

N° d'ordre : 08/2007-M / MT

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE D'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENNE »**

FACULTE DES MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

EN: Mathématiques

Spécialité : Probabilités et Statistiques

Par : Melle **BENAOUDIA Hassina**

Sujet :

**COMPARAISON STOCHASTIQUE
AU SENS DE
LA THEORIE DE L'INFORMATION**

Soutenu le 12 / 04 / 2007, devant le jury composé de :

Mr. K. BOUKHETALA, Professeur, USTHB
Mr. A. AISSANI, Professeur, USTHB
Mr. K. KHALDI, Professeur, université de Boumerdes
Mr. R. MESSACI, Chargé de cours, USTHB

Président du jury
Directeur de thèse
Examinateur
Examinateur

Résumé

Dans ce mémoire, on s'intéresse à certains problèmes de comparaisons stochastiques au sens de l'entropie. Cette mesure d'information permet de quantifier l'incertitude d'un système. Nous introduisons un ordre en entropie largement étudié dans la littérature ces dernières années, notamment par Ebrahimi (1992), (1996), (2000), (2004). Cet ordre diffère des ordres stochastiques étudiés traditionnellement et qui trouvent des interprétations quantitatives du point de vue du vieillissement. Il permet de tenir compte de l'information sur la durée de vie résiduelle et constitue en quelque sorte une manière de comparer l'incertitude de manière dynamique. Nous étudions diverses propriétés de cet ordre et introduisons une classe particulière de loi non paramétrique liée à cet ordre : les lois à entropie monotone (DURL et IURL). Nous étudions également le concept d'entropie passée qui est le dual de l'entropie résiduelle.

Nous traitons quelques applications liées à cette notion d'incertitude : la méthode du maximum d'entropie pour approcher des distributions en présence d'un minimum d'information (non pas sur les moments, mais sur la monotonie de la loi). Nous décrivons un test de monotonie de l'incertitude à partir d'échantillons de données. Enfin, nous établissons des bornes pour la probabilité de ruine (liée à des applications en finances et assurances) pour la classe d'incertitude des variables paramétriques (montant des sinistres).

Je dédie ce modeste travail à mes parents et mes amis

Remerciements

Je tiens à remercier M^f AISSANI pour les corrections et sa contribution incalculable apportées à ce travail.

J'exprime également mes vifs remerciements à M^{elle} TALEB pour toute la documentation mise à ma disposition.

Aussi, je remercie les membres du jury pour l'intérêt apporté à ce travail.

Sommaire :

Introduction	1
Chapitre 1 : Théorie de l'information et fiabilité	4
I) Préliminaires	5
1. Définition d'une mesure de l'information :	
1.1. Axiomes	5
1.2. Définition de l'entropie	6
1.3. Propriétés de l'entropie	7
a) L'entropie mesure d'incertitude	7
b) L'entropie maximale	7
c) Généralisation au continu (l'entropie différentielle)	8
II) Fiabilités et classes de distributions	9
1.4. Taux de défaillance	9
1.5. Le temps moyen de vie résiduelle (MRL)	9
1.6. Classes de distributions	10
III) Ordres stochastique	11
1.7. L'ordre stochastique usuel	11
1.8. L'ordre en taux de défaillance	12
1.9. L'ordre du rapport de vraisemblance	13
1.10. L'ordre dispersif	13
1.11. L'ordre en temps de vie résiduelle moyen	14
1.12. L'ordre en temps de vie résiduelle moyen inversé (RMR)	14
1.13. L'ordre en taux de défaillance inversé	14
 Chapitre 2 : Mesure d'incertitude pour les classes de distributions	
 non paramétriques et ordre en entropie	16
2.1. Introduction	
2.2. Mesure d'incertitude	17
2.2.1. Propriétés de l'entropie résiduelle (unicité et bornes)	18
2.3. Distribution à entropie résiduelle monotone (DURL, IURL)	19

2.4. Bornes de l'entropie résiduelle.	22
2.5. Conservation de la classe DURL	23
a) Conservation de la classe DURL dans le cas des statistiques d'ordre	23
b) Conservation de la classe DURL dans le cas des valeurs enregistrées	25
2.6. Caractérisation de la loi Pareto basée sur l'incertitude résiduelle	26
2.7. Test de la monotonie de l'entropie résiduelle (DURL)	27
2.7.1. Statistique du test	28
2.7.2. Propriétés de la statistique $J_n(k)$	29
2.8. Ordre stochastique basé sur la notion d'incertitude	31
2.8.1. Critères de comparaison basés sur la notion d'incertitude	31
2.8.2. Meilleur système	33
2.9. Entropie des statistiques d'ordre	34
2.10. Autres résultats sur l'ordre LU	36
2.11. Conservation de l'ordre LU et des classes IURL et DURL par transformation monotone	36
2.12. Entropie passée	38
2.12.1. Définition et interprétation	39
2.12.2. Bornes sur l'entropie passée	39
2.12.3. Effet des transformations strictement monotones sur l'entropie passée	41
2.12.4. Nouvel ordre basé sur l'entropie passée (l'ordre PE)	42
2.12.5. Nouvelle classe de distribution basée sur l'entropie passée	45
2.12.6. Système plus acceptable et entropie passée	47
Chapitre 3 : Application	48
3. 1. Ordre en entropie dynamique	49
3.2. Relation entre classes à entropie monotone et théorie du risque	50
3.2.1. Sommes géométriques et théorie de risque	50
3.2.2. Marche aléatoire	51
3.2.3. Modèle de risque	53
3.2.4. Probabilité de ruine et les classes de distributions IURL et DURL	55
Chapitre 4 : Application et illustrations	58
Conclusion	75
Annexe	77
Bibliographie	

Introduction :

La majorité des ordres stochastiques comparent les variables aléatoires entre elles selon un sens stochastique donné.

Il y a différentes manières de mesurer l'information d'une variable aléatoire ou de sa densité et la plus répandue est celle de l'entropie au sens de Shannon. Elle donne, grossièrement parlant, l'incertitude moyenne contenue dans la densité de la variable à laquelle on s'intéresse.

Elle mesure en quelque sorte la concentration des probabilités ; donc les densités à faibles entropie sont plus concentrées et donc porteuses de plus d'information.

Nous nous intéressons ici, à des questions liés aux problèmes de survie (fiabilité, biologie, assurances,...). Ainsi, si on s'intéresse à la durée de vie d'un élément non pas au début de la mise en œuvre d'un contrat d'assurance, par exemple, mais à un certain stade de la vie de l'élément, il y a une information additionnelle sur l'âge actuel de l'élément étudié, et il est nécessaire de réévaluer l'incertitude de la durée de vie résiduelle.

Cette mesure d'entropie dynamique a été introduite récemment par Ebrahimi [11,15]. Un ordre en entropie peut maintenant être défini qui compare les incertitudes moyennes contenues dans les densités conditionnelles des durées de vie résiduelles. Si on doit comparer deux éléments, le meilleur sera celui dont la probabilité de survie est la plus grande et qui a la plus petite incertitude sur sa durée de vie résiduelle.

Le premier chapitre de ce mémoire sera consacré d'une part à la théorie de l'information, où on donnera la définition et les propriétés de l'entropie au sens de Shannon. Au second chapitre, on s'intéressera à la mesure d'incertitude d'une distribution de vie résiduelle. On ne cherchera pas à changer la mesure d'incertitude shannonnienne, mais à donner une légère modification pouvant être ainsi utilisée en fiabilité telle qu'elle est introduite par Ebrahimi [11,15].

Ainsi, notre mesure d'incertitude est l'information de Shannon appliquée à la vie résiduelle.

Dans ce chapitre, on s'intéressera essentiellement aux définitions et aux propriétés des nouvelles classes de distribution basées sur la notion d'incertitude. On verra aussi la relation entre les distributions DURL (Decreasing Uncertainty of residual life) et IURL (Increasing Uncertainty of residual life) et quelques classes de vieillissement non paramétriques classiques.

Nous discuterons ensuite, quelques résultats obtenus dans la littérature concernant les estimations d'incertitude par majoration et minoration (relativement à cet ordre d'incertitude). On insistera donc sur la connaissance des bornes de l'entropie résiduelle en terme d'espérance de vie résiduelle et en terme de classe de distribution (Ebrahimi, 1996 et Ebrahimi et Kirmani, 1996).

On citera les cas des statistiques d'ordres et des valeurs enregistrées où la classe DURL est conservée (Ebrahimi et Asadi, 2000).

En suite, on donnera un test d'hypothèse sur la monotonie de l'incertitude de la vie résiduelle (Ebrahimi, 1997). On estimera la densité et la fonction de répartition par des mesures empiriques.

On donnera aussi la définition et les critères d'un ordre stochastique basé sur la notion d'incertitude : l'ordre moins incertain ($\leq_{LU}$), et la relation de ce dernier avec des ordres stochastiques basés sur la notion de vieillissement (Ebrahimi et Pellerey, 1995 et Ebrahimi et Kirmani, 1996). On citera aussi des résultats de conservation de l'ordre $\leq_{LU}$ par passage aux transformations monotones.

Après s'être intéressé à l'entropie résiduelle i.e, celle en relation avec le futur ; il est intéressant de considérer le cas où l'incertitude est en relation avec le passé. C'est le cas dual, nommée l'entropie passée (Longobardi et Di Crescenzo, 2002). Dans cette partie on définira l'entropie passée, ses propriétés, ses bornes et ainsi que les transformations monotones. En fin, on définira un nouvel ordre (l'ordre PE) et une nouvelle classe de distribution relatifs à l'entropie passée.

Les chapitres 3 et 4 seront consacrés aux applications qui comporteront trois parties :

En premier lieu, nous discuterons de la méthode du maximum d'entropie qui est une technique d'estimation d'une distribution connue dans la littérature en mécanique et plus récemment dans les problèmes de file d'attente (Aissani, Smail [3]). Nous présentons la solution de cette méthode dans son aspect dynamique (au sens de vie résiduelle) lorsque les contraintes portent non pas sur des égalités sur les premiers moments comme c'est de coutume dans les études usuelles, mais sur la monotonie du risque ou l'appartenance à une classe non paramétrique donnée.

On s'intéressera à une application d'un résultat de Ebrahimi (2004) sur la maximisation de l'entropie (MDE) dans l'ensemble des densités monotones vérifiant des contraintes sur le taux de défaillance.

On appliquera ainsi cette notion sur trois exemples :

Le premier est la comparaison des durées de vie des systèmes parallèles et en série avec leurs composants. En suite, la comparaison d'une séquence de v.a avec les valeurs enregistrées.

Enfin, on donnera les distributions au maximum dynamique entropie sous quelques contraintes sur le taux de défaillance.

Comme deuxième illustration, on propose une application des deux premiers critères de l'ordre LU (A.Aissani, 2006).

On s'intéressera en suite au test de monotonie de l'incertitude.

Dans la dernière partie de l'application ; on se penchera sur le problème d'estimation de la probabilité de ruine d'une compagnie d'assurance et où on utilisera des bornes basées sur la notion de vieillissement (Cai et Garrido, 1999) en relation avec les distributions basées sur la notion d'incertitude IURL et DURL, du fait que les unes sont sous classes des autres. On verra aussi les conditions de la conservation de l'ordre LU par passage aux marches aléatoires.

Chapitre 1

Théorie de l'information et fiabilité

Théorie de l'information

Shannon (1948) donne la définition de l'entropie associée à une distribution discrète que l'on note $H(p_1, \dots, p_k)$ comme étant la quantité d'information moyenne contenue dans cette distribution et $H(p_1, \dots, p_k) = - \sum_i p_i \log p_i$.

Si les logarithmes choisis sont à la base D où D est un entier supérieur ou égal à 2, $H(p_1, \dots, p_k)$ représente le nombre moyen minimum de questions à D réponses qu'il faut poser pour identifier un objet choisi au hasard parmi les k objets distinguables entre eux selon la loi de probabilité $(p_1, \dots, p_k)$. C'est l'interprétation de la théorie du questionnaire.

Les composants et les systèmes à grande incertitude sont non fiables et fréquemment on ne sait pas calculer cette incertitude. Le meilleur composant est le composant qui vit plus longtemps et sa vie résiduelle est moins incertaine. Pour éclaircir cette notion d'incertitude supposons une v.a T , prenant ces valeurs sur l'ensemble $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ avec équiprobabilité telle que $P(T=i) = 1/5$, $i=1, \dots, 5$. On s'intéresse à la question : Quelle est la quantité d'information exprimée à partir de la valeur de T , en considérant l'information « $2 \leq T$ ». En premier lieu, si on essaye de deviner la valeur de T , on a une probabilité $1/5$ de trouver la bonne réponse. Après que l'on sache que T est plus grand que 2, on a une probabilité plus grande de deviner juste. En d'autres termes, il y a moins d'incertitude dans la deuxième situation. Dans ce mémoire on suivra cette issue.

Dans ce chapitre nous rappelons les définitions et les propriétés de base de l'entropie

I) Préliminaires :

Supposons qu'on ait une urne composée de 50 boules blanches et 50 boules noires. Le résultat du tirage d'une boule de l'urne ne sera prévisible qu'avec une grande incertitude. Mais si la composition de l'urne est de 1 boule blanche et 99 boules noires, c'est avec une « quasi-certitude » qu'on se croira autorisé à prévoir le tirage d'une boule noire.

Ainsi, l'information qu'on a d'un événement E donné est liée à sa probabilité :

$I(E) =$ (fonction de probabilité de E)

1. Définition d'une mesure de l'information :

1.1. Axiomes :

Supposons que l'on dispose d'un alphabet de N lettres, noté A_N :

$$A_N = \{a_1, a_2, \dots, a_N\}.$$

Pour passer du niveau d'information qui consiste à connaître cet alphabet au niveau d'information correspondant à la connaissance d'une lettre tirée au hasard de cet alphabet, on cherche à définir une expression $I(A_N)$ permettant d'apprécier le changement de niveau.

Si on augmente d'une lettre notre alphabet, il serait souhaitable que :

$$I(A_{N+1}) > I(A_N) \quad (1.1.1)$$

Disposons maintenant de deux alphabets A_N et A_M . On pourra dire dans ce cas que l'information ramenée par le tirage d'une lettre parmi les $N \times M$ lettres de l'alphabet produit $A_{N \times M}$ sera égale à la somme des informations obtenues par tirage d'une lettre successivement dans chacun des alphabets composants A_N et A_M ,

$$\text{i.e : } I(A_{N \times M}) = I(A_N) + I(A_M) \quad (1.1.2)$$

En fin, comme le plus petit alphabet doit contenir au moins deux lettres; pour une lettre l'événement étant certain, son apparition ne modifiant pas le niveau d'information, on doit alors avoir : $I(A_2) = 1$.

La fonction logarithme satisfait parfaitement à toutes ces exigences.

Si on pose : $I(A_N) = \log_b N$

On a bien: $\log_b (N+1) > \log_b N$

$$\log_b N \times M = \log_b N + \log_b M$$

$$\log_2 2 = 1.$$

1.2. Définition de l'entropie:

Nous n'avons jusqu'ici tenu compte que du nombre des possibilités (les N lettres d'un alphabet par exemple), sans nous soucier du caractère aléatoire de ces possibilités.

Mais en fait, on a considéré toutes les lettres d'un alphabet d'ordre N , comme équiprobable.

Ainsi, l'espérance mathématique est :

$$E(A_N) = p_1 \log_b N + p_2 \log_b N + \dots + p_N \log_b N = \log_b N \sum_{i=1}^N p_i = \log_b N, \text{ ici } p_i = \frac{1}{N}, \forall i.$$

Puisque nous avons admis que la quantité d'information attachée à la valeur x_i de la v.a X représentant l'alphabet d'ordre N , était $I(A_N) = \log_b (1/p_i)$, p_i étant la probabilité de x_i avec

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1.$$

$$\text{Ainsi : } E(X) = \sum_{i=1}^N p_i \log_b (1/p_i) = - \sum_{i=1}^N p_i \log_b (p_i).$$

Cette valeur représente « la quantité moyenne d'information » quand une épreuve donne lieu à un événement dont le résultat est x_i . SHANNON lui a donné le nom d'entropie ; notée H ou H_b pour indiquer la base.

Si $p_1 = p_2 = \dots = p_N$: $H = -N \left(\frac{1}{N} \log \frac{1}{N} \right) = \log_b N$.

1.3. Propriétés de l'entropie :

a) L'entropie mesure d'incertitude :

Supposons une épreuve consistant à tirer une boule d'une urne de composition donnée. Nous disposons des trois compositions suivantes :

- i) une boule blanche et une boule noire.
- ii) Neuf boules noires et une boule blanche.
- iii) Quatre vingt dix neuf boules noires et une boule blanche.

On cherche à évaluer l'incertitude du résultat d'une épreuve dans chacun de ces cas.

Si X est la v.a : $X = \{N \text{ boules noires, } B \text{ boules blanches}\}$, on a alors les trois distributions de probabilités suivantes correspondant aux trois cas précédents :

N	B
1/2	1/2

N	B
9/10	1/10

N	B
99/100	1/100

Le calcul des entropies relatives donne :

$$H_1 = 1 \text{ bit}, H_2 = 0.67 \text{ bit}, H_3 = 0.08 \text{ bit}.$$

Le résultat du premier cas est plus incertain que celui du second et ce dernier est plus incertain que le troisième, dans lequel l'événement « apparition d'une boule noire » a la « quasi-certitude » de se produire.

b) L'entropie maximale :

Le logarithme étant une fonction convexe, sa courbe représentative $y = \ln x$ est toujours située en dessous de sa tangente au point $x=1$.

$$\text{On a : } \ln x \leq x-1$$

$$\text{Dans ces conditions on a : } \ln \frac{p'_i}{p_i} \leq \frac{p'_i}{p_i} - 1$$

$$\text{On a alors : } \sum_i p_i \ln \frac{p'_i}{p_i} \leq \sum_i (p'_i - p_i) = 0$$

$$\text{Car : } \sum_i p'_i = \sum_i p_i = 1$$

$$\text{Ainsi : } \sum_i p_i \ln p'_i \leq \sum_i p_i \ln p_i \quad (1.3.1)$$

$$\text{Posons : } p'_i = 1/n$$

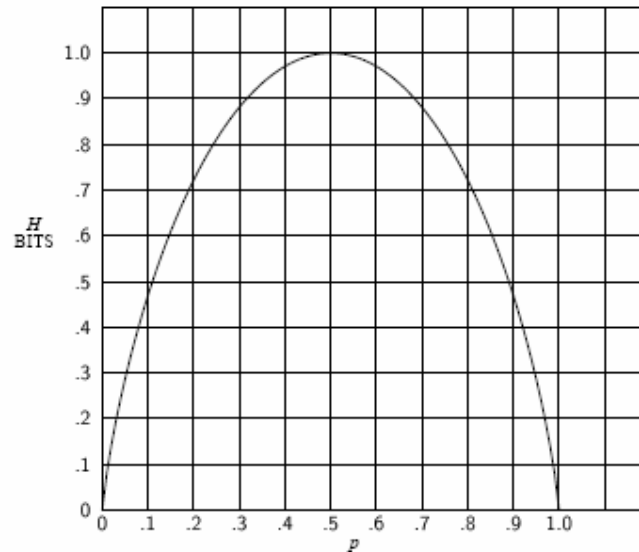
$$(1.3.1) \Rightarrow \sum_i p_i \ln \frac{1}{n} \leq \sum_i p_i \ln p_i$$

$$\Rightarrow -\sum_i p_i \ln p_i \leq \ln n$$

$$\Rightarrow H(p_1, \dots, p_n) \leq \ln n$$

l'égalité n'étant possible que si et ssi : $p_i = p'_i = 1/n$.

SHANNON donne la variation de l'entropie H_2 d'une v.a d'ordre 2. On peut représenter par 0 et 1 les deux valeurs de la v.a X.



Soit $P(X=0)=p$, $P(X=1)=1-p=q$.

Alors : $H_2 = -p \ln p - q \ln q$

$$= -p \ln p - (1-p) \ln (1-p).$$

$H_{\max} = 1$ car $\ln 2 = 1$.

Ce maximum est atteint pour $p=1/2$.

$H=0$ pour $p=0$ ou $q=0$, ce qui est normal puisque l'une ou l'autre des deux alternatives est certaine.

Remarque : Il y a une symétrie par rapport à l'axe $p=1/2$. Par exemple, pour $p=0.2$ (on a : $q=0.8$) $H=0.72$ et pour $p=0.8$ ($q=0.2$) $H=0.72$. On remarque alors que l'entropie est conservée lors de la permutation des deux valeurs de probabilités p et q . Ainsi, on conclut que :

$$H(p,q) = H(q,p).$$

c) Généralisation au continu (l'entropie différentielle) :

Si $f(.)$ est la fonction densité de probabilité de la v.a X, alors l'entropie différentielle est telle que :

$$H(X) = -\int f_X(x) \log f_X(x) dx$$

- › Dans le chapitre suivant, on verra une application de l'entropie différentielle aux ordres stochastiques et aux lois non paramétriques.

II) Fiabilité et classes de distributions :

On s'intéressera dans cette partie aux définitions des notions de fiabilité basées sur la notion de vieillissement qu'on utilisera dans la suite du travail.

1.4) Taux de défaillance :

Si X est une v.a positive de fonction distribution F , alors le taux de défaillance de X à l'instant $t > 0$ est défini tel que :

$$l_F(t) = \frac{d}{dt}(-\log(1 - F(t))) \quad (1.4.1)$$

$$\text{ainsi, } \bar{F}(t) = \exp\left(-\int_0^t l_F(u) du\right) \quad (1.4.2)$$

Il peut être exprimé par :

$$l_F(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{P\{t < X < t + \Delta t / X > t\}}{\Delta t} = \frac{f(t)}{\bar{F}(t)}, t \geq 0. \quad (1.4.3)$$

Où $\bar{F}(t) \equiv 1 - F(t)$ est la fonction de survie et $f(t) = \frac{d}{dt} F(t)$ est la fonction densité

correspondante.

(1.4.3) exprime l'intensité de la défaillance d'un élément d'âge x à l'instant t .

1.5) Le temps moyen de vie résiduelle (MRL)

Le temps moyen de vie résiduelle d'une v.a X de fonction de survie $\bar{F}$, et de moyenne finie m , est défini tel que :

$$m(t) = \begin{cases} E(X - t / X > t), & \text{pour } t < t^* \\ 0 & \text{Sinon} \end{cases}$$

Où $t^* = \sup\{t : \bar{F}(t) > 0\}$

Notons que si X est une v.a positive : $m(0) = m$

$$\text{Si } t^* = \infty : m(t) = \left(\int_t^\infty \bar{F}(x) dx\right) / \bar{F}(t) \quad (1.5.1)$$

qu'on notera aussi $d_F(t)$. Ainsi :

$$\bar{F}(t) = \frac{d_F(0)}{d_F(t)} \exp\left(-\int_0^t \frac{1}{d_F(x)} dx\right) \quad (1.5.2)$$

$$l_F(t) = \frac{d'_F + 1}{d_F(t)} \quad (1.5.3)$$

$$\text{et } d_F(t) = \int_t^\infty \exp\left(-\int_t^y l(u) du\right) dy \quad (1.5.4)$$

Le MRL est intéressant dans le cas où X est la vie résiduelle d'un élément et $m(t)$ alors exprime l'espérance conditionnelle de la vie résiduelle de l'élément à l'instant t sachant que cet élément est en vie jusqu'à cet instant (i. e : t).

Propriétés de la fonction MRL $m(t)$:

(i) $0 \leq m(t) < \infty$ Pour tous $t \geq 0$.

(ii) $m(0) > 0$.

(iii) m est continue.

(iv) $m(t) + t$ est croissante sur $[0, \infty)$.

(v) s'il existe t_0 tel que $m(t_0) = 0, m(t) = 0$ pour tous $t > t_0$, sinon, quand un tel t_0

n'existe pas, alors $\int_0^\infty \frac{1}{m(t)} dt = \infty$.

Variance résiduelle et coefficient de variation résiduelle :

On définit la variance résiduelle telle que :

$$s_F^2(t) = \text{Var}(X - t / X > t),$$

et le coefficient de variation résiduelle comme étant le rapport de l'écart type résiduel et l'espérance de vie résiduelle :

$$g_F(t) = s_F(t) / d_F(t).$$

1.6) Classes de distributions :

Soit X une v.a positive de fonction de distribution F et de fonction de survie $\bar{F}$.

$-F$ est dite IFR resp. DFR (Increasing (Decreasing) Failure Rate) si

$$\bar{F}_t(x) = \frac{\bar{F}(t+x)}{\bar{F}(t)} \text{ est décroissant (croissant) en } t, \forall t \geq 0, x \geq 0$$

ou en terme de taux de défaillance λ ; on dit que F est IFR (DFR) si et ssi, $\lambda(t)$ est croissant (décroissant) en t .

-Une v.a X positive de fonction de survie $\bar{F}$ est dite NBU resp. NWU (New Better than Used resp. New Worse than Used) neuf meilleur qu'usagé resp. Neuf pire qu'usagé si

$$\bar{F}(s+t) \leq (\geq) \bar{F}(s) \cdot \bar{F}(t) \quad \forall s, t \geq 0.$$

-F est dite IFRA resp. DFRA (Increasing (Decreasing) Failure Rate in Average) si

$$\Lambda(t) = -\frac{1}{t} \log \bar{F}(t) \text{ est non croissant (non décroissant) en } t, \forall t \geq 0$$

-F est dite IMRL resp. DMRL (Increasing (Decreasing) Mean Residual Life) si

$$m(t_2) \geq (\leq) m(t_1), \quad \forall t_2 \geq t_1 \geq 0$$

-F est dite NBUE resp. NWUE (New Better than Used in Expectation resp. New Worse than Used in Expectation) si:

$$\int_t^\infty \bar{F}(x) dx \leq (\geq) m \bar{F}(t), \quad \forall t \geq 0$$

$$m = E(X) = \int_0^\infty x f(x) dx = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx : \text{Durée de vie moyenne.}$$

III) Ordres stochastiques :

1.7) L'ordre stochastique usuel :

Définition : soit X et Y deux v.a telles que :

$$P(X > u) \leq P(Y > u) \quad \forall u \in (-\infty, +\infty) \quad (1.7.1).$$

Alors X est dite stochastiquement inférieure à Y qu'on note $X \leq_{st} Y$.

$$i.e \quad \bar{F}_X(u) \leq \bar{F}_Y(u). \quad (1.7.2)$$

Propriétés :

a) Si $X \leq_{st} Y$ et g une fonction croissante (décroissante), alors

$$g(X) \leq_{st} (\geq_{st}) g(Y). \quad (1.7.3).$$

b) $X_1, X_2, \dots, X_m$ un ensemble de v.a indépendantes et $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$ un autre ensemble de v.a indépendantes. Si $x_i \leq_{st} y_i$ pour $i = 1, 2, \dots, m$ alors pour toute fonction croissante $y : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, on a :

$$y(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq_{st} y(y_1, y_2, \dots, y_m). \quad (1.7.4)$$

$$\text{En particulier : } \sum_{i=1}^m x_i \leq_{st} \sum_{i=1}^m y_i \quad (1.7.5)$$

Ainsi, l'ordre stochastique est conservé par le passage à la convolution.

c) Soit $\{X_j, j = 1, 2, \dots\}$ une séquence de v.a indépendantes et M une v.a entière positive indépendante des X_i .

Soit $\{Y_j, j = 1, 2, \dots\}$ une autre séquence de v.a indépendantes et N une v.a entière positive indépendante des y_i ,

Si $X_i \leq_{st} Y_i \quad i = 1, 2, \dots$ et si $M \leq_{st} N$ alors :

$$\sum_{j=1}^M X_j \leq_{st} \sum_{j=1}^N Y_j \quad (1.7.6)$$

1.8) L'ordre en taux de défaillance : ($\leq_{hr}$ ou $\leq_{FR}$)

Soit X et Y deux v.a positives avec des fonctions de distributions continues et de taux de défaillance r et q resp tels que :

$$r(t) \geq q(t) \quad , t \geq 0. \quad (1.8.1)$$

Alors X est dite inférieure à Y par rapport à l'ordre en taux de défaillance que l'on note $X \leq_{hr} Y$.

Ou vérifie que (1.8.1) se réalise si et ssi :

$$\frac{\bar{F}(t)}{\bar{G}(t)} \text{ décroît en } t. \quad (1.8.2)$$

$$\Leftrightarrow \bar{F}(u)\bar{G}(v) \geq \bar{F}(v)\bar{G}(u) \text{ pour tout } u \leq v \quad (1.8.3)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(u)}{\bar{F}(v)} \leq \frac{g(u)}{\bar{G}(v)} \quad (1.8.4)$$

La formule (1.8.3) équivalente à :

$$\frac{\bar{F}(t+s)}{\bar{F}(t)} \leq \frac{\bar{G}(t+s)}{\bar{G}(t)} \text{ pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } t.$$

On a aussi : si $X \leq_{hr} Y$ si et ssi :

$$P(X - t > s / X > t) \leq P(Y - t > s / Y > t) \text{ pour tout } s \geq 0 \text{ et tout } t. \quad (1.8.5)$$

i.e : les vies résiduelles de X et de Y sont comparables par rapport à l'ordre stochastique pour tout t.

Ainsi, de manière équivalente (1.8.5) peut être réécrite telle que :

$$[X / X > t] \leq_{st} [Y / Y > t] \quad (1.8.6)$$

Théorème : Soit $(X_i, Y_i) \quad i = 1, \dots, m$ des couples de v.a telles que :

$X_i \leq_{hr} Y_i \quad i = 1, 2, \dots, m$. Si $X_i, Y_i \quad i = 1, 2, \dots, m$, soient toutes IFR, alors :

$$\sum_{i=1}^m X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^m Y_i \quad (1.8.7)$$

La comparaison par rapport à l'ordre taux de défaillance de sommes aléatoire est donnée par le résultat suivant :

Théorème : Soit $\{X_i, i = 1, 2, \dots\}$ une séquence positive de v.a indépendantes IFR.

Soit M et N deux v.a entières positives telles que $M \leq_{hr} N$.

Alors : $\sum_{i=1}^M X_i \leq_{hr} \sum_{i=1}^N X_i$.

1.9) L'ordre du rapport de vraisemblance : $\leq_{LR}$

Définition : Soit X et Y deux v.a de densités f et g telles que :

$$\frac{f(t)}{g(t)} \text{ décroît sur l'union des supports de X et Y} \quad (1.9.1)$$

Ou de manière équivalente :

$$f(u)g(v) \geq f(v)g(u) \text{ Pour tout } u \leq v \quad (1.9.2)$$

Alors, X est dite inférieure à Y à l'ordre du rapport de vraisemblance, noté $X \leq_{LR} Y$.

1.10) L'ordre dispersif : $(\leq_{disp} \text{ ou } \leq_D)$

Soit X et Y deux v.a de fonctions de distributions F et G, resp.

Soit F^{-1} et G^{-1} les fonctions inverses appropriées ; telles que :

$$F^{-1}(b) - F^{-1}(a) \leq G^{-1}(b) - G^{-1}(a) \text{ Pour } 0 < a < b < 1 \quad (1.10.1)$$

Alors X est dite inférieure à Y en l'ordre dispersif que l'on note :

$$X \leq_{disp} Y \quad (ou : X \leq_D Y),$$

si et seulement si :

$$G^{-1}(a) - F^{-1}(a) \text{ est croissante pour } a \in (0,1). \quad (1.10.2)$$

En posant $a = F(x)$, ceci revient à dire :

$$G^{-1}(F(x)) - x \text{ est croissante en } x. \quad (1.10.3)$$

ou bien, de dire que $X \leq_D Y$ si $\bar{F}^{-1}(u) - \bar{F}^{-1}(v) \leq \bar{G}^{-1}(u) - \bar{G}^{-1}(v)$ pour tout $0 < v < u < 1$ où $\bar{F}^{-1}(u) = \inf\{x : \bar{F}(x) \geq u\}$.

D'autre part, en terme de taux de défaillance, l'ordre dispersif est vérifié si et ssi :

$$I_G(G^{-1}(u)) \leq I_F(F^{-1}(u)) \text{ pour tout } u \in (0,1).$$

1.11) L'ordre en temps de vie résiduelle moyen :

Définition : soit X et Y deux v.a de fonctions mrl m et l resp, telles que :

$$m(t) \leq l(t) \text{ pour tout } t. \quad (1.11.1)$$

Alors X est dite inférieure à Y dans l'ordre mrl que l'on note $X \leq_{mrl} Y$.

(1.11.1) est équivalente à dire :

$$\frac{\int_t^\infty \bar{F}(u) du}{\int_t^\infty \bar{G}(u) du} \text{ décroît en } t \text{ dans l'ensemble } \{t : \int_t^\infty \bar{G}(u) du > 0\} \quad (1.11.2)$$

ou bien de dire :

$$\bar{G}(t) \int_t^\infty \bar{F}(u) du \leq \bar{F}(t) \int_t^\infty \bar{G}(u) du \text{ pour tout } t. \quad (1.11.3)$$

1.12) L'ordre en temps de vie résiduelle moyen inversé (RMR) :

On dit que X est supérieure à Y en ordre RMR ($X \geq_{RMR} Y$) si :

$$\frac{\int_0^t F(u) du}{\int_0^t G(u) du} \text{ décroît en } t > 0.$$

1.13) L'ordre en taux de défaillance inversé: ($\leq_{RH}$)

Alors X est dite supérieure à Y par rapport à l'ordre en taux de défaillance inversé que l'on note $X \geq_{RH} Y$, si :

$$\frac{F(t)}{G(t)} \text{ décroît en } t \geq 0.$$

Quelques résultats de la relation existante entre les ordres stochastiques :

$$\begin{aligned} X \leq_{LR} Y &\Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{st} Y. \\ X \leq_{LR} Y &\Rightarrow X \leq_{hr} Y \Rightarrow X \leq_{Mrl} Y. \\ X \geq_{LR} Y &\Rightarrow X \geq_{RH} Y \Rightarrow X \geq_{RMR} Y \text{ et } X \geq_{LR} Y \Rightarrow X \geq_{RH} Y \Rightarrow X \geq_{st} Y \end{aligned} \quad (1.11.4).$$

Chapitre 2
***Mesure d'incertitude pour les classes de
distributions non paramétriques et ordre
en entropie***

**Mesure d'incertitude pour les classes de distributions
non paramétriques et ordre en entropie.**

2.1. Introduction : Soit X une v.a positive ou nulle représentant le temps de défaillance d'un composant de distribution $F(t) = P(X \leq t)$ et de fonction de survie $\bar{F}(t) = 1 - F(t)$. On suppose que $\bar{F}(0) = 1$. Soit $f(t) = F'(t)$ la densité de défaillance et $l_F(t) = f(t)/\bar{F}(t)$ le taux de défaillance du composant et sa fonction de durée de vie moyenne :

$$d_F(t) = E(X - t / X > t) = \frac{\int_t^{\infty} \bar{F}(x) dx}{\bar{F}(t)}, \text{ si } t < \infty \text{ et } 0, \text{ sinon.}$$

Intuitivement, le meilleur composant est celui qui vit le plus longtemps. Donc, il s'agira de celui qui possède une vie résiduelle moins incertaine.

Dans ce qui suit, on introduira la notion d'entropie appliquée à la fiabilité et pour la quelle on donnera des bornes et de nouvelles classes de distribution ainsi que leurs caractéristiques. On établira des critères pour l'ordre en entropie et une application de cet ordre aux statistiques d'ordre des durées de vie résiduelles. On s'intéressera aussi à un test d'une distribution de vie résiduelle d'incertitude décroissante, et en fin, on verra la notion d'entropie passée comme dual de l'entropie résiduelle. On donnera un nouvel ordre et une nouvelle classe de distribution appropriés à ce dual.

2.2. Mesure d'incertitude :

La mesure d'incertitude d'une distribution F est l'entropie différentielle donnée par :

$$H(f) = - \int_0^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx = - E(\log f(X)) \quad (2.2.1)$$

$H(f)$ note la mesure d'incertitude shannonienne.

Intuitivement, l'entropie mesure l'espérance de l'incertitude contenue dans $f(t)$ d'une v.a X . Ainsi, $H(f)$ mesure la concentration des probabilités. Les distributions à faible entropie sont plus concentrées, ainsi, elles sont plus informatives que les distributions à grande entropie.

En fiabilité, souvent on a une information sur l'âge courant du composant en question. Dans ces cas, on doit prendre en considération l'âge dans la mesure de l'incertitude. Pour cette raison, la mesure $H(f)$ de (2.2.1) doit être modifiée. EBRAHIMI (1992, 1996) propose une réécriture sous la forme :

$$\begin{aligned}
 H(f, t) &= - \int_t^{\infty} \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} \log \frac{f(x)}{\bar{F}(t)} dx \\
 &= - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} f(x) \log f(x) dx + \log \bar{F}(t) \\
 &= 1 - \frac{1}{\bar{F}(t)} \int_t^{\infty} (\log I_F(x)) f(x) dx
 \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

Si un composant vit jusqu'à l'instant t , $H(f, t)$ mesure l'incertitude contenue dans la densité conditionnelle de $X-t$ sachant $X > t$ sur la prédictabilité du temps résiduel du composant. ainsi, $H(f, t)$ mesure la concentration des probabilités conditionnelles.

Si on prend le cas particulier quand $t=0$: $H(f, 0) = - \int_0^{\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx = H(f_X)$ est tout simplement la mesure d'incertitude de SHANNON.

Remarques :

- › $H(f, t)$ peut être négative et infinie.
- › La mesure d'incertitude est comparable à la variance de la variable X ; où la mesure $H(f, t)$ mesure la concentration des probabilités conditionnelles sur le support de la distribution conditionnelle et la variance quant à elle, mesure la concentration du support de la distribution de X autour de la moyenne.

2.2.1. Propriétés de l'entropie résiduelle (unicité et bornes) :

Théorème 2.2.1 (Ebrahimi, 1996) : Soit T une v.a continue positive ou nulle de fonction densité de probabilité f et $H(f, t) < \infty$, $t \geq 0$, alors $H(f, t)$ détermine de manière unique $\bar{F}$.

Ainsi pour une valeur de $H(f, t)$, il ne peut y avoir deux distributions de survie distinctes. Le théorème suivant donne une borne pour $H(f, t)$ en terme de $d_F(t)$.

Théorème 2.2.2 (Ebrahimi, 1996) : Supposons que $d_F(t) < \infty$, alors :

$$H(f,t) \leq 1 + \log d_F(t). \quad (2.2.2)$$

A partir de ce théorème on peut déduire que $H(f,t)$ est finie quand $d_F(t)$ l'est aussi.

La borne $1 + d_F(t)$ donne une borne supérieure utile de $H(f,t)$ en terme de moyenne de vie résiduelle $d_F(t)$. Par ailleurs, si on possède plus d'information en terme de variance résiduelle $s_F^2(t)$ ou de manière équivalente, en terme de coefficient de variation résiduelle $g_F(t)$, on peut alors se donner une meilleure borne, telle que :

Théorème 2.4.3: (Ebrahimi, Kirmani, 1996)

Soit $E(X^2) < \infty$, alors :

$$H(f,t) \leq \frac{1}{2} q_0^2 g_F^2(t) + \log \left\{ (2p)^{1/2} (1/q_0) d_F(t) \bar{\Phi}(-q_0) \right\},$$

où q_0 est la solution de l'équation $q^2 g_F^2(t) = 1 + y(-q)$ où $y(x) = x f(x) / \bar{\Phi}(x)$, $\bar{\Phi}(x) = 1 - \Phi(x)$ et f et Φ la densité et la fonction de distribution, respectivement, d'une distribution Normale.

Remarque : Dans plusieurs cas cette borne est inférieure à la borne $1 + d_F(t)$ donnée précédemment. Si par exemple, $q_0^2 \geq 2p / e$, alors cette borne est inférieure à $1 + d_F(t)$ et est donc meilleure.

2.3. Distributions à entropie résiduelle monotone (DURL, IURL) :

Dans cette partie, on introduit deux classes de distribution non paramétriques telles qu'elles sont proposées par EBRAHIMI (1996) basées sur la notion d'incertitude.

Définition 2.3.1 : $\bar{F}$ est DURL (IURL) si $H(f,t)$ est décroissante (croissante) en t , $t \geq 0$.

Où DURL : Decreasing Uncertainty of Residual Life

IURL : Increasing Uncertainty of Residual Life.

Intuitivement, si un composant possède une fonction de survie qui appartient à la classe DURL, alors la fonction densité de probabilité conditionnelle devient plus informative.

Remarque : la fonction exponentielle est la seule distribution qui est DURL et IURL à la fois où $l_F(t) = l$, avec l paramètre de la distribution.

Relation entre les classes basées sur l'incertitude et les classes de vieillissement :

Le théorème suivant donne la relation entre les classes IFR et DURL.

Théorème 2.3.1 (Ebrahimi,1996) : *Si $\bar{F}$ est IFR (DFR) alors elle est aussi DURL (IURL).*

Remarque :

- v Il n'y a pas de relation entre ces classes de distributions et la classe IFRA , i.e DURL n'implique pas IFRA
- v La réciproque de l'implication donnée dans le théorème 2.3.1 est fausse, i.e DURL n'implique pas IFR.

Le théorème suivant donne la relation entre DMRL est DURL. C'est une extension du théorème (2.3.1).

Théorème 2.3.2 (Ebrahimi, Kirmani,1996) :

(a) Si $\bar{F}$ est DMRL, alors $\bar{F}$ est DURL.

(b) Si $\bar{F}$ est IURL, alors $\bar{F}$ est IMRL.



Le contre exemple suivant montre que la réciproque de (a) est fausse.

Contre-exemple : On définit la fonction de survie suivante :

$$\bar{F}(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ \exp(2-t) & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ \exp(-1) & \text{si } 3 \leq t \leq 4 \\ \exp(7-2t) & \text{si } t \geq 4 \end{cases}$$

alors l'entropie résiduelle est telle que :

$$H(f;t) = \begin{cases} 1 - (\log 2) \exp(-1) & \text{si } 0 \leq t \leq 2 \\ 1 - (\log 2) \exp(t-3) & \text{si } 2 \leq t \leq 3 \\ 1 - \log 2 & \text{si } t \geq 3 \end{cases}$$

On a ainsi $H(f;t)$ décroissante en t ; alors que $d_F(2) = 1 + \exp(-1)$ et $d_F(3) = 2 > d_F(2)$. Ainsi, $d_F(t)$ n'est pas décroissante en t et donc $\bar{F}$ n'est pas DMRL.

Application aux processus de renouvellement :

On considère un processus de renouvellement $\{N(t), t \geq 0\}$ avec une fonction de distribution des inter arrivées F .

On définit $W_t = S_{N(t)+1} - t$ et $Z_t = S_{N(t)+1} - S_{N(t)}$ où $S_n = \inf \{t; N(t) \geq n\}$.

(a) la distribution limite de W_t quand $t \rightarrow \infty$ possède une fonction de survie

$$\bar{F}^0(x) = \int_x^\infty \bar{F}(t) dt / m \quad \text{où } m = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx.$$

Le taux de défaillance correspondant à $\bar{F}^0$ est $l^0(x) = 1/d_F(x)$, on remarque alors que si $\bar{F}$ est DMRL, $\bar{F}^0$ est IFR ; ainsi elle est DMRL. A partir du théorème 2.3.2, si $\bar{F}$ est DMRL, $\bar{F}^0$ est DURL.

(b) Block et al (1985, théorème 2.5) donnent le résultat suivant : Soit $\bar{F}_1(x)$ et $\bar{F}_2(x)$ deux fonctions de survie, de taux de défaillance $l_1(x)$ et $l_2(x)$, respectivement tels que $l_2(x) = r(x) l_1(x)$ où $r(x)$ est croissante et $0 \leq r(x) \leq 1$. Si $\bar{F}_1$ est DMRL alors $\bar{F}_2$ l'est aussi.

La distribution limite de Z_t quand $t \rightarrow \infty$ a la fonction de survie

$$\bar{F}^*(x) = \int_x^\infty t f(t) dt / m \quad \text{et} \quad l^*(x) = r(x) l_F(x), \text{ où } r(x) = x/(x + d_F(x)). \text{ Quand } \bar{F} \text{ est}$$

DMRL, $r(x)$ est croissante et ainsi, $\bar{F}^*$ est DMRL. A partir du théorème 2.1, si $\bar{F}$ est DMRL, $\bar{F}^*$ est DURL.

2.4) Bornes de l'entropie résiduelle:

Le théorème suivant donne une borne inférieure du taux de défaillance de la fonction de survie $\bar{F}$ appartenant à ces classes de distribution.

Théorème 2.4.1 (Ebrahimi, 1996)

Soit $\bar{F}$ DURL (IURL), alors :

$$l_F(t) \leq (\geq) \exp(1 - H(f, t)), \quad t > 0. \quad (2.4.1)$$

Du fait que : $H'(f, t) = l_F(t)[H(f, t) - 1 + \log l_F(t)]$.

Remarque : En utilisant (1.4.2) et (1.5.3), si $\bar{F}$ est DURL (IURL), alors :

$$\bar{F}(t) \geq (\leq) \exp\left[-\int_0^t \exp(1 - H(f, x)) dx\right].$$

$$l_F(t) = \frac{d'_F + 1}{d_F(t)} \leq (\geq) \exp(1 - H(f, t)), \quad t \geq 0.$$

Dans le théorème 2.4.1, on a égalité si $\bar{F}$ est une exponentielle.

Le corollaire suivant donne une borne supérieure pour $H(f, t)$ avec $f(0)$ connue :

Corollaire 2.4.1 : Soit $\bar{F}$ DURL (IURL), alors :

$$H(f, t) \leq (\geq) 1 - \log f(0).$$

Théorème 2.4.2 : (a) Soit $\bar{F}$ DURL, alors $H(f, t) \leq 1 + \log m$.

$$(b) \text{ Soit } \bar{F} \text{ IURL, alors } \exp(H(f, 0) - 1) \leq d_F(t).$$

Avec $m = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx$ (la moyenne de la distribution de défaillance)

2.5.. Conservation des la classes DURL (IURL) :

Ebrahimi et Asadi (2000) ont étudié la conservation de la classe DURL dans le cas d'un système parallèle, des valeurs enregistrées (record values) et des comparaisons des statistiques d'ordres et des valeurs enregistrées sur la base de la mesure dynamique $H(f;t)$.

2.5.1. Conservation de la classe DURL basée sur les statistiques d'ordre et les valeurs enregistrées :

Tous les théorèmes de ce paragraphe se basent sur le lemme suivant :

Lemme 2.5.1 : Soit X et Y deux variables aléatoires positives absolument continues, de densité f et g , de taux de défaillance λ_F et λ_G , de fonctions de survies $\bar{F}$ et $\bar{G}$ et d'entropies $H(f;x)$ et $H(g;x)$, respectivement. Soit q une fonction croissante positive telle que :
 $\lambda_G(x) = q(x) \lambda_F(x)$, $x \geq 0$ et $0 \leq q(x) \leq 1$. Soit aussi $\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{G}(x) / \bar{F}(x) < \infty$.

Si $H(f;x)$ décroissante (i.e F DURL), alors $H(g;x)$ l'est aussi.

Remarque : Block et al (1985) ont montré que quand F et G sont deux fonctions de distributions continues de taux de défaillances λ_F et λ_G respectivement, alors si F est IFR (DFR), IFRA (DFRA), NBU (NWU) ou DMRL (IMRL), alors G l'est aussi.

a) Conservation de la classe DURL dans le cas des statistiques d'ordre :

Soient $X_{1:n}, X_{2:n}, \dots, X_{n:n}$ les statistiques d'ordre d'un ensemble de v.a iid de distribution F . Alors $X_{k:n}$ représente la durée de vie d'un $(n-k+1)$ out of n system (i.e au moins $(n-k+1)$ composants en marche dans l'ensemble des n composants). Soient $F_{k:n}, f_{k:n}$, et $\lambda_{F_{k:n}}$ notant la fonction de distribution, la fonction densité et la fonction du taux de défaillance de $X_{k:n}$ respectivement. Alors, on a ;

$$f_{k:n} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} F(x)^{k-1} \bar{F}(x)^{n-k} f(x),$$

$$F_{k:n}(x) = \sum_{i=k}^n \binom{n}{i} F(x)^i \bar{F}(x)^{n-i},$$

et

$$I_{F_{k:n}}(x) = \frac{f_{k:n}(x)}{\bar{F}_{k:n}(x)} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!} I_F(x) \frac{(F(x)/\bar{F}(x))^{k-1}}{\sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} (F(x)/\bar{F}(x))^i}.$$

Le théorème suivant montre que la classe DURL est conservée par l'opération maximum.

Théorème 2.5.1 : soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ des v.a iid de distribution F , de densité f , de taux de défaillance I_F et une incertitude résiduelle décroissante $H(f;x)$.

Si $H(f_{n:n}, x)$ note l'incertitude résiduelle de la $n^{\text{ème}}$ statistique d'ordre, alors $H(f_{n:n}, x)$ est aussi décroissante.

Preuve :

$$\text{Dans ce cas : } q(x) = n \frac{(F(x)/\bar{F}(x))^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (F(x)/\bar{F}(x))^i},$$

Ainsi, $q(x)$ est croissante en x et appartient au domaine $(0,1)$. Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \bar{F}_{n:n}(x)/\bar{F}(x) = 0.$$

Ainsi, les hypothèses du lemme 2.5.1 sont vérifiées, et $H(f_{n:n}, x)$ est décroissante.

Proposition : La classe IURL n'est pas conservée pour l'opération maximum.

Contre-exemple :

On considère un système parallèle à deux composants, chacun suivant une exponentielle de paramètre 1. Chaque composant est IURL.

Le taux de défaillance du système est donné par :

$$I_{F_{2:2}}(x) = 1 - \frac{1}{2e^x - 1}, \quad x \geq 0,$$

qui est strictement croissant. Ainsi, le système n'est pas IURL mais DURL.

De nombreuses comparaisons stochastiques ont été considérées dans la littérature

(Takahashi, 1988 et Nagaraja, 1990) telles que si $F_{k:n}$ est IFR(DFR), IFRA (DFRA), ou NBU

(NWU), alors la même propriété est vérifiée pour des choix variés de k et n . Dans notre cas,

en appliquant le lemme 2.5.1, on compare les statistiques d'ordre au sens de la propriété DURL.

Considérons deux ensembles de v.a iid de distribution F de tailles n_1 et n_2 . Soient

$I_{F_{k_1, n_1}}$ et $I_{F_{k_2, n_2}}$ les taux de défaillance de $X_{k_1; n_1}$ et $X_{k_2; n_2}$ respectivement.

Alors : $I_{F_{k_2, n_2}} = q(x) I_{F_{k_1, n_1}}$ tel que :

$$q(x) = \frac{c(k_1, n_1)}{c(k_2, n_2)} t^{k_2 - k_1} \frac{\sum_{i=0}^{k_1-1} \binom{n}{i} t^i}{\sum_{j=0}^{k_2-1} \binom{n}{j} t^j},$$

où $c(k, n) = n! / (n-k)!(k-1)!$ et $t = t(x) = F(x) / \bar{F}(x)$ est croissante en x.

Nagaraja (1990) a montré que dans les cas suivants $q(x)$ est croissante en x et que son domaine est (0,1) :

$$n_1 = n_2 = n, k_1 = k, k_2 = k+1,$$

$$n_1 = n, n_2 = n-1, k_1 = k_2 = k;$$

$$n_1 = n, n_2 = n+1, k_1 = k; k_2 = k+1.$$

On a alors le théorème suivant :

Théorème 2.5.2 : Si $X_{k;n}$ est DURL, alors $X_{k+1;n}$, $X_{k;n-1}$ et $X_{k+1;n+1}$ sont DURL.

b) Conservation de la classe DURL dans le cas des valeurs enregistrées :

Soit $\{X_i, i \geq 1\}$ un ensemble de v.a de fonction de distribution commune F continue avec

$F(0)=0$. La v.a X_n est appelée « plus grande valeur enregistrée » de cet ensemble si

$X_n > X_i, \forall i = 1, 2, \dots, n-1$. par convention X_1 est une valeurs enregistrée. La série des

nombre dans laquelle on a les occurrences est donnée par $\{L_n; n \geq 1\}$ définie récursivement

par $L_1 = 1, L_n = \min\{k : k > L_{n-1}, X_k > X_{L_{n-1}}\}, n \geq 2$. $\{L_n, n \geq 1\}$ est appelé la séquence des plus

grands temps enregistrés et $\{X_{L_n}, n \geq 1\}$ la séquence des valeurs enregistrées correspondants à

$\{X_n, n \geq 1\}$.

Théorème 2.5.3 : Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une séquence de v.a iid de fonction de distribution F et de densité f , de taux de défaillance l_F et une incertitude résiduelle décroissante $H(f, x)$. Si f_{L_n} note la fonction densité de la $n^{\text{ème}}$ plus grande valeur enregistrée alors $H(f_{L_n}, x)$, l'incertitude résiduelle de f_{L_n} est décroissante.

Preuve :

Effectivement, on a :

$$P(X_{L_n} > t) = \bar{F}(t) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^k, \text{ et } f_{L_n}(t) = f(t) \frac{[\Lambda_F(t)]^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ où } \Lambda_F(t) = -\log \bar{F}(t).$$

$$\text{Ainsi, le taux de défaillance de } X_{L_n} \text{ est égal à : } l_{L_n}(t) = \frac{f_{L_n}(t)}{P(X_{L_n} > t)} = q(t) l_F(t),$$

$$\text{Où } q(t) = \frac{[\Lambda_F(t)]^{n-1} / (n-1)!}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^k}.$$

Puisque $q(t)$ est croissante en t de domaine $(0,1)$ et F est DURL, $H(f_{L_n}, t)$ est décroissante.

D'où le résultat de lemme 2.5.1.

Remarque : Kochar(1990) a montré que pour une v.a de fonction de distribution continue F , le rapport des taux de défaillance de $X_{L_{n+1}}$ et X_{L_n} ,

$$\frac{l_{L_{n+1}}(t)}{l_{L_n}(t)} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^{k+1}}{n \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^k}$$

est une fonction croissante en t et de domaine $(0,1)$. En utilisant le lemme 2.5.1, on conclut que quand X_{L_n} est DURL, $X_{L_{n+1}}$ l'est aussi.

2.6. Caractérisation de la loi Pareto (GPD) basée sur l'incertitude résiduelle (Ebrahimi et Asadi, 2000) :

La distribution GPD possède une large application en fiabilité notamment dans l'étude des durées de vie des composants d'un système. On s'intéresse alors dans cette partie à quelques propriétés de la GPD provenant du calcul de l'incertitude résiduelle.

Soit alors une GPD de fonction de survie : $\bar{F}(x) = \left(\frac{b}{ax+b} \right)^{1/a+1}$, $x \geq 0$ où $a > -1$ et $b > 0$. (2.6.1)

Théorème 2.6.1 : Soit X une v.a positive absolument continue de fonction de survie $\bar{F}(x)$, de taux de défaillance l_F et une incertitude résiduelle $H(f;x)$, où f est la densité de X .

Alors :

$$H(f;x) = c - \log l_F(x) \quad (2.6.2)$$

si et ssi F est GPD de fonction de survie de la forme (2.6.1), où c est une constante réelle.

Généralement, on sait que la fonction de vie moyenne résiduelle $d_F(t)$, $d_F(t) = E(X-t | X > t)$

n'est pas égale à $\frac{1}{l_F(t)}$. Le théorème suivant donne une nouvelle caractéristique de la GPD

$$\text{où } d_F(t) = \frac{1}{l_F(t)}.$$

Théorème 2.6.2: Soit X une v.a positive absolument continue de fonction de survie $\bar{F}(x)$, de fonction de vie moyenne résiduelle $d_F(t)$ et une incertitude résiduelle $H(f;x)$.

Alors :

$$H(f;x) = c + \log d_F(t) \quad (2.6.3)$$

En égalant les deux résultats (2.6.2) et (2.6.3), on trouve que : $d_F(t) = \frac{1}{l_F(t)}$.

2.7. Test de la monotonie de l'entropie résiduelle (DURL) :

Si le taux de défaillance d'un élément suit une distribution DURL, alors l'incertitude de sa vie résiduelle $X-t | X > t$ décroît, ainsi, sa vie résiduelle peut être prédite avec plus de précision.

Plusieurs travaux sont basés sur l'hypothèse que la vie d'un composant est décrite par une loi exponentielle. Pour tester la monotonie d'une loi F , on préfère tester l'exponentialité (hypothèse nulle) contre l'alternative de monotonie (H_1). Dans cette partie, on s'intéresse au test d'hypothèse d'une exponentielle contre DURL, i.e :

$$H_0 : "F(x) = 1 - \exp(-lx), x \geq 0, l > 0",$$

contre l'alternative :

$H_1 : F$ est DURL (et non pas exponentielle).

L'alternative est basée sur l'incertitude au lieu de l'age. Dans ce qui suit, on décrit le test statistique proposé par Ebrahimi (1997), son comportement asymptotique où on montre sa normalité sous l'hypothèse nulle et enfin, sa consistance.

2.7.1. Statistique du test :

On sait que H_1 est vérifiée ssi $H(f; x) - H(f; y) \geq 0$, pour tout $y \geq x$. Considérons la mesure suivante :

$$\begin{aligned}\Delta(F) &= \int_0^\infty \int_x^\infty (H(f; x) - H(f; y)) f(y) f(x) dy dx \\ &= \frac{1}{2} + \int_0^\infty \int_x^\infty \left(\log \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(y)} - 1 \right) (\log f(y)) f(y) f(x) dy dx \\ &= \frac{1}{2} - \int_0^\infty (\log \bar{F}(x) + 2F(x)) (\log f(x)) f(x) dx.\end{aligned}\quad (2.7.1)$$

Sous l'hypothèse nulle $\Delta(F) = 0$ car H ne change pas ; et les grandes valeurs de $\Delta(F)$ ou de manière équivalente les petites valeurs de :

$$g(F) = \frac{1}{2} - \Delta(F) = \int_0^\infty (\log \bar{F}(x) + 2F(x)) (\log f(x)) f(x) dx, \quad (2.7.2)$$

favorise H_1 .

L'évaluation de l'intégrale (2.7.2) exige la connaissance complète de F .

Puisque la densité $f(x)$ n'est pas connue, on l'estime alors par une fonction densité de probabilité empirique. Une fonction densité de probabilité empirique adaptée à l'entropie est celle proposée par Mack (1988) qui consiste en un histogramme basé sur une partition des statistiques d'ordres.

Soient $t_1, \dots, t_n$, n observations ($n > 2$) de F et soient $t(1), \dots, t(n)$ les statistiques d'ordres correspondantes. On subdivise l'intervalle de $t(1)$ à $t(n)$ en k sous intervalles. On commence par choisir $k < n$ tel que $2^{k-1} < n < 2^k$, et :

$$l_i = \left\lfloor \frac{(n-1)i}{k} \right\rfloor - a_{i-1} + 1, i = 1, \dots, k.$$

Où $a_0 = 1$ et $[.]$ indique la partie entière

.

On définit une partition de $[t(1), \dots, t(n)]$ en k sous intervalles, telle que :

$$I_i = [t(a_{i-1}), t(a_i)), \quad i = 1, \dots, k,$$

Où $a_i = 1 + \sum_{j=1}^i l_j = \left\lceil \frac{(n-1)i}{k} \right\rceil + 1, i = 1, \dots, k$

Ainsi la densité de probabilité empirique et sa fonction de distribution empirique sont définies par :

$$f_n(x) = \begin{cases} \frac{l_i}{(n-1)(t(a_i) - t(a_{i-1}))}, & x \in I_i, 1 \leq i \leq k, \\ 0 & \text{sin on,} \end{cases} \quad (2.7.3)$$

et

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < t(1), \\ \frac{a_{i-1}-1}{n-1} + \frac{l_i}{n-1} \frac{x - t(a_{i-1})}{t(a_i) - t(a_{i-1})}, & x \in I_i, i = 1, \dots, k, \\ 1 & x \geq t(n), \end{cases} \quad (2.7.4)$$

respectivement.

On utilise alors (2.7.3) et (2.7.4) pour estimer $g(F)$ par :

$$\begin{aligned} g_k(F_n) &= \int_0^\infty (\log \bar{F}_n(x) + 2F_n(x)) (\log f_n(x)) f_n(x) dx \\ &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k (\log(\frac{l_i}{(n-1)d_i(k)})) A_n(i) \\ &= -\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k A_n(i) \log \left[\frac{(n-1)d_i(k)}{l_i} \right], \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

où $d_i(k) = t(a_i) - t(a_{i-1})$

et

$$A_n(i) = (n - a_{i-1}) \log(n - a_{i-1}) - (n - a_i) \log(n - a_i) + [1/(n-1)] l_i (l_i + 2 \sum_{j=1}^{i-1} l_j) - l_i - l_i \log(n-1).$$

On note que $\sum_{i=1}^k A_n(i) = 0$ et on admet que $(0 \log 0) = 0$.

On utilise la statistique :

$$J_n(k) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k A_n(i) \log \left(\frac{(n-1)d_i(k)}{l_i} \right), \quad (2.7.6)$$

où les grandes valeurs de $J_n(k)$ favorisent H_1 . Ainsi, on rejette H_0 en faveur de H_1 au niveau de signification α , si $J_n(k) \geq C_{k,n}(\alpha)$, où $C_{k,n}(\alpha)$ est le point critique déterminé par le $(1-\alpha)$ quantile de la distribution de la statistique $J_n(k)$ sous H_0 .

2.7.2. Propriétés de la statistique $J_n(k)$:

La statistique $J_n(k)$ a été choisie car elle est facile à calculer et possède des propriétés intéressantes données par les théorèmes suivants (Ebrahimi, 1997) :

Théorème 2.7.1 : Soient $t_1, \dots, t_n$, n observations de F et soient $y_i = a_{t_i}$ où $a > 0$, $i=1, \dots, n$. alors la valeur de $J_n(k)$ sous $t_1, \dots, t_n$ est identique à sa valeur sous $y_1, \dots, y_n$.

Le théorème suivant donne la moyenne et la variance de la statistique $J_n(k)$ sous l'hypothèse nulle H_0 .

Théorème 2.7.2 : Sous H_0 :

$$(a) \quad b_n(k) = E(J_n(k)) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k A_n(i) B_n(i, k) + \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^k A_n(i) \log \left(\frac{(n-1)}{l_i} \right), \quad (2.7.7)$$

où

$$B_n(i, k) = \sum_{j=a_{i-1}}^{a_i-1} (\Gamma'(1) - \log(n-j)) \prod_{\substack{m=a_{i-1} \\ m \neq j}}^{a_i-1} \frac{(n-m)}{(j-m)}, \quad \Gamma(a) = \int_0^{\infty} x^{a-1} e^{-x} dx$$

et $\Gamma'(1)$ est la dérivée de $\Gamma(a)$ évaluée au point $a = 1$.

$$(b) \quad a_n(k) = Var(J_n(k)) = \left(\frac{1}{n-1} \right)^2 \sum_{i=1}^k A_n^2(i) D_n(i, k), \quad (2.7.8)$$

où

$$D_n(i, k) = \left[\sum_{j=a_{i-1}}^{a_i-1} (\Gamma''(1) + 2\Gamma'(1) - \log(n-j) + \log^{2(n-j)}) \times \prod_{m=a_{i-1}}^{a_i-1} \frac{n-m}{j-m} - B_n^2(i, k) \right],$$

et $\Gamma''(1)$ est la dérivée seconde de $\Gamma(a)$ évaluée au point $a = 1$.

Soit C la classe des densités continues. Le théorème suivant donne un résultat sur la convergence de notre statistique :

Théorème 2.7.3 : Soient $t_1, \dots, t_n$ un échantillon aléatoire d'une population de densité $f \in C$ et de fonction de distribution F . Si $k = o(n)$, i.e : $\lim_{\substack{k \rightarrow \infty \\ n \rightarrow \infty}} k/n = 0$. Alors

$$J_n(k) \rightarrow J \text{ quand } n \rightarrow \infty, \text{ où } J = - \int_0^{\infty} (\log \bar{F}(x) + 2F(x))(\log f(x)) f(x) dx.$$

Le théorème suivant donne la distribution asymptotique de $J_n(k)$ sous l'hypothèse nulle.

Théorème 2.7.4 : Sous l'hypothèse nulle quand $n, k \rightarrow \infty, \frac{k}{n} \rightarrow 0$:

$$\frac{J_n(k) + \frac{1}{2}}{[\log(n-1)]/(n-1)} \text{ suit une distribution Normale standard.}$$

Ce dernier test fournit un test de monotonie de l'incertitude (de la loi DURL) décrit au chapitre 4.

2.8. Ordre stochastique basé sur la notion d'incertitude :

On introduit dans cette partie un ordre stochastique basé sur la notion d'incertitude shannonienne. On discutera des relations existantes entre cet ordre et des ordres basés sur la notion d'âge (Ebrahimi et Pellerey, 1995). On introduira ensuite, le concept du « meilleur système » (Ebrahimi et Pellerey, 1995) dans le sens de la moindre incertitude de vie résiduelle dans un ensemble de tous les systèmes considérés. Enfin, on appliquera l'entropie aux statistiques d'ordres des durées de vie (Ebrahimi et al, 2004).

Soient X et Y deux v.a positives ou nulles ayant les fonctions de distributions F et G et les fonctions de survie $\bar{F}$ et $\bar{G}$. X et Y peuvent être considérés comme les temps de défaillance de deux éléments.

f et g sont les dérivées de F et G respectivement. I_F et I_G sont les fonctions du taux de défaillance de chacune des variables X et Y . Enfin, $H(f,t)$ et $H(g,t)$ mesurent l'incertitude des distributions des vies résiduelles de X et Y .

2.8.1. Critères de comparaison basés sur la notion d'incertitude :

Définition 2.4.1 : (Ebrahimi et Pellerey, 1995)

X est dit moins incertain que Y si :

$$H(f,t) \leq H(g,t),$$

pour tout $t \geq 0$, et on écrit $X \leq_{LU} Y$ ou de manière équivalente $\bar{F} \leq_{LU}^U \bar{G}$

Interprétation : Soient $H(f,t)$ et $H(g,t)$ les quantités d'incertitude de deux composants de durées de vie X et Y et de fonctions de survie $\bar{F}$ et $\bar{G}$ respectivement. Si $X \leq_{LU} Y$, ainsi si les deux composants survivent jusqu'à l'instant t ; l'espérance de l'incertitude contenue dans la densité conditionnelle de $X-t$ sachant $X > t$ sur la prédictabilité du temps de vie résiduel du premier composant est inférieure à l'espérance de l'incertitude contenue dans la densité conditionnelle de $Y-t$ sachant $Y > t$ sur la prédictabilité du temps de vie résiduel du deuxième composant.

Remarque : Soient X et Y deux v.a exponentielles de taux de défaillance λ_1 et λ_2 respectivement. Si $\lambda_1 \geq \lambda_2$ alors $X \leq_{LU} Y$.

On donne ci-dessous quelques critères de comparabilité au sens de l'ordre $\leq_{LU}$.

Critère 1_ : on suppose que :

$$(i) \forall t \geq 0, \frac{1}{\bar{F}(t)} \log \lambda_F(x) \geq \frac{1}{\bar{G}(t)} \log \lambda_G(x) \text{ pour tout } x \geq t.$$

(ii) $\lambda_F(x)$ est une fonction décroissante au sens large de x ,
alors : $X \leq_{LU} Y$.

Critère 2_ : Soit :

(i) $\lambda_F(x) / \lambda_G(x)$ une fonction croissante au sens large de x ,

(ii) $\lambda_F(x)$ est une fonction décroissante au sens large de x ,

(iii) $X \leq_{FR} Y$,

alors : $X \leq_{LU} Y$.

Critère 3_ : Soit $X \leq_{LR} Y$ et soit $\lambda_F(x)$ ou $\lambda_G(x)$ une fonction décroissante au sens large de X .

Ainsi : $X \leq_{LU} Y$.

Critère 4 : Soit $Z_1 = a_1X + b_1$ et $Z_2 = a_2Y + b_2$, $a_1, a_2 > 0$ et $b_1, b_2 \geq 0$.

(i) si : (a) $X \leq_{LU} Y$

(b) $a_1 = a_2$ et $b_1 = b_2$

alors $Z_1 \leq_{LU} Z_2$.

(ii) Si : (a) $X \leq_{LU} Y$

(b) $a_1 \leq a_2$ et $b_1 \leq b_2$

(c) $H(f,t)$ ou $H(g,t)$ est décroissante au sens large,

alors $Z_1 \leq_{LU} Z_2$.

2.8.2. Meilleur système :

Intuitivement, le meilleur système est celui qui vit plus longtemps et sa durée de vie résiduelle est moins incertaine.

Sur ce on donne alors la définition suivante (Ebrahimi et Pellerey, 1995) :

Définition 2.8.2 : Considérons deux systèmes tels que le premier possède une durée de vie X et que le second possède une durée de vie Y .

Alors :

(i) Le premier système est dit « très fortement meilleur » que le second système si $X \leq_{LU} Y$ et $X \geq_{LR} Y$.

(ii) Le premier système est dit « fortement meilleur » que le second système si $X \leq_{LU} Y$ et $X \geq_{FR} Y$.

(iii) Le premier système est dit « faiblement meilleur » que le second système si $X \leq_{LU} Y$ et $X \geq_{MR} Y$.

(iv) Le premier système est dit « meilleur » que le second système si $X \leq_{LU} Y$ et $X \geq_{ST} Y$.

On a les implications suivantes :

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iv)

(i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii).

Théorème 2.8.1: Si X fortement meilleur que Y , alors :

$H(f,t) - H(g,t)$ décroissante au sens large en t .

Théorème 2.8.2: On définit $Z_1 = aX + b$ et $Z_2 = aY + b$, $a > 0$ et $b \geq 0$.

Si X est très fortement meilleur [fortement meilleur, faiblement meilleur, meilleur] que Y , alors Z_1 est très fortement meilleur [fortement meilleur, faiblement meilleur, meilleur] que Z_2

Ainsi, les comparaisons sont conservées lors des transformations affines.

Théorème 2.8.3: Soient X et Y deux v.a de fonctions de survies $\bar{F}(x)$ et

$$\bar{G}(x) = (1/m) \int_x^\infty \bar{F}(y) dy \quad \text{où } m = \int_0^\infty \bar{F}(x) dx < \infty, \text{ respectivement. Si :}$$

(a) $\int_0^\infty \bar{F}(t) d_F(t) \leq 1$ tel que la fonction moyenne de vie résiduelle de X est une fonction convexe décroissante.

$$(b) \frac{1}{\bar{F}(t)} \left[\frac{1}{d_F(t)} \int_t^\infty \bar{F}(x) \log \bar{F}(x) dx - \int_t^\infty f(x) \log f(x) dx \right] \leq \log d_F(t), \text{ pour tout } t \geq 0.$$

Alors X est fortement meilleur que Y .

2.9. Entropie des statistiques d'ordre :

On suppose que $X_1, \dots, X_n$ sont les observations iid d'une v.a X de fonction de répartition F_X et de densité f_X positive sur un intervalle et nulle ailleurs. Les statistiques d'ordre de cet échantillon sont notées $Z_1 < \dots < Z_n$ de distribution $F_i(z) = P(Z_i \leq z)$, $i=1, \dots, n$ et de

$$\text{densité : } f_i(z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n-i+1)\Gamma(i)} [F_X(z)]^{i-1} [1-F_X(z)]^{n-i} f_X(z) \quad (2.9.1)$$

Où $\Gamma(k) = (k-1)!$

Soit $U = F_X(X)$ où U suit une uniforme sur l'intervalle $[0,1]$ et on note ses statistiques d'ordres $W_1 < \dots < W_n$, $i=1, \dots, n$ de distribution bêta telle que :

$$g_i(w) = \frac{1}{B(i, n-i+1)} w^{i-1} (1-w)^{n-i}, \quad 0 \leq w \leq 1. \quad (2.9.2)$$

Où $B(k_1, k_2) = \Gamma(k_1)\Gamma(k_2)/\Gamma(k_1+k_2)$.

L'entropie d'une v.a X s'écrit comme :

$$H(X) = - \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) \log f_X(x) dx = - \int_0^1 \log f_X(F_X^{-1}(u)) du .$$

Dans ce qui suit, on note : $W_i = F_X(Z_i)$, $i=1, \dots, n$

En appliquant la formule (2.9.2) à $Z_i = F_X^{-1}(W_i)$, on obtient :

$$H(Z_i) = H_n(W_i) - E_{g_i} [\log f_X(F_X^{-1}(W_i))] \quad (2.9.3)$$

$$= H_n(W_i) - \int f_i(z) \log f_X(z) dz \quad (2.9.4)$$

où $H_n(W_i)$ note l'entropie de la distribution bêta (2.9.2) s'écrivant sous la forme :

$$H_n(W_i) = \log B(i, n-i+1) - (i-1)[j(i) - j(n+1)] - (n-i)[j(n-i+1) - j(n+1)] \quad (2.9.5)$$

où $j(k) = \frac{d \log \Gamma(k)}{dk}$ est la fonction digamma,

$$\text{avec : } H_n(W_n) = H_n(W_1) = 1 - \log n - \frac{1}{n} .$$

Théorème 2.9.1 (Ebrahimi et al, 2004): Si X et Y deux v.a positives ou nulles.

Si $Y \leq_{ST} X$ et X est DFR, alors : $Y \leq_{LU} X$

Corollaire 2.5.1 : Soit X une v.a positive ou nulle possédant une distribution DFR $Z_i \leq_{ST} X$,
alors : $Z_i \leq_{LU} X$.

Comme application de ce corollaire, on peut considérer deux systèmes, l'un parallèle et l'autre en série de composants à durées de vie $X_1, \dots, X_n$ et soient $Z_1 < \dots < Z_n$ leurs statistiques d'ordre. Si chaque statistique d'ordre Z_i , $i=1, \dots, n$, est comparable au sens de l'ordre stochastique à X et que cette dernière est de distribution DFR, alors :

(a) Pour le cas d'un système parallèle, on a : $\max_{i=1, \dots, n} Z_i \leq_{LU} X$; i.e la durée de vie du

système parallèle est comparable en entropie à la durée de vie de chaque composant.

D'une autre manière, on peut dire que la durée de vie du système est moins incertaine que la durée de vie de tous ses composants.

(b) On peut faire la même conclusion pour un système en série où on considère la durée de vie du système représentée par $\min_{i=1,\dots,n} Z_i$. Ainsi, $\min_{i=1,\dots,n} Z_i \leq_{LU} X$.

Définition 2.9.1 : La v.a X est comparable par rapport à l'ordre de dispersion à Y , noté $X \leq_{disp} Y$, si et ssi :

$$F_X^{-1}(u) - F_X^{-1}(v) \leq F_Y^{-1}(u) - F_Y^{-1}(v) \text{ pour tout } 0 < v < u < 1.$$

Théorème 2.9.2 : Soient X et Y deux v.a et notons leurs statistiques d'ordre Z_i et V_i , $i=1,\dots,n$, respectivement.

Si $X \leq_{disp} Y$ alors $Z_i \leq_{LU} V_i$

2.10. Autres résultats sur l'ordre LU :

Ebrahimi et Pellerey (1995) ont montré que si $X \leq_{LR} Y$ et $I_F(x)$ ou $I_G(x)$ est décroissante en x alors $X \leq_{LU} Y$. Ebrahimi et Kirmani (1997) donnent ci-après que la condition $X \leq_{LR} Y$ peut se réduire à la condition $X \leq_{FR} Y$:

Théorème 2.10.1 : Soit $X \leq_{FR} Y$ et $I_F(x)$ ou $I_G(x)$ décroissante en x , alors $X \leq_{LU} Y$.

On verra une application aux marches aléatoires dans le chapitre 4.

Application sur un système k-out-of n :

Pour des observations indépendantes, mais pas nécessairement identiquement distribuées

$X_1, \dots, X_n$. Soit $X_{(k)}$ la k^{eme} statistique d'ordre. Alors $X_{(k)} \leq_{FR} X_{(k+1)}$ pour tout $k=1,\dots,n-1$.

Ainsi, $X_{(k)} \leq_{LU} X_{(k+1)}$ si au moins une des statistiques d'ordres $X_{(k)}$ ou $X_{(k+1)}$ soit DFR.

Théorème 2.10.2 : Soit $X \leq_D Y$ et soit $I_F(x)$ ou $I_G(x)$ décroissante en $x > 0$, alors $X \leq_{LU} Y$.

Corrolaire 2.10.1 : Soit $g_k(x), k=1,\dots,n$, la densité de $W_k = Y_{(k)} - Y_{(k-1)}$, $k=1,\dots,n$ où

$Y_{(0)} = 0$ et $Y_{(1)} \leq Y_{(2)} \leq \dots \leq Y_{(n)}$ notent les statistiques d'ordres de n v.a iid de même

distribution que Y . Si $I_G(x) \leq I$ pour tout $x \geq 0$ (I est le taux de défaillance d'une exponentielle), alors :

$H(g_k; t) \geq \log(e/(n-k+1))$ pour tout $k=1, \dots, n$ et $t \geq 0$.

2.11. Conservation de l'ordre LU et des classes IURL et DURL par transformation monotone : (Ebrahimi et Kirmani, 1997)

Théorème 2.11.1 : (a) Si X est IURL, et f une fonction positive, croissante, convexe, alors $f(x)$ est aussi IURL.

(b) Si X est DURL, et si f une fonction positive, croissante, concave, alors $f(x)$ est aussi DURL.

Dans ces deux cas l'entropie résiduelle de $g(y)$ densité de $Y = f(x)$ s'écrit sous la forme :

$$H(g; t) = H(f; f^{-1}(t)) + E[\log f'(X) | X > f^{-1}(t)].$$

Preuve :

$$\begin{aligned} H(g; t) &= 1 - \frac{1}{P(Y > t)} \int_t^\infty g(y) \log l_g(y) dy \\ &= 1 - \frac{1}{P(X > f^{-1}(t))} \int_t^\infty \frac{f(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))} \log \left(\frac{l_F(f^{-1}(y))}{f'(f^{-1}(y))} \right) dy \\ &= 1 - \frac{1}{P(X > f^{-1}(t))} \int_{f^{-1}(t)}^\infty f(x) \log \left(\frac{l_F(x)}{f'(x)} \right) dx \\ &= H(f; f^{-1}(t)) + 1 - \frac{1}{P(X > f^{-1}(t))} \int_{f^{-1}(t)}^\infty f(x) \log f'(x) dx \\ &= H(f; f^{-1}(t)) + E[\log f'(X) | X > f^{-1}(t)] \end{aligned}$$

Exemple : Soit X de distribution exponentielle de taux de défaillance λ et soit

$Y = X^{1/a}$, $a > 0$. Alors Y possède une distribution Weibull avec une fonction de survie $\bar{G}(t) = \exp(-\lambda t^a)$, $t > 0$. La fonction positive, croissante $f(x) = x^{1/a}$, $x > 0$, $a > 0$, est convexe (concave) si $0 < a < 1$ ($a > 1$). Ainsi, la distribution Weibull est IURL (DURL) si $0 < a < 1$ ($a > 1$). Notons que la propriété DURL pour $a > 1$ peut être déduite du théorème 2.3.2 mais on ne peut avoir l'IURL pour $0 < a < 1$.

Le théorème suivant donne des conditions suffisantes pour qu'une fonction de X ait une incertitude plus petite ou plus grande que celle de X elle-même.

Théorème 2.11.2 : (a) Si f une fonction positive, croissante sur $[0, \infty)$ avec $f'(x) \geq 1$ pour tout $x \geq 0$ et si F est DURL alors $f(X) \geq_{LU} X$.

(b) Si f une fonction positive, croissante sur $[0, \infty)$ avec $f(0) = 0$ et $f'(x) \leq 1$ pour tout $x \geq 0$ et si F est IURL alors $f(X) \leq_{LU} X$.

Application :

Pour illustrer ce théorème, on peut considérer X comme une v.a exponentielle de taux de

défaillance λ et $f(x) = \frac{1}{g} \log(1 + (g\lambda/b)x)$, $g > 0, 0 < b < g$. alors $Y = f(x)$ possède la

fonction de survie $\bar{G}(t) = \exp\{-(b/g) \exp[g t - 1]\}$. Ainsi, à partir de la partie (b) du théorème précédent $f(X) \leq_{LU} X$ tel que $H(g;t) \leq \log(e/\lambda)$, où g est la fonction densité de Y .

Théorème 2.11.3 : Soit Y une fonction de deux v.a X et Z telle que $Y = f(X, Z)$, où X et Z sont des v.a positives et indépendantes.

Supposons que $f(x, z) \geq 0$, $f(x, z)$ croissante en x pour tout $z \geq 0$, $\frac{\partial}{\partial x} f(x, z) \geq 1$, pour tout $x, z \geq 0$. Si F est DURL alors $X \leq_{LU} Y$.

Application : Si X est DURL alors $X+Z \geq_{LU} X$ et si en plus $Z \geq 1$, alors $X.Z \geq_{LU} X$.

Finalement, on donne une condition suffisante pour la conservation de l'ordre $X \leq_{LU} Y$ par transformation commune, croissante, convexe de X et Y .

Théorème 2.11.4 : Si $X \leq_{LU} Y$, $X \leq_{FR} Y$ et si f une fonction positive, croissante, convexe ; alors $f(X) \leq_{LU} f(Y)$.

2.12. Entropie passée :

Il est raisonnable de supposer que dans certaines situations, l'incertitude n'est pas nécessairement en rapport avec le futur mais peut être par contre en rapport avec le passé. Considérons un élément où l'état (fonctionnement ou panne) est observé seulement à des

instants prédéfinis. Si à l'instant t , le système est inspecté pour la première fois et est trouvé en panne, alors l'incertitude est liée au passé ; i.e, à l'instant de la panne entre 0 et t .

Ainsi, il est intéressant d'introduire la notion d'incertitude passée, le dual de l'entropie résiduelle, dans le sens où elle se réfère au passé et non pas au futur.

Soit X une v.a désignant la durée de vie d'un élément. Soit $X / X \leq t$ de densité $f(x) / F(t)$, $0 < x < t$. L'entropie différentielle de $X / X \leq t$, $\forall t > 0$, est appelée « entropie passée » à l'instant t de X , et notée par :

$$\bar{H}(t) = - \int_0^t \frac{f(x)}{F(t)} \log \frac{f(x)}{F(t)} dx \quad (2.12.1)$$

$$\bar{H}(t) \in [-\infty, +\infty]$$

Supposons qu'à un instant t , un composant a été trouvé en panne, alors $\bar{H}(t)$ mesure l'incertitude de sa vie passée (Di Crescenzo et Longobardi, 2002). On peut dire aussi que $\bar{H}(t)$ mesure l'entropie du temps d'inactivité $[t - X / X \leq t]$.

Résultats sur l'entropie passée :

2.12.1. Définition et interprétation : (Di Crescenzo et Longobardi, 2002)

A partir de la formule (2.12.1) on a aussi l'expression suivante de l'entropie passée :

$$\begin{aligned} \bar{H}(t) &= \log F(t) - \frac{1}{F(t)} \int_0^t f(x) \log f(x) dx \\ &= 1 - \frac{1}{F(t)} \int_0^t f(x) \log t(x) dx \end{aligned}$$

où $t(t) = f(t) / F(t)$ est le taux de défaillance inversé de X . Cette fonction joue le rôle du dual de $l(t)$. En effet, le rôle de $t(t)$ dans l'analyse de l'entropie passée est analogue à celui de $l(t)$ dans l'analyse de l'entropie résiduelle.

Dans la proposition suivante on montre que l'entropie au sens de SHANNON peut s'écrire en termes de $H(t)$ et de $\bar{H}(t)$:

Proposition 2.12.1 : $\forall t > 0$,

$$H = H_1[F(t), \bar{F}(t)] + F(t) \bar{H}(t) + \bar{F}(t) H(t) \quad (2.12.2)$$

où : $H_1(p, 1-p) = -p \log p - (1-p) \log (1-p)$ est l'entropie d'une distribution Bernoulli.

Interprétation :

L'incertitude du temps de défaillance d'un composant peut être décomposée en trois parties :

- (i) l'incertitude où le composant est tombé en panne avant ou après t . (ii) l'incertitude du temps de défaillance dans $(0, t)$ sachant que le composant est tombé en panne avant t . (iii) l'incertitude du temps de défaillance dans $(t, +\infty)$ sachant que le composant est tombé en panne après t .

2.12.2. Bornes sur l'entropie passée :

A partir de (2.12.1) l'entropie d'une v.a uniforme sur $[0, t]$ est donnée par $\log t$; où celle-ci est la borne supérieure de $\bar{H}(t)$, telle que :

$$\bar{H}(t) \leq \log t, \text{ pour tout } t > 0 \quad (2.12.3)$$

Cette borne correspond au principe du maximum d'entropie, où la distribution uniforme maximise l'entropie sous la contrainte que le support de la densité soit concentré dans un intervalle fini.

Remarque 2.12.1 : Une conséquence directe de la borne (2.12.3) est que l'entropie passée ne peut être constante pour tout $t > 0$.

De manière similaire à (2.12.3), l'entropie passée d'une v.a X distribuée sur $(0, b)$ satisfait l'inégalité :

$$\bar{H}_X \leq \bar{H}_{U(0,b)}(t),$$

où :

$$\bar{H}_{U(0,b)}(t) = \begin{cases} \log t & \text{si } 0 < t \leq b \\ \log b & \text{si } t > b \end{cases} \quad (2.12.4)$$

est l'entropie passée d'une v.a uniformément distribuée sur $(0, b)$.

Remarque 2.12.2 : Notons que $\log t$ n'est pas une borne réduite de l'entropie passée, particulièrement pour t assez grand. Par exemple, si X suit une exponentielle de moyenne

$$1/\lambda, \text{ alors : } \bar{H}(t) = 1 + \log(1 - e^{-\lambda t}) - \frac{1 - e^{-\lambda t}}{1 - e^{-\lambda t}}, t > 0$$

On a : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \bar{H}(t) = 1$, où $\log t$ diverge quand t tend vers $+\infty$.

Le même cas est remarqué pour une loi de type Pareto.

Proposition 2.12.2 : Si $t(t)$ est décroissante pour tout $t > 0$ i.e, X est DRFR (decreasing reversed failure rate), alors $\bar{H}(t)$ est croissante pour tout $t > 0$.

Remarque 2.12.3 : Si X est IFR et DRFR alors $\bar{H}(t)$ est croissante et $H(t)$ est décroissante pour $t > 0$.

Remarquant que :
$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{H}(t) = t(t)[1 - \bar{H}(t) - \log t(t)] \quad (2.12.5)$$

On a alors les bornes suivantes :

Proposition 2.12.3 : Si $\bar{H}(t)$ est croissante pour tout $t > 0$, alors :

$$t(t) \leq \exp\{1 - \bar{H}(t)\}, \quad \text{et} \quad \bar{H}(t) \leq 1 - \log t(t), \quad t > 0 \quad (2.12.6)$$

Remarques 2.12.4 :

(i) A partir de (2.12.3) et (2.12.6), on a :

$\bar{H}(t)$ est croissante pour $t > 0$, si $t(t) \leq e/t$.

(ii) La condition $t(t) \leq e/t$, $t > 0$, n'est pas nécessaire pour que l'entropie passée soit

croissante. En effet, si par exemple : $F(t) = tc$, $0 \leq t < 1$, $c > 0$, on a : $t(t) = \frac{c}{t}$ tel que le taux de défaillance inversé soit décroissant pour tout $t > 0$. Ainsi, la proposition 2.12.2 implique que $\bar{H}(t)$ est croissante en $t > 0$, même quand $t(t) > e/t$, i.e, quand $c > e$.

(iii) pour tout $t > 0$ tel que $t(t) \geq e/t$ la borne (2.12.6) est meilleur que la borne (2.12.3), car on a : $\bar{H}(t) \leq 1 - \log t(t) \leq \log t, t > 0$.

2.12.3. Effet des transformations strictement monotones sur l'entropie passée :

L'entropie résiduelle d'une transformation croissante Y d'une v.a X , pour tout $t > 0$ est telle que :

$$H_Y(t) = H_X(f^{-1}(t)) + E[\log f'(X) / X > f^{-1}(t)].$$

Où $Y = f(X)$ avec f strictement croissante, continue et différentiable.

La proposition 2.12.4 donne un résultat similaire pour l'entropie passée dans le cas des transformations monotones.

Proposition 2.12.4 : Soit $Y = f(X)$, f strictement monotone, continue et différentiable alors pour tout $t > 0$,

$$\bar{H}_Y(t) = \begin{cases} H_X(f^{-1}(t)) + E[\log\{-f'(X)\} / X > f^{-1}(t)] & \text{si } f \text{ est strictement décroissante,} \\ \bar{H}_X(f^{-1}(t)) + E[\log f'(X) / X < f^{-1}(t)] & \text{si } f \text{ est strictement croissante} \end{cases}$$

Si en plus, f est convexe et si $H_X(t)$ est décroissante quand $t > 0$ ou si $\bar{H}_X(t)$ est croissante quand $t > 0$ alors $\bar{H}_Y(t)$ est croissante quand $t > 0$.

Remarques 2.12.5 : Quand $Y = f(X)$ a la même distribution que X , on peut utiliser la proposition 2.12.4 pour obtenir des expressions pour H_X et $\bar{H}_X$ telles que :

- (i) Si X suit une loi de type Pareto avec $F(t) = \frac{t}{1+t} 1_{(0,+\infty)}(t)$, alors $Y = 1/X$ suit la

même distribution que X , avec :

$$\begin{aligned} \bar{H}_Y &= H_X\left(\frac{1}{t}\right) + E[\log\{X^{-2}\} / X > \frac{1}{t}] \\ &= \log \frac{t}{t+1} + 2 \left[1 - \frac{1}{t} \log(1+t)\right] \end{aligned}$$

- (ii) Si X est une v.a telle que $Y = b - X$ a la même distribution que X , alors la proposition 2.12.4 entraîne que : $\bar{H}_X(t) = H_X(b - t)$, $0 < t < b$.
- (iii) Soient $f_1(X) = \bar{F}(X) = Y_1$ et $f_2(X) = F(X) = Y_2$. Comme Y_1 et Y_2 suivent une uniforme sur $(0,1)$, alors :

$$\bar{H}_{U(0,1)}(t) = \begin{cases} H_X(\bar{F}_X^{-1}(t)) + E[\log\{-f_X(X)\} / X > \bar{F}_X^{-1}(t)] & \text{car } \bar{F} \text{ est décroissante,} \\ \bar{H}_X(F_X^{-1}(t)) + E[\log f_X(X) / X < F_X^{-1}(t)] & \text{car } F \text{ est croissante.} \end{cases}$$

- (iv) On a aussi le résultat qui dérive de la proposition 2.12.4 :

$$\bar{H}_{aX}(t) = \bar{H}_X(t/a) + \log a, \text{ pour tout } t > 0 \text{ et } a > 0.$$

Remarque 2.12.6:

La moyenne du temps de défaillance conditionnée par une panne avant t est croissante.

En effet, si on pose : $m(t) = E(X / X \leq t)$,

$$\frac{\partial}{\partial t} m(t) = t(t) [t - m(t)] \geq 0.$$

Donc cette moyenne est toujours croissante alors que l'entropie passée ne l'est pas nécessairement.

2.12.4. Nouvel ordre basé sur l'entropie passée (l'ordre PE) : (Nanda et Paul, 2006)

Nanda et Paul [21] définissent l'ordre PE comme suit :

Définition 2.12.2 : Soit X et Y deux v.a exprimant les durées de vies de deux éléments. Alors

X est dite supérieure à Y par rapport à l'ordre PE (noté : $X \stackrel{PE}{\geq} Y$) si :

$$\bar{H}(X; t) \leq \bar{H}(Y; t) \text{ pour tout } t \geq 0.$$

On dit alors que l'espérance de l'incertitude contenue dans la densité de X sachant $X \leq t$ sur la prédictabilité de l'instant de panne est inférieure à celle de Y .

Le théorème suivant donne un résultat sur la conservation de l'ordre PE par transformation croissante convexe.

Théorème 2.12.1 : Soit X et Y deux v.a positive telles que :

$X \stackrel{PE}{\geq} Y$ et f une fonction croissante convexe avec $f(0)=0$ et sa dérivée première existe et est continue, avec $f'(0) \geq 1$.

Alors : $f(X) \stackrel{PE}{\geq} f(Y)$.

L'exemple suivant montre que la condition de convexité n'est qu'une condition suffisante.

Exemple 2.12.1 : Soit X de fonction de survie $\bar{F}(x) = \exp(-2x)$, $x \geq 0$ et Y de fonction de

survie $\bar{G}(y) = \exp(-x)$, $x \geq 0$. A partir de la définition (2.12.2), on a $X \stackrel{PE}{\geq} Y$.

On pose $f(x) = 1 - \exp(-x)$, qui est une fonction croissante concave avec $f(0)=0$ et $f'(0) = 1$.

Pour $t \in (0,1)$:

$$\bar{H}(f(X); t) - \bar{H}(f(Y); t)$$

$$= \ln(2-t) + \frac{(1-t)^2}{2t-t^2} \left[\ln(1-t) - \frac{1}{2} \right] + \frac{1}{2(2t-t^2)} - \ln 2.$$

$$= L(t).$$

Il est clair à partir de la figure (2.12.1) que $L(t) \leq 0$ pour tout $t \in (0,1)$. Alors : $f(X) \stackrel{PE}{\geq} f(Y)$.

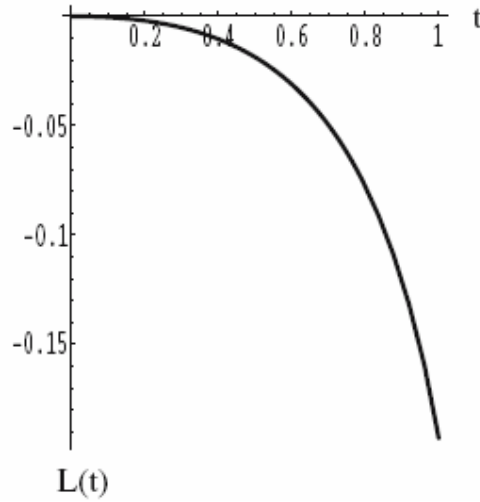


Figure (2.12.1)

Le lemme suivant donne la valeur de l'entropie passée $\bar{H}(X;t)$ sous transformation linéaire (la démonstration découle directement de la proposition (2.12.4)).

Lemme 2.12.1 : Soit X une v.a absolument continue. On définit $Z = aX + b$ où $a > 0$ et $b \geq 0$ des constantes. Alors : pour $t > b$, $\bar{H}(Z;t) = \bar{H}(X; \frac{t-b}{a}) + \log a$.

Le théorème suivant montre que l'ordre PE est conservé sous transformations linéaires croissantes.

Théorème 2.12.2 : Soit X et Y deux v.a absolument continues. On définit $Z_1 = a_1 X + b_1$ et $Z_2 = a_2 X + b_2$, où $a_1, a_2 > 0$ et $b_1, b_2 \geq 0$ sont des constantes.

Soit (i) $X \stackrel{PE}{\geq} Y$, (ii) $a_1 \geq a_2$ et $b_1 \geq b_2$. Alors : $Z_1 \stackrel{PE}{\geq} Z_2$, si $\bar{H}(X;t)$ ou $\bar{H}(Y;t)$ est croissante en $t > b_1$.

Preuve : Supposons que $\bar{H}(X;t)$ est croissante en t .

Puisque $\frac{t-b_1}{a_1} \leq \frac{t-b_2}{a_2}$, on a : $\bar{H}(X; \frac{t-b_1}{a_1}) \leq \bar{H}(X; \frac{t-b_2}{a_2})$.

Par ailleurs, $X \stackrel{PE}{\geq} Y$ implique que :

$$\bar{H}\left(X; \frac{t-b_2}{a_2}\right) \leq \bar{H}\left(Y; \frac{t-b_2}{a_2}\right).$$

En combinant les deux résultats et en utilisant le lemme (2.12.1), on a :

$$\bar{H}\left(X; \frac{t-b_1}{a_1}\right) + \log a_1 \leq \bar{H}\left(Y; \frac{t-b_2}{a_2}\right) + \log a_2.$$

Ainsi, $Z_1 \stackrel{PE}{\geq} Z_2$ (cqfd).

Corollaire 2.12.1 : Soit X et Y deux v.a absolument continues telles que $X \stackrel{PE}{\geq} Y$. on défini

$X_1 = aX + b$ et $Y_1 = aY + b$, où $a > 0$ et $b \geq 0$ sont des constantes. Alors : $X_1 \stackrel{PE}{\geq} Y_1$, si $\bar{H}(X; t)$ ou $\bar{H}(Y; t)$ est croissante en $t > b$.

Ce corollaire est une conséquence directe du théorème (2.12.2).

2.12.5. Nouvelle classe de distribution basée sur l'entropie passée : (Nanda et Paul, [21])

Dans cette partie, on propose un nouveau type de classe de distributions basé sur l'entropie passée.

Définition 2.12.3 : Une v.a est dite « avoir une incertitude de vie croissante (IUL) », si $\bar{H}(X; t)$ est croissante en $t \geq 0$.

L'exemple suivant montre que l'entropie passée n'est pas toujours monotone.

Exemple 2.12.2 : Soit X une v.a strictement positive de fonction de distribution :

$$F(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right), & \text{if } 0 \leq x \leq 1 \\ \exp\left(-2 + \frac{x^2}{2}\right), & \text{if } 1 \leq x \leq 2 \\ 1, & \text{if } x \geq 2. \end{cases}$$

Alors, quand $0 < t < 1$: $\bar{H}(X; t)$

$$\begin{aligned} &= - \int_0^t \frac{f(x)}{F(t)} \ln\left(\frac{f(x)}{F(t)}\right) \\ &= 2 \ln t - \frac{1}{t} - e^{1/t} \int_0^t \left(\frac{2}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-1/x} dx \end{aligned}$$

On remarque que : $\bar{H}(X;0.02)=-57.824$, $\bar{H}(X;0.0243)=34.1333$ et $\bar{H}(X;0.03)=-6.09096$.

Ainsi, dans ce cas $\bar{H}(X;t)$ n'est pas monotone.

Maintenant, on se donne un résultat direct de la proposition (2.12.2) :

Théorème 2.12.3 : Si X est DRFR alors X est IUL.

L'exemple suivant montre que la réciproque de ce théorème est fausse :

Exemple 2.12.3 : Soit X une v.a strictement positive de fonction de distribution :

$$F(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{2}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{x^2 + 2}{6}, & 1 \leq x < 2 \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}$$

Alors, on a : $\bar{H}(X;t)$

$$= \begin{cases} \ln\left(\frac{t}{2}\right) + \frac{1}{2} & 0 \leq t \leq 1 \\ \ln\left(\frac{t^2 + 2}{6}\right) + \frac{t^2 - 1}{t^2 + 2} \cdot \ln 3 - \frac{t^2}{t^2 + 2} \ln t + \frac{1}{2}, & 1 \leq t \leq 2 \\ \frac{1}{2} \ln 3 - \frac{2}{3} \ln 2 + \frac{1}{2}, & t \geq 2, \end{cases}$$

et $t_F(x)$

$$= \begin{cases} \frac{2}{x}, & 0 \leq x < 1 \\ \frac{2x}{x^2 + 2}, & 1 \leq x < 2 \\ 0, & x \geq 2. \end{cases}$$

La figure (2.12.2) montre que $\bar{H}(X;t)$ est croissante en t. par ailleurs, on peut montrer que t_F n'est pas monotone. Ainsi, X est IUL mais pas DRFR.

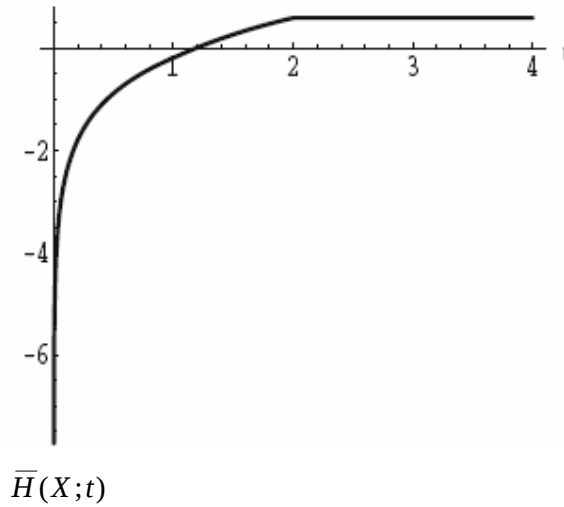


Figure (2.12.2)

Comme on s'est intéressé à la conservation des classes DURL et IURL par transformation de X , le théorème suivant donne les conditions sous lesquelles la classe IUL est conservée.

Théorème 2.12.4 : Si X est IUL, alors pour n'importe quelle fonction croissante convexe f avec $f(0) = 0$; $f(x)$ est aussi IUL.

2.12.6. Système plus acceptable et entropie passée :(Nanda et Paul, [21])

Les résultats qu'on donne dans cette partie sont parallèles à ceux proposés par Ebrahimi et Pellerey (1995) concernant les meilleurs systèmes.

Un système plus acceptable est un système qui vit plus longtemps que les autres et possède moins d'incertitude sur sa durée de vie.

Définition 2.12.4 : Soit X et Y les durées de vie de deux systèmes. Alors le premier système est plus acceptable que le second par rapport à l'ordre :

- (a) PE-LR si $X \overset{PE}{\geq} Y$ et $X \overset{LR}{\geq} Y$;
- (b) PE-RH si $X \overset{PE}{\geq} Y$ et $X \overset{RH}{\geq} Y$;
- (c) PE-RMR si $X \overset{PE}{\geq} Y$ et $X \overset{RMR}{\geq} Y$;

(d) PE-ST si $X \overset{PE}{\geq} Y$ et $X \overset{ST}{\geq} Y$.

Remarques: i) Il est clair que $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c)$ et $(a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (d)$.

ii) Ces comparaisons sont conservées lors des transformations affines.

Chapitre 3

Application

Introduction

Pour illustrer la théorie de comparabilité en entropie, on suggère de donner une première application sur la méthode du maximum d'entropie (MDE), ainsi que sur les deux premiers critères de l'ordre stochastique LU. Ensuite, on teste la monotonie de l'incertitude. Enfin, on propose des bornes pour la probabilité de ruine, dans les classes DURL et IURL.

3.1. Ordre en entropie dynamique :

Introduction :

Une des approches pour approximer une distribution est la méthode du maximum d'entropie. Toute distribution peut être approximée par une densité qui maximise l'entropie sous des contraintes ne dépendant pas du temps t . Dans le cas où ces contraintes dépendent du temps i.e qu'elles sont dynamiques (ce qui est un cas fréquent en fiabilité), la distribution qui maximise l'entropie de Shannon sera le maximum dynamique entropique (MDE).

Dans ce qui suit, on donne un résultat définissant l'ordre entropique dynamique et sa relation avec l'ordre stochastique, et quelques applications directes telles que : l'ordre des distributions de la durée de vie des systèmes parallèle et en série avec leurs composants, les valeurs enregistrées (record values). Ensuite, on construit des contraintes dynamiques pour quelques distributions paramétriques en termes des taux de défaillances et la fonction de vie moyenne résiduelle. En particulier, on identifie des classes de distributions comme MDE résultant d'un mélange de deux exponentielles et le mélange de deux Pareto.

Dans ce chapitre, le modèle MDE est une distribution de fonction densité $f^*(.)$ monotone dans l'ensemble des distributions $\Omega_F = [f(.)]$ telle que :

$$H(f, t) \leq H(f^*, t) \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

3.1.1. Ordre en entropie dynamique :

Théorème : Soit X et Y deux v.a positives continues de fonctions de distributions F et G , de fonctions densités f et g et des taux de défaillances I_F et I_G respectivement.

On suppose que $I_F(t) \leq I_G(t)$ pour tout $t \geq 0$. Alors :

- a) $H(f, t) \geq H(g, t)$ si $f(x)$ est décroissante pour tout $x \geq 0$.
- b) $H(f, t) \leq H(g, t)$ si $g(x)$ est croissante pour tout $x, 0 \leq x \leq b$.

Dans le chapitre suivant, on donnera quelques applications de l'ordre MDE, ainsi que des distributions à incertitude maximum sous des contraintes sur le taux de défaillance.

3.2. Relation entre classes à entropie monotone et théorie de risque :

Introduction :

L'une des préoccupations des assureurs est de déterminer le capital à mettre en réserve pour éviter la ruine. Cet intérêt nous amène en actuariat à donner une estimation probabiliste de la probabilité de ruine. L'estimation est comprise au sens de la majoration et minoration de cette probabilité.

Plusieurs recherches ont été faites pour l'obtention de bornes de classes de distribution basées sur la notion d'âge IFR (DFR), NBU (NWU),... (voir mémoire Frahi, 2006)

Dans notre cas, on s'intéresse aux classes de distributions basées sur la notion d'incertitude proposées par Ebrahimi (1996) telles que les distributions IURL et DURL.

Des résultats donnés par J.Cai et J.Garrido (1999) concernant des bornes pour des distributions IMRL (DMRL) DFR (IFR) peuvent être appliqués pour les distributions IURL et DURL du fait que les unes sont sous classes des autres.

Dans ce qui suit, on donnera les définitions pour la somme géométrique ainsi que la demande de remboursement comme étant un processus de renouvellement et la probabilité de ruine associée. En fin, on donnera les bornes pour cette probabilité suivant les propriétés des classes citées plus haut.

3.2.1. Sommes géométriques et théorie de risque :

En assurance les montants des sinistres peuvent être représentés par une somme de v.a telle que :

$$S_N = X_1 + X_2 + \dots + X_N.$$

où N est une v.a de comptage des sinistres.

Les X_i (le $i^{\text{ème}}$ sinistre) sont des v.a iid de distribution F , indépendantes de la v.a N , suit une distribution géométrique :

$$p(N = n) = (1 - f)f^n \quad n \geq 0, 0 < f < 1.$$

Dans ce qui suit, le problème consiste à trouver une estimation par borne de la fonction distribution: $\bar{W}(x) = P(\sum X_i > x)$.

qui est la queue de distribution composée de somme géométrique de v.a avec

$$\bar{W}(x) = 1 - W(x) \text{ ou } W(x) = P(\sum X_i \leq x).$$

La distribution de S_N est déterminée à l'aide de celles des X_i et N , comme suit :

$$\begin{aligned} P(S_N \leq x) &= P(X_1 + X_2 + \dots + X_N \leq x) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x / N = n) P(N = n) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + \dots + X_n \leq x) P(N = n). \quad \text{Car il y a indépendance entre } X_i \text{ et } N. \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) F^{*n}(x). \end{aligned}$$

Où $F^{*n}(x)$ est la $n^{\text{ème}}$ convolution de la fonction de répartition $F(x)$.

3.2.2. Marche aléatoire :

La marche aléatoire M.A est un modèle de probabilité classique qui possède des applications en biologie, file d'attente, assurance , finances, etc.

Imaginons une particule se déplaçant le long d'une droite réelle. Si au temps n , elle occupe une position S_n , sa position au temps $n+1$ est $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$, où X_n est le $n^{\text{ième}}$ pas de cette marche aléatoire.

Définition 1 :

Soit donnée une séquence de v.a, i.i.d $(X_i)_{i \geq 1}$, à valeurs dans R . La séquence :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n \end{cases} \quad n \geq 1$$

est appelée *processus* de marche aléatoire.

Supposons, que les X_i prennent des valeurs positives et/ou négatives avec des probabilités positives. Les caractères importants de ce processus sont :

- La première période où s_k est strictement positive :

$$L = \inf \{k : s_k > 0, k \geq 1\} \quad (3.2.1)$$

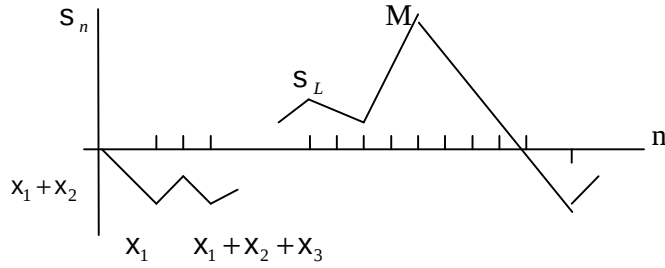
- La variable associée à cette période est :

$$\tilde{X} = s_1 \quad (3.2.2)$$

- Le maximum total de cette marche est :

$$M = \sup_{0 \leq k \leq \infty} s_k \quad (3.2.3)$$

La figure (3.1) illustre cette situation.



La figure (3.1)

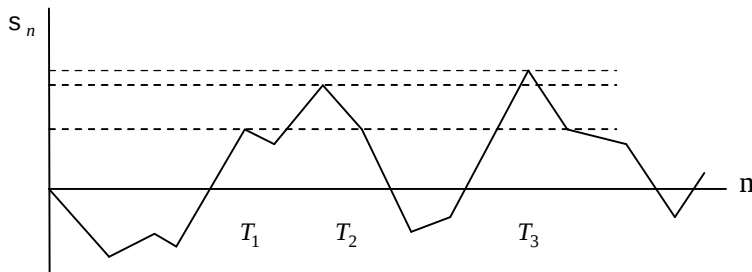
On pose : $x_1, x_1 + x_2, x_1 + x_2 + x_3$

$$f = P(L = \infty) > 0 \quad (3.2.4)$$

Soit $s_0 = 0, M \geq 0$ pour $T_0 = 0$ (voir figure 3.2), on a :

$$T_{n+1} = \inf \{k : s_k > s_{T_n}, k > T_n\}, n \geq 1,$$

$$\text{et } \tilde{X} = x_{T_{n-1}} + L + x_{T_n} = s_{T_n} - s_{T_{n-1}}, n \geq 1$$



La figure (3.2)

Evidemment, les $(T_n - T_{n-1}, \tilde{X}_n), n \geq 1$, sont des couples de v.a.i.i.d et l'on a

$$(L, \tilde{X}) \approx_d (T_n - T_{n-1}, \tilde{X}_n), n \geq 1.$$

Par suite, $P(T_{n+1} = \infty / T_n < \infty)$ est égale à la probabilité f définie dans (3.2.4). En posant $N = \min\{n : T_n = \infty, n \geq 1\}$, il s'en suit que $P(N = k) = f(1-f)^{k-1}$.

Le maximum total peut s'écrire :

$$M = f_{T_{n-1}} = \tilde{X}_1 + \tilde{X}_2 + L + \tilde{X}_{n-1} \quad (3.2.5)$$

avec $M = 0$ pour $n=1$.

Soit maintenant, la fonction de distribution conditionnelle des variables $X_i, i \geq 1$:

$$F(x) = P(\tilde{X} \leq x / L < \infty) \quad (3.2.6)$$

Cette fonction de distribution ne dépend pas évidemment de n .

Comme on a :

$$M \approx_d X_1 + L + X_{n-1}. \quad (3.2.7)$$

donc :

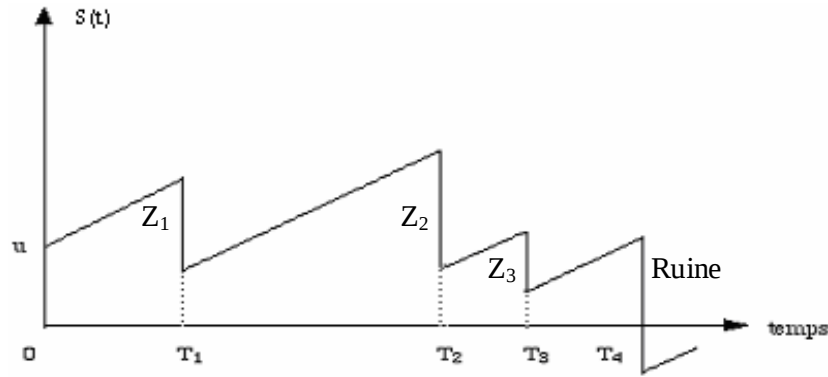
$$P(M \leq x) = \sum_{k=1}^{\infty} f(1-f)^{k-1} P(X_1 + L + X_{k-1} \leq x). \quad (3.2.8)$$

Par conséquent, la marche aléatoire M est une distribution qui peut être exprimée en terme d'une somme géométrique des variables aléatoires X_i .

3.2.3. Modèle de risque :

On définit les paramètres du modèle de risque $U(t)$, telle que :

- le capital initial positif U appelé aussi réserve de risque initial.
- les occurrences $\{X_k, k \geq 1\}$ représentant la taille des sinistres iid positives, correspondant aux montants de remboursement, formant un processus de renouvellement de la distribution F .
Où $E(X_k) = m$ et $\text{var}(X_k) = d^2$.
- le nombre de ces occurrences suit un processus de comptage $\{N(t), t \geq 0\}$ d'intensité $\lambda > 0$.
- les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps à un taux constant $c > 0$, appelé prime encaissée sur l'intervalle $[0, t]$.



La figure (3.3)

On définit le processus de risque tel que :

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0.$$

Où $u \geq 0$ note le capital initial de la compagnie d'assurance et $c > 0$ est le taux de prime,

et $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$.

Définition (probabilité de ruine) :

On définit la probabilité de ruine $y(u)$ telle que :

$$y(u) = p(\exists t > 0 : U(t) < 0).$$

D'après la définition du processus de risque, la ruine ne peut avoir lieu qu'aux instants T_i .

Ainsi, pour $u \geq 0$:

$$\begin{aligned} y(u) &= P(u + ct - S(t) < 0, \text{ pour un certain } t > 0) \\ &= P(u + cT_n - S(T_n) < 0, \text{ pour un certain } n \geq 1) \\ &= P\left(u + \sum_{k=1}^n (cy_k - X_k) < 0, \text{ pour un certain } n \geq 1\right) \\ &= P\left(\sup \sum_{k=1}^n (X_k - cy_k) > u\right) \end{aligned}$$

Ainsi, $y(u) < 1$ est équivalent à la condition :

$$1 - y(u) = P\left(\sup \sum_{k=1}^n (X_k - cY_k) \leq u\right) > 0, \quad u \geq 0 \quad (3.2.9)$$

D'après (3.2.9), il s'ensuit que la détermination de la probabilité de non ruine $1-y(u)$ est réduite à l'étude de la fonction distribution du max de la marche aléatoire R_n , où :

$$n \geq 1: R_n = \sum_{k=1}^n Z_k \quad \text{avec } R_0 = 0.$$

$$\text{et } Z_k = X_k - cy_k, k \geq 1.$$

Notons que : $E(Z) = u - \frac{c}{1} < 0$ n'est que la condition du « profit net ».

Ainsi la probabilité de non ruine peut se réécrire telle que :

$$1-y(u) = p(\sup_{n \geq 1} R_n \leq u)$$

3.2.4. Probabilité de ruine et les classes de distributions DURL et IURL :

Le corollaire suivant donne une borne de la probabilité de ruine si la distribution des sinistres est IURL.

$$\begin{array}{c} \nearrow \\ \text{IURL} \Rightarrow \text{IMRL} \end{array}$$

$$\text{DFR} \Rightarrow \text{DFRA} \Rightarrow \text{NWU} \Rightarrow \text{NWUE}$$

Corollaire 1 : (corollaire 5.3 et 5.4 de Cai, Garrido 1999).

- Soit f est une constante, $0 < f < 1$, tels que la distribution de probabilité $\{P_n, n \geq 0\}$ et N satisfont :
 $a_{n+1} \geq f a_n \quad n = 0, 1, 2, \dots$
où $a_n = P(N > n) = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k$ et $P_0 = P(N = 0)$.
- Soit B une distribution de vie (i.e une fonction de distribution d'une v.a positive) NBU satisfaisant l'équation suivante :

$$\int_0^{\infty} [\bar{B}(y)]^{-1} dF(y) = \frac{1}{f}.$$

- Soit Q_x une fonction croissante (resp. croissante convexe) satisfaisant :

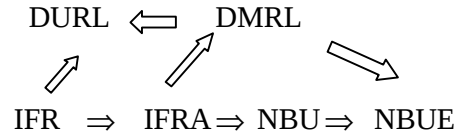
$$Q_x(y) \geq \sup_{0 \leq h \leq x} [\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)]^{-1}$$

Sous ces conditions :

Si F est DFR (resp. IMRL), alors :

$$y(x) \geq \frac{1-p_0}{f} \left[\int_x^\infty Q_x(y-x) dF(y) \right]^{-1} \bar{F}(x), x \geq 0.$$

Quant au corollaire suivant, il donne une borne de la probabilité de ruine si la distribution des sinistres est DURL du fait que le DMRL et le IFR impliquent le DURL.



Corollaire 2 : (corollaire 5.1, 5.2 : Cai, Garrido 1999)

- Soit f une constante, $0 < f < 1$, telle que la distribution de probabilité $P_n, n \geq 0$ et N satisfont :

$$a_{n+1} \leq f a_n, n = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\text{où } a_n = P\{N > n\} = \sum_{k=n+1}^{\infty} P_k \quad \text{et} \quad P_0 = P[N = 0].$$

- Supposant une distribution B NWU satisfaisant l'équation suivante :

$$\int_0^\infty [\bar{B}(y)]^{-1} dF(y) = \frac{1}{f}.$$

- Soit Q_x une fonction croissante (croissante convexe) satisfaisant, pour tout $y \geq 0$:

$$Q_x(y) \leq \inf_{0 \leq h \leq x} [\bar{B}(x-y)\bar{B}(x+y)]^{-1},$$

Sous ces conditions :

- si F est IFR (ou DMRL), alors :

$$y(x) \leq \frac{1-P_0}{f} \left[\int_x^\infty Q_x(y-x) dF(y) \right]^{-1} \bar{F}(x), x \geq 0.$$

Remarque : Pour le choix de Q_x , on a le résultat suivant donné par Cai, Garido (1999), tel que :

- si B est NWU alors :

$$\left[\bar{B}(x+y)\right]^{-1} \leq \inf_{0 \leq h \leq x} \left[\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)\right]^{-1}$$

- et si B est NBU alors :

$$\left[\bar{B}(x+y)\right]^{-1} \geq \sup_{0 \leq h \leq x} \left[\bar{B}(x-h)\bar{B}(y+h)\right]^{-1}$$

Ainsi, on choisi $Q_x(y) = \left[\bar{B}(x+y)\right]^{-1}$ selon B est NWU ou NBU.

Chapitre 4

Application et illustrations

Introduction

On propose trois applications illustrant le résultat du MDE sur les statistiques d'ordre, les valeurs enregistrées et les contraintes sous le taux de défaillance pour l'obtention des densités maximisant l'entropie résiduelle dans la classe des distributions monotones.

Applications 1.a :

Soient $X_1, X_2, \dots, X_n$ les durées de vie de n composants iid, de densité commune f , de fonction de distribution F et une fonction de survie $\bar{F}$.

a) la durée de vie d'un système en série à n composants est déterminée par $Y = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Soit g la densité et G la distribution de probabilité de Y .

alors, $I_G(t) = n I_F(t) \geq I_F(t)$. Ainsi, si la densité f est décroissante,

alors $H(f, t) \geq H(g, t)$. Si la densité g est croissante alors : $H(f, t) \leq H(g, t)$.

Ainsi, dans le premier cas, on dit que $Y \leq_{LU} X$ et dans le second c'est l'inverse i.e

$X \leq_{LU} Y$.

b) la durée de vie d'un système parallèle à n composants est déterminée par $Z = \max(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Si on note par g et G la densité et la distribution de Z respectivement. On a alors :

$I_G(t) = q(t) I_F(t)$, où :

$$q(x) = n \frac{(F(x)/\bar{F}(x))^{n-1}}{\sum_{i=0}^{n-1} \binom{n}{i} (F(x)/\bar{F}(x))^i} \leq 1.$$

Dans ce cas, $I_G(t) \leq I_F(t)$. Ainsi, si $f(\cdot)$ est une fonction croissante, alors :

$H(f, t) \geq H(g, t)$ et on dira que $Z \leq_{LU} X$.

Si $g(\cdot)$ est une fonction décroissante, alors $H(f, t) \leq H(g, t)$ et on dira que $X \leq_{LU} Z$.

Application 1.b : (record values)

Soit $\{X_n, n \geq 1\}$ une séquence de v.a iid de fonction de distribution F et de fonction de densité f et de taux de défaillance I_F . Soient g et G respectivement la densité et la fonction de distribution de la $n^{\text{ème}}$ plus grande valeur enregistrée V . Alors on sait que :

$$P(V > v) = \bar{F}(v) \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(v)]^k$$

et

$$g(v) = f(v) \frac{[\Lambda_F(v)]^{n-1}}{(n-1)!}, \text{ où } \Lambda_F(v) = -\log \bar{F}(v).$$

A partir de ces deux équations, on obtient la fonction taux de défaillance de V, telle que :

$$l_G(t) = q(t) l_F(t), \text{ avec :}$$

$$q(t) = \frac{[\Lambda_F(t)]^{n-1} / (n-1)!}{\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} [\Lambda_F(t)]^k} \leq 1.$$

Ainsi, $l_G(t) \leq l_F(t)$. Alors, si $f(\cdot)$ est une fonction croissante, $H(f, t) \geq H(g, t)$ i.e $V \leq_{LU} X$.

si g est décroissante alors $H(f, t) \leq H(g, t)$, d'où : $X \leq_{LU} V$.

Application 1.c : (comparaison entre les distributions paramétriques)

Les distributions sont classées dans le sens où le tableau 1 donne des contraintes sous forme d'inégalités différentielles des taux de défaillance où le second membre est constant, ou bien le produit d'une constante par $l_F(t)$, c'est le cas où le modèle MDE coïncide avec le ME.

Le second tableau donne des contraintes où les inégalités différentielles sont en fonction de t . c'est le cas MDE et non pas ME.

Les résultats des deux tableaux nous permettent de conclure que pour n'importe qu'elle fonction densité monotone $f \in \Omega$, obéissant aux contraintes associées à la distribution :

$$H(f, t) \leq H(f^*, t) \text{ pour tout } t \geq 0 \text{ i.e } X \leq_{LU} Y, \text{ où } X \text{ est de densité } f \text{ et } Y \text{ de densité } f^*.$$

Résultat : $X_t \geq_{st} Y_t, f^* \text{ monotone } (l_F(t) \leq l_{F^*}(t))$

$$H(f, t) \leq H(f^*, t) \text{ pour tout } t \geq 0, f^* \text{ MDE.}$$

Alors $X \leq_{LU} Y$.

Le tableau 3 donne le MDE dans le cas de deux distribution à domaine réduits (pour avoir f^* monotone).

Dans le cas par exemple où W_1 et W_2 sont deux variables aléatoires indépendantes telles que W_1 est de distribution exponentielle et W_2 de distribution d'une valeur extrême tronquée ; alors la fonction de survie de $\min(W_1, W_2)$ est $\bar{F}^*(t)$ telle que :

$$f^*(t) = (b_1 e^t + b_2) e^{-b_2 t - b_1(t^2 - 1)}, b_1 > 0, b_2 \geq 0.5.$$

Dans ce même tableau sont donnés deux cas de mélange, mélange de deux exponentielles et un mélange de deux paretos.

Tableau1: distributions maximums dynamiques entropie

Densités MDE et supports	contraintes pour l'ensemble max
Uniforme, $[0, b]$ $f^*(x) = \frac{1}{b}$	aucune
Exponential, $[0, \infty)$ $f^*(x) = be^{-bx}, x \geq 0, b > 0$	$\begin{cases} I_F(0) = b \\ I_F'(t) \geq 0 \end{cases}$
Extreme value, $[0, \infty)$ $f^*(x) = (a + b)e^{-(ax + (b/2)x^2)}, x \geq 0, 0 < b \leq a^2$	$\begin{cases} I_F(0) = a \\ I_F'(t) \geq b \end{cases}$
Extreme value, $[0, \infty)$ $f^*(x) = ae^{(b/a)x} \exp\left(\frac{a^2}{b}(1 - e^{(b/a)x})\right), 0 < b \leq a^2$	$\begin{cases} I_F(0) = a \\ \frac{I_F'(t)}{I_F(t)} \geq \frac{b}{a} \end{cases}$
Generalized Pareto, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{b+1}{a} \left(1 + \frac{b}{a}x\right)^{-1/b-2}, a, b > 0$	$\begin{cases} I_F(0) = I_0 \\ \frac{I_F'(t)}{I_F(t)} \geq -\frac{b}{b+1} I_F(t) \end{cases}$
Pareto (type II), $[0, \infty)$ $f^*(x) = ab^a (b + x)^{-a-1}, a, b > 0$	$\begin{cases} I_F(0) = \frac{b}{a} \\ \frac{I_F'(t)}{I_F(t)} \geq -\frac{1}{a} I_F(t) \end{cases}$
Beta, $[0, 1]$ $f^*(x) = b(1-x)^{b-1}, b > 0$ $\begin{cases} I_F(0) = b \\ \frac{I_F'(t)}{I_F(t)} \geq \frac{1}{b} I_F(t) \text{ pour } b \leq 1 \\ \frac{I_F'(t)}{I_F(t)} \leq \frac{1}{b} I_F(t) \text{ pour } b \geq 1 \end{cases}$	

Tableau 2: distribution maximum dynamique entropie

Densités MDE et supports	contraintes pour l'ensemble max
Weibull, $[0, \infty)$ $f^*(x) = ka(x + x_0)^{a-1} e^{-(x+x_0)^a}, x_0 > 0, 0 < a < 1$	$\begin{cases} l_F(0) = l_0 \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq \frac{a-1}{x_0+t} \end{cases}$
Half-Cauchy, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{2}{p(1+x^2)}$	$\begin{cases} l_F(0) = \frac{2}{p} \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq (1-2t \arctan t^{-1}) l_F(t) \end{cases}$
Beta, $[0,1)$ $f^*(x) = ax^{a-1}, a > 0$	$\begin{cases} l_F(0) = 0 \\ \frac{r'_F(t)}{a + r_F(t)} \geq t^{a-1} [a + r_F(t)] \\ \text{For } a \leq 1, r_F(t) = t l_F(t) \\ \frac{r'_F(t)}{a + r_F(t)} \leq t^{a-1} [a + r_F(t)] \\ \text{For } a \geq 1, r_F(t) = t l_F(t) \end{cases}$
Half-logistic, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{b(a+1)e^{bx}}{(a + e^{bx})^2}, a, b > 0$	$\begin{cases} l_F(0) = l_0 \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq b - l_F(t) \geq 0 \end{cases}$
Half-normal, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \sqrt{\frac{2}{p}} e^{-(1/2)x^2}$	$\begin{cases} l_F(0) = \sqrt{\frac{2}{p}} \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq l_{F^*}(t) - t \end{cases}$
Gamma, $[0, \infty)$ $f^*(x) = \frac{k}{\Gamma(a)} (x + x_0)^{a-1} e^{-(x+x_0)}, x_0 > 0, 0 < a < 1$	$\begin{cases} l_F(0) = l_0 \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq l_{F^*}(t) + \frac{a-1}{x_0+t} - 1 \end{cases}$

Tableau3: distribution maximum dynamique entropie à deux composantes

Densités MDE et supports	contraintes pour pour l'ensemble max
Minimum of exponential and extreme value, $[0, \infty)$	
$f^*(x) = (b_1 e^x + b_2) e^{-b_2 x - b_1(x^2-1)}, b_1 > 0, b_2 \geq 0.5$	$\begin{cases} l_F(0) = b_1 + b_2 \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq 1 - \frac{b_2}{l_F(t)} \end{cases}$
Minimum of exponential and Pareto, $[0, \infty)$	
$f^*(x) = [b_1 + b_2(x+1)](x+1)^{-b_1-1} e^{-b_2 x}, b_1, b_2 > 0$	$\begin{cases} l_F(0) = b_1 + b_2 \\ \frac{r'_F(t)}{r_F(t)} \leq \frac{b_2}{b_1} - \frac{b_2^2}{b_1 l_F(t)} \\ r_F(t) = t l_F(t) \end{cases}$
Mixture of exponentials, $[0, \infty)$	
$f^*(x) = a b_1 e^{-b_1 x} + (1-a) b_2 e^{-b_2 x}, 0 < a < 1, b_1 > b_2 > 0$	$\begin{cases} l_F(0) = a b_1 + (1-a) b_2 \\ b_2 \leq l_F(t) \leq b_1 \\ \frac{l'_F(t)}{l_F(t) - b_2} \geq l_F(t) - b_1 \end{cases}$
Mixture of Paretos, $[0, \infty)$	
$f^*(x) = a b_1 e^{-b_1 x} + (1-a) b_2 x^{-b_2-1}, 0 < a < 1, b_1 > b_2 > 0$	$\begin{cases} l_F(1) = a b_1 + (1-a) b_2 \\ b_2 \leq r_F(t) \leq b_1 \\ r_F(t) = t l_F(t) \\ \frac{t r'_F(t)}{r_F(t) - b_2} \geq r_F(t) - b_1 \end{cases}$

On donne ci-dessous quelques démonstrations des distributions MDE données dans les trois tableaux précédents :

Proposition 4.1: La loi Pareto est le MDE pour les contraintes suivantes :

a) $I_F(0) = I_0$

b) $\frac{I'_F(t)}{I_F(t)} \geq -\frac{b}{b+1} I_F(t)$

avec $I_0 = (b+1)/a$ pour $a, b > 0$.

Preuve: A partir de (b) on a:

$$\frac{I'_F(t)}{I_F^2(t)} \geq -\frac{b}{b+1}$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité, utilisant la condition initiale (a), on a :

$$I_F(t) \geq \frac{b}{b t + a} = I_{F^*}(t)$$

Par ailleurs, la densité est décroissante. Ainsi, à partir du théorème (3.1), on a :

$$H(f; t) \leq H(f^*; t).$$

Proposition 4.2 : La distribution half-logistic est le MDE dans le support $[0, \infty[$, pour les contraintes suivantes :

a) $I_F(0) = I_0$

b) $\frac{I'_F(t)}{I_F(t)} \geq b - I_F(t) \geq 0$

avec : $I_0 = b/(1+a)$ pour $a, b > 0$.

Preuve:

A partir de (b) on a: $\frac{I'_F(t)}{I_F(t)(b - I_F(t))} \geq 1$.

En multipliant les deux membre de l'inégalité par b et en décomposant la fraction, on obtient :

$$\frac{b \, l'_F(t)}{l_F(t) (b - l_F(t))} = \frac{l'_F(t)}{b - l_F(t)} + \frac{l'_F(t)}{l_F(t)} \geq b .$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité, utilisant la condition initiale (a), on a :

$$l_F(t) \geq \frac{b \, e^{b \, t}}{a + e^{b \, t}} = l_{F^*}(t),$$

où : $a = b / l_0 - 1 \geq 0$ et la densité est une fonction décroissante. Ainsi, à partir du théorème (3.1), on a :

$$H(f;t) \leq H(f^*;t).$$

Proposition 4.3 : Le mélange de deux exponentielles est le MDE dans le support $[0, \infty[$, pour les contraintes :

$$a) \, l_F(0) = a b_1 + (1-a) b_2$$

$$b) \, b_2 \leq l_F(t) \leq b_1$$

$$c) \, \frac{l'_F(t)}{l_F(t) - b_2} \geq l_F(t) - b_1$$

Preuve : la démonstration est similaire à celle de la proposition (4.2).

En multipliant les deux membres de l'inégalité (c) par $b_1 - b_2$ et en décomposant la fraction, on obtient :

$$-\frac{l'_F(t)}{b_1 - l_F(t)} - \frac{l'_F(t)}{l_F(t) - b_2} \leq b_1 - b_2 .$$

En intégrant les deux membres de l'inégalité, utilisant la condition initiale (a), on a :

$$l_F(t) \geq \frac{a b \, e^{-b_1 t} + (1+a) b_2 e^{-b_2 t}}{a \, e^{-b_1 t} + (1+a) e^{-b_2 t}} = l_{F^*}(t).$$

La densité est une fonction décroissante. Ainsi, à partir du théorème (3.1), on a :

$$H(f;t) \leq H(f^*;t).$$

Application 2 : Fiabilité des systèmes :

Dans cette partie, on donne des conditions sous les quelles deux systèmes différents peuvent être comparables dans le sens d'incertitude et non dans le sens habituel i.e de vieillissement (A. Aissani et al, 2006).

a) Systèmes en séries :

- Le système en série fonctionne quand tous ses éléments fonctionnent et tombe en panne dès que le premier élément tombe en panne.

Supposons que le i^{eme} élément possède une durée de vie $X_i, i=1,2,\dots,n$.

Alors la durée de vie du système est Z tel que $Z = \min(X_1, \dots, X_n)$

Ainsi, si les éléments sont statistiquement indépendants, alors la fiabilité du système est telle que :

$$\bar{F}_s(t) = \prod_{i=1}^n \bar{F}_i(t).$$

Où $\bar{F}_i(t)$ est la fonction de survie du i^{eme} composant, et $\bar{F}_s$ est celle du système.

On se donne deux systèmes $S_k, k=1,2$. indépendants ayant la même structure avec des composants en séries, la durée de vie de chaque composants est X_{ik} et leurs taux de défaillances respectifs sont

$$\lambda_i^{(k)}, i=1, \dots, n.$$

On note Z_i la durée de vie du système $S_i, i=1,2$.

- On considère les hypothèses suivantes :

(i) si tous les composants du 1^{er} système sont DFR.

$$(ii) \quad \text{si pour tout } t \geq 0 : \frac{\log \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)}(x)}{\log \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(2)}(x)} \geq \exp \left[\frac{\int_0^x \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(1)}(x) dx}{\int_0^x \sum_{i=1}^n \lambda_i^{(2)}(x) dx} \right] \text{ pour tout}$$

$$x \geq t \dots (*)$$

alors la durée de vie Z_1 , du 1^{er} système est moins incertaine que la durée de vie du 2nd système Z_2 i.e $Z_1 \leq_{LU} Z_2$.

Preuve : Puisque les systèmes sont en séries, il s'en suit que :

$$Z_k = \min(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{n,k}); k = 1, 2.$$

et du fait que $\bar{F}_i^{(k)}(x) = \exp\left(-\int_0^x l_i^{(k)}(x)dx\right) \quad i = 1, 2, \dots, n$

alors l'inégalité (*) satisfait le 1^{er} critère de l'ordre $\leq_{LU}$.

- Supposons maintenant que les composants sont tous DFR et que le rapport

$$\frac{\sum_{i=1}^n l_i^{(1)}(x)}{\sum_{i=1}^n l_i^{(2)}(x)} \quad (2)$$

est croissant en x .

Alors la durée de vie Z_1 du 1^{er} système a moins d'incertitude que la durée de vie Z_2 du 2nd système i.e $Z_1 \leq_{LU} Z_2$.

Preuve : Du fait que tous les éléments sont comparables à l'ordre $\leq_{FR}$ et que cet ordre est conservé par passage aux minimums, alors $Z_1 \leq_{FR} Z_2$.

En suite, la durée de vie du 1^{er} système est DFR, puisque cette classe de distribution est stable sous l'opération minimums. Ainsi le critère (2) est vérifié.

b) Système redondant (cold-redondant) :

Supposons que l'on ait un élément opérationnel à (n-1) éléments de remplacement (stand-by). Quand cet élément tombe en panne un des (n-1) éléments le remplace immédiatement. Le système tombe en panne quand tous ces éléments tombent en panne. Notons que les éléments en stock ne tombent pas en panne.

Pour $k=1,2$, considérons un système S_k constitué de deux éléments $E_1^{(k)}$ et $E_2^{(k)}$.

A l'instant $t=0$, $E_1^{(k)}$ fonctionne jusqu'à un temps $X_0^{(k)}$, au quel instant la réparation de $E_1^{(k)}$, durant un temps $Y_1^{(k)}$, où $E_2^{(k)}$ commence son fonctionnement et ce, durant un temps $X_1^{(k)}$ jusqu'à sa panne.

Si $X_1^{(k)} \leq Y_1^{(k)}$, le système s'arrête à l'instant $X_0^{(k)} + X_1^{(k)}$, où la réparation de $E_2^{(k)}$ commence.

On note par $l(S_i)(x)$ la fonction du taux de défaillance du système S_i .

Supposons :

- (i) les durées de fonctionnements $X_0^{(1)}, X_1^{(1)}, \dots$ sont exponentielles
- (ii) $X_0^{(2)}, X_1^{(2)}, \dots$ sont toutes IFR.
- (iii) $X_i^{(1)} \leq_{FR} X_i^{(2)}, i=1,2,\dots,n$.
- (iv) $\frac{l(S_1)(x)}{l(S_2)(x)}$ est croissante en x.

ainsi, la durée de vie Z_1 du premier système est moins incertaine que la durée de vie du second système Z_2 , i.e $Z_1 \leq_{LU} Z_2$.

Preuve : Notons $N^{(k)} = \inf \{m : X_m^{(k)} < Y_m^{(k)}\}$.

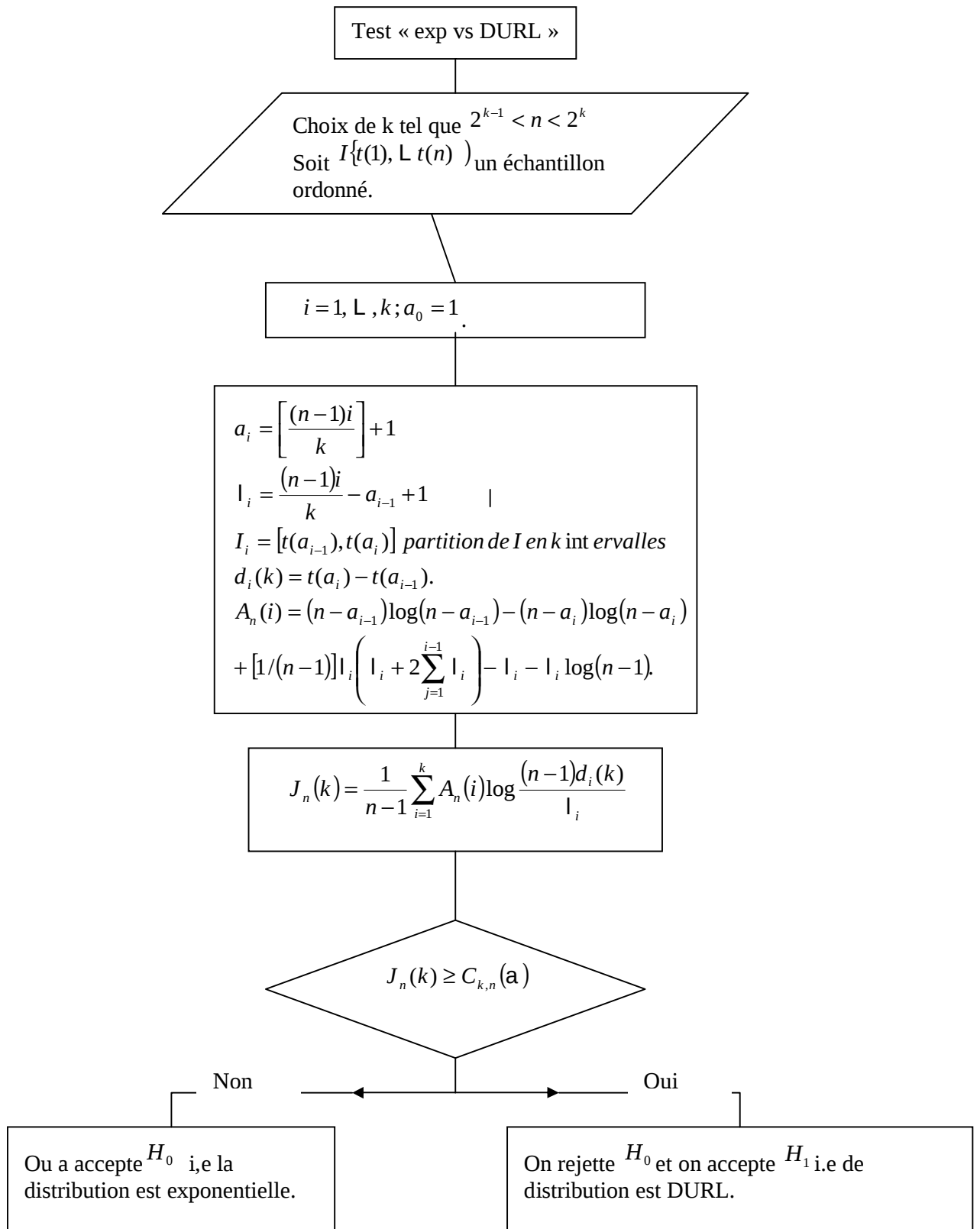
Ainsi, la durée de vie du système S_k est une v.a de structure $Z^{(k)} = \sum_{i=1}^{N^{(k)}} X_i^{(k)}$ du fait que

la distribution exponentielle est IFR, et du point (ii) et que l'ordre $\leq_{FR}$ est conservé par convolution, alors $Z^{(1)} \leq_{FR} Z^{(2)}$.

Notons ainsi que la distribution exponentielle est aussi DFR, et en rajoutant la condition (iv), le critère (2) est ainsi satisfait. Alors, $Z^{(1)} \leq_{LU} Z^{(2)}$.

Application 3 : Tester la monotonie de l'incertitude

On donne ci après l'organigramme du test de monotonie de l'incertitude décrit dans le chapitre 2



Pour faire le test « exp vs DURL », on se donne des observations de durées de survie des patients (l'unité est en jours) de l'institut national du cancer des USA (Ebrahimi, 1997) :
 $n=40$

$t=[7\ 47\ 58\ 74\ 177\ 232\ 273\ 285\ 317\ 429\ 440\ 445\ 455\ 468\ 495\ 497\ 532\ 571\ 579\ 581\ 650\ 702\ 715\ 779\ 881\ 900\ 930\ 968\ 1077\ 1109\ 1314\ 1334\ 1367\ 1534\ 1712\ 1784\ 1877\ 1886\ 2045\ 2056]$.

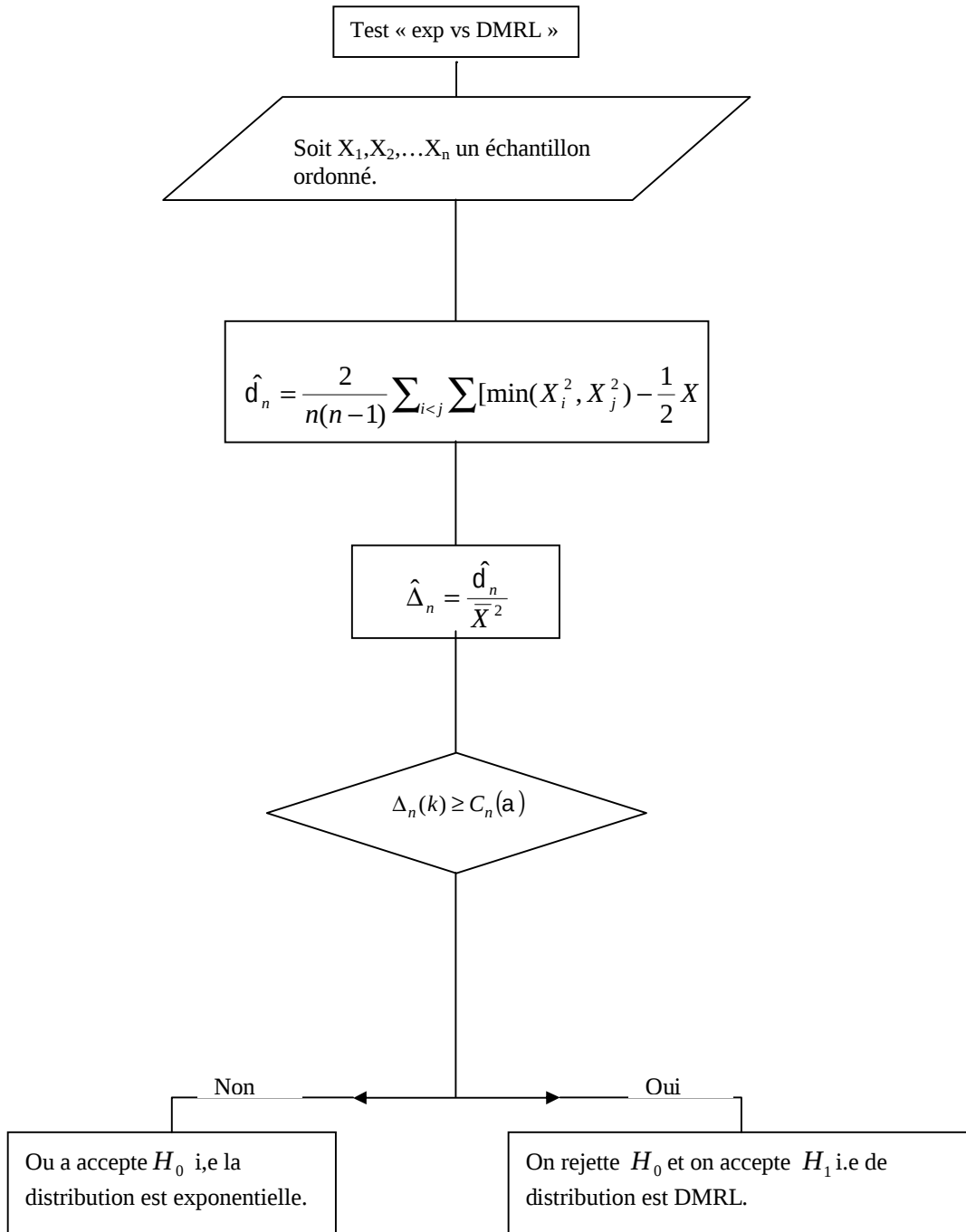
On trouve la valeur de la statistique $J_n(k) = -0.1369$, qui est supérieure aux valeurs critiques à 90% et 95%.

Alors, on accepte le fait que la distribution est DURL (donc monotonie de l'incertitude) et on rejette l'exponentialité.

Table des valeurs critiques de $J_n(k)$

n	k	$\alpha = 0.01$	$\alpha = 0.025$	$\alpha = 0.05$	$\alpha = 0.1$
3	2	0.3816	0.2973	0.2180	0.1477
4	2	0.5376	0.4219	0.3072	0.1941
5	3	0.5712	0.4093	0.2792	0.1642
6	3	0.5266	0.3877	0.2853	0.1629
7	3	0.2118	0.1503	0.0945	0.0326
8	3	0.2201	0.1505	0.0884	0.0196
9	4	0.1710	0.1102	0.0604	-0.0063
10	4	0.1843	0.1153	-0.0416	-0.0223
11	4	0.1927	0.1062	-0.0467	-0.0252
12	4	0.1768	0.1030	-0.0366	-0.0367
13	4	0.0838	0.0328	-0.0116	-0.0658
14	4	0.0871	0.0287	-0.0272	-0.0818
15	4	0.0692	0.0134	-0.0358	-0.0881
16	4	0.0605	-0.0063	-0.0452	-0.0987
17	5	0.0398	-0.0204	-0.0632	-0.1087
18	5	0.0224	-0.0233	-0.0709	-0.1268
19	5	0.0209	-0.0307	-0.0754	-0.1233
20	5	0.0226	-0.0353	-0.0875	-0.1388
21	5	-0.0019	-0.0586	-0.0909	-0.1363
22	5	-0.0142	-0.0670	-0.1062	-0.1449
23	5	-0.0265	-0.0735	-0.1161	-0.1555
24	5	-0.0194	-0.0700	-0.1148	-0.1598
25	5	-0.0369	-0.0802	-0.1186	-0.1614
26	5	-0.0649	-0.1020	-0.1347	-0.1653
27	5	-0.0509	-0.1024	-0.1336	-0.1717
28	5	-0.0649	-0.1020	-0.1390	-0.1763
29	5	-0.0716	-0.1073	-0.1441	-0.1828
30	5	-0.0764	-0.1147	-0.1474	-0.1855
35	6	-0.1105	-0.1416	-0.1729	-0.2108
40	6	-0.1218	-0.1660	-0.1919	-0.2265
50	6	-0.1589	-0.1949	-0.2196	-0.2476
60	6	-0.1876	-0.2160	-0.2397	-0.2776
70	7	-0.2032	-0.2334	-0.2573	-0.2842
80	7	-0.2282	-0.2512	-0.2703	-0.2942
90	7	-0.2329	-0.2601	-0.2822	-0.3044
100	7	-0.2453	-0.2696	-0.2855	-0.3100

On présente ci après l’organigramme du test DMRL décrit dans la partie annexe :



Sur le même échantillon, on teste l'hypothèse « exp vs DMRL ». Pour vérifier le résultat de Ebrahimi et Kirmani (1996) où le DMRL implique DURL.

Après avoir déroulé le programme correspondant au dernier organigramme sous MATLAB, on obtient $\hat{\Delta}_n = 0.835$ qui est supérieure aux valeurs critiques à 90% et 95%.

Ainsi, la distribution est DMRL. Elle est donc DURL, en appliquant le résultat de Ebrahimi et Kirmani (1996) qui est aussi vérifiée par le premier test.

Table des valeurs critiques de $\hat{\Delta}_n$:

n	90%	95%	98%	99%
5	0.1604	0.2035	0.2488	0.2713
6	0.1420	0.1837	0.2191	0.2448
7	0.1311	0.1645	0.2010	0.2193
8	0.1155	0.1499	0.1867	0.2097
9	0.1150	0.1432	0.1772	0.1952
10	0.1117	0.1377	0.1685	0.1911
11	0.1017	0.1339	0.1665	0.1909
12	0.0977	0.1259	0.1563	0.1784
13	0.0941	0.1198	0.1480	0.1631
14	0.0896	0.1121	0.1388	0.1587
15	0.0896	0.1146	0.1407	0.1564
16	0.0861	0.1093	0.1343	0.1501
17	0.0834	0.1093	0.1372	0.1527
18	0.0806	0.1027	0.1282	0.1460
19	0.0775	0.0970	0.1215	0.1391
20	0.0771	0.0970	0.1187	0.1317
21	0.0751	0.0967	0.1197	0.1339
22	0.0734	0.0933	0.1160	0.1313
23	0.0712	0.0896	0.1114	0.1270
24	0.0699	0.0891	0.1114	0.1244
25	0.678	0.0853	0.1067	0.1221
26	0.0683	0.0866	0.1062	0.1197
27	0.0666	0.0854	0.1057	0.1168
28	0.0660	0.0840	0.1045	0.1153
29	0.0628	0.0805	0.1015	0.1142
30	0.0639	0.0816	0.0994	0.1113
31	0.0590	0.0776	0.0964	0.1067
32	0.0614	0.0774	0.0956	0.1087
33	0.0579	0.0745	0.0931	0.1023
34	0.0603	0.0773	0.0923	0.1048
35	0.0596	0.0743	0.0910	0.1016
36	0.0576	0.0711	0.0923	0.1048
37	0.0567	0.0727	0.0912	0.1017
38	0.0541	0.0690	0.0855	0.0982
39	0.0534	0.0681	0.0842	0.0968
40	0.0547	0.0685	0.0856	0.0993
41	0.0550	0.0687	0.0878	0.0965
42	0.0535	0.0697	0.0861	0.0959
43	0.0534	0.0683	0.0835	0.0934
44	0.0521	0.0670	0.0807	0.0922
45	0.0519	0.0657	0.0840	0.0955
46	0.0516	0.0654	0.0794	0.0889
47	0.0509	0.0659	0.0821	0.0929
48	0.0488	0.0626	0.0763	0.0863
49	0.0494	0.0615	0.0795	0.0891
50	0.0479	0.0622	0.0757	0.0877

Application 4 :

Application (4.a) du théorème (2.10.1) :

Dans cette partie, on propose une démonstration de la comparabilité des marches aléatoires par rapport à l'ordre LU. On donne ensuite une interprétation dans le domaine des assurances.

Soit $1 - \gamma(u) = P(R_n \leq u)$.

Plus la non ruine est improbable (i.e la probabilité augmente) plus elle est incertaine (plus la ruine est certaine) plus l'entropie augmente.

Soit $R_{N_1}^1 = \sum_{k=1}^{N_1} (X_k^1 - cY_k^1)$ et $R_{N_2}^2 = \sum_{k=1}^{N_2} (X_k^2 - cY_k^2)$ les marches aléatoires de deux compagnies d'assurances où les X_k^1 et X_k^2 représentent les remboursements associés à chaque compagnies et les Y_k^1 et Y_k^2 sont les inter occurrences des sinistres de chaque compagnie.

On note $Z_k^i = X_k^i - cY_k^i$, $i=1,2$

Deux compagnies d'assurance d'un même capital initial (u)

$$\begin{cases} Z_k^i & i=1,2 & IFR \forall k. \\ Z_k^1 \leq_{FR} Z_k^2 & \forall k. \end{cases} \Rightarrow \sum_{k=1}^{N_1} Z_k^1 \leq_{FR} \sum_{k=1}^{N_2} Z_k^2.$$

$N_1 < N_2$ (fixés) (i.e $R_{N_1} \leq_{FR} R_{N_2}$).

Si $R_{N_1}^1$ ou $R_{N_2}^2$ est DFR $\Rightarrow R_{N_1}^1 \leq_{LU} R_{N_2}^2$.

Remarque : plus il y a moins de sinistres plus la non ruine est certaine (ou la ruine est incertaine).

Une probabilité de survie plus grande $\Rightarrow$ une incertitude moindre (survie de la compagnie d'assurance) et une durée de vie plus grande.

Application (4.b) : Bornes par la probabilité de ruine

Comme application des bornes par distribution à entropie monotone (corollaires 1 et 2 de la partie (3.2.1)), on suggère de choisir une distribution B NWU où

$$\bar{B}(x) = e^{-k}, \quad k-1 < x \leq k, \quad k = 1, 2, \dots. \text{ Alors } Q_x(y-x) = e^k, \quad k-1 < x+y \leq k.$$

Pour la distribution IFR (donc DURL), on choisit une Weibull $W(1,2)$, i.e : $\bar{F}(x) = e^{-x^2}$

Pour le calcul du coefficient d'ajustement f , satisfaisant l'égalité : $\int_0^\infty [\bar{B}(y)]^{-1} dF(y) = \frac{1}{f}$, on

trouve $f = e^{-k}$

Ainsi, la borne de la probabilité de ruine pour ce cas d'exemple est :

$$y(x) \leq \frac{1-P_0}{f} \left[\int_x^\infty Q_x(y-x) dF(y) \right]^{-1} \bar{F}(x), \quad x \geq 0.$$

$$\leq \frac{1-p_0}{2}.$$

Ainsi, dans cet exemple la probabilité de ruine est inférieure à la probabilité d'au moins un sinistre (sur 2).

Conclusion

Conclusion :

Dans ce travail, on a étudié une approche à la comparaison stochastique de variables aléatoires basées sur l'incertitude. L'ordre en entropie présente un intérêt au sens où il permet d'actualiser de manière dynamique, du point de vue de la mesure d'information qu'est l'entropie, la comparaison de variables résiduelles.

Nous avons étudié les propriétés de cet ordre qui permettent de considérer diverses applications. C'est d'abord une méthode de test de la monotonie de l'incertitude au sens de l'entropie. Une illustration est présentée sur des données de la littérature.

Nous avons montré comment déduire des comparaisons pour certains systèmes de fiabilité et la probabilité de ruine d'une compagnie. Ces comparaisons conduisent à des bornes basées sur l'information de la classe d'incertitude.

Une autre application de ces propriétés de monotonie d'incertitude est fournie par la méthode du maximum d'entropie (dynamique) où les conditions portent, non plus sur la connaissance des premiers moments ou autres caractéristiques, mais sur la monotonie du risque (ou taux de défaillance). Cette technique pourrait être en particulier appliquée à l'étude de modèles de files d'attente.

Annexe

Tester la monotonie de la fonction de vie résiduelle moyenne (Abu Youssef (2002)) :

Plusieurs recherches ont été faite pour tester l'exponentialité contre la monotonie de la fonction de la vie résiduelle moyenne MRL. Dans notre contexte, on se réfère à l'article de Abu Youssef (2002) qui se base sur l'inégalité des moments. Pou ce faire, on a le théorème suivant :

Théorème 1 : Si F est DMRL (IMRL), alors :

$$m_{(2)} \geq (\leq) \frac{m^2}{2}$$

où : $m_{(r)} = E[\min(X_1, X_2)^r]$.

Ainsi, pour tester l'exponentialité contre DMRL(IMRL) de la distribution F d'un échantillon $X_1, \dots, X_n$, on propose la statistique suivante, où les grandes valeurs favorisent l'alternative :

$$d = m_{(2)} - \frac{m^2}{2}.$$

Pour que le test soit invariant par changement d'échelle, on pose :

$$\hat{\Delta}_n = \frac{\hat{d}_n}{\bar{X}^2},$$

où : $\hat{d}_n = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i < j} [\min(X_i^2, X_j^2) - \frac{1}{2} X_i X_j]$.

Théorème 2 :

Quand $n \rightarrow \infty$, $\sqrt{n}(\hat{\Delta}_n - \Delta)$ est asymptotiquement Normal de moyenne 0 et de variance :

$$s^2 = m^{-4} \text{var} \left\{ X_1^2 \bar{F}(X_1) - X_1 m + \int_0^{X_1} u dF(u) \right\}.$$

Sous H_0 , $\Delta_n = 0$ et la variance $s_0^2 = 2/27$.

Programme du test "exp vs DURL" :

```
n=40
t=[7 47 58 74 177 232 273 285 317 429 440 445 455 468 495 497 532 571 579
581 650 702 715 779 881 900 930 968 1077 1109 1314 1334 1367 1534 1712 1784
1877 1886 2045 2056 ]

k=0
i=1
while((2^(i-1)>n)|(2^i)<n)
    i=i+1;
end

k=i

for i=1:k
    a(1,i)=(round((n-1)*i/k)+1)
    a
end

d(1,1)=t(1,a(1,1))-t(1,1)
d(1,1)

lambda(1,1)=a(1,1)-1
lambda(1,1)

for i=2:k
    d(1,i)=t(1,a(1,i))-t(1,a(1,i-1))
    lambda(1,i)=a(1,i)-a(1,i-1)
end
d
lambda

v(1,1)=0
A(1,1)=(n-1)*log(n-1)-(n-a(1,1))*log(n-a(1,1))+
    (1/(n-1))*lambda(1,1)*(lambda(1,1)+2*v(1,1))
    -lambda(1,1)-lambda(1,1)*log(n-1)

J(1,1)=A(1,1)*log((d(1,1)*(n-1))/lambda(1,1))

for i=2:k

    u=lambda(1,1:i-1)
    v(1,i)=sum(u)

    if n-a(1,i)==0
        A(1,i)=(n-a(1,i-1))*log(n-a(1,i-1))+(1/(n-1))
        *lambda(1,i)*(lambda(1,i)+2*v(1,i))-lambda(1,i)-lambda(1,i)*log(n-1)

    else

        A(1,i)=(n-a(1,i-1))*log(n-a(1,i-1))-(n-a(1,i))*log(n-a(1,i))
        +(1/(n-1))*lambda(1,i)*(lambda(1,i)+2*v(1,i))-lambda(1,i)
        -lambda(1,i)*log(n-1)
    end
    J(1,i)=A(1,i)*log((d(1,i)*(n-1))/lambda(1,i))
end
J
statJ=sum(J)/(n-1)
% on trouve statJ=-0.1369, on accepte durl à 90 et 95%
```

Ci après le programme du test "exp vs DMRL"

```
n=40
t=[7 47 58 74 177 232 273 285 317 429 440 445 455 468 495 497 532 571 579
581 650 702 715 779 881 900 930 968 1077 1109 1314 1334 1367 1534 1712 1784
1877 1886 2045 2056 ]

for i=1:n
    for j=i+1:n
        v(1,j-i)=min(t(1,i)^2,t(1,j)^2)-t(1,i)*t(1,j)/2
    end

    u=v(1,1:n-i)

    s(1,i)=sum(u)
end

delta=sum(s)
delta=2*delta/(n*(n-1)*mean(t)^2)

% on trouve delta =0.835, on accepte dmrl à 90 et 95%
```

Bibliographie

Bibliographie :

- [1] S.E.Abu-Youssef (2002): "A moment inequality for decreasing (increasing) mean residual life distributions with hypothesis testing application". Statistics and Probability Letters 57,171-177.
- [2] A.Aissani, H.Benaoudia (2006) : « Comparison based uncertainty and it's application ». Enformatika Journal (Volume 16, ISSN 1305-5313).
- [3] A.Aissani, R.Smail (2003):" Information theoretic approximations for the M/G/1 retrial queue with unreliable server".European simulation and modelisation conference ESM2003, 27-28 octobre 2003. Université de Naples, Italie, pp: 448-451.
- [4] M. Asadi, N.Ebrahimi, G.G. Hamedani, E.Soofi (2004) : "Maximum dynamic entropy models". Journal Applied Probability.41,379-390.
- [5] M. Asadi, N.Ebrahimi, (2000):"Residual entropy and its characterizations in terms of hazard function and mean residual life function". Statistics and Probability Letters. 49, 263-269.
- [6] G. Battail (1997) : « Théorie de l'information. Application aux techniques de Communication".Ed : Masson, coll « Pédagogique de Télécommunication »
- [7] H.W.Block , W.S. Borges, T.H. Savits, (1985) : "Age dependent minimal repair". Journal Applied Probability. 22, 370-385.
- [8] J.Cai, J.Garrido (1999) : « A unified approach to the study of tail probabilities of compound distributions". Journal Applied Probability, 36,1058-1073.
- [9] G. Cullman (1972) : « Codage et transmission de l'information ».Ed : Eyrolles.
- [10] A. Di Crescenzo, M. Longobardi (2002) : " Entropy-based measure of uncertainty in past lifetime distributions." Journal Applied Probability. 39, 434-440.
- [11] N.Ebrahimi (1996): "How to measure uncertainty in the residual life time distribution". Sankhya: The Indian Journal of Statistics. Volume 58, Series A, Pt. 1, pp,48-56.
- [12] N.Ebrahimi (1997): "Testing whether life distribution is decreasing uncertainty" Journal Applied Probability.64, 9-19.
- [13] N.Ebrahimi, (2000):" The maximum entropy method for lifetime distributions." Sankhya: The Indian Journal of Statistics. Volume 62, Series A, Pt. 2, pp,236-243
- [14] N.Ebrahimi,S.N.U.A. Kirmani (1996):"Some results on ordering of survival functions through uncertainty" Statistics and Probability Letters 29 (1996) 167-176.
- [15] N.Ebrahimi, F.Pellerey (1995): "New partial ordering of survival functions

based on the notion of uncertainty”. Journal Applied Probability. 32, 202-211.

[16] N.Ebrahimi, E.Soofi, H.Zahiedi (2004): “Information properties of order statistics and spacings”. IEEE Transaction on Information Theory. Vol 50, No 1.

[17] F.Frahi (2006):” Estimation des queues de sommes géométriques de variables aléatoires.”

Mémoire de magister (Proba-Stat), USTHB.

[18] S.C. Kochar, (1990): “Some partial ordering results on record values”. Comm. Statist. Theory Methods 19, 299-306.

[19] S.P. Mack, (1988):”A comparative study of entropy estimators and entropy-based goodness-of-fit tests”. Ph.D Dissertation. University of California. Riverside.

[20] H.N. Nagaraja (1990):” Some reliability properties of order statistics”. Comm.Statist.Theory Methods 19, 307-316.

[21] A.K. Nanda, P.Paul (2006):”Some properties of past entropy and their applications”. Metrike, 64,47-61.

[22] J.Navarro, F.Belzunce, J.M.Ruiz et Y. Del Aguila (2002) : « Some results on residual entropy function ».Abstracts Book, 3rd Internat. Conf. Math. Methods Reliab. (17-20 juin 2002, Trondheim, Norway).

[23] G. Saidi (1998):”Les lois non paramétriques de survie: classification et application.” Mémoire de magister, INPS, Alger.

[24] K. Takahashi (1988):”A note of hazard rates of order statistics” Comm. Statist. Theory Methods 17 (12), 4133-4136.

[25] I.J. Taneja (1990):” On generalized entropy with applications”. In lectures in Applied mathematics and informatics, ed. L. M. Riccardi, Manchester University Press, PP. 107-169.

[26] J. Shaked, N. Shantikumar (1994):”Stochastic orders and their applications”. Academic Press, New York.

[27] C.E. Shannon (1948): “A mathematical theory of communication”. Bell System Tech J. 27, 279-423.

