

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour obtenir le diplôme de Magister

EN MATHEMATIQUES

Spécialité: Modélisation Mathématiques et Numérique

Par: GUETTACHE Boualem

Thème

Etude mathématique d'un modèle  
de Keller Segel.

Soutenu publiquement le: 25/06 /2014, devant le jury composé de :

*M.S. MOULAY Professeur à l'USTHB Président*

*N. AISSA Maître de Conférences à l'USTHB Directrice de Memoire*

*R. AIT YAHIA Professeur à l'USTHB Examinatrice*

*D. HERNANE Professeur à l'USTHB Examinatrice*

*A. KESSAB Professeur à l'USTHB Examineur*

## Remerciements

Je tiens à exprimer ma reconnaissance au Dr AISSA Naima, sa disponibilité ses compétences m'ont été plus que profitable pour mener à terme ce travail.

Je suis particulièrement flatté que le professeur M.S. MOULAY ait accepté d'être le président du jury, je le remercie sincèrement.

Un grand merci aussi au Pr A. KESSAB, Pr R. AIT YAHIA et Pr D. HERNANE pour avoir accepté de siéger dans mon jury de thèse.

J'ai également une pensée particulière à tous mes amis, où qu'ils soient, leurs encouragements et leur aide furent précieux.

Enfin, je destine ce dernier propos à toute ma famille, son soutien fut indispensable pour moi, qu'elle puisse trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

# Table des Matières

<b>Introduction</b>	<b>5</b>
0.0.1 Biologie. Dynamique des populations . . . . .	6
0.0.2 Origine des systèmes de chemotaxis . . . . .	7
0.1 Systèmes modèles de chimiotaxie . . . . .	9
0.1.1 Le modèle parabolique de Keller-Segel . . . . .	9
0.1.2 Le modèle parabolique-elliptique . . . . .	10
0.1.3 Le modèle de l'angiogenèse . . . . .	10
0.2 Notations et notions générales . . . . .	12
0.2.1 Espaces de Hölder . . . . .	15
0.2.2 Espaces de Sobolev . . . . .	16
0.2.3 Semi-groupes . . . . .	18
<b>1 Existence et unicité pour des problèmes paraboliques quasi-linéaires</b>	<b>19</b>
1.1 Rappels et préliminaires . . . . .	20
1.1.1 Les problèmes aux limites normalement elliptiques. . . . .	21
1.1.2 Les espaces $W_{p,\mathcal{B}}^s$ . . . . .	23
1.1.3 Définition de la $W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha-2}$ -réalisation de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ . . . . .	24
1.2 Les problèmes paraboliques linéaires et quasilineaires . . . . .	27
1.2.1 Les problèmes de Cauchy paraboliques linéaires . . . . .	27
1.2.2 Les problèmes aux limites paraboliques linéaires . . . . .	28
1.2.3 Les problèmes de Cauchy paraboliques quasi-linéaires. . . . .	29
1.2.4 Les problèmes aux limites paraboliques quasi-linéaires . . . . .	30

1.2.5	Systèmes de réaction-diffusion . . . . .	31
<b>2</b>	<b>Etude d'une classe de systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaire en chimiotaxie</b>	<b>35</b>
2.1	Position du problème . . . . .	36
2.2	Application au problème posé . . . . .	38
<b>3</b>	<b>Régularité <math>L^\infty</math></b>	<b>42</b>
3.1	Estimations $L^1$ . . . . .	43
3.2	Estimations $L^p$ ( $1 \leq p \leq \infty$ ) . . . . .	44
3.3	Positivité de solutions . . . . .	52
<b>4</b>	<b>Comportement asymptotique</b>	<b>56</b>
4.1	Fonction de Lyapunov . . . . .	56
4.2	Comportement asymptotique . . . . .	63
<b>5</b>	<b>Etude d'un modèle dans <math>\mathbb{R}^2</math></b>	<b>72</b>
5.1	Définitions et rappels . . . . .	73
5.1.1	Espaces $L^p(a,b;X)$ . . . . .	73
5.1.2	Quelques Inégalités . . . . .	74
5.1.3	Point fixe . . . . .	75
5.2	Position du problème . . . . .	76
5.3	Problème régularisé . . . . .	77
5.4	Estimations sur les solutions du problème (à terme de dérive) linéaire . . . . .	78
5.5	Existence de solution du problème régularisé tronqué . . . . .	83
5.6	Estimations sur les solutions du problème régularisé . . . . .	87
5.7	Passage a la limite et existence globale . . . . .	99

# Introduction

Qu'est-ce que la chemotaxis? Le terme "taxis" signifie "arrangement". Les êtres vivants correspondent avec leur environnement et y répondent par le biais de stimulus. La réponse à ce stimulus peut être un déplacement dans la direction de la source du stimulus (on parle de taxis positive) ou en s'en éloignant (on parle de taxis négative). Lorsque ce stimulus est chimique on parle de chemotaxis. Il existe aussi de la photo-taxis (réponse à un stimulus de lumière), etc...

L'exemple le plus étudié de chemotaxis est celui d'une espèce d'amibes appelés dictyostelium discoïdeum. Les dictyostelium discoïdeum ont été découvertes en 1935 par le biologiste K. B. Rapper. L'intérêt d'étudier ces organismes est qu'ils sont considérés comme des "organismes modèles" dans les recherches en biologie.

Une population de dictyostelium discoïdeum croît par division cellulaire tant qu'il y a de la nourriture en quantité suffisante. Les amibes se déplacent de façon aléatoire dans tout l'espace. En condition de pénurie de nourriture, une amibe commence à émettre de la cyclique Adénosine Mono-Phosphate (cAMP) qui stimule les autres amibes à en émettre aussi. De plus les amibes se déplacent dans la direction de plus fort gradient de concentration de cAMP. Lorsque la densité d'amibe est suffisamment grande les amibes s'agrègent. A la fin de ce processus cet amas d'amibes forme un pseudoplasmod. Le pseudoplasmod se déplace par photo-taxis positive. Après un moment le corps forme un fruit et des spores. Les spores deviennent des amibes et le cycle recommence.

## 0.0.1 Biologie. Dynamique des populations

Dans les modèles en biologie ou en dynamique des populations on s'intéresse à la concentration d'une substance chimique ou à la densité d'une population (particules, cellules) et son évolution au cours du temps. L'inconnue  $u$  est en général fonction de  $(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}^+$ , où  $\Omega$  ouvert de  $\mathbb{R}^N$ .

- **Définition de la fonction densité de population**  $P(x, t)$

Soit  $x$  un point de  $\Omega$ ,  $\{O_n \subset \Omega\}_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de régions spatiales entourant le point  $x$ , leurs mesures spatiales  $\{|O_n|\}$  (longueur, aire, volume) tendent vers zéro, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , et  $O_{n+1} \subset O_n$ , alors

$$P(x, t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{nombre d'individus dans } O_n \text{ au temps } t}{|O_n|}.$$

Si on choisit une région  $O \subset \Omega$  :

- **la population totale dans la région  $O$ , au temps  $t$  :**

$$\int_O P(t, x) dx.$$

- **le mouvement de  $P(t, x)$  est le flux de la densité de population**, qui est un vecteur orienté dans la direction de la décroissance rapide de  $P(t, x)$ .

- **Loi de fick** : Elle énonce la proportionnalité entre le vecteur densité de flux et le gradient de la densité particulière, avec un coefficient négatif

$$J(t, x) = -D(x) \nabla_x P(t, x).$$

$-J(t, x)$  le flux de  $P(t, x)$

$-D(x)$  le coefficient de diffusion au point  $x$

$-\nabla_x$  est l'opérateur gradient  $P(t, x)$ .

- **$f(x, t, P)$ , taux de réaction de la fonction densité** (naissance, mort, réaction chimique...).

- **le taux de changement de la population totale est:**

$$\frac{d}{dt} \int_O P(t, x) dx.$$

- **La croissance nette de la population dans la région  $O$  est**

$$\int_O f(t, x, P(t, x)) dx.$$

- **Le flux total est :**

$$\int_{\partial O} J(t, x) \cdot \nu(t, x) dS$$

$-\partial O$  est le bord de  $O$

$-\nu(t, x)$  est la direction normale extérieure à  $O$  au point  $x$  à l'instant  $t$ .

- **La loi de balance implique**

$$\frac{d}{dt} \int_O P(t, x) dx = - \int_{\partial O} J(t, x) \cdot \nu(t, x) dS + \int_O f(t, x, P(t, x)) dx.$$

Par le théorème de la divergence (ou formule de green) on obtient:

$$\int_O \frac{d}{dt} P(t, x) dx = \int_O \operatorname{div} J(t, x) dx + \int_O f(t, x, P(t, x)) dx.$$

## 0.0.2 Origine des systèmes de chemotaxis

Les travaux qui font référence dans la modélisation de phénomène d'agrégation des *Dictyostelium discoideum* sont les travaux de Evelyn Fox Keller et Lee A. Segel [20] qui donne leur nom au modèle. Soit  $u$  la densité d'amibes, et  $v$  la concentration de chemo-attractant. On fait les hypothèses suivantes:

- (i) Les amibes et le chemo-attractant diffusent en suivant la loi de Fick,
- (ii) Le chemo-attractant est produit par les amibes à un taux  $\gamma$ .

Si on suppose que la masse totale d'amibes est conservée dans un volume  $D$  au cours du processus, on a

$$\frac{d}{dt} \int_D u(t, x) = \int_{\partial D} J^{(u)}(x, t) \cdot \nu(x) dS$$

où  $J^{(u)}$  désigne le flot de la densité d'amibes. Ce flot est constitué de deux parties :  
une partie qui est proportionnelle au gradient de densité (par la loi de Fick)

et une partie qui est proportionnelle au gradient de chemo-attractant :

$$J^{(u)}(x, t) = k_1 \nabla v - k_2 \nabla u.$$

Si on suppose que le chemo-attractant diffuse, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_D v(t, x) = Q^{(v)}(x, D) - \int_{\partial D} J^{(v)}(x, t) \cdot \nu(x) dS$$

où  $Q^{(v)}$  est la production de chemo-attractant  $v$  par unité de temps et de volume, et le flot  $J^{(v)}(x, t)$  est donné par  $J^{(v)}(x, t) = k_v \nabla v$ . On suppose aussi que  $v$  est consommé au taux  $k_3$ . On obtient ainsi le système obtenu de E. F. Keller et L. A. Segel, [20], suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \nabla \cdot (k_1 \nabla u - k_2 \nabla v) & x \in D, t > 0 \\ v_t = k_v \Delta v + \gamma u - k_3 v & x \in D, t > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & x \in \partial D, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x), & x \in D. \end{array} \right.$$

L'objectif de ce travail est d'étudier le cas général du système précédent, plus précisément le système suivant à deux équations aux dérivées partielles paraboliques non linéaires

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_t = \nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v) & x \in \Omega, t > 0 \\ \varepsilon v_t = k_v \Delta v - f(v) v + g(u, v) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{array} \right. \quad (1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$ , (ici  $\nabla = \nabla_x$ ,  $\Delta = \Delta_x$ ),  $k_v$  est une constante positive,  $u$  et  $v$  sont deux fonctions. Quand  $u \geq 0$  et  $v \geq 0$ , ces inconnus s'interprètent respectivement comme des concentrations (densités) de cellules et de substances chimiques.  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  est le rapport des coefficients de diffusion pour les cellules avec le coefficient de diffusion de l'espèce chimique dans le milieu. La fonction  $h$  est la chémosensibilité de l'espèce. Généralement, elle prend la forme  $h(u, v) = u\chi(v)$ ,  $\chi$  mesure la balance entre l'effet de terme diffusif  $\Delta u$ , et le terme de chimiotactie (ou terme de dérive)  $-\nabla \cdot (u \nabla v)$ .

Le système est complété par l'une quelconque des conditions aux limites suivantes

$$u = 0, v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, \infty[$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, \infty[$$

ou

$$k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times ]0, \infty[.$$

Nous supposons de plus que les fonctions figurant dans le modèle vérifient les conditions suivantes :

- $k(u, v) > 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $f(v) \geq \text{constant} \quad \forall v \in \mathbb{R}$
- $\frac{\partial}{\partial u} g(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}.$

Les problèmes de ce genre sont connus dans de nombreux domaines des mathématiques, ils apparaissent dans la dynamique des populations, dans les modèles de milieu poreux, modèles de l'interaction gravitationnelle de particules et d'autres domaines.

## 0.1 Systèmes modèles de chimiotaxie

### 0.1.1 Le modèle parabolique de Keller-Segel

Le modèle parabolique décrit une population de cellules en déplacement, qui interagissent via un signal chimique en remontant le gradient de potentiel. Si l'on ajoute à cela une diffusion (linéaire) pour les cellules, et pour les molécules du signal chimique, on obtient le système couplé suivant, dit modèle de Patlak-Keller-Segel (PKS ou KS) :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot [u \nabla v] & x \in \Omega, t > 0 \\ \varepsilon v_t = \Delta v + u - \alpha v & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

Avec condition au bord de type Neumann homogène (flux nul) pour la densité de cellules (ce qui garantit la conservation de la masse totale), et de type Neumann ou Dirichlet pour la concentration de l'espèce chimique. Les paramètres du système sont la chemosensibilité  $\chi > 0$ , le coefficient inverse de diffusion  $\varepsilon \geq 0$ , le taux de dégradation  $\alpha \geq 0$  et enfin la masse totale des cellules  $M = \int u(x, 0) dx$  qui

est conservée au cours du temps. Dans le cas  $\varepsilon = 0$ , on obtient

### 0.1.2 Le modèle parabolique-elliptique

Ce modèle est consacré à l'étude d'un problème issu de la modélisation d'agrégation en biologie :

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u - \chi \nabla \cdot [u \nabla v] & x \in \Omega, t > 0 \\ -\Delta v = u - \alpha v & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (3)$$

où  $u$  est une densité de bactéries ou d'amibes (typiquement de *Dictyostelium discoïdeum*) et  $v$  la concentration de chemo-attractant. Il s'agit de la version parabolique-elliptique simplifiée du système introduite par Evelyn Fox Keller et Lee A. Segel dans [20] et précédemment par C. Patlak.

Dans le cas  $\alpha = 0$ , le système est utilisé aussi en astrophysique, comme modèle décrivant l'interaction gravitationnelle de particule, par exemple dans les nébuleuses.

### 0.1.3 Le modèle de l'angiogenèse

Le système que nous considérons ici est un autre type de modèle chimiotactisme, c'est le système de l'angiogenèse :

$$\begin{cases} u_t = k\Delta u - \nabla \cdot [u\chi(v)\nabla v] & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t = -v^m u & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega. \end{cases} \quad (4)$$

L'angiogenèse concerne la formation de vaisseaux sanguins capillaires et joue un rôle fondamental dans le développement de tumeurs solides qui secrètent une substance chimique favorisant la migration de cellules endothéliales vers la tumeur elle-même.

## Plan du mémoire

Le plan de travail suivi dans l'étude de ce problème est le suivant:

Après une introduction permettant de situer le problème, de décrire les démarches suivies pour aboutir aux systèmes de réaction-diffusion, et de rappeler quelques résultats, dont certains sont bien connus et donnés sans démonstration.

On présente dans le premier chapitre la théorie générale d'existence développée par H.Amann [4] qui est nécessaire pour l'étude des systèmes paraboliques non-linéaires.

Le chapitre deux est consacré à l'étude d'une classe de système d'équations différentielles partielles paraboliques non linéaires (proposé et étudié par D. Horstmann [18]). Nous établirons l'existence locale en dimensions supérieures de solutions assez régulières si les seconds membres et les données initiales sont suffisamment réguliers, et avec différentes conditions aux limites, ainsi qu'une caractérisation du temps maximal d'existence de laquelle nous déduisons un critère d'existence globale. Pour cela, nous utiliserons les résultats de H.Amann[4] qui nous facilitent la tâche.

Dans le chapitre trois qui constitue l'essentiel de ce travail, on établit par l'induction qu'on peut ramener le problème de la régularité  $L^\infty$  des solutions faibles du système (1) à celui de la régularité  $L^p$ , pour un certain  $p \geq 1$  grâce à la méthode itérative d'Alikakos-Moser [1].

Dans le chapitre quatre nous donnons des conditions suffisantes pour l'existence de la fonction de Lyapunov pour le système (1).

Ainsi on étudiera le comportement asymptotique des solutions des systèmes qui ont une fonction de Lyapunov.

Enfin, dans le dernier chapitre nous allons faire une synthèse des travaux de A.Blanchet [5].

Plus précisément on étudie l'existence globale en temps d'une solution faible pour un modèle parabolique-elliptique simplifié du système de Keller Segel dans  $\mathbb{R}^2$ . La méthode suivie consiste à approcher le problème par une suite de problèmes qui admettent des solutions locales. Nous verrons que ces derniers, via des estimations a priori, admettent en fait des solutions globales. Le résultat découle de l'application de la méthode du point fixe, associée à des techniques de régularisation, de compacité et par un passage à la limite.

Nous terminons ce travail par une conclusion où nous mentionnons les problèmes restant ouverts.

## 0.2 Notations et notions générales

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires, qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs.

### Espaces $L^p(\Omega)$

Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^N$ . Pour  $1 \leq p < \infty$ , l'espace de Lebesgue  $L^p(\Omega)$  est défini par:

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ mesurable, } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}$$

et on le munit de la norme (parfois notée  $\|\cdot\|_p$ )

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} := \left( \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

et pour  $p = \infty$ , on note

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } \exists C \in \mathbb{R}_+^* \text{ telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \right\}$$

de norme

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} := \inf \{ C, |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega \}$$

Pour tout  $1 \leq p \leq \infty$ , on note  $p'$  le conjugué de  $p$ , c'est à dire le réel tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Proposition 0.1 (Inégalité de Hölder)** Pour tout  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ .

Alors  $f.g \in L^1(\Omega)$  et on a l'inégalité

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)| dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}.$$

Lorsque  $p = p' = 2$ , on retrouve l'**inégalité de Cauchy-Schwarz**.

**Proposition 0.2 (Inégalité de d'interpolation)** Soient  $1 \leq p \leq q \leq \infty$ ,  $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ .

Alors  $f \in L^r(\Omega)$  pour tout  $r \in [p, q]$ , et

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}^\theta \|g\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta}, \quad \theta \in [0, 1], \quad \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

**Théorème 0.1 (de convergence dominée de Lebesgue)** Soit  $(f_n)_n$  une suite de fonctions de  $L^1(\Omega)$ .

On suppose que  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  p.p. sur  $\Omega$ , et qu'il existe une fonction  $g \in L^1(\Omega)$  telle que pour chaque  $n$ ,  $|f_n(x)| \leq g(x)$  p.p. sur  $\Omega$ . Alors  $f \in L^1(\Omega)$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

**Définition 0.1** Une fonction à valeurs réelles est absolument continue sur un intervalle  $I$  si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \text{ tel que } \sum_{k=1}^m |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

lorsque  $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq \dots \leq a_m < b_m$  sont des points de  $I$  tels que  $\sum_{k=1}^m (b_k - a_k) < \delta$ .

**Inégalité de Gronwall (forme différentielle)**

(i) Soit  $\eta(\cdot)$  une fonction positive, absolument continue sur  $[0, T]$  et satisfaisant pour presque tout  $t$  l'inégalité

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

où  $\phi(t)$  et  $\psi(t)$  sont des fonctions positives, intégrables sur  $[0, T]$  alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s) ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s) ds \right] \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

(ii) En particulier, si  $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t)$  sur  $[0, T]$  et  $\eta(0) = 0$ , alors :

$$\eta \equiv 0 \text{ sur } [0, T].$$

**preuve :** On a

$$\frac{d}{ds}(\eta(s)e^{\int_0^s -\phi(r)dr}) = e^{\int_0^s -\phi(r)dr} (\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{\int_0^s -\phi(r)dr} \psi(s) \quad \text{pour presque tout } 0 \leq s \leq T.$$

En intégrant sur  $[0, t]$ , on obtient

$$\eta(t)e^{\int_0^t -\phi(r)dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{\int_0^s -\phi(r)dr} \psi(s)ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \quad \text{pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

D'où on déduit

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[ \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds \right].$$

**Inégalité de Gronwall** (forme intégrale)

(i) Soit  $\zeta(\cdot)$  une fonction positive, intégrable sur  $[0, T]$  et satisfaisant pour presque tout  $t$  l'inégalité

$$\zeta(t) \leq C_1 \int_0^t \zeta(s)ds + C_2$$

où  $C_1$  et  $C_2$  sont des constantes positives. Alors

$$\zeta(t) \leq C_2 [1 + C_1 t e^{C_1 t}] \quad \text{pour presque tout } 0 \leq t \leq T.$$

En particulier si:

$$\zeta(t) \leq C_1 \int_0^t \zeta(s)ds, \quad 0 \leq t \leq T.$$

On a

$$\zeta(t) = 0 \quad \text{sur } [0, T].$$

**Inégalité de Cauchy généralisée :**

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \forall \varepsilon > 0 : ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

**Inégalité de Young généralisée:** Soit  $1 < p, q < \infty$ , tels que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ , et soit  $\varepsilon > 0$ .

Alors

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon)b^q$$

où  $c(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{p}{q}}}{q}$ .

### 0.2.1 Espaces de Hölder

Soient  $X := (X, d)$  un espace métrique,  $E := (E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach, et soit  $0 < \theta \leq 1$ .

L'application  $u \in E^X$  ( $u : X \rightarrow E$ ) est dite **uniformément  $\theta$ -Hölder continue**, si

$$[u]_\theta := [u]_{\theta, X} := \sup_{x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{[d(x, y)]^\theta} < \infty.$$

$u$  est  **$\theta$ -Hölder continue**, si chaque point de  $X$  a un voisinage  $Y$  tel que  $u|_Y$  est **uniformément  $\theta$ -Hölder continue**.

On pose

$$C^\theta(X, E) := \{u : X \rightarrow E; u \text{ est } \theta\text{-Hölder continue}\}, \quad 0 < \theta < 1,$$

et  $C^0(X, E) := C(X, E)$  est l'ensemble de toutes les fonctions continues de  $X$  dans  $E$ .

Pour  $\theta = 1$ , la 1- Hölder continuité est la Lipschitz continuité, et on note

$$C^{1-}(X, E) := \{u : X \rightarrow E ; u \text{ est Lipschitz continue } \}, \text{ (au lieu de } C^1(X, E))$$

Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ ,  $C^k(X, E)$  est l'espace des fonctions  $u \in E^X$ ,  $k$  fois continûment différentiable sur  $X$ .

$C^{k-}(X, E)$  est le sous espace des fonctions  $u \in C^{k-1}(X, E)$ , telles que  $D^{k-1} u \in C^{1-}(X, E)$ , où  $D^{k-1}$  désigne la dérivé(de Fréchet) d'ordre  $k-1$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , on notera  $C^k(\overline{\Omega})$  le sous-ensemble des fonctions  $f$  ( $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ) de  $C^k(\Omega)$  telles que pour chaque multi-indice  $|\alpha| \leq k$ , l'application  $x \in \Omega \mapsto D^\alpha f(x)$  se prolonge continûment à  $\overline{\Omega}$ .

On pose

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \overline{\Omega}} |D^\alpha f(x)|, \quad f \in C^k(\overline{\Omega}).$$

Alors  $\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}$  est une norme sur l'espace vectoriel  $C^k(\overline{\Omega})$ , et muni de cette norme  $C^k(\overline{\Omega})$ , est un espace de Banach.

## 0.2.2 Espaces de Sobolev

**Espaces**  $W^{m,p}(\Omega)$  : Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p \leq \infty$  on définit  $W^{m,p}(\Omega)$  comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega); \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, 0 \leq |\alpha| \leq m \}$$

où  $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$ , et  $D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}$ , dérivée au sens des distributions.

Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$  est un espace de Banach.

$W_0^{m,p}(\Omega)$  est l'adhérence de l'ensemble  $D(\Omega)$  des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans  $\Omega$ , dans  $W^{m,p}(\Omega)$ .

Rappelons que si  $p > 2$  et  $\Omega$  est borné, l'injection de  $W_0^{m,p}(\Omega)$  dans  $L^p(\Omega)$  est compacte.

Dans le cas  $p = 2$ , on pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ .

**Inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev:** Soient  $1 \leq q \leq p \leq \infty$ . Alors

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} \|u\|_{H^1(\Omega)}^\theta, \quad \forall u \in H^1(\Omega) \cap L^q(\Omega), \text{ avec } p(n-2) < 2n \text{ et } \theta = \frac{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}}{1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{q}}. \quad (5)$$

**Théorème 0.2** (*Injection continue*) Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un domaine borné de frontière lipschitzienne,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in [1, \infty)$ . Alors l'injection suivante est continue:

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \quad \text{si } mp > n.$$

**Théorème 0.3** (*Généralisation du théorème de trace*) Soient  $\Omega$  un domaine de frontière bornée de classe  $C^{m-1,1}$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et  $p \in (1, \infty)$ . Alors il existe un unique opérateur linéaire continu  $\gamma_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \rightarrow \prod_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ , appelé opérateur de trace, satisfaisant  $\gamma_{m-1}f = (f, \partial_\nu f, \dots, \partial_\nu^{m-1}f) \setminus_{\partial\Omega}$  pour toute fonction  $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$  où  $f \setminus_{\partial\Omega}$  désigne la restriction de la fonction  $f$  à l'ensemble  $\partial\Omega$ .

## Formule d'intégration par parties

Soit  $u$  et  $v$  deux fonctions de  $H^1(\Omega)$ . Pour tout  $1 \leq i \leq n$ , on a

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_{\Omega} \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} u v \nu_i d\sigma$$

où  $\nu_i(x) = \cos(\nu; x_i)$  est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extérieure à  $\partial\Omega$  au point  $x$  et l'axe des  $x_i$ .

## Formule de Green

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$  et  $\nu(x)$  la normale extérieure au point  $x$ .

Soient  $u$  une fonction de  $H^2(\Omega)$  et  $v$  une fonction de  $H^1(\Omega)$ . Alors la formule de Green s'écrit :

$$\int_{\Omega} (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v dx$$

où  $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \gamma_0\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \nu_i$ , et  $\gamma_0(u)$  est la trace de  $u$  sur  $\partial\Omega$ ,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n)^t$  et  $d\sigma$  est la mesure superficielle sur  $\partial\Omega$ .

**Les espaces de Slobodckii** Soient  $k \in \mathbb{N}$  et  $1 \leq p < \infty$ , on pose

$$\begin{aligned} [u]_{s,p} &: = \left( \int_{\Omega \times \Omega} \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x - y|^{n+sp}} d(x, y) \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } 0 < s < 1 \\ \|\cdot\|_{k,p} &: = \|\cdot\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ \|\cdot\|_{s,p} &: = \left( \|u\|_{[s],p}^p + \sum_{|\alpha|=[s]} [\partial^\alpha u]_{s-[\alpha],p}^p \right)^{\frac{1}{p}} \text{ pour } s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N} \end{aligned}$$

où  $[s]$  désigne la partie entière de  $s$ . Alors les espaces de **Slobodeckii** sont les espaces de Banach définis par

$$W_p^s := W_p^s(\Omega, \mathbb{K}^N) := (\{u \in W^{[s],p}; \|u\|_{s,p} < \infty\}, \|\cdot\|_{s,p}), 1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}.$$

Pour  $s \in \mathbb{R}^+$  et  $1 \leq p < \infty$ ,  $W_p^s$  est appelé espace de **Sobolev-Slobodeckii**.

**Proposition 0.3** Soient  $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ , et  $p_0, p_1 \in (1, \infty)$ . Alors

$$W_{p_1}^{s_1} \xrightarrow{d} W_{p_0}^{s_0} \quad \text{si} \quad \frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{p_0} \geq \frac{1}{p_1} - (s_1 - s_0) \frac{1}{n}.$$

De plus pour  $s \in \mathbb{R}$ , et  $p \in (1, \infty)$

$$W_p^s \xrightarrow{d} C^\rho \quad \text{si} \quad s - \frac{n}{p} \geq \rho \geq 0. \quad (\text{avec } \rho \neq s - \frac{n}{p} \text{ si } s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}).$$

### 0.2.3 Semi-groupes

Soit  $E := (E, \|\cdot\|_E)$  un espace de Banach et  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  une famille d'opérateurs linéaires continus bornés dans  $E$ . Soit  $\Sigma$  un secteur défini par

$$\Sigma = \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > 0 \text{ et } \varphi_1 < \arg z < \varphi_2, \varphi_1 < 0 < \varphi_2\}.$$

**Définition 0.2** On dit que  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$  est un semi-groupe fortement continu sur  $E$  (en abrégé semi-groupe sur  $E$ ). Si les conditions suivantes sont satisfaites

- (i)  $S(0) = I_E$
- (ii)  $S(t)S(s) = S(t+s)$  pour tout  $t, s \geq 0$
- (iii)  $\lim_{t \rightarrow 0^+} S(t)u = u$  pour tout  $u \in E$ .

**Définition 0.3** On dit que  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  est un générateur infinitésimal du semi-groupe  $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ . Si

$$D(A) = \{u \in E : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ existe}\},$$

$$Au = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{S(t)u - u}{t} \text{ pour tout } u \in D(A).$$

**Définition 0.4** On dit que  $\{S(z)\}_{z \in \Sigma}$  est un semi-groupe analytique sur  $E$  si les conditions suivantes sont satisfaites

- (i)  $S(0) = I_E$
- (ii)  $S(z_1)S(z_2) = S(z_1 + z_2)$  pour tout  $z_1, z_2 \in \Sigma$
- (iii)  $\lim_{z \rightarrow 0} S(z)u = u$  pour tout  $u \in E$
- (iv) l'application  $z \mapsto S(z)$  est analytique sur  $\Sigma$ .

# Chapître 1

## Existence et unicité pour des problèmes paraboliques quasi-linéaires

L'objet de ce chapitre est de présenter la théorie générale d'existence développée par H. Amann [4] qui est nécessaire pour l'étude des systèmes paraboliques non-linéaires.

Comme dans le cas général nous ne pouvons pas espérer de solutions classiques, d'où la nécessité d'introduire la notion de solution faible, celle-ci fait intervenir les espaces de Sobolev-Sloboeckii qui sont les outils de base, ainsi les opérateurs normalement elliptiques.

La démarche suivie pour établir l'existence et l'unicité d'une solution faible de notre système est d'utiliser les résultats de la théorie parabolique abstraite. Cependant ces résultats ne s'appliquent jamais directement aux problèmes étudiés. En fait, il faut passer par plusieurs reformulations du problème cité ci-dessus pour s'adapter aux conditions sous lesquelles l'étude se ramène à celui de problème aux limites parabolique linéaire.

Afin de mieux préciser le cadre de notre étude, nous commençons par rappeler certain nombre de propriétés pour pouvoir ensuite traiter le problème.

## 1.1 Rappels et préliminaires

Soit  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière régulière  $\partial\Omega$ , on définit la fonction

$$\delta := \text{diag} [\delta_i]_{1 \leq i \leq N} : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$$

$\delta$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les  $\delta_i$ , tels que

$$\delta_i \in C(\partial\Omega, \{0,1\}), \quad 1 \leq i \leq N.$$

$\mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  : est l'ensemble des matrices carrées  $N \times N$  à coefficients réels.

Pour  $1 \leq j, k \leq n$ , on suppose que

$$a_{jk}, a_j, b_j \in C(\overline{\Omega}, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)), \quad a_0 \in L^\infty(\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)), \quad \text{et } c \in C(\partial\Omega, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)).$$

En utilisant la convention de sommation sur  $j$  et  $k$ , on introduit l'opérateur différentiel linéaire du second ordre sur  $\Omega$ , avec des coefficients à valeurs dans  $X := \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$  défini comme suit

$$\mathcal{A}u := -\partial_j(a_{jk}\partial_k u + a_j u) + b_j \partial_j u + a_0 u. \quad (1.1)$$

où  $\partial_i u$  désigne la dérivée partielle de  $u$  par rapport à sa  $i$ -ème variable.

On associe à  $\mathcal{A}$  l'opérateur au bord linéaire noté  $\mathcal{B}$  d'ordre au plus 1, défini par

$$\mathcal{B}u := \delta\{\nu_j \gamma_\partial(a_{jk}\partial_k u + a_j u) + c \gamma_\partial u\} + (1 - \delta)\gamma_\partial u \quad (1.2)$$

où  $\nu_j$  est la  $j^{\text{ème}}$  composante du vecteur unitaire de la normale extérieure  $\vec{\nu} = (\nu_1, \dots, \nu_n)$  à  $\partial\Omega$ , et  $\gamma_\partial$  désigne l'opérateur de trace sur  $\partial\Omega$ .

- Sous cet aspect  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est appelé **problème aux limites linéaire** sur  $\Omega$  d'ordre au plus 2.

On désigne par  $\mathbb{E}(\Omega)$  l'ensemble de tous ces problèmes aux limites

$$\mathbb{E}(\Omega) := [C(\overline{\Omega}, X)]^{n^2+n+n} \times L^\infty(\Omega, X) \times C(\partial\Omega, X).$$

- On fixe maintenant une fonction croissante  $\sigma : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  qui satisfait

$$\sigma(t) := \begin{cases} > t & \text{si } 0 < t < 1 \\ = 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

et on pose

$$\rho(\alpha) = \sigma(|2\alpha - 1|), \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.3)$$

On définit aussi  $\mathbb{E}^\alpha(\Omega)$  par

$$\mathbb{E}^\alpha(\Omega) := [C^{\rho(\alpha)}(\overline{\Omega}, X)]^{n^2+n+n} \times L^\infty(\Omega, X) \times C^{\rho(\alpha)}(\partial\Omega, X), \quad 0 \leq \alpha \leq 1.$$

et notons que

$$\mathbb{E}^1(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^\alpha(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^\beta(\Omega) \hookrightarrow \mathbb{E}^{\frac{1}{2}}(\Omega) = \mathbb{E}(\Omega), \quad \frac{1}{2} < \beta < \alpha < 1. \quad (1.4)$$

### 1.1.1 Les problèmes aux limites normalement elliptiques.

Considérons le problème aux limites précédemment défini  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , on lui associe le symbole principal

$$(a_\pi, b_\pi) \in C(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N, X) \times C(\partial\Omega \times \mathbb{R}^N, X)$$

défini par

$$\begin{aligned} a_\pi(x, \xi) &:= a_{jk}(x)\xi^j\xi^k & (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N \\ b_\pi(y, \xi) &:= \delta(y)\nu_j(y)a_{jk}(y)\xi^k + (1 - \delta(y)) & (y, \xi) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

- On dit que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est **normalement elliptique** si

$$\sigma(a_\pi(x, \xi)) \subset [\operatorname{Re} z > 0] := \{z \in \mathbb{C}; \operatorname{Re} z > 0\}, \quad (x, \xi) \in \overline{\Omega} \times S^{N-1}$$

où  $\sigma(T)$  désigne le spectre de l'opérateur  $T$ , et  $S^{N-1}$  la sphère unité dans  $\mathbb{R}^N$ .

- On dit que l'opérateur frontière  $\mathcal{B}$  satisfait la **condition normale complémentaire** (condition de Lopatinskiï-Shapiro), si pour tout  $(x, \xi) \in T(\partial\Omega)$ , et pour tout  $\lambda \in [\operatorname{Re} z \geq 0]$ , avec  $(\lambda, \xi) \neq (0, 0)$ , 0 (zéro) est l'unique solution qui décroît exponentiellement du problème aux limites :

$$\begin{aligned} [\lambda + a_\pi(x, \xi + \nu(x)i\partial_t)]u &= 0, & t > 0 \\ b_\pi(x, \xi + \nu(x)i\partial_t)u(0) &= 0 \end{aligned}$$

où  $T(\partial\Omega)$  est l'espace tangent à  $\partial\Omega$ .

- On dit que  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est **normalement elliptique** sur  $\Omega$  si  $\mathcal{A}$  est normalement elliptique et  $\mathcal{B}$  satisfait la condition normale complémentaire.
- On dit que la famille des fonctions  $\{a_{jk}; 1 \leq j, k \leq n\}$  est **normalement elliptique** sur  $\Omega$  si  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est normalement elliptique.

On désigne par  $\mathcal{E}(\Omega)$  l'ensemble de tous les problèmes aux limites normalement elliptique sur  $\Omega$ , et on définit  $\mathcal{E}^\alpha(\Omega)$  par:

$$\mathcal{E}^\alpha(\Omega) := \mathcal{E}(\Omega) \cap \mathbb{E}^\alpha(\Omega) \quad 0 \leq \alpha \leq 1. \quad (1.5)$$

Citons un exemple simple de problème normalement elliptique qui sera utilisé ultérieurement.

**Exemple 1:** Supposons que  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{E}(\Omega)$  est sous forme de divergence, c'est à dire il satisfait

$$a_{jk} = a\alpha_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq n$$

où  $a \in C(\overline{\Omega}, X)$ , et  $\alpha := [\alpha_{jk}]_{1 \leq j, k \leq n} \in C(\overline{\Omega}, X)$ ,  $\alpha$  est symétrique définie positive.

Alors  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est normalement elliptique si

$$\begin{aligned} \sigma(a(x)) &\subset [\operatorname{Re} z > 0], & x \in \overline{\Omega} \\ (1 - \delta(y))a(y)\delta(y) &= 0, & y \in \partial\Omega. \end{aligned}$$

## 1.1.2 Les espaces $W_{p,\mathcal{B}}^s$

**Définition 1.1** Soient  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{E}(\Omega)$ ,  $1 < p < \infty$ , et  $s \in [0, 2] \setminus (\mathbb{N} + \frac{1}{p})$ , on définit l'espace  $W_{p,\mathcal{B}}^s$  par:

$$W_{p,\mathcal{B}}^s := \begin{cases} \{u \in W_p^s ; \mathcal{B}u = 0\} & 1 + \frac{1}{p} < p \leq 2 \\ \{u \in W_p^s ; (1 - \delta)\gamma_\partial u = 0\} & \frac{1}{p} < s < 1 + \frac{1}{p} \\ W_p^s & 0 \leq s < \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.6)$$

Afin d'introduire  $W_{p,\mathcal{B}}^s$  pour  $s$  négatif, on doit d'abord définir le problème aux limites dual formel  $(\mathcal{A}^\sharp, \mathcal{B}^\sharp)$  de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{E}(\Omega)$ , ainsi pour  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{E}(\Omega)$ , on pose

$$a_{jk}^\sharp := {}^t a_{kj}, a_j^\sharp := {}^t b_j, b_j^\sharp := {}^t a_j, a_0^\sharp := {}^t a_0, c^\sharp := {}^t c.$$

On définit aussi  $(\mathcal{A}^\sharp, \mathcal{B}^\sharp) \in \mathbb{E}(\Omega)$ , par

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^\sharp v &: = -\partial_j (a_{jk}^\sharp \partial_k v + a_j^\sharp v) + b_j^\sharp \partial_j v + a_0^\sharp v \\ \mathcal{B}^\sharp v &: = \delta \{ \nu_j \gamma_\partial (a_{jk}^\sharp \partial_k v + a_j^\sharp v) + c^\sharp \gamma_\partial v \} + (1 - \delta) \gamma_\partial v. \end{aligned}$$

**Définition 1.2** Soit  $1 < p < \infty$ , on définit  $W_{p,\mathcal{B}}^s$  pour  $s \in [-2, 0] \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{p})$  par

$$W_{p,\mathcal{B}}^s := \left( W_{p',\mathcal{B}^\sharp}^{-s} \right)'.$$

**Remarque 1.1** Pour  $1 < p < \infty$ , et  $s \in [-2, 0] \setminus (\mathbb{Z} + \frac{1}{p})$ , on a

$$W_{p,\mathcal{B}}^s := \begin{cases} W_p^s & -1 + \frac{1}{p} < s \leq 0 \\ \{v \in W_{p'}^{-s} ; (1 - \delta)\gamma_\partial v = 0\}' & -2 + \frac{1}{p} < s < -1 + \frac{1}{p} \\ \{v \in W_{p'}^{-s} ; \mathcal{B}^\sharp v = 0\}' & -2 \leq s < -2 + \frac{1}{p}. \end{cases} \quad (1.7)$$

et  $W_{p,\mathcal{B}}^s \xrightarrow{d} W_{p,\mathcal{B}}^t$  pour tout  $-2 \leq t < s \leq 2$ ,  $t, s \notin (\mathbb{Z} + \frac{1}{p})$

On pose aussi

$$\begin{aligned}\partial_1 W_p^{s-1} & : = \left\{ u \in W_p^{s-1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) ; (1-\delta)u = 0 \right\} \\ \partial_0 W_p^s & : = \left\{ u \in W_p^{s-\frac{1}{p}}(\partial\Omega) ; \delta u = 0 \right\} \\ \partial W_p^s & = \partial_1 W_p^{s-1} \oplus \partial_0 W_p^s, \quad 1 < p < \infty, 0 \leq s \leq 2\end{aligned}$$

$\partial W_p^s$  est la somme topologique directe de  $\partial_0 W_p^s$  et  $\partial_1 W_p^{s-1}$ .

### 1.1.3 Définition de la $W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha-2}$ -réalisation de $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

**Définition 1.3** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces topologiques tels que  $E \hookrightarrow F$ , et soit

$A : \text{Dom}(A) \subset F \rightarrow F$  un opérateur linéaire dans  $F$ .

La  **$E$ -réalisation** est l'opérateur linéaire  $A_E$  dans  $E$  défini par

$$\text{Dom}(A_E) := \{x \in E \cap \text{Dom}(A) : Ax \in E\}, \quad A_E x := Ax.$$

**Définition 1.4** Soient  $E_0$  et  $E_1$  deux espaces de Banach tels que  $E_1 \xhookrightarrow{d} E_0$ , alors

le couple  $(E_0, E_1)$  est appelé **couple de Banach d'injection dense**.

**Définition 1.5** Soit  $(E_0, E_1)$  un couple de Banach d'injection dense, on désigne par

$\mathcal{H}(E_1, E_0)$  l'ensemble de tous les opérateurs  $A \in \mathcal{L}(E_1, E_0)$  tels que,  $-A$  est le générateur infinitésimal

d'un semi-groupe analytique sur  $E_0$ , c'est à dire dans  $\mathcal{L}(E_0)$ .

**Définition 1.6** Soit  $E$  un espace de Banach des distributions sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^N$ , c.-à-d.

$E$  est un espace de Banach tel que  $E \hookrightarrow D'$ , on dit que  $a \in L^\infty(\Omega, X)$  ( $X := \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)$ ) est un **multiplicateur** pour  $E$  si :

$$[u \mapsto au] \in \mathcal{L}(E).$$

On désigne par  $\mathbf{M}(E)$  l'ensemble de tous les multiplicateurs pour  $E$ , qui est une espace de Banach pour la norme de  $\mathcal{L}(E)$ .

**Remarque 1.2** Soient  $1 < p < \infty$  et  $s \in \mathbb{R}$ .

a) Comme

$$\partial_k \in \mathcal{L}(W_p^s, W_p^{s-1}) \cap \mathcal{L}(W_p^{s-1}, W_p^{s-2}) \quad (1.8)$$

et

$$\gamma_\partial \in \mathcal{L}\left(W_p^{s-1}, W_p^{s-1-\frac{1}{p}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N)\right), \quad s-1 > \frac{1}{p}. \quad (1.9)$$

En utilisant la factorisation

$$W_p^s \xrightarrow{\partial_k} W_p^{s-1} \xrightarrow{w \mapsto a_{jk}w} W_p^{s-1} \xrightarrow{\partial_j} W_p^{s-2} \quad (1.10)$$

et en vertu de (1.8), on déduit que

$$[w \mapsto \partial_j(a_{jk}\partial_k w)] \in \mathcal{L}(W_p^s, W_p^{s-2}). \quad (1.11)$$

C'est à dire l'application  $w \mapsto \partial_j(a_{jk}\partial_k w)$  est linéaire continu, si  $a_{jk}$  est un multiplicateur pour  $W_p^{s-1}$ .

Notons que

$$M(W_p^s) = W_p^{|s|}(\Omega, X) \quad \text{pour } |s| > \frac{n}{p}$$

et

$$C^\rho(\bar{\Omega}, X) \hookrightarrow M(W_p^s) \quad \text{où } \rho := \begin{cases} > |s| & \text{si } s \notin \mathbb{Z} \\ = |s| & \text{si } s \in \mathbb{Z}. \end{cases}$$

b) Soient  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} < 2\alpha \leq 2$ , et  $\frac{1}{p'} < 2\beta \leq 2$  satisfait  $\alpha + \beta \geq 1$ , on associe à  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathbb{E}(\Omega)$  la forme de Dirichlet  $a(\cdot, \cdot)$  définie par

$$a(v, u) := \langle \partial_j v, a_{jk}\partial_k u + a_j u \rangle_{W_{p'}^{2\beta} \times W_p^{2\alpha}} + \langle v, b_j \partial_j u + a_0 u \rangle_{W_{p'}^{2\beta} \times W_p^{2\alpha}} + \langle \gamma_\partial v, c \gamma_\partial u \rangle_\partial, \quad (u, v) \in W_p^{2\alpha} \times W_{p'}^{2\beta} \quad (1.12)$$

où

$$\langle w, v \rangle_{\partial\Omega} := \int_{\partial\Omega} \langle w(x), v(x) \rangle_{\mathbb{R}^N} d\sigma(x).$$

et

$$\langle \xi, \eta \rangle_{\mathbb{R}^N} := \sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i \quad \text{pour } \xi, \eta \in \mathbb{R}^N.$$

En vertu de la remarque précédente

$$a \in \mathcal{L} \left( W_{p'}^{2\beta}, W_p^{2\alpha}; \mathbb{K} \right). \quad (1.13)$$

**Définition 1.7** Soient  $1 < p < \infty$  et  $\frac{1}{p} < 2\alpha \leq 1 + \frac{1}{p}$ , la  $W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha-2}$ -réalisation de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ , est l'opérateur

$$A_{\alpha-1} \in \mathcal{L} \left( W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha}, W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha-2} \right)$$

induit par la forme de Dirichlet  $a(.,.)$  de la manière suivante

$$\langle v, A_{\alpha-1}u \rangle_{W_{p',\mathcal{B}^\sharp}^{2-2\alpha} \times W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha}} := a(v, u), \quad (v, u) \in W_{p',\mathcal{B}^\sharp}^{2-2\alpha} \times W_{p,\mathcal{B}}^{2\alpha}. \quad (1.14)$$

L'importance de la classe  $\mathcal{E}^\alpha(\Omega)$  des problèmes aux limites normalement elliptique (à coefficients dans  $C^{\rho(\alpha)}(\overline{\Omega}, X)$ ,  $0 \leq \alpha \leq 1$ ) consiste dans le

**Théorème 1.1** Supposons que  $1 < p < \infty$  et  $1 \leq 2\alpha \leq 2$ . Si  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{E}^\alpha(\Omega)$ , alors

$$A_{\beta-1} \in \mathcal{H} \left( W_{p,\mathcal{B}}^{2\beta}, W_{p,\mathcal{B}}^{2\beta-2} \right), \quad 2\beta \in [2 - 2\alpha, 2\alpha] \setminus \left( \mathbb{N} + \frac{1}{p} \right) \quad (1.15)$$

où  $A_{\beta-1}$  est la  $W_{p,\mathcal{B}}^{2\beta-2}$ -réalisation de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ .

## 1.2 Les problèmes paraboliques linéaires et quasilineaires

### 1.2.1 Les problèmes de Cauchy paraboliques linéaires

Soit  $E$  un espace de Banach et soit  $J$  un sous intervalle de  $\mathbb{R}^+$  qui contient 0, et soit  $f : J \rightarrow E$ . Pour chaque  $t \in J$  on considère un opérateur linéaire dans  $E$ ,  $A(t) : \text{Dom}(A(t)) \subset E \rightarrow E$ .

Soit l'équation d'évolution linéaire dans  $E$

$$\partial_t u + A(t)u = f(t), \quad t \in \dot{J} := J \setminus \{0\}. \quad (1.16)$$

**Définition 1.8** • Une solution de l'équation d'évolution linéaire (1.16) est une fonction  $u \in C(J, E) \cap C^1(\dot{J}, E)$  tel que  $u(t) \in \text{Dom}(A(t))$  pour tout  $t \in \dot{J}$ , et  $u$  satisfait (1.16).

- Si de plus  $u(0) = u_0$ , alors  $u$  est une solution du problème de Cauchy linéaire (dans  $E$ )

$$\partial_t u + A(t)u = f(t), \quad t \in \dot{J}, \quad u(0) = u_0. \quad (1.17)$$

- On dit que l'équation d'évolution linéaire (1.16) et le problème de Cauchy (1.17) sont parabolique si pour chaque  $t \in J$ ,  $-A(t)$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur  $E$ .

**Théorème 1.2** Supposons que  $(E_0, E_1)$  un couple de Banach d'injection dense et soit  $\rho \in (0, 1)$  tel que

$$(u_0, (A, f)) \in E_0 \times C^\rho(J, \mathcal{H}(E_1, E_0) \times E_0).$$

Alors le problème de Cauchy parabolique linéaire (1.17) possède une unique solution  $u := u(\cdot, u_0, A, f)$ , telle que

$$u \in C^\rho(J, E_1) \cap C^{1+\rho}(J, E_0).$$

## 1.2.2 Les problèmes aux limites paraboliques linéaires

Soit  $J$  un sous intervalle de  $\mathbb{R}^+$  qui contient 0, et soient  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq 2\alpha \leq 2$ , et  $\rho \in (0, 1)$ .

On suppose que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in C^\rho(J, \mathcal{E}^\alpha(\Omega)) \quad (1.18)$$

et que

$$2\alpha - 2 \leq 2\beta \leq 2\alpha, \quad \text{et } 2\beta \in \left(\frac{1}{p}, 2\right] \setminus \left(\mathbb{N} + \frac{1}{p}\right). \quad (1.19)$$

Enfin, pour  $\sigma \in [0, 1)$ , on suppose que

$$(u_0, (f, g)) \in W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2} \times C^\sigma\left(J, W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2} \times \partial W_p^{2\beta}\right). \quad (1.20)$$

On considère le problème aux limites parabolique linéaire non homogène

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}(t)u = f(t) & \text{dans } \Omega \times \dot{J} \\ \mathcal{B}(t)u = g(t) & \text{sur } \partial\Omega \times \dot{J} \\ u(\cdot, 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.21)$$

On introduit un type de solution généralisée de (1.21), pour cela on associe à  $(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in \mathcal{E}(\Omega)$  la forme de Dirichlet  $a(\cdot, \cdot)$  définie comme dans (1.12).

**Définition 1.9** Pour  $\frac{1}{p} < 2\beta < 1 + \frac{1}{p}$ ,  $u$  est dite une  $W_p^{2\beta}$ -solution faible de (1.21) si

$$i) \quad u \in C\left(J, W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}\right) \cap C\left(\dot{J}, W_p^{2\beta}\right) \cap C^1\left(\dot{J}, W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}\right)$$

$$ii) \quad u(\cdot, 0) = u_0, \quad \text{et } (1 - \delta)\gamma_\partial u = (1 - \delta)g(t), \quad t \in \dot{J}$$

$$iii) \quad \langle v, \partial_t u(t) \rangle_{W_{p', \mathcal{B}^\sharp}^{2-2\beta} \times W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}} + a(t)(v, u(t)) = \langle v, f(t) \rangle_{W_{p', \mathcal{B}^\sharp}^{2-2\beta} \times W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}} + \langle \gamma_\partial v, \delta g(t) \rangle_\partial, \quad t \in \dot{J}, \quad v \in W_{p', \mathcal{B}^\sharp}^{2-2\beta}$$

**Remarque 1.3** Le problème (1.21) peut être écrit comme un problème de Cauchy parabolique linéaire dans  $W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}$

$$\partial_t v + A_{\beta-1}(t)v = F_{\beta-1}(t), \quad t \in \dot{J}, \quad v(0) = u_0$$

où  $A_{\beta-1}$  est la  $W_{p, \mathcal{B}}^{2\beta-2}$ -réalisation de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  défini comme dans la définition (1.7).

**Théorème 1.3** Sous les hypothèses (1.18), (1.19), et (1.20), si  $\frac{1}{p} < 2\beta < 1 + \frac{1}{p}$ .

Alors le problème aux limites parabolique (1.21) admet une unique  $W_p^{2\beta}$ -solution faible.

**Preuve:** voir[4]

### 1.2.3 Les problèmes de Cauchy paraboliques quasi-linéaires.

Soit  $J$  un sous intervalle de  $\mathbb{R}^+$  qui contient 0, soit  $E$  un espace de Banach et soit  $V$  un sous ensemble non vide de  $E$ , et soit  $f : J \times V \rightarrow E$ . On suppose que  $A(t, v)$  est pour chaque  $(t, v) \in J \times V$  un opérateur linéaire dans  $E$ .

Soit l'équation d'évolution quasi-linéaire dans  $E$

$$\partial_t u + A(t, u) u = f(t, u) \quad , \quad t \in J. \quad (1.22)$$

**Définition 1.10** • Une solution de l'équation d'évolution quasi-linéaire (1.22) sur  $\dot{J}_u$  (où  $J_u$  est un sous intervalle de  $J$  qui contient 0) est une fonction

$$u \in C(J_u, V) \cap C^1(\dot{J}_u, E)$$

tel que  $u(t) \in \text{Dom}(A(t, u(t)))$  pour tout  $t \in \dot{J}_u$ , et  $u$  satisfait

$$\partial_t u(t) + A(t, u(t)) u(t) = f(t, u(t)) \quad , \quad t \in \dot{J}_u.$$

• Si de plus  $u(0) = u_0$ , alors  $u$  est une solution sur  $J_u$  du problème de Cauchy quasi-linéaire

$$\partial_t u + A(t, u) u = f(t, u) \quad , \quad t \in \dot{J}_u, \quad u(0) = u_0. \quad (1.23)$$

• On dit que l'équation d'évolution (1.22) et le problème de Cauchy (1.23) sont parabolique si pour chaque  $(t, v) \in J \times V$ ,  $-A(t, v)$  est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe analytique sur  $E$ .

**Remarque 1.4** Etant donné  $u : J_u \rightarrow V$ , on pose

$$(A_u(t), f_u(t)) := (A(t, u(t)), f(t, u(t))), \quad t \in J_u.$$

$u$  est une solution de (1.23) sur  $J_u$  si et seulement si  $u$  est solution du problème de Cauchy linéaire

$$\partial_t v + A_u(t) v = f_u(t), \quad t \in \dot{J}_u, \quad v(0) = u_0.$$

**Définition 1.11** une solution  $u$  de (1.22) est dite maximale s'il n'existe pas une solution de (1.22) qui est une prolongation de  $u$ .

## 1.2.4 Les problèmes aux limites paraboliques quasi-linéaires

Soit  $J$  un sous intervalle de  $\mathbb{R}^+$  qui contient 0, et  $\Omega$  un domaine ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière régulière, on considère le problème aux limites parabolique quasi-linéaire

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}(t, u)u = F(t, u) & \text{dans } \Omega \times (0, \infty) \\ \mathcal{B}(u)u = G(t, u) & \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \\ u(., 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.24)$$

Soient  $1 < p < \infty$ ,  $1 \leq \sigma < 1 + \frac{1}{p}$ , et  $\sigma - 2 < \tau \leq r < s < \sigma$  tels que  $\tau, r, s \notin \left(\mathbb{N} + \frac{1}{p}\right)$ , et soit  $\sigma \leq 2\hat{\alpha} \leq 2$ .

On suppose que  $V_{p,\mathcal{B}}^r(\Omega)$  un sous ensemble ouvert de  $W_{p,\mathcal{B}}^r(\Omega)$ , et que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in C^{1-} \left( J \times V_{p,\mathcal{B}}^r, \mathcal{E}^{\hat{\alpha}}(\Omega) \right) \quad (1.25)$$

$$(F, G) \in C^{1-} \left( J \times V_{p,\mathcal{B}}^r, W_{p,\mathcal{B}}^\tau \times \partial W_{p,\mathcal{B}}^{\tau+2} \right) \quad (1.26)$$

$$(1 - \delta)G = 0. \quad (1.27)$$

**Définition 1.12** Soit  $\rho \in (r, 1 + \frac{1}{p}) \setminus (\mathbb{N} + \frac{1}{p})$  tel que  $2 - 2\hat{\alpha} \leq \rho \leq 2\hat{\alpha}$ ,  $u$  est dite une  $W_p^\rho$ -solution faible de (1.24) sur  $J$  si

$$u \in C \left( J, V_{p,\mathcal{B}}^r \right) \quad (1.28)$$

et  $u$  est une  $W_p^\rho$ -solution faible du problème aux limites parabolique linéaire

$$\begin{cases} \partial_t v + \mathcal{A}(t, u(t))v = F(t, u(t)) & \text{dans } \Omega \times J \\ \mathcal{B}(t, u(t))v = G(t, u(t)) & \text{sur } \partial\Omega \times J \\ v(., 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

**Théorème 1.4** Sous les hypothèses (1.25)-(1.27), le problème (1.24) admet pour chaque  $u_0 \in V_{p,\mathcal{B}}^s$  une unique  $W_p^\sigma$ -solution faible maximale  $u(., u_0)$ .

**Preuve:** voir[4]

## 1.2.5 Systèmes de réaction-diffusion

Considérons maintenant le cas où  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  et  $(F, G)$  sont des opérateurs local, et pour simplifier nous imposons plus de conditions de régularité sur les coefficients de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  que d'hypothèses structurelles.

Soit  $D$  un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^N$ , on suppose que

$$a_{jk}, a_j, b_j, a_0 \in C^{2-}(\overline{\Omega} \times J \times D, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)), \quad 1 \leq j, k \leq n \quad (1.29)$$

$$c \in C^{2-}(\partial\Omega \times J \times D, \mathcal{L}(\mathbb{R}^N)). \quad (1.30)$$

et que la famille des fonctions

$$\{a_{jk}(\cdot, t, \eta); 1 \leq j, k \leq n\}, \quad (t, \eta) \in J \times D \quad (1.31)$$

est normalement elliptique sur  $\Omega$ .

Maintenant on pose

$$V := \{u \in W_{p, \mathcal{B}}^r(\Omega, \mathbb{R}^N) : u(\overline{\Omega}) \subset D\}, \quad n/p < r \leq 2.$$

Pour  $(t, v) \in J \times V$ , on définit l'opérateur différentiel du second ordre  $\mathcal{A}(t, v)$  par

$$\mathcal{A}(t, v)u := -\partial_j(a_{jk}(\cdot, t, v)\partial_k u + a_j(\cdot, t, v)u) + b_j(\cdot, t, v)\partial_j u + a_0 u$$

on lui associe l'opérateur au bord

$$\mathcal{B}(t, v)u := \delta\{\nu_j \gamma_\partial(a_{jk}(\cdot, t, v)\partial_k u + a_j(\cdot, t, v)u) + c(\cdot, t, v)\gamma_\partial u\} + (1 - \delta)\gamma_\partial u.$$

Dans ce paragraphe,  $X$  désigne un espace métrique compact,  $E$  et  $F$  sont deux espaces de Banach, et  $U$  un sous-ensemble ouvert non vide de  $E$ ,  $U^X$  l'ensemble de toutes les applications  $X \rightarrow U$ .

**Notation** On écrit

$$\varphi \in C^{1-,2-}(X \times U, F)$$

si chaque point  $y_0 \in U$  a un voisinage  $V(y_0)$  dans  $U$  tel que  $\varphi(., y) \in C^{1-}(X, F)$  uniformément pour tout  $y \in V(y_0)$ , et que  $\partial_2 \varphi(x, .) \in C^{1-}(U, L(E, F))$  uniformément pour tout  $x \in X$ .

Enfin, on suppose aussi que

$$f \in C^{1-,2-}((\bar{\Omega} \times J \times D) \times \mathbb{R}^{N \times n}, \mathbb{R}^N)$$

et que pour chaque sous-ensemble compact  $K \subset D$  il existe une constante  $C_K$  tel que (1.32)

$$|f(x, t, \eta, \zeta)| \leq C_K (1 + |\zeta|^2), \quad (x, t, \eta, \zeta) \in \bar{\Omega} \times J \times K \times \mathbb{R}^{N \times n}.$$

et

$$g \in C^{1-}(\partial\Omega \times J \times D, \mathbb{R}^N), \quad \text{et } (1 - \delta)g = 0. \quad (1.33)$$

Considérons maintenant le problème aux limites parabolique quasi-linéaire "local"

$$\begin{cases} \partial_t u + \mathcal{A}(t, u)u = f(., t, u, \partial u) & \text{dans } \Omega \times J \\ \mathcal{B}(t, u)u = g(., u) & \text{sur } \partial\Omega \times J \\ u(., 0) = u_0 & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (1.34)$$

Afin d'appliquer les résultats de la section (1.2.4) nous devons vérifier que  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  et l'application  $(F, G)$  induite par  $(f, g)$  possèdent des propriétés de continuité et structurelle. Pour cela nous avons besoin de quelques préparations élémentaires.

- Etant donné  $\varphi : X \times U \rightarrow F$ , l'opérateur  $\Phi : U^X \rightarrow F^X$  définie par

$$\Phi(u)(x) := \varphi(x, u(x)), \quad u \in U^X, \quad x \in X$$

est appelé l'opérateur de **Nemytskii** induit par  $\varphi$ .

- **Lemme 1.1** *i)  $C(X, U)$  est un ouvert de  $C(X, E)$ , et si  $\varphi \in C^{1-}(X \times U, F)$*

*alors  $\Phi \in C^{1-}(C(X, U), C(X, F))$*

*ii) si  $\varphi \in C^{1-,2-}(X \times U, F)$ , alors  $\Phi \in C^{1-}(C^\rho(X, U), C^\rho(X, F))$ ,  $\rho \in [0, 1) \cup \{1-\}$ .*

- On suppose maintenant que  $n < p < \infty$ , en vertu de la proposition (0.3)

si  $r > \frac{n}{p}$  et  $r \notin \mathbb{N} + \frac{n}{p}$ , on obtient

$$W_p^r(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{r-\frac{n}{p}}(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C(\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^N) \quad (1.35)$$

$$W_p^{r-\frac{1}{p}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C^{r-\frac{n}{p}}(\partial\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow C(\partial\Omega, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\partial\Omega, \mathbb{R}^N). \quad (1.36)$$

Par conséquent le lemme 1.1(i) implique en particulier que

$$W_p^r(\Omega, D) : = \{u \in W_p^r(\Omega, \mathbb{R}^N) : u(\overline{\Omega}) \subset D\}, \quad n/p < r \leq 2. \quad (1.37)$$

est ouvert dans  $W_p^r(\Omega, \mathbb{R}^N)$ .

De plus, nous déduisons de (1.29), (1.30), et le lemme 1.1(ii) que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in C^{1-}(W_p^r(\Omega, D), \mathbb{E}^{\widehat{\alpha}(r)}(\Omega)) \quad \text{pour } n/p < r \leq 2 \text{ et } 2\widehat{\alpha}(r) \in [1, 1 + r - n/p).$$

ainsi que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in C^{1-}(W_{p,\mathcal{B}}^r(\Omega, D), \mathbb{E}^{\widehat{\alpha}}(\Omega)), \quad \sigma \leq 2\widehat{\alpha}r < 2. \quad (1.38)$$

- Soit  $F$  l'opérateur de Nemytskii induit par  $f$ , la factorisation

$$W_p^r(\Omega, D) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}, D) \xrightarrow{F} C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)$$

et le lemme (1.1)(ii) montrent que

$$F \in C^{1-}(W_p^r(\Omega, D), L^p(\Omega, \mathbb{R}^N)), \quad n/p < r \leq 2$$

ainsi que

$$F \in C^{1-} (W_{p,\mathcal{B}}^r (\Omega, D), W_{p,\mathcal{B}}^r (\Omega, \mathbb{R}^N)). \quad (1.39)$$

- Enfin, dénotons par  $G$  l'opérateur de Nemytskii induit par  $g$

D'après (1.36), et le lemme (1.1) (i), on en déduit

$$G \in C^{1-} (W_p^r (\Omega, D), L^p (\partial\Omega, \mathbb{R}^N)), \quad n/p < r \leq 2$$

ainsi que

$$G \in C^{1-} (W_{p,\mathcal{B}}^r (\Omega, D), \partial W_p^{\tau+2}), \quad n/p < r \leq 2, \quad \tau < -1 + \frac{1}{p}. \quad (1.40)$$

Donc le problème (1.34) a la forme (1.24), par conséquent le théorème (1.4) est applicable.

Ainsi on a le théorème d'existence suivant:

**Théorème 1.5** *Sous les hypothèses (1.29)-(1.33), si  $\frac{n}{p} < s < (1 + \frac{1}{p}) \wedge (2 - \frac{n}{p})$ . Alors le problème (1.34) admet pour chaque  $u_0 \in W_{p,\mathcal{B}}^s(\Omega, D)$  une unique  $W_p^s(\Omega)$ -solution faible maximale. Si cette solution est bornée dans  $W_{p,\mathcal{B}}^\rho$  pour un certain  $\rho > 1$ , alors cette solution est globale.*

*De plus, si  $g = 0$  alors la solution de (1.34) est classique c'est à dire que:*

$$u \in C(\overline{\Omega} \times [0, T], D) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, T), \mathbb{R}^N)$$

*où  $u(0) = u_0$  et  $u$  satisfait l'équation différentielle partielle parabolique ainsi que les conditions aux limites point par point.*

# Chapître 2

## Etude d'une classe de systèmes de réaction-diffusion quasi-linéaire en chimiotaxie

L'objectif de ce chapitre est d'étudier l'existence locale de solutions faibles pour une classe de systèmes de réaction-diffusion issue de la modélisation d'agrégation en biologie qui sont de la forme

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v) & x \in \Omega, t > 0 \\ \varepsilon v_t = k_v \Delta v - f(v) v + g(u, v) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$ ,  $k_v$  est une constante positive,  $u$  et  $v$  sont deux fonctions. Quand  $u \geq 0$  et  $v \geq 0$ , ces inconnues s'interprètent respectivement comme des concentrations (densités) de cellules et de substances chimiques.  $\varepsilon \in \{0, 1\}$  est le rapport des coefficients de diffusion pour les cellules avec le coefficient de diffusion de l'espèce chimique dans le milieu. La fonction  $h$  est la chémosensibilité de l'espèce. Généralement, elle prend la forme  $h(u, v) = u\chi(v)$ ,  $\chi$  mesure la compétition entre l'effet de terme diffusif  $\Delta u$ , et le terme de dérive  $-\nabla \cdot (u \nabla v)$ .

On commence d'abord par l'examen du cas  $\varepsilon = 1$ , on résoud le problème avec des données initiales et de seconds membres suffisamment réguliers, la technique utilisée est l'application d'un théorème d'existence dû à H. Amann [4] qui s'appuie essentiellement sur les résultats exposés au chapitre précédent.

## 2.1 Position du problème

On considère le système d'équations paraboliques non linéaires suivant

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v) & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t = k_v \Delta v - f(v) v + g(u, v) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière  $\partial\Omega$ .

Le système est complété par l'une quelconque des conditions aux limites suivantes

$$u = 0, v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.2)$$

ou

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty) \quad (2.3)$$

ou

$$k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty). \quad (2.4)$$

Nous imposons aux fonctions  $f$ ,  $g$  et  $k$  les hypothèses suivantes

$$\begin{cases} k(u, v) > 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ k_v \text{ est une constante positive.} \end{cases} \quad (2.5)$$

$$\begin{cases} f(v) \geq \text{constante} \quad \forall v \in \mathbb{R} \\ \frac{\partial}{\partial u} g(u, v) \neq 0 \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.6)$$

On désigne par  $\delta$  l'**application caractéristique**

$$\delta = \text{diag} [\delta_i]_{1 \leq i \leq N} : \partial\Omega \rightarrow L(\mathbb{R}^N) \quad (2.7)$$

tels que  $\delta_i \in C(\partial\Omega, \{0, 1\})$  pour  $1 \leq i \leq N$

( $\delta$  est la matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les  $\delta_i$ ).

On fixe  $p \in (n, \infty)$ , et on pose

$$\begin{aligned} W_B^{1,p} & : = \{U \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^2) ; (I - \delta)U|_{\partial\Omega} = 0\} \\ V & : = \{w \in W_B^{1,p} \mid w(\overline{\Omega}) \subset D\} \end{aligned}$$

où  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^2$ .

Finalement, nous supposons que

$$g(u, v) \in C^\infty(D, \mathbb{R}) \text{ et } f(v) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad (2.8)$$

$$k(u, v), h(u, v) \in C^\infty(D, \mathbb{R}). \quad (2.9)$$

Nous allons déduire dans ce chapitre le résultat fondamental suivant

**Théorème 2.1** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné à frontière régulière  $\partial\Omega$  et soit  $w_0 \in V$ , sous les hypothèses (2.5), (2.8), (2.9). Alors le système (2.1) avec l'une quelconque des conditions aux limites (2.2), (2.3) ou (2.4) admet une solution maximale unique*

$$w(\cdot, w_0) \in C([0, t^+(w_0)), V) \cap C^{2,1}(\overline{\Omega} \times (0, t^+(w_0)), \mathbb{R}^2)$$

où  $0 < t^+(w_0) \leq \infty$ ,  $t^+(w_0)$  désigne le temps d'existence maximale.

## 2.2 Application au problème posé

Nous adaptons la preuve faite dans [14] et [27] pour montrer que le problème (2.1) est inclus dans le cadre de [4].

Soit  $\delta_0 > 0$ , et notons par  $D_0 := (-\delta_0, \infty) \times (-\delta_0, \infty)$  qui est un ensemble ouvert  $\mathbb{R}^2$ , et  $J = [0, T)$ .

Pour  $1 \leq j, k \leq 2$ , nous définissons les fonctions  $a_{jk} \in C^2(\overline{\Omega} \times J \times D_0, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$  de la façon suivante :

$$\begin{aligned} a_{jk}(x, t, \eta) & : = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } j \neq k \\ a_{jk}(x, t, \eta) & : = \begin{pmatrix} k(\eta_1, \eta_2) & -h(\eta_1, \eta_2) \\ 0 & k_v \end{pmatrix} \quad \text{si } j = k. \end{aligned} \quad (2.10)$$

où  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$

D'après (2.9) les fonctions  $a_{jk}$  sont bien définies, de plus

$$a_{jk} \in C^{1-}(\overline{\Omega} \times J \times D_0, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)). \quad (2.11)$$

Maintenant on pose

$$V := \{u \in W_B^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^N) : u(\overline{\Omega}) \subset D_0\}, \quad 1 < p < \infty.$$

Pour  $(t, \eta) \in J \times V$ , on introduit l'opérateur sous forme divergentielle  $\mathcal{A}(t, \eta)$  défini par

$$\mathcal{A}(t, \eta) w := - \sum_{j,k=1}^N \partial_j (a_{jk}(\cdot, t, \eta) \partial_k w)$$

où  $w = (u, v)^t$ .

Par définition de  $a_{jk}$ , il vient

$$\mathcal{A}(t, \eta) w = - \sum_{k=1}^N \partial_k (a_{kk}(\cdot, t, \eta) \begin{pmatrix} \partial_k u \\ \partial_k v \end{pmatrix}).$$

Par suite

$$\begin{aligned}\mathcal{A}(t, \eta) w &= \begin{pmatrix} -\operatorname{div}(k(\eta_1, \eta_2)\nabla u - h(\eta_1, \eta_2)\nabla v) \\ -k_v \operatorname{div} \nabla v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\nabla \cdot (k(\eta_1, \eta_2)\nabla u - h(\eta_1, \eta_2)\nabla v) \\ -k_v \Delta v \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

On associe à  $\mathcal{A}(t, \eta)$  l'opérateur au bord  $\mathcal{B}(t, \eta)$  défini par

$$\mathcal{B}(t, \eta) w := \sum_{k,j=1}^N \delta(\nu_j a_{jk}(\cdot, t, \eta)) \partial_k w + (I - \delta)w$$

où  $\nu_j$  est la  $j^{\text{eme}}$  composante de la normale extérieure sur  $\partial\Omega$ .

En calculant  $\mathcal{B}(t, \eta)$  de la même manière que précédemment, on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(t, \eta) w &: = \sum_{k,j=1}^N \delta(\nu_j a_{jk}(\cdot, t, \eta)) \begin{pmatrix} \partial_k u \\ \partial_k v \end{pmatrix} + (I - \delta) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \sum_{k=1}^N \delta(\nu_k a_{kk}(\cdot, t, \eta)) \begin{pmatrix} \partial_k u \\ \partial_k v \end{pmatrix} + (I - \delta) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta_i (k(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial u}{\partial \nu} - h(\eta_1, \eta_2) \frac{\partial v}{\partial \nu}) + (1 - \delta_i)u \\ \delta_{i'} k_v \frac{\partial v}{\partial \nu} + (1 - \delta_{i'})v \end{pmatrix}, \quad 1 \leq i, i' \leq 2.\end{aligned}$$

Considérons maintenant l'équation

$$\mathcal{B}(t, w) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \quad (2.12)$$

Ce qui représente les conditions au bord (2.2),(2.3) et (2.4) d'une manière unifiée et concise.

En effet, on peut distinguer trois catégories de conditions.

D'après (2.12), en prenant  $\delta_i = \delta_{i'} = 0$ , on trouve la condition de Dirichlet (2.2)

$$u = 0, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T).$$

On revient ensuite à (2.12), pour  $\delta_i = \delta_{i'} = 1$ , on obtient la condition Neumann (2.3)

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T).$$

On revient encore une fois à (2.12), en prenant  $\delta_i = 1$  et  $\delta_{i'} = 0$ , on obtient la condition (2.4).

$$k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} = h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu}, \quad v = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Pour le terme de réaction, on définit la fonction  $F \in C^2(\bar{\Omega} \times J \times D_0, \mathbb{R}^2)$  par

$$F(x, t, \eta) := \begin{pmatrix} 0 \\ g(\eta_1, \eta_2) - f(\eta_2) \eta_2 \end{pmatrix}.$$

Par suite, le problème (2.1) peut être réécrit sous forme de problème parabolique quasi-linéaire suivant:

$$\begin{cases} \partial_t w + \mathcal{A}(t, w) w = F(., t, w) & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \mathcal{B}(t, w) w = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ w(0) = (u_0, v_0) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (2.13)$$

Donc on est en mesure de vérifier le premier point du théorème (1.4), que le couple  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  est un problème au limite normalement elliptique.

Pour cela, on définit la fonction  $a \in C^2(\bar{\Omega} \times J \times D_0, \mathcal{L}(\mathbb{R}^2))$  par

$$a(x, t, \eta) := \begin{pmatrix} k(\eta_1, \eta_2) & -h(\eta_1, \eta_2) \\ 0 & k_v \end{pmatrix}.$$

où  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$ .

D'après (2.10), il est clair que la fonction  $a_{jk}$  peut être réécrite sous la forme

$$a_{jk} = a\delta_{jk}, \quad 1 \leq j, k \leq 2$$

où  $\delta_{jk}$  est le symbole de **Kronecker**.

Par suite,  $\alpha := [\delta_{jk}]_{1 \leq j, k \leq 2} = I$  la matrice identité est symétrique définie positive. De plus grâce à (2.5), pour chaque  $(t, \eta) \in J \times D_0$  on a

$$\sigma(a(x, t, \eta)) = \{k_v, k(\eta_1, \eta_2)\} \subset [\operatorname{Re} z > 0], \quad x \in \bar{\Omega},$$

et en vertu de (2.7), la condition

$$(1 - \delta(y))a(y, t, \eta)\delta(y) = 0, \quad y \in \partial\Omega$$

est automatiquement satisfaite.

Donc les conditions d'exemple **1** sont vérifiées et font de  $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$  un problème au limite normalement elliptique.

De la même façon que dans la section (1.2.5), nous déduisons de (2.11), et le lemme 1.1(ii) que

$$(\mathcal{A}, \mathcal{B}) \in C^{1-}(J \times V, \mathcal{E}(\Omega))$$

et en vertu de (2.8), on déduit que

$$F \in C^{1-}(J \times V, W_{p, \mathcal{B}}^1(\Omega)).$$

Ainsi, le problème (2.13) satisfait les conditions du théorème (1.4), alors l'existence locale de la solution en découle.

# Chapître 3

## Régularité $L^\infty$

Dans ce chapitre on se propose d'étudier la régularité  $L^\infty$  des solutions, pour une classe de systèmes de réaction-diffusion qui sont de la forme:

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v) & x \in \Omega, t > 0 \\ v_t = k_v \Delta v - f(v) v + g(u, v) & x \in \Omega, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x), v(x, 0) = v_0(x) & x \in \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

Plus exactement, on établira les conditions sous lesquelles le problème de la régularité  $L^\infty$  se ramène à celui de la régularité  $L^p$ .

Pour cela, nous reprendrons le plan général de la technique des itérations d'Alikakos-Moser introduite dans [1], pour conclure à une estimation uniforme dans  $L^\infty$ , ainsi l'existence globale en temps de la solution en découle.

On conserve aussi les mêmes hypothèses que dans le deuxième chapitre, et nous admettons pour le moment la positivité des solutions que nous démontrerons par la suite. Cette propriété peut être prouvée pour les solutions classiques dans l'intervalle maximal d'existence sous des hypothèses convenables sur les données initiales.

### 3.1 Estimations $L^1$

Dans ce qui suit, nous verrons que la structure de la première équation du système permet une estimation uniforme  $L^1$  sur la composante  $u$  de solution.

**Lemme 3.1** *Soit  $(u, v)$  la solution du système(2.1), avec la condition aux limites (2.3) ou (2.4).*

*Alors*

$$\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall t > 0. \quad (3.2)$$

**Preuve:** Intégrant la première équation du système (2.1) sur  $\Omega$ , on a

$$\int_{\Omega} u_t dx = \int_{\Omega} \nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v) dx \quad \forall t > 0.$$

Considérons la condition aux limites (2.3) ou (2.4), une intégration par partie nous donne

$$\int_{\Omega} u_t dx = \int_{\partial\Omega} \left( k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} - h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right) d\sigma = 0 \quad \forall t > 0.$$

Comme  $u$  et  $v$  sont positives, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u dx = \int_{\Omega} u_t dx = 0 \quad \forall t > 0.$$

Ce qui implique que

$$\|u(t)\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \quad \forall t > 0.$$

## 3.2 Estimations $L^p$ ( $1 \leq p \leq \infty$ )

Pour le reste de la présente section nous supposons que  $1 \leq p \leq \infty$ , et qu'il existe une fonction  $\phi$  et une constante  $C_1$  telles que

$$\begin{aligned} h(x, y) &= x\phi(y) \quad \text{pour tout } u, v \in \mathbb{R} \\ |\phi(y)| &\leq C_1 \quad \forall v \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Le but de cette section est d'établir les deux théorèmes suivants indépendamment du choix de condition aux limites du système (2.1).

**Théorème 3.1** *Soit  $(u, v)$  la solution du système (2.1), avec la condition aux limites (2.3) ou (2.4). De plus supposons qu'il existe une constante  $C_2$  telle que*

$$k(x, y) \geq C_2 > 0 \quad \text{pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \tag{3.4}$$

et

$$|\phi(y)| \leq C_1 \quad \text{pour tout } y \in \mathbb{R}^+.$$

*Si  $v(t) \in W^{1,\infty}(\Omega)$  pour tout  $t \in [0, \infty)$ , et s'il existe une constante  $k_{\nabla v}$  telle que*

$$|\nabla v(t, x)| \leq k_{\nabla v} \quad \text{pour tout } (x, t) \in \Omega \times [0, \infty). \tag{3.5}$$

*Alors il existe une constante  $C_3$  (indépendante de  $t$ ) telle que*

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3 \quad \text{pour tout } t \in [0, \infty).$$

**Remarque 3.1** *Dans le cas de condition aux limites (2.2), l'inégalité ci-dessus reste vraie si on suppose de plus que*

$$\sup_{t \geq 0} \|u(t, \cdot)\|_{L^1(\Omega)} \leq \text{constante.}$$

La preuve de ce théorème repose sur le lemme suivant:

**Lemme 3.2** Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ , de frontière régulière,  $\omega$  une fonction positive définie sur  $[0, \infty) \times \Omega$ , vérifiant l'inégalité différentielle

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \omega^{\lambda_k+1} dx < -\varepsilon_k \int_{\Omega} \omega^{\lambda_k+1} dx + (a_k + \varepsilon_k) c_k \left[ \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} \omega^{\lambda_{k-1}+1} dx \right]^{P_k}, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

où  $\varepsilon_k, c_k, a_k$  sont respectivement des nombres d'ordre  $\frac{1}{2^k}, 2^{\alpha k}, 2^k$  quand  $k$  tend vers l'infini,  $\alpha$  est une constante positive, et  $(\lambda_{k-1} + 1) P_k \leq \lambda_k + 1$ .

Alors il existe une constante positive  $a$  telle que

$$\sup_{t \geq 0} \|\omega(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq a 2^{2(\alpha+2)} K$$

où  $K \geq \max\{1, \sup_{t \geq 0} \|\omega(t, \cdot)\|_{L^p(\Omega)}, \|\omega(0, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)}\}$ ,  $p \geq 1$ .

Pour la preuve de ce lemme consulter [1, page 840].

### Démonstration du Théorème 3.1:

Soit  $1 \leq p < \infty$ , nous établissons dans un premier temps l'existence d'estimations  $L^p(\Omega)$ .

En multipliant la première équation du système (2.1) par  $u^p$  puis en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx = \int_{\Omega} u^p \nabla \cdot [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] dx.$$

En intégrant par partie, et en tenant compte des conditions aux limites, il vient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx &= \int_{\partial\Omega} u^p \left[ k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} - h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] d\sigma - \\ &\quad \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot \nabla u^p dx \\ &= - \int_{\Omega} k(u, v) (\nabla u) \cdot \nabla u^p dx + \int_{\Omega} h(u, v) (\nabla v) \cdot \nabla u^p dx \\ &= - p \int_{\Omega} k(u, v) (u^{p-1}) |\nabla u|^2 dx + p \int_{\Omega} \phi(v) (\nabla v) \cdot (u^p \nabla u) dx. \end{aligned}$$

Ce qui, en vertu de (3.3)-(3.5), implique que

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx \leq -pC_2 \int_{\Omega} (u^{p-1}) |\nabla u|^2 dx + pC_1 k_{\nabla v} \int_{\Omega} u^p |\nabla u| dx.$$

Comme  $|\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 = \frac{(p+1)^2}{4} u^{p-1} |\nabla u|^2$ , alors il vient

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx \leq -\frac{4pC_2}{(p+1)^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx + pC_1 k_{\nabla v} \int_{\Omega} u^{\frac{p+1}{2}} u^{\frac{p-1}{2}} |\nabla u| dx$$

En utilisant l'inégalité de Hölder à cette dernière intégrale, on obtient

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx \leq -\frac{4pC_2}{(p+1)^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx + pC_1 k_{\nabla v} \left( \int_{\Omega} u^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\Omega} u^{p-1} |\nabla u|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

Grâce à l'inégalité de Young, on a

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} \leq -\frac{4pC_2}{(p+1)^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 + pC_2 \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{C_1 k_{\nabla v}}{C_2} \right)^2 \int_{\Omega} u^{p+1} + \frac{2}{(p+1)^2} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx \right].$$

On pose  $C_4 = \frac{(C_1 k_{\nabla v})^2}{2C_2}$ , et multipliant l'inégalité par  $(p+1)$ , on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p+1} dx + 2C_2 \frac{p}{p+1} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx \leq C_4 p(p+1) \int_{\Omega} u^{p+1} dx.$$

Pour simplifier, on écrit

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^p dx + 2C_2 \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla u^{\frac{p}{2}}|^2 dx \leq C_4 p(p-1) \int_{\Omega} u^p dx. \quad (3.6)$$

Si on pose  $p_k = 2^k$  pour  $k \in \mathbb{N}$  et  $w = u^{p_k-1}$ , alors cette dernière inégalité devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx + 2C_2 \frac{p_k-1}{p_k} \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq C_4 p_k^2 \int_{\Omega} w^2 dx. \quad (3.7)$$

Ensuite, par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev et l'inégalité de Young, on a

$$\|w\|_{L^2}^2 \leq C_5 \|w\|_{L^1}^{2\alpha} \|w\|_{H^1}^{2(1-\alpha)} \leq C_5(C(\varepsilon) \|w\|_{L^1}^2 + \varepsilon \|w\|_{H^1}^2), \quad \alpha \in (0, 1)$$

d'où

$$\|w\|_{L^2}^2 \leq C_5 \left( \alpha \left( \frac{1-\alpha}{\varepsilon} \right)^{\frac{1}{\alpha}-1} \|w\|_{L^1}^2 + \varepsilon \|w\|_{H^1}^2 \right).$$

Comme  $0 \leq \alpha \leq 1$  et  $0 \leq 1-\alpha \leq 1$ , donc pour  $\varepsilon$  suffisamment petit, on peut écrire

$$\|w\|_{L^2}^2 \leq C_5 \left( \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}} \|w\|_{L^1}^2 + \varepsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 \right). \quad (3.8)$$

Multipliant cette dernière inégalité par  $(C_1 P_k^2 + \varepsilon)$ , et prenant  $\varepsilon$  suffisamment petit pour que

$$C_5(C_1 P_k^2 + \varepsilon)\varepsilon \leq 2C_2 \frac{p_k - 1}{p_k}. \quad (3.9)$$

Nous obtenons d'après (3.7) que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx + C_5(C_4 P_k^2 + \varepsilon)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx &\leq C_4 P_k^2 \int_{\Omega} w^2 dx \\ &\leq -\varepsilon \int_{\Omega} w^2 dx + (C_4 P_k^2 + \varepsilon) \int_{\Omega} w^2 dx. \end{aligned}$$

D'après l'inégalité (3.8), on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx + C_5(C_4 P_k^2 + \varepsilon)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx \leq -\varepsilon \int_{\Omega} w^2 dx + (C_4 P_k^2 + \varepsilon) C_5 \left( \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}} \|w\|_{L^1}^2 + \varepsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 \right)$$

En retranchant  $C_5(C_4 P_k^2 + \varepsilon)\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla w|^2 dx$  des deux côtés, il vient que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} w^2 dx \leq -\varepsilon \int_{\Omega} w^2 dx + C_5 \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}} (C_4 P_k^2 + \varepsilon) \left( \int_{\Omega} w dx \right)^2. \quad (3.10)$$

En utilisant de nouveau la fonction  $u$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u^{p_k} dx \leq -\varepsilon \int_{\Omega} u^{p_k} dx + C_5 \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}} (C_4 p_k^2 + \varepsilon) \left( \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{p_{k-1}} dx \right)^2$$

en posant

$$y = \int_{\Omega} u^{p_k} dx, \quad A = \varepsilon, \quad \text{et} \quad B = C_5 \frac{1}{\varepsilon^{\frac{1}{\alpha}-1}} (C_4 p_k^2 + \varepsilon) \left( \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{p_{k-1}} dx \right)^2.$$

Cette dernière inégalité se transforme

$$\frac{dy}{dt} \leq -Ay + B \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Le lemme de Gronwall sous forme différentielle nous donne

$$\begin{aligned} y(t) &\leq \left( y(0) + \int_0^t e^{\int_0^s A dr} B ds \right) e^{-\int_0^t A dr} \\ &\leq \frac{B}{A} + \left( y(0) - \frac{B}{A} \right) e^{-At}. \end{aligned}$$

D'où on déduit que

$$y(t) \leq \max \left\{ \frac{B}{A}, y(0) \right\} \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ce qui implique

$$\int_{\Omega} u^{p_k} dx \leq \max \left\{ \int_{\Omega} u_0^{p_k} dx, C_5 \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} (C_4 p_k^2 + \varepsilon) \left( \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{p_{k-1}} dx \right)^2 \right\} \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (3.11)$$

L'estimation de  $\|u\|_{L^{p_k}}$  suit de (3.11), mais comme la borne supérieur dépend de  $\|u\|_{L^{p_{k-1}}}$  on ne peut pas faire tendre  $k$  vers  $\infty$ , et pour avoir des estimations dans  $L^\infty$ , on cherche une relation de récurrence entre les normes dans  $L^{p_k}(\Omega)$  en utilisant la technique des itérations de Moser et une estimation des constantes dans (3.11).

En effet, si on pose  $\varepsilon_k = \varepsilon$ , d'après (3.9) on trouve que  $\varepsilon_k$  est d'ordre  $\frac{1}{p_k^2}$ .

On pose aussi

$$\delta_k = C_5 \varepsilon^{-\frac{1}{\alpha}} (C_4 p_k^2 + \varepsilon) \quad \text{et} \quad L = \max\{\|u_0\|_{L^1(\Omega)}, \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}\}.$$

L'inégalité (3.11) s'écrit maintenant sous la forme

$$\int_{\Omega} u^{p_k} dx \leq \max \left\{ L^{p_k}, \delta_k \left( \sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} u^{p_{k-1}} dx \right)^2 \right\} \quad \forall t \geq 0.$$

Comme  $\delta_k \geq 1$  pour tout  $k \in \mathbb{N}$ , d'après (3.2), on obtient

$$\int_{\Omega} u^{p_k} dx \leq \delta_k \delta_{k-1}^{p_1} \delta_{k-2}^{p_2} \dots \delta_1^{p_{k-1}} L^{p_k}$$

Enfin, soit  $C$  une constante telle que  $\delta_k \leq C p_k^{2(\frac{1}{\alpha}+1)}$ , alors on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u^{p_k} dx &\leq (C p_k^{2(\frac{1}{\alpha}+1)}) (C p_{k-1}^{2(\frac{1}{\alpha}+1)})^{p_1} (C p_{k-2}^{2(\frac{1}{\alpha}+1)})^{p_2} \dots (C p_1^{2(\frac{1}{\alpha}+1)})^{p_{k-1}} L^{p_k} \\ &\leq (C 2^{2k(\frac{1}{\alpha}+1)}) (C^{p_1} 2^{2(k-1)p_1(\frac{1}{\alpha}+1)}) (C^{p_2} 2^{2(k-2)p_2(\frac{1}{\alpha}+1)}) \dots (C^{p_{k-1}} 2^{2^{k-1}(\frac{1}{\alpha}+1)}) L^{p_k} \\ &\leq C^{p_0+p_1+p_2+\dots+p_{k-1}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)(kp_0+(k-1)p_1+(k-2)p_2+\dots+p_{k-1})} L^{p_k} \\ &\leq C \sum_{i=0}^{k-1} 2^i 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{i=0}^{k-1} 2^i (k-i) L^{p_k}. \end{aligned}$$

Par suite

$$\int_{\Omega} u^{p_k} dx \leq C^{2^k-1} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{i=0}^{k-1} 2^i (k-i) L^{p_k}.$$

En prenant la puissance  $\frac{1}{p_k}$  dans cette dernière inégalité, on peut calculer

$$\begin{aligned}
\|u\|_{L^{p_k}} &\leq C^{1-\frac{1}{p_k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{k-i}{2^{k-i}} L \\
&\leq C^{1-\frac{1}{2^k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{i=1}^k \frac{i}{2^i} L \\
&\leq C^{1-\frac{1}{2^k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{j=1}^k \sum_{i=j}^k \left(\frac{1}{2}\right)^i L \\
&\leq C^{1-\frac{1}{2^k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)} \sum_{j=1}^k \left[ \left(\frac{1}{2}\right)^{j-1} - \left(\frac{1}{2}\right)^k \right] L \\
&\leq C^{1-\frac{1}{2^k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1) \left[ -k\left(\frac{1}{2}\right)^k + \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^j \right]} L \\
&\leq C^{1-\frac{1}{2^k}} 2^{2(\frac{1}{\alpha}+1)(2-\frac{k+2}{2^k})} L.
\end{aligned}$$

En faisant tendre  $k$  vers  $+\infty$ , on trouve bien le résultat du Théorème 3.1

$$\|u(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_3.$$

où  $C_3 = 2^{4(\frac{1}{\alpha}+1)} CL$ .

**Théorème 3.2** Soit  $(u, v)$  la solution du système (2.1), on suppose que

$g(u, v) > 0$  pour tout  $(u, v) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$  et  $|f(v)| \leq K_f < \infty$ . S'ils existent  $C_6, C_7 \in \mathbb{R}$  telles que

$$\sup_{t \geq 0} \int_{\Omega} |v(t)| dx = C_6 < \infty$$

et

$$\int_{\Omega} [g(u, v)v^p - f(v)v^{p+1}] dx \leq C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx \quad \text{pour tout } 1 \leq p < \infty. \quad (3.12)$$

Alors il existe une constante positive  $C_8$  (indépendante de  $t$ ) telle que

$$\|v(t, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq C_8 \quad \text{pour tout } t \in [0, \infty).$$

**Preuve:** Notons d'abord que notre hypothèse sur  $g(u, v)$  implique que  $v(t, x) \geq 0$  sur  $\Omega$  pour tout  $t \in [0, T_{Max}]$  à condition que  $v_0(x) \geq 0$  sur  $\Omega$ .

Soit maintenant  $1 \leq p < \infty$ , en multipliant la deuxième équation du système (1) par  $v^p$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient

$$\int_{\Omega} v_t v^p dx = \int_{\Omega} k_v v^p \Delta v + [g(u, v) v^p - f(v) v^{p+1}] dx.$$

En combinant (3.12) et cette dernière estimation, il s'ensuit que

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^{p+1} dx \leq k_v \int_{\Omega} v^p \Delta v + C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx.$$

En intégrant par partie, et tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^{p+1} dx &\leq k_v \left( \int_{\partial\Omega} v^p \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} \nabla v^p \cdot \nabla v dx \right) + C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx \\ &\leq -pk_v \int_{\Omega} v^{p-1} |\nabla v|^2 dx + C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Comme  $|\nabla v^{\frac{p+1}{2}}|^2 = \frac{(p+1)^2}{4} v^{p-1} |\nabla v|^2$ , il vient

$$\frac{1}{p+1} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^{p+1} dx \leq -\frac{4p}{(p+1)^2} k_v \int_{\Omega} |\nabla v^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx + C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx.$$

En multipliant par  $(p+1)$ , on obtient l'inégalité différentielle principale

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} v^{p+1} dx \leq -\frac{4p}{(p+1)} k_v \int_{\Omega} |\nabla v^{\frac{p+1}{2}}|^2 dx + (p+1) C_7 \int_{\Omega} v^{p+1} dx.$$

En suivant les mêmes démarches que dans la démonstration du théorème (4) (à cette dernière équation en  $v$ ), par la technique des itérations de Moser introduite dans le lemme d'Alikakos [1], on conclut une estimation uniforme dans  $L^\infty$ . Alors l'existence globale en temps de la solution en découle.

### 3.3 Positivité de solutions

Comme nous nous intéressons aux solutions positives, nous allons prouver que sous une hypothèse de structure pour les termes non-linéaires et la positivité des données initiales, il est possible de construire des solutions positives (ses composantes sont positives).

**Proposition 3.1** *Sous les hypothèses du théorème (2.1), (3.1) et (3.2). Si de plus*

$$u_0 \geq 0, v_0 \geq 0 \text{ sur } \Omega. \quad (3.13)$$

*Alors le système (2.1) admet une solution classique positive.*

**Preuve:** Notons d'abord que  $u = u_+ - u_-$ , où  $u_+ = \max(u, 0)$  et  $u_- = -\min(u, 0)$  sont respectivement les parties positives et négatives de la fonction  $u$ .

i) Montrons la positivité de la composante  $u$ .

Multipliant la première équation du système (2.1) par  $(u_-)^{p-1}$ , on intègre le résultat sur  $\Omega$ , on a

$$\frac{d}{pdt} \int_{\Omega} (u_-)^p dx = \int_{\Omega} (u_-)^{p-1} \nabla \cdot [k(u, v) \nabla u - h(v) \nabla v] dx.$$

En tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\frac{d}{pdt} \int_{\Omega} (u_-)^p dx = - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(v) \nabla v] \cdot \nabla (u_-)^{p-1} dx.$$

Refaisons le même raisonnement que dans la preuve du Théorème 3.1, d'où l'estimation (3.6) devient

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_-)^p dx + 2C_2' \frac{p-1}{p} \int_{\Omega} |\nabla (u_-)^{\frac{p}{2}}|^2 dx \leq C_4' p(p-1) \int_{\Omega} (u_-)^p dx.$$

Pour simplifier, on peut écrire

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (u_-)^p dx \leq K \int_{\Omega} (u_-)^p dx.$$

En intégrant sur  $[0, t]$ , on obtient

$$\int_{\Omega} u_-^p(x, t) - u_-^p(x, 0) dx \leq K \int_0^t \int_{\Omega} u_-^p(x, s) dx ds.$$

On pose  $\varphi(t) = \int_{\Omega} u_-^p(x, t) dx$ , on a donc

$$\varphi(t) - \varphi(0) \leq K \int_0^t \varphi(s) ds$$

Comme  $u_{0-} = -\min\{u_0(x), 0\} = 0$ , alors

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= \int_{\Omega} u_-^p(x, 0) dx \\ &= \int_{\Omega} (u_{0-})^p(x) dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par suite

$$\varphi(t) \leq K \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Le lemme de Granwall sous forme intégrale implique que  $\varphi = 0$ , c.-à-d.

$$\int_{\Omega} (u_-)^p(x, t) dx = 0 \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T$$

Ce qui donne  $u_-(x, t) = 0$ , d'où la positivité de la composante  $u$

ii) Montrons maintenant la positivité de la composante  $v$ .

En multipliant la deuxième équation du système (2.1) par  $v_-$  et en intégrant le résultat sur  $\Omega$ , on a

$$\frac{d}{2dt} \int_{\Omega} (v_-)^2 dx = \int_{\Omega} k_v v_- \Delta v dx - \int_{\Omega} f(v) (v_-)^2 dx + \int_{\Omega} v_- g(u, v) dx.$$

En intégrant par partie, et tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{2dt} \int_{\Omega} (v_-)^2 dx &= -k_v \int_{\Omega} |\nabla v_-|^2 dx - \int_{\Omega} f(v) (v_-)^2 dx + \int_{\Omega} v_- g(u, v) dx \\ &\leq \int_{\Omega} v_- g(u, v) dx. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Comme  $g(u, v) = [g(u, v) - g(u, 0)] + g(u, 0)$ , en utilisant les accroissements finies, on obtient

$$g(u, v) = v g_v(u, c) + g(u, 0).$$

On remplace  $g(u, v)$  par sa valeur dans (3.14), on aura

$$\frac{d}{2dt} \int_{\Omega} (v_-)^2 dx \leq K \int_{\Omega} v_- [v g_v(u, c) + g(u, 0)] dx.$$

D'où il résulte que

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} (v_-)^2 dx \leq K' \int_{\Omega} |v_-|^2 dx.$$

En intégrant sur  $[0, t]$ , on obtient

$$\int_{\Omega} v_-^2(x, t) - v_-^2(x, 0) dx \leq K' \int_0^t \int_{\Omega} v_-^2(x, s) dx ds.$$

On pose  $\varphi(t) = \int_{\Omega} v_-^2(x, t) dx$ , on a donc

$$\varphi(t) - \varphi(0) \leq K' \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Comme  $v_{0-} = -\min\{v_0(x), 0\} = 0$ , on déduit que

$$\begin{aligned}
\varphi(0) &= \int_{\Omega} v_-^2(x, 0) dx \\
&= \int_{\Omega} (v_{0-})^2(x) dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Par suite

$$\varphi(t) \leq K' \int_0^t \varphi(s) ds.$$

Le lemme de Granwall sous forme intégrale implique que  $\varphi = 0$ , c.-à-d.

$$\int_{\Omega} (v_-)^2(x, t) dx = 0 \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

Ce qui donne  $v_-(x, t) = 0$ , d'où l'on déduit la positivité de la composante  $v$ .

# Chapître 4

## Comportement asymptotique

Dans certains cas particuliers du système de Keller-Segel on peut montrer que la solution peut converger vers un état stationnaire non trivial lorsque  $t$  tend vers  $\infty$  (voir[25]). Dans ce chapitre nous allons chercher à décrire le comportement en grand temps des solutions classiques du problème (1).

### 4.1 Fonction de Lyapunov

Commençons par définir une fonction de Lyapunov qui est un outil utile pour étudier le comportement asymptotique en temps.

**Définition 4.1** *On appelle **fonctionnelle de Lyapunov** associée au système (1), toute fonction*

$$L : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$$

*telle que*

$$\frac{d}{dt}L(U(t, \cdot)) \leq 0$$

*pour tout  $t > 0$  et toute solution  $U(t, \cdot) = (u(t, \cdot), v(t, \cdot))$  du système(1).*

Dans la suite on introduit les fonctions suivantes:

$$F(v) : = \int_0^v f(s) ds \quad (4.1)$$

$$G(u, v) : = - \int_0^v g(u, s) ds. \quad (4.2)$$

D'après (2.8), les deux fonctions  $F, G$  sont bien définies, de plus  $F$  est continue.

Supposons aussi qu'il existe une constante non négative  $C_9$ , telle que

$$\int_{\Omega} F(v) dx \geq C_9 \int_{\Omega} v^2 dx \quad (4.3)$$

dans le cas de condition aux limites homogène de Neumann nous supposons que  $C_9 > 0$ .

**Théorème 4.1** *Supposons que  $(u, v)$  est la solution du problème (1), s'il existe une fonction  $R \in C^2(\mathbb{R})$  telle que*

$$\frac{h(u, v)}{k(u, v)} (G_{uu}(u, v) + R''(u)) + G_{uv}(u, v) = 0 \quad (4.4)$$

et

$$G_{uu}(u, v) + R''(u) \geq 0. \quad (4.5)$$

*Dans le cas de condition aux limites (3) on va supposer de plus que*

$$G_u(u, v) = 0 = R'(u) \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

*Alors il existe une fonction de **Lyapunov** pour le système (1) donnée par*

$$H(u(t), v(t)) := \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx + \int_{\Omega} F(v(t)) dx + \int_{\Omega} R(u(t)) dx + \int_{\Omega} G(u(t), v(t)) dx. \quad (4.6)$$

**Preuve:** D'après (2.8) les fonctions  $f$  et  $g$  sont de classe  $C^1$ , donc les deux fonctions  $F$  et  $G$  sont aussi de classe  $C^1$ , comme  $R \in C^1(\mathbb{R})$  et  $\nabla c(t) \in L^2(\Omega)$ , alors la fonction  $H$  est bien définie.

De plus un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F(v(t)) &= v_t f(v)v \\ \frac{d}{dt}G(u, v) &= u_t G_u(u, v) - v_t g(u, v).\end{aligned}\tag{4.7}$$

En intégrant par partie, et en tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\int_{\Omega} v_t \Delta v dx = \int_{\partial\Omega} v_t \frac{\partial v}{\partial \nu} d\sigma - \int_{\Omega} (\nabla v_t) \cdot (\nabla v) dx = - \int_{\Omega} (\nabla v_t) \cdot (\nabla v) dx.\tag{4.8}$$

Nous dérivons maintenant formellement  $H$  par rapport à  $t$ , d'après (4.7) on trouve

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(u, v) &= \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} 2(\nabla v_t) \cdot (\nabla v) dx + \int_{\Omega} v_t f(v)v dx + \int_{\Omega} u_t R'(u) dx \\ &\quad + \left( \int_{\Omega} u_t G_u(u, v) dx - \int_{\Omega} v_t g(u, v) dx \right).\end{aligned}$$

Par suite, grâce à (4.8) et on remet dans l'ordre les termes de la somme ci-dessus, on a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}H(u, v) &= - k_v \int_{\Omega} v_t \Delta v dx + \int_{\Omega} v_t f(v)v dx - \int_{\Omega} v_t g(u, v) dx + \int_{\Omega} u_t R'(u) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} u_t G_u(u, v) dx \\ &= - \int_{\Omega} v_t (k_v \Delta v - f(v)v + g(u, v)) dx + \int_{\Omega} u_t R'(u) dx + \int_{\Omega} u_t G_u(u, v) dx.\end{aligned}$$

En remplaçant  $u_t, v_t$  à partir du système (1), il vient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(u, v) &= - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx + \int_{\Omega} [\nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v)] R'(u) dx \\ &\quad + \int_{\Omega} [\nabla \cdot (k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v)] G_u(u, v) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par partie, et tenant compte des conditions aux limites, on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(u, v) &= - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx + \left( \int_{\partial\Omega} \left[ k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} - h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu} \right] R'(u) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot (\nabla u) R''(u) dx \right) + \left( \int_{\partial\Omega} [k(u, v) \frac{\partial u}{\partial \nu} - h(u, v) \frac{\partial v}{\partial \nu}] G_u(u, v) d\sigma - \right. \\ &\quad \left. - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot (\nabla u) G_{uu}(u, v) dx - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot (\nabla v) G_{uv}(u, v) dx \right) \\ &= - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot \nabla u (R''(u) + G_{uu}(u, v)) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot (\nabla v) G_{uv}(u, v) dx \\ &= - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot [(\nabla u) (R''(u) + G_{uu}(u, v)) + (\nabla v) G_{uv}(u, v)] dx \\ &= - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} [k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v] \cdot \left[ \frac{R''(u) + G_{uu}(u, v)}{k(u, v)} k(u, v) \nabla u + G_{uv}(u, v) \nabla v \right] dx \end{aligned}$$

On remplace  $G_{uv}(u, v)$  par sa valeur dans (4.4), on aura

$$\frac{d}{dt}H(u, v) = - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} [k \nabla u - h \nabla v] \cdot \left[ \frac{R''(u) + G_{uu}(u, v)}{k(u, v)} k \nabla u - \frac{R''(u) + G_{uu}(u, v)}{k(u, v)} h \nabla v \right] dx$$

d'où on déduit que

$$\frac{d}{dt}H(u, v) = - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{R''(u) + G_{uu}(u, v)}{k(u, v)} |k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2 dx \leq 0. \quad (4.9)$$

Pour le reste de cette section on fait l'hypothèse suivante:

**Hypothèse principale:** Supposons qu'il existe une constante  $C_{11}$  telle que

$$\int_{\Omega} G(u, v) + R(u) dx \geq C_{10} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C_{11} \quad (4.10)$$

où  $C_{10}$  est une constante qui vérifie  $\frac{k_v}{2} + C_{10} > 0$ .

**Proposition 4.1** *Sous les hypothèses (4.3) et (4.10). Il existe une constante  $C_{12}$  (indépendante de  $t$ ) telle que*

$$H(u_0, v_0) \geq H(u(t), v(t)) \geq C_{12} \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve** On a déjà vu que

$$\frac{d}{dt} H(u(t), v(t)) \leq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Donc, la fonction  $H(u(t), v(t))$  est décroissante, ce qui implique que

$$\begin{aligned} H(u_0, v_0) &\geq H(u(t), v(t)) \\ &\geq \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx + \int_{\Omega} F(v(t)) dx + \int_{\Omega} R(u(t)) dx + \int_{\Omega} G(u(t), v(t)) dx. \end{aligned}$$

D'après (4.3), on a

$$H(u(t), v(t)) \geq \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx + \int_{\Omega} R(u(t)) dx + \int_{\Omega} G(u(t), v(t)) dx.$$

En combinant cette dernière inégalité avec (4.10), on obtient

$$\begin{aligned} H(u(t), v(t)) &\geq \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx + C_{10} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + C_{11} \\ &\geq \left(\frac{k_v}{2} + C_{10}\right) \int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx + C_{11}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Comme  $\frac{k_v}{2} + C_{10} > 0$ , on en déduit qu'il existe une constante  $C_{12}$  (indépendante de  $t$ ) telle que

$$H(u_0, v_0) \geq H(u(t), v(t)) \geq C_{12} \quad \forall t \geq 0.$$

**Proposition 4.2** *Supposons que (4.3) et (4.10) sont vérifiées, alors il existe une constante positive  $C_{13}$  (indépendante de  $t$ ) telle que*

$$\int_{\Omega} |\nabla v(t)|^2 dx \leq C_{13} \quad \forall t \geq 0.$$

**Preuve**

D'après l'inégalité (4.11) et la Proposition 4.1 comme  $\frac{k_v}{2} + C_{10} > 0$ , on calcule

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx &\leq \left(\frac{k_v}{2} + C_{10}\right)^{-1} (H(u(t), v(t)) - C_{11}) \\ &\leq \left(\frac{k_v}{2} + C_{10}\right)^{-1} (H(u_0, v_0) - C_{11}). \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe une constante positive  $C_{13}$  (indépendante de  $t$ ), telle que

$$\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx \leq H(u_0, v_0) + C_{13}.$$

**Proposition 4.3** *Supposons que (4.3) et (4.10) sont vérifiées, alors il existe une constante positive  $C_{14}$  (indépendante de  $t$ ) telle que*

$$\int_0^T \int_{\Omega} v_t^2 dx dt \leq H(u_0, v_0) + C_{14}. \quad (4.12)$$

**Preuve** On a déjà vu dans (4.9) que

$$\frac{d}{dt}H(u, v) = - \int_{\Omega} (v_t)^2 dx - \int_{\Omega} \frac{R''(u) + G_{uu}(u, v)}{k(u, v)} |k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2 dx \leq 0.$$

D'après (4.5) et (2.5), on a

$$\int_{\Omega} (v_t)^2 dx + \frac{d}{dt}H(u, v) \leq 0.$$

En intégrant sur  $[0, T]$ , et en tenant compte la Proposition 4.1, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} (v_t)^2 dx dt &\leq - \int_0^T \frac{d}{dt}H(u, v) dt = H(u_0, v_0) - H(u(T), v(T)) \\ &\leq H(u_0, v_0) - C_{12}. \end{aligned}$$

Cela signifie qu'il existe une constante positive  $C_{14}$  (indépendante de  $t$ ), telle que

$$\int_0^T \int_{\Omega} (v_t)^2 dx dt \leq H(u_0, v_0) + C_{14}.$$

## 4.2 Comportement asymptotique

On résume les résultats concernant le comportement asymptotique dans le théorème suivant:

**Théorème 4.2** *Supposons que (4.3) et (4.10) sont vérifiées. De plus la solution faible  $(u(t), v(t))$  du système (1) satisfait aussi*

$$(i) \quad \frac{G_{uu}(u, v) + R''(u)}{k(u, v)} \leq C_{14} \quad \text{et} \quad G_u(u, v) + R'(u) > C_{15}$$

ou

$$(ii) \quad 0 < (G_{uu}(u, v) + R''(u)) \exp(G_u(u, v) + R'(u)) \leq C_{16}k(u, v) \quad \text{et}$$

$$\sqrt{\frac{k(u(t), v(t))}{G_{uu}(u, v) + R''(u(t))}} \in L^2(\Omega) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

où  $C_{14}, C_{15}, C_{16}$  sont des constantes réelles.

On suppose en outre que la fonction  $f$  est Hölder continue avec exposant  $\beta \leq 1$  tel que  $0 < \beta \leq 1$  si  $N \leq 3$  ou  $\beta < \frac{2}{N}$  si  $N > 3$ .

Enfin supposons que

$$|f(v)| \leq K_f \quad \text{pour tout } v \in \mathbb{R}. \quad (4.13)$$

Alors il existe une suite de nombre réelle positive  $(t_k)_{k \in \mathbb{N}}$  et deux fonctions  $v^\bullet$  et  $g^\bullet$  tel que

$$v(t_k) \rightharpoonup v^\bullet \quad \text{dans } H^1(\Omega) \quad (4.14)$$

$$f(v(t_k)) v(t_k) \rightarrow f(v^\bullet) v^\bullet \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad (4.15)$$

$$g(u(t_k), v(t_k)) \rightharpoonup g^\bullet \quad \text{dans } L^2(\Omega). \quad (4.16)$$

De plus

$$\int_{\Omega} (k_v \nabla v^\bullet \nabla \varphi + f(v^\bullet) v^\bullet \varphi) dx = \int_{\Omega} g^\bullet \varphi dx \quad \text{pour tout } \varphi \in H^1(\Omega).$$

Enfin

$$\exp\left(-\frac{G_u(u(t_k), v(t_k)) + R'(u(t_k))}{2}\right) \rightarrow \text{const} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{si (i) a lieu}$$

et

$$\exp\left(\frac{G_u(u(t_k), v(t_k)) + R'(u(t_k))}{2}\right) \rightarrow \text{const} \quad \text{dans } L^2(\Omega) \quad \text{si (ii) a lieu.}$$

**Remarque 4.1** *L'hypothèse (i) du théorème (4.2) est satisfaite par l'exemple 1.1, tandis que*

les systèmes étudiés dans [25] satisfont (ii).

**Preuve:** Supposons d'abord que (i) est vérifiée.

1) Montrons qu'il existe une suite  $(t_k)$  tend vers  $\infty$ , telle que  $v(t_k) \rightharpoonup v^\bullet$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Pour cela, on pose

$$W := \exp [-(G_u(u, v) + R'(u))]$$

et notons que l'hypothèse  $G_u(u, v) + R'(u) > C_{15}$  implique que

$$\left\| \sqrt{W(t)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left( \int_{\Omega} \exp(-C_{15}) dx \right)^{\frac{1}{2}}, \quad t \geq 0.$$

D'où

$$\left\| \sqrt{W(t)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante.} \quad (4.17)$$

D'autre part, il existe une constante  $\frac{C_{17}}{C_{14}}$  (qui sera déterminé dans la suite) telle que

$$\begin{aligned} \frac{C_{17}}{C_{14}} \left| \nabla \sqrt{W} \right|^2 &= \frac{C_{17}}{C_{14}} \left| \nabla \exp\left(-\frac{1}{2}(G_u(u, v) + R'(u))\right) \right|^2 \\ &= \frac{C_{17}}{C_{14}} \left| \left[ \exp\left(-\frac{1}{2}(G_u + R'(u))\right) \right] \left[ -\frac{1}{2}(G_{uu}(u, v)\nabla u + G_{uv}(u, v)\nabla v + R''(u)\nabla u) \right] \right|^2 \\ &= \frac{C_{17}}{4C_{14}} \exp(-(G_u(u, v) + R'(u))) \left| (G_{uu}(u, v) + R''(u))\nabla u + G_{uv}(u, v)\nabla v \right|^2 \end{aligned}$$

En remplaçant dans cette dernière égalité  $G_{uv}(u, v)$  à partir de (4.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{C_{17}}{C_{14}} \left| \nabla \sqrt{W} \right|^2 &= \frac{C_{17}}{4C_{14}} \exp(-(G_u(u, v) + R'(u))) \\ &\quad \times \left| (G_{uu}(u, v) + R'')\nabla u - \frac{h(u, v)}{k(u, v)} (G_{uu}(u, v) + R'')\nabla v \right|^2 \\ &= \frac{C_{17}}{4C_{14}} \left[ \frac{G_{uu}(u, v) + R''}{k(u, v)} \right]^2 \left[ \exp(-(G_u(u, v) + R'(u))) \right] |k\nabla u - h\nabla v|^2. \end{aligned}$$

En choisissant  $C_{17} = 4 \exp C_{15}$ , puis on utilise l'hypothèse (i), il vient

$$\begin{aligned} \frac{C_{17}}{C_{14}} \left| \nabla \sqrt{W} \right|^2 &\leq \frac{C_{17}}{4} \frac{G_{uu}(u, v) + R''}{k(u, v)} [\exp(-(G_u(u, v) + R'(u)))] |k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2 \\ &\leq \left[ \frac{G_{uu}(u, v) + R''}{k(u, v)} \right] |k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2. \end{aligned}$$

On définit maintenant la fonction

$$I(t) := t(\|v_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_{17}}{C_{14}} \left\| \nabla \sqrt{W}(t) \right\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (4.18)$$

De l'estimation ci-dessus et la Proposition 4.1, on a

$$\begin{aligned} \int_0^t (\|v_s(s)\|_{L^2}^2 + \frac{C_{17}}{C_{14}} \left\| \nabla \sqrt{W}(s) \right\|_{L^2}^2) ds &\leq - \int_0^t \frac{d}{ds} H(u(s), v(s)) ds \\ &\leq H(u_0, v_0) - H(u(t), v(t)) \\ &\leq C_{18} \end{aligned}$$

où  $C_{18}$  est une constante indépendante de  $t$ .

Par suite

$$\begin{aligned} \int_0^t I(s) ds &\leq \int_0^t s(\|v_s(s)\|_{L^2}^2 + \frac{C_{17}}{C_{14}} \left\| \nabla \sqrt{W}(s) \right\|_{L^2}^2) ds \\ &\leq \int_0^t t(\|v_s(s)\|_{L^2}^2 + \frac{C_{17}}{C_{14}} \left\| \nabla \sqrt{W}(s) \right\|_{L^2}^2) ds \\ &\leq t.C_{18}. \end{aligned}$$

Si nous posons

$$F(t) = \int_0^t I(s) ds.$$

Alors pour tout  $t \geq 0$ , nous avons

$$\begin{aligned}
F(2t) - F(t) &= \int_0^{2t} I(s)ds - \int_0^t I(s)ds \\
&= \int_t^{2t} I(s)ds \\
&\leq \int_0^{2t} I(s)ds \\
&\leq 2t.C_{18}.
\end{aligned}$$

Par le Théorème des accroissement finis, il existe  $\theta_t \in \mathbb{R}$  tel que

$$t.F'(\theta_t) \leq 2t.C_{18} \quad \text{où} \quad t \leq \theta_t \leq 2t$$

donc pour  $t = k \in \mathbb{N}$ , on obtient

$$k.F'(\theta_k) \leq 2k.C_{18}, \quad k \leq \theta_k \leq 2k.$$

Comme  $F'(\theta_k) = I(\theta_k)$ , il s'ensuit que

$$I(\theta_k) \leq 2C_{18}, \quad k \leq \theta_k \leq 2k.$$

Donc il existe une suite (pour simplifier) notée  $t_k$  qui tend vers  $\infty$  telle que  $I(t_k) \leq 2C_{18}$  pour tout  $t_k$ , ce qui implique d'après (4.18) que

$$\|v_t(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla \sqrt{W(t_k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (4.19)$$

En reportant (4.3) et (4.10) dans l'expression intégrales de la fonction de Lyapunov  $H$ , on obtient

$$\begin{aligned}
H(u(t_k), v(t_k)) &:= \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t_k)|^2 dx + \int_{\Omega} F(v(t_k))dx + \int_{\Omega} R(u(t_k))dx + \int_{\Omega} G(u(t_k), v(t_k))dx \\
&\geq \frac{k_v}{2} \int_{\Omega} |\nabla v(t_k)|^2 dx + C_1 \int_{\Omega} (v(t_k))^2 dx + C_2 \int_{\Omega} |\nabla v(t_k)|^2 dx.
\end{aligned}$$

Comme la fonction  $H$  est décroissante, il vient que

$$\left(\frac{k_v}{2} + C_2\right) \|\nabla v(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_1 \|v(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq H(u_0, v_0).$$

D'où on déduit que

$$\|v(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_{19}$$

où  $C_{19}$  est une constante (indépendante de  $t_k$ ).

Donc la suite  $v(t_k)$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut alors en extraire une sous-suite notée encore  $v(t_k)$ , qui converge faiblement vers une fonction  $v^*$  dans  $H^1(\Omega)$ .

Compte tenu de l'injection compact de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ , on obtient

$$v(t_k) \rightharpoonup v^* \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (4.20)$$

2) Montrons que  $f(v(t_k))v(t_k) \rightarrow f(v^*)v^*$  dans  $L^2(\Omega)$  lorsque  $k$  tend vers  $\infty$ .

Il s'agit donc d'estimer  $f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*$  dans  $L^2(\Omega)$ , on a

$$\|f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*\|_{L^2} \leq \|f(v(t_k))v(t_k) - f(v(t_k))v^*\|_{L^2} + \|f(v(t_k))v^* - f(v^*)v^*\|_{L^2(\Omega)}.$$

On va distinguer les trois cas suivants:

**1<sup>er</sup> cas :** Si  $N \leq 3$  et  $0 < \beta \leq \frac{2}{3}$ , d'après (4.13) et la Hölder continuité de  $f$ , on a

$$\begin{aligned} \|f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*\|_{L^2} &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \left\| v^* |v(t_k) - v^*|^\beta \right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2} + k_{Hölder} \left[ \int_{\Omega} (v^*)^2 |v(t_k) - v^*|^{2\beta} dx \right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder, il vient que

$$\begin{aligned} \|f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*\|_{L^2} &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2} + k \left( \int_{\Omega} v^{*\frac{2}{1-\beta}} \right)^{\frac{1-\beta}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(t_k) - v^*|^2 \right)^{\frac{\beta}{2}} \\ &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \|v^*\|_{L^{\frac{2}{1-\beta}}(\Omega)} \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)}^\beta. \end{aligned}$$

**2<sup>e</sup> cas :** Si  $N \leq 3$  et  $\frac{2}{3} < \beta \leq 1$ , de la même façon, on a

$$\begin{aligned}
\|f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*\|_{L^2(\Omega)} &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \left\| |v(t_k) - v^*|^\beta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \left[ \int_{\Omega} (v^*)^2 |v(t_k) - v^*|^{2\beta} dx \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \left[ \left( \int_{\Omega} (v^*)^{\frac{2}{2-\beta}} dx \right)^{\frac{2-\beta}{2}} \left( \int_{\Omega} |v(t_k) - v^*|^{2\beta \frac{2}{\beta}} dx \right)^{\frac{\beta}{2}} \right]^{\frac{1}{2}} \\
&\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \|v^*\|_{L^{\frac{4}{2-\beta}}(\Omega)} \|v(t_k) - v^*\|_{L^4(\Omega)}^\beta.
\end{aligned}$$

**3<sup>e</sup> cas :** Si  $N > 3$  et  $\beta < \frac{2}{N}$ , on a

$$\begin{aligned}
\|f(v(t_k))v(t_k) - f(v^*)v^*\|_{L^2(\Omega)} &\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \left\| |v(t_k) - v^*|^\beta \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq K_f \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)} + k_{Hölder} \|v^*\|_{L^{\frac{2}{1-\beta}}(\Omega)} \|v(t_k) - v^*\|_{L^2(\Omega)}^\beta.
\end{aligned}$$

D'après (4.20), à la limite dans les inégalités précédentes on obtient

$$f(v(t_k))v(t_k) \rightarrow f(v^*)v^* \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

3) Montrons que  $\int_{\Omega} (k_v \nabla v \bullet \nabla \varphi + f(v \bullet) v \bullet \varphi) dx = \int_{\Omega} g \bullet \varphi dx$  pour tout  $\varphi \in H^1(\Omega)$ .

Soit  $\varphi \in H^1(\Omega)$  et soit  $(t_k)$  une suite qui vérifie (4.14), en multipliant la deuxième équation du système (2.1) par  $\varphi$  et en intégrant le résultat sur  $\Omega$ , nous avons

$$\int_{\Omega} v_t(t_k) \varphi dx = \int_{\Omega} k_v \varphi \Delta v(t_k) dx - \int_{\Omega} f(v(t_k)) v(t_k) \varphi dx + \int_{\Omega} g(u(t_k), v(t_k)) \varphi dx.$$

En intégrant par partie, et tenant compte des conditions aux limites, on obtient

$$\int_{\Omega} v_t(t_k) \varphi dx = -k_v \int_{\Omega} \nabla v(t_k) \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} f(v(t_k)) v(t_k) \varphi dx + \int_{\Omega} g(u(t_k), v(t_k)) \varphi dx. \quad (4.21)$$

D'après (4.14), (4.15) et (4.16), il est clair que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla v(t_k) \cdot \nabla \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} \nabla v^* \cdot \nabla \varphi dx \\ \int_{\Omega} f(v(t_k)) v(t_k) \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} f(v^*) v^* \varphi dx \\ \int_{\Omega} g(u(t_k), v(t_k)) \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} g^* \varphi dx. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après (4.19) la suite  $(v_t(t_k))$  converge vers 0 dans  $L^2(\Omega)$ .

Par conséquent lorsque  $k$  tend vers  $\infty$  l'égalité (4.21) devient

$$\int_{\Omega} (k_v \nabla v^\bullet \cdot \nabla \varphi + f(v^\bullet) v^\bullet \varphi) dx = \int_{\Omega} g^\bullet \varphi dx.$$

4) Montrons que  $\exp\left(-\frac{G_u(u(t_k), v(t_k)) + R'(u(t_k))}{2}\right) \rightarrow \text{constante}$  dans  $L^2(\Omega)$ .

En vertu de (4.17) et (4.19), nous avons

$$\left\| \sqrt{W(t_k)} \right\|_{H^1(\Omega)}^2 = \left\| \sqrt{W(t_k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \left\| \nabla \sqrt{W(t_k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{constante}.$$

Donc la suite  $\left( \sqrt{W(t_k)} \right)$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut alors en extraire une sous-suite, notée encore  $\left( \sqrt{W(t_k)} \right)$ , qui converge faiblement vers  $\left( \sqrt{W^*} \right)$  dans  $H^1(\Omega)$ , fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

Et grâce à (4.19), on a  $\left\| \nabla \sqrt{W(t_k)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ , donc  $\nabla \sqrt{W^*} = 0$ .

Cela signifie que  $\sqrt{W^*}$  est constante.

- Supposons maintenant que (ii) est vérifiée, et montrons le dernier point du théorème.

Pour cela, on pose

$$V := \exp(G_u(u, v) + R'(u))$$

nous refaisons le même raisonnement pour obtenir une estimation similaire sur  $V$  mais en considérons cette fois l'hypothèse (ii), qui implique que

$$0 < \sqrt{V(t)} \leq C_{16} \sqrt{\frac{k(u(t), v(t))}{G_{uu}(u(t), v(t)) + R''(u(t))}}$$

de plus nous avons l'estimation

$$\left\| \sqrt{V(t)} \right\|_{L^2(\Omega)} \leq \text{constante.} \quad (4.22)$$

D'autre part on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{1}{C_{16}} \left| \nabla \sqrt{V} \right|^2 &= \frac{1}{C_{16}} \left| \nabla \exp\left(\frac{1}{2}(G_u(u, v) + R'(u))\right) \right|^2 \\ &= \frac{1}{C_{16}} \exp(G_u(u, v) + R'(u)) \left[ \frac{1}{2}(G_{uu}(u, v) \nabla u + G_{uv}(u, v) \nabla v + R''(u) \nabla u) \right]^2. \end{aligned}$$

En reportant (4.4) dans cette dernière, on obtient

$$\frac{1}{C_{16}} \left| \nabla \sqrt{V} \right|^2 \leq \frac{1}{4C_{16}} \left[ \frac{G_{uu}(u, v) + R''(u)}{k(u, v)} \right]^2 [\exp(G_u(u, v) + R'(u))] |k \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2.$$

Par l'hypothèse (ii), on a

$$\frac{1}{C_{16}} \left| \nabla \sqrt{V} \right|^2 \leq \frac{G_{uu}(u, v) + R''(u)}{k(u, v)} |k(u, v) \nabla u - h(u, v) \nabla v|^2.$$

On définit maintenant la fonction

$$I(t) := t(\|v_t(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{16}} \left\| \nabla \sqrt{V(t)} \right\|_{L^2(\Omega)}^2). \quad (4.23)$$

De l'estimation ci-dessus et la Proposition 4.1, on a

$$\begin{aligned}
\int_0^t (\|v_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{16}} \|\nabla \sqrt{V(s)}\|_{L^2(\Omega)}^2) ds &\leq - \int_0^t \frac{d}{ds} H(u(s), v(s)) ds \\
&\leq H(u_0, v_0) - H(u(t), v(t)) \\
&\leq C_{20}.
\end{aligned}$$

où  $C_{20}$  est une constante indépendante de  $t$ .

par suite

$$\begin{aligned}
\int_0^t I(s) ds &\leq \int_0^t s (\|v_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{16}} \|\nabla \sqrt{V(s)}\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\
&\leq \int_0^t t (\|v_s(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{C_{16}} \|\nabla \sqrt{V(s)}\|_{L^2(\Omega)}^2) ds \\
&\leq t \cdot C_{20}
\end{aligned}$$

Donc il existe une suite  $t_k$  qui tend vers  $\infty$  telle que  $I(t_k) \leq 2C_{20}$  pour tout  $t_k$ , ce qui implique d'après (4.23) que

$$\|v_t(t_k)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \sqrt{V(t_k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty. \quad (4.24)$$

Ans, en vertu de (4.22) et (4.24), nous avons

$$\|\sqrt{V(t_k)}\|_{H^1(\Omega)}^2 = \|\sqrt{V(t_k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla \sqrt{V(t_k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \text{constante}.$$

Donc la suite  $(\sqrt{V(t_k)})$  est bornée dans  $H^1(\Omega)$ , on peut alors en extraire une sous-suite, notée encore  $(\sqrt{V(t_k)})$ , qui converge faiblement vers  $(\sqrt{V^*})$  dans  $H^1(\Omega)$ , fortement dans  $L^2(\Omega)$ .

Et grâce à (4.24), on a  $\|\nabla \sqrt{V(t_k)}\|_{L^2(\Omega)}^2 \rightarrow 0$ , donc  $\nabla \sqrt{V^*} = 0$ .

Cela signifie que  $\sqrt{V^*}$  est constante.

# Chapître 5

## Etude d'un modèle dans $\mathbb{R}^2$

Ce chapitre est consacré à l'étude d'un problème issu de la modélisation d'agrégation en biologie. Nous nous intéressons à des solutions au sens des distributions pour le système suivant :

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot [u \nabla v] & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ -\Delta v = u & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.1)$$

Où  $u$  est une densité de bactérie ou d'amibes (typiquement de *Dictyostelium discoïdeum*) et  $v$  la concentration de chemo-attractant. Il s'agit de la version parabolique-elliptique simplifiée du système introduit par Evelyn Fox Keller et Lee A. Segel dans [20]. Ce système se réduit, en fait, à une équation non-linéaire non-locale si on convient que  $v$  est définie par la convolution avec la solution fondamentale de l'équation de Poisson

$$v(t, x) = -\frac{1}{2\pi} (\log |\cdot| * u(\cdot, t)) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} u(t, y) \log |x - y| dy. \quad (5.2)$$

Le comportement de ce système est donc le résultat d'une compétition entre le terme diffusif :  $\Delta u$ , et le terme de dérive :  $-\nabla \cdot [u \nabla v]$ . On peut imaginer que s'il y a peu d'amibes et qu'elles sont très étalées, la propension à diffuser l'emportera. Par contre si la densité est suffisamment forte, on verra apparaître des agrégats. L'objectif du modèle de Keller-Segel est de décrire l'apparition de ces agrégats. Sur le plan mathématique, il s'agit de savoir s'il y a une masse initiale au delà de laquelle le système explose et en deçà de laquelle le système existe pour tout temps.

## 5.1 Définitions et rappels

### 5.1.1 Espaces $L^p(\mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{X})$

**Définition 5.1** Soit  $X$  un espace de Banach,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $[0, T]$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans  $X$  et on note  $L^p(0, T; X)$  l'espace des (classes de) fonctions  $f : ]0, T[ \rightarrow X$ , mesurables qui vérifient

$$\begin{aligned} i) \text{ Si } 1 \leq p < \infty, \quad \|f\|_{L^p(0, T; X)} &= \left( \int_0^T \|f\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \\ ii) \text{ Si } p = \infty, \quad \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} &= \sup_{t \in ]0, T[} \text{ess} \|f(t)\|_X < \infty. \end{aligned}$$

$L^p(0, T; X)$  muni de la norme  $\|f\|_{L^p(0, T; X)}$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  est un espace de Banach.

**Distributions vectorielles** Soit  $X$  un espace de Banach et  $-\infty \leq a < b \leq +\infty$ , on appelle distribution vectorielle sur  $(a, b)$  toute application linéaire continue de  $D(a, b)$  dans  $X$ . C'est-à-dire

$$D'(a, b; X) = \mathcal{L}(D(a, b), X).$$

Pour tout  $f$  de  $D'(a, b; X)$  et tout  $\varphi$  de  $D(a, b)$  la valeur de  $f$  en  $\varphi$  notée  $\langle f, \varphi \rangle$  appartient à  $X$ .

**Dérivation:** Soit  $f$  un élément de  $D'(a, b; X)$ , la dérivée de  $f$  notée  $f'$  la distribution définie par:

$$\begin{aligned} f' : D(a, b) &\rightarrow X \\ \varphi &\mapsto \langle f', \varphi \rangle = - \langle f, \varphi' \rangle. \end{aligned}$$

Soient maintenant  $V$  un espace de Banach réflexif et séparable,  $H$  un espace de Hilbert séparable tels que l'injection  $V \hookrightarrow H$  est continue et  $V$  est dense dans  $H$ . Lorsqu'on a

$$V \hookrightarrow H \hookrightarrow V'$$

où  $V'$  est le dual de  $V$ , et la deuxième inclusion  $H \hookrightarrow V'$  est continue. On peut alors considérer un élément  $u \in H$  comme un élément de  $V'$ . Ainsi on peut écrire

$$\langle u, v \rangle_{V' \times V} = (u, v)_H \quad \text{pour tout élément } v \text{ de } V.$$

On considère l'espace

$$W(a, b; V, V') = \{u \in L^2(a, b; V), \quad u' \in L^2(a, b; V')\}.$$

Muni de la norme  $\|u\|_W = \|u\|_{L^2(a,b;V)} + \|u'\|_{L^2(a,b;V')}$ , la dérivation étant prise au sens de  $D'(a, b; V)$ .

Une propriété de régularité des éléments de  $W(a, b; V, V')$  est donnée par le

**Théorème 5.1** [22] *Soient  $a, b \in \mathbb{R}$ . Alors tout élément de  $W(a, b; V, V')$  est presque partout égal à une fonction continue de  $[a, b]$  dans  $H$ . De plus,  $W(a, b; V, V')$  s'injecte continûment dans  $C([a, b]; H)$ .*

Notons par  $D(\mathbb{R}; V)$  l'espace de fonctions  $C^\infty$  définies sur  $\mathbb{R}$  et à valeurs dans  $V$  et à support compact

**Proposition 5.1** *Soit  $D([0, T]; V)$  l'espace des restrictions à  $[0, T]$  des fonctions de  $D(\mathbb{R}; V)$  alors  $D([0, T]; V)$  est dense dans  $W(a, b; V, V')$ .*

### 5.1.2 Quelques Inégalités

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ), de frontière régulière  $\partial\Omega$ .

**Lemme 5.1** (*Inégalité de Jensen*) *Soit  $f$  une fonction à valeurs réelles, mesurable sur  $\Omega$ , et  $A \subset \Omega$ . Si  $f \geq \alpha$  et si  $\phi$  est une fonction convexe pour  $x \geq \alpha$ , alors*

$$\phi\left(\frac{1}{\mu(A)} \int_{\Omega} f dx\right) \leq \frac{1}{\mu(A)} \int_{\Omega} \phi(f) dx.$$

**Lemme 5.2** (*Inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev*)

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_{GNS}^{(p)} \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{2-\frac{4}{p}} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^{\frac{4}{p}} \quad \forall u \in H^1(\mathbb{R}^2), \forall p \in [2, \infty[. \quad (5.3)$$

**Théorème 5.2** . *Soient  $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et  $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ . Alors pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , la fonction  $y \mapsto f(x - y)g(y)$  est intégrable sur  $\mathbb{R}^n$ . Si on pose*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

*Alors  $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$  et*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

**Théorème 5.3** (Inégalités de Hardy-Littlewood-Sobolev). Soit  $\alpha \in ]0, n[$  et  $p, r \in ]1, \infty[$  tels que

$$\frac{1}{p} + \frac{\alpha}{n} = 1 + \frac{1}{r}.$$

Alors pour toute fonction  $f$  de  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , la fonction  $|\cdot|^{-\alpha} * f$  appartient à  $L^r(\mathbb{R}^n)$  et il existe une constante positive  $C$  indépendante de  $f$  telle que

$$\| |\cdot|^{-\alpha} * f \|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

### Résultat de convergence

Soient  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $1 < q$ , et  $1 < p, p' < \infty$  tel que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$

**Lemme 5.3** (Compacité  $L^p - L^q$ ) Soit  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonctions bornée dans  $L^q(\Omega)$ , on suppose que  $f_n \rightarrow f$  p.p. sur  $\Omega$ . alors  $(f_k)$  converge fortement vers  $f$  dans  $L^r(\Omega)$  pour tout  $r$  tel que  $1 \leq r < q$ .

**Lemme 5.4** (Cv forte contre cv faible) Soient  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge (fortement) vers  $f$  dans  $L^p(\Omega)$  et  $(g_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite qui converge (faiblement) vers  $g$  dans  $L^{p'}(\Omega)$ . Alors

$$\int_{\Omega} f_k g_k dx \rightarrow \int_{\Omega} f g dx \text{ lorsque } n \rightarrow \infty.$$

### 5.1.3 Point fixe

**Définition 5.2** (Ensemble convexe, fonction convexe) :

i)  $K \subset \mathbb{R}^n$  est dite convexe si:  $\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1]$  alors  $\lambda x + (1 - \lambda)y \in K$ .

ii) Soit  $f : K \subset X \rightarrow \mathbb{R}$ , où  $X$  est un espace vectoriel  $f$  est dite convexe, si  $K$  est convexe et si:

$\forall (x, y) \in K^2, \forall \lambda \in [0, 1]$ , on a  $f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$ .

**Définition 5.3** Soit  $T$  une application d'un ensemble  $E$  dans lui-même. On appelle point fixe de  $T$  tout point  $u \in E$ , tel que:  $T(x) = x$ .

**Théorème 5.4** (du point fixe de Schauder): Soit  $X$  un espace de Banach,  $K$  un ensemble non vide, convexe et compacte de  $X$ . Soit  $T$  une application continue de  $K$  dans  $K$ . Alors  $T$  admet un point fixe dans  $K$ .

## 5.2 Position du problème

On considère le problème

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - \chi \nabla \cdot [u \nabla v] & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ -\Delta v = u & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2 \end{cases} \quad (5.4)$$

où  $\chi$  est un réel strictement positif.

On introduit les hypothèses:

$$\begin{cases} u_0 \in L^1_+(\mathbb{R}^2, (1 + |x|^2)dx) \cap L^2(\mathbb{R}^2) \\ u_0 \log u_0 \in L^1(\mathbb{R}^2) \end{cases} \quad (5.5)$$

où  $L^1_+(\mathbb{R}^2) = \{u \in L^1(\mathbb{R}^2), u \geq 0 \text{ p.p sur } \mathbb{R}^2\}$ .

La norme  $L^1(\mathbb{R}^2)$  de  $u$  est conservée au cours du temps, on note

$$M := \int_{\mathbb{R}^2} u \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0 \, dx. \quad (5.6)$$

**Définition 5.4** Soit  $T > 0$ , un couple  $(u, v)$  de fonctions positives définies de  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$  à valeurs dans  $\mathbb{R}_+$  est solution faible du problème (5.1) sur  $[0, T) \times \mathbb{R}^2$ , si :

- (i)  $u \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \cap L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$ .
- (ii)  $\nabla v$  existe au sens de distribution,  $u \nabla v \in L^1((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ .
- (iii) Pour tout  $\varphi \in C_0^\infty([0, T) \times \mathbb{R}^2)$ ,  $u$  vérifie l'identité intégrale:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \varphi_t \, dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} u_0(x) \varphi_t(0, x) \, dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \Delta \varphi \, dx dt - \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \nabla v \cdot \nabla \varphi \, dx dt.$$

- (iiii)  $v$  vérifie  $v(t, x) = -\frac{1}{2\pi} (\log |\cdot| * u(\cdot, t))$ .

Le but de ce chapitre sera d'établir le théorème suivant

**Théorème 5.5** (Existence pour  $\chi M < 8\pi$ ). Sous l'hypothèse (5.5), si  $\chi M < 8\pi$ , alors le système de Keller-Segel (5.1) admet une solution faible globale positive  $u$  (au sens de la définition (5.4)).

### 5.3 Problème régularisé

Le problème, lorsque l'on considère l'équation (5.1), est l'absence de borne et la singularité en 0 du logarithme dans (5.2). Le problème d'absence de borne sur le noyau de convolution n'est pas difficile à gérer puisque le moment d'ordre deux est borné dans  $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2))$ .

Reste le problème de la singularité en 0. Il y a plusieurs façons de couper la singularité, L. Corrias, B. Perthame et H. Zaag, dans [12], avaient convolé le noyau pour le régulariser. Ici, on tronque la singularité de la façon suivante

$$\rho_\varepsilon(z) := \rho_1\left(\frac{z}{\varepsilon}\right)$$

où  $\rho_1$  est une fonction régulière radiale qui satisfait

$$\rho_1(z) = \begin{cases} -\frac{1}{2\pi} \log |z| & \text{si } |z| > 2 \\ 0 & \text{si } |z| \leq \frac{1}{2}. \end{cases}$$

On associe à (5.1) le problème régularisé suivant ( $0 < \varepsilon < 1$ )

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \chi \nabla \cdot [u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon] & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ v_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u_\varepsilon & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0(x) & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.7)$$

**Proposition 5.2** *Sous l'hypothèse (5.5). Le système (5.7) admet pour tout  $\varepsilon > 0$  ( $0 < \varepsilon < 1$ ), et pour tout  $T > 0$ , une solution  $u_\varepsilon$  correspondante à la donnée initiale  $u_0$  telle que*

$$u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2)) \cap C(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

Soit  $T > 0$ , on introduit les espaces (dans lequel on va chercher la solution de notre problème)

$V := \{v \in H^1(\mathbb{R}^2) : |x|^2 v \in L^1(\mathbb{R}^2)\}$ , le dual de  $V$  est noté  $V'$ , et

$W(0, T) := \{u \in L^2(0, T; V) : \frac{\partial u}{\partial t} \in L^2(0, T; V')\}$

muni de la norme  $\|u\|_W$  (introduite en page 74).

**Lemme 5.5** (Aubin) *Soient  $X, B$  et  $Y$  trois espaces de Banach et  $1 < p < +\infty$ .*

*On suppose que  $X$  s'injecte compactement dans  $B$  et que  $B$  s'injecte continûment dans  $Y$ .*

*On suppose maintenant que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $L^p(0, T; X)$  ( $T > 0$  est donné),*

*et que  $((u_n)_t)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite bornée de  $L^p(0, T; Y)$ . Alors, la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est relativement compacte dans  $L^p(0, T; B)$ .*

## 5.4 Estimations sur les solutions du problème (à terme de dérive) linéaire

On commence par résoudre le problème linéaire avec une donnée initiale  $u_0$  dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , où un certain nombre de propriétés (de continuité et de compacité) sont rappelées pour pouvoir ensuite traiter le problème non-linéaire. Plus précisément on étudie le problème suivant:

$$u_t = \Delta u - \nabla \cdot (uf) \quad (5.8)$$

où  $f$  est une fonction de  $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ .

La méthode de point fixe nous permet de prouver

**Lemme 5.6** *Soit  $f \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ . Sous l'hypothèse (5.5), pour tout  $T > 0$ , il existe une solution unique  $u \in W(0, T)$  de (5.8) correspondant à la donnée initiale  $u_0$ .*

**Preuve:** On considère l'application  $\mathcal{F} : L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2)) \rightarrow L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2))$ , définie par

$$\mathcal{F}[u](\cdot, t) := G(\cdot, t) * u_0 + \int_0^t \nabla G(\cdot, t-s) * [u(\cdot, s) f(\cdot, s)] ds, \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R}^2.$$

où  $*$  dénote le produit de convolution, et  $G(x, t) = \frac{1}{4\pi t} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$  est la fonction de Green associée à l'équation de la chaleur, on note que  $\int_{\mathbb{R}^2} G(x, t) dx = 1$ , et qu'il existe un réel positif  $c$  (voir[24]) tel que

$$\|\nabla G(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq Cs^{-\frac{1}{2}}. \quad (5.9)$$

Comme la convolée de deux fonction de  $L^1(\mathbb{R}^2)$  est dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ , donc  $\mathcal{F}$  est bien définie.

On définit maintenant la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  par  $u_{k+1} = \mathcal{F}(u_k)$  pour  $k \geq 1$ .

Montrons que  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  est une suite de Cauchy dans  $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2))$ .

Soit  $k \in \mathbb{N}$ , pour tout  $t \in [0, T]$ , on a

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \int_{\mathbb{R}^2} \left| \int_0^t \nabla G(\cdot, t-s) * [(u_k(\cdot, s) - u_{k-1}(\cdot, s))f(\cdot, s)] ds \right| dx.$$

Par suite

$$\begin{aligned} \|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \int_0^t \|\nabla G(\cdot, t-s) * [u_k(\cdot, s) - u_{k-1}(\cdot, s)]\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} ds \\ &\leq \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \int_0^t \|\nabla G(\cdot, t-s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|u_k(s) - u_{k-1}(s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} ds \end{aligned}$$

ce qui implique compte tenu de (5.9) que

$$\|u_{k+1}(t) - u_k(t)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \sqrt{t} \|u_k - u_{k-1}\|_{L^\infty(0,t; L^1(\mathbb{R}^2))}.$$

Si on choisit  $T > 0$  assez petit, alors  $(u_k)$  est une suite de Cauchy dans  $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2))$ . Comme l'espace  $L^\infty(0, T; L^1(\mathbb{R}^2))$  est complet la suite de Cauchy converge vers un point fixe de  $\mathcal{F}$ .

Ainsi, on conclut l'existence d'une solution de (5.8) dans l'intervalle  $[0; T]$ .

- Nous allons maintenant vérifier que la solution  $u$  est dans  $W(0, T)$ , à cet effet on montre que  $u$  est bornée  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ .

En multipliant l'équation (5.8) par  $u(x, t)$ , et en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$  on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |u(x, t)|^2 dx = - \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u(x, t)|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u(x, t) \cdot u(x, t) f(x, t) dx.$$

Le dernier terme du second membre peut être écrit sous la forme  $\int_{\mathbb{R}^2} a \cdot b f dx$

où  $a := \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \nabla u(x, t)$ ,  $b := \sqrt{\lambda} u(x, t)$  et  $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ , puis on utilise l'inégalité

$$\int_{\mathbb{R}^2} a \cdot b f dx \leq \left( \int_{\mathbb{R}^2} a^2 dx + \frac{1}{4} \int_{\mathbb{R}^2} b^2 dx \right) \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}$$

il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \leq \left( -1 + \frac{1}{\lambda} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \right) \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla u|^2 dx + \frac{\lambda}{4} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx. \quad (5.10)$$

Dans le cas où  $\lambda = \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}$ , en appliquant le lemme de Gronwall sous forme différentielle à cette dernière inégalité, on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} |u_0|^2 dx \cdot e^{\frac{T}{2} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}^2} \quad \text{pour tout } t \in (0, T).$$

Par conséquent  $u$  est bornée dans  $L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \subset L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ .

De plus

$$\|u\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} T^{\frac{1}{2}} \exp\left(\frac{T}{4} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}^2\right). \quad (5.11)$$

- On vérifie que  $u$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$ .

Prenant  $\lambda = \frac{3}{2} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}$  dans (5.10), il s'ensuit que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq -\frac{1}{3} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{3}{8} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}^2 \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

On en déduit alors que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{1}{3} \|\nabla u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \leq \frac{3}{8} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}^2 \|u(\cdot, t)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2.$$

Comme  $u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ , en intégrant cette dernière inégalité sur  $(0, T)$  on trouve que  $\nabla u$  est

bornée dans  $L^2((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ , donc  $u$  est bornée dans  $L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$ .

De plus

$$\|\nabla u\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))}^2 \leq \frac{3}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 + \frac{9}{8} \|f\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)}^2 \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))}^2. \quad (5.12)$$

- Il reste à prouver que le moment d'ordre deux  $\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx$  est borné.

En multipliant l'équation (5.8) par  $|x|^2$ , et en intégrant sur  $\mathbb{R}^2$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \Delta u - |x|^2 \nabla \cdot [uf] dx.$$

Formellement on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} (\nabla u) \cdot \nabla (|x|^2) + \int_{\mathbb{R}^2} \nabla (|x|^2) \cdot u f dx \\ &\leq - \int_{\mathbb{R}^2} (2x) \cdot (\nabla u) + 2 \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot u f dx. \end{aligned}$$

Par suite

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} u + 2 \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{R}^2} (|x| \sqrt{u}) (\sqrt{u}) dx.$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx &\leq 4 \int_{\mathbb{R}^2} u dx + 2 \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \left( \int_{\mathbb{R}^2} u dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq 4 \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + 2 \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Utilisant l'inégalité  $2ab \leq a^2 + b^2$  pour le dernier terme du second membre, il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx &\leq 4 \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \left( \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \right). \\ &\leq \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \left( 4 + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \right) + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \left( \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \right) \end{aligned}$$

En appliquant de nouveau le lemme de Gronwall sous forme différentielle, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx < \infty.$$

Par conséquent,  $u$  est borné dans  $L^2(0, T; V)$ .

- Montrons que  $u_t$  est bornée dans  $L^2(0, T; V')$ .

Soit  $\varphi \in V$ , on multiplie (5.8) par  $\varphi$  et on intègre par rapport à  $x$

$$\begin{aligned} |\langle u_t, \varphi \rangle_{V' \times V}| &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_t(x, t) \varphi(x, t) dx \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x, t) \Delta u(x, t) dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} \varphi \nabla \cdot (uf) dx \right|. \end{aligned}$$

En intègre par parties et en appliquant l'inégalité de Hölder, on a

$$\begin{aligned} |\langle u_t, \varphi \rangle_{V' \times V}| &\leq \left| - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^2} uf \cdot \nabla \varphi dx \right| \\ &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \|\nabla \varphi\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \left( \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \|\varphi\|_{H^1(\mathbb{R}^2)} \\ &\leq \left( \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \|\varphi\|_V. \end{aligned}$$

Comme  $u \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R}^2))$ , il s'ensuit que  $\left( \|\nabla u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \right) \in L^2(0, T)$ , d'où on déduit que  $u_t$  est bornée dans  $L^2(0, T; V')$ .

De plus, par l'inégalité (Minkowski) du triangle

$$\|u_t\|_{L^2(0, T; V')} \leq \left( \|\nabla u\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))} + \|f\|_{L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)} \|u\|_{L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))} \right). \quad (5.13)$$

**Remarque 5.1** *Considérons  $(u_0^k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de données initiales uniformément bornées dans  $L^2(\mathbb{R}^2)$ , et  $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$  une suite de fonction uniformément bornée dans  $L^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ , d'après le lemme d'Aubin (5.5) la suite  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$  de solutions du (5.8) correspondantes, est contenue dans un ensemble relativement compact de  $L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$ .*

Nous nous servons de cette propriété dans la prochaine section.

## 5.5 Existence de solution du problème régularisé tronqué

Cette section est consacrée à la preuve de la Proposition 5.2, une application standard du théorème de Schauder fournirait l'existence d'une solution de (5.7). Il n'est par contre pas immédiat, dans le cas des domaines non bornées qui nous intéresse particulièrement.

Nous allons utiliser les résultats de la section précédente, on introduit la fonction de troncature

$$h(s) := \min\left\{1, \frac{h_0}{s}\right\} \quad \text{pour } s > 0$$

où  $h_0 > 1$  une constante qui sera choisie par la suite.

Si  $u \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2))$  est donné, on lui associe

$$\nabla v_\varepsilon = \nabla \rho_\varepsilon * u. \quad (5.14)$$

$$\text{Comme} \quad 0 \leq |\nabla \rho_\varepsilon(z)| \leq \frac{1}{2\pi|z|} \quad \forall z \in \mathbb{R}^2 \quad (5.15)$$

d'où en déduit que  $\nabla \rho_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

D'autre part, comme  $u(t) \in L^1(\mathbb{R}^2)$ , donc par l'inégalité de convolution  $\nabla v_\varepsilon(t) = \nabla \rho_\varepsilon * u \in L^\infty(\mathbb{R}^2)$ .

On définit également la fonction de troncature

$$f_\varepsilon := h\left(\|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)}\right) \nabla v_\varepsilon. \quad (5.16)$$

Comme  $\nabla v_\varepsilon \in L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)$ , alors  $f_\varepsilon$  est bien définie. De plus on a

$$\|f_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)} \leq h_0. \quad (5.17)$$

Cela signifie que la fonction  $f_\varepsilon$  est uniformément bornée dans  $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)$  par  $h_0$ .

Considérons maintenant l'application  $H$  qui à  $u$  associe la solution (au sens du Lemme 5.6) du problème (5.8) associée à  $f_\varepsilon$ .

$$H : W(0, T) \subset L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)) \rightarrow W(0, T) \subset L^2(0, T; L^2(\mathbb{R}^2)).$$

D'après le Lemme 5.6 l'application  $H$  est bien définie.

Nous allons montrer que  $H$  admet un point fixe qui sera solution du problème (régularisé tronqué) suivant:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u_\varepsilon = \Delta u_\varepsilon - \chi \nabla \cdot [u_\varepsilon f_\varepsilon] & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ f_\varepsilon = h \left( \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^2)} \right) \nabla v_\varepsilon & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ v_\varepsilon = \rho_\varepsilon * u_\varepsilon & x \in \mathbb{R}^2, t > 0 \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_0, & x \in \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour cela, montrons que l'application  $H$  définie ci-dessus, vérifie les hypothèses du théorème de Schauder 5.4.

i) L'image par  $H$  de tout borné de  $L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$  est relativement compacte dans  $W(0, T)$  pour la norme de  $L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$ .

En effet, soit  $(u_\varepsilon)$  une suite bornée dans  $L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$ , on lui associe  $\nabla v_\varepsilon = \nabla \rho_\varepsilon * u_\varepsilon$ ,

posons

$$f_\varepsilon := h \left( \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty((0,T) \times \mathbb{R}^2)} \right) \nabla v_\varepsilon.$$

D'après (5.17),  $f_\varepsilon$  est uniformément bornée dans  $L^\infty((0, T) \times \mathbb{R}^2)^2$ .

Soit maintenant  $\tilde{u}_\varepsilon = H(u_\varepsilon)$ , en vertu de la preuve du Lemme 5.6 la suite  $(\tilde{u}_\varepsilon)$  correspondante à  $(u_0, f_\varepsilon)$  est bornée dans  $W(0, T)$ , donc admet (par le lemme d'Aubin) une sous-suite (notée encore  $(H(u_\varepsilon))$ ) convergente dans  $L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$ .

ii) Nous allons maintenant montrer que  $H$  envoie  $L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$  dans la boule fermée  $B(0, R)$  où  $R$  sera précisé dans la suite.

Soit  $u \in L^2(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$  et  $\tilde{u} = H(u)$  solution de (5.8) associé à  $f_\varepsilon$ , et en se servant des estimations (5.11), (5.12), (5.13) et (5.17) on obtient

$$\begin{aligned} \|\tilde{u}\|_{W(0,T)} &= \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;V)} + \|\tilde{u}_t\|_{L^2(0,T;V')} \\ &\leq (1 + h_0) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} + 2 \|\nabla \tilde{u}\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \\ &\leq (1 + h_0) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^2))} + 2 \left( \frac{3}{2} \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + \frac{3}{2} h_0 \|u\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^2))} \right) \\ &\leq \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \left( 3 + (1 + 4h_0) T^{\frac{1}{2}} \exp \left( \frac{T}{4} h_0^2 \right) \right). \end{aligned}$$

On définit la fonction  $g$  par

$$g(t) = \sqrt{t} \exp(\lambda t), \quad \lambda > 0.$$

Donc,  $g(0) = 0$ , et  $g$  croissante sur  $\mathbb{R}_+$ , si on choisit  $T$  telle que  $\infty$ :

$$g(t) \leq \frac{R - 3 \|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}}{\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} (1 + 4h_0)} \text{ pour tout } t \in [0, T].$$

Nous obtenons en particulier l'estimation suivante:

$$\|\tilde{u}\|_W \leq R.$$

Nous choisissons donc la boule fermée  $B_R$  de  $W(0, T)$ , centrée à l'origine et de rayon  $R$  comme ensemble  $K$  pour l'application du théorème de point fixe de Schauder.

iii)  $H$  est continue sur  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$ :

A cet effet, revenons à la section précédente et montrons que l'application  $\mathcal{F}$  est continue sur  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$ .

Soit  $(u_\varepsilon)$  une suite qui converge dans  $L^\infty(0, T, L^2(\mathbb{R}^2))$  vers  $u$ , on a

$$|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)| \leq \left| \int_0^t \nabla G(\cdot, t-s) * [(u_\varepsilon(\cdot, s) - u(\cdot, s)) f_\varepsilon(\cdot, s)] ds \right|.$$

D'ou

$$\|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \left\| \int_0^t \nabla G(\cdot, t-s) * [(u_\varepsilon(\cdot, s) - u(\cdot, s)) f_\varepsilon(\cdot, s)] ds \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Par l'inégalité de la norme

$$\|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \int_0^t \|\nabla G(\cdot, t-s) * [(u_\varepsilon(\cdot, s) - u(\cdot, s)) f_\varepsilon(\cdot, s)]\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds.$$

Par l'inégalité de la convolution

$$\|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq \|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \int_0^t \|\nabla G(\cdot, t-s)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|u_\varepsilon(s) - u(s)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} ds.$$

ce qui implique compte tenu de (5.9) que

$$\|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \leq C \|f_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \sqrt{t} \|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^2))}.$$

Par suite

$$\|\mathcal{F}(u_\varepsilon) - \mathcal{F}(u)\|_{L^2(0,T; L^2(\mathbb{R}^2))} \leq Ch_0T \|u_\varepsilon - u\|_{L^\infty(0,T; L^2(\mathbb{R}^2))}.$$

Alors l'application  $H$  est continue, ainsi admet un point fixe  $u_\varepsilon$  solution faible du problème (5.18).

• Si on choisit maintenant  $h_0 > \|\nabla \rho_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|u_0\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$ , il s'ensuit que  $h \left( \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \right) = 1$

et  $f_\varepsilon = h \left( \|\nabla v_\varepsilon\|_{L^\infty([0,T] \times \mathbb{R}^2)} \right) \nabla v_\varepsilon = \nabla v_\varepsilon$ .

Par conséquent, l'application  $H$  admet un point fixe  $u_\varepsilon$  solution faible du problème (5.7).

## 5.6 Estimations sur les solutions du problème régularisé

Dans cette section on établit des estimations sur les solutions obtenues, qui nous permettent de montrer que  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  admet une sous-suite convergente vers la solution faible du problème initial (5.1).

### Estimation a priori par la méthode d'énergie libre

On définit l'énergie libre par

$$F[u] := \int_{\mathbb{R}^2} u \log u \, dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2} uv \, dx$$

et on pose

$$m_1(t) := \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx.$$

De manière tout à fait similaire que dans le chapitre trois on peut montrer la positivité de solutions, ainsi que le

**Lemme 5.7** (*Décroissance de l'énergie libre*). *On considère une solution régulière  $u_\varepsilon$  de (5.7), alors*

$$M \quad : \quad = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_0 dx$$

$$\text{et } \frac{d}{dt} F[u_\varepsilon(\cdot, t)] = - \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\nabla \log u_\varepsilon - \chi \nabla v_\varepsilon|^2 dx \leq 0.$$

**Lemme 5.8** (*Inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique*). *Si  $f$  est une fonction positive dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  telle que  $f \log f$  et  $f \log(1 + |x|^2)$  sont dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . Si  $\int_{\mathbb{R}^2} f \, dx = M$ , alors*

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \log f \, dx + \frac{2}{M} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} f(x) f(y) \log |x - y| \, dx dy \geq -C(M)$$

où  $C(M) := M(1 + \log \pi - \log M)$ .

**Lemme 5.9** Si  $u$  est une fonction positive dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  telle que les fonctions

$$t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u(x, t) dx \text{ et } t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \log u(x, t) dx \text{ sont bornées.}$$

Alors  $u \log u$  est uniformément bornée dans  $L_{loc}^\infty(\mathbb{R}^+, L^1(\mathbb{R}^2))$ , et

$$\int_{\mathbb{R}^2} u |\log u| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} u (\log u + |x|^2) dx + 2 \log(2\pi) \int_{\mathbb{R}^2} u dx + \frac{2}{e}. \quad (5.19)$$

**Preuve:** On définit les deux fonctions  $\bar{u} := u 1_{\{u \leq 1\}}$ , et  $\mu(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2}}}{2\pi}$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} (\log \bar{u} + \frac{1}{2} |x|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{u}}{\mu} (\log \frac{\bar{u}}{\mu} + \log \mu + \frac{1}{2} |x|^2) \mu dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} \frac{\bar{u}}{\mu} (\log \frac{\bar{u}}{\mu} - \log 2\pi) \mu dx. \end{aligned}$$

En posant  $U := \frac{\bar{u}}{\mu}$ , on peut calculer

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} (\log \bar{u} + \frac{1}{2} |x|^2) dx &= \int_{\mathbb{R}^2} U (\log U - \log 2\pi) \mu dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} U \log U d\mu - \log 2\pi \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} dx \end{aligned}$$

et en posant

$$m = \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} dx \leq M \quad (5.20)$$

il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} (\log \bar{u} + \frac{1}{2} |x|^2) dx = \int_{\mathbb{R}^2} U \log U d\mu - m \log(2\pi).$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} \log \bar{u} dx = \int_{\mathbb{R}^2} U \log U d\mu - m \log(2\pi) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} |x|^2 dx.$$

On applique l'inégalité de Jensen et on remplace  $\int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} dx$  par sa valeur dans (5.20), on aura

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} \log \bar{u} dx &\geq \left( \int_{\mathbb{R}^2} U d\mu \right) \log \left( \int_{\mathbb{R}^2} U d\mu \right) - m \log(2\pi) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} |x|^2 dx \\ &= \left( \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} dx \right) \log \left( \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} dx \right) - m \log(2\pi) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} |x|^2 dx \\ &= m \log m - m \log(2\pi) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} |x|^2 dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité  $ab \leq e^a + b \log b - b$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} \log \bar{u} dx \geq -\frac{1}{e} - M \log(2\pi) - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \bar{u} dx.$$

Cette dernière estimation implique que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} u |\log u| dx &= \int_{\{u>1\}} u \log u dx - \int_{\{u \leq 1\}} \bar{u} \log \bar{u} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u \log u dx - 2 \int_{\mathbb{R}^2} \bar{u} \log \bar{u} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^2} u \log u dx + \frac{2}{e} + 2M \log(2\pi) + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \bar{u} dx. \end{aligned}$$

En combinant l'inégalité (5.20) et cette dernière estimation, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} u |\log u| dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} u (\log u + |x|^2) dx + 2 \log(2\pi) \int_{\mathbb{R}^2} u dx + \frac{2}{e}.$$

**Lemme 5.10** *Sous les hypothèses (5.5), on considère une solution  $(u_\varepsilon, v_\varepsilon)$  du système(5.7).*

*On a l'estimations uniformes*

(i) *La fonction  $(x, t) \mapsto |x|^2 u_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_{loc}^+; L^1(\mathbb{R}^2))$ .*

(ii) *Les fonctions  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) \log u_\varepsilon(x, t) dx$  et  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) v_\varepsilon(x, t) dx$  sont bornées.*

(iii) *La fonction  $(x, t) \mapsto u_\varepsilon(x, t) \log u_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_{loc}^+; L^1(\mathbb{R}^2))$ .*

(iv) *La fonction  $(x, t) \mapsto \nabla \sqrt{u_\varepsilon(x, t)}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .*

(v) *La fonction  $(x, t) \mapsto u_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .*

(vi) *La fonction  $(x, t) \mapsto u_\varepsilon(x, t) \Delta v_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .*

(vii) *La fonction  $(x, t) \mapsto \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \nabla v_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .*

### Preuve

(i) Montrons que la fonction  $t \mapsto |x|^2 u_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^\infty(\mathbb{R}_{loc}^+; L^1(\mathbb{R}^2))$ .

Multiplions la première équation de (5.7) par  $|x|^2$  et intégrons sur  $\mathbb{R}^2$ , on trouve

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_\varepsilon(x, t) dx = \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 \nabla \cdot (\nabla u_\varepsilon - \chi u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon) dx.$$

Si on considère les solutions régulière de (5.18) on peut calculer

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_\varepsilon(x, t) dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla (|x|^2) \cdot (\nabla u_\varepsilon - \chi u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon) dx \\ &= -2 \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot \nabla u_\varepsilon dx + 2\chi \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon dx \\ &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon dx + 2\chi \int_{\mathbb{R}^2} x \cdot u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon dx. \end{aligned}$$

En tenant compte de (5.14) et le lemme (5.7), on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_\varepsilon(x, t) dx &= 4 \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon dx + 2\chi \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} x \cdot u_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(y, t) \nabla \rho_\varepsilon(x - y) dy dx \\
&= 4M + \chi \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(y, t) (x - y) \cdot \nabla \rho_\varepsilon(x - y) dx dy \\
&\leq 4M - \frac{\chi}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} \frac{u_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(y, t)}{|x - y|} dx dy \leq 4M.
\end{aligned}$$

En intégrant l'inégalité précédente sur  $[0, T]$ , il vient que

$$\int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_\varepsilon(x, t) dx \leq 4MT + \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_0 dx$$

d'après (5.5)  $u_0$  est dans  $L^1_+(\mathbb{R}^2, |x|^2 dx)$ , par suite (i) est démontré.

(ii) Montrons d'abord que la fonction  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) \log u_\varepsilon(x, t) dx$  est bornée.

Pour cela, on remplace  $v_\varepsilon$  par sa valeur dans (5.7), on obtient

$$F[u_\varepsilon(\cdot, t)] = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx - \frac{\chi}{2} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) \rho_\varepsilon(x - y) u_\varepsilon(y, t) dx dy. \quad (5.21)$$

La décroissance de l'énergie libre ( Lemme 5.7 ), nous donne

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx + \frac{\chi}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(y, t) \log |x - y| dx dy \leq F[u_0].$$

En posant  $\theta = \frac{\chi M}{8\pi}$ , on peut écrire

$$(1 - \theta) \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx + \theta \left[ \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx + \frac{\chi}{4\pi\theta} \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) u_\varepsilon(y, t) \log |x - y| dx dy \right] \leq F[u_0].$$

Par l'inégalité de Hardy-Littlewood-Sobolev logarithmique Lemme 5.8, on obtient

$$(1 - \theta) \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx - \theta C(M) \leq F[u_0].$$

Si  $\chi M < 8\pi$ , alors  $\theta < 1$ , et on peut calculer

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \leq \frac{F[u_0] + \theta C(M)}{(1 - \theta)}.$$

Ceci démontre que  $\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx$  est bornée supérieurement.

Pour la borne inférieure on procède de la façon suivante,

$$\frac{1}{1+t} \int_{\mathbb{R}^2} |x|^2 u_\varepsilon(x, t) dx \leq K \quad \forall t > 0.$$

On en déduit que

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \geq \int_{\mathbb{R}^2} \frac{u_\varepsilon}{\mu} \left( \log \frac{u_\varepsilon}{\mu} \right) \mu dx - M \log [\pi(1+t)] - K$$

où  $\mu(x) := \frac{e^{-\frac{|x|^2}{1+t}}}{\pi(1+t)}$ .

Par l'inégalité de Jensen et le fait que  $M = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon dx$ , on obtient

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{u_\varepsilon}{\mu} \left( \log \frac{u_\varepsilon}{\mu} \right) \mu dx \geq M \log M.$$

Ce qui prouve que l'entropie  $\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx$ , est bornée inférieurement.

- Maintenant on montre que la fonction  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) v_\varepsilon(x, t) dx$  est bornée.

En remplaçant  $v_\varepsilon$  par sa valeur dans (5.7), on obtient

$$0 \leq \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) v_\varepsilon(x, t) dx \leq \int_{\mathbb{R}^2} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) \rho_\varepsilon(x-y) u_\varepsilon(y, t) dx dy.$$

Comme la fonction  $t \mapsto \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx$  est bornée, on conclut alors grâce à (5.21) et cette dernière estimation.

(iii) C'est une conséquence directe du Lemme 5.9.

(iv) Montrons que la fonction  $(x, t) \mapsto \nabla \sqrt{u_\varepsilon(x, t)}$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .

En prenant en considération la première équation du système (5.7), un simple calcul nous donne

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx &= \int_{\mathbb{R}^2} (u_\varepsilon)_t (1 + \log u_\varepsilon) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (1 + \log u_\varepsilon) [\nabla \cdot (\nabla u_\varepsilon - \chi u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon)] dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, et en tenant compte de la deuxième équation du système (5.7), on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx &= - \int_{\mathbb{R}^2} \left( \frac{\nabla u_\varepsilon}{u_\varepsilon} \right) \cdot (\nabla u_\varepsilon - \chi u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon) dx \tag{5.22} \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{|\nabla u_\varepsilon|^2}{u_\varepsilon} + \chi \int_{\mathbb{R}^2} \nabla u_\varepsilon \cdot \nabla v_\varepsilon dx \\ &\leq -4 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon (-\Delta v_\varepsilon) dx. \end{aligned}$$

Nous allons estimer le deuxième terme dans le second membre, pour cela on pose

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon (-\Delta v_\varepsilon) dx = \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon (-\Delta (\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)) dx = I + II + III$$

$$\text{où } I = \int_{u_\varepsilon < K} u_\varepsilon (-\Delta (\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)) dx, \quad II = \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon (-\Delta (\rho_\varepsilon * u_\varepsilon)) dx - III, \quad III = \int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^2 dx$$

et  $K$  un réel positif qui sera choisi par la suite.

On définit aussi la fonction  $\phi_1$  par

$$\frac{1}{\varepsilon^2} \phi_1 \left( \frac{\cdot}{\varepsilon} \right) = -\Delta \rho_\varepsilon.$$

La première intégrale I est estimée par

$$I \leq \int_{u_\varepsilon < K} K \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\varepsilon^2} \phi_1 \left( \frac{x-y}{\varepsilon} \right) u_\varepsilon(y) dy dx = KM.$$

Pour l'intégrale notée II, on utilise le fait que  $\|\phi_1\|_1 = 1$ , et pour éliminer le coefficient  $\frac{1}{\varepsilon^2}$  dans II, on change le variable (on pose  $Y = \varepsilon y$ ), ce qui donne

$$\begin{aligned} II &= \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon(x, t) \int_{\mathbb{R}^2} [u_\varepsilon(x - \varepsilon y, t) - u_\varepsilon(x, t)] \phi_1(y) dy dx \\ &\leq \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon(x, t) \int_{\mathbb{R}^2} \left[ \sqrt{u_\varepsilon(x - \varepsilon y, t)} - \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right] \sqrt{\phi_1(y)} \\ &\quad \times \left[ \sqrt{u_\varepsilon(x - \varepsilon y, t)} - \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} + 2\sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right] \sqrt{\phi_1(y)} dy dx. \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et  $(a + 2b)^2 \leq 2a^2 + 8b^2$ , on obtient

$$\begin{aligned} II &\leq \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon(x, t) \left[ \|\phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\frac{1}{2} \leq y \leq 2} \left| \sqrt{u_\varepsilon(x - \varepsilon y, t)} - \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\quad \times \left[ \int_{\mathbb{R}^2} \left[ 2 \left| \sqrt{u_\varepsilon(x - \varepsilon y, t)} - \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right|^2 + 8 |u_\varepsilon(x, t)| \right] \phi_1(y) dy \right]^{\frac{1}{2}} dx \end{aligned}$$

et par l'inégalité de Poincaré, il vient que

$$\begin{aligned} (II) &\leq \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon(x, t) \|\phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} C_P \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad \times \left[ \sqrt{2} \|\phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} C_P \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} + 2\sqrt{2} \sqrt{|u_\varepsilon(x, t)|} \|\phi_1\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \right] dx. \end{aligned}$$

Pour la troisième intégrale III, en prenant  $p = 4$  dans l'inégalité de Gagliardo Nirenberg Sobolev (5.3), on obtient

$$\int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^2 dx \leq C_{GNS}^2 \int_{u_\varepsilon \geq K} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 dx \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon dx.$$

La dernière intégrale du second membre peut être rendu plus petite que l'on désire, pour  $K > 1$  assez grand, on a

$$\int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon dx \leq \frac{1}{\log K} \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \leq \frac{1}{\log K} \int_{u_\varepsilon \geq K} u_\varepsilon |\log u_\varepsilon| dx := \eta(K) \quad (5.23)$$

par suite

$$III = \int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^2 dx \leq \eta(K) C_{GNS}^2 \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2. \quad (5.24)$$

Nous revenons maintenant à II, par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^{\frac{3}{2}} dx \leq \left( \int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon| dx \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

et d'après (5.23) et (5.24), on trouve

$$\int_{u_\varepsilon \geq K} |u_\varepsilon|^{\frac{3}{2}} dx \leq \eta(K) C_{GNS} \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

Un simple calcul nous donne

$$II + III \leq B\eta(K) \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$$

où  $B = C_{GNS}^2 + \sqrt{2} \|\phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} C_P^2 + 2\sqrt{2} \|\phi_1\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} \|\phi_1\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}^{\frac{1}{2}} C_P C_{GNS}$ .

En rassemblant les estimations, et choisissant  $K$  assez grand tel que  $\eta(K) < \frac{4}{B}$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \leq MK + (-4 + B\eta(K)) X(t)$$

où  $X(t) := \left\| \nabla \sqrt{u_\varepsilon(t)} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2$ .

Intégrant cette dernière inégalité sur  $[0, T]$ , on obtient

$$(4 - B\eta(K)) \int_0^T X(s) ds \leq MKT + \int_{\mathbb{R}^2} u_0 \log u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, T) \log u_\varepsilon(x, T) dx.$$

Les dernières intégrales sont bornées d'après l'estimation (iii) et l'hypothèse (5.5), ceci permet de prouver que  $(\nabla \sqrt{u_\varepsilon(t)})$  est bornée dans  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ .

(v) Montrons que la fonction  $(x, t) \mapsto u_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .

Nous revenons à l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (5.3) dans le cas où  $p = 4$

$$\|\sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^4(\mathbb{R}^2)}^2 \leq C_{GNS}^{(4)} \|\nabla \sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}^2 \|\sqrt{u_\varepsilon}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)}.$$

En combinant cette dernière inégalité avec le Lemme 5.7, puis on intègre sur  $[0, T]$ , on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} |u_\varepsilon(x, t)|^2 dx dt &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left| \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right|^4 dx dt \\ &\leq MC_{GNS}^2 \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} \left| \nabla \sqrt{u_\varepsilon(x, t)} \right|^2 dx dt. \end{aligned}$$

Par l'estimation (iv), une borne  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$  sur  $\nabla \sqrt{u_\varepsilon}$  assure une borne dans  $L^2(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$  de  $u_\varepsilon$ .

(vi) Montrons que la fonction  $(x, t) \mapsto u_\varepsilon(x, t) \Delta v_\varepsilon(x, t)$  est bornée dans  $L^1(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .

D'après (5.22), nous avons

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx = -4 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon (-\Delta v_\varepsilon) dx$$

D'où

$$\int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \Delta v_\varepsilon dx = \frac{1}{\chi} \left[ -4 \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 dx - \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \right].$$

En intégrant cette dernière égalité sur  $[0, T]$ , il vient que

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon \Delta v_\varepsilon dx dt = \frac{1}{\chi} \left[ -4 \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} u_0 \log u_0 dx - \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \log u_\varepsilon dx \right]$$

Par suite

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\Delta v_\varepsilon| dx dt \leq \frac{1}{\chi} \left[ 4 \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon}|^2 + \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\log u_\varepsilon| + \int_{\mathbb{R}^2} u_0 |\log u_0| \right].$$

Les dernières intégrales sont bornées d'après l'estimations (iv), (ii) et (5.5), ceci permet de prouver que  $u_\varepsilon \Delta v_\varepsilon$  est bornée dans  $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ .

(vii) La dernière estimation porte sur une borne de  $\sqrt{u_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon$  dans  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ .

Pour cela, utilisons la deuxième équation du système (5.7), on aura

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_\varepsilon v_\varepsilon dx &= \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_\varepsilon (\rho_\varepsilon * u_\varepsilon) dx \\ &= \frac{d}{2dt} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon(x, t) \rho_\varepsilon(x - y) u_\varepsilon(y, t) dx dy \\ &= \frac{1}{2} \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} [(u_\varepsilon)_t(x, t) u_\varepsilon(y, t) + u_\varepsilon(x, t) (u_\varepsilon)_t(y, t)] \rho_\varepsilon(x - y) dx dy \\ &= \int \int_{\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2} (u_\varepsilon)_t(x, t) \rho_\varepsilon(x - y) u_\varepsilon(y, t) dx dy \end{aligned}$$

par suite

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_\varepsilon v_\varepsilon dx &= \int_{\mathbb{R}^2} (u_\varepsilon)_t (\rho_\varepsilon * u_\varepsilon) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (u_\varepsilon)_t (x, t) v_\varepsilon (x, t) dx. \end{aligned}$$

En remplaçant  $(u_\varepsilon)_t$  par sa valeur de la première équation du système (5.7), il vient que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{2} u_\varepsilon v_\varepsilon dx &= \int_{\mathbb{R}^2} v_\varepsilon (\Delta u_\varepsilon - \chi \nabla \cdot (u_\varepsilon \nabla v_\varepsilon)) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon \Delta v_\varepsilon dx + \chi \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|^2 dx. \end{aligned} \tag{5.25}$$

Par suite, une intégration sur  $[0, T]$ , nous donne

$$\int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\nabla v_\varepsilon|^2 dx dt \leq \frac{1}{2\chi} \left| \int_{\mathbb{R}^2} u_\varepsilon v_\varepsilon dx - \int_{\mathbb{R}^2} u_0 (\rho_\varepsilon * u_0) dx \right| + \frac{1}{\chi} \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_\varepsilon |\Delta v_\varepsilon| dx dt.$$

Les deux dernières intégrales sont bornées d'après l'estimation (ii) et (vi), ceci permet de prouver que  $\sqrt{u_\varepsilon} \nabla v_\varepsilon$  est bornée dans  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ . Le Lemme 5.10 est alors complètement prouvé.

## 5.7 Passage a la limite et existence globale

Notre but maintenant est de passer à la limite dans (5.7), partant des estimations du Lemme 5.10.

D'après les estimations (iv) et (v) du Lemme 6.5,  $(\sqrt{u_\varepsilon})$  est bornée dans  $H^1(\mathbb{R}^2)$ , alors par l'inégalité de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev (5.3), pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  on a

$$\int_{\mathbb{R}^2} |u_\varepsilon(x, t)|^{\frac{p}{2}} dx \leq (C_{GNS}^{(p)})^{\frac{p}{2}} M \left( \int_{\mathbb{R}^2} |\nabla \sqrt{u_\varepsilon(x, t)}|^2 dx \right)^{\frac{p}{2}-1} \quad \forall p \in [2, \infty[.$$

Donc  $(u_\varepsilon)$  est bornée dans  $L^q(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$  pour tout  $q = \frac{p}{2} \in [1, \infty)$ , on peut alors en extraire une sous-suite notée  $(u_{\varepsilon_k})$ , qui converge vers  $u$  faiblement dans  $L^q(\mathbb{R}_{loc}^+ \times \mathbb{R}^2)$ , et donc  $(u_{\varepsilon_k})$  converge vers  $u$  dans  $D'(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .

Il s'ensuit que pour toute fonction test  $\varphi \in C_0^\infty([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ , on a

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k}(x, t) \varphi_t dx dt &\rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \varphi_t dx dt \\ \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k}(x, t) \Delta \varphi dx dt &\rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \Delta \varphi dx dt \end{aligned}$$

Pour montrer que les solutions du système (5.7) sont solutions au sens des distributions de (5.1), il reste à prouver que  $u_{\varepsilon_k} \nabla v_{\varepsilon_k} \rightarrow u \nabla v$  au sens des distributions. Nous le faisons par produit d'une convergence forte et d'une convergence faible.

Notons d'abord que par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a

$$\left( \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} |\nabla v_{\varepsilon_k}| dx dt \right)^2 \leq \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} dx dt \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} |\nabla v_{\varepsilon_k}|^2 dx dt.$$

D'après le Lemme 5.7

$$\left( \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} |\nabla v_{\varepsilon_k}| dx dt \right)^2 \leq MT \int_{[0, T] \times \mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} |\nabla v_{\varepsilon_k}|^2 dx dt$$

et de l'estimation (vii) du Lemme 5.10,  $(\sqrt{u_{\varepsilon_k}} \nabla v_{\varepsilon_k})$  est bornée dans  $L^2([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ , alors  $(u_{\varepsilon_k} \nabla v_{\varepsilon_k})$  est bornée dans  $L^1([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ .

Montrons que  $(\nabla v_{\varepsilon_k})$  converge fortement dans  $L^q_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  pour tout  $q > 2$ .

Soit  $\Omega$  un domaine compact de  $\mathbb{R}^2$  et soit  $p \in [1, 2[$ , en prenant  $r$  tel que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{r} \quad \text{i.e}$$

$$r = \frac{2p}{2-p} \in ]2, \infty[.$$

Nous concluons d'après (5.15) et l'inégalité du Théorème 5.3 que pour tout  $t > 0$

$$\|\nabla v_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^r(\Omega)} = \|\nabla \rho_{\varepsilon_k} * u_{\varepsilon_k}\|_{L^r(\Omega)} \leq \frac{1}{2\pi} \| |\cdot|^{-1} * u_{\varepsilon_k} \|_{L^r(\Omega)} \leq C \|u_{\varepsilon_k}(t)\|_{L^p(\Omega)}.$$

ce qui prouve que la suite  $(\nabla v_{\varepsilon_k})$  est bornée dans  $L^r_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  pour tout  $r > 2$ .

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} \nabla v_{\varepsilon_k}(x, t) - \nabla v(x, t) &= -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} (u_{\varepsilon_k}(y, t) - u(y, t)) dy \\ &\quad + \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon_k} \left( \frac{1}{\varepsilon_k} \nabla \rho_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon_k}\right) + \frac{x-y}{2\pi |x-y|^2} \right) u_{\varepsilon_k}(y, t) dy \end{aligned} \quad (5.26)$$

Soit  $R > 0$ , on a

$$\left| \int_{\mathbb{R}^2} \frac{x-y}{|x-y|^2} (u_{\varepsilon_k} - u)(y, t) dy \right| \leq \left| \int_{|x-y| < R} \frac{1}{|x-y|} (u_{\varepsilon_k} - u)(y, t) dy \right| + \left| \int_{|x-y| \geq R} \frac{1}{|x-y|} (u_{\varepsilon_k} - u)(y, t) dy \right|$$

Comme la fonction  $\psi(x) = \frac{1}{|x|^\alpha}$  est intégrable (sur  $\mathbb{R}^n$ ) au voisinage de 0 si  $\alpha < n$ , et en dehors de 0 si  $\alpha > n$ , alors le premier terme du second membre de l'égalité (5.26) tend vers 0 quand  $\varepsilon_k \rightarrow 0$  grâce à la convergence faible de  $(u_{\varepsilon_k})$  vers  $u$  dans  $L^p_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$ .

Soient maintenant  $x \in \Omega$ ,  $D$  un domaine centré en  $x$  et de diamètre  $2\varepsilon_k$ , et  $1_D$  indicatrice de  $D$ .

Comme

$$\left| \frac{1}{\varepsilon_k} \nabla \rho_1\left(\frac{z}{\varepsilon_k}\right) + \frac{z}{2\pi |z|^2} \right| \leq \frac{1}{2\pi |z|}.$$

Nous obtenons l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \int_{|x-y| \leq 2\varepsilon_k} \left( \frac{1}{\varepsilon_k} \nabla \rho_1\left(\frac{x-y}{\varepsilon_k}\right) + \frac{x-y}{2\pi |x-y|^2} \right) u_{\varepsilon_k}(y, t) dy &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{|x-y|} u_{\varepsilon_k}(y, t) 1_D(y) dy \\ &= \frac{1}{2\pi} |\cdot|^{-1} * (u_{\varepsilon_k}(\cdot, t) 1_D(\cdot)). \end{aligned}$$

De nouveau, en utilisant l'inégalité du Théorème 5.3, cette dernière inégalité montre que

$$\begin{aligned} \left\| |\cdot|^{-1} * (u_{\varepsilon_k}(\cdot, t) 1_D) \right\|_{L^r(\Omega)} &\leq C \| (u_{\varepsilon_k}(t) 1_D) \|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}^p 1_D dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left( \int_{\Omega} u_{\varepsilon_k}^{pq'} dx \right)^{\frac{1}{pq'}} \left( \int_{\Omega} 1_D dx \right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leq C' (\varepsilon_k)^{\frac{1}{q}} \| u_{\varepsilon_k} \|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^2)} \end{aligned}$$

où  $q \geq 1$  et  $p_0 = pq'$ .

Alors le dernier terme du second membre de l'égalité (5.26) tend aussi vers 0 quand  $\varepsilon_k \rightarrow 0$ .

Par conséquent on a

$$\nabla v_{\varepsilon_k} \rightarrow \nabla v \text{ p.p dans } [0, T] \times \mathbb{R}^2.$$

D'après ce qui précède la suite  $(\nabla v_{\varepsilon_k})$  converge fortement vers  $\nabla v$  dans  $L^r_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  pour tout  $r > 2$ .

Soit maintenant  $\varphi \in D([0, T] \times \mathbb{R}^2)$ , par produit d'une convergence forte dans  $L^r_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  et d'une convergence faible dans  $L^r'_{loc}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2)$  (Lemme 5.4), on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla \varphi dx dt \rightarrow \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \nabla v \cdot \nabla \varphi dx dt.$$

Montrons que  $u$  vérifie l'égalité intégrale de la Définition 5.4, pour cela, multiplions la première équation du problème (5.7) par  $\varphi \in D([0, T] \times \mathbb{R}^2)$  et intégrons par parties, on a

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} \varphi_t dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k}(x, 0) \varphi(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} \Delta \varphi dx dt - \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u_{\varepsilon_k} \nabla v_{\varepsilon_k} \cdot \nabla \varphi dx dt$$

Par conséquent, en passant à la limite sur  $k$  dans la formule intégrale précédente, il vient que:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u(x, t) \varphi_t dx dt + \int_{\mathbb{R}^2} u(x, 0) \varphi(x, 0) dx = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \Delta \varphi dx dt - \chi \int_0^T \int_{\mathbb{R}^2} u \nabla v \cdot \nabla \varphi dx dt$$

ce qui conclut la preuve.

## Bibliographie

- [1] N.D. Alikakos,  $L^p$  bounds of solutions of reaction–diffusion equations, Comm. Partial Differential Equations 4 (1979), 827–868.
- [2] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic equations II. Reaction-diffusion systems, Differential and integral equations. 3 (1990), 13–75.
- [3] H. Amann, Dynamic theory of quasilinear parabolic equations III. Global Existence. Math. 202, 219–250 (1989).
- [4] H. Amann. Nonhomogeneous linear and quasilinear elliptic and parabolic boundary value problems, in :Function spaces, differential operators and nonlinear analysis, Teubner-Texte Math. 133, Teubner, 1993, 9–126.
- [5] A. Blanchet, J. Dolbeault, et B. Perthame, Two-dimensional Keller-Segel: Optimal critical mass and qualitative properties of the solutions, Electron. J. Differential Equations, (2006), pp. No. 44, 32 pp. (electronic).
- [6] A. Blanchet, V. Calvez and J. A. Carrillo, Convergence of the mass-transport steepest descent scheme for the subcritical Patlak-Keller-Segel model, SIAM J. Numer. Anal., 46 (2008), 691–721.
- [7] N. Boudiba, Existence globale pour des systèmes de réaction-diffusion avec contrôle de masse, thèse d’université. Université de Rennes I, 1999.
- [8] H. Brezis, Analyse fonctionnelle, théorie et applications, Masson 1983.
- [9] V. Calvez, B. Perthame, and M. Sharifi tabar, Modified Keller-Segel system and critical mass for the log interaction kernel, in Nonlinear partial differential equations and related analysis, Contemp. Math. Amer. Math. Soc., 429 (2007), pp. 45–62.
- [10] J. A. Carrillo, L. Chen, J.-G. Liu and J. Wang, A note on the subcritical two dimensional Keller-Segel system, Acta Appl. Math., (2012).
- [11] Tomasz Cieslak, Quasilinear nonuniformly parabolic system modelling chemotaxis J. Math. Anal. Appl. 326 (2007) 1410–1426.
- [12] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag, Global solutions of some chemotaxis and angiogenesis systems in high space dimensions, Milano J. of Math. 72 (2004) 1–29.
- [13] L. Corrias, B. Perthame and H. Zaag,  $L^p$  and  $L^\infty$  a priori estimates for some chemotaxis models and applications to the Cauchy problem, January 20, 2005.
- [14] Manuel Delgado An angiogenesis model with nonlinear chemotactic response and flux at the tumor boundary.

- [15] R.-J. Duan, A. Lorz, and P. Markowich, Global Solutions to the Coupled Chemotaxis-Fluid Equations, *Comm. Partial Differential Equations*, (2010).
- [16] Lawrence C. Evans, *Partial Differential Equations*, Department of Mathematics, University of California, Berkeley, Graduate Studies in Mathematics, Volume 19.
- [17] W. Jäger, S. Luckhaus, On Explosions of Solutions To a System of Partial Differential Equations Modelling Chemotaxis, *Transactions of American Mathematical Society*, vol.329, 2(1992), 819-824.
- [18] D. Horstmann, Lyapunov functions and  $L^p$ -estimates for a class of reaction-diffusion systems, *Coll.Math.* 87 (2001) 113–127.
- [19] D. Horstmann, From 1970 until present: the Keller-Segel model in chemotaxis and its consequences I, *Jahres. DMV* 105(2003) 103-165.
- [20] E.F. Keller et L.A. Segel, Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability, *J. Theor. Biol.* 26 (1970), no 399-415.
- [21] H. J. Kuiper, A priori bounds and global existence for a strongly coupled quasilinear parabolic system modeling chemotaxis. *Elect. Jour. of Diff. Equat.* vol 2001(2001), N52, pp.1-18.
- [22] J.L. Lions : *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod, Paris, 1969.
- [23] T. Nagai, T. Senba und K. Yoshida. Application of the Moser-Trudinger Inequality to a Parabolic System of Chemotaxis. *Funkcial .Ekvac.* 40(1997),411-433.
- [24] T. Nagai, T. Yamada, Large time behavior of bounded solutions to a parabolic system of chemotaxis in the whole space.
- [25] K. Post. A Non-linear Parabolic System Modeling Chemotaxis with Sensitivity Functions, no.99-12.
- [26] C. Rosier, Problème de Cauchy pour une équation parabolique modélisant la relaxation des systèmes stellaires auto-gravitants, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332 (2001), pp. 903–908.
- [27] Dariusz Wrzosek, Volume filling effect in modelling chemotaxis.
- [28] Z.P. Xin, J.G. Liu, Convergence of Vortex Methods for Weak Solution to the 2-D Euler Equations with Vortex Sheet Data, *Comm. on Pure and Appl. Math.* 48 (1995) 611-628.