

N° d'ordre :18/2011-M/MT

*MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE*

UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI

BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister

en mathématique

Spécialité : Géométrie

par

MECHACHA Mohamed

THÈME :

**Sur la géométrie et la dynamique des variétés
Lorentziennes**

soutenu publiquement le 02/02/2011 devant le jury composé de :

M^r : Rezaoui m. salem	Maître de Conférences /A	à l'U.S.T.H.B	Président.
M^r : Betina kamel	Professeur	à l'U.S.T.H.B	Directeur de thèse.
M^r : Behloul djilali	Maître de Conférences /A	à l'U.S.T.H.B	Examineur.
M^r : Deffaf mohamed	Maître de Conférences /B	à l'U.S.T.H.B	Examineur.

Remerciements

Mon premier merci ne peut s'adresser qu'à monsieur Deffaf mohamed pour tout ce qui se trouve sur ces pages.

Je tien a remercier monsieur Betina kamel de m'avoir encadrer et pour son aide administratif.

Un grand merci à monsieur Rezzaoui mohamed salam pour avoir accepter de présider mon jury de soutenance et à monsieur Behloul Djilali d'en faire parti.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien et leur confiance en moi, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et tous ceux qui ont servis, de près ou de loin à ma formation.

Sur la géométrie et la dynamique des variétés Lorentziennes

Résumé

Notre travail rentre dans le cadre de la classification des couples (G, M) où G est un groupe de Lie agissant isométriquement sur une variété Lorentzienne M . dans un premier temps, ce problème a été traité dans le cas compact (c-à-d. M compacte) par Adams ([3], [4]) et Zeghib [20]. Dans le cas général, un nouvel aspect a été introduit par Kowalsky ([13], [14]) qui compense la compacité par une condition dynamique (la non-propreté de l'action). On considère seulement le cas des groupes de Lie simples.

Signalons que l'approche de Kowalsky est de nature algébrique. Dans ce travail on introduit une approche géométrique différente de celle de Kowalsky.

Notre approche nous a permis de retrouver tous les résultats de Kowalsky avec une généralisation au cas semi-simple.

Mots-clés : Groupes de Lie semi-simples, espace de Sitter, espace Anti de Sitter, action nonpropre, action propre, variétés Lorentziennes.

Table des matières

Introduction	6
1 Produits scalaires pseudo-euclidiens	9
1.1 Formes bilinéaires et quadratiques	9
1.2 Produit scalaire	11
1.3 Groupes orthogonaux	16
1.4 Produits Lorentziens	16
2 Géométrie différentielle	18
2.1 Variétés différentielles	18
2.2 Espace tangent	20
2.3 Champs de vecteurs	22
2.4 Produit des variétés	23
3 Géométrie pseudo-Riemannienne	25
3.1 Rappels sur les Tenseurs	25
3.2 Opérations sur les tenseurs	26
3.3 Tenseurs symétriques et anti-symétriques	27
3.4 Tenseurs sur une variété	28
3.5 Métriques pseudo-Riemanniennes	28
3.6 Isométries	31
3.7 Champs de Killing	31
3.8 Connexion de Levi-Civita	32
3.9 Transport parallèle	35
3.10 Géodésique	36
3.11 Courbure	38

3.12	Courbure sectionnelle	40
3.13	Géométrie des sous variétés	41
3.14	Hypersurfaces pseudo-Riemanniennes	44
3.15	Produit tordu	45
3.16	Espaces à courbure constante	46
4	Groupes et algèbre de Lie	48
4.1	Groupes de Lie	48
4.2	Quelques propriétés des groupes de Lie	48
4.3	Champs de vecteurs invariants	49
4.4	Algèbres de Lie	50
4.5	Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	51
4.6	Algèbres de Lie nilpotentes	55
4.7	Algèbres de Lie résolubles	56
4.8	Forme de Killing	56
4.9	Algèbre de Lie simple	57
4.10	Algèbre de Lie semi-simple	58
4.11	Décomposition de Cartan	58
4.12	Décomposition radicielle des algèbres de Lie semi-simples	61
4.13	Décomposition polaire et décomposition KAK	63
4.14	Décomposition KAK dans $O(1, n)$	64
5	Action de groupes	66
5.1	Action d'un groupe	66
5.2	Orbite d'une action	68
5.3	Espace quotient	68
5.4	Espaces homogènes	68
5.5	Actions propre et non propre	70
5.6	Nonpropreté des actions de groupe de Lie abélien	71
5.7	Action d'algèbre de Lie	71
6	Dynamique des variétés lorentziennes	74
6.1	Dynamique des variétés Lorentziennes compactes	74
6.2	Travail de Kowalsky	75
6.3	Dynamique des variétés Lorentziennes noncompactes	76

6.4	Structure de produit tordu via l'homogénéité	
	partiel	79
6.5	La non-propreté versus l'irréductibilité	83

Introduction

Un des principaux problèmes qui se pose en géométrie, est de déterminer les groupes de Lie qui peuvent agir sur des variétés tout en préservant une structure géométrique particulière (structure Riemannienne, pseudo-Riemannienne...), autrement dit, les groupes de Lie qui peuvent se plonger dans le groupe des isométries d'une variété munie d'une structure géométrique particulière. Tout groupe de Lie pouvant se décomposer en une partie semi-simple et une partie résoluble (décomposition de Levi), le problème peut être traité en deux parties : dans une première étape, on détermine les groupes semi-simples et dans la deuxième on détermine les groupes résolubles. Le problème général peut être alors résolu en regroupant les résultats des deux étapes.

On sait que si un groupe opère proprement sur une variété, alors il préserve une structure Riemannienne. Se pose alors de manière naturelle la question suivante : qu'en est-il du cas pseudo-Riemannien ? plus précisément : dans quel cas un groupe de Lie peut-il agir isométriquement sur une variété pseudo-Riemannienne ?.

Cette question nous amène à classifier les couples (G, M) où G est un groupe de Lie, et M une variété pseudo-Riemannienne, sur laquelle G agit de façon isométrique. Comme tout groupe de Lie connexe possède une métrique pseudo-Riemannienne invariante à gauche, on considérera des actions isométriques aux quelles on imposera certaines hypothèses dynamiques, pour que cette classification ait un sens. D'un point de vue géométrique, le cas Lorentzien est celui qui suit immédiatement le cas Riemannien, il est donc naturel de commencer par l'étude du cas Lorentzien. Cette étude a été d'abord, considérée dans le cas compact.

Précisons le problème et on pose cette question : qu'est-ce qui permet à une variété Lorentzienne compacte, d'avoir un groupe de symétries non compact ?.

La réponse à cette question est donnée par S. Adams et G. Stuck [3], [4] et A. Zeghib [20].

Dans le cas général, une nouvelle approche apparaît dans les travaux de Kowalsky : dans [13] et [14], qui s'intéresse aux actions des groupes sur des variétés Lorentziennes éventuellement non compactes. Bien entendu, dans ce genre d'approche, on pourra compenser la non-compactité par une contrepartie dynamique afin de pouvoir mettre en oeuvre une sorte de récurrence. Dans son travail Kowalsky impose à l'action d'être non propre. C'est une hypothèse simple, qui est naturelle dans le cas compact.

L'étude du cas noncompact est d'un grand intérêt ne serait-ce que du point de vue de la physique ; les modèles compacts des espaces temps présentent peu d'intérêt, ils sont entre autres le défaut de ne pas être chronologiques (dans un espace-temps qui n'est pas chronologique, un événement peut se reproduire identique à lui même dont ne semble pas réaliste dans la physique d'aujourd'hui). Posséder un groupe d'isométries qui agit non proprement est une manifestation du caractère non Riemannien de la géométrie de l'espace temps.

Très brièvement, N. Kowalsky a montré dans [14] que parmi les groupes dont le centre est fini, seuls les groupes qui sont localement isomorphes à l'un des groupes $O(1, n)$, $O(2, n)$ et $Sl(2, \mathbb{R})$, peuvent agir de manière isométrique et non propre sur une variété Lorentzienne. Ce théorème montre qu'au niveau des groupes, l'espace de Sitter $O(1, n)/O(1, n - 1)$ et l'espace Anti de Sitter $O(2, n)/O(1, n)$ sont les seuls G -espaces Lorentziens non propres, avec G simple, possédant un centre fini.

S. Adams [2] a proposé une autre démonstration de ce théorème. Sa démarche procède d'une analyse semblable à celle de Kowalsky ; elle est cependant très compliquée et plutôt de nature algébrique.

A ce stade se pose naturellement la question suivante : si un groupe localement isomorphe à $O(1, n)$, $O(2, n)$ ou $Sl(2, \mathbb{R})$ agit sur une variété Lorentzienne, que peut-on alors dire de cette variété ?

Notre réponse est inspirée d'un travail de A. Zeghib où il montre que toute variété Lorentzienne homogène de dimension ≥ 3 ayant un groupe d'isotropie irréductible est de courbure sectionnelle constante [22]. Ce résultat montre à quel point les espaces homogènes sont rares en géométrie Lorentzienne en comparaison avec la géométrie Riemannienne.

Dans notre travail, nous avons regardé, dans un premier temps, si on pouvait adapter ce théorème aux actions non transitives. Or il se trouve que l'hypothèse d'irréductibilité qu'il est une hypothèse de nature algébrique, n'est pas adaptée au cadre géométrique-dynamique de notre travail. On aimerait la remplacer par une condition dynamique, plus naturelle. Notre point de vue est que l'hypothèse "non propre" suffit à cela. Dans cet esprit le premier résultat que nous obtenons dans notre thèse affirme que si l'action d'un groupe

de Lie G sur une variété M a une orbite de type Lorentzien avec un groupe d'isotropie irréductible alors, cette orbite est de courbure constante, la composante de l'identité de son groupe d'isométries est contenue dans G , enfin, qu'un voisinage de cette orbite est un produit tordu d'une variété Riemannienne par une variété Lorentzienne . Notre approche nous a permis de retrouver tous les résultats de Kowalsky avec une généralisation au cas semi-simple sous l'hypothèse qu'il n'y ait pas de $sl(2, \mathbb{R})$ -facteurs.

Produits scalaires pseudo-euclidiens

Dans ce chapitre, on introduit quelques propriétés élémentaires des produits scalaires pseudo-euclidiens, pour cela on considère un espace vectoriel V de dimension finie n .

1.1 Formes bilinéaires et quadratiques

Définition 1.1.1 Une application $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique sur V si elle est linéaire en chacune de ses variables et vérifie :

$$\varphi(x, y) = \varphi(y, x), \quad \forall x, y \in V.$$

Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur V .

On définit sur V la fonction $q_\varphi : V \longrightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$q_\varphi(x) = \varphi(x, x), \quad \forall x \in V$$

On dit que q_φ est la forme quadratique associée à φ et que φ est la forme polaire de q_φ , tel que φ et q_φ sont reliés par la relation suivante :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{4}(q_\varphi(x + y) - q_\varphi(x - y)) \quad (1.1)$$

qu'on l'appelle identité de polarisation

Remarque 1.1.1 D'après la formule (1.1) on voit que la forme polaire est unique.

Définition 1.1.2 L'indice ν ($0 \leq \nu \leq \dim V$) d'une forme bilinéaire symétrique φ dans V est le plus grand entier naturel qui est la dimension de sous espace $W \subset V$ pour lequel la restriction de φ sur W , soit définie négative.

Exemple 1.1.1 – Soit le produit scalaire canonique :

$$((x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n)) \mapsto -\sum_{i=1}^p x_i y_i + \sum_{i=p+1}^n x_i y_i$$

donc est une forme bilinéaire symétrique sur \mathbb{R}^n dont la forme quadratique associée est :

$$q_{p,q}((x_1, \dots, x_n)) = -\sum_{i=1}^p (x_i)^2 + \sum_{j=p+1}^n (x_j)^2 \quad (n = p + q)$$

– Sur \mathbb{R}^2 on a la forme bilinéaire symétrique suivante :

$$((x_1, x_2), (y_1, y_2)) \mapsto x_1 y_2 + y_1 x_2$$

Sa forme quadratique est donnée par :

$$q((x_1, x_2)) = 2x_1 x_2$$

1.1.1 Représentation matricielle

On peut représenter une forme bilinéaire sous forme d'une matrice par ce qui suit :

Définition 1.1.3 Soit $\mathcal{V} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de V et φ une forme bilinéaire symétrique. On note par $M_{\mathcal{V}}^{\varphi}$, pour la matrice $n \times n$ dont ces coefficients sont les $\varphi_{i,j} = \varphi(e_i, e_j)$ et on l'appelle la matrice de φ dans la base \mathcal{V} .

Comme φ est symétrique, de même sa matrice $M_{\mathcal{V}}^{\varphi}$ est symétrique.

Si X et Y sont les vecteurs colonnes de \mathbb{R}^n exprimant les coordonnées dans la base \mathcal{V} de vecteurs $x = \sum x_i e_i$, $y = \sum y_i e_i$ de V , par bilinéarité de φ on a :

$$\varphi(x, y) = \varphi(\sum x_i e_i, \sum y_i e_i) = {}^t X M_{\mathcal{V}}^{\varphi} Y = \sum_{i,j} \varphi_{i,j} x_i y_j$$

donc $M_{\mathcal{V}}^{\varphi}$ détermine entièrement φ . est la seule matrice vérifiant la formule précédente pour tous les couples de vecteurs de V .

Exemple 1.1.2 Soit $V = \mathbb{R}^4$ et $\mathcal{V} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ sa base canonique.

Soit la forme quadratique de \mathbb{R}^4 dans \mathbb{R} définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ de \mathbb{R}^4 par :

$$q(x) = -(x_1)^2 - 3(x_2)^2 + (x_4)^2$$

Alors, la matrice associée à q dans la base canonique est la matrice
$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.2 Produit scalaire

Définition 1.2.1 Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur V et q la forme quadratique associé à φ . On dit que φ est :

- positive si $q(x) \geq 0$ et négative si $q(x) \leq 0$ pour tout $x \in V$
- définie positive si $q(x) > 0$ et définie négative si $q(x) < 0$ pour tout $x \neq 0$
- non dégénérée si aucun vecteur $x \neq 0$ ne vérifie : $\forall y \in V, \varphi(x, y) = 0$.

Définition 1.2.2 On appelle produit scalaire (pseudo-euclidien) une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

On appelle produit scalaire euclidien un produit scalaire qui est défini positif.

Remarque 1.2.1 On note que notre étude sera basée sur les produits scalaires pseudo-euclidiens, c'est-à-dire, le mot « produit scalaire » signifie seulement « forme bilinéaire symétrique non dégénérée ».

Définition 1.2.3 Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur V

- On dit que φ est définie si elle est définie positive ou définie négative, qu'elle est semi-définie si elle est positive ou négative.
- On note que φ est non dégénérée si et seulement si elle est de rang n , c'est-à-dire, si son discriminant est non nul (la matrice M_V^φ est inversible).
- Si φ est définie, elle est nécessairement non dégénérée. Si φ est définie, positive ou négative, et si W est un sous-espace de V , la restriction de φ à $W \times W$ notée $\varphi|_W$ garde la même propriété (c'est-à-dire $\varphi|_W$ est définie, positive ou négative).
- si φ est non dégénérée, il peut exister un sous-espace W de V tel que $\varphi|_W$ soit dégénérée

1.2.1 Orthogonalité et isotropie

Définition 1.2.4 Soit φ une forme bilinéaire symétrique sur V , on dit que deux vecteurs $x, y \in V$, sont orthogonaux et on note $x \perp y$ si $\varphi(x, y) = 0$.

Un vecteur est dit isotrope s'il est orthogonal à lui même, c'est à dire, s'il vérifie $q(x) = 0$.

On appelle cône isotrope de φ , l'ensemble des vecteurs isotropes.

Et le noyau de φ , l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de V

Remarque 1.2.2 On voit que :

- La relation d'orthogonalité est symétrique c'est à dire si $x \perp y$ implique $y \perp x$.
- φ est définie si et seulement si le cône isotrope est réduit à 0.
- φ est non dégénérée si et seulement si le noyau est réduit à 0.

Définition 1.2.5 Pour W et U des sous-espaces de V . On dit que W et U sont orthogonaux et on note $W \perp U$ si tout vecteur de l'un est orthogonal à tous les vecteurs de l'autre. On appelle orthogonal de W et on note W^\perp l'ensemble des vecteurs de V qui sont orthogonaux à tous les vecteurs de W , tel que $W^\perp = \{x \in V \mid \varphi(x, y) = 0, \forall y \in W\}$.

On dit de W qu'il est totalement isotrope s'il est inclus dans le cône isotrope.

Proposition 1.2.1 Si φ est un produit scalaire et si W est un sous-espace de V , on a :

- (1) $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$.
- (2) $(W^\perp)^\perp = W$.

Preuve:

- (1) Soit (e_1, \dots, e_p) une base de W ($\dim W = p$) que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de V .

Maintenant, un vecteur $x \in W^\perp$ si et seulement s'il vérifie $\varphi_{i,j}(x, e_i) = 0$, pour tout $1 \leq i \leq p$, c'est-à-dire, il vérifie :

$$\sum_{j=1}^n \varphi_{i,j} x_j = 0 \quad \forall 1 \leq i \leq p$$

qui est un système linéaire de rang p car φ étant non dégénéré sa matrice est inversible. Donc la dimension de W^\perp est $n - p$.

- (2) Il est clair que $W \perp W^\perp$ donc $W \subseteq (W^\perp)^\perp$, mais

$$\dim(W^\perp)^\perp = n - (n - p) = p = \dim W$$

alors, $W = (W^\perp)^\perp$.

▪

Exemple 1.2.1 Soit $\mathbb{R}^{1,1}$ est l'espace \mathbb{R}^2 muni d'un produit scalaire pseudo euclidien définie par la forme quadratique : $q(x, y) = xy$

Soit W_1 et W_2 deux vecteurs de $\mathbb{R}^{1,1}$ tel que

$$W_1 = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}, W_2 = \{(0, x), x \in \mathbb{R}\}$$

On a

$$W_1^\perp = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}^\perp = \{(0, x), x \in \mathbb{R}\}$$

et

$$W_2^\perp = \{(0, x), x \in \mathbb{R}\}^\perp = \{(x, 0), x \in \mathbb{R}\}$$

cet exemple montre que en général $W + W^\perp \neq V$, mais on a $\dim W + \dim W^\perp = \dim V$ et $(W^\perp)^\perp = W$.

Lemme 1.2.1 Soit φ un produit scalaire sur V et W un sous-espace de V ,

Alors :

- 1- W est non dégénéré si et seulement si $V = W \oplus W^\perp$.
- 2- W est non dégénéré si et seulement si W^\perp est non dégénéré.

Preuve:

- 1- On a : $\dim(W + W^\perp) + \dim(W \cap W^\perp) = \dim W + \dim W^\perp$, par la proposition 1.2.1 $\dim W + \dim W^\perp = n = \dim V$, par conséquent, $W + W^\perp = V$, si et seulement si, $W \cap W^\perp = \emptyset$, alors, $V = W \oplus W^\perp$, mais $W \cap W^\perp = \{w \in W : w \perp W\}$, c'est-à-dire, il n'y a aucun vecteur non nul de W orthogonal à tous les vecteurs de W , ce qui est la définition d'un sous-espace non dégénéré.

- 2- Comme $W = (W^\perp)^\perp$, W est non dégénéré si et seulement si W^\perp est non dégénéré

▪

1.2.2 Bases orthonormales

Définition 1.2.6 Soit φ une forme bilinéaire.

On appelle le nombre $q(x) = \varphi(x, x)$, carré de x , et le nombre $\sqrt{|q(x)|}$, la norme de x .

Un vecteur de norme 1, on dit qu'il est unitaire .

Une famille de vecteurs de V est dite orthogonale si les vecteurs qui la composent sont deux à deux orthogonaux.

Une famille de vecteurs de V est dite orthonormale si φ est un produit scalaire et si les vecteurs qui la composent sont unitaires.

Ainsi on appelle base orthonormale de V une famille orthonormale à n éléments.

Remarque 1.2.3 Dans le cas pseudo-euclidien, toute famille orthonormale est toujours libre.

Proposition 1.2.2 Tout produit scalaire admet une base orthonormale.

Preuve: Soit φ un produit pseudo-euclidien. Comme φ est une forme bilinéaire non dégénérée, par définition, il existe un vecteur e_1 qu'on le suppose unitaire tel que $\varphi(e_1, e_1) \neq 0$. En suite on raisonne par récurrence sur la dimension n de V .

Si V est de dimension 1, (e_1) est une base, orthonormale pour φ . Si V est de dimension au moins 2, comme l'espace $\langle e_1 \rangle$ engendré par e_1 est non dégénéré, d'après le lemme 1.2.1

l'espace $\langle e_1 \rangle$ est non dégénérée et $V = \langle e_1 \rangle \oplus \langle e_1 \rangle^\perp$. Alors $\varphi|_{\langle e_1 \rangle^\perp}$ est un produit pseudo-euclidien de dimension $n - 1$.

Par hypothèse de récurrence il existe une base orthonormale (e_2, \dots, e_n) de $\langle e_1 \rangle^\perp$, et (e_1, \dots, e_n) est une base orthonormale de V .

Par même raisonnement, on voit que toute famille orthonormale peut être complétée en une base orthonormale car elle engendre un sous-espace non dégénéré.

Soit (e_1, \dots, e_n) une base orthonormale pour φ , la matrice de φ dans cette base a pour coefficients :

$$\varphi_{i,j} = \varphi(e_i, e_j) = \delta_j^i \varepsilon_j$$

où δ_j^i est le symbole de Kronecker tel que

$$\delta_j^i = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad \text{et } \varepsilon_j = \varphi(e_j, e_j) = \pm 1$$

Elle est donc diagonale et tous ses coefficients diagonaux vaut ± 1 .

1.2.3 Signature d'un produit pseudo-euclidien

Définition 1.2.7 *Le couple (p, q) est appelé signature de φ , tel que p le nombre de signe négatif et q le nombre de signe positif qui apparaissent dans $\varphi(e_i, e_j)$.*

Remarque 1.2.4 *La signature de φ ne dépend pas de la base orthonormale considérée.*

Proposition 1.2.3 (Théorème d'inertie de Sylvester) *Soit φ un produit pseudo-euclidien. Alors, il existe une unique paire d'entiers (p, q) , appelée signature de φ , telle qu'il existe une base \mathcal{B} de V dans laquelle la matrice de φ soit*

$$I_{p,q} = \begin{pmatrix} -I_p & 0 \\ 0 & I_q \end{pmatrix}$$

où I_k désigne la matrice unité de dimension k .

1.2.4 Signification de la signature

Définition 1.2.8 *On dit que deux produits scalaires φ_1 et φ_2 sur des espaces vectoriels V_1 et V_2 sont isométriques s'il existe un isomorphisme $b : V_1 \longrightarrow V_2$ qui envoie l'un sur l'autre, c'est-à-dire, tel que pour tout $x \in V_1$ et $y \in V_2$ on ait $\varphi_1(x, y) = \varphi_2(b(x), b(y))$.*

Définition 1.2.9 *Deux produit scalaires sont isométriques si et seulement si ils ont la même signature*

Remarque 1.2.5 *On voit que :*

- D’après la proposition 1.2.3, la signature traduit donc complètement les propriétés d’un produit scalaire : par exemple le discriminant de φ vaut $(-1)^p$.
- Des signatures opposées (p, q) et (q, p) sont semblables puisque si l’une est la signature de φ , l’autre est la signature de $-\varphi$.

Proposition 1.2.4 *Soit φ un produit scalaire de signature (p, q) . Alors, il est défini positif si et seulement si $p = 0$, il est défini négatif si et seulement si $q = 0$.*

Preuve: Si p et q sont tous les deux non nuls, il existe nécessairement un vecteur isotrope. Or il existe alors deux vecteurs unitaires orthogonaux α et β de carrés 1 et -1 respectivement. Alors, $\alpha - \beta$ est non nul et la bilinéarité de φ nous donne :

$$\begin{aligned}\varphi(\alpha + \beta, \alpha + \beta) &= \varphi(\alpha, \alpha) + 2\varphi(\alpha, \beta) + \varphi(\beta, \beta) \\ &= 1 + 0 - 1 \\ &= 0\end{aligned}$$

donc $\alpha + \beta$ est isotrope. ■

Exemple 1.2.2 *La forme quadratique q sur \mathbb{R}^3 définie pour tout $x = (x_1, x_2, x_3)$ de \mathbb{R}^3 par :*

$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2.$$

Sa signature est $(0, 3)$. Elle est donc non dégénérée positive.

1.3 Groupes orthogonaux

Soit un produit scalaire φ sur V , on note par $O(\varphi)$ le groupe des endomorphismes qui préservent φ . Remarquons que préserver φ est équivalent à préserver sa forme quadratique q . L'une des implications est évidente, l'autre découle de l'identité de polarisation.

On a vu que $\varphi(x, y) = {}^tXMY$, tel que X et Y sont les vecteurs coordonnés d'éléments x et y de E , soit \mathcal{B} une base de V et M la matrice de φ dans cette base. Soit b une application linéaire de E dont on note B la matrice dans la base \mathcal{B} . Alors, b préserve φ si pour tous les couples de vecteurs de E on a $\varphi(b(x), b(y)) = \varphi(x, y)$, autrement dit si ${}^tBMB = M$. D'après la proposition 1.2.3 il existe une base pour laquelle $M = I_{p,q}$ où (p, q) est la signature de φ . Alors, on a la définition suivante.

Définition 1.3.1 *On note $O(p, q)$ le groupe des matrices réelles carrée B de dimension n (où $n = p + q$) telles que*

$${}^tBI_{p,q}B = I_{p,q} \quad (1.2)$$

On note $SO(p, q)$ le groupe des matrices de $O(p, q)$ dont le déterminant vaut 1. On note $SO_0(p, q)$ et on appelle groupe orthochrone la composante connexe de l'identité de $O(p, q)$.

On définit de façon semblable $SO(\varphi)$ et $SO_0(\varphi)$. L'équation (1.2) montre que $O(p, q) \subseteq GL(n, \mathbb{R})$. On peut montrer que si p et q sont non nuls, $O(p, q)$ est homéomorphe à $O(p) \times O(q) \times \mathbb{R}^{pq}$. D'après la proposition 1.2.3 on peut voir que $O(p, q)$ contient un sous groupe isomorphe à $SO(p) \times SO(q)$.

Proposition 1.3.1 *Soit (e_1, \dots, e_n) une base de V orthonormale pour φ . Un endomorphisme f de E est une isométrie si et seulement s'il envoie (e_1, \dots, e_n) sur une base orthonormale pour φ en respectant le carré de ses éléments ($q(f(e_i)) = q(e_i)$ pour tout i).*

Preuve: Il suffit de considérer l'écriture matricielle : l'action d'un endomorphisme correspond exactement à un changement de base. ■

1.4 Produits Lorentziens

Maintenant, on va étudier un cas particulier des produits pseudo-euclidiens qui est très utile dans la physique théorique (la relativité), il s'agit de produit Lorentzien le plus proche du cas euclidien.

Définition 1.4.1 *On appelle produit scalaire Lorentzien un produit scalaire de signature $(1, q)$.*

Remarque 1.4.1 *On préfère parfois choisir $(p, 1)$ comme signature Lorentzienne. Un produit Lorentzien a des droites isotropes mais pas de plan totalement isotrope. Il a des droites définie négatives mais aucun plan défini négatif.*

Définition 1.4.2 *Soit φ un produit Lorentzien sur V . On dit qu'un vecteur x est :*

- de type temps si son carré est strictement négatif*
- de type lumière si son carré est nul (i.e. si x est isotrope)*
- de type espace si son carré est strictement positif.*

On dit qu'un sous-espace est de type temps, lumière ou espace, si tout ses vecteurs non nuls sont de type temps, lumière ou espace.

Ainsi, un sous-espace isotrope est appelé, dans le cas Lorentzien, un sous-espace de type lumière. De même on appelle cône de lumière le cône isotrope.



Géométrie différentielle

2.1 Variétés différentielles

La notion de variété différentiable essaie de généraliser le calcul différentiel qu'on sait définir sur \mathbb{R}^n , pour cela on introduit des objets mathématiques qui ressemblent localement à \mathbb{R}^n .

Définition 2.1.1 *Une variété topologique de dimension n est un espace de Hausdorff M tel que pour tout $p \in M$ il existe un voisinage ouvert $U \subset M$ avec $p \in U$ un voisinage ouvert $U' \subset \mathbb{R}^n$ et un homéomorphisme $\varphi : U \rightarrow U'$.*

Les couples (U, φ) sont appelés des cartes, U étant le domaine de la carte et φ l'application de coordonnées. Au lieu de (carte) on dit parfois aussi (système de coordonnée).

On sait qu'un ouvert de \mathbb{R}^n ne peut être homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^m si $n \neq m$. Par conséquent, la dimension d'une variété topologique est unique. On la note par $\dim M$. Pour indiquer que la variété M est de dimension n on la note parfois par M^n .

Définition 2.1.2 *Soit M une variété topologique de dimension n . Une famille \mathcal{A} de cartes de M est appelée un atlas si pour tout $x \in M$ il existe une carte $(U, \varphi) \in \mathcal{A}$ telle que $x \in U$. Un sous-ensemble $\mathcal{A}' \subset \mathcal{A}$ est un sous-atlas de \mathcal{A} si \mathcal{A}' est lui-même un atlas de M .*

Notons que si (\mathcal{U}, φ_1) et (\mathcal{V}, φ_2) sont deux cartes de M telles que $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$, alors l'application de changement de cartes :

$$\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1} : \varphi_1(\mathcal{U} \cap \mathcal{V}) \rightarrow \varphi_2(\mathcal{U} \cap \mathcal{V})$$

est un homéomorphisme.

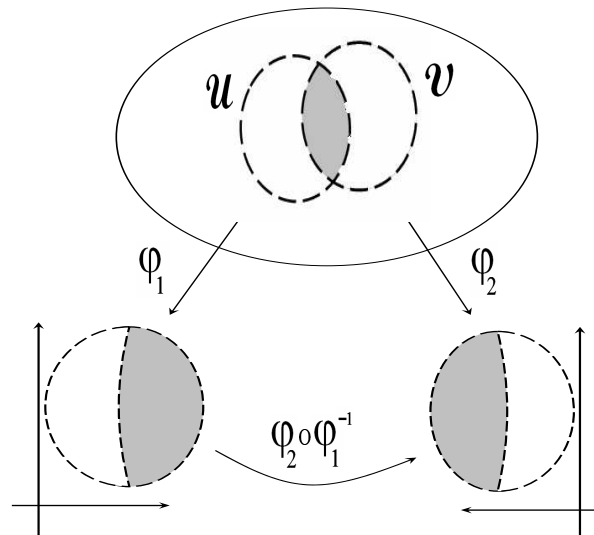


FIG. 2.1 – Changement de carte

Dans la suite, on s'intéresse au cas où ces applications sont de classe C^∞ .

Définition 2.1.3 Soit M une variété topologique .

Deux cartes (\mathcal{U}, φ_1) et (\mathcal{V}, φ_2) de classe C^∞ sur M sont compatibles si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} \neq \emptyset$ et l'application de changement de cartes $\varphi_2 \circ \varphi_1^{-1}$ est un difféomorphisme,
- $\mathcal{U} \cap \mathcal{V} = \emptyset$

Un atlas \mathcal{A} de M est différentiable si toutes les cartes de \mathcal{A} sont compatibles entre elles. Une variété différentiable est un couple (M, \mathcal{A}) où M est une variété topologique et \mathcal{A} est un atlas différentiable de M .

Soit \mathcal{A} un atlas différentiable, on dit qu'une carte de M est compatible avec \mathcal{A} si elle est compatible avec chaque carte de \mathcal{A} .

Un atlas \mathcal{A} est maximal si toute carte compatible avec \mathcal{A} appartient déjà à \mathcal{A} . Un atlas maximal est appelé une structure différentiable.

Exemple 2.1.1 1. l'espace euclidien \mathbb{R}^n est une variété de dimension n recouvert par la carte (U, ϕ) tel que $U = \mathbb{R}^n$, $\phi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ est l'application identité.

2. la sphère $S^n = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}; x_0^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$ dans \mathbb{R}^{n+1} est une variété de \mathbb{R}^{n+1} de dimension $n + 1$, il peut être recouvert par deux cartes :

$$U_+ = \{x \in S^n : x_n > -1\} \text{ avec } \phi_+ : U_+ \rightarrow \mathbb{R}^{n+1} \text{ tel que } \phi_+(x) = \left(\frac{x_0}{1+x_n}, \dots, \frac{x_n}{1+x_n} \right)$$

$$\text{et la carte } U_- = \{x \in S^n : x_n < 1\} \text{ avec } \phi_-(x) = \left(\frac{x_0}{1-x_n}, \dots, \frac{x_n}{1-x_n} \right).$$

Les applications ϕ_+ et ϕ_- sont appelées les projections stéréographiques.

3. l'espace projectif $\mathbb{R}P^n$, est l'ensemble des lignes qui passe par l'origine dans \mathbb{R}^{n+1} . On peut le voir comme l'espace quotient $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ définie par la relation d'équivalence suivante :

$$(x_0, \dots, x_n) \sim (\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) \text{ avec } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

un point de $\mathbb{R}P^n$ est noté par $[x_0, \dots, x_n]$

l'ensemble (U_i, ϕ_i) ou U_i est le sous-ensemble $U_i = \{[x_0, \dots, x_n]; x_i \neq 0\}$, ($i = 0, \dots, n$) de $\mathbb{R}P^n$, et l'application $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n, i = 0, \dots, n$ donnée par :

$$\phi([x_0, \dots, x_n]) = \left[\frac{x_0}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right]$$

est un atlas de $\mathbb{R}P^n$.

Définition 2.1.4 Soit $W \subset M$ un ouvert. Une fonction $f : W \rightarrow M'$ est différentiable en un point p avec $p \in W$, s'il existe une carte (U, φ) de M avec $p \in U \subset W$ et une carte (V, ψ) de M' avec $f(U) \subset V$ tel que :

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \rightarrow \psi(V)$$

est différentiable.

L'application f est différentiable dans W , si f est différentiable en p , pour tout $p \in W$.

Remarque 2.1.1 On remarque que :

- Si $f : M \rightarrow M'$ et $g : M' \rightarrow M''$ sont différentiables, alors $g \circ f : M \rightarrow M''$ est différentiable.
- Deux variétés différentiables sont difféomorphes, s'il existe un difféomorphisme entre elles.

2.2 Espace tangent

On considère l'espace vectoriel des fonctions de classe C^∞ sur M , $\mathfrak{F}(M) = \{f : M \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ de classe } C^\infty\}$. Cet espace vectoriel a une structure d'algèbre pour le produit usuel des fonctions : $(fg)(p) = f(p)g(p)$ pour $p \in M$.

On définit sur $\mathfrak{F}(M)$ la relation d'équivalence suivante :

$$f \sim g \iff \exists U \subset M, U \text{ ouvert avec } p \in U \text{ tel que } f|_U = g|_U$$

On note $C_p^\infty(M)$ l'ensemble des classes d'équivalence dans $\mathfrak{F}(M)$ pour cette relation.

Le produit sur $\mathfrak{F}(M)$ passe au quotient. Donc, $C_p^\infty(M)$ est une algèbre .

Une dérivation sur $C_p^\infty(M)$ est une application linéaire $\xi : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ qui vérifie

la relation de Leibniz en p : $\xi(\tilde{f}\tilde{g}) = \xi(\tilde{f})g(p) + f(p)\xi(\tilde{g})$, ou \tilde{f} et \tilde{g} sont les classes d'équivalences de f et g . Par définition, l'espace tangent en p à M , qu'on note $T_p(M)$, est l'espace vectoriel des dérivations sur $C_p^\infty(M)$.

Lemme 2.2.1 Soit $v \in T_p(M)$ donc :

- Si $f, g \in \mathfrak{F}(M)$ sont égaux sur un voisinage de p , alors $v(f) = v(g)$.
- Si $h \in \mathfrak{F}(M)$ est constante sur un voisinage de p , alors $v(h) = 0$.

Preuve:

(1) Par linéarité, il suffit de montrer que si $f = 0$ sur un voisinage \mathcal{U} de p , alors $v(f) = 0$. Soit g une fonction saut ¹ au point p avec un support dans \mathcal{U} alors pour tout f et g dans $\mathfrak{F}(M)$, on a $fg = 0$ dans M , mais $v(0) = v(0 + 0) = v(0) + v(0)$ implique $v(0) = 0$. Alors

$$0 = v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g) = v(f)$$

depuis $f(p) = 0$ et $g(p) = 1$

(2) De (1) on peut assumer que h prend une valeur constante c sur M . si 1 est une fonction constante de valeur 1 alors

$$v(1) = v(1 \cdot 1) = v(1)1 + 1v(1) = 2v(1).$$

Alors $v(1) = 0$ et $v(h) = v(c \cdot 1) = cv(1) = 0$.

▪

Exemple 2.2.1 Soit $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées dans M au point p .

Si $f \in \mathfrak{F}(M)$, alors

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = \frac{\partial(f \circ \xi^{-1})}{\partial u^i}(\xi p) \quad (1 \leq i \leq n),$$

avec $\partial u^1, \dots, \partial u^n$ sont des fonctions coordonnées dans \mathbb{R}^n .

La fonction suivante définit par :

$$\partial_i|_p = \frac{\partial}{\partial x_i}|_p : \mathfrak{F}(M) \mapsto \mathbb{R},$$

est un vecteur tangent de M au point p .

¹Une fonction saut au point p sur un voisinage \mathcal{U} de M est une fonction $f \in \mathfrak{F}(M)$ tel que :

- $0 \leq f \leq 1$ dans M
- $f = 1$ sur un voisinage de p
- $\text{supp} f \subset \mathcal{U}$

Théorème 2.2.1 Si $\xi = (x^1, \dots, x^n)$ un système de coordonnées dans M au point p alors leurs vecteurs de coordonnées $\partial_1|_p, \dots, \partial_n|_p$ forment une base pour l'espace tangent $T_p(M)$ et

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i) \partial_i|_p \text{ pour tout } v \in T_p(M).$$

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .

2.3 Champs de vecteurs

Un champ de vecteurs de classe C^∞ sur une variété M est une application qui associe à chaque $p \in M$ un vecteur V_p de l'espace tangent de M en p , qui dépend d'une manière C^∞ de p .

Pour un champ de vecteurs V dans M , et $f \in C^\infty(M)$ on a les propriétés suivantes :

$$(fV)_p = f(p)V_p,$$

$$(V + W)_p = V_p + W_p.$$

où $(Vf)_p = V_p(f)$ pour tout $p \in M$.

Si V et W sont C^∞ , alors les champs de vecteurs $V + W$ et fV sont C^∞ , ces deux opérations rend l'ensemble de tous les champs de vecteurs qui sont lisses sur M , qu'on note $\mathfrak{X}(M)$, un module au dessus de $\mathfrak{F}(M)$.

Sur un système de coordonnées (x^1, \dots, x^n) dans $\mathcal{U} \subset M$, on peut écrire le champ de vecteur sous la forme :

$$V = \sum V x^i \partial_i \quad \text{dans } \mathcal{U}.$$

Si $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ soit $[V, W] = VW - WV$ une fonction définie par :

$$VW - WV : C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M)$$

$$f \longmapsto V(Wf) - W(Vf)$$

Un simple calcul montre que $[V, W]$ est une dérivation sur $C^\infty(M)$, qu'on appelle le crochet de V et W .

Lemme 2.3.1 Un crochet sur $\mathfrak{X}(M)$ possède les propriétés suivantes :

- (1) \mathbb{R} -bilinéaire : $[aV + bW, X] = a[V, X] + b[W, X]$, $[X, aV + bW] = a[X, V] + b[X, W]$
- (2) anti-symétrique : $[V, W] = -[W, V]$.

(3) *identité de Jacobi* : $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .

Exemple 2.3.1 Soient x, y les coordonnées usuelles de \mathbb{R}^2 , on considère les champs de vecteurs $V = y\partial_y$ et $W = x\partial_y$ alors, $[V, W] = -W$ car :

pour tout $f \in C^\infty(M)$

$$\begin{aligned} [V, W]f &= [y\partial_y, x\partial_y]f = y\partial_y(x\partial_y f) - x\partial_y(y\partial_y f) \\ &= yx\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - x\frac{\partial f}{\partial y} - xy\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x\partial_y f = -Wf \end{aligned}$$

2.4 Produit des variétés

On traite dans cette section comment le calcul sur la variété produit $M \times N$ découle de la séparation de M et N .

Soient M et N deux variétés différentiables de dimension n et m respectivement alors, le produit $M \times N$ est une variété différentiable de dimension $n + m$ et on a :

(a) les projections

$$\begin{aligned} \pi : M \times N &\longrightarrow M \text{ envoie } (p, q) \text{ vers } p, \\ \sigma : M \times N &\longrightarrow N \text{ envoie } (p, q) \text{ vers } q \end{aligned}$$

sont des applications lisses (qui sont des submersions).

(b) Une application $\phi : P \longrightarrow M \times N$ est lisse si et seulement si, $\pi \circ \phi$ et $\sigma \circ \phi$ sont lisses .

(c) Pour chaque $(p, q) \in M \times N$ les sous ensembles

$$\begin{aligned} M \times q &= \{(r, q) \in M \times N : r \in M\}, \\ p \times N &= \{(p, r) \in M \times N : r \in N\} \end{aligned}$$

sont des sous variétés de $M \times N$.

(d) Pour chaque (p, q)

$$\begin{aligned} \pi | M \times q &\text{ est un difféomorphisme de } M \times q \text{ à } M, \\ \sigma | p \times N &\text{ est un difféomorphisme de } p \times N \text{ à } N. \end{aligned}$$

De (b) on a les espaces tangents

$$T_{(p,q)}M \equiv T_{(p,q)}(M \times q) \text{ et } T_{(p,q)}N \equiv T_{(p,q)}(p \times N)$$

sont des sous espaces de l'espace tangent de $M \times N$ au point (p, q)

Lemme 2.4.1 *L'espace tangent $T_{(p,q)}(M \times N)$ de la variété produit $M \times N$ est la somme directe des sous espaces $T_{(p,q)}M$ et $T_{(p,q)}N$, tel que pour tout élément de $T_{(p,q)}(M \times N)$ possède la formule unique $v + w$ tel que $v \in T_{(p,q)}M$ et $w \in T_{(p,q)}N$.*

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .



Géométrie pseudo-Riemannienne

La notion du champ de tenseur sur une variété généralise les notions des fonctions lisses, les champs de vecteur, et fournit ainsi des moyens mathématiques pour décrire des objets plus compliqués sur les variétés.

3.1 Rappels sur les Tenseurs

Soient E et F deux espaces vectoriels réels de dimensions p et q respectivement. On note par E^* et F^* leurs espaces vectoriels duals. Pour $f \in E^*$, $g \in F^*$, $x \in E$ et $y \in F$, on pose $(f \otimes g)(x, y) = f(x)g(y)$. On définit ainsi $f \otimes g$ comme une forme bilinéaire sur $E \times F$. C'est le produit tensoriel de deux formes f et g .

Si $\{e_1, \dots, e_p\}$ est une base de E alors sa base dual est notée par $\{e^1, \dots, e^p\}$.

Si $\{e^1, \dots, e^p\}$ est une base de E^* et $\{f^1, \dots, f^q\}$ une base de F^* , alors l'espace vectoriel des formes bilinéaires sur $E \times F$ admet pour base les pq éléments $e^i \otimes f^j$. Par définition, l'ensemble des formes bilinéaires sur $E \times F$ est noté $E^* \otimes F^*$ et appelé produit tensoriel de E^* et F^* . Tout élément $T \in E^* \otimes F^*$ s'écrit donc $T = T_{ij}e^i f^j$.

On sait que tout vecteur de E peut être considéré comme une forme linéaire sur E^* , c'est à dire comme élément de E^{**} (en dimension finie, nous avons $E^{**} = E$).

Définition 3.1.1 Soit E un espace vectoriel et E^* son dual. Un tenseur r fois covariant et s fois contravariant sur E (ou de type (r, s)) est une forme $(r + s)$ -linéaire sur $\underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{E^* \otimes \dots \otimes E^*}_{s \text{ fois}}$ on note cet ensemble $T_s^r(E)$. Un tel élément de cet ensemble s'écrit :

$$T = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}$$

Tel que les coefficients $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}$ sont les coordonnées du tenseur $T \in T_s^r(E)$.

Si $\{e_1, \dots, e_n\}$ est une base de E , donc

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s}; 1 \leq i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s \leq n\}$$

est la base associée de $T_s^r(E)$.

On note $T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} = T(e_{i_1}, \dots, e_{i_r}, e^{j_1}, \dots, e^{j_s})$ dans la base $\{e_1, \dots, e_n\}$.

dans une autre base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de E , on a

$$T(v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v^{j_1}, \dots, v^{j_s}) = (A_{i_1}^{h_1} \dots A_{i_r}^{h_r})(\bar{A}_{k_1}^{j_1} \dots \bar{A}_{k_s}^{j_s}) T_{k_1 \dots k_s}^{h_1 \dots h_r}$$

tel que $v_i = A_i^j e_j, A_i^k \bar{A}_k^j = \delta_i^j$ (δ_k^j : symbole de kronecker)

Exemple 3.1.1 1. $T_0^0(E) = \mathbb{R}$: Un élément de \mathbb{R} est par convention un tenseur de type $(0, 0)$. Ces tenseurs sont appelés des scalaires, qui n'ont pas d'indice

2. $T_0^1(E) = E$: Un tenseur de type $(1, 0)$ est un vecteur de E

3. $T_1^0(E) = E^*$: Un tenseur de type $(0, 1)$ est une forme de E^* .

3.2 Opérations sur les tenseurs

Les opérations du produit tensoriel et de contraction permettent de construire de nouveaux tenseurs à partir des tenseurs donnés.

3.2.1 Produit tensoriel

Soit $T \in T_s^r(E)$ et $S \in T_u^v(E)$ le produit de T et S est le tenseur $T \otimes S \in T \in T_{s+u}^{r+v}(E)$ définie par :

$$T \otimes S = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r} S_{\beta_1 \dots \beta_v}^{\alpha_1 \dots \alpha_u} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r} \otimes e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_u} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_s} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_v}$$

3.2.2 Contraction d'indice

La contraction d'un tenseur consiste à sommer l'un de ses indices hauts avec l'un de ses indices bas. Par exemple, la contraction de $\lambda \otimes X$ ou $\lambda \in E^*$ et $X \in E$, est $\langle \lambda, X \rangle$, c'est à dire que nous sommes un indice haut (X^i) et un indice bas (λ) : $\lambda_i X^i \longrightarrow \lambda_i X^i$. Dans ce cas particulier, on obtient un scalaire. Dans le cas général, la contraction d'un seul indice fait passer d'un tenseur de type (r, s) à un tenseur de type $(r - 1, s - 1)$.

3.3 Tenseurs symétriques et anti-symétriques

On note S_n : le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$

Un tenseur $T \in T^r(E)$ tel que $T = T^{i_1 \dots i_r} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_r}$ est dite symétrique si pour toute permutation $\sigma \in S_r$, on a

$$T^{i_1 \dots i_r} = T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}$$

et anti-symétrique (alterné) si

$$T^{i_1 \dots i_r} = (-1)^{\text{sign}(\sigma)} T^{i_{\sigma(1)} \dots i_{\sigma(r)}}$$

Même définition pour les tenseurs contravariants.

On peut utiliser le produit tensoriel pour définir un espace des r -formes multilinéaires sur E .

On considère l'espace vectoriel

$$\otimes^r E = \underbrace{E \otimes \dots \otimes E}_{r \text{ fois}}$$

On pose $\wedge^r E$ les sous espace vectoriel de $\otimes^r E$ des tenseurs covariants antisymétriques

Alors on peut définir le produit extérieur :

$$\begin{aligned} \wedge : \wedge^r E \times \wedge^r E &\longrightarrow \wedge^r E \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega \wedge \eta \end{aligned}$$

par

$$(\omega \wedge \eta)(x_1, \dots, x_{r+s}) = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in S_{r+s}} (-1)^{\text{sign}(\sigma)} \omega(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(r)}) \cdot \eta(x_{\sigma(r+1)}, \dots, x_{\sigma(r+s)})$$

Ce produit a la propriété de commutativité :

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega$$

Définissons l'espace vectoriel $\wedge E = \wedge^0 E \oplus \dots \oplus \wedge^p E$

Le produit extérieur donne à $\wedge E$ une structure d'algèbre, c'est l'algèbre extérieure sur E .

Remarque 3.3.1 *Mêmes conclusions si on remplace E par E^**

3.4 Tenseurs sur une variété

Définition 3.4.1 Soit M une variété et $p \in M$, soit l'espace vectoriel :

$$T_p^{(r,s)}M = \underbrace{T_pM \otimes \dots \otimes T_pM}_{r \text{ fois}} \otimes \underbrace{T_p^*M \otimes \dots \otimes T_p^*M}_{s \text{ fois}}$$

Un tel élément T de $T_p^{(r,s)}$ est un tenseur de type (r, s) au dessus de p .

Au voisinage de p , dans une base associée à des coordonnées (x_i) , il s'écrit :

$$T|_p = T_{j_1 \dots j_s}^{i_1 \dots i_r}(p) \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}(p) \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}}(p) \otimes dx_{|p}^{j_1} \otimes \dots \otimes dx_{|p}^{j_s}$$

3.4.1 Dérivée de Lie d'un tenseur

Soit X un champ de vecteurs sur M et soit $T \in T_s^r(M)$. On définit la dérivée de Lie du champ T le long des courbes intégrales de X qu'on note par $\mathcal{L}_X T$, pour toute fonction différentiable f sur M par :

$$(\mathcal{L}_X f)(x) = df(x).X(x), \text{ pour tout } x \text{ dans } M.$$

Et pour tout champ de vecteurs Y , on a $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$.

Pour toute 1-forme α sur M , on définit

$$\langle \mathcal{L}_X \alpha, Y \rangle = X. \langle \alpha, Y \rangle - \alpha([X, Y]).$$

Ensuite, pour tout $T \in \mathfrak{S}_s^r(M)$, on définit

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X T)(X_1, \dots, X_r, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^s) &= X.T(X_1, \dots, X_r, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^s) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{i=r} T(X_1, \dots, \mathcal{L}_X X_i, \dots, X_r, \alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^s) \\ &\quad - \sum_{j=1}^{j=s} T(X_1, \dots, X_r, \alpha^1, \dots, \mathcal{L}_X \alpha^j, \dots, \alpha^s). \end{aligned}$$

3.5 Métriques pseudo-Riemanniennes

Un tenseur métrique (ou une métrique pseudo-Riemannienne) g sur une variété M est un champ tensoriel symétrique non dégénéré de type $(0, 2)$ sur M d'un indice constant. (c'est-à-dire la donnée, pour chaque $p \in M$, d'une forme bilinéaire symétrique g_p sur l'espace tangent $T_p M$ qui dépend d'une manière lisse du point p).

Une métrique Riemannienne est une métrique pseudo-Riemannienne d'un indice 0.

Une métrique Lorentzienne est une métrique pseudo-Riemannienne d'un indice 1.

Une variété pseudo-Riemannienne ¹ est un couple (M, g) , où M est une variété différentiable et g un tenseur métrique.

On utilise le crochet \langle , \rangle comme une notation pour la métrique g , on a $g(u, v) = \langle u, v \rangle$ pour u, v des vecteurs tangents.

Soit (U, φ) une carte de la variété $M = (M, g)$, on appelle composantes du tenseur métrique g dans U , les $n \times n$ fonctions g_{ij} définies par :

$$g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle \quad (1 \leq i, j \leq n) .$$

pour V et W deux champs de vecteur tel que :

$$\begin{aligned} V &= \sum V^i \partial_j, \\ W &= \sum W^i \partial_j \end{aligned}$$

donc on a :

$$g(V, W) = \sum g_{ij} V^i W^j$$

puisque g est non-dégénérée a tout point p de U , la matrice $(g_{ij}(p))$ est inversible, et la matrice inverse est notée par $(g^{ij}(p))$. La formule usuelle de l'inverse des matrices montre que les fonctions g^{ij} sont lisses dans U .

puisque g est symétrique $g_{ij} = g_{ji}$, par conséquent $g^{ij} = g^{ji}$ pour $1 \leq i, j \leq n$ finalement le tenseur métrique peut s'écrire :

$$g = \sum g_{ij} dx^i \otimes dx^j .$$

Exemple 3.5.1 La famille simple des variétés pseudo-Riemanniennes, est l'espace \mathbb{R}_ν^n qui est l'espace euclidien \mathbb{R}^n muni du tenseur métrique d'indice ν ($0 \leq \nu \leq n$) :

$$\langle v_p, w_p \rangle = -\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^n v^j w^j .$$

L'espace \mathbb{R}_ν^n devient \mathbb{R}^n pour $\nu = 0$, et pour $n \geq 2$, $\nu = 1$, \mathbb{R}_1^n est l'espace de Minkowski, et pour $n = 4$, \mathbb{R}_1^4 est l'espace temps relativiste

On fixe la notation suivante :

$$\varepsilon_i = \begin{cases} -1 & \text{pour } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{pour } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

Alors le tenseur métrique de \mathbb{R}_ν^n peut s'écrire sous la forme

¹ou une variété semi-Riemannienne

$$g = \sum \varepsilon_i du^i \otimes du^i.$$

La définition suivante donne une signification géométrique de l'indice .

Définition 3.5.1 *Un vecteur tangent v sur une variété M est :*

- de type espace (spacial) si $\langle v, v \rangle > 0$ où $v \neq 0$,
- de type lumière si $\langle v, v \rangle = 0$ et $v \neq 0$,
- de type temps (temporel) si $\langle v, v \rangle < 0$
- de type causal si $\langle v, v \rangle \leq 0$.

L'ensemble des vecteurs nuls de $T_p M$ est le cône nul en p . Dans le cas Lorentzien, un vecteur de type nul est appelé vecteur de type lumière, et le cône nul, cône de type lumière, cette terminologie devient de la théorie de relativité.

Définition 3.5.2 *Soit E un espace vectoriel et (F, h) un espace muni d'un produit scalaire pseudo-euclidien. Soit $f : E \rightarrow F$ une bijection linéaire, alors le produit scalaire pseudo-euclidien f^*h sur E définie par $f^*h(X, Y) = h(f(X), f(Y))$ s'appelle la fonction tiré en arrière ou "pullback" de h par f .*

3.5.1 Métrique produit

Le lemme suivant donne la forme de la métrique d'un produit de deux variétés.

Lemme 3.5.1 *Soient M et N deux variétés pseudo-Riemanniennes possèdent les tenseurs métriques g_M, g_N respectivement. soit π et σ sont des projections de $M \times N$ dans M et N , respectivement, et soit :*

$$g = \pi^*(g_M) + \sigma^*(g_N).$$

Alors, le produit $M \times N$ est une variété pseudo-Riemannienne, possède g comme un tenseur métrique.

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .

Exemple 3.5.2 *Pour l'espace pseudo-euclidien \mathbb{R}_ν^n on a :*

$$\underbrace{\mathbb{R}_1^1 \times \dots \times \mathbb{R}_1^1}_{\nu \text{ fois}} \times \underbrace{\mathbb{R}^1 \times \dots \times \mathbb{R}^1}_{n-\nu \text{ fois}} = \mathbb{R}_\nu^\nu \times \mathbb{R}^{n-\nu}$$

tel que \mathbb{R}_1^1 , est \mathbb{R} muni d'un tenseur métrique négatif.

3.6 Isométries

Une isométrie est le type spécial des applications, qui exprime la notion d'isomorphisme entre les variétés pseudo-Riemanniennes.

Définition 3.6.1 Soient M et N deux variétés pseudo-Riemanniennes de métrique g_M et g_N respectivement. Une isométrie de M dans N est un difféomorphisme $\phi : M \rightarrow N$ tel que, $D_x\phi$ est une isométrie linéaire de T_xM dans $T_{\phi(x)}N$, pour chaque $x \in M$ dans ce cas on dit que M et N sont isométriques, et alors possèdent alors les mêmes propriétés géométriques.

On vérifie aisément que si $\phi : M \rightarrow N$ et $\psi : M' \rightarrow N'$ sont des isométries, alors $\phi \circ \psi$ est une isométrie. De même, si $\phi : M \rightarrow N$ est une isométrie, alors $\phi^{-1} : N \rightarrow M$ est une isométrie.

Ceci implique en particulier que l'ensemble :

$$\text{Isom}(M) = \{\phi : M \rightarrow M \mid \phi \text{ est une isometrie}\}$$

est un groupe. On l'appelle le groupe des isométries de M , et on le note par $\text{Isom}(M)$.

3.7 Champs de Killing

Définition 3.7.1 Un champ de vecteurs X sur une variété pseudo-Riemannienne M est un champ de Killing si :

$$\mathcal{L}_X g = 0$$

tel que $\mathcal{L}_X g$ est la dérivé de Lie du tenseur métrique g .

Proposition 3.7.1 si $X \in \mathfrak{X}(M)$ et $T \in T_s^0(M)$ alors

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi_t^*(T) - T],$$

avec $\{\phi_t\}$ est le flot de X .

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .

Proposition 3.7.2 Un champ de vecteurs est de Killing si les flots de X sont des isométries.

Preuve: Si ϕ_t est une isométrie, alors $\phi_t^*(g) = g$. Par la proposition précédente on a :

$$\mathcal{L}_X g = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [\phi_t^*(g) - g] = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g - g] = 0.$$

Inversement, si $\mathcal{L}_X g = 0$. Soit $\{\phi_t\}$ le flot local de X , si v est un vecteur tangent à un point dans le domaine du flot alors, $w = d\phi_s(v)$, pour s petit.

Par la proposition 3.7.1 :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(d\phi_t w, d\phi_t w) - g(w, w)] = 0$$

et comme $\phi_s \phi_t = \phi_{s+t}$, alors :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(d\phi_{s+t}(v), d\phi_{s+t}(v)) - g(d\phi_s(v), d\phi_s(v))] = 0$$

donc $g(d\phi_s(v), d\phi_s(v)) = g(v, v)$, pour tout v et s . ■

Proposition 3.7.3 *Soit X un champ de vecteurs sur une variété pseudo-Riemannienne M alors, les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (1) X est un champ de Killing tel que $\mathcal{L}_X g = 0$
- (2) $X \langle V, W \rangle = \langle [X, V], W \rangle + \langle V, [X, W] \rangle$ pour tout $V, W \in \mathfrak{X}(M)$
- (3) $\langle D_V X, W \rangle + \langle D_W X, V \rangle = 0$ pour tout $V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

Preuve: Pour $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ on a :

$$\langle D_V X, W \rangle + \langle D_W X, V \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$-\langle [X, V], W \rangle + \langle D_X V, W \rangle - \langle [X, W], V \rangle + \langle D_X W, V \rangle = 0$$

$$\Downarrow$$

$$X \langle V, W \rangle = \langle [X, V], W \rangle + \langle V, [X, W] \rangle$$

Mais, la dernière formule est équivalente à $(\mathcal{L}_X g)(V, W) = 0$ pour tout $V, W \in \mathfrak{X}(M)$, c'est-à-dire $\mathcal{L}_X g = 0$. ■

3.8 Connexion de Levi-Civita

Sur une variété M , on introduit maintenant un nouvel objet, qui nous permet de définir une nouvelle dérivation, c'est la dérivation covariante.

Définition 3.8.1 *Une connexion linéaire est une application :*

$D : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ telle que, pour tous $V, W \in \mathfrak{X}(M)$ et $f \in \mathfrak{F}(M)$:

$C_1 : D_V W$ est $\mathfrak{F}(M)$ -linéaire dans V ,

$C_2 : D_V W$ est \mathbb{R} -linéaire dans W ,

$C_3 : D_V(fW) = (Vf)W + fD_V W$ pour $f \in \mathfrak{F}(M)$.

$D_V W$ est appelé la dérivée covariante de W en direction de V de la connexion D .

Définition 3.8.2 On définit l'opérateur $T : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ par :

$$T(V, W) = D_V W - D_W V - [V, W].$$

T est appelé le tenseur de torsion de la connexion D .

Théorème 3.8.2 Sur une variété pseudo-Riemannienne M , il existe une unique connexion D tel que :

$$C_4 : [V, W] = D_V W - D_W V,$$

$$C_5 : X\langle V, W \rangle = \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle,$$

pour tout $X, V, W \in \mathfrak{X}(M)$.

D est appelé la connexion de Levi-Civita de M , et il est caractérisé par la formule dite de Koszul suivante :

$$2\langle D_V W, X \rangle = V\langle W, X \rangle + W\langle X, V \rangle - X\langle V, W \rangle - \langle V, [W, X] \rangle + \langle W, [X, V] \rangle + \langle X, [V, W] \rangle$$

Preuve: Pour une preuve détaillée voir [17] .

Exemple 3.8.1 Soit u^1, \dots, u^n les coordonnées usuelles sur \mathbb{R}_v^n . Si $V = \sum V^i \partial_i$ et $W = \sum W^i \partial_i$ sont des champs de vecteurs sur \mathbb{R}_v^n , le champ de vecteur

$$D_V W = \sum V(W^i) \partial_i$$

est appelé la dérivée covariante de W le long de V .

Remarque 3.8.1 Comme dans la géométrie Riemannienne, on peut définir (par la même formule) tous les objets définis par la connexion D (transport parallèle, géodésique, courbure...). Mais dans la géométrie pseudo-Riemannienne on impose la nondégénérescence de la métrique pour définir quelques objets (par exemple la courbure sectionnelle, ...).

Définition 3.8.3 Soit x^1, \dots, x^n un système de coordonnées dans un voisinage \mathcal{U} d'une variété pseudo-Riemannienne M , les symboles de Christoffel Γ_{ij}^k sont les coordonnées de $D_{\partial_i}(\partial_j)$ dans la base $\{\partial_k\}_k$, explicitement on a :

$$D_{\partial_i}(\partial_j) = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k \quad (1 \leq i, j \leq n).$$

Comme $[\partial_j, \partial_j] = 0$, et d'après C_4 de théorème 3.8.2 on a $D_{\partial_i}(\partial_j) = D_{\partial_j}(\partial_i)$, alors $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$.

Remarque 3.8.2 les symboles de Christoffel ne sont pas des tenseurs, de même pour la connexion D .

Proposition 3.8.1 Pour un système de coordonnées x^1, \dots, x^n dans \mathcal{U} , on a :

$$D_{\partial_i}(\sum W^j \partial_j) = \sum_k \left\{ \frac{\partial W^k}{\partial x^i} + \sum_j \Gamma_{ij}^k W^j \right\} \partial_k$$

avec

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}$$

Preuve: La première formule est une conséquence du point 3 de la définition 3.8.1

Pour la deuxième, on pose $V = \partial_i$, $W = \partial_j$, $X = \partial_m$ dans la formule de Koszul et comme $[\partial_j, \partial_m] = 0$, $[\partial_m, \partial_i] = 0$, $[\partial_i, \partial_j] = 0$

alors

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m \rangle = \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij})$$

mais avec la définition des symboles de Christoffel on a :

$$2\langle D_{\partial_i}(\partial_j), \partial_m \rangle = 2\sum_a \Gamma_{ij}^a g_{am}$$

alors

$$2\sum_a \Gamma_{ij}^a g_{am} = \frac{\partial}{\partial x^i}(g_{jm}) + \frac{\partial}{\partial x^j}(g_{im}) - \frac{\partial}{\partial x^m}(g_{ij})$$

•

Lemme 3.8.1 La connexion D du définition 3.8.1 est une connexion de Levi-Civita de l'espace pseudo-euclidien \mathbb{R}_ν^n pour tout $\nu = 0, 1, \dots, n$ tel que :

(1) $g_{ij} = \delta_{ij} \varepsilon_j$, tel que

$$\varepsilon_j = \begin{cases} -1 & \text{pour } 1 \leq i \leq \nu, \\ +1 & \text{pour } \nu + 1 \leq i \leq n. \end{cases}$$

(2) $\Gamma_{ij}^k = 0$, pour tout $1 \leq i, j, k \leq n$.

Preuve:

- (1) on l'obtient de la définition du tenseur métrique de \mathbb{R}_ν^n . Pour prouvé que D est une connexion de Levi-Civita de \mathbb{R}_ν^n on montre que D satisfait aux conditions C_1, C_2, C_3 de la définition 3.8.1 et C_4, C_5 du théorème 3.8.2 par exemple pour C_5 : comme $\langle V, W \rangle = \sum \varepsilon_i V^i W^i$, alors :

$$\begin{aligned} X\langle V, W \rangle &= \sum \varepsilon_i X(V^i)W^i + \sum \varepsilon_i V^i X(W^i) \\ &= \langle D_X V, W \rangle + \langle V, D_X W \rangle. \end{aligned}$$

- (2) d'après la proposition 3.7.2 on a $\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_m g^{km} \left\{ \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{jm}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^m} \right\}$ et comme g_{ij} sont des constantes on trouve que $\Gamma_{ij}^k = 0$.

▪

3.9 Transport parallèle

Déplacer un vecteur en le gardant égal à lui même tout au long du chemin s'appelle un transport parallèle. Comme nous allons le voir, le transport parallèle est défini quand on a une connexion.

Définition 3.9.1 Soit M une variété pseudo-Riemannienne, et $\gamma : I \longrightarrow M$ une courbe différentiable. Un champ de vecteurs $Y \in \mathfrak{X}(\gamma)$ s'appelle un champ parallèle (ou champ de vecteurs parallèles) si $\frac{D}{dt}Y(t) = 0$ pour tout $t \in I$

Proposition 3.9.1 Soit une courbe $\alpha : I \longrightarrow M$ et $a \in I$ pour tout $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ alors, il existe un unique champ de vecteur parallèle X le long de α tel que $Z(a) = z$

Preuve: Il suffit de prouver le résultat pour tout un sous intervalle $[a, A] \subset I$ alors, il existe une subdivision finie de $[a, A]$, soit $a_0 < a_1 < \dots < a_n = A$ tel que $\alpha([a_i, a_{i+1}])$ est inclus dans un domaine de carte (U_i, ϕ_i) , la condition d'être parallèle est exprimée en chaque carte par un système différentiel du premier ordre, en appliquant successivement sur les intervalles $[a_i, a_{i+1}]$ le résultat classique d'existence et d'unicité des solutions pour tels systèmes différentiels. ▪

Définition 3.9.2 Le transport parallèle de $\alpha(a) = p$ à $\alpha(b) = q$ le long du courbe α est la fonction

$$P = P_a^b(\alpha) : T_p(M) \longrightarrow T_q(M)$$

qui associé un vecteur $z \in T_{\alpha(a)}(M)$ à $Z(b)$.

Lemme 3.9.1 *Le transport parallèle est une isométrie linéaire.*

Preuve: Avec les notations précédentes, soient $v, w \in T_p(M)$ correspondant aux champs de vecteurs parallèles V, W comme $V + W$ est parallèle on a :

$$P(v + w) = (V + W)(b) = V(b) + W(b) = P(v) + P(w)$$

et

$$P(cv) = cP(v)$$

alors, P est linéaire .

Si $P(v) = 0$ alors, par l'unicité de la proposition 3.9.1, V peut être le champ de vecteur nul sur α . Par conséquent $v = V(a) = 0$. Ainsi P est linéaire, et puisque les espaces tangents de M ont la même dimension, P est un isomorphisme linéaire.

Finalement pour V, W des champs de vecteurs parallèles on a :

$$\frac{d}{dt}\langle V, W \rangle = \langle V', W \rangle + \langle V, W' \rangle = 0$$

par conséquent $\langle V, W \rangle$ est constant alors

$$\langle P(v), P(w) \rangle = \langle V(b), W(b) \rangle = \langle V(a), W(a) \rangle = \langle v, w \rangle.$$

•

Remarque 3.9.1 *Le transport parallèle suivant une connexion compatible avec la métrique conserve la norme des vecteurs et l'orthogonalité.*

3.10 Géodésique

Dans cette section on donne une généralisation des lignes droites en géométrie euclidienne. Une géodésique sur une variété pseudo-Riemannienne M est la courbe $\gamma : I \rightarrow M$ qu'est un champ de vecteur γ' parallèle le long de γ , équivalent à dire que les géodésiques, sont des courbes à accélération nulle : $\gamma'' = 0$

Corollaire 3.10.1 *Soit x^1, \dots, x^n un système de coordonnées dans $\mathcal{U} \subset M$. Une courbe γ est une géodésique de M si et seulement si leurs fonctions de coordonnées $x^k \circ \gamma$ satisfait à :*

$$\frac{d^2(x^k \circ \gamma)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k(\gamma) \frac{d(x^i \circ \gamma)}{dt} \frac{d(x^j \circ \gamma)}{dt} = 0 \quad \text{pour } 1 \leq k \leq n$$

cette expression possède les composantes de γ'' relative aux coordonnées de champ de vecteurs $\partial_1, \dots, \partial_n$.

Si on remplace $x^i \circ \gamma$ par x^i l'équation de la géodésique sera :

$$\frac{d^2(x^k)}{dt^2} + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt} = 0 \quad (1 \leq k \leq n)$$

3.10.1 Propriétés des géodésiques

Un théorème d'existence et d'unicité des équations différentielles ordinaires nous donne les résultats suivants concernant l'existence et l'unicité des géodésiques sur une variété pseudo-Riemannienne M . (pour la preuve des théorèmes qui suivent, voir [6])

Théorème 3.10.3 (Existence) Si $v \in T_p(M)$ alors, il existe un intervalle I qui contient 0 et une unique géodésique $\gamma : I \rightarrow M$ tel que $\gamma'(0) = v$.

Théorème 3.10.4 (Unicité) Soit $\alpha, \beta : I \rightarrow M$ des géodésiques s'il y a $d \in I$ tel que $\alpha'(d) = \beta'(d)$ alors, $\alpha = \beta$.

Proposition 3.10.1 Donnons un vecteur tangent $v \in T_p(M)$ il y a une unique géodésique γ_v dans M tel que :

- La vitesse initial de γ_v est v ; tel que $\gamma'_v = v$.
- Le domaine I_v de γ_v est maximal alors, si $\alpha : J \rightarrow M$ est une géodésique avec une vitesse initiale v alors, $J \subset I$ et $\alpha = \gamma_v | J$.

Exemple 3.10.1 Géodésiques de l'espace pseudo-euclidien \mathbb{R}_ν^n

Pour les coordonnées usuelles les symboles de Christoffel s'annulent, donc l'équation du géodésique devient :

$$\frac{d^2(u^i \circ \gamma)}{dt^2} = 0 \quad (1 \leq i \leq n)$$

En conséquence $u^i(\gamma(t)) = p^i + tv^i$ pour tout t , où p^i et v^i arbitrairement constant par la notion de vecteur on a $\gamma(t) = p + tv$. Alors, les géodésiques de \mathbb{R}_ν^n sont des lignes droites, en particulier \mathbb{R}_ν^n est géodésiquement complet.

On donne par suite la relation entre l'existence des courbes intégrales et les géodésiques.

Proposition 3.10.2 Soit un champ de vecteur Z sur TM , tels que la projection $\pi : TM \rightarrow M$ établit une correspondance bijective entre l'existence des courbes intégrales (maximales) de Z et l'existence des géodésiques (maximales) de M .

3.11 Courbure

Les dérivés de Lie satisfont à l'identité suivante $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$, par conséquent si $[X, Y] = 0$ alors, $\mathcal{L}_X \mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y \mathcal{L}_X = 0$, donc \mathcal{L}_X et \mathcal{L}_Y commutent, le bon outil pour calculé cette différence est le tenseur de courbure qui nous donnera des informations importantes sur les propriétés géométriques de la métrique g .

Définition 3.11.1 Soit M une variété pseudo-Riemannienne, et D la connexion de Levi-civita. La fonction $R : \mathfrak{X}(M)^3 \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ donnée par :

$$R_{XY}Z = D_{[X,Y]}Z - [D_X, D_Y]Z.$$

est un champ tensoriel de type $(1,3)$ sur M , appelé le tenseur de courbure Riemannienne de la variété M .

Comme on a vu dans la définition 3.1.1 on peut considérer R comme un élément de $T_3^1(M)$ donc, R est $\mathfrak{F}(M)$ -multilinéaire.

Remarque 3.11.1 Le crochet des champs de vecteurs et la dérivée covariante ils ne sont pas des tenseurs, mais dans la combinaison ci-dessus ils produisent un tenseur R .

3.11.1 Propriétés algébriques du tenseur de courbure

Proposition 3.11.1 Pour tout $p \in M$ et tout $x, y, z, w \in T_p(M)$, on a :

- (1) $R(x, y)z = -R(y, x)z$ (antisymétrique)
- (2) $R(x, y)z + R(y, z)x + R(z, x)y = 0$ (1^{er} identité de Bianchi)
- (3) $\langle R(x, y)z, z \rangle = 0$
- (4) $\langle R(x, y)z, w \rangle = \langle R(z, w)x, y \rangle$

Preuve: Puisque dans (1) et (2) les deux côtés de l'équation sont des fonctions trili-néaires, il suffit de démontrer ces formules pour les vecteurs d'une base.

Soient donc $x = X_p, y = Y_p, z = Z_p$, où X, Y, Z appartiennent à une base X_1, \dots, X_n associée à une carte au voisinage de p , dans ce cas, R est donné par C_5 du Théorème 3.8.2

- (1) L'antisymétrie est claire.
- (2) Résulte du calcul suivant où nous utilisons le fait que D est symétrique,

$$\begin{aligned} (D_X D_Y Z - D_Y D_X Z) + (D_Y D_Z X - D_Z D_Y X) + (D_Z D_X Y - D_X D_Z Y) = \\ D_X(D_Y Z - D_Z Y) - D_Y(D_X Z - D_Z X) + D_Z(D_X Y - D_Y X) = 0. \end{aligned}$$

(3) On a $\langle R(x, y)z, z \rangle$, est bilinéaire en x et y pour tout z , il suffit donc toujours de prendre X et Y parmi les X_1, \dots, X_n , mais Z doit être un champ quelconque différentiable au voisinage de p , dans ce cas nous observons que :

$$\begin{aligned}\langle D_X D_Y Z, Z \rangle &= X[\langle D_Y Z, Z \rangle] - \langle D_Y Z, D_X Z \rangle \\ \langle D_Y D_X Z, Z \rangle &= Y[\langle D_X Z, Z \rangle] - \langle D_X Z, D_Y Z \rangle.\end{aligned}$$

En utilisant la règle $\langle D_V Z, Z \rangle = \frac{1}{2}V[\langle Z, Z \rangle]$ et le fait que les champs de base commutent nous obtenons :

$$\begin{aligned}\langle R(X, Y)Z, Z \rangle &= X[\langle D_Y Z, Z \rangle] - Y[\langle D_X Z, Z \rangle] \\ &= \frac{1}{2}(XY - YX)[\langle Z, Z \rangle] \\ &= 0.\end{aligned}$$

(4) pour prouvé (4) on fait une permutation cyclique sur y, z, x, w on obtient 11 termes et on utilise (1) et (2) on trouve :

$$2\langle R(x, y)z, w \rangle + 2\langle R(w, z)x, y \rangle = 0$$

d'où le résultat

•

Proposition 3.11.2 (*2^{ème} identité de bianchi*)

Si $x, y, z \in T_p M$, alors

$$(D_z R)(x, y) + (D_x R)(y, z) + (D_y R)(z, x) = 0$$

Preuve: Pour la preuve, voir [17] •

Lemme 3.11.1 Dans un voisinage de système de coordonnées x_1, \dots, x_n on a :

$$R_{\sigma_k \sigma_l}(\partial_j) = \sum_m R_{jkl}^i \partial_i,$$

tel que les composantes de R sont données par

$$R_{jkl}^i = \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i - \frac{\partial}{\partial x^k} \Gamma_{ij}^l + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m - \sum_m \Gamma_{km}^i \Gamma_{ij}^m.$$

Preuve: Pour des coordonnées des champs de vecteurs

$$R_{\partial_k \partial_l}(\partial_j) = D_{\partial_l}(D_{\partial_k} \partial_j) - D_{\partial_k}(D_{\partial_l} \partial_j)$$

avec

$$D_{\partial_l}(D_{\partial_k} \partial_j) = D_{\partial_l}(\sum \Gamma_{kj}^m \partial_m) = \sum_m \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^m \partial_m + \sum \Gamma_{kj}^m \Gamma_{lm}^r \partial_r$$

En regroupant les termes et en écrivant l à la place de r , on obtient :

$$\left\{ \sum_i \frac{\partial}{\partial x^l} \Gamma_{kj}^i + \sum_m \Gamma_{lm}^i \Gamma_{kj}^m \right\} \partial_i \quad (3.1)$$

on renverse k et l dans (3.1) on regroupe les expressions trouvées par suite, on trouve le résultat cherché. ■

3.12 Courbure sectionnelle

Le tenseur de courbure Riemannienne R est assez compliqué, pour cela on considère une fonction plus simple qui détermine complètement R .

Un sous-espace bidimensionnel Γ de l'espace tangent $T_p M$ est appelé plan tangent à M au point p

Pour les vecteurs tangents v, w définissent :

$$q(x, y) = \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2$$

d'après la définition 1.2.3 le plan Γ est non dégénéré si et seulement si $q(x, y) \neq 0$.

$q(x, y)$ est positif si et seulement si $g|_{\Gamma}$ est définie, il est négatif s'il est non définie.

Définition 3.12.1 Soit Γ le plan tangent non dégénéré de M au point p .

Le nombre

$$K(x, y) = \frac{\langle R(x, y)x, y \rangle}{q(x, y)}$$

est appelé la courbure sectionnelle $K(\Gamma)$ de Γ .

Remarque 3.12.1 La courbure sectionnelle $K(x, y)$ ne dépend que du plan Γ engendré par $x, y \in T_p(M)$

Proposition 3.12.1 Si $K = 0$ au point p alors, $R = 0$ au point p .

Explicitement, si $K(\Gamma) = 0$ pour chaque plan non dégénéré dans $T_p(M)$ alors,
 $R_{xy}Z = 0 \quad \forall x, y, z \in T_p(M)$

Preuve:

1. $\langle R_{xy}x, y \rangle = 0 \quad \forall x, y \in T_p(M)$.

si x et y engendrent un plan non dégénéré alors $R_{xy}x = 0$

2. $R_{xy}x = 0 \quad \forall x, y \in T_p(M)$.

Pour v arbitraire on décompose la formule $\langle R_{x,y+v}, y+v \rangle$ on trouve :

$$\langle R_{x,y+v}, y+v \rangle = \langle R_{xy}x, y \rangle + \langle R_{xv}x, y \rangle + \langle R_{xy}x, v \rangle + \langle R_{xv}x, v \rangle.$$

pour cette expression, trois termes seront nuls par (1) alors, $\langle R_{xy}x, v \rangle = 0$ pour tous x .

3. $R_{xy}v = R_{yv}x$ pour tout $x, y, v \in T_p(M)$. on décompose une autre fois la formule

$R_{x+v,y}(x+v)$ on trouve :

$$R_{x+v,y}(x+v) = R_{xy}x + R_{vy}x + R_{xy}v + R_{vy}v. \text{ Encore, trois termes disparaissent, par}$$

(2), par conséquent (3) est vrai par anti-symétrie de R dans ses indices inférieurs.

Selon (3), $R_{xy}v$ ne change pas par une permutation cyclique des vecteurs x, y, v .

ainsi par la première identité de Bianchi on a $R_{xy}v = 0$ pour tout x, y, v alors, $R = 0$

au point p .

▪

Remarque 3.12.2 Une variété pseudo-Riemannienne M pour laquelle le tenseur de courbure R est nul en chaque point est dite plate. Par la proposition précédente, M est plate si et seulement si, la courbure sectionnelle K est nulle.

Exemple 3.12.1 L'espace semi-euclidien \mathbb{R}_v^n est plat, car : les symboles de Christoffel sont tous nuls, par conséquent $R = 0$.

3.13 Géométrie des sous variétés

Soit N une sous-variété d'une variété pseudo-Riemannienne (M, g) et soit h la fonction tirée en arrière "pullback" de la métrique g par l'application i telle que $i : N \hookrightarrow M$ (inclusion). Un champ de vecteurs sur i est une application qui à tout point p de N on associe un vecteur V_p dans l'espace tangent T_pM qui dépend d'une manière lisse de p .

Comme on a vu l'ensemble $\mathfrak{X}(M)$ de tous les champs de vecteurs qui sont lisses sur M , est un $\mathfrak{F}(N)$ -module au dessus de $\mathfrak{F}(M)$, où $\mathfrak{F}(N)$, est l'anneau des fonctions lisses de N à \mathbb{R} . Supposons que h est non dégénérée et a indice constant alors, (N, h) est elle-même une variété pseudo-Riemannienne.

3.13.1 Tangent et normal

Soit N une sous variété pseudo-Riemannienne de M . Chaque espace tangent $T_p N$ est, par définition, un sous-espace nondégénéré de $T_p M$. Par conséquent, le lemme 1.2.1 donne la décomposition de somme directe de :

$$T_p M = T_p N \oplus T_p(N)^\perp.$$

Un vecteur dans $T_p(N)^\perp$ est appelé normal à N et un vecteur dans $T_p N$ est appelé tangent à N donc, un élément $x \in T_p N \oplus T_p(N)^\perp$ prend l'expression unique suivante :

$$x = \text{tan}x + \text{nor}x$$

avec $\text{tan}x \in T_p N$ et $\text{nor}x \in T_p(N)^\perp$

Ce qui donne les projections orthogonales :

$$\text{tan} : T_p M \longrightarrow T_p N$$

et

$$\text{nor} : T_p M \longrightarrow T_p(N)^\perp$$

Pour un champ de vecteurs $X \in \mathfrak{X}(M)$ on appliquons le tan et nor à tout point de N nous donne les champs de vecteurs $\text{tan}X \in \mathfrak{X}(N)$ et $\text{nor}X \in \mathfrak{X}(N)^\perp$ ce qui donne par suite les projections orthogonales :

$$\text{tan} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)$$

et

$$\text{nor} : \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(N)^\perp$$

Un champ de vecteurs X prend l'expression unique $X = \text{tan}x + \text{nor}X$ et on a la somme directe $\mathfrak{X}(M) = \mathfrak{X}(N) \oplus \mathfrak{X}(N)^\perp$

3.13.2 Connexion induite

Si N est une sous variété pseudo-Riemannienne de M , la connexion de Levi-Civita D de M donne lieu d'une manière naturelle à une fonction $\tilde{D} : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathfrak{X}(M)$ appelée la connexion induite sur $N \subset M$.

Si $V, W \in \mathfrak{X}(N)$ et $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ alors, \tilde{D} vérifier les propriétés suivantes :

1. $\tilde{D}_V X$ est $\mathfrak{F}(N)$ –linéaire dans V .
2. $\tilde{D}_V X$ est \mathbb{R} –linéaire dans X .
3. $\tilde{D}_V(fX) = VfX + f\tilde{D}_V X$ pour $f \in \mathfrak{F}(N)$.
4. $[V, W] = \tilde{D}_V W - \tilde{D}_W V$.
5. $V\langle X, Y \rangle = \langle \tilde{D}_V X, Y \rangle + \langle X, \tilde{D}_V Y \rangle$.

Lemme 3.13.1 Soit N une sous variété pseudo-Riemannienne de M si $V, W \in \mathfrak{X}(N)$ et si on note \tilde{D} la connexion de Levi-Civita de M et D la connexion de Levi-Civita de N alors, on a :

$$D_V W = \tan \tilde{D}_V W$$

Lemme 3.13.2 Soit N une sous-variété d'une variété pseudo-Riemannienne M . Soit la fonction Π définie par :

$$\begin{aligned} \Pi : \mathfrak{X}(N) \times \mathfrak{X}(N) &\longrightarrow \mathfrak{X}(N)^\perp \\ (V, W) &\longrightarrow \Pi(V, W) = \text{nor} \tilde{D}_V W \end{aligned}$$

Alors, Π est symétrique et $\mathfrak{F}(N)$ –bilinéaire on l'appelle le tenseur de deuxième forme fondamentale de N .

Pour la preuve des deux lemmes précédents voir, [17].

D'après les deux lemmes précédents on a la formule suivante qui donne la relation entre la connexion de M et celui de N :

$$\tilde{D}_V W = D_V W + \Pi(V, W), \quad \text{pour } V, W \in \mathfrak{X}(N)$$

Cette relation est dite l'équation de Gauss.

3.13.3 Sous-variétés géodésiques

Une sous variété N de M est géodésique au point p si chaque géodésique γ de M est contenu dans N dans un certain voisinage de p .

Exemple 3.13.1 Soit M et N deux variétés pseudo-Riemanniennes et f une isométrie de M vers N alors, le graphe de f $\text{Graph}(f) = \{(x, f(x)), x \in M\}$ est une sous-variété géodésique de $M \times N$.

La deuxième forme fondamentale peut être utilisée pour caractériser les sous-variétés totalement géodésiques et non dégénérées de M .

Définition 3.13.1 *Si N est non dégénérée alors, N est totalement géodésique si $\Pi = 0$.*

Remarque 3.13.1 *Dans le cas Lorentzien si $T_p N$ possède le même caractère causal pour tout p de N alors, ce caractère causal est attribuée à N plus précisément, si h_p est définie positive pour tout $p \in N$, N est dite une sous-variété de type espace. si h_p est Lorentzienne pour chaque $p \in N$ est dite une sous-variété de type temps, et si h_p est dégénérée pour tout $p \in N$ est dite de type lumière.*

3.14 Hypersurfaces pseudo-Riemanniennes

Définition 3.14.1 *Une hypersurface pseudo-Riemannienne N de M est une sous-variété pseudo-Riemannienne de codimension 1.*

Définition 3.14.2 *Une hypersurface totalement géodésique N de type lumière dans une variété pseudo-Riemannienne M de dimension d est une sous-variété de M totalement géodésique de dimension $d - 1$ tel que, la restriction du métrique de M à N est dégénéré, c'est-à-dire, $T_x N \cap (T_x N)^\perp \neq 0$.*

Théorème 3.14.5 ([22]) *Soit M une variété Lorentzienne telle que, par chaque point m de M passent $n \geq \dim M$ hypersurfaces totalement géodésiques de type lumière N_1, \dots, N_n telle que $\{T_m N_1^\perp, \dots, T_m N_n^\perp\}$ engendrent $T_m M$ alors, M est de courbure sectionnelle constante.*

Théorème 3.14.6 ([22]) *Soit M une variété Lorentzienne et $Isom(M)$ son groupe d'isométries. Soit m un point de M et soit $stab(m)$ le sous-groupe d'isotropie de m . On note C_m l'ensemble des directions de $T_m M$ de type lumière qui sont tangentes à une hypersurface totalement géodésique de type lumière. Si $stab(m)$ n'est pas compact, alors $C_m \neq \emptyset$.*

3.15 Produit tordu

Le produit tordu est une sorte de généralisation de produit direct des variétés pseudo-Riemannienne.

Définition 3.15.1 *On suppose E et F des variétés pseudo-Riemannienne, soit $f > 0$ une fonction lisse sur E . Le produit tordu $M = E \times_f F$ est la variété produit $E \times F$ équipé par le tenseur métrique :*

$$g = \pi^*(g_E) + (f \circ \pi)^2 \sigma^*(g_F).$$

On l'appelle le produit tordu pseudo-Riemannien.

Explicitement, si x est le tangent de $E \times F$ au point (p, q) alors

$$\langle x, x \rangle = \langle d\pi(x), d\pi(x) \rangle + f^2(p)(d\sigma(x), d\sigma(x)).$$

Le résultat prouvé dans le lemme 3.5.1 montre que g est un tenseur métrique .

Si $f = 1$ alors, $E \times_f F$ réduit à un produit de deux variétés pseudo-Riemanniennes.

En générale E est appelé la base de $M = E \times_f F$ et F le fibre.

Comme dans le cas de produit pseudo-Riemannien il est facile de voir que le fibre $p \times F = \pi^{-1}(p)$ et les feuilles $B \times q = \sigma^{-1}(q)$ sont des sous variétés pseudo-Riemanniennes de $M = E \times_f F$ et la métrique tordue est caractérisée par :

- (1) L'application $\pi | (E \times q)$ est une isométrie dans $E, \forall q \in F$.
- (2) L'application $\sigma | (p \times F)$ est une homothétie positif dans F avec un facteur scalaire $1 \setminus f(p)$ positif, $\forall p \in E$.
- (3) La feuille $E \times q$ et le fibre $p \times F$ sont orthogonales au point $(p, q), \forall (p, q) \in M$.

Définition 3.15.2 *Soient M une variété Lorentzienne de dimension $n \geq 1$ menu d'une métrique g de signature $(1, q)$ et N une variété Riemannienne et $f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ une fonction lisse.*

Le produit tordu Lorentzien $M \times_f N$ est la variété $\overline{M} = M \times N$ équipée par la métrique Lorentzienne \overline{g} définie par :

$$\overline{g}(v, w) = g(\pi^*(v), \pi^*(w)) + f(\pi(\overline{p})) \cdot h(\sigma^*(v), \sigma^*(w)).$$

pour tous $v, w \in T_{\overline{p}}\overline{M}$

Remarque 3.15.1 *Le produit tordu de deux variétés Lorentziennes n'est pas Lorentzien parce que la métrique induite est de signature $(2, q)$.*

Pour plus de détaille voir [5]

3.16 Espaces à courbure constante

Pour $n \geq 2$ et $0 \leq \nu \leq n$ on définit les espaces suivants :

- L'espace \mathbb{R}_ν^n est \mathbb{R}^n munit de la métrique définie par : $-\sum_{i=1}^{\nu} v^i w^i + \sum_{j=\nu+1}^n v^j w^j$ est une variété pseudo-Riemannienne appelé l'espace de Minkowsky de dimension n .
- L'espace $\mathbb{S}_\nu^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_\nu^{n+1} : \langle X, X \rangle = r^2\}$ est une variété pseudo-Riemannienne à courbure constante $k = \frac{1}{r^2}$ appelé la pseudo-sphere de rayon $r > 0$
- L'espace $\mathbb{H}_\nu^n(r) = \{X \in \mathbb{R}_{\nu+1}^{n+1}, \langle X, X \rangle = -r^2\}$ est une variété pseudo-Riemannienne à courbure constante $k = -\frac{1}{r^2}$ appelé le pseudo-hyperbolique de rayon $r > 0$

Le théorème suivant prouve que ces espaces localement sont les seules variétés pseudo-Riemanniennes d'une courbure constante non nulle.

Théorème 3.16.7 *Soit M une variété pseudo-Riemannienne de dimension n et de courbure constante r alors :*

- si $r = 0$, tout point de M possède un voisinage isométrique à un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^{\nu, n-\nu}$.
- si $r > 0$, tout point de M possède un voisinage isométrique à un voisinage d'un point de \mathbb{S}_ν^n .
- si $r < 0$ tout point de M possède un voisinage isométrique à un voisinage d'un point de \mathbb{H}_ν^n .

Les modèles Lorentziens d'une courbure nulle, positive et négative sont appelés l'espace de Minkowski, l'espace de De Sitter et l'espace anti De-Sitter respectivement. On les note par l'espace pseudo-euclidien plat, la pseudo-sphère et l'espace pseudo-hyperbolique.

Dans la suite on donne quelques propriétés de ses espaces dans le cas Lorentzien c'est-à-dire, $\nu = 1$ et $n \geq 2$.

Le cas de courbure nulle :

Une isométrie de $\mathbb{R}^{1, n-1}$ est la composition d'une translation et un élément de $O(1, n-1)$, alors, le groupe d'isométrie de $\mathbb{R}^{1, n-1}$ est $O(1, n-1) \times \mathbb{R}^n$.

La version homogène de $\mathbb{R}^{1, n-1}$ est donnée par :

$$\mathbb{R}^{1, n-1} \cong O(1, n-1) \times \mathbb{R}^n / O(1, n-1).$$

Les géodésique de l'espace $\mathbb{R}^{p, n-p}$ sont des lignes droites.

Le cas de courbure positive :

L'espace dS_n est difféomorphe à $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{S}^{n-1}$ donc, il est connexe. Le groupe d'isométrie de $\mathbb{S}_1^n(1)$ est $O(1, n)$, il agit transitivement sur $\mathbb{S}_1^n(1)$, le stabilisateur du point $(0, 0, \dots, 1)$ est isomorphe à $O(1, n - 1)$ donc :

$$dS_n \cong O(1, n) / O(1, n - 1).$$

Le cas de courbure négative :

L'espace AdS_n est difféomorphe à $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}^{n-1}$, le groupe d'isométrie de $\mathbb{H}_1^n(1)$ est $O(2, n - 1)$ et le stabilisateur de $(1, 0, \dots, 0)$ est isomorphe à $O(1, n - 1)$ alors :

$$AdS_n \cong O(2, n - 1) / O(1, n - 1).$$



Groupes et algèbre de Lie

4.1 Groupes de Lie

Définition 4.1.1 *Un groupe topologique¹ G est appelé groupe de Lie s'il possède une structure de variété C^∞ pour laquelle les opérations de groupe, l'inverse et la multiplication sont C^∞ . Un homomorphisme de groupes de Lie $F : G \rightarrow H$ est une application C^∞ qui est un morphisme de groupes.*

Exemple 4.1.1 *Donnons quelques exemples de groupes de Lie (donc de groupes topologiques) :*

1. *Un exemple simple de groupe de Lie est $GL(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \det M \neq 0\}$ est une variété C^∞ comme ouvert de l'espace vectoriel $M(n, \mathbb{R})$ des matrices carrées de taille n et la multiplication et l'inverse sont des applications lisses.*
2. *$SL(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / \det M = 1\}$ puisque est à la fois une sous-variété et un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$*
3. *$O(n, \mathbb{R}) = \{M \in GL(n, \mathbb{R}) / M^t M = 1\}$ puisque est à la fois une sous-variété et un sous-groupe de $GL(n, \mathbb{R})$*

4.2 Quelques propriétés des groupes de Lie

Proposition 4.2.1 *Le produit direct de deux groupes de Lie est un groupe de Lie*

Preuve: En effet si G et G' sont deux groupes topologiques séparés munis de structure C^∞ compatible avec leurs lois de groupes, le produit direct $G \times G'$ est un groupe

¹Un groupe topologique G est un espace topologique séparé muni d'une structure de groupe telle que les opérations de groupe, l'inverse et la multiplication sont C^∞

topologique séparé qu'on peut munir de la structure C^∞ de variétés produit .

Si $(x, x') \in G \times G'$, $(y, y') \in G \times G'$ les applications

$$\begin{aligned} ((x, x'), (y, y')) &\longrightarrow (x, x') (y, y') = (xx', yy') \\ (x, y) &\longrightarrow (x, y)^{-1} = (x^{-1}, y^{-1}) \end{aligned}$$

sont différentiables C^∞ de $(G \times G') \times (G \times G')$ dans $G \times G'$ et de $G \times G'$ dans $G \times G'$ respectivement. ■

Exemple 4.2.1 *Le tore à n dimensions T^n est le produit de n tores à une dimension.*

Proposition 4.2.2 *On considère les deux applications particulières suivantes sur le groupe de Lie G :*

La translation à gauche sur G définie par :

$$\begin{aligned} L_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto gh \end{aligned}$$

La translation à droite sur G définie par :

$$\begin{aligned} R_g : G &\longrightarrow G \\ h &\longmapsto hg \end{aligned}$$

ces deux applications sont des difféomorphismes de groupe

Preuve: En effet, L_g est la composée des applications différentiables $h \longrightarrow (g, h)$ de G dans $G \times G$ et $\phi : (g, h) \longrightarrow gh$ ce qui montre que L_g est une application différentiable. D'autre part, L_g possède un inverse $L_g^{-1} = L_{g^{-1}}$ qui est encore différentiable. On en déduit que L_g est un difféomorphisme. De même, R_g est un difféomorphisme. ■

4.3 Champs de vecteurs invariants

Définition 4.3.1 *Soient $f : M \longrightarrow N$ un morphisme de variétés, X un champ de vecteurs sur M et Y un champ de vecteurs sur N . On dit que X et Y sont f -liés si $Tf \circ X = Y \circ f$.*

*Si f est un isomorphisme pour tout champ de vecteur X sur M , il existe un unique champ de vecteur Y sur N qui lui est f -liés. Il est donné par $Y = Tf \circ X \circ f^{-1}$ et On le note f_*X*

Définition 4.3.2 Soient G un groupe de Lie, $g \in G$ et X un champ de vecteurs sur G . On définit $g.X = (L_g)_*X$ et $X.g = (R_g)_*X$ (où L_g est la multiplication à gauche par g et R_g la multiplication à droite).

Un champ de vecteurs est dit invariant à gauche si pour tout $g \in G$ on a $g.X = X$.

Remarque 4.3.1 Un champ de vecteurs X est invariant à gauche si et seulement si pour tout g et h dans G on a $X(gh) = (TL_g)_h X(h)$ si et seulement si pour tout g dans G , on a $X(g) = (TL_g)_e X(e)$.

4.4 Algèbres de Lie

Définition 4.4.1 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} de dimension n sur $\mathbb{K} = (\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ est un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} , muni d'une application bilinéaire $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$, appelée crochet de Lie, qui possède les propriétés :

1. $[X, X] = 0$, pour tout $X \in \mathfrak{g}$ (antisymétrique).
2. $[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0$ pour tous X, Y et Z dans \mathfrak{g} (identité de Jacobi).

Définition 4.4.2 Un homomorphisme d'algèbre de Lie est une application linéaire entre deux algèbres de Lie $\phi : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{h}$ telle que

$$[\phi(x), \phi(y)] = \phi([x, y])$$

Exemple 4.4.1 1. Tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} muni du crochet $[X, Y] = 0$, et $X, Y \in V$ est une algèbre de Lie sur \mathbb{K}

2. Les éléments $X = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, Z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ engendrent l'ensemble

$$\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$$

et satisfont les relations $[X, Y] = Z, [Z, X] = 2X, [Z, Y] = -2Y$ alors $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ est une algèbre de Lie car :

- Pour tous $X \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ on a $[X, X] = 0$, est facile à vérifier
- pour tous $X, Y, Z \in \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ on a :

$$\begin{aligned}
[X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]] &= [X, 2Y] + [Y, 2X] + [Z, Z] \\
&= 2([X, Y] + [Y, X]) \\
&= 0
\end{aligned}$$

4.5 Algèbre de Lie d'un groupe de Lie

L'ensemble de tous les champs de vecteur invariants à gauche sur un groupe de Lie G est un espace vectoriel, on le note par \mathfrak{g} .

Lemme 4.5.1 *Si pour une paire de champ de vecteurs $\{X_i, Y_i; i = 1, 2\}$ sont f -liés alors, $[X_1, X_2]$ et $[Y_1, Y_2]$ sont f -liés*

Preuve: Pour $\phi \in C^\infty$ on montre que $[X_1, X_2]_x(\phi \cdot f) = [Y_1, Y_2]_{f(x)}(\phi)$, il suffit d'appliquer les définitions . .

Corollaire 4.5.1 *Si X et Y des champs de vecteurs invariants à gauche pour un groupe de Lie G alors, $[X, Y]$ est même un champ de vecteurs invariants à gauche pour G .*

Preuve: On applique le Lemme 4.5.1 avec $f = L_x$.

Ainsi $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$ implique que $[X_1, X_2] \in \mathfrak{g}$ et ainsi l'ensemble \mathfrak{g} de tous les champs de vecteur invariant à gauche sur G est une sous algèbre de Lie de l'algèbre de Lie de tous les champs de vecteur sur G , on l'appelle l'algèbre de Lie de G .

Théorème 4.5.8 *Il y a un isomorphisme de \mathfrak{g} qu'il est considéré comme un espace vectoriel vers l'espace tangent de G à l'élément neutre ($T_e G$) .*

Preuve: On montre que $i : T_e G \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme

Soit $A \in T_e G$ tel que $i(A) := L^A$ avec L^A est un champ de vecteurs sur G définie par :

$$L_g^A := L_{g*} A \text{ pour tout } g \in G.$$

on a pour tout $g, g' \in G$

$$L_{g'_*}(L_g^A) = L_{g'_*}(L_{g*} A) = L_{g'g_*} A = L_{g'_*}^A$$

Alors L^A est un champ de vecteurs invariant à gauche .

Il est clair que $A \longrightarrow L^A$ est une application linéaire

- (1) Si $L^A = L^B$ alors $L_e^A = L_e^B$, mais $L_e^A = L_{e_*}A = A$ et $L_e^B = B$
alors l'application

$$\begin{aligned} i : T_e G &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ A &\longmapsto L^A \end{aligned}$$

est injective .

- (2) Soit L un champ de vecteurs invariant à gauche sur G on définit $A_L \in T_e G$ par
 $A_L := L_e = L_{g_*^{-1}}L_g$, pour tout $g \in G$.
c'est claire que $L_{g_*}A_L = L_{g_*}(L_e) = L_g$ et comme il est invariant à gauche
alors, $i(A_L) = L$ donc $i : T_e G \longrightarrow \mathfrak{g}$ est surjective.

Donc $i : T_e G \longrightarrow \mathfrak{g}$ est bijective.

Il est clair que $L \longmapsto A_L$ est l'inverse de $A \longmapsto L^A$ et par conséquent $L_{g_*}(A_L) = L_g$ et
 $L_{g_*^{-1}}(L_g^A) = A$
alors $i : T_e G \longrightarrow \mathfrak{g}$ est un isomorphisme . .

Exemple 4.5.1

On donne des exemples pour les groupes matriciels :

1. $GL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R}) = M(n, \mathbb{R})$
2. $O(n) \longrightarrow \mathfrak{o}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / M^t + M = 0\}$
3. $SL(n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \{M \in M(n, \mathbb{R}) / \text{tr} M = 0\}$
4. $SO(n) \longrightarrow \mathfrak{so}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \cap \mathfrak{o}(n)$

et

1. $GL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{gl}(n, \mathbb{C}) = M(n, \mathbb{C})$
2. $U(n) \longrightarrow \mathfrak{u}(n) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) / M^t + M = 0\}$
3. $SL(n, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) = \{M \in M(n, \mathbb{C}) / \text{tr} M = 0\}$
4. $SU(n) \longrightarrow \mathfrak{su}(n, \mathbb{C}) = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{C}) \cap \mathfrak{u}(n)$

où le crochet est le commutateur des matrices.

Remarque 4.5.1 On note par des majuscules les groupes de Lie et par des minuscules leurs algèbres de Lie.

Définition 4.5.1 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite abélienne si $[X, Y] = 0$ pour tous X et Y dans \mathfrak{g} .

Exemple 4.5.2 – *Tout espace vectoriel V sur \mathbb{K} est muni d'une structure d'algèbre de Lie abélienne sur \mathbb{K} .*

– *Toute algèbre de Lie de dimension 1 sur \mathbb{K} est abélienne.*

Définition 4.5.2 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} . Le centre $Z(\mathfrak{g})$ de \mathfrak{g} est défini par :*

$$Z(\mathfrak{g}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, Y] = 0, \forall Y \in \mathfrak{g}\}.$$

Exemple 4.5.3 *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie abélienne alors, $Z(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g}$.*

Définition 4.5.3 *Soit \mathfrak{s} un sous-ensemble d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le centralisateur de \mathfrak{s} dans \mathfrak{g} est défini par $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{s}] = \{0\}\}$*

Définition 4.5.4 *Soit \mathfrak{s} un sous-ensemble d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} . Le normalisateur de \mathfrak{s} dans \mathfrak{g} est défini par $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \{X \in \mathfrak{g} \mid [X, \mathfrak{s}] \subset \mathfrak{s}\}$*

Remarque 4.5.2 *En particulier si \mathfrak{s} est un sous-espace vectoriel de \mathfrak{g} alors, $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) \subset N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s})$.*

Exemple 4.5.4 – *si $\mathfrak{s} = \{0\}$ ou $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ alors $N_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}$*

et pour le centralisateur

– *si $\mathfrak{s} = \{0\}$ alors, $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = \mathfrak{g}$*

– *si $\mathfrak{s} = \mathfrak{g}$ alors $Z_{\mathfrak{g}}(\mathfrak{s}) = Z(\mathfrak{g})$*

Définition 4.5.5 *On dit qu'un sous-espace vectoriel \mathfrak{h} est une sous-algèbre de Lie de \mathfrak{g} , si pour tous $X, Y \in \mathfrak{h}$ alors, $[X, Y] \in \mathfrak{h}$, ce que nous écrirons encore*

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}.$$

4.5.1 Application exponentielle

On construit une application entre \mathfrak{g} et G , cette application est un pont entre les deux structures, qui permet de trouver certaines propriétés de G connaissant \mathfrak{g}

Définition 4.5.6 *Soit $X \in \mathfrak{g}$ un champ de vecteurs invariant à gauche. Il définit donc une équation différentielle, dont le flot est noté $\varphi_X(t, g)$ C'est-à-dire que :*

$$\frac{d\varphi_X(t, g)}{dt} = X|_{\varphi_X(t, g)}$$

et

$$\varphi_X(0, g) = g$$

En utilisant l'invariance à gauche de X , il est facile de montrer que

$$\varphi_X(t, g) = L_g \varphi_X(t, e)$$

Nous voyons ainsi que le flot est complètement déterminé par la solution de condition initiale e .

D'une manière générale, n'importe quel flot sur une variété différentiable (la structure de groupe n'est pas utile pour cette propriété) vérifie

$$\varphi_{\lambda X}\left(\frac{t}{\lambda}, g\right) = \varphi_X(t, g)$$

pour tout $\lambda \in \mathbb{R}^*$, cette propriété se démontre par l'unicité du flot. On définit alors l'application exponentielle par :

$$\begin{aligned} \exp : \mathfrak{g} &\longrightarrow G \\ X &\longmapsto \varphi_X(1, e) \end{aligned}$$

Par construction, cette application vérifie pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \exp(tX) &= \varphi_X(1, e) \\ \varphi_X(t, g) &= g \exp(tX) \\ \frac{d \exp(tX)}{dt} &= X|_{\exp(tX)} \\ \exp 0 &= e \end{aligned}$$

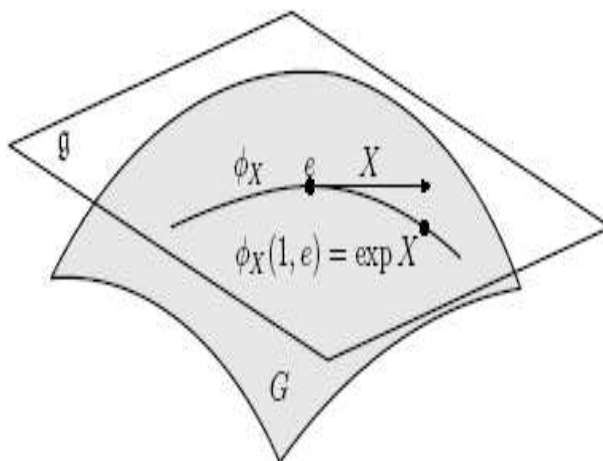


FIG. 4.1 – L'application exponentielle sur le groupe de Lie G .

Exemple 4.5.5 *L'exponentielle de $GL(n, R)$.*

Pour $A \in M(n, R)$, on a $A(X) = XA$ et $\phi(t, A)$ est la solution du problème de Cauchy :

$$X' = XA ; X(0) = 1$$

On sait que

$$\phi(t, A) = \sum_{n \geq 0} \frac{t^n A^n}{n!} = e^{tA}.$$

Cet exemple justifie un peu l'application exponentielle.

4.5.2 Idéal d'une algèbre de Lie

Définition 4.5.7 *Un sous-espace vectoriel h d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} est un idéal de \mathfrak{g} si $[\mathfrak{g}, h] \subset h$*

Exemple 4.5.6 – *L'algèbre de Lie $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ est un idéal de $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$*

- *L'espace vectoriel des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) dont tous les termes diagonaux sont nuls est un idéal de l'algèbre de Lie des matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures).*
- *Le sous-espace vectoriel $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ engendré par les crochets $[X, Y]$ tel que, $X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{g}$ est un idéal de \mathfrak{g} appelé commutant de \mathfrak{g} ou idéal dérivé de \mathfrak{g}*

Remarque 4.5.3 *Il est facile de voir que si h et h' sont deux idéaux d'une algèbre de Lie \mathfrak{g} , on a même pour $h + h'$, $h \cap h'$ et $[h, h']$.*

4.6 Algèbres de Lie nilpotentes

Définition 4.6.1 *Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On pose, pour tout entier $j \geq 0$, $\mathfrak{g}_{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_{(j)}]$ avec $\mathfrak{g}_{(0)} = \mathfrak{g}$, la suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}_{(0)} \supseteq \mathfrak{g}_{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}_{(j)} \supseteq \dots$ est appelée la suite centrale descendante de \mathfrak{g}*

Définition 4.6.2 *Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est nilpotente si la suite centrale descendante s'annule à partir d'un certain rang, i.e s'il existe un entier $k \geq 1$ tel que $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$.*

Si $\mathfrak{g}_{(k-1)} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{(k)} = \{0\}$ on dit que \mathfrak{g} est nilpotente d'indice k .

Exemple 4.6.1 – *Toute algèbre de Lie abélienne vérifiée $\mathfrak{g}_{(1)} = \{0\}$ elle est donc nilpotente d'indice 1 alors, toute algèbre nilpotente d'indice 1 est abélienne.*

- *L'algèbre de Lie réelle des matrices triangulaires supérieures (ou inférieures) dont les éléments diagonaux sont nuls est nilpotente.*

Le cas le plus simple d'une algèbre de Lie nilpotente non abélienne c'est-à-dire, $\mathfrak{g}_{(1)} \neq \{0\}$ et $\mathfrak{g}_{(2)} = \{0\}$ est l'algèbre de Heisenberg.

4.7 Algèbres de Lie résolubles

Définition 4.7.1 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie. On pose, pour tout entier $j \geq 0$, $\mathfrak{g}^{(j+1)} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{(j)}]$ avec $\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}$, la suite décroissante d'idéaux $\mathfrak{g}^{(0)} \supseteq \mathfrak{g}^{(1)} \supseteq \dots \supseteq \mathfrak{g}^{(j)} \supseteq \dots$ est appelée la suite dérivé de \mathfrak{g}

Définition 4.7.2 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dit résoluble si la suite des commutateurs s'annule à partir d'un certain rang c'est-à-dire, s'il existe un entier k tel que $\mathfrak{g}^{(k)} = \{0\}$.

Exemple 4.7.1 1. Toute algèbre nilpotente est résoluble, car $\mathfrak{g}^{(j)} \subset \mathfrak{g}^{(j)}$, pour tout j .

2. Toute algèbre de Lie de dimension 2 est résoluble, en effet, soit elle est abélienne, soit isomorphe à l'algèbre donnée par

$$[e_1, e_2] = e_2$$

et cette algèbre est résoluble.

Proposition 4.7.1 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} alors

1. Si \mathfrak{g} est résoluble alors $\mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$.
2. Si \mathfrak{g} est résoluble alors \mathfrak{g} contient un idéal de codimension 1.

Preuve:

1. Si $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ alors $\mathfrak{g}^{(j)} = \mathfrak{g}$ pour tout $j \geq 0$, ce qui est impossible si \mathfrak{g} est résoluble.
2. Nous savons que $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$ de sorte qu'il existe un sous-espace vectoriel V de codimension 1 de \mathfrak{g} contenant $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]$ on a alors, $[V, \mathfrak{g}] \subset [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset V$, ce qui montre que V est un idéal de \mathfrak{g} .

•

4.8 Forme de Killing

Soit V un espace vectoriel et V^* son dual sur \mathbb{K} (\mathbb{R} ou \mathbb{C})

Définition 4.8.1 Soit $b : V \times V \longrightarrow \mathbb{K}$ une application bilinéaire .

On appelle le radical de b le sous-espace vectoriel $\text{rad}(b) = \{v \in V \mid b(v, v') = 0, \forall v' \in V\}$ de V .

On dit que b est non-dégénérée (dégénérée) si le radical de b est trivial (non trivial).

Considérons le cas où V est une algèbre de Lie \mathfrak{g} sur \mathbb{K} . Alors, il est facile de montrer que l'application k définie par :

$$\begin{aligned} k : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathbb{K} \\ (X, Y) &\longrightarrow \text{Tr}(ad(X) \circ ad(Y)) \end{aligned}$$

est :

- bilinéaire, symétrique
- ad-invariante c'est-à-dire, $k(ad(X)(Y), Z) + k(Y, ad(X)(Z)) = 0$ pour tous X, Y et Z dans \mathfrak{g}
- $k(X, Y) = \frac{1}{2}(k(X + Y, X + Y) - k(X, X) - k(Y, Y))$ pour tous X et Y dans \mathfrak{g}

L'application bilinéaire k est appelée la forme de Killing de \mathfrak{g} .

Remarque 4.8.1 Soit G un groupe de Lie d'algèbre de Lie \mathfrak{g} , si la forme de Killing de \mathfrak{g} est non dégénérée alors, elle définit sur G une métrique.

4.9 Algèbre de Lie simple

Définition 4.9.1 Une algèbre de Lie \mathfrak{g} est dite simple si sa dimension est supérieure ou égale à 2 et si elle ne contient pas d'idéaux propres (autre que $\{0\}$ et \mathfrak{g}).

Exemple 4.9.1 L'espace vectoriel $sl(n, R)$ des matrices carrées d'ordre n est simple

Théorème 4.9.9 (Critère de résolubilité de Cartan) Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique nulle et \mathfrak{g} une algèbre de Lie sur \mathbb{K} et k la forme de Killing de \mathfrak{g} . Alors, on a les équivalences suivantes :

1. \mathfrak{g} est résoluble.
2. $k(\mathfrak{g}, [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}]) = \{0\}$.
3. $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \text{rad}(k)$.

Pour la preuve, voir [12]

4.10 Algèbre de Lie semi-simple

Définition 4.10.1 Une algèbre de Lie est dite semisimple si elle est non nulle et si elle n'admet pas d'idéaux abéliens non nuls.

Ces algèbres se caractérisent aussi par le fait qu'elles sont des produits directs d'algèbres simples.

Exemple 4.10.1 Soient \mathbb{R}_x , \mathbb{R}_y et \mathbb{R}_z les rotations infinitésimales de \mathbb{R}^3 autour des axes

$$x, y \text{ et } z \text{ respectivement, i.e } \mathbb{R}_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \mathbb{R}_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et } \mathbb{R}_z = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En utilisant le crochet défini par le produit matriciel, on vérifie que

$$[\mathbb{R}_x, \mathbb{R}_y] = \mathbb{R}_z, [\mathbb{R}_y, \mathbb{R}_z] = \mathbb{R}_x \text{ et } [\mathbb{R}_z, \mathbb{R}_x] = \mathbb{R}_y$$

est une algèbre de Lie réelle de dimension 3 appelée l'algèbre de Lie semi-simple des rotations infinitésimales de l'espace et notée $\mathfrak{o}(3)$.

Théorème 4.10.10 (Critère de semisimplicité de Cartan) Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie et k sa forme de Killing on a l'équivalence entre :

- (1) k est non-dégénérée.
- (2) \mathfrak{g} est semisimple.
- (3) \mathfrak{g} est une somme directe $\mathfrak{g} = \bigoplus_i \mathfrak{g}_i$ d'idéaux simples de \mathfrak{g} . Cette décomposition est unique, et tout idéal de \mathfrak{g} est une somme de ces \mathfrak{g}_i .

Pour la preuve, voir [12]

4.11 Décomposition de Cartan

Définition 4.11.1 Soit θ un automorphisme de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} défini par :

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\ X &\longmapsto -X^* \end{aligned}$$

Si $\theta^2 = Id$ on dit que θ est une involution de \mathfrak{g} .

Soit k la forme de Killing, encore si la forme bilinéaire symétrique $k_\theta(X, Y) = -k(X, \theta(Y))$ est définie positive on dit que θ est une involution de Cartan.

La proposition suivante montre que n'importe quelle algèbre de Lie semisimple possède une unique involution de Cartan.

Proposition 4.11.1 *Si \mathfrak{g} est une algèbre de Lie semisimple alors, à une conjugaison par un automorphisme intérieur près, \mathfrak{g} possède une unique involution de Cartan.*

Idée de la preuve: On utilise, le faite que :

– Si \mathfrak{g} une algèbre de Lie semisimple et $\mathfrak{g}_\mathbb{C}$ la complexification¹ de \mathfrak{g} et θ l'involution de Cartan alors, pour n'importe quelle involution ρ , il existe $\psi \in Int\mathfrak{g}$ tel que $\psi\theta\psi^{-1}$ commute avec ρ .

Par la suite, on trouve une forme de Killing définie par :

$$k_\theta(X, Y) = -k_\mathfrak{g}(X, \theta(Y)) = -k_{\mathfrak{g}_\mathbb{C}}(X, \psi\tau\psi^{-1}(Y))$$

avec τ et ρ deux involution de Cartan conjugués de \mathfrak{g} telle que cette forme est définie positive alors, θ est une involution de Cartan.

– Si θ' une autre involution de Cartan déferente de θ telle que, $\theta' = \rho$ alors, on peut trouvé $\psi \in Int\mathfrak{g}$ tel que $\psi\theta\psi^{-1}$ (une autre involution de Cartan) commute avec θ' , on assume que θ et θ' commute et par symétrie de la forme de Killing on trouve une contradiction alors, $\theta = \theta'$. pour plus de détaille voir [12].

4.11.1 Existence de décomposition de Cartan

Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semisimple et $k_\mathfrak{g}$ la forme de Killing de \mathfrak{g} .

Une somme directe $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ est dite décomposition de Cartan si :

1. $[\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subset \mathfrak{l}, [\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{p}, [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subset \mathfrak{l}$
2. La forme de Killing

$$k_\mathfrak{g} \text{ est } \begin{cases} \text{définie négative dans } \mathfrak{l} \\ \text{définie positive dans } \mathfrak{p}. \end{cases}$$

Soient $X \in \mathfrak{l}$ et $Y \in \mathfrak{p}$ par la première propriété on a

$$(adXadY)(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{p} \text{ et } (adXadY)(\mathfrak{l}) \subseteq \mathfrak{p}$$

¹Soient V un espace vectoriel réel et W un espace vectoriel complexe, $V^\mathbb{C}$ est la complexification de V , si $W^\mathbb{R} = V \oplus iV$

Par conséquent, $Tr(adXadY) = 0$ alors, la forme de Killing $k_{\mathfrak{g}_0} = 0$ et comme $\theta(Y) = -Y$ alors, $k_{\theta}(X, Y) = 0$. Ceci signifie que \mathfrak{l} et \mathfrak{p} sont orthogonaux.

Nous décrirons maintenant la correspondance entre les involutions de Cartan et les décompositions de Cartan.

Soit θ une involution de Cartan de \mathfrak{g} qui définit une décomposition en espaces propres, un espace propre \mathfrak{l} correspond à la valeur propre $+1$ et un espace propre \mathfrak{p} correspond à la valeur propre -1 tel que :

$$\mathfrak{l} = \{X \in \mathfrak{g}, \theta(X) = X\} \text{ et } \mathfrak{p} = \{Y \in \mathfrak{g}, \theta(Y) = -Y\}$$

cette décomposition est de la forme $\mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$.

Soient X, X' dans \mathfrak{l} et Y, Y' dans \mathfrak{p} et on note que θ est un automorphisme, on obtient :

$$\begin{aligned} \theta[X, X'] &= [\theta X, \theta X'] = [X, X'] \Rightarrow [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subseteq \mathfrak{l} \\ \theta[X, Y] &= [\theta X, \theta Y] = [X, -Y] = -[X, Y] \Rightarrow [\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \\ \theta[Y, Y'] &= [\theta Y, \theta Y'] = [-Y, -Y'] = [Y, Y'] \Rightarrow [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} \end{aligned}$$

Qui implique que \mathfrak{l} et \mathfrak{p} sont orthogonaux. k_{θ} est défini positif puisque θ est une involution de Cartan et par conséquent $k_{\mathfrak{g}}$ est défini négatif dans \mathfrak{l} et défini positif dans \mathfrak{p} .

Alors $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ est une décomposition de Cartan.

Inversement soit la décomposition de Cartan $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$, on définit l'application θ par :

$$\theta = \begin{cases} +1 & \text{dans } \mathfrak{p} \\ -1 & \text{dans } \mathfrak{l} \end{cases}$$

θ respecte les crochets parce que pour X, X' dans \mathfrak{l} et Y, Y' dans \mathfrak{p} on a :

$$\begin{aligned} [\mathfrak{l}, \mathfrak{l}] \subseteq \mathfrak{l} &\Rightarrow \theta[X, X'] = [X, X'] = [\theta X, \theta X'] \\ [\mathfrak{l}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} &\Rightarrow \theta[X, Y] = -[X, Y] = [X, -Y] = [\theta X, \theta Y] \\ [\mathfrak{p}, \mathfrak{p}] \subseteq \mathfrak{p} &\Rightarrow \theta[Y, Y'] = [Y, Y'] = [-Y, -Y'] = [\theta Y, \theta Y'] \end{aligned}$$

On a l'orthogonalité de \mathfrak{l} et \mathfrak{p} et on sait que $k_{\mathfrak{g}}$ est définie négative dans \mathfrak{l} et définie positive dans \mathfrak{p} . Par conséquent, k_{θ} est définie positive alors, θ est une involution de Cartan.

4.12 Décomposition radicielle des algèbres de Lie semi-simples

Définition 4.12.1 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie, si \mathfrak{h} est une sous algèbre maximale abélienne de \mathfrak{g} et si pour toute $h \in \mathfrak{h}$ l'endomorphisme $ad(h)$ de \mathfrak{g} est semi-simple alors, on dit que \mathfrak{h} est une sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} .

Définition 4.12.2 Soit \mathfrak{g} une algèbre de Lie semi-simple et soit \mathfrak{h} un sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} . Pour $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ et $\alpha \neq 0$ on pose

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} / [h, X] = \alpha(h)X \text{ pour tout } h \in \mathfrak{h}\}.$$

Si $\mathfrak{g}_\alpha \neq 0$ et si $\alpha \neq 0$ on dit que \mathfrak{g}_α est un espace de racines restreint et α est une racine restreinte de \mathfrak{g} . L'ensemble des racines restreintes sera noté Ω .

Remarque 4.12.1 – On remarque que $\mathfrak{g}_0 = \mathfrak{h}$

– On peut écrire \mathfrak{g}_α comme $\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} / ad(h)X = \alpha(h)X \text{ pour tout } h \in \mathfrak{h}\}$.

Proposition 4.12.1 Soient \mathfrak{g} une algèbre de Lie semisimple et \mathfrak{h} un sous algèbre de Cartan de \mathfrak{g} , θ l'involution de Cartan de \mathfrak{g} on a alors :

1. $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathfrak{g}_\alpha$ (somme directe orthogonale)
2. $[\mathfrak{g}_\alpha, \mathfrak{g}_\beta] \subseteq \mathfrak{g}_{\alpha+\beta}$ et $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$.

La décomposition $\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathfrak{g}_\alpha$ est appelée la décomposition de \mathfrak{g} en espaces de racines restreints.

Preuve:

1. Par construction
2. Pour $X \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $Y \in \mathfrak{g}_\beta$, on applique l'identité de Jacobi on trouve :

$$\begin{aligned} [h, [X, Y]] &= [[h, X], Y] + [X, [h, Y]] = [\alpha(h)X, Y] + [X, \beta(h)Y] \\ &= \alpha(h)[X, Y] + \beta(h)[X, Y] \\ &= (\alpha + \beta)(h)[X, Y]. \end{aligned}$$

Pour $\theta(\mathfrak{g}_\alpha) = \mathfrak{g}_{-\alpha}$, soit $h \in \mathfrak{h}$ et $X \in \mathfrak{g}_\alpha$, un calcul simple nous donne :

$$\begin{aligned} ad(h)\theta X &= [h, \theta X] \\ &= \theta[\theta h, X] \\ &= -\theta[h, X] \\ &= -\alpha(h)\theta X \end{aligned}$$

Pour plus de détail, voir par exemple [12] .

Exemple 4.12.1 *Décomposition en espace de racines de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$*

Soient $G = SL(n, \mathbb{R})$, $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ son algèbre de Lie, k la forme de Killing de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et θ une application définie par :

$$\begin{aligned} \theta : \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) &\longrightarrow \mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) \\ X &\longmapsto -X^t \end{aligned}$$

On a : $\theta^2(X) = \theta(\theta(X)) = \theta(-X^t) = X = Id$.

Alors, θ est une involution de Cartan et

$$\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R}) = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$$

avec \mathfrak{l} est l'espace des matrices anti symétriques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$ et \mathfrak{p} est l'espace des matrices symétriques de $\mathfrak{sl}(n, \mathbb{R})$.

Exemple 4.12.2 *Décomposition en sous-espace de racines de $so(1, n)$*

En écrivant une matrice M sous la forme $\begin{pmatrix} \alpha & v & \delta \\ u & A & \omega \\ \gamma & t & \beta \end{pmatrix}$, avec $A \in M(n, \mathbb{R})$,

$u, \omega^T, v^T, t \in \mathbb{R}^n, \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$, et en écrivant les conditions pour que nous donne la relation

$${}^T M J + J M = 0 \text{ on obtient qu'une matrice de } so(1, n) \text{ s'écrit } \begin{pmatrix} \alpha & {}^T u & 0 \\ v & A & u \\ 0 & {}^T v & -\alpha \end{pmatrix}$$

avec $u, v \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ et $A \in \mathfrak{o}(n)$ on a alors, la décomposition suivante de l'algèbre de Lie $so(1, n+1)$:

$$so(1, n+1) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+$$

tel que :

$$\mathfrak{n}^+ = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & T_u & 0 \\ 0 & 0 & u \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathfrak{n}^- = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ T_v & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \right\}, \mathfrak{m} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

avec A une matrice de $\mathfrak{o}(n)$. On dit que $\mathfrak{so}(1, n+1) = \mathfrak{n}^- \oplus \mathfrak{a} \oplus \mathfrak{m} \oplus \mathfrak{n}^+$ est une décomposition de $\mathfrak{so}(1, n+1)$ en sous-espaces de racines.

4.13 Décomposition polaire et décomposition KAK

Dans $GL(n, \mathbb{R})$ on considère, le sous-groupe $O(n)$ qui préserve la forme quadratique $x_1^2 + \dots + x_n^2$, on appelle A le sous-groupe des matrices diagonales et S l'ensemble des matrices symétriques définies positives.

4.13.1 Décomposition polaire

Proposition 4.13.1 *L'application $\lambda : O(n) \times S \longrightarrow GL(n, \mathbb{R})$ définie par $\lambda(k, s) = ks$ est un homéomorphisme.*

pour la preuve de la proposition, on utilise la définition et le lemme suivant :

Définition 4.13.1 *On dit qu'un élément $s \in GL(n, \mathbb{R})$ est \mathbb{R} -semi-simple, s'il est conjugué dans $GL(n, \mathbb{R})$ à une matrice diagonale.*

Lemme 4.13.1 *Si s est un élément \mathbb{R} -semi-simple de $GL(n, \mathbb{R})$ dont les valeurs propres sont strictement positives alors, il existe un unique sous-groupe à un paramètre s^t de $GL(n, \mathbb{R})$ dont la valeur en 1 vaut s et tel que pour tout $t \in \mathbb{R}$, s^t est \mathbb{R} -semi-simple de valeurs propres strictement positives.*

Si de plus s est symétrique alors, les s^t sont symétriques pour tout $t \in \mathbb{R}$.

En particulier, si s est symétrique définie positive et si $p \in \mathbb{N}$ est un entier, il existe une unique matrice symétrique définie positive, notée $s^{\frac{1}{p}}$ dont la puissance p -ième vaut s de plus, $s^{\frac{1}{p}}$ commute avec s .

4.13.2 Décomposition KAK

On peut voir un intérêt dynamique à la décomposition KAK. En effet, supposons que $GL(n, R)$ agissant sur une variété M et considérons une suite (g_k) de $O(1, n+1)$ celle-ci, va s'écrire $\ell_{1,k} a_k \ell_{2,k}$ avec $\ell_{1,k}, \ell_{2,k} \in O(n)$ et $a_k \in A$ (où A désigne le sous-groupe des matrices diagonales à coefficients strictement positifs). Ainsi, si l'on s'intéresse au comportement dynamique de (g_k) sur M , il suffit de comprendre le comportement de (a_k) car, les perturbations par des suites compactes vont préserver qualitativement la dynamique.

Théorème 4.13.11 *Tout élément $g \in GL(n, R)$ s'écrit comme un produit $g = k_1 a k_2$, où $k_1, k_2 \in O(n)$ et a est une matrice diagonale dont tous les coefficients sont strictement positifs.*

Preuve: On écrit la décomposition polaire de $g : g = ks$ avec $k \in O(n)$ et s symétrique définie positive. On peut diagonaliser s en base orthonormée, donc il existe $k' \in O(n)$ de sorte que $s = k^T k' a k'$, pour une certaine matrice diagonale a dont les coefficients sont strictement positifs (car ce sont les valeurs propres de s qui est supposée définie positive). Finalement, on obtient $g = k^T k' a k'$ d'où le résultat annoncé avec $k_1 = k^T k'$ et $k_2 = k'$. ■

Pour des groupes de Lie semi-simples on a le théorème suivant :

Théorème 4.13.12 *Soient G un groupe de Lie semi-simple, \mathfrak{g} son algèbre de Lie et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan de \mathfrak{g} , soit \mathfrak{a} un sous-espace abélien maximal de \mathfrak{p} et soit $A = \exp \mathfrak{a}$ le sous-groupe connexe associé, Soit K le sous-groupe G associé à \mathfrak{l} . Alors, $G = KAK$, tel que chaque élément de G est le produit d'un élément de K , et un élément de A et un élément de K de plus K est compact si G de centre fini.*

L'importance de ce théorème apparaît dans la dynamique des groupes de Lie semi-simple. Pour la preuve de ce théorème, voir [1]

4.14 Décomposition KAK dans $O(1, n)$

Dans $O(1, n)$, on note A le groupe des éléments de la forme

$$\begin{pmatrix} e^\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & e^{-\alpha} \end{pmatrix}$$

Le groupe A n'est autre que l'image de \mathfrak{a} par l'application exponentielle. On désigne par K le sous-groupe compact $O(1, n + 2) \cap O(1, n + 1)$.

- Théorème 4.14.13** 1. *La décomposition polaire est interne au groupe $O(1, n)$ c'est-à-dire, que si l'on écrit $g = ks$ avec $k \in O(1, n + 1)$ et $s \in S$ alors automatiquement, $k \in K$ et $s \in S \cap O(1, n)$.*
2. *L'application $\mu : K \times \mathfrak{p} \longrightarrow O(1, n)$, définie par $\mu(k, X) = k \cdot \text{Exp}(X)$ est un homéomorphisme.*
3. *On a la décomposition $O(1, n) = KAK$.*

Pour la preuve, voir [9]



Action de groupes

En géométrie différentielle, les ensembles sur lesquels les groupes de Lie agiront seront des espaces vectoriels ou des variétés différentiables. On donne ici, la définition générale de l'action d'un groupe sur un ensemble, de l'action d'un groupe de Lie sur une variété, et quelques propriétés.

5.1 Action d'un groupe

Définition 5.1.1 Une action à gauche (resp. à droite) d'un groupe G sur un ensemble E est une application

$$\begin{aligned}\phi : G \times E &\longrightarrow E \\ (g, x) &\longmapsto \phi(g, x)\end{aligned}$$

satisfaire les conditions suivantes :

- $\phi(e, x) = x$ pour tous $x \in E$
- $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(gh, x)$ (resp. $\phi(g, \phi(h, x)) = \phi(hg, x)$)

On note pour une action à gauche par $\phi(g, x) = gx$.

On note, pour $g \in G$, l'application ϕ_g définie par :

$$\begin{aligned}\phi_g : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \phi(g, x)\end{aligned}$$

où donc, $\phi_g \in \text{Aut}(E)$, groupe des automorphismes de E . Ainsi, pour chaque élément g de G , ϕ_g est une bijection sur E . Sur cette application, les conditions pour que ϕ soit une

action sont $\phi_e = Id_E$ et $\phi_g \circ \phi_h = \phi_{gh}$

On peut aussi voir l'action de G sur E comme l'homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Aut(E) \\ g &\longmapsto \phi_g \end{aligned}$$

donc on a la définition suivante :

Définition 5.1.2 *On dit que l'action de G sur E est effective si $g \longmapsto \phi_g$ est injective. L'action sera dite libre si les stabilisateurs $G_x = \{g \in G / \phi_g(x) = x\}$ pour tout $x \in E$ sont réduits à $\{e\}$. Les stabilisateurs G_x sont aussi appelés groupe d'isotropie de x .*

Si le groupe G agit sur une variété topologique M , on supposera que $\phi_g : M \longrightarrow M$ est en plus continue pour tout $g \in G$, et si M est une variété différentiable, on supposera que ϕ_g est différentiable. Dans ce cas, l'action réalise un homomorphisme de groupes

$$\begin{aligned} G &\longrightarrow Diff(M) \\ g &\longmapsto \phi_g \end{aligned}$$

où $Diff(M)$ est le groupe des difféomorphismes de M .

Dans le cas où G est un groupe topologique, on supposera que l'action de G sur une variété topologique M est en plus continue en $g \in G$. Donc $\phi : G \times M \longrightarrow M$ est une application continue. Dans ce cas, les sous-groupes G_x sont fermés dans G (car M est séparée). Si G est un groupe de Lie et M une variété différentiable, alors $\phi : G \times M \longrightarrow M$ est supposée différentiable.

Remarque 5.1.1 *Dans ce chapitre, on prendra que des actions à gauche, les résultats sont essentiellement les mêmes, si on prend des actions à droite.*

Exemple 5.1.1 *Comme exemple d'action, nous pouvons voir que n'importe quel groupe G agit sur lui-même par la translation à gauche L_g .*

Définition 5.1.3 *Soit G un groupe et ϕ une action de G sur un espace vectoriel E . Soit F un sous-espace vectoriel de E . On dit que F est un sous-espace invariant par rapport à l'action ϕ de G si pour tout $g \in G$ et tout $h \in F$, $\phi(g)h \in F$, et on écrit $\phi(g)F \subset F$*

Définition 5.1.4 *On dit que l'action ϕ est réductible s'il existe au moins un sous-espace vectoriel invariant de E qui ne soit ni $\{0\}$ ni E lui-même. Dans le cas contraire, l'action sera dite irréductible.*

5.2 Orbite d'une action

Définition 5.2.1 Soit G un groupe quelconque agissant sur un ensemble E , on définit une relation d'équivalence \sim sur E tel que :

$$\forall x, y \in E : x \sim y \text{ si } y = g.x \text{ pour } g \in G$$

pour chaque x dans E , la classe d'équivalences de x , est l'orbite de x , on le note par $\theta_x = \{\phi(g, x)/g \in G\}$.

Si $\theta_x = E$ on dit que l'action est transitive. Dans ce cas, les groupes d'isotropie G_x sont tous conjugués. En effet, pour $x, y \in E$ il existe toujours un $g \in G$ tel que $y = g.x$. Alors il est facile de voir que $G_y = g G_x g^{-1}$.

Si G est un groupe de Lie agissant sur une variété différentiable M , l'orbite d'un point n'est pas nécessairement une sous-variété de M .

5.3 Espace quotient

L'espace de toutes les orbites de l'action d'un groupe G sur une variété M , appelé espace quotient de M par G , n'est pas toujours une variété différentiable, ni même un espace topologique séparé.

Définition 5.3.1 Nous dirons que l'action d'un groupe G sur une variété topologique M est proprement discontinue si elle vérifie les trois conditions suivantes :

- Si $x, x' \in M$ sont deux points non reliés par l'action de G (c'est à dire si x' n'est pas dans l'orbite de x), alors x et x' admettent des voisinages respectifs U et U' tels que $\phi_g(U) \cap U' = \emptyset$ pour tout $g \in G$.
- Pour tout $x \in M$, le groupe d'isotropie $G_x = \{g \in G/\phi_g(x) = x\}$ de x est fini.
- Tout x admet un voisinage U stable par G_x tel que $\phi_g(U) \cap U' = \emptyset$ pour tout $g \in G$

Remarque 5.3.1 On remarquera que dans la définition même d'une action proprement discontinue, la première condition implique que M/G soit un espace topologique séparé. Si l'action est libre, alors la seconde condition est trivialement satisfaite.

5.4 Espaces homogènes

Définition 5.4.1 Un espace homogène d'un groupe de Lie G est une variété différentiable M munie d'une action à gauche transitive (et différentiable) de G .

Dans ce cas, si $x \in M$; alors G_x le sous-groupe d'isotropie de x , est fermé, et l'application $f_x : G/G_x \longrightarrow M$ définie par $f_x(gG_x) = g.x$ est un difféomorphisme. En d'autres termes, un espace homogène est l'espace quotient d'un groupe de Lie par un sous-groupe fermé, alors nous identifions M avec G/G_x par ce difféomorphisme.

Définition 5.4.2 Un espace homogène G/G_x , muni d'une métrique pseudo-Riemannienne invariante par G est appelé espace homogène pseudo-Riemannienne, tel que G_x le sous-groupe d'isotropie de x ou le stabilisateur de x dans G .

Exemple 5.4.1 – Le groupe $SO(n)$ agit transitivement sur la sphère \mathbb{S}^{n-1} . Le groupe d'isotropie d'un point de la sphère est $SO(n-1)$. Donc $SO(n)/SO(n-1) \simeq \mathbb{S}^{n-1}$
 – \mathbb{R}^n est homogène sous l'action du groupe $O(n) \times \mathbb{R}^n$
 – \mathbb{S}^n est un espace homogène sous l'action de $O(n+1)$.

Remarque 5.4.1 Une variété homogène pseudo-Riemannienne s'appelle un espace homogène. Comme l'espace homogène est complètement déterminé par son groupe d'isométrie, alors n'importe quelle propriété géométrique à un point est assurée pour tous les points.

Proposition 5.4.1 Pour un espace homogène M l'application $V \rightarrow V_p$ est une surjection de l'espace $k(M)$ de champ de Killing dans M vers l'espace tangent de M au point p .

cette proposition signifie que chaque vecteur tangent à un espace homogène peut être prolongé à un champ de Killing sur M .

5.4.1 Complétude

Un espace homogène Riemannien est complet, mais ceci n'est pas assuré dans la géométrie pseudo-Riemannienne générale.

Par l'exemple qui suit, on montre qu'un espace homogène pseudo-Riemannien n'est pas nécessairement complet.

Exemple 5.4.2 Soit $\mathbb{R}^{1,1}$ un espace Lorentzien comme on a vu dans l'exemple 1.1.1 est \mathbb{R}^2 équipé de la forme quadratique $Q(x_1, x_2) = 2x_1x_2$. Soit (α, β) un point de \mathbb{R}^2 avec $\alpha > 0$. l'application

$$(x, y) \longrightarrow \left(\frac{x}{\alpha}, \alpha y - \alpha\beta\right)$$

est une isométrie de \mathbb{R}_1^2 vers \mathbb{R}_1^2 par les applications du sous espace Lorentzien

$$H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$$

qui envoie le point (α, β) vers le point $(1, 0)$. Ceci implique que H est un espace homogène, mais la courbe $\gamma(t) = (t, 0)$ est une géodésique et son domaine de définition maximal est \mathbb{R}_+^* , ce qui prouve que H n'est pas complet.

Proposition 5.4.2 *Un espace homogène pseudo-Riemannien compact est complet.*

Preuve: Pour la preuve, voir [17] .

Cette proposition nous donne la relation entre l'homogénéité et la complétude en géométrie pseudo-Riemannienne générale.

Classification des actions de groupes de Lie semi-simples sur une variété à une dimension

Les actions de groupe de Lie sur les 1-variétés ont été classifiées par Sophus Lie [16] , [15] on donne par la suite une partie de son théorème principal.

Théorème 5.4.14 *Si un groupe de Lie semi-simple agit non trivialement sur une variété de dimension 1 alors, il possède $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ comme facteur local.*

5.5 Actions propre et non propre

Définition 5.5.1 *Une action continue ϕ d'un groupe topologique G sur un espace topologique M est propre, si pour un sous-ensemble compact $A \subseteq M$,*

l'ensemble $\{g \in G : gA \cap A \neq \emptyset\}$ est compact dans G

On peut dire aussi (l'équivalence), si pour des suites (x_n) de M , et (g_n) de G , si (x_n) et $(g_n x_n)$ convergent dans M , donc il existe des sous suites (g_n) convergentes dans G .

Si l'action de Φ n'est pas propre, on dira, qu'elle est nonpropre. L'action ϕ est nonpropre, s'il existe un compact K de M tel que $\{g \in G / gK \cap K \neq \emptyset\}$ ne soit pas une partie compacte de G .

Ceci, est équivalent à dire qu'il existe une suite (x_n) de points de M , une suite (g_n) d'éléments de G telles que (x_n) converge dans M , $g_n x_n$ converge dans M , mais l'ensemble $\{g_n, n \in \mathbb{N}\}$ n'est pas relativement compacte dans G .

Remarque 5.5.1 *si G est un groupe discret alors, l'action ϕ est proprement discontinue .*

Exemple 5.5.1 – *L'action du groupe d'isométrie d'une variété Riemannienne M sur la variété M est propre, en particulier le stabilisateur de n'importe quel point est compact .*

- Si M est compact, seulement les groupes compacts agissent proprement sur M
- L'action du groupe $\left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R} \right\} \subset SL(2, \mathbb{R})$ sur \mathbb{R}^2 est nonpropre depuis qu'il fixe l'origine de plus, il est nonpropre sur $(\mathbb{R}^2)^*$ en effet la suite $X_n = (e^n, 1)$ converge vers $(0, 1)$ dans $(\mathbb{R}^2)^*$ et la suite $\begin{pmatrix} e^n & 0 \\ 0 & e^{-n} \end{pmatrix}$ est non bornée dans $SL(2, \mathbb{R})$ mais $\begin{pmatrix} e^n & 0 \\ 0 & e^{-n} \end{pmatrix} X_n = (1, e^{-n})$ converge vers $(1, 0)$ dans $(\mathbb{R}^2)^*$ ainsi l'action est nonpropre

5.6 Nonpropreté des actions de groupe de Lie abélien

Ce qui suit est un critère pour la non-propreté des actions linéaires des groupes de Lie abéliens

Lemme 5.6.1 Soit $\{\lambda_1, \lambda_n\}$ un système générateur dans \mathbb{R}^d . Soit \mathbb{R}^d agit fidèlement sur \mathbb{R}^n par les matrices diagonales comme suit :

Pour $t \in \mathbb{R}^d$, on met $M(t) = \text{diag}(e^{\langle \lambda_i, t \rangle})_{1 \leq i \leq n}$, tel que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^d . Supposons que V est un sous-espace invariant (topologique) de \mathbb{R}^d sur lequel l'action est non-propre. Alors, il existe un vecteur non nul $t_o \in \mathbb{R}^d$ et un élément $X \in \mathbb{R}^d$ tels que $x_i = 0$ si $\lambda(t_o) < 0$ ou élément $y \in \mathbb{R}^n$ tels que $y_i = 0$ si $\lambda(t_o) > 0$.

Preuve:

Pour la preuve, voir [8] .

5.7 Action d'algèbre de Lie

Soit une action ϕ_G de G sur M , cette action induit une action de l'algèbre de Lie \mathfrak{g} de G sur M qui est un homomorphisme $\phi_{\mathfrak{g}}$ de Lie de \mathfrak{g} vers l'algèbre de Lie $\mathfrak{X}(M)$ de tous les champs de vecteurs sur M , définie par : pour X dans \mathfrak{g} , on associe le champ de vecteur \widehat{X} sur M définie par : $\widehat{X}_m = \frac{d}{dt}|_{t=0}(\exp(tX).m)$. On peut définir ce champ de vecteur par une dérivation de la fonction $g \mapsto gx$ de G vers M à l'élément neutre de G . On suppose que G est un groupe de Lie connexe agit sur une variété M et O est l'orbite de M , comme G se produit par n'importe quel voisinage de 1 et l'application exponentielle est un difféomorphisme entre un voisinage de 0 dans \mathfrak{g} et un voisinage de 1 dans G alors, on a : $T_x O = \{\widehat{X}_x, X \in \mathfrak{g}\}$

Définition 5.7.1 On dit qu'une action ϕ est :

- Presque libre ou localement libre si, $\widehat{X}_x = 0$ pour certains points $x \in M$ implique $X = 0$.
- Presque fidèle ou localement fidèle si $\phi_{\mathfrak{g}}$ est injective.

Application de Gauss

Soit G un groupe de Lie agit isométriquement sur une variété Lorentzienne (M, h) , et \mathfrak{g} l'algèbre de Lie de G . Pour chaque $X \in \mathfrak{g}$, soit \widehat{X} le champ de vecteur sur M donné par

$$\widehat{X}_x = \frac{d}{dt}(\exp(tX).x) |_{t=0}.$$

Soit l'application de gauss définie par :

$$\begin{aligned} \psi : M &\longrightarrow S^2(\mathfrak{g}) \\ x &\longmapsto \psi_x : (X, Y) \longmapsto h_x(\widehat{X}_x, \widehat{Y}_x) \end{aligned}$$

Tel que X_x, Y_x des champs de vecteurs sur M au point x et $S^2(\mathfrak{g})$ est la sphère unité dans \mathbb{R}^3 (l'ensemble de tous les vecteurs unités sur \mathbb{R}^3)

Pour q dans $S^2(\mathfrak{g})$ et g dans G , et X_1, X_2 dans \mathfrak{g} on définit une application φ définie par :

$$\begin{aligned} \varphi : G.S^2(\mathfrak{g}) &\longrightarrow S^2(\mathfrak{g}) \\ (g, q) &\longmapsto (g.q)(X, Y) = q(Ad_{g^{-1}}X, Ad_{g^{-1}}Y) \end{aligned}$$

φ est une action de G sur $S^2(\mathfrak{g})$ car :

1. $\varphi(e, q) = e.q(X, Y) = q(X, Y) = q$
2. $\varphi(g, \varphi(h, q)) = g.\varphi(h, q) = g.h.q(X, Y) = gh.q(X, Y) = \varphi(gh, q)$

Alors, ψ est équivariant, tel que

$$g.\psi_x = \psi_{g.x} \quad \forall g \in G.$$

En effet, pour $g \in G$ et $X \in \mathfrak{g}$, nous avons :

$$\begin{aligned}
\widehat{Ad_g X_{gx}} &= \frac{d}{dt}(\exp t Ad_g X \cdot gx) |_{t=0} \\
&= \frac{d}{dt}(g \exp t X \cdot g^{-1} \cdot gx) |_{t=0} \\
&= dg_x(\widehat{X}_x).
\end{aligned}$$

Par conséquent, pour $X, Y \in \mathfrak{g}$, $x \in M$ et $g \in G$, nous obtenons (en utilisant le fait que G agit sur M d'une manière isométrique)

$$\begin{aligned}
g \cdot \psi_x(X, Y) &= h_x(\widehat{Ad_{g^{-1}} X_x}, \widehat{Ad_{g^{-1}} Y_x}) \\
&= h_x(dg_{gx}^{-1} \widehat{X}_{gx}, dg_{gx}^{-1} \widehat{Y}_{gx}) \\
&= h_{gx}(\widehat{X}_{gx}, \widehat{Y}_{gx}) \\
&= \psi_{gx}(X, Y).
\end{aligned}$$

On observons que si G agit non-proprement sur M alors, il agit ainsi non-proprement sur $\psi(M)$.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇

Dynamique des variétés lorentziennes

Soit G un groupe de Lie et M une variété Lorentzienne, on pose la question suivante : sous quelles conditions G agit-il d'une manière isométrique sur M tout en préservant une métrique Lorentzienne ?

Ce problème a été traité dans le cas où M est compacte, par Adams dans [3] et Zeghib dans [20], et quelques résultats partiels dans le cas général ont été traités par N.Kowalsky dans [14]. Dans la section suivante, on donne quelques résultats principales qui concernent la classification des actions des groupes de Lie sur des variétés Lorentziennes compactes, sans donné des preuves.

6.1 Dynamique des variétés Lorentziennes compactes

Dans le cas compact, le groupe de Lie peut être semi-simple, ou résoluble. Dans [23], R.Zimmer prouvé que $SL(2, \mathbb{R})$ est le seul groupe de Lie semi-simple, non-compact, qui peut agir isométriquement sur une variété Lorentzienne compacte.

Théorème 6.1.15 ([23]) *Si un groupe de Lie semi-simple G non-compact, agit localement fidèlement et isométriquement sur une variété Lorentzienne compacte, alors, celle-ci est localement isomorphe à la somme de $\mathfrak{sl}(2, \mathbb{R})$ et une algèbre de Lie compacte.*

Dans le cas où le groupe de Lie est résoluble, nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.1.16 ([20], [3]) *Soit G un groupe de Lie résoluble agit localement librement et isométriquement sur une variété Lorentzienne compacte M et soit N le nilradical de G alors :*

1. *Si $G = N$ alors, \mathfrak{g} est isomorphe à la somme d'une algèbre de Lie abélienne \mathfrak{a} et une algèbre de Lie de Heisenberg \mathfrak{h} .*

2. Si $G \neq N$ et N est abélien alors, \mathfrak{g} est isomorphe à la somme de l'algèbre de Lie d'un groupe affine et une algèbre de Lie abélienne \mathfrak{a} .
3. Si $G \neq N$ et N n'est pas abélien alors, \mathfrak{g} isomorphe à la somme d'une algèbre de Lie abélienne \mathfrak{a} et une algèbre de Lie de Heisenberg rationnellement tordue \mathfrak{h} .

Dans le cas général, on a le théorème suivant :

Théorème 6.1.17 ([20], [3]) Soit G un groupe de Lie qui agit isométriquement, localement fidèlement sur une variété Lorentzienne compacte M alors :

$\mathfrak{g} \simeq \mathfrak{q} \oplus A \oplus \mathfrak{l}$, où \mathfrak{l} est semi-simple compacte, A Abélien et $\mathfrak{q} \in \{ \text{algèbres de Lie de Heisenberg} \} \cup \{ \text{algèbres de Lie rationnellement tordues} \} \cup \{ \mathfrak{sl}(2, \mathbb{R}) \} \cup \{ \text{algèbre de Lie du groupe affine} \} \cup \{1\}$

Ce théorème donne une classification générale des groupes de Lie connexes, qui peuvent agir isométriquement sur une variété Lorentzienne compacte.

La preuve est basée sur la décomposition de Levi des algèbres de Lie, cependant si \mathcal{R} est le radical résoluble de \mathfrak{g} et \mathfrak{l} sa partie semisimple alors, nous avons :

- Si \mathfrak{l} est noncompact alors, \mathcal{R} est abélien.
- $[\mathfrak{l}, \mathcal{R}] = 0$

Ceci implique que l'étude des actions nonpropre des groupes de Lie sur les variétés Lorentziennes compactes, réduit à l'étude des actions de groupes de Lie semisimple et résolubles. Pour une preuve détaillée de ces théorèmes, voir [20], [3].

6.2 Travail de Kowalsky

Dans cette approche Kowalsky a considéré le cas où M n'est plus compacte.

L'idée principale de cette approche est la suivante :

Si G un groupe de Lie agit isométriquement sur une variété M , on considère une application équivariante définie de M vers l'espace des formes bilinéaires symétriques $\mathcal{S}^2(\mathfrak{g})$, qui s'appelle application de Gauss, qui indique la dynamique sur M .

C'est à dire, par cette application la condition de la non-propreté est traduite comme une condition géométrique sur la métrique induite sur les orbites.

Cette idée est utilisée par d'autres auteurs, par exemple par S.Adams et G.Stuk dans [3], [4] et Gromov dans [10], Zimmer dans [23].

N.Kowalsky arrive à énoncer un ensemble de huit théorèmes, mais elle n'a prouvé que la moitié. Parmi ces résultats, a montré dans [14], que parmi les groupes de Lie simples

de centre fini, seuls les groupes localement isomorphes à $SL(2, \mathbb{R})$, $O(1, n)$ ou $O(2, n)$ peuvent agir isométriquement sur une variété Lorentzienne.

Théorème 6.2.18 ([14]) *Si un groupe de Lie simple de centre fini agit isométriquement, localement librement et nonproprement sur une variété Lorentzienne alors, ce groupe est localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$.*

Théorème 6.2.19 ([14]) *Si un groupe de Lie simple de centre fini agit isométriquement, localement fidèlement et nonproprement sur une variété Lorentzienne alors, ce groupe est localement isomorphe soit à $O(1, n)$ ou à $O(2, n)$.*

Dans la suite, on donne une idée générale de la preuve de ses théorèmes.

On suppose que G est un groupe de Lie simple avec un centre fini agit d'une manière isométrique et non-propre sur une variété Lorentzienne M , par la décomposition KAK de G , on peut remarquer que K est compact alors, A agit nonproprement alors, il existe une suite y_n dans l'algèbre de Lie \mathfrak{a} de A et une suite (x_n) dans M tels que, e^{y_n} tend vers l'infini, (x_n) converge dans M et $(e^{y_n}.x_n)$ converge vers x . Comme dans la preuve du théorème 6.3.20, en utilisant l'application de gauss ψ , on trouve un sous-espace \mathfrak{a}_0 de dimension supérieure ou égale à 2 et dont l'image de \mathfrak{a}_0 par G , qu'on le note par $\widehat{\mathfrak{a}}_0$ est de type lumière alors, est de dimension 1. Cela implique, l'existence d'un sous-espace \mathfrak{a}_1 de \mathfrak{a} , tel que $a_{1_x} = 0$, c'est-à-dire, $\widehat{X}_x = 0$, pour tout X dans \mathfrak{a}_1 . On peut prendre $x_n = x$ et $y_n \in \mathfrak{a}_1$. Par le même raisonnement, on trouve un autre espace \mathfrak{a}_2 . Alors, on trouve le plus grand espace E tel que $\widehat{E}_x = 0$.

Par ce raisonnement, Kowalsky a prouvé que si \mathfrak{g} n'est pas isomorphe ni à $\mathfrak{o}(1, n)$ ni à $\mathfrak{o}(2, n)$ alors, $\widehat{\mathfrak{g}}_x = 0$. Ainsi, prouvé que \mathfrak{g} est une sous algèbre de $\mathfrak{o}(1, n)$ alors, isomorphe à un certain $\mathfrak{o}(1, k)$ donc, Contradiction.

6.3 Dynamique des variétés Lorentziennes noncompactes

6.3.1 Une approche géométrique

On introduit par la suite, une nouvelle approche différente de celle de N.Kowalsky, cette approche est de nature géométrique, qui nous permis de retrouver tous les résultats de Kowalsky, avec une généralisation au cas semi-simple, supposant que aucun $SL(2, \mathbb{R})$ -facteurs local, comme on a vue dans le chapitre 4, un groupe de Lie semisimple est essentiellement, un produit des groupes de Lie simples, mais en général, une action non-propre d'un produit n'implique pas une action nonpropre d'un facteur.

Cependant, dans l'arrangement Lorentzien, nous concluons, qu'il est nécessaire de passé du cas simple au cas semisimple. C'est vraiment un raisonnement important, puisqu'il mène à réduire le travail restant dans le cas où le groupe est résoluble. Naturellement, notre raisonnement se repose sur la décomposition de Levi des groupes de Lie, qui indique qu'un groupe de Lie est essentiellement un produit semidirect d'un groupe semisimple et résoluble.

6.3.2 D'une action non propre à un espace homogène non propre

Le résultat suivant est en particulier, un rappel du théorème de plongement de Zimmer [23], qui nous permet d'obtenir des actions homogènes, c'est à dire, transitives depuis des actions non transitives.

Théorème 6.3.20 *Soit G un groupe de Lie semi-simple, de centre fini, agit isométriquement et non-proprement sur une variété Lorentzienne M . Supposons que aucun facteur local de G est localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Il y a alors, un point avec un stabilisateur non-compacte. En particulier, la restriction de l'action de G à son orbite est non-propre, en plus de précision, le stabilisateur d'un certain point contient un groupe à un paramètre non trivial unipotent. (en d'autres termes, un G -espace Lorentzien non-propre contient un G -orbite homogène non-propre).*

Preuve: Soit \mathfrak{h} une sous-algèbre de Cartan, telle que est maximale abélienne, et $\mathfrak{g} = \mathfrak{l} \oplus \mathfrak{p}$ la décomposition de Cartan et A le groupe de Cartan associé, tel que $A = \exp \mathfrak{h}$.

On prouve qu'il existe une point $q \in M$, tels que \mathfrak{g} admet un sous-espace isotrope en prend on considération, la forme bilinéaire symétrique $\psi(q)$, de dimension ≥ 2 .

Alors il résulte, la non-précompacité du stabilisateur $stab(q)$.

Soit $\Omega = \Omega(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$, le système de racine de $(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$ et

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_o \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Omega} \mathfrak{g}_\alpha$$

la décomposition en espace de racine où

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : adh.X = \alpha(h).X, \forall h \in \mathfrak{h}\},$$

$$\mathfrak{g}_o = \{X \in \mathfrak{g} : adh.X = 0, \forall h \in \mathfrak{h}\}.$$

Alors, A agit sur \mathfrak{g} , par les matrices diagonales, car :

$$Ad_{g^{-1}} = Ad_{\exp(h)} = e^{ad(h)} = \text{diag}(e^{\alpha(h)})_{\alpha \in \Omega \cup \{0\}},$$

ou $g^{-1} = \exp(h)$, $h \in \mathfrak{h}$. Alors, A agit par les matrices diagonales sur $S^2(\mathfrak{g})$, et $S^2(\mathfrak{g})$ admet la décomposition suivante :

$$S^2(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{\lambda \in \Omega \cup \{0\} + \Omega \cup \{0\}} V_\lambda,$$

tel que V est l'ensemble des formes bilinéaires symétriques q sur \mathfrak{g} qui satisfait

$$q(\exp(h).X_1, \exp(h).X_2) = e^{\lambda(h)}.q(X_1, X_2),$$

pour tout $h \in \mathfrak{h}$ et tout $X_1, X_2 \in \mathfrak{g}$.

On sait que pour $X_1 \in \mathfrak{g}_\alpha$ et $X_2 \in \mathfrak{g}_\beta$ nous avons :

$$q(\exp(h).X_1, \exp(h).X_2) = e^{(\alpha+\beta)(h)}.q(X_1, X_2),$$

Alors, pour les formes q dans V_λ on a :

$$\alpha + \beta \neq \lambda \Rightarrow \mathfrak{g}_\alpha \perp \mathfrak{g}_\beta.$$

Comme G agit non-proprement sur M et ψ est équivariant alors, G agit non-proprement sur $\psi(M)$

Soit $G = KAK$ la décomposition de Cartan de G . Puisque G possède un centre fini, K est compact. Ainsi, A agit également non-proprement sur $\psi(M)$.

Par le lemme 5.6.1, il existe $h \neq 0$, $q \in \psi(M)$ et $\lambda_o \in \Omega \cup \{o\} + \Omega \cup \{o\}$ tel que $\lambda_o(h) < 0$ et $q_\lambda = 0$ pour tout $\lambda \in \Omega \cup \{o\} + \Omega \cup \{o\}$ avec $\lambda(h) < 0$.

On pose $q = \psi_x$ alors, $\bigoplus_{\alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ est isotrope respectant ψ_x , par conséquent l'image du $\bigoplus_{\alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ par l'application $X \longrightarrow \widehat{X}_x$ est un sous-espace isotrope de $T_x M$, ainsi sa dimension est moins ou égale à 1.

Cependant pour tout $h \in \mathfrak{h}$, la dimension du $\bigoplus_{\alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ est au moins 2 (où G est supposé n'avoir aucun facteur local localement isomorphe à $SL(2, R)$).

Cette dimension ne peut pas être 0, puisque G est semi-simple. Si elle égale 1 alors, le sous-algèbre $\bigoplus_{\alpha(h) \geq 0} \mathfrak{g}_\alpha$ a un codimension 1 dans G . Ceci est une contradiction avec la non existence d'un facteur $SL(2, R)$ (seulement les groupes simples qui sont localement isomorphes à $SL(2, R)$ agit sur les 1-variétés), voir théorème 5.4.14.

On déduit de ceci l'existence d'un élément différent de zéro $X \in \bigoplus_{\alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ tels que $\widehat{X}_x = 0$, ce qui nous donne $\exp(tX) \in \text{stab}(x)$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Mais des éléments de $\bigoplus_{\alpha(h) < 0} \mathfrak{g}_\alpha$ sont nilpotents, et produisent ainsi des groupes non-compacts. d'où le résultat .

Comme résultat on donne par la suite une généralisation du théorème 5.2.1 de Kowalsky dans le cas de semisimple.

Corollaire 6.3.1 *Si un groupe de Lie semisimple avec un centre fini agit isométriquement, localement librement et nonproprement sur une variété Lorentzienne alors, il possède un facteur local isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$.*

6.4 Structure de produit tordu via l'homogénéité partiel

On donne par la suite un résultat qui montre que les espaces homogènes sont rares dans la géométrie Lorentzienne, en comparaison avec le cas Riemannien.

En suite en décrivant la situation selon le type causal de l'orbite donnée dans le théorème 6.3.20

Théorème 6.4.21 ([22]) *Si (M, g) est un espace homogène Lorentzien de dimension ≥ 3 , avec un groupe d'isotropie irréductible alors, il possède une courbure sectionnelle constante*

On voit que l'énoncé dans [22] semble plus faible, puisque le groupe d'isotropie est supposé satisfaire à une condition supplémentaire de la non précompacité. Cependant, ceci résulte de l'irréductibilité.

En effet, dans le même sens que [22], le résultat principal de [7] indique comment l'irréductibilité est forte dans le cas Lorentzien.

Théorème 6.4.22 ([7]) *Un sous-groupe de Lie H de $O(1, n)$ (n'est pas nécessairement fermé), qui ne préserve aucun sous-espace isotrope unidimensionnel de \mathbb{R}^{1+n} , est appartenant à conjugaison, d'une union de quelques composantes d'un certain $O(1, p) \subset O(1, n)$. En particulier, si H agit irréductiblement sur \mathbb{R}^{1+n} alors, H contient $SO_o(1, n)$.*

Notre but est de modérer l'homogénéité en considérant la non-transitivité de l'action isométriques du groupe.

Ce travail est motivé réellement par l'étude des actions isométrique de groupe de Lie sur les variétés Lorentziennes non-compactes, par exemple dans le même sens que [2], [13], [14]. Pour simplifier, on suppose toujours que toutes les actions de groupe indiqué sont fidèles. Nous demandons d'abord s'il existe une adaptation du théorème 6.4.21 aux actions isométriques non-transitives. Dans cette situation, nous considérons un groupe G agit isométriquement sur une variété Lorentzienne (M, g) . Chaque orbite est un espace homogène. Cependant, le type causal de l'orbite peut être temporel, spatial ou lumière, c'est-à-dire, la métrique induite peut être Lorentzienne, Riemannienne ou dégénérée, respectivement. La généralisation suivante du théorème 6.4.21 se repose sur l'existence des orbites du type Lorentzien satisfaire à l'irréductibilité. Il indique que l'espace est partiellement d'une courbure constante.

Théorème 6.4.23 *Soit G un groupe de Lie agit isométriquement sur une variété Lorentzienne (M, g) de dimension ≥ 3 . Supposons qu'il existe une orbite N qui est un espace Lorentzien homogène avec l'isotropie irréductible (réduit à TN).*

Alors, N est un espace complet d'une courbure sectionnelle constante, et G contient la composante d'identité $Isom^o(N)$ comme facteur, de plus, un voisinage de N est un produit tordu $L \times_w N$, où L est la variété Riemannienne correspond et le facteur N correspond aux orbites de $Isom^o(N)$.

qui suit sera utile dans les preuves, et donne également une description géométrique et algébrique exacte de N, N_1, G, G_1, \dots

Proposition 6.4.1 *Soit G un groupe de Lie connexe agit isométriquement et transitivement sur un espace Lorentzien N de courbure constante.*

supposent que le groupe d'isotropie de G est irréductible alors, G égale $Isom^o(N)$ et N est l'un de ce qui suit :

- *L'espace plat de Minkowski.*
- *L'espace de de Sitter $SO(1, n + 1)/SO(1, n)$ (de courbure constante positive).*
- *Revêtement (cyclique) de l'espace anti de Sitter $SO(2, n)/SO(1, n)$ (d'une courbure constante négative).*

Preuve: Considérons le cas où N est plat (la preuve est la même dans les autres cas). Ainsi, N est localement isométrique au l'espace $\mathbb{R}^{1,n}$ de Minkowski, pour lequel la composante d'identité du groupe d'isométrie est le produit semidirect $SO(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1+n}$. D'après le théorème 6.4.22, le stabilisateur dans G doit égale $SO(1, n)$ (nous avons assumé G connexe). Il suit que G intersecte le groupe de translation \mathbb{R}^{1+n} dans un sous-groupe ouvert, et donc, G contient toutes les translations, et par conséquent égale à $SO(1, n) \ltimes \mathbb{R}^{1+n}$ et N est exactement l'espace de Minkowski. (Une autre manière de conclure est d'observer que le groupe d'isométrie complet de l'espace de Minkowski est engendré par les stabilisateurs de ses points, en fait, les stabilisateurs de deux points différents s'engendrent.)

▪

Preuve du théorème 6.4.23

N est un espace Lorentzien donc $dim N \geq 2$ et par l'hypothèse d'irréductibilité $dim N > 2$ puisque les deux directions isotropes dans un tel sous-espace sont préservées, d'après le théorème 6.4.21, N possède une courbure constante.

Pour le reste de la preuve, nous avons les lemmes suivants

Lemme 6.4.1 *Soient E et F deux espaces vectoriels Lorentziens (resp. euclidiens). On note par $O(E)$ et $O(F)$ leurs groupes orthogonaux respectivement. Soit H' un sous-groupe de lie de $O(E) \times O(F)$, dont la projection sur $O(E)$ agit irréductiblement sur E .*

Puis, H' contient un sous-groupe $H \subset O(E) \times \{1\}$, qui contient la composante d'identité de $H \subset O(E) \times \{1\}$. En particulier :

** toute application H -invariante linéaire $f : E \longrightarrow F$ ($f \circ h = f$, pour tout $h \in H$) est triviale.*

** le même est vrai pour toute application H -invariante bilinéaire antisymétrique $E \times E \longrightarrow F$.*

Preuve: On conclure du cas irréductible du théorème 6.4.22 que la projection H de H' sur $O(E)$ contient la composante d'identité de $O(E)$ (isomorphe à $O(1, n)$ pour $1 + n = \dim E$), on pose $H = O(E)$, pour simplifier la notation.

Comme $O(F)$ est compact, H est isomorphe à un facteur Levi semi-simple non-compacte de H' . Par conséquent, H' contient un sous-groupe isomorphe à H , c'est-à-dire, il existe un homomorphisme $\rho : H = O(E) \longrightarrow O(F)$, tel que le graphe $\{(h, \rho(h)), h \in O(E)\}$ est contenu dans H' .

Maintenant, ρ doit être triviale puisque le groupe de Lie semi-simple de type non-compacte ne possède aucun homomorphisme non trivial dans un groupe compact.

Pour les deux dernières conclusions du lemme, on peut supposé $F = \mathbb{R}$. le noyau de l'application linéaire f est $O(E)$ -invariant, par conséquent, il est trivial par l'irréductibilité. un argument similaire donne la trivialité des applications bilinéaires antisymétriques invariantes. ■

Lemme 6.4.2 *Soit G un groupe de Lie connexe agit isométriquement sur une variété Lorentzienne (M, g) . Soit N une orbite de G , qui est de type Lorentzien et possède un stabilisateur irréductible (agit sur l'espace tangent de N).*

Alors, G se décompose à $G = K \times G_1$, où $G_1 = Isom^o(N)$ et K agit trivialement sur N (K est en fait précompacte dans le stabilisateur de n'importe quel point de N). De plus, dans un voisinage de N , toutes les orbites de G_1 sont isométriques et donc déterminent un feuilletage. La distribution orthogonale à ce feuilletage est intégrable et toutes les structures sont invariantes sous la G -action.

Preuve: Le groupe G agit sur N par un homomorphisme $G \longrightarrow Isom^o(N)$. Son image G_1 possède une isotropie irréductible et donc, d'après la première partie de la proposition 6.4.1, N possède une courbure constante et $G_1 = Isom^o(N)$.

Nous vérifions maintenant que, G_1 est contenu dans G et par conséquent G se décompose

comme on a l'indiquer. Pour cela, on considère $x_o \in N$ et désignons par H' son groupe d'isotropie. l'espace orthogonal L_{x_o} de $T_{x_o}N$ dans $T_{x_o}M$ est de type espace (la métrique est définie positif). Nous somme en mesure d'appliquer le lemme 6.4.1 avec $E = T_{x_o}N$ et $F = L_{x_o}$. Il résulte alors que la composante d'identité du groupe d'isotropie de x_o dans G_1 est contenue dans H' et en particulier dans G . Cependant, G_1 est engendré par des stabilisateurs de divers points de N et donc, G_1 est contenu dans G .

Après, nous étudions la G_1 -action sur M près de N . Soit H le groupe d'isotropie de x_o dans G_1 . Son action sur L_{x_o} est triviale. Soit exp_{x_o} l'application exponentielle pour la métrique Lorentzienne et considèrent la sous variété (localement) $\mathcal{L}_{x_o} = exp_{x_o}(L_{x_o})$. Puis exp_{x_o} conjugue de l'action infinitésimale de H sur L_{x_o} avec son action sur \mathcal{L}_{x_o} . en particulier, H agit trivialement sur cette sous variété. C'est-à-dire, H est contenu dans le groupe d'isotropie de tout point de \mathcal{L}_{x_o} .

Un raisonnement d'une semi-continuité évidente implique que les groupes d'isotropie ne peuvent pas être plus grands. Par conséquent, nous avons un feuilletage par G_1 -orbites, tout satisfaisant à la même condition d'irréductibilité pour leurs groupes d'isotropie. Notons ce feuilletage par \mathcal{N} et son fibre tangent par $T\mathcal{N}$. Soit L la distribution orthogonale. L'obstruction à l'intégrabilité de L peut être mesurée par un tenseur $T : L \times L \longrightarrow T\mathcal{N}$. Il est défini par $T(X, Y)$, qui équivaut à la projection orthogonale sur $T\mathcal{N}$ du crochet $[X, Y]$, où X et Y sont des sections de L . Puisque le groupe d'isotropie agit trivialement sur L et irréductiblement sur $T\mathcal{N}$, T est trivial, c'est-à-dire, L est intégrable. ■

Produit tordu

Fin de la preuve du théorème 6.4.23

Notre but est maintenant de montrer qu'un voisinage ouvert de N en M est un produit tordu. Jusque-là, nous avons les feuilletages orthogonaux \mathcal{N} et \mathcal{L} . On peut dire que le théorème de décomposition de De Rham est un critère pour une paire de tels feuilletages pour déterminer le produit direct (local) pseudo-Riemannien. La condition est que, les fibré tangents de \mathcal{N} et de \mathcal{L} sont parallèles, ou aux moins, que les feuilles de \mathcal{N} et de \mathcal{L} sont géodésiques. Il y a une ressemblance, mais plus compliqué, avec le critère de produits tordus dans [11], [18]. On n'utilise pas ce critère, mais on donne une brève preuve pour notre cas. Notre terminologie ici est près de celle de [21].

Soient N et L deux feuilles (local) de deux feuilletages \mathcal{N} et \mathcal{L} respectivement et x_o un point de N et L , or localement M muni d'un produit topologique $L \times N$. La métrique peut être écrite :

$$g(l, n) = h_{(l,n)} \oplus m_{(l,n)}.$$

- Montrons que $h_{(l,n)} = h$, c'est-à-dire, il ne dépend pas de n . C'est clair puisque G_1 agit isométriquement : si $k \in G_1$ alors, il envoie $\mathcal{L}_{(l,n)}$ à $\mathcal{L}_{k(l,n)}$, où $k(l,n)$ porte la forme (l, n') (les orbites de G_1 correspondent à N). Par conséquent $g = h \oplus m_{(l,n)}$ (la signification géométrique de ça est que N est un feuilletage géodésique [12]).
- Afin de comprendre la variation de $m(l,n)$ en fonction de (l,n) , écrivons $x_o = (l_o, n_o)$, on fixe $l_1 \in L$ et on considère l'application :

$$S : (l_o, n) \in N = \mathcal{N}_{(l_o, n_o)} \longrightarrow (l_1, n) \in \mathcal{N}_{(l_1, n_o)}.$$

- S commute avec le G_1 -action sur le G_1 -orbites de (l_o, n_o) et (l_1, n_o) . En particulier, il permute avec les actions d'isotropie à ces deux points. Comme montré précédemment ces groupes d'isotropie sont les groupes orthogonaux intégraux de produit scalaire Lorentzien sur leurs espaces tangents. En particulier, ils préservent, jusqu'à un multiplicatif constante, seulement un produit scalaire Lorentzien. Ceci signifie que S est une homothétie à (l_o, n_o) : la métrique d'image égale la métrique à (l_1, n_o) (le long de $N(l_1, n_o)$) jusqu'à un facteur multiplicatif $W(l_o, n_o)$. Maintenant, puisque S permute avec l'action (intégral) sur les orbites, il résulte que W ne dépend pas de n . C'est-à-dire, si $m = m(l_o, n)$ est la métrique sur N , donc $m_{(l,n)} = W(l)m$. Dans la somme, $g = h \oplus W(l)m$, C'est-à-dire, M est un produit tordu.
- Le fait que N possède une courbure constante d'après le théorème 6.4.21 alors, N a isotropie irréductible.
 - Finalement, la décomposition de G est cela donné dans le lemme 6.4.2, qui est évidemment compatible avec la structure de produit tordu.

6.5 La non-propreté versus l'irréductibilité

L'irréductibilité est une condition algébrique qui semble en quelque sorte, non adaptée à notre arrangement dynamique-géométrique. On veut la remplacée avec une condition dynamique plus naturelle, on considère la non-propreté des actions.

Action de groupe Semi-simple avec des orbites non-propres

Sans l'hypothèse de l'irréductibilité, nous avons la généralisation suivante du théorème 6.4.23, en suppose que les orbites sont non-propres et le groupe G est semi-simple (une sorte d'une irréductibilité intrinsèque).

Théorème 6.5.24 *Soit G un groupe de Lie semi-simple connexe agit isométriquement sur une variété Lorentzienne (M, g) de dimension ≥ 3 . Supposons que aucun facteur*

(local) de G n'est localement isomorphe au $SL(2, \mathbb{R})$ et qu'il existe une orbite non-propre N de Type Lorentzienne (c'est-à-dire, N possède une isotropie non-compacte). Puis, G possède une revêtement finie, G se factorise à $G = G_2 \times G_1$, où :

- G_1 possède une orbite N_1 qui est un espace Lorentzien d'une courbure constante non nulle et G_1 égale à $Isom^0(N_1)$.
- Il y a un voisinage U , G -invariant de N qui est un produit tordu $L \times_w N_1$.
- Le facteur N_1 correspond au G_1 -orbites et G_2 agit le long du L -facteur.

Nous prouverons d'abord ce théorème sous une hypothèse d'homogénéité supplémentaire, c'est-à-dire, G agit transitivement sur M , ce sera une généralisation du théorème 6.4.21, là où on garde l'hypothèse de la non-précompacité et on remplace l'irréductibilité par la semi-simplicité du groupe ambiant. On va revenir à la preuve du théorème 6.5.24 dans la fin de cette section, après la démonstration du cas particulier de transitivité.

Théorème 6.5.25 Soit (M, g) un G -espace homogène Lorentzien de dimension ≥ 3 , avec un groupe d'isotropie non-précompact et G le groupe de Lie semi-simple connexe avec no facteur (local) localement isomorphe $SL(2, \mathbb{R})$. alors, il y a un produit direct de groupe $G = G_2 \times G_1$, et un produit direct de métrique $M = L \times N$, où L est une variété Riemannienne G_2 -homogène, N est un espace Lorentzien d'une courbure constante non nulle et $G_1 = Isom^o(N)$.

Preuve: Pour $x \in M$ et u un vecteur de type lumière (c'est-à-dire isotrope) $u \in T_x M$, on considère un hyperplan orthogonal u^\perp . Soit C_x l'ensemble des vecteurs u pour lequel u^\perp est la tangente sur une hypersurface (de type lumière) totalement géodésique, c'est-à-dire, $exp_x(u^\perp)$ est un hypersurface totalement géodésique (près de x). voir la preuve dans [22], est que la non-précompacité du groupe d'isotropie H_x implique C_x est non vide, voir le théorème 3.14.6.

- On suppose que C_x est fini. On peut (localement) définir seulement un nombre fini de sections continues $X \longrightarrow u(x) \in C_x$. En particulier, on peut supposer que ces sections sont invariantes par le G -action. En fait, pour simplifier la notation dans le raisonnement suivant, on peut supposer que C_x de cardinalité 1 (partout). Par conséquent, nous avons une distribution des hyperplans G -invariant $x \longrightarrow u(x)^\perp$. Cette distribution est intégrable, la feuille en x étant l'hypersurface géodésique $\mathcal{H}_u = exp_x(u^\perp)$. De ceci nous obtenons que M possède un feuilletage G -invariant de codimension 1, l'espace quotient est une variété de dimension 1. Mais un groupe de Lie simple agissant (non-trivialement) sur une 1-variété doit être localement isomorphe à $SL(2, \mathbb{R})$. Dont est impossible en raison de notre hypothèse sur G . Il

- suit alors que C_x est infini et par conséquent produire un sous-espace F_x Lorentzien de dimension ≥ 3 .
- La même hypothèse comme ci-dessus nous permet de vérifier que le groupe d'isotropie ne peut pas préserver un espace de dimension 1, ni un sous-espace Lorentzien de dimension 2, puisque les deux directions isotropes dans un tel sous-espace seraient préservées individuellement. Pour résumer, on peut choisir un sous-espace E_x de F_x qui est Lorentzien, engendré par son sous-ensemble infini $E_x \cap C_x$ et sur quel le groupe d'isotropie agit irréductiblement.
 - De ça, on définit une distribution G -invariante E sur laquelle le groupe d'isotropie, à chaque point, agit irréductiblement. Comme dans la preuve du théorème 6.4.23, on définit tenseur d'obstruction d'intégrabilité pour E , qui doit s'annuler, par le Lemme 6.4.1, puisqu'il est antisymétrique et invariant sous le groupe d'isotropie. Par conséquent, E est intégrable. On note par \mathcal{N} son feuilletage tangent.
 - N une feuille de \mathcal{N} et G_3 le sous-groupe de G qui le laisse invariante. Ce sous-groupe agit transitivement sur N , puisque le feuilletage \mathcal{N} est invariant sous la G -action transitive. D'ailleurs, G_3 contient les stabilisateurs (dans G) de tous les points de N , qui, par construction, agit irréductiblement sur l'espace tangent de chaque point de N . Nous pouvons appliquer ainsi le théorème 6.4.23 au G_3 -action. En particulier, N possède une courbure constante et G_3 contient $G_1 = \text{Isom}^o(N)$, qui induit un produit tordu $L \times_W N$ dans un voisinage de N en M .
 - On montre de façon standard la coïncidence du feuilletage N (donnée par la distribution E) et cela donnée par le facteur N dans le produit tordu. Par conséquent, le produit tordu est G invariant et est en particulier global : $M = L \times_W N$.
 - Maintenant, on raisonne par l'absurde pour montrer que N possède une courbure non nulle, c'est-à-dire, N n'est pas un espace de Minkowski. En effet, N peut être identifié avec l'espace quotient M/L muni de sa structure Lorentzienne similaire (c'est-à-dire, la métrique Lorentzienne est constante (globalement)), qui est préservée par la G -action. En d'autres termes, le groupe semi-simple G agit transitivement par homothétie sur N . Cependant, le pseudo-groupe de l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$ est $(\mathbb{R}^+ \times O(1, n))\mathbb{R}^{1+n}$. Tout sous-groupe semi-simple de ce pseudo-groupe est conjugué dans $O(1, n)$ et ne peut pas agir transitivement.
 - Puisque G agit transitivement sur $M = L \times_W N$ en préservant une structure de produit tordu, toutes les feuilles $\{l\} \times N$ sont isométriques et par conséquent ont la même courbure. Cependant, la métrique à deux niveaux l_1 et l_2 est reliée par un facteur $\frac{w(l_1)}{w(l_2)}$. Les Courbures sont reliées par le rapport inverse. De la constance de

la courbure (non nulle), on déduit que W est une fonction constante, c'est-à-dire, $M = L \times N$ est un produit direct.

- Puisque G préserve la structure du produit de M et contient G_2 , qui est le groupe isométrie (composant d'identité) de N , G se décompose comme déclaré. Ceci finit la preuve du théorème 6.5.25

▪

Corollaire 6.5.1 *Soit G un groupe de Lie connexe agit isométriquement et transitivement sur un espace Lorentzien N de courbure constante. supposent que le groupe d'isotropie de G est irréductible. alors, G égal $Isom^o(N)$ et N est l'un de ce qui suit :*

- L'espace de de Sitter $SO(1, n + 1)/SO(1, n)$ (de courbure constante positive).
- Revêtement (cyclique) de l'espace anti de Sitter $SO(2, n)/SO(1, n)$ (d'une courbure constante négative).

Preuve: si M possède une courbure constante alors, il ne peut pas avoir une décomposition non triviale $M = L \times N$. Par conséquent, $M = N$, c'est-à-dire, $G = Isom^o(M) = Isom^o(N)$.

Preuve du Théorème 6.5.24

Le premier point dans la preuve du théorème 6.5.25 implique que la dimension de N est 3 : la décomposition de G est celle donnée par le théorème 6.5.25 on applique le théorème 6.5.23 au G_1 -action afin d'obtenir un produit tordu comme on a indiqué.

Remarque 6.5.1 *Un cas particulier du théorème 6.5.25 où G est simple. Il peut être reformulé dans ce cas comme suit : si un groupe simple G agit en préservant une métrique Lorentzienne sur un quotient G/H , où H est non-compacte alors, ce quotient possède une courbure constante, c'est-à-dire, G/H prendre la forme $O(1, n + 1)/O(1, n)$ ou $O(2, n)/O(1, n)$ (jusqu'à une courbure cyclique). Ceci a été prouvé dans [19] sous une hypothèse a priori que G être (jusqu'à un revêtement cyclique) $O(1, n + 1)$ ou $O(2, n)$.*

Remarque 6.5.2 - *Dans les deux théorèmes ci-dessus, le produit tordu est local, c'est-à-dire, l'espace entier n'est pas un produit tordu. Pour le voir, on considère l'action de $O(1, n)$ sur l'espace de Minkowski $\mathbb{R}^{1,n}$. Si la forme quadratique Lorentzienne est $q = -x_0^2 + x_1^2 + \dots + x_n^2$ alors, le produit tordu est défini exactement sur $q > 0$.*

- *Le résultat ne semble pas être optimal, c'est-à-dire, il pourrait être généralisé à d'autres groupes.*

- les structures de produit tordu sur les revêtements universels des variétés Lorentziennes compactes avec une dynamique forte sont obtenues, par exemple, dans [10], [20], [21].



Bibliographie

- [1] S. Adams. Dynamics on lorentz manifolds. *World. Scientific*.
- [2] S. Adams. Dynamics of simple lie groups on lorentz manifolds. *Geom.Dedicata*, 105 :1–12, 2004.
- [3] S. Adams and G. stuck. The isometry group of a compact lorentz manifold. *I. Invent. Math*, 129 :239–261, 1997.
- [4] S. Adams and G. stuck. The isometry group of a compact lorentz manifold. *II. Invent. Math*, 129 :263–287, 1997.
- [5] J. K. Beem, P. E. Ehrlich, and K. L. Easley. *Global Lorentzian geometry*. Marcel Dekker, 1996.
- [6] W.M. Boothby. *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*. Academic Press,Orlando,Florida, second edition, 1986.
- [7] Boubel. Charle and Zeghib. Abdelghani. Isometric actions of lie subgroups of the moebius group. nonlinearity. *I,II.Ivent*, 17 :1677–1688, 2004.
- [8] M. Deffaf. Géométrie et dynamique globales des variétés lorentziennes. Thèse de doctorat, U.S.T.H.B, 2009.
- [9] Charles Frances. *Introduction à la dynamique riemannienne conforme, cours de l'école de géométrie d'oran Algérie*.
- [10] M. Gromov. Rigid transformations groups. *Hermann*, 33 :65–139, 1988.
- [11] S. Hiepmo. Eine innere kennzeichnung der verzerrten produkte. *Math. Ann*, 241 :209–215, 1979.
- [12] Anthony.W. Knapp. *Lie Groups Beyond an Introduction*, volume 140. Birkhauser, second edition, 2004.
- [13] N. Kowalsky. Actions of non-compact simple groups of lorentz manifolds. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math*, 321 :595–599, 1995.

- [14] N. Kowalsky. Noncompact simple automorphism groups of lorentz manifolds. *Ann. Math*, 144 :611–640, 1997.
- [15] S. Lie. *Teorie der transformationsgruppen*. Teibener, Leibzig, 1893.
- [16] S. Lie. *Gesammenlte Abhandlungen*, volume 5,6. B. G. Teibener, Leibzig, 1924,27.
- [17] B. O’Neil. *Semi-Riemannian geometry with application to relativity*. Academic.Press, 1983.
- [18] R. Ponge and H. Reckziegel. Twisted products in pseudo-riemannian geometry. *Geom. Dedicata*, 48 :15–25, 1993.
- [19] D. Witte. Homogeneous lorentz manifolds with simple isometry group. *Beiträge. AlgebraGeom*, 42 :451–461, 2001.
- [20] A. Zeghib. Sur les espaces-temps homogènes. *Geom.Topol. Monogr., 1, Geom. Topol. Publ., Coventry*, 1 :551–576, 1998.
- [21] A. Zeghib. Isometry groups and geodesic foliations of lorentz manifolds. *Part II : Geometry of analytic Lorentz manifolds with large isometry groups. GAFA*, 9 :823–854, 1999.
- [22] A. Zeghib. Remarks on lorentz symmetric spaces. *Compositio Math*, 140 :1675–1678, 2004.
- [23] R. Zimmer. On the automorphism group of a compact lorentz manifold and other geometric manifolds. *Invent. Math.*, 83 :411–426, 1986.