Soient  $n$  et  $d$ , deux entiers positifs non nuls. Le graphe de Hamming  $H(d, n)$  contient un graphe partiel isomorphe au graphe de l'hypercube si et seulement si  $n = 2^j$  pour une certaine valeur de l'entier positif  $j$ .*

**Preuve.**

Nous allons montrer la double implication. Supposons que  $n \neq 2^j$  pour toute valeur de l'entier  $j$ . Alors pour un  $d$  fixé,  $n^d$  n'est pas une puissance de 2 et c'est alors le cas pour  $|V(H(d, n))|$ . Ainsi  $H(d, n)$  ne peut contenir un graphe

partiel isomorphe à l'hypercube.

Inversement, s'il existe un entier positif, non nul  $j$  tel que  $n = 2^j$ , le graphe complet  $K_n$  contient le graphe partiel de type hypercube  $Q_j$ . Donc  $H(d,n)$  contient le graphe partiel de type hypercube  $Q_j^d$ , qui est aussi  $Q_{jd}$ .

□

On déduit facilement que pour  $n_i$  et  $d_i$  ( $i = 1, 2, \dots, k$ ) des entiers positifs non nuls et  $G$  un graphe contenant un graphe partiel isomorphe au graphe de Hamming  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$ , tel que  $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$  pour lequel  $n_i$  n'est pas une puissance de 2, le groupe  $Aut(G)$  ne peut être un groupe transitif et abélien.

On rappelle que la classe des (0,2)–graphes, définie par Mulder, contient les *deux* classes de graphes amplement réguliers  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_2$ , aussi bien que tout graphe produit cartésien de *deux* quelconques graphes de  $\mathcal{G}_0$  et  $\mathcal{G}_2$ .

Si un graphe  $G$  est sommet-transitif, alors  $Aut(G)$  agit transitivement sur  $V(G)$ . Bien que la plupart des (0,2)–graphes connus dans la littérature sont sommet-transitifs, mais quelques exemples de graphes non sommet-transitifs sont connus.

**Corollaire 4.5.1.** *Il existe des graphes de  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_2 \cup (\mathcal{G}_0 \square \mathcal{G}_2)$  qui ne sont pas sommet-transitifs.*

J.M.Laborde et R.M.Madani [58] se sont intéressé aux graphes hypercubes généralisés. Un tel graphe est noté  $Q_d(S)$ . Il admet  $V(Q_d)$  comme ensemble de sommets et  $E(Q_d(S)) = \{uv/d_{Q_d}(u,v) \in S\}$ . Les auteurs ont donnés une caractérisation des (0,2)–graphes de type hypercube généralisé. Un des résultats les plus importants est le suivant :

**Théorème 4.5.2.** *(J.M.Laborde, R.M.Madani [58]) Soit  $d \geq 4$ . Alors  $Q_d(S)$  est un (0,2)–graphe si et seulement si  $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} = \emptyset$  et  $S \not\supseteq \{1, d-1\}$ .*

La proposition suivante en découle.

**Proposition 4.5.2.** *Soit  $d \geq 4$  et  $Q_d$  le graphe de l'hypercube de degré  $d$ . Tous les graphes  $Q_d(S)$  tels que  $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} = \emptyset$  et  $S \not\supseteq \{1, d-1\}$  sont dans  $\mathcal{G}_0$  ou  $\mathcal{G}_2$ .*

**Preuve.**

Pour *deux* quelconques sommets  $u$  et  $v$  de graphe  $Q_d$ , les *deux* sous graphes induits par  $N[u]$  et  $N[v]$  sont isomorphes. Alors  $N[u]$  et  $N[v]$  sont aussi isomorphes si  $u$  et  $v$  sont *deux* sommets de  $Q_d(S)$ .

*Deux* quelconques sommets adjacents ont le même nombre de voisins communs à chaque fois. Comme  $S \cap \{2, 3, \dots, d-2\} = \emptyset$  et  $S \not\supseteq \{1, d-1\}$  alors ce nombre est 0 ou bien 2.

*Deux* sommets à distance 2, ont nécessairement *deux* voisins communs puisqu'il s'agit d'un (0,2)–graphe. Ainsi ou bien le graphe  $Q_d(S)$  est dans  $\mathcal{G}_0$  ou dans  $\mathcal{G}_2$ .  $\square$

**Remarque 4.5.1.** *Soit le graphe de l'hypercube  $Q_d$  avec  $d \geq 4$ .  $Q_d(\{1\})$ ,  $Q_d(\{d-1\})$ ,  $Q_d(\{1, d\})$  et  $Q_d(\{d-1, d\})$  sont des éléments de  $\mathcal{G}_0$ .  $Q_d(\{d\})$  est non connexe.*

**Proposition 4.5.3.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_0$ .  $G$  admet un graphe partiel isomorphe au graphe de l'hypercube si et seulement si  $G$  est le graphe de l'hypercube  $Q_d$  ou l'hypercube généralisé  $Q_d(\{1, d\})$ .*

**Preuve.**

Supposons que  $G$  admet un graphe partiel isomorphe au graphe de l'hypercube. D'après ce qui précède, les seuls hypercubes généralisés ayant cette propriété sont  $Q_d\{1\}$  et  $Q_d\{1, d\}$ .

Supposons qu'il existe un autre graphe  $G$  de  $\mathcal{G}_0$  admettant un graphe partiel isomorphe au graphe de l'hypercube.  $G$  est donc un graphe de l'hypercube auquel on a ajouté quelques arêtes. Evidemment les arêtes ajoutées ne peuvent être entre des sommets à distance  $i \in \{2, \dots, d-2\}$ .

Si maintenant  $G$  est un graphe partiel de  $Q_d\{1, d\}$ , alors il lui est isomorphe; car sinon il ne sera pas régulier, et ainsi il ne peut être dans  $\mathcal{G}_0$ .

La réciproque est vraie d'après les résultats précédents.

$\square$

**Proposition 4.5.4.** *Considérons le graphe  $G$  de  $\mathcal{G}_0$  et un entier non nul  $d$ . Alors  $\text{Aut}(G)$  est transitif et abélien si et seulement si  $G$  est le graphe  $Q_d$  ou  $Q_d(\{1, d\})$ .*

**Preuve.**

$G$  est un  $(0,2)$ -graphe,  $Aut(G)$  est transitif et abélien, alors  $G$  contient le graphe de l'hypercube comme graphe partiel. De la proposition précédente,  $G$  ne peut être que le graphe de l'hypercube  $Q_d$  ou le graphe  $Q_d(\{1,d\})$  pour un  $d$  non nul donné.

Si  $G$  est le graphe  $Q_d$  ou  $Q_d(\{1,d\})$ , alors  $Aut(G) = S_2 \wr S_d$  qui est sommet-transitif et abélien pour les *deux* graphes.

Si  $G$  est le graphe  $Q_d$  ou  $Q_d(\{1,d\})$ , alors  $Aut(G) = S_2 \wr S_d$  qui est à chaque fois sommet-transitif et abélien.  $\square$

## 4.6 Quelques autres types de symétries

La distance-transitivité est une des principales propriétés de l'action de  $Aut(G)$  sur  $V(G)$ . Il existe *quatre* grandes familles de graphes distance-transitifs. Il s'agit des graphes de Johnson, les graphes impaires, les graphes de Grassmann et les graphes de Hamming.

Afin d'établir une caractérisation de la distance-transitivité, on exploite la distance partition de  $G$  par rapport à un sommet donné. En effet, pour un graphe connexe  $G$  de diamètre  $d$  et de groupe d'automorphismes  $Aut(G)$ ;  $G$  est distance-transitif si et seulement si il est sommet-transitif et pour tout sommet  $v$  de  $G$ ,  $Stab_G(v)$  est transitif dans  $N_i(v)$  pour  $i = 1, \dots, d$ . Les nombres d'intersections d'un graphe distance-transitif sont les nombres  $S_{hij}$  tels que  $h, i, j \in \{0, 1, \dots, d\}$ , pour *deux* quelconques sommets  $u$  et  $v$  à distance  $j$ ,  $S_{hij}$  est le nombre de sommets à distance  $h$  de  $u$  et à distance  $i$  de  $v$ . Il existe alors  $(d+1)^3$  nombres d'intersections, mais on s'intéresse particulièrement au cas où  $h = 1$ . Pour trois sommets  $u, v$  et  $w$ , tels que  $w$  est adjacent à  $u$  et  $d(u, v) = j$ ;  $d(v, w)$  est une des *trois* valeurs  $j-1, j$  ou  $j+1$ . Ce qui constitue les graphes distance-réguliers où uniquement  $2d$  éléments sont suffisants pour en déduire les autres.

La théorie de sommet-transitivité a été développée en parallèle avec la théorie des groupes de permutations transitifs. Ces *deux* théories se sont influencées l'une à l'autre. En particulier, il est intéressant de voir les différents cas où la théorie des groupes de permutations est utilisée pour résoudre des problèmes

relatives aux graphes sommet-transitifs. Il y'a à signaler que :

1. Tout groupe de permutations transitif correspond à plusieurs graphes sommet-transitifs.
2. Tout graphe sommet-transitif fini donne naissance à plusieurs groupes de permutations transitifs.

Un  $s$ -arc de graphe  $G$  est une séquence de  $s+1$  sommets;  $v_0, v_1, \dots, v_s/v_{i-1}$  est adjacent à  $v_i$  et  $v_{i-1} \neq v_{i+1}$  pour  $0 < i < s$ . Selon la manière dont agit  $Aut(G)$  dans  $V(G)$ ,  $E(G)$  ou  $arcs(G)$ , on a :

- $G$  est dit  $s$ -arc-transitif si  $Aut(G)$  agit transitivement sur l'ensemble des  $s$ -arcs de  $G$ . Un tel graphe est aussi  $(s-1)$ -arc-transitif. Il est strictement  $s$ -arc-transitif s'il ne peut être  $(s+1)$ -arc-transitif.
- Un graphe  $G$  est  $0$ -arc transitif s'il est sommet-transitif.
- Un sous groupe  $H$  de  $Aut(G)$  est dit arête-transitif s'il est transitif sur l'ensemble des arêtes.  $G$  est alors dit arête-transitif.
- Un graphe  $1$ -arc transitif est en même temps un graphe sommet et arête-transitif.
- $G$  est dit symétrique s'il est  $1$ -arc transitif.

Signalons qu'il existe des graphes sommet-transitifs mais pas arête-transitifs et inversement. Dans ce qui suit, certaines relations entre ces différents transitivités.

**Proposition 4.6.1.** (Joseph.A.Gallian [40]) *Si le graphe  $G$  est arête-transitif mais pas sommet-transitif, alors il est biparti.*

Il est important de signaler les *deux* remarques suivantes :

- Si  $G$  est sommet-transitif, alors  $|N_i(u)|$  est indépendant du sommet  $u$ , et dans ce cas on écrit  $|N_i|$ .
- Un  $s$ -arc n'est pas nécessairement une chaîne.

**Proposition 4.6.2.** *Tout graphe distance-transitif est sommet-transitif.*

**Preuve.**

Considérons les sommets  $u, v, u'$  et  $v'$  de  $G$ , tels que  $u = v$  et  $u' = v'$ .

Puisque  $G$  est distance-transitif, alors  $\exists g \in Aut(G)/g(u) = u'$  et donc

$g(v) = v'$ . Ainsi  $G$  est aussi sommet-transitif.  $u = v$ ,  $u' = v'$ ,  $g(u) = u'$  et  $g(v) = v'$ .  $\square$

**Remarque 4.6.1.** *La réciproque de la proposition précédente n'est pas vraie. En effet;*

- *Le graphe biparti complet  $K_{1,n}$  est sommet-transitif mais pas distance-transitif,*
- *Le graphe de Peterson est sommet-transitif et il est aussi distance-transitif.*

Les deux propriétés suivantes découlent facilement des définitions.

1. La distance-régularité est une condition purement combinatoire. Si  $G$  est distance-transitif, alors il est distance-régulier et symétrique. La réciproque n'est pas vraie.
2. Si  $G$  est symétrique, alors il est arête-transitif et sommet-transitif.

**Proposition 4.6.3.** *(Joseph.A.Gallian [41]) Soit  $G$  un graphe de diamètre  $d$ .  $\text{Aut}(G)$  est le groupe d'automorphismes de  $G$ . Alors  $G$  est distance-transitif si et seulement si il est sommet-transitif et  $\text{Stab}_G(v)$  est transitif sur  $N_i(v)$  pour  $i = 1, \dots, d$  et  $\forall v \in V(G)$ .*

Un autre concept défini est celui de graphe drapeau-transitif (on parle de flag-transitivité d'un graphe).

Un flag de  $G$  est le couple (sommet, arête).  $G$  est dit flag-transitif s'il est transitif dans l'ensemble des flags; ou lorsqu'il est transitif dans l'ensemble des paires ordonnées de sommets adjacents.

Il est important de signaler que la propriété de flag-transitivité induit l'arête-transitivité mais les deux concepts ne sont pas les mêmes.

De plus de la construction de graphe de Cayley précédemment donnée; un graphe flag-transitif peut être aussi entièrement décrit en termes de groupes comme suit :

Soient  $H$  un groupe fini,  $H'$  un sous groupe de  $H$  et  $x$  un élément de  $H \setminus H'$  vérifiant  $H' \times H' = H'x - 1H'$ . On dénote alors par  $(H, H', x)$ , le graphe dont l'ensemble de sommets est  $H$  et  $H' = gH'/g \in H$  tel que  $g_1H'$  et  $g_2H'$  sont adjacents si  $g_2^{-1}g_1 \in H'xH'$ .

Le groupe  $H$  agit sur le graphe noté  $(H, H', x)$  par multiplication à gauche,

et il est flag-transitif.

Parmi les résultats élémentaires on a :

Le stabilisateur  $stab_H(x)$  du sommet  $x$  dans  $H$  est le groupe  $gH'g^{-1}$ . De plus  $(H, H', x)$  est connexe si et seulement si  $H$  est généré par  $H'$  et  $x$ .

Inversement on a :

**Proposition 4.6.4.** (*Joseph.A.Gallian [40]*) *Soit  $G$  un graphe sans sommets isolés. Et soit  $H$  un sous groupe d'automorphismes de  $G$  qui agit flag-transitivement sur  $V(G)$ . Si pour deux quelconques sommets  $u$  et  $v$  de  $G$  tels que  $u \sim v$ , on a  $x(u) = v$  pour  $x \in H$  alors  $G$  est isomorphe à  $(H, Hu, x)$ .*

## 4.7 Transitivité des graphes amplement réguliers

Rappelons le résultat suivant donné par P.Potocnik.

**Lemme 4.7.1.** (*P.Potocnik [71]*) *Soit  $G$  un graphe 2-arc-transitif et connexe. Si  $G$  contient un triangle alors  $G$  est isomorphe au graphe complet  $K_n$ .*

Pour le cas de graphes amplement réguliers, cela nous induit à :

**Proposition 4.7.1.** *Considérant  $\lambda > 0$  et soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$ . Alors  $G$  est connexe et 2-arc-transitif si et seulement si il est isomorphe au graphe complet  $K_{\lambda+2}$ .*

**Preuve.**

Il est connu que le groupe d'automorphismes de graphe complet  $K_{\lambda+2}$  est le groupe symétrique  $S_{\lambda+2}$ , qui est 2-arc-transitif.

Si  $G$  est amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  alors 2 sommets adjacents admettent  $\lambda$  voisins communs. Comme  $\lambda > 0$ , alors  $G$  contient un triangle. De lemme précédent, on déduit que  $G$  est isomorphe au graphe complet  $K_{\lambda+2}$ .  $\square$

**Corollaire 4.7.1.** *Si  $G$  est un graphe quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ , tel que  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2 \neq 0$  alors  $G$  n'est pas 2-arc-transitif.*

**Preuve.**

Un tel graphe contient un triangle.  $\square$

Wilfried Imrich et Sandi Klavzar ont prouvé la proposition suivante :

**Proposition 4.7.2.** *(Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]) Le produit cartésien de graphes connexes admet un groupe d'automorphismes transitif si et seulement si le groupe d'automorphismes de chaque facteur est transitif.*

La décomposition d'un graphe en produit cartésien de facteurs premiers est unique (Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47]). Ainsi pour reconnaître l'amplement régularité d'un graphe  $G$ , il est suffisant de vérifier la propriété pour tous les éléments de sa décomposition en facteurs premiers.

Si  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  est la décomposition en facteurs premiers d'un graphe  $G$ , alors  $G$  est sommet-transitif si tout facteur premier dans la décomposition est sommet-transitif.

**Proposition 4.7.3.** *Soient  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  deux entiers positifs,  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $G'$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$ ,  $G \square G'$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  est sommet-transitif si et seulement si  $G$  et  $G'$  sont sommet-transitifs dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et dans  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement.*

**Preuve.**

Découle immédiatement de la proposition 4.7.2.  $\square$

**Corollaire 4.7.2.** *Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_\lambda$ . Si  $G$  peut être écrit comme  $H(k, \lambda + 2) \square G'$  pour un entier non nul  $k$ ; alors  $G$  est sommet-transitif si et seulement si  $G'$  est sommet-transitif.*

**Preuve.**

On a  $Aut(H(k, \lambda + 2)) = S_{\lambda+2} \wr S_k$  qui est sommet-transitif. Si  $H$  est le groupe d'automorphismes de  $G'$ , alors  $(S_{\lambda+2} \wr S_k) \times H$  est sommet-transitif si et seulement si  $H$  est sommet-transitif.  $\square$

Primož Potocnik [71] a signalé que si  $G$  est un graphe connexe 2-arc-transitif et contient un triangle, alors  $G$  est isomorphe à  $K_n$ . On déduit alors facilement que pour un graphe  $G$  quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ ; si  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2 \neq 0$  alors  $G$  n'est pas 2-arc-transitif.

**Remarque 4.7.1.** *Pour  $s \geq 2$  et  $\lambda$  un entier non nul. L'unique graphe  $s$ -arc transitif dans  $\mathcal{G}_\lambda$  est le graphe complet  $K_{\lambda+2}$ . Un graphe de Hamming  $H(d, \lambda + 2)$  n'est pas  $s$ -arc transitif si  $\lambda \neq 0$  et  $d > 1$ .*

Il est prouvé par Wilfried Imrich, Sandi Klavzar [47] que le groupe d'automorphismes de produit cartésien de graphes connexes est transitif si et seulement si le groupe d'automorphismes de tout facteur est transitif. Afin de reconnaître la propriété dans le cas des graphes amplement réguliers, nous avons d'abord la proposition suivante :

**Proposition 4.7.4.** *Soit  $G = G_1 \square G_2$  un graphe. Alors  $G \in \mathcal{G}_\lambda$  si et seulement si  $G_1 \in \mathcal{G}_\lambda$  et  $G_2 \in \mathcal{G}_\lambda$ .*

**Preuve.**

Si  $G_1 \notin \mathcal{G}_\lambda$  ou  $G_2 \notin \mathcal{G}_\lambda$  alors  $G \notin \mathcal{G}_\lambda$ .

En effet, sans perte de généralités, on suppose que  $G_1 \notin \mathcal{G}_\lambda$ .

- Il existe *deux* sommets adjacents  $u$  et  $v$  qui ne contiennent pas  $\lambda$  voisins communs. Dans ce cas, les *deux* sommets  $(u, x)$  et  $(v, x)$  sont adjacents dans  $G$  et ils ont le même nombre de voisins communs pour un sommet quelconque  $x$  de  $G_2$ .
- Ou bien il existe *deux* sommets  $u$  et  $v$  à distance 2 qui n'admettent pas 2 voisins communs. La propriété est alors préservée dans  $G$  qui, alors ne sera pas dans  $\mathcal{G}_\lambda$ .

□

**Proposition 4.7.5.** *Soit  $G$  un graphe et  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  sa décomposition en produit cartésien de facteurs premiers. Alors  $G$  est un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  si et seulement si  $G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_i}$  ou  $G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_2} \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$ . Il est sommet-transitif si et seulement si  $G_i$  est sommet-transitif  $\forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .*

**Preuve.**

Si  $G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_1}$  ou  $G_i \in \mathcal{G}_{\lambda_2}$  avec  $i \in \{1, 2, \dots, p\}$ , alors

$G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p \in \mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  ainsi  $G \in \mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ .

Aussi  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  est sommet transitif, alors  $G_i$  est sommet transitif  $\forall i$ .

Inversement, si  $\exists i \in \{1, 2, \dots, p\}$  tel que  $G_i \notin \mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $G_i \notin \mathcal{G}_{\lambda_2}$ , alors  $G \notin \mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ . De même si  $G_i$  est sommet transitif pour toute valeur de  $i$ , alors  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  est sommet transitif.  $\square$

Le graphe de l'hypercube  $Q_d$  est 2-arc transitif mais pas 3-arc transitif. Il est ainsi un graphe symétrique.

$Q_d$  est l'unique graphe de Hamming 2-arc transitif. Primož Potocnik [71] a prouvé que si  $G$  est un graphe connexe, 2-arc-transitif et contient un triangle, alors  $G$  est isomorphe au graphe complet. Comme un graphe  $s$ -arc transitif est déjà  $(s - 1)$ -arc-transitif, on déduit que l'unique graphe  $s$ -arc transitif dans  $\mathcal{G}_\lambda$  avec  $s \geq 2$  est le graphe complet  $K_{\lambda+2}$ .

Dans la classe des graphes amplement réguliers de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  avec  $\lambda > 0$ , un graphe  $G$  est connexe, 2-arc-transitif si et seulement si il est isomorphe au graphe complet  $K_{\lambda+2}$ . La proposition suivante en découle.

**Proposition 4.7.6.** *Si  $G$  est un graphe quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$  avec  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2 \neq 0$  alors  $G$  est 2-arc-transitif s'il est isomorphe à  $K_{\lambda_1+2}$  ou  $K_{\lambda_2+2}$ .*

**Preuve.**

Le groupe d'automorphismes de graphe complet  $K_{\lambda+2}$  est le groupe symétrique  $S_{\lambda+2}$ , qui est 2-arc-transitif.

Si  $G$  est quasi-amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$  avec  $\lambda_1$  ou  $\lambda_2 \neq 0$  alors, il existe une paire de sommets adjacents ayant des voisins communs, ainsi  $G$  contient des triangles. De ce qui précède,  $G$  doit être isomorphe à  $K_{\lambda_1+2}$  ou  $K_{\lambda_2+2}$ .

$\square$

La proposition suivante constitue une caractérisation de quelques cas de graphes de Hamming.

**Proposition 4.7.7.** *Soit  $G$  un graphe connexe et produit cartésien de  $k$  graphes premiers entre eux  $G_i$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_i}$ , sans  $K_4 - e$  et tel que pour deux quelconques sommets  $u$  et  $v$ ,  $I(u, v) \setminus N[u]$  est sans pentagone.*

*Alors  $|V(G)| = (\lambda_1 + 2)^{d_1} \cdot (\lambda_2 + 2)^{d_2} \dots (\lambda_k + 2)^{d_k}$  si et seulement si*

$$\text{Aut}(G) = (S_{\lambda_1+2} \wr S_{d_1}) \times (S_{\lambda_2+2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{\lambda_k+2} \wr S_{d_k}).$$

**Preuve.**

Si  $G_i$  est un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_i}$ , avec les propriétés cités; alors  $|V(G_i)| = (\lambda_i + 2)^{d_i}$  si et seulement si  $Aut(G_i) = (S_{\lambda_i+2} \wr S_{d_i})$ . Le résultat s'ensuit puisque les graphes  $G_i$  sont premiers entre eux.

Inversement on suppose que  $Aut(G) = (S_{\lambda_1+2} \wr S_{d_1}) \times (S_{\lambda_2+2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{\lambda_k+2} \wr S_{d_k})$ . Des hypothèses, on a  $Aut(G_i) = (S_{\lambda_i+2} \wr S_{d_i})$ , qui est le groupe d'automorphismes de  $H(d_i, \lambda_i + 2)$  d'ordre  $(\lambda_i + 2)^{d_i}$ .  $\square$

La propriété de sommet-transitivité d'un graphe est aussi liée à la propriété de connectivité. Ming Wang et Qiao Li ont prouvé :

**Théorème 4.7.1.** *(Ming Wang and Qiao Li [78]). Tout graphe connexe sommet-transitif satisfait  $\theta(G) = \delta(G)$ , où  $\theta(G)$  et  $\delta(G)$  dénote l'arête connectivité et le degré minimum des sommets de  $G$  respectivement.*

Rappelons que pour le cas de graphes amplement ou quasi-amplement réguliers de paramètres  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$  où  $\mu_1 = 1$  ou  $\mu_2 = 1$ , le graphe n'est pas nécessairement régulier. On présente dans l'exemple suivant (Fig 5.4), un graphe quasi-amplement régulier de paramètres  $(12, 3, 0, 1, 1, 2)$  qui est régulier.

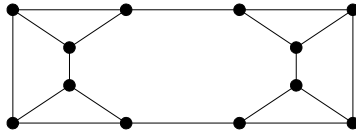


FIG. 4.4

Pour ce graphe, on a  $\theta(G) = 2$  et  $\delta(G) = 3$ . D'après le résultat précédent, on déduit que ce graphe n'est pas sommet-transitif.

## 4.8 Graphes de Hamming et le graphe de Shrikhande

Le graphe de Shrikhande est un graphe premier et ainsi premier avec  $K_4$ . Son groupe d'automorphismes est connu et il est d'ordre 192. Ce graphe n'est pas auto-complémentaire; ainsi son groupe d'automorphismes n'est pas unique. Ici, on note ce graphe par  $Sh$ ; ainsi  $Aut(Sh) \times Aut(Sh)$  est représentable. Le graphe de Shrikhande et le graphe de Hamming  $H(2,4)$  sont amplement réguliers de mêmes paramètres  $(16,6,2,2)$ .  $Aut(H(2,4)) = S_4 \wr S_2$ , il est ainsi d'ordre 1152.

D'après la proposition 2.5.2, le graphe de Hamming  $H(3,q)$  est l'unique graphe  $G$  connexe et amplement régulier de paramètres  $(n,k,\lambda,\mu) = (q^3, 3(q-1), q-2, 2)$  si  $q > 7$  ou  $a_2(G) = 2(q-2)$ . Pour  $q = 4$ , le graphe de Hamming et le produit cartésien de  $K_4$  avec le graphe de Shrikhande sont les *deux* graphes ayant ces paramètres.

*Deux* graphes ayant différents ordres n'ont pas le même groupe d'automorphismes. Ainsi *deux* graphes amplement réguliers de différents ordres ont nécessairement des groupes d'automorphismes distincts. On obtient alors le collaire suivant.

**Corollaire 4.8.1.** *Soit  $G$  un graphe connexe et de  $\mathcal{G}_2$ . On a :*

- *Si  $G$  est de paramètres  $(q^3, 3(q-1), q-2, 2)$  tel que  $q > 7$  ou  $a_2(G) = 2(q-2)$ , alors  $Aut(G) = S_4 \wr S_3$ .*
- *Si  $G$  est de paramètres  $(64, 9, 2, 2)$ , alors  $Aut(G) = S_4 \wr S_3$  ou bien  $Aut(Sh) \times S_4$ .*

**Preuve.**

- Si  $G$  est un graphe de  $\mathcal{G}_2$  avec paramètres  $(q^3, 3(q-1), q-2, 2)$ , tel que  $q > 7$  ou  $a_2(G) = 2(q-2)$  alors  $G$  est le graphe de Hamming  $H(3,q)$ . Ainsi  $Aut(G) = S_q \wr S_3$ .
- Les paramètres  $(64, 9, 2, 2)$  correspondent au cas  $q = 4$ . Il existe alors dans  $\mathcal{G}_2$ , *deux* graphes ayant ces paramètres. Il s'agit de  $H(3,4)$  et  $Sh \square K_4$ .  
Donc le groupe d'automorphismes est  $S_4 \wr S_3$ , dans le cas de graphe de

Hamming  $H(3,q)$  ou bien  $Aut(Sh) \times S_4$  dans le cas de  $Sh \square K_4$  (puisque le graphe de Shrikhande et le graphe complet  $K_4$  sont premiers entre eux).

□

Une autre famille de graphes définis à partir des graphes de Shrikhande est celle constituée des graphes de Doob. Le graphe de Doob est le produit cartésien de graphe de Hamming  $H(d,4)$  et  $m$  graphes de Shrikhande. La famille de ces graphes est stable par produit cartésien.

Le groupe d'automorphismes de graphe produit cartésien de  $m$  graphes de Shrikhande est  $Aut(Sh) \wr S_m$ . En effet; si  $g$  est un automorphisme de graphe  $Sh \square Sh \square \dots \square Sh$ , alors  $g$  est un élément de produit de produit direct de  $m$  groupes  $Aut(Sh)$ . Comme toutes les copies de  $Sh$  sont isomorphes, on peut alors obtenir plusieurs autres automorphismes par permutation des automorphismes  $g_i$  sur  $Sh$ . L'ensemble de ces automorphismes obtenus est une partie de  $Aut(Sh) \wr S_m$ . Donc  $g$  est un élément de  $Aut(Sh) \wr S_m$ .

Il s'ensuit que pour un graphe de Doob  $G$ ,  $Aut(G) = (Aut(Sh) \wr S_m) \times (S_4 \wr S_d)$ . A partir des résultats précédents, on a :

**Corollaire 4.8.2.** *Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(q^d, d(q-1), q-2, 2)$  tel que  $a_2(G) = 2(q-2)$  et  $c_3(G) = 3$ . Alors : dans le cas où  $q \neq 4$ ,  $Aut(G) = S_d \wr S_q$ .*

*Si  $q = 4$ , alors  $Aut(G) = S_d \wr S_4$  ou, dans le cas où  $d = 2m + k$ , le groupe de permutation  $(S_k \wr S_4) \times (Aut(Sh) \wr S_m)$ .*

**Preuve.** Du théorème 2.5.3, le seul graphe  $G$  ayant les propriétés données est le graphe de Hamming  $H(d,q)$  ou le graphe de Doob.

Si  $q \neq 4$ ,  $G$  est alors le graphe de Hamming  $H(d,q)$  et ainsi son groupe d'automorphismes est  $S_d \wr S_q$ .

Dans le cas où  $q = 4$ ,  $G$  est le graphe de Hamming  $H(d,4)$ , dans quel cas  $Aut(G) = S_d \wr S_4$ ; ou bien, si  $d = 2m + k$ ,  $G$  peut être aussi, le graphe de Doob obtenu par produit cartésien de graphe de Hamming  $H(4,k)$  et le graphe produit cartésien de  $m$  graphes de Shrikhande. Ainsi  $Aut(G) = (S_k \wr S_4) \times (Aut(Sh) \wr S_m)$ .

□

Tout graphe complet est premier. Donc pour  $q \neq q'$ , les *deux* graphes complets  $K_q$  et  $K_{q'}$  sont premiers entre eux. Pour  $d$  et  $d'$  *deux* entiers positifs non nuls, si  $G$  et  $G'$  sont *deux* graphes amplement réguliers de paramètres  $(q^d, d(q-1), q-2, 2)$  et  $(q'^{d'}, d'(q'-1), q'-2, 2)$  respectivement; alors  $G \square G'$  est quasi-amplement régulier de paramètres  $(q^d q'^{d'}, d(q-1) + d'(q'-1), q-2, q'-2, 2)$ . D'où la proposition suivante.

**Proposition 4.8.1.** *Soient  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ,  $k$  graphes amplement réguliers de paramètres  $(q_1^{d_1}, d_1(q_1-1), q_1-2, 2), (q_2^{d_2}, d_2(q_2-1), q_2-2, 2), \dots, (q_k^{d_k}, d_k(q_k-1), q_k-2, 2)$  respectivement; tels que  $\forall i = 1, \dots, k, a_2(G_i) = 2(q_i-2), c_3(G_i) = 3$ . Alors  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  est le graphe de Hamming  $H(d_1, q_1) \square H(d_2, q_2) \square \dots \square H(d_k, q_k)$  ou le graphe de Doob.*

**Preuve.**

Tout graphe  $G_i$  avec les propriétés données est un graphe de Hamming ou le graphe de Doob. Le produit cartésien de graphes de Hamming est un graphe de Hamming, et le produit cartésien de différents graphes de Doob est aussi un graphe de Doob.  $\square$

**Corollaire 4.8.3.** *Soient  $G_1, G_2, \dots, G_k$ ,  $k$  graphes amplement réguliers de paramètres  $(q_1^{d_1}, d_1(q_1-1), q_1-2, 2), (q_2^{d_2}, d_2(q_2-1), q_2-2, 2), \dots, (q_k^{d_k}, d_k(q_k-1), q_k-2, 2)$  respectivement; tels que  $\forall i = 1, \dots, k, a_2(G_i) = 2(q_i-2), c_3(G) = 3$ . Alors  $Aut(G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k) = (S_{q_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{q_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{q_k} \wr S_{d_k})$  ou bien  $(Aut(Sh) \wr S_m) \times (Aut(H(d', 4)))$ .*

**Preuve.** Si  $\forall i = 1, \dots, k, G_i$  est le graphe de Hamming  $H(d_i, q_i)$ , ainsi  $Aut(G_i) = (S_{q_i} \wr S_{d_i})$ . Si  $q_i \neq q_j, \forall i \neq j$ ; alors les *deux* graphes sont premiers entre eux. Son groupe d'automorphismes est alors  $(S_{q_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{q_2} \wr S_{d_2}) \times \dots \times (S_{q_k} \wr S_{d_k})$ .

Si  $G_i$  est un graphe de Doob  $\forall i$ , alors  $q_i = 4$  et  $d_i = 2m_i + d'_i$  pour certaines valeurs de  $m_i$  et  $d'_i$ .  $G$  est alors le graphe de Doob obtenu par produit cartésien de  $H(d', 4)$  et le produit cartésien de  $m$  graphes de Shrikhande, tels que  $d' = d'_1 + d'_2 + \dots + d'_k$  et  $m = m_1 + \dots + m_k$ .

Son groupe d'automorphismes est  $(S_4 \wr S_{d'}) \times (Aut(Sh) \wr S_m)$ .  $\square$



# Chapitre 5

## La $b$ -coloration des graphes de Hamming

### 5.1 Introduction

Une  $k$ -coloration dominante d'un graphe  $G$  est une coloration de ses sommets utilisant  $k$  couleurs, de sorte que pour chaque couleur  $i$ ,  $1 \leq i \leq k$ , il existe un sommet de couleur  $i$  pour lequel toutes les autres couleurs apparaissent dans le voisinage. Un tel sommet est appelé sommet dominant. L'ensemble de ces sommets constitue un système dominant. Le nombre  $b$ -chromatique, noté  $\varphi(G)$ , est défini comme étant le nombre maximum de couleurs utilisables parmi toutes les  $k$ -colorations dominantes d'un graphe  $G$ . Si parmi toutes les colorations, il existe un ensemble de sommets dominants tous, non adjacents, l'ensemble est dit système dominant stable.

La détermination du nombre  $b$ -chromatique d'un graphe est un problème NP-complet dans le cas général. Il reste NP-complet pour les graphes bipartis (J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt [55]). Robert.W.Irving et David.F.Manlove [48] ont démontré que le problème est polynomial pour le cas des arbres.

Afin d'étudier des propriétés combinatoires des codes, et particulièrement ceux découlant des graphes; il est important de s'intéresser aux propriétés combinatoires des graphes correspondants. Les valeurs des invariants d'un graphe, nous renseignent sur les caractéristiques de code associé.

Il est à rappeler que le nombre  $b$ -chromatique d'un graphe donné est un invariant. Néanmoins, l'existence d'un système dominant stable est une propriété saillante en raison des conséquences que cette propriété engendre.

B.Effantin et H.Kheddouci [34] ont donné une valeur exacte du nombre  $b$ -chromatique des graphes puissances d'une chaîne. Pour le cas de graphes puissances d'un cycle, à l'exception d'un cas particulier où, seul une borne inférieure a été établi, le résultat donné présente une valeur exacte de ce paramètre.

Un arbre est appelé chenille (caterpillar) si et seulement si tous les sommets de degré au moins 3 admettent au plus 2 sommets voisins de degré minimum 2. La valeur du nombre  $b$ -chromatique des graphes puissances de ce graphe est aussi connue.

D'autres cas particuliers sont étudiés. Cependant M.Kouider et M.Zaker [54] se sont intéressés aux graphes sans  $K_{1,s}$  et de nouveau aux graphes biparti, où une borne supérieure est donnée en fonction de nombre de biclique, qui est le nombre minimum de cliques disjointes recouvrant le graphe.

Un graphe  $G$  est  $b$ -parfait si tout sous graphe induit  $H$  de  $G$  vérifie  $\chi(H) = \varphi(H)$ . C.T.Hoàng et Mekkia Kouider [46] ont caractérisé certains cas de ces graphes par des sous graphes induits interdits.

On s'occupe particulièrement le long de ce chapitre des graphes de Hamming, produit cartésien d'une même clique et ceux obtenus par produit cartésien de différentes cliques.

## 5.2 Quelques propriétés de base du nombre $b$ -chromatique

On donne d'abord le nombre  $b$ -chromatique pour quelques graphes élémentaires. Exemples :

- $\varphi(K_4) = 4$ . La 4-coloration dominante de  $K_4$  est présentée en Fig. 5.1
- Le graphe biparti complet  $K_{3,2}$ , (Fig 5.2) admet 2 comme nombre  $b$ -chromatique. On précise que le nombre  $b$ -chromatique de tout graphe biparti complet est 2.

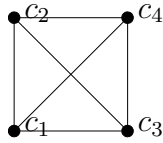


FIG. 5.1

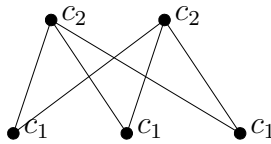


FIG. 5.2

- Le graphe en Fig. 3.1 est un exemple de graphe biparti régulier de degré 3. Son nombre  $b$ -chromatique est 4. Une telle coloration est présentée en Fig. 5.3 où on correspond au sommet de couleur  $i$  l'étiquette  $c_i$ .

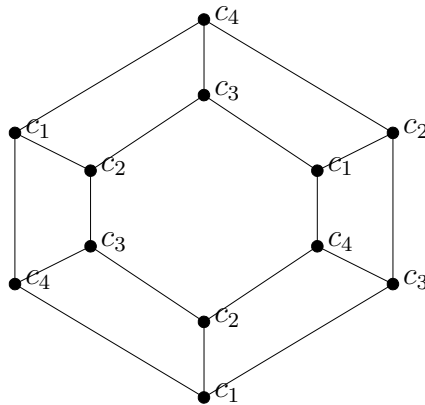


FIG. 5.3

Une des propriétés simples et préliminaires de la  $b$ -coloration d'un graphe est que : pour tout graphe  $G$ ; on a :  $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Remarque 5.2.1.** (Mekhia Kouider-Maryvonne Mahèo [53]) Les bornes inférieures de  $\chi(G)$  sont valables pour  $\varphi(G)$ ; on rappelle les suivants:  $\frac{n}{\alpha}$ ;  $\frac{n^2}{n^2-2m}$ ,  $\frac{n}{n-\delta}$ , où  $n$  est l'ordre,  $\alpha$  est le nombre de stabilité et  $\delta$  est le degré minimum de graphe  $G$ .

Il s'ensuit de cette remarque que si  $G$  admet un sous graphe induit  $K_n$ , alors  $\varphi(G) \geq n$ .

Dans la proposition suivante, Mekhia Kouider et Maryvonne Mahèo ont donné le nombre  $b$ -chromatique pour certains graphes particuliers.

**Proposition 5.2.1.** (Mekhia Kouider-Maryvonne Mahèo [53]) Si  $S_n, K_n, P_n$  et  $C_n$  sont respectivement le stable, le graphe complet, la chaîne et le cycle de  $n$  sommets, alors  $\varphi(S_n) = 1$ ,  $\varphi(K_n) = n$  et  $\varphi(P_n) = \varphi(C_n) = 3$ ,  $\forall n \geq 5$ .

**Remarque 5.2.2.** Si  $H$  est un sous graphe induit de  $G$ , alors la relation  $\varphi(H) \leq \varphi(G)$  n'est pas nécessairement vérifiée.

Cependant, soit  $G$  le graphe  $K_3 \square K_3$ . Ce graphe admet une 3-coloration dominante (Fig. 5.4).

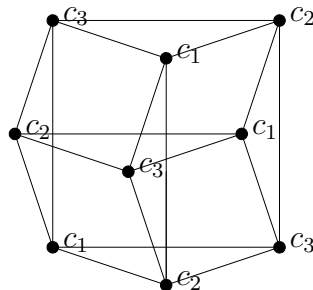


FIG. 5.4

Il est facile de démontrer qu'une 4-coloration dominante n'existe pas pour ce graphe et non plus une 5-coloration.

En effet; supposons que le graphe  $K_3 \square K_3$  admet une 4-coloration. Donc au moins une copie de  $K_3$  dans  $K_3 \square K_3$  admet 2 sommets dominants. Sans perte de généralités, on affecte les couleurs  $c_1$ ,  $c_2$  et  $c_3$  aux sommets de la première copie horizontale de  $K_3$ . Supposons que la *deuxième* copie verticale, contient *deux* sommets dominants de couleurs 2 et 3 respectivement. Le sommet dominant de couleur  $c_1$  est ou bien dans la copie 1 ou 3. Supposons qu'il est dans la première. Les sommets de la deuxième copie horizontale, sont coloriés avec les couleurs: 4, 3 et 1 dans cet ordre. Donc, les sommets de la copie 3 ne peuvent être coloriés en entier; car le sommet 2 doit porté la couleur  $c_4$ . Ce dernier ne peut être dominant car il n'aura pas de voisin de couleur  $c_1$ . Par le même raisonnement, une 5-coloration n'existe pas aussi. En effet, si  $c_1$ ,  $c_4$  et  $c_5$  sont les couleurs des sommets de la copie 1.  $c_2$ ,  $c_5$  et  $c_4$  seront affectés aux sommets de la copie 2. Uniquement un sommet de la copie 3, peut être colorié par la couleur 3. Ce sommet ne peut être dominant pour  $c_3$ ; car les *deux* autres sommets ne peuvent avoir la couleur  $c_4$  ou  $c_5$ . On conclue alors que  $\varphi(G) = 3$ .

Par contre, il existe un sous graphe induit  $H$  de  $G$ , obtenu par élimination d'un sommet et tel que  $\varphi(H) = 4$ . Une telle coloration dominante est donnée en Fig 5.5.

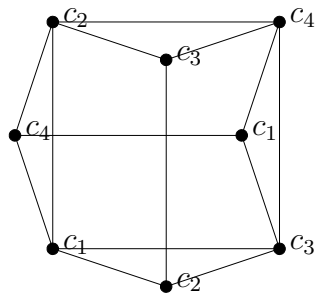


FIG. 5.5

La proposition suivante découle immédiatement de la définition.

**Proposition 5.2.2.** *Soit  $G$  un graphe  $k$ -régulier, d'ordre  $n$ , de nombre de stabilité  $\alpha$  et tel que  $G$  admet un système dominant stable  $S$ . Alors  $\varphi(G) \leq \alpha$ .*

Les graphes admettant des systèmes dominants stables ont des propriétés particulières. Le graphe de degré 3, donné en Fig 5.6, admet un 4-système dominant stable. L'ensemble des sommets ayant les étiquettes  $c_1^*$ ,  $c_2^*$ ,  $c_3^*$  et  $c_4^*$ , constitue un système dominant stable pour ce graphe.

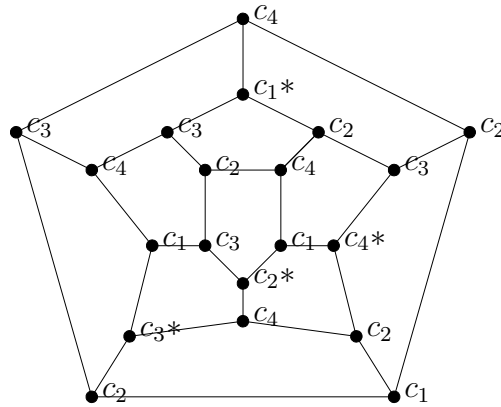


FIG. 5.6

Une borne supérieure de  $\varphi(G)$  est donnée par la proposition suivante.

**Proposition 5.2.3.** *(Mekhia Kouider et Maryvonne Mahèo [53]) Pour tout graphe  $G$  de  $m$  arêtes, on a  $\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ .*

Il a été signalé par Mekhia Kouider-Maryvonne Mahèo [53] que  $\chi(G) \leq \varphi(G)$  et ainsi  $\chi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$ . Mais, il est bien connu aussi que  $\chi(G) \leq 1 + \sqrt{2m - \frac{2m}{n}}$ . Cette borne est meilleure de la précédente.

Mekhia Kouider et Maryvonne Mahèo [53] ont prouvé qu'un graphe  $G$  peut avoir une coloration dominante de  $p$  couleurs, pas une de  $p + 1$  et de nouveau *une*, avec  $p + 2$  couleurs. Soit par exemple le graphe 3-cube  $Q_3$ . Ce graphe admet *une* 2-coloration dominante et *une* 4-coloration dominante, mais  $Q_3$  n'admet pas de 3-coloration dominante.

**Proposition 5.2.4.** (Mekhia Kouider, Maryvonne Mahèo [53]) *Soit  $G$  un graphe connexe d'ordre  $n$  et de nombre de stabilité  $\alpha$ . Alors  $\varphi(G) \leq n + 1 - \alpha$ .*

### 5.3 Cas de graphes réguliers

Des bornes du nombre  $b$ -chromatique dans le cas d'un graphe régulier est :

**Proposition 5.3.1.** *Soit  $G$  un graphe régulier de degré  $k$ , alors  $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq k + 1$ .*

**Preuve.**

Si  $G$  est régulier de degré  $k$  alors  $\Delta(G) = k$ . D'après ce qui précède,  $\varphi(G) \leq k + 1$ . La borne inférieure est déjà vue précédemment.  $\square$

En adoptant la proposition 5.2.3 au cas des graphes réguliers, on obtient : si  $G$  un graphe régulier d'ordre  $n$  et de degré  $k$ , alors  $\varphi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2}$ . Mais, on signale la remarque suivante.

**Remarque 5.3.1.** *Pour un graphe  $G$  de  $m$  arêtes, on a  $\varphi(G) = \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}$  si et seulement si  $G$  est un graphe complet.*

En effet, si  $\frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2} = k + 1$ , alors  $4nk + 1 = (2(k + 1) - 1)^2$ . Ainsi  $n = k + 1$  et  $G$  est le graphe complet  $K_n$ .

Donc cette borne ne peut être atteinte dans le cas général. On retient alors dans le cas des graphes réguliers  $\varphi(G) \leq (k + 1)$ , donnée par la proposition 5.3.1.

Quelques cas de graphes  $G$   $d$ -régulier tels que  $\varphi(G) = \delta + 1$  sont donnés par

J.Kratochvil, Z.Tuza et M.voigt [55].

**Théorème 5.3.1.** (*J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt [55]*). Soit  $G$  un graphe contenant des sommets  $v_1, v_2, \dots, v_{\delta+1}$  tels que  $d(v_i) = \delta$  pour toute valeur de  $i$  et  $d(v_i, v_j) \geq 4 \forall i \neq j$ . Alors  $\varphi(G) = \delta + 1$ .

D'où découle le corollaire suivant.

**Corollaire 5.3.1.** (*J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt [55]*). Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier ( $d \geq 2$ ) ayant au moins  $d^4$  sommets. Alors  $\varphi(G) = d + 1$ .

Le cas de graphes réguliers dont un plus court cycle est au moins de longueur 5 a été étudié par Amine El Sahili et Mekkia Kouider [35].

**Proposition 5.3.2.** (*Amine El Sahili and Mekkia Kouider [35]*). Tout graphe  $G$   $d$ -régulier dont la longueur d'un plus court cycle est 6, vérifie  $\varphi(G) = d + 1$ .

**Théorème 5.3.2.** (*Amine El Sahili and Mekkia Kouider [35]*). Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier dont le plus court cycle est de longueur 5 et n'ayant pas de cycles de longueur 6. Alors le nombre  $b$ -chromatique de  $G$  est  $d + 1$ .

Et comme la valeur de  $\varphi(G)$  est liée à celle de  $\chi(G)$ , on signale le résultat suivant :

**Proposition 5.3.3.** (*Amine El Sahili and Mekkia Kouider [35]*). Soit  $G$  un graphe  $d$ -régulier. Alors  $\chi(G^2) = d + 1$  si et seulement si  $V(G)$  peut être décomposé en  $d + 1$  stables  $S_1, S_2, \dots, S_{d+1}$  tels que pour tout  $i, j$  il existe un couplage parfait entre  $S_i$  et  $S_j$ .

En interdisant la chaîne de longueur 6 ( $P_7$ ), une borne inférieure est obtenue.

**Proposition 5.3.4.** (*Amine El Sahili and Mekkia Kouider [35]*). Pour un graphe  $G$  sans  $P_7$  et de plus court cycle  $C_5$ , on a :  $\varphi(G) > \frac{\delta-3}{4}$ .

Un résultat particulier est obtenu dans le cas de graphe ayant un système dominant stable.

**Proposition 5.3.5.** *Soit  $G$  un graphe d'ordre  $n$  et de degré  $k$ , possédant un système dominant stable  $S$ . Alors  $\varphi(G) \leq \min\{n - k, \frac{n}{2}\}$ .  
Pour  $n$  un nombre pair,  $\varphi(G) = \frac{n}{2}$  si et seulement si  $G$  est isomorphe au graphe complet biparti  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  duquel un couplage parfait est éliminé.*

**Preuve.**

Soit  $S$  un système dominant stable de  $G$ , d'éléments  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq \varphi(G)$ . Comme  $S$  est un ensemble stable alors les  $k$  voisins d'un quelconque sommet  $u_j$  ne sont pas dans  $S$ .

On a :  $n = |S| + |V(G) \setminus S|$ .

Donc  $n \geq \varphi(G) + k$  puisque  $|V(G) \setminus S| \geq k$ . D'où  $\varphi(G) \leq n - k$ .

Comme  $S$  est un ensemble stable, on correspond alors à  $u_1$ , au moins  $\varphi(G) - 1$  voisins dans  $V(G) \setminus S$ . Pour  $u_2$ , on fait correspondre un voisin  $v_1$  de couleur 1;  $v_1 \neq u_1$  puisque  $S$  est stable. Les autres sommets de  $S$  peuvent avoir leurs voisins dans  $N(u_1) \cup \{v_1\}$ .

On obtient ainsi au moins  $2 \cdot \varphi(G)$  sommets.

L'égalité découle dans le cas où les voisins des sommets de  $S$  se présentent dans un ensemble de  $\frac{n}{2}$  sommets où  $n$  est alors un nombre pair.

On a ainsi  $k = \frac{n}{2} - 1$ .

$G$  est donc le graphe biparti complet  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  duquel un couplage parfait est éliminé.

Il est trivial que si  $G$  est le graphe biparti complet  $K_{\frac{n}{2}, \frac{n}{2}}$  duquel un couplage parfait est éliminé, alors  $\varphi(G) = \frac{n}{2}$ ; et ainsi l'équivalence.  $\square$

## 5.4 Le nombre $b$ -chromatique de quelques graphes particuliers

Notre objectif est d'étudier la  $b$ -coloration des graphes amplement réguliers et des graphes quasi-amplement réguliers. Mais la valeur du nombre  $b$ -chromatique pour un tel graphe reste inconnu. Pour cela et afin de fournir un résultat partiel, on s'intéresse à la  $b$ -coloration de sous graphe de  $G$  induit par l'ensemble des sommets  $N[u] \cup N_2(u)$ , noté  $H_u$ .

On remarque facilement que s'il existe dans  $G$  un sommet  $u$  tel que  $H_u$  n'admet pas une  $k$ -coloration propre. Alors  $\varphi(G) \geq k + 1$ .

Pour le cas de graphes amplement réguliers, on a :

**Proposition 5.4.1.** *Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, \lambda, \mu)$  et sans  $K_4 - e$ . Alors  $(\lambda + 2) \leq \varphi(G) \leq d(\lambda + 1) + 1$  avec  $d(\lambda + 1) = k$ .*

**Preuve.**

$G$  est régulier de degré  $k$ . Puisque  $G$  ne contient pas de  $K_4 - e$  alors  $k = d(\lambda + 1)$ . Ainsi  $\varphi(G) \leq d(\lambda + 1) + 1$ .

Un sommet  $u$  est dans  $d(\lambda + 2)$ -cliques. Il est nécessaire de colorier tous les sommets de  $N(u)$  avec  $(\lambda + 1)$  différentes couleurs.

Alors  $\lambda + 2 = \varphi(K_{\lambda+2}) \leq \varphi(G)$ .  $\square$

Rappelons que  $\varphi(c_n) = 3 \forall n \geq 5$ . Ce graphe est amplement régulier de paramètres  $(n, 2, 0, 1)$  avec  $\varphi(G) = 3$ .

On s'intéresse ci-après à la  $b$ -coloration des graphes amplement réguliers de paramètres  $(n, k, 0, 1)$ .

Pour le cas  $k = 3$ , si  $G$  est amplement régulier de paramètres  $(n, 3, 0, 1)$  et de diamètre 2, alors  $n = |N_0(u) \cup N_1(u) \cup N_2(u)| = 1 + 3 + 6$  pour un quelconque sommet  $u$  de  $G$ . La décomposition en niveaux de ce graphe est donnée en Fig.5.7.

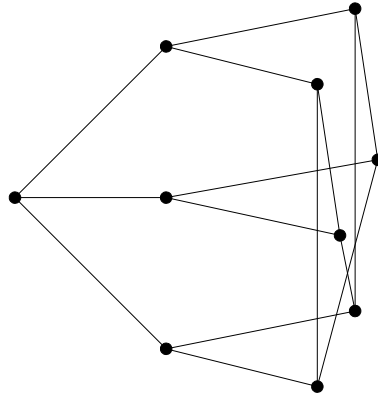


FIG. 5.7

Le sous graphe induit par  $N_2(u)$  est le graphe  $C_6$ . Un tel graphe est donc isomorphe au graphe de Peterson, noté ici  $GPt$ , dont le nombre  $b$ -chromatique est 3. Une 3-coloration dominante de ce graphe est donnée en Fig 5.8.

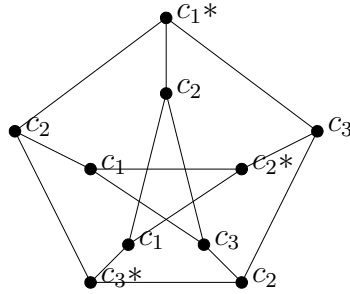


FIG. 5.8

On représente le graphe  $GPt$  par une décomposition en niveaux relative à un sommet  $u$ . On note par  $\Lambda$  un graphe partiel de ce graphe obtenu par élimination d'une ou plusieurs arêtes entre les sommets de  $N_2(u)$ . On a alors  $\varphi(\Lambda) = 4$ . Un exemple est donné en Fig.5.9.

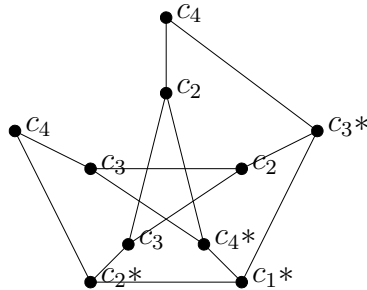


FIG. 5.9

Donc pour tout graphe amplement régulier de paramètres  $(n,3,0,1)$  tel que  $diam(G) \geq 3$ , on a  $H_u$  est isomorphe à un certain graphe  $\Lambda$ . Il vérifie alors  $\varphi(H_u) = 4$  pour tout sommet  $u$ .

Pour un degré  $k \geq 4$ , comme ces graphes sont sans  $K_4 - e$ , la condition

$G$  ne contient pas de  $C_5$ , est suffisante pour garantir une  $(k + 1)$ -coloration de  $H_u$ . La proposition 5.4.3 est alors donnée comme suit :

**Proposition 5.4.2.** *Soit  $G$  un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, 0, 1)$  et sans  $C_5$  induit. Si  $k \geq 4$ , alors  $\varphi(H_u) = k + 1$ .*

**Preuve.**

Soit  $u$  un sommet de  $G$ . Afin d'établir une coloration des sommets de sous graphe induit  $H_u$ , nous allons commencer par colorier le sommet  $u$  par la couleur  $c_1$  et affecter les couleurs  $c_2, c_3, \dots, c_{k+1}$  pour ses voisins.

Un quelconque sommet  $v$  de  $N(u)$  admet  $(k - 1)$  voisins dans  $N_2(u)$ . Ces sommets peuvent être coloriés de différentes couleurs; car tout sommet de  $N_2(u)$  admet un voisin unique dans  $N_1(u)$  et puisque  $G$  est sans  $C_5$ , aucun autre sommet de ce niveau ne lui est adjacent. Ainsi le résultat.  $\square$

Remarquons que si  $G$  est un graphe amplement régulier de paramètres  $(n, k, 0, 1)$  et sans  $C_5$  induit avec  $k \geq 4$ , alors la longueur d'un plus court cycle de  $G$  est 6. D'après la proposition 5.3.2,  $\varphi(G) = k + 1$ . Ainsi dans ce cas,  $\forall v \in V(G), \varphi(H_u) = \varphi(G)$ .

## 5.5 La $b$ -coloration de produit cartésien de graphes

Soit  $G$  un graphe et  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  sa décomposition en facteurs premiers. Le nombre  $b$ -chromatique de graphe  $G$  dépend des nombres  $b$ -chromatiques des graphes  $G_i, i \in \{1, 2, \dots, k\}$ . Rappelons les relations données par Mekkia Kouider et Maryvonne Mahéo [53].

**Proposition 5.5.1.** *(Mekkia Kouider, Maryvonne Mahéo [53]) Soient  $G$  et  $H$ , deux graphes. On a  $\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H))$ .*

Sous certaines conditions, cette borne peut être améliorée par le théorème suivant.

**Théorème 5.5.1.** *(Mekkia Kouider, Maryvonne Mahéo [53]) Soient  $G$  et  $H$  deux graphes, tels que  $G$  admet un  $\varphi(G)$ -système dominant stable, et  $H$*

admet un  $\varphi(H)$ -système dominant stable. Alors  $\varphi(G \square H) \geq \varphi(G) + \varphi(H) - 1$ . De plus le graphe  $G \square H$  admet un  $(\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ -système dominant stable.

**Remarque 5.5.1.** (Mekhia Kouider, Maryvonne Mahéo [53]) *L'inégalité du théorème précédent est encore vraie si  $S_1$  n'est pas un ensemble stable et  $2 \leq \varphi(G) < \varphi(H)$ .*

La preuve de la proposition suivante est inspirée de la preuve donnée par Mekhia Kouider et Maryvonne Mahéo pour le théorème précédent.

**Proposition 5.5.2.** *Soient  $G$  et  $H$  deux graphes tels que  $G$  admet un  $b(G)$ -système dominant stable et  $H$  admet un  $b(H)$ -système dominant stable, avec  $b(G) \leq \varphi(G)$  et  $b(H) \leq \varphi(H)$ . Alors  $G \square H$  admet une  $(b(G) + b(H) - 1)$ -coloration dominante. De plus, ce graphe admet un système dominant stable de  $b(G) + b(H) - 1$  éléments. Ainsi  $\varphi(G \square H) \geq b(G) + b(H) - 1$ .*

**Preuve.**

En procédant de la même manière que dans la preuve du théorème 5.5.1, on construit une coloration des sommets de graphe  $G \square H$  avec un système dominant stable de  $b(G) + b(H) - 1$  sommets.

On déduit ainsi que  $\varphi(G \square H) \geq b(G) + b(H) - 1$ .  $\square$

**Remarque 5.5.2.** *L'inégalité de la proposition précédente reste aussi vraie si  $S_1$  n'est pas un ensemble stable et  $2 \leq b(G) < b(H)$ .*

Soient  $G$  et  $G'$  deux graphes amplement réguliers de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement. Et Supposons que les deux graphes admettent des systèmes dominants stables  $S$  et  $S'$  respectivement. En appliquant la proposition 5.5.2, on déduit qu'il existe dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  un graphe admettant un système dominant stable de  $|S| + |S'|$  éléments, donné par  $G \square G'$ .

Considérons maintenant le graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  de degré  $k$ ; et on s'intéresse à l'existence d'un système dominant stable de  $k + 1$  sommets.

**Proposition 5.5.3.** *Soient  $G$  et  $G'$ , deux graphes réguliers de degré  $k$  et  $k'$  respectivement. Si  $G$  et  $G'$  admettent des systèmes dominants stables de  $k + 1$*

et  $k' + 1$  sommets respectivement, alors  $G \square G'$  préserve cette propriété.

**Preuve.**

$d(G) = k$  et  $\varphi(G) = k + 1$ .  $d(G') = k'$  et  $\varphi(G') = k' + 1$ .  $d(G \square G') = k + k'$  et  $\varphi(G \square G') \leq k + k' + 1$ .

Comme ce graphe admet un système dominant de  $k + 1 + k' + 1 - 1$  sommets. Il s'ensuit que  $\varphi(G \square G') = k + k' + 1$ ; ce qui induit le résultat.  $\square$

On déduit alors :

**Corollaire 5.5.1.** *Le produit cartésien est une opération interne dans la sous classe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  tel qu'un graphe quelconque  $G$  de degré  $k$  admet un système dominant stable de  $k + 1$  éléments.*

*Dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$ , soit  $G$  un graphe de degré  $k$  ayant un système dominant stable de  $k + 1$  éléments.  $G'$  est un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  de degré  $k'$  d'un système dominant stable de  $k' + 1$  éléments.  $G \square G'$  est alors un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , de degré  $k + k'$  et ayant un système dominant stable de  $k + k' + 1$  sommets.*

**Preuve.**

Soient  $G$  et  $G'$  deux graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda}$ , admettant des systèmes dominants stables de  $d(G) + 1$  et  $d(G') + 1$  sommets respectivement. Alors le graphe  $G \square G'$  de  $\mathcal{G}_{\lambda}$  et de degré  $d(G) + d(G')$ , admet un système dominant stable de  $d(G) + d(G') + 1$  éléments.

On a  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2} \subset \mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ .  $d(G) = k$ ,  $d(G') = k'$ ,  $\varphi(G) = k + 1$ , et  $\varphi(G') = k' + 1$ . Alors  $G \square G' \in \mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $d(G \square G') = k + k'$  et d'après la proposition précédente, ce graphe admet un système dominant stable de  $k + k' + 1$  sommets.

Donc le produit cartésien est une opération interne dans cette sous classe de graphes.  $\square$

On s'intéresse au cas plus général de graphes quasi-amplement réguliers. Une coloration dominante de graphe en Fig 3.2 est donnée en Fig 5.10.

**Proposition 5.5.4.** *Si  $G$  est le graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$ , localement  $(d_1, d_2)$  – bistars, alors  $\lambda_2 + 2 \leq \varphi(G) \leq d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1) + 1$ .*

**Preuve.**

La plus grande clique de  $G$  est d'ordre  $\lambda_2 + 2$ . Ce qui représente une borne

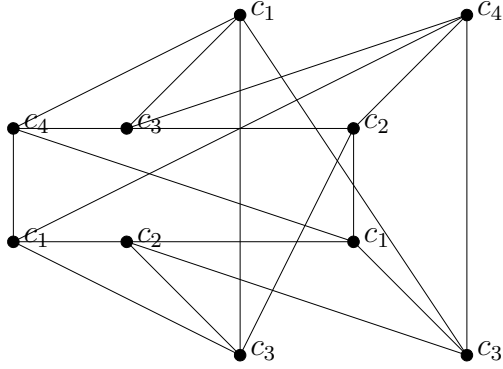


FIG. 5.10

inférieure de  $\varphi(G)$ . Il est aussi régulier de degré  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ .  
 Donc  $\varphi(G) \leq d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ .  $\square$

## 5.6 Le nombre $b$ -chromatique des graphes de Hamming

Afin de déterminer une borne inférieure du nombre  $b$ -chromatique d'un graphe de Hamming obtenu par produit cartésien de cliques de différents ordres, on commence par chercher une pour le nombre  $b$ -chromatique des graphes de Hamming produit d'une même clique. Pour cela nous exploitons les propriétés de ce paramètre déjà démontrés.

**Proposition 5.6.1.** (Mekhia Kouider-Maryvonne Mahèo [53]). Soient  $K_n$  et  $K_p$ , deux graphes complets d'ordre  $n$  et  $p$  respectivement, alors

- $n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p - 1)$  si  $p < n \leq p(p - 1)$ ;
- $\varphi(K_n \square K_p) = n$  si  $n \geq p(p - 1)$ .

Pour le cas des hypercubes, nous avons le résultat suivant.

**Corollaire 5.6.1.** (Mekhia Kouider-Maryvonne Mahèo [53])  $\varphi(Q_1) = \varphi(Q_2) = 2$  et  $\varphi(Q_n) = n + 1 \forall n \geq 3$ .

Afin de donner une borne inférieure de nombre  $b$ -chromatique des graphes de Hamming, on s'intéresse d'abord à  $\varphi(K_n \square K_n)$ .

Pour  $n = 1, 2$  ou  $3$ ; on a  $\varphi(K_n \square K_n) = n$ . On a aussi  $\varphi(K_4 \square K_4) \geq 5$  et  $\varphi(K_5 \square K_5) \geq 6$ .

Donner une coloration dominante de  $K_n \square K_n$  est équivalent à affecter à toute case du tableau carré  $n \times n$ , un élément de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, \varphi(G)\}$ ; de sorte que tout élément  $i$  ne figure pas *deux* fois dans une même ligne, non plus dans une même colonne. De plus, pour au moins une des cases ayant la valeur  $i$ , on a : tout élément de  $\{1, 2, \dots, \varphi(G)\} \setminus \{i\}$  apparaît dans une case de la ligne ou de la colonne de la case  $i$ .

Une 5-coloration de graphe  $K_4 \square K_4$  et une 6-coloration de graphe  $K_5 \square K_5$  sont présentées dans les *deux* tableaux suivants.

3*	2*	1*	5
4*	3	2	1
5*	4	3	2
1	5	4	3

et

3*	2*	1*	6*	5
4*	3	2	1	6
5*	4	3	2	1
6	5	4	3	2
1	6	5	4	3

Le système dominant de graphes  $K_4 \square K_4$  et celui de graphe  $K_5 \square K_5$  sont donnés respectivement par les sommets des ensembles  $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*\}$  et  $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*\}$  présentés dans les *deux* tableaux respectivement.

Une coloration dominante est aussi obtenue pour le cas de  $n = 6$  et de  $n = 7$ . Il s'ensuit que  $\varphi(K_6 \square K_6) \geq 8$  et  $\varphi(K_7 \square K_7) \geq 9$ . La  $b$ -coloration de

ces graphes avec 8 et 9 couleurs respectivement sont présentées dans ce qui suit. Les sommets dominants sont ceux correspondants aux cases affectées de  $x^*$ , pour toutes les valeurs possibles de  $x$ .

1*	2*	3*	4*	5	6
7	8	1	2	3	4
5*	6*	7*	8*	1	2
3	4	5	6	7	8
8	7	4	3	2	1
4	3	8	7	6	5

et pour  $n = 7$ , on a :

1*	2	3	4	5	6	7
8*	9	1	2	3	4*	5*
6	7	8	9*	1	2*	3
4	5	6*	7*	8	9*	1
2	3*	4	5	6	7	8
9	1	2	3	4	5	6
7	8	9	1	2	3	4

Bien que le nombre  $b$ -chromatique consiste à chercher le maximum de toutes les colorations dominantes possibles; mais l'existence d'un dominant stable est une propriété importante pour un graphe donné. Ainsi la proposition suivante.

**Proposition 5.6.2.** *Soit  $K_n$  le graphe complet de  $n$  sommets; avec  $n$  un nombre impair différent de 1. Alors  $K_n \square K_n$  admet un système dominant stable de  $n$  sommets. De plus, un quelconque sommet de  $K_n \square K_n$  est dans un système dominant stable approprié.*

**Preuve.**

Le graphe  $K_n \square K_n$  est constitué de  $2n$  cliques d'ordre  $n$ . Dans une représentation graphique, on retrouve  $n$  copies horizontales et  $n$  copies verticales de  $K_n$ .

Dans un tableau  $n \times n$ , on peut simuler le problème de la recherche d'un dominant stable de  $n$  éléments, à celui d'une configuration symétrique de  $n$  symboles. Il existe alors plusieurs représentations possibles.

Parmi les différentes colorations, quelques unes induisent un système dominant stable. Une des possibilités est la suivante.

On a  $n$  est impair.

- On colorie les cases de la première ligne par les couleurs  $1, 2, \dots, n$  de gauche vers la droite dans cet ordre.
- On translate par la suite, l'affectation des couleurs  $1, 2, \dots, n$  de gauche vers la droite de *deux* cases, pour toute nouvelle ligne.

Les sommets de la diagonale vont constitués un système dominant stable pour les couleurs  $1, n, n-1, \dots, 2$  dans cet ordre.

Le sommet  $(1,1)$ , qui correspond à la première case du tableau est donc un élément de ce stable.

En changeant le premier élément de la première ligne, on obtient un nouveau système dominant stable disjoint avec le précédent. De cette manière, on obtient tous les systèmes dominants stables.  $\square$

**Remarque 5.6.1.** *Cas où  $n$  est pair. Il est possible de construire une coloration dominante comme suit :*

- *On commence par colorier les cases de la première ligne du tableau par les couleurs  $1, 2, \dots, n$ , dans cet ordre, allant de la gauche vers la droite.*
- *Pour les premières  $\frac{n}{2}$  lignes, on translate cette même coloration, de deux cases pour toute nouvelle ligne.*
- *Pour la deuxième partie de lignes, on inverse la coloration de la première partie dans le même ordre (de la droite vers la gauche).*

*Mais, pour une telle coloration, les éléments de la diagonale ne forme pas un système dominant.*

**Proposition 5.6.3.** *Pour deux entiers positifs  $n$  et  $d$ , tels que  $n$  est impair,  $n \neq 1$  et  $d \geq 1$ ; le nombre  $b$ -chromatique de graphe de Hamming  $H(2d,n)$  vérifie la relation  $\varphi(H(2d,n)) \geq (dn - (d - 1))$  et ce graphe admet un  $(dn - (d - 1))$ -système dominant stable.*

*On a aussi  $\varphi(H(2d + 1,n)) \geq (d + 1)n - d$  si  $d > 1$ .*

**Preuve.**

$$\varphi(H(2,n)) = \varphi(K_n \square K_n) \geq n.$$

Par induction sur  $d$ .

$H(2,n)$  admet un  $n$ -système dominant stable de  $n$  éléments (d'après la proposition précédente).

De la proposition 5.5.2, le graphe de Hamming  $H(4,n)$  admet un  $(n+n-1)$ -système dominant stable; du fait qu'il s'agit de  $H(2,n)\square H(2,n)$ .

Il admet alors, un  $(2n-1)$ -système dominant stable. La propriété est donc vraie pour  $d=2$ .

Supposons que  $\varphi(H(2d,n)) \geq dn - (d-1)$  et le système dominant de  $(dn - (d-1))$  sommets est stable.

On a  $H(2(d+1),n) = H(2d,n)\square H(2,n)$ .

D'après la même proposition; on conclue que le graphe  $H(2(d+1),n)$  admet un  $(dn - (d-1) + n - 1)$ -système dominant stable.

Considérons maintenant le graphe de Hamming  $H(2d+1,n)$ . On a :

$H(2d+1,n) = H(2d,n)\square K_n$ .

Le graphe  $K_n$  n'admet pas de système dominant stable et  $\varphi(K_n) = n$ .

$H(2d,n)$  admet un  $(dn - (d-1))$ -système dominant stable.

On a :  $n < dn - (d-1)$  puisque  $n \geq 3$  et  $d \geq 1$ . D'après la remarque 4.5.2, on obtient :  $\varphi(H(2d+1,n)) \geq \varphi(H(2d,n)) + \varphi(K_n) - 1$ .

Puisque  $2 \leq n < (dn - (d-1))$ , on retrouve :

$\varphi(H(2d+1,n)) \geq (dn - (d-1)) + n - 1$ .

Donc  $\varphi(H(2d+1,n)) \geq (d+1)n - d$ .  $\square$

**Corollaire 5.6.2.** *Pour  $n \geq m(m-1)$ ,  $\varphi(H(d,m,n)) \geq n$ .*

**Preuve.**

Si  $n \geq m(m-1)$ , on a :  $\varphi(K_n \square K_m) \geq n$ .

Pour deux graphes  $G$  et  $H$ ; on a :  $\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H))$ .

Le graphe  $H(d,m,n)$  est un produit cartésien de  $d$  graphes  $K_n \square K_m$ .

Alors  $\varphi(H(d,m,n)) \geq \varphi(K_n \square K_m)$ .

Ainsi  $\varphi(H(d,m,n)) \geq n$ .  $\square$

La proposition suivante donne une borne inférieure du nombre  $b$ -chromatique pour certains graphes de Hamming.

**Proposition 5.6.4.** *Pour le triplet d'entiers positifs non nuls  $n$ ,  $m$  et  $d$ ; tels que  $n$  et  $m$  sont impairs. On a :*

1.  $\varphi(H(2d; m, n)) \geq d(n+m) - 2d + 1$ ,

2.  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq d(n+m) - 2d + 1$ ,
3. Si  $n > 2$  et  $m < n$ , alors  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq d(n+m-2) + n$ .

**Preuve.**

1. On a  $\varphi(H(2d, n)) \geq (dn - (d-1))$  et  $\varphi(H(2d, m)) \geq (dm - (d-1))$ .  
Chacun des deux graphes admet un système dominant stable.  
On a alors  $\varphi(H(2d; m, n)) \geq (dn - (d-1)) + (dm - (d-1) - 1)$ .  
Donc  $\varphi(H(2d; m, n)) \geq (d(n+m) - 2d + 1)$ .  
Ainsi  $H(2d; m, n)$  admet un  $(d(n+m) - 2d + 1)$ -système dominant stable.
2. On a  $H(2d+1; m, n) = H(2d, m, n) \square H(1; m, n)$ .  
Alors  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq \max(\varphi(H(2d; m, n)), \varphi(H(1; m, n)))$ .  
Ainsi  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq d(n+m) - 2d + 1$ .
3. Si  $n > 2$  et  $m < n$ , alors  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq \varphi(H(2d; m, n)) + \varphi(H(1; m, n)) - 1$ .  
On retrouve :  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq \varphi(H(2d; m, n)) + \varphi(H(1; m, n)) - 1$ .  
Et  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq d(n+m) - 2d + 1 + n - 1$ .  
Donc  $\varphi(H(2d+1; m, n)) \geq d(n+m-2) + n$ .

□

**Proposition 5.6.5.** *Considérons le quadruplet d'entiers positifs  $n, m, d$  et  $d'$  tels que,  $n$  et  $m$  sont impairs et différents de 1 et  $d$  et  $d'$  sont non nuls. On a :*

1.  $\varphi(H(2d, m; 2d', n)) \geq (dm + d'n - (d + d') + 1)$  et ce graphe admet un système dominant stable de  $(dm + d'n - (d + d') + 1)$  sommets.
2. Si  $(d' + 1)n - d' < dm - (d - 1)$ , alors  $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq (dm + (d' + 1)n - (d + d'))$ .
3. Si  $((d' + 1)n - d') > (dm - (d - 1))$ , alors  $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq (d' + 1)n - d'$ .

**Preuve.**

1.  $H(2d, m)$  admet un système dominant stable constitué de  $(dm - (d-1))$  sommets et  $H(2d', n)$  admet un système dominant stable de  $(d'n - (d' - 1))$  sommets.  
Alors  $\varphi(H(2d, m; 2d', n)) \geq \varphi(H(2d, m)) + \varphi(H(2d', n)) - 1$ .  
On retrouve :  $\varphi(H(2d, m; 2d', n)) \geq (dm - (d-1)) + (d'n - (d' - 1)) - 1$ .  
D'où  $\varphi(H(2d, m; 2d', n)) \geq (dm + d'n - (d + d') + 1)$ .

2. Si  $(d' + 1)n - d' < dm - (d - 1)$ .  
 Comme  $H(2d, m)$  admet un système dominant stable de  $(dm - (d - 1))$  sommets et  $b(H(2d' + 1, n)) < b(H(2d, m))$ .  
 $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq (dm - (d - 1)) + ((d' + 1)n - d') - 1$ .  
 Ainsi  $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq (dm + (d' + 1)n - (d + d'))$ .
3. Si  $(d' + 1)n - d' > dm - (d - 1)$ .  
 On a  $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq \max(\varphi(H(2d, m)), \varphi(H(2d' + 1, n)))$ .  
 Donc  $\varphi(H(2d, m; 2d' + 1, n)) \geq ((d' + 1)n - d')$ .
- 

## 5.7 Le produit total et la $b$ -coloration

Soient  $G$  et  $G'$  deux graphes amplement réguliers de paramètres  $(n, k, \lambda, 2)$  et  $(n', k', \lambda, 2)$  respectivement. Le produit total de  $G$  et  $G'$  est le graphe  $G \boxtimes G'$ .

**Proposition 5.7.1.** *Soient deux graphes réguliers  $G$  et  $G'$  de degré  $k$  et  $k'$  respectivement. Alors  $G \boxtimes G'$  est régulier de degré  $(k + 1)(k' + 1) - 1$ .*

**Preuve.**

Comme un sommet  $u$  de  $G$  admet  $k$  voisins dans  $G$  et un sommet  $v$  de  $G'$  admet  $k'$  voisins dans  $G'$ , alors le nombre de voisins d'un sommet  $(u, v)$  de  $G \boxtimes G'$  est  $k + k' + k.k'$ .

Ainsi  $d(G \boxtimes G') = (k + 1)(k' + 1) - 1$ . □

**Corollaire 5.7.1.** *Soient  $K_n$  et  $K_m$  deux graphes complets de  $n$  et  $m$  sommets respectivement. Alors  $K_n \boxtimes K_m$  est le graphe complet  $K_{nm}$ .*

**Preuve.**

L'ordre de graphe  $K_n \boxtimes K_m$  est  $nm$  et son degré est  $(n - 1 + 1)(m - 1 + 1) - 1 = nm - 1$ .

Ainsi un sommet de  $K_n \boxtimes K_m$  est adjacent à tous les autres sommets de ce graphe. Donc  $K_n \boxtimes K_m$  est le graphe complet  $K_{nm}$ . □

Le nombre de voisins communs de deux sommets adjacents  $(u, v)$  et  $(u, v')$  de  $G \boxtimes G'$ , tels que  $v \neq v'$  est  $k + k\lambda + k + \lambda$ . On retrouve alors  $(k + 1)\lambda + 2k$

sommets.

Ces sommets sont donnés par :

- $(u',v)$  et  $(u',v')$  pour tout sommet  $u'$  adjacent à  $u$ ;
- $(u,w)$  et  $(u',w)$ , pour tout sommet  $w$ , voisin commun de  $v$  et  $v'$  et  $u'$  un sommet adjacent à  $u$ .

Pour *deux* sommets adjacents  $(u,v)$  et  $(u',v)$ , le nombre de voisins communs est  $k' + k'\lambda + k' + \lambda$ . On retrouve ainsi  $(k' + 1)\lambda + 2k'$ . Ces sommets sont donnés par :

- $(u,v')$  et  $(u',v')$  tels que  $v'$  est un sommet adjacent à  $v$ ;
- $(t,v)$  et  $(t,v')$  tels que  $t$  est un voisin commun de  $u$  et  $u'$ , et  $v'$  est un sommet adjacent à  $v$ .

*Deux* sommets adjacents  $(u,v)$  et  $(u',v')$  avec  $u \neq u'$  et  $v \neq v'$  admettent  $\lambda^2 + 4\lambda + 2$  voisins communs. Ils sont donnés par :

- Les *deux* sommets  $(u',v)$  et  $(u,v')$ ;
- $(u,w)$  et  $(u',w)$ , tels que  $w$  est un voisin commun de  $v$  et  $v'$ ;
- $(t,v)$  et  $(t,v')$ ,  $t$  est un voisin commun de  $u$  et  $u'$ ;
- $\lambda^2$  sommets de la forme  $(t,w)$ , où  $t$  est un voisin commun de  $u$  et  $u'$  et  $w$  est un voisin commun de  $v$  et  $v'$ .

Pour les sommets à distance 2, on distingue plusieurs cas, à savoir :

- Les *deux* sommets sont donnés par  $(u,v)$  et  $(u,v')$ ; où  $v$  et  $v'$  sont alors à distance *deux* dans  $G'$ . Ils admettent  $2k + 2$  voisins communs, donnés comme suit :
  - *Deux* sommets  $(u,w)$  où  $w$  est un voisin commun de  $v$  et  $v'$  dans  $G'$ ;
  - $2k$  sommets  $(t,w)$  où  $w$  est un voisin commun de  $v$  et  $v'$  dans  $G'$  et  $t$  est un sommet adjacent de  $u$  dans  $G$ .
- Les sommets à distance 2,  $(u,v)$  et  $(u',v)$ . Leurs voisins communs sont :
  - *Deux* sommets  $(t,v)$  où  $t$  est un voisin commun de  $u$  et  $u'$ ;
  - $2k'$  sommets  $(t,w)$ , où  $w$  est un adjacent de  $v$  dans  $G'$  et  $t$  est un voisin commun de  $u$  et  $u'$  dans  $G$ .

- $(u,v)$  et  $(u',v')$  tels que  $u \neq u'$  et  $v \neq v'$ . On distingue 3 cas.
  - $u \sim u'$  et  $v \approx v'$  : dans ce cas  $(u,v)$  et  $(u',v')$  possèdent  $2\lambda+4$  voisins communs. Puisque  $u$  et  $v$  possèdent  $\lambda$  voisins communs dans  $G$ , et  $v$  et  $v'$  sont nécessairement à distance 2 dans  $G'$ .
  - $u \approx u'$  et  $v \sim v'$  : dans ce cas  $(u,v)$  et  $(u',v')$  ont aussi  $2\lambda+4$  voisins communs.  $v$  et  $v'$  ont  $\lambda$  voisins communs dans  $G'$ ;  $u$  et  $u'$  ont 2 voisins communs dans  $G$ .
  - $u \approx u'$  et  $v \approx v'$  : les *deux* sommets ont 4 voisins communs, puisque  $u$  et  $u'$  sont à distance *deux* dans  $G$ ;  $v$  et  $v'$  sont à distance *deux* dans  $G'$ .

Ainsi, *deux* sommets à distance *deux* admettent  $2k+2$  ou  $2k'+2$  ou  $2\lambda+4$  ou bien 4 voisins communs.

**Corollaire 5.7.2.** *Pour deux graphes amplement réguliers, on a :*

1. *Le produit total de deux graphes non complets de  $\mathcal{G}_\lambda$  n'est pas un graphe amplement régulier, non plus quasi-amplement régulier.*
2. *Le produit total de deux graphes de  $\mathcal{G}_0$ , d'ordres  $n$  et  $n'$  respectivement et ayant le même degré est un graphe quasi-amplement régulier.*

**Preuve.**

1. Soient  $G$  et  $G'$ , *deux* graphes de  $\mathcal{G}_\lambda$  de paramètres  $(n,k,\lambda,2)$  et  $(n',k',\lambda,2)$  respectivement.  
 Une paire de sommets adjacents admet  $\lambda^2 + 4\lambda + 2$  ou  $(k+1)\lambda + 2k$  voisins communs.  
 Si  $G \boxtimes G'$  est amplement régulier, alors :  
 $(k+1)\lambda + 2k = \lambda^2 + 4\lambda + 2$ . Donc  $k = \lambda + 1$ .  
 Le même raisonnement pour  $G'$ . Ainsi  $k = k' = \lambda + 1$ . D'après le précédent résultat,  $G \square G'$  est le graphe  $K_{(\lambda+2)^2}$ .
2. Si on suppose que  $k = k'$ , les sommets adjacents dans  $G \square G'$  ont  $2k$  ou bien 2 voisins communs. Les sommets à distance 2 ont 4 ou  $2k+2$  voisins communs.  
 Alors  $G \boxtimes G'$  est quasi-amplement régulier avec paramètres  $(nn', k^2 + 2k, 2k, 2, 4, 2k+2)$ .

□

Soit  $C_4$  le cycle de longueur 4. On a  $\varphi(C_4) = 2$ . Dans ce qui suit, une  $b$ -coloration de  $C_4 \boxtimes C_4$ . On retrouve  $\varphi(C_4 \boxtimes C_4) \geq 5$ .

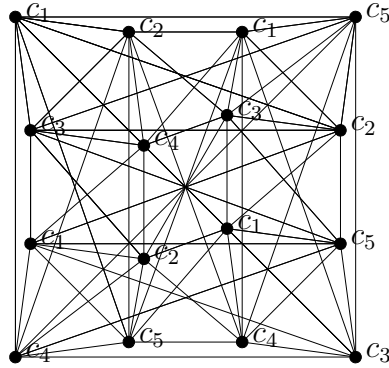


FIG. 5.11

Ce graphe peut être représenté sous forme d'un tableau carré  $4 \times 4$ . Les voisins d'une case  $(i, j)$  sont  $\{(i, j - 1), (i, j + 1), (i - 1, j - 1), (i - 1, j), (i - 1, j + 1), (i + 1, j - 1), (i + 1, j), (i + 1, j + 1)\}$ . On précise que les lignes 1 et 4, aussi bien que les colonnes 1 et 4 sont considérées consécutives. Ainsi si  $i + 1 = 5$  ou  $j + 1 = 5$ , ces valeurs sont remplacées par 1.

Colorier ce graphe revient à affecter une couleur de l'ensemble  $\{1, 2, 3, 4, 5\}$  à toute case du tableau. On obtient :

1*	2*	1	5
3*	4	3	2
1	2	1	5*
4*	5	4	3

On s'intéresse à la borne inférieure du nombre  $b$ -chromatique de graphe produit total de *deux* graphes. Pour le graphe produit total de graphes complets,  $\varphi(K_m \boxtimes K_n) = \varphi(K_m) \cdot \varphi(K_n)$ . Aussi, pour le graphe  $C_4$ ,

$\varphi(C_4 \boxtimes C_4) > \varphi(C_4)\varphi(C_4)$ . Cas de graphe  $C_4 \boxtimes C_n$ , nous avons la suivante proposition.

**Proposition 5.7.2.** *Pour  $n$  un entier positif pair, tel que  $n \geq 4$ , on a :  $\varphi(C_4 \boxtimes C_n) \geq 5$ .*

**Preuve.**

On se base sur la coloration de  $C_4 \boxtimes C_4$  donnée précédemment, pour obtenir une coloration dominante de  $C_4 \boxtimes C_n$ .

Ce graphe peut être représenté sous forme d'un tableau rectangulaire  $4 \times n$ . On affecte dans la première colonne, la deuxième, l'avant dernière et la dernière les mêmes couleurs que dans  $C_4 \boxtimes C_4$ .

Pour le reste des colonnes, on affecte dans toute colonne impair les couleurs affectées dans la colonne 1 et dans toute colonne pair, celles affectées dans la colonne 2. Une telle coloration, restera propre et le système dominant précédent est aussi dominant pour ce nouveau graphe.  $\square$



# Conclusion générale

Cette présente thèse s'articule principalement autour de la régularité et de la symétrie des graphes de Hamming. Le problème de coloration des sommets est un problème aussi évoqué.

Vu la structure particulière des graphes de Hamming, qui a incité plusieurs études, une extension de ces derniers au cas plus général de ces graphes, constitue notre sujet de recherche. Une caractérisation en fonction des paramètres est déjà donnée pour les graphes de Hamming. Cette dernière est étendue, sous certaines conditions, au cas de graphes obtenus par produit cartésien de différentes cliques, en exploitant particulièrement le produit cartésien comme opération principale.

L'étude de la transitivité de ces graphes est liée à la recherche de leurs groupes d'automorphismes. Pour les graphes de Hamming d'une manière générale, les groupes d'automorphismes sont connus, et une caractérisation de ces graphes en fonction de ce paramètre, est obtenue sous certaines conditions supplémentaires. Les propriétés de sommet-transitivité, arête-transitivité et distance-transitivité sont les principales *trois* types d'action de groupe d'automorphismes dans le graphe, auxquels on s'est intéressé.

L'algèbre combinatoire est une discipline exploitant à la fois l'algèbre et la combinatoire. De nouveaux résultats sur les graphes sont alors obtenus.

Le nombre  $b$ -chromatique est un invariant récemment défini. Après avoir démontré quelques propriétés importantes, on s'est intéressé à la recherche de bornes inférieures de ce paramètre pour certaines familles de graphes. Pour le cas des graphes de Hamming, le calcul se base sur celui de  $\varphi(K_n \square K_n)$ . Le

---

1. On ne meurt pas riche de ce qu'on a fait mais pauvre de ce qu'on a pas fait. "SAN ANTONIO".

résultat dépend de la parité de nombre de graphes complets utilisés. Pour différents cas de graphes de Hamming, nous avons exploité les propriétés de produit cartésien de graphes et les résultats obtenus pour les graphes de Hamming.

Comme perspectives, nous proposons d'étudier les problèmes suivants :

# Problèmes ouverts

1. Caractérisation des graphes de Hamming dans la classe des graphes quasi-ablement réguliers.

(a) PROBLEME 1: Le problème de reconnaissance des graphes de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$  qui sont produit cartésien de *deux* graphes  $G$  et  $G'$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement est encore posé. La caractérisation des graphes de Hamming  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \square H(d_2, \lambda_2 + 2)$  dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1} \square \mathcal{G}_{\lambda_2}$  sera alors généralisé dans une sous-classe plus grande de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ , à savoir la sous classe des graphes localement  $(d_1, d_2)$ -bistars; et de suite dans toute la classe de graphes  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ .

Résoudre le problème posé, revient à montrer si pour  $G$  un graphe localement  $(d_1, d_2)$ -bistars et  $G_1$  (respectivement  $G_2$ ) est le graphe partiel de  $G$  obtenu par élimination de toutes les arêtes des  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques (respectivement des  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques); alors les *deux* graphes  $G_1$  et  $G_2$  sont non connexes et constitués respectivement de  $d_1$  et  $d_2$  composantes connexes isomorphes, de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$ .

(b) PROBLEME 2: Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ . Si  $G$  est un produit cartésien de *deux* graphes amplement-réguliers sans  $K_4 - e$ ,  $G_1$  et  $G_2$  de  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$  respectivement, alors il est localement  $(d_1, d_2)$ -bistars. L'inverse est-il vraie?

(c) PROBLEME 3: Soit  $G$  un graphe de  $\mathcal{G}_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $(d_1, d_2)$ -bistars. Supposons que tout 4-cycle est constitué d'arêtes de cliques de même ordre ou d'arêtes de  $(\lambda_1 + 2)$ -cliques et  $(\lambda_2 + 2)$ -cliques

---

2. The important thing in science is not so much to obtain new facts as to discover new ways of thinking about them. "SIR WILLIAM LAWRENCE BRAGG, BEYOND REDUCTIONISM".

alternativement. Peut-on écrire  $G$  comme  $G_1 \square G_2$  où  $G_1$  est dans  $\mathcal{G}_{\lambda_1}$  et  $G_2$  est dans  $\mathcal{G}_{\lambda_2}$ ?

- (d) PROBLEME 4: Pas tout  $(0,2)$ -graphe est sommet-transitif. Les exemples de  $(0,2)$ -graphes non sommet-transitifs donnés par J.M. Laborde et R.M.Madani ne sont pas dans  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_2$ . Existe-t-il d'exemples de  $(0,2)$ -graphes non sommet-transitifs qui ne sont pas dans  $\mathcal{G}_0 \cup \mathcal{G}_2$ .

2. Caractérisation des graphes de Hamming par l'algèbre combinatoire.

- (a) PROBLEME 5: Caractérisation d'un graphe par son groupe d'automorphismes  $Aut(G)$ .
- (b) PROBLEME 6: Primitivité d'un graphe. Soit  $G$  un graphe et  $u$  un sommet quelconque de  $G$ .  $G$  est dit primitive s'il est connexe et tous les  $N_i(u)$  ( $i = 1, \dots, d$ ) sont connexes; il est imprimitive sinon. Ces notions sont fortement liées aux concepts correspondants sur les groupes de permutations. Ainsi la primitivité d'un graphe  $G$  est-elle équivalente à celle de  $Aut(G)$ .

3. PROBLEME 7: Problème de la  $b$ -coloration sous contraintes de  $Aut(G)$ .

Soit  $G$  un graphe,  $Aut(G)$  son groupe d'automorphismes et  $\varphi(G)$  son nombre  $b$ -chromatique. Une coloration dominante de  $G$  à l'aide de  $b$  couleurs, est une fonction qui correspond à un sommet  $u$  une couleur de  $\{1, 2, \dots, b\}$ . Deux colorations  $C_1$  et  $C_2$  sont dites équivalentes s'il existe un automorphisme de graphe  $G$ , et une  $b$ -permutation tel que  $C_1 \circ g = \pi \circ C_2$ . Pour le cas de graphe  $H(d, n)$ , la question est de savoir si toute  $b$ -coloration  $C_i$  de  $H(d, n)$  admet une autre  $b$ -coloration  $c_j$  qui lui est équivalente.

4. PROBLEME 8: Construction de codes mixtes. Quelques codes mixtes sont définis par Gerzson Kéri [50]. Il s'agit d'une combinaison de codes binaires, ternaires et quaternaires. On s'intéresse à d'autres combinaisons, plus particulièrement combiner un nombre fini de  $q_i$ -codes tels que les nombres  $q_i$  sont premiers, ou premiers entre eux ou vérifient

certaines relations de multiplicité.

5. La  $b$ -coloration des graphes de Hamming.

- (a) PROBLEME 9 : Le problème de  $b$ -coloration de  $K_n \square K_n$ .  
Plusieurs colorations dominantes de ce graphe sont données et la question est de chercher le nombre  $b$ -chromatique. On veut démontrer si  $\varphi(K_n \square K_n) \geq 2n - 3$ .
- (b) PROBLEME 10 : Dans le graphe de l'hypercube  $Q_n$  tel que  $n \geq 3$ ; tout sommet  $u_j$  de couleur  $j$  est dans un système dominant stable approprié. Cette propriété constitue-t-elle une caractérisation de ces graphes parmi les autres éléments de  $\mathcal{G}_0$  ou  $\mathcal{G}_2$ .



# Bibliographie

- [1] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi. Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a generalized Hamming graphs. Far East Journal of Applied Mathematics. Volume 26, No.3 (2007) 375-391.
- [2] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, Automorphism groups of generalized Hamming graphs Submitted to Discrete Mathematics.
- [3] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi; On a Quasi-amply-regularity of Generalized Hamming Graphs. Submitted to AKCE, International Journal of Graphs and Combinatorics.
- [4] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, Automorphism groups of generalized Hamming graphs (Comssmunication CCGT). Electronic Notes in Discrete Mathematics 24 (2006) 9-15.
- [5] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, On a  $b$ -chromatic number of a generalized Hamming graphs, (communication COSI'06). Alger 11-13 Juin 2006. ACTES DU COLLOQUE COSI'06 206-214.
- [6] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi; Quasi-amply-regularity and Generalized Hamming Graphs (Communication ICGT). Electronic Notes in Discrete Mathematics 22 (2005) 113117.
- [7] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, Hamming Graphs and Distance Regularity. (communication) COSI'05 Béjaia 12-14 Juin 2005.
- [8] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi. Sur une classe de graphes de Hamming généralisés. Pré-publication. Faculté de mathématiques (2004).
- [9] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, 19<sup>th</sup> British Combinatorial Conference. (Communication). Bangor 31 June-4 July 2003 UK.
- [10] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi. Sur une classe de graphes fortement réguliers. Pré-publication. Faculté de mathématiques (2001).
- [11] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, Une extension des Hypercubes. Rencontre des Mathématiciens Algériens. (RMA 2000). Alger 21-24 Mai 2000.

- [12] F.Affif Chaouche, Sur une classe de graphes fortement réguliers, Thèse de Magister. Université Houari Boumédiène. Alger 2000.
- [13] M.Aigner. Combinatorial theory. Springer-verlag, berlin Heidelberg . New york.1942.
- [14] François Auger, Introduction à la théorie du signal et de l'information. Editions TECHNIP 1999.
- [15] R.A.Bailey, Association Schemes. Designed Experiments, Algebra and combinatorics. Cambridge University press 2004.
- [16] Robert Baily, Distance-Transitive Graphs. M Math project, University of Leeds, 2002.
- [17] Ulrike Baumann, Automorphism groups of graphs with 1-factorizations. Discrete Mathematics 158 (1996) 1-10.
- [18] C.Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod University 1973.
- [19] A.Berrachedi, Sur quelques propriétés métriques des graphes de type hypercube, Thèse doctores sciences, USTHB, 1997.
- [20] S.L.Bezrukov, J.D.Chavez, L.H.Harper, M.Rittger, U.P.Schroder. The congestion of n-cube layout on a rectangular grid. Discrete Mathematics 213(2000) 13-19.
- [21] Norman Biggs. ALGEBRAIC GRAPH THEORY L.S.E. Cambridge Mathematical Library. 2nd Edition 1993.
- [22] Béla Bollobàs. Modern Graph theory. Editorial Board S.Axler, F.W.Gehring, K.A.Ribert 1998.
- [23] Andreas Brandstadt, Van Bang Le, Jeremy Spinrad, Graph Classes, SIAM 1999.
- [24] A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier, Distance-Regular Graphs. Springer-verlag, 1989.
- [25] A.E.Brouwer, H.M.Mulder, The vertex connectivity of  $\{0,2\}$ -graph equals its degree (communication), Discrete mathematics 169 (1997) 153-155.
- [26] Peter J.Cameron, C.Y.Ku, Intersecting families of permutations. European Journal of Combinatorics 24 (2003)881-890.
- [27] Peter J.Cameron. Random strongly regular graphs? Discrete Mathematics 273 (2003) 103-114.
- [28] Peter J. Cameron, Automorphisms of graphs. Topics in Algebraic Graph Theory (edited by L.W.Bemeke, R.J.Wilson) Cambridge, 2005.

- [29] Peter J. Cameron, J.H. Van Lint, Graphs, Codes and Designs. Cambridge University press 1980.
- [30] G.L.Chia, On graphs uniquely colorable under the action of their automorphism groups. Discrete Mathematics 162 (1996) 281-284.
- [31] J.Deutsch and P.H.Fisher, On Strongly Regular Graphs with  $\mu = 1$ . Europ. J.Combinatorics (2001) 22, 303-306.
- [32] Diffie et Hellman. New direction in cryptography. IEEE Transaction Information Theory 1976.
- [33] Edward Dobson, Classification of vertex-transitive graphs of order a prime cubed-I. Discrete Mathematics 224 (2000) 99-106.
- [34] Brice Effantin and Hamamache Kheddouci, The  $b$ -chromatic number of some power graphs. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science 6, 2003, 0045-054.
- [35] Amine El Sahili and Mekkia Kouider. About  $b$ -coloring of regular graphs. Rapport de Recherche N : 1432. Unité mixte de recherche 8623. CNRS- Université Paris Sud- LRI 02/2006.
- [36] Hikoe Enomoto, Characterization of families of finite permutation groups by the subdegrees. J.fac.Sci.Univ.Tokyou Sec I A : ath 20(1973). 1-11. [4,133,262].
- [37] Yi-Zheng Fan, On spectral integral variations of Mixed graphs, Linear Algebra and its applications 374 (2003) 307-316.
- [38] Yan-Quan Feng, Automorphism groups of Cayley graphs on symmetric groups with generating transposition. Journal of Combinatorial Theory, Series B96(2006) 67-72.
- [39] Samuel Fiorini, Determining the automorphism group of linear ordering polytope. Discrete applied Mathematics 112 (2001) 121-128.
- [40] Joseph.A.Gallian. Contemporary Abstract Algebra. 4th edition. 1998.
- [41] Mariusz Grech, Andrzej Kisielewicz. Diredct product of automorphism groups of colored graphs. Discrete Mathematics 283 (2004) 81-86.
- [42] Gena Hahn and Sabidussi. Graph symmetry : Algebraic Methods and Applications. Mathematical and phisical sciences C. Vol 497.
- [43] M.J.Granell, T.S.Griggs, V.P.Korzshik, J.Siran. On the minimal nonzero distance between triangular embeddings of a complete graph. Discrete Mathematics 269 (2003) 149-160.
- [44] A.Hajnal and vera T.Sos. Combinatorics. Colloquia Mathematica societatis Janos Bolyol, 18.1978

- [45] Gena Hahn and Gert Sabidussi. Graph symmetry: Algebraic Methods and applications. Serie C: Mathematical and physical sciences. vol 497.
- [46] C.T.Hoàng, Mekkia Kouider. On the  $b$ -dominating coloring of graphs. Discrete Applied Mathematics 152 (2005) 176-186.
- [47] Wilfried Imrich, Sandi Klavzar, Product graphs, Structure and recognition. 2000. A wiley-Interscience Publication.
- [48] Robert W.Irving and David F.Manlove, The  $b$ -chromatic number of a graph. Discrete Applied Mathematics 91 (1999) 127-141.
- [49] Gerzson Kéri, On small covering codes in arbitrary mixed Hamming spaces. Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica, accepted for publication.
- [50] Gerzson Kéri and Patric R.J.Ostergaardy, On the Covering Radius of Small Codes, Studia Scientiarum Mathematicarum Hungarica 40(2003)243-256.
- [51] Gerzson Kéri and Patric R.J.Ostergaardy, Further Results on the Covering Radius of Small Codes. Discrete Mathematics, 307(2007)69-77.
- [52] Andrei Kotlov. Minors and Strong Products. Europ. J.Combinatorics(2001)22,511-512.
- [53] Mekkia Kouider, Maryvonne Mahèò. Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a graph. Discrete Mathematics 256 (2002) 267-277.
- [54] M.Kouider and M.Zaker. Bounds for the  $b$ -chromatic number of some families of graphs. ar Xiv:math.Co/0506167 v1 9 Jun 2005.
- [55] J.Kratochvil, Z.Tuza and M.voigt. On the  $b$ -chromatic number of graphs. Lecture notes in Computer Science, Springer Berlin 2573, 310-320, (2002).
- [56] J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare, Another characterization of hypercubes. Discrete Math, 39 (1982), 161-166.
- [57] J.M.Laborde, Un Développement Algébrique de L'Algorithme d'exclusion et quelques problèmes géométriques en algèbre de boole. THESE pour obtenir le grade de DOCTEUR en SCIENCES Mathématiques, Grenoble, 1977.
- [58] J.M.Laborde,R.M.Madani, Generalized hypercubes and  $(0,2)$ -graphs. Discrete Mathematics 165/166 (1997) 447-459.
- [59] Benoit Larose, Claudia Malvenuto, Stable sets of maximal size in Kneser-type graphs, European Journal of Combinatorics. (2003) 1-17.

- [60] Renu Laskar. A Characterization of Cubic Lattice Graphs. *Journal of Combinatorial Theory* 3, 386-401 (1967). Communicated by R.C.Bose.
- [61] L.Lovasz and VERA T.SOS Algebraic methods in Graph Theory. *Colloquia Mathematica societatis Janos Bolyol*, 25. 1981.
- [62] Rafai Mourad MADANI. Généralisation d'hypercubes et de  $(0,2)$ -graphes. 1994. Thèse présentée pour obtenir le titre de docteur en Informatique, Spécialité Recherche Opérationnelle. De l'université Joseph Fourier-Grenoble 1.
- [63] H.Maehara, An Inequality on the Size of a Set in a Cartesian Product, *Europ J.Combinatorics* (2002)23, 1055-1059
- [64] M.Mollard, Les invariants du  $n$ -cube, Thèse troisième cycle, Université Joseph Fourier. Grenoble 1981.
- [65] H.M.Mulder,  $(0,\lambda)$ -graphs and  $n$  cubes, *Discrete Mathematics*, 28(1979) 179-188.
- [66] P.R.J.Ostergardy, Construction methods for mixed covering codes, *Analysis, Algebra, and Computers in Mathematical Research: Proc. 21st Nordic Congress of Mathematicians* (M. Gyllenberg and L. E. Persson, eds.), Marcel Dekker, New York (1994) pp. 387-407.
- [67] R.J.Ostergardy and H.O.Hamalainen, A new table of binary/ternary mixed covering codes, *Des. Codes Cryptogr.* 11 (1997), 151-178.
- [68] Cheryl E.Praeger, Finite Quasiprimitive Graphs, Department of Mathematics. University of Western Australia. Nedlands WA 6907. Australia.
- [69] Wojciech Peisert, Direct product and uniqueness of automorphism groups. *Discrete Mathematics* 207(1999) 189-197.
- [70] Alain POLI, Liorenç HUGUET, Codes Correcteurs, Théorie et applications. MASSON 1989.
- [71] Primoz Potocnik, On 2-arc-transitive Cayley graphs of Abelian groups. *Discrete Mathematics* 244(2002) 417-421.
- [72] Moshe Schwartz and Tuvi Etzion, Codes and Anticodes in the Grassman Graph. *Journal of Combinatorial Theory, Series A* 97(2002), 27-42.
- [73] Norbert Seifter and Vladimir I.Trofimov, Automorphism groups of covering graphs. *Journal of combinatorial theory. Series B*71, 67-72(1997). Article N: TB971763.
- [74] Zhongming Tanga, Zhe-xian Wanb, Symplectic graphs and their automorphisms. *European Journal of Combinatorics* 27 (2006) 3850.

- [75] V.D.Tonchev, Error correcting codes from graphs, *Discrete Mathematics* (2002) 549-557.
- [76] Mario Valencia-Pabon, J. Vera. Independence and coloring properties of direct product of some vertex-transitive graphs. To appear in *discrete mathematics* 2006.
- [77] Ming Wang and Qiao Li, Conditional edge connectivity properties, reliability comparisons and transitivity of graphs. *Discrete Mathematics* 258 (2002) 205214.
- [78] Mark E.Watkins, Some conditions for 1-transitivity, *Discrete Mathematics* 109 (1992) 289-296.
- [79] Robin j.Wilson, *Introduction to graph theory*. 4th edition. 1996.
- [80] Xingxing Yu, On several symmetry conditions for graphs. *Discrete Mathematics* 102 (1992) 51-59.
- [81] Sanming Zhou, Constructing a class of symmetric graphs. *Eurp.J.Combinatorics* (2002) 23, 741-760.

# ANNEXE 1



## SOME BOUNDS FOR THE $b$ -CHROMATIC NUMBER OF A GENERALIZED HAMMING GRAPHS

F. AFFIF CHAUCHE and A. BERRACHEDI

Faculty of Mathematics  
USTHB, BP 32 El-Alia  
Bab-Ezzouar 16111, Algiers, Algeria  
e-mail: f\_affif@yahoo.fr  
abdelhafid\_berrachedi@yahoo.fr

### Abstract

Let  $G_\lambda$  be the class of the amply-regular graphs of parameters  $(n, k, \lambda, 2)$ , where  $n$  is the order,  $k$  is the degree,  $\lambda$  is the number of common neighbors of adjacent vertices and those at distance 2 have *two* common neighbors.  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  is the class of the quasi-amply-regular graphs where a pair of adjacent vertices has  $\lambda_1$  or  $\lambda_2$  common neighbors; such a graph is defined by parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, 2)$ . The  $b$ -chromatic number of a graph  $G$  is defined as the maximum number  $k$  of colors that can be used to color the vertices of  $G$ , such that we obtain a proper coloring and each color  $i$ , with  $1 \leq i \leq k$ , has at least *one* representant  $u_i$  adjacent to a vertex of every color  $j$ ,  $1 \leq i \neq j \leq k$ . We give in this paper some general properties of this parameter, and we elaborate some bounds of the  $b$ -chromatic number of the Hamming and generalized Hamming graphs.

---

2000 Mathematics Subject Classification: **Kindly provide.**

Keywords and phrases:  $b$ -chromatic number, Hamming graph, generalized Hamming graph, amply-regularity, quasi-amply-regularity.

Received July 23, 2006

### 1. Introduction

We consider undirected, finite graphs without loops or multiple edges. Let  $G$  be a connected graph. We denote it by  $(V, E)$ , where  $V$  is the vertex set and  $E$  is the edges set. An edge between  $u$  and  $v$  is denoted  $uv$ .  $d_G(u)$  is the degree of a vertex  $u$ ,  $\Delta(G)$  is the maximum degree and  $d(G)$  is the degree of the graph  $G$  in the case of a regular graph.

We denote by  $N(u)$  the open neighborhood of the vertex  $u$  in  $G$  and by  $N_i(u)$  the set of vertices at distance  $i$  from  $u$  in a level decomposition of  $G$  from a vertex  $u$ .  $N(u, v)$  is the set of common neighbors of  $u$  and  $v$ . The distance  $d(u, v)$  is the length of the shortest induced  $(u, v)$ -paths linking the vertices  $u$  and  $v$  in  $G$ .

The Cartesian product of *two* graphs  $G$  and  $G'$  is the graph  $G \square G'$ , where  $V(G \square G') = V(G) \times V(G')$  and  $(u, u')$  is adjacent to  $(v, v')$  if and only if either  $u = v$  and  $u'v' \in E(G')$  or  $u' = v'$  and  $uv \in E(G)$ . We denote by  $K_n$  a complete graph on  $n$  vertices. A Cartesian product of  $d$  copies of  $K_n$  is the Hamming graph  $H(d, n)$ .

$H(d, m, n)$  is the Cartesian product of  $H(d, m)$  and  $H(d, n)$ , and  $H(d, m, d', n)$  is the Cartesian product of  $H(d, m)$  and  $H(d', n)$ .

An amply-regular graph with parameters  $(n, k, \lambda, \mu)$  is a  $k$ -regular graph on  $n$  vertices, where any *two* vertices have  $\lambda$  common neighbors if they are adjacent and  $\mu$  common neighbors if they are at distance 2. We indicate by  $G_\lambda$  the class of the amply-regular graphs with parameters  $(n, k, \lambda, 2)$ . A  $k$ -regular graph  $G$  of order  $n$  is said to be *quasi-amply-regular* of parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$  if any pair of vertices have  $\lambda_1$  or  $\lambda_2$  common neighbours if they are adjacent and  $\mu_1$  or  $\mu_2$  common neighbours if they are at distance 2. We consider in this work the quasi-amply-regular graphs such that  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  and we suppose that  $\lambda_1 < \lambda_2$ ; then the parameters of these graphs are  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ .  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  correspond to the case of  $\mu = 2$ .

Characterizing the Hamming graphs is a very old question. In the following, we exploit some known results to provide a useful new characterization of these graphs. Let give in first the definition of the distance regularity.

A connected graph  $G$  is called *distance regular graph* if it is regular of degree  $k$  and there are integers  $b_i, i \geq 0$  and  $c_i, i \geq 1$  such that for any two vertices  $u$  and  $v$ , where  $d(u, v) = i$ , there are precisely  $c_i$  neighbors of  $v$  in  $N_{i-1}(u)$ ,  $b_i$  neighbors of  $v$  in  $N_{i+1}(u)$  and then  $a_i = k - b_i - c_i$  neighbors of  $v$  in  $N_i(u)$ .

The sequence  $L(G) = \{b_0, b_1, \dots, b_{d-1}; c_1, c_2, \dots, c_d\}$ , where  $d$  is the diameter, is called the *intersection array* of  $G$ .  $b_i$  and  $c_i$  are the intersection numbers. It is clear that  $b_0 = k$ .

**Theorem 1** [1]. *Let  $G$  be a graph of  $G_1$  of degree  $2d$ . The two following assertions are equivalent:*

- (1)  $|V(G)| = 3^d$ ,
- (2)  $G$  is the graph  $K_3^d$ .

**Proposition 1.** *Let  $G$  be a distance regular graph with intersection array  $L(G) = \{2d, 2(d-1), \dots, 2; 1, 2, \dots, d\}$ . Then  $G$  is the Hamming graph  $H_d^3$ .*

As the proof of this proposition is easy, we give it here.

**Proof.** The values of  $b_i$  and  $c_i$  are given in the intersection array. Using the relation  $|N_i(v)| \cdot c_i = |N_{i-1}(v)| \cdot b_{i-1}$ , starting by  $|N_1(v)| = 1$  and  $|N_{i-1}(v)| = 2d$ , we calculate the numbers of vertices in every level  $N_i(v)$  and then the numbers of vertices of  $G$ . By induction, we obtain  $|N_i(v)| = 2^i \binom{d}{i}$ , and then  $n = 3^d$ .

As every distance regular graph is also an amply-regular graph; then  $G$  is an amply-regular graph of parameters  $(3^d, 2d, 1, 2)$ . Under the last

theorem,  $G$  is the Hamming graph  $H(d, 3)$ .

**Proposition 2.** *Let  $G$  be a distance regular graph with intersection array  $L(G) = \{d(\lambda + 1), (d - 1)(\lambda + 1), \dots, (\lambda + 1); 1, 2, \dots, d\}$ ,  $N(u) \cap N(v)$  contains no edge if  $d(u, v) = 2$  and the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free for any two vertices  $u$  and  $v$ . Then  $G$  is the Hamming graph  $H(d, \lambda + 2)$ .*

**Proof.** Using the relation  $|N_i(v)| \cdot c_i = |N_{i-1}(v)| \cdot b_{i-1}$ , we get the numbers of vertices in every level  $N_i(v)$  and then the number of vertices of  $G$ . By induction, we obtain  $|N_i(v)| = (\lambda + 1)^i \binom{d}{i}$ , and then  $n = (\lambda + 1)^d$ . Thus  $G$  is the Hamming graph  $H(d, \lambda + 2)$ .

The ordinary stable of a graph  $G$  is a subset  $S$  of  $V(G)$  such that all the vertices are no adjacent. The maximum order of  $S$  is called the *stability number*  $\alpha(G)$ . The chromatic number  $\chi(G)$  of a graph  $G$  is the minimum number  $k$  such that  $G$  has a  $k$ -coloring. Moreover in 1999, Irving and Manlove [3] defined the  $b$ -chromatic number of a graph  $G$  as being the maximum number  $k$  of colors that can be used to color the vertices of  $G$ , such that we obtain a proper coloring and each color  $i$  has at least *one* representant  $x_i$  adjacent to a vertex of every color  $j, 1 \leq j \neq i \leq k$ .  $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$  is a  $k$ -dominating system. This parameter can be used to represent some networks communication.

Kouider and Mahéo [4] gave some lower and upper bounds for the  $b$ -chromatic number of the Cartesian product of *two* graphs; Effantin and Kheddouci [2] studied this parameter for the power graph of a path and a cycle. And here, among the graphs with particular structure, we consider the well known Hamming graphs studied and characterized in several ways by many authors using both algebraic and metric aspect in a specific classes. In this paper, we study the  $b$ -chromatic number for the case of regular graphs, graphs with a stable dominating system and especially the Hamming and generalized Hamming ones. Whenever, in Section 2, we gives some general properties of the  $b$ -chromatic number.

We consider in Section 3, the  $b$ -chromatic number of amply-regular and quasi-amply-regular graphs. Later in Section 4, we exploit the previous results to get some bounds of the  $b$ -chromatic number in the case of Hamming graphs and generalized Hamming graphs.

## 2. Some Properties of the $b$ -chromatic Number of Amply and Quasi-amply-regular Graphs

We need to recall the following proposition regarding the complete graph.

**Proposition 3** [4]. *If  $S_n$ ,  $K_n$ ,  $P_n$  and  $C_n$  are respectively the stable graph, the complete graph, the path and the cycle on  $n$  vertices, then  $\varphi(S_n) = 1$ ;  $\varphi(K_n) = n$ ,  $\varphi(P_n) = \varphi(C_n) = 3 \forall n \geq 5$ .*

**Proposition 4.** *Let  $G$  be a graph. If  $K_n$  is a subgraph of  $G$ , then  $\varphi(G) \geq n$ .*

**Proof.** Suppose the opposite ( $\varphi(G) < n$ ). Then the vertices of the subgraph  $K_n$  are colored with less than  $n$  colors. Then necessarily at least *two* adjacent vertices in  $K_n$  have a same color, this constitute a contradiction with the definition of the proper coloring.

**Remark 1.** If  $H$  is an induced subgraph of  $G$ , then we have not necessarily  $\varphi(H) \leq \varphi(G)$ .

Whenever  $G$  is considered as the graph  $K_3 \square K_3$ , it admits a 3-coloration and it is easy to prove that neither a 4-coloration nor a 5-coloration is possible for this graph.

Thus  $\varphi(K_3 \square K_3) = 3$  and this coloration is given in the following.

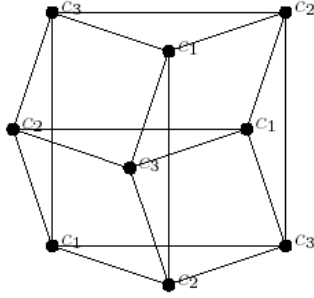


Figure 1.

And a subgraph  $H$  of  $G$  with  $\varphi(H) = 4$  is given in Figure 2.

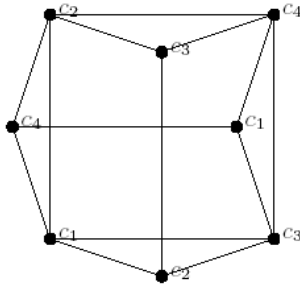


Figure 2.

It is also easy to prove that a 5-coloration cannot exist.

**Proposition 5** [4]. *For any graph  $G$  of size  $m$ , we have*

$$\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{2m + \frac{1}{4}}.$$

**Proposition 6.** *Let  $G$  be a regular graph of degree  $k$ . Then*

$$\varphi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2}.$$

**Proof.** If  $G$  is regular then  $m = \frac{nk}{2}$ ; by applying Proposition 5, we get the result.

**Proposition 7.** *Let  $G$  be a graph of order  $n$ , degree  $k$  and a stable dominating system  $S$ . Then  $\varphi(G) \leq n - k$  and  $\varphi(G) \leq \frac{n}{2}$ . If  $\varphi(G) = \frac{n}{2}$ ,*

then  $G$  is isomorphic to the complete bipartite graph from which a perfect matching is removed.

**Proof.** Let  $S$  be a stable dominating system of elements  $u_j$ ,  $1 \leq j \leq \varphi(G)$ . As  $S$  is stable then the  $k$  neighbors of any vertex  $u_j$  is not in  $S \cdot n = |S| + |V(G) \setminus S|$ . Then  $n \geq \varphi(G) + k$ .

As  $S$  is a stable set, then we correspond to  $u_1$ , at least  $\varphi(G) - 1$  neighbors in  $V(G) \setminus S$ . And we correspond to  $u_2$  at least *one* neighbor  $v_1$  of color 1 which is different from  $u_1$ . The other vertices of  $S$  may have there neighbors in  $N(u_1) \cup \{v_1\}$ . We obtain then at least  $2 \cdot \varphi(G)$  vertices.

The equality holds in the case of complete bipartite graph from which a perfect matching is removed.

**Proposition 8.** *Let  $G$  be an amply-regular graph of parameters  $(n, k, \lambda, \mu)$  and  $G$  does not contain  $K_4 - e$ , then  $k = d(\lambda + 1)$  and  $\lambda + 2 \leq \varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n \cdot d(\lambda + 1) + \frac{1}{4}}$ .*

**Proof.** An amply-regular graph is regular of degree  $k$ . Moreover, if  $G$  does not contain  $K_4 - e$ , then, for any vertex  $u$ ,  $N(u)$  is constitute of complete graphs of  $(\lambda + 1)$  vertices. Let  $d$  be the number of these complete graphs. Every vertex  $u$  is in  $d$  complete graphs of  $(\lambda + 2)$  vertices. Then  $\lambda + 2 = \varphi(K_{\lambda+2}) \leq \varphi(G)$ .

Since Proposition 5, we get  $\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{n \cdot d(\lambda + 1) + \frac{1}{4}}$ .

**Corollary 1.** *Let  $G$  be a graph of  $G_\lambda$ , does not contain  $K_4 - e$  and for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free. Then  $\varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(\lambda + 2)^d d(\lambda + 1) + \frac{1}{4}}$ .*

**Proof.** In this case, we have  $k = d(\lambda + 1)$  and  $n \leq (\lambda + 2)^d$ .

Let us recall that the Cartesian product of *two* classes of amply-

regular graphs of parameters  $(n, k, \lambda_1, 2)$  and  $(n', k', \lambda_2, 2)$  is a subclass of the class of quasi-amply-regular graphs of parameters  $(nn', k + k', \lambda_1, \lambda_2, 2)$ .

**Theorem 2** [1]. *Let  $G$  be a graph of  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$ -bicliques. Such that for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free. Then*

1.  $n \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ ; the equality holds if and only if  $G$  is the generalized Hamming graph  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \square H(d_2, \lambda_2 + 2)$ .

2.  $\text{diam}(G) \leq d_1 + d_2$  and  $\text{diam}(G) = d_1 + d_2$  if and only if  $G$  is isomorphic to  $G_1 \square G_2$  such that  $\text{diam}(G_1) = d_1$  and  $\text{diam}(G_2) = d_2$ .

**Proposition 9.** *If  $G$  is a graph of  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$ -bicliques with the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , then*

$$\lambda_2 + 2 \leq \varphi(G) \leq \frac{1}{2} + \sqrt{(\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2} (d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)) + \frac{1}{4}}.$$

**Proof.** We have  $\max(\lambda_1 + 2, \lambda_2 + 2) = \lambda_2 + 2$ .

Since the previous theorem  $n \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ , the result is obtained.

### 3. Some Other Bounds of $\varphi(G)$

An immediate and useful remark given by Kouider and Mahéo [4] is that for any graph  $G$ ,  $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq \Delta(G) + 1$ .

**Corollary 2.** *Let  $G$  be a regular graph of degree  $k$ . Then  $\chi(G) \leq \varphi(G) \leq k + 1$ .*

**Proof.** If  $G$  is a regular graph of degree  $k$ , then  $\Delta(G) = k$ . Thus  $\varphi(G) \leq k + 1$ .

**Remark 2.** Let  $G$  be a connected regular graph of order  $n$ , degree  $k$

and stability number  $\alpha(G)$ . And suppose that  $G$  admits a stable dominating system. Then  $\varphi(G) \leq \alpha(G)$ .

**Proof.** The stable dominating system is *one* of the different stables of the graph; it may be at most the *one* of maximum cardinality  $\alpha(G)$ .

**Remark 3.** The last upper bound of  $\varphi(G)$  given in Section 2 may be the exact value of this parameter in the case of complete graphs only. Whenever, in the case of regular graphs of degree  $k$ ,  $\frac{1 + \sqrt{4nk + 1}}{2} > k + 1$  for any no complete graph. Thus, this relation is improved by  $\varphi(G) \leq k + 1$ .

**Proposition 10.** *Let  $G$  be an amply-regular graph of parameters  $(n, k, \lambda, 2)$  and does not contain  $K_4 - e$ . Then  $\varphi(G) \leq d(\lambda + 1) + 1$  such that  $k = d(\lambda + 1)$  for a given  $d$ .*

**Proof.**  $G$  is regular of degree  $d(\lambda + 1)$  and  $\varphi(G) \leq k + 1$ .

**Proposition 11.** *If  $G$  is a graph of  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$ -bicliques, then  $\lambda_2 + 2 \leq \varphi(G) \leq d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ .*

**Proof.**  $d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$  is the degree of this graph.

**Proposition 12.** *Let  $G$  be a graph and  $H_u$  is a subgraph of  $G$  induced by the set of vertices  $\{u\} \cup N(u) \cup N_2(u)$ . Then  $\varphi(G) = \text{Max}\{\varphi(H_u)\}$ ,  $\forall u \in V(G)$ .*

**Proof.** Let  $k$  be an integer. Suppose the existence of a vertex  $u$  such that the subgraph induced by  $\{u\} \cup N(u) \cup N_2(u)$  cannot have a  $k$ -coloration. Then  $\varphi(G) < k$ .

Thus  $\varphi(G) = k$  if and only if for every vertex  $u$ , the subgraph induced by the vertices  $\{u\} \cup N(u) \cup N_2(u)$  can be colored with  $k$ -colors and there is at least a vertex  $u$  such that  $\varphi(H_u) = k$ .

**Corollary 3.** *Let  $G$  be a graph. If the graphs induced by  $H_u$  are*

isomorphisms  $\forall u \in V(G)$ , then  $\varphi(G) = \varphi(H_u)$  for any vertex  $u$ .

**Proof.** The corollary holds from the last proposition.

Effantin and Kheddouci [2] proved that  $\varphi(c_n) = 3, n \geq 5$ .

This graph is an example of amply-regular graph  $G$  of parameters  $(n, 2, 0, 1)$  with  $\varphi(G) = 3$ . The following proposition gives the value of this parameter for any amply-regular graph of parameters  $(n, k, 0, 1)$ .

**Proposition 13.** *Let  $G$  be an amply-regular graph of parameters  $(n, k, 0, 1)$ . Then  $\varphi(G) = k + 1$ .*

**Proof.** We need to prove that  $\varphi(H_u) = k + 1, u \in V(G)$ . Let then give a coloration of the vertices  $\{u\} \cup N(u) \cup N_2(u)$  for a given vertex  $u$ .

Let give a color 1 for  $u$  and a colors 2, 3, ...,  $k + 1$  for its neighbors. For  $v \in N(u)$ ,  $v$  have  $k - 1$  neighbors in  $N_2(u)$ ; which may have different colors. This is true for every vertex  $v$ .

For  $w \in N_2(u)$ , it may have at most  $k - 1$  neighbours in  $N_2(u)$  which are necessarily no adjacent. Then it is always possible to arrange the coloration of the vertices of  $N(v)$  in such a way that no *two* adjacent vertices with a same color.

In this way every vertex is a dominating vertex for it is own color. Thus  $\varphi(G) = k + 1$ .

**Proposition 14** [4].

$$\varphi(G \square H) \geq \max(\varphi(G), \varphi(H)).$$

**Theorem 3** [4]. *Let  $G$  and  $H$  be two graphs such that  $G$  has a  $\varphi(G)$ -stable dominating system, and  $H$  has a  $\varphi(H)$ -stable dominating system. Then  $\varphi(G \square H) \geq (\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ ; and the graph  $G \square H$  has a  $(\varphi(G) + \varphi(H) - 1)$ -stable dominating system.*

**Remark 4** [4]. The inequality of the previous theorem is still true if  $S_1$  is not a stable set and  $2 \leq \varphi(G) < \varphi(H)$ .

**Proposition 15.** *Let  $G$  and  $H$  be two graphs such that  $G$  has a  $b(G)$ -stable dominating system and  $H$  admit a  $b(H)$ -stable dominating system. Then  $G \square H$  can be colored with  $b(G) \cdot b(H) - 1$  colors and the dominating set will be stable. Thus  $\varphi(G \square H) \geq b(G) \cdot b(H) - 1$ .*

**Proof.** Following the proof given by Kouider and Mahéo for the last theorem. We construct in the same way a coloration of the vertices of the graph  $G \square H$  with a stable dominating system of  $b(G) \cdot b(H) - 1$  vertices. We deduce then that  $\varphi(G \square H) \geq b(G) \cdot b(H) - 1$ .

**Remark 5.** The inequality of the previous proposition is still true if  $S_1$  is not a stable set and  $2 \leq b(G) < b(H)$ .

Given a graph of  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  of degree  $k$ . We look for the existence of a stable dominating system of  $k + 1$  vertices.

**Proposition 16.** *Let  $G$  and  $G'$  be two regular graphs of degree  $k$  and  $k'$  respectively. If each of these two graphs has a stable dominating system of  $k + 1$  and  $k' + 1$  vertices respectively, then  $G \square G'$  preserve this property.*

**Proof.**  $d(G) = k$ , then  $\varphi(G) = k + 1$  and  $d(G') = k'$ , then  $\varphi(G') = k' + 1$ .  $d(G \square G') = k + k'$  and  $\varphi(G \square G') \leq k + k' + 1$ . As this graph has a stable dominating system of  $k + 1 + k' + 1 - 1$  vertices.

Then  $\varphi(G \square G') = k + k' + 1$ ; this induce the equality.

**Corollary 4.** *If there is in  $G_{\lambda_1}$  a graph  $G$  of degree  $k$  and a stable dominating system of  $k + 1$  elements and  $G'$  of degree  $k'$  in  $G_{\lambda_2}$  with a stable dominating system of  $k' + 1$  elements, then there is in  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  a graph of degree  $k + k'$  with the same properties. Thus this property is closed in  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  under the Cartesian product.*

**Proof.** We have  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2} \subset G_{\lambda_1, \lambda_2}$ .

Since the previous proposition,  $d(G) = k$ ,  $\varphi(G) = k + 1$ ,  $d(G') = k'$  and

$\varphi(G') = k' + 1$ ;  $G \square G' \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$ ,  $d(G \square G') = k + k'$  and this graph has a stable dominating system of  $k + k' + 1$  vertices.

The Cartesian product is a closed operation in the class of a quasi-amply-regular graphs  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$ , then the result.

#### 4. Case of Hamming Graphs and Generalized Hamming Graphs

**Proposition 17** [4]. *Let  $K_n$  and  $K_p$  be two complete graphs of order  $n$  and  $p$  respectively. Then  $n \leq \varphi(K_n \square K_p) \leq p(p-1)$  if  $p \leq n < p(p-1)$  and  $\varphi(K_n \square K_p) = n$  if  $n \geq p(p-1)$ .*

In order to give a bound of the  $b$ -chromatic number of the Hamming graph, we develop the result of the previous proposition for the case  $n = p$ .

Let us give in first, the results for some particular cases.

For  $n = 1, 2$  or  $3$ ,  $\varphi(K_n \square K_n) = n$

$\varphi(K_4 \square K_4) \geq 5$  and  $\varphi(K_5 \square K_5) \geq 6$ . Giving a coloration of  $K_n \square K_n$  is equivalent to fill in the  $n^2$  cells of a square array with the elements of the set  $\{1, 2, \dots, \varphi(G)\}$  in such a way that the cells of the same row or a same column must be different and for each element  $i$ , there is at least *one* cell which has this value and such that each other element must appear at least one's in the row or column of the cell  $i$ .

3*	2*	1*	5
4*	3	2	1
5*	4	3	2
1	5	4	3

and

$3^*$	$2^*$	$1^*$	$6^*$	5
$4^*$	3	2	1	6
$5^*$	4	3	2	1
6	5	4	3	2
1	6	5	4	3

A dominating system of the graphs  $K_4 \square K_4$  and  $K_5 \square K_5$  is given respectively by the vertices of the sets  $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*\}$  and  $\{1^*, 2^*, 3^*, 4^*, 5^*, 6^*\}$ .

A  $b$ -coloration is also obtained for the case  $n = 6$  or  $n = 7$ ; thus  $\varphi(K_6 \square K_6) \geq 8$  and  $\varphi(K_7 \square K_7) \geq 9$ . These colorations are given in the following.

$1^*$	$2^*$	$3^*$	$4^*$	5	6
7	8	1	2	3	4
$5^*$	$6^*$	$7^*$	$8^*$	1	2
3	4	5	6	7	8
8	7	4	3	2	1
4	3	8	7	6	5

For  $n = 7$ , we have

$1^*$	2	3	4	5	6	7
$8^*$	9	1	2	3	$4^*$	$5^*$
6	7	8	$9^*$	1	$2^*$	3
4	5	$6^*$	$7^*$	8	$9^*$	1
2	$3^*$	4	5	6	7	8
9	1	2	3	4	5	6
7	8	9	1	2	3	4

**Proposition 18.** *Let  $K_n$  be the complete graph of  $n$  vertices. Then  $K_n \square K_n$  has a stable dominating system of  $n$  vertices. Moreover, for every  $n \geq 2$ , every vertex is in an appropriate stable dominating system.*

**Proof.** Let consider the graph  $K_n \square K_n$ . It constitutes  $2n$  complete graphs  $K_n$  ( $n$  horizontal and  $n$  vertical copies). We can simulate the problem to a Latin square of  $n$  symbols.

Among the different colorations, some induced a dominating system, which is stable. *One of the possibilities is*

If  $n$  is even, we color the cells of the first row by the colors 1 to  $n$  in this order and then for the first  $\frac{n}{2}$  rows, we translate the coloration with *two* cells for every row. For the second part of the rows, we reverse the firsts ones in the same order. If  $n$  is odd we color the cells of the first row by the colors 1 to  $n$  in this order and then we translate the coloration with *two* cells for every row. The vertices of the diagonal constitute a stable dominating system.

We need to change the labelling of the first element to get a new stable dominating system, and then every element is in a stable dominating system.

**Proposition 19.**  $\forall n > 1, d \geq 1$ , *the Hamming graph  $(H(2d, n))$  verify  $\varphi(H(2d, n)) \geq (dn - (d - 1))$ . This graph admit a  $(dn - (d - 1))$ -stable dominating system. And  $\varphi(H(2d + 1), n) \geq ((d + 1)n - d)$  for  $n > 1$ .*

**Proof.**  $\varphi(H(2, n)) = \varphi(K_n \square K_n) \geq n$ .

By induction on  $d$ .

$H(2, n)$  admit a  $n$ -stable dominating system (since last proposition).

Since Theorem 2,  $H(4, n) = H(2, n) \square H(2, n)$  admit a  $(\varphi(H(2, n)) + \varphi(H(2, n)) - 1)$ -stable dominating system.

Then it has a  $(2n - 1)$ -stable dominating system. The property is true for  $d = 2$ .

Let suppose that  $\varphi(H(2d, n)) \geq (dn - (d - 1))$  with a stable dominating system.

We have  $H(2(d + 1), n) = H(2d, n) \square H(2, n)$ .

Since Kouider and Mahéo [4]  $H(2(d + 1), n)$  have a  $(dn - (d - 1) + n - 1)$ -stable dominating system, then a  $((d + 1)n - d)$ -stable dominating system.

Let consider  $(H(2d + 1, n))$ .

$$H(2d + 1, n) = K_n \square H(2d, n).$$

$\varphi(K_n) = n$  and this graph has not a stable dominating system;  $H(2d, n)$  has a  $(dn - (d - 1))$ -stable dominating system and  $2 \leq n < (dn - (d - 1))$ .

Since the last result, we get  $\varphi(H(2d + 1), n) \geq \varphi(H(2d, n)) + \varphi(K_n) - 1$ .

$$\varphi(H(2d + 1), n) \geq (dn - (d - 1)) + n - 1.$$

Thus  $\varphi(H(2d + 1), n) \geq ((d + 1)n - d)$ .

**Corollary 5.** For  $n \geq m(m - 1)$ ,  $\varphi(H(d, m, n)) \geq n$ .

**Proof.** In this case, we have  $\varphi(K_n \square K_m) = n$ . And  $\varphi(H(d, m, n)) \geq \varphi(K_n \square K_m)$ .

**Proposition 20.** For  $d \geq 1$ , we have  $\varphi(H(2d, m, n)) \geq d(n + m) - 2d + 1$ .  $\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq d(n + m) - 2d + 1$  and if  $n > 2$ ,  $\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq d(n + m - 2) + n$ .

**Proof.**  $\varphi(H(2d, n)) \geq (dn - (d - 1))$  and  $\varphi(H(2d, m)) \geq (dm - (d - 1))$  and each one has a stable dominating system.

Then  $\varphi(H(2d, m, n)) \geq (dn - (d - 1)) + dm - (d - 1) - 1$ .

Thus  $\varphi(H(2d, m, n)) \geq (d(n + m) - 2d + 1)$ .

$H(2d, m, n)$  has a  $(dn - (d - 1))$ -stable dominating system and

$$H(2d + 1, m, n) = H(2d, m, n) \square H(1, m, n);$$

then

$$\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq \max(\varphi(H(2d, m, n)), \varphi(H(1, m, n))).$$

In other part, if  $m > 2$ , then  $\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq \varphi(H(2d, m, n)) + \varphi(H(1, m, n)) - 1$ .

Then

$$\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq \varphi(H(2d, m, n)) + \varphi(H(1, m, n)) - 1.$$

and

$$\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq d(n + m) - 2d + 1 + n - 1.$$

Thus  $\varphi(H(2d + 1, m, n)) \geq d(n + m - 2) + n$ .

**Proposition 21.** *Let consider  $n, m, d$  and  $d'$ , four integers. Then*

1.  $\varphi(H(2d, m, 2d', n)) \geq (dm + d'n - (d + d') + 1)$  and this graph has a stable dominating system of  $(dm + d'n - (d + d') + 1)$  vertices.

2.  $\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq (dm + (d' + 1)n - (d + d'))$  if  $((d' + 1)n - d') - 1 \leq (dm - (d - 1))$ .

3. If  $((d' + 1)n - d') > (dm - (d - 1))$ , then  $\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq ((d' + 1)n - d')$ .

**Proof.** 1.  $H(2d, m)$  have a stable dominating system of  $(dm - (d - 1))$  vertices and  $H(2d', n)$  have a stable dominating system of  $(d'n - (d' - 1))$  vertices. Then

$$\varphi(H(2d, m, 2d', n)) \geq \varphi(H(2d, m)) + \varphi(H(2d', n)) - 1.$$

Thus

$$\varphi(H(2d, m, 2d', n)) \geq (dm - (d - 1)) + (d'n - (d' - 1)) - 1.$$

So

$$\varphi(H(2d, m, 2d', n)) \geq (dm + d'n - (d + d') + 1).$$

2. If  $((d' + 1)n - d') - 1 \leq (dm - (d - 1))$ .

$H(2d, m)$  have a stable dominating system of  $(dm - (d - 1))$  vertices and  $\varphi(H(2d' + 1, m)) < \varphi(H(2d, n))$ . Then

$$\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq (dm - (d - 1)) + ((d' + 1)n - d') - 1.$$

Thus

$$\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq (dm + (d' + 1)n - (d + d')).$$

3. If  $((d' + 1)n - d') > (dm - (d - 1))$ .

$$\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq \max(\varphi(H(2d, m)), \varphi(H(2d' + 1, n))).$$

Then

$$\varphi(H(2d, m, 2d' + 1, n)) \geq ((d' + 1)n - d').$$

### References

- [1] F. Affif Chaouche and A. Berrachadi, Quasi-amply-regularity and generalized Hamming graphs, *Discrete Math.* (submitted).
- [2] Brice Effantin and Hamamache Kheddouci, The  $b$ -chromatic number of some power graphs, *Discrete Math. Theor. Comput. Sci.* 6 (2003), 45-54.
- [3] Robert W. Irving and David F. Manlove, The  $b$ -chromatic number of a graph *Discrete Appl. Math.* 91 (1999), 127-141.
- [4] Mekkia Kouider and Maryvonne Mahéo, Some bounds for the  $b$ -chromatic number of a graph, *Discrete Math.* 256 (2002), 267-277.
- [5] J. M. Laborde and S. P. Rao Hebbare, Another characterization of hypercubes, *Discrete Math.* 39 (1982), 161-166.



Kindly return the proof after correction to:

*The Publication Manager*  
*Pushpa Publishing House*  
*Vijaya Niwas*  
*198, Mumfordganj*  
*Allahabad-211002 (India)*

along with the print charges\*  
 by the fastest mail

**\*Invoice attached**

Proof read by: .....

Signature: .....

Date: .....

Tel: .....

Fax: .....

E-mail: .....

Number of additional reprints required

.....

Cost of a set of 25 copies of additional reprints  
 @ U. S. Dollars 15.00 per page.

(25 copies of reprints are provided to the corresponding  
 author ex-gratis)

## ANNEXE 2



Provided for non-commercial research and educational use only.  
Not for reproduction or distribution or commercial use.

This article was originally published in a journal published by Elsevier, and the attached copy is provided by Elsevier for the author's benefit and for the benefit of the author's institution, for non-commercial research and educational use including without limitation use in instruction at your institution, sending it to specific colleagues that you know, and providing a copy to your institution's administrator.

All other uses, reproduction and distribution, including without limitation commercial reprints, selling or licensing copies or access, or posting on open internet sites, your personal or institution's website or repository, are prohibited. For exceptions, permission may be sought for such use through Elsevier's permissions site at:

<http://www.elsevier.com/locate/permissionusematerial>

# Automorphisms group of generalized Hamming Graphs

F.AFFIF CHAOUCHE<sup>1</sup>

*Faculty of mathematics  
U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia,  
Bab-Ezzouar 16111, Algiers, Algeria*

A.BERRACHEDI<sup>2</sup>

*Faculty of mathematics  
U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia,  
Bab-Ezzouar 16111, Algiers, Algeria*

---

## Abstract

A generalized Hamming graph is a graph obtained by a cartesian product of different Hamming graphs. We provide in this paper, under some conditions, a characterization of these graphs using the automorphism group. Then, to study the vertex transitivity of some quasi-amply regular graphs, we give in first the properties of the automorphism group of a prime amply-regular graphs; then we exploit, particularly the main properties of the cartesian product, the prime factor decomposition and the notion of relatively prime graphs. Some graphs of abelian transitive Automorphism group are finally considered.

*Keywords:* Automorphism group, Hamming and Generalized Hamming graph, Amply and Quasi-amply-regularity.

---

## 1 Introduction

All graphs considered are connected, undirected finite graphs without loops or multiple edges. In a graph  $G$ , the symbols  $V(G)$ ,  $E(G)$ ,  $uv$ ,  $d(u, v)$  and  $diam(G)$  will denote, respectively the vertices set, the edges set, an edge between  $u$  and  $v$ , the length of the shortest induced  $\{u, v\}$ -path and the diameter of  $G$ .

A subgraph  $G'$  of a graph  $G$  is called a spanning subgraph if  $V(G') = V(G)$ . For a vertex  $u$ ,  $N(u)$  is the set of neighbours of  $u$ .  $I(u, v)$  is the set of vertices located on shortest  $(u, v)$ -paths.  $N(u, v)$  is the set of common neighbours of  $u$  and  $v$ . The cartesian product of two graphs  $G$  and  $G'$  is the graph  $G \square G'$  where  $V(G \square G') = V(G) \times V(G')$  and  $(u, u')$  is adjacent to  $(v, v')$  if and only if either  $u = v$  and  $u'v' \in E(G')$  or  $u' = v'$  and  $uv \in E(G)$ .

For a given  $n$ ,  $K_n$  denote the complete graph and  $H(d, n)$ , the Hamming graph obtained by cartesian product of  $d$  complete graphs  $K_n$ .  $Q_d$  is  $H(d, 2)$ . The generalized Hamming graph  $H_{a_1, a_2, \dots, a_d}$  is the graph  $K_{a_1} \square K_{a_2} \square \dots \square K_{a_d}$  and  $H(d, m; d', n) = H(d, m) \square H(d', n)$ .

A  $(0, 2)$ -graph is a Mulder graph. An amply-regular graph is denoted by the parameters  $(n, k, \lambda, \mu)$ . We will deal with the class of the amply-regular graphs with parameters  $(n, k, \lambda, 2)$ , denoted  $G_\lambda$ . We consider a quasi-amply-regular with parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2)$ , we also consider here  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$ , which correspond to the case  $\lambda_1 < \lambda_2$  and  $\mu_1 = \mu_2 = 2$ .

An automorphism of a graph  $G$  is a permutation  $g$  in  $V(G)$  with the property that  $\forall u, v \in V(G)$ ,  $u$  is adjacent to  $v$  if and only if  $g(u)$  is adjacent to  $g(v)$ . The set of all the automorphisms of a graph  $G$  is the group  $Aut(G)$ . The direct product of two groups  $H$  and  $H'$  is  $H \times H'$  such that  $(g_1, g_2)(g'_1, g'_2) = (g_1g'_1, g_2g'_2)$ . If  $H$  is acting on  $H'$  in such a way that the group structure of  $H'$  is preserved; we define the semi-direct product of  $H'$  and  $H$  by  $H' \rtimes H = \{(g', g) / g' \in H', g \in H\}$  and  $(g'_1, g_1)(g'_2, g_2) = (g'_1g_1^{-1}(g_2), g_1g_2)$ .

Suppose we have a group  $H$  acting on a set  $X$ . Then consider the cartesian product  $Y = X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  where each  $X_i = X$ . If  $H'$  is a group of permutations acting on the labels  $\{1, 2, \dots, n\}$ , the semi direct product of  $H^n$  by  $H'$  is the wreath product  $H \wr H'$ .

$G$  is said to be vertex-transitive, edge-transitive or  $s$  – arc-transitive if  $Aut(G)$  act transitively respectively in  $V(G)$ ,  $E(G)$  or  $s$  – arcs of  $G$ .  $S_n$  is

<sup>1</sup> Email: f\_affif@yahoo.fr

<sup>2</sup> Email: abdelhafid.berrachedi@yahoo.fr

the symmetric group of  $n$  vertices. We call a graph prime with respect to a cartesian product if it can not be represented as the product of *two* nontrivial graphs. *Two* graphs are said to be relatively prime if the unique common element in the prime factor decomposition of the *two* graphs is  $K_1$ . For a undefined notions the reader can refer to Wilfried Imrich, Sandi Klazar [4].

## 2 Automorphisms groups of generalized Hamming graphs

It's proved by Peter J. Cameron [3] that any graph and its complement have the same automorphism group and  $\text{Aut}(K_n) = S_n$ .

**Proposition 2.1** (A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier[2]) *The automorphism group of the Hamming graph  $H(d, n)$  is given by  $(S_n \times S_n \times \dots \times S_n) \times S_d = S_n \wr S_d$ ; which not only acts transitively in each co-ordinate, but also permutes the co-ordinates transitively. The Hamming distance between the vertices is preserved by  $S_n \wr S_d$ .*

**Corollary 2.2**  *$G$  is a connected graph of degree  $d(n-1)$  and  $\text{Aut}(G) = (S_n \times S_n \times \dots \times S_n) \times S_d = S_n \wr S_d$  if and only if  $G$  is isomorphic to the Hamming graph  $H(d, n)$ .*

**Proposition 2.3** *Let be  $G$  a graph obtained by cartesian product of  $d_1$  copies of a graph  $G_1$ .  $\text{Aut}(G) = \text{Sym}(V(G_1)) \wr S_{d_1}$  if and only if  $G$  is the Hamming graph  $H(d_1, n_1)$  or the disconnected graph constitute of  $n_1$  copies of  $K_{d_1}$  or the complement graph of any of the two.*

**Corollary 2.4** (Wilfried Imrich, Sandi Klazar [4]) *Let  $G$  be the cartesian product  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_k$  of connected relatively prime graphs, then every automorphism  $\varphi$  of  $G$  preserves the layer structure of  $G$  with respect to the given decomposition and can be written in the form  $\varphi(v_1, v_2, \dots, v_k) = (\psi_1 v_1, \psi_2 v_2, \dots, \psi_k v_k)$  where the  $\psi_i$  are automorphisms of  $G_i$ .*

**Proposition 2.5** *Let be  $G$  the cartesian product of the two complete graphs of order  $m$  and  $n$  respectively. If  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  then  $\exists \varphi_1 \in \text{Aut}(K_m)$  and  $\exists \varphi_2 \in \text{Aut}(K_n)$  such that  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u), \varphi_2(v))$ ; and then  $\varphi(K_m \square K_n) = S_m \times S_n$ .*

**Proposition 2.6** *Let be  $G$  the cartesian product of the two Hamming graphs  $H(d, m)$  and  $H(d', n)$  with  $m \neq n$ . Then let consider  $u \in H(d, m)$  and  $v \in H(d', n)$ ; if  $\varphi \in \text{Aut}(G)$  then  $\varphi(u, v) = (\varphi_1(u), \varphi_2(v))$  for some  $\varphi_1 \in \text{Aut}(H(d, m))$  and  $\varphi_2 \in \text{Aut}(H(d', n))$  and  $\text{Aut}(G) = (S_m \wr S_d) \times (S_n \wr S_{d'})$ .*

**Proposition 2.7** *Let  $G$  be the generalized Hamming graph  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  such that  $n_i \neq n_j$  for  $i \neq j$  and  $\text{Aut}(G)$  its automorphisms group.*

Then  $\text{Aut}(G)$  is generated by the permutations of  $S_{n_i} \wr S_{d_i}$ ,  $\forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$ .

**Corollary 2.8** Let be  $G \square G'$  a connected graph, such that  $G$  and  $G'$  are two relatively prime graphs.  $G$  and  $G'$  are a cartesian product of  $d_1$  copies of a graph  $G_1$  and  $d_2$  copies of a graph  $G_2$  respectively.  $\text{Aut}(G \square G') = (\text{Sym}(V(G_1)) \wr S_{d_1}) \times (\text{Sym}(V(G_2)) \wr S_{d_2})$  if and only if  $G \square G'$  is the generalized Hamming graph  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2)$ .

**Proposition 2.9** The automorphism group of the generalized Hamming graph  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$  is given by  $(S_{n_1} \wr S_{d_1}) \square (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \square \dots \square (S_{n_k} \wr S_{d_k})$ .

Combining all the previous results, we get the following theorem which give a characterization of the generalized Hamming graphs.

**Theorem 2.10** Let  $G$  be a connected graph with  $n_1^{d_1} \cdot n_2^{d_2} \dots n_k^{d_k}$  vertices. Then  $\text{Aut}(G) = (S_{n_1} \wr S_{d_1}) \square (S_{n_2} \wr S_{d_2}) \square (S_{n_k} \wr S_{d_k})$  of degree  $(n_1 - 1)d_1 + (n_2 - 1)d_2 + \dots + (n_k - 1)d_k$  if and only if  $G$  is the generalized Hamming graph  $H(d_1, n_1) \square H(d_2, n_2) \square \dots \square H(d_k, n_k)$ .

### 3 Some graphs with transitive abelian automorphism group

**Theorem 3.1** (Wilfried Imrich, Sandi Klazar [4]) Let  $G$  be a non trivial graph with transitive abelian automorphism group. Then  $\text{Aut}(G)$  is an elementary abelian two-group, that is every element of  $\text{Aut}(G)$  has order two. Moreover if  $G$  has more then two vertices, it is connected and contains a proper spanning hypercube.

**Corollary 3.2** The unique Hamming graph which have a transitive abelian automorphism group is the graph of hypercubes.

**Lemma 3.3** A Hamming graph  $H(d, n)$  contain a proper spanning hypercube if and only if  $n = 2^j$  for some integer  $j$ .

**Corollary 3.4** Let consider  $G$  a graph. If it contain a proper spanning generalized Hamming graph  $H(d_1, a_1) \square H(d_2, a_2) \square \dots \square H(d_k, a_k)$ , such that  $\exists i \in \{1, 2, \dots, k\}$  for which  $a_i$  is not a power of 2; then  $\text{Aut}(G)$  can not be a transitive abelian group.

Let recall that the class of  $(0, 2)$ -graphs define by Mulder contain the amply regular graphs  $G_0$ ,  $G_2$  and any cartesian product of two graphs of  $G_0$  and  $G_2$  respectively.

**Theorem 3.5** (J.M.Laborde,R.M.Madani [5]) *Let  $d \geq 4$ . Then  $Q_d(S)$  is a  $(0, 2)$ –graph if and only if  $S \cap \{2, 3, \dots, d - 2\} = \emptyset$  and  $S \not\supseteq \{1, d - 1\}$ .*

**Proposition 3.6** *Let  $Q_d$  be the hypercube graph of degree  $d$ , all the graphs  $Q_d(S)$  such that  $S \cap \{2, 3, \dots, d - 2\} = \emptyset$  and  $S \not\supseteq \{1, d - 1\}$  are in  $G_0$  or  $G_2$ .*

**Proposition 3.7** *Let  $G$  be a graph in  $G_0$ .  $G$  has a spanning hypercube if and only if  $G$  is the graph of hypercube  $Q_d$  or the generalized hypercube  $Q_d(1, d)$ .*

**Proposition 3.8** *Let consider  $G$  a graph in  $G_0$ . Then  $Aut(G)$  is transitive abelian if and only if  $G$  is the graph of hypercubes  $Q_d$  or  $Q_d(1, d)$ .*

**Corollary 3.9** *Let consider  $G$  be a graph of  $G_2$  of degree  $d$ , then  $Aut(G)$  is transitive abelian if and only if  $G$  is the Hamming-graph  $H(4, d)$ .*

### 4 Transitivity of Amply-regular graphs

It's proved that for every connected vertex-transitive graph, we have  $\alpha(G) = \delta(G)$ , where  $\lambda(G)$  and  $\alpha(G)$  denote the edge connectivity and minimum vertex degree of  $G$ . Thus the following graph which is quasi-amply-regular of parameters  $(12, 3, 0, 1, 1, 2)$  is not vertex-transitive.

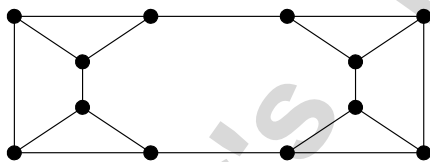


Fig. 1.

Lets recall the following result given by P.Potocnik

**Lemma 4.1** (P.Potocnik [6]) *Let  $X$  be a connected 2-arc-transitive graph which contains a triangle. Then  $X$  is isomorphic to  $K_n$ .*

Then the following proposition :

**Proposition 4.2** *Let consider  $\lambda > 0$  and let be  $G$  an amply regular graph of parameters  $(n, k, \lambda, \mu)$ , then  $G$  is connected 2-arc-transitive if and only if it is isomorphic to  $K_{\lambda+2}$ .*

**Corollary 4.3** *If  $G$  is a quasi-amply regular graph of parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$ , with  $\lambda_1$  or  $\lambda_2 \neq 0$  then  $G$  is not 2-arc-transitive.*

**Proposition 4.4** (Wilfried Imrich, Sandi Klazar [4]) *A cartesian product of connected graphs has transitive automorphism group if and only if every factor has transitive automorphism group.*

A characterization of the generalized Hamming graph  $H(d_1, \lambda_1+2) \square H(d_2, \lambda_2+2)$  in  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$  is already given by F.Affif Chaouche, A.Berrachedi [1]. We get then the following corollary.

**Corollary 4.5** *Let  $G$  be a graph in  $G_{\lambda_1} \square G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$ -biclques. Such that for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free. Then  $|V(G)| = (\lambda_1 + 2)^{d_1} \cdot (\lambda_2 + 2)^{d_2}$  if and only if  $\text{Aut}(G) = (S_{\lambda_1} \wr S_{d_1}) \times (S_{\lambda_2} \wr S_{d_2})$ .*

To recognize the amply-regularity in  $G$ , we need to do it for their prime factors.

**Lemma 4.6** *Let consider the prime factor decomposition  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  of a graph  $G$ . Then  $G$  is vertex transitive if every prime factor is vertex transitive.*

**Corollary 4.7** *Let  $G$  be a graph of  $G_{\lambda}$ , and  $G'$  be a graph of  $G_{\lambda'}$ ,  $G \square G' \in G_{\lambda_1, \lambda_2}$  is vertex transitive if and only if  $G$  and  $G'$  are vertex-transitive in  $G_{\lambda_1}$  and in  $G_{\lambda_2}$  respectively.*

**Lemma 4.8** *Let be  $G = G_1 \square G_2$  a graph. Then  $G \in G_{\lambda}$  if and only if  $G_1 \in G_{\lambda}$  and  $G_2 \in G_{\lambda}$ .*

**Proposition 4.9** *Let  $G_1 \square G_2 \square \dots \square G_p$  be a prime factor decomposition of a graph  $G$ . Then  $G$  is a quasi-amply regular graph of  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  if and only if  $G_i \in G_{\lambda_1}$  or  $G_i \in G_{\lambda_2} \forall i \in \{1, 2, \dots, p\}$ .*

**Proposition 4.10** *Let consider  $G$  a graph of  $G_{\lambda}$ . Then  $\text{Aut}(G)$  is an elementary abelian two-group if and only if  $\lambda + 2$  is a power of 2,  $G$  does not contain  $K_4 - e$  and for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free.*

**Proposition 4.11** *Let  $G$  be an amply regular graph in  $G_{\lambda}$  with  $\lambda \neq 0$ . If  $G$  is 2-arc-transitive then it is isomorphic to  $K_{\lambda+2}$ .*

**Corollary 4.12** *Let  $\lambda \neq 0$ . The unique  $s$ -arc transitive in  $G_{\lambda}$  with  $s \geq 2$  is the complete graph  $K_{\lambda+2}$ .*

It is known that  $Q_d$  is symmetric, edge-transitive and vertex transitive. Regarding the Hamming graphs, we get :

**Corollary 4.13** *The Hamming graphs  $H(d, n)$  are not  $s$ -arc transitive for  $n \neq 2$  and  $d > 1$ .*

## References

- [1] F.Affif Chaouche, A.Berrachedi, Quasi-amply-regularity and Generalized Hamming Graphs. Submitted to *Discrete Mathematics*.
- [2] A.E Brouwer, A.M.Cohen, A.Neumaier, *Distance-Regular Graphs*. Springer-verlag, 1989.
- [3] Peter J. Cameron, *Topics in Algebraic Graph Theory* (ed LWBemeke, R.J.Wilson) Cambridge, 2005.
- [4] Wilfried Imrich, Sandi Klazar, *Product graphs, Structure and recognition*. 2000
- [5] J.M.Laborde, R.M.Madani, Generalized hypercubes and  $(0, 2)$ -graphs. *Discrete Mathematics* 165/166 (1997) 447-459.
- [6] P.Potocnik, On 2-arc transitive Cayley graphs of abelian groups. *Discrete Mathematics* 244 (2002) 417-421.
- [7] Ming Wang and Qiao Li, Conditional edge connectivity properties, reliability comparisons and transitivity of graphs. *Discete Mathematics* 258(2002) 205-214.

## ANNEXE 3





# Quasi-amply-regularity and Generalized Hamming Graphs

F.AFFIF CHAUCHE<sup>1</sup>

*Faculty of mathematics  
U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia,  
Bab-Ezzouar 16111, Algiers, Algeria*

A.BERRACHEDI<sup>2</sup>

*Faculty of mathematics  
U.S.T.H.B, B.P. 32 El Alia,  
Bab-Ezzouar 16111, Algiers, Algeria*

---

## Abstract

Let  $G_\lambda$  be the class of the amply-regular graphs with parameters  $(n, k, \lambda, 2)$  and  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  be the one of the quasi-amply-regular graphs with parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, 2)$ . We first give some particular properties of  $G_1$  with new proofs and a new characterization of the Hamming graphs  $H(d, 3)$ . Then under some conditions, we provides a characterization of the generalized Hamming graphs  $H(d_1, \lambda_1 + 2; d_2, \lambda_2 + 2)$  obtained by a cartesian product of  $H(d_1, \lambda_1 + 2)$  and  $H(d_2, \lambda_2 + 2)$  as a quasi-amply-regular graphs with parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, 2)$  of maximum order for a given degree.

*Keywords:* Amply-regularity, Quasi-amply-regularity, Generalized Hamming graph.

---

<sup>1</sup> Email: [f\\_affif@yahoo.fr](mailto:f_affif@yahoo.fr)

<sup>2</sup> Email: [abdelhafid.berrachedi@yahoo.fr](mailto:abdelhafid.berrachedi@yahoo.fr)

## 1 Introduction

The Hamming graphs have a lot of applications in reason of their particular structure. Mixed codes are a widely used codes. In keeping with the motivation of coding theory, in order to develop these codes, we look here at the properties of these graphs and we give a characterization of some particular generalized Hamming graphs.

J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare [3] showed that the hypercube  $H(d, 2)$  is characterized as the  $(0, 2)$ -graph with the maximum order for a given degree  $d$ . M.Mollard [4] showed that this graph is the  $(0, 2)$ -graph with maximum diameter. Hikoe Enomoto [2] proved that the Hamming graph  $H(d, \lambda + 2)$  is characterized as being an amply-regular graph with parameters  $(n, k, \lambda, 2)$  with maximum order under some conditions.

We will be considering the graphs  $H(d; m, n)$  (the cartesian product of  $H(d, m)$  and  $H(d, n)$ ) and  $H(d, m; d', n)$  (the cartesian product of  $H(d, m)$  and  $H(d', n)$ ).

Our basic terminology and notation follows that of C.Berge [1]. A  $(0, \lambda)$ -graph is a graph where any pair of vertices have 0 or  $\lambda$  common neighbours. An amply-regular graph with parameters  $(n, k, \lambda, \mu)$  is the graph with  $n$  vertices, valency  $k$ , any *two* adjacent vertices have precisely  $\lambda = \lambda(G)$  common neighbours and any pair of vertices at distance 2 have precisely  $\mu = \mu(G)$  common neighbours. The class  $G_\lambda$  correspond to the case of  $\mu = 2$ . A graph  $G$  is said to be quasi-amply-regular if any pair of adjacent vertices have  $\lambda_1$  or  $\lambda_2$  common neighbours and any pair of vertices at distance *two* have  $\mu_1$  or  $\mu_2$  common neighbours. We consider in this work the case  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$  and we suppose that  $\lambda_1 < \lambda_2$ .  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  correspond also to the case of  $\mu = 2$ .

## 2 Preliminaries

**Theorem 2.1** (*Hikoe Enomoto [2]*)

*Let  $(\Omega, \Delta)$  be a connected undirected graph without loops. (For  $x \in \Omega, \Delta(x)$  denotes the set of vertices adjacent to  $x$ ). Suppose*

- $|\Delta(x)| = k$  for every  $x \in \Omega$ ,
- $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = \lambda$  if  $y \in \Delta(x)$ ,
- $|\Delta(x) \cap \Delta(y)| = \mu$  if the distance  $d(x, y)$  of  $x$  and  $y$  is two.
- $\Delta(x) \cap \Delta(y)$  contains no edge if  $d(x, y) = 2$  and
- $(\Omega, \Delta)$  is a pentagon-free, i.e. there exist no five vertices  $x_i, 0 \leq i \leq 4$ , such that  $x_i$  and  $x_j$  are adjacent if and only if  $(i - j) \equiv \mp 1 \pmod{5}$ .

Then  $r = \frac{k}{\lambda+1}$  is an integer. If  $\mu \geq 2$ , then  $|D_i(x)| \leq \binom{r}{i} (\lambda + 1)^i$ , for every  $x \in \Omega$  and every  $i \geq 0$ , where  $D_i(x) = \{y \in \Omega / d(x, y) = i\}$ .

In particular, the diameter of  $(\Omega, \Delta)$  is at most  $r$ , and  $|\Omega| \leq (\lambda + 2)^r$ . Furthermore, if  $\mu \geq 2$  and  $|\Omega| = (\lambda + 2)^r$ , then  $(\Omega, \Delta)$  is isomorphic to  $L_r^{\lambda+2}$ .

The following proposition is proved independently of the one of Hikoe Enomoto given for the amply-regular graphs.

**Proposition 2.2** *Let  $G$  be a graph in  $G_\lambda$ . Then  $G$  is regular with degree  $k$ ; and if  $G$  does not contain  $K_4 - e$  then  $k \equiv 0 \pmod{\lambda + 1}$ .*

**Proposition 2.3** *Let  $G$  be a graph in  $G_\lambda$  of degree  $k$ , then for any pair of vertices  $u$  and  $v$  in  $G$ .*

- $|N(u) \cap I(u, v)| \geq d(u, v)$  and  $\text{diam}(G) \leq k$
- Moreover if  $G$  does not contain  $K_4 - e$ , and for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free, then  $\text{diam}(G) \leq \frac{k}{\lambda+1}$ .

**Remark 2.4** The theorem 2.1 is also true if the condition (5) is replaced by the condition: for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free.

**Proposition 2.5** *Let  $G$  be a graph in  $G_\lambda$  with degree  $k$ . For any vertex  $u$  of  $G$ , we have  $|N_2(u)| = \frac{k(k-\lambda-1)}{2}$ .  $|N_i(u)| \leq \frac{k-\lambda-1}{k-1} \binom{d}{i}$ . Moreover if  $G$  does not contain  $K_4 - e$  and for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free, then  $|N_i(u)| \leq (\lambda + 1)^i \binom{\frac{k}{\lambda+1}}{i}$  and  $|V(G)| \leq (\lambda + 2)^{\frac{k}{\lambda+1}}$ .*

### 3 Another characterization of $H(d, 3)$

We indicate by  $i - star$  a graph formed by  $i$  triangles of disjoint edges and having a common vertex, called the center of the  $i - star$ . Let be  $G$  a graph of  $G_1$  having a  $i - star E$ , the smallest induced sub-graph of  $G$  in  $G_1$  containing  $E$  is called a  $G$ -closing of  $E$ .

**Proposition 3.1** *Let  $G$  be a graph of  $G_1$ , the  $G$ -closing of a  $i - star E$  of  $G$ , is a graph  $K_3^i$ .*

**Theorem 3.2** *Let  $G$  be a graph of  $G_1$  of degree  $2d$ . The two following assertions are equivalent.*

- $|V(G)| = 3^d$ ,
- $G$  is the graph  $K_3^d$ .

## 4 The basic properties of a quasi-amply regular graph

**Proposition 4.1** *Let  $G$  be a quasi-amply-regular graph such that a pair of adjacent vertices have  $\lambda_1$  or  $\lambda_2$  common neighbours and any pair of vertices at distance two have  $\mu$  common neighbours, then  $G$  is regular. We denote this class by the parameters  $(n, k, \lambda_1, \lambda_2, \mu)$  where  $n$  is the order and  $k$  is the degree.*

**Proposition 4.2** *Let  $G$  be a graph in  $G_{\lambda_1, \lambda_2}$  of order  $n$  and degree  $k$ . Then for any pair of vertices  $u$  and  $v$  in  $G$ , we have:*

- $|N(u) \cap I(u, v)| \geq d(u, v)$  and  $\text{diam}(G) \leq k$ .
- Moreover if  $G$  does not contain  $K_4 - e$ , then  $k = d_1(\lambda_1 + 1) + d_2(\lambda_2 + 1)$ . If  $d_1 = d_2$  then  $k \equiv 0 \pmod{\lambda_1 + \lambda_2 + 2}$ .

## 5 Characterization of a generalized Hamming graphs

We indicate by  $(d_1, d_2)$  – *bicliques* a graph defined by  $d_1$  cliques of  $\lambda_1 + 2$  vertices and  $d_2$  cliques of  $\lambda_2 + 2$  vertices having a common vertex called the center.

A graph  $G$  is said to be locally a  $(d_1, d_2)$  – *bicliques* if for every vertex  $u$ ,  $\{u, N(u)\}$  induce a  $(d_1, d_2)$  – *bicliques* where  $u$  is the center.

**Proposition 5.1** *Let  $G$  be a graph of  $G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$  – *bicliques*. Then  $G$  is a cartesian product of two amply-regular-graphs which does not contain  $K_4 - e$ ,  $G_1$  of degree  $d_1(\lambda_1 + 1)$  and  $G_2$  of degree  $d_2(\lambda_2 + 1)$  in  $G_{\lambda_1}$  and  $G_{\lambda_2}$  respectively.*

**Theorem 5.2** *Let  $G$  be a graph of  $G_{\lambda_1} \oplus G_{\lambda_2}$ , locally  $(d_1, d_2)$  – *bicliques*. Such that for any pair of vertices  $u$  and  $v$ , the graph induced by  $I(u, v) \setminus \{v, N(v)\}$  is pentagon free. Then*

- $n \leq (\lambda_1 + 2)^{d_1} (\lambda_2 + 2)^{d_2}$ , the equality holds if and only if  $G$  is the generalized Hamming graph  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \oplus H(d_2, \lambda_2 + 2)$

- $\text{diam}(G) \leq d_1 + d_2$  and  $\text{diam}(G) = d_1 + d_2$  if and only if  $G$  is isomorphic to  $H(d_1, \lambda_1 + 2) \oplus H(d_2, \lambda_2 + 2)$ .

## References

- [1] C.Berge, Graphes et hypergraphes, Dunod University 1973.
- [2] Hikoe Enomoto, Characterization of families of finite permutation groups by the subdegrees. *J.fac.Sci.Univ.Tokyou Sec I A :ath* 20(1973). 1-11. [4,133,262].
- [3] J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare, Another characterization of hypercubes. *Discrete Math*, 39 (1982), 161-166.
- [4] M.Mollard, Les invariants du  $n$ -cube, Thèse troisième cycle, Université Joseph Fourier. Grenoble 1981.