

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
EN MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres.

Par : BENZENATI Djilali

Sujet

Zéros de la famille de trinômes $mX^n - nX^m + n - m$, $n > m > 0$.

Soutenu publiquement, le 10/10/2011 à 11.00h, devant le jury composé de :

M ^r .	M.	AIDER	Professeur	à l'U.S.T.H.B,	Président.
M ^r .	M. O.	HERNANE	Professeur	à l'U.S.T.H.B,	Directeur du mémoire.
M ^r .	M.	ZITOUNI	Professeur	à l'U.S.T.H.B,	Examineur.
M ^r .	A.	KESSI	Professeur	à l'U.S.T.H.B,	Examineur.
M ^r .	M. S.	HACHAICH	Maître de Conférences	à l'U.S.T.H.B,	Examineur.
M ^{elle} .	F.	FLICI	Maître Assistante A	à l'U.M.B.B,	Invitée.

Table des matières

Table des matières	1
Introduction	5
1 Rappels de quelques résultats fondamentaux.	8
1.1 Introduction	8
1.2 Rappels de quelques résultats fondamentaux.	9
1.2.1 Développement d'un nombre réel positif en fractions continues	10
1.2.2 Nombre de zéros d'un polynôme à l'intérieur d'un disque.	11
1.3 Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe.	15
1.3.1 Localisation des zéros d'un polynôme dans un disque.	15
1.3.2 Localisation des zéros d'un polynôme dans une couronne.	18
1.3.3 Localisation des zéros d'un polynôme relativement à un secteur	20
2 Localisation des zéros du trinôme $T(x) = mx^n - nx^m + n - m$.	22
2.1 Introduction	22
2.2 Localisation des zéros du trinôme $T(x)$	23
2.2.1 Le nombre de zéros du trinôme $P(x) = bz^n - az^m + a - b$ (a, b) des nombres réels.	23
3 Localisation des zéros du polynôme $P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n$.	38
3.1 Introduction	38

3.2	Localisation des zéros du polynôme $P_n(z)$	39
3.2.1	Cas où λ n'est pas l'inverse d'un entier	46
3.2.2	Cas où λ est l'inverse d'un entier	49
3.2.3	Exemples de courbes d'équation $F(t, \rho) = \lambda e^{\frac{it}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it}$ où λ est l'inverse d'un entier, $0 \leq t \leq 2\pi$ et $\rho \leq 1 - 2\lambda$ des nombres réels positifs.	74
Conclusion		76
Annexe		77
Bibliographie		81

Remerciements

Je tiens avant tout, à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur Mohand Ouamar HERNANE, Professeur à l'U.S.T.H.B, qui a assumé la direction de cette thèse. Je voudrais surtout le remercier pour ses précieux conseils et ses encouragements continuels, qui ne cessaient de me remonter le moral pendant les moments difficiles.

Je voudrais présenter mes vifs remerciements très sincères à Monsieur AIDER Méziane, Professeur à l'U.S.T.H.B, pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire.

Je tiens également remercier, Monsieur Mohamed ZITOUNI, Professeur à l'U.S.T.H.B, d'avoir accepté d'examiner ce travail.

Que Messieurs Arezki KESSI, Professeur à l'U.S.T.H.B, ainsi que Monsieur Mohamed Salah HACHAICHI Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, trouvent ici mes remerciements, pour avoir accepté d'examiner ce travail. Je remercie Mademoiselle Fatiha FLICI Maître Assistante A, à U.M.B.B, de Boumerdès qui a bien voulu faire partie du jury.

J'adresse aussi mes vifs remerciements à ma mère, mon père, mon frère et ma sœur pour le soutien affectif et matériel qu'ils m'ont apporté tout au long de mon parcours scolaire.

Enfin, je ne saurais terminer cette liste sans adresser un remerciement particulier à mes amis et tous ceux qui ont contribué, de près ou de loin à ma formation.

Notations

On désignera par :

U , le disque unité et par ∂K , le contour de l'ensemble K .

$S(O', r_1, r_2)$, la couronne du centre O' , de rayon intérieur r_1 et rayon extérieur r_2 .

$b = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$, le développement de b en fractions continues.

$\text{pgcd}(p, q)$, le plus grand commun diviseur des entiers p et q .

$\min_{0 \leq k \leq n-1} (a_k)$, la valeur minimale des a_k pour $0 \leq k \leq n-1$.

$\max_{0 \leq k \leq n-1} (a_k)$, la valeur maximale des a_k pour $0 \leq k \leq n-1$.

$P^{(n)}(x)$, la $n^{\text{ème}}$ dérivée du polynôme $P(x)$.

$P^*(x)$, le polynôme réciproque du $P(x)$, on a : $P^*(x) = x^n P(1/x)$.

$\text{Re}(z)$, la partie réelle du nombre complexe z .

$\text{Im}(z)$, la partie imaginaire du nombre complexe z .

$\arg(z)$, l'argument du nombre complexe z .

$\mathbb{C}$, corps des nombres complexes.

$\mathbb{Z} = \{\dots - 3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$, anneau des nombres entiers rationnels.

$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$, monoïde des nombres entiers naturels.

Introduction

La localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe présente un intérêt certain en analyse et en physique, notamment en théorie du signal.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à ce problème, nous citons par exemple, A. Schinzel (cf [25]), K. B. Stolarsky (cf [26]), K. Dilcher (cf [9]) et M. Mignotte (cf [18]),...etc

Dans de nombreux secteurs de l'activité scientifique, on est amené à résoudre des équations et des inégalités de type polynômiales; les méthodes heuristiques classiques pour obtenir les solutions approchées, ne donnent, en fait ne peuvent donner de bons résultats que si les zéros du polynôme considéré ont été préalablement localisés, d'où l'intérêt de l'étude de la localisation des zéros de polynômes à coefficients réels ou complexes dans le plan complexe.

Plusieurs inégalités classiques d'analyse, peuvent se ramener à la forme $P(x) \geq 0$, pour x dans I ou $P(x) > 0$ pour x dans J , où $P(x)$ est un polynôme à coefficients réels et $J \subset I$ sont des intervalles de nombres réels.

Comment les zéros du polynôme $P(x)$ sont-ils répartis dans le plan complexe?

Si f est un polynôme qui a tous ses zéros réels, l'inégalité de Laguerre (cf [15]), affirme que le polynôme défini par,

$$P(x) = (f'(x))^2 - f(x)f''(x),$$

vérifie l'inégalité $P(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Nous apporterons des réponses à la première question et nous montrerons comment grâce à l'inégalité de Laguerre on peut obtenir l'inégalité $P(x) > 0$.

Notons qu'une étude détaillée de la localisation des zéros de ce polynôme particulier $P(x)$, se trouve dans [9].

De nombreuses études ont été faites sur la répartition des zéros de polynômes à coefficients réels ou complexes dans le plan complexe (cf [13], [14]).

Le livre de Marden (cf [17]) "Geometry of polynomials" qui rassemble de très nombreux résultats issus des travaux de plusieurs auteurs sur les zéros de polynômes, constitue une référence importante dans ce domaine. Le nombre important d'articles publiés sur ce sujet, témoigne de l'intérêt à la fois théorique et pratique de cette vaste étude.

Dans ce mémoire, notre intérêt s'est porté essentiellement sur l'étude de la localisation des zéros de deux familles particulières de trinômes définies pour n et m entiers par,

$$T(x) = T_{n,m}(x) = mx^n - nx^m + n - m, \quad \text{où} \quad n > m > 0. \quad (0.1)$$

$$P_n(z) = P_{n,\lambda}(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n \quad \text{où} \quad 0 < \lambda < 1. \quad (0.2)$$

Ces deux familles de trinômes jouent un rôle très important dans l'étude de certaines inégalités intervenant en analyse.

Les deux familles de trinômes (0.1) et (0.2) ont été étudiées dans (cf [8]) par K. Dilcher, J. D. Nulton et K. B. Stolarsky .

Notre travail consiste d'abord à faire une synthèse de certains résultats fondamentaux nécessaires pour la localisation des zéros de polynômes à coefficients réels ou complexes, puis d'appliquer ces résultats pour l'étude des deux familles de polynômes définies par (0.1) et (0.2). Ce mémoire est constitué de trois chapitres.

Le premier chapitre est consacré à quelques rappels d'analyse complexe et de certains résultats classiques concernant la localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe. Nous citons certains théorèmes et détaillons leurs démonstrations. Nous avons pour cela énoncé le théorème de Cauchy (cf [17]) qui donne la localisation dans un disque, et le théorème d'Enestrom-akeya (cf [7]) qui donne la localisation dans une couronne. Des exemples d'application ont été également donnés à la fin de ce chapitre.

Dans le deuxième chapitre, nous avons utilisé les théorèmes de *Cauchy* (cf [17]), d'*Eneström-akeya* (cf [7]), et de *Rouché* (cf [17]), pour montrer la proposition 2.1, qui précise la localisation

des zéros du trinôme $T(x)$ dans une couronne suivant les valeurs de l'entier m ; nous avons appliqué ces théorèmes au trinôme $T(x)$ pour déterminer le nombre de ses zéros à l'intérieur du disque unité U . Nous avons également exposé et repris dans le détail la démonstration de la proposition 2.1 (cf [8]), qui donne un encadrement du module des zéros $z \neq 1$ de $T(x)$.

Le troisième chapitre de ce mémoire, est consacré à l'étude de la localisation des zéros de la famille de polynômes définie par (0.2) ; l'application du théorème de Cohn (cf [5]), nous a permis de démontrer le théorème 3.3, qui précise la localisation des zéros d'un polynôme $P(x)$ lorsque $P(x) = P^*(x)$ où $P^*(x)$ est le polynôme réciproque de $P(x)$.

Enfin nous terminons notre mémoire par une conclusion, une bibliographie et une annexe où nous donnons quelques exemples de courbes $E(\rho)$ où $E(\rho)$ est définie dans la proposition 3.2.

Chapitre 1

Rappels de quelques résultats fondamentaux.

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous énonçons quelques rappels d'analyse complexe et quelques propriétés des fractions continues ainsi que certains résultats sur la localisation des zéros d'un polynôme dans le plan complexe. Nous nous sommes intéressés particulièrement à la localisation des zéros d'un polynôme dans un disque, dans une couronne, et relativement à un secteur.

Nous avons présenté et détaillé les démonstrations des théorèmes de Cauchy (cf [17]), de Rouché (cf [17]) et de Hurwitz, que nous avons fait suivre par des exemples d'application. Aussi nous avons fait suivre le théorème d'Enestrom-akeya (cf [17]) concernant la localisation des zéros d'un polynôme à coefficients réels dans une couronne d'une démonstration détaillée.

Ce chapitre contient donc les outils préliminaires nécessaires à notre étude. Notre intérêt s'est porté à l'application de ces résultats aux deux familles de trinômes suivantes que nous exposerons aux chapitres 2 et 3, de ce présent mémoire :

$$T(x) = mx^n - nx^m + n - m, \quad \text{où} \quad n > m > 0.$$

$$P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n \quad \text{où} \quad 0 < \lambda < 1.$$

1.2 Rappels de quelques résultats fondamentaux.

Définition 1.1

L'ensemble $\{z \in \mathbb{C}, |z - a| \leq r\}$ est appelé le disque fermé de centre a et de rayon r .

Définition 1.2 (cf [4])

Une fonction $f(x)$ à valeurs réelles ou complexes définie dans un ouvert D , est dite analytique dans D si pour tout point $x_0 \in D$, la fonction $f(x)$ est développable en série entière au point x_0 .

Autrement dit, il existe un nombre réel positif $\alpha > 0$ et une série entière $S(x) = \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $r \geq \alpha$ telle que l'on ait,

$$f(x) = \sum_{n \geq 0} a_n (x - x_0)^n.$$

Définition 1.3 (cf [6])

On dit qu'une fonction $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ est holomorphe dans Ω si f est de classe C^1 et $\mathbb{C}$ -dérivable en tout point.

Définition 1.4 (cf [6])

On appellera fonction méromorphe dans Ω toute fonction f holomorphe dans $\Omega \setminus S$, où S est un fermé discret de Ω , telle que les singularités de f aux points de S soient toutes des pôles.

Remarque 1.1

Toute fonction polynomiale est analytique dans $\mathbb{R}$ et holomorphe dans tout ouvert de $\mathbb{C}$.

Proposition 1.1 (Principe de l'argument)

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe, non constante dans un ouvert connexe D de $\mathbb{C}$, soit $K \subset D$ un ensemble compact, on suppose que $f(z)$ n'a ni zéros ni pôles sur le contour ∂K de K . Alors,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial K} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = R - S.$$

où R désigne le nombre de zéros de $f(z)$ comptés avec leur multiplicité contenus dans K .

et S le nombre de pôles de $f(z)$ comptés avec leur multiplicité contenus dans K .

Preuve : (cf [6]) et (cf [4]).

Théorème 1.1 (*Principe du maximum*) (cf [6])

Soit D un ensemble ouvert connexe dans $\mathbb{C}$, r un nombre réel positif, $z_0 \in D$ et $f(z)$ une fonction de la variable complexe z , analytique dans D .

Si $|f(z)| \leq |f(z_0)|$, pour tout $z \in D$ tel que $|z - z_0| < r$, alors $f(z)$ est constante dans D .

Preuve : (cf [4]).

Définition 1.5 (cf [22])

Soit $P(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$ un polynôme de degré $n \geq 1$ à coefficients réels ou complexes, le polynôme défini par $z^n P(1/z) = a_n + a_{n-1} z + \dots + a_1 z^{n-1} + a_0 z^n$ est appelé le polynôme réciproque du polynôme $P(z)$, on le note $P^*(z)$.

Remarque 1.2

De plus si z est une racine de $P(z)$, alors $1/z$ est une racine de $P^*(z)$.

Théorème 1.2 (Cohn) (cf [22])

Soit $P(z)$ un polynôme de degré $n \geq 1$ tel que $P(z) = z^n P(1/z)$. Alors tous les zéros du polynôme $P(z)$ sont dans le disque unité U si et seulement si, les zéros de son polynôme dérivé $P'(z)$ sont dans le disque U .

Preuve :

La preuve de ce théorème se trouve dans ([5], [11]).

1.2.1 Développement d'un nombre réel positif en fractions continues

Proposition 1.2 (cf [16])

Tout nombre réel positif b s'écrit d'une manière unique comme fractions continues,

$$b = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3 + \frac{1}{a_4 + \dots}}} = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots]$$

où, $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ sont des entiers positifs.

Preuve :

La preuve se trouve dans (cf [16]).

Proposition 1.3

Soit b un nombre rationnel positif alors, il existe un entier $n \geq 1$, tel que $b = [a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_n] = \frac{p_n}{q_n}$ où, p_n et q_n sont des entiers positifs premiers entre eux.

Preuve :

La preuve se trouve dans (cf [16]).

Théorème 1.3

Soit x un nombre irrationnel alors, il existe deux entiers a et b tel que l'on ait,

$$\left| x - \frac{a}{b} \right| < \frac{c_0}{b^2}$$

où c_0 est une constante positive.

Preuve : (cf [16]).

1.2.2 Nombre de zéros d'un polynôme à l'intérieur d'un disque.

Théorème 1.4 (Rouché) (cf [17])

Soit ρ un nombre réel positif, soient f et g deux fonctions holomorphes dans le disque $|z| < \rho$ telle que,

$$|g(z)| < |f(z)| \quad \text{pour} \quad |z| = \rho.$$

alors,

$f(z) + g(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque $|z| < \rho$.

Preuve :

Considérons la fonction,

$$h(z) = \frac{f(z)}{g(z)} + 1$$

$h(z)$ est méromorphe dans le disque $|z| < \rho$ puisque $f(z)$ et $g(z)$ sont holomorphes dans le disque $|z| < \rho$, il s'en suit de l'hypothèse que pour tout $t \geq 0$, la fonction $f(z) - t$, n'a ni pôles

ni zéros sur le cercle $|z| = \rho$.

L'intégrale,

$$N(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\rho} \frac{h'(z)}{h(z) - t} dz,$$

ne dépend pas de t puisque on intègre par rapport à z .

Pour $t = 0$, d'après le principe de l'argument on a,

$$N(t) = R - S.$$

où R est le nombre de zéros et S le nombre de pôles de $h(z)$.

Si $t \rightarrow +\infty$, alors $N(t) = 0$.

d'où l'on a,

$$N(t) = R - S = 0.$$

Les zéros de $h(z)$ sont des zéros de $f(z) + g(z)$.

Les pôles de $h(z)$ sont des zéros de $g(z)$. Ce qui achève la démonstration.

Exemple :

Soit,

$$P(z) = z^4 + 3z + 1,$$

Le polynôme P admet une seule racine dans le disque $|z| < 1$.

En effet, on pose $f(z) = 3z + 1$ et $g(z) = z^4$.

Pour $|z| = 1$ on a,

$$|g(z)| = |P(z) - f(z)| = |z^4| = 1.$$

et

$$|f(z)| = |3z + 1| \geq 3|z| - 1 = 2.$$

donc,

$$|g(z)| < |f(z)|.$$

Puisque $f(z)$ possède un seul zéro $z = -1/3$ dans le disque ouvert $|z| < 1$, on conclut d'après le théorème de Rouché que $P(z)$ possède un seul zéro dans le disque ouvert $|z| < 1$.

Théorème 1.5 (cf [27])

Soit $F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$ un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients complexes alors, $F(z)$ admet n zéros (comptés avec leur multiplicité) à l'intérieur du disque

$$|z| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|.$$

Preuve : (cf [27]).

Soit $F(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n$, un polynôme de degré $n \geq 2$ et $a_1, a_2, \dots, a_n$ des nombres complexes.

Posons,

$$A(z) = z^n, B(z) = a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \text{ et } \varrho = \max_{1 \leq i \leq n} |a_i| \text{ alors,}$$

pour $|z| = 1 + \varrho$ on a,

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq \varrho(|z|^{n-1} + \dots + 1),$$

ce qui implique,

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq \varrho \frac{|z|^n - 1}{|z| - 1} = |z|^n - 1,$$

d'où,

$$|a_1 z^{n-1} + \dots + a_n| \leq |z|^n - 1 < |z|^n,$$

donc,

$$|B(z)| < |A(z)|.$$

Le théorème de Rouché (cf [17]), permet alors de conclure que les polynômes $F(z) = A(z) + B(z)$ et $A(z)$, ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, et comme $A(z)$ admet un zéro $z = 0$ d'ordre de multiplicité n dans ce disque, alors le polynôme $F(z)$ admet n zéros à l'intérieur du disque $|z| \leq 1 + \max_{1 \leq i \leq n} |a_i|$, d'où le résultat.

Théorème 1.6 (*Hurwitz*)

Soit D un compact de $\mathbb{C}$ et ∂D son bord. Soient f_m ($m \geq 0$) et f des fonctions holomorphes sur un ouvert Ω de $\mathbb{C}$ contenant D . On suppose que $(f)_{m \geq 0}$ converge uniformément vers f sur D telle que f ne s'annule pas sur ∂D .

Alors,

(i) f_m ne s'annule pas sur ∂D .

(ii) Il existe une constante positive m_0 tel que, f et $(f)_{m \geq 0}$ possèdent le même nombre de zéros dans D , pour $m > m_0$.

Preuve :

Posons,

$$S = \inf_{z \in \mathbb{C}} |f(z)|.$$

Comme f ne s'annule pas sur ∂D , alors S est strictement positif.

Puisque $(f)_{m \geq 0}$ converge uniformément vers f sur D , il existe alors un entier m_0 tel que pour tout $m > m_0$, on ait :

$$\sup_{z \in D} |f_m(z) - f(z)| < S$$

alors,

$$|f_m(z) - f(z)| < S < |f(z)| \quad \text{sur} \quad \partial D.$$

Le théorème de Rouché implique que $f_m(z)$ et $f(z)$ ont le même nombre de zéros dans D , d'où le résultat.

Exemple :

Soit $P_n(z) = nz^m - z - n + 1$, et $nf_n(z) = P_n(z)$ où $n, m \in \mathbb{N}^*$.

Soit $r > 1$ et soit le disque $|z| < r$. On a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} P_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(z^m - \frac{1}{n} z - 1 + \frac{1}{n} \right)$$

d'où,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(z) = z^m - 1$$

donc f_n converge uniformément vers $f(z) = z^m - 1$. Comme $f(z)$ ne s'annule pas sur le cercle $|z| = r$ et admet m racines dans le disque $|z| < r$ ($r > 1$), le théorème de Hurwitz implique

alors qu'il existe un entier $n_0 \geq 1$ tel que f_n ne s'annule pas sur le cercle $|z| = r$ pour $n > n_0$, de plus f_n possède m racines dans le disque $|z| < r$.

1.3 Localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe.

1.3.1 Localisation des zéros d'un polynôme dans un disque.

Théorème 1.7 (Cauchy) (cf [17])

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, un polynôme à coefficients complexes de degré $n \geq 2$ ($a_n \neq 0$) tel que les coefficients $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}$, ne soient pas tous nuls.

Alors tous les zéros de $P(z)$ sont dans le disque $|z| \leq r$, où r est l'unique racine réelle positive de l'équation,

$$|a_0| + |a_1|z + |a_2|z^2 + \dots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n = 0$$

.

Preuve :

Pour démontrer ce théorème, nous avons besoin du lemme suivant :

Lemme 1.1

Soit $n \geq 1$, et $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n$, $(n+1)$ nombres complexes tels que $a_n \neq 0$ et

$$(a_0, a_1, \dots, a_{n-1}) \neq (0, 0, \dots, 0)$$

et

$$F(z) = |a_0| + |a_1|z + |a_2|z^2 + \dots + |a_{n-1}|z^{n-1} - |a_n|z^n.$$

Alors il existe un unique nombre réel $\alpha > 0$ tel que $F(\alpha) = 0$ et vérifiant de plus

$$F(x) > 0 \quad \text{si} \quad 0 < x < \alpha, \quad F(x) < 0 \quad \text{si} \quad x > \alpha.$$

Preuve du lemme 1.1

Soit $a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, n$ nombres complexes non tous nuls et a_n un nombre complexe non nul.

Posons,

$$F(z) = \sum_{k=0}^{n-1} |a_k| z^k - |a_n| z^n,$$

et pour $x > 0$ et $n \geq 1$, on pose,

$$f(x) = \frac{F(x)}{x^n} = \frac{|a_0|}{x^n} + \frac{|a_1|}{x^{n-1}} + \dots + \frac{|a_{n-1}|}{x} - |a_n|.$$

La fonction f ainsi définie est continue et strictement décroissante de $+\infty$ à $-|a_n|$ quand x varie de 0 à $+\infty$, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique nombre réel positif α tel que $f(\alpha) = 0$.

Nous vérifions que $F(x) > 0$ si $0 < x < \alpha$ et $F(x) < 0$ si $x > \alpha$.

Comme pour tout $x > 0$, on a $F(x) = x^n f(x)$, le lemme en résulte.

Preuve du théorème de Cauchy :

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + |a_2| z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, un polynôme à coefficients complexes avec $a_n \neq 0$ et $n \geq 2$ alors,

$$|P(z)| \geq |a_n| |z^n| - \left(|a_0| + |a_1| |z| + |a_2| |z^2| + \dots + |a_{n-1}| |z^{n-1}| \right).$$

D'après le lemme 1.1, il existe un unique nombre réel positif r tel que,

$$|a_n| r^n - \left(|a_0| + |a_1| r + |a_2| r^2 + \dots + |a_{n-1}| r^{n-1} \right) = 0.$$

De plus, pour $|z| > r$, on a d'après le lemme 1.1,

$$|a_n| |z^n| - \left(|a_0| + |a_1| |z| + |a_2| |z^2| + \dots + |a_{n-1}| |z^{n-1}| \right) > 0,$$

d'où l'on déduit que $|P(z)| > 0$, pour $|z| > r$. Donc tous les zéros de $P(z)$ sont dans le disque $|z| \leq r$, d'où le théorème de Cauchy.

Exemple : (cf [14], [13])

Soit $P(z) = z^{n+1} - (n+1)z + n$.

Montrons que tous les zéros de $P(z)$ sont situés dans le disque $|z| \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$.

Pour $n = 1$ et $n = 2$, le résultat est trivialement vérifié à l'aide d'un calcul direct des racines.

Pour $n \geq 3$, l'équation associée à $P(z)$ s'écrit,

$$f(x) = n + (n+1)x - x^{n+1}.$$

Soit α la racine réelle positive de $f(x)$, pour montrer que $|z| \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$, il suffit pour cela de montrer que, $\alpha \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$.

On a :

$$f\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) = (n-1) \left[\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) - (2n)^{\frac{1}{n}} \right],$$

comme,

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \leq 3,$$

alors,

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n \leq 3 \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leq 2n,$$

d'où,

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) \leq (2n)^{\frac{1}{n}}.$$

si et seulement si

$$\left(1 + \frac{1}{n-1}\right) - (2n)^{\frac{1}{n}} \leq 0,$$

donc,

$$f\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) \leq 0.$$

Ceci d'une part.

D'autre part on a $f(0) = n > 0$, alors $f\left((2n)^{\frac{1}{n}}\right) f(0) \leq 0$.

Par le théorème des valeurs intermédiaires, la racine réelle positive α de la fonction $f(x)$ vérifie : $0 < \alpha < (2n)^{\frac{1}{n}}$, ce qui prouve d'après le théorème de Cauchy, que tous les zéros de $P(z)$ sont situés dans le disque $|z| \leq (2n)^{\frac{1}{n}}$.

1.3.2 Localisation des zéros d'un polynôme dans une couronne.

Théorème 1.8 (Eneström - Kakeya) (cf [17])

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, où $a_n \neq 0$, un polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients strictement positifs. Soit z un zéro de $P(z)$, alors,

$$\rho_1 \leq |z| \leq \rho_2.$$

où

$$\rho_1 = \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] \quad \text{et} \quad \rho_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right].$$

Preuve : (cf [17]).

Soit $P(z) = a_0 + a_1z + a_2z^2 + \dots + a_{n-1}z^{n-1} + a_nz^n$, où $a_n \neq 0$, un polynôme de degré $n \geq 1$, à coefficients réels strictement positifs, alors $P(|z|) > 0$.

Posons :

$$\rho_1 = \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] \quad \text{et} \quad \rho_2 = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right].$$

Comme pour tout $0 \leq k \leq n$, on a $a_k > 0$, alors $\rho_1 > 0$ et $\rho_2 > 0$,

de plus pour tout $0 \leq k \leq n-1$, on a

$$a_k - \rho_1 a_{k+1} \geq 0 \quad \text{et} \quad \rho_2 a_{k+1} - a_k \geq 0.$$

Soit z une racine complexe de $P(z)$.

En multipliant $P(z)$ par $(\rho_1 - z)$ on obtient,

$$(\rho_1 - z)P(z) = a_0\rho_1 - \left[a_n z^{n+1} + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \rho_1 a_{k+1}) z^{k+1} \right], \quad (1.1)$$

et en prenant le module des deux membres de la relation (1.1) il vient,

$$\begin{aligned} |(\rho_1 - z)P(z)| &\geq |a_0||\rho_1| - |a_n||z^{n+1}| - \sum_{k=0}^{n-1} |a_k - \rho_1 a_{k+1}||z^{k+1}| = \\ &= a_0\rho_1 - a_n|z^{n+1}| - \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - \rho_1 a_{k+1})|z^{k+1}|. \\ &= \rho_1 \left(a_0 + \sum_{k=1}^n a_k |z^k| \right) - |z| \left(a_n |z^n| + \sum_{k=0}^{n-1} a_k |z^k| \right). \end{aligned}$$

$$= (\rho_1 - |z|)P(|z|).$$

d'où l'on a,

$$(\rho_1 - |z|)P(|z|) \leq |(\rho_1 - z)P(z)| = 0.$$

comme $P(|z|) > 0$ alors $\rho_1 - |z| \leq 0$ d'où $\rho_1 \leq |z|$.

De la même manière, en multipliant $P(z)$ par $(z - \rho_2)$ on obtient,

$$(|z| - \rho_2)P(|z|) \leq |(z - \rho_2)P(z)| = 0.$$

d'où $|z| - \rho_2 \geq 0$, ce qui est équivalent à $|z| \geq \rho_2$, d'où le résultat.

Exemple :

Soit $P(z) = 1 + 2z + \dots + nz^{n-1} + (n+1)z^n$, un polynôme de degré $n \geq 1$.

Tous les coefficients de $P(z)$ sont des nombres réels positifs, de plus on a $a_n = n+1 \neq 0$, alors,

$$\begin{aligned} \rho_1 &= \min_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] = \frac{1}{2} \\ \rho_2 &= \max_{0 \leq k \leq n-1} \left[\frac{a_k}{a_{k+1}} \right] = \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

comme ρ_2 tend vers 1, lorsque $n \rightarrow +\infty$, le théorème d'Eneström-Kakeya (cf [17]), implique alors que tous les zéros de $P(z)$ sont dans le couronne définie par $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$.

Le résultat suivant, donne la répartition dans le plan complexe des arguments des zéros d'un polynôme à coefficients quelconques (cf [10]).

Théorème 1.9 (d'Erdős-Turàn) (cf [10])

Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \dots + a_0$, $a_n a_0 \neq 0$, un polynôme à coefficients complexes. Soit $L(P) = |a_n| + |a_{n-1}| + \dots + |a_0|$, la longueur de P .

Soient $z_1 = r_1 \exp(i\varphi_1), \dots, z_n = r_n \exp(i\varphi_n)$, les racines de $P(z)$, avec $r_k > 0$ et $0 \leq \varphi_k < 2\pi$ pour $k = 1, \dots, n$.

Alors,

$$\left| N(\alpha, \beta) - \frac{\beta - \alpha}{2\pi} n \right| < \sqrt{n \log \frac{L(P)}{\sqrt{|a_0 a_n|}}},$$

où $N(\alpha, \beta)$ est le nombre des arguments φ_k tel que $\alpha \leq \varphi_k \leq \beta$.

Preuve : (cf [10]).

1.3.3 Localisation des zéros d'un polynôme relativement à un secteur

Théorème 1.10 (cf [13])

Soit $p, n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$ alors, le trinôme $1 + z^p + az^n$, admet au moins un zéro dans chacun des secteurs définis par,

$$\left| \arg z - (2k+1) \frac{\pi}{p} \right| \leq \frac{\pi}{n+1}, \quad k = 0, 1, \dots, (p-1).$$

Preuve : (cf [17], [13])

Proposition 1.4 (cf [13])

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients réels strictement positifs, alors tout zéro z de P vérifie,

$$|\arg z| > \frac{\pi}{n}.$$

Preuve : (cf [13]).

Soit $P(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_{n-1} z^{n-1} + a_n z^n$, un polynôme de degré $n \geq 2$.

On suppose que $a_i > 0$ pour tout $i = 0, 1, \dots, n$.

Soit z un zéro de $P(z)$ tel que $\theta = \arg z$.

La proposition 1.3 est équivalente à : si $|\theta| \leq \frac{\pi}{n}$ alors $P(z) \neq 0$. Il suffit donc de montrer que les trois propriétés suivantes sont vérifiées :

- (i) $\theta = 0$, implique $P(z) \neq 0$.
- (ii) $0 < \theta \leq \frac{\pi}{n}$, implique $\operatorname{Im}(P(z)) > 0$.
- (iii) $-\frac{\pi}{n} \leq \theta < 0$, implique $\operatorname{Im}(P(z)) < 0$.

En effet,

(i) Si $\theta = 0$, alors z est un nombre réel positif donc $P(z) > 0$, puisque tous les coefficients de $P(z)$ sont des nombres réels strictement positifs.

(ii) si $0 < \theta \leq \frac{\pi}{n}$, alors pour $1 \leq k \leq n$, on a : $0 < k\theta \leq \pi$ et $0 < \theta \leq \pi$, par suite $\operatorname{Im}(P(z)) \geq a_1|z|\sin \theta > 0$.

(iii) si $-\frac{\pi}{n} \leq \theta < 0$, alors $0 < -\theta \leq \frac{\pi}{n}$ et d'après (ii) on a $\operatorname{Im}(P(z)) = -\operatorname{Im}(P(\bar{z})) < 0$, d'où le résultat de la proposition 1.3 (cf [13]).

Chapitre 2

Localisation des zéros du trinôme

$$T(x) = mx^n - nx^m + n - m.$$

2.1 Introduction

Plusieurs inégalités classiques en analyse mathématique, se ramènent à des inégalités de la forme $P(x) \geq 0$ pour $x \in I$ ou à $P(x) > 0$ pour $x \in J$, où $P(x)$ est un polynôme et $J \subset I$ sont deux intervalles de nombres réels.

La question de savoir comment sont répartis les zéros d'un tel polynôme se pose alors d'elle même.

La réponse à cette question est liée à la localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe.

Dans le cas d'un polynôme $f(x)$ ayant tous ses zéros réels, Laguerre (cf [15]) affirme que :

$$P(x) = (f'(x))^2 - f(x)f''(x) \geq 0,$$

pour tout nombre réel x . Une étude détaillée des zéros de ce polynôme particulier $P(x)$ a été faite dans (cf [9]).

Le trinôme $T(x) = T_{n,m}(x) = mx^n - nx^m + n - m$, où $n > m > 0$, que nous étudions dans ce chapitre, joue un rôle important dans l'étude de certaines inégalités particulières en considérant l'inégalité correspondante $T(x) > 0$ pour $0 < x < 1$ (cf [1]).

Le changement de variable x par $(\frac{x}{y})^{1/n}$ avec $y \geq x$ et $\frac{m}{n}$ par λ dans $T(x) > 0$, nous conduit à l'inégalité,

$$\lambda x + (1 - \lambda)y \geq x^\lambda y^{\lambda-1}. \quad (2.1)$$

Si on remplace dans (2.1) y par 1, on obtient l'inégalité :

$$1 - \lambda + \lambda x - x^\lambda \geq 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < \lambda < 1.$$

Nous commençons par l'étude de la localisation d'une classe plus générale de trinômes, c'est-à-dire les trinômes de la forme :

$$P(z) = bz^n - az^m + a - b, \quad a > b > 0 \text{ et } n > m > 0, \text{ où } m \text{ et } n \text{ sont des entiers naturels.}$$

Notons que des études de certains trinômes similaires, ont été faites par G. Boese, Q. I. Rahman, J. Szynal et J. Waniurski (cf [3], [23], [24]).

2.2 Localisation des zéros du trinôme $T(x)$.

2.2.1 Le nombre de zéros du trinôme $P(x) = bz^n - az^m + a - b$ (a, b) des nombres réels.

Le théorème qui suit, donne le nombre de zéros du polynôme $P(z) = bz^n - az^m + a - b$, à l'intérieur et à l'extérieur du disque unité U , en fonction du plus grand commun diviseur des entiers n et m .

Théorème 2.1

Soit n et m deux entiers positifs et $P(z) = bz^n - az^m + a - b$, un polynôme de degré $n \geq 2$, à coefficients réels tel que $a > b > 0$.

Soit $\aleph$ le nombre de zéros de $P(z)$ à l'intérieur du disque unité U alors,

$$(i) \ \aleph = m - \text{pgcd}(m, n) \quad \text{si} \quad \frac{a}{b} \geq \frac{n}{m}.$$

$$(ii) \ \aleph = m \quad \text{si} \quad \frac{a}{b} < \frac{n}{m}.$$

Preuve : La preuve se trouve dans (cf [8]).

Elle repose essentiellement sur les deux lemmes suivants, que nous démontrerons ultérieurement.

Lemme 2.1

Soit a, b deux nombres réels tel que $b > a > 0$ et p, q deux entiers positifs.

Si

$$bz^q - az^p = b - a \quad \text{avec } z = e^{i\theta}, \quad (2.2)$$

alors,

$$p\theta \equiv q\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

Preuve de lemme (2.1) :

Soit θ un nombre réel et $z = \exp(i\theta)$. L'équation (2.2) est équivalente à l'équation,

$$b(z^q - 1) - a(z^p - 1) = 0,$$

d'où l'on déduit que,

$$\frac{z^q - 1}{z^p - 1} = \frac{a}{b}. \quad (2.3)$$

d'autre part on a,

$$\begin{aligned} z^q - 1 &= \cos(q\theta) + i \sin(q\theta) - 1 = \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) + \\ &\quad 2i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \\ &= -2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - i \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

et aussi,

$$z^p - 1 = -2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\sin\frac{\theta}{2} - i \cos\frac{\theta}{2}\right). \quad (2.5)$$

Les relations (2.4), (2.5) et (2.3) impliquent,

$$\frac{z^q - 1}{z^p - 1} = \frac{\sin(q\frac{\theta}{2})}{\sin(p\frac{\theta}{2})} \left[\cos\left((q-p)\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left((q-p)\frac{\theta}{2}\right) \right] = \frac{a}{b}$$

donc,

$$\sin \left((q-p) \frac{\theta}{2} \right) = 0.$$

par suite,

$$(q-p) \frac{\theta}{\pi} \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

d'où l'on déduit que $q = p$ ou $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Examinons ces deux cas :

Si $p = q$, l'équation (2.2) s'écrit $z^p = z^q = 1$, si et seulement si, $e^{ip\theta} = e^{iq\theta} = 1$,

d'où $p\theta \equiv q\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

Si $\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$ on a $p\theta \equiv q\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, d'où le résultat.

Lemme 2.2

Soient n, m deux entiers positifs tel que $n > m > 0$ et A, B, C des nombres complexes tels que $|B| > |A| + |C|$.

Alors, l'équation $Az^n + Bz^m + C = 0$, admet m zéros à l'intérieur du disque unité U .

Preuve de lemme 2.2 :

L'équation $Az^n + Bz^m + C = 0$, implique $Az^n + C = -Bz^m$.

Posons $f(z) = -Bz^m$ et $g(z) = Az^n + C$.

Pour $|z| = 1$ on a $|f(z)| > |g(z)|$, puisque on a $|B| > |A| + |C|$, et d'après le théorème de Rouché (cf [17]), $f(z) + g(z) = Az^n + Bz^m + C$ et $f(z) = -Bz^m$, ont le même nombre de zéros dans le disque $|z| < 1$ et comme $f(z)$ admet m zéros dans ce disque, alors l'équation $Az^n + Bz^m + C = 0$ admet exactement m zéros à l'intérieur du disque unité U , d'où le résultat du lemme 2.2.

Corollaire 2.1

Soit n et m deux nombres premiers tels que $n > m$, alors le trinôme $T(x)$ admet $(m-1)$ zéros dans le disque unité U et $(n-m-1)$ zéros à l'extérieur de ce disque.

Preuve du corollaire 2.1 :

m et n étant deux nombres premiers, alors $\text{pgcd}(n, m) = 1$. En appliquant le théorème 2.1 avec $n = a$, $m = b$, on déduit que le polynôme $T(x)$ admet $(m-1)$ zéros dans le disque unité U .

Pour $z = 1$ on a,

$$T(1) = T'(1) = 0 \quad \text{et} \quad T''(1) \neq 0,$$

donc $z = 1$, est un zéro double de $T(x)$.

Comme $T(x)$ admet $(m - 1)$ zéros à l'intérieur du disque U et un zéro double $z = 1$, alors le nombre de zéros à l'extérieur de U est égal à $n - (m - 1 + 2) = n - m - 1$, d'où le corollaire 2.1.

Remarque 2.1

Notons que le trinôme $T(x)$, admet un zéro double $z = 1$, puisque $T(1) = T'(1) = 0$ et $T''(1) \neq 0$.

Preuve de théorème 2.1 :

Soit $\varepsilon > 0$ et a, b des nombres réels tels que $a > b > 0$. Soit $P_\varepsilon(z)$ le polynôme défini par,

$$P_\varepsilon(z) = bz^n + az^m + a - b - \varepsilon,$$

Posons $B = a$, $A = b$ et $C = a - b - \varepsilon$, alors $|B| = a > |A| + |C| = a - \varepsilon$, donc d'après le lemme (2.2), $P_\varepsilon(z)$ admet m zéros à l'intérieur du disque unité U .

Soit α_k ($1 \leq k \leq m$), les m racines de $P_\varepsilon(z)$ dans U , lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, certains zéros de $P_\varepsilon(z)$ tendent en module vers 1.

Soit $\alpha_j = \exp(i\theta_j) = \exp(i\theta)$ avec $\theta \in \mathbb{R}$, l'un de ces zéros.

Posons $d = \text{pgcd}(n, m)$, d'après le lemme 2.1, on a $n\theta \equiv m\theta \pmod{2\pi}$, alors $\alpha_j = \exp(i\theta)$ est une racine $m^{\text{ième}}$ et $n^{\text{ième}}$ de l'unité, donc $\exp(i\theta)$ est une racine $d^{\text{ième}}$ de l'unité, puisque $d = \text{pgcd}(n, m)$.

Soit ω une racine $d^{\text{ième}}$ de l'unité, alors $\omega^d = 1$ et $P(\omega) = 0$.

Supposons que $\alpha_j = \omega$. On a,

$$P'(z) = nbz^{n-1} - amz^{m-1}.$$

Nous distinguons alors deux cas :

Si $\frac{m}{n} \neq \frac{b}{a}$, alors $P'(\omega) \neq 0$ et ω est une racine simple de $P(z)$.

Si $\frac{m}{n} = \frac{b}{a}$, alors $P(\omega) = P'(\omega) = 0$, et $P''(\omega) \neq 0$ alors ω est une racine double de $P(z)$.

Posons $\beta = r\omega$ ($r > 0$) où r est une racine du polynôme $h(r)$ défini par,

$$h(r) = P_\varepsilon(\beta) = br^n - ar^m + a - b - \varepsilon,$$

alors,

$h(0) = a - b - \varepsilon > 0$ et $h(1) = -\varepsilon < 0$, et d'après le théorème des valeurs intermédiaires il existe une racine r_0 de $h(r) = 0$ vérifiant $0 < r_0 \leq 1$, et comme $h(1)h(x) < 0$ lorsque x tend vers l'infini, alors il existe r_1 tel que $h(r_1) = 0$ et vérifiant $r_1 \geq 1$, donc $h(r)$ admet deux racines positives.

D'autre part on a,

$$h'(r) = nbr^{n-1} - mar^{m-1},$$

donc l'équation $h'(r) = 0$, admet une racine positive $r' = \left(\frac{am}{bn}\right)^{\frac{n-m}{n}}$, telle que,

$$r' > 1 \quad \text{si} \quad \frac{a}{b} > \frac{n}{m}, \quad \text{où} \quad n > m$$

et

$$r' < 1 \quad \text{si} \quad \frac{a}{b} < \frac{n}{m}, \quad \text{où} \quad n > m.$$

De plus pour $r_0 < r < r_1$, on a $h(r) < 0$ et la racine r' de $h'(r) = 0$ est indépendante de ε .

Si $r' > 1$, dans ce cas la racine r_0 de $h(r)$ tend vers le bord de U lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, puisque $r_0 < r'$ et $r_1 \geq r'$, ce qui prouve que d racines de $P_\varepsilon(z) = P(z)$ tendent vers le bord de U (puisque $\beta = r\omega$, $r \rightarrow 1$ et $w^d = 1$) donc il y a $(m - d)$ racines de $P_\varepsilon(z) = P(z)$ à l'intérieur du disque unité U .

Si $r' < 1$, dans ce cas c'est la racine $r_1 \geq r'$ de $h(r)$, qui tend vers le bord de U lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$, ce qui implique qu'il y a exactement m racines de $P_\varepsilon(z) = P(z)$ à l'intérieur du disque unité U .

Si $r' = 1$, alors $z = 1$ est un zéro double de $h(r)$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Soit l'équation,

$$P(z) = bz^n - az^m + a - b = 0$$

En divisant les deux membres de l'équation précédente par b on obtient,

$$z^n - \frac{a}{b}z^m + \frac{a}{b} - 1 = 0,$$

ce qui implique,

$$z^n - \frac{n}{m}z^m + \frac{n}{m} - 1 = 0, \quad \text{car} \quad \frac{a}{b} = \frac{n}{m},$$

d'où l'on obtient l'équation,

$$mz^n - nz^m + n - m = 0. \quad (2.6)$$

Posons $d = \text{pgcd}(n, m)$, alors $n = dn'$ et $m = dm'$ avec $\text{pgcd}(n', m') = 1$.

En faisant le changement de variable $y = z^d$ et en divisant l'équation (2.6) par d on trouve,

$$m'y^{n'} - n'y^{m'} + n' - m' = 0, \quad (2.7)$$

mais d'après le corollaire 2.2, l'équation (2.7) admet $(m' - 1)$ racines y_l , $1 \leq l \leq m' - 1$, à l'intérieur du disque unité U .

Donc les zéros de l'équation (2.6) vérifient,

$$z^d = y_l \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq m' - 1$$

d'où l'on a,

$$z_k = y_l \exp\left(\frac{2ik\pi}{d}\right) \quad \text{pour} \quad 1 \leq l \leq m' - 1 \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq d.$$

par suite $P(z)$ admet $d(m' - 1) = (m - d)$ zéros à l'intérieur de U , ce qui achève la démonstration du théorème 2.1.

Proposition 2.1

Pour $n \geq 3$, les zéros du polynôme $(z - 1)^{-2}T(z)$ vérifient :

- (i) $1 + \frac{1}{n-2} \leq |z| \leq [2(n-1)]^{\frac{1}{n-1}}$ pour $m = 1$.
- (ii) $\text{Max} \left\{ (2m)^{-\frac{1}{m}}, 1 - \frac{1}{n-m} \sqrt{\frac{2n}{m}} \right\} \leq |z| \leq \text{Min} \left\{ [2(n-m)]^{-\frac{1}{n-m}}, 1 + \frac{1}{n-m} \sqrt{\frac{2n}{n-m}} \right\}$,
pour $2 \leq m \leq n-2$
- (iii) $[2(n-1)]^{\frac{1}{n-1}} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{n-1}$ pour $m = n-1$.

Preuve de la proposition 2.1 :

Preuve de (i) : La preuve se trouve dans (cf [19]), nous la reprenons et nous la détaillons

dans ce qui suit :

Pour $m = 1$, on obtient $T(z) = z^n - nz + n - 1$. Supposons que $z \neq 1$, dans ce cas nous pouvons utiliser le théorème de Cauchy.

Considérons l'équation,

$$h(x) = x^n - nx - (n - 1) = 0,$$

associée au polynôme $T(z)$. Soit α l'unique racine positive de $h(x) = 0$.

On a,

$$h'(x) = nx^{n-1} - n > 0, \quad \text{pour } x > 1,$$

donc la fonction h est croissante si $x > 1$ et de plus on a $h(1) = -2(n - 1) < 0$, pour $n \geq 3$.

Posons $x_0 = [2(n - 1)]^{\frac{1}{n-1}}$ alors $h([2(n - 1)]^{\frac{1}{n-1}}) > 0$.

En effet on a,

$$\begin{aligned} h(x_0) = x_0^n - nx_0 - (n - 1) &= x_0[2(n - 1) - n] - (n - 1). \\ &= (n - 2) \left[x_0 - \frac{n - 1}{n - 2} \right]. \\ &= (n - 2) \left[(2(n - 1))^{1/n-1} - \frac{n - 1}{n - 2} \right]. \end{aligned}$$

Comme,

$$\left(\frac{n - 1}{n - 2} \right)^{n-2} = \left(1 + \frac{1}{n - 2} \right)^{n-2} < 3, \tag{2.8}$$

en multipliant les deux membres de l'inégalité (2.8) par $\frac{n - 1}{n - 2}$ on obtient,

$$3 \left(\frac{n - 1}{n - 2} \right) > \left(1 + \frac{1}{n - 2} \right)^{n-1},$$

d'où l'on déduit puisque $n \geq 3$,

$$2(n - 1) > 3 \left(\frac{n - 1}{n - 2} \right) > \left(\frac{n - 1}{n - 2} \right)^{n-1},$$

par suite,

$$(2(n - 1))^{1/n-1} > \frac{n - 1}{n - 2}$$

d'où,

$$h(x_0) = \left(x_0 - \frac{n - 1}{n - 2} \right) (n - 2) > 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $h(x)$ admet une racine réelle positive dans l'intervalle $]1, x_0[$ et puisque α est l'unique racine positive de $h(x) = 0$, donc $1 < \alpha < x_0$, le théorème de Cauchy (cf.[17]) permet alors de conclure que tous les zéros de $T(z)$ sont de modules inférieurs ou égaux à α , ceci implique que toutes les racines de $T(z) = 0$, se trouvent à l'intérieur du disque $|z| \leq x_0 = [2(n-1)]^{\frac{1}{n-1}}$, ceci d'une part.

D'autre part on a,

$$\begin{aligned} T(z) &= z^n - 1 - n(z-1) = (z-1)(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) - n(z-1) \\ &= (z-1) \left[(z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1) - n \right] \\ &= (z-1) \left[(z^{n-1} - 1) + (z^{n-2} - 1) + \dots + (z^2 - 1) + (z - 1) \right] \\ &= (z-1)^2 \left[(z^{n-2} + z^{n-3} + \dots + z + 1) + (z^{n-3} + z^{n-4} + \dots + z + 1) + \dots + (z^2 + z + 1) + (z + 1) + 1 \right] \end{aligned}$$

d'où,

$$T(z) = z^n - 1 - n(z-1) = (z-1)^2 [z^{n-2} + 2z^{n-3} + \dots + (n-2)z + (n-1)] \quad (2.9)$$

par suite en divisant l'équation (2.9) par $(z-1)^2$ avec $z \neq 1$ il vient ,

$$(z-1)^{-2}T(z) = \sum_{k=0}^{n-2} (n-1-k)z^k,$$

comme on a,

$$\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{n-1-k}{n-1-(k+1)} = 1 + \frac{1}{n-2-k}, \quad 0 \leq k \leq n-3,$$

alors $\frac{a_k}{a_{k+1}}$, atteint sa valeur minimale lorsque $(n-2-k)$ prend sa valeur maximale, ce qui est vérifié pour $k = 0$.

Posons :

$$\rho = \min_{0 \leq k \leq n-3} \left(\frac{a_k}{a_{k+1}} \right),$$

alors on a,

$$\rho = \min_{0 \leq k \leq n-3} \left(1 + \frac{1}{n-2-k} \right) = 1 + \frac{1}{n-2}.$$

Comme tous les coefficients du polynôme $(z-1)^{-2}T(z)$ sont positifs, le théorème d'Enestrom-Kakeya (cf [17]) implique que tous les zéros de $(z-1)^{-2}T(z)$ sont de modules supérieurs ou

égaux à $\rho = 1 + \frac{1}{n-2}$ donc,

$$|z| \geq 1 + \frac{1}{n-2} \quad n \geq 3,$$

ce qui prouve (i).

Preuve de (ii) :

Soit l'équation $f(x) = mx^n - nx^m - (n-m) = 0$ associé à $T(z)$ et α l'unique racine positive de l'équation $f(x) = 0$.

Pour $x \geq 1$, on a $f'(x) = mn(x^{n-1} - x^{m-1}) \geq 0$, alors la fonction $f(x)$ est croissante et on a $f(1) = 2(m-n) < 0$.

Posons $x_0 = [2(n-m)]^{\frac{1}{n-m}}$ alors,

$$f(x_0) = x_0^m(mx_0^{n-m} - n) - n + m.$$

Comme $x_0^m > 1$, alors

$$f(x_0) \geq 2(m-1)n - 2m^2 + m \geq 2(m-1)(m+1) - 2m^2 + m > m - 2 > 0,$$

d'où $f(1)f(x_0) < 0$. Le théorème des valeurs intermédiaires permet alors d'affirmer que $1 < \alpha < x_0$, ensuite le théorème de Cauchy, permet de conclure que tous les zéros de $(z-1)^{-2}T(z)$ sont à l'intérieur du disque $|z| \leq x_0 = [2(n-m)]^{\frac{1}{n-m}}$, ceci d'une part. D'autre part, le polynôme $T(z)$ peut se mettre sous la forme,

$$T(z) = mz^n - nz^m + n - m = m(z^n - 1) + n(z^m - 1).$$

Posons $z = (1+\delta)e^{it}$ où δ et t sont deux nombres réels tel que $\delta > 1$ alors,

$$|z^n - 1| \geq |(1+\delta)^ne^{int} - 1| \geq (1+\delta)^n - 1 \quad \text{et} \quad |z^m - 1| \leq |(1+\delta)^me^{imt} - 1| \leq (1+\delta)^m + 1.$$

L'inégalité,

$$|m(z^n - 1)| > |n(z^m - 1)| \tag{2.10}$$

est vérifiée si l'on a,

$$m[(1+\delta)^n - 1] > n[(1+\delta)^m + 1],$$

c'est-à-dire si l'inégalité,

$$m(1 + \delta)^n - m > n(1 + \delta)^m + n,$$

est vérifiée,

ceci est équivalent à,

$$(1 + \delta)^m (m(1 + \delta)^{n-m} - n) > n + m. \quad (2.11)$$

En utilisant l'inégalité,

$$(1 + \delta)^k > 1 + k\delta, \quad \text{valable pour} \quad k \geq 2 \text{ et } \delta > -1, \quad (2.12)$$

on obtient,

$$(1 + \delta)^m > 1 + m\delta. \quad (2.13)$$

et donc,

$$(1 + \delta)^{n-m} > 1 + (n - m)\delta. \quad (2.14)$$

En multipliant l'inégalité (2.14) par m puis en retranchant n des deux membres de l'inégalité obtenue il vient,

$$(1 + \delta)^{n-m}m - n > m - n + m(n - m)\delta. \quad (2.15)$$

Les inégalités (2.13), (2.15) impliquent alors que,

$$((1 + \delta)^m)((1 + \delta)^{n-m}m - n) > (1 + m\delta)(m - n + m(n - m)\delta) \quad (2.16)$$

Grâce à l'inégalité (2.16), on déduit que (2.11) est vérifiée si,

$$(1 + m\delta)(m - n + m(n - m)\delta) > n + m,$$

c'est-à-dire si l'on a,

$$(n - m)(1 + m\delta)(m\delta - 1) > n + m,$$

ce qui équivaut à,

$$m^2\delta^2 > \frac{n + m}{n - m} + 1.$$

d'où,

$$(1 + \delta)^{n-m}m - n > \delta > \delta_0 = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2n}{n - m}}.$$

L'inégalité (2.10) est donc vérifiée si $\delta > \delta_0$ et par le théorème de Rouché (cf.[17]),

$T(z) = m(z^n - 1) + n(z^m - 1)$ et $S(z) = m(z^n - 1)$, ont donc le même nombre de zéros dans le disque $|z| < 1 + \delta_0$, où $\delta_0 = \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2n}{n-m}}$.

Comme $S(z)$ admet n racines dans ce disque, alors tous les zéros de $T(z)$ sont dans le disque $|z| \leq 1 + \delta_0$.

On conclut donc que tous les zéros de $(z-1)^{-2}T(z)$ vérifient l'inégalité,

$$|z| \leq \text{Min} \left\{ [2(n-m)]^{\frac{1}{n-m}}, 1 + \frac{1}{m} \sqrt{\frac{2n}{n-m}} \right\}.$$

Pour la minoration des modules des zéros de $(z-1)^{-2}T(z)$, on considère le polynôme réciproque $z^n T(1/z) = (n-m)z^n - nz^{n-m} + n - (n-m)$ de $T(z)$.

Soit $w(x) = 0$, l'équation associée à $z^n T(1/z)$, c'est-à-dire l'équation $(n-m)x^n - nx^{n-m} - m = 0$.

Soit α l'unique racine positive de $w(x)$; pour $x > 1$ on a, $w'(x) = n(n-m)(x^{n-1} - x^{n-m-1}) > 0$, donc la fonction $w(x)$ est croissante.

Posons $x_0 = (2m)^{\frac{1}{m}}$, on a $w(x_0) > 0$, en effet on a,

$$w(x_0) = x_0^{n-m}((n-m)x_0^m - n) - m$$

d'où,

$$w(x_0) > (n-m)(2m-1) - 2m > 0, \quad \text{où} \quad n > m > 0.$$

et pour $m > 0$, on a $w(1) = -2m < 0$, donc $w(1)w(x_0) < 0$, par suite le théorème des valeurs intermédiaires implique que $1 < \alpha < x_0$ et par le théorème de Cauchy (cf [17]) on conclut que tous les zéros de $z^n T(1/z)$, sont à l'intérieur du disque $|z| < x_0 = (2m)^{\frac{1}{m}}$.

Comme si z est un zéro de $T(z)$ alors $\frac{1}{z}$ est un zéro de $z^n T(1/z)$ et que les zéros z de $z^n T(1/z)$ vérifient $|z| < (2m)^{\frac{1}{m}}$ c'est-à-dire, les zéros de $T(z)$ vérifient $|\frac{1}{z}| \leq (2m)^{\frac{1}{m}}$, donc $|z| \geq (2m)^{-\frac{1}{m}}$.

Ceci d'une part.

D'autre part, $z^n T(1/z)$ s'écrit aussi sous la forme,

$$z^n T(1/z) = (n-m)(z^n - 1) + n(z^{n-m} - 1),$$

posons : $R(z) = (n - m)(z^n - 1)$, $S(z) = n(z^{n-m} - 1)$, et cherchons une condition pour que l'inégalité,

$$|R(z)| = |(n - m)(z^n - 1)| > |n(z^{n-m} - 1)| = |S(z)|,$$

soit vérifiée.

Posons, $z = (1 + \delta)e^{it}$, où δ et t sont deux nombres réels tel que $\delta > 0$ alors on a,

$$|z^n - 1| > (1 + \delta)^n - 1,$$

et

$$|z^{n-m} - 1| < (1 + \delta)^{n-m} + 1.$$

L'inégalité

$$|(n - m)(z^n - 1)| > |n(z^{n-m} - 1)|, \quad (2.17)$$

est vérifiée si,

$$(n - m)(1 + \delta)^n - (n - m) > n(1 + \delta)^{n-m} + n,$$

si et seulement si,

$$(1 + \delta)^{n-m} ((n - m)(1 + \delta)^m - n) > 2n - m. \quad (2.18)$$

D'après (2.12) l'inégalité (2.18) est donc vérifiée si l'on a,

$$m(1 + (n - m)\delta)((n - m)\delta - 1) > 2n - m.$$

autrement dit si,

$$(n - m)^2 \delta^2 - 1 > \frac{2n - m}{m},$$

est vérifiée, c'est-à-dire si,

$$\delta > \delta_0 = \frac{1}{n - m} \sqrt{\frac{2n}{m}},$$

L'inégalité (2.17) et le théorème de Rouché (cf [17]) impliquent alors que les polynômes

$R(z) + S(z) = z^n T\left(\frac{1}{z}\right) = (n - m)(z^n - 1) + n(z^{n-m} - 1)$ et $R(z) = (n - m)(z^n - 1)$, ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque $|z| < 1 + \delta_0$, donc tous les zéros de $z^n T\left(\frac{1}{z}\right)$ sont dans le disque $|z| < 1 + \delta_0$.

Or si z est un zéro de $T(z)$, alors $\frac{1}{z}$ est un zéro de $z^n T(1/z)$, ce qui implique $|z| > (1 + \delta_0)^{-1}$.

L'inégalité (2.12) implique $|z| > 1 - \delta_0$ où $\delta_0 = \frac{1}{n-m} \sqrt{\frac{2n}{m}}$, d'où l'on déduit que,

$$|z| \geq \max \left\{ (2m)^{\frac{-1}{m}}, 1 - \frac{1}{n-m} \sqrt{\frac{2n}{m}} \right\}, \quad \text{où } 2 \leq m \leq n-2.$$

ce qui achève la preuve de (ii).

Preuve de (iii) :

Pour $m = n-1$, $T(z)$ s'écrit,

$$T(z) = T_{n,n-1}(z) = (n-1)z^n - nz^{n-1} + n - (n-1).$$

Nous remarquons que $T_{n,n-1}(z) = T_{n,1}^*(z)$, où $T_{n,1}^*(z)$ est le polynôme réciproque du polynôme $T_{n,1}(z) = z^n - nz + n - 1$. Puisque $T_{n,1}(z)$ vérifie la condition (i), alors $T_{n,n-1}(z) = z^n T_{n,1}(1/z)$ vérifie aussi la condition (i).

Soit z une racine du trinôme $T_{n,n-1}(z)$ alors $\frac{1}{z}$ est une racine de $T_{n,1}(z)$, d'après (i) on a,

$$1 + \frac{1}{n-2} \leq \left| \frac{1}{z} \right| \leq [2(n-1)]^{\frac{1}{n-1}}.$$

par suite,

$$[2(n-1)]^{\frac{-1}{n-1}} \leq |z| \leq 1 - \frac{1}{n-1}.$$

d'où le résultat de la proposition 2.1.

La proposition qui suit précise la distribution des zéros du polynôme $T(z)$ par rapport au disque unité.

Proposition 2.2

Soient n, m deux entiers positifs tels que $n > m \geq 1$, alors le trinôme $T(z)$ admet :

- (i) $(m-1)$ zéros à l'intérieur du disque unité U voisins des racines $m^{\text{ème}}$ de l'unité différentes de 1.
- (ii) $(n-m-1)$ zéros à l'extérieur du disque unité U voisins des racines $(n-m)^{\text{ème}}$ de l'unité différentes de 1.

Preuve : La preuve se trouve dans (cf [8]).

La proposition 2.2, signifie d'une façon plus explicite que pour $\varepsilon > 0$ et m fixés, il existe un entier n_0 tel que $\forall n > n_0$, les zéros intérieurs à U sont situés à une distance inférieure ou égale à ε des racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Pour $n - m$ et $\varepsilon > 0$ fixés, il existe un entier m_0 tel que $\forall n > m_0$, les zéros qui sont à l'extérieur de U se trouvent à une distance inférieure ou égale à ε des racines $(n - m)^{\text{ième}}$ de l'unité.

Soit $\delta > 0$, posons :

$$T_{n, m, \delta}(z) = T_{\delta}(z) = mz^n - nz^m + n(1 - \delta) - m.$$

Pour δ fixé, on associe à chaque zéro de $T(z)$ dans U , un zéro de $T_{\delta}(z)$. Pour le zéro double $z = 1$ de $T(z)$, on associe un zéro de $T_{\delta}(z) = mz^n - nz^m + n(1 - \delta) - m$, qui se trouve à l'intérieur du disque U et un zéro à l'extérieur de U .

Posons,

$$\psi_n(z) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{n} T_{n, m, \delta}(z) \right) = -z^m + 1 - \delta \quad \text{pour } |z| \leq 1.$$

La fonction $\psi_n(z)$ est holomorphe dans $\mathbb{C}$ et converge uniformément vers $h(z) = -z^m + 1 - \delta$. D'après le théorème de Hurwitz, les zéros de $T_{n, m, \delta}(z)$ qui se trouvent à l'intérieur du disque U , tendent vers les zéros de $h(z)$, c'est-à-dire vers $(1 - \delta)^{\frac{1}{m}} \zeta_i$, où ζ_i , $1 \leq i \leq m$, sont les racines $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Si on choisit δ assez petit, alors chaque zéro de $T(z)$ se trouve au voisinage d'une racine $m^{\text{ième}}$ de l'unité.

Nous appliquons la méthode précédente au polynôme réciproque de $T_{n, m, \delta}(z)$, en posant :

$$n\varphi_n(z) = z^n T_{n, m, \delta} \left(\frac{1}{z} \right) = (n - m)z^n - nz^{n-m} + n(1 - \delta) - (n - m),$$

pour $\delta > 0$ fixé, on associe à chaque zéro de $T(1/z)$ dans le disque U , parmi les $(n - m - 1)$ zéros, un zéro de $T_{n, m, \delta} \left(\frac{1}{z} \right)$ à l'intérieur du disque unité U , et pour le zéro double $z = 1$ de $T(1/z)$, on associe un zéro de $T_{n, m, \delta} \left(\frac{1}{z} \right)$ à l'intérieur de U et un zéro à l'extérieur du disque U . La fonction $\varphi_n(z)$ est holomorphe et converge vers la fonction $g(z) = -z^{n-m} + 1 - \delta$ pour

$$|z| \leq 1.$$

Le théorème de Hurwitz, nous permet alors de conclure que les $(n - m)$ zéros de $T_{n, m, \delta}(1/z)$ tendent vers $(1 - \delta)^{\frac{1}{n-m}} \zeta_j$, où ζ_j ($1 \leq j \leq n - m$), sont les racines $(n - m)^{\text{ième}}$ de l'unité.

Donc pour δ choisi assez petit, chaque zéro de $T(1/z)$ se trouve au voisinage d'une racine $(n - m)^{\text{ième}}$ de l'unité, ce qui achève la preuve de la proposition 2.2.

Chapitre 3

Localisation des zéros du polynôme

$$P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n.$$

3.1 Introduction

Soit $T(x)$ le trinôme défini par,

$$T_{n,m}(x) = T(x) = mx^n - nx^m + n - m, \quad \text{où } n > m > 0.$$

Le trinôme $T(x)$ joue un rôle important dans l'étude de certaines inégalités intervenant en analyse. Le changement de variable x par $(\frac{t}{y})^{\frac{1}{n}}$ et $\frac{m}{n}$ par λ dans l'inégalité $T(x) > 0$ (cf [12]) conduit à :

$$\lambda t + (1 - \lambda)y > t^\lambda y^{\lambda-1}.$$

En remplaçant de nouveau dans cette dernière inégalité y par 1 et t par $\left(1 + \frac{au}{n}\right)^n$ où a est un nombre réel, on obtient le polynôme $P_{n,\lambda}(z) = P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n$, avec $z = 1 + \frac{u}{n}$.

Dans ce qui suit, nous étudions la répartition des zéros du polynôme $P_{n,\lambda}(z) = P_n(z)$.

Dans la première partie de ce chapitre nous avons appliqué les théorèmes d'*Eneström-Kakeya* (cf [17]), de *Rouché* (cf [17]) et de *Hurwitz* pour montrer que pour des petites valeurs de n , $n \leq \frac{1}{51\lambda} + 1$, $P_n(z)$ n'a aucun zéro à l'intérieur du disque unité U .

Dans la deuxième partie, nous montrons que pour n assez grand, la répartition des zéros du polynôme $P_{n,\lambda}(z)$, dépend de la valeur du paramètre λ ; nous distinguons alors deux cas selon que λ est l'inverse ou n'est pas l'inverse d'un entier.

Les mêmes théorèmes utilisés dans la première partie, nous ont permis de montrer que $P_{n,\lambda}(z)$ a un zéro dans le disque unité U .

Dans le cas où λ est l'inverse d'un entier, le théorème de *Cohn* (cf [17]), nous a permis de prouver que tous les zéros de $P_{n,\lambda}(z)$ sont à l'intérieur du disque unité U si $\lambda = \frac{1}{2}$ et pour $\lambda < \frac{1}{2}$, nous utilisons le développement de Taylor ainsi que quelques propriétés géométriques de la courbe $E(\rho)$ définie dans la proposition 3.3, pour montrer que $P_{n,\lambda}(z)$ n'a aucun zéro dans le disque unité U .

3.2 Localisation des zéros du polynôme $P_n(z)$.

Soit $P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n$, un polynôme de degré $n \geq 2$, le théorème suivant affirme que pour tout entier n tel que $0 < n \leq \frac{5}{51\lambda} + 1$, $P_n(z)$ n'a aucun zéro à l'intérieur du disque unité U .

Théorème 3.1

Soit λ un nombre réel positif tel que $0 < \lambda < 1$.

Alors $P_n(z)$ n'admet aucun zéro dans le disque unité U pour $n \leq \frac{5}{51\lambda} + 1$.

Preuve :

Pour démontrer ce théorème, nous citons le lemme suivant que nous démontrerons ultérieurement.

Lemme 3.1

Soient λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$, $H(z) = z^{n-2} + 2z^{n-3} + \dots + (n-2)z + n-1$ et $Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z-1)^{n-k-2} q^k$, deux polynômes à coefficients strictement positifs.

Si $n \leq \frac{1}{51\lambda} + 1$, alors

$$|H(e^{i\theta})|q^{n-1} > |Q(e^{i\theta})|, \quad \text{pour} \quad 0 < \theta < 2\pi. \quad (3.1)$$

Preuve du lemme 3.1

On a,

$$H(z) = z^{n-2} + 2z^{n-3} + \dots + (n-2)z + n-1 \quad \text{et} \quad Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z-1)^{n-k-2} q^k.$$

Commençons d'abord par estimer $|H(e^{i\theta})|$ et $|Q(e^{i\theta})|$.

Estimation de $|Q(e^{i\theta})|$:

On a,

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)}{(n-1-k)(n-k)} \binom{n-2}{k} < \frac{n(n-1)}{2} \binom{n-2}{k} \quad \text{pour} \quad 0 \leq k \leq n-2,$$

comme on a, $|e^{i\theta} - 1| = \sqrt{2 - 2\cos\theta} = 2\sin\frac{\theta}{2}$,

alors,

$$|Q(e^{i\theta})| \leq \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n-k-2} q^k < \frac{n(n-1)}{2} \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n-2}{k} \left(2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n-k-2} q^k,$$

d'où l'on déduit l'inégalité

$$|Q(e^{i\theta})| < \frac{n(n-1)}{2} \left(q + 2\sin\frac{\theta}{2}\right)^{n-2}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (3.2)$$

Estimation de $|H(e^{i\theta})|$:

On considère le trinôme,

$$(z-1)^2 H(z) = z^n - 1 - n(z-1), \quad (3.3)$$

et on suppose que $0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$.

Alors,

$$\begin{aligned} |H(e^{i\theta})| &= \left| \frac{e^{in\theta} - 1 - n(e^{i\theta} - 1)}{(e^{i\theta} - 1)^2} \right| \\ &= \left| \frac{2\sin\frac{n\theta}{2}(-\sin\frac{n\theta}{2} + i\cos\frac{n\theta}{2}) - 2n\sin\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})}{4\sin^2\frac{\theta}{2}(-\sin\frac{\theta}{2} + i\cos\frac{\theta}{2})^2} \right| \\ &= \frac{\left| 2i(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}) \right| \left| \sin\frac{n\theta}{2}(\cos\frac{(n-1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n-1)\theta}{2}) - n\sin\frac{\theta}{2} \right|}{4\sin^2\frac{\theta}{2} |\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}|^2} \end{aligned}$$

d'où l'on a,

$$|H(e^{i\theta})| = \frac{1}{2\sin^2\frac{\theta}{2} |(\cos\frac{(n-1)\theta}{2} + i\sin\frac{(n-1)\theta}{2})\sin\frac{n\theta}{2} - n\sin\frac{\theta}{2}|}.$$

Comme pour tout nombre complexe z , on a $|z| \geq |Im(z)|$ alors,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{1}{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \left| \sin \frac{(n-1)\theta}{2} \sin \frac{n\theta}{2} \right|. \quad (3.4)$$

Si $0 < \frac{n\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, la fonction $\frac{\sin x}{x}$ étant décroissante sur l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}]$ donc,

$$\left| \sin \frac{n\theta}{2} \right| \geq \frac{2}{\pi} \frac{n\theta}{2} = \frac{n\theta}{\pi},$$

et comme $0 < \sin \frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2}$, l'inégalité (3.4) implique alors,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{2}{\pi^2} n(n-1), \quad \text{pour } 0 < \theta \leq \frac{\pi}{n}. \quad (3.5)$$

Si $\frac{\pi}{n} \leq \theta \leq \pi$, et si $z \neq 1$, en divisant la relation (3.3), par $(z-1)$ on obtient,

$$(z-1)H(z) = z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1 - n,$$

ce qui équivaut à,

$$H(z) = \frac{n - (z^{n-1} + z^{n-2} + \dots + z + 1)}{z-1}$$

par suite,

$$|H(e^{i\theta})| = \left| \frac{n - (1 + e^{i\theta} + \dots + e^{i(n-1)\theta})}{e^{i\theta} - 1} \right|.$$

Fixons n et K tel que $2^K \leq n < 2^{K+1}$, et posons $M = 2^K$, alors $\frac{n}{2} < M \leq n$.

Soit k un entier fixé tel que $1 \leq k < K$ et posons $m = 2^k$, alors $M = hm$, avec $1 < h < 2^{K-k}$ et $\frac{M}{m} = 2^{K-k}$.

Pour minorer $|H(e^{i\theta})|$, nous allons minorer d'abord $\left| n - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right|$.

Pour cela on a,

$$\left| n - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right| \geq n - \left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| - |e^{iM\theta}| - \dots - |e^{i(n-1)\theta}|, \quad (3.6)$$

il suffit donc de majorer $\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right|$.

Ecrivons que,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right| + \left| \sum_{k=m}^{2m-1} e^{ik\theta} \right| + \dots + \left| \sum_{k=h(m-1)}^{hm} e^{ik\theta} \right|$$

alors,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right| + |e^{im\theta}| \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right| + \dots + |e^{i(h-1)m\theta}| \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right|$$

d'où,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq \left(\sum_{k=0}^{(h-1)m} |e^{ik\theta}| \right) \left(\left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right| \right)$$

comme $|e^{il\theta}| = 1$ pour tout entier l alors,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq h \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right|,$$

ce qui implique,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq 2^{K-k} \left| \sum_{k=0}^{m-1} e^{ik\theta} \right|,$$

d'où la majoration,

$$\left| \sum_{k=0}^{M-1} e^{ik\theta} \right| \leq \frac{M}{m} \left| \frac{e^{im\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right|, \quad (3.7)$$

les inégalités (3.6), (3.7) impliquent alors,

$$\left| n - \sum_{k=0}^{n-1} e^{ik\theta} \right| \geq M - \frac{M}{m} \left| \frac{e^{im\theta} - 1}{e^{i\theta} - 1} \right|, \quad (3.8)$$

en divisant les deux membres de l'inégalité (3.8) par $|e^{i\theta} - 1|$ on obtient,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{M}{|e^{i\theta} - 1|^2} \left(|e^{i\theta} - 1| - \frac{1}{m} |e^{im\theta} - 1| \right),$$

d'où l'on déduit que,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{M}{2 \sin^2(\frac{\theta}{2})} \left(\sin(\frac{\theta}{2}) - \frac{1}{m} \sin(\frac{m\theta}{2}) \right). \quad (3.9)$$

En écrivant le développement de Taylor de la fonction $\sin(\frac{\theta}{2})$ à l'ordre 2 sur l'intervalle $]0, \pi[$ et $\sin(\frac{m\theta}{2})$ à l'ordre 5 on obtient,

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \geq \frac{\theta}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{\theta}{2}\right)^3 \quad (3.10)$$

et

$$\frac{-1}{m} \sin\left(\frac{m\theta}{2}\right) \geq \frac{-1}{m} \left[\frac{m\theta}{2} - \frac{1}{6} \left(\frac{m\theta}{2}\right)^3 + \frac{1}{120} \left(\frac{m\theta}{2}\right)^5 \right]. \quad (3.11)$$

Grâce aux relations (3.9), (3.10), (3.11) ainsi qu'à l'inégalité $\sin(\frac{\theta}{2}) \leq \frac{\theta}{2}$ on déduit que,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{Mm^2}{24}\theta \left(1 - \frac{1}{m^2} - \frac{(m\theta)^2}{80}\right). \quad (3.12)$$

Comme pour tout $m \geq 4$, on a $\frac{\pi}{2m} \leq \theta \leq \frac{\pi}{m}$, alors $m\theta \geq \frac{\pi}{2}$.

Le deuxième membre de la relation (3.12) est donc minoré par,

$$1 - \frac{1}{m^2} - \frac{(m\theta)^2}{80} \geq 1 - \frac{1}{16} - \frac{\pi^2}{80} > \frac{48}{59},$$

Comme $Mm \geq 4M > 2n$, (3.12) implique,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{2\pi}{59}n. \quad (3.13)$$

L'inégalité (3.13), est vérifiée pour $4 \leq m \leq M$.

En effet, si $\frac{\pi}{2M} \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, alors $2M > n$ et pour $n \geq 2$, on a $\frac{2\pi}{59} \leq \frac{2(n-1)}{\pi^2}$, ce qui implique,

$$\frac{2\pi}{59}n \leq \frac{2(n-1)}{\pi^2}n,$$

par suite,

$$\frac{2\pi}{59}n \leq |H(e^{i\theta})|,$$

donc la minoration (3.13) est vérifiée pour tout θ tel que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$.

Si $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ et $m = 2$, l'inégalité (3.9) implique,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{M(1 - \cos \frac{\theta}{2})}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = M \frac{1 - (1 - \sin^2 \frac{\theta}{2})^{\frac{1}{2}}}{2 \sin \frac{\theta}{2}} \geq M \frac{1 - (1 - \frac{1}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2})}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

d'où l'on déduit que,

$$|H(e^{i\theta})| \geq \frac{n}{8} \sin \frac{\theta}{2}, \quad \text{pour} \quad \frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi \quad \text{et} \quad M > \frac{n}{2}. \quad (3.14)$$

Pour $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \pi]$, les inégalités (3.2) et (3.14) montrent que la minoration (3.1)

du lemme 3.1, est vérifiée dès que l'on a,

$$q^{n-1} \frac{n}{8} \sin \frac{\theta}{2} > \frac{n(n-1)}{2} \left(q + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{n-2}$$

ceci est équivalent à,

$$q \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{n-1} > 4 \left(1 + \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2})}{q} \right)^{n-2}. \quad (3.15)$$

Pour $q \geq 4n$, la fonction $q \rightarrow q \frac{\sin(\frac{\theta}{2})}{n-1}$ croît plus rapidement que la fonction $q \rightarrow 4 \left(1 + \frac{2 \sin(\frac{\theta}{2})}{q} \right)$ pour tout θ tel que $0 \leq \theta \leq \pi$.

Posons $a = \sin \frac{\pi}{8}$, alors l'inégalité (3.15) est vérifiée pour tout θ tel que $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$ pourvu que,

$$\frac{q}{n-1} > \frac{4}{a} \left(\frac{1+2a}{q} \right)^{n-1}. \quad (3.16)$$

En posant $d = \frac{q}{(n-1)a}$ dans (3.16) on obtient,

$$d > \frac{4}{a^2} \left(1 + \frac{\frac{2}{d}}{n-1} \right)^{n-1},$$

cette dernière inégalité est vérifiée lorsque,

$$d > \frac{4}{a^2} \exp\left(\frac{2}{d}\right),$$

les calculs numériques montrent alors que $d \geq 26.58$ donc,

$$\frac{q}{n-1} a \geq 26.58$$

cela implique $q \geq \frac{51}{5}(n-1)$, par suite l'inégalité (3.1) est vérifiée sur l'intervalle $\frac{\pi}{4} \leq \theta \leq \pi$, pour $n \leq \frac{5}{51}q + 1$.

Si θ est dans l'intervalle $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{4}$, les relations (3.2) et (3.13) impliquent que l'inégalité (3.1) est satisfaite dès que l'on a,

$$\frac{2\pi}{59} n q^{n-1} > \frac{n(n-1)}{2} \left(q + 2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{n-2},$$

mais cette dernière inégalité est vérifiée si on a,

$$\frac{q}{n-1} \geq \frac{59}{4\pi} \left(1 + \frac{2a}{q} \right)^{n-1}. \quad (3.17)$$

En remarquant que $\frac{4}{a} > \frac{59}{4\pi}$, l'inégalité (3.15) nous permet alors de conclure que (3.17) est vérifiée pour tout $n \leq \frac{5}{51}q + 1$, d'où l'on déduit que (3.1) est vérifiée sur tout l'intervalle

$0 \leq \theta \leq \pi$, pour $n \leq \frac{5}{51}q + 1$.

Par symétrie puisque $|z| = |-z|$ et avec le même raisonnement, nous prouvons que le lemme 3.1 est vérifié pour $\theta \in [0, 2\pi]$.

Preuve du théorème 3.1 :

Soit un nombre réel $q > 1$. Posons $\lambda = \frac{1}{q}$ dans $P_n(z)$, alors

$$P_n(z) = \frac{1}{q}z^n + 1 - \frac{1}{q} - \left(\frac{1}{q}z + 1 - \frac{1}{q}\right)^n,$$

en multipliant les deux membres de cette dernière expression par q^n on obtient,

$$q^n P_n(z) = q^{n-1}(z^n + q - 1) - (z + q - 1)^n,$$

comme,

$$(z + q - 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (z - 1)^{n-k} q^k = q^n + nq^{n-1}(z - 1) + \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z - 1)^{n-k} q^k.$$

et que d'après la relation (2.9) on a,

$$z^n - 1 - n(z - 1) = (z - 1)^2 [z^{n-2} + 2z^{n-3} + 3z^{n-4} + \dots + (n - 2)z + (n - 1)].$$

alors,

$$q^n P_n(z) = (z^n - 1 - n(z - 1)) q^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z - 1)^{n-k} q^k,$$

pour $z \neq 1$, en divisant les deux membres par $(z - 1)^2$ il vient,

$$\frac{q^n}{(z - 1)^2} P_n(z) = (z^{n-2} + 2z^{n-3} + \dots + (n - 2)z + n - 1) q^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z - 1)^{n-k-2} q^k,$$

d'où l'on déduit que,

$$\frac{q^n}{(z - 1)^2} P_n(z) = H(z) q^{n-1} - Q(z), \quad (3.18)$$

avec,

$$H(z) = z^{n-2} + 2z^{n-3} + \dots + (n - 2)z + n - 1,$$

et

$$Q(z) = \sum_{k=0}^{n-2} \binom{n}{k} (z - 1)^{n-k-2} q^k.$$

D'après le lemme 3.1 et le théorème de Rouché (cf [17]), les polynômes $\frac{q^n}{(z-1)^2}P_n(z)$ et $H(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur du disque U .

Au chapitre 2, nous avons grâce au théorème d'Eneström-Kakeya (cf [21]), prouvé que $H(z)$ n'a aucun zéro dans le disque unité U , donc $P_n(z)$ ne s'annule pas dans ce disque. Ce qui achève la démonstration du théorème 3.1.

3.2.1 Cas où λ n'est pas l'inverse d'un entier

Lorsque λ n'est pas l'inverse d'un entier, K. Dilcher a dans (cf [8]) montré que :

Théorème 3.2 (cf [20])

Soit λ un nombre réel positif $0 < \lambda < 1$ tel que $\frac{1}{\lambda}$ ne soit pas un entier.

Alors pour n assez grand $P_n(z)$ a un zéro à l'intérieur du disque unité U .

Preuve : (cf [8])

La preuve de ce théorème nécessite le lemme suivant :

Lemme 3.2

Soit α un nombre réel positif non entier tel que $\alpha > 1$.

Alors l'équation,

$$h(s) = e^{\alpha s} - \alpha e^s + \alpha - 1 = 0,$$

admet une infinité de racines complexes de parties réelles négatives.

Preuve du lemme 3.2 :

Soit $\alpha > 1$, un nombre réel tel que α ne soit pas un entier et $h(s) = e^{\alpha s} - \alpha e^s + \alpha - 1$,

On a deux cas : soit α est rationnel soit α est irrationnel.

Cas où α est rationnel :

Posons $\alpha = \frac{n}{m}$, avec n, m des entiers positifs tel que $n > m$ et $\text{pgcd}(n, m) = 1$.

Considérons le polynôme $P(z) = z^n - \alpha z^m + \alpha - 1$.

D'après le théorème 2.1, $P(z)$ admet $(m-1)$ zéros dans le disque unité U .

Soit $z_0 = re^{i\theta}$, $r < 1$, l'un de ces zéros alors,

$$P(z_0) = e^{n \ln z_0} - \alpha e^{m \ln z_0} + \alpha - 1 = 0,$$

comme pour tout nombre complexe z on a $\ln(z) = \ln|z| + 2i\pi \arg(z)$, alors

$$\exp \left[\frac{n}{m} m(\ln r + i\theta + 2\pi i k) \right] - \alpha \exp [m(\ln r + i\theta + 2\pi i k)] + \alpha - 1 = 0 \quad \text{où } k \in \mathbb{Z},$$

d'où,

$$\exp [\alpha(m \ln r + im\theta + 2\pi imk)] - \alpha \exp [m \ln r + im\theta + 2\pi imk] + \alpha - 1 = 0, \quad \text{avec } k \in \mathbb{Z},$$

par suite,

$$h(m \ln r + im(\theta + 2\pi k)) = 0, \quad k \in \mathbb{Z},$$

donc $s_k = m \ln r + im(\theta + 2\pi k)$ est une racine de l'équation $h(s) = 0$, tel que $\operatorname{Re}(s_k) < 0$, car $r < 1$.

Cas où α est irrationnel :

Soit $2\alpha = [a_0, a_1, a_2, \dots]$, le développement de 2α en fractions continues, d'après

la proposition 1.1, il existe des nombres entiers p_m et q_m tel que $2\alpha = \frac{p_m}{q_m}$, avec $\operatorname{pgcd}(p_m, q_m) = 1$, où $m \in \mathbb{N}^*$.

D'après le théorème 1.1 et les propriétés des fractions continues (cf [16]), p_m et p_{m+1} sont des entiers impaires pour $m \geq 1$ et pour une infinité d'entiers positifs q , il existe des nombres entiers p impaires tels que l'on ait,

$$\left| 2\alpha - \frac{p}{q} \right| < \frac{c_0}{q^2}, \quad \text{où } c_0 \text{ est une constante réelle positive,}$$

d'où l'on a pour $p = 2k + 1$, $k \in \mathbb{N}$,

$$\left| \alpha - \frac{2k+1}{2q} \right| < \frac{c_1}{(2q)^2}, \quad \text{où } c_1 \text{ est une constante positive.} \quad (3.19)$$

On pose, $f(x) = -x^\alpha - \alpha x + \alpha - 1$, alors $f(0) = \alpha - 1 > 0$ et $f(1) = -2 < 0$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un nombre réel l , $0 < l < 1$, tel que $f(l) = 0$ c'est-à-dire :

$$-l^\alpha - \alpha l + \alpha - 1 = 0, \quad (3.20)$$

posons alors,

$$s = \ln l + \frac{(2k+1)\pi i}{\alpha}. \quad (3.21)$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité (3.19) par $\frac{q}{\alpha}$ on obtient,

$$\left| q - \frac{2k+1}{2\alpha} \right| < \frac{c_1}{2\alpha q}, \quad \text{où } c_1 \text{ est une constante réelle positive et } k \text{ un entier positif,}$$

d'où,

$$\frac{2k+1}{\alpha} = 2q + O\left(\frac{1}{q}\right), \quad (3.22)$$

les relations (3.21) et (3.22) impliquent, $s = \ln l + 2\pi i q + O\left(\frac{1}{q}\right)$.

Calculons $h(s)$.

On a,

$$h(s) = \exp(\alpha(\ln l + 2\pi i q + O(\frac{1}{q}))) - \alpha \exp(\ln l + 2\pi i q + O(\frac{1}{q})) + \alpha - 1$$

d'où,

$$h(s) = -l^\alpha - \alpha l \exp\left[O\left(\frac{1}{Q}\right)\right] + \alpha - 1.$$

Comme $h(s)$ tend vers 0 lorsque q tend vers l'infini, alors $h(s)$ prend des petites valeurs dans le plan $Re(z) \leq \ln l < 0$. D'où le résultat du lemme 3.2.

Preuve de Théorème 3.2 :(cf [8], [2])

Soit λ un nombre réel positif tel que $\lambda < 1$. D'après le lemme 3.2, l'équation

$$h(s) = e^{\alpha s} - \alpha e^s + \alpha - 1 = 0, \quad (3.23)$$

a une infinité de zéros s tels que $Re(s) < 0$.

Dans l'équation (3.23), posons $s = \lambda u$ et $\alpha = \frac{1}{\lambda}$ on obtient alors l'équation :

$$\lambda e^u + 1 - \lambda - e^{\lambda u} = 0,$$

qui admet aussi une infinité de racines complexes u telle que $Re(u) < 0$.

Soit u_0 l'une de ces racines, le théorème de Hurwitz nous permet d'affirmer qu'il existe une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente vers u_0 et vérifiant la relation,

$$\lambda \left(1 + \frac{u}{n}\right)^n + 1 - \lambda = \left(1 + \frac{\lambda u}{n}\right)^n, \quad (3.24)$$

et puisque $Re(u_0) < 0$, alors pour $\delta > 0$ fixé on a,

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg(u_0) < \frac{3\pi}{2} - \delta,$$

et pour n assez grand, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers u_0 donc,

$$\frac{\pi}{2} + \delta < \arg(u_n) < \frac{3\pi}{2} - \delta.$$

Posons : $w_n = 1 + \frac{u_n}{n}$, alors $|w_n| < 1$ pour n assez grand où u_n vérifie la relation (3.24), c'est-à-dire on a,

$$\lambda(1 + \frac{u_n}{n})^n + 1 - \lambda - (1 + \frac{\lambda u_n}{n})^n = 0,$$

ce qui implique,

$$\lambda(1 + \frac{u_n}{n})^n + 1 - \lambda - (\lambda(1 + \frac{u_n}{n}) + 1 - \lambda)^n = 0,$$

d'où la relation,

$$\lambda w_n^n + 1 - \lambda - (\lambda w_n + 1 - \lambda)^n = 0,$$

donc w_n est un zéro de $P_n(z)$, d'où le résultat.

3.2.2 Cas où λ est l'inverse d'un entier

Théorème 3.3

Soit q un entier $q > 2$ et $\lambda = \frac{1}{q}$.

Alors, pour $n \geq 475$ tous les zéros différents de 1 de $P_n(z)$ sont de module supérieur à 1 .

Preuve du Théorème 3.3 :(cf [8])

Nous montrons le théorème 3.4 plus général. Et pour $q = 2$, nous montrons la proposition suivante qui est une conséquence du théorème 3.3 :

Proposition 3.1

Soit $n \geq 2$, un entier et $\lambda = \frac{1}{2}$.

Alors tous les zéros du polynôme $P_n(z)$ sont à l'intérieur du disque unité U .

Preuve de la proposition 3.1 :

Dans $P_n(z)$, posons $\lambda = \frac{1}{2}$ on obtient,

$$P_n(z) = \frac{1}{2}z^n + \frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)^n = z^n P_n\left(\frac{1}{z}\right),$$

comme $P_n(z) = z^n P_n(1/z)$, on peut donc appliquer le théorème de Cohn (cf [17]).

Calculons $P'_n(z)$.

Pour $n \geq 2$, on a :

$$P'_n(z) = \frac{n}{2}z^{n-1} - \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

l'équation $P'_n(z) = 0$ est équivalente à,

$$z^{n-1} = \left(\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}\right)^{n-1}, \quad (3.25)$$

pour $z \neq 0$, la relation (3.25) s'écrit,

$$\left(\frac{z+1}{2z}\right)^{n-1} = 1. \quad (3.26)$$

Posons $Z = \frac{z+1}{2z}$ alors,

$$Z^{n-1} = 1, \quad (3.27)$$

les solutions de l'équation (3.27), sont les nombres complexes $Z_k = \exp\left(\frac{2i\pi k}{n-1}\right)$, $0 \leq k < n-1$,
comme,

$$Z_k = \frac{z_k + 1}{2z_k}, \quad \text{pour } 0 \leq k < n-1,$$

alors,

$$z_k = \left(2 \exp\left(i \frac{2k\pi}{n-1}\right) - 1\right)^{-1}, \quad 1 \leq k \leq n-1.$$

mais pour tout k , $1 \leq k \leq n-1$ on a,

$$\left|2 \exp\left(i \frac{2k\pi}{n-1}\right) - 1\right| \geq \left|2 \exp\left(i \frac{2k\pi}{n-1}\right)\right| - 1 \geq 1$$

donc,

$$\frac{1}{\left|2 \exp\left(i \frac{2k\pi}{n-1}\right) - 1\right|} \leq 1, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

c'est-à-dire on a : $|z_k| \leq 1$, pour $1 \leq k \leq n-1$.

Le théorème de Cohn (cf [17]) implique alors que tous les zéros de $P_n(z)$ sont à l'intérieur du disque unité U , ce qui achève la preuve de la proposition 3.1.

Théorème 3.4

Soient q un entier supérieur ou égal à 3, $\lambda = \frac{1}{q}$ et $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Alors le polynôme $P_n(e^{i\theta})$ n'admet pas de zéros de partie réelle négative pour $n \geq 475$.

Preuve : (cf [8])

La preuve de ce théorème repose essentiellement sur les propositions 3.2, 3.3 et 3.4 suivantes, que nous allons d'abord démontrer ensuite nous exposerons la preuve détaillée du théorème 3.4 ultérieurement (cf pages 72, 73 et 74).

Pour un nombre réel ρ fixé tel que $0 \leq \rho \leq 1$, soit $E(\rho)$ la courbe de la fonction $F(t, \rho)$ où $t \geq 0$ alors,

Proposition 3.2

Le point le plus proche de la courbe $E(\rho)$ sur l'axe des nombres réels négatifs, est l'origine $(0, 0)$.

Preuve :

Nous utilisons les deux lemmes 3.3 et 3.4 suivants :

Lemme 3.3

Soit $\lambda = \frac{1}{q}$ où $q \geq 3$ est un entier et ρ un nombre réel $0 < \rho < 1$, alors la courbe $E(\rho)$ ne coupe pas l'axe des nombres réels négatifs.

Preuve du lemme 3.3 :

La relation (3.36) implique,

$$F(0, \rho) = F(2\pi, \rho) = 1 - \rho > 0,$$

et

$$F(\pi, \rho) = \lambda(-1)^q + 1 - \lambda + \rho > 1 - 2\lambda + \rho > 0,$$

on peut donc supposer que $\sin t \neq 0$.

Ecrivons,

$$F(t, \rho) = \lambda \left(\cos\left(\frac{t}{\lambda}\right) + i \sin\left(\frac{t}{\lambda}\right) \right) + 1 - \lambda - \rho (\cos(t) + i \sin(t)), \quad (3.28)$$

en séparant les parties réelles et imaginaires de $F(t, \rho)$ dans la relation (3.28) et en les multipliant par q on obtient,

$$qRe(F(t, \rho)) = \cos qt + q - 1 - q\rho \cos t,$$

$$qIm(F(t, \rho)) = \sin qt - q\rho \sin t.$$

Si la courbe $E(\rho)$ coupe l'axe des réels négatifs, autrement dit si,

$$Im(F(t, \rho)) = 0,$$

alors,

$$\rho = \frac{\sin qt}{q \sin t} < 1.$$

Pour cette valeur de ρ , calculons $Re(F(t, \rho))$.

On a,

$$\begin{aligned} qRe(F(t, \rho)) &= \cos qt + q - 1 - \sin qt \frac{\cos t}{\sin t}, \\ &= (q - 1) - \frac{\sin(q - 1)t}{\sin t} \end{aligned}$$

Nous montrons par récurrence sur q que l'on a,

$$(q - 1) - \frac{\sin(q - 1)t}{\sin t} > 0. \quad (3.29)$$

En effet,

pour $q = 2$, l'inégalité (3.29) est trivialement vérifiée.

Pour $q = 3$, l'inégalité (3.29) implique,

$$2 - \frac{\sin 2t}{\sin t} = 2 - 2 \cos t = 2(1 - \cos t) \geq 0$$

donc (3.29) est aussi vérifiée pour $q = 3$.

Supposons que l'inégalité (3.29) est vraie pour $q > 3$, et montrons que $q - \frac{\sin qt}{\sin t} \geq 0$, c'est-à-dire qu'elle est vraie pour $q + 1$.

On a,

$$q - \frac{\sin qt}{\sin t} \geq (q - 1) + 1 - \left| \frac{\sin((q - 1) + 1)t}{\sin t} \right| = (q - 1) + 1 - \left| \frac{\sin(q - 1)t \cos t + \sin t \cos(q - 1)t}{\sin t} \right|$$

ce qui implique,

$$q - \frac{\sin qt}{\sin t} \geq (q-1) + 1 - \left| \frac{\sin(q-1)t}{\sin t} \right| |\cos t| - |\cos(q-1)t| \geq 0,$$

et puisque on a,

$$(q-1) - \left| \frac{\sin(q-1)t}{\sin t} \right| |\cos t| \geq (q-1) - \left| \frac{\sin(q-1)t}{\sin t} \right|$$

et

$$1 - |\cos(q-1)t| \geq 0,$$

alors,

$$q - \frac{\sin qt}{\sin t} > 0,$$

donc l'inégalité (3.29) est vérifiée pour tout q ,

d'où,

$$\operatorname{Re}(F(t, \rho)) > 0,$$

ceci montre que la courbe $E = E(\rho)$, ne coupe pas l'axe des nombres réels négatifs, d'où le résultat du lemme 3.3.

Pour prouver que le plus proche point de l'axe des nombres réels négatifs à la courbe $E(\rho)$ est l'origine $(0, 0)$, nous étudions d'abord quelques propriétés de la courbe $E(\rho)$. (cf [28])

Pour cela écrivons,

$$F(t, \rho) = 1 - \lambda - \rho e^{it} \left(1 - \frac{1}{q\rho} e^{i(q-1)t} \right). \quad (3.30)$$

La courbe $E(\rho)$ peut être considérée comme la trajectoire d'une particule qui se déplace sur une orbite circulaire de rayon $\frac{1}{q\rho}$ et de fréquence égale à $q-1$, superposée sur une autre orbite circulaire de rayon ρ et de fréquence égal à 1. Cette courbe $E(\rho)$ est appelée épitrochoid (cf [28]).

La courbe de la fonction définie par (3.30), montre que la courbe $E(\rho)$ a $(q-1)$ axes de symétrie passant par son centre $(1-\lambda, 0)$. (voir figure-4)

Le lemme qui suit précise quelques propriétés de la courbe $E(\rho)$.

Lemme 3.4

Soit λ, ρ des nombres réels tels que $\lambda \leq \frac{1}{3}$ et $1 - 2\lambda \leq \rho < 1$ alors,

- 1) La courbe $E(\rho)$ est à l'intérieur de la couronne $S(O', \rho - \lambda, \rho + \lambda)$ de centre $O'(1 - \lambda, 0)$.
- 2) La courbe $E(\rho)$ est symétrique par rapport à toutes les droites passant par le centre O' et formant un angle de $\frac{k\pi}{q-1}$, $0 \leq k \leq q-2$, avec l'axe des nombres réels.
- 3) Le vecteur tangent à la courbe $E(\rho)$, a un argument croissant par rapport à la variable t .
- 4) Le changement dans l'argument du vecteur tangent, est de $2\pi q$ lorsque t varie de 0 à 2π .

Preuve du lemme 3.4 :

Preuve de (1) :

Soit $d = d(t)$, la distance entre le centre $O'(1 - \lambda, 0)$ et un point quelconque sur la courbe $E(\rho)$, alors,

$$d(t) = \sqrt{\lambda^2 - \rho^2 - 2\lambda \cos(q-1)t}.$$

La fonction $d(t)$ atteint son maximum $d_0 = d(t_0)$ en un point t_0 tel que,

$$\cos(q-1)t_0 = -1$$

de plus on a,

$$d_0 = \rho + \lambda.$$

Elle atteint son minimum $d_1 = d(t_1)$ en un point t_1 tel que,

$$\cos(q-1)t_1 = +1,$$

et on a,

$$d_1 = \rho - \lambda,$$

ce qui prouve que la courbe $E(\rho)$ est à l'intérieur de la couronne $S(O', \rho - \lambda, \rho + \lambda)$ de centre $O'(1 - \lambda, 0)$.

Preuve de (2) :

On a,

$$F(-t, \rho) = \overline{F(t, \rho)}$$

En effet,

$$F(-t, \rho) = (\cos(-qt) + q - 1 - q\rho \cos(-t)) + i(\sin(-qt) - q\rho \sin(-t))$$

c'est-à-dire,

$$F(-t, \rho) = (\cos(qt) + q - 1 - q\rho \cos(t)) - i(\sin(qt) - q\rho \sin(t)) = \overline{F(t, \rho)},$$

donc la courbe $E(\rho)$ est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels.

En faisant une rotation de la courbe $E(\rho)$ de centre $(1 - \lambda, 0)$ et d'angle $\frac{k\pi}{q-1}$, $0 \leq k \leq q-2$, et en posant,

$$L(t, \rho) = F\left(\frac{k\pi}{q-1} + t, \rho\right) e^{-i\frac{k\pi}{q-1}},$$

on obtient,

$$L(t, \rho) = \lambda e^{i(\frac{t}{\lambda} + k\pi)} - \rho e^{it} + (1 - \lambda) e^{i\frac{k\pi}{q-1}}.$$

Nous montrons de la même manière que,

$$L(-t, \rho) = \overline{L(t, \rho)},$$

donc la courbe $E(\rho)$ est symétrique par rapport à la droite passant par le centre $O'(1 - \lambda, 0)$ et de coefficient directeur $tg\left(\frac{k\pi}{q-1}\right)$, $0 \leq k \leq q-2$.

D'où l'on déduit que la courbe $E(\rho)$ admet $(q-1)$ axes de symétrie.

Preuve de (3) :

Ecrivons $F(t, \rho)$ sous la forme,

$$F(t, \rho) = Re(F(t, \rho)) + iIm(F(t, \rho)),$$

avec,

$$Re(F(t, \rho)) = \lambda \cos qt - \rho \cos t + 1 - \lambda, \quad (3.31)$$

et

$$Im(F(t, \rho)) = \lambda \sin qt - \rho \sin t, \quad (3.32)$$

le vecteur tangent à la courbe $E(\rho)$ a pour équation,

$$F'(t, \rho) = ie^{iqt} - \rho ie^{it}, \quad (3.33)$$

ses coordonnées sont données par les formules,

$$\operatorname{Re}(F'(t, \rho)) = -\sin qt + \rho \sin t \quad (3.34)$$

et

$$\operatorname{Im}(F'(t, \rho)) = -\cos qt - \rho \cos t. \quad (3.35)$$

Soit $\theta(t)$ l'argument de ce vecteur tangent à la courbe $E(\rho)$, alors la fonction $\varphi(t) = tg(\theta(t))$ est dérivable et on a,

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}tg(\theta(t)) = \frac{q + \rho^2 - \rho(1 + q) \cos(q - 1)t}{(\sin qt - \rho \sin t)^2} \geq \frac{q + \rho^2 - \rho(1 + q)}{(\sin qt - \rho \sin t)^2}$$

puisque $-\rho(1 + q) \cos(q - 1)t \geq -\rho(1 + q)$, il en résulte que,

$$\frac{d}{dt}tg(\theta(t)) \geq \frac{(1 - \rho)(q - \rho)}{(\sin qt - \rho \sin t)^2},$$

et puisque on a $0 < \rho < 1$ et $q \geq 3$, alors

$$\varphi'(t) = \frac{d}{dt}tg(\theta(t)) > 0,$$

ce qui prouve que l'argument du vecteur tangent est une fonction croissante de t .

Preuve de (4) :

Une variation de l'argument de $F'(t, \rho)$ d'une amplitude de $2\pi q$, est le nombre de rotations sur une courbe fermée simple, entourant l'origine $(0, 0)$ sans changer $F'(t, \rho)$, ce qui achève la preuve du lemme 3.4.

Preuve de la proposition 3.2

Posons $\lambda = \frac{1}{q}$, où q est un entier supérieur ou égal à 3.

Etudions la courbe $E = E(\rho)$ de la fonction définie par,

$$F(t, \rho) = \lambda e^{i\frac{t}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho \leq 1. \quad (3.36)$$

Puisque $q = \frac{1}{\lambda}$ est un entier positif, alors

$$F(t + 2\pi, \rho) = F(t, \rho),$$

la fonction $F(t, \rho)$ est de période 2π , on peut donc la considérer seulement sur l'intervalle $0 \leq t \leq 2\pi$.

Pour $\rho = 1$, l'équation $F(t, 1) = 0$ a une racine $t = 0$.

Comme la courbe $E(\rho)$ admet $(q - 1)$ axes de symétrie passant par le centre $(1 - \lambda, 0)$, il suffit donc de considérer l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{q - 1}$.

Des relations (3.31), (3.32), (3.34) et (3.35), on déduit qu'au point $t_0 = 0$, la courbe $E(\rho)$ passe par le point $(1 - \rho, 0)$ et admet une tangente verticale en ce point.

D'après la relation (3.35), on a $Im(F'(0, \rho)) = 1 - \rho > 0$ et $Im\left(F'\left(\frac{\pi}{2q}, \rho\right)\right) = -\rho \cos\left(\frac{\pi}{2q}\right) < 0$, le théorème des valeurs intermédiaires implique alors qu'il existe un nombre réel t_1 , $0 < t_1 < \frac{\pi}{2q}$ tel que, $Im(F'(t_1, \rho)) = 0$.

Lorsque t varie de 0 à $\frac{2\pi}{q - 1}$, la courbe $E(\rho)$ se déplace vers la gauche dans le premier quadrant du cercle jusqu'à ce qu'elle atteigne le point t_1 avec une tangente horizontale (voir figure 4).

D'après la relation (3.32), le théorème des valeurs intermédiaires implique, qu'il existe un réel t_2 , $\frac{\pi}{2q} < t_2 < \frac{\pi}{q}$, tel que $Im(F(t_2, \rho)) = 0$, donc $E(\rho)$ coupe l'axe des nombres réels.

D'après le lemme (3.3), la courbe $E(\rho)$ coupe l'axe des nombres réels positifs en un point double situé entre les points $(0, 0)$ et $(1 - \rho, 0)$ puisque la courbe $E(\rho)$ est symétrique par rapport à l'axe des nombres réels, de plus la courbe $E(\rho)$ étant symétrique par rapport aux $(q - 1)$ droites passant par le centre $O'(1 - \lambda, 0)$, donc l'axe R passant par le centre de la courbe $E = E(\rho)$ et formant un angle $\theta = \pi + \frac{2\pi}{q - 1}$ avec l'axe des nombres réels, coupe la courbe $E(\rho)$ en un autre

point double pour certain nombre réel t_3 , avec $\frac{2\pi}{q - 1} - \frac{\pi}{q} < t_3 < \frac{2\pi}{q - 1}$, (c'est une rotation de

centre $O'(1 - \lambda, 0)$ et d'angle $\theta - \pi = \frac{2\pi}{q-1}$ de l'axe des nombres réels).

Ensuite, par le lemme 3.4-2 (avec $k = 1$), la tangente de $E(\rho)$ est parallèle à R en un certain point t_4 tel que $\frac{2\pi}{q-1} - \frac{\pi}{2q} < t_4 < \frac{2\pi}{q-1}$.

En conclusion, puisque $E(\rho)$ admet une tangente verticale au point $t_0 = 0$, avec la même rotation de l'axe, on déduit que la droite R coupe la courbe $E(\rho)$ en un point où la tangente à ce point forme un angle droit pour $t_5 = \frac{2\pi}{q-1}$.

De la même manière, nous montrons que le résultat reste vrai, si l'on remplace la droite réelle par la droite R .

Par conséquent, nous pouvons considérer $E(\rho)$ comme étant une réunion de courbes E' situées entre deux points doubles consécutifs, et une réunion de boucles E'' situées à l'intérieur de $E(\rho)$ (cf [28]).

En considérant une portion intérieure à la courbe fermée, composée d'une courbe E' située entre deux points doubles consécutifs, et le segment de droite joignant le centre de $E(\rho)$ aux points doubles, alors E' et son intérieur est la réunion de toutes ces $(q-1)$ portions.

Par le lemme 3.4-4, la variation de l'argument du vecteur tangent entre $t = t_0$ et $t = t_5$ est égal à $\frac{2\pi q}{q-1}$ et donc entre $t = t_1$ et $t = t_5$, la variation de l'argument est égal $\frac{2\pi q}{q-1} - 2(\frac{\pi}{2}) = \pi + \frac{2\pi}{q-1}$, par conséquent, il ne peut y avoir d'autre point double entre t_2 et t_3 , ceci d'une part.

D'autre part le lemme 3.4-3, implique que toutes ces portions sont convexes.

En raison de la symétrie de la courbe $E(\rho)$, chaque point x_0 sur l'axe des nombres réels négatifs ou nuls est à la même distance des deux portions situées juste au-dessus et en dessous de l'axe des réels et les plus proches de l'origine, cependant, les autres portions de la courbe $E(\rho)$ sont éloignées de l'origine.

Enfin, en utilisant le fait que la distance entre une région convexe fermée et un point qui se déplace le long d'une ligne droite, est une fonction unimodale (cf [8]), c'est-à-dire, qu'elle est décroissante jusqu'à un certain point, et puis croissante à partir de ce point. La proposition 3.3

est donc prouvée si nous l'appliquons à la portion la plus proche de l'origine $(0, 0)$ et à l'axe des nombres réels négatifs.

Ceci achève la preuve du proposition 3.2.

Proposition 3.3

Soit $0 \leq t \leq 2\pi$, avec les mêmes hypothèses et notations précédentes on a,

$$|F(t, \rho)| \geq \frac{C}{\sqrt{\lambda}} (1 - \rho)^{\frac{3}{2}}$$

avec,

$$C = \begin{cases} \frac{1}{6} \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) & \text{si } q = 3, \\ \frac{1 - 2\lambda}{4\sqrt{2}} & \text{si } 4 \leq q \leq 15, \\ \frac{7}{32\sqrt{2}} & \text{si } q \geq 16. \end{cases}$$

Preuve : (cf [8])

L'expression de $F(t, \rho)$ définie par (3.33) implique,

$$F(2\pi - t, \rho) = \lambda e^{i\frac{2\pi-t}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{i(2\pi-t)} = \lambda e^{i\frac{t}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it} = \overline{F(t, \rho)},$$

il suffit donc de considérer seulement l'intervalle $0 \leq t \leq \pi$.

La fonction $|F(t, \rho)|^2$, n'atteint pas son minimum dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

En effet,

On a,

$$|F(t, \rho)|^2 = (\operatorname{Re}(F(t, \rho)))^2 + (\operatorname{Im}(F(t, \rho)))^2.$$

En utilisant la relation (3.28) on obtient,

$$|F(t, \rho)|^2 = \lambda^2 + \rho^2 + (1 - \lambda)^2 - 2\rho\lambda \cos((q-1)t) + 2(1 - \lambda)(\lambda \cos qt - \rho \cos t). \quad (3.37)$$

Pour $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$ on a :

$$|F(t, \rho)|^2 \geq 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + \rho^2 - 2\rho\lambda,$$

puisque $-\rho \cos t \geq 0$ et $\lambda \cos qt \geq -\lambda$.

Si $\lambda \leq \frac{1}{4}$ alors $\rho \geq 2\lambda$ (car $\rho \geq 1 - 2\lambda$) donc,

$$2\rho(1 - 2\lambda) \geq 4\lambda(1 - \lambda),$$

ce qui implique,

$$4\lambda^2 - 4\lambda - 2\rho\lambda \geq -2\rho. \quad (3.38)$$

Les relations (3.37) et (3.38) entraînent alors,

$$|F(t, \rho)|^2 = 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 - 2\rho\lambda + \rho^2 \geq (1 - \rho)^2,$$

d'où,

$$|F(t, \rho)|^2 \geq (1 - \rho)^2 = |F(0, \rho)|.$$

Si $\lambda = \frac{1}{3}$ et $q = 3$ alors,

$$\begin{aligned} \lambda \cos((q-1)t) + (1-\lambda) \cos t &= \lambda \cos(2t) + \frac{2}{3} \cos t = \lambda(2 \cos^2 t - 1) + \frac{2}{3} \cos t. \\ &= \frac{2}{3}(\cos^2 t - \cos t) - \lambda \leq -\lambda. \end{aligned}$$

Par (3.37) on a,

$$|F(t, \rho)|^2 \geq 1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + \rho^2 + 2\rho\lambda,$$

d'où,

$$|F(t, \rho)|^2 \geq (1 - \rho)^2,$$

ce qui est équivalent à,

$$1 - 4\lambda + 4\lambda^2 + \rho^2 + 2\rho\lambda \geq \rho^2 - 2\rho + 1,$$

si et seulement si,

$$2\rho(1 + \lambda) \geq +4\lambda(1 - \lambda),$$

c'est-à-dire, si et seulement si on a,

$$\rho \geq \frac{2\lambda(1 - \lambda)}{1 + \lambda} = \frac{1}{3}.$$

Cette dernière inégalité est vérifiée car $\rho \geq 1 - 2\lambda$, ce qui prouve que l'on a,

$$|F(t, \rho)|^2 \geq |F(0, \rho)| = (1 - \rho)^2, \quad \text{pour } \frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi,$$

donc $|F(t, \rho)|$ n'atteint pas son minimum dans l'intervalle $\frac{\pi}{2} \leq t \leq \pi$.

Pour $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$, la proposition 3.3, est une conséquence du lemme 3.5 suivant :

Soit un entier $q \geq 2$ et $c = \frac{5}{4\sqrt{q}}$, on pose :

$$I_1 =: \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ 0 \leq t \leq c\sqrt{(1 - \rho)}, \ q \geq 2 \right\}, \quad I_2 =: \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ c\sqrt{1 - \rho} \leq t \leq \frac{\pi}{2(q - 1)}, \ q \geq 2 \right\},$$

$$I_3 =: \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \frac{\pi}{2(q - 1)} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad q \geq 4 \right\}, \quad I_4 =: \left\{ t \in \mathbb{R} \ / \ \frac{\pi}{4} \leq t \leq \frac{\pi}{2}, \quad q = 3 \right\}.$$

On a :

Lemme 3.5

Soit λ un nombre réel tel que $0 < \lambda < 1$, $\lambda = \frac{1}{q}$ où $q \geq 3$ alors,

$$|F(t, \rho)| \geq D\sqrt{q}(1 - \rho)^{\frac{3}{2}},$$

avec,

$$D = \begin{cases} \frac{7}{32\sqrt{2}} & \text{pour } t \in I_1 \\ \frac{557}{2048}(1 - \lambda)(1 - 2\lambda) & \text{pour } t \in I_2 \\ \frac{1 - 2\lambda}{4\sqrt{2}} & \text{pour } t \in I_3 \\ \frac{\sqrt{2} - 1}{6\sqrt{2}} & \text{pour } t \in I_4 \end{cases}$$

Preuve du lemme 3.5 :

En dérivant la relation (3.37) par rapport à t , on obtient,

$$\left(|F(t, \rho)|^2\right)' = 2\rho\lambda(q - 1)\sin((q - 1)t) + 2(1 - \lambda)(\rho\sin t - q\lambda\sin qt).$$

La fonction $|F(t, \rho)|^2$, atteint son minimum l'orsque,

$$\rho(2\lambda(q - 1)\sin(q - 1)t + 2(1 - \lambda)\sin t) = 2q\lambda(1 - \lambda)\sin qt,$$

ceci implique,

$$\rho = \frac{\sin qt}{\sin(q-1)t + \sin t}, \quad \text{avec} \quad \lambda = \frac{1}{q} \quad (3.39)$$

par suite on a,

$$\lambda \sin qt + \rho \sin(q-1)t - \sin qt = -\rho \sin t + \lambda \sin qt,$$

ce qui est équivalent à,

$$\lambda \sin qt - \rho \sin t = \lambda \rho (\sin(q-1)t - (q-1) \sin t). \quad (3.40)$$

Pour tout t dans I_3 et tout entier $q \geq 3$ on a :

$$|\sin(q-1)t - (q-1) \sin t| \geq \left| (q-1) \sin \left(\frac{\pi}{2(q-1)} \right) - 1 \right| \geq c'. \quad (3.41)$$

Pour $q = 3$, on trouve $c' = \sqrt{2} - 1$.

Si $q \geq 4$, le développement de Taylor de la fonction $\sin x$ à l'ordre 3, s'écrit :

$$\sin \left(\frac{\pi}{2(q-1)} \right) \geq \frac{\pi}{2(q-1)} - \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{2(q-1)} \right)^3,$$

ce qui implique,

$$\left| (q-1) \sin \left(\frac{\pi}{2(q-1)} \right) - 1 \right| \geq \left| \frac{\pi}{2} - 1 - \frac{\pi^3}{48(q-1)^2} \right|,$$

lorsque q tend vers l'infini, c' tend vers $\frac{1}{2}$.

Comme on a $|F(t, \rho)| \geq \text{Im}(F(t, \rho))$, les relations (3.40), (3.41) impliquent,

$$|F(t, \rho)| > c' \lambda \rho,$$

ceci d'une part.

D'autre part, on a $\rho \geq 1 - 2\lambda$ et $2\lambda \geq 1 - \rho$ alors,

$$c' \lambda \rho = \frac{c'}{2\sqrt{2}} (2\lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{q} \rho \geq \frac{c'}{2\sqrt{2}} (1 - \rho)^{\frac{3}{2}} \sqrt{q} (1 - 2\lambda),$$

par suite on obtient,

$$|F(t, \rho)| > \frac{c'}{2\sqrt{2}} (1 - \rho)^{\frac{3}{2}} \sqrt{q} (1 - 2\lambda) \quad \text{pour tout } t \text{ dans } I_3 \text{ et } I_4. \quad (3.42)$$

Et pour tout t dans I_2 et $q \geq 3$ on a,

$$\operatorname{Re}(F(t, \rho)) \sin t - \operatorname{Im}(F(t, \rho)) \cos t = \frac{q-1}{q} (\sin t - \frac{1}{q} \sin(q-1)t). \quad (3.43)$$

Posons : $h(t) = \sin t - \frac{1}{q-1} \sin(q-1)t$ alors, $h'(t) = \cos t - \cos(q-1)t$.

Comme la fonction $\cos t$ est décroissante sur l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ alors,

$$\cos t - \cos(q-1)t \geq 0, \quad \text{pour } t \in I_2,$$

donc $h'(t)$ est positive sur cet intervalle, il en résulte que $h(t)$ est une fonction croissante sur l'intervalle $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2(q-1)}$.

Pour $t \in I_2$, la fonction $h(t)$ étant croissante alors,

$$h(t) \geq \sin(c\sqrt{1-\rho}) - \frac{1}{q-1} \sin((q-1)c\sqrt{1-\rho}) \quad (3.44)$$

Le développement de Taylor des fonctions $\sin(c\sqrt{1-\rho})$ et $\sin((q-1)c\sqrt{1-\rho})$ à l'ordre 3 respectivement à l'ordre 5, s'écrit :

$$\sin(c\sqrt{1-\rho}) \geq c\sqrt{1-\rho} - \frac{1}{6}(c\sqrt{1-\rho})^3, \quad (3.45)$$

et

$$\sin((q-1)c\sqrt{1-\rho}) \leq \frac{1}{q-1} \left[(q-1)c\sqrt{1-\rho} - \frac{1}{6}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^3 + \frac{1}{120}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^5 \right]. \quad (3.46)$$

Par les inégalités (3.44), (3.45) et (3.46) on déduit que,

$$h(t) \geq c\sqrt{1-\rho} - \frac{1}{6}(c\sqrt{1-\rho})^3 - \frac{1}{q-1} \left[(q-1)c\sqrt{1-\rho} - \frac{1}{6}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^3 + \frac{1}{120}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^5 \right]$$

d'où,

$$h(t) \geq \frac{1}{6}q(q-2)(c\sqrt{1-\rho})^3 \left[1 - \frac{(q-1)^2}{20q(q-2)}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^2 \right]$$

comme pour $q \geq 3$ on a $\frac{(q-1)^2}{q(q-2)} \leq \frac{4}{3}$, car $(q-1)c\sqrt{1-\rho} \leq \frac{\pi}{2}$,

alors,

$$\left[1 - \frac{(q-1)^2}{20q(q-2)}((q-1)c\sqrt{1-\rho})^2 \right] \geq \left(1 - \frac{4}{60} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \right).$$

Grâce à l'inégalité (3.45) on obtient :

$$h(t) \geq \frac{557}{4000} q(q-1)c^3(1-\rho)^{\frac{3}{2}},$$

or d'après la relation (3.43) on a :

$$|F(t, \rho)| = (|Re(F(t, \rho))|^2 + |Im(F(t, \rho))|^2)^{\frac{1}{2}} \geq |Re(F(t, \rho)) \sin t - Im(F(t, \rho)) \cos t|.$$

puisque,

$$(|Re(F(t, \rho))|^2 + |Im(F(t, \rho))|^2) \geq (|Re(F(t, \rho))|^2 \sin^2 t + |Im(F(t, \rho))|^2 \cos^2 t)$$

d'où,

$$(|Re(F(t, \rho))|^2 + |Im(F(t, \rho))|^2) \geq (|Re(F(t, \rho))| \sin t - |Im(F(t, \rho))| \cos t)^2.$$

Donc,

$$|F(t, \rho)| \geq \frac{q-1}{q} |h(t)| \geq \frac{557}{4000} (q-1)(q-2)c^3(1-\rho)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pour tout } t \in I_2. \quad (3.47)$$

Sur l'intervalle I_1 on a :

$$Re(F(t, \rho)) = \lambda \cos qt - \rho \cos t + 1 - \lambda$$

En écrivant le développement de Taylor de la fonction $\cos qt$ à l'ordre 2, ainsi que celui de $\cos t$ à l'ordre 4 on obtient :

$$Re(F(t, \rho)) \geq \lambda \left(1 - \frac{1}{2}(qt)^2\right) - \rho \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4\right) + 1 - \lambda,$$

ceci implique,

$$Re(F(t, \rho)) \geq 1 - \rho - \frac{1}{2}qt^2 + \frac{1}{2}\rho t^2 \left(1 - \frac{1}{12}t^2\right) \geq 1 - \rho - \frac{1}{2}qt^2.$$

Comme pour $t \in I_1$ on a $t^2 \leq c^2(1-\rho)$ et que $\rho \geq 1 - 2\lambda$, il vient alors,

$$Re(F(t, \rho)) \geq (1 - \frac{1}{2}qc^2)(1-\rho),$$

d'où,

$$|F(t, \rho)| \geq Re(F(t, \rho)) \geq (1 - \frac{1}{2}qc^2) \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{2}} (1-\rho)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pour tout } t \in I_1. \quad (3.48)$$

Les inégalités (3.42), (3.47) et (3.48) permettent alors de conclure que l'on a,

$$|F(t, \rho)| \geq D\sqrt{q}(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}.$$

Ce qui achève la preuve du lemme 3.5.

Proposition 3.4

Pour $n \geq 16$, on pose $G_n(\theta) = \lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda - \rho(\theta)e^{in\lambda\theta}$.

Si $\rho = \rho(\theta) \geq 1 - 2\lambda$ alors,

$$|G_n(\theta) - P_n(e^{i\theta})| \leq \frac{11/19}{\sqrt{\lambda}(1 - \lambda)^{3/2}\sqrt{n}}(1 - \rho(\theta))^{3/2}.$$

Preuve :(cf [8])

La preuve repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 3.6

Soient $\rho = \rho(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$, λ un nombre réel tel que $\lambda \leq \frac{1}{3}$, et $n \geq 16$.

Si $\rho = \rho(\theta) \geq 1 - 2\lambda$ alors,

$$\theta^2 \leq 4\frac{d}{n} \left(1 + \frac{3d}{8n}\right) \quad \text{avec} \quad d = \frac{1 + \lambda + 3\lambda^2}{1 - \lambda}. \quad (3.49)$$

et

$$\rho(\theta) \leq \exp\left(\frac{-17}{36}\lambda(1 - \lambda)n\theta^2\right). \quad (3.50)$$

Preuve du lemme 3.6 :

D'après la relation (3.71) on a $\rho(\theta) = |\lambda e^{i\theta} + 1 - \lambda|^n$, d'où

$$(\rho(\theta))^{\frac{1}{n}} = |(1 + \lambda(\cos \theta - 1)) + i\lambda \sin(\theta)|,$$

c'est-à-dire,

$$(\rho(\theta))^{\frac{2}{n}} = (1 + \lambda(\cos \theta - 1))^2 + \lambda^2 \sin^2(\theta) = 1 + 2\lambda(1 - \lambda)(\cos \theta - 1). \quad (3.51)$$

En écrivant le développement de Taylor de $\cos \theta$ à l'ordre 5, on obtient l'inégalité,

$$\cos \theta - 1 \leq -\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4, \text{ et en remplaçant dans (3.51) il vient,}$$

$$(\rho(\theta))^{\frac{2}{n}} \leq 1 + 2\lambda(1 - \lambda)\left(-\frac{1}{2}\theta^2 + \frac{1}{24}\theta^4\right),$$

ce qui entraîne,

$$(\rho(\theta))^{\frac{2}{n}} \leq 1 - \lambda(1 - \lambda)\theta^2(1 - \frac{1}{12}\theta^2) = 1 - c\theta^2, \quad (3.52)$$

avec,

$$c = \lambda(1 - \lambda) \left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right), \quad (3.53)$$

comme on a $\rho(\theta) \geq 1 - 2\lambda$ alors,

$$(1 - 2\lambda)^{\frac{1}{n}} \leq (\rho(\theta))^{\frac{1}{n}} \leq (1 - c\theta^2)^{\frac{1}{2}},$$

lorsque q tend vers l'infini $c\theta$ tend vers 0 donc,

$$\frac{1}{n} \ln(1 - 2\lambda) \leq \ln(\rho(\theta))^{\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{2} \ln(1 - c\theta^2) \leq -\frac{c}{2}\theta^2, \quad (3.54)$$

de même on a,

$$\ln\left(\frac{1}{1 - 2\lambda}\right) = \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} (2\lambda)^k,$$

d'où,

$$\frac{1}{2}c\theta^2 \leq \frac{1}{n} \ln\left(\frac{1}{1 - 2\lambda}\right) = \frac{1}{n} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{k} (2\lambda)^k,$$

ou encore,

$$\frac{c}{2}\theta^2 \leq \frac{1}{n} \left(2\lambda + 2\lambda^2 + \frac{1}{3}(2\lambda)^3 \sum_{k \geq 0} (2\lambda)^k\right) = \frac{2\lambda}{n} \left(1 + \lambda + \frac{4}{3}\lambda^2(1 - 2\lambda)^{-1}\right),$$

puisque $\sum_{k \geq 0} (2\lambda)^k$ est une suite géométrique de raison $r = 2\lambda < 1$, convergente vers $(1 - 2\lambda)^{-1}$ d'où l'inégalité,

$$\frac{c}{2}\theta^2 \leq \frac{2\lambda}{n} (1 + \lambda + 3\lambda^2). \quad (3.55)$$

puisque pour $\lambda \leq \frac{5}{18}$ on a $\frac{4}{3}(1 - 2\lambda)^{-1} \leq 3$.

En utilisant les relations (3.53), (3.55) et en posant $d = \frac{1 + \lambda + 3\lambda^2}{1 - \lambda}$ on obtient,

$$\theta^2 \left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right) \leq 4\frac{d}{n},$$

par suite on a,

$$-\frac{\theta^4}{12} + \theta^2 - 4\frac{d}{n} \leq 0. \quad (3.56)$$

Posons $x = \theta^2$, l'inégalité (3.56) s'écrit alors,

$$-\frac{x^2}{12} + x - 4\frac{d}{n} \leq 0.$$

Le trinôme $A(x) = -\frac{x^2}{12} + x - 4\frac{d}{n}$, a pour discriminant :

$$\Delta = 1 - \frac{4d}{3n}.$$

Comme pour $\lambda \leq \frac{1}{3}$ et $n \geq 16$ on a $\frac{d}{n} \leq \frac{5}{32}$, donc $\frac{3}{4} \leq \Delta \leq 1$ et $x_1 = 6 + 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}}$,

$x_2 = 6 - 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}}$, par suite on a :

$$-\frac{x^2}{12} + x - 4\frac{d}{n} = -\left(x - 6 - 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}}\right)\left(x - 6 + 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}}\right) \leq 0,$$

et puisque $x = \theta^2 \leq 10$ et $\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}} \geq \frac{3}{4}$ alors $\theta^2 - 6 - 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}} < 0$,

d'où,

$$\theta^2 \leq 6 - 6\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}}, \quad \text{pour } 0 \leq \theta \leq \pi. \quad (3.57)$$

D'autre part en écrivant le développement de Taylor de la fonction $(1 - x)^{\frac{1}{2}}$ à l'ordre 2, on obtient,

$$\sqrt{1 - \frac{4d}{3n}} \geq 1 - \frac{2d}{3n} - \frac{1}{4}\frac{d^2}{n^2}. \quad (3.58)$$

De (3.57) et (3.58) on déduit que,

$$\theta^2 \leq \frac{4d}{n} + \frac{3d^2}{2n^2} = 4\frac{d}{n} \left(1 + \frac{3d}{8n}\right),$$

d'où la relation (3.49) du lemme 3.6.

Montrons la relation (3.50) du lemme 3.6.

Les relations (3.53) et (3.54) impliquent,

$$\rho \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\lambda(1-\lambda)\left(1 - \frac{\theta^2}{12}\right)n\theta^2\right).$$

Comme on a $\frac{d}{n} \leq \frac{5}{32}$, la relation (3.49) permet de déduire que,

$$\frac{\theta^2}{12} \leq \frac{1}{3}\frac{d}{n} \left(1 + \frac{4d}{3n}\right) \leq \frac{1}{18}. \quad (3.59)$$

Ce qui termine la démonstration du lemme 3.6.

Lemme 3.7 Avec les mêmes hypothèses du lemme 3.6, on a :

$$|\sigma(\theta) - n\lambda\theta| \leq \frac{\lambda}{6}n\theta^3.$$

où $\sigma(\theta) = n \arg(e^{i\theta} + 1 - \lambda)$.

Preuve du lemme 3.7 :

Par la relation (3.72) on a,

$$\sigma(\theta) = n \arg(\lambda e^{i\theta} + 1 - \lambda),$$

comme pour tout nombre complexe z on a $tg(\arg z) = \frac{Im(z)}{Re(z)}$ alors,

$$tg\left(\frac{\sigma(\theta)}{n}\right) = \frac{\lambda \sin \theta}{\lambda \cos \theta + 1 - \lambda}. \quad (3.60)$$

La formule de Taylor appliquée à la fonction $\sin \theta$ à l'ordre 5 et à la fonction $\cos \theta$ à l'ordre 2, ainsi que la relation (3.60) impliquent,

$$tg\frac{\sigma(\theta)}{n} \leq \lambda \left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 + \frac{1}{120}\theta^5 \right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\theta^2 \right)^{-1}, \quad 0 < \lambda \leq \frac{1}{3},$$

d'où l'inégalité,

$$tg\left(\frac{\sigma(\theta)}{n}\right) \leq \lambda\theta \left(1 + \frac{\theta^4}{120} \frac{1}{1 - \frac{1}{6}\theta^2} \right). \quad (3.61)$$

Les inégalités (3.59) et (3.61), nous permettent alors de déduire que,

$$tg\frac{\sigma(\theta)}{n} \leq \lambda\theta + \frac{1}{6}\lambda\theta^3, \quad \text{où } 0 < \lambda \leq \frac{1}{3},$$

Comme la fonction $arctg(x)$ est bijective et croissante sur $\mathbb{R}$ alors,

$$\frac{\sigma(\theta)}{n} \leq \arctan\left(\lambda\theta + \frac{1}{6}\lambda\theta^3\right) \leq \lambda\theta + \frac{1}{6}\lambda\theta^3,$$

d'où,

$$\sigma(\theta) - n\lambda\theta \leq \frac{\lambda n}{6}\theta^3. \quad (3.62)$$

De la même manière, en écrivant le développement de Taylor aux fonctions $\sin \theta$ (respectivement $\cos \theta$ à l'ordre 4 (respectivement à l'ordre 5), la relation (3.60) implique,

$$tg\left(\frac{\sigma(\theta)}{n}\right) \geq \lambda \left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 \right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\theta^2 + \frac{\lambda}{24}\theta^4 \right)^{-1} \geq \lambda \left(\theta - \frac{1}{6}\theta^3 \right) \left(1 - \frac{\lambda}{2}\theta^2 \left(1 - \frac{1}{12}\theta^2 \right) \right)^{-1},$$

$$\geq \lambda\theta \left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right) \left(1 - \frac{15}{32}\lambda\theta^2\right)^{-1} \geq \lambda\theta \left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right) \left(1 + \frac{15}{32}\lambda\theta^2\right) \quad (3.63)$$

or on a,

$$\lambda\theta \left(1 - \frac{1}{6}\theta^2\right) \left(1 + \frac{15}{32}\lambda\theta^2\right) = \lambda\theta - \frac{\lambda}{6}\theta^3 \left(1 - \frac{45}{16}\lambda\left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\right),$$

l'inégalité (3.63) s'écrit alors,

$$tg \frac{\sigma(\theta)}{n} \geq \lambda\theta - \frac{\lambda}{6}\theta^3 \left(1 - \frac{45}{16}\lambda \left(1 - \frac{\theta^2}{6}\right)\right). \quad (3.64)$$

Grâce aux deux inégalités (3.59) et (3.64) on obtient,

$$tg \left(\frac{\sigma(\theta)}{n}\right) \geq \lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3(1 - 2\lambda),$$

d'où,

$$\frac{\sigma(\theta)}{n} \geq \arctg \left(\lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3(1 - 2\lambda)\right).$$

Comme au voisinage de 0, on a $\arctg(x) \geq x - \frac{1}{3}x^3$ alors,

$$\frac{\sigma(\theta)}{n} \geq \lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3(1 - 2\lambda) - \frac{1}{3} \left(\lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3(1 - 2\lambda)\right)^3,$$

par suite,

$$\frac{\sigma(\theta)}{n} \geq \lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3 (1 - 2\lambda + 2\lambda^2) \geq \lambda\theta - \frac{1}{6}\theta^3,$$

puisque $1 - 2\lambda + 2\lambda^2 < 1$ pour $\lambda \leq \frac{1}{3}$.

Donc,

$$\sigma(\theta) - n\lambda\theta \geq -\frac{\lambda n}{6}\theta^3, \quad (3.65)$$

des deux inégalités (3.62) et (3.65) on déduit alors que,

$$|\sigma(\theta) - n\lambda\theta| \leq \frac{\lambda n}{6}\theta^3.$$

ce qui achève la preuve du lemme 3.7.

Preuve de la proposition 3.4 :

Rappelons que l'on a,

$$P_n(e^{i\theta}) = \lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda - \rho(\theta)e^{i\sigma\theta},$$

et

$$G_n(\theta) = \lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda - \rho(\theta) e^{in\lambda\theta}.$$

On a donc,

$$|G_n(\theta) - P_n(e^{i\theta})| = |\rho(\theta) e^{i\sigma\theta} - \rho(\theta) e^{in\lambda\theta}|$$

d'où,

$$|G_n(\theta) - p_n(e^{i\theta})| = \rho(\theta) \left| \int_{n\lambda\theta}^{\sigma(\theta)} e^{it} dt \right| \leq \rho(\theta) |\sigma(\theta) - n\lambda\theta|.$$

Grâce au lemme 3.7 on obtient :

$$|G_n(\theta) - p_n(e^{i\theta})| \leq \frac{1}{6} \rho \lambda \theta^3. \quad (3.66)$$

Comme pour $n \geq 16$ et $\lambda(1 - \lambda) \leq \frac{2}{9}$ on a $\frac{d}{n} \leq \frac{5}{32}$, (puisque $\lambda \leq \frac{1}{3}$), l'inégalité (3.49) du lemme 3.6 implique alors,

$$n\theta^2 \leq 4d \left(1 + \frac{3d}{8n} \right) \leq \frac{108}{10}.$$

Par ailleurs on a,

$$\rho \lambda n \theta^3 \leq \left(\frac{25}{11} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(1 - \rho)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}(1 - \lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}.$$

En effet, d'après l'inégalité (3.50) du lemme 3.6 on a,

$$\rho^{-\frac{2}{3}} \geq \exp \left(\frac{17}{54} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right), \quad (3.67)$$

et aussi

$$-\rho^{\frac{1}{3}} \geq -\exp \left(-\frac{17}{108} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right), \quad (3.68)$$

les inégalités (3.67) et (3.68) entraînent alors,

$$\rho^{-\frac{2}{3}} - \rho^{\frac{1}{3}} \geq \exp \left(\frac{17}{54} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right) - \exp \left(-\frac{17}{108} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right).$$

En écrivant le développement de Taylor à l'ordre 1 de la fonction $\exp \left(\frac{17}{54} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right)$ du second membre de la relation (3.67) ainsi que celui de la fonction $\exp \left(-\frac{17}{108} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right)$ du second membre de la relation (3.68) à l'ordre 2 on obtient,

$$\rho^{-\frac{2}{3}} - \rho^{\frac{1}{3}} \geq 1 + \frac{17}{54} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 - \left[1 - \frac{17}{108} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{17}{108} \lambda(1 - \lambda) n \theta^2 \right)^2 \right],$$

d'où,

$$\rho^{-\frac{2}{3}} - \rho^{\frac{1}{3}} \geq \left(\frac{51}{108} \lambda(1-\lambda)n\theta^2 \right) \left(1 - \frac{17}{648} \lambda(1-\lambda)n\theta^2 \right).$$

ceci d'une part.

D'autre part, puisque $n\theta^2 \leq \frac{108}{10}$ et $\lambda(1-\lambda) \leq \frac{2}{9}$ alors,

$$\frac{51}{108} \left(1 - \frac{17}{648} \lambda(1-\lambda)n\theta^2 \right) \geq \frac{51}{108} \geq \frac{11}{25},$$

donc,

$$\rho^{-\frac{2}{3}} - \rho^{\frac{1}{3}} = \rho^{-\frac{2}{3}}(1-\rho) \geq \frac{11}{25} \lambda(1-\lambda)n\theta^2. \quad (3.69)$$

En élevant les deux membres de l'inégalité (3.69) à la puissance $\frac{3}{2}$ on obtient,

$$\left(\rho^{-\frac{2}{3}}(1-\rho) \right)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{11}{25} \lambda(1-\lambda)n\theta^2 \right)^{\frac{3}{2}},$$

ce qui équivaut à,

$$\rho^{-1}(1-\rho)^{\frac{3}{2}} \geq \left(\frac{11}{25} \right)^{\frac{3}{2}} \lambda^{\frac{3}{2}}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} n^{\frac{3}{2}} \theta^3,$$

par suite il vient,

$$\rho \lambda n \theta^3 \leq \left(\frac{25}{11} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{(1-\rho)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}}, \quad (3.70)$$

comme $\frac{1}{6} \left(\frac{25}{11} \right)^{\frac{3}{2}} \leq \frac{11}{19}$, les inégalités (3.66) et (3.70) entraînent alors,

$$|G_n(\theta) - p_n(e^{i\theta})| \leq \frac{11}{19} \frac{(1-\rho(\theta))^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)^{\frac{3}{2}} \sqrt{n}},$$

d'où le résultat de la proposition 3.4.

Preuve du théorème 3.4 :

Soit le polynôme $P_n(z) = \lambda z^n + 1 - \lambda - (\lambda z + 1 - \lambda)^n$, où $0 < \lambda < 1$.

Par le principe de l'argument et puisque la courbe de la fonction $P_n(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, coupe l'axe des nombres réels négatifs seulement en $(0, 0)$, on déduit que le polynôme $P_n(z)$ n'a aucun zéro dans le disque unité U , il suffit donc de prouver que pour $n \geq 475$ et pour $0 < \theta \leq 2\pi$ la courbe de la fonction $P_n(e^{i\theta})$ coupe l'axe des réels négatifs seulement en $(0, 0)$.

Posons,

$$\rho = \rho(\theta) = |\lambda e^{i\theta} + 1 - \lambda|^n, \quad (3.71)$$

et

$$\sigma = \sigma(\theta) = n \arg(\lambda e^{i\theta} + 1 - \lambda), \quad (3.72)$$

alors,

$$P_n(e^{i\theta}) = \lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda - \rho(\theta) e^{i\sigma(\theta)}. \quad (3.73)$$

Si $\rho(\theta) < 1 - 2\lambda$, alors la courbe de $P_n(e^{i\theta})$ se trouve à l'intérieur du cercle de rayon $r = 1 - \lambda$ et de centre $(1 - \lambda, 0)$, donc dans ce cas la courbe de $P_n(e^{i\theta})$ ne coupe pas l'axe des nombres réels négatifs.

Si,

$$\rho(\theta) \geq 1 - 2\lambda, \quad (3.74)$$

on considère alors la suite de fonctions $(G_n(\theta))_n$ définie par,

$$G_n(\theta) = \lambda e^{in\theta} + 1 - \lambda - \rho(\theta) e^{in\lambda\theta}, \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (3.75)$$

et on pose,

$$F(t, \rho) = \lambda e^{\frac{it}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it}.$$

Nous avons montré que la courbe d'équation (3.75) est une bonne approximation de la courbe d'équation (3.73). Tout point de $P_n(e^{i\theta})$ est voisin d'un point de $G_n(\theta)$ et ce point appartient à la courbe $E(\rho)$ de $F(t, \rho)$.

Chacun de ces points est à une distance au moins égale à $|F(t, \rho) - 0| = |F(t, \rho)| \geq \frac{C}{\lambda} (1 - \rho)^{3/2}$ de l'axe des nombres réels négatifs.

Les propositions 3.2 et 3.3, impliquent $P_n(e^{i\theta}) \neq 0$, pour θ tel que $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2}$ à condition que l'on ait,

$$\frac{11/19}{\sqrt{\lambda}(1-\lambda)^{3/2}\sqrt{n}}(1-\rho(\theta))^{3/2} \leq \frac{c}{\sqrt{\lambda}}(1-\rho(\theta))^{3/2},$$

c'est-à-dire à condition que l'inégalité,

$$n \geq \left(\frac{11}{19} \frac{1}{c(1-\lambda)^{3/2}} \right)^2 = \frac{121}{361} \frac{1}{c^2(1-\lambda)^3}.$$

soit vérifiée.

En particulier, si $q = 3$, on a $\lambda = \frac{1}{3}$ et d'après la proposition 3.3, $c = \frac{1}{6}(1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$ donc

$$n \geq \frac{121.9.27}{361(3-2\sqrt{2})} \cong 474,718, \quad (3.76)$$

d'où $n \geq 475$.

Pour $4 \leq q \leq 15$ et $\frac{1}{15} \leq \lambda \leq \frac{1}{4}$, la proposition 3.3 implique que $c = \frac{1-2\lambda}{4\sqrt{2}}$ donc,

$$n \geq 32 \frac{121}{361} \frac{1}{(1-2\lambda)^2(1-\lambda)^3}. \quad (3.77)$$

Et pour $q = 4$ on a $\lambda = \frac{1}{4}$, donc $n \geq 102$.

Pour $q > 16$, la proposition 3.3 implique $c = \frac{7}{32\sqrt{2}}$ donc,

$$n \geq \frac{121.2048}{361.49(1-\lambda)^3}, \quad (3.78)$$

pour $q = 16$, on a $\lambda = \frac{1}{16}$ et $n \geq 17$.

Les inégalités (3.76), (3.77) et (3.78) sont donc vérifiées pour $n \geq 475$, ce qui achève la démonstration du théorème 3.4.

3.2.3 Exemples de courbes d'équation $F(t, \rho) = \lambda e^{\frac{it}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it}$ où λ est l'inverse d'un entier, $0 \leq t \leq 2\pi$ et $\rho \leq 1 - 2\lambda$ des nombres réels positifs.

Exemple 1 :(Figure 1-Annexe)

Pour $q = 4$ et $\rho = \frac{1}{2}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{4it} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{it}.$$

La figure 1, montre que le centre de la courbe $E(1/2)$ est le point $(\frac{3}{4}, 0)$, cette courbe admet trois axes de symétrie passant par le centre $(\frac{3}{4}, 0)$ et formant les angles $0, \frac{\pi}{3}$ et $\frac{2\pi}{3}$ avec l'axe des nombres réels. Pour $t_0 = 0$, la courbe $E(\rho)$ traverse le point $(1 - \rho, 0) = (\frac{1}{2}, 0)$.

$E(1/2)$ coupe l'axe des nombres réels en un point double entre $(0, 0)$ et $(\frac{1}{2}, 0)$.

La figure 1, montre que la courbe $E(\rho)$ admet trois points doubles.

Exemple 2 :(Figure 2-Annexe)

Pour $q = 5$ et $\rho = \frac{7}{10}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{7}{10}) = \frac{1}{5}e^{5it} + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}e^{it},$$

La figure 2, montre que le point $(\frac{4}{5}, 0)$ est le centre de la courbe $E(7/10)$, cette courbe admet dans ce cas, quatre axes de symétrie passant par le centre et formant les angles $0, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{4}$ avec l'axe des nombres réels.

La courbe $E(\rho)$ admet quatre points doubles.

Exemple 3 :(Figure 3-Annexe)

Pour les valeurs $q = 10, \rho = \frac{8}{10}$:

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{8}{10}) = \frac{1}{10}e^{10it} + \frac{9}{10} - \frac{8}{10}e^{it}.$$

Exemple 4 :(Figure 4-Annexe)

Pour $q = 11$ et $\rho = \frac{10}{11}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{10}{11}) = \frac{1}{11}e^{11it} + \frac{10}{11} - \frac{10}{11}e^{it}.$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de la localisation des zéros d'une famille particulière de trinômes.

Ce travail a pour origine, un article dû à K. Dilcher (cf [8]) sur les zéros de la famille de trinômes définie par :

$$T(x) = mx^n - nx^m + n - m, \quad n > m > 0, \quad \text{où } m \text{ et } n \text{ sont des entiers positifs.}$$

Nous avons d'abord, étudié d'une façon générale quelques méthodes classiques de la localisation des zéros de polynômes dans le plan complexe. Ensuite, nous avons repris et détaillé tous les résultats obtenus par K. Dilcher (cf [8]).

A l'issue de cette étude, nous avons dégagé plusieurs pistes de recherche, qui pourraient éventuellement faire l'objet d'un sujet de Doctorat.

Nous pensons qu'il nous est possible d'apporter de sensibles améliorations à certains de ces résultats.

Annexe : Exemples de courbes

d'équation $F(t, \rho) = \lambda e^{\frac{it}{\lambda}} + 1 - \lambda - \rho e^{it}$.

Les courbes $E = E(\rho)$ suivantes ont été tracées à l'aide du logiciel Maple 13.

Exemple 1 :

Pour $q = 4$ et $\rho = \frac{1}{2}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit :

$$F(t, \frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{4it} + \frac{3}{4} - \frac{1}{2}e^{it}.$$

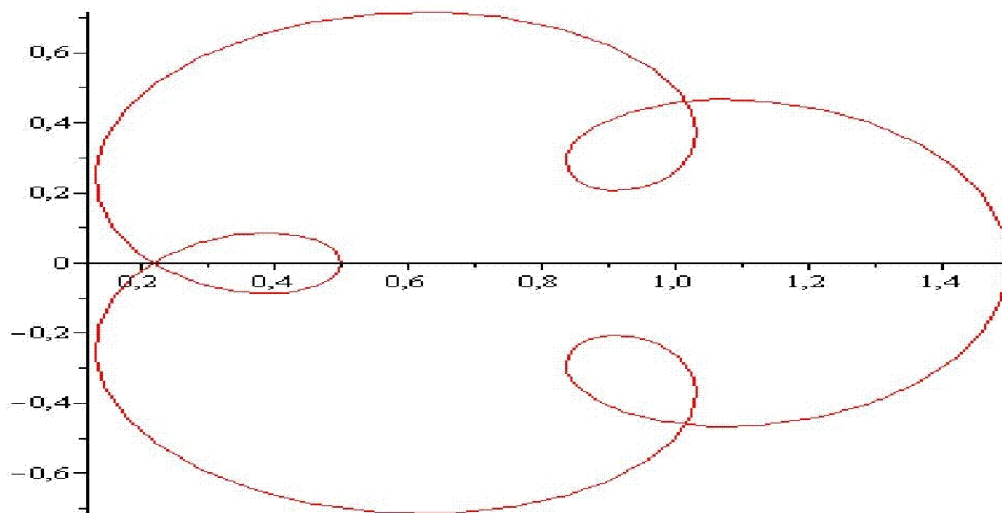


FIGURE 3.1 –

Exemple 2 :

Pour $q = 5$ et $\rho = \frac{7}{10}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{7}{10}) = \frac{1}{5}e^{5it} + \frac{4}{5} - \frac{7}{10}e^{it},$$

La courbe de $E(\rho)$ est :

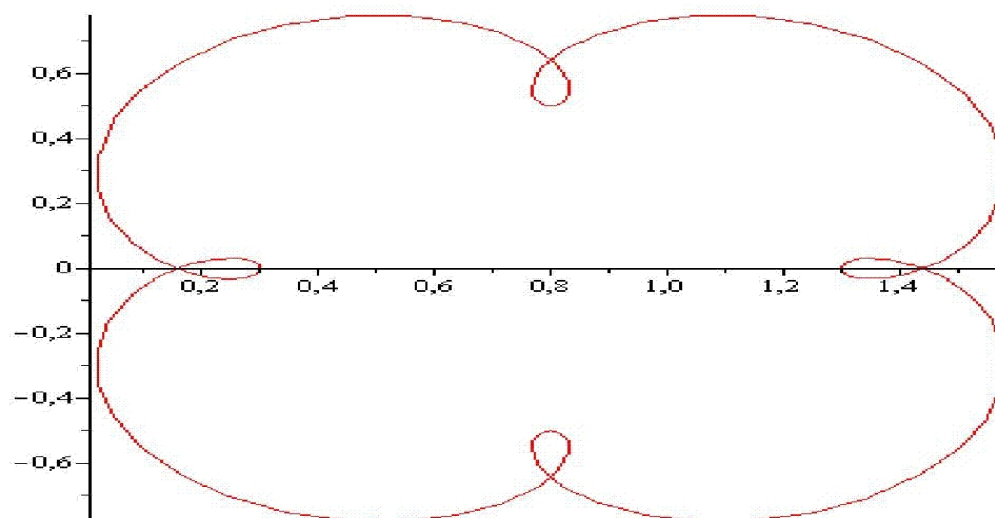


FIGURE 3.2 –

Exemple 3 :

Pour $q = 10$ et $\rho = \frac{8}{10}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{8}{10}) = \frac{1}{10}e^{10it} + \frac{9}{10} - \frac{8}{10}e^{it}.$$

La courbe $E(\rho)$ est :

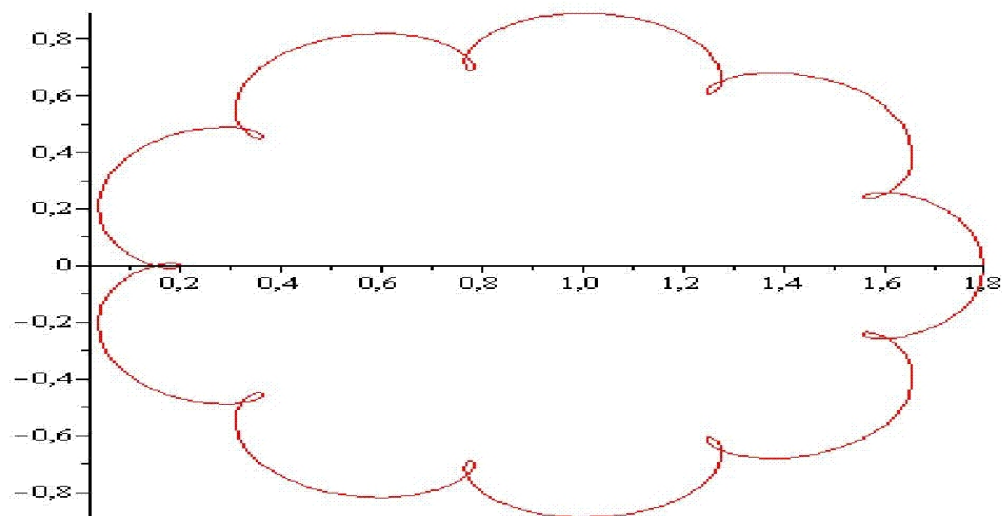


FIGURE 3.3 –

Exemple 3 :

Pour $q = 11$ et $\rho = \frac{10}{11}$.

L'équation de la courbe $E(\rho)$ s'écrit,

$$F(t, \frac{10}{11}) = \frac{1}{11}e^{11it} + \frac{10}{11} - \frac{10}{11}e^{it}.$$

La courbe de $E(\rho)$ est :

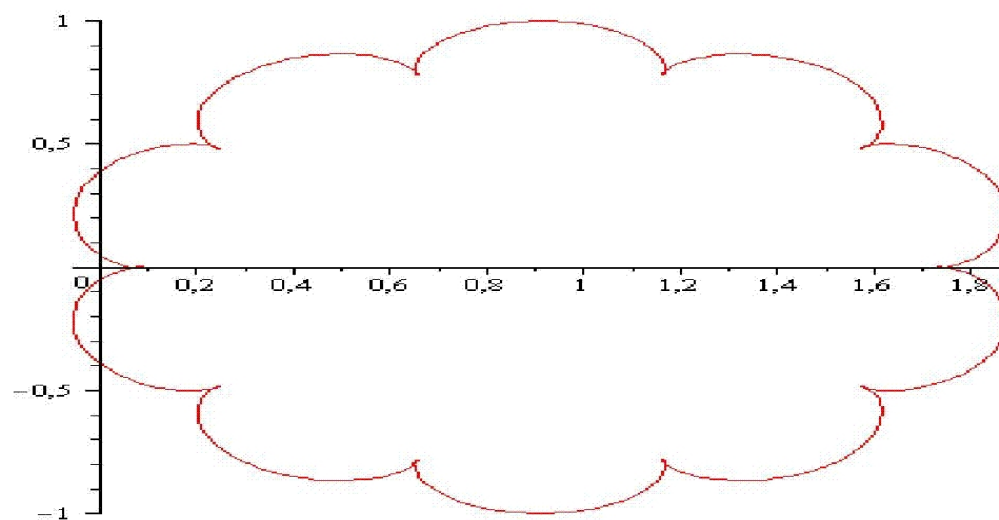


FIGURE 3.4 –

Bibliographie

- [1] E. F. Beckenbach and R. E. Bellman. *Inequalities*. Springer, Berlin, 1961.
- [2] R. E. Bellman and K. L. Cooke. *Differential-difference equations*. Academic Press, New York, 1963.
- [3] G. Boese. Einschlüsse und trennung der nullstellen von exponentialtrinomen. *Z. Angew. Math. Mech*, 62 :547–560, 1982.
- [4] H. Cartan. *Théorie Élémentaire des Fonctions Analytiques d'une ou Plusieurs Variables Complexes*. Hermann, Paris, 1961.
- [5] A. Cohn. über die anzahl der wurzeln algebraischen. gleichung in einem kreise. *Math, Z* 14 :110–148, 1922.
- [6] J. Dieudonne and K. L. Cooke. *Calcul Infinitésimal*. Hemann, Paris, 1968.
- [7] K. Dilcher. A generalization of the enestrom-akeya theorem. *J. Math. Anal. Appl*, 116 :473–488, 1986.
- [8] K. Dilcher, J. D. Nulton, and K. B. Stolarsky. The zeros of a certain family of trinomials. *Glasgow Math J*, 34 :55–74, 1992.
- [9] K. Dilcher and K. B. Stolarsky. Zeros of the wronskian of a polynomial. *J. Math. Anal. Appl*, 162 :430–451, 1991.
- [10] P. Erdos and P. Turàn. On the distribution of the roots of polynomials,. 1950.
- [11] R. J. Evans and K. B. Stolarsky. A family of polynomials with concyclic zeros ii. *Proc. Amer. Math. Soc*, 92 :393–396, 1984.
- [12] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Polya. *Inequalities*. Cambridge Univ. Press, 1964.

-
- [13] M. O. Hernane. *Localisation des Zéros de Polynômes Intervenant en Théorie du Signal*, Thèse de Magister. U.S.T.H.B, 1989.
 - [14] M. O. Hernane and J. L. Nicolas. Localisation des zéros de familles de trinômes. *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, VIII, 3 :471–490, 1999.
 - [15] E. Laguerre. *Oeuvres, Vol. 1, 2nd ed.* Chelsea Publishing, New York, 1972.
 - [16] A. M. Legendre. *Théorie des Nombres, Tomes 1.* Librairie Scientifique et Technique, Albert Blanchard. Paris 6, 1955.
 - [17] M. Marden. *Geometry of polynomials, Mathematical Surveys (3).* Amer. Math. Soc., Providence, 1966.
 - [18] M. Mignotte. An inequality about factors of polynomials,. *Math. Comput.*, 28 :1153–1157, 1974.
 - [19] J. L. Nicolas and A. Schinzel. Localisation des zeros de polynômes intervenant en théorie du signal. in : Langevin, m. and waldschmidt, m. (eds.), cinquante ans de polynômes. lecture notes in mathematics. *Springer-Verlag*, 1415 :167–179, 1990.
 - [20] J. D. Nulton and K. B. Stolarsky. Zeros of certain trinomials. *C. R. Math. Rep. Acad. Sci. Canada*, 6 :243–248, 1984.
 - [21] G. Polya and G. Szegô. *Problems and Theorems in Analysis, 1, 4th ed.* Springer Verlag, Berlin, 1970.
 - [22] J. R. Quine. On positively turning immersions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 61 :69–72, Novembre 1976.
 - [23] Q. I. Rahman and J. Szynal. On some classes of polynomials. *Canad. J. Math*, 30 :332–349, 1978.
 - [24] Q. I. Rahman and J. Waniurski. Coefficient regions for univalent trinomials. *Canad. J. Math*, 32 :1–20, 1980.
 - [25] A. Schinzel. Self-inversive polynomials with all zeros on the unit circle. *The Ramanujan journal*, 9 :19–23, 2005.

- [26] K. B. Stolarsky. A family of polynomials with concyclic zeros. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 88 :622–624, 1983.
- [27] V. Prasolov Victor. *Polynomials, Vol. 2, 2nd ed.* MCCME Center for Continuous Math. Education, Moscow, 2001.
- [28] R. C. Yates. *A Handbook on Curves and their Properties.* Edwards, J. W., Ann Arbor, 1959.