

République Algérienne démocratique et populaire
Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques
Département de Recherche Opérationnelle



Mémoire

Pour l'obtention du diplôme de Magister
En: Mathématiques
Spécialité Recherche Opérationnelle: Mathématiques de Gestion

Par: **BENMEZIANE Hamida**

THEME

ETUDE DE QUELQUES IMMERSIONS D'ARBRES

Soutenu le 01 Octobre 2007, devant le jury composé de :

M ^r BOUROUBI Sadek, Maître de conférences, USTHB,	Président
M ^r BERRACHEDI Abdelhafid, Professeur, USTHB,	Directeur de thèse
M ^{me} BOUCHEMAKH Isma, Maître de conférences, USTHB,	Examinatrice
M ^r BOUDHAR Mourad, Maître de conférences, USTHB,	Examineur
M ^{me} AHMANE Messaouda, Chargée de cours, USTHB,	Examinatrice

Table des matières

Table des figures	5
Introduction	6
1 Définitions et notations	8
1.1 Définitions et concepts de base	8
1.1.1 Définition d'un graphe	8
1.1.2 Notion de sous-graphe	9
1.1.3 Chaînes et cycles dans les graphes	9
1.1.4 Connexité dans les graphes	10

1.1.5	Concept de distance et d'intervalle dans les graphes	11
1.1.6	Graphes médians	12
1.1.7	Quelques graphes particuliers	13
1.1.8	Opérations sur les graphes	16
1.2	Le graphe de l'hypercube	20
1.2.1	Quelques propriétés élémentaires de l'hypercube	22
1.2.2	Décomposition en couches de l'hypercube	23
1.2.3	Quelques caractérisations de l'hypercube	24
1.2.4	Projection et anti-projection	27
2	Plongement de graphes dans l'hypercube	28
2.1	Paramètres mesurant l'efficacité des plongements	29
2.1.1	Dilatation	29
2.1.2	Expansion	29

2.1.3	Congestion	30
2.2	Plongement optimal	30
2.3	Dimension cubique	30
2.4	Décider si un graphe G est cubique	31
2.5	Complexité	32
2.6	Plongement dans Q_n	34
2.6.1	Condition nécessaire pour qu'un graphe G soit plongeable dans Q_n	34
2.7	Plongement de cycles dans l'hypercube	35
3	Dimension de quelques classes d'arbres	36
3.1	Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube	37
3.2	Plongement d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires	38
3.2.1	Arbre binaire B_n	38
3.2.2	Arbres binaires $\hat{\hat{D}}_n, \hat{D}_n, \check{D}_n$	41

3.2.3	Arbres binaires introduits par NEKRI	42
3.2.4	Arbres binaires introduits par ARBOUZ	43
3.2.5	Arbres binaires introduits par KABYL	45
3.3	Autres plongements d'arbres	49
3.3.1	n - aires complets	49
3.3.2	Chenilles	50
3.3.3	Plongement des grilles et des échelles	53
3.3.4	Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles	56
3.3.5	Les MD(a_1, \dots, a_k) graphes	59
4	Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres	62
4.1	Première classe d'arbre G_n	63
4.2	Deuxième classe de graphe W_n	68
4.3	Classe d'arbres binaires définies inductivement	73

Conclusion	80
-------------------	-----------

bibliographie	82
----------------------	-----------

Introduction

L'histoire de la théorie des graphes débute peut-être avec les travaux d'Euler au XVIIIème siècle et trouve son origine dans l'étude de certains problèmes, tel que celui des ponts de Königsberg, la marche du cavalier sur l'échiquier ou le problème de coloriage de cartes. La théorie des graphes s'est alors développée dans diverses disciplines telles que la chimie, la biologie, les sciences sociales. Depuis le début du XXème siècle, elle constitue une branche à part entière des mathématiques, grâce aux travaux Köenig, Cayley puis de Berge et beaucoup d'autres.

De manière générale, un graphe permet de représenter la structure, les connexions d'un ensemble complexe en exprimant les relations entre ses éléments : réseaux de communications, réseaux routiers, interaction de diverses espèces animales, circuits électriques,...

Les graphes constituent donc une méthode de pensée qui permet de modéliser une grande variété de problèmes en se ramenant à l'étude de sommets et d'arcs.

L'hypercube a fait naître de nombreuses études engendrant une littérature très consistante aussi bien en mathématiques qu'en informatique. Grâce à sa structure, la motivation première de l'intérêt sans cesse croissant qui est porté sur l'hypercube et son utilisation dans de nombreux domaines (architecture parallèle, transfert de l'information, réseaux d'interconnexion, décisions multicritères).

Il demeure encore le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes comme étant des sous-graphes de l'hypercube (problème de plongement). En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquelles un graphe G est un sous-graphe de l'hypercube Q_n . L'accent est surtout mis sur le plongement d'arbres. Cet intérêt résulte de l'utilisation des arbres dans plusieurs domaines, à savoir : informatique, sciences sociales, recherche opérationnelle, théorie des réseaux électriques,...

Si un graphe est plongé dans l'hypercube de dimension n , Q_n , alors il est plongé dans $Q_p \forall p \geq n$. Le problème consiste à trouver le plus petit k tel que G est plongé dans Q_k . On parle alors de dimension cubique du graphe G . Il est connu que tous les arbres sont plongés dans l'hypercube. Par conséquent, pour un arbre donné, on s'intéresse à sa dimension cubique. Ce problème a été traité par plusieurs auteurs tel que I. Havel, F. Harary, M. Laborde, ce qui a permis de caractériser certaines classes d'arbres. Dans ce mémoire, on a établi la dimension cubique de certaines classes d'arbres.

Ce mémoire est développé en quatre chapitres dont le premier est consacré aux rappels nécessaires pour la suite, on y trouve aussi une présentation de l'hypercube et de certaines de ses caractéristiques. Le chapitre 2 est une présentation du problème de plongement de graphes dans l'hypercube. L'étude du plongement d'arbres dans l'hypercube fera l'objet du chapitre 3. Dans ce chapitre, nous présenterons certains résultats existant concernant ce problème. On établit au chapitre 4 la dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres.

Chapitre 1

Définitions et notations

Dans ce premier chapitre nous présenterons les définitions nécessaires et quelques propriétés fondamentales de la théorie des graphes qui seront utilisées tout au long de ce manuscrit. La terminologie adoptée sera celle de C. Berge [8]. D'autres références pour la théorie des graphes se trouvent dans l'ouvrage de A. Bondy et U. Murty [13].

1.1 Définitions et concepts de base

1.1.1 Définition d'un graphe

*Un graphe G est défini par un ensemble V fini d'éléments $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, appelés *sommets*, et par une famille E de couples distinctes de V , appelées *arêtes*. Le nombre de sommets d'un graphe G est appelé *ordre de G* . Pour une arête $e = \{x, y\}$ de G , on dira que :*

- e est incidente à x (et à y) .
- x et y sont les extrémités de e .
- x et y sont des voisins.
- x et y sont adjacents.

Deux arêtes sont dites adjacentes si elles ont une extrémité commune. Le *degré* d'un sommet u de G , noté $d_G(u)$, est le nombre de voisins de u . Un sommet de degré 0 est dit *isolé* et un sommet de degré 1 est dit *pendant*. Si tous les sommets de G sont de même degré d , alors G est *régulier* de degré d , on dira qu'il est *d -régulier*. Par convention le degré minimum et le degré maximum d'un graphe G sont notés récursivement par :

$$\delta(G) = \min_{u \in G} d_G(u) \quad \text{et} \quad \Delta(G) = \max_{u \in G} d_G(u)$$

1.1.2 Notion de sous-graphe

Un sous graphe de G est un graphe G' où l'ensemble de ses sommets V' est un sous-ensemble de V et celui de ses arêtes E' est un sous-ensemble de E tel que toute arête de E' joint deux sommets de V' . Si toutes les arêtes de G qui relient des sommets de V' sont dans E' , on dira que G' est induit par V' et il est noté $G_{V'}$. Dans le cas où $V' = V$, on dira que le sous-graphe (V, E') est un graphe partiel de G .

1.1.3 Chaînes et cycles dans les graphes

Une *chaîne* de x à y d'un graphe G , est une suite de sommets x_1, x_2, \dots, x_p telle que toute paire de sommets consécutifs sont adjacents, avec $x_1 = x$ et $x_p = y$. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*, une chaîne qui n'utilise pas deux fois

le même sommet est dite *élémentaire*. Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple.

On appelle *cycle* dans un graphe, une chaîne simple dont les extrémités initiale et finale sont confondues. Dans la suite de notre travail on ne parlera que de chaîne et de cycle élémentaire.

On appelle chaîne (resp. cycle) *hamiltonienne* (resp. *hamiltonien*) une chaîne (resp. cycle) passant, une et une seule fois, par tous les sommets d'un graphe G .

Un graphe G qui possède un cycle hamiltonien est appelé *graphe hamiltonien*.

La longueur d'une chaîne (resp. cycle) est le nombre d'arêtes de cette chaîne (resp. cycle) et on note P_n (resp. C_n) la chaîne élémentaire à n sommets, de longueur $(n - 1)$ (resp. n).

1.1.4 Connexité dans les graphes

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *connexe* s'il possède la propriété suivante :

$$\forall x, y \in V, \exists \text{ une chaîne entre } x \text{ et } y$$

Dans la suite, les graphes utilisés sont connexes.

1.1.5 Concept de distance et d'intervalle dans les graphes

Notion de distance dans les graphes

Etant donnés deux sommets x et y d'un graphe G , on appelle *distance* entre x et y , notée $d_G(x, y)$, la longueur d'une plus courte chaîne reliant x à y , noté (x, y) -*chaîne*. Une telle chaîne s'appelle aussi une (x, y) -*géodésique*. L'*excentricité* d'un sommet x , notée $e(x)$, est la longueur de la plus grande géodésique issue de x . Le *diamètre*, noté $\text{dim}(G)$, est la plus grande excentricité dans G . Le *rayon*, noté $R(G)$, est la plus petite excentricité. Un sommet x est un *centre* de G si $e(x) = R(G)$.

Notion d'intervalle dans les graphes

L'intervalle $I_G(x, y)$ est l'ensemble des sommets de G appartenant aux géodésiques entre x et y .

$$I_G(x, y) = \{z \in V; z \text{ appartient à une } (x, y) \text{-géodésique}\}.$$

Trivialement, un sommet $w \in I(x, y)$ si et seulement si : $d(u, w) + d(w, v) = d(u, v)$.

Dans un arbre, l'intervalle $I(u, v)$ est l'ensemble des sommets de l'unique (u, v) -*chaîne*.

Pour plus de détail concernant ce concept le lecteur pourra se référer à Mulder [35].

cependant dans ce qui suit, nous rappellerons les propositions de bases.

Proposition 1 [35] *Soient x et y deux sommets d'un graphe G , alors :*

- 1) $x, y \in I(x, y)$,
- 2) $I(x, y) = I(y, x)$,
- 3) Si $z \in I(x, y)$, alors $I(x, z) \subset I(x, y)$,
- 4) Si $z \in I(x, y)$, alors $I(x, z) \cap I(z, y) = \{z\}$,
- 5) Si $z \in I(x, y)$ et $w \in I(x, z)$, alors $z \in I(w, y)$.

Proposition 2 [35] *Soient x, y, z et w quatre sommets d'un graphe G . w est l'unique sommet de $I(x, z) \cap I(x, y)$ tel que $I(w, z) \cap I(w, y) = \{w\}$ si et seulement si :*

$$I(x, z) \cap I(x, y) = I(x, w).$$

1.1.6 Graphes médians

Certains types de graphes ont été défini en utilisant la notion d'intervalle, parmi ceux-ci les graphes médians.

La notion de graphe médian a été introduite indépendamment par Avann [4] et Nebesky [41]. Ils ont étudié la relation entre les graphes médians et certaines structures algébriques. Mulder et Schrijver [39] ont étudié une relation entre les graphes médians et les hypercubes (notion qu'on verra plus tard dans ce chapitre) possédant la propriété de Helly que voici l'énoncé : Considérons $E_1, E_2, E_3, \dots, E_p$ une suite finie d'ensembles telle que si $E_i \cap E_j \neq \emptyset, \forall i, j$ alors $\bigcap_{i=1}^p E_i \neq \emptyset$

Définition 3 *Un graphe médian est un graphe où pour tout triplet de sommets u, v et w , il existe un unique sommet x appartenant simultanément à une plus courte (u, v) -chaîne, à une plus courte (v, w) -chaîne et à une plus courte (w, u) -chaîne.*

Utilisant le concept d'intervalles, un graphe est médian si pour tout triplet de sommets u, v et w on a : $|I(u, v) \cap I(v, w) \cap I(w, u)| = 1$.

1.1.7 Quelques graphes particuliers

Cette section est destinée aux graphes complets, bipartis, équilibrés et aussi aux arbres que nous allons manipuler tout au long de ce manuscrit.

Graphe k-régulier

Un graphe $G = (V, E)$ est dit k-régulier si tous les sommets de G ont un degré égal à k .

Graphe complet

Un graphe $G = (V, E)$ est dit complet si tous les sommets sont deux à deux adjacents. Le graphe complet à n sommets est noté K_n .

La figure 1.1 montre le graphe complet à 4 sommets, K_4 .

Graphe biparti

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux sous-ensembles

FIG. 1.1 – Graphe complet sur 4 sommets

V_1 et V_2 telle que chaque arête de E a une extrémité dans V_1 et l'autre extrémité dans V_2 .

Une autre définition semblable des graphes bipartis est donnée par la proposition suivante :

Proposition 4 *Un graphe G est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.*

Un graphe G est biparti *complet* si tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2 . Un tel graphe est noté $K_{p,q}$ où $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$.

Graphe équilibré

Un graphe G est dit *équilibré* si et seulement si :

- G est biparti,
- Les deux ensembles de la bipartition ont le même nombre de sommets.

La figure suivante illustre le graphe $K_{3,3}$ qui est équilibré et 3-régulier.

FIG. 1.2 – Graphe équilibré $K_{3,3}$

Les arbres

Un arbre T est un graphe connexe sans cycle.

A présent nous donnons quelques propriétés des arbres :

Théorème 5 [8] *Soit G un graphe d'ordre n , les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- 1) G est sans cycle et connexe,
- 2) G est sans cycle et possède $(n - 1)$ arêtes,
- 3) G est connexe et possède $(n - 1)$ arêtes,
- 4) G est sans cycle et maximal pour cette propriété (en ajoutant une seule arête on crée un cycle),
- 5) G est connexe et minimal pour cette propriété (en supprimant une seule arête quelconque le graphe ne sera plus connexe),
- 6) Tout couple de sommet (x, y) est relié par une unique chaîne.

Un graphe $G = (V, E)$ vérifiant au moins l'une des propriétés ci-dessus est un arbre T d'ordre n .

Un graphe admet un arbre T comme graphe partiel si et seulement s'il est connexe. Un arbre T admet au moins deux sommets pendants.

Les graphes intervalles réguliers

Un graphe $G = (V, E)$ est dit intervalle régulier si et seulement si pour toute paire de sommets u et v de G , le nombre de voisins de u appartenant à $I(u, v)$ est égale à la distance entre u et v . Autrement dit $|I(u, v) \cap N(u)| = d(u, v)$.

1.1.8 Opérations sur les graphes

Somme cartésienne de deux graphes

On appelle *somme cartésienne* (dit aussi produit carré ou produit cartésien) de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, notée $G \square G'$ dans l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(G) \times V(G')$ et où deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si :

$$u = v \text{ et } u'v' \in E'$$

ou

$$u' = v' \text{ et } uv \in E$$

La figure suivante montre la somme cartésienne de $K_2 \square K_2$.

FIG. 1.3 – la somme cartésienne de deux graphes

On note que le nombre de sommets dans $\dot{G} = (\dot{V}, \dot{E})$ est $|V| \cdot |V'|$ et que le nombre d'arêtes est $|V| \cdot |E'| + |V'| \cdot |E|$.

Proposition 6 [34] *Le diamètre de la somme cartésienne de deux graphes G et G' est la somme des diamètres de ces graphes.*

Produit croisé de deux graphes

On appelle *produit croisé* (dit aussi produit catégoriel) de deux graphes $G = (V, E)$ et $G' = (V', E')$, noté $G \times G'$ le graphe dans l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(G) \times V(G')$ et où deux sommets (u, u') et (v, v') sont adjacents si et seulement si :

$$u v \in E \text{ et } u' v' \in E'$$

FIG. 1.4 – Le produit croisé de deux graphes

Homomorphisme de graphes

Soient $G = (V, E)$ et $\check{G} = (\check{V}, \check{E})$ deux graphes. Un homomorphisme de G dans \check{G} est une application

$f : V(G) \rightarrow V(\check{G})$ telle que :

$$xy \in E(G) \implies f(x)f(y) \in E(\check{G})$$

Isomorphisme de graphes

Une application $f : V(G) \rightarrow V(\check{G})$ définit un isomorphisme de G dans \check{G} si :

i) f est bijective.

ii) f et f^{-1} sont des homomorphismes.

Il est à remarquer qu'un homomorphisme bijectif n'est pas nécessairement un isomorphisme. Voici un contre exemple

$$f : V(G) \rightarrow V(\tilde{G})$$

$$f(1)=b, f(2)=a, f(3)=c$$

FIG. 1.5 –

$ac \in E(G')$ mais $f^{-1}(a)f^{-1}(c) \notin E(G)$ donc f^{-1} n'est pas un homomorphisme.

Décomposition en couches

Notons $N(x)$ l'ensemble des voisins d'un sommet x , et soient $N_i(x) = \{y \in V, d(x, y) = i\}$ l'ensemble des sommets de V qui sont à distances i de x .

Une décomposition en couches de G , à partir d'un sommet x donné, est formée de l'ensemble $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_k(x)\}$.

Dans la figure 1.6 est représenté la décomposition en couches d'un graphe G à partir du sommet a .

FIG. 1.6 – La décomposition en couche du graphe G à partir du sommet a .

Il est à noter que dans une décomposition en couches d'un graphe G , une arête est soit dans une couche, soit relie deux couches consécutives.

1.2 Le graphe de l'hypercube

Les hypercubes occupent une place importante dans la littérature de l'informatique et de la combinatoire, l'objectif de cette section est de citer quelques propriétés des hypercubes qui sont utilisées dans la suite. Une présentation générale des hypercubes sera donnée, ainsi que quelques propriétés élémentaires de ce type de graphe qui seront utiles dans les chapitres suivants. Enfin, nous décrivons plusieurs caractérisations différentes d'un hypercube.

Définition 7 *L'hypercube de dimension n , noté Q_n est le graphe où les sommets représentent les n -uplets de $\{0, 1\}^n$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent exactement en une seule composante.*

Il est à noter que $Q_0 = K_1$, $Q_1 = K_2$ et que d'une manière générale, Q_n peut être défini récursivement en utilisant la somme cartésienne par $Q_n = Q_{n-1} \square K_2$; $n \geq 1$.

Comme on peut conclure que $Q_n (n \geq 1)$ est isomorphe à $\underbrace{K_2 \square K_2 \dots \square K_2}_{n \text{ fois}}$ et que $Q_{n+d} =$

$$Q_n \square Q_d.$$

La figure suivante montre les premiers hypercubes

FIG. 1.7 – Les premiers hypercubes

Une direction i dans l'hypercube de dimension n ($i \leq n$) est l'ensemble des arêtes de Q_n dont les extrémités ont des vecteurs associés qui diffèrent à la $i^{\text{ème}}$ composante.

La figure ci-dessus montre une décomposition de Q_3 en deux copies de Q_2 suivant la direction 1.

FIG. 1.8 – La décomposition canonique de Q_3

Il est facile de voir qu'une direction définit un couplage parfait de 2^{n-1} arêtes qui décompose Q_n en deux copies disjointes, notées par Q'_{n-1}, Q''_{n-1} . Une telle décomposition est dite canonique suivant la direction i . Des arêtes de même direction sont appelées arêtes parallèles. Il existe n directions distinctes dans l'hypercube de dimension n .

1.2.1 Quelques propriétés élémentaires de l'hypercube

L'hypercube de dimension n est un graphe équilibré, n -régulier avec 2^n sommets et $(n \cdot 2^{n-1})$ arêtes et de diamètre n .

Ces remarques ont permis à Kobeissi [34] d'aboutir au résultat suivant :

Proposition 8 [34] *Il existe $(n - 1)$ chaînes de longueur inférieure ou égale à n et une chaîne de longueur inférieure ou égale à $(n + 1)$, deux à deux sommet-disjointes, entre toute paire de sommets distincts de l'hypercube de dimension n .*

Proposition 9 [19] *Pour deux sommets u et v qui sont à distance k dans Q_n , il existe $k!$ plus courtes (u, v) – chaînes.*

1.2.2 Décomposition en couches de l'hypercube

Soit $\{x, N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)\}$ une décomposition en couches à partir d'un sommet x quelconque de Q_n . On a les propriétés suivantes :

i) Pour tout sommet y de $N_i(x)$, y admet exactement i voisins dans $N_{i-1}(x)$.

ii) $|N_i(x)| = C_n^i$.

On remarque que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet quelconque x de Q_n est égale à 2^{n-1} et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de x est égale à $2^{n-1} - 1$.

La figure 1.9 montre une décomposition en couches de Q_3 à partir du sommet 000.

A partir de cette figure on remarque qu'il n'y a pas d'arête entre deux sommets d'une même couche et cela est due à la propriété fondamentale de l'hypercube qui est la bipartition. En effet ; la bipartition est formée par les deux ensembles de sommets x et y tels que x contient les sommets dont le vecteur représentatif possède un nombre pair de 1 et y contient le complément de x dans V .

FIG. 1.9 – La décomposition en couche de Q_3

1.2.3 Quelques caractérisations de l'hypercube

Dans la littérature il existe un nombre très important de travaux portant sur la caractérisation de l'hypercube. Foldes [19] a donné une des premières caractérisations de l'hypercube :

Théorème 10 [19] *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait les conditions suivantes :*

1) G est biparti,

2) Pour toute paire x, y de sommets de G , le nombre de géodésiques entre x et y est $d(x, y)!$

Par la suite Laborde & Rao Hebbare [31] et Mulder [37] ont indépendamment montré le théorème suivant qui repose sur le concept de $(0, 2)$ – graphe.

Définition 11 *Un graphe G connexe est un $(0, 2)$ – graphe si et seulement si pour toute paire (x, y) de sommets, x et y ont 0 ou 2 voisins communs.*

Mulder [37] a donné les propositions suivantes sur les $(0, 2)$ – graphes :

Proposition 12 [37] *Si G est un $(0, 2)$ – graphe alors G est régulier.*

Proposition 13 [37] *Soit G un $(0, 2)$ – graphe de degré n , alors $|V(G)| \leq 2^n$*

Théorème 14 [37] *Soit $G = (V, E)$ un $(0, 2)$ – graphe, alors*

1) *G est n –régulier,*

2) *$|V(G)| \leq 2^n$,*

3) *$|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est un hypercube de dimension n .*

Il se trouve que pour n donné, l'hypercube est le seul $(0, 2)$ – graphe n –régulier pour lequel la borne est atteinte.

Une autre manière de caractériser l'hypercube en tant que $(0, 2)$ – graphe a été donnée par Berrachedi [9]

Théorème 15 [9] *Un $(0, 2)$ – graphe est un hypercube si et seulement si il existe une décomposition en couches où tout cycle de longueur 4 rencontre 3 couches.*

A présent on va passer à une autre caractérisation de l'hypercube qui utilise la notion de graphe convexe donné par Van den Cruyce [15].

Définition 16 *Soit un graphe $G = (V, E)$ et soit $S \subseteq V(G)$ un ensemble de sommets. Le sous-graphe engendré par S est dit convexe si pour toute paire (x, y) de sommets distincts de S , $I(x, y) \subseteq S$.*

Théorème 17 [15] *Un graphe G est un hypercube de dimension n si et seulement si l'ensemble des sous graphes convexes de G est $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$.*

La caractérisation suivante en termes de graphes médians est donnée par Mulder [35] :

Théorème 18 [35] *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G est un graphe median régulier.*

A la fin de cette section on va présenter une caractérisation de l'hypercube en termes d'intervalles réguliers qui est dûe à Mulder [37].

Théorème 19 [37] *Un graphe G est un graphe intervalle régulier si et seulement si pour tout couple de sommets (x, y) de G , le sous graphe induit par l'ensemble des arêtes entre niveaux de $I(x, y)$ est un hypercube de dimension $d(x, y)$.*

Plusieurs autres caractérisations ont été données, en particulier des caractérisations en termes de graphes distance monotones [14], de graphes intervalles-réguliers et de graphes sphériques [9].

1.2.4 Projection et anti-projection

Une projection (resp. une anti-projection) d'un sommet x d'un graphe G sur un ensemble de sommets S de G est un sommet y de S à distance minimum (resp. maximum) de x . Pour tout ensemble de sommets S de G et pour tout sommet x , on désigne par $P(x, S)$ (resp. $AP(x, S)$) l'ensemble des projections (resp. l'ensemble des anti-projections) de x sur S .

On considère les propriétés suivantes :

$P1$: Pour tout u, v et w , on a : $|P(u, I(v, w))| = 1$.

$P2$: Pour tout u, v et w , on a : $|AP(u, I(v, w))| = 1$.

Un graphe vérifiant l'une de ces deux propriétés est un graphe biparti. Mollard [40] a donné la caractérisation suivante de l'hypercube en considérant les anti-projections sur les intervalles.

Proposition 20 *Un graphe G est un hypercube si et seulement si G vérifie la propriété $P2$.*

[40] Berrachedi [9] a donné un résultat analogue en considérant les projections sur les intervalles.

Proposition 21 [9] *Un $(0, 2)$ – graphe qui vérifie la propriété $P1$ est un hypercube.*

Chapitre 2

Plongement de graphes dans l'hypercube

Dans la littérature on trouve beaucoup de paramètres qui ont été définis pour mesurer l'efficacité des plongements [32]. Dans ce chapitre nous donnerons la définition de ceux d'entre eux qui sont le plus souvent étudiés, à savoir la dilatation, l'expansion et la congestion, après avoir donné la définition du problème de plongement de graphe dans l'hypercube.

Définition 22 *Un plongement d'un graphe G dans un graphe H est défini par la donnée d'une application injective φ de l'ensemble des sommets de G dans l'ensemble des sommets de H , et d'une application P_φ de l'ensemble des arêtes de G dans l'ensemble des chaînes de H , qui associe à chaque arête uv de G une chaîne reliant les sommets $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ dans H .*

L'étude d'un plongement d'un graphe G dans un graphe H revient à voir si G est isomorphe à un sous graphe de H . On considère le cas où H est un hypercube Q_n .

2.1 Paramètres mesurant l'efficacité des plongements

2.1.1 Dillatation

La dilatation d'un plongement φ d'un graphe G dans un graphe H , notée $dil(\varphi)$, est la longueur maximale des chaînes $P_\varphi(xy)$ de H , associées aux arêtes xy de G . Dans le cas où l'on considère des chaînes de plus courte longueur, la longueur de $P_\varphi(xy)$ est alors égale à la distance $d_H(\varphi(x), \varphi(y))$ et la dilatation s'exprime uniquement en fonction de φ , par :

$$dil(\varphi) = \max_{xy \in E(G)} d_H(\varphi(x), \varphi(y))$$

Dire que G est plongeable avec dilatation 1 est équivalent à dire que G est un sous-graphe de H . Dans ce cas l'image de l'arête xy de G est l'arête $\varphi(x)\varphi(y)$ de H . Si de plus $|V(G)| = |V(H)|$, alors G est un graphe partiel de H .

2.1.2 Expansion

L'expansion d'un plongement d'un graphe G dans un graphe H est le rapport du nombre de sommets de H , sur le nombre de sommets de G . Ce paramètre est une mesure du degré d'utilisation des processeurs dans le cas d'un algorithme modélisé par G , et implémenté sur le réseau de processeurs modélisé par H .

Une expansion égale à 1 peut correspondre à une utilisation optimale, ou du moins très efficace, des processeurs.

2.1.3 Congestion

La congestion d'un plongement φ d'un graphe G dans un graphe H , notée $cong(\varphi)$, est le maximum, pris sur toutes les arêtes e de H , du nombre de chaînes $P_\varphi(xy)$ de H , images d'arêtes de G , qui contiennent e .

2.2 Plongement optimal

Chercher un plongement d'expansion minimum d'un graphe G dans un graphe d'une famille donnée, revient donc à plonger G dans le graphe H de cette famille ayant le plus petit nombre de sommets possible, supérieur ou égale à celui de G . On dit alors que H est optimal pour G .

Dans le cas où cette famille de graphes est réduite à un seul graphe qui est le graphe de l'hypercube ; alors la recherche d'un plongement optimal d'un graphe G dans un hypercube Q_n consiste à trouver la plus petite dimension n de l'hypercube pour le quel G y est plongeable.

2.3 Dimension cubique

Un graphe G est dit cubique s'il admet un plongement de dilatation 1 dans Q_n pour un certain n . Le plus petit entier n pour lequel G est plongeable dans Q_n est appelé dimension cubique, noté $\dim(G)$.

Firsov [18] a montré que les arbres sont des graphes cubiques. Comme il a montré également que tout graphe cubique est nécessairement biparti, mais la réciproque n'est pas toujours vrai. En voici un contre exemple, $K_{2,3}$ est biparti mais pas cubique. Illustré dans la figure suivante.

FIG. 2.1 – Le graphe $K_{2,3}$

$K_{2,3}$ n'est pas un graphe cubique, il n'admet pas de plongement dans Q_n quelque soit la valeur de n . En effet, supposons qu'il existe un tel plongement, comme u et v sont à distance 2 dans $K_{2,3}$, alors leurs images respectives $\varphi(u)$ et $\varphi(v)$ seront aussi à distance 2 dans Q_n . Or deux sommets à distance 2 dans Q_n appartiennent à exactement 2 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans Q_n , ce qui n'est pas possible car les 3 chaînes sommet-disjointes de longueurs 2 dans $K_{2,3}$ doivent se plonger dans 3 chaînes sommet-disjointes dans Q_n .

2.4 Décider si un graphe G est cubique

Havel et Morávek [27] ont donnés des conditions nécessaires et suffisantes pour dire si un graphe G donné est cubique. Ce concept est connu sous le nom de *la C_n – valuation*.

Les conditions nécessaires et suffisantes

Un graphe G peut être plongé dans Q_n si et seulement si on peut étiqueter les arêtes de G par des entiers appartenant à l'ensemble $\{1, 2, \dots, n\}$, de telle sorte que :

- 1) Toutes les arêtes de G incidentes à un même sommet x admettent des étiquetages différents,
- 2) Pour toute chaîne P de G , il existe un entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ qui apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de P .
- 3) Pour tout cycle C de G , aucun entier $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ n'apparaît un nombre impair de fois dans l'étiquetage des arêtes de C .

Dans notre étude on ne tiendra compte que des deux premières conditions, car les arbres sont des graphes connexes sans cycle.

2.5 Complexité

Pour un algorithme donné, on tient compte du nombre d'opérations, des données et de la manière de les coder ainsi que de la nature de ses opérations élémentaires. Un algorithme de résolution d'un problème π donné est une procédure décomposable en opérations élémentaires transformant une chaîne de caractères représentant les données de n'importe quel exemple du problème π en une chaîne de caractères représentant les résultats de π . Un problème π est dit polynomial s'il admet un algorithme polynomial. Un problème π appartient à la classe NP s'il admet un algorithme non déterministe polynomial. La classe NP-Complet est une sous-classe des problèmes NP. Un problème est NP-complet quand tous les problèmes appartenant à la classe NP lui sont polynomialement réductibles. Si on trouve un algorithme polynomial pour un problème NP-complet alors on trouve un algo-

rithme polynomial pour résoudre tous les problèmes de la classe NP et on aurait $P=NP$. Garey et Graham [1979] ont montré que le problème suivant est NP-complet :

Théorème 23 [20] (*subgraph isomorphism problem*)

Données : G et H deux graphes.

Question : G est-il un sous- graphe partiel de H ?

Arfati et Papadimitriou[1984] ont particularisés ce résultat dans le cas où H est le graphe de l'hypercube.

Théorème 24 [3] *Le problème suivant est NP-complet*

Données : G un graphe, n un entier.

Question : G est-il un sous- graphe partiel de Q_n ?

Wagner et Corneil[1990] ont montré que ce problème reste NP-complet même dans le cas particulier où G est un arbre et où H est le graphe de l'hypercube Q_n .

Théorème 25 [45] *Le problème suivant est NP-complet*

Données : T un arbre, n un entier.

Question : T est-il un sous- graphe partiel de Q_n ?

2.6 Plongement dans Q_n

Le graphe Q_n est un graphe connexe et équilibré.

Si un graphe G est plongable dans un graphe H et H est plongable dans un graphe Q_n alors G est plongable dans Q_n .

2.6.1 Condition nécessaire pour qu'un graphe G soit plongable dans Q_n

Si un graphe $G = (V, E)$ est plongable dans le graphe Q_n , alors nécessairement on a :

- $|V(G)| \leq 2^n$,
- G est biparti,
- le degré maximum de G , $\Delta(G) \leq n$.

Si de plus $|V(G)| = 2^n$ alors G doit être équilibré.

Toutes ces conditions sont nécessaires pour qu'un graphe G soit plongable dans Q_n , mais pas suffisantes, comme le montre l'exemple suivant :

FIG. 2.2 – Arbre équilibré à 16 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4 ,

Cet arbre T est bien un arbre équilibré à 2^4 sommets qui n'est pas plongeable dans Q_4 . En effet ; dans T tous les sommets sont à distance au plus 3 du sommet v alors que dans Q_n , pour tout sommet donné v , il existe un unique sommet u tel que $d(u, v) = n$, par conséquent, dans cet exemple, v devrait avoir un sommet à distance 4.

2.7 Plongement de cycles dans l'hypercube

L'hypercube est hamiltonien, il s'ensuit que le cycle C_{2^n} est plongeable avec dilatation 1 dans Q_n , et que $\dim(C_{2^n}) = n$.

Chapitre 3

Dimension de quelques classes d'arbres

Dans ce chapitre, on va présenter les principaux résultats connus concernant les plongements de quelques classes d'arbres dans l'hypercube .

Rappelons que la recherche d'un plongement optimal d'un graphe G dans un hypercube Q_n consiste à trouver la plus petite dimension n de l'hypercube pour lequel G y est plongeable .

D'après le résultat de FIRSOV, tout arbre est plongeable dans l'hypercube. On s'intéressera alors à la recherche de plongement optimal de ces arbres dans l'hypercube.

3.1 Plongement d'arbres binaires complets dans l'hypercube

Un arbre T est dit binaire si son degré maximum $\Delta(T) \leq 3$.

Un résultat concernant les arbres binaires a été donnée par Havel [28].

Proposition 26 [28] *Soit T un arbre binaire d'ordre 2^n avec $n \geq 3$. Si T est équilibré et possède deux sommets de degré 3 alors T est plongeable dans Q_n .*

Définition 27 *L'arbre binaire complet D_n est le graphe défini inductivement comme suit : $-D_1$ est le graphe biparti complet $K_{1,2}$.*

-Pour $n \geq 2$, D_n est obtenu à partir de deux copies disjointes \acute{D}_{n-1} et \check{D}_{n-1} , et d'un sommet u tel que u soit relié par une arête à l'unique sommet de degré 2 de \acute{D}_{n-1} et par une autre arête à l'unique sommet de degré 2 de \check{D}_{n-1} .

FIG. 3.1 – Les premiers arbres binaires complets

D_n est un graphe qui possède 2^n sommets de degré 1, $(2^n - 2)$ sommets de degré 3 et un seul et unique sommet de degré 2 qui sera appelé la racine de l'arbre. Donc D_n est un arbre binaire de hauteur n qui possède $(2^{n+1} - 1)$ sommets.

Le théorème suivant à été démontré par I. Havel [29] :

Théorème 28 [29] *Soit $n \geq 2$; D_n est plongeable dans Q_{n+2} et $\dim(D_n) = n + 2$.*

3.2 Plongement d'arbres dans l'hypercube obtenus par transformation des arbres binaires

A partir de l'arbre binaire complet D_n on définira d'autres arbres plongeables dans l'hypercube.

3.2.1 Arbre binaire B_n

1. Pour $n \geq 2$, B_n est un arbre binaire obtenu à partir de l'arbre binaire complet D_{n-1} , et d'un sommet u , tel que u soit relié à la racine de D_{n-1} par une arête.

B_n possède $(2^{n-1} + 1)$ sommets pendants, $(2^{n-1} - 1)$ sommets de degré 3, donc B_n possède 2^n sommets.

La figure suivante montre l'arbre B_3 .

FIG. 3.2 – L'arbre B_3

On remarque que B_n n'est pas équilibré. Le théorème suivant donne la dimension cubique de B_n .

Théorème 29 [28] *Pour tout $n \geq 2$; B_n est plongeable dans Q_{n+1} ; $\dim(B_n) = n + 1$.*

Définition 30 *La subdivision d'une arête uv est le remplacement de uv par une chaîne $u = u_0, u_1, \dots, u_i, \dots, u_p = v$ où les u_i pour $i = 1, \dots, (p - 1)$ sont de nouveaux sommets. Une subdivision d'un graphe G est un graphe où les arêtes de G ont été subdivisées.*

L'arbre B_n peut être généralisé comme suit :

Soit $n \geq 2$ et $k \geq 1$; on définit l'arbre noté par B_n^k de la manière suivante :

$B_n^1 = B_n$, et B_n^k est l'arbre obtenu en subdivisant chaque arête de l'arbre binaire complet D_{n-1} par $k - 1$ sommets et l'arête pendante de B_n adjacente à la racine de D_{n-1} par k sommets.

Il est à remarquer que $|V(B_n^k)| = k \cdot (2^n - 1) + 2$.

I. Havel a aussi démontré la proposition suivante, qui concerne le plongement de B_n^2 dans l'hypercube.

Proposition 31 [28] Pour $n \geq 2$, $\dim(B_n^2) = n + 2$.

Exemple B_3^2 .

FIG. 3.3 – L'arbre B_3^2 .

Une généralisation de cette proposition à été donnée par I. Havel

Proposition 32 [28] *Pour $n \geq 2$, et $k \geq 1$, $|V(B_n^{2k})| = k \cdot 2^{n+1} - 2k + 2$, $\dim(B_n^{2k}) = n + k + 1$.*

3.2.2 Arbres binaires $\hat{\hat{D}}_n, \hat{D}_n, \check{D}_n$

-Pour $n \geq 1$, on désigne par $\hat{\hat{D}}_n$ l'arbre formé de deux copies disjointes de D_n , tel que leurs racines sont reliées par une arête appelée arête axiale de $\hat{\hat{D}}_n$ cet arbre possède 2^{n+1} sommets pendants, et $2^{n+1} - 2$ sommets de degré 3, donc $\hat{\hat{D}}_n$ a $2^{n+2} - 2$ sommets.

La figure suivante illustre $\hat{\hat{D}}_2$.

FIG. 3.4 –

Théorème 33 [29] $\dim(\hat{\hat{D}}_n) = n + 2$ pour tout $n \geq 1$.

-Soit $n \geq 1$, on désigne par \hat{D}_n l'arbre formé à partir de $\hat{\hat{D}}_n$ en insérant deux nouveaux sommets au niveau de l'arête axiale, et la chaîne obtenue à partir de l'arête axiale sera appelée chaîne axiale de \hat{D}_n .

-L'arbre \check{D}_n est l'arbre formé à partir de $\hat{\hat{D}}_n$ en insérant deux nouveaux sommets de degré deux au niveau d'une arête pendante de $\hat{\hat{D}}_n$.

La figure suivante illustre D_3^2

FIG. 3.6 – L'arbre D_3^2

D_n^2 possède $2^n - 1$ sommets pendants, $2^n - 3$ sommets de degré 3 et un sommet de degré 2, donc il possède $2^{n+1} - 3$ sommets.

Théorème 35 [44] *Pour tout $n \geq 2$, $\dim(D_n^2) = n + 1$.*

3.2.4 Arbres binaires introduits par ARBOUZ

P. ARBOUZ [1] a introduit une classe d'arbres F_n dont les éléments sont définis de la manière suivante :

Pour $n = 1$; F_1 est donné dans la figure ci-dessous.

Pour $n = 2$; F_2 c'est l'arbre illustré dans la figure ci-dessous.

Pour $n \geq 3$, F_n est obtenu en joignant un sommet de degré 2 de F_{n-1} à un sommet pendant de F_1 . F_n possède $2n - 2$ sommets de degré 3, 2 sommets de degré 2, $2n$

FIG. 3.7 – Les arbres F_1 , F_2 et F_3

sommets pendants, alors F_n possède $4n$ sommets.

Proposition 36 [1] $\forall k \geq 0, \dim(F_{2^k}) = k + 2$.

La démonstration de cette proposition repose sur la notion de C_n – valuation. Pour n quelconque, Arbouz a donné la dimension de F_n dans le corollaire suivant :

Corollaire 37 [1] $\forall n \geq 1, \dim(F_n) = 2 + \lceil \log_2 n \rceil$, où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure du réel x .

En effet ; soit $k \in \mathbb{N} : k - 1 < \log_2 n \leq k$; on a $\dim(F_n) \geq (k + 2)$ mais F_n est un sous-graphe de F_{2^k} donc $\dim(F_n) = (k + 2) = (2 + \lceil \log_2 n \rceil)$.

ARBOUZ a généralisé cette classe de graphes comme suit :

Pour $k = 1, \forall n \geq 1$ on a $F(n, 1) = F_n$

Pour $k \geq 2, \forall n \geq 1$ on a $F(n, k)$ est obtenue à partir de F_n en dupliquant ses sommets k fois, il est clair que $|V(F(n, k))| = 4.k.n$.

Proposition 38 [1] $\forall k \geq 1$ et $\forall s \geq 0, \dim(F(2^k, 2^s)) = k + s + 2$.

Pour n quelconque nous avons le corollaire suivant :

Corollaire 39 [2] $\forall k \geq 2$ et $\forall s \geq 1, \dim(F(n, 2^s)) = 2 + s + \lceil \log_2 n \rceil$.

3.2.5 Arbres binaires introduits par KABYL

K. KABYL [33] a introduit trois nouvelles classes d'arbres binaires, obtenus à partir de l'arbre binaire complet D_n . Ils sont notés respectivement R_n, H_n et M_n .

*La première classe est défini de la manière suivante : Pour $n = 1, R_1$ est l'arbre de la figure 3.8.

Pour $n \geq 2, R_n$ est obtenu à partir de R_{n-1} , tel que chaque sommet pendant reliant un sommet de degré 3 est relié à deux nouveaux sommets. Ces sommets sont pendants dans l'arbre R_n .

R_n possède $2^n + 1$ sommets pendants, un sommet de degré 2 et enfin $2^n - 1$ sommets de degré 3, donc R_n à $2^{n+1} + 1$ sommets.

FIG. 3.8 – Les arbres R_1 et R_2

Théorème 40 [33] *Pour tout $n \geq 1$, $\dim(R_n) = n + 2$.*

KABYL a donné une généralisation de cette classe de graphe en définissant l'arbre $R_n^{(k)}$; obtenu de la manière suivante :

$R_n^{(0)}$ est l'arbre binaire B_{n+1} ;

$R_n^{(1)}$ est l'arbre binaire R_n ;

$R_n^{(k)}$ pour $k \geq 2$ est l'arbre binaire obtenu à partir de R_n en insérant $(k - 1)$ nouveaux sommets de degré 2 au niveau de l'arête pendante incidente au sommet de degré 2 de R_n .

Proposition 41 *Pour tout $n \geq 1, 2 \leq k \leq (n + 2)$, $\dim(R_n^{(k)}) = n + 2$*

*La deuxième classe d'arbres donnée par KABYL [33] est définie de la manière suivante :
 Pour $n = 1$, H_1 c'est l'arbre binaire défini inductivement figure 3.9.

Pour $n \geq 2$, H_n est obtenu à partir de H_{n-1} , tel que chaque sommet pendant est relié

FIG. 3.9 – Les arbres H_1 et H_2

à deux nouveaux sommets. Ces nouveaux sommets seront appelés sommets pendants de l'arbre H_n .

H_n possède 2^{n+1} sommets pendants, $2^{n+1} - 2$ sommets de degré 3 et 3 sommets de degré 2, donc H_n à $2^{n+2} + 1$ sommets.

Théorème 42 [33] *Pour tout $n \geq 1$, $\dim(H_n) = n + 3$*

*La troisième classe d'arbres donnée par KABYL [33] est définie de telle sorte que ses éléments sont obtenus à partir de deux copies disjointes de T_1 et T_2 de R_n dont leurs sommets de degré 2 sont reliés par une arête. Un élément de cette classe est noté M_n .

M_2 est représenté dans la figure 3.10.

M_n possède $2^{n+1} + 2$ sommets pendants, 2^{n+1} sommets de degré 3, donc M_n a $2^{n+2} + 2$ sommets.

FIG. 3.10 – L'arbre M_2

Théorème 43 *Pour tout $n \geq 1$, $\dim(M_n) = n + 3$*

KABYL à généralisé cette classe en définissant l'arbre $M_n^{(k)}$ comme suit :

$M_n^{(k)}$ est l'arbre obtenu à partir de deux copies disjointes, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2 de $R_n^{(k)}$ tel que un sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de \tilde{T}_1 est relié par une arête à un sommet de degré 2 adjacent à un sommet de degré 3 de \tilde{T}_2 .

Si $k = 1$, $M_n^{(k)} = M_n$.

Proposition 44 [33] *Pour tout $n \geq 1$, $2 \leq k \leq n + 2$ on a : $\dim(M_n^{(k)}) = n + 3$*

3.3 Autres plongements d'arbres

3.3.1 n – aires complets

Définition 45 Les n -aires complets sont une généralisation des arbres binaires complets, où le degré de la racine est égale à n . Un tel arbre de degré n et de hauteur k est noté T_k^n .

Il est à noter que $T_n^2 = D_n$.

L'arbre T_2^3 est représenté dans la figure ci-dessous.

FIG. 3.11 – L'arbre T_2^3

I. Havel [29] a donné le résultat suivant relatif au plongement de ces arbres dans l'hypercube Q_n .

Proposition 46 [29] T_2^n est plongeable dans l'hypercube, et $\dim(T_2^n) = \lceil \frac{3n+1}{2} \rceil$.

3.3.2 Chenilles

Définition 47 Une chenille C est un arbre avec au moins trois sommets, qui devient une chaîne P si tous les sommets pendants de cet arbre sont supprimés. Son degré est le degré maximum de ses sommets.

Voici présentée dans la figure ci-dessous une chenille de degré maximum 6.

FIG. 3.12 – Une chenille de degré maximum 6

Une chaîne P dans une chenille C est appelée épine dorsale de C si toute arête de C est incidente à un sommet de P . Les sommets de P sont appelés sommets épinaux. A noter que l'épine d'une chenille n'est pas unique.

Pour $k \geq 1$, soit l_i ($i = 1, \dots, k$) des entiers positifs tel que $k + l_1 + l_2 + \dots + l_k \geq 3$.

D'après [17], $CAT[l_1, \dots, l_k]$ dénote une chenille qui est formée par une épine P à k sommets, l_i étant le nombre de sommets non épinaux adjacents au sommet i de P .

Le nombre de sommets dans $CAT[l_1, \dots, l_k]$ est $k + l_1 + l_2 + \dots + l_k$, et $CAT[0, l_2, \dots, l_k]$ (k sommets épinaux) est isomorphe à $CAT[l_2 + 1, \dots, l_k]$ ($k - 1$ sommets épinaux).

Pour simplifier la notation, des parenthèses et des puissances seront employées :

$CAT [(3)^4] = CAT [3, 3, 3, 3]$ et $CAT [0, (2, 0)^3, (0, 2)^2] = CAT [0, 2, 0, 2, 0, 2, 0, 0, 2, 0, 2]$.

Quelques plongements connus concernant les chenilles

Soit ζ l'ensemble des chenilles de degré au plus 3, et soit C_n le sous-ensemble de ζ formé par les chenilles bipartis équilibrées à (2^n) sommets.

Soit C une chenille de ζ et soit P une épine de C . (On note par v_1, v_2, \dots, v_s l'ensemble des sommets de P).

Pour deux sommets x, y de P , on note par $C_{x,y}$ le sous-graphe de C engendré par les sommets v_x, \dots, v_y .

I.Havel et Liebl [30] ont montré le théorème suivant sur les chenilles de degré maximum 3.

Théorème 48 [30] *Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 3 est plongeable dans Q_n .*

La démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 49 [30] *Pour $n \geq 2$, soient $C \in C_{n+1}$, soit P une épine de C et $s = |V(P)|$, alors il existe v_x et v_y dans P , ($1 < x < y < s$), tel que $C_{x,y}$ soit dans C_n .*

Harary et Lewinter [26] ont montré un résultat identique pour des chenilles de degré

maximum 4.

Théorème 50 [26] *Toute chenille équilibrée à 2^n sommets de degré maximum 4 est plongeable dans Q_n .*

Définition 51 *Une k -chenille C , $k \geq 1$, est une chenille de degré maximum $k + 2$. Si le degré des sommets de C est égal à 1, 2 ou $k + 2$ alors C est appelée une stricte k -chenille. Dans la figure qui suit un exemple d'une stricte 2-chenille.*

FIG. 3.13 – Une stricte 2-chenille.

Théorème 52 [26]

Une 1-chenille équilibrée à 2^n sommets est plongeable dans Q_n .

Théorème 53 [26]

Une stricte 2-chenille d'ordre 2^n $CAT(0, 0, 2, 2, 0, 0, 2, 2, \dots, 0, 0, 2, 2)$ est plongeable dans Q_n .

Havel, Laborde et Mollard [17] ont donné d'autres plongements de ce type de graphes. Ils ont aussi montré, en utilisant les propriétés de l'hypercube, que certaines chenilles particulières n'admettent pas de plongement optimal dans Q_n .

Lemme 54 [17] *Pour $n \geq 3$ et pour $k \geq 0$, $CAT [n - 1, (0, n - 3)^k, 0, n - 1]$ n'est pas plongeable dans Q_n .*

Les mêmes auteurs [17] ont également donné les résultats suivants.

Proposition 55 [17] *i) Pour $n \geq 4$, $CAT [(3)^{2^n}]$ est plongeable dans Q_{n+2} .*

ii) Pour $0 \leq n \leq 3$, $CAT [(3)^{2^n}]$ n'est pas plongeable dans Q_{n+2} .

3.3.3 Plongement des grilles et des échelles

Définition 56 *Une n -grille $M = M(d_1 \times d_2, \dots \times d_n)$ est la somme cartésienne de n chaînes P_1, P_2, \dots, P_n d'ordre respectifs d_1, d_2, \dots, d_n .*

Grille binaire

Définition 57 *Une grille est dite binaire si d_i est une puissance de 2 pour tout i . En particulier si $d_i = 2$ pour tout i , alors M est l'hypercube de dimension n .*

Voici un exemple de grille binaire $M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$

FIG. 3.14 – Une grille binaire $M(2 \times 4) = P_2 \square P_4$

Harary et Lewinter [23] ont montré que les grilles binaires sont des graphes plongeables dans l'hypercube et la démonstration repose sur le lemme suivant :

Lemme 58 [23] *Si G et H sont des graphes plongeables dans \acute{G} et \acute{H} respectivement, alors $G \square H$ est plongeable dans $\acute{G} \square \acute{H}$.*

Preuve. On a $V(G \square H) \subseteq V(\acute{G} \square \acute{H})$, et par définition du produit cartésien, on a

$E(G \square H) \subseteq E(\acute{G} \square \acute{H})$. ■

Plongement des grilles binaires dans l'hypercube

Théorème 59 [34] *La n -grille est un graphe plongeable dans Q_m si et seulement si $d_1 \times d_2 \dots \times d_n \leq 2^m$.*

Plongement d'échelles

Définition 60 *Soient $P_1 = a_1, a_2, \dots, a_k$ et $P_2 = b_1, b_2, \dots, b_k$ deux chaînes d'ordres k , tels que les sommets a_i et b_i ($i = 1, \dots, k$) sont reliés par des chaînes d'ordres r_1, \dots, r_k de telle sorte que les extrémités de ces chaînes soient reliées l'une par une arête à a_i et l'autre par une arête à b_i pour $i = 1, \dots, k$ (a_i et b_i seront reliés par une arête si $r_i = 0$). Le graphe qui en résulte est appelée une échelle E , et les chaînes entre a_i et b_i sont appelées les rangs de cette échelle.*

On donne un exemple d'une échelle de rangs 2, 0, 1 et 3 dans la figure 3.15.

FIG. 3.15 – Une échelle de rangs 2, 0, 1 et 3

Le théorème suivant est dû à Bezrukov [12] sur le plongement des échelles dans l'hypercube.

Théorème 61 [12] *Toute échelle équilibrée E est plongeable dans son hypercube optimal.*

Le corollaire suivant s'en déduit :

Corollaire 62 [12] *Soit C une chenille de degré maximum 3 et soit P une épine de C , telle que toute arête de $C \setminus P$ soit subdivisée en un nombre pair de sommets. Alors C est plongeable dans son hypercube optimal.*

3.3.4 Plongement des quasi-étoiles et des double quasi-étoiles

Définition 63 *Une étoile est un arbre avec exactement un seul sommet u qui n'est pas pendent. Ce sommet est appelé jonction. Un tel arbre est isomorphe à $K_{1,n}$.*

FIG. 3.16 – Une étoile $K_{1,5}$

Définition 64 *Une quasi-étoile est une étoile dont les arêtes sont subdivisées.*

Le lemme suivant est dû à Havel [28], il donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'une quasi étoile soit équilibrée.

Lemme 65 [28] *Une quasi-étoile est équilibrée si et seulement si elle possède exactement une seule chaîne de longueur impaire.*

Le degré d'une quasi-étoile est le nombre de chaînes incidentes à la jonction u . On notera $S(a_1, a_2, \dots, a_k)$ une quasi-étoile ayant k chaînes telle que l'une de leurs deux extrémités soient incidentes à u , d'ordres respectifs a_1, a_2, \dots, a_k . Une quasi-étoile de degré k , à 2^n sommets, est appelée quasi-étoile k -équilibrée (k - quasi - étoile).

FIG. 3.17 – Une quasi-étoile $S(1, 1, 2, 2, 3)$

Définition 66 *Une double étoile est formée de deux étoiles dont les jonctions u et v sont reliées par une arête. A noter que u et v ne sont pas forcément du même degré.*

Définition 67 *Une double quasi-étoile est une subdivision d'une double étoile, dans laquelle l'arête reliant u et v n'est pas subdivisée.*

Une double quasi-étoile dont les sommets u et v sont de degrés respectifs k et s , est notée $S(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_s)$. Un tel graphe est montré dans la figure suivante :

FIG. 3.18 – Une double quasi-étoile $S(1, 1, 2; 2, 2, 1)$

Une double quasi-étoile est équilibrée si et seulement si le nombre de chaînes d'ordre impair qui sont incidentes à u est égal au nombre de chaînes d'ordre impair incidentes à v . Une double quasi-étoile équilibrée $S(a_1, a_2, \dots, a_k; b_1, b_2, \dots, b_k)$ est appelé k double quasi étoile équilibrée.

Havel [28] a montré que les 3-quasi-étoiles équilibrées à 2^n sommets sont plongeables dans Q_n . Nebesky [43] a étendu ce résultat aux 4-quasi-étoiles équilibrées et au 5-quasi-étoiles équilibrées. Limaye [36] a prouvé ce même résultat pour $k = 6$.

Harary et Lewinter [24] ont cru avoir prouvé le théorème général suivant concernant le plongement des quasi-étoiles.

Théorème 68 [24] *Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq n$, est plongeable dans Q_n .*

Mais Kobeissi [34] a montré que le lemme sur lequel ils se sont appuyés pour démontrer ce théorème était faux. Néanmoins il reste vrai par le résultat de Nebesky [41].

Dans ce qui suit on va présenter une conjecture proposée par Havel [28] concernant les doubles quasi-étoiles, et qui a été démontré par Kobeissi [34].

Conjecture 69 [28] *Toute double quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, de degré maximum n , est un graphe partiel de Q_n .*

3.3.5 Les $MD(\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k)$ graphes

Définition 70 *Soit uv une arête donnée d'un graphe donné. On désigne par $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe, le graphe formé par l'arête uv et de $(k \geq 1)$ chaînes distinctes d'ordres respectifs a_1, \dots, a_k où les a_i sont des entiers positifs pairs, tels que les extrémités de chaque chaîne soient reliées l'une par une arête à u et l'autre extrémité par une arête à v , et tels que $a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$*

FIG. 3.19 – Le MD graphe (2,2,6)

Il est clair que $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe est biparti.

Voici deux propriétés associées aux MD graphes .

Kobeissi [34] a montré que les graphes $MD(a_1, \dots, a_k)$ équilibrés sont plongeables dans Q_n .

Théorème 71 [34] *Tout MD graphe k – équilibré à 2^n sommets, avec $k \leq (n - 1)$, est plongeable dans Q_n .*

Comme conséquence directe de ce théoème, il en découle les deux corollaires suivants :

Corollaire 72 [34] *Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq n$, est plongeable dans Q_n .*

Corollaire 73 [34] *Toute k -quasi-étoile équilibrée à 2^n sommets, avec $k \leq (n - 1)$, est plongeable dans Q_n .*

$MD(a_1, \dots, a_k)$ **graphe subdivisés**

Définition 74 *Un MD graphe subdivisé, noté $MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$ est un $MD(a_1, \dots, a_k)$ graphe dans lequel l'arête uv est subdivisée en un nombre pair de sommets a_0 , et tel que $a_0 + a_1 + \dots + a_k = 2^n - 2$*

FIG. 3.20 – Le MD graphe subdivisé (2,2,2,6)

Il est clair que si l'arête uv est subdivisée en un nombre impair de sommets, le graphe qui en résulte ne serait pas plongéable dans l'hypercube car il ne sera pas biparti. C'est pour cela que Kobeissi s'est intéressé uniquement à une subdivision d'ordre pair de l'arête uv .

Proposition 75 [34] *$MD(a_0; a_1, \dots, a_k)$ est plongéable dans Q_n , si $k \leq n - 2$.*

Chapitre 4

Dimension cubique de deux nouvelles classes d'arbres

Le problème de plongement d'arbres dans l'hypercube est toujours posé jusqu'à présent, on n'a pas pu caractériser tous les arbres qui peuvent être plongés dans l'hypercube de dimension minimum. Ainsi on essaiera de trouver des résultats intermédiaires en étudiant des classes d'arbres particulières.

Dans ce chapitre, on définira deux nouvelles classes d'arbres, obtenus à partir de l'arbre binaire complet, dont les éléments sont G_n et W_n ayant toutes les deux la même dimension cubique égale à $(n+3)$.

4.1 Première classe d'arbre G_n

Soit un arbre binaire G_n défini de quatre manières différentes :

*L'arbre G_n peut être défini comme étant le résultat de trois copies de l'arbre B_{n+1} reliées entre elles par deux arêtes, comme le montre le graphe de la figure suivante :

FIG. 4.1 – La première configuration de G_n

FIG. 4.2 – L'arbre G_1

*La deuxième manière de le définir est qu'il soit obtenu comme étant le résultat de l'identification du seul sommet pendant relié à la racine de l'arbre B_{n+1} au sommet pendant de la racine de l'arbre R_n (arbre de Kaby), tout deux reliés par une arête à une autre copie de l'arbre B_{n+1} ; comme l'illustre le graphe de la figure suivante :

FIG. 4.3 – La deuxième configuration de G_n

FIG. 4.4 – L'arbre G_1

*La troisième manière de définir notre arbre G_n est qu'il soit obtenu en reliant la racine de l'arbre D_n à l'un des trois sommets de degré deux de H_n (arbre de Kabyl) par une arête. Figure 4.5.

FIG. 4.5 – La troisième configuration de G_n

*Et enfin ; la quatrième manière de définir la nouvelle classe d'arbre G_n est qu'elle soit obtenue en reliant l'arbre \hat{D}_n et l'arbre B_{n+1} par une arête (ab) ; comme le montre le graphe de la figure 4.6.

FIG. 4.6 – La quatrième configuration de G_n

Ainsi G_n est obtenu en reliant l'un des deux sommets de degré 2 de la chaîne axiale de l'arbre \hat{D}_n à l'unique sommet pendant relié à la racine de l'arbre B_{n+1} par une arête (ab) .

En fait ; tout notre travail se fera en s'appuyant sur cette dernière configuration pour démontrer la dimension cubique de cette classe d'arbre.

FIG. 4.7 – Le graphe G_1

Le nombre de sommets du graphe G_n est égal au nombre de sommet de \hat{D}_n additioné au nombre de sommets de B_{n+1} , ce qui est égal à $3 \cdot 2^{n+1}$ sommets.

Le théorème suivant donne la dimension cubique de G_n .

Théorème 76 $\forall n \geq 1$, la dimension cubique de l'arbre G_n est $\dim(G_n) = n + 3$

Preuve.

Comme le graphe G_n possède $3 \cdot 2^{n+1}$ sommets qui est strictement supérieur au nombre de sommets de l'hypercube Q_{n+2} alors G_n ne peut pas être plongé dans Q_{n+2} , et par conséquent sa dimension cubique est supérieur ou égale à $n + 3$

D'après la condition nécessaire et suffisante de I.Havel, il s'agit de montrer que G_n est plongé dans Q_{n+3} , et pour cela il suffit de donner une c_{n+3} -valuation pour G_n .

Soit la valuation suivante de G_n obtenue en prenant une c_{n+2} _valuation de \hat{D}_n et une c_{n+2} _valuation de B_{n+1} , l'arête (ab) est valuée par $n + 3$, montrons que ça donne une c_{n+3} _valuation de G_n .

FIG. 4.8 – Valuation de G_n

Soit P une chaîne de G_n :

1^{er} cas Si P appartient à l'arbre \hat{D}_n alors il existe un entier $k \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$, pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par k car \hat{D}_n est C_{n+2} -valué.

2^{ème} cas Si P appartient à l'arbre B_{n+1} alors il existe un entier $k \in \{1, 2, \dots, n + 2\}$, pour lequel un nombre impair d'arêtes de P sont marquées par k car B_{n+1} est C_{n+2} -valué.

3^{ème} cas Si P relie un sommet de \hat{D}_n à un sommet de B_{n+1} , alors P utilise l'arête (ab) qui est la seule marquée par $n + 3$; d'où le résultat. ■

4.2 Deuxième classe de graphe W_n

On donne une nouvelle classe d'arbres notée W_n , dont on propose trois manières distinctes pour la définir.

*Les éléments de l'arbre W_n sont obtenus comme première possibilité en utilisant l'arbre B_{n+1} , l'arbre R_n (arbre de Kaby1) et l'arbre D_n , telle que :

Si α est l'unique sommet pendant relié à la racine de B_{n+1} , et si β est l'unique sommet relié par une chaîne de longueur deux à la racine de R_n , on identifie α et β pour obtenir un sommet b ; qu'on relie par une arête à la racine a de D_n . Comme l'illustre le graphe de la figure suivante :

FIG. 4.9 – La première configuration de W_n

*La deuxième manière pour définir cette classe d'arbres est de considérer deux copies de l'arbre B_{n+1} et une copie de l'arbre R_n tel que :

Si α et β sont respectivement les uniques sommets pendants reliés au racines des deux copies de l'arbre B_{n+1} , et γ l'unique sommet relié par une chaîne de longueur deux à la racine de R_n , on identifie α , β et γ pour obtenir un sommet commun et par conséquent l'arbre W_n .

FIG. 4.10 – La deuxième configuration de W_n

FIG. 4.11 – L'arbre W_1

*la troisième et dernière façon proposée pour définir l'arbre W_n est qu'il soit obtenu en reliant un des deux sommets de degré deux de l'arbre \hat{D}_n à la racine b de l'arbre D_n .

FIG. 4.12 – La troisième configuration de W_n

Pour des raisons de commodité on utilisera cette dernière configuration pour donner la dimension cubique de cette classe d'arbres.

Pour $n \geq 1$, l'arbre W_n est obtenu en joignant l'un des deux sommets de degré deux de l'arbre \hat{D}_n à la racine de l'arbre D_n .

Le graphe W_1 est illustré dans la figure 4.13.

Le nombre de sommets que possède le graphe W_n est exactement égal à la somme des sommets de l'arbre \hat{D}_n (qui est égal à 2^{n+2}) et de l'arbre D_n (qui est égal à $2^{n+1} - 1$), ce qui donne $3 \cdot 2^{n+1} - 1$ sommets.

Le théorème suivant donne la dimension de W_n .

Théorème 77 *Pour tout $n \geq 1$, la dimension cubique de l'arbre W_n est $\dim(W_n) = n+3$.*

FIG. 4.13 – W_1 **Preuve.**

Sachant que le graphe W_n contient $3 \cdot 2^{n+1} - 1$ sommets qui est strictement supérieur au nombre de sommets de l'hypercube Q_{n+2} alors W_n ne peut pas être plongé dans Q_{n+2} et par conséquent sa dimension cubique est supérieure ou égale à $n + 3$

Or pour montrer que W_n est plongé dans Q_{n+3} il suffit de montrer que W_n est c_{n+3} -valué.

Soit la valuation de W_n suivante obtenue en prenant une c_{n+2} -valuation de \hat{D}_n et une c_{n+2} -valuation de D_n , l'arête (ab) est évaluée par $n + 3$, montrons que ça donne une c_{n+3} -valuation de W_n .

Conclusion

L'hypercube a suscité de nombreuses études engendrant une littérature très consistante aussi bien en mathématiques qu'en informatique. Grâce à sa structure, la motivation première de l'intérêt qui est porté sur l'hypercube est son utilisation dans de nombreux domaines.

Il demeure encore le centre d'intérêt de plusieurs travaux récents focalisés sur la manière de caractériser les graphes comme étant des sous-graphes de l'hypercube (problème de plongement). En effet, de nombreux efforts ont été consacrés pour déterminer des conditions (nécessaires et/ou suffisantes) selon lesquels un graphe G est un sous-graphe de l'hypercube, plus précisément l'étude du plongement d'arbres. Cette importance résulte de l'utilisation de ces arbres dans plusieurs domaines.

L'élément central de ce manuscrit est l'étude de classes spécifiques de graphes plongeables dans hypercube, sachant que tous les arbres sont plongeables dans l'hypercube, le problème consiste à trouver la plus petite dimension de celui ci dans lequel un arbre donné y est plongeable (on parle alors d'hypercube optimal). Ce problème a été traité par plusieurs auteurs tel que I.Havel, F.Harary, M.Laborde, ce qui a permis de caractériser certaines classes d'arbres.

Dans ce même contexte, dans un premier temps on s'est imprégné du sujet, entre autre

la compréhension du concept de plongement des graphes dans l'hypercube, la dimension cubique d'un graphe G , le concept de c_n - *valuation* qui est utilisé pour trouver les dimensions de certaines classes d'arbres; ce qui nous conduit à la rédaction d'un survey englobant de récents résultats traitant de ce sujet.

Tandis que dans la deuxième partie nous avons défini deux nouvelles classes d'arbres plongeables dans l'hypercube obtenus à partir de l'arbre binaire complet et pour les quelles nous avons donné la dimension.

Comme perspectives de ce travail, il serait intéressant de trouver la dimension cubique de l'arbre P_n , ainsi que d'étudier le plongement d'autres classes de graphes autres que les arbres, tels que le plongement de grilles, de graphes médians... et enfin donner des algorithmes de plongement de ces classes de graphes.

Bibliographie

- [1] P. Arbouz. Plongement de graphe dans l'hypercube, Prépublication n°4(1990). Institut de Mathématiques, USTHB.
- [2] P.Arbouz. Perfect matching graph, Pré Publication n°55(1990). Institut de Mathématiques, USTHB.
- [3] J. Arfati,C.H. Papadimitriou, and P. Papageorgiou. The complexity of the cubical graphs. Proceedings of 11th International Colloquium on Automata, Languages and Programming, (1984) 51-57.
- [4] S.P.Avann. Metric ternarydistributive semi-lattices,Proc.Amer.Math.soc.12 (1961) 407-414.
- [5] H.J.Bandelt and J.P.Barthelemy. Medians in median graphs, Discrete Appl .Math. 8(1984) 131-142.
- [6] H.J. Bandelt and H.M. Mulder. Infinite median graphs, (0,2)-graphs and hypercubes. Journal of graph theory, 7(1993) 487-492.
- [7] H.J.Bandelt. Retracts of hypercubes, J.Graph theory. 8(1984) 501-510.
- [8] C. Berge. Graphs and hypergraphs. Dunod, Paris, 1973.
- [9] A. Berrachedi. Sur quelques propriétés métriques du graphe de type hypercube. PhD thesis, Université des sciences et de la technologie Houari Boumediène, 1997.
- [10] A.Berrachedi, A new characterization of median graphs, Discrete Math. 128(1994) 386-387.
- [11] A.Berrachedi and M.Mollard .Median graphs, (0,2)-graphs and hypercubes, some new caractérisation. Discrete Math. 208 (1999) 71-75.

-
- [12] S. Bezrukov, B. Monien, W. Unger, and G. Wechsung. Embedding ladders and caterpillars into hypercube. *Discrete Applied Mathematics*, 83(1992) 21-29.
 - [13] A.J. Bondy and U.S.R. Murty. *Graph theory with applications*. Springer, 1976.
 - [14] G.Burosch, I.Havel, and J.M.Laborde. Distance monotone graphs and a new characterization of hypercubes. *Discrete Math.* 110(1992) 9-16.
 - [15] P.Van den Cruyce. A characterization of then-cube by convex subgraphs. *Discrete Math*, 41(1982) 109-110.
 - [16] D.Z.Djokovic. Distance-preserving subgraphs of hypercubes, *J.Comb.Theory, serie B*, 14(1973) 263-267.
 - [17] T.Dvorak, I.Havel, J.M.Laborde and M.Mollard. Spanning caterpillars of a hypercube. *Journal of graph theory*, 24(1997) 9-19.
 - [18] V.Firsov. On isometric embenddings of graph into a boolean cube. *Cybernetics1*(1965), 112-113.
 - [19] S.Foldes. A characterization of hypercubes. *Discrete Math*, 17(1977) 155-159.
 - [20] M.R.Garey and R.L.Graham. *Computers and Intractability - A guide to theory of NP-completeness*. W.M. Freeman and Company, 1979.
 - [21] F.Harary. Recent results and unsolved problems on hypercube theory, in *graph theory, combinatorics and applications*. 2(1991) 621-632.
 - [22] F.Harary and M.Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : double starlike trees. *Math. Comput. Modelling*, 2(1988) 216-217.
 - [23] F.Harary and M.Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube ii : Meshes. *Inter. Jour. Computer Math.* 24(1988) 20-24.
 - [24] F.Harary and M.Lewinter. The starlike trees which span a hypercube. *Comput. Math. Appl.* 15(1988) 299-302.
 - [25] F.Harary and M.Lewinter. Spanning subgraphs of a hypercube II : Survey and unsolved problems. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*, 2(1991) 633-637.
 - [26] F.Harary , M.Lewinter and W.Widolski. On two legged caterpillars wich span hypercube congr, 66(1988) 103-108.
 - [27] I.Havel and J.Moravek. B6valuations of graphs. *Cwech.Math. Journal*, 22(1972) 338-351.

-
- [28] I.Havel. On hamiltonian circuit and spanning trees of hypercubes. *Casopis pro .pestovani. Matematiky*, 109(1984).
- [29] I.Havel. Embedding certain trees into hypercube, in recent advances in graph theory. Academia, praha, (1994) 257-262.
- [30] I.Havel and P.Leibl. On legged caterpillars span hypercubes. *Journal of graph theory*, 10(1986) 69-77.
- [31] J.M.Laborde and S.P.Rao Hebbare. Another characterization of hypercubes. *Discrete Math*, 39(1982) 161-166.
- [32] C.T.Ho and Johnson. Embendding meshes in boolean cubes by graph decomposition. *Journal of parellel and Distributed Computing*, 8 (1990) 325-339.
- [33] K.Kabyl. Sur la dimension cubique de quelques classes d'arbres.Thèse de magistère. Institut de Mathematiques, USTHB, 2002.
- [34] M.Kobeissi. Plongement de graphes dans l'hypercube,thèse de doctorat, discipline informatique. Université Joseph fourier ,2001.
- [35] H.M.Mulder. The interval function of a graph. *Mathematical Centrum*, Amsterdam, 1980.
- [36] N.B.Limaye. 6- quasistars and n-cube. Technical report numero563, Institut IMAG, Saint Martin d'hères, France, 1986.
- [37] H.M.Mulder. $(0,\lambda)$ -graphs and n-cubes. *Discrete Math*, 28(1979) 179-188.
- [38] H.M.Mulder, The structure of median graphs, *Discrete Math*. 24(1978) 197-204.
- [39] H.M. Mulder and A.Schrijver. Median graphs and helly hypergraphs,*Discrete Math*. 25(1979), 41-50.
- [40] M.Mollard. Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de Hamming. PhD thesis, Université Joseph Fourier, 1999.
- [41] L.Nebesky. Median graphs,*Comment.Math.Univ.Corolinea*, 11(1970) 533-544.
- [42] L.Nebesky. Embedding m-auasistars into n-cubes. *Czechoslovak Mathematical Journal*, Praha,38(1988) 113.
- [43] L.Nebesky. On quasistars in n-cube. *Cas.Pest.mat*.109(1984) 153-156.
- [44] N.Nekri. Sur les problèmes de plongement dans l'hypercube. Thèse de magistère. Institut de Mathematiques, USTHB, 2000.

-
- [45] A.Wagner and D.G.Corneil. Embending trees in a hypercube is NP-Compleet. Siam j.Comput 19 (1990) 570-590.