

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de MATHEMATIQUES



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR EN SCIENCES**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : OUDRAR épouse ABCHICHE Djamila

Sujet

**Sur l'énumération de structures discrètes : une
approche par la théorie des relations**

Soutenue publiquement le 28/09/2015, devant le jury composé de :

M. Hacène BELBACHIR
M. Moncef ABBAS
M. Maurice POUZET

Professeur à l'U.S.T.H-B)
Professeur à l'U.S.T.H-B
Professeur à l'UCB-Lyon 1
(et à l'Univ. Calgary -Canada)

Président
Directeur de thèse
Co-Directeur de thèse

Melle. Isma BOUCHEMAKH
M. Youssef BOUDABBOUS
M. Bachir SADI
M. Nicolas Marc THIÉRY
M. Robert WOODROW

Professeur à l'U.S.T.H-B
Professeur à King Saud University
Maître de conférence/A à l'UMMTO
Professeur à l'Univ Paris Sud (France)
Professeur à l'Univ of Calgary (Canada)

Examinatrice
Examinateur
Examinateur
Examinateur
Invité

Remerciements

Ce travail n'aurait pas pu se faire sans le concours de beaucoup de personnes auxquelles je tiens à rendre un hommage mérité.

Tout d'abord, je dédie ce travail à mon mari Mourad, mes deux anges adorés Ghilès et Sara et toute ma famille, sans leurs sacrifices cette thèse n'aurait jamais vu le jour.

Je remercie vivement mon directeur de thèse Moncef ABBAS pour sa gentillesse, son aide, ses conseils et ses encouragements durant ces longues années de collaboration.

J'exprime toute ma reconnaissance et ma profonde gratitude à mon co-directeur de thèse Maurice POUZET pour m'avoir initiée à ce domaine, tellement passionnant qu'est la théorie des relations, pour son accueil chaleureux durant chacun de mes déplacements à Lyon, son aide, sa patience, sa disponibilité et pour m'avoir fait profiter de ses larges connaissances.

Un grand merci pour Hacène BELBACHIR pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse, pour sa gentillesse, ses conseils et son aide. Je lui suis reconnaissante de m'avoir intégrée dans son équipe de l'accord programme CMEP-TASSILI, ce qui m'a permis de bénéficier de nombreux stages à l'institut Camille Jordan de l'université Claude Bernard de Lyon, le personnel de cet institut qui a facilité mon travail, m'a accueillie et installée dans de bonnes conditions mérite tous mes remerciements. Je remercie par la même occasion le professeur Jean Gabriel LUQUE le responsable de cet accord du côté français pour avoir facilité mes déplacements et pour avoir répondu présent à chaque fois que je l'ai sollicité.

Mes vifs remerciements s'adressent aux autres membres de mon jury de thèse les professeurs Isma BOUCHEMAKH de l'USTHB, Youssef BOUDABBOUS de King Saud University (Arabie Saoudite), Bachir SADI de l'UMMTO, Nicolas Marc THIÉRY de l'Université de Paris Sud (France) et Robert WOODROW de l'Université de Calgary (Canada) pour avoir accepté de donner de leur temps si précieux pour examiner la présente thèse. Je suis particulièrement reconnaissante envers Nicolas Marc THIÉRY et Robert WOODROW pour leurs remarques et critiques qu'ils m'ont adressées et qui ont contribué à améliorer la rédaction de ce document.

Je n'oublierai pas de remercier mes collègues de la faculté de mathématiques et tous mes amis, certains ne sont plus à l'université, pour leur soutien, je ne pourrai pas tous les citer mais je suis sûre qu'ils se reconnaîtront. Qu'ils m'excusent de ne citer que les deux personnes avec lesquelles j'ai eu à partager et celle avec laquelle je partage encore le même bureau : Nacéra, Yamina et Karima. Merci pour l'ambiance chaleureuse qui y a toujours régné, je remercie en particulier Nacéra pour ses critiques et pour sa disponibilité.

Je ne vais pas terminer cette page sans exprimer ma reconnaissance aux responsables de la scolarité et du département de Recherche Opérationnelle pour m'avoir déchargée de certaines de mes obligations pédagogiques pour me permettre de mener à terme mon travail.

Table des matières

Remerciements	3
Introduction	9
1 Notions et outils de base	15
1.1 Relations binaires, ordres, graphes et ensembles ordonnés	15
1.1.1 Définitions et notations	15
1.1.2 Homomorphisme et isomorphisme	19
1.1.3 Constructions et propriétés des ensembles ordonnés	19
1.1.4 Eléments particuliers d'un ensemble ordonné	20
1.1.5 Sections initiales et idéaux d'un ensemble ordonné	21
1.1.6 Ordres bien fondés et ordres belordonnés	22
1.2 Structures relationnelles	25
1.2.1 Définitions et notations	25
1.2.2 Isomorphisme, abritement et équimorphisme	25
1.3 Classe héréditaire, âge, obstruction et borne	27
1.3.1 Classe héréditaire, classe filtrante	27
1.3.2 Âge	27
1.3.3 Borne et obstruction	28
1.3.4 Classes héréditaires et idéaux	28
1.3.5 Classes héréditairement belordonnées	29
1.4 Profil et fonction génératrice	31
1.4.1 Profil de classe héréditaire	31
1.4.2 Fonction génératrice	32
1.4.3 Comportement des profils des classes héréditaires	33
1.4.4 Profil d'une structure relationnelle	35
I Structures indécomposables et profil algébrique	39
2 Permutations et bichaines	41
2.1 Permutations	41
2.1.1 Ordre sur les permutations	42
2.1.2 Permutations simples et théorème d'Albert-Atkinson	46

2.1.3	Permutations séparables	48
2.2	Bichaînes	49
2.2.1	Bichaînes et permutations	50
2.2.2	Bichaîne indécomposable	51
2.2.3	Bichaîne séparable	53
3	Structures relationnelles binaires ordonnées	55
3.1	Indécomposabilité et somme lexicographique	55
3.1.1	Intervalle	55
3.1.2	Composition et réduction	57
3.1.3	Somme lexicographique et décomposition de 2-structures	58
3.1.4	Partition forte et théorème de décomposition	59
3.1.5	Classe héréditaire et structures indécomposables	62
3.1.6	Rôle du belordre	63
3.2	Structures binaires ordonnées	64
3.3	Classes algébriques et héréditairement algébriques	66
4	Exemple et conjecture	73
4.1	Exemple : les structures binaires ordonnées séparables	73
4.1.1	Indécomposabilité et structures séparables	74
4.1.2	Etude de la classe $\mathcal{S}_1$	75
4.1.3	Profil de $\mathcal{S}_k$ pour $k \geq 2$	80
4.2	Conjecture et questions	81
II	Minimalité	87
5	Notion de minimalité et âges de graphes infinis	89
5.1	Introduction	89
5.2	Classes minimales	90
5.2.1	Posets minimaux	90
5.2.2	Classes minimales de Ω_μ	90
5.3	Classe ind-minimale	91
5.3.1	Structures indécomposables minimales	99
5.4	Minimalité, presque inépuisabilité et belordre héréditaire	100
6	Exemples de classes minimales de graphes indécomposables	105
6.1	Introduction	105
6.2	Description des graphes	105
6.3	Le graphe G_0	109
6.3.1	Représentations des sous-graphes de G_0	109
6.3.2	Les indécomposables de $\text{Age}(G_0)$	111
6.3.3	Profil de l'âge de G_0	112
6.4	Le graphe G_1	114

6.4.1	Représentation des sous-graphes de G_1	114
6.4.2	Les indécomposables de $Age(G_1)$	118
6.4.3	Profil de l'âge de G_1	118
6.5	Le graphe G_2	122
6.6	Le graphe G_3	122
6.6.1	Représentation des sous-graphes de G_3	123
6.6.2	Les indécomposables de $Age(G_3)$	124
6.6.3	Profil de $Age(G_3)$	125
6.7	Le graphe G_4	126
6.7.1	Représentation des sous-graphes de G_4	126
6.7.2	Les indécomposables de $Age(G_4)$	127
6.7.3	Profil de $Age(G_4)$	128
6.8	Le graphe G_5	130
6.8.1	Représentation des sous-graphes de G_5	131
6.8.2	Les indécomposables de $Age(G_5)$	137
6.8.3	Profil de $Age(G_5)$	137
6.9	Le graphe G_6	139
6.9.1	Représentation des sous-graphes de G_6	139
6.9.2	Les indécomposables de $Age(G_6)$	141
6.9.3	Profil de $Age(G_6)$	142

III Décomposition monomorphe et profil 143

Introduction 145

7 Structures sans décomposition monomorphe finie 147

7.1	Enchaînabilité et monomorphie	147
7.1.1	Définitions et rappel de résultats	147
7.1.2	Généralisations	149
7.1.3	Cas binaire	149
7.1.4	Cas des structures relationnelles ordonnées	151
7.2	Décompositions d'une structure relationnelle en parties monomorphes	152
7.2.1	Décomposition fortement monomorphe	152
7.2.2	Décomposition monomorphe	154
7.2.3	Décomposition en intervalles Fraïssé monomorphes	156
7.2.4	Cas d'une structure ordonnée : décomposition en intervalles	160
7.2.5	Une relation d'équivalence pour la décomposition monomorphe	164
7.2.6	Hypomorphie et équivalence	166
7.2.7	Le rôle du belordre	167
7.2.8	Application au profil	170
7.3	Multi-enchaînabilité et structures invariantes	172
7.3.1	Presque multi-enchaînabilité	172

7.3.2	Structures invariantes	173
7.3.3	Une application	174
7.4	Une tentative de description des structures à profil polynomial	177
7.4.1	Structures cellulaires	177
7.4.2	Décomposition cellulaire	178
8	Cas des structures binaires	181
8.1	Introduction	181
8.2	La relation d'équivalence sur quelques exemples	181
8.2.1	Le cas des bichaînes	181
8.2.2	Le cas des graphes	182
8.2.3	Le cas des tournois	183
8.2.4	Le cas des graphes dirigés	186
8.2.5	Le cas des structures binaires	190
8.2.6	Le cas des structures binaires ordonnées	195
8.3	Structures binaires ayant une infinité de classes d'équivalence. Application au profil	198
8.3.1	Le cas des graphes. Preuve du Théorème 8.27	199
8.3.2	Graphes dirigés ordonnés. Preuve du Théorème 8.28	204
	Conclusion	221
	Annexe	223
A	Codage des structures séparables par des arbres binaires	223
A.1	Introduction	223
A.2	Structures binaires ordonnées séparables et arbres binaires	224
B	Les classes grille-géométriques	227
	Notations	231
	Bibliographie	235
	index	241

Introduction générale

Ce travail porte sur une fonction énumératrice : le *profil*. Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures combinatoires finies. Le *profil* de $\mathcal{C}$ est la fonction $\varphi_{\mathcal{C}}$ qui, à chaque entier n , associe le nombre de structures à n éléments appartenant à $\mathcal{C}$, celles-ci étant comptées à l'isomorphie près. La série génératrice de $\mathcal{C}$ est la fonction $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(X) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{\mathcal{C}}(n) X^n$. Cette fonction a des propriétés remarquables lorsque la classe $\mathcal{C}$ est héréditaire, c'est à dire qu'elle contient toutes les sous-structures de ses propres structures.

Le cadre théorique des profils est la théorie des relations. Soit n un entier non négatif, une *relation n -aire* sur un ensemble E est un sous-ensemble ρ de E^n , l'ensemble des n -uples d'éléments de E ; au besoin, ρ est identifiée à sa fonction caractéristique. L'entier n est l'*arité* de ρ et E est sa *base* ou son *domaine*. Une *structure relationnelle* est une paire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ formée de relations ρ_i d'arité n_i et de base E . La famille $\mu := (n_i)_{i \in I}$ est la *signature* de $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ est une structure relationnelle, l'*âge* de $\mathcal{R}$ est la collection $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ des restrictions finies de $\mathcal{R}$ considérées à l'isomorphie près. Un âge étant une classe héréditaire, le profil de $\mathcal{R}$ est le profil de son âge.

De très nombreux travaux portent sur le comportement des profils de classes héréditaires $\mathcal{C}$ de structures relationnelles finies. Beaucoup de résultats ont été obtenus, certains sont généraux, (Pouzet 1971, 1978 et 2006) voir [85], d'autres portent sur des structures relationnelles particulières telles que les graphes [16, 17], les tournois [15, 25] et les graphes ordonnés [13], pour plus de détails voir la synthèse de Klazar 2010 [60].

Les nombreux travaux sur l'énumération des classes héréditaires de permutations qui ont proliféré ces quinze dernières années, motivés par la conjecture de Stanley-Wilf, résolue par Marcus et Tardös (2004) [69], rentrent également dans le cadre de l'énumération des structures relationnelles finies. En effet, comme suggéré par P. J. Cameron (2002) [30], les permutations peuvent être vues comme des structures relationnelles particulières : les bichaînes (couple de deux ordres totaux définis sur un même ensemble).

Ce qui retient particulièrement l'attention dans les résultats de ces travaux est que les profils de ces classes sont loin d'être arbitraires, leurs taux de croissances comportent des sauts. Typiquement, la croissance du profil est soit polynomiale soit plus grande que tout polynôme ([81] pour les âges, [85] pour une synthèse). Pour certaines classes de structures, si le profil n'est pas polynomial, il est ou bien au moins exponentiel (exemple pour les tournois [15, 25], graphes ordonnés et hypergraphes [13, 14, 61] et les permutations [56]) ou bien au moins comme la croissance de la fonction partition d'entiers (exemple pour les graphes [17]). Pour plus de

détails, voir la synthèse de Klazar [60].

Ce travail comporte trois parties. Dans la première partie, nous explicitons le lien existant entre les bichaînes et les permutations et traduisons des résultats sur les permutations et les classes de permutations, en utilisant les concepts et les outils de la théorie des relations : abritement, belordre, belordre héréditaire, indécomposabilité,... En outre, nous illustrons le rôle du belordre et de l'indécomposabilité dans les résultats d'énumération.

Nous nous intéressons, en particulier, aux résultats d'Albert et Atkinson (2005) [2]. Ils ont montré qu'une classe héréditaire de permutations, contenant un nombre fini de permutations simples, est algébrique et ont calculé les fonctions génératrices de plusieurs classes héréditaires de permutations. Nous étendons leurs résultats aux classes de structures relationnelles binaires ordonnées (classes dont les structures sont formées d'un ensemble fini muni d'un ordre total et d'un nombre fini fixe de relations binaires) en montrant (Corollaire 3.29 et Théorème 3.33) que si une classe $\mathcal{C}$, formée de telles structures, est héréditaire, contient un nombre fini de structures indécomposables et est close par sommes alors elle est héréditairement algébrique (en ce sens que la fonction génératrice de toute sous-classe héréditaire est algébrique). Nous illustrons ce résultat en construisant une classe de structures binaires ordonnées dont les indécomposables sont de tailles au plus deux (Section 4.1) ; classe entièrement caractérisée par des bornes (structures minimales interdites) dans le cas des bi-relations ordonnées (structures formées d'un ordre total et d'une relation binaire définis sur un même ensemble). Cette classe est algébrique quelque soit le nombre, fini et fixe, de relations binaires qui composent ses structures. Ce résultat est signifiant dans le cas des bi-relations ordonnées et croise les récents travaux sur les d -permutations (suite de d permutations dont la première est l'identité) d'Asinowski et Mansour (2010) [12].

Nous ne savons pas encore s'il est possible d'étendre ce résultat au cas où la classe $\mathcal{C}$ contient un nombre infini de structures indécomposables mais nous pensons y parvenir en imposant des restrictions à la classe $\mathcal{I}$ des indécomposables de $\mathcal{C}$. Nous pensons et conjecturons qu'il suffit que $\mathcal{I}$ soit héréditaire (dans la classe des indécomposables), héréditairement belordonnée (en ce sens que la classe $\mathcal{I}.P$ des structures de $\mathcal{I}$ étiquetées par un ensemble ordonné P est belordonnée dès que P est belordonné) et héréditairement algébrique. Un exemple, vérifiant notre conjecture, est donné en prenant pour $\mathcal{I}$ la classe des bichaînes critiques de Schmerl et Trotter (1993) [100]. Imposer à $\mathcal{I}$ d'être belordonnée ne suffit pas. Pour illustrer ce fait, nous avons étudié quelques exemples d'âges de bichaînes infinies dont la classe des indécomposables est belordonnée mais non héréditairement belordonnée. L'âge obtenu est rationnel et belordonné, sa clôture par sommes est algébrique mais non héréditairement algébrique et non belordonnée.

Nous étendons également un des résultats d'Albert, Atkinson et Vatter (2010) [4], qui stipule qu'une classe héréditaire de permutations qui est héréditairement rationnelle est belordonnée, en affaiblissant l'hypothèse. Nous montrons que si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures est héréditairement algébrique alors elle est belordonnée.

Dans la deuxième partie, nous nous intéressons à la notion de *minimalité* [87]. Un ensemble ordonné est dit *minimal* s'il est infini et toute section initiale propre est finie. L'exemple le plus simple est celui de la chaîne des entiers naturels. Si nous considérons les structures finies,

une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de telles structures, considérées à l'isomorphie près, est dite *minimale* si elle est infinie et toute sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{C}$ est finie. Ces classes ont été, implicitement, caractérisées par Fraïssé et peuvent-être décrites : ce sont les âges de structures infinies enchaînables (une structure binaire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est dite *enchaînable* s'il existe un ordre linéaire, $\leq$, sur E tel que, pour tout $i \in I$, $x\rho_i y \Leftrightarrow x'\rho_i y'$ pour tous x, y, x', y' vérifiant $x \leq y \Leftrightarrow x' \leq y'$). Si la signature μ est finie, ces âges sont en nombre fini, chacun de ces âges n'a qu'un nombre fini de bornes, un résultat important dû à Frasnay (1965), et toute classe héréditaire de l'ensemble Ω_μ des structures relationnelles de signature μ , contient une sous-classe minimale. En particulier, si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire minimale de graphes non dirigés sans boucles, $\mathcal{C}$ est l'âge du graphe infini qui est complet ou vide. Cet âge est ainsi une chaîne pour l'abritement et son profil est donc constant et vaut 1.

Cette notion est particulièrement intéressante si $\mathcal{C}$ est formée de structures binaires indécomposables et est héréditaire (dans la classe des indécomposables). En effet, il existe une correspondance biunivoque entre les classes héréditaires minimales de structures binaires indécomposables et les classes héréditaires de structures binaires finies qui contiennent une infinité de structures indécomposables mais dont toute sous-classe héréditaire propre n'en contient qu'un nombre fini. Par exemple, à la classe des chemins finis correspond l'âge d'un chemin infini. Ces dernières classes sont dites *ind-minimale*.

Nous considérons des classes ind-minimales, c'est à dire des classes héréditaires de structures binaires finies dont les sous-ensembles d'indécomposables qu'elles contiennent sont minimaux (dans la classes des structures indécomposables), ou encore des classes contenant une infinité de structures indécomposables dont les sous-classes propres n'en contiennent qu'un nombre fini. Contrairement aux classes minimales, le profil d'une telle classe n'est pas nécessairement constant. Nous obtenons certains résultats généraux que nous affinons aux cas des graphes. Nous montrons en particulier que les classes ind-minimales sont les âges de structures indécomposables infinies, qu'elles sont belordonnées et que, contrairement aux classes minimales, elles sont en nombre continu-potent. Par exemple, en transformant les mots de Sturm en chemins dirigés, nous montrons qu'il y a un nombre continu-potent de classes ind-minimales formées de graphes dirigés.

Dans [93], plusieurs exemples de graphes indécomposables sans clique infinie ou indépendant (stable) infini sont donnés. Nous explorons leurs âges ainsi que ceux de huit autres graphes indécomposables ayant chacun une clique infinie et un indépendant infini. Nous déterminons les profils et les fonctions génératrices de ces âges et montrons qu'ils sont ind-minimaux.

Dans la troisième partie, nous présentons une approche structurelle de résultats de sauts dans le comportement des profils des classes héréditaires de structures finies. Nous partons du résultat de Kaiser et Klazar [56] qui stipule que le profil d'une classe héréditaire de permutations est soit borné supérieurement par un polynôme et dans ce cas c'est un polynôme, soit borné inférieurement par une exponentielle. Ce résultat a été généralisé au cas des graphes (non dirigés) ordonnés par Balogh, Bollobàs et Morris [14] qui montrent que la croissance des profils des classes héréditaires de graphes ordonnés présente le même saut : d'une croissance polynomiale à une croissance exponentielle. Dans cette partie, nous retrouvons, d'une nouvelle manière, le

résultat de Balogh et collaborateurs et nous l'étendons au cas des structures binaires ordonnées de signature finie. Pour se faire, nous utilisons une technique basée sur le théorème de Ramsey, donné en termes de structures invariantes et les notions de décomposition monomorphe due à Pouzet et Thiéry [92] et de presque multi-enchaînabilité due à Pouzet (voir [85]). La même technique a été utilisée dans [70] pour les bichaînes et [25] pour les tournois. Nous donnons, ci-dessous, un aperçu de la démarche suivie ainsi qu'un bref résumé des résultats obtenus.

Le point de départ est la notion de décomposition monomorphe due à Pouzet et Thiéry [92] : une *décomposition monomorphe* d'une structure relationnelle $\mathcal{R}$ est une partition de son domaine $V(\mathcal{R})$ en une famille de parties $(V_x)_{x \in X}$ telles que les restrictions de $\mathcal{R}$ à deux parties finies A et A' de $V(\mathcal{R})$ sont isomorphes pourvu que les traces $A \cap V_x$ et $A' \cap V_x$ aient même cardinalité pour tout $x \in X$. En imposant des conditions aux blocs (V_x) de la partition, nous donnons d'autres décompositions en parties monomorphes. Nous décrivons en tout quatre types de décompositions ; trois d'entre elles sont valables pour des structures relationnelles quelconques et une pour les structures ordonnées. Ces décompositions sont toutes équivalentes dans le sens où, si une structure relationnelle possède une décomposition d'un certain type ayant un nombre fini de blocs, alors elle possède une décomposition d'un autre type ayant un nombre fini de blocs. Nous étudions les relations existant entre ces différentes décompositions, puis nous décrivons une relation d'équivalence qui permet de retrouver la décomposition monomorphe et nous l'étudions sur des structures particulières (graphes non dirigés, tournois, graphes dirigés, bichaînes et structures binaires ordonnées).

Nous étudions les propriétés des structures ayant une décomposition monomorphe finie et des classes formées par ces structures. Nous montrons (Proposition 7.55 et Corollaire 7.56) que, si une structure relationnelle de signature finie possède une décomposition monomorphe ayant un nombre fini de blocs, alors son âge est héréditairement belordonné et a un nombre fini de bornes.

Nous considérons des classes héréditaires de structures relationnelles ordonnées. Celles telles que toute structure qu'elles contiennent possède une décomposition monomorphe finie ont, d'après [90, 92], des profils polynomialement bornés ; en général leurs profils sont des quasi-polynômes. Nous montrons (Théorème 7.62) que, dans le cas ordonné, les profils de ces classes sont en fait des polynômes.

Nous nous intéressons ensuite aux structures relationnelles ordonnées, de signature finie, qui ne possèdent pas de décomposition monomorphe finie. Nous montrons, en utilisant le théorème de Ramsey, que toute structure ordonnée qui ne possède pas de décomposition monomorphe finie abrite une structure presque multi-enchaînable dont la décomposition monomorphe n'est pas finie. Soit $\mathcal{D}_\mu$ la classe formée des structures ordonnées de signature μ finie qui ne possèdent pas de décomposition monomorphe finie ; alors $\mathcal{D}_\mu$ contient un ensemble fini $\mathfrak{A}$ formé de structures presque multi-enchaînables incomparables tel que toute structure de $\mathcal{D}_\mu$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$.

Nous montrons également (Lemme 7.59) que, si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ formée de structures relationnelles ordonnées finies de signature μ finie contient, pour tout entier ℓ , une structure finie qui ne possède pas de décomposition monomorphe ayant au plus ℓ blocs, alors elle contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$, ayant la même propriété, qui est minimale pour l'inclusion. La classe

$\mathcal{A}$ est l'âge d'une structure presque multi-enchaînable appartenant à l'ensemble $\mathfrak{A}$. Ceci nous conduit au théorème de dichotomie pour les classes de structures ordonnées (Théorème 7.70) : étant donnée une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles ordonnées finies, de signature μ finie, ou bien il existe une borne sur le nombre de composantes monomorphes de chaque membre de $\mathcal{C}$ et le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme, ou bien $\mathcal{C}$ contient l'âge d'une structure presque multi-enchaînable appartenant à l'ensemble fini $\mathfrak{A}$.

Nous pensons et conjecturons que, dans ce cas ordonné, les structures de l'ensemble $\mathfrak{A}$ ont des profils exponentiels et nous montrons que ce résultat est vrai dans le cas particulier où $\mathcal{D}_\mu$ est formé de structures binaires ordonnées. Ceci entraîne le résultat principal de cette partie, un résultat de dichotomie dans le cas particulier des structures binaires ordonnées, donné par le Théorème 8.29 : le profil d'une structure binaire ordonnée de type k (structure ayant k relations dont la première est un ordre total) est soit polynomial soit borné inférieurement par une exponentielle. Ce résultat s'étend aux classes héréditaires formées de telles structures. Il en résulte (Théorème 8.30) que si le profil d'une classe héréditaire de structures binaires ordonnées n'est pas borné par un polynôme, il est au moins exponentiel.

La preuve de ce résultat passe par la description, très précise, des structures de l'ensemble fini $\mathfrak{A}$ dans le cas où les structures sont des graphes dirigés ordonnés. Cet ensemble est formé de mille deux cent quarante six graphes dirigés ordonnés tel que tout graphe dirigé ordonné qui n'a pas de décomposition monomorphe fini abrite un élément de $\mathfrak{A}$. En outre, pour chaque $\mathcal{R} \in \mathfrak{A}$, le profil de l'âge $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$ est au moins exponentiel (le profil est borné inférieurement par la fonction de Fibonacci).

Les résultats de ces trois parties ont été exposés à différents colloques internationaux, DIMACOS11 (2011-Mohammadia-Maroc), ISOR11 (2011-USTHB) et JGA (2011-Lyon) pour les résultats de la première partie, RAMA08 (2012-Tipaza) pour ceux de la deuxième et ICGT (2014-Grenoble) pour ceux de la troisième. Les résultats de la première partie ont donné lieu à un article soumis et accepté pour publication au "journal of multiple-valued logic and soft computing (MVLSC)", ceux des deux autres parties feront l'objet de publications ultérieures.

La thèse est organisée en trois parties, huit chapitres et deux annexes. La première partie comprend les chapitres 2, 3 et 4, la deuxième comprend les chapitres 5 et 6 et la troisième les chapitres 7 et 8. Le chapitre 1 est consacré aux définitions et notions de base nécessaires à la compréhension du reste du document. L'annexe A complète un résultat donné dans la section 4.1.2. En effet, dans cette section, nous donnons la série génératrice de la classe $\mathcal{S}_1^{re}$ des structures binaires ordonnées séparables réflexives de type 1, il se trouve que cette série est la série génératrice de la classe des 3-permutations séparables et celle des partitions guillotine en dimension 4, la correspondance bijective entre ces deux classes a été établi dans [12]. Nous construisons, dans l'annexe A, une bijection entre les structures binaires ordonnées séparables réflexives de type 1 et les arbres binaires étiquetés par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ sachant que ces derniers sont en correspondance bijective avec les partitions guillotine en dimension 4 [1]. Ceci entraîne que l'ensemble $\mathcal{S}_1^{re}$ et l'ensemble des partitions guillotine en dimension 4 sont isomorphes. Cela entraîne également que $\mathcal{S}_1^{re}$ est isomorphe à l'ensemble des 3-permutations séparables.

Dans l'annexe B, nous faisons quelques rappels sur des classes de permutations particulières, à savoir les classes grille-géométriques dont les propriétés ont permis de montrer que la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques est héréditairement algébrique. Ainsi, cette classe de bichaînes vérifie notre conjecture pour les classes héréditaires de structures binaires ordonnées (Conjecture 1 en page 83).

En outre, pour faciliter la lecture du document et permettre de retrouver les différentes notations et définitions de concepts introduits, une table des notations est incluse en page 231 et un index à la fin du document.

Chapitre 1

Notions et outils de base

Dans ce chapitre, nous introduisons les notions et les objets de base nécessaires pour la compréhension du document. Il n'a pas la prétention d'être exhaustif. Les notions plus spécifiques aux différents chapitres sont introduites le moment opportun.

Bien que la terminologie utilisée soit, essentiellement, celle de Fraïssé [41], les références [40, 83, 85, 86, 103, 104, 107, 108] ont également été utilisées.

Nous utilisons les notations standards de la théorie des ensembles. Si E est un ensemble, $|E|$ désigne sa cardinalité. Si E est fini et $|E| = p$ nous disons que E est un p -ensemble. Si E est un p -ensemble, $F \subseteq E$ et $|F| = n$, nous disons que F est une n -partie de E . Nous notons $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E , $[E]^n$ l'ensemble des n -parties de l'ensemble E et E^n l'ensemble des n -uples d'éléments de E . Etant donné un entier $n \in \mathbb{N}^*$, nous notons par $[0, n[$ l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$ et par $[0, n]$ l'ensemble $\{0, \dots, n\}$.

1.1 Relations binaires, ordres, graphes et ensembles ordonnés

1.1.1 Définitions et notations

Soit E un ensemble. Une *relation binaire sur E* , est un ensemble ρ de couples de E . L'ensemble E est la *base* ou le *domaine* de ρ . Pour tout ensemble E , l'ensemble E^2 est une relation binaire, nous convenons que l'ensemble vide $\emptyset$ est également une relation binaire et si ρ est l'ensemble Δ_E des couples (x, x) pour x dans E alors ρ est la relation d'égalité sur E .

Etant donnée une relation binaire ρ de base E et deux éléments x et y de E , si $(x, y) \in \rho$ nous disons que x et y sont en relation et notons indifféremment $x\rho y$ ou $(x, y) \in \rho$, nous notons $x(\text{non}\rho)y$, $x\neg\rho y$ ou $(x, y) \notin \rho$ le fait contraire. Si ρ est une relation binaire sur E , sa relation *complémentaire* dans E est la relation $\rho^c := \{(x, y) \in E^2 : (x, y) \notin \rho\} = E^2 \setminus \rho$. Sa relation *inverse* ou *duale* est la relation binaire $\rho^{-1} := \{(x, y) \in E^2 : (y, x) \in \rho\}$. Une relation qui est égale à sa relation duale est dite *autoduale*.

Si ρ est une relation binaire sur E , une partie de ρ est une *sous-relation* de ρ et si A est une partie de E la *restriction* de ρ à A , dite également *relation induite par ρ sur A* , est la relation

$$\rho|_A := \rho \cap A^2.$$

Une relation binaire ρ sur un ensemble E est :

- *réflexive* si $x\rho x$ pour tout $x \in E$;
- *irréflexive* si $x\not\rho x$ pour tout $x \in E$;
- *symétrique* si $x\rho y$ implique $y\rho x$ pour tous $x, y \in E$;
- *antisymétrique* si $x\rho y$ et $y\rho x$ impliquent $x = y$ pour tous $x, y \in E$;
- *totale* si $x \neq y$ implique $x\rho y$ ou $y\rho x$ pour tous $x, y \in E$;
- *transitive* si $x\rho y$ et $y\rho z$ impliquent $x\rho z$ pour tous $x, y, z \in E$.

Nous appellerons relation *complète* toute relation ρ de base E qui est symétrique et totale, c'est à dire une relation pour laquelle $x\rho y$ et $y\rho x$ pour tous $x, y \in E$, $x \neq y$.

Graphe

Un *graphe dirigé*¹ est un couple $G := (V, \rho)$ formé d'un ensemble V et d'une relation binaire ρ sur V . L'ensemble V est souvent notée $V(G)$, ses éléments sont appelés *sommets* de G et sa cardinalité $|V|$ est appelée *ordre* de G . L'ensemble ρ , qui est une partie de V^2 , est noté $E(G)$ et ses éléments sont appelés *arcs* de G ; les couples (x, x) de ρ sont les *boucles* de G . L'inverse ou dual du graphe dirigé G est le graphe dirigé $G^{-1} := (V, \rho^{-1})$ et son complémentaire est $G^c := (V, \rho^c)$. Si $A \subseteq V$, alors la restriction de G à A , donnée par $G|_A := (A, \rho|_A)$ est le *sous-graphe dirigé induit* par G sur A .

Un *chemin* d'un graphe dirigé G est une suite $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de sommets distincts de $V(G)$ tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $(v_i, v_{i+1}) \in E(G)$. Si $(v_i, v_j) \notin E(G)$ pour tous i, j tels que $j \neq i+1$, ceci définit sur l'ensemble $\{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ une relation appelée la relation de *consécutivité*.

Un *tournoi* est un graphe dirigé $G := (V, \rho)$ pour lequel la relation ρ est irréflexive, antisymétrique et totale. Si ρ est, de plus, transitive, G est un *tournoi transitif* appelé aussi *tournoi acyclique*.

Un *graphe*² est un couple $G := (V, E)$ dans lequel E est une partie de $[V]^2$ dont les éléments sont appelés *arêtes* de G ; les sommets x et y de G sont dits *adjacents* si $\{x, y\}$ est une arête de G .

Nous pouvons identifier l'ensemble des paires E d'éléments de V à une relation binaire ρ irréflexive et symétrique. Ainsi $\{x, y\} \in E$ si et seulement si $(x, y) \in \rho$ et $(y, x) \in \rho$. Dans la suite, nous considérons que toute relation irréflexive et symétrique définie sur un ensemble V est un graphe et, inversement, tout graphe dont l'ensemble des sommets est V est une relation irréflexive et symétrique sur V .

Si $G := (V, E)$ est un graphe, son complémentaire est le graphe $G^c := (V, [V]^2 \setminus E)$ noté aussi $\overline{G}$.

1. *graphe simple orienté* dans la terminologie de Claude Berge [18].

2. *graphe simple non orienté sans boucle* dans la terminologie de C. Berge.

Un graphe G est *complet* si deux sommets distincts x, y de G sont toujours adjacents. Nous notons K_n le graphe complet à n sommets. Un graphe G est un *indépendant* si deux sommets x, y de G sont toujours non adjacents. Nous notons I_n l'indépendant à n sommets.

Soit un graphe G ; une partie A de $V(G)$ est une *clique* si le sous-graphe induit sur A est complet. A est un *stable* si deux sommets x, y de A sont toujours non adjacents, ou encore si le complémentaire du sous-graphe induit sur A est une clique.

Un *chemin*³ d'un graphe G est une suite $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ de sommets distincts de G tels que, pour tout $i \in \{1, \dots, k-1\}$, $v_i v_{i+1}$ est une arête de G . Les sommets v_1 et v_k sont les extrémités de P . La *longueur* d'un chemin est le nombre de ses arêtes. Ainsi la longueur de $P = (v_1, v_2, \dots, v_k)$ est $k-1$. Toute arête reliant deux sommets non consécutifs de P est appelée corde. Nous notons par P_n un chemin sans corde à n sommets.

Préordre

Une relation binaire ρ sur un ensemble E est un *préordre* si elle est réflexive et transitive. L'ensemble E muni d'un préordre est un *ensemble préordonné*, souvent appelé *qoset*, abréviation de l'appellation en anglais "*quasi-ordered set*". Dans ce cas, au lieu de $(x, y) \in \rho$ nous disons que x est plus petit que y et nous notons $x \leq y(\text{mod } \rho)$, ou que y est plus grand que x , noté $y \geq x(\text{mod } \rho)$, nous notons $x \not\leq y(\text{mod } \rho)$ le fait contraire (ou $y \not\geq x(\text{mod } \rho)$). Deux éléments distincts x et y de E sont dits *comparables* par ρ si $x \leq y(\text{mod } \rho)$ ou $y \leq x(\text{mod } \rho)$, dans le cas contraire ils sont dits *incomparables*, fait noté $x \parallel_\rho y$. Nous disons que x est strictement plus petit que y et notons $x < y$ si $x \leq y(\text{mod } \rho)$ et $y \not\leq x(\text{mod } \rho)$. Nous disons que x est *couvert* par y lorsque $x < y(\text{mod } \rho)$ et il n'existe aucun élément z de E tel que $x < z(\text{mod } \rho)$ et $z < y(\text{mod } \rho)$. Si ρ est un préordre sur E , la relation duale ρ^{-1} et la restriction ρ_A à n'importe quelle partie A de E sont également des préordres sur E . Deux variétés particulières de préordres sont les équivalences et les ordres.

Une *relation d'équivalence* ρ sur E est un préordre symétrique. Au lieu de $(x, y) \in \rho$ nous disons que x est équivalent à y , noté $x \equiv y(\text{mod } \rho)$, nous notons $x \not\equiv y(\text{mod } \rho)$ le fait contraire. Si ρ est une relation d'équivalence sur V alors pour chaque $x \in E$, l'ensemble $\bar{x} := \{y \in E, x \equiv y(\text{mod } \rho)\}$ est la classe (d'équivalence) de x . L'ensemble des classes d'équivalence, noté E/ρ , est appelé le *quotient* de E par la relation d'équivalence ρ . L'application φ qui à chaque $x \in E$, associe $\bar{x}$ est la *surjection canonique* de E sur E/ρ . Si $X \in E/\rho$, tout élément de $\varphi^{-1}(X)$ est appelé un *représentant* de X dans E .

Si ρ est une relation d'équivalence sur E alors E/ρ est une partition de E . Nous rappelons qu'une partition d'un ensemble non vide E est une famille $\mathcal{P}$ de sous-ensembles non vides $P \subseteq E$, deux à deux disjoints de E telle que $\bigcup_{P \in \mathcal{P}} P = E$.

Réciproquement, à toute partition $\mathcal{A} := (A_j)_{j \in J}$ de E correspond une unique relation d'équivalence ρ sur E telle que $\mathcal{A} = E/\rho$.

Un *ordre partiel*, ou simplement un *ordre* ρ sur E , est un préordre antisymétrique; l'ensemble

3. *chaîne élémentaire* dans la terminologie de C. Berge.

E muni de cet ordre ρ est un *ensemble ordonné*, souvent appelé *poset* en anglais, une abréviation de “*partially ordered set*”. Lorsqu’il n’y a pas de confusion, nous ne ferons pas de différence entre ordre et ensemble ordonné en utilisant la lettre, disons P , pour désigner les deux.

Si ρ est un ordre sur E , il y va de même de sa relation inverse ρ^{-1} et de sa restriction ρ_A à n’importe quelle partie A de E . Nous désignons souvent une relation d’ordre par le symbole “ $\leq_\rho$ ” ou simplement par “ $\leq$ ” s’il n’y a pas risque de confusion.

Exemples d’ensembles ordonnés. - Considérons un ensemble A , tout sous-ensemble de $\mathcal{P}(A)$ est partiellement ordonné par inclusion.

– La relation ρ définie sur $\mathbb{N}$ (ensemble des entiers ≥ 0 ou entiers naturels) par : $x\rho y$ si et seulement si x divise y pour tous $x, y \in \mathbb{N}$ est un ordre partiel.

Une relation d’ordre $\leq$ sur E est un ordre *total* ou *linéaire*, si deux éléments de E sont toujours comparables ; c’est à dire que $\leq$ vérifie la condition :

$$x \leq y \text{ ou } y \leq x \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Dans ce cas, les éléments de E sont usuellement représentés sur une ligne (horizontale ou verticale), d’où le mot “linéaire”. L’ensemble E muni de cet ordre linéaire est appelé *chaîne*.

Exemple. La chaîne naturelle ω de base $\mathbb{N}$ définie avec les comparaisons usuelles (l’ordre naturel sur $\mathbb{N}$) est un exemple fondamental de chaînes infinies.

La relation d’égalité sur E est une relation d’ordre sur E . L’ensemble E muni de cet ordre est une *antichaîne*.

Tout ordre sur un singleton est à la fois une chaîne et une antichaîne, il est trivial.

Soit $\leq$ une relation d’ordre sur un ensemble E . La relation binaire $<$ sur E définie par $x < y$ (ou de manière équivalente $y > x$) si et seulement si $x \leq y$ mais $x \not\leq y$ qui se lit *x strictement inférieur à y* ou *y strictement supérieur à x* , est un *ordre strict* (l’ordre strict associé à $\leq$). La relation $<$ n’est pas une relation d’ordre, c’est une relation irréflexive antisymétrique et transitive. Plus clairement, si ρ est une relation d’ordre sur E , la relation $\delta := \rho \setminus \Delta_E$, où $\Delta_E := \{(x, x), x \in E\}$, est l’ordre strict associé à ρ . Réciproquement, si δ est un ordre strict sur un ensemble E , alors elle est antisymétrique et la relation $\rho := \delta \cup \Delta_E$ est un ordre sur E . Si $\leq$ est un ordre total sur E alors l’ordre strict $<$ sur E est un tournoi transitif. Réciproquement, à tout tournoi transitif correspond un ordre total.

Etant donné un ensemble ordonné $(E, \leq)$, nous pouvons lui associer une représentation sur le plan où les éléments de l’ensemble fini E sont représentés par des points tels que si x est couvert par y dans E alors le point représentant x se trouve en “bas” du point représentant y , ces deux points étant reliés par un trait ou un segment. Les boucles ne sont pas représentées ainsi que les relations pouvant se déduire par transitivité. Cette représentation est appelée *diagramme de Hasse*.

1.1.2 Homomorphisme et isomorphisme

Soient ρ et ρ' deux relations binaires de base E et E' respectivement. Une application f de E dans E' est un *homomorphisme* de (E, ρ) dans (E', ρ') si pour tous $x, y \in E$:

$$(x, y) \in \rho \Rightarrow (f(x), f(y)) \in \rho'.$$

Si $E = E'$ et $\rho = \rho'$ l'homomorphisme f est un *endomorphisme*. L'application identité $1_E : E \rightarrow E$ est un endomorphisme.

Dans le cas où (E, ρ) et (E', ρ') sont deux ensembles ordonnés, un homomorphisme de (E, ρ) sur (E', ρ') est appelé *application croissante*. Soient ρ, ρ' et ρ'' des relations binaires sur E, E' et E'' respectivement. Si $f : E \rightarrow E'$ et $g : E' \rightarrow E''$ sont deux homomorphismes alors leur composé $g \circ f : E \rightarrow E''$ est un homomorphisme.

Soient ρ et ρ' deux relations binaires de base E et E' respectivement. Une application f de E dans E' est un *isomorphisme* si

1. f est bijective,
2. $(x, y) \in \rho$ si et seulement si $(f(x), f(y)) \in \rho'$ pour tous $x, y \in E$.

Donc un homomorphisme bijectif de (E, ρ) dans (E', ρ') est un isomorphisme de (E, ρ) sur (E', ρ') si sa bijection réciproque est un homomorphisme de (E', ρ') dans (E, ρ) .

Soient P et Q deux ensembles ordonnés. Une application $f : P \rightarrow Q$ est un *isomorphisme* si et seulement si elle est croissante, bijective et son inverse est croissante.

Il est à noter que l'inverse d'une application croissante bijective de P sur Q n'est pas forcément croissante, elle l'est toutefois si ou bien P est une chaîne ou bien $P = Q$ et P fini.

Une application $f : P \rightarrow Q$ est un *plongement* si et seulement si

1. f est injective,
2. $x \leq y$ dans P si et seulement si $f(x) \leq f(y)$ dans Q pour tous $x, y \in P$.

Donc une application f est un plongement de P dans Q si et seulement si f est un isomorphisme de P sur une restriction de Q .

1.1.3 Constructions et propriétés des ensembles ordonnés

Ensemble ordonné et graphe

Soit $P := (E, \leq)$ un ordre ou ensemble ordonné. Le *graphe de comparabilité* de P est le graphe, noté $Comp(P)$, ayant pour sommets les éléments de l'ensemble E et pour arêtes les paires d'éléments distincts de E qui sont comparables par $\leq$. Le *graphe d'incomparabilité* de P , noté $Incomp(P)$ est le complémentaire de $Comp(P)$, il a pour arêtes les paires d'éléments incomparables de P . Ainsi, si P est un ensemble ordonné, les cliques et les stables de $Comp(P)$ sont respectivement les chaînes et les antichaînes de P . De même, les cliques et les stables de $Incomp(P)$ sont respectivement les antichaînes et les chaînes de P .

Somme directe, somme ordinale et produit d'ensembles ordonnés

Soient P et Q deux ensembles ordonnés, nous supposons leurs ensembles de sommets disjoints. La *somme directe* de P et Q , notée $P \oplus Q$, est l'ensemble ordonné défini sur la réunion des deux ensembles de sommets $P \cup Q$ de la manière suivante :

$$x \leq_{P \oplus Q} y \text{ si } ((x, y \in P \text{ et } x \leq_P y) \text{ ou bien } (x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y)).$$

La somme directe $P \oplus Q$ se représente par les deux diagrammes de Hasse de P et Q placés l'un à côté de l'autre sans aucune relation entre les sommets des deux ordres.

La *somme ordinale* ou *somme lexicographique* de P et Q , notée $P + Q$, est l'ordre défini sur la réunion des deux ensembles de sommets par (voir FIGURE 1.1) :

$$x \leq_{P+Q} y \text{ si } ((x, y \in P \text{ et } x \leq_P y) \text{ ou bien } (x, y \in Q \text{ et } x \leq_Q y) \text{ ou bien } (x \in P \text{ et } y \in Q)).$$

Le *produit direct* de P et Q , noté $P \times Q$, est l'ordre défini sur le produit $P \times Q$ des deux ensembles de sommets par :

$$(x, y) \leq_{P \times Q} (x', y') \text{ si } x \leq_P x' \text{ et } y \leq_Q y'.$$

En particulier, si $(P_i)_{1 \leq i \leq n}$ est une suite finie d'ensembles ordonnés, le produit direct de ces ensembles est l'ensemble $\prod_{1 \leq i \leq n} P_i$ muni de l'ordre produit donné par : $(x_1, \dots, x_n) \leq (y_1, \dots, y_n)$

dans $\prod_{i=1}^n P_i$ si et seulement si $x_i \leq y_i$ dans P_i pour tout $1 \leq i \leq n$.

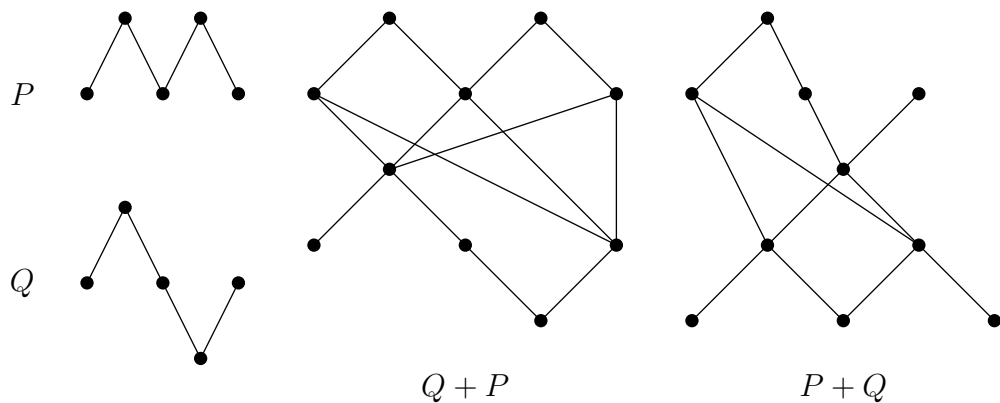


FIGURE 1.1 – Diagramme de Hasse de la somme ordinale de deux ordres

1.1.4 Éléments particuliers d'un ensemble ordonné

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble ordonné. Un élément x de $\mathcal{P}$ est *minimal* (respectivement *maximal*) dans $\mathcal{P}$ s'il n'existe pas d'élément qui lui est strictement inférieur (respectivement strictement

supérieur), c'est à dire si $y \in \mathcal{P}$ tel que $y \leq x$ (respectivement $y \geq x$) implique $y = x$. L'élément x est le *plus petit élément* ou le *minimum* (respectivement le *plus grand élément* ou le *maximum*) de $\mathcal{P}$ si $y \geq x$ (respectivement $y \leq x$) pour tout y dans $\mathcal{P}$.

Etant donné un ensemble ordonné $\mathcal{P}$, il n'existe pas forcément un plus grand élément (resp. un plus petit élément) de $\mathcal{P}$.

Théorème 1.1. *Si un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est fini et non vide il contient au moins un élément maximal et un élément minimal.*

Dans le cas infini, ce théorème n'est pas toujours vrai.

Soient $\mathcal{P}$ un ensemble ordonné, A une partie de $\mathcal{P}$ et m un élément de $\mathcal{P}$. Nous disons que m minore (resp. majore) A si $m \leq a$ (resp. $a \leq m$) pour tout $a \in A$. Nous noterons A^- (resp. A^+) l'ensemble des éléments de $\mathcal{P}$ qui minorent (resp. majorent) A .

Lorsque A^- (resp. A^+) possède un plus grand élément (resp. un plus petit élément) nous l'appelons la *borne inférieure* (resp. la *borne supérieure*) de A , nous la notons $\inf A$ ou $\bigwedge A$ (resp. $\sup A$ ou $\bigvee A$).

L'ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est dit *inductif* si toute chaîne non vide de $\mathcal{P}$ possède un majorant. Dans ce cas, le *lemme de Zorn* garantit l'existence d'un élément maximal. La validité du lemme de Zorn est équivalente à l'axiome du choix.

Lemme de Zorn : *Tout ensemble inductif possède au moins un élément maximal.*

Un *treillis* ("lattice" en anglais) est un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ dont toute paire d'éléments (et donc toute partie finie) admet une borne supérieure et une borne inférieure. Si toute partie de $\mathcal{P}$ possède une borne inférieure et une borne supérieure, c'est un *treillis complet* ("complete lattice"). Si $\mathcal{P}$ est un treillis (resp. treillis complet), une partie T de $\mathcal{P}$ vérifiant $\bigvee \{a, b\} \in T$ et $\bigwedge \{a, b\} \in T$ pour tous $a, b \in T$ est un *sous-treillis* (resp. sous-treillis complet) de $\mathcal{P}$.

1.1.5 Sections initiales et idéaux d'un ensemble ordonné

Soit $\mathcal{P}$ un ensemble ordonné. Une *section initiale* (dite aussi *segment initial*) est toute partie I de $\mathcal{P}$ telle que :

$$x \in I \text{ et } y \leq x \text{ impliquent } y \in I.$$

Nous noterons $\underline{I}(\mathcal{P})$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des sections initiales de $\mathcal{P}$. L'ensemble $\mathcal{P}$ et l'ensemble vide $\emptyset$, sont des sections initiales de $\mathcal{P}$. L'intersection et la réunion d'une famille quelconque de sections initiales sont des sections initiales.

Le complémentaire d'une section initiale est appelé *section finale*, c'est toute partie F de $\mathcal{P}$ vérifiant :

$$x \in F \text{ et } x \leq y \text{ impliquent } y \in F.$$

Nous noterons $\underline{F}(\mathcal{P})$ l'ensemble, ordonné par inclusion, des sections finales de $\mathcal{P}$.

Etant donnée une partie A de $\mathcal{P}$, l'ensemble

$$\downarrow A := \{x \in \mathcal{P} : x \leq y \text{ pour au moins un } y \in A\} = \bigcup_{a \in A} \{a\}^-$$

(respectivement $\uparrow A := \{x \in \mathcal{P} : x \geq y \text{ pour au moins un } y \in A\} = \bigcup_{a \in A} \{a\}^+$) est la plus petite section initiale (respectivement section finale) contenant A . Cette section est *engendrée* par A . Une section initiale ou finale est dite *finiment engendrée* lorsqu'elle est engendrée par une partie A finie. Si la partie A est un singleton, disons $A = \{a\}$, nous notons $\downarrow a$ au lieu de $\downarrow A$ ce segment initial et nous disons qu'il est *principal*.

Si une section initiale I est finiment engendrée alors elle est engendrée par ses éléments maximaux.

Partie filtrante et idéal d'un ensemble ordonné

Une partie A d'un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est dite *filtrante supérieurement* si deux éléments quelconques x et y de A admettent toujours un majorant commun dans A (c'est à dire qu'il existe un z dans A tel que $x \leq z$ et $y \leq z$).

Un *idéal* J de $\mathcal{P}$ est une section initiale non vide de $\mathcal{P}$ qui est filtrante supérieurement. Par exemple, tout segment initial non vide d'une chaîne est un idéal, ou encore tout segment initial engendré par un singleton $\{a\}$, $a \in \mathcal{P}$.

Nous rappelons les propriétés suivantes d'un ensemble ordonné $\mathcal{P}$:

- Propriétés 1.2.**
1. Une section initiale J de $\mathcal{P}$ est un idéal si et seulement si $J \neq \emptyset$ et, pour toutes sections initiales I_1 et I_2 , si $J = I_1 \cup I_2$ alors $J = I_1$ ou $J = I_2$ (ou, ce qui revient au même, si $J \subseteq I_1 \cup I_2$ alors $J \subseteq I_1$ ou $J \subseteq I_2$).
 2. Une union d'un ensemble totalement ordonné pour l'inclusion, ou simplement filtrant pour l'inclusion, d'idéaux est un idéal.
 3. Tout idéal J de $\mathcal{P}$ est contenu dans un idéal maximal (pour l'inclusion) de $\mathcal{P}$.

1.1.6 Ordres bien fondés et ordres belordonnés

Un ordre P sur E est un *bonordre* et E est *bien ordonné* si toute partie non vide de E a un minimum pour P . Toute chaîne finie est un bonordre. L'ordre naturel sur $\mathbb{N}$ est un bonordre, par contre son ordre dual n'est pas un bonordre.

Ordres bien fondés

Un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est *bien fondé* si toute partie non vide A de $\mathcal{P}$ a au moins un élément minimal. Il revient au même de dire qu'il n'existe pas de suite infinie strictement décroissante d'éléments de $\mathcal{P}$, soit $x_0 > x_1 > \dots > x_n > \dots$. Notons qu'une chaîne bien fondée est un bonordre. Tout ordre fini est bien fondé et toute restriction d'un ordre bien fondé est bien fondé.

Cette notion étend aux ensembles ordonnés la notion de bonordre.

Décomposition en niveaux d'un ensemble ordonné

Etant donné un ensemble ordonné bien fondé $\mathcal{P}$, posons $\text{Min}(\mathcal{P}) := \{a \in \mathcal{P} : a \text{ minimal dans } \mathcal{P}\}$. Posons également $P_0 := \text{Min}(\mathcal{P})$, $P_1 := \text{Min}(\mathcal{P} \setminus P_0)$, $P_i := \text{Min}(\mathcal{P} \setminus \bigcup_{j < i} P_j)$. Les sous-ensembles P_i sont des antichaînes et sont deux à deux disjoints. Ces ensembles sont appelés *niveaux*. Par exemple, si $\mathcal{P}$ est une chaîne, chaque niveau est réduit à un élément. Si $\mathcal{P}$ est fini, alors il existe un entier m tel que $P_m = \emptyset$. Le plus petit entier m vérifiant ceci est la *hauteur* de $\mathcal{P}$, notée $h(\mathcal{P})$. Exemple, si $\mathcal{P}$ est une chaîne à m éléments, la hauteur de $\mathcal{P}$ est $h(\mathcal{P}) = m$.

Nous pouvons définir la hauteur de $\mathcal{P}$ en utilisant l'ensemble des chaînes de $\mathcal{P}$. En effet, l'ensemble des chaînes de $\mathcal{P}$ est partiellement ordonné par inclusion et ses éléments maximaux sont appelés *chaînes maximales*. Si $\mathcal{P}$ est fini, la hauteur de $\mathcal{P}$ est le maximum du nombre d'éléments des chaînes de $\mathcal{P}$.

Ordres belordonnés

Un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est *belordonné* (en anglais *well-quasi-ordered*, ou *wqo*), si toute partie non vide A de $\mathcal{P}$ contient un nombre fini, non nul, d'éléments minimaux. Par exemple, tout ensemble fini est belordonné, tout bonordre est un belordre et toute restriction d'un belordre est un belordre.

La notion de belordre permet d'étendre à des ensembles ordonnés infinis les propriétés des ensembles ordonnés finis.

Principaux résultats et propriétés

Le théorème suivant, dû à Higman 1952 [53] (voir aussi [41]) donne des conditions équivalentes d'un belordre.

Théorème 1.3. *Soit $\mathcal{P}$ un ensemble ordonné. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\mathcal{P}$ est belordonné ;
- (ii) $\mathcal{P}$ est bien fondé sans antichaîne infinie ;
- (iii) Toute suite infinie $x_0, \dots, x_n, \dots$, d'éléments de $\mathcal{P}$, contient une sous suite infinie croissante $x_{i_0} \leq x_{i_1} \leq \dots x_{i_n} \leq \dots$;
- (iv) Toute suite infinie $x_0, \dots, x_n, \dots$, d'éléments de $\mathcal{P}$, contient un "couple" croissant $x_i \leq x_j$ avec $i < j$;
- (v) Toute section finale de $\mathcal{P}$ est finiment engendrée ;
- (vi) L'ensemble $\underline{F}(\mathcal{P})$ des sections finales de $\mathcal{P}$ muni de l'ordre opposé de l'inclusion est bien fondé ;
- (vii) L'ensemble $\underline{I}(\mathcal{P})$ des sections initiales de $\mathcal{P}$ muni de l'ordre d'inclusion est bien fondé.

Proposition 1.4. *Soit P un ensemble ordonné. Si $P = A \cup B$ alors P est belordonné dès que A et B le sont.*

Voici quelques propriétés du belordre :

Propriétés 1.5. 1) Soient P et Q deux ensembles ordonnés et f une application de P dans Q .

a) Si f est un plongement et Q un belordre alors P est un belordre.

b) Si f est croissante et surjective et P un belordre alors Q est un belordre.

2) Si deux ordres P et Q sont belordonnés, il en est de même pour leur somme directe $P \oplus Q$ et leur produit direct $P \times Q$.

Corollaire 1.6. Soit $(P_i)_{i=0,\dots,n-1}$ une suite finie d'ensembles ordonnés, le produit $\prod_{i=0}^{n-1} P_i$ muni de l'ordre produit est belordonné si et seulement si chaque P_i est belordonné. En particulier, si P est belordonné alors P^k est belordonné pour tout entier k .

Théorème d'Higman

Soit E un ensemble. Un *mot* fini sur E est une suite finie $u = a_0 a_1 \cdots a_{k-1}$ d'éléments de E . Soit E^* l'ensemble des mots finis sur E . L'ensemble E étant ordonné, ordonnons E^* ainsi : étant donnés deux éléments $x = (x_i)_{i=0,\dots,n-1}$ et $y = (y_i)_{i=0,\dots,m-1}$ de E^* , notons $x \leq^* y$ lorsqu'il existe une injection croissante $h : [0, n[\rightarrow [0, m[$ telle que pour tout $i = 0, \dots, n-1$ on ait $x_i \leq y_{h(i)}$. Cet ordre s'appelle l'ordre de Higman.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 1.7. (Higman 52)

E^* muni de l'ordre $\leq^*$ est belordonné si et seulement si E est belordonné.

Nous rappelons également cette autre propriété, due à Erdős et Tarski (43),

Théorème 1.8. Erdős-Tarski (1943).

Un ensemble belordonné est une union finie d'idéaux.

Théorème de Ramsey

Nous rappelons également le théorème de partition de Ramsey qui est d'un usage fréquent dans l'étude du belordre ;

Théorème 1.9. Les paires d'entiers étant réparties en deux classes disjointes, il existe une partie infinie d'entiers dont toutes les paires sont contenues dans une même classe.

Ce théorème se généralise au cas de sous-ensemble à m éléments répartis en k classes disjointes :

Théorème 1.10. Les parties à m éléments de l'ensemble des entiers étant réparties en k (k fini), classes disjointes (ces classes sont également appelées des couleurs), il existe une partie E infinie d'entiers telle que tous les sous-ensembles à m éléments de E ont la même couleur.

Le théorème de partition de Ramsey remonte à 1930, il a inspiré toute une théorie que l'on appelle "théorie de Ramsey". Pour plus de détails sur cette théorie voir par exemple [52, 63].

1.2 Structures relationnelles

1.2.1 Définitions et notations

Soit n un entier positif. Une *relation n -aire* sur un ensemble E est un sous-ensemble ρ de E^n . L'ensemble E est la *base* ou le *domaine* de ρ , noté aussi $\text{dom}(\rho)$. L'entier n est appelé l'*arité* de ρ . Si $n = 1, 2, 3$ la relation ρ est dite relation *unaire*, *binaire*, *ternaire*. Pour tout ensemble E et tout entier positif n , l'ensemble E^n est une relation n -aire ; l'ensemble vide $\emptyset$ est également une relation n -aire, appelée *relation vide*. Etant donnée une relation n -aire ρ sur l'ensemble E , sa relation *complémentaire* ρ^c est la relation $\rho^c := E^n \setminus \rho$, sa *fonction caractéristique* est l'application $f_\rho : E^n \rightarrow \{0, 1\}$ telle que $\rho := f_\rho^{-1}(\{1\})$. Au besoin, la relation ρ est identifiée à sa fonction caractéristique.

Une *structure relationnelle* est une paire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ formée d'un ensemble E , appelé *base* ou *domaine* de $\mathcal{R}$ et d'une famille $(\rho_i)_{i \in I}$ de relations n_i -aires ρ_i sur E . Chaque relation ρ_i est appelée *composante* de la structure relationnelle $\mathcal{R}$. La famille $\mu := (n_i)_{i \in I}$ est appelée *signature* de $\mathcal{R}$. La structure relationnelle $\mathcal{R}$ étant donnée, nous noterons $V(\mathcal{R})$ son domaine.

Toute relation ρ sur un ensemble E donne lieu à une structure relationnelle $\mathcal{R} := (E, \rho)$. Si $|I| = 2, 3, 4$ la structure $\mathcal{R}$ est appelée, respectivement, *birelation*, *trirelation*, *quadrirelation*. Quand I est fini nous disons plutôt que $\mathcal{R}$ est une *multirelation*. Nous désignons par Ω_μ la classe des structures relationnelles finies de signature μ .

Une structure relationnelle $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est *ordonnée* si une de ses relations ρ_i est un ordre linéaire ; nous conviendrons alors que c'est la première relation ρ_1 . Autrement dit, une structure relationnelle est ordonnée si elle s'écrit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_j)_{j \in J})$ où " $\leq$ " est un ordre linéaire sur E et les ρ_j sont des relations n_j -aire sur E .

Comme exemples de structures ordonnées nous avons les chaînes ($J = \emptyset$), les multichaînes (J fini et ρ_j est une chaîne pour tout $j \in J$) et les graphes ordonnés ($|J| = 1$ et ρ_j est une relation binaire).

Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle de signature $\mu := (n_i)_{i \in I}$. La *sous-structure induite* par $\mathcal{R}$ sur un sous-ensemble A de E , appelée simplement *restriction* de $\mathcal{R}$ à A , est la structure relationnelle $\mathcal{R}_{\upharpoonright A} := (A, (\rho_i|_A)_{i \in I})$ où $\rho_i|_A := \rho_i \cap A^{n_i}$. Elle est parfois notée $\mathcal{R}_A$ et, si $x \in E$, la restriction de $\mathcal{R}$ à $E \setminus \{x\}$ est notée $\mathcal{R}_{-x}$. Si $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est une restriction de $\mathcal{R}$ alors $\mathcal{R}$ est une *extension* de $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$.

1.2.2 Isomorphisme, abritement et équimorphisme

Soient $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ et $\mathcal{R}' := (E', (\rho'_i)_{i \in I})$ deux structures relationnelles de même signature $\mu := (n_i)_{i \in I}$.

Une application $f : E \rightarrow E'$ est un *isomorphisme* de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$ si

1. f est bijective,

2. $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in \rho_i$ si et seulement si $(f(x_1), \dots, f(x_{n_i})) \in \rho'_i$ pour tout $(x_1, \dots, x_{n_i}) \in E^{n_i}$, $i \in I$.

Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont égales le mot isomorphisme est remplacé par *automorphisme*.

La structure relationnelle $\mathcal{R}$ est *isomorphe* à $\mathcal{R}'$ et nous notons $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$, s'il existe un isomorphisme de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$. A toute structure relationnelle $\mathcal{R}$, nous pouvons associer un *type d'isomorphie* $\tau(\mathcal{R})$, de telle sorte que $\mathcal{R} \cong \mathcal{R}'$ si et seulement si $\tau(\mathcal{R}) = \tau(\mathcal{R}')$. Si $|\text{dom}(\mathcal{R})| = n$, $\tau(\mathcal{R})$ peut-être considéré comme la structure relationnelle isomorphe à $\mathcal{R}$ et définie sur l'ensemble $\{0, \dots, n-1\}$.

La collection des types d'isomorphie des structures relationnelles finies de signature μ (c'est à dire des relations de Ω_μ) est un ensemble que nous notons T_μ .

Une application f d'un sous-ensemble A de E sur un sous-ensemble A' de E' est un *isomorphisme local* ou un *abritement local* de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ si f est un isomorphisme de $\mathcal{R}|_A$ sur $\mathcal{R}'|_{A'}$. Dans ce cas, A et A' sont respectivement le *domaine* et le *co-domaine* de f . En particulier, si f est un isomorphisme de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}'$, alors toute restriction de f est un isomorphisme local. Dans le cas où m est le maximum de l'arité des relations (ρ_i) et (ρ'_i) , une condition suffisante pour qu'une bijection f définie sur A soit un isomorphisme local de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ est que la restriction de f à tout sous-ensemble X de A de cardinalité au plus m est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$ [41].

Un isomorphisme f de E sur un sous-ensemble A' de E' est un *abritement* de $\mathcal{R}$ dans $\mathcal{R}'$. Nous disons que $\mathcal{R}$ s'*abrite* dans $\mathcal{R}'$ ou que $\mathcal{R}$ est *plus petite* que $\mathcal{R}'$ pour l'abritement, fait noté $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$, ou que $\mathcal{R}'$ *abrite* $\mathcal{R}$ ou est *plus grande* que $\mathcal{R}$, fait noté $\mathcal{R}' \geq \mathcal{R}$, si et seulement si il existe une restriction de $\mathcal{R}'$ isomorphe à $\mathcal{R}$. Comme dans un tel cas, toute relation $\mathcal{S}$ isomorphe à $\mathcal{R}$ s'abrite dans toute relation $\mathcal{S}'$ isomorphe à $\mathcal{R}'$, on dit encore que le type d'isomorphie de $\mathcal{R}$ s'abrite dans le type d'isomorphie de $\mathcal{R}'$, ce que nous notons $\tau(\mathcal{R}) \leq \tau(\mathcal{R}')$. Nous disons que $\mathcal{R}$ s'*abrite strictement* dans $\mathcal{R}'$ ou est *strictement plus petite* que $\mathcal{R}'$ ou que $\mathcal{R}'$ *abrite strictement* $\mathcal{R}$ ou est *strictement plus grande* que $\mathcal{R}$ et nous notons $\mathcal{R} < \mathcal{R}'$ ou $\mathcal{R}' > \mathcal{R}$ si et seulement si $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$ mais $\mathcal{R}' \not\leq \mathcal{R}$.

Nous disons que $\mathcal{R}$ est *équimorphe* avec $\mathcal{R}'$ si et seulement si $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}' \leq \mathcal{R}$. Si les domaines de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont finis, l'équimorphisme équivaut à l'isomorphisme.

La relation d'abritement est réflexive et transitive, elle définit un préordre sur la classe Ω_μ des structures relationnelles de signature μ et induit un préordre sur la classe T_μ de leurs types d'isomorphie. Sur l'ensemble T_μ c'est un ordre.

L'étude des structures et classes de structures au moyen de ce préordre est apparue très tôt dans la littérature. Au début du vingtième siècle avec Cantor, Hausdorff et Sierpinski pour l'étude des ordres linéaires, puis dans Fraïssé qui a placé ce préordre et les classes héréditaires, que nous introduirons ci-dessous, au centre de la théorie des relations [41].

1.3 Classe héréditaire, âge, obstruction et borne

1.3.1 Classe héréditaire, classe filtrante

Une classe $\mathcal{C}$ de structures relationnelles de même signature μ est dite *héréditaire pour l'abritement* ou *fermée pour l'abritement* si $\mathcal{R} \in \mathcal{C}$ et $\mathcal{S} \leq \mathcal{R}$ impliquent $\mathcal{S} \in \mathcal{C}$. Dans la terminologie des ensembles ordonnés, c'est une section initiale de la classe des structures relationnelles de signature μ .

La classe $\mathcal{C}$ est dite *filtrante pour l'abritement* si pour toutes structures relationnelles $\mathcal{R}, \mathcal{S} \in \mathcal{C}$ il existe une structure relationnelle $\mathcal{T} \in \mathcal{C}$ telle que $\mathcal{R} \leq \mathcal{T}$ et $\mathcal{S} \leq \mathcal{T}$.

Etant donnée une relation $\mathcal{R}$ et un entier positif p , l'ensemble des restrictions de $\mathcal{R}$ aux sous-ensembles de cardinalités inférieures ou égales à p est une classe héréditaire; cependant, elle n'est pas toujours filtrante; par exemple si $\mathcal{R}$ est une chaîne cette classe est filtrante, par contre si $\mathcal{R}$ est la relation de *consécutivité* sur les entiers (c'est à dire $\mathcal{R} = \{(i, i+1) / i \in \mathbb{N}\}$) cette classe n'est filtrante que pour $p = 0$ et $p = 1$.

L'ensemble des restrictions de $\mathcal{R}$ aux sous-ensembles finis de cardinalités supérieures ou égales à p est filtrant, par contre ce n'est pas une classe héréditaire.

1.3.2 Âge

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle. L'ensemble des restrictions finies de $\mathcal{R}$, considérées à l'isomorphie près, est un ensemble appelé *âge* de $\mathcal{R}$. Nous disons que $\mathcal{R}$ *représente cet âge*. De manière plus rigoureuse, l'âge de la structure relationnelle $\mathcal{R}$ est l'ensemble $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ des types d'isomorphie des restrictions de $\mathcal{R}$ aux parties finies de son domaine. Une relation $\mathcal{S}$ est dite *moins âgée* que la relation $\mathcal{R}$ lorsque l'âge de $\mathcal{S}$ est inclus dans l'âge de $\mathcal{R}$. Deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ ont le même âge si chacune des deux relations est moins âgée que l'autre.

La caractérisation suivante des âges est due à Fraïssé [41], dans le cas où la signature μ est finie.

Théorème 1.11. *Un ensemble non vide $\mathcal{A}$ de T_μ est l'âge d'une relation si et seulement si c'est un idéal de T_μ ordonné par l'abritement.*

Dans le cas où μ n'est pas finie, un idéal n'est pas forcément un âge (voir exemple en [38]).

Etant donné un ensemble d'âges, totalement ordonné par inclusion, l'union et l'intersection d'âges de cet ensemble sont des âges. Etant donné un ensemble d'âges, filtrant pour l'inclusion, une union d'âges de cet ensemble est un âge. Cependant, en général, l'union ou l'intersection de deux âges n'est pas nécessairement un âge.

Une autre caractérisation des âges qui découle du Théorème 1.11 et qui est une propriété classique des idéaux dans un ensemble ordonné (voir assertion 1 des Propriétés 1.2) est :

Théorème 1.12. *Un ensemble non vide $\mathcal{A}$ de relations finies de même arité, qui est fermé pour l'abritement, est un âge si et seulement si $\mathcal{A}$ n'est pas l'union de deux sous-ensembles distincts de $\mathcal{A}$ et fermés pour l'abritement.*

1.3.3 Borne et obstruction

Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de Ω_μ . Il ressort de la définition d'une classe héréditaire que si une structure $\mathcal{B} \notin \mathcal{C}$ aucun élément de $\mathcal{C}$ n'abriterait $\mathcal{B}$, nous disons, dans ce cas, que $\mathcal{B}$ est une *obstruction* de $\mathcal{C}$.

Soit $\mathcal{B}$ un sous-ensemble de Ω_μ , posons $Forb(\mathcal{B}) := \{\mathcal{R} \in \Omega_\mu : \mathcal{B} \not\leq \mathcal{R}, \forall \mathcal{B} \in \mathcal{B}\}$ la sous-classe des éléments de Ω_μ qui n'abritent aucun élément de $\mathcal{B}$. Clairement, $Forb(\mathcal{B})$ est une classe héréditaire et toute sous-classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_μ a cette forme. En fait, si nous considérons les structures de Ω_μ à l'isomorphie près, il existe une correspondance bijective entre les classes héréditaires et les familles d'antichaînes de Ω_μ ; en effet, à une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_μ , nous associons l'antichaîne $\mathcal{F}_\mathcal{C} := \min(\Omega_\mu \setminus \mathcal{C})$ formée par les éléments minimaux pour l'abritement de $\Omega_\mu \setminus \mathcal{C}$ (ces éléments minimaux existent car l'ensemble Ω_μ est bien fondé pour la relation d'abritement). Si A est une antichaîne de Ω_μ , nous lui associons la classe héréditaire $Forb(A)$.

Ce fait, dû à Fraïssé, est basé sur la notion de borne : une *borne* d'une sous-classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_μ est toute structure finie $\mathcal{B}$ n'appartenant pas à $\mathcal{C}$ telle que toute structure $\mathcal{B}'$ qui s'abrite strictement dans $\mathcal{B}$ appartient à $\mathcal{C}$. Il est clair que toute obstruction finie de $\mathcal{C}$ contient une borne. Si $\mathcal{B}(\mathcal{C})$ désigne la collection des bornes de $\mathcal{C}$, considérées à l'isomorphie près, alors $\mathcal{C} = Forb(\mathcal{B}(\mathcal{C}))$, on note aussi $\mathcal{C} = \Omega_\mu < \mathcal{B}(\mathcal{C}) >$. Notons qu'une borne est nécessairement non vide.

Exemple de borne : si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de graphes finis, une borne de $\mathcal{C}$ est tout graphe $G = (V, E)$ tel que $G \notin \mathcal{C}$ et $G_{|V \setminus \{x\}} \in \mathcal{C}$ pour tout $x \in V$. Si $\mathcal{B} = \{P_4\}$, alors $Forb(\mathcal{B})$ est la classe des graphes sans P_4 ou graphes séries-parallèles appelés également cographes (P_4 est le chemin d'ordre quatre, c'est à dire le graphe G dont les sommets sont $V(G) := \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ et tel que x_i est adjacent à x_{i+1} pour tout $i = 1, 2, 3$).

Cette définition de borne s'étend aux types d'isomorphie. Ainsi, une borne d'une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de T_μ est le type d'isomorphie d'une structure finie minimale parmi celles n'appartenant pas à $\mathcal{C}$.

1.3.4 Classes héréditaires et idéaux

Le résultat suivant relie les classes héréditaires et les idéaux.

Théorème 1.13. *Toute classe héréditaire infinie de Ω_μ , avec μ fini, contient un idéal infini.*

Dans le cas où μ n'est pas fini, nous avons le contre exemple suivant. Pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $\mathcal{R}_n := (\{0\}, (u_k)_{k \in \mathbb{N}})$ où u_k est la relation unaire telle que $u_k(0) = 1$ si $k = n$ et $u_k(0) = 0$ pour $k \neq n$. Soit $\mathcal{C}$ la classe formée des structures $\mathcal{R}_n$ et de la structure de base vide.

Le résultat donné par le Théorème 1.13 est dû à Pouzet, mais n'ayant pas été publié, nous reprenons sa preuve ici, elle nécessite la proposition suivante :

Proposition 1.14. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de Ω_μ , (μ fini). Si $\mathcal{C}$ contient une antichaîne infinie alors $\mathcal{C}$ contient un idéal infini $\mathcal{I}$ qui est belordonné et qui a un nombre infini de bornes.*

Preuve. Si $\mathcal{C}$ possède une antichaîne infinie, disons A , alors la section finale $(\uparrow A) \cap \mathcal{C}$ n'est pas finiment engendrée. L'ensemble des sections finales non finiment engendrées de $\mathcal{C}$, ordonnées par l'inclusion, est un ensemble inductif, donc, d'après le Lemme de Zorn, il existe une section finale $\mathcal{F}_0$, non finiment engendrée, maximale pour l'inclusion. Posons $\mathcal{I} = \mathcal{C} \setminus \mathcal{F}_0$, le complémentaire de $\mathcal{F}_0$ dans $\mathcal{C}$, $\mathcal{I}$ est donc belordonné. Posons $\mathcal{B}$ l'ensemble des éléments minimaux de $\mathcal{F}_0$. A l'isomorphie près, $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bornes de $\mathcal{I}$ et $\mathcal{B}$ est infini (c'est une antichaîne infinie et pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, $\mathcal{B}_{-x} \in \mathcal{I}$).

$\mathcal{I}$ est infini, car s'il était fini, il posséderait une structure $\mathcal{R}$ de cardinalité maximum et donc les bornes de $\mathcal{I}$ seraient de tailles au plus $|\mathcal{R}| + 1$ et seraient donc en nombre fini, car μ est fini.

Reste à montrer que $\mathcal{I}$ est une classe filtrante. Pour cela, montrons d'abord que tout élément $\mathcal{R}$ de $\mathcal{I}$ est majoré par presque toutes ses bornes. En effet, soit $\mathcal{B}_{\mathcal{R}} \subseteq \mathcal{B}$ l'ensemble des bornes contenant $\mathcal{R}$. Considérons la classe $\mathcal{F}_1 := \mathcal{F}_0 \cup \uparrow \mathcal{R}$. Cette classe est une section finale qui contient $\mathcal{F}_0$. Comme $\mathcal{F}_0$ est maximale parmi les classes finales non finiment engendrées, alors $\mathcal{F}_1$ est finiment engendrée. Or $\text{Min}(\mathcal{F}_1) = \{\mathcal{R}\} \cup (\mathcal{B} \setminus \uparrow \mathcal{R})$, ce qui prouve que $\mathcal{B}_{\mathcal{R}}$ qui est égal à $\mathcal{B} \cap \uparrow \mathcal{R}$ est infini.

Soient maintenant $\mathcal{R}, \mathcal{R}' \in \mathcal{I}$, posons $|\mathcal{R}| = n$ et $|\mathcal{R}'| = n'$. D'après ce qui précède, $\mathcal{B} \setminus (\uparrow \mathcal{R} \cap \uparrow \mathcal{R}')$ est fini, c'est à dire $\mathcal{B} \cap (\uparrow \mathcal{R} \cap \uparrow \mathcal{R}') = \mathcal{B}_{\mathcal{R}} \cap \mathcal{B}_{\mathcal{R}'}$ est infini. Comme μ fini, cet ensemble possède des éléments de tailles arbitrairement grandes, en particulier de tailles supérieures à $n + n' + 1$. Donc il existe une borne $\mathcal{S}$ telle que $\mathcal{R} < \mathcal{S}$ et $\mathcal{R}' < \mathcal{S}$. Donc il existe $\mathcal{S}' < \mathcal{S}$ qui abrite $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. Comme $\mathcal{S}$ est une borne, $\mathcal{S}' \in \mathcal{I}$ et par suite $\mathcal{I}$ est filtrante. $\square$

Preuve du Théorème 1.13. Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire infinie de Ω_μ , nous avons deux cas :

Cas 1 : Si $\mathcal{C}$ ne possède pas d'antichaîne infinie, dans ce cas $\mathcal{C}$ est belordonnée et est donc une union finie d'idéaux (Théorème 1.8 d'Erdős-Tarski). Comme $\mathcal{C}$ est infinie, l'un des idéaux est infini.

Cas 2 : Si $\mathcal{C}$ possède une antichaîne infinie. Le résultat découle alors de la Proposition 1.14. $\square$

1.3.5 Classes héréditairement belordonnées

Soit $\mathcal{C}$ une sous-classe de Ω_μ et soit $\mathcal{A}$ un poset. Posons

$$\mathcal{C}.\mathcal{A} := \{(\mathcal{R}, f) : \mathcal{R} \in \mathcal{C}, f : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{A}\}$$

et pour deux éléments $(\mathcal{R}, f)$ et $(\mathcal{R}', f')$ de $\mathcal{C}.\mathcal{A}$, $(\mathcal{R}, f) \leq (\mathcal{R}', f')$ s'il existe un abritement $h : \mathcal{R} \rightarrow \mathcal{R}'$ tel que $f(x) \leq f'(h(x))$ pour tout $x \in V(\mathcal{R})$.

Nous disons que $\mathcal{C}$ est *héréditairement belordonné* si $\mathcal{C}.\mathcal{A}$ est belordonné pour tout belordre $\mathcal{A}$.

Comme exemple, la classe des chaînes finies est héréditairement belordonnée. En effet, si Ch est la classe des chaînes finies, $Ch.\mathcal{A}$ s'identifie à l'ensemble $\mathcal{A}^*$ des mots finis sur l'alphabet $\mathcal{A}$ muni de l'ordre de Higman. Le fait que Ch est héréditairement belordonnée est le "fameux" résultat dû à Higman [53] (voir Théorème 1.7).

Voici quelques propriétés des classes héréditairement belordonnées :

Propriété 1.15. *Toute classe héréditairement belordonnée est belordonnée.*

Preuve. Il suffit de prendre $\mathcal{A} = \{1\}$. □

Propriété 1.16. *Si $\mathcal{C} = \{\mathcal{R}\}$ alors $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée si $\mathcal{R}$ est finie.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ un belordre, il s'agit de montrer que $\mathcal{C}.\mathcal{A}$ est belordonné.

$\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ où $E = \{a_1, \dots, a_k\}$. Comme $\mathcal{A}$ est belordonné alors $\mathcal{A}^k$ est belordonné. Posons $f_i : \mathcal{A}^k \rightarrow \mathcal{A}$, pour $1 \leq i \leq k$, la i ème projection de $\mathcal{A}^k$ dans $\mathcal{A}$ et considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} g : \mathcal{A}^k & \rightarrow & \mathcal{R}.\mathcal{A} \\ p & \mapsto & (\mathcal{R}, \tilde{f}) \end{array} \quad \text{où} \quad \begin{array}{ccc} \tilde{f} : E & \rightarrow & \mathcal{A} \\ a_i & \mapsto & f_i(p) \end{array}$$

L'application g est surjective, en effet pour $(\mathcal{R}, \tilde{f}) \in \mathcal{R}.\mathcal{A}$, il existe $p \in \mathcal{A}^k$ tel que $g(p) = (\mathcal{R}, \tilde{f})$, il suffit de prendre $p = (\tilde{f}(a_1), \dots, \tilde{f}(a_k))$. L'application g est croissante par construction. Comme une image surjective par une application croissante d'un belordre est un belordre, on déduit que $\mathcal{R}.\mathcal{A}$ est belordonné. Ce qui entraîne que $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée. □

Si $\mathcal{R}$ est infinie, ceci n'a pas forcément lieu. Si $\mathcal{R}$ est une antichaîne infinie, pour que $\mathcal{R}.\mathcal{A}$ soit belordonné il faut et il suffit que $\underline{I}(\mathcal{A})$ soit un belordre.

Une autre propriété qui découle du fait que toute union finie de belordres est un belordre est

Propriété 1.17. *Toute union finie de classes héréditairement belordonnées est héréditairement belordonnée.*

Et donc :

Propriété 1.18. *Si $\mathcal{C} \subseteq \Omega_\mu$ est finie alors $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ un belordre, il s'agit de montrer que $\mathcal{C}.\mathcal{A}$ est belordonné. Comme $\mathcal{C}$ est finie, nous avons : $\mathcal{C}.\mathcal{A} = \bigcup_{\mathcal{R} \in \mathcal{C}} \{\mathcal{R}\}.\mathcal{A}$. Puisque une réunion finie de belordres est un belordre, ceci revient à montrer que $\mathcal{R}.\mathcal{A}$ est belordonné pour $\mathcal{R} \in \Omega_\mu$. Ce qui est vrai d'après la Propriété 1.16. □

Une question, restée ouverte depuis les années 70, est de savoir si cette condition est vraie lorsqu'elle est vérifiée pour une antichaîne à deux éléments $\mathcal{A}$.

Rappelons également les résultats suivants dus à Pouzet [79, 85] :

Théorème 1.19. *Si une sous-classe $\mathcal{C}$ de Ω_μ (avec μ fini) est héréditairement belordonnée, alors $\downarrow \mathcal{C}$, la plus petite sous-classe héréditaire de Ω_μ contenant $\mathcal{C}$, est héréditairement belordonnée.*

Théorème 1.20. *Si la signature μ est finie, une sous-classe de Ω_μ qui est héréditaire et héréditairement belordonnée a un nombre fini de bornes.*

1.4 Profil et fonction génératrice

1.4.1 Profil de classe héréditaire

Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire. Le *profil*⁴ de $\mathcal{C}$ est la fonction $\varphi_{\mathcal{C}} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ qui compte, pour tout entier n , le nombre de structures définies sur n éléments, appartenant à $\mathcal{C}$, les structures isomorphes étant identifiées. Si on pose $T_{\mathcal{C}}$ l'ensemble des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{C}$ et, pour tout entier n , $\mathcal{C}_n = \{\mathcal{R} \in \mathcal{C} : |\text{dom}(\mathcal{R})| = n\}$ alors, $\varphi_{\mathcal{C}}(n) := |T_{\mathcal{C}_n}|$. Notons que $\varphi_{\mathcal{C}}(0) = 1$.

La notion de profil est une spécialisation aux classes héréditaires d'une notion de base de la combinatoire énumérative le *comptage* ou *l'énumération*. En fait, un problème de base de la combinatoire énumérative est le dénombrement des éléments d'un ensemble fini, c'est à dire, que l'on dispose d'un ensemble S d'objets, sur lequel est défini un paramètre $p : S \rightarrow \mathbb{N}$, appelé *la taille*, et l'on sait que le nombre a_n d'éléments de S de taille n est fini. La fonction de comptage f est alors donnée par $f(n) = a_n$. Les résultats généraux sur ces fonctions de comptage sont de deux types :

- Des résultats exacts dans lesquels les fonctions f sont définies explicitement, par exemple, des fonctions polynomiales, ou des fonctions définies par des relations de récurrence.
- Des résultats asymptotiques, pour lesquels f est définie par des équivalences asymptotiques ou des inégalités asymptotiques, par exemple des fonctions avec une croissance au plus exponentielle ou au moins polynomiales.

Pour plus de détails sur les problèmes d'énumération, consulter [40, 103, 108].

Pour énumérer des objets, il est parfois nécessaire d'utiliser des outils tels que le principe d'inclusion-exclusion ou les codages. Le *principe d'inclusion-exclusion* est l'un des outils fondamentaux de la combinatoire énumérative. Il s'agit d'un type de raisonnement familier dans les mathématiques élémentaires. Son principe, pour effectuer un décompte exact de la cardinalité d'un ensemble S , consiste à commencer par un ensemble plus large, puis apporter des corrections en éliminant les éléments "indésirables". L'idée est très simple, c'est essentiellement une généralisation de l'observation, toute simple, suivante : si A , B et C sont trois ensembles alors

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$$

et

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|.$$

Notons que l'on commence par *inclure* puis on exclut les termes que nous avons compté plus d'une fois, en l'occurrence ici, $|A \cap B|$, $|A \cap C|$ et $|B \cap C|$, mais cette exclusion peut éliminer complètement certains éléments, en l'occurrence ici, $|A \cap B \cap C|$, il faudra alors les inclure encore une fois (voir [10, 31, 108] pour plus de détails sur ce principe). Ce principe, d'après [108], est ancien, il remonte au moins au 19^{ème} siècle, il est apparu dans le papier de Da Silva (1854) et

4. Dans [17], cette fonction est appelée "*unlabelled speed*". Il est également question de la fonction "*labelled speed*" qui compte, pour tout entier n , le nombre de toutes les structures définies sur n éléments.

plus tard dans le papier de Sylvester (1883) (voir [108]).

Le principe du *codage* est d'établir une bijection (respectant la taille) entre l'ensemble S des objets que l'on veut énumérer et un ensemble S' formé d'objets de structure plus simple, exemple (mots ou suites, arbres,...), des objets qu'une technique standard permettrait d'énumérer plus facilement (voir [40] pour plus de détails, des exemples et pour d'autres références).

1.4.2 Fonction génératrice

Très souvent, l'évaluation de la fonction d'énumération se fait au moyen de la fonction génératrice. Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire, la *fonction génératrice* de $\mathcal{C}$ est

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(X) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{\mathcal{C}}(n) X^n.$$

La fonction génératrice donnée ici est ordinaire. Il existe d'autres types de fonctions génératrices. Par exemple, la fonction génératrice exponentielle de $f(n)$ donnée par : $\sum_{n \geq 0} f(n) \frac{x^n}{n!}$. Les fonctions génératrices ordinaires et exponentielles sont les plus couramment utilisées.

En fait, il est plus commode de décrire la suite de nombre $\varphi(n)$ par sa fonction génératrice qui est une série formelle, car certaines opérations sur les objets combinatoires correspondent à des opérations simples (somme, produit, dérivation,...) sur les séries génératrices associées.

Comme pour la fonction profil, la fonction génératrice peut, dans certains cas, être définie explicitement. Dans d'autres cas, il n'est pas aisé de la définir. Il est alors courant d'en donner une description générale en donnant la classe à laquelle elle appartient. On rappelle ici deux familles de séries dont l'une est incluse dans l'autre.

Considérons une série formelle $F(x) := \sum_{n \geq 0} a_n x^n$ à coefficients dans un corps $\mathbb{K}$. La définition est donnée ici de manière générale, toutes les séries considérées dans ce document sont à coefficients entiers donc $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, (voir preuve du Lemme 3.30).

Les séries rationnelles

La série $F(x)$ est *rationnelle*, dans $\mathbb{K}$, s'il existe deux polynômes $P(x)$ et $Q(x)$, à coefficients dans $\mathbb{K}$, avec $Q(0) \neq 0$ tels que

$$F(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}.$$

De façon équivalente, si les coefficients a_n satisfont une récurrence linéaire à coefficients constants : il existe un entier k , des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ dans $\mathbb{K}$ et un entier n_0 tels que, pour $n \geq n_0$,

$$a_n + \alpha_1 a_{n-1} + \dots + \alpha_k a_{n-k} = 0.$$

Les séries algébriques :

La série $F(x)$ est *algébrique* s'il existe un polynôme $Q(x, y)$ dans $\mathbb{K}[x, y]$ tel que $Q(x, F(x)) = 0$. Si le polynôme Q est de degré 1 en y , la série est alors rationnelle, donc les séries rationnelles sont des séries algébriques.

Les fonctions algébriques et les séries algébriques sont, tout simplement, définies comme les solutions des équations ou des systèmes d'équations polynomiales.

Nous rappelons que la somme et le produit de deux fonctions ou séries algébriques sont algébriques, il en est de même pour l'inverse d'une fonction ou série algébrique non nulle en zéro (f algébrique et $f(0) \neq 0$ alors $\frac{1}{f}$ est algébrique).

Si $\mathcal{C}$ est une classe de structures combinatoires finies, nous disons que $\mathcal{C}$ est algébrique (resp. rationnelle) si sa série génératrice est algébrique (resp. rationnelle).

En général, dire qu'une série f est algébrique ne permet pas de la définir explicitement, mais fournit des informations sur le comportement de ses coefficients. Nous savons, par exemple, que les coefficients d'une série algébrique croissent au plus de manière exponentielle voir [40, 104] et qu'ils vérifient une récurrence à coefficients polynomiaux, en d'autres termes, les coefficients a_n satisfont [60, 104] :

$$p_k(n)a_{n+k} + p_{k-1}(n)a_{n+k-1} + \dots + p_0(n)a_n = 0,$$

avec les coefficients $p_i \in \mathbb{K}[x]$ non tous nuls.

Nous rappelons également que la suite a_n , $n \in \mathbb{N}$ est *quasi-polynomiale* si on a, pour tout n ,

$$a_n = b_k(n)n^k + \dots + b_1(n)n + b_0(n),$$

où les b_i , $0 \leq i \leq k$ sont des fonctions périodiques. De manière équivalente, si a_n est le coefficient de x^n dans le développement en série de l'expression,

$$\frac{p(x)}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^l)}$$

pour un l dans $\mathbb{N}$ et un polynôme $p \in \mathbb{K}[x]$.

L'étude des séries n'étant pas l'objet de ce document, nous ne donnerons pas plus de détails, pour le lecteur intéressé voir par exemple [26, 31, 40, 104, 108].

1.4.3 Comportement des profils des classes héréditaires

Ordre de croissance du profil

Etant données deux fonctions φ et ψ de variable et valeurs entières, la fonction ψ *croît au moins aussi vite que* φ (que la fonction ψ soit croissante ou non) lorsqu'il existe un entier $a > 0$ tel que $\varphi(n) \leq a\psi(n)$ pour n assez grand.

Les fonctions φ et ψ ont *même ordre de croissance* lorsque chacune croît au moins aussi vite que l'autre, par exemple si une classe est finie, son profil a le même ordre de croissance que la fonction nulle.

Si une fonction φ a le même ordre de croissance que la fonction $\psi = n^k$ pour un entier non négatif k , ou encore s'il existe deux réels positifs a et b tels que $an^k \leq \varphi \leq bn^k$ pour n suffisamment large, alors φ a une *croissance polynomiale de puissance k* . Les cas particuliers de la croissance polynomiale sont :

Si $k = 0$ alors φ est *bornée* et ne s'annule pas (exemple le profil de la classe formée de chaînes finies).

Si $k = 1$ alors φ a une *croissance linéaire*.

Si $k = 2$ alors φ a une *croissance quadratique* ou *parabolique*.

La fonction φ croît plus vite que tout polynôme si et seulement si $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n^k} = +\infty$ pour tout entier non négatif k .

Si une fonction φ a même ordre de croissance que la fonction c^n pour une constante $c > 0$ alors φ a une *croissance exponentielle*.

Saut dans la croissance des profils

Durant ces dernières années, il y a eu beaucoup de résultats d'énumération sur des classes héréditaires de structures concrètes telles que les graphes, les graphes ordonnés, les tournois et les permutations en connection avec la conjecture de Stanley-Wilf, sur laquelle nous reviendrons dans le chapitre 2.

Tous les résultats obtenus montrent, essentiellement, qu'il existe des *sauts* dans les croissances des profils de ces classes héréditaires. Un *saut* dans la croissance du profil d'une classe d'objets combinatoires $\mathcal{C}$ signifie que la croissance de $\varphi_{\mathcal{C}}$ ne se fait pas de manière continue, il y a des "trous", le profil peut, par exemple, passer d'une croissance polynomiale à une croissance exponentielle, ce qui veut dire qu'il n'existe pas de classe de tels objets ayant un profil vérifiant $n^k < \varphi_{\mathcal{C}} < c^n$ pour n suffisamment large et pour tout $k > 0$ et $c > 1$.

Par exemple, dans le cas des graphes, Balogh, Bollobás, Saks et Sós (2009) [17] ont montré :

Théorème 1.21. *Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de graphes finis alors une seule des assertions suivantes se produit.*

1. *Pour tout n , $\varphi_{\mathcal{C}}(n) = cn^k + O(n^{k-1})$, pour un entier $k > 0$ et $c \in \mathbb{Q}$, $c > 0$.*
2. *Pour n suffisamment large, $\varphi_{\mathcal{C}}(n) \geq \mathbf{p}(n)$, où $\mathbf{p}(n)$ est la fonction partition d'entier.*

Nous rappelons, que pour un entier positif n , une partition de n est la donnée d'une suite finie décroissante $n_1 \geq n_2 \geq \dots \geq n_l$ d'entiers positifs appelés *parties* telle que $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$. La fonction partition $\mathbf{p}$ compte, pour tout entier n , le nombre $\mathbf{p}(n)$ de partitions de n . La fonction génératrice associée à $\mathbf{p}(n)$ est $\sum_{n \geq 1} \mathbf{p}(n)x^n := \prod_{n \geq 1} \frac{1}{1 - x^n}$.

La valeur asymptotique de ce nombre est donnée par un "fameux" résultat d'Hardy et Ramanujan (1918) qui est : $\mathbf{p}(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right)$.

Dans [13, 17, 16] il est montré que dans les cas des tournois, des graphes ordonnés et des permutations le saut de croissance du profil se fait d'une croissance polynomiale à une croissance exponentielle, généralisant ainsi les résultats de Kaiser et Klazar (2004) sur les permutations sur lesquelles nous reviendrons dans le chapitre 2.

Le comportement des profils des classes héréditaires particulières, les "âges" de Fraïssé et le lien avec les classes belordonnées ont été considérés par Pouzet au début des années soixante-dix (voir [79] et [85] pour une synthèse). Le cas des graphes, tournois et autres structures combinatoires a été élucidé plus récemment. Pour plus de détails consulter l'article de Klazar [60]. Nous étudierons le phénomène du saut du profil sur les structures relationnelles ordonnées dans le chapitre 7.

1.4.4 Profil d'une structure relationnelle

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E et de signature μ . Nous désignons également par *profil de $\mathcal{R}$* la fonction $\varphi_{\mathcal{R}}$ qui compte, pour tout entier n , le nombre $\varphi_{\mathcal{R}}(n)$ de types d'isomorphie des sous-structures de $\mathcal{R}$ induites sur les n -parties de E . Cette notion est due à Pouzet 1972 (voir [85] pour plus de résultats).

Notons que $\varphi_{\mathcal{R}}(0) = 1$ et si E est un p -ensemble, où p est un entier positif, alors $\varphi_{\mathcal{R}}(p) = 1$ et $\varphi_{\mathcal{R}}(q) = 0$ pour tout $q > p$.

Exemple. 1.22. 1) Si $\mathcal{R}$ est une chaîne et E un n -ensemble alors $\varphi_{\mathcal{R}}(k) = 1$ pour $k \leq n$.
2) Si $\mathcal{R}$ est une relation unaire définie sur un ensemble infini E avec $\mathcal{R} = F \subset E$ où F est une p -partie de E , p entier, alors le profil de $\mathcal{R}$ croît de $\varphi_{\mathcal{R}}(0) = 1$ à $\varphi_{\mathcal{R}}(p) = p + 1$ et reste stationnaire.

Il est clair que cette fonction ne dépend que de l'âge $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ de $\mathcal{R}$. Si la signature μ de $\mathcal{R}$ est finie, le nombre de structures relationnelles de signature μ définies sur un n -ensemble étant fini, la valeur de $\varphi_{\mathcal{R}}(p)$, pour tout entier p , est nécessairement un entier (donc finie). Dans le cas où μ n'est pas fini, $\varphi_{\mathcal{R}}(n)$ peut-être infini, mais nous nous intéressons pas à ce cas ici. Les résultats suivants, dus à Pouzet (voir [41] et [85]), nous renseignent sur l'évolution de la fonction profil :

Propriété 1.23. Soit $n < |E|$. Alors

$$\varphi_{\mathcal{R}}(n) \leq (n + 1)\varphi_{\mathcal{R}}(n + 1).$$

Théorème 1.24. Si $\mathcal{R}$ est une structure relationnelle de base infinie, alors son profil $\varphi_{\mathcal{R}}$ est non-décroissant.

De plus ;

Théorème 1.25. Soient p, q deux entiers et $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E de cardinalité au moins $2p + q$. Alors

$$\varphi_{\mathcal{R}}(p) \leq \varphi_{\mathcal{R}}(p + q).$$

Nous rappelons en particulier ce théorème dû à Pouzet [81] (voir aussi [92]) :

Théorème 1.26. *L'âge d'une structure relationnelle (de signature finie) dont le profil est borné par un polynôme possède un nombre fini de bornes.*

Exemples de fonction profil

Beaucoup de fonctions usuelles sont des profils de relations, voici quelques exemples (voir [85]) :

1. *Le coefficient binomial* $\binom{n+k}{k}$. Soit $\mathcal{R} := (\mathbb{Q}, \leq, u_1, \dots, u_k)$ où $\leq$ est l'ordre naturel sur l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationels, $u_1, \dots, u_k$ sont des relations unaires qui divisent $\mathbb{Q}$ en $k+1$ intervalles. Alors $\varphi_{\mathcal{R}}(n) = \binom{n+k}{k}$.
2. *La fonction exponentielle* $n \mapsto k^n$. Soit $\mathcal{R} := (\mathbb{Q}, \leq, u_1, \dots, u_k)$, où $u_1, \dots, u_k$ désignent toujours k relations unaires, qui divisent, cette fois, $\mathbb{Q}$ en k "couleurs" de telle sorte qu'entre deux nombres rationnels toutes les couleurs apparaissent. Alors $\varphi_{\mathcal{R}}(n) = k^n$.
3. *La factorielle* $n \mapsto n!$. Soit $\mathcal{R} := (\mathbb{Q}, \leq, \leq')$, où $\leq'$ est un autre ordre linéaire sur $\mathbb{Q}$ défini de telle sorte que les restrictions finies induisent toutes les paires possibles d'ordres linéaires sur un ensemble fini. Alors $\varphi_{\mathcal{R}}(n) = n!$.
4. *La fonction partition d'entier* qui compte le nombre $\mathfrak{p}(n)$ de partitions de l'entier n . Soit $\mathcal{R} := (\mathbb{N}, \rho)$ le chemin infini d'entiers (le graphe de comparabilité de la relation de consécutivité sur $\mathbb{N}$) dont les arêtes sont les paires $\{n, n+1\}$ pour $n \in \mathbb{N}$. Alors $\varphi_{\mathcal{R}}(n) = \mathfrak{p}(n)$. La détermination de sa croissance asymptotique et les difficultés rencontrées pour prouver que $\mathfrak{p}(n) \simeq \frac{1}{4n\sqrt{3}} e^{\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}}$ (Hardy et Ramanujan, 1918) montrent les difficultés rencontrées dans l'étude des profils en général.

Les graphes fournissent des exemples simples de profils [85] (voir [92] pour d'autres exemples). Soit G un graphe et φ_G son profil.

1. φ_G est constant, égal à 1, pour tout $n \leq |V(G)|$ si et seulement si G est une clique ou un indépendant.
2. Si G est la somme directe d'un graphe fini et d'une clique infinie ou d'un indépendant infini alors son profil est borné. En fait, le profil φ_G d'un graphe G est borné si et seulement si G est *presque constant* (c'est à dire qu'il existe un sous-ensemble fini F_G de sommets tel que si deux paires de sommets ont la même intersection sur F_G alors toutes deux sont des arêtes ou aucune des deux ne l'est).
3. Si G est la somme directe d'une infinité de cliques à deux éléments ou bien la somme directe de deux cliques ayant chacune une infinité d'éléments alors $\varphi_G(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$ et sa fonction génératrice est $\mathcal{H}_G(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$.
4. Si G est la somme directe d'une clique infinie et d'un indépendant infini alors $\varphi_G(n) = n$ pour $n \geq 1$ et $\mathcal{H}_G(x) = 1 + \frac{x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+x^2}{(1-x)^2} = \frac{1+x^3}{(1-x)(1-x^2)}$.

5. Si G est la somme directe d'une infinité de cliques à k éléments ou bien la somme directe de k cliques infinies alors $\varphi_G(n) = \mathfrak{p}_k(n) \simeq \frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$ et $\mathcal{H}_G(x) = \frac{1}{(1-x)\dots(1-x^k)}$.
 $\mathfrak{p}_k(n)$ est le nombre de partitions de n en au plus k parties, ce nombre est égal au nombre de partitions de n en parties de tailles au plus k , il est donné par $\mathfrak{p}_k(n) \simeq \frac{n^{k-1}}{(k-1)!k!}$.
6. Si G est la somme directe d'une infinité de cliques infinies ou bien un chemin infini alors $\varphi_G(n) = \mathfrak{p}(n)$ où $\mathfrak{p}$ est la fonction partition d'entiers.

Première partie

Structures indécomposables et profil algébrique

Chapitre 2

Permutations et bichaines

Ce chapitre comprend deux sections. La première est consacrée aux permutations. Celles-ci ayant fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années, beaucoup de résultats existent, certains sont des redécouvertes de résultats plus anciens sur d'autres structures, d'autres sont récents. Nous ne donnerons ici qu'un bref aperçu des résultats qui sont directement liés à notre sujet. Pour plus de détails, consulter les différentes références qui traitent du domaine citées dans la bibliographie, en particulier l'excellent ouvrage de *S. Kitaev* [59], ou celui de *M. Bóna* [22], qui reprennent une bonne partie des résultats sur les permutations, parus ces dernières années. La deuxième section est consacrée aux bichaines, des structures relationnelles formées de deux ordres totaux définis sur un même ensemble. Suivant *P.J. Cameron*, nous explicitons le lien existant entre ces dernières et les permutations, ce qui justifie que l'on considère les permutations comme des structures relationnelles.

2.1 Permutations

Pour un entier $n \geq 1$, nous posons $[n] := \{1, \dots, n\}$, $[0] = \emptyset$. Une *permutation* σ de $[n]$, ($n \geq 1$), est une bijection de $[n]$ dans lui-même, pour $n = 0$ il n'y a qu'une seule permutation, la permutation vide ou nulle¹. Si σ est une permutation de $[n]$ alors σ est de *longueur* n et cette longueur est notée $l(\sigma)$ ou $|\sigma|$. Nous notons σ^{-1} la permutation inverse de σ . Une permutation σ de $[n]$ peut être représentée de différentes manières :

1. De manière linéaire par la suite de ses valeurs, c'est à dire, $\sigma := \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_n$, où $\sigma_i = \sigma(i)$, exemple $\sigma := 18364257$.
2. Par un tableau à deux lignes $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$, exemple $\sigma := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 1 & 8 & 3 & 6 & 4 & 2 & 5 & 7 \end{pmatrix}$,
3. Par un produit de cycles, exemple $\sigma := (1)(287546)(3)$, les cycles de longueur 1 n'étant souvent pas représentés.

1. Bien que la permutation nulle ne soit pas considérée dans les différents articles sur les permutations, on a préféré la définir ici pour rester en phase avec la définition générale des structures.

4. Graphiquement comme le montre la FIGURE 2.1.

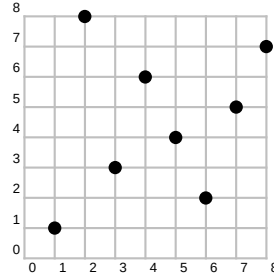


FIGURE 2.1 – Représentation graphique de la permutation $\sigma := 18364257$.

Nous adopterons, dans toute la suite, la représentation linéaire et, au besoin, la représentation graphique.

Il est bien connu qu'à toute permutation π est associé un graphe G_π , appelé *graphe de permutations*. Si π est une permutation de $[n]$ alors G_π est le graphe ayant pour sommets l'ensemble $[n]$ et pour arêtes les paires de sommets $\{i, j\}$ telles que l'ordre de i et j est inversé par π , en d'autres termes,

$$\{i, j\} \in E(G_\pi) \Leftrightarrow (i - j)(\pi_i^{-1} - \pi_j^{-1}) < 0.$$

Le graphe G_π est un graphe d'incomparabilité, les ordres qui lui sont associés sont appelés *ordres de permutations*.

Nous pouvons associer à π , de manière naturelle, un ordre P_π défini sur $[n]$ de la manière suivante. Considérons la représentation graphique de π . Ordonnons "naturellement" l'ensemble $\{(i, \pi_i) : i \in [n]\}$, c'est à dire $(i, \pi_i) \leq (j, \pi_j)$ si $i \leq j$ et $\pi_i \leq \pi_j$. Identifions chaque i au couple (i, π_i) , on a alors un ordre sur $[n]$. Le graphe d'incomparabilité de cet ordre est le graphe G_π . Les ordres P_π et $P_{\pi^{-1}}$ sont isomorphes.

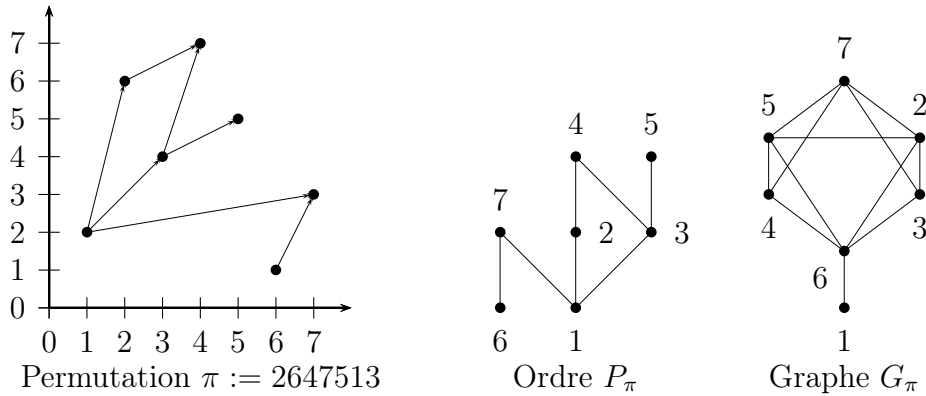
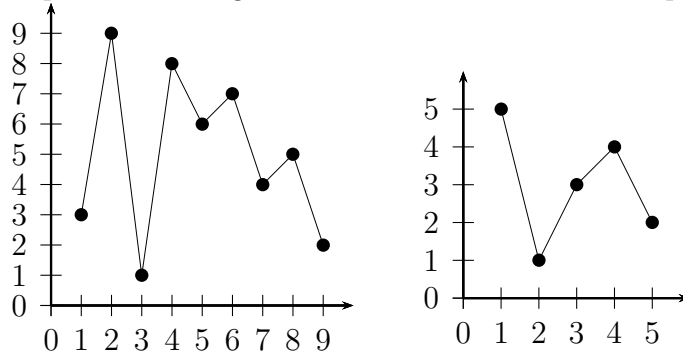
Exemple. Considérons la permutation $\pi = 2647513$ de longueur 7. Sa représentation graphique, le diagramme de Hasse de l'ordre P_π et le graphe G_π sont donnés dans la FIGURE 2.2.

2.1.1 Ordre sur les permutations

Désignons par $\mathfrak{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[n]$ et posons $\mathfrak{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$. Un ordre a été défini sur $\mathfrak{S}$ de la manière suivante.

Nous disons que deux suites finies de même longueur $n \geq 1$, $\alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n$ et $\beta = \beta_1 \dots \beta_n$ ont la *même forme* si, pour tous i, j , nous avons $\alpha_i < \alpha_j$ si et seulement si $\beta_i < \beta_j$. Ainsi, toute suite finie de nombres réels distincts a la même forme qu'une unique permutation ayant pour longueur le nombre d'éléments de la suite.

Nous disons que la permutation π de $[n]$ *contient* la permutation σ de $[k]$, et nous notons $\sigma \leq \pi$,

FIGURE 2.2 – Graphe G_π et diagramme de Hasse de l'ordre P_π pour $\pi := 2647513$.FIGURE 2.3 – Forme d'une permutation ($\pi := 391867452$ contient $\sigma := 51342$).

si π a une sous-suite de longueur k qui a la même forme que σ , cette sous-suite est appelée *copie de σ* . Plus précisément, $\sigma \leq \pi$ s'il existe des entiers $1 \leq x_1 < \dots < x_k \leq n$ tels que pour $1 \leq i, j \leq k$,

$$\sigma_i < \sigma_j \text{ si et seulement si } \pi_{x_i} < \pi_{x_j}. \quad (2.1)$$

En d'autres termes, $\sigma \leq \pi$ s'il existe des entiers $1 \leq x_1 < \dots < x_k \leq n$ tels que la normalisation de $\pi_{x_1}\pi_{x_2}\dots\pi_{x_k}$ sur $[k]$ donne σ . Par exemple $\pi := 391867452$ contient $\sigma := 51342$, comme nous pouvons le voir en considérant la sous-suite 91672 ($= \pi(2), \pi(3), \pi(5), \pi(6), \pi(9)$) (voir FIGURE 2.3). Si σ n'est pas contenue dans π , fait noté par $\sigma \not\leq \pi$, nous disons que π *évite* σ . L'une des caractéristiques de cet ordre est l'implication suivante : $\sigma < \pi \Rightarrow l(\sigma) < l(\pi)$.

Muni de cet ordre, l'ensemble ordonné $\mathfrak{S}$ est bien fondé. En effet, $\mathfrak{S}$ est ordonnée par niveaux de telle sorte que $\sigma \in \mathfrak{S}$ a le niveau n si et seulement si $l(\sigma) = n$, donc il suffit de prendre, pour tout sous-ensemble A de $\mathfrak{S}$, un élément de longueur minimum. Par contre, $\mathfrak{S}$ n'est pas belordonné, en effet nous savons, depuis longtemps, que $\mathfrak{S}$ contient des antichaînes infinies (voir [94, 105] ou plus récemment [102]).

Un sous-ensemble $\mathcal{C}$ de $\mathfrak{S}$ est une classe *héréditaire* si $\sigma < \pi \in \mathcal{C}$ implique $\sigma \in \mathcal{C}$. Son profil est $\varphi_{\mathcal{C}}(n) := |\mathcal{C} \cap \mathfrak{S}_n|$, c'est à dire, la fonction qui compte, pour tout entier n , le nombre

de permutations de $\mathcal{C}$ de niveau ou de longueur n . Par exemple, la fonction $\varphi_{\mathcal{C}}(n) = 0$ pour $n \in \mathbb{N}$ est le profil de la classe vide $\mathcal{C} = \emptyset$, alors que la classe $\mathfrak{S}$ a pour profil la fonction² $\varphi_{\mathfrak{S}}(n) = n!$.

Mis à part ces deux exemples triviaux, quelle est la valeur de $\varphi_{\mathcal{C}}(n)$ si $\emptyset \neq \mathcal{C} \neq \mathfrak{S}$? La conjecture de *Stanley-Wilf* assure que cette valeur est bornée par une exponentielle. Cette conjecture est la suivante :

Conjecture de Stanley-Wilf. *Pour toute permutation σ , il existe une constante $c > 0$ telle que $\varphi_{\text{Forb}(\sigma)}(n) < c^n$ pour tout entier $n \geq 1$.*

où $\text{Forb}(\sigma) := \{\pi \in \mathfrak{S} : \sigma \not\leq \pi\}$ pour tout $\sigma \in \mathfrak{S}$.

Il est très difficile de trouver une référence exacte de la conjecture de *Stanley-Wilf*. D'après R. Arratia [11], elle aurait été formulée lors d'une communication orale en 1990 et que d'après une communication de Wilf (1999) cette conjecture, à l'origine, avait la formulation suivante :

Conjecture de Stanley-Wilf (autre version). *Pour toute permutation σ , la limite de $\varphi_{\text{Forb}(\sigma)}(n)^{1/n}$ existe et est finie.*

Arratia, dans son papier [11], a montré que ces deux versions de la conjecture sont équivalentes.

La conjecture de *Stanley-Wilf* a suscité beaucoup de travaux sur, notamment, la fonction profil et son comportement asymptotique, voir par exemple les articles [2, 3, 69, 72] pour les classes de permutations, [13, 16, 17, 25, 70] pour les autres structures pour ne citer que ceux-là, il y a également les articles de Klazar [60, 61] qui résument les résultats sur l'énumération parus ces dernières années.

La validité de la conjecture de Stanley-Wilf a été confirmée par *Marcus et Tardös*³ en 2004. Dans la même période, *Kaiser et Klazar* (2003), ont reformulé la conjecture de *Stanley-Wilf* sous la forme suivante :

Conjecture de Stanley-Wilf reformulée. *Si $\mathcal{C}$ est une sous-classe héréditaire propre de permutations, alors il existe une constante $c > 0$ telle que $\varphi_{\mathcal{C}}(n) < c^n$ pour tout entier $n \geq 1$.*

En effet, si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de permutations telle que $\sigma \notin \mathcal{C}$ alors $\varphi_{\mathcal{C}}(n) \leq \varphi_{\text{Forb}(\sigma)}(n)$ pour tout $n \geq 1$. Nous rappelons aussi que toute classe héréditaire de permutations $\mathcal{C}$ a la forme $\text{Forb}(F)$ pour un sous-ensemble $F \subset \mathfrak{S}$ (voir section 1.3).

2. Cette formule serait connue depuis, au moins, cinquante siècles [40].

3. Pour certaines classes particulières de permutations, la conjecture a été établie avant 2004 voir [8, 19, 20, 21].

Ainsi reformulée, cette conjecture assure, qu'excepté pour la classe $\mathfrak{S}$, il n'y a pas d'autre profil superexponentiel. A noter que $\varphi_{\mathfrak{S}}$ croît plus vite que toute fonction exponentielle, en effet, pour toute constante $c > 0$, nous avons $\frac{c^{n+1}}{c^n} = c$, $\forall n$ alors que $\frac{(n+1)!}{n!} = n+1$.

Kaiser et Klazar [56] ont montré qu'il existe des "trous" dans le comportement des profils des classes héréditaires de $\mathfrak{S}$. Il ont montré que si $\mathcal{C}$ est héréditaire, alors, soit $\varphi_{\mathcal{C}}$ est bornée par un polynôme ($\varphi_{\mathcal{C}}(n) \leq n^c$ pour $n \geq 1$ et une constante $c > 0$) et dans ce cas c'est un polynôme, ou bien elle est minorée par le nombre de Fibonacci, $\varphi_{\mathcal{C}}(n) \geq F_n$ pour tout $n \geq 1$. Le nombre de Fibonacci F_n est définie par :

$$F_1 = 1, F_2 = 2, F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, n \geq 3;$$

Par récurrence, on a $F_n \leq 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$.

Par la suite, ils ont introduit les *nombre de Fibonacci généralisés* $F_{n,k}$, en montrant que si $\varphi_{\mathcal{C}}(n) < 2^{n-1}$ pour un entier n alors il existe un unique entier $k \geq 1$ et une constante $c > 0$ tels que $F_{n,k} \leq \varphi_{\mathcal{C}}(n) \leq n^c F_{n,k}$ pour tout $n \geq 1$. Le nombre de Fibonacci généralisé $F_{n,k}$ est le coefficient de x^n dans le développement en série de l'expression

$$\frac{1}{1 - x - x^2 - \dots - x^k}.$$

En particulier : $F_{n,1} = 1$ pour tout $n \geq 1$ et $F_{n,2} = F_n$. De manière plus générale,

$$\begin{cases} F_{n,k} = 0 & \text{pour } n < 0, \\ F_{0,k} = 1, \\ F_{n,k} = F_{n-1,k} + F_{n-2,k} + \dots + F_{n-k,k} & \text{pour } n > 0. \end{cases}$$

Ils montrent également que $F_{n,k} \leq 2^{n-1}$ et $F_{n,n} = 2^{n-1}$ pour un $k \geq 1$ fixé et $n \geq 1$. Le théorème de Kaiser et Klazar est le suivant :

Théorème 2.1. *Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de permutations, alors un seul parmi les quatre cas suivants se produit.*

1. Pour n suffisamment large la fonction $\varphi_{\mathcal{C}}(n)$ est éventuellement constante.
2. Il existe des entiers $a_0, \dots, a_k$, $k \geq 1$ et $a_k > 0$, tels que $\varphi_{\mathcal{C}}(n) = a_0 \binom{n}{0} + \dots + a_k \binom{n}{k}$ pour un n suffisamment large. De plus, $\varphi_{\mathcal{C}}(n) \geq n$ pour tout n .
3. Il existe une constante $c > 0$ et un unique entier $k \geq 2$, tels que $F_{n,k} \leq \varphi_{\mathcal{C}}(n) \leq n^c \cdot F_{n,k}$ pour tout n .
4. On a $\varphi_{\mathcal{C}}(n) \geq 2^{n-1}$ pour tout n .

Dans les cas 1 à 3 du théorème 2.1, la fonction génératrice est rationnelle [60]. *Albert et Atkinson* (2005) [2] ont donné des exemples de classes héréditaires dont les fonctions génératrices sont algébriques. Nous rappellerons leur résultat dans le paragraphe suivant, puis nous donnerons une généralisation au cas des structures binaires ordonnées.

2.1.2 Permutations simples et théorème d'Albert-Atkinson

Soit un entier positif n et soient $i, j \in [n]$ avec $i < j$. L'ensemble $[i, j] = \{i, i+1, \dots, j\}$ est appelé un intervalle de $[n]$.

Considérons la permutation $\pi = 2647513$ de $[7]$. L'intervalle $[2, 5]$, c'est à dire l'ensemble des éléments consécutifs 2, 3, 4, 5 est envoyé par π sur l'intervalle $[4, 7]$ (voir FIGURE 2.4). Le segment $[2, 5]$ est appelé *intervalle de π* .

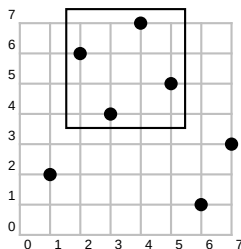


FIGURE 2.4 – Intervalle d'une permutation.

En d'autres termes, si $\pi = a_1 a_2 \dots a_n$ est une permutation de $[n]$, un *intervalle* de π est un ensemble d'indices consécutifs $I = [i, j] \subseteq [n]$ pour $1 \leq i \leq j \leq n$, c'est à dire un intervalle de $[n]$, tel que l'ensemble des valeurs $\pi(I) = \{\pi(i) : i \in I\} = \{a_i, a_{i+1}, \dots, a_j\}$ constitue un intervalle de $[n]$.

Pour toute permutation π de $[n]$, les singletons et l'ensemble $[n]$ sont des intervalles, ils sont dits *triviaux*. Si π n'a que des intervalles triviaux elle est dite *simple*. Exemple si $n \leq 2$ toutes les permutations sont simples. La permutation $\pi = 58317462$ est simple. Les permutations simples de petites longueurs sont 1, 12, 21, 2413, 3142. Soit S_n le nombre de permutations simples de $[n]$. Les valeurs de S_n pour $n = 1$ à 8 sont : 1, 2, 0, 2, 6, 46, 338, 2926 (série A111111 dans [101]). Asymptotiquement, S_n équivaut à $\frac{n!}{e^2}$ [3, 32, 75].

Alors que les intervalles de permutations ont des applications en biomathématiques, bio-informatique particulièrement pour les algorithmes génétiques (voir [32] pour explications et d'autres références), les permutations simples sont les éléments de base à partir desquels sont construites toutes les autres permutations, raison pour laquelle elles ont fait l'objet de nombreuses recherches ces dernières années.

Etant données une permutation σ de $[m]$ et des permutations $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, l'*inflation* de σ par $\alpha_1, \dots, \alpha_m$, notée $\sigma[\alpha_1, \dots, \alpha_m]$ est la permutation obtenue en remplaçant chaque terme σ_i par un intervalle qui a la même forme que α_i . Exemple $2413[1, 132, 321, 12] = 479832156$. L'inflation n'est autre que la somme lexicographique définie dans la section 3.1, c'est ce terme qui est utilisé dans les articles qui traitent des permutations.

Inversement, une *déflation* de π est toute expression de π comme une inflation, c'est à dire $\pi = \sigma[\pi_1, \dots, \pi_k]$. La permutation σ est alors appelée *quotient* de π . Le résultat suivant est dû à Albert et Atkinson [2].

Proposition 2.2. (*Albert-Atkinson [2]*). *Toute permutation peut-être écrite comme l’inflation d’une unique permutation simple. Si π peut s’écrire comme $\sigma = \alpha[\sigma_1, \dots, \sigma_m]$ où α est simple et $m \geq 4$ alors les α_i sont uniques.*

Ce résultat, qui donne la décomposition d’une permutation, est une spécialisation, au cas des permutations, des résultats de décomposition des structures sur lesquels nous reviendrons et dont l’un des pionniers est *Gallai* [49, 68].

Albert et Atkinson montrent dans leur article [2] que la connaissance des permutations simples dans une classe est souvent la clef pour comprendre sa structure et aborder le problème de son énumération. Le théorème d’Albert et Atkinson est le suivant :

Théorème 2.3. *Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de permutations contenant un nombre fini de permutations simples alors la série génératrice de $\mathcal{C}$, donnée par $\sum_{n \geq 1} \varphi_{\mathcal{C}}(n) X^n$ est algébrique.*

Nous donnerons, dans le chapitre 3, une généralisation de ce théorème aux structures relationnelles binaires ordonnées (structure dont toutes les relations sont binaires l’une d’entre elles étant un ordre total).

Comme illustration du Théorème 2.3, mentionnons que la classe des permutations qui ne sont pas au dessus de 2413 et 3142 ne contient aucune permutation simple non triviale (ces permutations sont appelées *permutations séparables*). Nous reviendrons sur la définition des permutations séparables dans le paragraphe 2.1.3

Permutations exceptionnelles

Etant donnée une permutation simple π on pourrait se demander quelles permutations simples sont contenues dans π ? En particulier, y a-t-il un terme qui pourrait être supprimé de π pour obtenir une suite qui aurait la même forme qu’une permutation simple ? Ceci n’est pas vrai dans tous les cas. *Albert et Atkinson* [2], adaptant, au cas des permutations, les résultats de *Schmerl et Trotter* [100] sur les structures critiques (voir Définition 3.2), montrent que la suppression d’un ou deux termes suffit. C’est ce qui est stipulé dans le théorème suivant, qui est une spécialisation au cas des permutations, d’un résultat plus général sur toute structure relationnelle dont les relations sont binaires et irréflexives [100].

Théorème 2.4. [2, 27] *Toute permutation simple de longueur $n \geq 2$ contient une permutation simple de longueur $n - 1$ ou $n - 2$.*

Dans la majorité des cas, la suppression d’un point suffit. Si la suppression de n’importe quel terme de π ne donne pas une suite de même forme qu’une permutation simple, alors π est dite *exceptionnelle*. *Schmerl et Trotter* [100] appellent de telles structures *critiques*, ils présentent une caractérisation complète dans le cas des structures relationnelles binaires irréflexives, des ensembles ordonnés, des graphes et des tournois. *Albert et Atkinson* [2] ont donné les formes des permutations exceptionnelles qui sont, en terme de permutations de $1, \dots, 2m$ pour $m \geq 2$:

- (i) $2.4.6....2m.1.3.5....2m-1.$
- (ii) $2m-1.2m-3....1.2m.2m-2....2.$
- (iii) $m+1.1.m+2.2....2m.m.$
- (iv) $m.2m.m-1.2m-1....1.m+1.$

2.1.3 Permutations séparables

Les *permutations séparables* ont été définies dans [4]. Ce sont des permutations qui peuvent-être construites à partir de la permutation 1 (permutation à un élément) en appliquant, de manière itérative, les deux opérations de sommation suivantes définies, respectivement, sur les permutations π de longueur m et σ de longueur n par :

$$(\pi + \sigma)(i) = \begin{cases} \pi(i) & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ \sigma(i - m) + m & \text{si } m + 1 \leq i \leq m + n, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$(\pi \oplus \sigma)(i) = \begin{cases} \pi(i) + n & \text{si } 1 \leq i \leq m, \\ \sigma(i - m) & \text{si } m + 1 \leq i \leq m + n, \end{cases} \quad (2.3)$$

L'ensemble des permutations séparables est formé par l'ensemble des permutations vérifiant (2.2) et (2.3) auquel nous incluons la permutation nulle. Du point de vu de la représentation graphique des permutations, une permutation non nulle est séparable si elle est soit de longueur 1 soit de longueur supérieure à 1 et il est possible de partitionner son graphe, par une ligne horizontale et une autre verticale, en quatre parties de telle sorte que deux parties opposées soient vides et les deux autres non vides et contiennent les graphes de permutations séparables de plus petites longueurs, comme illustré dans la FIGURE 2.5.

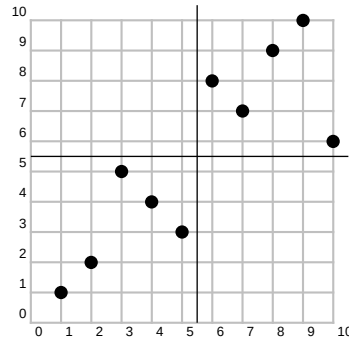


FIGURE 2.5 – Représentation d'une permutation séparable.

Bien que le terme "*permutation séparable*" date seulement du travail de *Bose, Buss et Lubiw* (1998)[23], ces permutations seraient apparues dans le travail d'*Avis et Newborn* (1981) (voir [4]). Les permutations séparables sont l'analogue (pour les permutations) de deux autres classes d'objets qui ont été largement étudiées : les *cographe*s (ou les graphes sans P_4) et les ordres *séries-parallèles* (ou les ordres sans N). Un résultat, qui découle des caractérisations de ces deux classes sus-citées, caractérise les permutations séparables.

Proposition 2.5. ($[4]$)

Une permutation π est séparable si et seulement si elle ne contient ni la permutation 2413 ni la permutation 3142.

Ce qui signifie que la classe des permutations séparables est, tout simplement, la classe héréditaire $Forb(\{2413, 3142\})$. Dans leur article [4], *Albert, Atkinson et Vatter* donnent la fonction génératrice de cette classe :

Proposition 2.6. La fonction génératrice de la classe des permutations séparables est :

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{2}$$

et le nombre de permutations séparables de longueur n est le $(n - 1)^{\text{ème}}$ nombre de Schröder.

La classe des permutations séparables est algébrique, sa fonction génératrice φ vérifie l'équation : $f = x + 2f^2/(1 + f)$ [4].

Nous rappelons que le $n^{\text{ème}}$ nombre de Schröder S_n est le nombre de chemins, sur une grille, allant du point $(0, 0)$ au point (n, n) en utilisant les étapes ou vecteurs $(0, 1)$, $(1, 0)$ ou $(1, 1)$ sans jamais traverser la droite $y = x$. Il est donné par $S_n = \sum_{i=0}^n \binom{2n-i}{i} C_{n-i}$ où $C_n = \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n}$ est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Catalan (nombre d'arbres binaires ayant n noeuds). La fonction génératrice des nombres de Schröder vérifie $f = 1 + xf + xf^2$ (série A006318 [101]).

Les permutations séparables ont été généralisées aux d -permutations séparables [12]. Une d -permutation séparable est une suite de d permutations de même longueur n dont la première est la permutation identité $12 \dots n$. Pour $d = 2$, on obtient la permutation séparable.

2.2 Bichaînes

Dans cette section nous codons les bichaînes par des permutations et traduisons, en termes de la théorie des relations, les résultats sur les permutations.

Une *bichaîne* est une paire $\mathcal{B} := (E, (L_1, L_2))$ où L_1 et L_2 sont deux ordres totaux sur l'ensemble E , nous la noterons par la suite $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$. Les notions d'isomorphisme, d'isomorphisme local et d'abritement définies dans la section 1.2.2 se déduisent de façon naturelle sur les bichaînes.

Soient $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ et $\mathcal{B}' := (E', L'_1, L'_2)$ deux bichaînes. Un *isomorphisme* de $\mathcal{B}$ sur $\mathcal{B}'$ est une bijection $f : E \rightarrow E'$ telle que

$$(x, y) \in L_i \quad \text{si et seulement si} \quad (f(x), f(y)) \in L'_i, \quad \forall x, y \in E \text{ et } i \in \{1, 2\}.$$

Si $A \subseteq E$, la *restriction* de $\mathcal{B}$ à A est la bichaîne $\mathcal{B}_{\upharpoonright A} := (A, L_{1\upharpoonright A}, L_{2\upharpoonright A})$ où $L_{i\upharpoonright A} := L_i \cap A^2$ (si L_i est donné sous forme de paires ordonnées).

Un *isomorphisme local* de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}'$ est tout isomorphisme d'une restriction $\mathcal{B}|_A$ de $\mathcal{B}$ à un sous-ensemble A de E sur une restriction $\mathcal{B}'|_{A'}$ de $\mathcal{B}'$ à un sous-ensemble A' de E' .

Une bichaîne $\mathcal{B}$ *s'abrite* dans une bichaîne $\mathcal{B}'$, nous notons $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}'$, si $\mathcal{B}$ est isomorphe à une restriction de $\mathcal{B}'$. Deux bichaînes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ telles que $\mathcal{B} \leq \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B}' \leq \mathcal{B}$ sont *équimorphes*. Si leurs domaines sont finis elles sont *isomorphes*. Cette relation d'abritement définit un préordre sur la classe des bichaînes. Sur la classe des types d'isomorphie c'est un ordre. Dans ce cas particulier et comme suggéré par Cameron [30], les types d'isomorphie peuvent-être codés par des permutations, comme nous le verrons dans ce qui suit.

2.2.1 Bichaînes et permutations

Soit $n \geq 1$ et soit σ une permutation de $[n]$. Associons la bichaîne $\mathcal{C}_\sigma := ([n], \leq, \leq_\sigma)$ où " $\leq$ " est l'ordre naturel sur $[n]$ et " $\leq_\sigma$ " est l'ordre induit par σ sur $[n]$ et défini par :

$$i \leq_\sigma j \quad \text{si et seulement si} \quad \sigma_i \leq \sigma_j, \quad \forall i, j \in [n]. \quad (2.4)$$

Exemple. 2.7. Si $\pi = 2647513$ alors, l'ordre linéaire $\leq_\pi$ sur $[7] = \{1, \dots, 7\}$ est donné par :

$$6 <_\pi 1 <_\pi 7 <_\pi 3 <_\pi 5 <_\pi 2 <_\pi 4.$$

De manière plus précise, l'ordre $\leq_\pi$ est donné par :

$$\pi_1^{-1} <_\pi \pi_2^{-1} <_\pi \pi_3^{-1} <_\pi \pi_4^{-1} <_\pi \pi_5^{-1} <_\pi \pi_6^{-1} <_\pi \pi_7^{-1}.$$

Cette permutation et l'ordre qui lui est associé sont représentés dans la FIGURE 2.2 en page 43. Les deux ordres $\leq$ et $\leq_\pi$ s'obtiennent naturellement à partir de cette représentation, en énumérant les points (i, π_i) (identifié à i) en parcourant la représentation de gauche à droite pour le premier ordre (l'ordre naturel $\leq$) et de bas en haut pour le deuxième ordre ($\leq_\pi$). L'ordre P_π de la FIGURE 2.2 est l'intersection de ces deux ordres linéaires.

Cameron, dans son article [30], considère une permutation σ de $[n]$ comme une paire d'ordres totaux sur $[n]$, le premier étant l'ordre naturel et le second l'ordre $\sigma_1 < \sigma_2 < \dots < \sigma_n$. La bichaîne obtenue ainsi est celle associée à σ^{-1} avec l'ordre donné par l'équation (2.4).

Lemme 2.8. Si $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ est une bichaîne finie⁴ alors $\mathcal{B}$ est isomorphe à la bichaîne $\mathcal{C}_\sigma$ pour un unique σ sur $[|E|]$.

Preuve. Observons dans un premier temps que si L est un ordre linéaire sur un n -ensemble E ($n \in \mathbb{N}$), alors il existe un unique isomorphisme l de $([n], \leq)$ sur (E, L) , ce qui revient à dire qu'il existe une façon unique d'écrire les éléments de E comme :

$l(1) <_L \dots <_L l(n)$ suivant l'ordre L .

Posons $|E| = n$ et soient l_1 et l_2 les isomorphismes associés à L_1 et L_2 respectivement. Posons $\sigma = l_1^{-1} \circ l_2$, alors l'application $l_1 : [n] \rightarrow E$ est un isomorphisme de $\mathcal{C}_\sigma$ sur $\mathcal{B}$.

4. Si $E = \emptyset$ alors $\mathcal{B}$ est la bichaîne vide, son type d'isomorphie est représenté par la permutation nulle.

En effet, en remarquant que l_1 transforme l'ordre naturel " $\leq$ " sur $[n]$ en L_1 , il suffit de montrer que l_1 transforme " $\leq_\sigma$ " en L_2 , c'est à dire :

$$\sigma_i \leq \sigma_j \Leftrightarrow l_1(\sigma_i) \leq l_1(\sigma_j).$$

Comme $l_1 \circ \sigma = l_2$, nous avons l'équivalence recherchée. $\square$

Comme corollaire de ce lemme nous avons :

Corollaire 2.9. *L'application $\Phi : \sigma \mapsto \mathcal{C}_\sigma$ est une bijection de $\mathfrak{S}$ dans l'ensemble des types d'isomorphie des bichaînes.*

Nous avons donc un moyen de représenter les types d'isomorphie des bichaînes. Comment s'étend la relation d'abritement ?

Soient σ et σ' deux permutations sur $[n]$ et $[n']$ respectivement. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.10. $\sigma \leq \sigma'$ si et seulement si $\mathcal{C}_\sigma \leq \mathcal{C}_{\sigma'}$.

Preuve. Pour la condition nécessaire, supposons $\sigma \leq \sigma'$ et posons $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ l'ensemble des indices donnés par la relation (2.1), on a $A \subseteq [n']$. Considérons l'application,

$l : [n] \rightarrow A$ définie par $l(i) := x_i$ pour tout $i \in [n]$.

Nous avons bien

$$i \leq_\sigma j \text{ si et seulement si } x_i \leq_{\sigma'} x_j,$$

donc l est un isomorphisme de $\mathcal{C}_\sigma$ sur $\mathcal{C}_{\sigma'|_A}$. D'où $\mathcal{C}_\sigma \leq \mathcal{C}_{\sigma'}$.

Pour la condition suffisante, si $\mathcal{C}_\sigma \leq \mathcal{C}_{\sigma'}$ alors $\mathcal{C}_\sigma$ est isomorphe à $\mathcal{C}_{\sigma'|_B}$ pour un n -ensemble B de $[n']$. Notons par f cet isomorphisme, alors pour tous $i, j \in [n]$ nous avons :

1. $i \leq j$ si et seulement si $f(i) \leq f(j)$,
2. $i \leq_\sigma j$ si et seulement si $f(i) \leq_{\sigma'} f(j)$

Posons $x_i = f(i)$ pour tout $i \in [n]$, les x_i vérifient la relation (2.1), donc $\sigma \leq \sigma'$. $\square$

Ce simple fait, donné par le Lemme 2.10, permet d'étudier la classe des permutations au moyen de la théorie des relations. En particulier, les classes héréditaires de permutations correspondent aux classes héréditaires de bichaînes et comme nous le verrons ci-dessous, les permutations simples correspondent aux bichaînes indécomposables.

2.2.2 Bichaîne indécomposable

Soit L un ordre linéaire sur un ensemble E et soient $x, y \in E$ avec $x <_L y$. L'ensemble $[x, y]_L = \{z \in E / x \leq_L z \leq_L y\}$ est un intervalle pour L .

Définition 2.11. Soit $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ une bichaîne. Un sous-ensemble A de E est un intervalle pour $\mathcal{B}$ (également appelé autonome) si pour tout $i \in \{1, 2\}$:

$$(a, b) \in L_i \Leftrightarrow (a', b) \in L_i, \text{ pour tout } a, a' \in A \text{ et } b \notin A. \quad (2.5)$$

L'ensemble vide $\emptyset$, les singletons $(\{x\}_{x \in E})$ et l'ensemble E sont des intervalles, ils sont dits *triviaux*.

Il ressort de la Définition 2.11 et de l'équation (2.5) que pour une bichaîne $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$, un sous-ensemble propre non vide A de E est un intervalle si et seulement si c'est un intervalle commun pour L_1 et L_2 .

Définition 2.12. Une bichaîne $\mathcal{B}$ est dite *indécomposable* si elle ne possède pas d'intervalle non trivial.

Donc, la bichaîne $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ est indécomposable si et seulement si L_1 et L_2 ne possèdent pas d'intervalle en commun.

Soit $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ une bichaîne avec $|E| = n$ et soit $\mathcal{C}_\sigma := ([n], \leq, \leq_\sigma)$ la bichaîne associée à la permutation σ de $[n]$ qui définit le type d'isomorphie de $\mathcal{B}$. Il est facile de voir, du fait de l'isomorphisme entre $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}_\sigma$, que tout intervalle commun à L_1 et L_2 induit un intervalle commun à " $\leq$ " et " $\leq_\sigma$ " et vice-versa, d'où :

Lemme 2.13. Une bichaîne $\mathcal{B}$ est indécomposable si et seulement si la permutation σ qui définit son type d'isomorphie est simple.

Preuve. D'après ce qui précède, il suffit de montrer que σ est simple si et seulement si $\mathcal{C}_\sigma$ est indécomposable.

Si I est un intervalle de $\mathcal{C}_\sigma$, alors I est un intervalle de $[n]$ (car c'est un intervalle pour $\leq$). Posons alors $I = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$. D'après l'équation (2.4), l'ordre $\leq_\sigma$ est donné par : $\sigma_1^{-1} <_\sigma \sigma_2^{-1} <_\sigma \dots <_\sigma \sigma_n^{-1}$. Comme I est un intervalle pour $\leq_\sigma$ alors il existe $k < l$ avec $l - k = j - i$ tels que $\{\sigma_k^{-1}, \sigma_{k+1}^{-1}, \dots, \sigma_l^{-1}\} = I$. Donc $\sigma(I) = \{\sigma_i, \dots, \sigma_j\} = \{k, k+1, \dots, l\}$ qui est un intervalle de $[n]$. D'où I est un intervalle de σ .

Inversement, si I est un intervalle de σ , alors I et $\sigma(I)$ sont des intervalles de $[n]$. Donc I est un intervalle de $\leq$ et il existe $m < k$ tels que $\{m, m+1, \dots, k\} = \sigma(I)$ avec $|I| = k - m + 1$. Donc, $\sigma^{-1}\{m, m+1, \dots, k\} = \{\sigma_m^{-1}, \sigma_{m+1}^{-1}, \dots, \sigma_k^{-1}\} = I$, ce qui implique que I est un intervalle pour $\leq_\sigma$. Il s'ensuit que I est un intervalle pour $\mathcal{C}_\sigma$. $\square$

La notion d'indécomposabilité est plutôt ancienne. La notion d'intervalle remonte à Fraïssé [42], voir aussi [43]. Un résultat fondamental sur la décomposition des structures binaires en intervalles a été obtenu par Gallai [49] (voir [39] pour d'autres extensions). Il n'est donc pas surprenant que certains résultats sur les permutations simples étaient déjà connus (par exemple leur évaluation asymptotique [75]).

Avec cette correspondance bijective entre les permutations et les types d'isomorphie des bichaînes, le Théorème 2.3 d'Albert et Atkinson devient :

Théorème 2.14. Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de bichaînes finies contenant un nombre fini de bichaînes indécomposables alors la série génératrice de $\mathcal{C}$ est algébrique.

Nous établirons dans le chapitre 3 une extension de ce résultat aux structures binaires ordonnées.

2.2.3 Bichaîne séparable

Les bichaînes *séparables* sont des bichaînes qui peuvent-être construites à partir de la bichaîne unité 1 (définie sur un ensemble à un élément) en appliquant, de manière itérative, les deux opérations de sommation suivantes :

Si $\mathcal{B} := (E, L_1, L_2)$ et $\mathcal{B}' := (E', L'_1, L'_2)$ sont deux bichaînes définies sur deux ensembles disjoints E et E' , de cardinalités $n \geq 1$ et $m \geq 1$ respectivement (si les deux ensembles ne sont pas disjoints, nous pouvons recopier les relations sur des ensembles disjoints et effectuer les opérations), nous posons :

$$\begin{aligned}\mathcal{B} + \mathcal{B}' &:= (E \cup E', L_1 + L'_1, L_2 + L'_2) \\ \mathcal{B} \oplus \mathcal{B}' &:= (E \cup E', L_1 + L'_1, L'_2 + L_2)\end{aligned}$$

où $L_1 + L'_1$ désigne la somme lexicographique de L_1 et L'_1 , c'est à dire :

$$x \leq_{(L_1+L'_1)} y \text{ si } \begin{cases} x, y \in E \text{ et } x \leq_{L_1} y \\ \text{ou bien} \\ x, y \in E' \text{ et } x \leq_{L'_1} y \\ \text{ou bien} \\ x \in E \text{ et } y \in E' \end{cases}$$

Nous incluons à cet ensemble la bichaîne vide.

Si σ et σ' sont les permutations de $[n]$ et $[m]$ respectivement, qui représentent les types d'isomorphie des bichaînes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ respectivement alors :

Proposition 2.15. *Les permutations $\sigma + \sigma'$ et $\sigma \oplus \sigma'$, définies par les relations (2.2) et (2.3) représentent les types d'isomorphie des bichaînes $\mathcal{B} + \mathcal{B}'$ et $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$ respectivement⁵.*

Preuve. D'après le Lemme 2.8, les bichaînes $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont isomorphes aux bichaînes $\mathcal{C}_\sigma$ et $\mathcal{C}_{\sigma'}$ respectivement. Donc $\mathcal{B} + \mathcal{B}'$ est isomorphe à $\mathcal{C}_\sigma + \mathcal{C}_{\sigma'}$ et $\mathcal{B} \oplus \mathcal{B}'$ est isomorphe à $\mathcal{C}_\sigma \oplus \mathcal{C}_{\sigma'}$ (en prenant soin, auparavant, de recopier les relations de $\mathcal{C}_{\sigma'}$ sur l'ensemble $[m] + n$, le translaté de l'ensemble $[m]$ obtenu en rajoutant la valeur n à chaque élément de l'ensemble $[m]$). Nous devons donc montrer que $\mathcal{C}_\sigma + \mathcal{C}_{\sigma'} = \mathcal{C}_{\sigma+\sigma'}$ et $\mathcal{C}_\sigma \oplus \mathcal{C}_{\sigma'} = \mathcal{C}_{\sigma \oplus \sigma'}$.

Pour la première égalité, il est clair que la somme lexicographique de l'ordre naturel sur $[n]$ et de l'ordre naturel sur $[m] + n$ donne l'ordre naturel sur $[n + m]$. D'un autre côté, la somme lexicographique $\leq_\sigma + \leq_{\sigma'}$ donne l'ordre :

$$\sigma_1^{-1} < \sigma_2^{-1} < \dots < \sigma_n^{-1} < \sigma_1'^{-1} + n < \sigma_2'^{-1} + n < \dots < \sigma_n'^{-1} + n.$$

Comme, d'après la relation (2.2), $\sigma_i^{-1} = (\sigma + \sigma')_i^{-1}$ pour tout $1 \leq i \leq n$ et $\sigma_i'^{-1} + n = (\sigma + \sigma')_{i-n}^{-1} + n$ pour tout $n + 1 \leq i \leq n + m$, alors nous avons $\leq_\sigma + \leq_{\sigma'} = \leq_{\sigma+\sigma'}$. D'où le

5. La bichaîne nulle est représentée par la permutation nulle.

résultat.

La deuxième égalité se démontre de la même manière. $\square$

Le résultat suivant découle alors de façon naturelle :

Corollaire 2.16. *Une bichaîne finie $\mathcal{B}$ est séparable si et seulement si la permutation qui représente son type d'isomorphie est séparable.*

Les résultats d'énumération donnés dans [4] nous permettent d'énoncer ce qui suit :

Proposition 2.17. *La fonction génératrice de la classe des bichaînes séparables est*

$$\frac{1 - x - \sqrt{1 - 6x + x^2}}{2}$$

et le nombre de bichaînes séparables à n éléments (à l'isomorphisme près) est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Schröder.

Chapitre 3

Structures relationnelles binaires ordonnées

Dans ce chapitre, nous généralisons des résultats donnés dans [2] et [4] au cas des structures binaires ordonnées.

Une *structure relationnelle binaire*, ou *structure binaire* ou encore une *2-structure* est une structure $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ où les ρ_i sont des relations binaires sur E . Soit un entier $k \geq 1$. Nous appelons *structure binaire de type k* , ou simplement *structure de type k* s'il n'y a pas de confusion, une structure binaire comportant k relations binaires, c'est à dire lorsque $|I| = k$. Nous désignons par Ω_k l'ensemble des structures binaires finies de type k .

Une structure relationnelle binaire est *ordonnée* si une de ses relations ρ_i est un ordre linéaire. Nous conviendrons que c'est la première relation ρ_1 . Donc, une structure relationnelle binaire est ordonnée si elle s'écrit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_j)_{j \in J})$ où " $\leq$ " est un ordre linéaire sur E et les ρ_j sont des relations binaires sur E . Nous appellerons *structure binaire ordonnée de type k* , ou *structure ordonnée de type k* s'il n'y a pas de confusion, une structure binaire ordonnée formée d'un ordre total et de $|J| = k$ relations binaires.

Les exemples basiques de ces structures sont les chaînes, ou structures ordonnées de type 0 (pour $J = \emptyset$), les bichaînes, ou structures ordonnées de type 1 (pour $J = \{1\}$ et ρ_1 est un ordre linéaire) et les multichaînes (J fini et ρ_j est un ordre linéaire pour tout $j \in J$). Nous désignons par Θ_k la collection des structures binaires ordonnées finies de type k . Il est clair que $\Theta_k \subseteq \Omega_{k+1}$.

3.1 Indécomposabilité et somme lexicographique

3.1.1 Intervalle

Définition 3.1. Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure binaire. Un sous-ensemble A de E est un intervalle de $\mathcal{R}$ si pour tout $i \in I$:

$$(x\rho_i a \Leftrightarrow x\rho_i a') \text{ et } (a\rho_i x \Leftrightarrow a'\rho_i x) \text{ pour tous } a, a' \in A \text{ et } x \notin A.$$

En d'autres termes, A est un intervalle de $\mathcal{R}$ si un élément $x \notin A$ "voit" tous les éléments de A de la même façon et deux éléments quelconques a_1 et a_2 de A "voient" tout élément $x \notin A$ de la même façon.

L'appellation *intervalle* n'est pas la seule utilisée dans la littérature, on y trouve l'appellation *module*, ou *ensemble homogène*, en anglais *autonomous*, *partitive set* ou *clan*.

L'ensemble vide $\emptyset$, les singletons $\{x\}_{x \in E}$ et l'ensemble E sont des intervalles et sont dits *triviaux*. Si $\mathcal{R}$ ne possède pas d'intervalle non trivial elle est dite *indécomposable*. Avec cette définition toute structure à deux éléments est indécomposable. Une structure indécomposable d'au moins trois éléments est *première* ("prime" en anglais).

Voici les propriétés les plus connues des intervalles :

1. Tout intervalle de $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est un intervalle de $\mathcal{R}^c := (E, (\rho_i^c)_{i \in I})$ et de $\mathcal{R}^{-1} := (E, (\rho_i^{-1})_{i \in I})$.
2. Si A est un intervalle de $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ et $F \subseteq E$ alors $F \cap A$ est un intervalle de $\mathcal{R}_{|_F}$.
3. Si A est un intervalle de $\mathcal{R}$ et $B \subseteq A$ alors B est un intervalle de $\mathcal{R}$ si et seulement si B est un intervalle de $\mathcal{R}_{|_A}$.
4. Si A et B sont deux intervalles de $\mathcal{R}$ alors $A \cap B$ est un intervalle de $\mathcal{R}$; de plus si $A \cap B \neq \emptyset$ alors $A \cup B$ est un intervalle de $\mathcal{R}$ et si $A \setminus B \neq \emptyset$ alors $B \setminus A$ est un intervalle de $\mathcal{R}$.

Nous désignons par $Ind(\Omega_k)$ (resp. $Ind(\Theta_k)$) la classe des membres indécomposables de Ω_k (resp. de Θ_k).

Nous rappelons ici les résultats de *Schmerl et Trotter* [100] sur des structures indécomposables particulières, les structures *critiques*, notion introduite en (1993) :

Définition 3.2. Une structure binaire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est critique si elle est première et $\mathcal{R}_{|_{E \setminus \{x\}}}$ est non indécomposable pour tout $x \in E$.

Notons que, d'après cette définition, E a au moins quatre éléments. Parmi les résultats donnés dans leur article, nous avons :

Théorème 3.3. [100] Toute structure indécomposable de taille $n \geq 3$ abrite, au moins, une structure indécomposable de taille $n - 1$ ou $n - 2$.

Théorème 3.4. [100] Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure binaire indécomposable d'ordre $n \geq 7$. Alors il existe deux éléments distincts $c, d \in E$ tels que $\mathcal{R}_{|_{E \setminus \{c, d\}}}$ est indécomposable.

Corollaire 3.5. [100] Supposons que $\mathcal{R}$ soit une structure indécomposable d'ordre n non critique et supposons $5 \leq m \leq n$. Alors $\mathcal{R}$ possède une sous-structure indécomposable d'ordre m .

Nous disons qu'une classe de $Ind(\Omega_k)$ est héréditaire dans $Ind(\Omega_k)$ si elle contient tout membre de $Ind(\Omega_k)$ qui s'abrite dans l'un de ses membres. Un résultat analogue au Théorème 1.13 pour les classes de $Ind(\Omega_k)$ est le suivant :

Théorème 3.6. *Toute classe héréditaire infinie de $Ind(\Omega_k)$, contient un idéal infini.*

Preuve. Soit $\mathcal{J}$ une classe héréditaire infinie de $Ind(\Omega_k)$.

Cas 1 : $\mathcal{J}$ ne possède pas d'antichaîne infinie, donc $\mathcal{J}$ est belordonné et est donc une union finie d'idéaux (Théorème 1.8). $\mathcal{J}$ étant infini, l'un des idéaux est infini.

Cas 2 : $\mathcal{J}$ possède une antichaîne infinie. Nous démontrons de la même façon que pour la Proposition 1.14 que $\mathcal{J}$ possède une section initiale non vide et belordonnée $\mathcal{J}$ ayant un nombre infini de bornes. Pour montrer que $\mathcal{J}$ est infini, nous utilisons le Théorème 3.3 de Schmerl et Trotter. Si $\mathcal{J}$ était fini, la taille de ses éléments serait bornée. Soit k cette borne. D'après Schmerl et Trotter, les bornes de $\mathcal{J}$ seraient de tailles $k+1$ ou $k+2$ et seraient donc en nombre fini.

Si $\mathcal{J}$ est filtrante alors $\mathcal{J}$ est un idéal, sinon, $\mathcal{J}$, étant belordonnée, est une union finie d'idéaux et l'un d'eux est infini. $\square$

3.1.2 Composition et réduction

Soient $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in [k]}) \in \Omega_k$ et $v \in E$. L'opération de *composition de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}$ suivant v* , où $\mathcal{S} \in \Omega_k$ et $dom(\mathcal{S}) \cap E = \emptyset$, consiste en la substitution¹ du sommet v de E par la relation $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{R}$. Dans la structure résultante, notée $\mathcal{R}[v : \mathcal{S}]$, qui est une structure $\mathcal{R}' := (E', (\rho'_i)_{i \in [k]})$ où $E' = (E \setminus \{v\}) \cup dom(\mathcal{S})$, tout élément de $E \setminus \{v\}$ est relié à tous les éléments de $dom(\mathcal{S})$ de la même façon qu'il est relié à v dans $\mathcal{R}$, c'est à dire, pour tout $i \in [k]$:

$$\forall u \in E \setminus \{v\}, \begin{cases} (u, v) \in \rho_i \Leftrightarrow (u, x) \in \rho'_i \\ \text{et} \\ (v, u) \in \rho_i \Leftrightarrow (x, u) \in \rho'_i \end{cases} \quad \forall x \in dom(\mathcal{S}).$$

Avec cette définition, un sous-ensemble A de E est un intervalle de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ est de la forme $\mathcal{R}'[v : \mathcal{S}]$ où $\mathcal{S} = \mathcal{R}|_A$.

Une propriété de l'opération de composition est la suivante : si $w \in dom(\mathcal{S})$ alors

$$\mathcal{R}[v : \mathcal{S}][w : \mathcal{S}'] = \mathcal{R}[v : \mathcal{S}[w : \mathcal{S}']].$$

Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in [k]}) \in \Omega_k$ possédant un intervalle non trivial A . L'opération de *réduction* de $\mathcal{R}$ suivant A consiste en la contraction de l'ensemble A en un sommet x_A ($x_A \notin E$), la structure résultante, notée $red_A[\mathcal{R}]$ est une structure $\mathcal{R}'' = (E'', (\rho''_i)_{i \in [k]})$ définie par :

- $E'' = (E \setminus A) \cup \{x_A\}$ avec $x_A \notin E$.
- pour tout $i \in [k]$, la relation ρ''_i est donnée par :
 - $(x, y) \in \rho''_i \Leftrightarrow (x, y) \in \rho_i, \quad \forall x, y \in E \setminus A,$
 - $(x, x_A) \in \rho''_i \Leftrightarrow (x, a) \in \rho_i, \quad \forall a \in A \text{ et } x \in E \setminus A,$
 - $(x_A, x) \in \rho''_i \Leftrightarrow (a, x) \in \rho_i, \quad \forall a \in A \text{ et } x \in E \setminus A,$
 - $(x_A, x_A) \in \rho''_i \Leftrightarrow \rho_i \text{ est réflexive} \quad \forall i \in [k].$

1. A noter que dans cette opération, le fait que (v, v) appartienne ou non à ρ_i , pour un $i \in I$, n'apparaît pas dans la structure résultante.

Il existe un lien entre les deux opérations de composition et de réduction. Sur les structures où toutes les relations sont réflexives ou irréflexives elles sont inverses l'une de l'autre, en d'autres termes :

- Si $\mathcal{R}' = \text{red}_A[\mathcal{R}]$ alors $\mathcal{R} = \mathcal{R}'[x_A : \mathcal{R}_{\upharpoonright_A}]$,
- Si toutes les relations de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont réflexives (ou irréflexives) alors :

$$\mathcal{R}' = \mathcal{R}[v : \mathcal{S}] \Rightarrow \mathcal{R} = \text{red}_{\text{dom}(\mathcal{S})}[\mathcal{R}'].$$

3.1.3 Somme lexicographique et décomposition de 2-structures

Définition 3.7. Soient $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in [k]})$ une structure binaire de Ω_k et $\mathfrak{F} := (\mathcal{S}_x)_{x \in E}$ une famille de structures binaires $\mathcal{S}_x := (E_x, (\rho_i^x)_{i \in [k]})$, indexée par les éléments de E . Les ensembles E et E_x sont supposés non-vides. La somme lexicographique de $\mathfrak{F}$ suivant $\mathcal{R}$ ou tout simplement la $\mathcal{R}$ -somme de $\mathfrak{F}$, notée par $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x$ (ou encore si $E = \{x_1, \dots, x_n\}$, $\mathcal{S}_{x_1} \bigoplus_{\mathcal{R}} \dots \bigoplus_{\mathcal{R}} \mathcal{S}_{x_n}$) est la structure binaire $\mathcal{T}$ obtenue par la composition de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{S}_x$ suivant x , pour tout $x \in E$. Autrement dit, en substituant à chaque élément $x \in E$ la structure $\mathcal{S}_x$. Plus précisément $\mathcal{T} = (Z, (\tau_i)_{i \in [k]})$ où $Z := \{(x, y) : x \in E, y \in E_x\}$ et pour tout $i \in [k]$, $(x, y)\tau_i(x', y')$ si

- ou bien $x \neq x'$ et $x\rho_i x'$
- ou bien $x = x'$ et $y\rho_i^x y'$.

De manière triviale, si on remplace chaque $\mathcal{S}_x$ de la Définition 3.7 par une structure binaire isomorphe $\mathcal{S}'_x$, alors $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}'_x$ est isomorphe à $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x$. Donc, on peut supposer que les domaines des structures $\mathcal{S}_x$ sont deux à deux disjoints. Dans ce cas on peut modifier la définition 3.7 ci-dessus, en posant $Z := \bigcup_{x \in E} E_x$ et pour deux éléments $z \in E_x$ et $z' \in E_{x'}$ et tout $i \in [k]$, nous avons $z\tau_i z'$ si

- ou bien $x \neq x'$ et $x\rho_i x'$,
- ou bien $x = x'$ et $z\rho_i^x z'$.

Avec cette définition, chaque ensemble E_x est un intervalle de la somme $\mathcal{T}$. Par ailleurs, soit $Z/\equiv$ le quotient de Z constitué par les blocs de cette partition en intervalles.

Soit $p : Z \rightarrow Z/\equiv$ la surjection canonique de Z dans $Z/\equiv$ et soit $\mathcal{R}'$ l'image de $\mathcal{T}$ par p (ce qui signifie que $\mathcal{R}' = (Z/\equiv, (\rho'_i)_{i \in [k]})$ où $\rho'_i = \{(p(x_1), p(x_2)) : (x_1, x_2) \in \rho_i\}$).

Si on identifie chaque bloc E_x à l'élément x , alors $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ coïncident sur les paires d'éléments distincts. Elles coïncident si on ne considère que des relations réflexives (ou irréflexives). Inversement, si $\mathcal{T} := (Z, (\tau_i)_{i \in [k]})$ est une structure binaire et $(E_x)_{x \in E}$ une partition de Z en intervalles non vides de $\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}$ est une somme lexicographique de $(\mathcal{T}_{\upharpoonright_{E_x}})_{x \in E}$ suivant le quotient $Z/\equiv$. De manière plus formelle :

Définition 3.8. Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in [k]})$ une structure binaire et $\mathcal{P} := \{E_1, \dots, E_q\}$ avec $q > 1$ une partition de E en intervalles non vides de $\mathcal{R}$. La décomposition de $\mathcal{R}$ suivant $\mathcal{P}$ est la donnée de la structure $\mathcal{S}$ et de la famille des structures $\mathcal{H} = \{\mathcal{R}_1, \dots, \mathcal{R}_q\}$ telles que $\mathcal{R}$ est la somme lexicographique de $\mathcal{H}$ suivant $\mathcal{S}$, autrement dit, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \bigoplus_{\mathcal{S}} \dots \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{R}_q$ où, pour tout $i \in \{1, \dots, q\}$ on a $\mathcal{R}_i = \mathcal{R}_{\upharpoonright_{E_i}}$ et $\mathcal{S} = \text{red}_{E_1, \dots, E_q}[\mathcal{R}]$ est la réduction de $\mathcal{R}$ suivant $E_1, \dots, E_q$ simultanément. $\mathcal{S}$ est appelée structure quotient de $\mathcal{R}$ par $\mathcal{P}$ et est notée $\mathcal{S} = \mathcal{R}/\mathcal{P}$.

Observation 3.9. *Toute structure relationnelle binaire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in [k]})$ admet au moins deux décompositions, dites triviales : la décomposition suivant la partition $\mathcal{P} := \{\{x\}, x \in E\}$ (dans laquelle $\mathcal{S} = \mathcal{R}$ et $|E_i| = 1$ pour tout $1 \leq i \leq |E|$) et celle suivant $\mathcal{P}' := \{E\}$ (dans laquelle $\mathcal{H} = \{\mathcal{R}\}$ et $\mathcal{S}$ est une structure à un élément). Ces partitions sont dites partitions triviales.*

D'après ce qui précède nous avons :

Observation 3.10. *Il existe une correspondance bijective entre les décompositions des structures binaires en sommes lexicographiques et les partitions de leurs domaines en intervalles.*

Disons qu'une somme lexicographique $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x$ est triviale si $|E| = 1$ ou $|E_x| = 1$ pour tout $x \in E$, sinon elle est *non triviale* ; aussi, une structure binaire est *somme-indécomposable* si elle n'est pas isomorphe à une somme lexicographique non triviale. Nous avons immédiatement :

Observation 3.11. *Une structure binaire $\mathcal{R}$ est indécomposable si et seulement si elle possède uniquement deux décompositions si et seulement si elle est somme-indécomposable.*

Une propriété importante de ces décompositions est la suivante :

Propriété 3.12. *L'ensemble des partitions de E , ordonné par affinement, est un treillis dont l'ensemble des partitions de E en intervalles de $\mathcal{R}$ est un sous-treillis.*

Nous rappelons qu'une partition $\mathcal{P}$ est plus fine qu'une partition $\mathcal{P}'$ si tout élément de $\mathcal{P}'$ est une union d'éléments de $\mathcal{P}$, c'est à dire que les parties de $\mathcal{P}'$ sont fractionnées dans $\mathcal{P}$ en plus petites parties. La partition la plus fine est la partition triviale formée par des singletons et la moins fine est celle formée de l'ensemble E .

3.1.4 Partition forte et théorème de décomposition

Parmi toutes les décompositions d'une structure binaire finie $\mathcal{R}$, il existe une qui est cano-
nique. Cette décomposition est due à Gallai [49, 68]. Nous la désignons par *décomposition de Gallai*, elle est définie ci-dessous.

Définition 3.13. *Deux ensembles A et B se rencontrent si $A \cap B \neq \emptyset$; ils se chevauchent si $A \cap B \neq \emptyset$, $A \setminus B \neq \emptyset$ et $B \setminus A \neq \emptyset$.*

Définition 3.14. *Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire. Un intervalle A de $\mathcal{R}$ est dit fort s'il est non vide et ne chevauche aucun autre intervalle. Autrement dit, A est fort si :*

- $A \neq \emptyset$.
- Pour tout intervalle $B \neq A$ on a $B \cap A \neq \emptyset \Rightarrow B \subset A$ ou $A \subset B$.

Un intervalle fort A est dit maximal s'il est maximal pour l'inclusion parmi les intervalles forts.

Il est clair que les intervalles triviaux non vides sont forts.

Lemme 3.15. *Pour toute structure binaire finie $\mathcal{R}$, il existe une unique partition de son domaine, $\text{dom}(\mathcal{R})$, en intervalles forts maximaux.*

Preuve. Posons $E = \text{dom}(\mathcal{R})$. Si $|E| = 1$, le résultat est évident. Supposons que E possède au moins deux éléments. L'existence de cette partition est due au fait que tout élément $x \in E$ est inclus dans un intervalle fort propre, en l'occurrence $\{x\}$. Donc, $x \in A_x$, où A_x est un intervalle fort maximal parmi les intervalles forts propres contenant x . Aussi, si $A_x \cap A_y \neq \emptyset$ alors $A_x = A_y$.

Pour l'unicité, supposons que $\mathcal{R}$ possède deux telles partitions $\mathcal{P} := (A_j)_{j \in J}$ et $\mathcal{P}' := (B_k)_{k \in K}$. Il existe alors deux indices j et k tels que $A_j \neq B_k$ et $A_j \cap B_k \neq \emptyset$. Nous avons les deux cas suivants :

- 1)- Soit $A_j \subset B_k$ (ou bien $B_k \subset A_j$) ce qui constitue une contradiction avec la maximalité de A_j ou de B_k .
 - 2)- Soit A_j et B_k se chevauchent, ce qui contredit le fait que A_j et B_k sont forts.
- Il s'ensuit qu'une telle partition est unique. $\square$

Nous désignons cette partition par *partition de Gallai*.

La *décomposition de Gallai* de $\mathcal{R}$ est sa décomposition suivant la *partition de Gallai*. Le quotient de $\mathcal{R}$ induit par cette partition est le *quotient de Gallai*.

C'est sur la partition de Gallai que se base le théorème de décomposition des 2-structures finies (Théorème 3.17). Ce théorème (voir [34, 49, 58] pour les graphes, [39] pour les 2-structures) que nous donnons ici sous une autre forme (Théorème 3.20) est, semble-t-il, à maintes fois redécouvert, depuis le théorème de décomposition des graphes, appelé théorème de décomposition modulaire, dû à Gallai (1967) [49], étendu par Kelly (1985) [58] au cas des graphes infinis. Pour le cas des graphes dirigés, les généralisations et d'autres références voir [34, 39, 71].

Remarque 3.16. Dans [39], la 2-structure ou structure binaire n'a pas la même définition que celle que nous avons adoptée dans ce document, elle consiste en un couple $g := (D, R)$ où D est un ensemble fini non vide et R une relation d'équivalence sur D_2 , $R \subseteq D_2 \times D_2$ avec $D_2 = \{(x, y) / x \in D, y \in D, x \neq y\}$. Les 2-structures, à notre sens, sont des 2-structures au sens de [39] mais avec plus d'informations ; en effet, soit $\mathcal{S} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une 2-structure telle que nous l'avons définie, avec toutes les relations irréflexives. Soit R une relation sur E_2 définie par

$$(x_1, y_1)R(x_2, y_2) \Leftrightarrow \begin{cases} (x_1, y_1) \in \rho_i \Leftrightarrow (x_2, y_2) \in \rho_i \\ \text{et} \\ (y_1, x_1) \in \rho_i \Leftrightarrow (y_2, x_2) \in \rho_i \end{cases} \quad \text{pour tout } i \in I$$

R est une relation d'équivalence sur E_2 et $g := (E, R)$ est une 2-structure, au sens de [39]. Cette définition rejoint plus celle du squelette (skeleton) d'une structure binaire défini par Schmerl et Trotter [100].

Théorème 3.17. Soit $\mathcal{R}$ une 2-structure finie ayant au moins deux éléments et $\mathcal{P}_{\max}$ sa partition de Gallai. Alors le quotient $\mathcal{R}/\mathcal{P}_{\max}$ possède au moins deux éléments et a une seule des formes suivantes :

1. $\mathcal{R}/\mathcal{P}_{\max}$ est indécomposable,
2. Chacune des relations qui le composent a une seule des formes suivantes :

- (a) *c'est une relation vide.*
- (b) *c'est une relation complète.*
- (c) *c'est un ordre linéaire. De plus, si deux relations ont cette forme, elles sont égales ou duales.*

Remarque 3.18. *Si une relation $\mathcal{R}$ est vide ou complète sur un ensemble X , alors toute partie de X est un intervalle de $\mathcal{R}$. Si $\mathcal{R}$ est un ordre linéaire, ses intervalles sont de la forme $[x, y] := \{z \in X / x \leq z \leq y\}$ pour tout $x, y \in X$, $x \leq y$. Les relations vides, complètes et les ordres linéaires ne possèdent pas d'intervalle fort non trivial. Nous pouvons les décomposer de plusieurs manières, notamment en somme lexicographique de deux relations indexée par une relation à deux éléments. Nous imposerons, ci-dessous, une seule décomposition dans ces cas là pour les structures binaires ordonnées.*

Avec la Remarque 3.18, l'Observation 3.11 et le Lemme 3.15 nous avons un corollaire immédiat du Théorème 3.17 :

Corollaire 3.19. *Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire finie ayant au moins deux éléments. Alors $\mathcal{R}$ est isomorphe à une somme lexicographique $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}_x$ où $\mathcal{S}$ est indécomposable ayant au moins deux éléments. De plus, lorsque $\mathcal{S}$ a au moins trois éléments, la partition de $\mathcal{R}$ en intervalles est unique.*

Grâce à l'unicité de la décomposition de Gallai (Lemme 3.15), nous arrivons au théorème de décomposition suivant (voir par exemple [34] pour des extensions aux structures infinies).

Disons qu'une structure binaire $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est *enchaînable* s'il existe un ordre linéaire $\leq$ sur E vérifiant, pour tout $i \in I$, $x \rho_i y \Leftrightarrow x' \rho_i y'$ pour tous x, y, x', y' tels que $x \leq y \Leftrightarrow x' \leq y'$. Si $\mathcal{R}$ est réflexive, ceci implique que toute relation ρ_i est soit la relation d'égalité Δ_E , la relation complète $E \times E$ ou un ordre linéaire; de plus, si ρ_i et ρ_j , pour $i \neq j$, sont deux ordres linéaires, ils coïncident ou sont opposés. Notons que si de plus $\mathcal{R}$ est ordonnée alors les relations ρ_i qui sont des ordres linéaires sont égales ou opposées à l'ordre donné.

Théorème 3.20. *Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire finie ayant au moins deux éléments alors $\mathcal{R}$ est une somme lexicographique $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}_x$ où $\mathcal{S}$ est soit indécomposable avec au moins trois éléments soit une structure binaire enchaînable ayant au moins deux éléments et les ensembles $E_x = \text{dom}(\mathcal{R}_x)$ sont des intervalles forts maximaux de $\mathcal{R}$.*

Nous étendons la notion de somme lexicographique aux collections de structures binaires non vides. Etant données une structure binaire non vide $\mathcal{R}$ et des classes $\mathcal{A}_x$ de structures binaires non vides pour tout $x \in V(\mathcal{R})$, notons $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_x$ la classe de toutes les structures binaires de la forme $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x$ avec $\mathcal{S}_x \in \mathcal{A}_x$ pour tout $x \in V(\mathcal{R})$. Si $\mathcal{A}_x = \mathcal{A}$ pour tout $x \in V(\mathcal{R})$ cette classe sera notée $\bigoplus_{\mathcal{R}} \mathcal{A}$. Si $\mathcal{R} := (\{0, 1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in J})$, avec $0 < 1$, $\mathcal{A}_0 := \mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_1 := \mathcal{B}$, nous posons $\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_x = \bigoplus_{\mathcal{R}} \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$.

Aussi, si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont deux classes de structures binaires, nous posons

$$\bigoplus_{\mathcal{A}} \mathcal{B} := \left\{ \bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{S}_x : \mathcal{R} \in \mathcal{A}, \mathcal{S}_x \in \mathcal{B} \text{ pour tout } x \in \text{dom}(\mathcal{R}) \right\}.$$

Nous disons qu'une collection $\mathcal{C}$ de structures binaires est *fermée par sommes* si $\bigoplus_{\mathcal{C}} \mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}$. La *clôture par sommes* de $\mathcal{C}$, est la plus petite classe, $cl(\mathcal{C})$, fermée par sommes contenant $\mathcal{C}$. Si nous posons $\mathcal{C}_0 := \mathcal{C}$ et $\mathcal{C}_{n+1} := \bigoplus_{\mathcal{C}_n} \mathcal{C}_n$, alors $cl(\mathcal{C}) = \bigcup_{n=0}^{\infty} \mathcal{C}_n$ (notons que $\bigoplus_{\mathcal{C}_n} \mathcal{C}_n \subseteq \bigoplus_{\mathcal{C}} \mathcal{C}_{2n}$). Si $\mathcal{C}$ est formée de structures réflexives et contient la structure à un élément, alors $cl(\mathcal{C}) = \bigoplus_{cl(\mathcal{C})} cl(\mathcal{C})$ (en effet, toute structure $\mathcal{R} \in cl(\mathcal{C})$ est une somme lexicographique suivant $\mathcal{R}$ de copies de la structure à un élément). Si de plus $\mathcal{C}$ contient la structure vide alors $cl(\mathcal{C})$ est héréditaire.

3.1.5 Classe héréditaire et structures indécomposables

Si $\mathcal{C}$ est une sous-classe de Ω_k , nous notons par $Ind(\mathcal{C})$ la collection de ses membres indécomposables et si $\mathcal{R}$ est une structure binaire, nous noterons par $Ind(\mathcal{R})$ la collection de ses sous-structures finies qui sont indécomposables. Par exemple, si $\mathcal{R}$ est un cographe ou un ordre séries-parallèles alors les membres de $Ind(\mathcal{R})$ ont au plus deux éléments.

Théorème 3.21. *Soit $\mathcal{D}$ une classe héréditaire de $Ind(\Omega_k)$. Posons $\sum \mathcal{D} := \{\mathcal{R} \in \Omega_k : Ind(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{D}\}$. Si tous les membres de $\mathcal{D}$ sont réflexifs² alors $\sum \mathcal{D} = cl(\mathcal{D})$.*

Preuve.

L'inclusion $\sum \mathcal{D} \supseteq cl(\mathcal{D})$ a lieu sous l'hypothèse que tous les membres de $\mathcal{D}$ sont réflexifs. Inversement, si $\mathcal{R} \notin cl(\mathcal{D})$ alors ou bien $\mathcal{R}$ est indécomposable auquel cas $\mathcal{R} \notin \mathcal{D}$ ou bien $\mathcal{R}$ ne peut pas s'exprimer comme une somme lexicographique de structures de $\mathcal{D}$ donc $\mathcal{R} \notin \sum \mathcal{D}$. $\square$

Le résultat suivant donne la relation qui existe entre les bornes de $\mathcal{D}$ dans $Ind(\Omega_k)$ et les bornes de $\sum \mathcal{D}$ dans Ω_k .

Proposition 3.22. *Si $\mathcal{B}$ est l'ensemble des bornes de $\mathcal{D}$ dans $Ind(\Omega_k)$ et $\mathcal{B}'$ l'ensemble des bornes de $\sum \mathcal{D}$ dans Ω_k alors $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$.*

Preuve. Soit $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$, donc $\mathcal{B}$ est indécomposable et $\mathcal{B} \notin \mathcal{D}$. Comme $\mathcal{B}$ est une borne de $\mathcal{D}$ alors $\forall \mathcal{B}' < \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ indécomposable on a $\mathcal{B}' \in \mathcal{D}$. On a $\mathcal{B} \notin \sum \mathcal{D} = cl(\mathcal{D})$ mais $\mathcal{B}_{-x} \in \sum \mathcal{D} = cl(\mathcal{D})$, $\forall x \in \mathcal{B}$, en effet, si $\mathcal{B}_{-x}$ est indécomposable alors $\mathcal{B}_{-x} \in \mathcal{D} \subset \sum \mathcal{D}$ et si $\mathcal{B}_{-x}$ n'est pas indécomposable alors tout $\mathcal{B}'$ indécomposable tel que $\mathcal{B}' < \mathcal{B}_{-x}$ se trouve dans $\mathcal{D}$, c'est à dire que $\mathcal{B}_{-x} \in \sum \mathcal{D}$. Il s'ensuit que $\mathcal{B} \in \mathcal{B}'$.

Inversement, soit $\mathcal{B} \in \mathcal{B}'$, c'est à dire que $\mathcal{B} \notin \sum \mathcal{D}$, donc $\mathcal{B}$ abrite un indécomposable $\mathcal{B}' \notin \mathcal{D}$ d'où $\mathcal{B}' \notin \sum \mathcal{D}$ ce qui implique que $\mathcal{B}' = \mathcal{B}$ car $\mathcal{B}$ est une borne. Mais $\mathcal{B}' \in \mathcal{B}$, car $\mathcal{B}'$ est indécomposable, donc $\mathcal{B} \in \mathcal{B}$. Il s'ensuit que $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$. $\square$

Comme conséquence de ce résultat nous avons :

2. Nous avons le même résultat si nous supposons tous les membres de $\mathcal{D}$ irréflexifs ou si $\mathcal{D}$ contient toutes les structures à un élément de Ω_k .

Conséquence 1. *Toutes les bornes de $\sum \mathcal{D}$ sont indécomposables.*

Inversement, nous avons :

Lemme 3.23. *Si $\mathcal{C}$ est une classe de Ω_k ayant toutes ses bornes indécomposables alors $\mathcal{C} = \sum \text{Ind}(\mathcal{C})$.*

Preuve. L'inclusion $\mathcal{C} \subseteq \sum \text{Ind}(\mathcal{C})$ est évidente et a lieu sans conditions. Supposons que l'inclusion inverse n'a pas lieu et soit $\mathcal{R}$ un élément de $\sum \text{Ind}(\mathcal{C}) \setminus \mathcal{C}$. Puisque $\mathcal{R} \notin \mathcal{C}$ alors $\mathcal{R}$ abrite une borne, disons $\mathcal{B}$, de $\mathcal{C}$, mais $\mathcal{R} \in \sum \text{Ind}(\mathcal{C})$ et $\mathcal{B}$ est indécomposable par hypothèse, donc $\mathcal{B} \in \text{Ind}(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$, ce qui constitue une contradiction. $\square$

3.1.6 Rôle du belordre

Nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.24. *Si une classe héréditaire $\mathcal{D}$ de $\text{Ind}(\Omega_k)$ est héréditairement belordonnée alors $\sum \mathcal{D}$ est héréditairement belordonnée et $\sum \mathcal{D}$ a un nombre fini de bornes.*

Preuve. La seconde partie de la proposition vient du résultat dû à Pouzet (Théorème 1.20). La première partie utilise les propriétés des ordres belordonnés et découle du théorème de Higman (1952) sur les algèbres préordonnées par divisibilité [53]. Sans rappeler le résultat nous donnons une preuve directe. Soit $\mathcal{A}$ un ordre qui est belordonné, montrons que $(\sum \mathcal{D}).\mathcal{A}$ est belordonné. Si $(\sum \mathcal{D}).\mathcal{A}$ n'est pas belordonné, alors d'après l'un des résultats préliminaires d'Higman (voir Théorème 1.3), il contient une section finale non finiment engendrée. D'après le lemme de Zorn, il existe une section finale, disons $\mathcal{F}$, maximale pour l'inclusion parmi les sections finales ayant cette propriété (car l'ensemble des sections finales ordonné par inclusion est un ensemble inductif).

Posons $\mathcal{I} := (\sum \mathcal{D}).\mathcal{A} \setminus \mathcal{F}$ le complémentaire de $\mathcal{F}$ dans $(\sum \mathcal{D}).\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathcal{I}$ est donc belordonné. Soit $\mathcal{R} := (\mathcal{R}_0, f_0), \dots, (\mathcal{R}_n, f_n), \dots$ une antichaîne infinie d'éléments minimaux de $\mathcal{F}$. Comme $\mathcal{D}.\mathcal{A}$ est belordonné car $\mathcal{D}$ est héréditairement belordonné, on peut supposer qu'aucun élément de cette antichaîne ne soit dans $\mathcal{D}.\mathcal{A}$. D'après le Corollaire 3.19 et le théorème 3.20, pour tout $i \geq 0$ il existe une structure indécomposable $\mathcal{S}_i$ et des structures non vides $(\mathcal{R}_{ix})_{x \in \mathcal{S}_i}$ telles que $\mathcal{R}_i = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}_i} \mathcal{R}_{ix}$. Puisque $(\mathcal{R}_{ix}, f_{i|_{\mathcal{R}_{ix}}})$ s'abrite strictement dans $(\mathcal{R}_i, f_i)$ on a $(\mathcal{R}_{ix}, f_{i|_{\mathcal{R}_{ix}}}) \in \mathcal{I}$ pour tout $i \geq 0$ et $x \in \mathcal{S}_i$. Puisque $\mathcal{I}$ est belordonné et $\mathcal{D}$ est héréditairement belordonné alors $\mathcal{D}.\mathcal{I}$ est belordonné, donc la suite infinie $(\mathcal{S}_0, g_0), \dots, (\mathcal{S}_i, g_i), \dots$ de $\mathcal{D}.\mathcal{I}$, où $g_i(x) := (\mathcal{R}_{ix}, f_{i|_{\mathcal{R}_{ix}}})$, contient une paire croissante $(\mathcal{S}_p, g_p) \leq (\mathcal{S}_q, g_q)$ pour deux entiers $p < q$ (Théorème 1.3). Ce qui signifie qu'il existe un abriement $h : \mathcal{S}_p \rightarrow \mathcal{S}_q$ tel que $g_p(x) \leq g_q(h(x))$ pour tout $x \in \mathcal{S}_p$, c'est à dire $(\mathcal{R}_{px}, f_{p|_{\mathcal{R}_{px}}}) \leq (\mathcal{R}_{qh(x)}, f_{q|_{\mathcal{R}_{qh(x)}}})$ pour tout $x \in \mathcal{S}_p$. Il s'ensuit que $(\mathcal{R}_p, f_p) = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}_p} (\mathcal{R}_{px}, f_{p|_{\mathcal{R}_{px}}}) \leq \bigoplus_{x \in \mathcal{S}_q} (\mathcal{R}_{qx}, f_{q|_{\mathcal{R}_{qx}}}) = (\mathcal{R}_q, f_q)$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{R}$ est une antichaîne.

Donc $(\sum \mathcal{D}).\mathcal{A}$ est belordonné et par suite $(\sum \mathcal{D})$ est héréditairement belordonné. $\square$

La Proposition 3.24 est particulièrement vraie si $\mathcal{D}$ est finie. Si $\mathcal{D}$ est la classe $\text{Ind}_\ell(\Omega_k)$ de structures indécomposables de Ω_k de tailles au plus ℓ alors d'après un résultat de Schmerl

et Trotter [100] (voir Théorème 3.3), les bornes de $\sum \text{Ind}_\ell(\Omega_k)$ sont de tailles au plus $\ell + 2$. Lorsque $\mathcal{D}$ est formée de bichaînes, la Proposition 3.24 a été obtenue par Albert et Atkinson [2].

Un corollaire immédiat est le suivant :

Corollaire 3.25. *Si une classe héréditaire de Ω_k contient un nombre fini de membres indécomposables alors elle est belordonnée et a un nombre fini de bornes.*

3.2 Structures binaires ordonnées

Dans toute la suite, nous considérons uniquement les structures ordonnées composées de relations binaires réflexives. Soit Γ_k la classe de telles structures finies de type k .

Toutes les structures considérées ici sont des structures qui représentent des types d'isomorphie. De manière générale, si $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est une structure où E est un n -ensemble, alors son type d'isomorphie peut-être représenté par une structure $\mathcal{R}'$ isomorphe à $\mathcal{R}$ et définie sur $\{0, 1, \dots, n-1\}$ et si $\mathcal{R}$ est ordonnée, l'ordre sur $\mathcal{R}'$ est l'ordre naturel.

Si, dans le Théorème 3.20, $\mathcal{S}$ est enchainable, alors, comme souligné dans la Remarque 3.18, la décomposition n'est pas nécessairement unique, un fait qui est également dû à la notion d'intervalle fort. Nous nous intéressons à ce cas là pour des structures binaires ordonnées. Pour nos besoins, nous introduisons la notion suivante.

Désignons par **1** la structure à un élément. Soit τ une structure de Γ_k ayant deux éléments. Une structure ordonnée $\mathcal{S}$ est dite τ -indécomposable si elle ne peut pas se décomposer en une somme lexicographique indexée par τ . Si $\mathcal{A}$ est une classe de structures de Γ_k , on désigne par $\mathcal{A}(\tau)$ l'ensemble des membres de $\mathcal{A}$ qui sont τ -indécomposables.

Lemme 3.26. *Soit $\mathcal{S} := (\{0, 1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in [k]})$ avec $0 < 1$, une structure ordonnée de type k ayant deux éléments. Si $\mathcal{R}$ est une somme lexicographique $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}_x = \mathcal{R}_0 \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_0$ est $\mathcal{S}$ -indécomposable, alors la partition $\mathcal{R}_0, \mathcal{R}_1$ est unique.*

Preuve. Evident. Si $\mathcal{R}_0$ n'est pas $\mathcal{S}$ -indécomposable nous aurons une autre partition issue de la décomposition de $\mathcal{R}_0$ suivant $\mathcal{S}$. Mais puisque $\mathcal{R}_0$ est $\mathcal{S}$ -indécomposable, il n'existe pas d'autre décomposition dans laquelle cette hypothèse est vérifiée. $\square$

Soit $\mathcal{C}$ une sous-classe de Γ_k . Pour $i \in \mathbb{N}$ posons $\mathcal{C}_{(i)}$, (resp. $\mathcal{C}_{(\geq i)}$), les sous-classes formées des membres de $\mathcal{C}$ qui ont i éléments, (resp. au moins i éléments).

Lemme 3.27. *Soit $\mathcal{D}$ une classe de structures indécomposables non vides de Γ_k contenant la structure à un élément **1**. Soit $\mathcal{A} = \sum \mathcal{D}$ la clôture par sommes de $\mathcal{D}$ et pour tout $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, notons par $\mathcal{A}(\mathcal{S})$ la sous-classe des membres $\mathcal{S}$ -indécomposables de $\mathcal{A}$.*

Posons $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} := \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}$ si $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 3)}$ et $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} := \mathcal{A}(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}$ si $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$ et écrivons chaque $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$ comme $\mathcal{S} := (\{0, 1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in [k]})$ avec $0 < 1$. Alors :

$$\mathcal{A} = \{\mathbf{1}\} \cup \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 2)}} \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \quad (3.1)$$

et

$$\mathcal{A}(\mathcal{S}) = \mathcal{A} \setminus \mathcal{A}_{\mathcal{S}} \quad (3.2)$$

pour tout $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$.

De plus, tous les ensembles de l'équations (3.1) sont deux à deux disjoints.

Preuve. Désignons par (1) (respectivement par (2)) le terme de gauche (respectivement de droite) de l'équation (3.1). L'inclusion (2) $\subseteq$ (1) est évidente car $\mathcal{A}$ est fermé par sommes d'après le Théorème 3.21. Pour montrer l'inclusion (1) $\subseteq$ (2), soit $\mathcal{R}$ dans (1), si $\mathcal{R}$ a un élément alors elle est dans (2), sinon, d'après le Théorème 3.20, $\mathcal{R}$ est une somme lexicographique $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{R}_x$ où $\mathcal{S}$ est soit indécomposable avec au moins trois éléments soit une structures binaire

enchaînable avec au moins deux éléments et pour chaque $\mathcal{R}_x \in \mathcal{A}$, le domaine $V(\mathcal{R}_x)$ est un intervalle fort de $\mathcal{R}$ pour tout $x \in V(\mathcal{S})$. Dans le premier cas, $\mathcal{R}$ est dans $\bigcup_{\mathcal{R}' \in \mathcal{D}_{(\geq 3)}} \bigoplus_{x \in \mathcal{R}'} \mathcal{A}_x$

donc dans (2). Dans le second cas, $\mathcal{S}$ est enchaînable avec n éléments ($n \geq 2$) nous pouvons alors poser $\mathcal{S} := (\{0, 1, \dots, n-1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in [k]})$ avec $0 < 1 < \dots < n-1$. Posons $\mathcal{S}' := \mathcal{S}_{\upharpoonright_{\{0,1\}}}$, $\mathcal{S}'' := \mathcal{S}_{\upharpoonright_{\{1, \dots, n-1\}}}$, $\mathcal{R}'_0 := \mathcal{R}_0$ et $\mathcal{R}'_1 := \bigoplus_{x \in \mathcal{S}''} \mathcal{R}_x$. Nous avons évidemment $\mathcal{R} = \mathcal{R}'_0 \bigoplus_{\mathcal{S}'} \mathcal{R}'_1$.

$\mathcal{R}_0$ est $\mathcal{S}'$ -indécomposable car $V(\mathcal{R}_0)$ est un intervalle fort de $\mathcal{R}$; ainsi $\mathcal{R}$ appartient à $\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}} (\mathcal{A}_0(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}_1)$ qui est un sous-ensemble de (2). Le fait que ces ensembles soient deux à deux disjoints vient du Corollaire 3.19 et du Lemme 3.26.

L'équation (3.2) est évidente; les membres $\mathcal{S}$ -indécomposables de $\mathcal{A}$ sont ceux qui ne peuvent pas s'écrire comme des $\mathcal{S}$ -sommes. $\square$

Soit $\{\mathcal{S}_1, \dots, \mathcal{S}_p\}$ une énumération des structures de $\mathcal{D}_{(2)}$ (structures à 2 éléments de $\mathcal{D}$). Soit $\mathcal{H}$, resp. $\mathcal{H}_i$, resp. $\mathcal{K}$, les séries génératrices de $\mathcal{A}$, resp. $\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)$, resp. $\mathcal{D}_{(\geq 3)}$ et soit $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ la série obtenue à partir de $\mathcal{K}$ en substituant à l'inconnue x la série $\mathcal{H}$.

A partir du Lemme 3.27 ci-dessus, nous déduisons

Lemme 3.28.

$$(p-1)\mathcal{H}^2 + (x-1+\mathcal{K}(\mathcal{H}))\mathcal{H} + x + \mathcal{K}(\mathcal{H}) = 0. \quad (3.3)$$

$$\mathcal{H}_i = \frac{\mathcal{H}}{1+\mathcal{H}} \quad \text{pour tout } i \in \{1, \dots, p\}. \quad (3.4)$$

Preuve. Montrons d'abord l'équation (3.4). Posons $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$ la série génératrice de $\mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ pour $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 2)}$. Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$. D'après les notations du Lemme 3.27, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \mathcal{A}(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}$, nous avons alors $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}_i \mathcal{H}$. A partir de l'équation (3.2) nous déduisons que $\mathcal{H}_i = \mathcal{H} - \mathcal{H}_i \mathcal{H}$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. Or les coefficients de $\mathcal{H}$ sont non négatifs, donc la série $1 + \mathcal{H}$ est inversible, ainsi $\mathcal{H}_i = \frac{\mathcal{H}}{1+\mathcal{H}}$. D'où l'équation (3.4).

Montrons maintenant l'équation (3.3). Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(n)}$ pour $n \geq 3$ alors, toujours d'après le Lemme 3.27, $\mathcal{A}_{\mathcal{S}} = \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}$ et donc $\mathcal{H}_{\mathcal{S}} = \mathcal{H}^n$. Nous déduisons alors que la série génératrice de

$\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 3)}} \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ est égale à $\mathcal{K}(\mathcal{H})$. D'après ce qui précède la série génératrice de $\bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}} \mathcal{A}_{\mathcal{S}}$ est égale à $\sum_{i=1}^p \mathcal{H}_i \cdot \mathcal{H}$, donc, en utilisant l'équation (3.4), elle vaut $p \frac{\mathcal{H}^2}{1 + \mathcal{H}}$.

En substituant ces résultats dans l'équation (3.1) nous obtenons :

$$\mathcal{H} = x + p \frac{\mathcal{H}^2}{1 + \mathcal{H}} + \mathcal{K}(\mathcal{H}). \quad (3.5)$$

Un calcul direct permet de trouver l'équation (3.3).

(Remarquons que nous pouvons faire explicitement les calculs à partir du Lemme 3.27, l'équation (3.1) donne :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 1} \varphi_{\mathcal{A}}(n) x^n &= x + \sum_{i=1}^p \sum_{n \geq 2} \left[\sum_{l=1}^{n-1} \varphi_{\mathcal{A}(\mathcal{S}_i)}(l) \cdot \varphi_{\mathcal{A}}(n-l) \right] x^n \\ &\quad + \sum_{n \geq 3} \left[\sum_{l=3}^n \sum_{n_1 + \dots + n_l = n} \varphi_{\mathcal{D}_{(\geq 3)}}(l) \varphi_{\mathcal{A}}(n_1) \cdots \varphi_{\mathcal{A}}(n_l) \right] x^n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En utilisant les notations données ci-dessus, nous obtenons l'équation (3.5)). $\square$

3.3 Classes algébriques et héréditairement algébriques

Disons qu'une classe de structures finies est algébrique si sa série génératrice est algébrique. Un corollaire immédiat du Lemme 3.28 (analogue du corollaire 13 de [2]) est le suivant :

Corollaire 3.29. *Soit $\mathcal{D}$ une classe de structures non vides et indécomposables contenant la structure à un élément $\mathbf{1}$. Si $\mathcal{D}$ est algébrique alors sa clôture par sommes ainsi que chaque sous-classe formée des membres $\mathcal{S}$ -indécomposables de cette clôture, avec $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, sont algébriques.*

Nous disons qu'une classe $\mathcal{C}$ de structures relationnelles est *héréditairement rationnelle*, resp. *héréditairement algébrique* si la fonction génératrice de toute sous-classe héréditaire de $\mathcal{C}$ est rationnelle, resp. algébrique. Albert, Atkinson et Vatter [4] ont montré que les classes héréditairement rationnelles de permutations sont belordonnées. Ce fait peut-être étendu aux classes héréditairement algébriques.

Lemme 3.30. *Une classe héréditaire $\mathcal{C}$ qui est héréditairement algébrique est belordonnée.*

Preuve. Si $\mathcal{C}$ contient une antichaîne infinie, il existe un nombre non dénombrable de sous-classes héréditaires de $\mathcal{C}$ et en fait une chaîne non dénombrable de sous-classes ; ces classes fournissent un nombre non dénombrable de séries génératrices. Certaines de ces séries ne peuvent pas être algébriques. En effet, d'après C. Retenauer [97], une série génératrice avec des coefficients rationnels qui est algébrique sur $\mathbb{C}$ est algébrique sur $\mathbb{Q}$. Comme les séries génératrices

considérées ont des coefficients entiers, elles sont algébriques sur $\mathbb{Q}$, donc le nombre de ces séries est au plus dénombrable. $\square$

Si $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ sont deux classes héréditaires, alors leurs séries génératrices vérifient l'identité $\mathcal{H}_{\mathcal{C} \cup \mathcal{C}'} = \mathcal{H}_{\mathcal{C}} + \mathcal{H}_{\mathcal{C}'} - \mathcal{H}_{\mathcal{C} \cap \mathcal{C}'}$. A partir de cette équation simple nous avons :

Lemme 3.31. *L'union de deux classes héréditairement rationnelles (resp. héréditairement algébriques) est héréditairement rationnelle (resp. héréditairement algébrique).*

De ce lemme nous pouvons déduire

Corollaire 3.32. *Une classe $\mathcal{C}$ non héréditairement rationnelle ou non héréditairement algébrique qui est minimale pour cette propriété est un idéal.*

Preuve. D'après le Lemme 3.31, $\mathcal{C}$ ne peut pas être une réunion de deux sous-classes héréditaires propres, c'est alors un idéal, donc un âge. $\square$

Nous énonçons le théorème principal de cette partie, qui généralise le théorème d'Albert et Atkinson [2] :

Théorème 3.33. *Soit k un entier. Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Γ_k contient uniquement un nombre fini de membres indécomposables alors elle est algébrique.*

Preuve. Pour la preuve de ce théorème, nous suivons essentiellement les étapes de la preuve d'Albert-Atkinson. Nous donnons une preuve inductive sur les sous-classes héréditaires de $\mathcal{C}$. Mais pour cela, nous avons besoin de montrer plus, notamment que $\mathcal{C}$ et chaque $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ pour $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, où $\mathcal{D} := \text{Ind}(\mathcal{C})$, sont algébriques (ceci est la seule différence avec la preuve d'Albert-Atkinson). Pour éviter des complications qui ne sont pas nécessaires, nous retirons la structure relationnelle vide de Γ_k , ce qui signifie que nous supposons que $\mathcal{C}$ est formée de structures non vides.

Posons $\mathcal{A} := \sum \text{Ind}(\mathcal{C})$. Nous avons alors deux cas :

1)- Si $\mathcal{C} = \mathcal{A}$ alors d'après le Corollaire 3.29, $\mathcal{C}$ et chaque $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ pour $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$ sont algébriques, le résultat est donc démontré.

2)- Si $\mathcal{C} \neq \mathcal{A}$, nous pouvons supposer que pour chaque sous-classe héréditaire propre $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$; $\mathcal{C}'$ et chaque $\mathcal{C}'(\mathcal{S})$ pour $\mathcal{S} \in \mathcal{D}'_{(2)}$, où $\mathcal{D}' := \text{Ind}(\mathcal{C}')$, sont algébriques. En effet, si ceci n'est pas vérifié, sachant que $\mathcal{C}$ est belordonnée (Corollaire 3.25) elle contient une sous-classe héréditaire minimale qui ne vérifie pas cette propriété et nous pouvons remplacer $\mathcal{C}$ par cette sous-classe.

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 2)}$. Si $V(\mathcal{S})$ a deux éléments 0 et 1, avec $0 < 1$, nous posons $\mathcal{C}_{\mathcal{S}} := (\mathcal{C}(\mathcal{S}) \oplus_{\mathcal{S}} \mathcal{C}) \cap \mathcal{C}$.

Si $V(\mathcal{S})$ a au moins trois éléments, nous posons $\mathcal{C}_{\mathcal{S}} := (\oplus_{\mathcal{S}} \mathcal{C}) \cap \mathcal{C}$. Comme dans le Lemme 3.27 nous avons

$$\mathcal{C} = \{1\} \cup \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 2)}} \mathcal{C}_{\mathcal{S}}. \quad (3.7)$$

et

$$\mathcal{C}(\mathcal{S}) = \mathcal{C} \setminus \mathcal{C}_{\mathcal{S}} \text{ pour tout } \mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}. \quad (3.8)$$

Soient $\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(2)}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}}$ les séries génératrices de $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}_{(2)} := \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}} \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ et $\mathcal{C}_{(\geq 3)} := \bigcup_{\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 3)}} \mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ respectivement. Notons par $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}}$ les séries génératrices de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ et $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ respectivement.

Nous avons :

$$\mathcal{H} = x + \mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(2)}} + \mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}} \quad (3.9)$$

et

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} = \mathcal{H} - \mathcal{H}_{\mathcal{C}_{\mathcal{S}}} \text{ pour tout } \mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}. \quad (3.10)$$

Nous déduisons que $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ sont algébriques pour tout $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, à partir des Affirmations suivantes que nous démontrons plus loin :

Affirmation 1. *La série génératrice $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}}$ est un polynôme en la série génératrice $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ dont les coefficients sont des séries algébriques.*

Affirmation 2. *Pour tout $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, la série génératrice $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ de $\mathcal{C}(\mathcal{S})$ est soit un polynôme en la série génératrice $\mathcal{H}$ de la forme*

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} = \frac{(1 - \alpha)\mathcal{H} - \delta}{1 + \beta}; \quad (3.11)$$

dont les coefficients sont des séries algébriques, soit une fraction rationnelle de la forme

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} = \frac{\mathcal{H}}{1 + \mathcal{H}}. \quad (3.12)$$

En substituant dans la formule (3.9) les valeurs de $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}}$ et $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(2)}}$ par celles données dans l’Affirmation 1 et l’Affirmation 2 nous obtenons une équation polynomiale $C = 0$ en la variable $\mathcal{H}$ dont les coefficients sont des séries algébriques. Le polynôme C n’est pas identiquement nul. En effet, C est la somme de deux polynômes $A = a_0 + a_1\mathcal{H} + a_2\mathcal{H}^2$ et $B = b_0 + b_1\mathcal{H} + \dots + b_k\mathcal{H}^k$ dont les coefficients sont des séries algébriques (en fait, $B = \mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}}(1 + \mathcal{H})$). Les valuations de A et B , en tant que séries en x , sont distinctes (on rappelle que la valuation d’un polynôme non nul est le plus petit degré de ses monômes). En effet, la valuation de A est 1 (notons que $a_0 = x + \delta$ où δ est soit égal à zero soit une série algébrique de valuation au moins 2). Ainsi, si $B \neq 0$ (lorsque $\mathcal{D}_{(\geq 3)}$ est non vide) sa valuation est au moins 3. Puisque A et B n’ont pas la même valuation, alors $A + B$ n’est pas identiquement nul. Etant une racine d’un polynôme non nul, $\mathcal{H}$ est algébrique. Avec ce résultat et l’Affirmation 2, $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$ est algébrique. Avec ceci, la preuve du théorème est complète. $\square$

Pour la preuve de nos deux Affirmations précédentes, nous avons besoin des lemmes suivants (respectivement Lemme 15 et Lemme 18 dans [2]).

Lemme 3.34. *Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire ordonnée indécomposable et $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_x)_{x \in \mathcal{R}}$, $\mathcal{B} := (\mathcal{B}_x)_{x \in \mathcal{R}}$ deux suites de sous-classes de structures binaires ordonnées indexées par les éléments de $V(\mathcal{R})$, alors*

1. Si $V(\mathcal{R})$ a au moins trois éléments alors

$$\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{A}_x \right) \cap \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{R}} \mathcal{B}_x \right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{R}} (\mathcal{A}_x \cap \mathcal{B}_x).$$

2. Si $\mathcal{R} := (\{0, 1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in J})$ avec $0 < 1$ alors

$$(\mathcal{A}_0(\mathcal{R}) \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{A}_1) \cap (\mathcal{B}_0(\mathcal{R}) \oplus_{\mathcal{R}} \mathcal{B}_1) = (\mathcal{A}_0(\mathcal{R}) \cap \mathcal{B}_0(\mathcal{R})) \oplus_{\mathcal{R}} (\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{B}_1).$$

Preuve. La preuve vient directement de l'unicité de la décomposition des structures (Corollaire 3.19, Théorème 3.20 et Lemme 3.26). $\square$

Pour le second lemme, nous introduisons les notions suivantes :

Soit $\mathcal{C}$ une classe de structures finies et $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l$ une suite de structures finies, nous posons $\mathcal{C} < \overline{\mathcal{B}} > := \mathcal{C} < \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l > := \text{Forb}(\{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l\}) \cap \mathcal{C}$.

Définition 3.35. Si $\mathcal{C}$ est héréditaire, une sous-classe héréditaire propre $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ est dite forte si toute borne de $\mathcal{C}'$ dans $\mathcal{C}$ s'abrite dans au moins une borne de $\mathcal{C}$.

Notons que l'intersection de sous-classes fortes est forte.

Soit $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_x)_{x \in \mathcal{S}}$, où $\mathcal{S}$ est indécomposable avec au moins trois éléments. Une décomposition d'une structure binaire $\mathcal{B}$ suivant $\mathcal{A}$ est une application $h : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{S}$ telle que $\mathcal{B} = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}_{\upharpoonright \text{Im}(h)}} \mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}}$ et $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}} \in \mathcal{A}_x$ pour tout $x \in \text{Im}(h)$. Donc, chaque $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}}$ est un intervalle de $\mathcal{B}$. Désignons par $H_{\mathcal{B}}$ l'ensemble de telles décompositions de $\mathcal{B}$.

Lemme 3.36. Soient $\mathcal{S}$ une structure ordonnée indécomposable, $\mathcal{A} := (\mathcal{A}_x)_{x \in \mathcal{S}}$ une famille de sous-classes de structures binaires ordonnées indexée par les éléments de $\mathcal{S}$, $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l$ une suite de structures finies et $\mathcal{C} := \left(\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_x \right) < \overline{\mathcal{B}} >$. Si $\mathcal{S}$ a au moins trois éléments alors $\mathcal{C}$ est une réunion d'ensembles de la forme $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_x$ où chaque $\mathcal{D}_x$ est soit $\mathcal{A}_x < \overline{\mathcal{B}} >$ soit l'une de ses sous-classes fortes.

Preuve. Nous démontrons le résultat pour $l = 1$. Pour cela nous montrons que :

$$\mathcal{C} = \bigcap_{h \in H_{\mathcal{B}}} \bigcup_{x \in \text{Im}(h)} \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x)} \quad (3.13)$$

où $\mathcal{A}_x^{(x)} := \mathcal{A}_x < \mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}} >$ et $\mathcal{A}_y^{(x)} := \mathcal{A}_y$ pour $y \neq x$.

Désignons par (1) (respectivement par (2)) le membre de gauche (respectivement de droite) de l'équation (3.13). L'inclusion (1) $\subseteq$ (2) a lieu sans aucune hypothèse. En effet, soit $\mathcal{T}$ dans (1). Nous montrons que $\mathcal{T}$ est dans (2). Si h est une décomposition de $\mathcal{B}$, nous voulons trouver un $x \in \text{Im}(h)$ tel que $\mathcal{T} \in \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x)}$. Puisque $\mathcal{T}$ est dans (1), elle a une décomposition suivant $\mathcal{S}$. Soit $h \in H_{\mathcal{B}}$, puisque $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{T}$, il existe $x \in \mathcal{S}_{\upharpoonright \text{Im}(h)}$ tel que $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}} \not\leq \mathcal{T}$ (car si $\mathcal{B} \leq \mathcal{T} = \bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{T}_x$

où $\mathcal{T}_x \in \mathcal{A}_x$, $\forall x \in \mathcal{S}$ alors il existe $h \in H_{\mathcal{B}}$ tel que $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}} \leq \mathcal{A}_x$ pour tout $x \in \text{Im}(h)$, donc $\mathcal{T} \in \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x)}$.

L'inclusion $(2) \subseteq (1)$ a lieu sous l'hypothèse que la structure dans (2) a une unique décomposition suivant $\mathcal{S}$ et qu'elle est ordonnée (ce qui signifie que $\mathcal{S}$ est rigide, c'est à dire que $\mathcal{S}$ n'a aucun automorphisme distinct de l'identité). Soit $\mathcal{T}$ dans (2), alors pour tout $h \in H_{\mathcal{B}}$ il existe $x_h \in \text{Im}(h)$ tel que $\mathcal{T} \in \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x_h)}$ donc $\mathcal{T} \in \bigcap_{h \in H_{\mathcal{B}}} \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x_h)}$. Nous avons $\mathcal{T} \in \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y$ car $\mathcal{A}_y^{(x_h)} \subseteq \mathcal{A}_y$ pour tout h . Donc $\mathcal{T} = \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{T}_y$. Nous avons $\mathcal{B} \not\leq \mathcal{T}$. En effet, supposons que $\mathcal{B} \leq \mathcal{T}$ et soit f un abritement de $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{T}$ et $h := pof$, où p est la projection de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{S}$, nous devons avoir $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}} \leq \mathcal{T}_x$ pour tout $x \in \text{Im}(h)$ ce qui constitue une contradiction avec le fait que $\mathcal{T} \in \bigcap_{h \in H} \bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y^{(x_h)}$. Donc $\mathcal{T}$ est dans (1).

En utilisant la distributivité de l'intersection par rapport à la réunion, nous pouvons écrire (2) comme une réunion de termes, dont chacun est l'intersection de termes de la forme $\bigoplus_{y \in \mathcal{S}} \mathcal{A}_y < \mathcal{B}_x >$, où $\mathcal{B}_x$ est un intervalle de $\mathcal{B}$ tel que, il existe une décomposition h de $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_x = \mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(x)}}$. Ces intersections, par le Lemme 3.34 et le fait que, parmi toutes les décompositions de $\mathcal{B}$ nous avons celles qui envoient $\mathcal{B}$ vers un élément x de $V(\mathcal{S})$ (c'est à dire celles pour lesquelles h est constante), ont la forme $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{D}_x$ où chaque $\mathcal{D}_x$ est de la forme $\mathcal{A}_x < \mathcal{B}, \dots >$ (où les structures qui se trouvent après $\mathcal{B}$ -s'il en existe- sont des intervalles de $\mathcal{B}$.)

Par conséquent, $\mathcal{D}_x$ est soit la classe $\mathcal{A}_x < \mathcal{B} >$ soit l'une de ses sous-classes fortes. Le cas $l > 1$ s'ensuit par récurrence. $\square$

Dans le cas où $\mathcal{S}$ a deux éléments le Lemme 3.36 devient :

Lemme 3.37. Si $\mathcal{S} := (\{0, 1\}, \leq, (\rho_i)_{i \in J})$ avec $0 < 1$ alors $(\mathcal{A}(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}) < \overline{\mathcal{B}} >$ est une union de classes de la forme $(\mathcal{A}'(\mathcal{S}) < \overline{\mathcal{B}} >) \bigoplus_{\mathcal{S}} (\mathcal{A}'' < \overline{\mathcal{B}} >)$, où $\mathcal{A}' < \overline{\mathcal{B}} >$ et $\mathcal{A}'' < \overline{\mathcal{B}} >$ sont soit égales à $\mathcal{A} < \overline{\mathcal{B}} >$ soit à une sous-classe forte de $\mathcal{A} < \overline{\mathcal{B}} >$.

Preuve. Comme pour le Lemme 3.36, nous supposons $l = 1$. L'égalité (3.13) devient dans ce cas :

$$(\mathcal{A}(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}) < \mathcal{B} > = \bigcap_{h \in H_{\mathcal{B}}} \left[(\mathcal{A}(\mathcal{S}) < \mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(0)}} > \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A}) \bigcup (\mathcal{A}(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{A} < \mathcal{B}_{\upharpoonright_{h^{-1}(1)}} >) \right] \quad (3.14)$$

Le cas $l > 1$ se déduit par récurrence. $\square$

Preuve de l'Affirmation 1. Puisque l'ensemble $\mathcal{D} := \text{Ind}(\mathcal{C})$ est fini, il est héréditairement belordonné, donc $\mathcal{A} = \sum \mathcal{D}$ est belordonné (Proposition 3.24). Comme $\mathcal{C}$ est une sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{A}$, nous avons $\mathcal{C} = \mathcal{A} < \overline{\mathcal{B}} > := \mathcal{A} < \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l >$ pour une famille finie $\overline{\mathcal{B}} := \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_l$ de $\mathcal{A}$.

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(\geq 3)}$, le Lemme 3.36 assure que $\mathcal{C}_{\mathcal{S}}$ est une réunion de classes, non nécessairement disjointes, de la forme $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{C}_x$ où chaque $\mathcal{C}_x$ est soit $\mathcal{C}$ soit l'une de ses sous-classes fortes. La

série génératrice de $\bigoplus_{x \in \mathcal{S}} \mathcal{C}_x$ est un monôme en la série génératrice $\mathcal{H}$ de $\mathcal{C}$ dont le coefficient est le produit des séries génératrices des sous-classes fortes propres de $\mathcal{C}$ et par conséquent ce coefficient est une série algébrique (d'après l'hypothèse faite dans la preuve du théorème 3.33). En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, nous obtenons que la série génératrice $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_S}$ de $\mathcal{C}_S$ est un polynôme en la série génératrice $\mathcal{H}$ dont les coefficients sont des séries algébriques. Puisque les classes $\mathcal{C}_S$ sont deux à deux disjointes, la série génératrice $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_{(\geq 3)}}$ est aussi un polynôme en la série génératrice $\mathcal{H}$ dont les coefficients sont des séries algébriques. $\square$

Preuve de l’Affirmation 2. Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}$, le Lemme 3.37 assure que $\mathcal{C}_S$ est une réunion, non nécessairement disjointes, de classes de la forme $\mathcal{C}'(\mathcal{S}) \bigoplus_{\mathcal{S}} \mathcal{C}''$, où chacune des classes $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ est soit égale à $\mathcal{C}$ soit égale à l’une des sous-classes fortes de $\mathcal{C}$. Les séries génératrices de ces classes sont ou bien de la forme $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}\mathcal{H}$ (si toutes les bornes $\mathcal{B}_i$ sont $\mathcal{S}$ -indécomposables) ou bien de la forme $\alpha\mathcal{H}$ ou $\beta\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}$, avec α et β des séries algébriques (séries des sous-classes fortes de $\mathcal{C}$) de valuation au moins 2 en x . En utilisant le principe d'inclusion-exclusion, la série génératrice $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_S}$ obtenue est soit de la forme $\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})}\mathcal{H}$ (dans le cas où toutes les bornes $\mathcal{B}_i$ sont $\mathcal{S}$ -indécomposables) soit de la forme $\alpha\mathcal{H} + \beta\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} + \delta$, avec α, β et δ des séries algébriques, α et β étant de valuations au moins 2. En particulier $\mathcal{H}_{\mathcal{C}_S}$ a la forme $\alpha_S\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} + \beta_S$ où α_S et β_S sont des polynômes en $\mathcal{H}$ de degré au plus 1 avec des séries algébriques comme coefficients (en particulier, α_S est de valuation au moins 2, en x , s’il est de degré zéro en $\mathcal{H}$).

En utilisant l’équation (3.8) alors ou bien

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} = \frac{\mathcal{H}}{1 + \mathcal{H}}; \quad (3.15)$$

dans le cas où toutes les bornes $\mathcal{B}_i$ sont $\mathcal{S}$ -indécomposables, ou bien

$$\mathcal{H}_{\mathcal{C}(\mathcal{S})} = \frac{(1 - \alpha)\mathcal{H} - \delta}{1 + \beta}; \quad (3.16)$$

si au moins une des bornes $\mathcal{B}_i$ n’est pas $\mathcal{S}$ -indécomposable. $\square$

La conclusion du Théorème 3.33 ci-dessus n’est pas vérifiée pour des structures qui ne sont pas nécessairement ordonnées.

Exemple. 3.38. Soit $K_{\infty, \infty}$ la somme directe d’une infinité de copies du graphe complet sur un ensemble infini. Comme il est facile de le voir, le profil de $\text{Age}(K_{\infty, \infty})$ est la fonction partition d’entier (voir la section 1.4.4 du chapitre 1). Sa série génératrice est donnée par $\prod_{n \geq 1} \frac{1}{1-x^n}$, elle n’est pas algébrique. Cependant, $\text{Age}(K_{\infty, \infty})$ ne contient aucun membre indécomposable ayant plus de deux éléments. Plus généralement, notons que la classe $\text{Forb}(P_4)$, des cographes finis ne contenant pas de sous-graphe induit isomorphe au chemin P_4 , ne contient aucun cographe indécomposable ayant plus de deux sommets. Cette classe contient $\text{Age}(K_{\infty, \infty})$ et donc n’est pas héréditairement algébrique. Les cographes finis sont les graphes de comparabilité des ordres

séries parallèles, qui sont à leurs tours les ordres d'intersection associés aux bichaînes séparables. D'après le théorème d'Albert-Atkinson, la classe de ces bichaînes est héréditairement algébrique. Ceci nous dit que l'algébricité n'est pas nécessairement préservée par la transformation d'une classe en une autre via un processus comme ci-dessus (les processus de ce type sont les opérateurs libres de Fraïssé [41]).

Chapitre 4

Exemple et conjecture

4.1 Exemple : les structures binaires ordonnées séparables

Nous construisons dans cette section, pour tout entier $k \geq 1$, une classe de structures binaires ordonnées de type k qui est héréditairement algébrique. Considérons l'ensemble $\mathcal{D}_{(2)}^k$ des structures binaires ordonnées de type $k \geq 1$, réflexives définies sur deux éléments ($\mathcal{D}_{(2)}^k \subseteq \Gamma_k$) (nous pouvons, également, supposer que les k relations sont irréflexives, cela ne changera rien à la suite (voir note sur les sommes lexicographiques en page 57)). Ces structures, à l'isomorphie près, ont la forme $\mathcal{S} := (\{0, 1\}, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ où $\leq$ est l'ordre naturel ($0 < 1$).

Soit $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}^k$, considérons $\mathcal{S}$ comme une opération qui associe à tout couple $(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2)$ d'éléments de Θ_k l'élément $\mathcal{S}(\mathcal{R}_1, \mathcal{R}_2) := \mathcal{R}_1 \oplus_{\mathcal{S}} \mathcal{R}_2$.

Désignons par $\mathcal{S}_k$ la classe des structures binaires ordonnées, engendrée par les structures à un élément de Θ_k et les opérations $\mathcal{S}$ pour $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{(2)}^k$ et par $\mathcal{T}_k^s$ la classe des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{S}_k$.

Nous appellerons les structures de $\mathcal{S}_k$ des *structures binaires ordonnées séparables de type k* . Le terme "séparable" a été emprunté à la terminologie des permutations.

La classe des structures binaires ordonnées séparables est analogue aux classes d'objets largement étudiées qui sont les classes des co-graphes (ou graphes sans P_4), des ordres série-parallèles (ou ordres sans N), des permutations séparables [4] et des d -permutations séparables [12]. Cette classe partage des propriétés avec les classes précédemment citées, notamment la taille de leurs structures indécomposables (simples pour les permutations) qui ne dépasse pas deux.

Si $k = 1$ et ρ_1 un ordre total (il existe, à l'isomorphie près, deux telles structures dans $\mathcal{D}_{(2)}^1$ qui sont $\mathcal{S}_1 := (\{0, 1\}, \leq, \rho_1)$ avec $0 < 1$ et $0 <_{\rho_1} 1$ et $\mathcal{S}_2 := (\{0, 1\}, \leq, \rho'_1)$ avec $0 < 1$ et $1 <_{\rho'_1} 0$), la sous-classe $\mathcal{B}$ de $\mathcal{S}_1$, induite par la structure réflexive à un élément et ces deux opérations ($\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$), est celle des bichaînes séparables (voir section 2.2.3) et la classe $\mathcal{B}^t$, des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{B}$, est celle des permutations séparables (voir section 2.1.3).

Notons par $\mathcal{S}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_k^{ir}$) la sous-classe formée des structures réflexives (resp. irréflexives) de $\mathcal{S}_k$ et par $\mathcal{T}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{T}_k^{ir}$) la classe des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{S}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_k^{ir}$).

Fait 1. *Il existe une correspondance bijective entre les deux sous-classes $\mathcal{S}_k^{re}$ et $\mathcal{S}_k^{ir}$ (et donc entre $\mathcal{T}_k^{re}$ et $\mathcal{T}_k^{ir}$).*

Nous avons les résultats suivants :

Lemme 4.1. *Pour tout $k \geq 1$, les classe $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{S}_k^{re}$ et $\mathcal{S}_k^{ir}$ sont des classes héréditaires pour la relation d'abritement dans Θ_k et les classes $\mathcal{T}_k^s$, $\mathcal{T}_k^{re}$ et $\mathcal{T}_k^{ir}$ sont héréditaires dans la classe des types d'isomorphie des structures de Θ_k , pour la relation d'abritement.*

Preuve. Il suffit de remarquer que toute structure qui s'abrite dans une structure séparable et elle même séparable et qu'une structure réflexive (resp. irréflexive) ne s'abrite que dans une structure réflexive (resp. irréflexive). $\square$

Proposition 4.2. *Pour tout $k \geq 1$, les classes $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{S}_k^{re}$ et $\mathcal{S}_k^{ir}$ vérifient :*

$$\bigcup_{r \in \mathcal{D}_{(2)}^k} \mathcal{S} \oplus_r \mathcal{S} \subseteq \mathcal{S}. \quad (4.1)$$

et les classes $\mathcal{S}_k^{re}$ et $\mathcal{S}_k^{ir}$ sont des classes héréditaires minimales parmi celles vérifiant cette relation, dans Θ_k .

Preuve. La première partie vient directement de la définition. Pour la minimalité il suffit de remarquer que si une classe héréditaire vérifie la relation (4.1) et contient la structure réflexive (resp. irréflexive) à un élément alors elle contient la classe $\mathcal{S}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_k^{ir}$). $\square$

4.1.1 Indécomposabilité et structures séparables

Nous disons qu'une structure $\mathcal{R}$ est 2-décomposable si elle s'écrit comme somme lexicographique de deux structures indexée par une structure à deux éléments. Nous disons qu'elle est 2-indécomposable dans le cas contraire. Si $\mathcal{R}$ est 2-décomposable, nous écrivons simplement (sauf nécessité de précision) $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus \mathcal{R}_2$. Nous avons le résultat suivant :

Proposition 4.3. *Une structure binaire ordonnée de type k est séparable si et seulement si toute structure de taille supérieure ou égale à 2 qu'elle abrite est 2-décomposable.*

Preuve.

1. $\Rightarrow$) évident (par définition d'une structure séparable).
2. $\Leftarrow$) D'après la relation (4.1) de la Proposition 4.2, si une structure binaire ordonnée $\mathcal{R}$ de type k n'est pas séparable, elle n'est pas dans $\mathcal{S}_k$ donc n'est pas dans $\bigcup_r \mathcal{S}_k \oplus_r \mathcal{S}_k$ et par suite abrite au moins une structure 2-indécomposable.

$\square$

De la proposition 4.3 nous avons :

Corollaire 4.4. *Une structure binaire ordonnée $\mathcal{R}$ est séparable si et seulement si les structures de $\text{Ind}(\mathcal{R})$ sont de tailles au plus deux.*

Si nous posons $\mathcal{D}_{(\leq 2)}^k = \mathcal{D}_{(2)}^k \cup \{\mathbf{1}\}$ où $\mathbf{1}$ est la structure à un élément de Γ_k et si $\mathcal{D}'_{(\leq 2)}^k$ désigne l'ensemble des structures binaires ordonnées de type $k \geq 1$ irréflexives définies sur au plus deux éléments et $\overline{\mathcal{D}}_{(\leq 2)}^k$ l'ensemble des structures binaires ordonnées de type k définies sur au plus deux éléments, alors

Corollaire 4.5.

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{S}_k^{re} &= \sum \mathcal{D}_{(\leq 2)}^k. \\ 2) \quad \mathcal{S}_k^{ir} &= \sum \mathcal{D}'_{(\leq 2)}^k. \\ 3) \quad \mathcal{S}_k &= \sum \overline{\mathcal{D}}_{(\leq 2)}^k. \end{aligned}$$

D'après la Conséquence 1 de la Proposition 3.22, nous avons :

Corollaire 4.6. *Les bornes des classes $\mathcal{S}_k^{re}$, $\mathcal{S}_k^{ir}$ et $\mathcal{S}_k$ sont indécomposables.*

D'après le Théorème 3.21 et la note qui lui est associée, nous avons immédiatement

Corollaire 4.7.

$$\begin{aligned} 1) \quad \mathcal{S}_k^{re} &= cl(\mathcal{D}_{(\leq 2)}^k). \\ 2) \quad \mathcal{S}_k^{ir} &= cl(\mathcal{D}'_{(\leq 2)}^k). \\ 3) \quad \mathcal{S}_k &= cl(\overline{\mathcal{D}}_{(\leq 2)}^k). \end{aligned}$$

Dans la section suivante, nous donnons, dans le cas des structures binaires ordonnées séparables de type 1, une caractérisation des bornes.

4.1.2 Etude de la classe $\mathcal{S}_1$

Soit ρ une relation binaire définie sur un ensemble E . Pour simplifier la présentation, nous identifions ρ à sa fonction caractéristique, ce qui signifie que l'on considère ρ comme une application $\rho : E^2 \rightarrow \{0, 1\}$. Posons pour tout $x, y \in E$:

$$d(x, y) := (\rho(x, y), \rho(y, x)). \quad (4.2)$$

Désignons par A et B deux ensembles de structures de type 1 de la forme $\mathcal{S} := (E, \leq, \rho)$, telles que :

$$\mathcal{S} \in A \Leftrightarrow \begin{cases} E = \{0, 1, 2\} \\ 0 < 1 < 2 \\ d(0, 1) \neq d(0, 2) \\ d(1, 2) \neq d(0, 2) \end{cases} \quad \mathcal{S} \in B \Leftrightarrow \begin{cases} E = \{0, 1, 2, 3\} \\ 0 < 1 < 2 < 3 \\ d(0, 1) = d(0, 3) = d(2, 3) \\ d(1, 2) = d(1, 3) = d(0, 2) \\ d(0, 1) \neq d(0, 2) \end{cases}$$

Posons $\mathcal{F} = A \cup B$. Nous avons :

Fait 2. *Une structure binaire ordonnée de type 1 définie sur trois éléments est indécomposable si et seulement si elle est isomorphe à une structure de A .*

Preuve. Il est facile de vérifier que toutes les structures de A sont indécomposables. Inversement, soit $\mathcal{S}$ une structure binaire ordonnée à trois éléments indécomposable. $\mathcal{S}$ est isomorphe à une structure $\mathcal{S}'$ définie sur $\{0, 1, 2\}$ tels que $0 < 1 < 2$. Donc les ensembles $\{0, 1\}$ et $\{1, 2\}$ ne sont pas des intervalles de $\mathcal{S}'$, ce qui implique que $d(0, 2) \neq d(1, 2)$ et $d(0, 1) \neq d(0, 2)$. Donc $\mathcal{S}' \in A$. $\square$

Remarques 4.8. 1. Il y a exactement deux structures dans A pour lesquelles ρ est un tournoi (c'est à dire $d(i, j) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$, pour tout $i, j \in E$) ; ce sont celles pour lesquelles ρ est un cycle de longueur 3.

2. Il n'existe aucune structure de A pour laquelle ρ est un ordre total et dans B il y a deux bichaînes à quatre éléments correspondant aux permutations 2413 et 3142.

3. Les structures de B sont indécomposables.

Théorème 4.9. Une structure binaire ordonnée de type 1 est séparable si et seulement si elle n'abrite aucune structure de $\mathcal{F}$. En d'autres termes $\mathcal{S}_1 = \text{Forb}(\mathcal{F})$.

Avant de donner la preuve de ce théorème, montrons le résultat suivant :

Lemme 4.10. Toute structure binaire ordonnée de type 1 indécomposable d'ordre quatre abrite au moins une des structures de $\mathcal{F}$.

Preuve. Il suffit de faire la preuve pour une structure représentant un type d'isomorphie. Soit alors $\mathcal{R} := (\{0, 1, 2, 3\}, \leq, \rho)$ une structure indécomposable telle que $0 < 1 < 2 < 3$. Les valeurs de $d(0, 1)$, $d(0, 2)$ et $d(0, 3)$ ne peuvent être égales car sinon $\{1, 2, 3\}$ serait un intervalle. Donc, ou bien ces trois valeurs sont toutes différentes, ou bien deux d'entre elles sont égales et différentes de la troisième. Nous avons alors les cas suivants :

Cas 1 : Supposons $d(0, 1) = d(0, 2) \neq d(0, 3)$ alors :

- soit $d(1, 3) \neq d(0, 3)$ et dans ce cas $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{0, 1, 3\}}} \in \mathcal{F}$,
- soit $d(1, 3) = d(0, 3)$ et dans ce cas nous avons forcément $d(2, 3) \neq d(0, 3)$, car sinon $\{0, 1, 2\}$ serait un intervalle de $\mathcal{R}$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{R}$ est indécomposable, d'où $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{0, 2, 3\}}} \in \mathcal{F}$.

Cas 2 : Si $d(0, 1) \neq d(0, 2) = d(0, 3)$. Ce cas est identique au premier.

Cas 3 : Si $d(0, 1) = d(0, 3) \neq d(0, 2)$ alors nous avons les cas suivants :

1. soit $d(1, 2) \neq d(0, 2)$ et dans ce cas $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{0, 1, 2\}}} \in \mathcal{F}$,
2. soit $d(1, 2) = d(0, 2)$ et dans ce cas nous avons forcément $d(1, 3) \neq d(0, 3)$ car sinon $\{0, 1\}$ serait un intervalle. Deux cas se présentent :
 - (a) soit $d(2, 3) \neq d(0, 3)$ auquel cas $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{0, 2, 3\}}} \in \mathcal{F}$,
 - (b) soit $d(2, 3) = d(0, 3)$ et dans ce cas nous avons :
 - ou bien $d(1, 2) \neq d(1, 3)$ et nous avons déjà $d(1, 3) \neq d(0, 3) = d(2, 3)$, donc $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{1, 2, 3\}}} \in \mathcal{F}$,
 - ou bien $d(1, 2) = d(1, 3)$, ce qui donne une structure de B , donc dans $\mathcal{F}$.

Cas 4 : Si $d(0, 1)$, $d(0, 2)$ et $d(0, 3)$ ont des valeurs toutes différentes alors :

1. si $d(1, 2) \neq d(0, 2)$ alors $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{0, 1, 2\}}} \in \mathcal{F}$,

2. si, $d(1, 2) = d(0, 2)$ et dans ce cas nous avons :

(a) si $d(2, 3) \neq d(0, 3)$ alors $\mathcal{R}_{\uparrow\{0,2,3\}} \in \mathcal{F}$,

(b) si, $d(2, 3) = d(0, 3)$ et dans ce cas nous avons, forcément, $d(1, 3) \neq d(0, 3)$, car sinon $\{0, 1, 2\}$ serait un intervalle. Nous avons alors $\mathcal{R}_{\uparrow\{0,1,3\}} \in \mathcal{F}$.

Donc toute structure indécomposable d'ordre quatre abrite, au moins, une structure de $\mathcal{F}$. $\square$

Preuve du Théorème 4.9.

$\Rightarrow$) Si $\mathcal{R}$ est séparable alors, d'après le Corollaire 4.4, elle n'abrite pas de structure indécomposable de taille supérieure à deux et donc ne peut pas abriter une structure de $\mathcal{F}$ (d'après le Fait 2 et le point (3) des Remarques 4.8).

$\Leftarrow$) Si $\mathcal{R}$ n'est pas séparable alors, toujours d'après le Corollaire 4.4 elle abrite une structure indécomposable $\mathcal{S}$ de taille $n \geq 3$. Montrons par récurrence sur n que toute structure indécomposable $\mathcal{S}$ définie sur un n -ensemble abrite une structure de $\mathcal{F}$.

- Si $n = 3$ alors, d'après le Fait 2, $\mathcal{S} \in \mathcal{F}$ et si $n = 4$ alors d'après le Lemme 4.10, $\mathcal{S}$ abrite une structure de $\mathcal{F}$.
- Supposons que toute structure indécomposable d'ordre $(n - 1)$ ($n \geq 4$) abrite une structure de $\mathcal{F}$. Soit $\mathcal{S}$ une structure indécomposable d'ordre $n \geq 5$ alors d'après le Théorème 3.3 de Schmerl et Trotter, $\mathcal{S}$ abrite une structure indécomposable d'ordre $(n - 1)$ ou $(n - 2)$. Ce qui termine la preuve du théorème.

$\square$

Profil de la classe $\mathcal{S}_1^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_1^{ir}$)

D'après le Fait 1, les classes $\mathcal{S}_1^{re}$ et $\mathcal{S}_1^{ir}$ ont même profil qui est celui des classes $\mathcal{T}_1^{re}$ et $\mathcal{T}_1^{ir}$.

Désignons par S_1^r la fonction génératrice de la classe $\mathcal{S}_1^{re}$ (donc de $\mathcal{S}_1^{ir}$). Nous avons les résultats suivants :

Proposition 4.11. *La fonction génératrice S_1^r vérifie :*

$$3(S_1^r)^2 + (x - 1)S_1^r + x = 0. \quad (4.3)$$

et est donnée par :

$$S_1^r = \frac{1 - x - \sqrt{1 - 14x + x^2}}{6}. \quad (4.4)$$

Preuve. $\mathcal{D}_{(2)}^1$ possède, à l'isomorphie près, quatre structures. Ecrivons chaque r de $\mathcal{D}_{(2)}^1$ comme $r := (\{0, 1\}, \leq, \rho)$ avec $0 < 1$, et posons $\mathcal{D}_{(2)}^1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$. D'après le lemme 3.27 et le corollaire 4.7 nous avons :

$$\mathcal{S}_1^{re} = \{1\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq 4} (\mathcal{S}_1^{re}(\mathbf{r}_i) \oplus_{\mathbf{r}_i} \mathcal{S}_1^{re}).$$

et pour chaque $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ nous avons :

$$\mathcal{S}_1^{re}(r_i) = \{\mathbf{1}\} \cup \bigcup_{j \neq i} (\mathcal{S}_1^{re}(\mathbf{r}_j) \oplus_{\mathbf{r}_j} \mathcal{S}_1^{re}).$$

où $\mathbf{1}$ désigne la structure à un élément et $\mathcal{S}_1^{re}(r_i)$ la classe des structure de $\mathcal{S}_1^{re}$ qui sont r_i -indécomposables. En passant aux séries génératrices nous obtenons :

$$S_1^r = x + S_1^r \sum_{1 \leq i \leq 4} S'_i, \quad (4.5)$$

et

$$S'_i = x + S_1^r \sum_{j \neq i} S'_j \text{ pour tout } i \in \{1, 2, 3, 4\}. \quad (4.6)$$

où S'_i est la série génératrice de $\mathcal{S}_1^{re}(r_i)$. En éliminant les S'_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ de l'équation (4.5), nous obtenons l'équation (4.3). La résolution de cette équation donne la fonction (4.4). L'expansion de cette fonction donne la série dont les premiers termes sont

$$S_1^r = x + 4x^2 + 28x^3 + 244x^4 + 2380x^5 + \dots$$

□

Cette série se trouve dans "On line encyclopédia of integer sequences" sous le numéro A103211 [101].

Dans [1], les auteurs ont étudié les partitions guillotine en dimension d et ont donné la série génératrice du nombre de ces partitions, elle vérifie $f = 1 + xf + (d-1)xf^2$, (*). Ils ont également établi une correspondance bijective entre les partitions guillotine en dimension d et les arbres binaires étiquetés par l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.

Dans [12], les auteurs ont donné la série génératrice des d -permutations séparables, elle vérifie $f = 1 + xf + (2^{d-1} - 1)xf^2$, (**) et ont établi une correspondance bijective entre les d -permutations séparables et les partitions guillotine en dimension 2^{d-1} . Il se trouve que notre série S_1^r vérifie (*) pour $d = 4$ et (**) pour $d = 3$.

Pour ne pas allourdir cette partie avec des rappels sur les partitions guillotine qui ne rentrent pas dans le cadre de ce travail, nous renvoyons ces rappels à l'annexe A où nous construisons également, une bijection entre les structures binaires ordonnées séparables de type 1 et les arbres binaires étiquetés par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ceci entraîne que l'ensemble $\mathcal{S}_1^{re}$ et l'ensembles des partitions guillotine en dimension 4 sont isomorphes. Cela entraîne également que $\mathcal{S}_1^{re}$ est isomorphe à l'ensemble des 3-permutations.

Corollaire 4.12. *Les classes $\mathcal{S}_1^{re}$ et $\mathcal{S}_1^{ir}$ sont algébriques.*

Nous donnons pour $n = 1, 2, 3, 4$ les formes de ces structures voir TABLE 4.1 (les boucles ne sont pas représentées).

- Pour $n = 1$ nous avons une seule structure.

- Pour $n = 2$ nous avons quatre structures qui sont r_i , $i \in \{1, 2, 3, 4\}$.
- Pour $n = 3$, les structures s'obtiennent en faisant la somme, suivant l'une des structures r_i , de la structure **1** et d'une structure à deux éléments r_j . Nous avons deux cas (voir TABLE 4.1). Dans le cas (1) nous avons 4 structures différentes (r_j) pour chaque $i = 1, \dots, 4$, donc $4 \times 4 = 16$ structures différentes et dans le cas (2) nous devons exclure pour chaque i la structure $r_j = r_i$ (car elle est isomorphe à une structure trouvée dans le cas (1)) ce qui donne 3×4 structures différentes. Au total, nous obtenons les 28 structures d'ordre 3.
- Pour $n = 4$, Les structures s'obtiennent en faisant la somme, suivant l'une des structures r_i , de la structure **1** avec une structure à trois éléments, cas (1) et (2) dans la TABLE 4.1, ou de deux structures à deux éléments cas (3). Dans le cas (1) pour chaque r_i , nous avons 28 structures r_j ce qui donne 4×28 structures différentes, dans le cas (2) nous avons pour chaque r_i , 28 structures r_j mais nous devons exclure celles qui se décomposent suivant r_i qui sont au nombre de 7 ce qui fait 21 structures pour chaque r_i , donc 4×21 structures. Dans le cas (3) la structure r_j doit être différente de r_i ce qui donne $3 \times 4 = 12$ structures différentes pour chaque r_i donc 4×12 structures. Au total, nous obtenons les 244 structures d'ordre 4.

$\leq$ ρ r_1	$\leq$ ρ r_2	$\leq$ ρ r_3	$\leq$ ρ r_4	
$d(0, 1) = (1, 0)$	$d(0, 1) = (0, 1)$	$d(0, 1) = (1, 1)$	$d(0, 1) = (0, 0)$	
Structures à deux éléments				
 r_i	 r_i	 r_i	 r_i	 r_i
Cas (1)	Cas (2)	Cas (1)	Cas (2)	Cas (3)
Structures d'ordre 3		Structures d'ordre 4		

TABLE 4.1 – Construction des structures séparables d'ordres 3 et 4.

Profil de la classe $\mathcal{S}_1$

Désignons par S_1 la série génératrice de $\mathcal{S}_1$. Nous avons :

Proposition 4.13. *La série S_1 vérifie :*

$$3S_1^2 + (2x - 1)S_1 + 2x = 0. \quad (4.7)$$

et est donnée par :

$$S_1 = \frac{1 - 2x - \sqrt{1 - 28x + 4x^2}}{6}. \quad (4.8)$$

Preuve. La preuve de cette proposition se fait de la même façon que celle de la Proposition 4.11 à la différence que dans ce cas nous avons deux structures à un élément. $\square$

L'expansion de cette fonction en série donne :

$$S_1 = 2x + 16x^2 + 224x^3 + 3904x^4 + \dots$$

Nous pouvons, comme dans le cas précédent, donner, pour $n = 1, 2, 3, 4$, les formes des structures (ces structures se construisent de la même façon que les précédentes, mais leurs nombres augmentent car elles ne sont pas réflexives ou irréflexives).

- Pour $n = 1$ nous avons deux structures.
- Pour $n = 2$ nous avons, pour chaque r_i quatre structures qui coïncident avec r_i sur le couple $(0, 1)$ donc il y a 16 structures à deux éléments.
- Pour $n = 3$, les structures s'obtiennent en faisant la somme, suivant l'une des structures r_i , d'une structure à un élément et d'une structure à deux éléments. Dans le cas (1) nous avons 2 structures à un élément et 16 structures différentes (r_j) pour chaque r_i , $1 \leq i \leq 4$, donc $2 \times 16 \times 4 = 128$ structures différentes et dans le cas (2) nous devons exclure pour chaque i la structure $r_j = r_i$ (car elle est isomorphe à une structure trouvée dans le cas (1)), donc le nombre de structures r_j est $16 - 4$ ce qui donne $12 \times 2 \times 4$ structures différentes. Au total, nous obtenons les 224 structures d'ordre 3.
- Pour $n = 4$, Les structures s'obtiennent en faisant la somme, suivant l'une des structures r_i , d'une structure à un élément et d'une structure à trois éléments, cas (1) et (2), ou de deux structures à deux éléments, cas (3). Dans le cas (1) pour chaque r_i , nous avons 224 structures à trois éléments r_j et deux structures à un élément, ce qui donne $4 \times 224 \times 2$ structures différentes. Dans le cas (2) nous avons pour chaque r_i , deux structures à un élément et 224 structures r_j mais nous devons exclure celles qui se décomposent suivant r_i qui sont, d'après le cas précédent, au nombre de $32 + 24$, ce qui fait 168 structures pour chaque r_i , donc $4 \times 168 \times 2$ structures. Dans le cas (3) nous avons, pour chaque r_i , 16 structures pour r_k , la structure r_j ne doit pas se décomposer suivant r_i ce qui donne $3 \times 4 = 12$ structures pour r_j , donc $4 \times 12 \times 16$ structures différentes. Au total, nous obtenons les 3904 structures d'ordre 4.

4.1.3 Profil de $\mathcal{S}_k$ pour $k \geq 2$

Rappelons que $\mathcal{S}_k$ pour $k \geq 2$, est l'ensemble des structures binaires ordonnées séparables de type k . Désignons par S_k sa série génératrice.

Proposition 4.14. *La série génératrice S_k vérifie :*

$$(4^k - 1)S_k^2 + (2^k x - 1)S_k + 2^k x = 0. \quad (4.9)$$

et est donnée par :

$$S_k = \frac{1 - 2^k x - \sqrt{1 - 2^{k+1}(2 \cdot 4^k - 1)x + 2^{2k}x^2}}{2(4^k - 1)}. \quad (4.10)$$

Preuve. Dans ce cas $\mathcal{D}_{(2)}^k$ comporte 4^k structures et nous avons 2^k structures à un élément. D'après le Lemme 3.27, le Corollaire 4.5 et le Corollaire 4.7, nous avons :

$$\mathcal{S}_k = \bigcup_{1 \leq i \leq 2^k} \{1_i\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq 4^k} (\mathcal{S}_k(r_i) \oplus_{r_i} \mathcal{S}_k).$$

et pour chaque i , $1 \leq i \leq 4^k$ nous avons :

$$\mathcal{S}_k(r_i) = \bigcup_{1 \leq i \leq 2^k} \{1_i\} \cup \bigcup_{j \neq i} (\mathcal{S}_k(r_j) \oplus_{r_j} \mathcal{S}_k).$$

où 1_i désigne une structure à un élément et $\mathcal{S}_k(r_i)$ la classe des structure de $\mathcal{S}_k$ qui sont r_i -indécomposables. En passant aux séries génératrices nous obtenons :

$$S_k = 2^k x + S_k \sum_{i=1}^{4^k} S_k^i, \quad (4.11)$$

et

$$S_k^i = 2^k x + S_k \sum_{j \neq i} S_k^j. \quad (4.12)$$

où S_k^i est la série génératrice de $\mathcal{S}_k(r_i)$. En éliminant les S_k^i , $1 \leq i \leq 4^k$ de l'équation (4.11), nous obtenons l'équation (4.9). La résolution de cette équation donne la fonction (4.10). $\square$

4.2 Conjecture et questions

Dans leur papier [2], Albert et Atkinson ont fait remarquer qu'il existe des ensembles infinis de permutations simples dont la clôture par sommes est algébrique, mais il s'avère que certaines sous-classes héréditaires ne sont pas nécessairement algébriques comme c'est le cas de la collection des oscillations décroissantes (voir la fin de cette section). Dans le but d'étendre leur preuve à d'autres classes, ils se sont demandés s'il existe *un ensemble infini de permutations simples dont la clôture par sommes est belordonnée*. Comme nous le verrons dans la proposition 4.15 ci-dessous, l'ensemble des permutations exceptionnelles vérifie cette propriété. En fait, cet ensemble est héréditairement belordonné. Nous pensons que cette notion de belordre héréditaire est le concept qui permet d'étendre le théorème d'Albert et Atkinson.

Les permutations exceptionnelles correspondent aux bichaînes qui sont *critiques* au sens de Schmerl et Trotter (voir Définition 3.2). Schmerl et Trotter [100] ont donné une description des ordres critiques. Ils forment deux classes infinies : $\mathcal{P} := \{\mathcal{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ et $\mathcal{P}' := \{\mathcal{P}'_n : n \in \mathbb{N}\}$ où $\mathcal{P}_n := (V_n, \leq_n)$, $V_n := \{0, \dots, n-1\} \times \{0, 1\}$, $(x, i) <_n (y, j)$ si $i < j$ et $x \leq y$; $\mathcal{P}'_n := (V_n, \le'_n)$ et $(x, i) <'_n (y, j)$ si $j \leq i$ et $x < y$.

Ces ordres sont de dimension deux. Ce qui signifie qu'ils sont intersections de deux ordres linéaires qui sont : $L_{n,1} := (0, 0) < (0, 1) < \dots < (i, 0) < (i, 1) \dots < (n-1, 0) < (n-1, 1)$ et $L_{n,2} := (n-1, 0) < \dots < (n-i, 0) < \dots < (0, 0) < (n-1, 1) < \dots < (n-i, 1) \dots < (0, 1)$ pour $\mathcal{P}_n$ et $L'_{n,1} := L_{n,1}$ et $L'_{n,2} := (L_{n,2})^{-1}$ pour $\mathcal{P}'_n$.

Il est bien connu qu'un ordre $\mathcal{P} := (V, L)$ de dimension deux qui est indécomposable a une unique réalisation (c'est à dire qu'il existe une unique paire $\{L_1, L_2\}$ d'ordres linéaires dont l'intersection est l'ordre L de $\mathcal{P}$) (voir [49]). Donc, il y a au plus deux bichaînes, (V, L_1, L_2) et (V, L_2, L_1) telles que $L_1 \cap L_2 = L$. Les ordres critiques décrits ci-dessus donnent quatre sortes de bichaînes critiques, $(V_n, L_{n,1}, L_{n,2})$, $(V_n, L_{n,2}, L_{n,1})$, $(V_n, L_{n,1}, (L_{n,2})^{-1})$ et $(V_n, (L_{n,2})^{-1}, L_{n,1})$. En effet, une bichaîne est indécomposable si et seulement si l'ordre intersection est indécomposable ([98] pour les bichaînes finies et [112] pour les bichaînes infinies). Les types d'isomorphie de ces bichaînes sont décrits dans l'article d'Albert et Atkinson [2] en terme de permutations de $1, \dots, 2m$ pour $m \geq 2$:

- (i) $2.4.6\dots 2m.1.3.5\dots 2m-1$.
- (ii) $2m-1.2m-3\dots 1.2m.2m-2\dots 2$.
- (iii) $m+1.1.m+2.2\dots 2m.m$.
- (iv) $m.2m.m-1.2m-1\dots 1.m+1$.

Par exemple, le type d'isomorphie de la bichaîne $(V_m, L_{m,1}, L_{m,2})$ est la permutation donnée en (iv), alors que le type d'isomorphie de $(V_m, L_{m,2}, L_{m,1})$ est son inverse, donné en (ii) (énumérer les éléments de V_m dans la suite $1, \dots, 2m$, suivant l'ordre $L_{m,1}$, puis réordonner cette suite suivant l'ordre $L_{m,2}$ (voir Exemple 2.7 en page 50); ceci donne la suite $\sigma^{-1} := \sigma^{-1}(1), \dots, \sigma^{-1}(2m)$; d'après notre définition, le type de $(V_m, L_{m,1}, L_{m,2})$ est la permutation σ , celle-ci est celle donnée en (iv)). Pour $m = 2$, les permutations données en (i) et (iv) coïncident avec 2413 alors que celles données en (ii) et (iii) coïncident avec 3142; pour des valeurs de m plus grandes, ces permutations sont toutes différentes.

Les quatre classes de bichaînes indécomposables sont obtenues à partir de

$$\mathcal{B} := \{(V_n, L_{n,1}, L_{n,2}) : n \in \mathbb{N}\}$$

en permutant les deux ordres dans chaque bichaîne ou bien en inversant le premier ordre ou bien en inversant le second ordre. Par conséquent la structure d'ordre (pour l'abritement) de ces classes est la même et reste la même si on étiquette les éléments des ces bichaînes.

Proposition 4.15. *La classe des bichaînes critiques est héréditairement belordonnée.*

Preuve. Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, la classe des bichaînes est l'union de quatre classes, donc pour montrer qu'elle est héréditairement belordonnée, il suffit de montrer que chacune de ces classe est héréditairement belordonnée. D'après l'observation ci-dessus, il suffit de montrer qu'une seule parmi elle l'est, par exemple $\mathcal{B}$.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble belordonné. Nous devons montrer que $\mathcal{B}.\mathcal{A}$ est belordonné. Pour cela, posons $\mathcal{B} := \mathcal{A}^2$, où $\mathcal{A}^2 := \{e : \{0, 1\} \rightarrow \mathcal{A}\}$ est l'ensemble des applications de $\{0, 1\}$ dans $\mathcal{A}$, et ordonnons $\mathcal{B}$ suivant ses composantes. Soit $\mathcal{B}^*$ l'ensemble de tous les mots sur l'alphabet ordonné $\mathcal{B}$ (c'est à dire de toutes les suites d'éléments de $\mathcal{B}$). Nous définissons une application F , qui préserve l'ordre, de $\mathcal{B}^*$ sur $\mathcal{B}.\mathcal{A}$. Ceci est suffisant. En effet, $\mathcal{B}$ est belordonné comme produit de deux ensembles belordonné donc, d'après le théorème d'Higman sur les mots définis sur un alphabet ordonné [53] (voir Théorème 1.7), $\mathcal{B}^*$ est belordonné. Puisque $\mathcal{B}.\mathcal{A}$ est l'image d'un belordre par une application croissante il est belordonné (voir Propriétés 1.5.).

Nous définissons l'application F comme suit. Soit $w := w(0)w(1)\cdots w(n-1) \in \mathcal{B}^*$. Posons $F(w) := (\mathcal{R}, f_w) \in \mathcal{B.A}$ où $\mathcal{R} := (V_n, L_{n,1}, L_{n,2})$ et $f_w(i, j) := w(i)(j)$ pour $j \in \{0, 1\}$. Observons d'abord que $w \leq w'$ dans $\mathcal{B}^*$ implique $F(w) \leq F(w')$ dans $\mathcal{B.A}$. En effet, si $w \leq w'$ il existe un abriement h de la chaîne $0 < \cdots < n-1$ dans la chaîne $0 < \cdots < n'-1$ tel que $w(i) \leq w'(h(i))$ pour tout $i < n$. Soit alors $\bar{h} : \{0, \dots, n-1\} \times \{0, 1\} \rightarrow \{0, \dots, n'-1\} \times \{0, 1\}$ défini en posant $\bar{h}(i, j) := (h(i), j)$. Comme il est facile de le vérifier, $\bar{h}$ est un abriement de $F(w)$ dans $F(w')$, car pour $x = (i, j) \in \{0, \dots, n-1\} \times \{0, 1\}$ nous avons

$$f_w(x) = f_w(i, j) = w(i)(j) \leq w'(h(i))(j) = f_{w'}(h(i), j) = f_{w'}(\bar{h}(i, j)) = f_{w'}(\bar{h}(x)).$$

Notons ensuite que F est surjective. En effet, si $(\mathcal{R}, f) \in \mathcal{B.A}$ avec $\mathcal{R} := (V_n, L_{n,1}, L_{n,2})$ alors le mot $w := w(0)w(1)\cdots w(n-1)$ avec $w(i)(j) := f(i, j)$ est tel que $F(w) = (\mathcal{R}, f)$. □

Avec la Proposition 3.24 et le Théorème 3.21, nous avons :

Corollaire 4.16. *La clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques est héréditairement belordonnée et a un nombre fini de bornes.*

Dans [2] il est mentionné que cette classe a un nombre fini de bornes. La série génératrice de la classe des bichaînes critiques est rationnelle (la classe est couverte par quatre chaînes). D'après le Corollaire 3.29 (ou corollaire 13 de [2]) sa clôture par sommes est algébrique.

Il est naturel de se demander si la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques est héréditairement algébrique.

Comme indiqué par V.Vatter [110], la réponse à cette question est positive. Ceci découle d'un résultat plus général sur "les classes grille-géométriques" (*geometric grid classes* en anglais) de permutations et le fait que ces classes renferment les classes de permutations exceptionnelles. En effet, comme il a été montré dans [5] et [6] :

Théorème 4.17. [5]

Toute classe grille-géométrique est héréditairement rationnelle et a un nombre fini de bornes.

Théorème 4.18. [6]

La clôture par sommes de toute classe géométriquement en grille est héréditairement algébrique.

Une classe géométriquement en grille est une classe contenue dans une classe grille-géométrique. Pour ne pas allourdir cette partie, nous renvoyons à l'annexe B les définitions et les rappels de résultats concernant les classes grille-géométriques.

Le fait que la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques soit héréditairement algébrique serait également une conséquence de la conjecture pour les classes héréditaires de structures binaires ordonnées que nous formulons ci-dessous. En effet, la classe des bichaînes critiques satisfait les hypothèses de cette conjecture.

Conjecture 1. *Si $\mathcal{D}$ est une classe héréditaire de structures binaires ordonnées indécomposables qui est héréditairement belordonnée et héréditairement algébrique, alors sa clôture par sommes est héréditairement algébrique.*

L'hypothèse que $\mathcal{D}$ est belordonné ne suffit pas dans la Conjecture 1.

En effet, soit $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ le chemin doublement infini dont l'ensemble des sommets est $\mathbb{Z}$ et l'ensemble des arêtes est $E := \{\{n, m\} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |n - m| = 1\}$. L'ensemble des arêtes E a deux orientations transitives, e.g. $P := \{(n, m) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |n - m| = 1 \text{ et } n \text{ est pair}\}$ et son inverse ou duals P^{-1} , nous les appelons zigzags. Comme ordre, P est l'intersection des ordres linéaires : $L_1 := \dots < 2n < 2n - 1 < 2(n + 1) < 2n + 1 < \dots$ et $L_2 := \dots < 2(n + 1) < 2n + 3 < 2n < 2n + 1 < \dots$.

Soit $\mathcal{B} := (\mathbb{Z}, L_1, L_2)$ et $\mathcal{D}_{osc} := \text{Ind}(\mathcal{B})$.

Lemme 4.19. $\mathcal{D}_{osc}$ est belordonné mais non héréditairement belordonné.

Preuve. Les membres de $\mathcal{D}_{osc}$ de taille n sont obtenus en restreignant $\mathcal{B}$ aux intervalles de taille $n \neq 3$ de la chaîne $(\mathbb{Z}, \leq)$ (observons d'abord que le graphe $\mathcal{P}_{\mathbb{Z}}$ est indécomposable ainsi que toutes ses restrictions aux intervalles de tailles différentes de 3 de la chaîne $(\mathbb{Z}, \leq)$ et par suite il n'y a pas d'autres restrictions indécomposables ; puis, utilisons le fait que l'indécomposabilité d'un graphe de comparabilité découle de l'indécomposabilité de ses orientations [58], et que l'indécomposabilité d'un ordre de dimension deux découle de l'indécomposabilité des bichaînes associées à l'ordre [112]). A l'isomorphie près, il y a deux bichaînes indécomposables de taille $n \neq 3$: $\mathcal{B}_n := \mathcal{B}_{\{0, \dots, n-1\}}$ et $\mathcal{B}_n^{-1} := \mathcal{B}_{\{0, \dots, n-1\}}^{-1}$ où $\mathcal{B}^{-1} := (\mathbb{Z}, L_1^{-1}, L_2^{-1})$. Ces deux bichaînes abritent tous les membres de $\mathcal{D}_{osc}$ ayant des tailles inférieures à n . Etant couvert par deux chaînes, $\mathcal{D}_{osc}$ est belordonné. Pour montrer que $\mathcal{D}_{osc}$ n'est pas héréditairement belordonné, nous pouvons associer à tout membre indécomposable de $\mathcal{D}_{osc}$ le graphe de comparabilité de l'intersection des deux ordres et observer que cette association préserve la relation d'abritement, même si on rajoute des étiquettes. La classes des graphes obtenue par cette association consiste en les chemins de tailles différentes de 3. Elle n'est pas héréditairement belordonnée. En fait, comme nous pouvons le voir, si une classe $\mathcal{G}$ de graphes contient une infinité de chemins de tailles distinctes, alors $\mathcal{G}.\underline{2}$ n'est pas belordonné, où $\underline{2}$ est l'antichaîne à deux éléments 0 et 1. En effet, si on étiquette les extrémités de chaque chemin par 1 et les autres sommets par 0, nous obtenons une antichaîne infinie. Donc $\mathcal{D}_{osc}.\underline{2}$ n'est pas belordonné. $\square$

Lemme 4.20. $\mathcal{D}_{osc}$ est héréditairement algébrique.

Preuve. Comme l'ensemble $\mathcal{D}_{osc}$ est couvert par deux chaînes, toute sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{D}_{osc}$ est finie, donc algébrique. La série génératrice de $\mathcal{D}_{osc}$ est rationnelle, sa fonction génératrice est donnée par :

$$\frac{x + x^2 - 2x^3 + 2x^4}{1 - x}.$$

D'où l'on déduit que $\mathcal{D}_{osc}$ est héréditairement algébrique. $\square$

Lemme 4.21. $\sum \mathcal{D}_{osc}$ n'est pas belordonné.

Preuve. C'est dû au fait que l'on peut abriter l'ensemble ordonné $\mathcal{D}_{osc}.\underline{2}$ dans $\sum \mathcal{D}_{osc}$ par une application qui préserve l'ordre. Un argument simple consiste à observer d'abord que la famille $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$, où G_n est le graphe obtenu à partir du chemin à n sommets P_n en remplaçant ses sommets extrémités par un indépendant à deux sommets, est une antichaîne, puis que ces graphes sont des graphes de comparabilité associés aux membres de $\sum \mathcal{D}_{osc}$. $\square$

Lemme 4.22. $\sum \mathcal{D}_{osc}$ est algébrique mais non héréditairement algébrique.

Preuve. $\mathcal{D}_{osc}$ étant algébrique (Lemme 4.20), d'après le Corollaire 3.29, sa clôture par sommes, $\sum \mathcal{D}_{osc}$, est algébrique, en fait la fonction génératrice D de $\sum \mathcal{D}_{osc}$ vérifie :

$$2D^5 + 2D^4 - D^3 + (2 - x)D^2 - D + x = 0.$$

Mais d'après le Lemme 4.21, $\sum \mathcal{D}_{osc}$ n'est pas belordonné, donc n'est pas héréditairement algébrique d'après le Lemme 3.30. $\square$

Les permutations correspondant aux membres de $\mathcal{D}_{osc}$ s'appellent *oscillations décroissantes* (*decreasing oscillations* en anglais) voir [29]. Ces permutations ont les formes suivantes pour $n \geq 4$:

Si n est pair on a :

$$\sigma_1 = (n-2)n(n-4)(n-1)(n-6)(n-3)(n-8) \dots 1.3 \text{ et}$$

$$\sigma_2 = (n-1)(n-3)n(n-5)(n-2)(n-7)(n-4) \dots 4.2, \text{ avec } \sigma_1 = \sigma_2^{-1},$$

et si n est impair, alors

$$\sigma'_1 = (n-1)(n-3)n(n-5)(n-2)(n-7)(n-4) \dots 1.3 \text{ et}$$

$$\sigma'_2 = (n-2)n(n-4)(n-1)(n-6)(n-3)(n-8) \dots 4.2, \text{ avec } \sigma'_1 = \sigma'_1{}^{-1}, \sigma'_2 = \sigma'_2{}^{-1}.$$

Par exemple, pour $n = 7$ on a $\sigma'_1 = 6472513$ et $\sigma'_2 = 5736142$ et pour $n = 8$ on a $\sigma_1 = 68472513$ et $\sigma_2 = 75836142$.

Nous rappelons la définition de l'oscillation décroissante donnée dans [29]. La *suite oscillante croissante* est la suite infinie donnée par : $4, 1, 6, 3, 8, 5, \dots, 2k+2, 2k-1, \dots$. Une *oscillation croissante* est toute permutation simple qui est contenue dans la suite oscillante croissante. Une *oscillation décroissante* est la permutation duale d'une oscillation croissante, c'est à dire, si $\sigma = a_1 a_2 \dots a_n$, son dual est $\sigma^* = a_n \dots a_2 a_1$.

La clôture par abritement $\downarrow \mathcal{D}_{osc}$ de $\mathcal{D}_{osc}$ est l'âge, $Age(\mathcal{B})$, de $\mathcal{B}$; cet ensemble est rationnel et a quatre obstructions, sa série génératrice est

$$\frac{1-x}{1-2x-x^3},$$

la fonction génératrice étant la séquence A052980 de [101], commençant par 1, 1, 2, 5, 11, 24.

En effet, dans [29], il a été montré que la classe des permutations contenues dans les oscillations croissantes est $Forb(\{321, 2341, 3412, 4123\})$. Cette classe a, pour série la séquence A052980 [101] et pour fonction génératrice

$$\frac{1-x}{1-2x-x^3}.$$

Comme, par définition, une permutation σ est une oscillation décroissante si et seulement si son dual σ^* est une oscillation croissante, il est normal que ces deux classes aient la même fonction profil. Nous pouvons également en déduire que la classe des permutations contenues dans les oscillations décroissantes est $Forb(\{123, 1432, 2143, 3214\})$.

Questions

Est-il vrai que :

1. une classe héréditaire $\mathcal{D}$ de structures binaires ordonnées indécomposables est héréditairement belordonnée lorsque sa clôture par sommes est héréditairement algébrique ? Dans [110], Vatter conjecture qu'une classe de permutations est héréditairement algébrique si et seulement si elle est belordonnée.
2. la série génératrice d'une classe héréditaire de structures relationnelles est rationnelle lorsque le profil de cette classe est borné par un polynôme ? Ce résultat étant vrai pour les graphes [17] et les tournois [25].
3. le profil d'une classe héréditaire belordonnée de structures relationnelle est borné supérieurement par une exponentielle ?

Deuxième partie

Minimalité

Chapitre 5

Notion de minimalité et âges de graphes infinis

5.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons au rôle que peut jouer la notion de minimalité de la théorie des ensembles ordonnés, dans la théorie des relations. Un ensemble ordonné P est dit *minimal* s'il est infini et tout segment initial propre de P est fini.

L'exemple le plus simple est celui de la chaîne ω des entiers naturels. Si nous considérons les structures finies, une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de telles structures, considérées à l'isomorphie près, est dite *minimale* si elle est infinie et toute sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{C}$ est finie. Ces classes minimales ont été caractérisées par Fraïssé, elles ont un profil constant égal à 1 et si la signature est finie, elles sont en nombre fini.

Cette notion est particulièrement intéressante si $\mathcal{C}$ est formée de structures indécomposables et est héréditaire (dans la classe des indécomposables). Aussi, nous disons qu'une classe $\mathcal{C}$ de structures binaires ordonnées est *ind-minimale* si $\mathcal{C}$ contient un nombre infini de structures indécomposables mais toute sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{C}$ n'en contient qu'un nombre fini.

Nous considérons des classes ind-minimales, c'est à dire des classes héréditaires de structures finies dont les sous-ensembles d'indécomposables qu'elles contiennent sont minimaux (dans la classe des structures indécomposables), ou encore des classes contenant une infinité de structures indécomposables dont les sous-classes propres n'en contiennent qu'un nombre fini. Contrairement aux classes minimales, le profil d'une telle classe n'est pas nécessairement constant. Nous obtenons certains résultats généraux en particulier nous montrons que ces classes sont des âges belordonnés et qu'elles sont en nombre continu.

5.2 Classes minimales

5.2.1 Posets minimaux

Définition 5.1. *Un ensemble ordonné P est dit minimal ou de type minimal s'il est infini et tout segment initial propre de P est fini.*

Ces posets minimaux ont été caractérisés par Pouzet-Sauer dans [87] :

Théorème 5.2. *Soit P un ensemble ordonné infini. Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Tout segment initial propre de P est fini.*
2. *P est belordonné et tous les idéaux distincts de P sont principaux.*
3. *P n'a pas d'antichaîne infinie et tous les idéaux distincts de P sont finis.*
4. *Toute extension linéaire de P est de type ω .*
5. *P a des niveaux finis de hauteur ω et pour tout $n < \omega$ il existe $m < \omega$ tel que tout élément de hauteur au plus n est au dessous de tout élément de hauteur au moins m .*
6. *P n'abrite aucun des posets suivants : une antichaîne infinie ; une chaîne de type ω^* (le dual de ω) ; une chaîne de type $\omega + 1$; la somme directe $\omega \oplus 1$ d'une chaîne de type ω et d'une chaîne à un élément.*

Une manière d'obtenir des posets minimaux est donnée par ce corollaire [87]

Corollaire 5.3. *Soient P un ensemble ordonné et n un entier. P est l'intersection de n ordres linéaires de type ω si et seulement si P est l'intersection de n ordres linéaires et P est de type minimal.*

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 5.4. *Tout ensemble ordonné P qui se décompose en un nombre dénombrable de niveaux finis contient un segment initial qui est minimal.*

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme de Zorn à l'ensemble $\mathcal{J}$ des segments initiaux infinis de P ordonné par l'inverse de l'inclusion. Pour cela, nous montrons que $\mathcal{J}$ est fermé pour les intersections de chaînes non vides. En effet, soit $\mathcal{C}$ une chaîne non vide (par rapport à l'inclusion) d'éléments de $\mathcal{J}$. Posons $I := \cap \mathcal{C}$. Soit P_n le niveau n de P et posons $\mathcal{C}_n := \{C_n = C \cap P_n : C \in \mathcal{C}\}$. Les membres C_n de $\mathcal{C}_n$ sont finis, non vides et totalement ordonnés par l'inclusion. Donc, $I_n := \cap C_n$ est non vide. Puisque $I = \cup \{I_n : n \in \mathbb{N}\}$, $I \in \mathcal{J}$. $\square$

5.2.2 Classes minimales de Ω_μ

Définition 5.5. *Une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures de Ω_μ , considérées à l'isomorphie près, est dite minimale ou de type minimale si elle est infinie et toute sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{C}$ est finie.*

Etant donné une structure relationnelle $\mathcal{R}$ de Ω_μ , son âge, $\text{Age}(\mathcal{R})$, est un ensemble ordonné qui est naturellement minimal s'il est infini et totalement ordonné. En effet, dans ce cas, il est ordonné comme la chaîne ω des entiers naturels. Par exemple, si $\mathcal{R}$ est une chaîne, son âge est minimal.

L'inverse (et plus encore) est vrai comme le montre le théorème suivant essentiellement dû à Fraïssé (voir son livre [41] pour une illustration) qui donne la structure d'une classe minimale (voir aussi [83, 85]).

Théorème 5.6. *Une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles de signature μ (considérées à l'isomorphie près) est minimale si et seulement si c'est l'âge d'une structure relationnelle infinie monomorphe.*

D'après Fraïssé qui a introduit la notion de monomorphie en 1954, une structure relationnelle $\mathcal{R}$ pour laquelle $\varphi_{\mathcal{R}}(n) = 1$ pour tout $n \leq |V(\mathcal{R})|$ est *monomorphe*¹.

Il s'ensuit immédiatement

Lemme 5.7. *Toute classe minimale de Ω_μ est un idéal de Ω_μ .*

Si la signature μ est finie, le nombre de structures infinies monomorphes (enchainables) est fini, les classes minimales de Ω_μ sont donc en nombre fini. En particulier, si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire minimale de graphes, $\mathcal{C}$ est l'âge du graphe infini qui est complet ou vide. Il y a donc deux classes minimales de graphes, l'une formée des graphes finis vides, l'autre de graphes finis complets.

Lemme 5.8. *Si l'arité μ est finie, toute classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_μ contient une sous-classe minimale.*

Preuve. Ce résultat est une conséquence du Théorème 1.13, en effet, la preuve de ce dernier montre que $\mathcal{C}$ contient une section initiale $\mathcal{I}$ qui est infinie et belordonnée. La collection des sections initiales d'un belordre étant bien fondée (Théorème 1.3), prendre $\mathcal{I}' \subseteq \mathcal{I}$ qui est minimale parmi les sections initiales infinies. $\square$

5.3 Classe ind-minimale

Cette notion de classe minimale est particulièrement intéressante si $\mathcal{C}$ est formée de structures binaires indécomposables et est héréditaire (dans la classe des indécomposables).

L'intérêt des classes héréditaires minimales formées de structures indécomposables apparaît également dans le lemme suivant :

Lemme 5.9. *Dans la classe des structures binaires finies de type k (k fini), il existe une correspondance biunivoque entre les classes héréditaires minimales de structures indécomposables et les classes héréditaires qui contiennent une infinité de structures indécomposables mais dont toute sous-classe héréditaire propre n'en contient qu'un nombre fini.*

1. Voir cette notion plus en détail dans le chapitre 7.

Preuve. A une classe héréditaire minimale $\mathcal{I}$ de structures finies indécomposables on associe la classe héréditaire $\downarrow \mathcal{I}$. Si $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de structures finies qui contient une infinité de structures indécomposables mais dont toute sous-classe héréditaire propre n'en contient qu'un nombre fini on associe la classe $\text{Ind}(\mathcal{C})$. $\square$

Par exemple, à la classe des chemins finis correspond l'âge d'un chemin infini. Ces dernières classes seront dites *ind-minimale*.

Définition 5.10. Une classe $\mathcal{C}$ de Ω_k est dite ind-minimale si $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est infinie et pour toute sous-classe héréditaire propre $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$, la sous-classe $\mathcal{C}' \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est finie.

Nous avons, de manière naturelle le lemme suivant :

Lemme 5.11. Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de $\text{Ind}(\Omega_k)$, alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{C}$ est minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$.
- (ii) $\downarrow \mathcal{C}$ est ind-minimale.
- (iii) $\mathcal{C}$ est infinie et toute sous-classe propre $\mathcal{C}'$ de $\downarrow \mathcal{C}$ a un nombre fini d'indécomposables tous de taille finie.

Preuve. Si $\mathcal{C}$ est minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$ alors toute sous-classe propre de $\downarrow \mathcal{C}$ contient une sous-classe propre de $\mathcal{C}$ qui est finie, donc $\downarrow \mathcal{C}$ est ind-minimale, d'où (i) implique (ii). Avec (ii) comme hypothèse, $\mathcal{C}$ est infinie. Soit $\mathcal{C}'$ une sous-classe propre de $\downarrow \mathcal{C}$, donc $\mathcal{C}'$ a un nombre fini d'indécomposables qui sont de tailles finies (car $\mathcal{C}$ étant héréditaire dans $\text{Ind}(\Omega_k)$, leur nombre serait infini, d'après Schmerl et Trotter, si ce n'était pas le cas), d'où (iii). Supposons (iii) alors $\mathcal{C}$ est infinie et toute sous-classe propre de $\mathcal{C}$ induit une sous-classe propre de $\downarrow \mathcal{C}$ qui a un nombre fini d'indécomposables, d'où (i). $\square$

Nous avons également le résultat suivant :

Théorème 5.12. Soit $\mathcal{D}$ une classe héréditaire infinie de structures indécomposables finies. Toute sous-classe de $\mathcal{D}$ contient une sous-classe minimale si et seulement si $\mathcal{D}$ ne contient qu'un nombre fini de membres de taille 1 et 2.

La preuve du Théorème 5.12 repose sur le lemme suivant :

Lemme 5.13. Tout niveau de $\mathcal{D}$ est fini.

L'arité des structures de $\mathcal{D}$ n'est pas fini, à priori (si elle est finie, le Lemme 5.13 devient évident). Il existe beaucoup d'exemples intéressants de structures relationnelles dont l'arité n'est pas finie, nous pouvons citer des exemples qui viennent des espaces métrique (voir [38, 37]).

Considérons un espace métrique $\mathbb{M} := (M, d)$ où d est une distance sur l'ensemble M . Nous pouvons associer une structure relationnelle binaire $\mathcal{R}_{\mathbb{M}} := (M, (\rho_r)_{r \in \mathbb{Q}^+})$ avec $\rho_r(x, y) := 1$ si et seulement si $d(x, y) \leq r$. Avec cette définition,

$$d(x, y) = \inf\{r \in \mathbb{Q}^+ / \rho_r(x, y) = 1\}.$$

Ainsi, l'espace métrique $\mathbb{M}$ peut-être retrouvé à partir de la structure $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$. Il s'ensuit également que pour deux espaces métriques $\mathbb{M} := (M, d)$ et $\mathbb{M}' := (M', d')$, une application $f : M \rightarrow M'$ est une isométrie de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}'$ si et seulement si f est un abriement de $\mathcal{R}_{\mathbb{M}}$ dans $\mathcal{R}_{\mathbb{M}'}$ [38]. Nous rappelons que f est une *isométrie* de $\mathbb{M}$ dans $\mathbb{M}'$ si $d'(f(x), f(y)) = d(x, y)$ pour tous $x, y \in M$.

Le Théorème 5.12 est basé sur le résultat de Schmerl et Trotter [100], à partir duquel découle la relation ci-dessous entre la hauteur de toute structure $\mathcal{R}$ de $\text{Ind}(\Omega_k)$ et son ordre $|\mathcal{R}|$. Dans leur papier, Schmerl et Trotter ont donné des exemples de structures critiques indécomposables dans les classes des graphes, des ensembles ordonnés, des tournois, des graphes orientés et des structures relationnelles binaires (voir Définition 3.2 pour une structure critique). L'ensemble des structures critiques dans chacune de ces classes est une union finie de chaînes. Considérons la classe héréditaire $\mathcal{D}$. Décomposons-là en niveaux, dans le niveau i , pour $i \leq 2$, sont les structures d'ordres un et deux. Nous avons une relation entre la hauteur de toute structure $\mathcal{R}$ de $\mathcal{D}$, notée, $h(\mathcal{R})$ et son ordre $|\mathcal{R}|$:

1. Si $\mathcal{D}$ est composée de structures critiques auxquelles nous rajoutons les structures indécomposables d'ordres un et deux, alors, à partir de l'ordre $n > 2$, nous avons uniquement des structures indécomposables d'ordres pairs. Nous obtenons la relation suivante :

$$h(\mathcal{R}) \leq |\mathcal{R}| \leq 2(h(\mathcal{R}) - 1).$$

En fait, si $\mathcal{R}$ a un ou deux éléments, alors $|\mathcal{R}| = h(\mathcal{R})$ et si $|\mathcal{R}| > 2$, nous avons $|\mathcal{R}| = 2(h(\mathcal{R}) - 1)$.

2. si $\mathcal{D}$ est composée de structures indécomposables non critiques, alors, d'après le Corollaire 3.5 nous avons des membres de tout ordre (excepté, peut-être, pour l'ordre trois si $\mathcal{D}$ est une classe de graphes ou de bichaînes), nous obtenons la relation suivante :

$$h(\mathcal{R}) \leq |\mathcal{R}| \leq h(\mathcal{R}) + 1.$$

De ce fait découle le Lemme 5.13.

Preuve du Théorème 5.12. D'après le Lemme 5.4, il suffit de montrer que $\mathcal{D}$ se décompose en une infinité de niveaux finis si et seulement si $\mathcal{D}$ ne contient qu'un nombre fini de membres de taille 1 et 2.

La condition nécessaire est évidente, pour la condition suffisante, puisque les membres de $\mathcal{D}$ sont finis, cet ensemble est bien fondé, donc il se décompose en niveaux. Pour $i \leq 2$, le i -ème niveau de $\mathcal{D}$ comporte les structures relationnelles à i éléments qui sont en nombre fini par hypothèse. Si $i \geq 3$, le résultat vient du Lemme 5.13.

□

Théorème 5.14. Une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_k est ind-minimale si et seulement si

1. $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$.
2. $\mathcal{C} := \downarrow (\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k))$.

Preuve. Condition nécessaire : supposons que $\mathcal{C}$ soit ind-minimale. Alors $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est infini. Soit $\mathcal{I}$ une sous-classe héréditaire propre de $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$. D'un côté $\downarrow \mathcal{I}$ est une sous-classe propre de $\mathcal{C}$, donc $(\downarrow \mathcal{I}) \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est finie car $\mathcal{C}$ est ind-minimale. Mais $(\downarrow \mathcal{I}) \cap \text{Ind}(\Omega_k) = \mathcal{I}$, il s'ensuit que $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$. D'un autre côté, nous avons $\downarrow (\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)) \subseteq \mathcal{C}$, donc si $\mathcal{C} \neq \downarrow (\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k))$, alors $\downarrow (\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k))$ est une sous-classe propre de $\mathcal{C}$ ayant un nombre infini d'indécomposables, ce qui contredit son ind-minimalité. Donc $\mathcal{C} := \downarrow (\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k))$.

Condition suffisante : avec les assertions 1. et 2. du Théorème, $\mathcal{C}$ est infinie. Si $\mathcal{C}$ n'est pas ind-minimale, alors il existe une sous-classe propre $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ telle que $\mathcal{C}' \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est infinie. Or $\mathcal{C}' \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ est une sous-classe propre de $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$, il s'ensuit que $\mathcal{C} \cap \text{Ind}(\Omega_k)$ n'est pas minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$, ce qui contredit l'hypothèse. $\square$

Une propriété générale des classes minimales de $\text{Ind}(\Omega_k)$ est le résultat suivant.

Théorème 5.15. *Soit $\mathcal{C}$ une classe minimale de $\text{Ind}(\Omega_k)$. Alors*

1. $\downarrow \mathcal{C}$ est belordonnée pour l'ordre d'abritement.
2. Il existe une structure indécomposable infinie $\mathcal{R}$ telle que $\text{Age}(\mathcal{R}) = \downarrow \mathcal{C}$.

Preuve. Montrons la première partie du théorème. La classe $\mathcal{C}$ étant minimale dans $\text{Ind}(\Omega_k)$, elle est belordonnée d'après l'implication (1) $\Rightarrow$ (2) du Théorème 5.2. Pour voir que $\downarrow \mathcal{C}$ est belordonnée, il faut et il suffit de voir que pour chaque structure $\mathcal{S} \in \downarrow \mathcal{C}$, la sous-classe $\mathcal{C}' := \text{Forb}(\mathcal{S}) \cap \downarrow \mathcal{C}$ est belordonnée. Pour cela nous utilisons la Proposition 3.24. Soit $\mathcal{S} \in \downarrow \mathcal{C}$. Comme $\mathcal{C}' \subsetneq \downarrow \mathcal{C}$ et $\downarrow \mathcal{C}$ est ind-minimale d'après le Lemme 5.11, alors $\mathcal{C}'$ ne contient qu'un nombre fini d'indécomposables, elle est donc belordonnée.

Pour la seconde partie du théorème, $\mathcal{C}$ étant minimale, c'est un idéal (Théorème 5.2) de $\text{Ind}(\Omega_k)$, il s'ensuit que $\downarrow \mathcal{C}$ est un idéal de Ω_k . Il existe alors une suite $\mathcal{P} = \mathcal{R}_0 \leq \mathcal{R}_1 \leq \dots \leq \mathcal{R}_n \leq \dots$ d'éléments de $\mathcal{C}$ tel que tout élément de $\downarrow \mathcal{C}$ s'abrite dans un élément de $\mathcal{P}$. La chaîne $\mathcal{P}$ est, d'après le Théorème 5.2, de type ω , donc la limite $\mathcal{R}_\omega$ de $\mathcal{P}$ a pour âge $\downarrow \mathcal{C}$. $\square$

Remarque 5.16. *Une classe ind-minimale n'est pas nécessairement héréditairement belordonnée. Si P_∞ est le chemin infini sur $\mathbb{N}$, alors son âge $\text{Age}(P_\infty)$ est ind-minimal mais pas héréditairement belordonné (voir preuve du Lemme 4.21).*

Nous avons vu dans la section précédente que le nombre de classes minimales de Ω_μ est fini, la situation est différente pour les classes ind-minimales, en effet nous avons le résultat suivant :

Théorème 5.17. *Il y a un nombre continu-potent de classes héréditaires minimale formées de graphes indécomposables qui sont dirigés sans boucles ou non dirigés avec des boucles.*

Ce résultat vient de la dynamique symbolique. La notion de minimalité apparaît quand nous considérons les mots sur un alphabet fini et que nous ordonnons ces mots par l'ordre des facteurs. En effet, les ensembles de mots finis qui sont minimaux sont les facteurs finis de mots infinis uniformément récurrents. Si par exemple nous prenons des mots de Sturm de pentes différentes nous obtenons des ensembles de facteurs finis différents. Maintenant, si nous

codons chaque mot de Sturm par la relation de consécuitivité sur $\mathbb{N}$ et une relation unaire, les indécomposables finis de cette multirelation correspondent aux facteurs finis du mot de Sturm. Ainsi nous obtenons un nombre continuépotent d'âges ind-minimaux.

Précisons tout cela, rappelons quelques définitions et résultats [7, 67].

Soit A un ensemble fini. Un mot α sur l'alphabet A est une application à valeur dans A dont le domaine est soit $\{0, 1, \dots, n-1\}$, auquel cas le mot est fini et sa *longueur*, notée $|\alpha|$, est n et le mot α s'écrit simplement $\alpha_0\alpha_1\dots\alpha_{n-1}$, soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{N}^-$, l'ensemble des entiers négatifs, soit $\mathbb{Z}$ auxquels cas le mot est soit infini à droite, soit infini à gauche, soit infini des deux côtés. Le mot de longueur nulle est le mot *vide*.

Désignons par $A^{<\mathbb{N}}$, respectivement $A^{\mathbb{N}}$, l'ensemble des mots finis, resp. infinis, de domaine $\mathbb{N}$, de A et $A^{\leq\mathbb{N}} := A^{<\mathbb{N}} \cup A^{\mathbb{N}}$. Si $u \in A^{<\mathbb{N}}$ et $v \in A^{\leq\mathbb{N}}$, nous notons $u \leq v$ et disons que u est un *facteur* de v s'il existe $u_1 \in A^{<\mathbb{N}}$ et $u_2 \in A^{\leq\mathbb{N}}$ tels que $v = u_1 \cdot u \cdot u_2$ (l'opération représentée par un point étant la concaténation des mots, c'est à dire l'opération qui à deux mots u, v , où u est fini, associe le mot $u \cdot v = uv$). Donc un *facteur* d'un mot α est toute sous-suite finie contigüe de α . Si u est un facteur de α tel que $\alpha = uv$ alors u est dit *préfixe* de α . Désignons par $Fac(u)$ l'ensemble des facteurs finis du mot u .

La fonction *shift* (ou *décalage*) est la fonction $\sigma : A^{\mathbb{N}} \rightarrow A^{\mathbb{N}}$ définie, pour tout mot infini $u = u_0u_1\dots$, par $\sigma(u_0u_1\dots) = u_1u_2\dots$.

Si $u, v \in A^{\mathbb{N}}$, alors $u \leq v$ si $u = \sigma^n(v)$ pour un entier n .

La relation $\leq$ est l'*ordre des facteurs*. Cette relation est un préordre sur $A^{\leq\mathbb{N}}$ et un ordre sur $A^{<\mathbb{N}}$.

Muni de la topologie produit, $A^{\mathbb{N}}$ est un espace topologique compact désigné par *espace de Cantor* (A étant muni de la topologie discrète).

Si u est un mot fini non vide, le mot $u^\omega = uuu\dots$ est dit *périodique*. Un mot infini de la forme vu^ω , où v est fini, est dit *éventuellement-périodique*. Un mot infini est dit *apériodique* s'il n'est pas éventuellement-périodique.

u est périodique si et seulement si $u = \sigma^p(u)$ pour un $p > 0$. Si deux mots s'abritent mutuellement alors ils sont périodiques, c'est le cas pour les mots $(01)^\omega$ et $(10)^\omega$.

Un mot u est éventuellement périodique si et seulement si le nombre $Fac_n(u)$ de facteur de longueur n de u est borné pour tout entier n .

Un mot infini α est dit *récurrent* si tout facteur fini de α apparait une infinité de fois. Un mot infini α est récurrent si et seulement si pour tout $u \in Fac(\alpha)$ il existe $v \in Fac(\alpha)$ tel que $u \cdot v \cdot u \in Fac(\alpha)$.

Un mot infini α est dit *uniformément récurrent* (dit aussi *presque-périodique*) si pour tout facteur fini u de α il existe un entier r tel que tout facteur de longueur r contient u . Il est clair qu'un mot uniformément récurrent est récurrent.

Il est clair que tout mot infini périodique est uniformément récurrent et si un mot infini récurrent est éventuellement-périodique alors il est périodique.

Un sous-ensemble X de $A^{\mathbb{N}}$ est dit invariant pour le shift si $\sigma(X) \subseteq X$. Un sous-ensemble X ,

fermé (topologiquement) et invariant pour le shift est dit *minimal* s'il est non vide et minimal pour l'inclusion parmi les sous-ensembles fermés et invariants pour le shift (si T est fermé invariant pour le shift et $T \subset X$ alors $T = \emptyset$ ou $T = X$).

En particulier, étant donné un mot $x \in A^{\mathbb{N}}$, le plus petit ensemble fermé et invariant pour le shift contenant x est l'ensemble $S(x) = \{y \in A^{\mathbb{N}} / \text{Fac}(y) \subseteq \text{Fac}(x)\}$ ([67] page 26 ou [7] Proposition 10.8.9 page 327).

Nous rappelons ce résultat ([67] Theorem 1.5.9 page 26 ou [7] Theorem 10.9.4 page 331) :

Théorème 5.18. *Soit $\alpha \in A^{\mathbb{N}}$, les trois assertions suivantes sont équivalentes :*

1. α est uniformément récurrent,
2. $S(\alpha)$ est minimal,
3. $\text{Fac}(\beta) = \text{Fac}(\alpha)$ pour tout $\beta \in S(\alpha)$.

Nous avons également le résultat suivant ([67] Theorem 1.5.11) :

Théorème 5.19. *Tout ensemble non vide fermé et invariant pour le shift contient un mot uniformément récurrent.*

Ce dernier théorème signifie que tout ensemble non vide fermé et invariant pour le shift qui est minimal est de la forme $S(x)$ pour un mot uniformément récurrent x .

Soit X un sous-ensemble non vide de $A^{\mathbb{N}}$ qui est fermé et invariant pour le shift, associons à X l'ensemble $\mathcal{A}(X)$ des mots finis u tel que u est un préfixe d'un mot de X . L'ensemble X étant invariant pour le shift, l'ensemble $\mathcal{A}(X)$ est l'ensemble des facteurs finis des mots de X . Ordonnons $\mathcal{A}(X)$ par l'ordre des facteurs, nous avons alors :

Théorème 5.20. ([86])

L'ensemble ordonné $\mathcal{A}(X)$ est de type minimal si et seulement si X est un ensemble fermé, invariant pour le shift et minimal.

Preuve. Si X n'est pas minimal, il contient un mot uniformément récurrent y (Théorème 5.19) avec $S(y) \neq X$. Donc $\mathcal{A}(S(y)) \subsetneq \mathcal{A}(X)$ et $\mathcal{A}(X)$ n'est pas de type minimal.

Inversement, si $\mathcal{A}(X)$ n'est pas de type minimal alors il possède un segment initial propre $\mathcal{I}$ qui est infini (Théorème 5.2). Soit F l'ensemble des éléments minimaux de $(\mathcal{A}(X) \setminus \mathcal{I}) \cup (A^{<\mathbb{N}} \setminus \mathcal{A}(X))$, alors $\mathcal{I} = \text{Forb}(F) \cap A^{<\mathbb{N}}$. Soit $Y = \text{Forb}(F) \cap A^{\mathbb{N}}$ l'ensemble des mots infinis z tel que aucun facteur de z n'est dans F . L'ensemble Y est un ensemble fermé et invariant pour le shift (voir [67] Proposition 1.5.1 page 23) et $\mathcal{A}(Y) = \mathcal{I}$, donc Y est non vide et $Y \subsetneq X$ ce qui contredit la minimalité de X . Il s'ensuit que $\mathcal{A}(X)$ est de type minimal. $\square$

Tenant compte du fait que tout ensemble fermé et invariant pour le shift qui est minimal est de la forme $S(x)$, pour un mot uniformément récurrent x et du fait que $\mathcal{A}(S(x)) = \text{Fac}(x)$, nous pouvons déduire à partir des Théorèmes 5.18 et 5.20 le résultat suivant :

Théorème 5.21. *Un mot α sur un alphabet fini A est uniformément récurrent si et seulement si $\text{Fac}(\alpha)$, muni de l'ordre des facteurs, est de type minimal.*

En outre, le théorème suivant montre que toute section initiale de mots finis qui est de type minimal est l'ensemble des facteurs finis d'un mot uniformément récurrent.

Théorème 5.22. ([86])

Toute section initiale infinie de $A^{<\mathbb{N}}$, ordonné par l'ordre des facteurs, contient l'ensemble des facteurs d'un mot uniformément récurrent.

Preuve. Soit $\mathcal{I}$ une section initiale infinie de $A^{<\mathbb{N}}$. L'ensemble $A^{<\mathbb{N}}$ étant bien fondé, $\mathcal{I}$ peut-être décomposée en niveaux, le niveau n contenant les facteurs de longueur n des mots de niveaux supérieurs. L'alphabet A étant fini, les niveaux de $\mathcal{I}$ sont finis. D'après le Lemme 5.4, $\mathcal{I}$ contient une section initiale minimale $\mathcal{J}$. L'ensemble $A^{<\mathbb{N}}$ étant ordonné par l'ordre des facteurs, il existe un mot infini, disons α , tel que $Fac(\alpha) \subseteq \mathcal{J}$. Comme $\mathcal{J}$ est de type minimal, $\mathcal{J} \subseteq Fac(\alpha)$ et donc α est uniformément récurrent. □

Posons $A = \{0, 1\}$. Un mot sur l'alphabet A est dit *binaire*. Identifions chaque sous-ensemble de $\mathbb{N}$ avec sa fonction caractéristique, c'est donc un mot binaire.

Soit α un mot binaire (fini ou infini). Associons la structure relationnelle $C_\alpha := (E, c, u_\alpha)$, où E est soit $\mathbb{N}$ si α est infini, ou l'ensemble $\{0, 1, \dots, n-1\}$ si α est fini de longueur n , c est la relation de consécutivité sur E et u_α une relation unaire sur E , avec $u_\alpha = \alpha^{-1}(1) = \{i \in E; \alpha_i = 1\}$. Une relation unaire u pouvant-être considérée comme une relation binaire b telle que $x \in u$ si et seulement si $(x, x) \in b$, la structure C_α est une structure binaire de type 2.

Remarquons que C_α est indécomposable, que $\beta \leq \alpha$ si et seulement si C_β est une restriction de C_α à un intervalle de $\mathbb{N}$ et que $Fac(\alpha)$ correspond à l'ensemble des restrictions indécomposables finies de C_α . Ainsi, $Fac(\alpha)$ est minimal dans $A^{<\mathbb{N}}$ muni de l'ordre des facteurs si et seulement si l'âge de C_α est ind-minimal dans Ω_2 , ce qui entraîne immédiatement :

Théorème 5.23. *Un mot binaire infini α est uniformément récurrent si et seulement si l'âge de la structure C_α est ind-minimal.*

Remarquons que deux mots infinis peuvent avoir le même ensemble de facteurs finis sans être égaux, en fait si u est uniformément récurrent, le Théorème 5.18 assure que $Fac(v) = Fac(u)$ pour tout $v \in S(u)$ et l'ensemble $S(u)$ est continûpotent si et seulement si u n'est pas périodique ([7] Theorem 10.8.12, page 328), il y a donc un nombre continûpotent de mots avec un même ensemble de facteurs.

D'un autre côté et comme nous pouvons le voir ci-dessous, il y a également un ensemble continûpotent de mots uniformément récurrents dont les ensembles de facteurs sont distincts. Un tel ensemble peut-être obtenu en prenant des mots de Sturm de pentes distinctes.

Un mot sur un alphabet binaire $\{0, 1\}$ est un mot de *Sturm* si pour tout entier n , le nombre de ses facteurs distincts de longueur n est $n + 1$. Une propriété caractéristique des mots de Sturm est que le nombre de 1 dans deux facteurs finis u, u' de même longueur diffère d'au plus un.

Soit un mot binaire fini x , la *hauteur* de x est le nombre $h(x)$ de lettres égale à 1 dans x et la *pente* de x est la valeur (comprise dans l'intervalle $[0, 1]$), $\pi(x) = \frac{h(x)}{|x|}$ (fréquence des lettres égales à 1 dans x).

Pour un mot binaire infini x , la pente est donnée par $\bar{\pi}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi(x_n)$ où x_n est le préfixe de longueur n de x (une suite $(u_n)_{n \geq 0}$ de mots finis de $A^{<\mathbb{N}}$ converge vers un mot infini x si tout préfixe de x est le préfixe de tous, sauf peut-être un nombre fini, les mots u_n , le mot x est unique). La pente d'un mot de Sturm est irrationnelle.

Soit α un nombre irrationnel compris entre 0 et 1 et S_α l'ensemble des mots de Sturm de pente α . Les mots de Sturm sont uniformément récurrents et ont les propriétés suivantes ([67] Proposition 2.1.5 page 43, Proposition 2.1.18 page 53 et Proposition 2.1.25 page 56) :

Proposition 5.24. 1. *Les mots de Sturm sont apériodiques.*

2. *L'ensemble S_α est un sous-ensemble minimal de $A^\mathbb{N}$ pour tout nombre irrationnel α de $(0, 1)$.*

Soient x et y deux mots de Sturm,

1. *Si x et y ont une même pente alors $\text{Fac}(x) = \text{Fac}(y)$.*

2. *Si x et y ont des pentes distinctes alors $\text{Fac}(x) \cap \text{Fac}(y)$ est fini.*

De la Proposition 5.24 nous déduisons que deux ensemble S_α et $S_{\alpha'}$ sont distincts si et seulement si les valeurs de α et α' sont distinctes. Il s'ensuit

Lemme 5.25. *Il existe un nombre continu-potent de mots uniformément récurrents dont les ensembles de facteurs sont distincts.*

Preuve du Théorème 5.17. Posons $A = \{0, 1\}$. Nous définissons une application P de l'ensemble $A^{<\mathbb{N}}$ des mots finis sur l'alphabet binaire A dans l'ensemble des orientations de tous les chemins finis. Posons $\bar{0} := 1$ et $\bar{1} := 0$. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $u := u_0 \dots u_{n-1} \in A^n$, le *conjugué* de u est $\bar{u} := u_{n-1} \dots u_0$. Soit P_u l'orientation du chemin P_n sur n sommets définie comme suit : son ensemble de sommets est $\{0, \dots, n-1\}$ et son ensemble d'arc est formé des paires ordonnées $(i, i+1)$, $i < n-1$, telles que $u_i = 1$ et des paires ordonnées $(i+1, i)$, $i < n-1$, telles que $u_i = 0$. Notons que, P_n étant indécomposable, P_u est également indécomposable ; de plus, toute restriction indécomposable de P_u est isomorphe à P_v où v est un facteur de u et si $v \in A^n$, v ou $\bar{v}$ est un facteur de u si et seulement si P_v s'abrite dans P_u . Par conséquent, si X est un segment initial de $A^{<\mathbb{N}}$ pour l'ordre des facteurs, son image $P(X) := \{P_u : u \in X\}$ est une classe héréditaire de l'ensemble des relations binaires indécomposables $\text{Ind}(\Omega_1)$ (ces membres étant considérés à l'isomorphie près). De plus X est un poset minimal si et seulement si $P(X)$ est une classe héréditaire minimale de $\text{Ind}(\Omega_1)$. Puisque il y a $2^{\aleph_0}$ segments initiaux minimaux de $A^{<\mathbb{N}}$ (exemple, les segments initiaux correspondant aux facteurs finis des mots de Sturm pour des valeurs distinctes de la pente, voir Proposition 5.24) nous avons $2^{\aleph_0}$ classes héréditaires minimales. Ceci démontre la première partie du Théorème 5.17.

Pour la seconde partie, nous transformons les mots binaires en chemins (non dirigés) avec des boucles. A un mot $u := u_0 \dots u_{n-1} \in A^n$ nous associons Q_u , le chemin P_n sur n sommets défini sur $\{0, \dots, n-1\}$ avec une boucle au sommet i si et seulement si $u_i = 1$. Comme ci-dessus, un segment initial X de $A^{<\mathbb{N}}$ est minimal si et seulement si $Q(X) := \{Q_u : u \in X\}$ est une classe héréditaire minimale de $\text{Ind}(\Omega_1)$. $\square$

Comme nous l'avons vu ci-dessus d'après le Théorème 5.23, les mots uniformément récurrents fournissent des exemples d'âges ind-minimaux. En effet, en considérant des mots uniformément récurrents, par exemples des mots de sturm pour des valeurs différentes de la pente, nous avons

Théorème 5.26. *Il existe un nombre continu-potent d'âges ind-minimaux de structures binaires de type 2.*

5.3.1 Structures indécomposables minimales

Une autre notion de minimalité est donnée par la définition suivante ;

Définition 5.27. *Une structure relationnelle binaire infinie $\mathcal{R}$ est minimale indécomposable si $\mathcal{R}$ s'abrite dans toute structure infinie indécomposable $\mathcal{R}'$ qui s'abrite dans $\mathcal{R}$.*

Plusieurs exemples, dans le cas des graphes, sont donnés dans le papier de Pouzet et Zaguia [93].

Problème 1. *Si $\mathcal{R}$ est une structures binaire minimale indécomposable est-ce que son âge est ind-minimal ?*

Nous n'avons pas de réponse pour cette question mais elle a motivé la recherche sur les âges des structures minimales de Pouzet-Zaguia (voir chapitre 6).

Notons qu'un âge ind-minimal $\mathcal{A}$ n'est pas nécessairement l'âge d'une structure minimale indécomposable. Pour le voir, nous allons appliquer certaines propriétés des mots aux âges de relations.

Soit α un mot binaire infini et C_α la structure binaire qui lui est associée, alors

Lemme 5.28. *C_α est une structure indécomposable minimale si et seulement si α est périodique.*

Preuve. Si α est périodique, alors pour tout β infini tel que $\beta \leq \alpha$ nous avons $\alpha \leq \beta$, ce qui entraîne que C_α est minimale. Inversement si C_α est minimale alors elle s'abrite dans toute structure indécomposable infinie qu'elle abrite et donc α est périodique. $\square$

Montrons alors que parmi les âges du Théorème 5.26, ceux qui sont associés à des mots non périodiques ne sont pas les âges de structures indécomposables minimales.

Soit α un mot binaire uniformément récurrent apériodique alors la structure C_α n'est pas minimale (d'après le Lemme 5.28) et $Fac(\alpha)$ est minimal dans $\{0, 1\}^{<\mathbb{N}}$ muni de l'ordre des facteurs (d'après le Théorème 5.21). Donc l'ensemble $Ind(C_\alpha)$ est minimal dans $Ind(\Omega_2)$ (d'après le Théorème 5.23). Posons $\mathcal{A}_\alpha = \downarrow Ind(C_\alpha) = Age(C_\alpha)$.

L'ensemble $\mathcal{A}_\alpha$ est un âge ind-minimal de Ω_2 . Existe-t-il une structure indécomposable minimale $\mathcal{R}$ telle que $Age(\mathcal{R}) = \mathcal{A}_\alpha$?

Soit $\mathcal{R}$ une structure de Ω_2 et soit E sa base. Posons $\mathcal{R} := (E, c', u)$ avec c' (respectivement u) une relation binaire (respectivement unaire) sur E . Nous définissons une relation d'équivalence

sur E de la manière suivante. Deux éléments x, y de E sont dits équivalents s'ils sont égaux ou s'il existe une suite finie d'éléments distincts de E , $x = x_1, \dots, x_n = y$ telle que $(x_i, x_{i+1}) \in c'$ ou $(x_{i+1}, x_i) \in c'$ pour tout $i = 1, \dots, n-1$. $\mathcal{R}$ est donc une somme directe de ses restrictions aux classes d'équivalence (les classes d'équivalence sont les composantes connexes de la symétrisée de la relation c' , c'est à dire, $c' \cup c'^{-1}$).

Si $\text{Age}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}_\alpha$ alors la restriction de $\mathcal{R}$ à une classe d'équivalence V est isomorphe à une structure $\mathcal{R}' := (E', c'', u')$ où E' est soit $\{0, 1, \dots, n-1\}$ si $n = |V|$, soit $\mathbb{N}$, soit $\mathbb{N}^-$ l'ensemble des entiers négatifs soit $\mathbb{Z}$, c'' est la consécutivité sur E' et u' est la relation unaire définie sur E' et isomorphe à la restriction de u à V . Chacune de ces restrictions (à une classe d'équivalence) est donc isomorphe à une structure de la forme C_β où $\beta \leq \alpha$.

Si $\mathcal{R}$ est indécomposable, elle est formée d'une seule classe d'équivalence. Si son domaine E est comme $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{N}^-$, elle est de la forme C_u où u est un mot uniformément récurrent non périodique (car autrement, $\text{Fac}_n(u)$ serait borné pour tout n , ce qui entraînerait la même conclusion pour $\text{Fac}_n(\alpha)$ et donc α serait périodique, ce qui n'est pas le cas). Donc $\mathcal{R}$ n'est pas minimale. Si le domaine E de $\mathcal{R}$ est comme $\mathbb{Z}$, alors le mot infini x qui lui correspond abrite tous les mots de $\text{Fac}(\alpha)$ et tout les facteurs finis de x sont dans $\text{Fac}(\alpha)$, puisque l'âge de $\mathcal{R}$ est $\mathcal{A}_\alpha$. Donc la restriction de x à $\mathbb{N}$ a le même ensemble de facteur que x et la restriction de $\mathcal{R}$ à $\mathbb{N}$ est de même âge que $\mathcal{R}$ et correspond à un mot uniformément récurrent non périodique. Donc $\mathcal{R}$ n'est pas minimale.

Comme conséquence nous avons :

Proposition 5.29. *Soit $\mathcal{A}$ l'âge associé à un mot uniformément récurrent u . Il existe une structure minimale indécomposable dénombrable $\mathcal{R}$ telle que $\text{Age}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$ si et seulement si u est périodique.*

5.4 Minimalité, presque inépuisabilité et belordre héréditaire

Nous avons montré l'existence d'un nombre continu-potent d'âges ind-minimaux. Nous allons voir qu'une famille particulière de tels âges est dénombrable.

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle définie sur E . Le *noyau* de $\mathcal{R}$, noté $\text{Ker}(\mathcal{R})$ est l'ensemble des éléments $x \in E$ tel que l'âge de $\mathcal{R}|_{E \setminus \{x\}}$ est strictement inclus dans l'âge de $\mathcal{R}$. Un exposé de cette notion est dans [89].

Un fait crucial est que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ ont même âge alors les restrictions de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ à leurs noyaux sont isomorphes. En particulier, si le noyau de $\mathcal{R}$ est fini alors toute structure $\mathcal{R}'$ de même âge que $\mathcal{R}$ a un noyau fini de même cardinalité que le noyau de $\mathcal{R}$.

Etant donné un âge $\mathcal{A}$, nous appelons *noyau* de $\mathcal{A}$ et notons $\text{Ker}(\mathcal{A})$, le noyau de n'importe quelle relation $\mathcal{R}$ d'âge $\mathcal{A}$.

Une structure relationnelle de noyau vide (respectivement fini) est dite *inépuisable* (resp. *presque inépuisable*) et son âge est dit *inépuisable* (resp. *presque inépuisable*).

Nous Montrons :

Théorème 5.30. *Le noyau d'un âge ind-minimal est fini.*

Problème 2. *Est-ce que le noyau d'un âge ind-minimal a au plus deux éléments ?*

Théorème 5.31. *Les âges ind-minimaux de noyau non vide sont en nombre tout au plus dénombrable.*

Question 1. : *Y en a-t-il une infinie ?*

Les deux resultats ci-dessus s'appuient sur la notion de belordre héréditaire.

Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures binaires et soit $n \in \mathbb{N}$. Notons par $\mathcal{C}_{+n}$ la classe des structures binaires $\mathcal{R}$ telles que $\mathcal{R}_{-F} := \mathcal{R}_{\upharpoonright_{\text{dom}(\mathcal{R}) \setminus F}} \in \mathcal{C}$ pour au moins une partie F d'au plus n éléments de $\text{dom}(\mathcal{R})$.

Proposition 5.32. *Soit $n \in \mathbb{N}$. Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures binaires est héréditairement belordonnée alors la classe $\mathcal{C}_{+n}$ est héréditairement belordonnée.*

Preuve. Remarquons que $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{C}_{+n} \subseteq \mathcal{C}_{+(n+1)}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que $\mathcal{C}_{+(n+1)} = (\mathcal{C}_{+n})_{+1}$. Donc, il suffit de traiter le cas $n = 1$.

Etant donnée une structure $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I}) \in \mathcal{C}_{+1}$, nous choisissons $x_{\mathcal{R}} \in V$ tel que $\mathcal{R}_{-x_{\mathcal{R}}} \in \mathcal{C}$. Soit A un belordre. À une structure $(\mathcal{R}, f) \in (\mathcal{C}_{+1}).A$, nous associons $(\mathcal{S}, (f_{x_{\mathcal{R}}}, g))$ où $\mathcal{S} = \mathcal{R}_{-x_{\mathcal{R}}}$, $f_{x_{\mathcal{R}}}$ est la restriction de f à $\mathcal{S}$ et g est l'application qui à $y \in \text{dom}(\mathcal{S})$ associe $(\rho_i(x_{\mathcal{R}}, y), \rho_i(y, x_{\mathcal{R}}))_{i \in I}$ (où I est l'ensemble des indices des prédicats binaires).

Si on pose $B = A \times 4^I$ alors B est un belordre, donc $\mathcal{C}.B$ est belordonné. Un plongement de $(\mathcal{S}, (f_{x_{\mathcal{R}}}, g))$ dans $(\mathcal{S}', (f'_{x_{\mathcal{R}}}, g'))$ induit un plongement de $(\mathcal{R}, f)$ dans $(\mathcal{R}', f')$ pourvu que la valeur de $\mathcal{R}$ sur $x_{\mathcal{R}}$ coïncide avec la valeur de $\mathcal{R}'$ sur $x_{\mathcal{R}'}$. Comme il n'y a qu'un nombre fini de possibilités pour ces valeurs, alors $(\mathcal{C}_{+1}).A$ est belordonnée. $\square$

Corollaire 5.33. *Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire. Soit $x \in \text{Ker}(\mathcal{R})$. Si l'âge de $\mathcal{R}_{-x}$ est héréditairement belordonné alors l'âge de $\mathcal{R}$ est héréditairement belordonné.*

Corollaire 5.34. *Un âge ind-minimal de noyau non vide est héréditairement belordonné.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}$ un âge ind-minimal de noyau non vide et soit $\mathcal{R}$ une structure binaire telle que $\text{Age}(\mathcal{R}) = \mathcal{A}$. Soit $x \in \text{Ker}(\mathcal{R})$. Alors $\text{Age}(\mathcal{R}_{-x}) \subsetneq \mathcal{A}$, donc $\text{Age}(\mathcal{R}_{-x})$ contient un nombre fini de structures indécomposables, il s'ensuit que $\text{Age}(\mathcal{R}_{-x})$ est héréditairement belordonné d'après la Proposition 3.24. La conclusion découle alors du Corollaire 5.33. $\square$

Nous avons le théorème suivant dû à Pouzet (1978) :

Théorème 5.35. [81]

Un âge héréditairement belordonné est presque inépuisable.

De ce dernier théorème avec le Corollaire 5.34 découle le Théorème 5.30.

Preuve du Théorème 5.31. D'après le Théorème 1.20, un âge ind-minimal de noyau non vide a un nombre fini de bornes. Comme dans une arité (finie) donnée il y a tout au plus un nombre dénombrable d'âges ayant un nombre fini de bornes, le théorème s'ensuit. $\square$

Théorème 5.36. *Soit $\mathcal{A}$ un âge ind-minimal de noyau non vide. Toute structure binaire indécomposable $\mathcal{R}$ d'âge $\mathcal{A}$ abrite une structure minimale.*

La preuve s'appuie sur un résultat de Christian Delhommé [36] sur le belordre de classes de relations dénombrables dont l'âge ne contient qu'un nombre fini de relations indécomposables.

On étend les notions de bonne fondation et de belordre à des classes de structures qui ne sont pas forcément finies. Disons (voir section 1.1.6) qu'une classe de structures est *bien fondée* si elle ne contient pas de sous-suite infinie strictement décroissante $\mathcal{R}_0 > \dots > \mathcal{R}_n \dots$, la relation $<$ étant l'ordre strict associé au préordre d'abritement.

Lemme 5.37. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de Ω_μ . Si la collection des structures $\mathcal{R}$ dénombrables telles que $\text{Age}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{C}$ est bien fondée alors :*

Toute structure indécomposable $\mathcal{R}$ telle que $\text{Age}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{C}$ a une restriction $\mathcal{R}'$ qui est minimale

Preuve. La collection $\mathfrak{R}$ des structures $\mathcal{R}'$ dénombrables qui s'abritent dans $\mathcal{R}$ et qui sont indécomposables est non vide (elle contient $\mathcal{R}$). Cette collection est bien fondée. Elle a donc un élément minimal. N'importe lequel de ces éléments minimaux donne une restriction indécomposable minimale de $\mathcal{R}$. $\square$

Avec ce lemme, la preuve du Théorème 5.36 s'ensuit une fois prouvé que si un âge $\text{Age}(\mathcal{R})$ est ind-minimal et son noyau fini, la collection des $\mathcal{R}'$ dénombrables telles que $\text{Age}(\mathcal{R}') \subseteq \text{Age}(\mathcal{R})$ est bien fondée pour le préordre d'abritement.

Il s'avère qu'une telle classe est belordonnée. En fait, pour obtenir le belordre de cette classe il faut prouver plus. La notion clef et celle de meilleurordre inventée par C.St.J. A. Nash Williams [73, 74]. Rappelons brièvement qu'un ensemble ordonné $\mathcal{P}$ est *meilleurordonné* si la classe $\omega_1.\mathcal{P}$ des suites ordinales dénombrables à valeurs dans $\mathcal{P}$ est belordonnée pour l'abritement des suites, la comparaison de deux suites ordinales se faisant ainsi : la suite $f : \alpha \rightarrow \mathcal{P}$ s'abrite dans la suite $g : \beta \rightarrow \mathcal{P}$ s'il existe une injection croissante $h : \alpha \rightarrow \beta$ telle que $f(\gamma) \leq g(h(\gamma))$ pour tout $\gamma < \alpha$.

Une classe meilleurordonnée est belordonnée et donc bien fondée. Le résultat suivant donne la conclusion désirée.

Proposition 5.38. *Si $\mathcal{C}$ est ind-minimale et non inépuisable alors la collection des $\mathcal{R}$ dénombrables telles que $\text{Age}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{C}$ est meilleurordonnée par abritement.*

Ce résultat est une conséquence d'un résultat général dû à C. Delhommé [36].

Théorème 5.39. *Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de Ω_k ($k \in \mathbb{N}$) ne contient qu'un nombre fini d'indécomposables alors la collection des $\mathcal{R}$ dénombrables telles que $\text{Age}(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{C}$ est meilleurordonnée par abritement*

Ce résultat, étend le résultat de Thomassé disant que la classe des ordres série-parallèles dénombrables est meilleurordonnée [106]. Le résultat de Thomassé étant une extension du fameux

résultat de Laver [64] 1971 disant que la classe des chaînes dénombrables est meilleurordonnée, résultat répondant positivement à une conjecture très connue de Fraïssé (1948) affirmant que la classe des chaînes dénombrables est belordonnée. La notion de meilleur ordre est l'outil qui permet de prouver le caractère belordonné de classes d'objets infinis. Le résultat de Delhommé s'appuie sur un résultat de Corominas montrant le meilleurordre de certaines classes d'arbres étiquetés.

Nous nous contentons de prouver la Proposition 5.38 à partir du Théorème 5.39.

Preuve de la Proposition 5.38. Soit $\mathcal{C}$ une classe ind-minimale et non inépuisable. Soit $\overline{\mathcal{C}}$ la collection des structures $\mathcal{S}$ dénombrables d'âge inclus dans $\mathcal{C}$. Nous devons prouver que cette collection est meilleurordonnée. Comme $\mathcal{C}$ est ind-minimal, c'est un âge. Soit $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I})$ d'âge $\mathcal{C}$ et soit $K(\mathcal{R})$ son noyau. Ce noyau est fini, d'après le Théorème 5.30. Soit $x \in K(\mathcal{R})$. On considère les relations unaires sur $V \setminus \{x\}$, u_i^+ et u_i^- définies par $u_i^+(y) := \rho_i(x, y)$ et $u_i^-(y) := \rho_i(y, x)$. Soit $\mathcal{A}$ l'âge de $\mathcal{R}_{-x}$ et $\mathcal{A}'$ l'âge de $\mathcal{R}_{-x}$ augmentée de ces unaires. Comme l'âge de $\mathcal{R}_{-x}$ ne contient qu'un nombre fini d'indécomposable, il en va de même de $\mathcal{A}'$. D'après le Théorème 5.39, la classe des structures dénombrables $\mathcal{R}'$ telles que $\text{Age}(\mathcal{R}') \subseteq \mathcal{A}'$ est meilleurordonnée. La collection $\overline{\mathcal{C}}$ se décompose en deux parties $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ formées respectivement des $\mathcal{S}$ dont l'âge est inclus dans l'âge de $\mathcal{R}_{-x}$ et des autres. D'après le Théorème 5.39 la première classe est meilleurordonnée. Comme la réunion de deux meilleurordres est un meilleurordre, pour obtenir le meilleurordre de $\overline{\mathcal{C}}$ il nous suffit d'obtenir que la classe $\mathcal{C}''$ est meilleurordonnée. Si $\mathcal{S} \in \mathcal{C}''$ alors on va trouver un élément $y \in \mathcal{S}$ de sorte que la transformation de y en x s'étende à toute partie finie de $\mathcal{S}$ en un isomorphisme local à valeurs dans $\mathcal{R}$. Ainsi on peut définir sur $\mathcal{S}_{-y}$ des relations unaires comme ci-dessus. L'âge de la structure $\overline{\mathcal{S}}$ ainsi obtenue est inclus dans $\mathcal{A}'$. Donc, d'après le résultat de Delhommé la collection de ces $\overline{\mathcal{S}}$ est meilleurordonnée. Il en résulte que la collection des $\mathcal{S}$ est meilleurordonnée. $\square$

Chapitre 6

Exemples de classes minimales de graphes indécomposables

6.1 Introduction

Dans [93], Pouzet et Zaguia ont décrit les graphes minimaux indécomposables qui ne contiennent pas une clique infinie ou un stable infini. Ces graphes sont au nombre de huit. Quatre, que nous décrivons ci-dessous, sont sans clique infinie et les quatre autres sont leurs complémentaires. Nous donnons également des exemples de graphes ayant une clique infinie et un indépendant infini. Parmi tous ces graphes figurent des graphes minimaux de noyau non vide. Nous présentons ainsi un ensemble $\mathcal{N}$ formé de huit graphes minimaux de noyau non vide. Nous conjecturons que cette liste est complète.

Dans ce chapitre, nous explorons les âges de tous ces graphes. Nous montrons que tous ces âges sont ind-minimaux et nous calculons leurs profils ainsi que leurs fonctions génératrices. Les croissances des profils des âges de ces graphes sont soit polynomiales, et dans ce cas les profils sont quasi-polynomiaux, soit exponentielles. Excepté une, toutes les fonctions génératrices sont rationnelles.

6.2 Description des graphes

Tous les graphes que nous considérons ici sont non dirigés et sans boucles. Posons $\mathcal{G} := \{G_0, G_1, G_2, G_3\}$ et $\overline{\mathcal{G}}$ l'ensemble des complémentaires des graphes de $\mathcal{G}$. Les graphes de $\mathcal{G}$ sont définis comme suit.

Tous ces graphes sont bipartis, tous sauf G_3 ont le même ensemble de sommets $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ qui se décompose en deux ensembles indépendants disjoints $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$. Une paire $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête dans G_0 si $i \neq j$, une arête dans G_1 si $i \leq j$, une arête dans G_2 si $j = i$ ou $j = i + 1$ et, finalement, une arête dans G_3 si $j = i$. Pour G_3 , un nouveau sommet c adjacent à tout élément de B est rajouté à $A \cup B$. Le graphe G_1 est le *graphe biparti demi-complet*, le graphe critique de Schmerl et Trotter [100]. Le graphe G_2 est le chemin infini, tandis que le graphe G_3 est un arbre fait d'un nombre infini dénombrable d'arêtes disjointes reliées

à un unique sommet (noté c). G_3 est également appelé *araignée*. Ces graphes sont représentés dans la FIGURE 6.1.

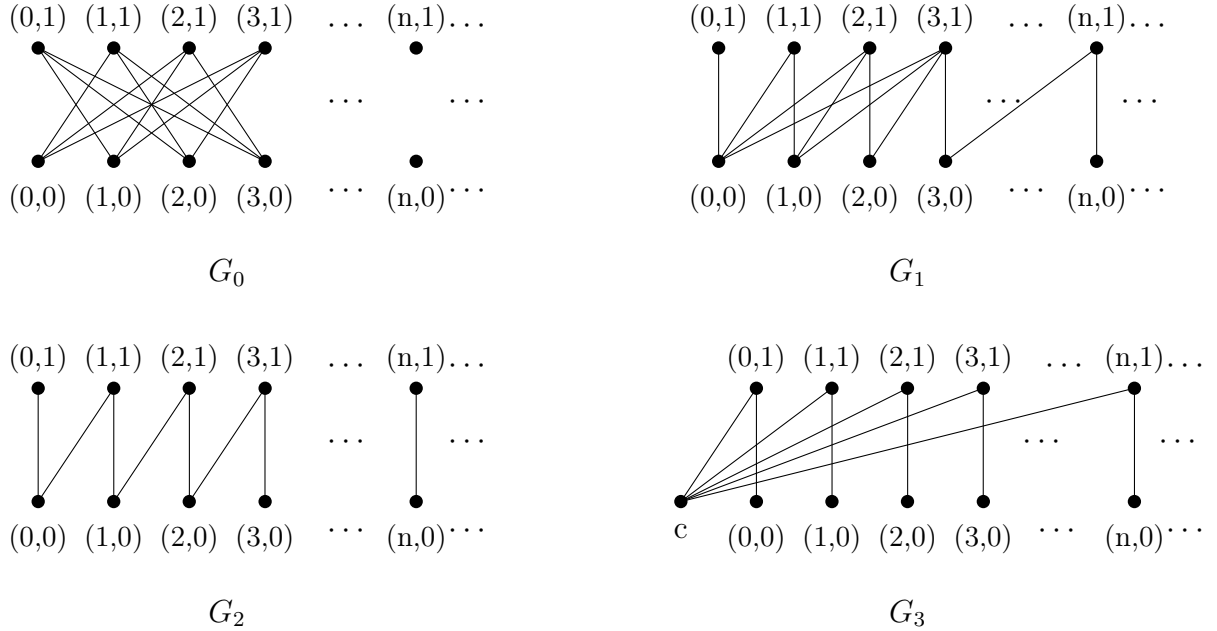


FIGURE 6.1 – Graphes indécomposables minimaux sans clique infinie.

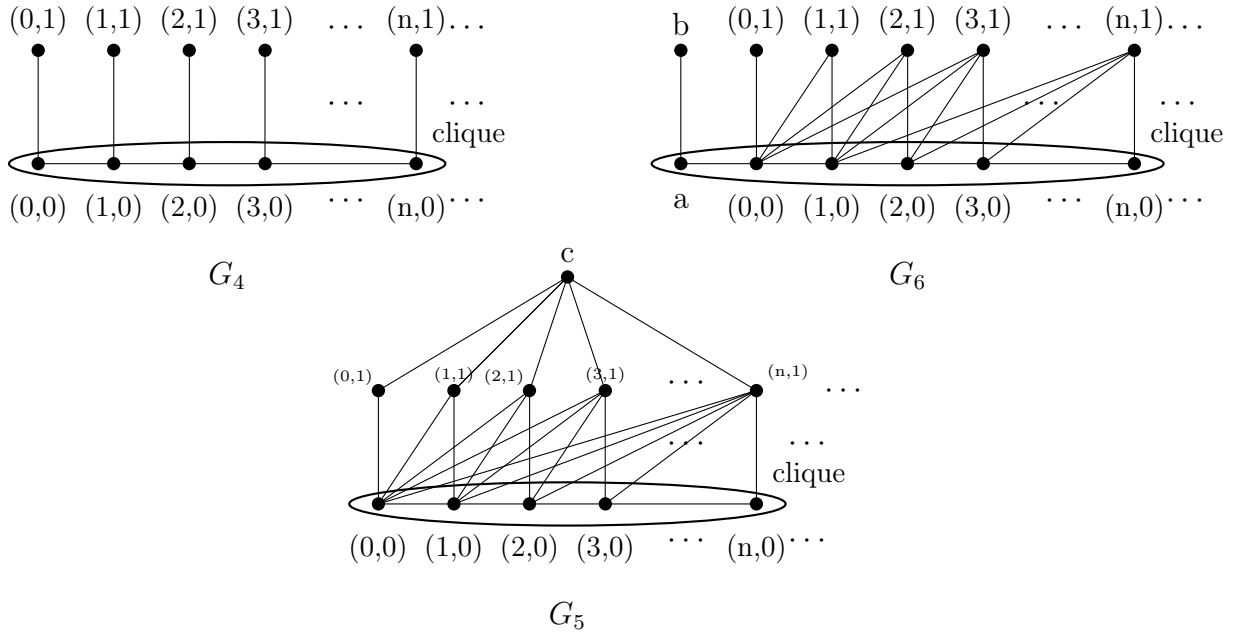
Pour le cas des graphes avec une clique infinie et un stable infini, nous considérons l'ensemble $\mathcal{G}' := \{G_4, G_5, G'_5, G_6, G'_6\} \cup \{\overline{G_4}, \overline{G_6}, \overline{G'_6}\}$, où $G_i := (V_i, E_i)$, pour $i = 4, 5, 6$ et $G'_i := (V'_i, E'_i)$, pour $i = 5, 6$, avec $V_4 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, $V_5 = V'_5 := V_4 \cup \{c\}$ et $V_6 = V'_6 := V_4 \cup \{a, b\}$. Dans tous les graphes G_i ($4 \leq i \leq 6$) et G'_i ($5 \leq i \leq 6$), l'ensemble V_4 se décompose en une clique $\mathbb{N} \times \{0\}$ et un stable $\mathbb{N} \times \{1\}$. Une paire $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête dans G_4 si $i = j$, une arête dans G_5 et G_6 si $i \leq j$ et une arête dans G'_5 et G'_6 si $i \geq j$. Pour G_5 et G'_5 nous rajoutons l'ensemble suivant d'arêtes $\{\{c, (i, 1)\}, i \in \mathbb{N}\}$ et pour G_6 et G'_6 nous rajoutons toutes les arêtes de l'ensemble $\{\{a, (i, 0)\}, i \in \mathbb{N}\} \cup \{\{a, b\}\}$. Les graphes G_i , $i = 4, 5, 6$ sont représentés dans la FIGURE 6.2 et les graphes G'_i , $i = 5, 6$ dans la FIGURE 6.3.

Notons que le graphe G_5 (respectivement G'_5) s'abrite dans son graphe complémentaire $\overline{G_5}$ (respectivement $\overline{G'_5}$). En effet, si nous considérons un abriement f de la chaîne ω des entiers non négatifs $\mathbb{N}$ vérifiant $n < f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors l'application g définie par $g(n, 0) := (f(n), 1)$ et $g(n, 1) := (f(n), 0)$ est un abriement de G_5 dans $\overline{G_5}$. En remplaçant la chaîne ω ci-dessus par sa chaîne duale ω^* , l'application g devient un abriement de G'_5 dans $\overline{G'_5}$.

Les graphes de $\mathcal{G}'$ sont indécomposables minimaux. Ces graphes sont décrits dans [93].

Soit $\mathcal{L} = \mathcal{G} \cup \overline{\mathcal{G}} \cup \mathcal{G}'$ la liste formée de tous les graphes cités. Nous explorons, ci-dessous, les âges des graphes de $\mathcal{L}$ et calculons leurs profils ainsi que leurs fonctions génératrices.

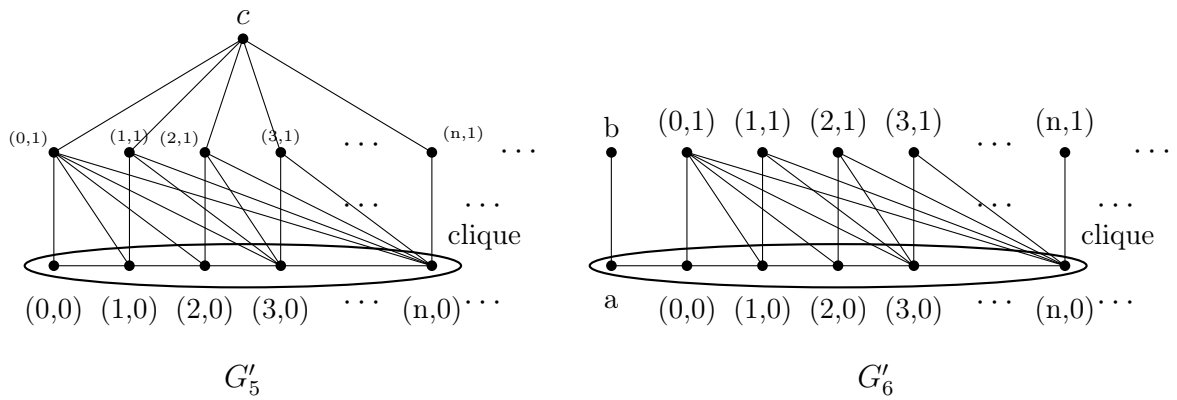
Comme les âges d'un graphe G et de son complémentaire $\overline{G}$ sont isomorphes, les profils et fonctions génératrices de l'âge de G sont également ceux de l'âge de son complémentaire. Remarquons également que les âges de G_5 et G'_5 sont isomorphes et qu'il en est de même pour

FIGURE 6.2 – Les graphes G_4 , G_5 et G_6 .

les âges de G_6 et G'_6 . Donc, nous étudierons uniquement les âges des graphes G_i ($0 \leq i \leq 6$). Posons $\mathcal{L}' = \{G_i, 0 \leq i \leq 6\}$.

Lemme 6.1. *Les âges des graphes de $\mathcal{L}$ sont ind-minimaux.*

En effet, pour tous les graphes de $\mathcal{L}'$, les âges sont ind-minimaux car, comme nous le verrons ci-dessous, les classes de leurs indécomposables sont totalement ordonnées pour G_2, G_3, G_4 et G_6 . Pour G_1 , les indécomposables de son âge forment une chaîne pour tous les entiers pairs. Pour G_0 il y a un indécomposable pour chaque ordre impair n , ($n \geq 5$) et deux pour tout ordre pair n ($n \geq 6$) tel que tout membre d'ordre n s'abrite dans tout membre d'ordre supérieur à n . Pour G_5 il y a deux indécomposables pour tout ordre $n \geq 5$, ils forment deux chaînes (à partir

FIGURE 6.3 – Les graphes G'_5 et G'_6 .

de l'ordre $n \geq 5$) tel que tout membre d'ordre n s'abrite dans tout membre d'ordre supérieur à n .

Comme nous le verrons ci-dessous, le noyau, $Ker(G_3)$, de G_3 est réduit à un singleton (l'élément c), de même pour les noyaux de G_5 et de G'_5 , tandis que $Ker(G_6)$ et $Ker(G'_6)$ ont deux éléments chacun (les sommets a et b).

Soit $\mathcal{N}$ l'ensemble des huit graphes de noyau non vide parmi les graphes de $\mathcal{L}$.

$$\mathcal{N} = \{G_3, \overline{G_3}, G_5, G'_5, G_6, \overline{G_6}, G'_6, \overline{G'_6}\}.$$

Nous conjecturons que ces huit graphes sont les seuls graphes minimaux de noyau non vide. Plus précisément :

Conjecture 2. ([9])

Soit G un graphe infini indécomposable. Si la restriction de G à un ensemble cofini de sommets ne contient pas de sous-graphe indécomposable infini alors G abrite l'un des graphes de l'ensemble $\mathcal{N}$.

Dans un graphe G , un ensemble de sommets $A \subseteq V(G)$ est cofini si $V(G) \setminus A$ est fini.

Comme nous l'avons signalé plus haut, les noyaux des huit graphes de $\mathcal{N}$ ont tous, au plus, deux éléments et leurs âges sont ind-minimaux.

Nous avons le résultat suivant :

Théorème 6.2. *Les fonctions génératrices des graphes de $\mathcal{L}$ sont celles des graphes de $\mathcal{L}'$. Pour tout i ($0 \leq i \leq 6$), la fonction génératrice F_{G_i} de l'âge, $Age(G_i)$, du graphe G_i et la croissance asymptotique de son profil φ_i sont données par :*

1. $F_{G_0}(x) = \frac{1 - x^2 + x^3 + 2x^4 - 2x^5 - x^6 + x^7}{(1-x)(1-x^2)^2}$ et $\varphi_0(n) \simeq \frac{n^2}{8}$;
2. $F_{G_1}(x) = \frac{1 - x - 2x^2 + x^3}{(1-2x)(1-2x^2)}$ et $\varphi_1(n) \simeq \frac{2^n}{4}$;
3. $F_{G_2}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}$ et $\varphi_2(n) \simeq \mathfrak{p}(n)$ la fonction partition d'entier ;
4. $F_{G_3}(x) = \frac{1 - x + x^3 + x^4 - x^6}{(1-x)^2(1-x^2)}$ et $\varphi_3(n) \simeq \frac{n^2}{4}$;
5. $F_{G_4}(x) = \frac{1 - x + 2x^3 - x^5}{(1-x)^3(1+x)}$ et $\varphi_4(n) \simeq \frac{n^2}{4}$;
6. $F_{G_5}(x) = \frac{1 - 2x + x^2 + 3x^4 + x^5 + 2x^6}{(1-x)(1-2x)}$ et $\varphi_5(n) \simeq 2^n$;
7. $F_{G_6}(x) = \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3 + x^4}{(1-2x)(1-x)^2}$ et $\varphi_6(n) \simeq 3 \cdot 2^{n-2}$.

Ces fonctions génératrices sont toutes distinctes. À part F_{G_2} , elles sont toutes rationnelles. En outre, la croissance du profil est polynomiale de puissance 2 pour les graphes G_0 , G_3 et G_4 et exponentielle pour les graphes G_1 , G_5 et G_6 .

Notons que les profils des âges $\text{Age}(G_i)$ ($i = 0, 3, 4$) sont quasi-polynomiaux, ceux des âges $\text{Age}(G_i)$ ($i = 1, 5, 6$) sont exponentiels et le profil de $\text{Age}(G_2)$ est sous-exponentiel.

Les assertions de la Proposition 6.2 seront démontrées séparément, chacune dans une des sections suivantes de ce chapitre.

6.3 Le graphe G_0

Le graphe $G_0 := (V_0, E_0)$ est biparti, son ensemble de sommets $V_0 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ se décompose en deux stables disjoints $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$. Une paire $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête de G_0 si $i \neq j$.

6.3.1 Représentations des sous-graphes de G_0

Désignons par *paire* dans G_0 tout sous-ensemble $\{(i, 0), (i, 1)\}$, pour $i \in \mathbb{N}$. Ces deux sommets ne sont pas liés dans G_0 .

Soit $H = (V, E)$ un sous-graphe de G_0 , posons $V_A = V \cap A$ et $V_B = V \cap B$. Nous pouvons représenter H de la manière suivante :

Considérons deux lignes parallèles horizontales L_0, L_1 . Plaçons les sommets de V_A sur une des lignes et ceux de V_B sur l'autre de telle sorte que toutes les paires de G_0 qui appartiennent à H soient à gauche, les sommets d'une même paire étant alignés verticalement. Les sommets restants sont placés à droite de ces paires avec ceux sur L_1 complètement à droite de ceux sur L_0 (voir FIGURE 6.4).

Observons que si nous permutons les places de V_A et V_B sur les lignes L_0 et L_1 , le graphe obtenu sera isomorphe à H . Nous pouvons donc choisir de placer sur, disons L_0 , l'ensemble (V_A ou V_B) ayant le nombre minimum de sommets.

Avec cette représentation, nous pouvons associer, comme le montre la FIGURE 6.4, à chaque membre H de $\text{Age}(G_0)$, d'ordre n , un triplet d'entiers (n_0, n_1, p) , où p est le nombre de paires et tel que :

$$p \leq n_0 \leq n_1 \text{ et } n_0 + n_1 = n. \quad (6.1)$$

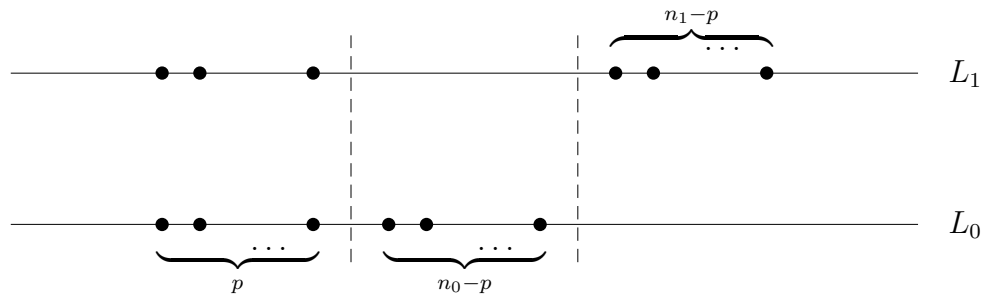


FIGURE 6.4 – Représentation des sous-graphes de G_0 .

Inversement, à tout triplet $t := (n_0, n_1, p)$ vérifiant les conditions (6.1) ci-dessus, avec $n_0 + n_1 \geq 1$, nous associons le type d'isomorphie H_t de $G_{0 \sqcup X}$ où $X = \{0, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\} \cup (\{0, \dots, p - 1\} \cup \{n_0, \dots, n_0 + n_1 - p - 1\}) \times \{1\}$. Il est évident que si $t = t'$ alors $H_t = H_{t'}$.

Remarque 6.3. – Pour $n = 1$, il existe un seul sous-graphe, il est représenté de manière unique par le triplet $(0, 1, 0)$.

- Pour $n = 2$ nous avons deux sous-graphes, la clique à deux sommets, dont l'unique représentation est le triplet $(1, 1, 0)$ et l'indépendant à deux sommets qui peut-être représenté par deux triplets différents $(0, 2, 0)$ et $(1, 1, 1)$.

Soit $F = \{t = (n_0, n_1, p) \in \mathbb{N}^3 / t \text{ vérifie (6.1) et } p = n_0 \leq 1\} \cup \{(2, 2, 2)\}$.

Remarque 6.4. Si $t \in F$ alors,

- ou bien $t = (0, n_1, 0)$ et dans ce cas H_t est un indépendant d'ordre n_1 .
- ou bien $t = (1, n_1, 1)$ et dans ce cas H_t est la somme directe d'un sommet et d'une étoile à $n_1 - 1$ extrémités $S_{1, n_1 - 1}$ (une étoile à k extrémité, notée $S_{1, k}$, est un graphe à $k + 1$ sommets $\{x_0, x_1, \dots, x_k\}$ ayant pour arêtes l'ensemble $\{\{x_0, x_i\}, i = 1, \dots, k\}$).
- ou bien $t = (2, 2, 2)$ et dans ce cas H_t est le graphe $2.K_2$, (voir TABLE 6.1).

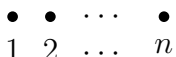
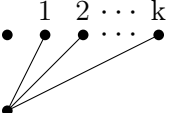
		
$H_t = A_n$ $t = (0, n, 0)$	$H_t = 1 \oplus S_{1, k}$ $t = (1, k + 1, 1)$	$H_t = 2K_2$ $t = (2, 2, 2)$

TABLE 6.1 – Les sous-graphes H_t pour $t \in F$.

Lemme 6.5. Soit $t = (n_0, n_1, p)$ un triplet d'entiers vérifiant les conditions (6.1) tel que $n_0 + n_1 \geq 3$ et soit H_t le type d'isomorphie associé, alors

$t \notin F$ si et seulement si H_t est connexe.

Preuve.

$\Leftarrow$) Vient de la Remarque 6.4.

$\Rightarrow$) Si $t \notin F$ alors ou bien $p \neq n_0$, ou bien $p = n_0 \geq 2$ et $n_1 \neq 2$.

Dans le premier cas, $p \neq n_0$, nous avons les situations suivantes :

a) Si $p = 0$ alors H_t est isomorphe au graphe biparti complet K_{n_0, n_1} qui est connexe.

b) Si $p \neq 0$ alors $H_t = G_{0 \sqcup X_t}$ avec $X_t = \{0, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\} \cup (\{0, \dots, p - 1\} \cup \{n_0, \dots, n_0 + n_1 - p - 1\}) \times \{1\}$. Comme tout sommet de $\{0, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\}$ est relié à tout sommet de $\{n_0, \dots, n_0 + n_1 - p - 1\} \times \{1\}$ et tout sommet de $\{0, \dots, p - 1\} \times \{1\}$ est relié à tout sommet de $\{p, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\}$, le graphe H_t est connexe.

Dans le deuxième cas, $p = n_0 \geq 2$ et $n_1 \neq 2$, nous avons

a) Si $p = 2$ alors $n_1 > 2$ et donc H_t est connexe.

b) Si $p \geq 3$ alors H_t connexe quelque soit la valeur de $n_1 \geq n_0$. □

Lemme 6.6. Soient $t = (n_0, n_1, p)$ et $t' = (n'_0, n'_1, p')$ deux triplets d'entiers vérifiant les conditions (6.1) et tels que $n_0 + n_1 = n \geq 3$ et $n'_0 + n'_1 = n' \geq 3$, H_t et $H_{t'}$ les types d'isomorphie des sous-graphes de G_0 associés respectivement à t et t' , alors on a

$$H_t \leq H_{t'} \Leftrightarrow p \leq p', n_0 \leq n'_0 \text{ et } n_1 \leq n'_1.$$

Preuve. D'après la représentation des sous-graphes de G_0 donnée ci-dessus, H_t est le type d'isomorphie de $G_{0|_X}$ où $X = \{0, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\} \cup (\{0, \dots, p - 1\} \cup \{n_0, \dots, n_0 + n_1 - p - 1\}) \times \{1\}$ et $H_{t'}$ est le type d'isomorphie de $G_{0|_{X'}}$ où $X' = \{0, \dots, n'_0 - 1\} \times \{0\} \cup (\{0, \dots, p' - 1\} \cup \{n'_0, \dots, n'_0 + n'_1 - p' - 1\}) \times \{1\}$. Il est évident que si $p \leq p'$, $n_0 \leq n'_0$ et $n_1 \leq n'_1$ on a $H_t \leq H_{t'}$. Inversement, si $H_t \leq H_{t'}$, alors il existe un abriement de H_t dans $H_{t'}$ qui envoie les paires de H_t sur les paires de $H_{t'}$, donc $p \leq p'$. D'un autre côté, si H_t et $H_{t'}$ sont connexes alors, étant des graphes bipartis, les partitions de leurs sommets en deux stables sont uniques, se sont donc celles des ensembles X et X' . Donc $n_0 \leq n'_0$ et $n_1 \leq n'_1$. Si H_t et $H_{t'}$ ne sont pas connexes, alors d'après le Lemme 6.5, $t, t' \in F$ et d'après la Remarque 6.4 et le fait que les sous-graphes sont d'ordre au moins trois, on a nécessairement $n_0 \leq n'_0$ et $n_1 \leq n'_1$. $\square$

Lemme 6.7. Si deux sous-graphes de G_0 , d'ordre au moins trois, sont isomorphes alors ils sont représentés par un même triplet.

Preuve. Soient H et H' deux sous-graphes isomorphes, d'ordre $n \geq 3$, de G_0 et soient $t = (n_0, n_1, p)$ et $t' = (n'_0, n'_1, p')$ les triplets associés respectivement. Montrons que $t = t'$. H et H' sont les restrictions de G_0 aux sous-ensembles $V = A_1 \times \{0\} \cup A_2 \times \{1\}$ et $V' = A'_1 \times \{0\} \cup A'_2 \times \{1\}$ respectivement où A_1, A_2, A'_1, A'_2 sont des sous-ensembles de $\mathbb{N}$ et $|A_1 \cup A_2| = |A'_1 \cup A'_2| = n$. Comme H et H' sont isomorphes, ils ont le même nombre de paires, donc $p = p'$.

S'ils sont connexes alors, étant des graphes bipartis, les partitions de leurs sommets en deux stables sont uniques. Donc, soit $|A_1| = |A'_1|$ et $|A_2| = |A'_2|$ ou bien $|A_1| = |A'_2|$ et $|A_2| = |A'_1|$. Avec notre convention de placer, en L_0 , le stable de cardinalité minimale, nous avons nécessairement $n_0 = n'_0$ et $n_1 = n'_1$.

Si H et H' ne sont pas connexes, alors d'après le Lemme 6.5, $t, t' \in F$ et d'après la Remarque 6.4, on a nécessairement $t = t'$. $\square$

6.3.2 Les indécomposables de $\text{Age}(G_0)$

A partir de la représentation des sous-graphes de G_0 et de leurs codages par des triplets d'entiers, nous pouvons déterminer l'ensemble $\text{Ind}(G_0)$ des sous-graphes indécomposables de G_0 .

Soit H un sous-graphe d'ordre $n \geq 4$ de G_0 induit par le sous-ensemble V_H de sommets et soit $t_H = (n_0, n_1, p)$ le triplet qui lui est associé.

Posons $P = \{x \in V_H / x \text{ appartient à une paire de } H\}$, on a $|P| = 2p$. Pour tout $x \in P$, notons $\bar{x}$ le sommet de P tel que $\{x, \bar{x}\}$ est une paire.

Lemme 6.8. Si $n_0 - p \geq 2$ ou $n_1 - p \geq 2$ alors H possède un intervalle non trivial. La réciproque n'est pas vraie.

Preuve. Si $n_0 - p \geq 2$, alors dans la partition en deux stables des sommets de V_H , en considérant le stable de cardinalité n_0 , les sommets de ce stable qui n'appartiennent pas à P forment un intervalle de H . Pour le cas $n_1 - p \geq 2$, considérer les sommets du stable de cardinalité n_1 qui ne sont pas dans P . Pour la réciproque, il suffit de considérer le sous-graphe $2K_2$ qui possède un intervalle et qui correspond au triplet $(2, 2, 2)$. $\square$

Lemme 6.9. Soit $E \subseteq P$, avec $E \neq P$ et $|E| \geq 2$, alors ;

1. Si $p \geq 3$, l'ensemble E n'est pas un intervalle.
2. Si $p = 2$, H possède un intervalle si et seulement si $n_0 = n_1 = p$.

Preuve.

1. Si $p \geq 3$, alors E n'est pas un intervalle, il suffit de considérer un sommet x de $P \setminus E$ tel que $\bar{x} \in E$, s'il en existe, sinon, E est formé de paires, prendre alors n'importe quel élément $x \in P \setminus E$.
2. Si $p = 2$, alors,
 - $n_0 = p$ et $n_1 = p$ impliquent que H est isomorphe à $2K_2$ qui possède un intervalle.
 - Si E est un intervalle alors nécessairement $E = \{x, y\}$ tels que (x, y) est une arête de H , donc on a forcément $n_0 = p$ et $n_1 = p$.

$\square$

Lemme 6.10. Soit H un sous-graphe de G_0 d'ordre $n \geq 4$ et $t_H = (n_0, n_1, p)$ le triplet qui lui est associé. Alors

$H \in \text{Ind}(G_0)$ si et seulement si $t_H \in \{(k, k, k-1), (k, k+1, k); k \geq 2\} \cup \{(k, k, k); k \geq 3\}$.

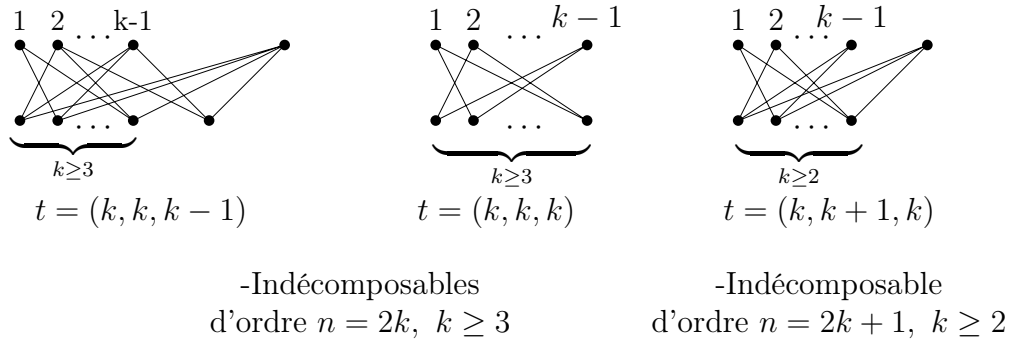
Preuve. Si H est indécomposable, alors d'après le Lemme 6.8, $n_0 - p \leq 1$ et $n_1 - p \leq 1$, donc soit $n_0 = n_1 = p$ avec $p \geq 3$, d'après le Lemme 6.9, soit $n_0 = p$ et $n_1 = p+1$ soit $n_0 = n_1 = p+1$ avec $n_0 + n_1 \geq 4$ et on retrouve l'ensemble donné.

Inversement, si $t_H \in \{(k, k, k-1), (k, k+1, k); k \geq 2\} \cup \{(k, k, k); k \geq 3\}$, il est facile de voir que H est indécomposable. $\square$

D'après le Lemme 6.10, le graphe G_0 a deux sous-graphes indécomposables de tout ordre pair $n := 2k$, $k \geq 3$ qui correspondent aux triplets $(k, k, k-1)$ et (k, k, k) et un de tout ordre impair $n := 2k+1$, $k \geq 2$ qui est codé par $(k, k+1, k)$. ces indécomposables sont représentés dans la FIGURE 6.5. Pour $n = 4$ il y a un seul indécomposable qui est isomorphe à P_4 et est codé par $(2, 2, 1)$, il n'y a pas d'indécomposable de taille 3, Chaque indécomposable de taille n s'abrite dans tout indécomposable de taille supérieure, d'après le Lemme 6.6. Donc l'ensemble des indécomposables de G_0 forme une classe minimales de $\text{Ind}(\Omega_1)$. Donc $\text{Age}(G_0)$, l'âge de G_0 (et aussi $\text{Age}(\overline{G_0})$, l'âge du complémentaire de G_0) est ind-minimal d'après le Théorème 5.14.

6.3.3 Profil de l'âge de G_0

Les premières valeurs du profil de $\text{Age}(G_0)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sont respectivement 1, 1, 2, 3, 6, 6, 10, 10.

FIGURE 6.5 – Les sous-graphes indécomposables d'ordres $n \geq 5$ de G_0 .

Lemme 6.11. *La fonction profil de G_0 est quasi-polynomiale, elle est donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par :*

$$\begin{cases} \varphi_0(2) = 2, \\ \varphi_0(n) = \frac{n^2 + 6n + 8}{8} & \text{si } n \text{ est pair, } n \neq 2, \\ \varphi_0(n) = \frac{n^2 + 4n + 3}{8} & \text{si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

En outre, la croissance de $\varphi_0(n)$ est polynomiale de puissance 2, $\varphi_0(n) \simeq \frac{n^2}{8}$.

Preuve. A partir du codage des sous-graphes par des triplets et de l'énumération de ces derniers, nous avons

$$\begin{cases} \varphi_0(2) = 2, \\ \varphi_0(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (k+1) = \frac{(\lfloor n/2 \rfloor + 1)(\lfloor n/2 \rfloor + 2)}{2}, \quad \forall n \neq 2. \end{cases}$$

Après calcul, nous obtenons la fonction donnée dans le lemme.

Le cas $n = 2$ n'obéit pas à cette formule car, d'après la Remarque 6.3, l'indépendant à deux éléments peut-être codé par deux triplets différents.

Il est clair que le profil $\varphi_0(n)$ est quasi-polynomial. En effet, pour tout $n \neq 2$, nous avons $\varphi_0(n) = a_2(n)n^2 + a_1(n)n + a_0(n)$ où $a_2(n) = \frac{1}{8}$ pour tout n , a_0 et a_1 sont périodiques de période 2 et valent : $a_0(2n) = 1$, $a_0(2n+1) = \frac{3}{8}$, $a_1(2n) = \frac{3}{4}$ et $a_1(2n+1) = \frac{1}{2}$ pour tout n . $\square$

Proposition 6.12. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_0)$ (et de $\text{Age}(\overline{G_0})$) est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_0}(x) = \frac{1 - x^2 + x^3 + 2x^4 - 2x^5 - x^6 + x^7}{(1-x)(1-x^2)^2}.$$

Preuve. D'après le codage des éléments de $\text{Age}(G_0)$ par des triplets, la série génératrice peut-être calculée comme suit :

$$F_{G_0} = \sum_{\substack{n_0 + n_1 = n \\ p \leq n_0 \leq n_1}} \delta_{(n_0, n_1, p)} X^n$$

où $\delta_{(n_0, n_1, p)}$ est la fonction caractéristique de l'ensemble $\{(n_0, n_1, p); n_0 + n_1 = n \text{ et } p \leq n_0 \leq n_1\}$.

En prenant toutes les partitions de n en deux parts n_0 et n_1 avec $n_0 \leq n_1$, nous obtenons, en posant $n_1 = n_0 + m$.

$$\begin{aligned} F_{G_0} &= \sum_{\substack{2n_0 + m = n \\ p \leq n_0}} \delta_{(n_0, n_1, p)} X^{2n_0 + m} = \sum_{2n_0 + m = n} (n_0 + 1) X^{2n_0} \cdot X^m \\ &= \sum_{n_0 \geq 0} (n_0 + 1) \cdot X^{2n_0} \cdot \sum_{m \geq 0} X^m \end{aligned}$$

Qui, après calculs et corrections (basées sur le calcul des premières valeurs du profil), donne :

$$F_{G_0}(X) = \frac{1 + X}{(1 - X^2)^3} - X^2 = \frac{1 - X^2 + X^3 + 2X^4 - 2X^5 - X^6 + X^7}{(1 - X)(1 - x^2)^2}.$$

□

6.4 Le graphe G_1

Le graphe $G_1 := (V_1, E_1)$ est biparti, son ensemble de sommets $V_1 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ se décompose en deux indépendants disjoints $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$. Une paire de sommets $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête de G_1 si et seulement si $i \leq j$. Le graphe G_1 est le graphe biparti demi-complet de Schmerl et Trotter [100], c'est un graphe critique. Le graphe G_1 et son graphe complémentaire sont des graphes de permutations (ils sont associés à des ordres de dimension deux, voir section 4.2).

6.4.1 Représentation des sous-graphes de G_1

Soit H un sous-graphe d'ordre n de G_1 induit par le sous-ensemble de sommets $V_H = X \cup Y$ avec $X \subseteq \mathbb{N} \times \{0\}$, $Y \subseteq \mathbb{N} \times \{1\}$ et $|X \cup Y| = n$.

Remarques 6.13. Nous avons, d'après la structure du graphe G_1 ,

1. H est connexe si et seulement si
 - $X \neq \emptyset$ et $Y \neq \emptyset$,
 - $\min\{i \in \mathbb{N} / (i, 0) \in X\} \leq \min\{j \in \mathbb{N} / (j, 1) \in Y\}$,
 - $\max\{i \in \mathbb{N} / (i, 0) \in X\} \leq \max\{j \in \mathbb{N} / (j, 1) \in Y\}$.

2. Si H n'est pas connexe, il possède, au plus, une composante connexe d'ordre supérieur ou égal à deux.
3. Pour deux sommets quelconques $(i, 0)$, $(i', 0)$ de X on a

$$d_H((i, 0)) \geq d_H((i', 0)) \Leftrightarrow i \leq i'.$$

4. Pour deux sommets quelconques $(j, 1)$, $(j', 1)$ de Y on a

$$d_H((j, 1)) \leq d_H((j', 1)) \Leftrightarrow j \leq j',$$

où $d_H(x)$ est le degré du sommet x dans H .

Nous associons au sous-graphe H la représentation suivante. Considérons deux droites parallèles horizontales L_0 , L_1 , alors

1. Si H est connexe et $|X| \geq |Y|$ (respectivement $|Y| \geq |X|$), placer les sommets $(i, 0)$ de X (respectivement $(j, 1)$ de Y) sur L_0 suivant l'ordre croissant des i (respectivement décroissant des j) et les sommets $(j, 1)$ de Y (respectivement $(i, 0)$ de X) sur L_1 suivant l'ordre croissant des j (respectivement décroissant des i) de telle sorte que tout $(j, 1) \in Y$ se trouve à droite (respectivement à gauche) de tout $(i, 0) \in X$ tel que $j \geq i$ et à gauche (respectivement à droite) de tout $(i, 0)$ tel que $j < i$ (voir l'exemple H_1 sur la FIGURE 6.6)
2. Si H n'est pas connexe alors, d'après la Remarque 6.13, nous avons
 - ou bien H est un indépendant, dans ce cas nous plaçons tous les sommets sur L_0 .
 - ou bien H possède une composante connexe H' d'ordre au moins deux, nous plaçons les sommets de H' comme dans le cas H connexe, puis nous plaçons les sommets restants (qui n'appartiennent pas à la composante connexe H') sur L_0 à droite de tous les sommets de H' , (voir l'exemple du sous-graphe H_2 sur la FIGURE 6.6).

Remarque 6.14. Si $|X| = |Y|$ la représentation ci-dessus n'est pas nécessairement unique.

Exemple. 6.15. 1. Si $X = \{(0, 0), (2, 0), (4, 0)\}$ et $Y = \{(1, 1), (3, 1), (5, 1)\}$. Une seule représentation est associée à H , (voir le sous-graphe K de la FIGURE 6.7).

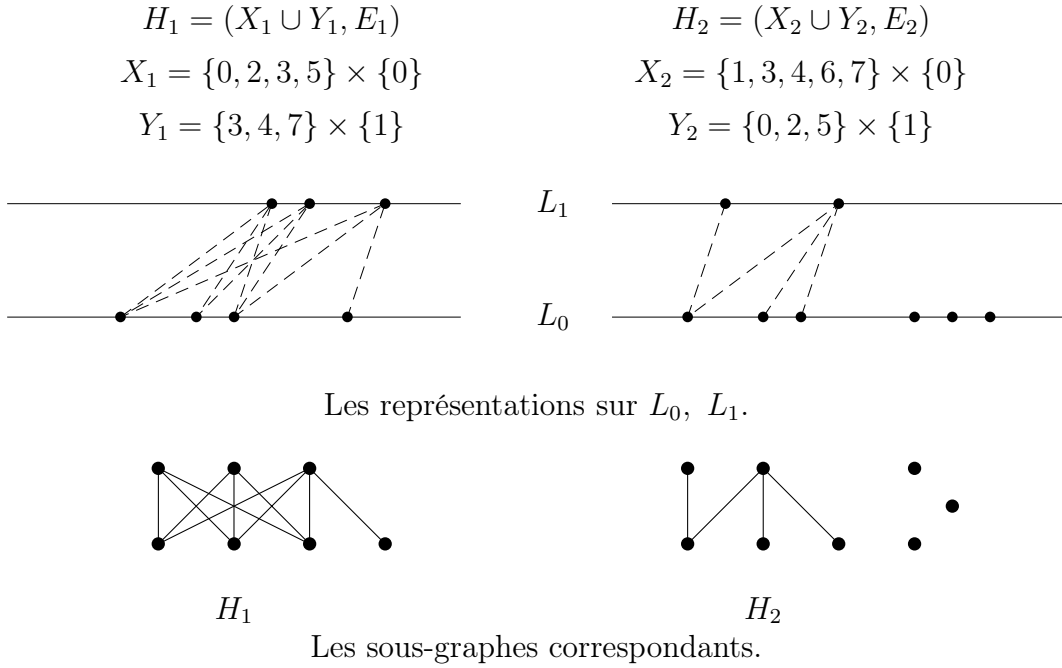
2. Si $X = \{(0, 0), (2, 0), (3, 0)\}$ et $Y = \{(1, 1), (4, 1), (5, 1)\}$. Deux représentations différentes sont associées à H , (voir le sous-graphes K' de la FIGURE 6.7).

Nous associons à la représentation de H , ci-dessus, un mot ou une suite de $\{0, 1\}^n$ obtenue en balayant les lignes L_0 , L_1 , par une ligne verticale, de gauche à droite et en associant, à chaque point v rencontré, dans cet ordre, 0 si v se trouve sur L_0 et 1 s'il est sur L_1 .

Par exemple, pour les sous-graphes de la FIGURE 6.6, nous associons à H_1 le mot $S_1 = 0001101$ et à H_2 le mot $S_2 = 01001000$.

Donc, à tout sous-graphe H d'ordre n de G_1 , nous pouvons associer un mot $S_H = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ où $u_i \in \{0, 1\}$ pour $i \in \{0, 1, \dots, n-1\}$, tel que $u_0 = 0$ et si k est le plus grand indice pour lequel $u_k = 1$ alors,

$$l_0(S_H) := |\{i \in \{0, \dots, k\} / u_i = 0\}| \geq l_1(S_H) := |\{i \in \{0, \dots, k\} / u_i = 1\}|.$$

FIGURE 6.6 – Représentation des sous-graphes de G_1 .

Inversement, notons par e le mot vide et soient

$$\mathcal{W} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \{S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in \{0, 1\}^n / u_0 = 0, u_{n-1} = 1 \text{ et } l_0(S) \geq l_1(S)\} \cup \{e\}$$

et

$$\mathcal{O} := \{e, 0, 00, 000, \dots, 0 \cdots 0, \dots\}$$

$\mathcal{O}$ est l'ensemble de tous les mots de longueur $n \in \mathbb{N}$ dont toutes les lettres sont égales à zéros, le mot de longueur 0 étant égale à e . Posons $\mathcal{S} := \{S_1 S_2 / S_1 \in \mathcal{W}, S_2 \in \mathcal{O}\}$. Soit le mot $S \in \mathcal{S}$, alors

- si $S = e$, nous lui associons le sous-graphe vide,
- sinon $S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$, $n \in \mathbb{N}^*$, nous lui associons le type d'isomorphie de $G_1|_{X \cup Y}$ où $X = \{i \in \{0, \dots, n-1\} / u_i = 0\} \times \{0\}$ et $Y = \{i \in \{0, \dots, n-1\} / u_i = 1\} \times \{1\}$.

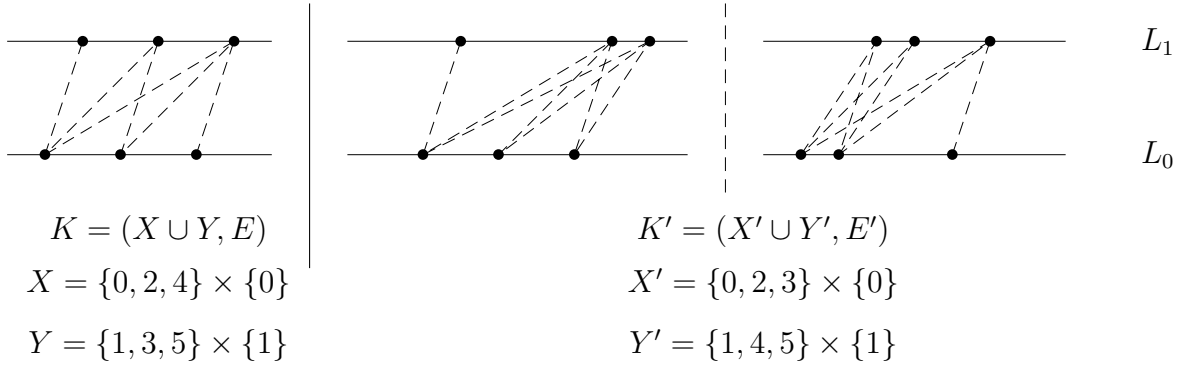
Par exemple pour $S = 010101$ on a $X = \{0, 2, 4\} \times \{0\}$ et $Y = \{1, 3, 5\} \times \{1\}$ et pour $S = 001101000$ on a $X = \{0, 1, 4, 6, 7, 8\} \times \{0\}$ et $Y = \{2, 3, 5\} \times \{1\}$.

Soit $S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1} \in \mathcal{S}$. Posons $\bar{0} = 1$, $\bar{1} = 0$ et

$$\bar{S} = \begin{cases} \bar{u}_{n-1} \cdots \bar{u}_1 \bar{u}_0 & \text{si } S \in \mathcal{W} \\ \bar{S}' O & \text{si } S = S' O \text{ avec } S' \in \mathcal{W}, O \in \mathcal{O} \end{cases}$$

Remarque 6.16. 1) Pour tout $S \in \mathcal{W}$ nous avons :

$$a) \ l_0(S) > l_1(S) \Rightarrow \bar{S} \notin \mathcal{S}.$$

FIGURE 6.7 – Exemples de représentation des sous-graphes de G_1 .

b) $l_0(S) = l_1(S) \Leftrightarrow \overline{S} \in \mathcal{W}$.

2) Si H est un sous-graphe connexe de G_1 alors $S_H \in \mathcal{W}$ et si $V(H) = X \cup Y$ avec $|X| = |Y|$ alors $\overline{S_H} \in \mathcal{W}$.

Lemme 6.17. Soit $H = (X \cup Y, E)$ un sous-graphe connexe de G_1 d'ordre n avec $|X| = |Y|$ et soit S_H le mot correspondant. Si $S_H \neq \overline{S_H}$ alors $\overline{S_H}$ est un autre mot qui représente H .

Preuve. Ceci est dû au fait que si S_H correspond à la représentation de H telle que les sommets de X sont sur L_0 et ceux de Y sur L_1 alors $\overline{S_H}$ est le mot associé à la représentation qui place les sommets de Y sur L_0 et ceux de X sur L_1 . En effet, si $S_H = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ on associe à chaque terme u_i pour $0 \leq i \leq n-1$ le sommet x_i^j avec $j = u_i$. Le sommet x_i^j est le $(i+1)$ -ème sommet de H rencontré en balayant les lignes L_0, L_1 de gauche à droite, ce sommet est sur L_0 si $j = u_i = 0$ et sur L_1 si $j = u_i = 1$. Alors $\overline{S_H}$ est le mot qui représente $f(H)$ où f est l'automorphisme de H donné par :

$$\begin{aligned} f : V_H &\rightarrow V_H \\ x_i^j &\mapsto x_{n-1-i}^{1-j} \end{aligned}$$

Il est clair que f est bijective et que $\{x_i^j, x_{i'}^{j'}\} \in E$ si et seulement si $\{f(x_i^j), f(x_{i'}^{j'})\} \in E$. En effet ; si $\{x_i^j, x_{i'}^{j'}\} \in E$ avec $i < i'$ alors nécessairement $j = u_i = 0$ et $j' = u_{i'} = 1$ donc $f(x_i^j) = x_{n-1-i}^{1-j}$ et $f(x_{i'}^{j'}) = x_{n-1-i'}^{1-j'}$ avec $1-j = 1, 1-j' = 0$ et $n-1-i > n-1-i'$. Or si $\overline{S_H} = \overline{u}_{n-1} \cdots \overline{u}_1 \overline{u}_0 = u'_0 u'_1 \cdots u'_{n-1}$ alors $\overline{u}_i = u'_{n-1-i}$ donc le sommet x_{n-1-i}^{1-j} correspond au terme $u'_{n-1-i} = \overline{u}_i$ de $\overline{S_H}$ et $x_{n-1-i'}^{1-j'}$ correspond au terme $u'_{n-1-i'} = \overline{u}_{i'}$. L'implication inverse se démontre de la même façon. $\square$

Exemple. 6.18. – Soit H défini par $X = \{0, 2, 3\} \times \{0\}$ et $Y = \{1, 4, 5\} \times \{1\}$. En plaçant X sur L_0 et Y sur L_1 on a comme suite représentative $S = 010011$ et en plaçant Y sur L_0 et X sur L_1 on a comme suite représentative $S' = 001101 = \overline{S}$.
 – Les sous-graphes de la FIGURE 6.7 ont pour suites représentatives $S_1 = 010101 = \overline{S}_1$ pour le sous-graphe K et $S_2 = 010011, \overline{S}_2 = 001101$ pour le sous-graphe K' .

Lemme 6.19. Soient H et H' deux sous-graphes de G_1 de même ordre n et soient S_H et $S_{H'}$ les suites correspondantes respectivement. Alors :

H et H' sont isomorphes $\Leftrightarrow S_H = S_{H'}$ ou bien $S_H = \overline{S_{H'}}$.

Preuve.

$\Leftarrow$) évident par construction et d'après le Lemme 6.17.

$\Rightarrow$) Posons $S_H = SO$ et $S_{H'} = S'O'$ avec $S, S' \in \mathcal{W}$ et $O, O' \in \mathcal{O}$. Si H et H' sont isomorphes, ils ont le même nombre de composantes connexes de même ordre, donc S et S' sont de même longueur, il en est de même pour O et O' .

Si H et H' sont des indépendants d'ordre n , alors leur représentation est unique, dans ce cas $S = S' = e$ et $O = O'$ de taille n .

Si H et H' possèdent, chacun, une composante connexe d'ordre au moins 2, alors, les bipartitions en stables de ces composantes sont uniques. Nous avons deux cas, ou bien, pour chacun des graphes, les deux stables ne sont pas de même cardinalité (donc $l_0(S) > l_1(S)$ et $l_0(S') > l_1(S')$). H et H' étant isomorphes, les sommets qui coïcident par cet isomorphisme se superposent et on a une seule façon de les représenter (le stable de cardinalité maximum avec les sommets isolés sur L_0 et l'autre sur L_1) on a alors $S_H = S_{H'}$, ou bien les deux stables sont de même cardinalité alors, en vertu du Lemme 6.17, chacun des deux graphes possède deux suites représentatives (qui peuvent-être égales). Soit f un isomorphisme de H sur H' . Si f envoie les sommets de H qui sont sur L_0 sur les sommets de H' qui sont sur L_0 on a $S_H = S_{H'}$ et si f envoie les sommets de H qui sont sur L_0 sur les sommets de H' qui sont sur L_1 on a $S_H = \overline{S_{H'}}$. $\square$

6.4.2 Les indécomposables de $Age(G_1)$

D'après la représentation des sous-graphes de G_1 , il est évident qu'un sous-graphe H possède un intervalle si et seulement si ou bien H n'est pas connexe, ou bien dans la suite S_H qui le représente, il existe deux entiers j, r tels que $u_j = u_{j+1} = \dots = u_{j+r}$. Donc nous avons

Fait 3. Si H est un sous-graphe d'ordre $n \geq 4$ de G_1 et $S_H = u_0 \dots u_{n-1}$ la suite qui le représente alors

$$H \text{ est indécomposable} \Leftrightarrow u_0 = 0, u_{n-1} = 1 \text{ et } u_j \neq u_{j+1}, \forall j, 0 \leq j \leq n-2.$$

Cette condition signifie que n est pair. Ces sous-graphes indécomposables sont les graphes critiques de Schmerl et Trotter. En incluant les sous-graphes d'ordres 1 et 2, ces sous-graphes forment une chaîne à partir de l'ordre 4 telle que le sous-graphe H qui se trouve au niveau h pour $h \geq 3$ est d'ordre $n = 2(h-1)$ et pour $h = 1, 2$ d'ordre $n = 1, 2$ respectivement. Donc

$$h(H) \leq |H| \leq 2(h(H) - 1).$$

Il s'ensuit que l'ensemble des indécomposables est minimal dans la classe des graphes indécomposables. $Age(G_1)$ est donc ind-minimal d'après le Théoreme 5.14.

6.4.3 Profil de l'âge de G_1

D'après ce qui précède, le profil de G_1 s'obtient, en énumérant, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les suites de longueur n appartenant à $\mathcal{S}$, en tenant compte du Lemme 6.19.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, désignons par $\varphi_1(n)$ le nombre de sous-graphes, non isomorphes, d'ordre n de G_1 et par $m(l, n)$ le nombre de mots de longueur n , non isomorphes, de $\mathcal{S}$ ayant exactement l termes égaux à 1.

Nous avons :

- $m(l, n) = 0$ pour $l > \frac{n}{2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $m(0, n) = 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$.
- $m(1, n) = n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Lemme 6.20.

$$m(l, n) = \begin{cases} m(l, n-1) + \binom{n-2}{l-1} & \text{si } l < \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2}(\binom{2l-2}{l-1} + 2^{l-1}) & \text{si } l = \frac{n}{2} \end{cases}$$

pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $l \geq 1$.

Preuve. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Posons

$m(l, n) = N_1 + N_2$ où

N_1 est le nombre de mots $S \in \mathcal{W}$ de longueur n et

N_2 le nombre de mots $S' \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{W}$ de longueur n . Nous distinguons deux cas :

Cas 1 : Si n est impair alors nécessairement $l < \frac{n}{2}$ et pour toute suite $S \in \mathcal{S}$ de longueur n , il est clair que $\overline{S} \notin \mathcal{S}$. Nous avons dans ce cas :

$N_1 = \binom{n-2}{l-1}$ car $S = u_0 \cdots u_{n-1} \in \mathcal{W}$ est telle que $u_0 = 0$ et $u_{n-1} = 1$, reste à choisir $l-1$ termes de valeur 1 parmi $n-2$ termes.

$N_2 = m(l, n-1)$ car dans ce cas $u_0 = u_{n-1} = 0$, ce qui revient au nombre de suites, de longueur $n-1$ ayant l termes égaux à 1. D'où

$$m(l, n) = m(l, n-1) + \binom{n-2}{l-1}.$$

Cas 2 : Si n est pair alors dans ce cas les suites S de $\mathcal{S} \setminus \mathcal{W}$ sont telles que $l < \frac{n}{2}$ donc :
 $N_2 = m(l, n-1)$. Pour N_1 nous avons deux cas :

1. Si $l < \frac{n}{2}$ nous retrouvons la même valeur que précédemment $N_1 = \binom{n-2}{l-1}$.
2. Si $l = \frac{n}{2}$ alors les suites $S \in \mathcal{W}$ concernées sont telles que $\overline{S} \in \mathcal{W}$. Posons

$N_1 = N'_1 + N'_2$ où

N'_1 est le nombre de suites $S \in \mathcal{W}$ de longueur n telles que $S = \overline{S}$ et

N'_2 le nombre de suites $S' \in \mathcal{W}$ de longueur n telles que $S' \neq \overline{S'}$. Alors

- $N'_1 = \sum_{k=0}^{l-1} \binom{l-1}{k} = 2^{l-1}$ car dans ce cas les suites S concernées sont de la forme $S = S_1 S_2$

avec $S_2 = \overline{S_1}$ cela revient à choisir les termes de S_1 qui valent 1.

- $N'_2 = \frac{1}{2}(\binom{n-2}{l-1} - N'_1) = \frac{1}{2}(\binom{n-2}{l-1} - 2^{l-1})$.

Donc pour résumer, nous avons dans ce cas :

- Si $l < \frac{n}{2}$ alors $m(l, n) = m(l, n-1) + \binom{n-2}{l-1}$;
- Si $l = \frac{n}{2}$ alors $m(l, n) = \frac{1}{2}(\binom{n-2}{l-1} - 2^{l-1})$.

Nous retrouvons alors la formule

$$m(l, n) = \begin{cases} m(l, n-1) + \binom{n-2}{l-1} & \text{si } l < \frac{n}{2} \\ \frac{1}{2}(\binom{2l-2}{l-1} + 2^{l-1}) & \text{si } l = \frac{n}{2} \end{cases}$$

□

Les premières valeurs du profil de $\text{Age}(G_1)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont respectivement 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 36, 72, 136. Pour les autres nous avons le lemme suivant :

Lemme 6.21. *Le profil φ_1 de l'âge de G_1 est exponentiel, il est donné par :*

$$\begin{cases} \varphi_1(0) = \varphi_1(1) = 1, \varphi_1(2) = 2, \\ \varphi_1(n) = \varphi_1(n-1) + 2^{n-3} & \text{si } n \text{ impair } n \geq 3 \\ \varphi_1(n) = \varphi_1(n-1) + 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}} & \text{si } n \text{ pair } n \geq 4 \end{cases}$$

En outre, $\varphi_1 \simeq \frac{2^n}{4}$.

Preuve. Pour $n = 0, 1, 2$ le résultat est immédiat. Soit $n \geq 3$ nous distinguons les deux cas :

1) **Si n est impair :** posons $n = 2k + 1$ avec $k \geq 1$ alors

$$\begin{aligned} \varphi_1(2k+1) &= \sum_{l=0}^k m(l, 2k+1) = m(0, 2k+1) + \sum_{l=1}^k (m(l, 2k) + \binom{2k-1}{l-1}) \\ &= \sum_{l=0}^k m(l, 2k) + \sum_{l=1}^k \binom{2k-1}{l-1} \\ &= \varphi_1(2k) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{2k-1}{j} \end{aligned}$$

Ceci en utilisant les relations $m(0, n) = 1, \forall n \in \mathbb{N}$ et $\binom{n}{j} = \binom{n-j}{n}$. Nous avons alors dans ce cas,

$$\varphi_1(n) = \varphi_1(n-1) + 2^{n-3}, \forall n \geq 3, n \text{ impair.}$$

2) **Si n est pair :** Posons $n = 2k$ avec $k \geq 2$ nous avons alors

$$\begin{aligned} \varphi_1(2k) &= \sum_{l=0}^k m(l, 2k) = m(0, 2k) + \sum_{l=1}^{k-1} m(l, 2k) + m(k, 2k) \\ &= m(0, 2k) + \sum_{l=1}^{k-1} (m(l, 2k-1) + \binom{2k-2}{l-1}) + \frac{1}{2}(\binom{2k-2}{k-1} + 2^{k-1}) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} (m(l, 2k-1) + \binom{2k-2}{l-1}) + \frac{1}{2}(\binom{2k-2}{k-1} + 2^{k-1}) \\ &= \varphi_1(2k-1) + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{2k-2}{j} + \frac{1}{2}(\binom{2k-2}{k-1} + 2^{k-2}) \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $\sum_{j=0}^{k-2} \binom{2k-2}{j} = 2^{2k-3} - \frac{1}{2}\binom{2k-2}{k-1}$ car $\binom{n}{j} = \binom{n-j}{n}$ et $\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = 2^n$, nous trouvons

$$\varphi_1(2k) = \varphi_1(2k-1) + 2^{2k-3} + 2^{k-2}.$$

D'où

$$\varphi_1(n) = \varphi_1(n-1) + 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}}, \quad \forall n \geq 4, \quad n \text{ pair.}$$

Pour la croissance asymptotique, elle a été calculée sur Maple grâce à la fonction génératrice donnée dans la proposition qui suit. $\square$

Proposition 6.22. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_1)$, l'âge de G_1 , est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_1}(x) = \frac{1 - x - 2x^2 + x^3}{(1 - 2x)(1 - 2x^2)}.$$

Preuve. Nous avons

$$\begin{aligned} A = F_{G_1}(x) &= \sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^n = \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} \varphi(n)x^n + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impair}}} \varphi(n)x^n. \\ &= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} (\varphi(n-1) + 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}})x^n \\ &\quad + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impair}}} (\varphi(n-1) + 2^{n-3})x^n. \\ &= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \sum_{n \geq 3} \varphi(n-1)x^n + \sum_{n \geq 3} 2^{n-3}x^n \\ &\quad + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} 2^{\frac{n-4}{2}}x^n. \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n \geq 3} \varphi(n-1)x^n = \sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^{n+1} - \varphi(0)x - \varphi(1)x^2.$$

Nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} A = F_{G_1}(x) &= \varphi(0) + \varphi(1)x + \varphi(2)x^2 + \sum_{n \geq 0} \varphi(n)x^{n+1} - \varphi(0)x - \varphi(1)x^2 \\ &\quad + \sum_{n \geq 3} 2^{n-3}x^n + \sum_{n \geq 2} 2^{n-2}x^{2n}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{n \geq 3} 2^{n-3}x^n = x^3 \sum_{n \geq 0} (2x)^n = \frac{x^3}{1-2x} \text{ et}$$

$$\sum_{n \geq 2} 2^{n-2}x^{2n} = x^4 \sum_{n \geq 0} (2x^2)^n = \frac{x^4}{1-2x^2}. \text{ D'où l'on déduit :}$$

$$A = xA + \frac{x^3}{1-2x} + \frac{x^4}{1-2x^2} + 1 + x^2.$$

Ce qui donne

$$F_{G_1}(x) = \frac{1 - x - 2x^2 + x^3}{(1 - 2x)(1 - 2x^2)}.$$

□

6.5 Le graphe G_2

Le graphe $G_2 := (V_2, E_2)$ est biparti, son ensemble de sommets $V_2 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ se décompose en deux stables disjoints $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$. Une paire $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête de G_1 si et seulement si $j = i$ ou $j = i + 1$. Le graphe G_2 est le chemin infini (en tant que graphe). Le graphe G_2 et son graphe complémentaire sont des graphes de permutations, G_2 est le graphe de comparabilité du zigzags (introduit dans la section 4.2 du chapitre 4), il est également le graphe d'incomparabilité de l'ordre $P := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, L_1 \cap L_2)$ où $L_1 := (0, 1) < (0, 0) < (2, 1) < (1, 0) < \dots < (n, 1) < (n - 1, 0) < \dots$ et $L_2 := (0, 0) < (0, 1) < (1, 0) < (1, 1) < \dots < (n, 0) < (n, 1) < \dots$.

Les sous-graphes indécomposables de G_2 sont, en plus des indécomposables d'ordres 1 et 2, les sous-graphes connexes de G_2 d'ordres $n > 3$. Il y'en a un pour chaque ordre n , $n \geq 4$. On y inclura l'indécomposable d'ordre 1 et les deux indécomposables d'ordre 2. Ces graphes indécomposables forment une chaîne telle que l'indécomposable d'ordre n se trouve au niveau $n - 1$ pour $n \geq 4$. Ceux d'ordres 1 et 2 se trouvent respectivement aux niveaux 1 et 2. L'ensemble de ces sous-graphes est minimal dans la classe des indécomposables. $\text{Age}(G_2)$ (et donc $\text{Age}(\overline{G_2})$) l'âge de son complémentaire) est ind-minimal (Théorème 5.14).

Lemme 6.23. *Le profil, φ_2 , de $\text{Age}(G_2)$ est la fonction partition d'entiers $\mathbf{p}(n)$. Sa fonction génératrice est donnée par :*

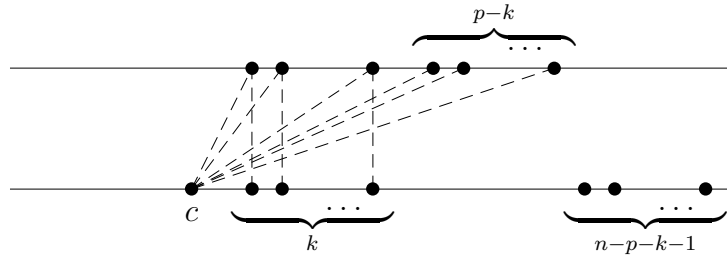
$$F_{G_2}(x) = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1 - x^k}.$$

Preuve. Les sous-graphes d'ordre n de G_2 peuvent-être représentés par les partitions de n . En effet, pour identifier un sous-graphe de G_2 , à l'isomorphie près, il faut et il suffit de déterminer les tailles de ses composantes connexes, la somme de toutes ces tailles étant égale à l'ordre du sous-graphe. □

6.6 Le graphe G_3

Le graphe $G_3 := (V_3, E_3)$ (représenté dans la FIGURE 6.1) est biparti, son ensemble de sommets $V_3 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \cup \{c\}$, se décompose en deux sous-ensembles disjoints $A_3 := (\mathbb{N} \times \{0\}) \cup \{c\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$ qui forment des stables. Une paire $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête de G_3 si $i = j$ et nous ajoutons à E_3 toutes les paires $\{c, (i, 1)\}$ pour $i \in \mathbb{N}$.

Remarquons que pour tout $x \in V_3 \setminus \{c\}$, le graphe G_3 s'abrite dans $G_{3|_{V_3 \setminus \{x\}}}$, donc $x \notin \text{Ker}(G_3)$ et $\text{Age}(G_3) \neq \text{Age}(G_{3|_{V_3 \setminus \{c\}}})$, donc $\text{Ker}(G_3) = \{c\}$.

FIGURE 6.8 – Représentation des sous-graphes de G_3 .

6.6.1 Représentation des sous-graphes de G_3

Soit H un sous-graphe de G_3 , nous avons deux cas :

Cas 1 : H ne contient pas le sommet c (H est un sous-graphe de $G_3 \setminus \{c\}$) alors H est de la forme $p.K_2 \oplus q$ où " $\oplus$ " est la somme directe, K_2 est la clique à deux sommets et q le stable d'ordre q . Donc, tout sous-graphe H de $G_3 \setminus \{c\}$ est entièrement défini par son ordre n et le nombre p de copies de K_2 qu'il contient. Nous pouvons alors coder chaque type d'isomorphie des sous-graphes H , d'ordre n , de $G_3 \setminus \{c\}$ par un couple d'entiers (n, p) tel que p représente le nombre de copies de K_2 contenus dans H et $p \leq \frac{n}{2}$. Inversement, à tout couple d'entiers (n, p) avec $p \leq \frac{n}{2}$, nous pouvons associer le type d'isomorphie $T_{n,p}$ de $G_{3|_X}$ où $X = \{0, \dots, n-p\} \times \{0\} \cup \{0, \dots, p-1\} \times \{1\}$.

Observation 6.24. Deux sous-graphes de $G_3 \setminus \{c\}$ sont isomorphes si et seulement si ils sont codés par le même couple.

Cas 2 : H contient le sommet c alors H est caractérisé par son ordre n , le nombre k de copies de K_2 qu'il contient et le degré p du sommet c dans H . Nous associons alors, à tout sous-graphe H de G_3 contenant le sommet c , le triplet d'entiers $t_H := (n, k, p)$ tel que $p \geq k$ et $n \geq k + p + 1$, donc $k \leq \frac{n-1}{2}$.

Posons $\mathcal{T} := \{t := (n, k, p) \in \mathbb{N}^3 / p \geq k, n \geq k + p + 1\}$.

Inversement, à tout triplet $t := (n, k, p) \in \mathcal{T}$, nous associons le type d'isomorphie T_t de $G_{3|_Y}$ où $Y = \{c\} \cup (\{0, \dots, k-1\} \cup \{p, \dots, n-k-2\}) \times \{0\} \cup \{0, \dots, p-1\} \times \{1\}$ (voir FIGURE 6.8).

Remarques 6.25. 1. Un sous-graphe H de $\text{Age}(G_3)$ qui contient le sommet c peut-être isomorphe à un sous-graphe de $G_3 \setminus \{c\}$, en effet nous avons :

- (a) Pour chaque entier $n \geq 2$, le sous-graphe isomorphe à $K_2 \oplus (n-2)$ peut-être représenté soit par le triplet $(n, 0, 1)$ soit par le couple $(n, 1)$.
- (b) Pour tout entier n , le stable d'ordre n peut-être représenté soit par le triplet $(n, 0, 0)$ soit par le couple $(n, 0)$.

2. De même nous avons, pour tout entier $n \geq 3$, le sous-graphe isomorphe à $P_3 \oplus (n-3)$ peut-être représenté par l'un des deux triplets $(n, 0, 2)$ et $(n, 1, 1)$.

Posons

$$\mathcal{T}' := \{t := (n, k, p) \in \mathcal{T} / n \geq 4, k \neq 0\} \cup \{t := (n, 0, p) \in \mathcal{T} / n \geq 4, p \geq 3\}.$$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 6.26. *Soient $t := (n, k, p)$ et $t' := (n', k', p')$ deux triplets de $\mathcal{T}$ et soient T_t et $T_{t'}$ les sous-graphes correspondants respectifs. Si $t, t' \in \mathcal{T}'$ alors*

$$T_t \text{ et } T_{t'} \text{ sont isomorphes si et seulement si } t = t'.$$

De plus, T_t et $T_{t'}$ ne sont pas des sous-graphes de $G_3 \setminus \{c\}$.

Preuve. La condition suffisante est évidente. Pour la condition nécessaire, supposons que T_t et $T_{t'}$ sont isomorphes mais $t \neq t'$, donc $n = n'$. Soit f cet isomorphisme.

Cas 1 : Si $k \neq k'$, supposons que $k < k'$, nous avons les sous-cas suivant :

- a) Si $k \geq 1$ alors $k' \geq 2$ ce qui signifie que dans $T_{t'}$ le sommet c a un degré au moins égal à 2 et k' sommets, distincts de c , sont de degré 2 (sont reliés à c), donc, c est invariant par f , c'est à dire $f(c) = c$, il s'ensuit que $p = d_{T_t}(c) = d_{T_{t'}}(c) = p'$, où $d_T(c)$ représente le degré de c dans le graphe T . Mais dans T_t , nous avons k sommets différents de c dont le degré est 2. Comme $k' > k$ les deux graphes ne peuvent-être isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.
- b) Si $k = 0$ alors $p \geq 3$, donc $k' \geq 1$ et $f(c) = c$ d'où $p' \geq 3$. Dans ce cas $T_{t'}$ contient P_4 mais T_t ne le contient pas. Il s'ensuit que T_t et $T_{t'}$ ne sont pas isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.

Cas 2 : Si $k = k'$ alors $p \neq p'$, donc si $f(c) = c$ nous ne pouvons avoir isomorphisme car $p = d_{T_t}(c) \neq p' = d_{T_{t'}}(c)$ et si $f(c) \neq c$ alors nous avons nécessairement $d_{T_t}(c) = 2$ et $k = 0$. Donc T_t est codé par $(n, 0, 2)$ ce qui contredit l'hypothèse.

Pour la deuxième partie du lemme, les sous-graphes T_t et $T_{t'}$ ne peuvent s'abriter dans $G_3 \setminus \{c\}$ car ils contiennent, chacun, un sommet de degré supérieur à 1. $\square$

6.6.2 Les indécomposables de $\text{Age}(G_3)$

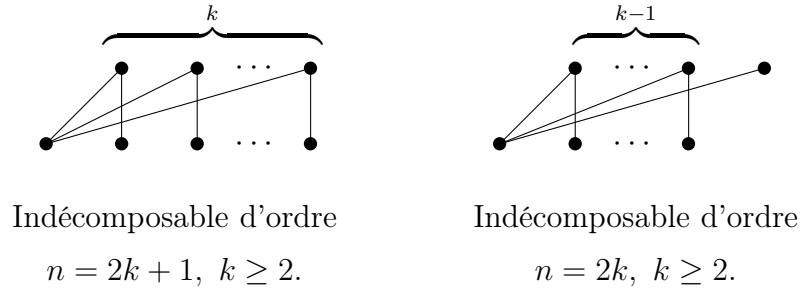
Il est clair que tous les sous-graphes indécomposables, d'ordre $n \geq 4$, de G_3 , contiennent le sommet c , car tout sous graphe indécomposable d'ordre au moins quatre doit contenir le graphe P_4 . On a alors :

Lemme 6.27. *Soit H un sous-graphe contenant le sommet c et ayant au moins quatres sommets et $t_H = (n, k, p)$ le triplet qui lui est associé. Alors*

$$H \text{ est indécomposable} \Leftrightarrow k \geq 1, p - k \leq 1 \text{ et } n = p + k + 1.$$

Preuve. Evident d'après la représentation FIGURE 6.8. $\square$

Il y'a un indécomposable pour chaque ordre $n \geq 4$, ils sont donnés dans la FIGURE 6.9. Ces indécomposables forment une chaîne. En incluant, à cet ensemble, les indécomposables de tailles au plus 2, le sous-graphe d'ordre n se trouve au niveau $n - 1$ de la chaîne, pour $n \geq 4$. La classe des indécomposables de $\text{Age}(G_3)$ est minimale dans la classe des graphes indécomposables. Donc $\text{Age}(G_3)$ est ind-minimal.

FIGURE 6.9 – Les sous-graphes indécomposables de G_3 .

6.6.3 Profil de $\text{Age}(G_3)$

Les premières valeurs du profil de $\text{Age}(G_3)$ pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sont respectivement 1, 1, 2, 3, 6, 9, 13, 17.

Désignons par φ_3 la fonction profil de $\text{Age}(G_3)$.

Lemme 6.28. *Le profil φ_3 est quasi-polynomial, il est donné pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$\begin{cases} \varphi_3(0) = \varphi_3(1) = 1, \varphi_3(2) = 2, \\ \varphi_3(n) = \frac{n^2 + 4n - 8}{4} & \text{si } n \text{ est pair } n \geq 4 \\ \varphi_3(n) = \frac{n^2 + 4n - 9}{4} & \text{si } n \text{ est impair } n \geq 3 \end{cases}$$

En outre, $\varphi_3 \simeq \frac{n^2}{4}$

Preuve. D'après ce qui précède, nous avons :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \varphi_3(n) = \varphi'_3(n) + \varphi''_3(n) \quad (6.2)$$

où $\varphi'_3(n)$ est le nombre de sous-graphes à n sommets de G_3 , non isomorphes, qui s'abritent dans $G_3 \setminus \{c\}$ et $\varphi''_3(n)$ est le nombre de sous-graphes à n sommets de G_3 , non isomorphes, qui ne s'abritent pas dans $G_3 \setminus \{c\}$.

D'après l'Observation 6.24 nous avons :

$$\varphi'_3(n) = |\{(n, p) / p \leq \frac{n}{2}, p \in \mathbb{N}\}| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \forall n \in \mathbb{N}.$$

D'après la Remarque 6.25 et le Lemme 6.26, le nombre $\varphi''_3(n)$ de types d'isomorphie de sous-graphes d'ordre n , qui contiennent le sommet c et qui ne s'abritent pas dans $G_3 \setminus \{c\}$ peut-être trouvé en dénombrant tous les triplets $(n, k, p) \in \mathcal{T}'$. Donc,

$$\varphi''_3(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \leq 2 \\ 1 & \text{pour } n = 3 \\ |\{(k, p) \in \mathbb{N}^2 / (n, k, p) \in \mathcal{T}'\}| & \text{pour } n \geq 4 \end{cases}$$

Pour $n \geq 4$, nous dénombrons tous les couples (k, p) tels que $k \neq 0, k \leq p \leq n - k - 1$ et $k \leq \lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor$ ou bien $k = 0$ et $3 \leq p \leq n - 1$.

Ce nombre, après calcul est :

$$\varphi_3''(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \leq 2 \\ (\frac{n}{2})^2 + \frac{n}{2} - 3 & \text{pour } n \geq 4 \text{ et } n \text{ pair} \\ (\frac{n-1}{2})^2 + n - 3 & \text{pour } n \geq 3 \text{ et } n \text{ impair} \end{cases}$$

En remplaçant dans l'équation (6.2), nous retrouvons la formule de φ_3 donnée.

Il est clair que le profil de $\text{Age}(G_3)$ est asymptotiquement équivalent à la fonction $\frac{n^2}{4}$ et qu'il est quasi-polynomial. En effet, pour $n \geq 3$ nous avons

$$\varphi_3(n) = b_2(n)n^2 + b_1(n)n + b_0(n),$$

où $b_0(n) = -\frac{9}{4}$ pour n impair et $b_0(n) = -2$ pour n pair, $b_1(n) = b_2(n) = \frac{1}{4}$ pour tout n . $\square$

Proposition 6.29. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_3)$ est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_3}(x) = \frac{1 - x + x^3 + x^4 - x^6}{(1 - x)^2(1 - x^2)}.$$

Preuve. En utilisant le Lemme 6.28 on a :

$$\begin{aligned} F_{G_3}(x) &= \sum_{n \geq 0} \varphi_3(n)x^n = \sum_{n \geq 0} \varphi_3(2n)x^{2n} + \sum_{n \geq 0} \varphi_3(2n+1)x^{2n+1} \\ &= \sum_{n \geq 2} (n^2 + 2n - 2)x^{2n} + \sum_{n \geq 1} (n^2 + 3n - 1)x^{2n+1} + 1 + x + 2x^2 \end{aligned}$$

Après calcul nous obtenons la fonction donnée. $\square$

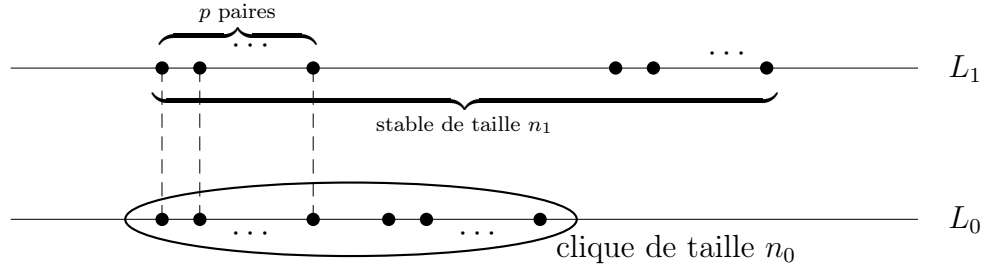
6.7 Le graphe G_4

Le graphe $G_4 := (V_4, E_4)$ est le graphe défini par $V_4 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ qui se décompose en deux sous-ensembles, $A = \mathbb{N} \times \{0\}$ qui forme une clique et $B = \mathbb{N} \times \{1\}$ qui est un stable. Une paire de sommets $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête dans G_4 si $i = j$.

6.7.1 Représentation des sous-graphes de G_4

Un sous-graphe H de G_4 est formé d'une clique à n_0 sommets, parmi lesquels p sont reliés à des sommets pendants et d'un stable formé par des sommets isolés. H possède, au plus, une composante connexe ayant plus d'un sommet.

Remarquons que G_4 s'obtient en supprimant les arêtes $\{(i, 1), (i', 1)\}$ pour $i \neq i'$, au complémentaire de G_0 . Comme pour le graphe G_0 , nous désignons par *paire* de G_4 , le sous-ensemble de sommets $\{(i, 0), (i, 1)\}$ pour $i \in \mathbb{N}$. Soit $H = (X, F)$ un sous-graphe d'ordre n de G_4 , nous représentons les sommets de X sur deux lignes parallèles horizontales L_0, L_1 tels que les sommets de $X \cap A$ sont sur L_0 et ceux de $X \cap B$ sur L_1 de telle sorte que toutes les paires de G_4 qui appartiennent à H soient à gauche, les sommets d'une même paire étant alignés verticalement.

FIGURE 6.10 – Représentation des sous-graphes de G_4 .

Les sommets restants sont placés à droite de ces paires avec ceux sur L_1 complètement à droite de ceux sur L_0 (FIGURE 6.10).

Avec cette représentation, nous pouvons associer à chaque membre H de $\text{Age}(G_4)$, d'ordre n , un triplet d'entiers $t_H := (p, n_0, n_1)$, où p est le nombre de paires de H , n_0 la taille de sa clique maximum et $n_1 = n - n_0$. Ces entiers vérifient :

$$p \leq \min(n_0, n_1) \text{ et } n_0 + n_1 = n. \quad (6.3)$$

Inversement, à tout triplet $t := (p, n_0, n_1)$ vérifiant les conditions (6.3) ci-dessus, avec $n_0 + n_1 \geq 1$, nous associons le type d'isomorphie H_t de $G_{4|_X}$ où $X = \{0, \dots, n_0 - 1\} \times \{0\} \cup (\{0, \dots, p - 1\} \cup \{n_0, \dots, n_0 + n_1 - p - 1\}) \times \{1\}$. Il est évident que si $t = t'$ alors $H_t = H_{t'}$, mais si nous avons deux sous-graphes H et H' isomorphes nous n'avons pas nécessairement $t_H = t_{H'}$ comme nous pouvons le voir dans la remarque qui suit :

- Remarques 6.30.**
1. Les sous-graphes associés aux deux triplets $(0, 1, n)$ et $(0, 0, n+1)$ sont isomorphes pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ils représentent l'indépendant à $n+1$ sommets).
 2. Les sous-graphes associés aux deux triplets $(0, 2, n)$ et $(1, 1, n+1)$ sont isomorphes pour tout $n \in \mathbb{N}$ (ils représentent $K_2 \oplus n$).
 3. Si H est un sous-graphe de G_4 et $t_H = (p, n_0, n_1)$ le triplet associé alors H est connexe si et seulement si $n_1 = p$.

Fait 4. Si t et t' sont deux triplets vérifiant les conditions (6.3) avec t et t' n'appartenant pas à l'ensemble $\{(0, 1, n), (0, 2, n), n \in \mathbb{N}\}$ alors

$$t = t' \Leftrightarrow H_t \text{ et } H_{t'} \text{ sont isomorphes.}$$

Preuve. La preuve est évidente d'après la structure des sous-graphes de G_4 et les Remarques 6.30. □

6.7.2 Les indécomposables de $\text{Age}(G_4)$

Lemme 6.31. Soit H un sous-graphe ayant au moins quatre sommets et t_H le triplet qui lui est associé. Alors

$$H \text{ est indécomposable} \Leftrightarrow t_H \in \{(p, p, p), (p, p+1, p), p \geq 2\}.$$

Preuve. Evident d'après la représentation FIGURE 6.10. $\square$

Il y'a un indécomposable pour chaque ordre $n \geq 4$. Ces indécomposables forment une chaîne. En incluant, à cet ensemble, les indécomposables d'ordre au plus 2, le sous-graphe indécomposable d'ordre n se trouve au niveau $n - 1$ de la chaîne, pour $n \geq 4$. La classe des indécomposables de $\text{Age}(G_4)$ est donc minimale dans $\text{Ind}(\Omega_1)$. Par conséquent, $\text{Age}(G_4)$ est ind-minimal d'après le Théorème 5.14.

6.7.3 Profil de $\text{Age}(G_4)$

Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont respectivement 1, 1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23, 28. Soit φ_4 la fonction profil de $\text{Age}(G_4)$. Nous avons le résultat suivant :

Lemme 6.32. *Le profil φ_4 est quasi-polynomial, il est donné par*

$$\begin{cases} \varphi_4(0) = \varphi_4(1) = 1, \varphi_4(2) = 2, \\ \varphi_4(n) = \frac{n^2 + 4n - 5}{4} & \text{si } n \text{ est impair } n \geq 3 \\ \varphi_4(n) = \frac{n^2 + 4n - 4}{4} & \text{si } n \text{ est pair } n \geq 4 \end{cases}$$

En outre $\varphi_4 \simeq \frac{n^2}{4}$.

Preuve. D'après ce qui précède, la valeur de $\varphi_4(n)$ pour tout entier $n \geq 3$, s'obtient en énumérant tous les triplets d'entiers (p, k, l) vérifiant $p \leq \min(k, l)$ et $k + l = n$ qui sont différents de $(0, 1, n - 1)$ et $(0, 2, n - 2)$. Nous obtenons alors :

$$\begin{cases} \varphi_4(0) = \varphi_4(1) = 1, \varphi_4(2) = 2, \\ \varphi_4(n) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}} (k+1) - 2 = \frac{1}{4}(n-1)(n+5) & n \text{ impair } n \geq 3 \\ \varphi_4(n) = 2 \sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}} (k+1) + (\frac{n}{2} + 1) - 2 = \frac{1}{4}n(n+4) - 1 & n \text{ pair } n \geq 4 \end{cases}$$

Il est clair que le profil de φ_4 est quasi-polynomial. $\square$

Proposition 6.33. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_4)$ est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_4}(x) = \frac{1 - x + 2x^3 - x^5}{(1 - x)^3(1 + x)}.$$

Preuve. La fonction s'obtient en utilisant le Lemme 6.32 et en exprimant les profils par une récurrence. En effet nous avons :

$$\begin{cases} \varphi_4(0) = \varphi_4(1) = 1, \varphi_4(2) = 2, \\ \varphi_4(n) = \varphi_4(n-1) + \frac{1}{2}(n+1) & \text{si } n \text{ est impair } n \geq 3 \\ \varphi_4(n) = \varphi_4(n-1) + \frac{1}{2}(n+2) & \text{si } n \text{ est pair } n \geq 4 \end{cases}$$

La fonction génératrice est alors donnée par

$$\begin{aligned}
 A = F_{G_4}(x) &= \sum_{n \geq 0} \varphi_4(n)x^n = \varphi_4(0) + \varphi_4(1)x + \varphi_4(2)x^2 + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impair}}} \varphi_4(n)x^n + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} \varphi_4(n)x^n. \\
 &= \varphi_4(0) + \varphi_4(1)x + \varphi_4(2)x^2 + \sum_{\substack{n \geq 3 \\ n \text{ impair}}} (\varphi_4(n-1) + \frac{1}{2}(n+1))x^n \\
 &\quad + \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} (\varphi_4(n-1) + \frac{1}{2}(n+2))x^n. \\
 &= \varphi_4(0) + \varphi_4(1)x + \varphi_4(2)x^2 + \sum_{n \geq 3} \varphi_4(n-1)x^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 3} (n+1)x^n \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\substack{n \geq 4 \\ n \text{ pair}}} x^n.
 \end{aligned}$$

Comme

$$\sum_{n \geq 3} \varphi_4(n-1)x^n = \sum_{n \geq 0} \varphi_4(n)x^{n+1} - \varphi_4(0)x - \varphi_4(1)x^2.$$

Alors :

$$\begin{aligned}
 A = F_{G_4}(x) &= \varphi_4(0) + \varphi_4(1)x + \varphi_4(2)x^2 + \sum_{n \geq 0} \varphi_4(n)x^{n+1} - \varphi_4(0)x - \varphi_4(1)x^2 \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 3} (n+1)x^n + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} x^{2n}.
 \end{aligned}$$

Nous avons

$$\sum_{n \geq 3} (n+1)x^n = x \sum_{n \geq 3} nx^{n-1} + \sum_{n \geq 3} x^n = \frac{-2x^3 + 3x^4}{(1-x)^2}$$

et

$$\sum_{n \geq 2} x^{2n} = x^4 \sum_{n \geq 0} x^{2n} = \frac{x^4}{1-x^2}.$$

D'où :

$$A = xA + \frac{-2x^3 + 3x^4}{2(1-x)^2} + \frac{x^4}{2(1-x^2)} + 1 + x^2.$$

Ce qui donne

$$F_{G_4}(x) = \frac{1-x+2x^3-x^5}{(1-x)^3(1+x)}.$$

□

6.8 Le graphe G_5

Les graphes G_5 et G'_5 ont même profil, nous étudions alors un seul d'eux, ce sera le graphe G_5 .

Le graphe $G_5 := (V_5, E_5)$ est le graphe défini par $V_5 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \cup \{c\}$ tel que $V_5 \setminus \{c\}$ se décompose en deux sous-ensembles, $A = \mathbb{N} \times \{0\}$ qui forme une clique et $B = \mathbb{N} \times \{1\}$ qui forme un stable. L'ensemble des arêtes contient, en plus des arêtes de la clique, les paires $\{(i, 0), (j, 1)\}$, $i, j \in \mathbb{N}$ telles que $i \leq j$ et les paires $\{c, (j, 1)\}$, $j \in \mathbb{N}$.

Remarquons, comme pour le graphe G_3 , que pour tout $x \in V_5 \setminus \{c\}$, le graphe G_5 s'abrite dans $G_5|_{V_5 \setminus \{x\}}$, donc $x \notin \text{Ker}(G_5)$ et $\text{Age}(G_5) \neq \text{Age}(G_5|_{V_5 \setminus \{c\}})$, donc $\text{Ker}(G_5) = \{c\}$.

Soit H un sous-graphe d'ordre $n \geq 1$ de G_5 induit par un n -ensemble V_H de sommets.

Remarques 6.34. 1. Si $c \notin V_H$ alors H est connexe si et seulement si

- ou bien $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) = \emptyset$ auquel cas H est une clique,
- ou bien $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N}/(i, 0) \in V_H\} \leq j_0 = \min\{j \in \mathbb{N}/(j, 1) \in V_H\}$ et dans ce cas $(i_0, 0)$ est un sommet de degré maximum et $(j_0, 1)$ un sommet de degré minimum.

2. Si $c \in V_H$ alors H est connexe si et seulement si $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) \neq \emptyset$ et si $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \neq \emptyset$ alors $\min\{i \in \mathbb{N}/(i, 0) \in V_H\} \leq \max\{j \in \mathbb{N}/(j, 1) \in V_H\}$.

3. Si H n'est pas connexe nous avons

- (a) Si $c \notin V_H$ alors H contient, au plus, une composante connexe de taille au moins deux.
- (b) Si $c \in V_H$ alors H possède exactement deux composantes connexes.

Lemme 6.35. Un sous-graphe H d'ordre $n \geq 4$ de G_5 s'abrite dans $G_5 \setminus \{c\}$ si et seulement s'il ne contient aucun sous-graphe isomorphe à P_4 , $2K_2$ ou C_4 où $2K_2$ est la somme directe de deux copies de K_2 et C_4 et le cycle à quatre sommets.

Preuve. Il est facile de vérifier que ces trois graphes ne s'abritent pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, d'où la condition nécessaire. Pour la condition suffisante, montrons que si H ne s'abrite pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, il contient nécessairement un des graphes cités. Si H ne s'abrite pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, donc H contient le sommet c . Nous avons deux cas :

Cas 1 : Si H est connexe alors, d'après la Remarque 6.34, nous avons $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) \neq \emptyset$. Comme H ne s'abrite pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, alors nécessairement $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \neq \emptyset$, donc $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N}/(i, 0) \in V_H\} \leq j_0 = \max\{j \in \mathbb{N}/(j, 1) \in V_H\}$. Posons $x_{i_0} = (i_0, 0)$ et $x_{j_0} = (j_0, 1)$. Mais $n \geq 4$ donc il existe au moins un autre sommet x dans V_H . Ce sommet x est

- soit de la forme $(i_x, 0)$ avec $i_x > i_0$ et comme H ne s'abrite pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, nous avons nécessairement $i_x > j_0$ et dans ce cas les sommets $\{c, x_{i_0}, x_{j_0}, x\}$ forment un P_4 .
- soit de la forme $(j_x, 1)$ avec $j_x < j_0$ et dans ce cas les sommets $\{c, x_{i_0}, x_{j_0}, x\}$ forment un P_4 si $j_x < i_0$ ou un C_4 sinon.

Cas 2 : Si H n'est pas connexe alors, toujours d'après la Remarque 6.34, H possède exactement deux composantes connexes, l'une donnée par $\{c\} \cup V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\})$ et l'autre par $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{0\})$. Comme H ne s'abrite pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, ces deux composantes ont, chacune, au moins deux sommets, d'où le sous-graphe $2K_2$. $\square$

6.8.1 Représentation des sous-graphes de G_5

Nous associons à H la représentation suivante. Comme pour les sous-graphes de G_1 , nous plaçons les sommets de $V_H \setminus \{c\}$ sur deux lignes horizontales L_0 et L_1 , telles que les sommets de $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{0\})$ sont sur L_0 et ceux de $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\})$ sur L_1 avec les sommets de la forme $(j, 1)$ qui sont à droite de tous les sommets de la forme $(i, 0)$ pour $i \leq j$ et à gauche de tous les sommets de la forme $(i, 0)$ pour $i > j$. Un sommet qui est sur L_0 est relié à tout sommet qui se trouve sur L_0 et à tout sommet qui se trouve sur L_1 mais à sa droite. Un sommet sur L_1 est relié à tout sommet qui se trouve sur L_0 mais à sa gauche. Si $c \in H$ nous le représentons par un point, au dessus de la ligne L_1 , qui sera relié à tous les sommets qui sont sur L_1 .

Nous représentons H par une suite de $\{0, 1\}^{n-1} \times \{0, 1, 2\}$ obtenue en balayant les lignes L_0, L_1 , de gauche à droite, par une ligne verticale et en associant à tout point v , rencontré dans cet ordre, 0 si v se trouve sur L_0 et 1 s'il est sur L_1 . Cette suite obtenue est de longueur n si $c \notin V_H$ et $n - 1$ sinon, dans ce dernier cas nous rajoutons à la suite un $n^{\text{ième}}$ terme de valeur 2. Par exemple le sous-graphe $H = (V, E)$ avec $V = (\{0, 2, 3, 4\} \times \{0\}) \cup (\{0, 1, 4\} \times \{1\})$ est représenté par la suite $S = 0110001$ et le sous-graphe $H' = (V', E')$ où $V' = V \cup \{c\}$ est représenté par $S' = 01100012$ (voir FIGURE 6.11).

Donc, à tout sous-graphe H d'ordre n de G_5 nous associons une suite $S_H = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ telle que $u_i \in \{0, 1\}$ pour tout i , $0 \leq i \leq n - 2$ et $u_{n-1} \in \{0, 1, 2\}$.

Inversement, nous associons à la suite vide le sous-graphe vide et à toute suite $S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ le type d'isomorphie de $G_{5 \upharpoonright X}$ avec $X = \{i \in \{0, \dots, n - 1\} / u_i = 0\} \times \{0\} \cup \{i \in \{0, \dots, n - 1\} / u_i = 1\} \times \{1\}$ si $u_{n-1} \neq 2$ et $X = \{i \in \{0, \dots, n - 1\} / u_i = 0\} \times \{0\} \cup \{i \in \{0, \dots, n - 1\} / u_i = 1\} \times \{1\} \cup \{c\}$ si $u_{n-1} = 2$.

Exemple. 6.36. 1. Le sous-graphe d'ordre 1 est représenté par les deux suites 0 et 1.

2. Les sous-graphes d'ordre 2 sont représentés par 00 et 01 pour la clique et par 10 et 11 pour l'indépendant.

3. Les cliques d'ordres $n \geq 3$ sont représentées par $\underbrace{00 \cdots 0}_n$ et $\underbrace{00 \cdots 01}_{n-1}$.

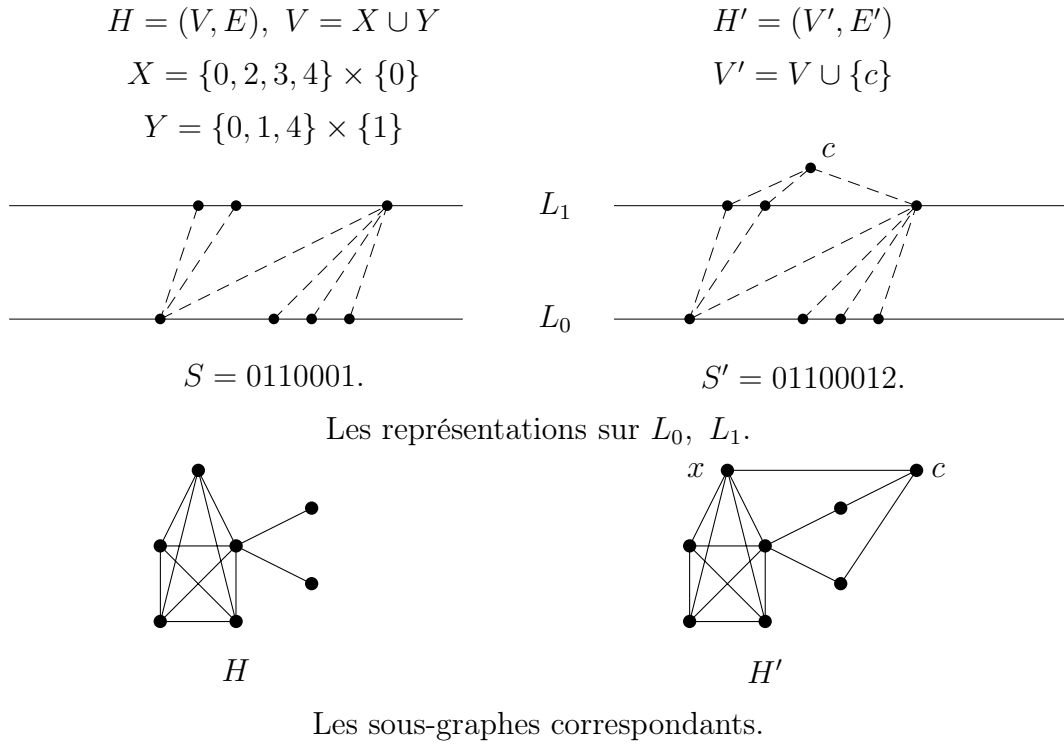
4. Les indépendants d'ordres $n \geq 3$ sont représentés par $\underbrace{11 \cdots 10}_{n-1}$ et $\underbrace{11 \cdots 1}_n$.

Remarque 6.37. Les suites de $\{0, 1\}^n$, pour tout $n \geq 1$ qui ne diffèrent que du $n^{\text{ième}}$ terme ($S = u_0 u_1 \cdots u_{n-2} 0$ et $S' = u_0 u_1 \cdots u_{n-2} 1$) sont associées à des sous-graphes isomorphes.

Par exemple le sous-graphe H donné dans la FIGURE 6.11 est isomorphe au sous-graphe $K = (U, F)$ avec $U = (\{0, 2, 3, 4, 5\} \times \{0\}) \cup (\{0, 1\} \times \{1\})$ qui est représenté par la suite $S'' = 0110000$.

Lemme 6.38. Soient H et H' deux sous-graphes de G_5 de même ordre $n \geq 1$ et soient $S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ et $S' = u'_0 u'_1 \cdots u'_{n-1}$ les suites associées respectivement. Si $c \notin H \cup H'$ (autrement dit, $u_{n-1} \neq 2$ et $u'_{n-1} \neq 2$) alors

$$H \text{ et } H' \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow u_0 u_1 \cdots u_{n-2} = u'_0 u'_1 \cdots u'_{n-2}.$$

FIGURE 6.11 – Exemple de représentation de sous-graphes de G_5 .

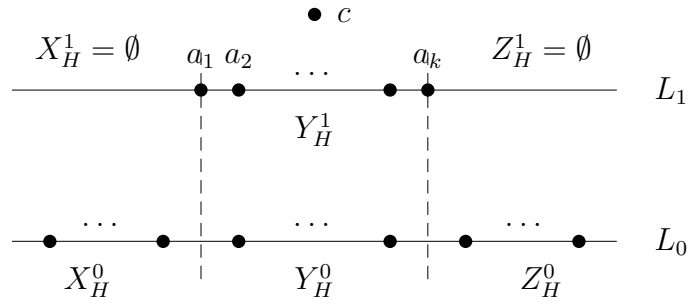
Preuve. La condition suffisante découle de la Remarque 6.37. Pour la condition nécessaire, supposons que H et H' soient isomorphes. Faisons un raisonnement par récurrence sur n .

- Si $n = 1$, nous avons deux suites associées 0 ou 1 donc le résultat est vrai.
- Supposons le résultat vrai à l'ordre $n \geq 2$ et soient H et H' deux sous-graphes isomorphes d'ordre $n + 1$ ne contenant pas le sommet c et f un isomorphisme de H sur H' . Nous avons les cas suivants :

Cas 1 : Si H est connexe, d'après la Remarque 6.34, H , et donc H' , est ou bien une clique dans ce cas les seules suites possibles sont $\underbrace{00 \cdots 00}_n$ ou $\underbrace{00 \cdots 01}_n$ et le résultat est

vérifié, ou bien H n'est pas une clique et donc les degrés de ses sommets ne sont pas tous égaux. Soit alors x_0 un sommet de H de degré maximum. Considérons les sous-graphes $K = H \setminus \{x_0\}$ et $K' = H' \setminus \{f(x_0)\}$. K et K' sont deux sous-graphes isomorphes d'ordre n , d'après l'hypothèse de récurrence, les suites qui leurs sont associés ne peuvent différer que du dernier terme considérons les représentations de K et K' sur L_0, L_1 . Les sommets x_0 et $f(x_0)$ étant de degré maximum, dans les représentations de H et H' , ils ne peuvent être placés que sur L_0 à gauche de tous les autres sommets (car H est connexe). Ceci se traduit, dans les suites par un 0 à la première position. D'où le résultat.

Cas 2 : Si H n'est pas connexe, alors d'après la Remarque 6.34, H (et donc H'), contient, au plus, une composante connexe d'ordre $k \geq 2$. Donc ou bien H (et donc H'), est un indépendant alors le résultat est vrai (voir Exemple 6.36), ou bien H n'est pas un indépendant mais possède donc, au moins un sommet isolé x_1 . On applique alors

FIGURE 6.12 – Répartition des sommets d'un sous-graphe H .

l'hypothèse de récurrence aux sous-graphes $H \setminus \{x_1\}$ et $H' \setminus \{f(x_1)\}$ et la seule position possible pour x_1 est sur L_1 tout à fait à gauche. Le résultat est alors vérifié. $\square$

Remarque 6.39. Les sous-graphes donnés par le Lemme 6.38, ne sont plus isomorphes si on leurs rajoute le sommet c .

En effet, les sous-graphes représentés par les suites $u_0u_1 \cdots u_{n-3}02$ et $u_0u_1 \cdots u_{n-3}12$ pour $n \geq 3$ ne sont pas isomorphes, car le sommet c n'a pas le même degré dans les deux sous-graphes. Comme exemple reprenons les sous-graphes isomorphes H et K donnés dans la Remarque 6.37 et considérons les sous-graphes H' et K' obtenus en rajoutant le sommet c à H et K respectivement. H' est le sous-graphe de la FIGURE 6.11 et K' est le même mais sans l'arête $\{x, c\}$.

Soit $H = (V_H, E_H)$ un sous-graphe de G_5 contenant le sommet c . Considérons la représentation de $H \setminus \{c\}$ sur L_0, L_1 , soient X_H^i, Y_H^i, Z_H^i avec $i \in \{0, 1\}$ définis par (voir FIGURE 6.12) :

$Y_H^1 = \{a_1, \dots, a_k\}$ est l'ensemble de tous les sommets de H qui sont sur L_1 , donc $V_H \cap X_H^1 = V_H \cap Z_H^1 = \emptyset$,

X_H^0 est l'ensemble de tous les sommets qui sont sur L_0 et à gauche de a_1 ,

Y_H^0 est l'ensemble des sommets sur L_0 qui sont à droite de a_1 et à gauche de a_k et

Z_H^0 les sommets de L_0 qui sont à droite de a_k .

Lemme 6.40. Soit H un sous-graphe de G_5 d'ordre $n \geq 4$ contenant le sommet c . Le sous-graphe H s'abrite dans $G_5 \setminus \{c\}$ si et seulement si nous avons l'une des situations suivantes :

- (1) $Y_H^1 = \emptyset$.
- (2) $|Y_H^1| = 1$ (donc $|Y_H^0| = \emptyset$), $X_H^0 \neq \emptyset$ et $Z_H^0 = \emptyset$.
- (3) $|Y_H^1| > 1$, $X_H^0 = Y_H^0 = \emptyset$ et $|Z_H^0| \leq 1$.

Preuve. La condition suffisante se vérifie de façon immédiate. Pour la condition nécessaire elle utilise le Lemme 6.35. Supposons que H s'abrite dans $G_5 \setminus \{c\}$ et soit la représentation de $H \setminus \{c\}$ sur L_0, L_1 alors

1. Si la représentation n'utilise aucun point de L_1 , donc H est de la forme $K_{n-1} \oplus 1$, s'abrite dans $G_5 \setminus \{c\}$ et nous sommes dans le cas (1).

2. Si nous avons un seul point sur L_1 , alors comme H a au moins quatre sommets, nous avons nécessairement $Z_H^0 = \emptyset$, car sinon H abriterait P_4 si $|Z_H^0| = 1$ ou $2K_2$ si $|Z_H^0| > 1$ et nous sommes alors dans le cas (2) du lemme.
3. Si $|Y_H^1| > 1$ alors nécessairement $X_H^0 = \emptyset$, car sinon H abriterait C_4 et $Y_H^0 = \emptyset$ car sinon H abriterait P_4 et $|Z_H^0| \leq 1$ car sinon H abriterait $2K_2$. Nous sommes dans le cas (3) du lemme.

□

Corollaire 6.41. Soient H et H' deux sous-graphes de G_5 de même ordre $n \geq 4$ et soient $S = u_0u_1 \cdots u_{n-1}$ et $S' = u'_0u'_1 \cdots u'_{n-1}$ les suites associées respectivement. Si $c \in H \setminus H'$ (autrement dit, $u_{n-1} = 2$ et $u'_{n-1} \neq 2$) alors H et H' sont isomorphes si et seulement si nous avons l'une des situations suivantes :

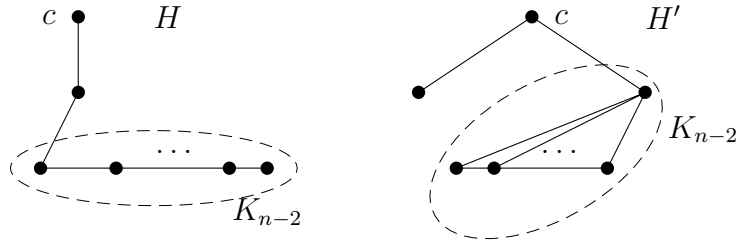
1. $S = \underbrace{00 \cdots 02}_{n-1}$ et $S' = \underbrace{100 \cdots 0}_{n-1}$.
2. $S = \underbrace{00 \cdots 012}_{n-2}$ et $S' = \underbrace{0100 \cdots 0}_{n-2}$.
3. $S = \underbrace{11 \cdots 12}_{n-1}$ et $S' = \underbrace{011 \cdots 1}_{n-1}$.
4. $S = \underbrace{11 \cdots 102}_{n-2}$ et $S' = \underbrace{1011 \cdots 1}_{n-2}$.

Preuve. La condition suffisante se vérifie facilement. Pour la condition nécessaire si H est isomorphe à H' nous avons l'un des cas (1), (2) ou (3) du Lemme 6.40 appliquées à H .

1. Dans le cas (1), $S = \underbrace{00 \cdots 02}_{n-1}$ et H est une clique avec un sommet isolé qui est aussi représenté par $\underbrace{100 \cdots 0}_{n-1}$.
2. Dans le cas (2), $S = \underbrace{00 \cdots 012}_{n-2}$ et H est une clique avec un sommet pendant qui est également représenté par $\underbrace{0100 \cdots 0}_{n-2}$.
3. Dans le cas (3), nous avons deux possibilités, ou bien $S = \underbrace{11 \cdots 12}_{n-1}$ et dans ce cas H est une étoile $S_{1,n-1}$ qui peut également être représentée par $\underbrace{011 \cdots 1}_{n-1}$, ou bien $S = \underbrace{11 \cdots 102}_{n-2}$ et dans ce cas H est une étoile $S_{1,n-2}$ avec un sommet isolé qui est aussi représenté par $\underbrace{1011 \cdots 1}_{n-2}$.

□

Remarques 6.42. (1) Les sous-graphes H et H' d'ordre $n \geq 4$ contenant c représentés par les suites $\underbrace{0100 \cdots 02}_{n-3}$ et $\underbrace{100 \cdots 012}_{n-3}$ sont isomorphes mais $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ ne le sont pas.



- (2) Les sous-graphes H et H' d'ordre $n \geq 5$ contenant c représentés par les suites $\underbrace{011 \dots 102}_{n-3}$ et $\underbrace{1011 \dots 12}_{n-3}$ sont isomorphes mais $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ ne le sont pas.



Tous les sous-graphes cités dans (1) et (2) contiennent P_4 , $2K_2$ ou C_4 et aucun des isomorphismes transformant H en H' ne laisse c invariant.

Lemme 6.43. Deux sous-graphes H et H' de même ordre $n \geq 4$ contenant le sommet c et ne s'abritant pas dans $G_5 \setminus \{c\}$ sont isomorphes avec $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ non isomorphes si et seulement si H et H' sont donnés par l'un des points (1) ou (2) de la Remarque 6.42.

Preuve. La condition suffisante est donnée par la Remarque 6.42. Pour la condition nécessaire, soient H et H' deux sous-graphes de même ordre $n \geq 4$, vérifiant les conditions du Lemme 6.43 et soit f un isomorphisme de H sur H' . Le sommet c ne peut pas être invariant par f car sinon $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ seraient isomorphes, ce qui contredirait l'hypothèse. Donc $f(c) \neq c$. Posons $c' = f(c)$. Considérons les représentations de $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ sur L_0 , L_1 . Comme H et H' ne s'abritent pas dans $G_5 \setminus \{c\}$, d'après le Lemme 6.40 nous avons $Y_H^1 \neq \emptyset$ et $Y_{H'}^1 \neq \emptyset$, c'est à dire $d_H(c) \neq 0$ et $d_{H'}(c) \neq 0$. Nous avons les cas suivants qui sont représentés sur les tables TABLE 6.2 et TABLE 6.3 :

1. Si $d_H(c) = 1$, c'est à dire $|Y_H^1| = 1$, donc $d_{H'}(c') = 1$ (les voisins de c dans H sont envoyés par f sur les voisins de c' dans H'). D'après le Lemme 6.40 on a $X_H^0 = \emptyset$ ou $Z_H^0 \neq \emptyset$, alors
 - (a) Si c' se trouve sur L_1 (donc c' et c sont reliés dans H') alors $X_{H'}^0 = \emptyset$ (car sinon on aurait $d_{H'}(c') > 1$). Nous avons alors
 - i. Si $X_H^0 = \emptyset$ donc H n'est pas connexe et H' également. Dans ce cas $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ sont isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.
 - ii. Si $X_H^0 \neq \emptyset$ alors $Z_H^0 \neq \emptyset$, nous avons forcément $|X_H^0| = 1$, car sinon, H et H' ne seraient pas isomorphes, puisque l'unique voisin x de c dans H est envoyé, par f sur c dans H' . Donc les voisins de x dans H (qui sont tous sur L_0 et forment

donc une clique dans H) sont envoyés sur les voisins de c dans H' (qui sont tous sur L_1 et forment donc un stable). Soit alors $y \neq c$ le voisin de x dans H et $y' = f(y)$ ($y \in X_H^0$ et $y' \in Y_{H'}^1$), tous les voisins de y , différents de x , sont dans Z_H^0 qui est non vide. Ceci se traduit, dans H' , par autant de points dans $Y_{H'}^0$. Ceci donne la situation (1) de la Remarque 6.42.

- (b) Si c' se trouve sur L_0 , soit x' l'unique voisin de c' dans H' (car $d_{H'}(c') = 1$), donc $x' = f(x)$ on a alors
- i. Si x' se trouve sur L_0 alors x' est placé à gauche de c' et tous ses voisins, différents de c' , sont sur L_1 et à gauche de c' (sinon ils seraient des voisins de c' qui est de degré 1). Donc x' ne peut-avoir plus d'un voisin sur L_1 car ces voisins (qui forment un stable) sont les images, par f , des voisins de x dans H qui eux se trouvent sur L_0 et forment une clique. Soit alors $y \neq c$ le voisin de x dans H et $y' = f(y)$. Comme $y' \in L_1$, donc y' est un voisin de c dans H' , ce qui donne dans H un voisin de y qui se trouve dans Z_H^0 . Dans ce cas $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ sont isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.
 - ii. Si x' se trouve sur L_1 donc c' est l'unique sommet de H' qui se trouve sur L_0 (car sinon on aurait $d_{H'}(c') > 1$). Il s'ensuit que H et H' sont d'ordre 3 et par conséquent s'abritent dans $G_5 \setminus \{c\}$, ce qui contredit l'hypothèse.
2. Si $d_H(c) = p > 1$, soit $\{x_1, \dots, x_p\}$ l'ensemble des voisins de c dans H , placés sur L_1 dans l'ordre croissant de leurs indices. Soit $\{x'_1, \dots, x'_p\}$ l'ensemble des voisins de c' dans H' avec $x'_i = f(x_i)$ pour $1 \leq i \leq p$. Alors nous avons les cas suivant :
- (a) Si $c' \in L_1$ alors forcément $p = 2$ car sinon on aurait un stable de H qui serait envoyé sur une clique de H' . Alors, si x_1 ne possède pas d'autres voisins que c , nous obtenons le cas (1) de la Remarque 6.42 et si x_1 possède un autre voisin alors H et H' sont tels que $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ sont isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.
 - (b) Si $c' \in L_0$ alors c' a, au plus, un voisin sur L_0 et il serait à droite de tous ses autres voisins sur L_1 (car les voisins de c' forment un stable).
 - i. Si c' a un voisin sur L_0 , ce sera x'_1 , alors les autres voisins $x'_2, \dots, x'_p$ sont sur L_1 (à droite de c' et à gauche de x'_1). Comme les sommets $x'_2, \dots, x'_p$ sont reliés à c dans H' , on en déduit que, dans H , $|Y_H^0| = 1$ et ce point de Y_H^0 est à gauche des sommets $x_2, \dots, x_p$ et à droite de x_1 . Il ne peut y avoir d'autres sommets. Ceci engendre la situation (2) de la Remarque 6.42.
 - ii. c' n'a pas de voisins dans L_0 (c' est donc l'unique sommet sur L_0). Comme les voisins $x'_1, x'_2, \dots, x'_p$ de c' sont reliés à c dans H' , donc, dans H , $|X_H^0| = 1$. Soit y le sommet de X_H^0 , donc $f(y) = c$. Le sommet y possède, au plus, un voisin sur L_0 .
 - Si y a un voisin z sur L_0 alors $z \in Z_H^0$ et $z' = f(z)$ se trouve sur L_1 et à gauche de c' et nous obtenons le cas (2) de la Remarque 6.42.
 - Si y n'a pas de voisin sur L_0 alors $H \setminus \{c\}$ et $H' \setminus \{c\}$ sont isomorphes ce qui contredit l'hypothèse.

□

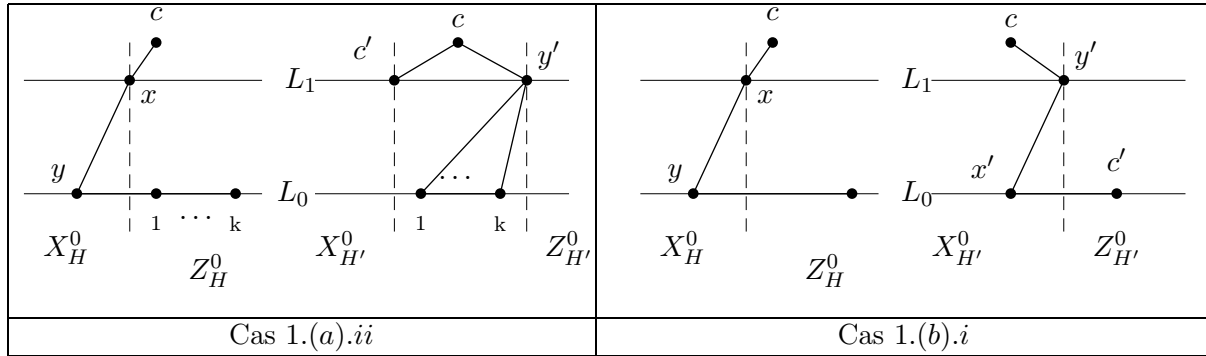


TABLE 6.2 – Les cas 1.(a).ii et 1.(b).i de la preuve du Lemme 6.43.

6.8.2 Les indécomposables de $\text{Age}(G_5)$

Comme le sous-graphe $G_5 \setminus \{c\}$ est sans P_4 , donc séries-parallèles, les indécomposables qu'il abrite sont de tailles au plus 2. Il s'ensuit que tout sous-graphe indécomposable, d'ordre supérieure à quatre, de G_5 contient le sommet c .

Soit H un sous graphe d'ordre $n \geq 4$ de G_5 et $S = u_0 u_1 \cdots u_{n-1}$ la suite qui lui est associée.

Fait 5. H est indécomposable si et seulement si $u_{n-1} = 2$ et $u_i \neq u_{i+1}$, $\forall i$, $0 \leq i \leq n-3$ pour $n \geq 4$.

Preuve. Evident car des termes successifs de même valeur dans la suite engendrent un intervalle de H . □

Il s'ensuit, d'après le Lemme 6.40, la Remarque 6.42 et le Lemme 6.43, qu'il existe un indécomposable d'ordre $n = 4$ et deux indécomposables d'ordre n pour tout $n \geq 5$. Il sont donnés dans la FIGURE 6.13. Chaque indécomposable d'ordre n s'abrite dans tout indécomposable d'ordre supérieure. Les sous-graphes indécomposables d'ordre n se trouvent au niveau $n - 1$, pour $n \geq 4$. La classe des indécomposables est donc minimale dans $\text{Ind}(\Omega_1)$ et $\text{Age}(G_5)$ est ind-minimal.

6.8.3 Profil de $\text{Age}(G_5)$

Les premières valeurs du profil sont respectivement 1, 1, 2, 4, 11, 26, 58, 122 pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Soit φ_5 la fonction profil de $\text{Age}(G_5)$. Nous avons

Lemme 6.44. *Le profil φ_5 est exponentiel et est donné par*

$$\begin{cases} \varphi_5(0) = \varphi_5(1) = 1, & \varphi_5(2) = 2, & \varphi_5(3) = 4, & \varphi_5(4) = 11; \\ \varphi_5(n) = 2^n - 6 & \text{pour } n \geq 5 \end{cases}$$

En outre $\varphi_5 \simeq 2^n$.

Cas 2.(a) pour $d(x_1) > 1$	Cas 2.(a) pour $d(x_1) = 1$
Les deux situations du cas 2.(a)	
Cas 2.(b).i	Cas 2.(b).ii
Les deux situations du cas 2.(b)	

TABLE 6.3 – Les différents sous-cas du cas 2 de la preuve du Lemme 6.43.

Preuve. Le nombre $\varphi_5(n)$ de sous-graphes d'ordre n , non isomorphes, de G_5 , s'obtient en additionnant le nombre $\varphi_{-c}(n)$ de sous-graphes d'ordre n , non isomorphes, de $G_5 \setminus \{c\}$ et le nombre $\varphi_c(n)$ de sous-graphes, non isomorphes, d'ordre n contenant c et ne s'abritant pas dans $G_5 \setminus \{c\}$. Donc

$$\varphi_5(n) = \varphi_{-c}(n) + \varphi_c(n).$$

Nous avons, d'après le Lemme 6.38,

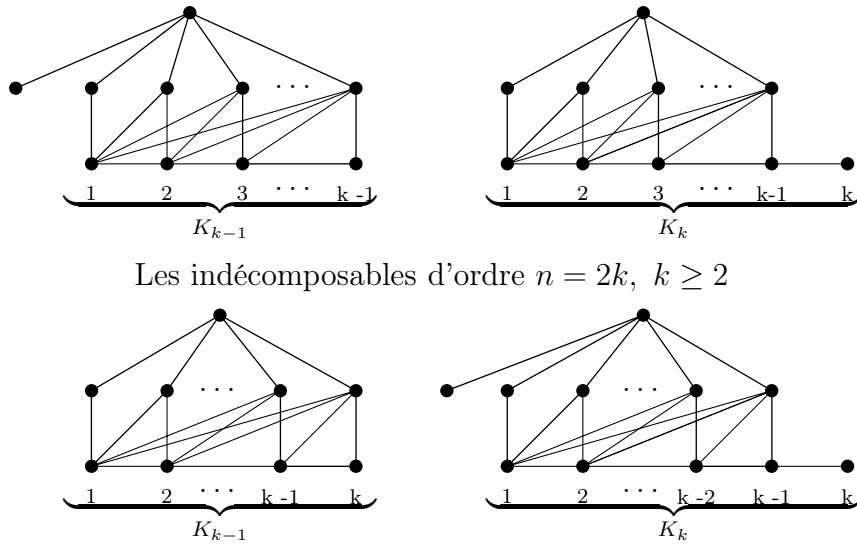
$$\varphi_{-c}(n) = 2^{n-1} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*.$$

car ceci revient à énumérer toutes les suites distinctes de $\{0, 1\}^{n-1}$.

$\varphi_c(n)$ s'obtient en énumérant tous les sous-graphes contenant c , non isomorphes (voir Lemme 6.43) qui ne vérifient pas le Lemme 6.40 ou toutes les suites de $\{0, 1\}^{n-1} \times \{2\}$, qui ne vérifient pas le Corollaire 6.41.

Les sous-graphes d'ordres $n \geq 4$ vérifiant le Lemme 6.40 sont au nombre de quatre pour tout $n \geq 4$, un pour chacun des points (1) et (2) du lemme et deux pour le point (3). Les sous-graphes d'ordre $n \geq 4$ vérifiant le Lemme 6.43 sont au nombre de un pour $n = 4$ et deux pour tout $n \geq 5$, à signaler que tous les sous-graphes d'ordres $n \leq 3$ s'abritent dans $G_5 \setminus \{c\}$. Ceci donne

$$\varphi_c(n) = 2^{n-1} - 5 = 3, \quad \text{pour } n = 4 \quad \text{et} \quad \varphi_c(n) = 2^{n-1} - 6, \quad \forall n \geq 5.$$



Les indécomposables d'ordre $n = 2k$, $k \geq 2$

Les indécomposables d'ordre $n = 2k + 1$, $k \geq 2$

FIGURE 6.13 – Les sous-graphes indécomposables de G_5 .

D'où nous déduisons la formule donnée. □

Proposition 6.45. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_5)$ est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_5}(x) = \frac{1 - 2x + x^2 + 3x^4 + x^5 + 2x^6}{(1 - x)(1 - 2x)}.$$

Preuve. S'obtient par un calcul simple. □

6.9 Le graphe G_6

Les graphes G_6 et G'_6 ont même profil, nous étudions alors un seul d'eux, ce sera le graphe G_6 .

Le graphe $G_6 := (V_6, E_6)$ est tel que $V_6 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \cup \{a, b\}$ ($a, b \notin \mathbb{N} \times \{0, 1\}$) se décompose en deux sous-ensembles, une clique $(\mathbb{N} \times \{0\}) \cup \{a\}$ et un stable $(\mathbb{N} \times \{1\}) \cup \{b\}$. Une paire de sommets $\{(i, 0), (j, 1)\}$ est une arête de G_6 si $i \leq j$, l'ensemble des arêtes E_6 compte, en plus, la paire $\{a, b\}$.

6.9.1 Représentation des sous-graphes de G_6

Observons que $G_6 \setminus \{a, b\}$ est isomorphe à $G_5 \setminus \{c\}$. Donc, ils ont le même âge. Observons également que $\text{Age}(G_6 \setminus \{a, b\}) = \text{Age}(G_6 \setminus \{a\}) = \text{Age}(G_6 \setminus \{b\}) \neq \text{Age}(G_6)$. Donc, le noyau, $\text{Ker}(G_6) = \{a, b\}$ et $\text{Age}(G_6)$ est formé des types d'isomorphie des sous-graphes de $G_6 \setminus \{a, b\}$ et des types d'isomorphie des sous-graphes de G_6 contenant les sommets a et b et ne s'abritant pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$. Il convient de signaler que tous les sous-graphes d'ordres $n \leq 3$ de G_6 s'abritent dans $G_6 \setminus \{a, b\}$.

Les sous-graphes d'ordre $n \geq 4$ de G_6 contenant les sommets a et b sont obtenus en rajoutant les sommets a et b à tous les sous-graphes d'ordre $n - 2$ de $G_6 \setminus \{a, b\}$. Ces derniers sont représentés, comme nous l'avons vu ci-dessus pour le graphe G_5 , par des suites de $\{0, 1\}^{n-2}$, avec la même remarque que pour G_5 , les suites qui diffèrent uniquement par le dernier terme donnent le même type d'isomorphie dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ mais lorsque nous rajoutons les sommets a, b , ils donnent deux types d'isomorphie différents.

Nous adopterons la même représentation par des suites de $\{0, 1\}^n$ pour les sous-graphes de $G_6 \setminus \{a, b\}$. Pour les sous-graphes contenant a, b , nous rajoutons ab à gauche du premier terme de la suite qui représente le sous-graphes sans les sommets a, b . Par exemple, si H est un sous-graphe de $G_6 \setminus \{a, b\}$ représenté par la suite $S = 00101$, le sous-graphe H' obtenu en rajoutant à H les sommets a, b aura pour suite $S' = ab00101$.

Lemme 6.46. *Un sous-graphe H d'ordre $n \geq 4$ de G_6 s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ si et seulement s'il ne contient pas un sous-graphe isomorphe à P_4 .*

Preuve. Il est facile de vérifier que P_4 ne s'abrite pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$, d'où la condition nécessaire. Pour la condition suffisante, montrons que si H ne s'abrite pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$, il contient nécessairement P_4 . Si H ne s'abrite pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$, donc H contient les sommets a, b . Nous avons forcément $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{1\}) \neq \emptyset$, $V_H \cap (\mathbb{N} \times \{0\}) \neq \emptyset$ et $i_0 = \min\{i \in \mathbb{N} / (i, 0) \in V_H\} \leq j$ pour au moins un j tel que $(j, 1) \in V_H$ car sinon, H s'abriterait dans $G_6 \setminus \{a, b\}$. Les sommets $a, b, (i_0, 0)$ et $(j, 1)$ forment un P_4 . $\square$

En considérant la représentation donnée par la FIGURE 6.12 de la page 133, nous avons

Lemme 6.47. *Un sous-graphe H d'ordre $n \geq 4$ de G_6 contenant les sommets a et b s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ si et seulement si nous avons l'une des situations suivantes :*

- (1) $Y_H^1 = \emptyset$.
- (2) $|Y_H^1| \geq 1$ et $X_H^0 = Y_H^0 = \emptyset$.

Preuve. La condition suffisante se vérifie de façon immédiate. Pour la condition nécessaire elle utilise le Lemme 6.46. Supposons que H s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ et soit la représentation de $H \setminus \{a, b\}$ sur L_0, L_1 alors

1. Si la représentation n'utilise aucun point de L_1 , alors H s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ et nous sommes dans le cas (1).
2. Si nous avons au moins un point sur L_1 , alors nous avons nécessairement $X_H^0 = Y_H^0 = \emptyset$, car sinon H abriterait P_4 .

$\square$

Lemme 6.48. *Soit H un sous-graphe, d'ordre $n \geq 4$, contenant a, b et soit $S = abu_0u_1 \cdots u_{n-3}$ la suite qui lui est associée. Le sous-graphe H s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ si et seulement si S est de la forme $ab\underbrace{1 \cdots 1}_i \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2-i}$ avec $0 \leq i \leq n - 2$.*

Preuve. Pour la condition suffisante, il suffit de remarquer que

1. Le sous-graphe (obtenu pour $i = 0$) représenté par $ab\underbrace{00 \cdots 0}_{n-2}$ est isomorphe au sous-graphe représenté par $0\underbrace{100 \cdots 0}_{n-2}$.
2. Le sous-graphe (obtenu pour $i = n - 2$) représenté par $ab\underbrace{11 \cdots 1}_{n-2}$ est isomorphe au sous-graphe représenté par $\underbrace{11 \cdots 101}_{n-2}$.
3. Le sous-graphe (obtenu pour $1 \leq i \leq n - 3$) représenté par $ab\underbrace{11 \cdots 10}_{i} \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2-i}$ est isomorphe au sous-graphe représenté par $\underbrace{11 \cdots 101}_{i} \underbrace{00 \cdots 0}_{n-2-i}$.

Pour la condition nécessaire, si H s'abrite dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ alors nous avons l'une des conditions du Lemme 6.47.

1. Si c'est la condition (1) qui est vérifiée, alors $S = ab\underbrace{0 \cdots 0}_{n-2}$ qui est de la forme donnée pour $i = 0$.
2. Si c'est la condition (2) qui est vérifiée, alors $S = ab\underbrace{1 \cdots 10}_{i} \cdots \underbrace{0 \cdots 0}_{n-2-i}$, où $i = |Y_H^1|$.

□

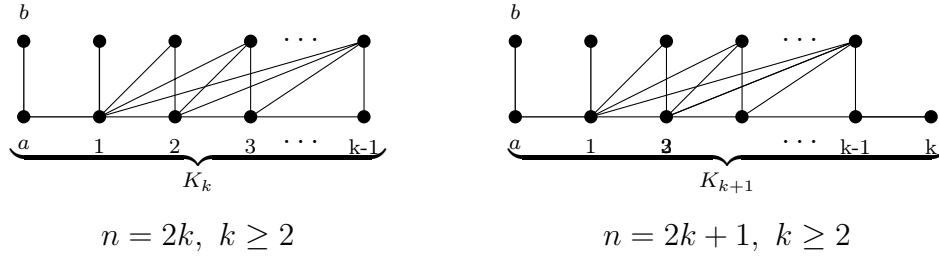
Lemme 6.49. Soient H et H' deux sous-graphes de même ordre $n \geq 4$ contenant les sommets a, b et ne s'abritant pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$ et soient $S = abu_0 \cdots u_{n-3}$ et $S' = abu'_0 \cdots u'_{n-3}$ les suites qui les représentent respectivement. Alors

$$H \text{ et } H' \text{ sont isomorphes} \Leftrightarrow S = S'.$$

Preuve. La condition suffisante est évidente. Pour la condition nécessaire, supposons H et H' isomorphes. Comme ils ne s'abritent pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$, les suites S et S' n'ont pas la forme donnée par le Lemme 6.48 et tout isomorphisme qui envoie H sur H' laisse invariant les sommets a et b . Donc $H \setminus \{a, b\}$ et $H' \setminus \{a, b\}$ sont isomorphes. Comme $G_6 \setminus \{a, b\}$ et $G_5 \setminus \{c\}$ sont isomorphes, d'après le Lemme 6.38, nous avons $u_0 \cdots u_{n-4} = u'_0 \cdots u'_{n-4}$. Si $u_{n-3} \neq u'_{n-3}$, H et H' ne sont pas isomorphes comme signalé ci-dessus (le sous-graphe pour lequel le dernier terme de la suite est 0 abrite une clique de taille supérieure à celle abritée par l'autre sous-graphe). Donc $u_{n-3} = u'_{n-3}$ et par suite $S = S'$. □

6.9.2 Les indécomposables de $\text{Age}(G_6)$

Comme pour le graphe G_5 , tous les sous-graphes indécomposables de G_6 d'ordre $n \geq 4$ contiennent les sommets a, b . Ce sont donc tous les sous-graphes représentés par des suites $S = abu_0 \cdots u_{n-3}$ avec $u_0 = 0$ et $u_i \neq u_{i+1}$ pour tout i , $0 \leq i \leq n - 4$. Il s'ensuit donc qu'il existe un indécomposable d'ordre n pour tout $n \geq 4$. Il sont donnés dans la FIGURE 6.14. L'indécomposable d'ordre n s'abrite dans tout indécomposable de taille supérieure. Les sous-graphes indécomposables forment une chaîne. Le sous-graphe indécomposable d'ordre n se trouve au niveau n pour $n \leq 2$ et au niveau $n - 1$, pour $n \geq 4$. La classe des indécomposables est minimale dans $\text{Ind}(\Omega_1)$ et $\text{Age}(G_6)$ est ind-minimal.

FIGURE 6.14 – Les sous-graphes indécomposables de G_6 .

6.9.3 Profil de $\text{Age}(G_6)$

Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont respectivement 1, 1, 2, 4, 9, 20, 43. Posons φ_6 la fonction profil de $\text{Age}(G_6)$. Nous avons

Lemme 6.50. *Le profil φ_6 est exponentiel, il est donné par :*

$$\begin{cases} \varphi_6(0) = \varphi_6(1) = 1; \\ \varphi_6(n) = 2^{n-1} + 2^{n-2} - n + 1 \quad \text{pour } n \geq 2 \end{cases}$$

En outre, $\varphi_6 \simeq 3 \cdot 2^{n-2}$.

Preuve. Nous avons $\varphi_6(n) = \varphi_{-\{a,b\}}(n) + \varphi_{a,b}(n)$ pour tout $n \geq 1$, où $\varphi_{-\{a,b\}}(n)$ représente le nombre de types d'isomorphie de sous-graphes d'ordre n de $G_6 \setminus \{a, b\}$ et $\varphi_{a,b}(n)$ le nombre de types d'isomorphie de sous-graphes d'ordre n de G_6 contenant les sommets a et b et ne s'abritant pas dans $G_6 \setminus \{a, b\}$, donc $\varphi_{a,b}(n) = 0$ pour $n \leq 3$.

Comme $G_6 \setminus \{a, b\}$ est isomorphe à $G_5 \setminus \{c\}$ nous avons $\varphi_{-\{a,b\}}(n) = 2^{n-1}$ pour tout $n \geq 1$. D'après les Lemmes 6.48 et 6.49 nous avons $\varphi_{a,b}(n) = 2^{n-2} - (n-1)$ pour tout $n \geq 4$. En faisant la somme nous obtenons le résultat donné. $\square$

Proposition 6.51. *La fonction génératrice de $\text{Age}(G_6)$ est rationnelle et est donnée par :*

$$F_{G_6}(x) = \frac{1 - 3x + 3x^2 - x^3 + x^4}{(1 - 2x)(1 - x)^2}.$$

Preuve. S'obtient par un calcul simple. $\square$

Troisième partie

Décomposition monomorphe et profil

Introduction

Nous nous intéressons dans cette partie au phénomène du saut dans le comportement des profils des classes héréditaires, phénomène mis en évidence par *Pouzet* (voir [81]) il y a de cela plus d'une trentaine d'années. Durant les dix dernières années, de nombreux articles ont été consacrés à l'étude du profil des classes héréditaires de structures combinatoires telles que les graphes (dirigés ou non), les graphes ordonnés, les hypergraphes, les ensembles ordonnés, les tournois, les permutations, . . . Tous les résultats de ces études montrent qu'il existe des sauts dans le comportement des profils des classes héréditaires formées par ces structures. Typiquement, le profil est soit polynomial ou croît plus vite que tout polynôme et pour certaines classes de structures, il est au moins exponentiel comme dans le cas des tournois ([16, 25]), des graphes ordonnés et hypergraphes ordonnés ([13, 61]) et des permutations (voir Théorème 2.1, [56]) ou a au moins la croissance de la fonction partition d'entier comme dans le cas des graphes ([17]) ; pour plus de détails voir [60].

Dans le chapitre 7, nous considérons des classes héréditaires de structures relationnelles ordonnées. Nous décrivons les classes dont le profil est borné par un polynôme et montrons que ce profil est en fait un polynôme. Nous identifions celles dont le profil n'est pas borné par un polynôme et qui sont minimales pour l'inclusion.

Au chapitre 8, nous étudions de manière plus détaillée le cas binaire. Nous montrons que le profil d'une structure binaire ordonnée de type k (ie, comportant outre la relation d'ordre k autres relations binaires) est soit polynomial soit borné par une exponentielle. Pour ce faire, nous décrivons, dans le cas des graphes dirigés ordonnés, tous les graphes dont les âges sont minimaux parmi ceux des structures sans décomposition monomorphe finie. Ces graphes sont au nombre de mille deux cent quarante six. Les outils utilisés sont le théorème de *Ramsey*, donné en termes de structures invariantes, la notion de décomposition monomorphe d'une structure relationnelle introduite par *Pouzet-Thiéry* [92] qui étend la notion de monomorphie due à *Fraïssé* [41] et la notion de presque multi-enchaînabilité due à *Pouzet* (voir [85]).

Chapitre 7

Structures sans décomposition monomorphe finie. Application au profil des classes héréditaires

7.1 Enchaînabilité et monomorphie

7.1.1 Définitions et rappel de résultats

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle. Nous rappelons qu'un *automorphisme local* de $\mathcal{R}$ est un isomorphisme entre deux restrictions de $\mathcal{R}$.

Définition 7.1. Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle et $\mathcal{S}$ une autre structure relationnelle ayant le même domaine que $\mathcal{R}$. La structure $\mathcal{R}$ est dite *libre interprétable en $\mathcal{S}$* , on dit aussi que $\mathcal{S}$ interprète librement $\mathcal{R}$, si tout automorphisme local de $\mathcal{S}$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$.

Si $\mathcal{S}$ est une chaîne, $\mathcal{R}$ est dite *enchaînée* par $\mathcal{S}$ ou que $\mathcal{S}$ *enchaîne* $\mathcal{R}$. La structure $\mathcal{R}$ est dite *enchaînable* s'il existe une chaîne C sur la base de $\mathcal{R}$ qui enchaîne $\mathcal{R}$.

Exemples. Si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont deux chaînes, alors $\mathcal{S}$ enchaîne $\mathcal{R}$ si et seulement si $\mathcal{R}$ coïncide avec $\mathcal{S}$ ou avec sa chaîne duale.

Si G est un graphe non dirigé, alors G est enchaînable si et seulement si G est un graphe complet ou un graphe vide (ie, sans arête).

Si $\mathcal{R}$ est une structure binaire, alors $\mathcal{R}$ est enchaînée par $\mathcal{S}$ si, pour tout $i \in I : (x, y) \in \rho_i \Leftrightarrow (x', y') \in \rho_i$ pour tout x, y, x', y' tels que : $(x, y) \in \mathcal{S} \Leftrightarrow (x', y') \in \mathcal{S}$.

Voici quelques exemples pour des structures d'arité supérieure à deux.

Soit $C := (E \leq)$ une chaîne alors C enchaîne la relation "*entre*", l'"ordre circulaire" associés à C et la relation "*entre*" associée à l'ordre circulaire et définie sur les quadruplets de E . Ces trois relations sont :

- La relation "*entre*" associée à C est la relation ternaire $B_C := (E, b_C)$ où b_C est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) tels que ou bien $x_1 < x_2 < x_3$ ou bien $x_3 < x_2 < x_1$.

- L'ordre circulaire associé à C ou la relation ternaire cyclique est la relation ternaire $T_C := (E, t_C)$ où t_C est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) tels que $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(3)}$ pour une permutation circulaire σ de $\{1, 2, 3\}$.
- La relation "entre" associée à l'ordre circulaire est la relation quaternaire (d'arité quatre) $D_C := (E, d_C)$ où d_C est l'ensemble des quadruplets (x_1, x_2, x_3, x_4) tels que ou bien $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(3)} < x_{\sigma(4)}$ ou bien $x_{\sigma(4)} < x_{\sigma(3)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(1)}$ pour une permutation circulaire σ de $\{1, 2, 3, 4\}$.

Soit n un entier positif, une structure relationnelle $\mathcal{R}$ est dite n -monomorphe si les restrictions de $\mathcal{R}$ à deux n -ensembles quelconques sont isomorphes. Il est à signaler que toute relation est 0-monomorphe, toute relation définie sur un n -ensemble est n -monomorphe, toute relation binaire réflexive est 1-monomorphe et tout tournoi est 2-monomorphe.

Une structure relationnelle $\mathcal{R}$ est dite $(\leq n)$ -monomorphe si elle est p -monomorphe pour tout $p \leq n$. La structure relationnelle $\mathcal{R}$ est dite *monomorphe* si elle est n -monomorphe pour tout entier n . Il est à signaler qu'une structure relationnelle de base E est monomorphe dès qu'elle est n -monomorphe pour tout entier $n \leq |E|$.

Si $\mathcal{R}$ est n -monomorphe alors toute restriction de $\mathcal{R}$ est n -monomorphe. Il en est de même si $\mathcal{R}$ est $(\leq n)$ -monomorphe ou monomorphe.

Une caractérisation simple de la n -monomorphie est donnée par ce résultat dû à Fraïssé.

Lemme 7.2. [41].

Une structure relationnelle $\mathcal{R}$ est n -monomorphe si et seulement si chaque restriction de $\mathcal{R}$ à un $(n+1)$ -ensemble est n -monomorphe.

Nous rappelons également le résultat suivant dû à Pouzet qui fait le lien entre les n -monomorphies.

Lemme 7.3. [41, 80].

Toute structure relationnelle $\mathcal{R}$ qui est n -monomorphe et définie sur un $(n+p)$ -ensemble est r -monomorphe pour tout $r \leq \min(n, p)$. En particulier, si la base de $\mathcal{R}$ est infinie ou de cardinalité au moins $2n-1$, alors $\mathcal{R}$ est n -monomorphe si et seulement si $\mathcal{R}$ est $(\leq n)$ -monomorphe.

Comme exemple de relation monomorphe, une chaîne, puisque deux chaînes finies de même cardinalité sont isomorphes. Plus généralement une relation enchaînable est monomorphe. La réciproque n'est pas vraie; en effet, il existe des relations monomorphes non enchaînables, comme par exemple la relation binaire qui est un cycle à trois éléments. Fraïssé (1954) a montré que la réciproque est vraie pour une structure infinie :

Théorème 7.4. (voir [41, 85]).

Une structure relationnelle de base infinie est monomorphe si et seulement si elle est enchaînable.

Suivant les traces de Fraïssé, Frasnay (1965) [46] s'est intéressé au cas d'une structure de base finie et a montré :

Théorème 7.5. [46]

Pour tout entier $m \geq 1$ il existe un entier p tel que toute structure relationnelle p -monomorphe dont le maximum de l'arité est au plus m et le domaine de cardinalité finie assez grande est enchaînable.

Le plus petit entier p dans l'énoncé ci-dessus est le *seuil de monomorphie m -aires*, noté $p(m)$. Ses valeurs ont été données par C. Franay en 1990 [48].

Théorème 7.6. $p(1) = 1$, $p(2) = 3$, $p(m) = 2m - 2$ pour $m \geq 3$.

Pour un exposé détaillé de ce résultat (voir Fraïssé [41], chapitre 13, particulièrement p 378).

Une conséquence du Théorème 7.4 est la suivante :

Théorème 7.7. [46]

Toute structure relationnelle enchaînable infinie et d'arité finie n'a qu'un nombre fini de bornes.

En effet, si m est le maximum de l'arité de la structure $\mathcal{R}$, le maximum de la cardinalité des bornes est au plus le seuil de monomorphie m -aires (voir Franay 1973 [47], Pouzet 1981 [83]).

7.1.2 Généralisations

Les notions d'enchaînabilité et de monomorphie ont été généralisées comme suit ([85, 92]).

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E et soit F un sous-ensemble de E . Nous disons que $\mathcal{R}$ est *F -enchaînable* s'il existe une chaîne C sur $E \setminus F$ telle que tout isomorphisme local de C étendu par l'identité sur F est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$; nous disons que $\mathcal{R}$ est *F -monomorphe* si pour tout entier n et toute paire de n -parties A et A' de $E \setminus F$, il existe un isomorphisme de $\mathcal{R}|_A$ sur $\mathcal{R}|_{A'}$, qui, étendu par l'identité sur F , est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$. Nous disons que $\mathcal{R}$ est *presque-enchaînable*, respectivement *presque-monomorphe*, s'il existe un ensemble fini F pour lequel $\mathcal{R}$ est F -enchaînable, respectivement F -monomorphe. Les résultats mentionnés ci-dessus s'étendent à ces notions (voir [41, 85]).

7.1.3 Cas binaire

1 - Toute relation unaire 1-monomorphe est constante. De manière plus générale, toute relation unaire n -monomorphe définie sur au moins $n + 1$ éléments est constante donc enchaînable [46].

2 - Soit ρ une relation binaire de base E , alors

a) - ρ est 1-monomorphe si et seulement si ρ est soit réflexive soit irreflexive.

b) - Si ρ est 2-monomorphe et $|E| \geq 3$ alors elle est 1-monomorphe et soit symétrique soit anti-symétrique. Le cas réflexif donne quatre types de relations : la relation complète réflexive, la relation d'égalité et une relation total (asymétrique) réflexive, qui peut-être transitive (ordre

total) ou non. Le cas irréflexif donne quatre autres types de relations qui sont : la relation complète irréflexive, la relation vide et un tournoi qui est transitif (un ordre strict) ou intransitif.

c) - Le résultat suivant, dû à Frasnay ([46]), établit une relation entre la monomorphie et l'enchaînabilité pour une relation binaire.

Lemme 7.8. *Si ρ est une relation binaire, (≤ 3) -monomorphe définie sur un ensemble d'au moins quatre éléments alors ρ est enchaînable.*

Preuve. Soit ρ une relation binaire (≤ 3) -monomorphe sur un ensemble E ayant au moins quatre éléments. ρ étant 1-monomorphe nous pouvons la supposer réflexive d'après 2 - a). La 2-monomorphie et le fait que $|E| \geq 4$ impliquent alors, d'après 2 - b), que ρ est l'une des relations suivantes :

- (i) la relation complète réflexive ($\rho = \mathcal{P}(E)$),
- (ii) la relation d'égalité ($\rho = \Delta_E$),
- (iii) la relation totale (asymétrique) réflexive qui est soit transitive, soit non transitive.

Dans les deux premiers cas, ρ est enchaînable. Dans le cas (iii), si ρ est transitive, c'est un ordre total, elle est donc enchaînable. Si ρ n'est pas transitive, la 3-monomorphie fait que, pour toute partie $X = \{a, b, c\}$ de E , la restriction de ρ à X contient un cycle de longueur trois, disons que ρ est de la forme

$$\{(a, a), (b, b), (c, c), (a, b), (b, c), (c, a)\}.$$

Comme $|E| \geq 4$ on obtient une contradiction avec le fait que ρ est asymétrique ; en effet, $\rho|_{\{a,b,d\}}$ contient le couple (b, d) et $\rho|_{\{b,c,d\}}$ contient le couple (d, b) . Donc ρ ne peut pas avoir cette forme. Il s'ensuit que ρ est enchaînable. $\square$

Dans le Lemme 7.11 ci-dessous, nous étendons le Lemme 7.8 à une structure relationnelle ordonnée d'arité finie.

Signalons que la seule relation (≤ 3) -monomorphe non enchaînable est le cycle à trois éléments (réflexif ou pas) et qu'une relation binaire peut-être (≤ 2) -monomorphe de base infinie mais non enchaînable (un tournoi possédant un cycle de longueur trois).

3 - Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ;

a) - Si ρ_i est binaire pour tout $i \in I$, alors $\mathcal{R}$ est 1-monomorphe si et seulement si pour tout $i \in I$, la relation ρ_i est soit réflexive ($\rho_i(x, x) = 1$ pour tout $x \in E$) soit irréflexive ($\rho_i(x, x) = 0$ pour tout $x \in E$).

Si nous étendons la notion de réflexivité à une relation d'arité quelconque en disant qu'une relation ρ d'arité n est réflexive (respectivement irréflexive) si $\rho(x, \dots, x) = 1$ (respectivement $\rho(x, \dots, x) = 0$) pour tout n -uplet $(x, \dots, x) \in E^n$, alors $\mathcal{R}$ est 1-monomorphe si et seulement si pour tout $i \in I$, la relation ρ_i est soit réflexive soit irréflexive.

b) - Si $\mathcal{R}$ est 2-monomorphe alors (E, ρ_i) est 2-monomorphe pour tout $i \in I$. La réciproque n'est pas vraie, en effet, considérons la structure binaire $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \rho_2)$ avec $E = \{x, y, z\}$, $\rho_1 = \{(x, y), (y, z), (x, z)\}$ et $\rho_2 = \{(x, y), (y, z), (z, x)\}$. Les relations (E, ρ_1) et (E, ρ_2) sont 2-monomorphes mais $\mathcal{R}$ n'est pas 2-monomorphe car ses restrictions aux ensembles $\{x, y\}$ et $\{x, z\}$ ne sont pas isomorphes.

c) - Le Lemme 7.8 se généralise naturellement au cas d'une structure binaire. En effet, si $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ est une structure binaire vérifiant les hypothèses du Lemme 7.8, alors (E, ρ_i) est (≤ 3) -monomorphe pour tout $i \in I$. Donc, pour tout $i \in I$, si la relation ρ_i est réflexive, elle est donnée par l'une des trois relations citées dans la preuve du Lemme 7.8 (relation complète réflexive, relation d'égalité ou ordre total). Si ρ_i est irréflexive, elle est donnée par l'une des trois relations obtenues à partir des précédentes en supprimant tous les couples de la forme (a, a) pour $a \in E$ (ie, c'est une relation complète irréflexive, une relation vide ou un tournoi transitif). Si chacune des relations ρ_i est une relation complète réflexive ou irréflexive, une relation d'égalité ou une relation vide alors $\mathcal{R}$ est naturellement enchaînable (elle est enchaînée par toute chaîne de base E). Si au moins une des relations ρ_i est soit un ordre total soit un tournoi transitif (ie, un ordre strict transitif), alors la 2-monomorphie de $\mathcal{R}$ implique que deux telles relations coïncident ou sont opposées sur toute paire de sommets distincts de E . Il s'ensuit que $\mathcal{R}$ est enchaînable.

7.1.4 Cas des structures relationnelles ordonnées

Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure relationnelle ordonnée avec $|E| \geq 2$. Alors

Lemme 7.9. *Pour tout entier p positif, $\mathcal{R}$ est p -monomorphe si et seulement si toutes les relations $\mathcal{R}_i := (E, \leq, \rho_i)$ pour $i \in \{1, \dots, k\}$ sont p -monomorphes.*

Preuve. Les structures étant ordonnées, si deux restrictions d'une relation sont isomorphes l'isomorphisme est unique. $\square$

Si $\mathcal{R}$ est binaire et (≤ 2) -monomorphe alors pour $i \in \{1, \dots, k\}$, la restriction de $\mathcal{R}_i := (E, \leq, \rho_i)$ à un ensemble à deux éléments $\{x, y\}$ a l'une des formes données dans la TABLE 7.1.

$\leq$ ρ	$\leq$ ρ	$\leq$ ρ	$\leq$ ρ
$\leq$ ρ	$\leq$ ρ	$\leq$ ρ	$\leq$ ρ

TABLE 7.1 – Relations binaires (≤ 2) -monomorphe à deux éléments.

D'après le Lemme 7.9 et la liste des relations binaires (≤ 2) -monomorphe à deux éléments (TABLE 7.1), nous avons

Lemme 7.10. *Une structure binaire ordonnée $\mathcal{R}$ de type k (formée d'un ordre total et de k relations binaires) est (≤ 2) -monomorphe si et seulement si chaque relation ρ_i , $i \in \{1, \dots, k\}$*

est soit la relation complète réflexive ($\rho_i = E \times E$) ou irréflexive ($\rho_i = (E \times E) \setminus \Delta_E$), soit la relation d'égalité ($\rho_i = \Delta_E$), soit un ordre total qui coïncide avec $\leq$ ou son dual, soit la relation vide ($\rho_i = \emptyset$) soit un tournoi transitif qui coïncide avec l'ordre strict ($<$) ou son dual.

Ainsi nous avons exactement 8^k structures binaires ordonnées de type k qui sont (≤ 2) -monomorphes.

Le lemme suivant étend le Lemme 7.8 au cas d'une structure relationnelle ordonnée.

Lemme 7.11. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure ordonnée et soit m le maximum de l'arité des relations $(\rho_i)_{i \in I}$, posons $C := (E, \leq)$ alors $\mathcal{R}$ est enchaînée par C si et seulement si $\mathcal{R}$ est $(\leq m)$ -monomorphe.*

Preuve. Toute structure relationnelle enchaînable étant monomorphe (Théorème 7.4), il suffit de prouver que la $(\leq m)$ -monomorphie entraîne l'enchaînabilité. Soit donc f un automorphisme local de C . Notons A et A' son domaine et son codomaine. Pour montrer que f est un automorphisme local de $\mathcal{R}$ il suffit de montrer que chaque restriction de f à une partie X de cardinalité au plus m est un automorphisme local de $\mathcal{R}$. Soit X une telle partie. Comme $\mathcal{R}$ est $(\leq m)$ -monomorphe, les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_X}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{f(X)}}$ sont isomorphes. Un tel isomorphisme, disons φ , est un isomorphisme de $C_{\upharpoonright_X}$ sur $C_{\upharpoonright_{f(X)}}$. Comme C est une chaîne, cet isomorphisme est unique, donc $f_{\upharpoonright_X} = \varphi$. Ainsi f est un isomorphisme de $\mathcal{R}_{\upharpoonright_X}$ sur $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{f(X)}}$. $\square$

Les Lemmes 7.3 et 7.11 entraînent immédiatement pour les structures binaires ordonnées :

Corollaire 7.12. *Si toutes les relations ρ_i , $i \in I$, sont binaires, alors $\mathcal{R}$ est enchaînée par C si et seulement si $\mathcal{R}$ est 2-monomorphe.*

7.2 Décompositions d'une structure relationnelle en parties monomorphes

Dans cette section, nous considérons des décompositions d'une structure relationnelle en parties monomorphes assujetties à certaines conditions. Pour chaque condition, il y a une décomposition qui est canonique en ce sens que toute autre décomposition satisfaisant la même condition est plus fine. Ces décompositions canoniques ne sont pas toutes identiques, mais elles ne diffèrent que par les blocs finis.

7.2.1 Décomposition fortement monomorphe

Cette définition vient naturellement de la généralisation de la notion de monomorphie donnée dans le paragraphe 7.1.2.

Définition 7.13. *Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Un sous-ensemble B de E est un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$ si $\mathcal{R}$ est $E \setminus B$ -monomorphe. Autrement dit, pour tout entier n et pour toutes n -parties A et A' de B , il existe un isomorphisme de $\mathcal{R}_{\upharpoonright_A}$ sur $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{A'}}$ qui, étendu par l'identité sur $E \setminus B$, est un automorphisme local de $\mathcal{R}$.*

L'ensemble vide et les singletons de E sont des blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$.

Lemme 7.14. *L'union de deux blocs fortement monomorphes d'intersection non vide de $\mathcal{R}$ est un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$.*

Preuve. Soient X et Y deux blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ avec $X \cap Y$ non vide. Montrons d'abord que si A et A' sont deux parties finies de même cardinalité de $X \cup Y$ telles que leur différence symétrique soit de cardinalité 2 alors il existe un isomorphisme envoyant A sur A' qui, prolongé par l'identité sur $E \setminus (X \cup Y)$ est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$.

Soient $\{x, x'\}$ les deux éléments de la différence symétrique. Ainsi pour $C := A \cap A'$ nous pouvons supposer $A = \{x\} \cup C$ et $A' = \{x'\} \cup C$.

Cas 1) : Supposons que x, x' soient tous les deux dans X ou tous les deux dans Y . Supposons $x, x' \in X$. Comme $\mathcal{R}$ est $E \setminus X$ -monomorphe et $|A \cap X| = |A' \cap X|$ alors les restrictions de $\mathcal{R}$ à A et A' sont isomorphes via l'identité sur $E \setminus X$.

Cas 2) : Supposons que x soit dans $X \setminus Y$ et x' dans $Y \setminus X$. Nous avons alors deux cas.

Cas 2.1 : $X \cap Y \not\subseteq C$. Soit $z \in X \cap Y \setminus C$. Alors les restrictions de $\mathcal{R}$ à A' et $C \cup \{z\}$ sont isomorphes via l'identité sur $E \setminus Y$. En remplaçant A' par $C \cup \{z\}$, nous sommes dans le cas 1.

Cas 2.2 : Si $X \cap Y \subseteq C$. Soit alors $z \in X \cap Y$. Les restrictions de $\mathcal{R}$ à $C \setminus \{z\} \cup \{x, x'\}$ et $C \cup \{x'\}$ sont isomorphes via l'identité sur $E \setminus X$; de même les restrictions de $\mathcal{R}$ à $C \setminus \{z\} \cup \{x, x'\}$ et $C \cup \{x\}$ sont isomorphes via l'identité sur $E \setminus Y$. En composant ces deux isomorphismes nous obtenons un isomorphisme entre les restrictions de $\mathcal{R}$ à A et A' qui prolongé par l'identité sur $E \setminus (X \cup Y)$ est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$.

Soient maintenant deux parties A et A' , de même cardinalité, de $X \cup Y$. Posons $K = A \setminus A'$ et $K' = A' \setminus A$. Si $|K| = 0$, il n'y a rien à montrer. Si $|K| = 1$, la preuve est donnée ci-dessus. Supposons $|K| = k > 1$. Nous pouvons trouver une suite de $k + 1$ sous-ensembles de $X \cup Y$, disons $A_0, \dots, A_i, \dots, A_k$ tels que $A_0 = A$, $A_k = A'$ et la différence symétrique de A_i et A_{i+1} est de cardinalité 2 (A_{i+1} est obtenu en enlevant à A_i un élément de $A_i \cap K$ et en le remplaçant par un élément de $K' \setminus A_i$). D'après ce qui précède, il existe, pour tout $i < k$, un isomorphisme envoyant A_i sur A_{i+1} qui, prolongé par l'identité sur $E \setminus (X \cup Y)$ est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$. Ceci induit un isomorphisme local de $\mathcal{R}$ qui envoie A sur A' et qui coïncide avec l'identité sur $E \setminus (X \cup Y)$. $\square$

Il s'ensuit que l'union d'une chaîne croissante de blocs fortement monomorphes est un bloc fortement monomorphe.

Un bloc fortement monomorphe maximal pour l'inclusion est une *composante fortement monomorphe* de $\mathcal{R}$.

Définition 7.15. *Une décomposition fortement monomorphe de $\mathcal{R}$ est une partition $\mathcal{P}$ de E en blocs fortement monomorphes.*

Proposition 7.16. *Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Tout bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$ est contenu dans une composante fortement monomorphe. Les composantes fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ forment une décomposition fortement monomorphe de $\mathcal{R}$ dont toute autre décomposition fortement monomorphe est plus fine.*

Preuve. Soit un élément $a \in E$. Comme $\{a\}$ est un bloc fortement monomorphe alors, d'après le Lemme 7.14, l'union $P(a)$ de tous les blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ contenant a est un bloc fortement monomorphe. De plus, tout bloc fortement monomorphe maximal pour l'inclusion est de la forme $P(a)$.

Par ailleurs, deux composantes fortement monomorphes $P(a)$ et $P(b)$ sont soit égales soit disjointes, donc l'ensemble $\{P(a)\}_{a \in E}$ forme une partition de E en composantes fortement monomorphes et si P' est une autre partition de E en parties fortement monomorphes alors chaque élément de P' est contenu dans une composante fortement monomorphe. $\square$

La décomposition en composantes fortement monomorphes est dite *décomposition fortement monomorphe canonique*.

Remarquons que l'intersection de blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ n'est pas un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$. Voici un contre-exemple :

Considérons la chaîne $(E, \leq)$ où $E = \{a, b, c, d\}$ et $a < b < c < d$. Soit $\mathcal{R} = (E, \rho)$ où ρ est l'ensemble des triplets (x_1, x_2, x_3) d'éléments de E tels que $x_1 < x_2 < x_3$ ou $x_{\sigma(1)} < x_{\sigma(2)} < x_{\sigma(3)}$ pour une permutation circulaire σ de $\{1, 2, 3\}$. Pour tout élément $x \in E$, l'ensemble $E \setminus \{x\}$ est un bloc fortement monomorphe ; en effet, on peut définir un ordre total sur $E \setminus \{x\}$ en posant, pour tout $u, v \in E \setminus \{x\}$, $u \leq' v$ si $(x, u, v) \in \rho$. Tout isomorphisme local de cet ordre est un isomorphisme local de $\mathcal{R}_{|E \setminus \{x\}}$ et il le reste une fois prolongé par l'identité sur $\{x\}$.

Considérons les deux blocs fortement monomorphes $E \setminus \{a\}$ et $E \setminus \{c\}$, leur intersection est l'ensemble $\{b, d\}$ qui n'est pas un bloc fortement monomorphe ; en effet, il n'existe aucun isomorphisme local de $\mathcal{R}$ qui envoie b sur d et qui fixe a et c .

Notons par $\dim_{fort}(\mathcal{R})$ le nombre de composantes fortement monomorphe de la décomposition fortement monomorphe canonique de $\mathcal{R}$, si cette décomposition n'est pas finie, nous écrivons $\dim_{fort}(\mathcal{R}) = \infty$.

7.2.2 Décomposition monomorphe

Définition 7.17. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Un sous-ensemble B de E est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$ si pour tout entier n et pour toutes n -parties A et A' de E , les structures induites sur A et A' sont isomorphes dès que $A \setminus B = A' \setminus B$.

Cette notion a été introduite par Pouzet et Thiéry [90, 92].

Le lemme suivant réunit les propriétés les plus importantes des blocs monomorphes (voir [25]).

Lemme 7.18. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E .

- (i) L'ensemble vide et les singletons de E sont des blocs monomorphes de $\mathcal{R}$.
- (ii) Si B est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$ alors tout sous-ensemble de B l'est aussi.
- (iii) Si B et B' sont deux blocs monomorphes de $\mathcal{R}$ tels que $B \cap B' \neq \emptyset$ alors $B \cup B'$ est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$.

- (iv) Soit $\mathcal{B}$ une famille de blocs monomorphes de $\mathcal{R}$; si $\mathcal{B}$ est filtrante alors l'union $\mathcal{B} := \bigcup_{B_i \in \mathcal{B}} B_i$ est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$.

Un bloc monomorphe maximal pour l'inclusion est une *composante monomorphe* de $\mathcal{R}$.

Définition 7.19. Une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}$ est une partition $\mathcal{P}$ de E en blocs monomorphes. De manière équivalente, c'est une partition $\mathcal{P}$ de E en parties telles que pour tout entier n , les structures induites sur deux n -parties A et A' de E sont isomorphes dès que $|A \cap B| = |A' \cap B|$ pour tout $B \in \mathcal{P}$.

Nous rappelons les résultats suivants dus à Pouzet et Thiéry :

Proposition 7.20. (voir [92])

Les composantes monomorphes de $\mathcal{R}$ forment une décomposition monomorphe qui est la moins fine de toutes les décompositions monomorphes de $\mathcal{R}$.

Cette décomposition monomorphe est dite *minimale* ou *canonique*, elle est désignée par $\mathcal{P}(\mathcal{R})$. Nous notons par $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R})$ le nombre de blocs monomorphes de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$, si $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ n'est pas finie, nous écrivons $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) = \infty$. Si $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) < \infty$ nous désignons par $\dim_{\text{mon}}^{\infty}(\mathcal{R})$ le nombre de composantes monomorphes infinies, c'est à dire le nombre de blocs infinis de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$.

Théorème 7.21. (voir [85, 92])

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E et A une partie de E . Considérons les assertions suivantes :

- (i) $\mathcal{R}$ est $E \setminus A$ -enchaînable ;
- (ii) A est un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$;
- (iii) A est un blocs monomorphe de $\mathcal{R}$.

Alors (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii). Si A est infinie alors (ii) $\Rightarrow$ (i). Si A est une composante monomorphe infinie de $\mathcal{R}$ alors (iii) $\Rightarrow$ (ii).

Pour la preuve de ce Théorème voir la preuve du Théorème 2.25 de [92].

Comme conséquence nous avons :

Proposition 7.22. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle. Toute décomposition fortement monomorphe de $\mathcal{R}$ est une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}$. La réciproque n'est pas vraie. En outre, nous avons $\dim_{\text{fort}}(\mathcal{R}) < \infty$ si et seulement si $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) < \infty$. De plus, le nombre de composantes fortement monomorphes infinies de $\mathcal{R}$ est égal à $\dim_{\text{mon}}^{\infty}(\mathcal{R})$.

Preuve. Le fait qu'une décomposition fortement monomorphe soit une décomposition monomorphe vient de l'implication (ii) $\Rightarrow$ (iii) du Théorème 7.21. La réciproque n'est pas vraie car un bloc monomorphe n'est pas nécessairement un bloc fortement monomorphe, par exemple si $\mathcal{R}$ est une chaîne de base E , toute partie de E est un bloc monomorphe mais les blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ sont les intervalles de $\mathcal{R}$.

Par ailleurs, si $\dim_{\text{fort}}(\mathcal{R}) < \infty$ alors $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) < \infty$. Inversement, si $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) < \infty$, alors la décomposition canonique $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ est finie. D'après le Théorème 7.21, les composantes infinies dans $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ sont des composantes fortement monomorphes. En partitionnant les éléments de la réunion des blocs finis de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ en singletons, nous obtenons une décomposition fortement monomorphe finie. La dernière partie de la proposition est due au fait que le nombre de composantes fortement monomorphes infinies est le nombre de composantes monomorphes infinies. $\square$

Le théorème suivant donne une caractérisation d'une structure relationnelle possédant une décomposition monomorphe finie.

Théorème 7.23. (voir [92])

Une structure relationnelle $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ possède une décomposition monomorphe finie si et seulement s'il existe un ordre linéaire $\leq$ sur E et une partition finie $(E_x)_{x \in X}$ de E en intervalles de $C := (E, \leq)$ tels que tout isomorphisme local de C qui préserve chaque intervalle est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$. De plus, il existe une telle partition dont le nombre de blocs infinies est $\dim_{\text{mon}}^\infty(\mathcal{R})$.

En d'autres termes, la structure relationnelle $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ possède une décomposition monomorphe finie si et seulement si $\mathcal{R}$ est libre interprétable en une structure de la forme $S := (E, \leq, u_1, \dots, u_l)$ où $\leq$ est un ordre linéaire et $u_1, \dots, u_l$ sont des relations unaires formant une partition de E en intervalles de $(E, \leq)$.

Le théorème suivant découle de l'application directe du théorème de compacité de la logique du premier ordre :

Théorème 7.24. *Une structure relationnelle $\mathcal{R}$ possède une décomposition monomorphe finie si et seulement si il existe un entier ℓ tel que tout élément de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ possède une décomposition monomorphe ayant au plus ℓ blocs.*

La décomposition monomorphe, après son introduction dans [90], a été étudiée dans plusieurs articles sur des structures particulières, les bichaînes [70], les tournois [25] et les hypergraphes [88].

7.2.3 Décomposition en intervalles Fraïssé monomorphes

Notion d'intervalle Fraïssé

Définition 7.25. *Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle. Un sous-ensemble J de E est un intervalle Fraïssé¹ de $\mathcal{R}$ ou un $\mathcal{R}$ -intervalle, si tout automorphisme local de $\mathcal{R}_{\upharpoonright J}$ prolongé par l'identité sur $E \setminus J$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$.*

1. La notion classique d'intervalle pour les structures binaires donnée dans la Définition 3.1 étant due à Gallai et afin d'éviter les confusions, nous utiliserons l'appellation "intervalle Fraïssé" pour l'intervalle de la Définition 7.25 et "intervalle Gallai" pour l'intervalle de la Définition 3.1.

Notons, d'après Fraïssé, que si m est le maximum des arités des ρ_i , alors J est un $\mathcal{R}$ -intervalle si et seulement si l'union d'un automorphisme local quelconque de $\mathcal{R}_{\upharpoonright J}$ défini sur p éléments ($p \leq m - 1$) et de l'identité sur $m - p$ éléments de $E \setminus J$ donne un automorphisme local de $\mathcal{R}$. En particulier, si $\mathcal{R}$ est un ordre total, nous retrouvons la caractérisation de la notion classique d'intervalle (pour $m = 2$ et $p = 1$) : pour tous $a, a' \in J$ et $x \notin J$;

$$a, a' < x(\text{mod } \mathcal{R}) \text{ ou } a, a' > x(\text{mod } \mathcal{R}).$$

Etant donnée une structure relationnelle $\mathcal{R}$ de base E , l'ensemble vide, les singletons de E et l'ensemble E sont des intervalles Fraïssé de $\mathcal{R}$.

Fait 6. *Pour les structures binaires constituées de relations telles que chacune est soit réflexive soit irréflexive, les notions d'intervalle Fraïssé et intervalle Gallai coïncident.*

Pour une structure binaire, tout intervalle Gallai est un intervalle Fraïssé, la réciproque n'est pas vraie comme le montre l'exemple suivant. Soit $G := (V, E)$ le graphe de la FIGURE 7.1. $J = \{x, y, z\}$ est un intervalle Fraïssé mais n'est pas un intervalle Gallai.

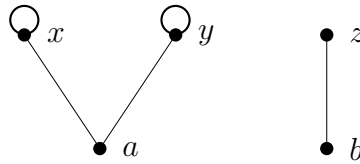


FIGURE 7.1 –

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Voici quelques propriétés des intervalles Fraïssé (voir [41]) :

- Propriétés 7.26.**
1. *Toute intersection de $\mathcal{R}$ -intervalles est un $\mathcal{R}$ -intervalle.*
 2. *La réunion d'un ensemble filtrant pour l'inclusion de $\mathcal{R}$ -intervalles est un $\mathcal{R}$ -intervalle.*
 3. *Si J est un intervalle de $\mathcal{R}$ et $D \subseteq E$ alors $J \cap D$ est un intervalle de $\mathcal{R}_{\upharpoonright D}$.*
 4. *Inversement, dans le cas particulier où D est un $\mathcal{R}$ -intervalle, alors les intervalles de $\mathcal{R}_{\upharpoonright D}$ sont exactement les intersections avec D des intervalles de $\mathcal{R}$.*

La propriété 4 ci-dessus n'est pas vraie si D est un sous-ensemble quelconque de E , comme le montre l'exemple suivant.

Soit l'ensemble ordonné $P := (V, \leq)$ dont le diagramme de Hasse est donné par la FIGURE 7.2. Posons $D = \{x, y, z\}$, l'ensemble $F = \{x, y\}$ est un intervalle de $P_{\upharpoonright D}$ mais il n'existe aucun intervalle J de P tel que $F = J \cap D$. En effet, si un tel intervalle J existait, il contiendrait forcément w qui est comparable à y mais incomparable à x et donc contiendrait z , ce qui donnerait $J \cap D \neq F$.

Remarquons également que contrairement aux intervalles Gallai des structures binaires, la réunion de deux intervalles Fraïssé qui ont une intersection non vide n'est pas forcément un intervalle Fraïssé comme le montre l'exemple suivant.

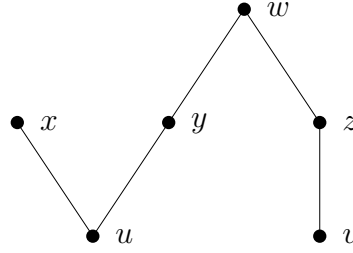


FIGURE 7.2 –

Soit $G = (V, E)$ le graphe de la FIGURE 7.3. Les ensembles $\{a, b, c\}$ et $\{c, d, e\}$ sont des intervalles Fraïssé mais leur réunion $A = \{a, b, c, d, e\}$ n'est pas un intervalle Fraïssé, car l'automorphisme local de A qui envoie a sur d et b sur e prolongé par l'identité sur $V \setminus A$ n'est pas un automorphisme local de G .

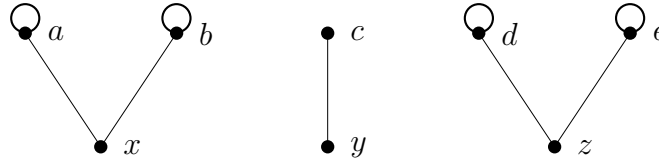


FIGURE 7.3 –

Décomposition Fraïssé monomorphe

Définition 7.27. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Un sous-ensemble A de E est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe ou un intervalle Fraïssé monomorphe si A est un intervalle Fraïssé et la restriction, $\mathcal{R}_A$, de $\mathcal{R}$ à A est monomorphe.

Etant donnée une structure relationnelle $\mathcal{R}$ de base E , l'ensemble vide et les singletons de E sont des $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes.

Voici quelques propriétés des $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes qui découlent naturellement de la définition et des Propriétés 7.26 :

- Propriétés 7.28.**
1. Toute intersection de $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe.
 2. La réunion d'un ensemble filtrant pour l'inclusion de $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe.
 3. Si J est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe et $D \subseteq E$ alors $J \cap D$ est un $\mathcal{R}_{\upharpoonright D}$ -intervalle monomorphe.

Lemme 7.29. La réunion de deux $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes d'intersection non vide est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe.

Preuve. Vient de la définition et du fait que deux parties de même cardinalité d'un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe sont toujours isomorphes. La preuve se fait de la même façon que celle du Lemme 7.14. $\square$

Définition 7.30. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Une décomposition Fraïssé monomorphe de $\mathcal{R}$ ou une $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe est une partition de E en $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes.

Proposition 7.31. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Tout $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe est contenu dans un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe maximal pour l'inclusion. Les $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes maximaux de $\mathcal{R}$ forment une $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe dont toute autre $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe est plus fine.

Preuve. Soit un élément $a \in E$. Comme $\{a\}$ est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe alors, d'après le Lemme 7.29, l'union $F(a)$ de tous les $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes contenant a est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe. De plus, tout $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe maximal pour l'inclusion est de la forme $F(a)$.

Par ailleurs, deux $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes $F(a)$ et $F(b)$ sont soit égaux soit disjoints, donc l'ensemble $\{F(a)\}_{a \in E}$ forme une partition de E en $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes et si P' est une autre partition de E en $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes alors chaque élément de P' est contenu dans un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe maximal. $\square$

Nous notons par $\dim_{\text{Fraïssé}}(\mathcal{R})$ le nombre de $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes maximaux et si ce nombre n'est pas fini, nous écrivons $\dim_{\text{Fraïssé}}(\mathcal{R}) = \infty$.

Lemme 7.32. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Tout $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe est un bloc monomorphe.

Preuve. Soit A un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe et soient B et B' deux n -parties de E telles que $B \setminus A = B' \setminus A$. Posons $\overline{B} = B \cap A$ et $\overline{B'} = B' \cap A$. Comme A est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe, il existe un isomorphisme qui envoie $\overline{B}$ sur $\overline{B'}$ et qui, prolongé par l'identité sur $E \setminus A$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$. Donc les restrictions de $\mathcal{R}$ à B et B' sont isomorphes. $\square$

La réciproque du Lemme 7.32 est fausse. En effet, il suffit de considérer une partie d'une chaîne qui est un bloc monomorphe mais pas nécessairement un intervalle Fraïssé.

Lemme 7.33. Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle. Tout $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe est un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$.

Preuve. Si A est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe. Soient B, B' deux n -parties de A ($n \in \mathbb{N}$). Comme $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est monomorphe, alors $\mathcal{R}_{\upharpoonright B}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright B'}$ sont isomorphes. Soit f cet isomorphisme, f prolongé par l'identité sur $E \setminus A$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$ car A est un $\mathcal{R}$ -intervalle. D'où A est une partie fortement monomorphe. $\square$

La réciproque du Lemme 7.33 est fausse. En effet, considérons le contre-exemple suivant. Soit ρ une relation ternaire définie sur $\mathbb{N}$ comme suit :

$$\rho = \{(x, y, z) : x, y, z \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\} \cup \{(0, i, j) : 0 < i < j\}$$

alors $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ est une partie fortement monomorphe, car ρ est $\{0\}$ -monomorphe, mais $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ n'est pas un intervalle Fraïssé.

Corollaire 7.34. *Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Toute $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe est une décomposition fortement monomorphe de $\mathcal{R}$.*

La réciproque du Corollaire 7.34 est fausse. En effet, si nous considérons le contre-exemple précédent, $\{\{0\}, \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$ est une décomposition fortement monomorphe mais n'est pas une $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe.

Il s'ensuit immédiatement et en utilisant la Proposition 7.22

Proposition 7.35. *Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle. Si $\dim_{\text{Fraisse}}(\mathcal{R}) < \infty$ alors $\dim_{\text{fort}}(\mathcal{R}) < \infty$ et donc $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) < \infty$.*

Nous pouvons alors conclure que si $\mathcal{R}$ est une structure relationnelle et si nous désignons par $\mathcal{A}_1$ l'ensemble des $\mathcal{R}$ -intervalles monomorphes, par $\mathcal{A}_2$ l'ensemble des blocs fortement monomorphes de $\mathcal{R}$ et par $\mathcal{A}_3$ l'ensemble des blocs monomorphes de $\mathcal{R}$, alors

$$\mathcal{A}_1 \subseteq \mathcal{A}_2 \subseteq \mathcal{A}_3.$$

7.2.4 Cas d'une structure ordonnée : décomposition en intervalles

Intervalle monomorphe

Définition 7.36. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée. Posons $C := (E, \leq)$. Un sous-ensemble A de E est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ si A est un intervalle de C tel que pour toutes parties finies F, F' de E de même cardinalité n ($n \in \mathbb{N}$), les structures induites sur F et F' sont isomorphes dès que $F \setminus A = F' \setminus A$.*

Nous avons les propriétés suivantes qui découlent naturellement de la définition :

Propriétés 7.37. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée. Posons $C := (E, \leq)$.*

1. *L'ensemble vide et les singletons de E sont des intervalles monomorphes.*
2. *L'ensemble E est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ si et seulement si $\mathcal{R}$ est monomorphe.*
3. *Toute partie d'un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ qui est un intervalle pour C est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$.*
4. *toute intersection d'intervalles monomorphes de $\mathcal{R}$ est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$.*
5. *La réunion de deux intervalles monomorphes dont l'intersection est non vide est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$.*
6. *La réunion d'une famille filtrante pour l'inclusion d'intervalles monomorphes est un intervalle monomorphe.*

Lemme 7.38. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée, posons $C := (E, \leq)$. Tout intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$. Inversement, tout bloc monomorphe de $\mathcal{R}$ qui est un intervalle de C est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$.*

Preuve. La première partie découle des définitions 7.17 et 7.36. Pour la réciproque, toute partie d'une chaîne est un bloc monomorphe mais pas forcément un intervalle de C , si nous exigeons que ce soit un intervalle, nous aurons un intervalle monomorphe. $\square$

Conséquence 2. *Toute composante monomorphe de $\mathcal{R}$ est une union d'intervalles monomorphes de $\mathcal{R}$.*

Lemme 7.39. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée et soit A un sous-ensemble de E . Posons $C := (E, \leq)$. Si A est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ alors $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est enchaînée par $C_{\upharpoonright A}$. Inversement, si $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est enchaînée par $C_{\upharpoonright A}$ et A un intervalle Fraïssé de $\mathcal{R}$ alors A est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$.*

Preuve. Si A un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$, montrons que $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est enchaînée par $C_{\upharpoonright A}$. Soit f un automorphisme local de $C_{\upharpoonright A}$ et notons A_1 et A_2 son domaine et son codomaine respectivement. Comme A est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$ et $A_1 \setminus A = A_2 \setminus A = \emptyset$, les restrictions de $\mathcal{R}$ à A_1 et A_2 sont isomorphes. Il s'ensuit que f est un automorphisme local de $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$. Par suite $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est enchaînée par $C_{\upharpoonright A}$.

Pour l'inverse, A étant un intervalle Fraïssé de $\mathcal{R}$, c'est un intervalle de C . Soient F, F' deux parties finies de E ayant même cardinalité n ($n \in \mathbb{N}$) telles que $F \setminus A = F' \setminus A$. Montrons que les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright F}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright F'}$ sont isomorphes. Posons $F_A = F \cap A$ et $F'_A = F' \cap A$, les parties F_A et F'_A ont même cardinalité, donc il existe un automorphisme local g de $C_{\upharpoonright A}$ qui envoie F_A sur F'_A . $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ étant enchaînée par $C_{\upharpoonright A}$, g est un automorphisme local de $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$. Comme A est un intervalle Fraïssé de $\mathcal{R}$, en prolongeant g par l'identité sur $E \setminus A$, nous obtenons un automorphisme local, disons $\tilde{g}$, de $\mathcal{R}$. Cet automorphisme est unique, car $\mathcal{R}$ est ordonnée et sa restriction à F est un automorphisme local de $\mathcal{R}$ qui envoie F sur F' (car $F \setminus A = F' \setminus A$). Il s'ensuit que A est un intervalle monomorphe. $\square$

Nous avons alors

Lemme 7.40. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée et soit A un sous-ensemble de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) A est un intervalle monomorphe,
- (ii) A est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe,
- (iii) A est un bloc fortement monomorphe.

Preuve. Montrons (i) $\Rightarrow$ (ii). Soit J un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$, donc $\mathcal{R}_J$ est monomorphe. Montrons que J est un $\mathcal{R}$ -intervalle. Soit f un automorphisme local de $\mathcal{R}_{\upharpoonright J}$ et soient J_1 et J_2 son domaine et codomaine. Montrons que f prolongée par l'identité sur $E \setminus J$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$. Posons $A = J_1 \cup (E \setminus J)$ et $A' = J_2 \cup (E \setminus J)$. Les ensembles A et A' sont de même cardinalité et $A \setminus J = A' \setminus J$, donc les restrictions de $\mathcal{R}$ à A et A' sont isomorphes car J est un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$. Notons par $\tilde{f}$ cet isomorphisme. Comme $\mathcal{R}$ est ordonnée $\tilde{f}$ est unique. $\tilde{f}$ est un isomorphisme local de C et J un intervalle de C donc $\tilde{f}$ envoie les éléments de $A \setminus J_1 = A \setminus J$ sur $A' \setminus J_2 = A' \setminus J$, et J_1 sur J_2 . Comme $A \setminus J_1 = A' \setminus J_2 = A \setminus J$, donc sur $A \setminus J$, $\tilde{f}$ coïncide avec l'identité et $\tilde{f}_{\upharpoonright J_1} = f$. D'où $\tilde{f}$ est f prolongée par l'identité sur $E \setminus J$.

L'implication $(ii) \Rightarrow (i)$ vient du fait qu'un $\mathcal{R}$ -intervalle est un intervalle de la chaîne $(E, \leq)$, la monomorphie implique le reste. On conclut que les assertions (i) et (ii) sont équivalentes.

L'implication $(ii) \Rightarrow (iii)$ est donnée par le Lemme 7.33. La réciproque $(iii) \Rightarrow (ii)$ est vérifiée dans le cas des structures ordonnées ; en effet, si A est un bloc fortement monomorphe alors $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ est monomorphe. Soit f un automorphisme local de $\mathcal{R}_{\upharpoonright A}$ de domaine J et co-domaine J' . La structure $\mathcal{R}$ étant ordonnée, f est unique. Comme A est un bloc fortement monomorphe, alors l'isomorphisme f de $\mathcal{R}_{\upharpoonright J}$ sur $\mathcal{R}_{\upharpoonright J'}$, prolongé par l'identité sur $E \setminus A$ est un automorphisme local de $\mathcal{R}$. D'où A est un $\mathcal{R}$ -intervalle monomorphe. $\square$

Remarquons qu'un $\mathcal{R}$ -intervalle n'est pas forcément un intervalle monomorphe de $\mathcal{R}$. En effet, considérons le contre exemple suivant :

Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho)$ telle que $E = \{x, y, z, t\}$, $\leq$ l'ordre linéaire donné par : $x \leq y \leq z \leq t$ et ρ la relation binaire donnée par : $\rho = \{(x, y), (x, z), (x, t), (z, y)\}$. Le sous-ensemble $\{y, z, t\}$ est un intervalle Fraïssé de $\mathcal{R}$ mais pas un intervalle monomorphe.

Dans le cas particulier des structures binaires ordonnées, nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.41. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire ordonnée de type k et posons $C := (E, \leq)$. Toute composante monomorphe $B_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ telle que $|B_{\mathcal{R}}| \neq 2$ est un intervalle monomorphe maximal de $\mathcal{R}$ et tout intervalle monomorphe maximal non trivial $I_{\mathcal{R}}$ de $\mathcal{R}$ est une composante monomorphe de $\mathcal{R}$.*

Preuve. Soit $B_{\mathcal{R}}$ une composante monomorphe de $\mathcal{R}$. Si $B_{\mathcal{R}}$ a un seul élément, c'est un intervalle monomorphe. Supposons que $B_{\mathcal{R}}$ a, au moins trois éléments. Si $B_{\mathcal{R}}$ n'est pas un intervalle monomorphe alors d'après le Lemme 7.38, $B_{\mathcal{R}}$ n'est pas un intervalle de C . Soit J le plus petit intervalle de C contenant $B_{\mathcal{R}}$. Montrons que J est un intervalle monomorphe, ce qui, en vertu du Lemme 7.38, constitue une contradiction avec le fait que $B_{\mathcal{R}}$ est une composante monomorphe.

Soient $x, y, z \in B_{\mathcal{R}}$ et $a \in J \setminus B_{\mathcal{R}}$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $x < a < y < z$. En utilisant le fait que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x, a\}$, $\{y, a\}$ et $\{z, a\}$ sont isomorphes et de même les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x, y, a\}$, $\{x, z, a\}$ et $\{y, z, a\}$ sont isomorphes, nous obtenons que la restriction de $\mathcal{R}$ à une partie à deux éléments tels que l'un soit dans $J \setminus B_{\mathcal{R}}$ et l'autre dans $B_{\mathcal{R}}$ est isomorphe à la restriction de $\mathcal{R}$ à une partie à deux éléments de $B_{\mathcal{R}}$. Si b est un autre élément de $J \setminus B_{\mathcal{R}}$, nous montrons de même que la restriction de $\mathcal{R}$ à $\{a, b\}$ est isomorphe à la restriction de $\mathcal{R}$ à une partie à deux éléments de $B_{\mathcal{R}}$. Donc J est 2-monomorphe.

Montrons que J est un intervalle de $\mathcal{R}$. Soit $c \notin J$, en utilisant le fait que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x, a, c\}$ et $\{y, a, c\}$ sont isomorphes on déduit que J est un intervalle de $\mathcal{R}$. D'après le Corollaire 7.12 la restriction de $\mathcal{R}$ à J est enchînée par la restriction de C à J . D'après le Lemme 7.39, J est un intervalle monomorphe comme requis. On déduit alors que $B_{\mathcal{R}}$ est une composante monomorphe.

Pour la réciproque, soit A un intervalle monomorphe maximal non trivial. Si A a au moins trois éléments alors A est contenu dans une composante monomorphe qui serait, d'après ce qui précède, un intervalle monomorphe maximal donc égal à A . De même si A a deux éléments

alors A est une composante monomorphe car sinon, A serait contenu dans une composante monomorphe d'au moins trois éléments qui serait un intervalle monomorphe maximal, ce qui contredirait la maximalité de A . $\square$

Une composante monomorphe à deux éléments n'est pas forcément un intervalle monomorphe comme nous pouvons le voir dans cet exemple.

Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho)$ où $E = \{x, y, z, t\}$ avec

$$x < y < z < t \text{ et } \rho = \{(x, t), (y, t), (z, t), (z, x), (t, t)\}.$$

Alors $A := \{x, z\}$ est une composante monomorphe mais n'est pas un intervalle monomorphe. Les seuls intervalles monomorphes de cette structure sont le vide et les singletons.

Décomposition en intervalles

Définition 7.42. Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle ordonnée et posons $C := (E, \leq)$. Une décomposition en intervalles de $\mathcal{R}$ est une partition $\mathcal{P}$ de E en intervalles monomorphes de $\mathcal{R}$. En d'autres termes, c'est une partition $\mathcal{P}$ de E en intervalles J de la chaîne $C := (E, \leq)$ telle que pour tout entier n et toute paire A, A' de n -parties de E , les structures induites sur A et A' sont isomorphes dès que les traces $A \cap J$ et $A' \cap J$ sont de même cardinalité pour tout intervalle J de $\mathcal{P}$.

Par exemple, si $\mathcal{R}$ est la bichaîne $(E, \leq, \leq')$, $\mathcal{P}$ est une décomposition en intervalles de E si et seulement si chaque bloc J de $\mathcal{P}$ est un intervalle pour chacun des deux ordres qui coïncident ou sont opposés sur J (voir [70]).

Remarquons que les intervalles monomorphes maximaux de $\mathcal{R}$ forment une décomposition en intervalles de $\mathcal{R}$ dont toute autre décomposition en intervalles est plus fine. Notons par $\dim_{\text{int}}(\mathcal{R})$ le nombre d'intervalles monomorphes maximaux de $\mathcal{R}$, si ce nombre n'est pas fini, nous écrivons $\dim_{\text{int}}(\mathcal{R}) = \infty$.

Nous avons naturellement à partir du Lemme 7.40

Lemme 7.43. Soit $\mathcal{R}$ une structure ordonnée de base E et $\mathcal{P}$ une partition de E . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) $\mathcal{P}$ est une décomposition en intervalles de $\mathcal{R}$,
- (ii) $\mathcal{P}$ est une $\mathcal{R}$ -décomposition monomorphe,
- (iii) $\mathcal{P}$ est une décomposition fortement monomorphe de $\mathcal{R}$.

A partir du Lemme 7.38, nous avons :

Lemme 7.44. Toute décomposition en intervalles d'une structure ordonnée $\mathcal{R}$ est une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}$. La réciproque n'est pas vraie.

Cependant, en appliquant le Théorème 7.21, nous avons si $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i \in I})$:

Lemme 7.45. *Toute composante monomorphe infinie A de $\mathcal{R}$ est un intervalle de la chaîne $C := (E, \leq)$, donc un intervalle monomorphe maximal (pour l'inclusion) de $\mathcal{R}$.*

Preuve. Soit A une composante monomorphe infinie de $\mathcal{R}$. D'après le Théorème 7.21, A est un bloc fortement monomorphe de $\mathcal{R}$. D'après le Lemme 7.40, A est un intervalle monomorphe. Il s'ensuit que A est un intervalle de C . Il est évident que A est maximal puisque c'est une composante monomorphe. $\square$

Ceci entraîne :

Théorème 7.46. *Si $\mathcal{R}$ est une structure relationnelle ordonnée alors $\dim_{int}(\mathcal{R}) < \infty$ si et seulement si $\dim_{mon}(\mathcal{R}) < \infty$; en outre, $\dim_{mon}^\infty(\mathcal{R})$ est le plus petit nombre d'intervalles infinis d'une décomposition en intervalles de $\mathcal{R}$.*

Preuve. Si $\dim_{int}(\mathcal{R}) < \infty$ alors, d'après le Lemme 7.44, $\dim_{mon}(\mathcal{R}) < \infty$. Inversement, si $\dim_{mon}(\mathcal{R}) < \infty$, alors d'après le Lemme 7.45, les composantes infinies sont des intervalles. En partitionnant les éléments de la réunion des composantes finies (qui sont en nombre fini) en singletons, nous obtenons une décomposition en intervalles ayant un nombre fini d'intervalles, donc $\dim_{int}(\mathcal{R}) < \infty$. La deuxième partie vient directement du fait que le nombre de composantes monomorphes infinies est le plus petit nombre de blocs monomorphes infinis dans une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}$ et du Lemme 7.45. $\square$

La propriété suivante permet de tester l'existence d'une décomposition monomorphe ayant un nombre fini de blocs sur les relations formant $\mathcal{R}$.

Proposition 7.47. *Soit $k \in \mathbb{N}$ et soit $\mathcal{R} := (E, \leq, (\rho_i)_{i < k})$ une structure relationnelle ordonnée. $\mathcal{R}$ admet une décomposition monomorphe finie si et seulement si toute structure $\mathcal{R}_i := (E, \leq, \rho_i)$ ($i < k$) possède une telle décomposition.*

Preuve. La condition nécessaire est évidente car toute décomposition monomorphe de $\mathcal{R}$ est une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}_i$ pour tout $i < k$. Pour la condition suffisante, remarquons d'abord que si A est un bloc monomorphe pour toutes les structures $\mathcal{R}_i$, $i < k$ alors A est un bloc monomorphe pour $\mathcal{R}$. Supposons que $\mathcal{R}_i$ possède une décomposition monomorphe finie pour tout $i < k$, alors chacune de ces k décompositions est une partition finie de E . Comme l'ensemble de toutes les partitions d'un ensemble est un treillis complet, l'ensemble de ces k décompositions possède un infimum (ie, une partition qui est la moins fine de toutes les partitions plus fines que les k décompositions), notons par P cette partition (P est l'infimum des k partitions). P est forcément finie car les k décompositions sont finies. Chaque bloc A de la partition P est inclus dans un bloc de la décomposition de $\mathcal{R}_i$ pour tout $i < k$, donc A est un bloc monomorphe pour $\mathcal{R}_i$, $i < k$, d'où A est un bloc monomorphe pour $\mathcal{R}$. Il s'ensuit que P est une décomposition monomorphe finie de $\mathcal{R}$. $\square$

7.2.5 Une relation d'équivalence pour la décomposition monomorphe

Nous allons retrouver la notion de décomposition monomorphe en définissant la relation suivante (voir [76]).

Soit $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle. Soient x et y deux éléments de V et F une partie de $V \setminus \{x, y\}$. Disons que x et y sont F -équivalents et notons $x \simeq_{F, \mathcal{R}} y$ si les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x\} \cup F$ et à $\{y\} \cup F$ sont isomorphes.

Soit k un entier, disons que x et y sont k -équivalents et notons $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$ si $x \simeq_{F, \mathcal{R}} y$ pour toute partie F à k éléments de $V \setminus \{x, y\}$. Nous disons qu'ils sont $(\leq k)$ -équivalents et nous notons $x \simeq_{\leq k, \mathcal{R}} y$ s'ils sont k' -équivalents pour tout $k' \leq k$. Enfin, nous disons qu'ils sont équivalents, ce que nous notons $x \simeq_{\mathcal{R}} y$, s'il sont k -équivalents pour tout entier k .

Par exemple, la 0-équivalence est une relation d'équivalence, deux sommets x, y étant dans une même classe si les restrictions de $\mathcal{R}$ à x et y sont isomorphes.

Lemme 7.48. *Les relations $\simeq_{k, \mathcal{R}}$, $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\mathcal{R}}$ sont des relations d'équivalence sur V .*

Preuve. Il suffit de voir que $\simeq_{k, \mathcal{R}}$ est une relation d'équivalence. Pour cela, il suffit de vérifier que cette relation est transitive. Soient $x, y, z \in V$ avec $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$ et $y \simeq_{k, \mathcal{R}} z$. Vérifions que $x \simeq_{k, \mathcal{R}} z$. Nous pouvons supposer ces trois éléments deux à deux distincts. Soit F une partie à k éléments de $V \setminus \{x, z\}$. Nous avons deux cas.

Cas 1) $y \notin F$. Dans ce cas, nous avons respectivement $\mathcal{R}_{|F \cup \{x\}}$ isomorphe à $\mathcal{R}_{|F \cup \{y\}}$ et $\mathcal{R}_{|F \cup \{y\}}$ isomorphe à $\mathcal{R}_{|F \cup \{z\}}$. Donc $\mathcal{R}_{|F \cup \{x\}}$ est isomorphe à $\mathcal{R}_{|F \cup \{z\}}$; ainsi $x \simeq_{k, \mathcal{R}} z$.

Cas 2) $y \in F$. Posons $F' := (F \setminus \{y\}) \cup \{z\}$. Comme $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$ nous avons $\mathcal{R}_{|F' \cup \{x\}}$ isomorphe à $\mathcal{R}_{|F \cup \{y\}} = \mathcal{R}_{|F \cup \{z\}}$. De même, si nous posons $F'' := (F \setminus \{y\}) \cup \{x\}$ alors, comme $y \simeq_{k, \mathcal{R}} z$ nous avons $\mathcal{R}_{|F' \cup \{x\}} = \mathcal{R}_{|F'' \cup \{y\}}$ isomorphe à $\mathcal{R}_{|F'' \cup \{z\}}$. Comme $F' \cup \{x\} = F'' \cup \{z\}$ le résultat s'ensuit. $\square$

Nous avons naturellement, d'après la définition :

Fait 7. *La restriction de $\mathcal{R}$ à toute classe de k -équivalence est $k + 1$ -monomorphe.*

Lemme 7.49. *Chaque classe d'équivalence de $\simeq_{\mathcal{R}}$ est un bloc monomorphe de $\mathcal{R}$ et tout bloc monomorphe est inclus dans une classe d'équivalence.*

Preuve. Soit C une classe d'équivalence de $\simeq_{\mathcal{R}}$. Nous montrons que C est un bloc monomorphe. Soit $A, A' \in [V]^h$ tels que $A \setminus C = A' \setminus C$. Nous devons montrer que $\mathcal{R}_{|A}$ et $\mathcal{R}_{|A'}$ sont isomorphes. Soit $\ell := |A \setminus A'|$. Si $\ell = 0$, $A = A'$, il n'y a rien à montrer. Si $\ell = 1$, alors $A = \{x\} \cup (A \cap A')$ et $A' = \{y\} \cup (A \cap A')$, avec $x, y \in C$; dans ce cas $\mathcal{R}_{|A}$ et $\mathcal{R}_{|A'}$ sont isomorphes puisque $x \simeq_{\mathcal{R}} y$. Si $\ell > 1$, posons $K := A \setminus C$ et $k := |K|$. Nous pouvons trouver une suite de $(h - k)$ sous-ensembles d'éléments de C , disons $A_0, \dots, A_i, \dots, A_{\ell-1}$ tels que $A_0 = A \cap C$, $A_{\ell-1} = A' \cap C$ et la différence symétrique de A_i et A_{i+1} est de cardinalité 2. Nous avons $\mathcal{R}_{|A_i \cup K} = \mathcal{R}_{|A_{i+1} \cup K}$ pour $i < \ell - 1$. Donc $\mathcal{R}_{|A}$ et $\mathcal{R}_{|A'}$ sont isomorphes.

Puisque les classes d'équivalence sont des blocs monomorphes elles forment une décomposition monomorphe. Trivialement, les éléments d'un bloc monomorphe sont deux à deux équivalents pour $\simeq_{\mathcal{R}}$ donc contenus dans une classe d'équivalence. $\square$

D'après le Lemme 7.49 nous obtenons :

Proposition 7.50. *les classes d'équivalence de $\simeq_{\mathcal{R}}$ forment une décomposition de $\mathcal{R}$ en blocs monomorphes et toute autre décomposition en blocs monomorphes est plus fine qu'elle. Ainsi*

la décomposition de $\mathcal{R}$ en classes d'équivalence de $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncide avec la décomposition de $\mathcal{R}$ en composantes monomorphes.

Certaines propriétés mentionnées dans la sous-section 7.2.2, exemple Théorème 7.24 se retrouvent aisément à partir de la Proposition 7.50.

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base E . Soient x, y deux éléments non équivalents de E ($x \not\simeq_{\mathcal{R}} y$). Soit F une partie finie minimale qui en témoigne (en particulier $F \subset E \setminus \{x, y\}$ et les restrictions de $\mathcal{R}$ à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne sont pas isomorphes) et soit $F' := F \cup \{x, y\}$.

Lemme 7.51. *La restriction $R_{|_{F'}}$ ne contient pas d'intervalle Fraïssé A contenant $\{x, y\}$ et distinct de F' .*

Preuve. Supposons que $R_{|_{F'}}$ contient un tel intervalle A , posons $F_1 := A \setminus \{x, y\}$. Par minimalité de F , $F_1 \cup \{x\}$ est isomorphe à $F_1 \cup \{y\}$. Soit f cet isomorphisme; comme A est un intervalle Fraïssé, f prolongé par l'identité sur $F \setminus A$ est un isomorphisme de $F \cup \{x\}$ sur $F \cup \{y\}$. Contradiction. $\square$

7.2.6 Hypomorphie et équivalence

Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ deux structures relationnelles sur le même ensemble V et k un entier. Nous disons, d'après Fraïssé et Lopez [44], que $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont k -hypomorphes si les restrictions $\mathcal{R}_{|_A}$ et $\mathcal{R}'_{|_A}$ sont isomorphes pour toutes k -partie A de V . Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de base V et $x, y \in V$. Posons $V' := V \setminus \{x, y\}$. En identifiant x et y à un élément z (exemple $z := \{x, y\}$) nous obtenons deux structures $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(y)$ sur $V' \cup \{z\}$. Formellement, $\mathcal{R}(x)$ est telle que l'application qui fixe V' point par point et envoie x sur z est un isomorphisme de $\mathcal{R}_{|_{V \setminus \{y\}}}$ sur $\mathcal{R}(x)$. De même pour $\mathcal{R}_{|_{V \setminus \{x\}}}$ et $\mathcal{R}(y)$.

Puisque $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(y)$ coïncident sur V' nous avons immédiatement :

Lemme 7.52. *Soit $x, y \in V$ et $k \in \mathbb{N}$ alors $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$ si et seulement si $\mathcal{R}(x)$ et $\mathcal{R}(y)$ sont $(k + 1)$ -hypomorphes.*

Il a été montré que deux structures relationnelles qui sont $(k + 1)$ -hypomorphes sont k -hypomorphes dès que leur domaine possède au moins $2k + 1$ éléments (voir [82] Corollaire 2.3.2 et aussi [80] où ceci s'ensuit à partir d'une propriété des matrices d'incidence due à Gottlieb [51] et Kantor [57]. Pour le rappel du résultat de Gottlieb et Kantor voir [35]).

Corollaire 7.53. *Les relations d'équivalence $\simeq_{k, \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ coïncident dès que $|V(\mathcal{R})| \geq 2k + 1$.*

La notion d'hypomorphie a été assez bien étudiée, particulièrement pour les structures binaires. Disons que deux structures $\mathcal{R}$ and $\mathcal{R}'$ sur le même ensemble V sont *hypomorphes* si elles sont k -hypomorphes pour tout $k < |V|$ et que $\mathcal{R}$ est *reconstructible* si $\mathcal{R}$ est isomorphe à toute structure $\mathcal{R}'$ qui lui est hypomorphe. Lopez a montré que toute structure binaire finie définie sur au moins 7 éléments est reconstructible ([65] pour les relations binaires, [66] pour les structures binaires, voir l'exposé complet dans [44]). De ce fait avec le Lemme 7.52 il s'ensuit que pour une structure binaire $\mathcal{R}$ les relations d'équivalence $\simeq_{\leq 6, \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncident. Nous montrons

dans la sous-section 8.2.5 qu'en fait les relations d'équivalence $\simeq_{\leq 3, \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncident pour une structure binaire $\mathcal{R}$. Ille (1992) [55] a montré que les structures ordonnées finies dont le maximum des arités est m et de cardinalité au moins un entier $s(m)$ sont restructurables. Ainsi, de manière similaire, il s'ensuit que pour une structure ordonnée $\mathcal{R}$ d'arité au plus m , il existe un entier $i(m)$ ($i(m) \leq s(m)$) tel que les relations d'équivalence $\simeq_{\leq i(m), \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncident.

Le seuil pour une structure binaire sera examiné dans le chapitre 8.

Pouzet [82] a montré qu'il n'y a pas de seuil de restructurabilité pour les relations ternaires. Il a construit, pour tout entier m une paire de relations ternaires $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ sur un ensemble W de cardinalité $2m$, qui sont hypomorphes mais ne sont pas isomorphes. Dans son exemple W contient un élément z (en fait deux) tel que $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'$ coïncident sur $W \setminus \{z\}$. Ainsi nous pouvons dupliquer z et construire une relation ternaire $\mathcal{R}$ sur $2m + 1$ éléments ayant deux éléments x, y tels que $x \not\simeq_{\mathcal{R}} y$ mais $x \simeq_{\leq 2m-1, \mathcal{R}} y$.

Problème 3. *Existence d'une structure relationnelle $\mathcal{R}$ de signature finie telle que $\simeq_{\mathcal{R}}$ a une infinité de classes d'équivalence et $\simeq_{k, \mathcal{R}}$ n'en a qu'un nombre fini pour tout entier k .*

7.2.7 Le rôle du belordre

Nous rappelons la définition suivante (voir [92]).

Soit $\mathcal{R} := (E, (\rho_i)_{i \in I})$ une structure relationnelle. Soit $\mathcal{P} := (E_x)_{x \in X}$ une partition de l'ensemble E en parties disjointes. Le spectre d'un sous-ensemble fini A de E , relativement à la partition $\mathcal{P}$, est la famille $d(A) := (d_x(A))_{x \in X}$ où $d_x(A) := |A \cap E_x|$.

Nous avons de manière évidente :

Lemme 7.54. *Si deux sous-ensembles A et B ont le même spectre relativement à une même partition en blocs monomorphes de E , alors les restrictions de $\mathcal{R}$ à A et B sont isomorphes. La réciproque n'est pas vraie.*

Proposition 7.55. *L'âge d'une structure relationnelle admettant une décomposition monomorphe finie est héréditairement belordonné.*

Preuve. Soient $\mathcal{R}$ une telle structure relationnelle, $E := V(\mathcal{R})$, $\mathcal{P} := (E_x)_{x \in X}$ une décomposition monomorphe finie de $\mathcal{R}$, $l := |X|$. Pour tout $x \in X$, si E_x est infini nous posons $C_x := (\mathbb{N}, \leq)$ et si E_x est fini, alors $C_x := (\{0, \dots, |E_x| \}, \leq)$ ou $\leq$ est l'ordre naturel. Soit C le produit direct $\prod_{x \in X} C_x$ des chaînes C_x , $x \in X$. Soient A et A' deux sous-ensembles de E . A partir du Lemme 7.54, si $d(A) \leq d(A')$ alors $\mathcal{R}|_A \leq \mathcal{R}|_{A'}$. D'où $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ordonné par abritement peut être considéré comme l'image surjective de C par une application croissante. D'après le lemme² de Dickson, C est belordonné, d'où $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est belordonné. Pour montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est héréditairement belordonné, nous utilisons le Théorème 7.23 et le théorème d'Higman sur les mots (voir Théorème 1.7) [53]. En effet, $\mathcal{R}$ est libre interprétable en une structure de la forme $\mathcal{S} := (E, \leq, (u_1, \dots, u_\ell))$ où $\leq$ est un ordre linéaire et $u_1, \dots, u_\ell$ un nombre fini de relations

2. Le lemme de Dickson dit la chose suivante : Pour $n \geq 1$, toute partie non vide de $\mathbb{N}^n$ muni de l'ordre produit, a un nombre fini d'éléments minimaux.

unaires formant une partition de E en intervalles de $(E, \leq)$. Soit P un ensemble belordonné. Montrons que $\mathcal{A}(\mathcal{R}).P$, l'ensemble des couples $(\mathcal{T}, f)$ avec $\mathcal{T} \in \mathcal{A}(\mathcal{R})$ et $f : V(\mathcal{T}) \rightarrow P$, est belordonné (voir section 1.3.5 du chapitre 1). Pour cela, il suffit de montrer que $\mathcal{A}(\mathcal{S}).P$ est belordonné. Nous utilisons le théorème d'Higman. Soit L l'antichaîne à ℓ éléments $\{1, \dots, \ell\}$ et Q le produit direct $P \times L$. Comme produit de deux belordres (dans ce cas une somme directe de ℓ copies du belordre P) Q est belordonné. Il s'ensuit, d'après le théorème d'Higman (Théorème 1.7), que l'ensemble Q^* des mots sur Q est belordonné. Pour conclure, montrons que Q^* est l'image de $\mathcal{A}(\mathcal{S}).P$ par un plongement et par conséquent, $\mathcal{A}(\mathcal{S}).P$ est belordonné.

Considérons l'application $h : \mathcal{A}(\mathcal{S}).P \rightarrow Q^*$ qui, à tout élément $(\mathcal{S}_A, f) \in \mathcal{A}(\mathcal{S}).P$, où $\mathcal{S}_A$ est une restriction de $\mathcal{S}$ à un sous-ensemble fini A de E (considérée à l'isomorphie près) et $f : A \rightarrow P$, associe le mot $w_A := \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}$ sur Q défini comme suit $n := |A|$, $\alpha_i := (f(a_i), \chi(a_i))$ pour $i < n$, où $\{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ est une énumération des éléments de A par rapport à l'ordre linéaire $\leq$ sur E et $\chi(a) := j$ si $a \in u_j$, $j \in \{1, \dots, \ell\}$.

1)– Montrons que h est injective. Soient A et A' deux parties de E et deux applications $f_A : A \rightarrow P$ et $f_{A'} : A' \rightarrow P$ tels que $h(\mathcal{S}_A, f_A) = h(\mathcal{S}_{A'}, f_{A'})$, donc $w_A = w_{A'}$. Les sous-ensembles A et A' sont donc de même cardinalité n . Posons $A = \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ et $A' = \{a'_0, \dots, a'_{n-1}\}$, les éléments étant énumérés par rapport à l'ordre total $\leq$. Nous avons $(f_A(a_i), \chi(a_i)) = (f_{A'}(a'_i), \chi(a'_i))$, donc $f_A(a_i) = f_{A'}(a'_i)$ et $\chi(a_i) = \chi(a'_i)$ pour tout $i < n$. Nous déduisons que A et A' ont le même spectre pour la partition $u_1, \dots, u_\ell$ de E qui est une décomposition monomorphe de $\mathcal{S}$ (Lemme 7.54). D'où $\mathcal{S}_A$ et $\mathcal{S}_{A'}$ sont isomorphes. Ces restrictions étant prises à l'isomorphie près, nous déduisons que $(\mathcal{S}_A, f_A) = (\mathcal{S}_{A'}, f_{A'})$.

2)– Reste à montrer que $(\mathcal{S}_A, f_A) \leq (\mathcal{S}_{A'}, f_{A'})$ si et seulement si $w_A \leq w_{A'}$. Supposons $(\mathcal{S}_A, f_A) \leq (\mathcal{S}_{A'}, f_{A'})$ pour $A := \{a_0, \dots, a_{n-1}\}$ et $A' := \{a'_0, \dots, a'_{m-1}\}$ où $n \leq m$. Il existe alors un abriement k de $\mathcal{S}_A$ dans $\mathcal{S}_{A'}$ tel que

$$f_A(a_i) \leq f_{A'}(k(a_i)) \text{ pour tout } i < n. \quad (7.1)$$

Donc k peut-être considéré comme un abriement de la chaîne $0 \leq 1 \leq \dots \leq n-1$ dans la chaîne $0 \leq 1 \leq \dots \leq m-1$ et nous pouvons écrire $k(a_i) = a'_{k(i)}$. Si $w_A \not\leq w_{A'}$, il existe $i < n$ tel que $\alpha_i \not\leq \alpha'_{k(i)}$ ce qui signifie que

$$(f_A(a_i), \chi(a_i)) \not\leq (f_{A'}(a'_{k(i)}), \chi(a'_{k(i)})) = (f_{A'}(k(a_i)), \chi(k(a_i))).$$

D'après la relation (7.1), nous déduisons que $\chi(a_i) \neq \chi(k(a_i))$, c'est à dire qu'il existe $j \neq j'$ tel que $a_i \in u_j$ et $k(a_i) \in u_{j'}$, ce qui est absurde puisque k est un abriement de $\mathcal{S}_A$ dans $\mathcal{S}_{A'}$. D'où $w_A \leq w_{A'}$.

Inversement, si $w_A \leq w_{A'}$, il existe un abriement p de la chaîne $0 \leq 1 \leq \dots \leq n-1$ dans la chaîne $0 \leq 1 \leq \dots \leq m-1$ tel que $\alpha_i \leq \alpha'_{p(i)}$ autrement dit :

$$(f_A(a_i), \chi(a_i)) \leq (f_{A'}(a'_{p(i)}), \chi(a'_{p(i)})) \text{ pour tout } i < n. \quad (7.2)$$

Soit p' une application de A dans A' définie par $p'(a_i) := a'_{p(i)}$. Il est facile de vérifier que p' est un abriement de $\mathcal{S}_A$ dans $\mathcal{S}_{A'}$. $\square$

D'après le Théorème 1.20 nous pouvons déduire :

Corollaire 7.56. *Si la signature est finie, l'âge d'une structure admettant une décomposition monomorphe finie a un nombre fini de bornes.*

Une conséquence est l'extension suivante de la Proposition 7.55 :

Proposition 7.57. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures relationnelles de signature μ finie. S'il existe un entier ℓ tel que $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) \leq \ell$ pour toute structure $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée.*

Preuve. D'après la Proposition 1.14 et le Corollaire 7.56, $\mathcal{C}$ est belordonnée. En effet, si $\mathcal{C}$ n'est pas belordonnée, d'après la Proposition 1.14, elle contient un âge ayant une infinité de bornes, ce qui contredit le Corollaire 7.56. Il s'ensuit que $\mathcal{C}$ est une union finie d'idéaux (voir Théorème 1.8), chacun étant l'âge d'une structure relationnelle. D'après le Théorème 7.24 une telle structure relationnelle possède une décomposition monomorphe finie. Par la Proposition 7.55 son âge est héréditairement belordonné. Etant une union finie de classes héréditairement belordonnées, $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée (voir Propriété 1.17). $\square$

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 7.58. *Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles finies de signature μ finie contient, pour tout entier ℓ , une structure finie $\mathcal{S}$ telle que $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{S}) > \ell + 1$, alors elle contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$, ayant la même propriété, qui est minimale pour l'inclusion. De plus, $\mathcal{A}$ est l'âge d'une structure relationnelle $\mathcal{R}$ telle que $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) = \infty$.*

Preuve. Disons que $\mathcal{C}$ vérifie la propriété (P) si et seulement si pour tout entier ℓ , $\mathcal{C}$ contient une structure finie $\mathcal{S}$ telle que $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{S}) > \ell + 1$.

Si $\mathcal{C}$ ne contient pas d'antichaîne infinie (par rapport à l'abritement), alors la collection de ses sous-classes héréditaires est bien fondée (voir Théorème 1.3). Donc $\mathcal{A}$ est un élément minimal de l'ensemble de toutes les sous-classes héréditaires de $\mathcal{C}$ qui vérifient (P).

Si $\mathcal{C}$ contient une antichaîne infinie, nous appliquons la Proposition 1.14. Donc $\mathcal{C}$ contient un âge $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ qui est belordonné et qui a un nombre infini de bornes. D'après le Corollaire 7.56 $\mathcal{R}$ ne peut pas avoir une décomposition monomorphe finie. D'où, par le Théorème 7.24, $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ vérifie (P). Comme $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ ne possède pas d'antichaîne infinie, nous retournons au premier cas.

Il est clair que la classe $\mathcal{A}$ ne peut pas être l'union de deux classes héréditaires propres, donc elle doit être filtrante pour l'abritement. Donc, d'après Fraïssé (Théorème 1.11), c'est l'âge d'une structure relationnelle $\mathcal{R}$. Et cette structure relationnelle n'a pas de décomposition monomorphe finie. $\square$

Il en résulte pour le cas des classes de structures ordonnées :

Corollaire 7.59. *Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles ordonnées finies de signature finie contient, pour tout entier ℓ , une structure finie $\mathcal{S}$ telle que $\dim_{\text{int}}(\mathcal{S}) > \ell + 1$, alors elle contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$, ayant la même propriété, qui est minimale pour l'inclusion. De plus, $\mathcal{A}$ est l'âge d'une structure relationnelle ordonnée $\mathcal{R}$ telle que $\dim_{\text{int}}(\mathcal{R}) = \infty$.*

7.2.8 Application au profil

Les structures relationnelles possédant une décomposition monomorphe en un nombre fini de blocs et les classes formées de ces structures ont des propriétés intéressantes notamment la croissance de leurs profils.

Si une structure relationnelle infinie $\mathcal{R}$ possède une décomposition monomorphe finie avec $k+1$ blocs infinis (ie, $\dim_{\text{mon}}^\infty(\mathcal{R}) = k+1$), alors naturellement, le profil de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$ est borné par un polynôme dont le degré est au plus k . En effet, dans ce cas nous avons

$$\varphi_{\mathcal{R}}(n) \leq \sum_{s \leq r} \binom{r}{s} \binom{n+k-s}{k} \leq 2^r \binom{n+k}{k}$$

où r est la cardinalité de l'union des blocs monomorphes finis.

En fait dans ce cas, le profil est un quasi-polynôme (c'est à dire une somme $a_k(n)n^k + \dots + a_0(n)$ dont les coefficients $a_k(n), \dots, a_0(n)$ sont des fonctions périodiques) dont le degré est le nombre de blocs infinis de la décomposition monomorphe canonique de $\mathcal{R}$ moins 1 comme stipulé par le théorème suivant :

Théorème 7.60. (voir [90, 92])

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle infinie admettant une décomposition monomorphe en un nombre fini de blocs et soit k sa dimension monomorphe. Alors, la série génératrice $\mathcal{H}_{\varphi_{\mathcal{R}}}$ est une fraction rationnelle de la forme suivante, avec $P \in \mathbb{Z}[x]$ et $P(1) \neq 0$:

$$\frac{P(x)}{(1-x)(1-x^2) \cdots (1-x^k)}.$$

En particulier, son profil $\varphi_{\mathcal{R}}$ est un quasi-polynôme de degré $k-1$, d'où $\varphi_{\mathcal{R}}(n) \simeq an^{k-1}$ pour un réel positif a .

Ce profil n'est pas nécessairement un polynôme ; un exemple simple est le suivant. Considérons la somme directe de $k+1$ copies ($k \geq 1$) du graphe complet K_∞ sur un nombre infini de sommets, le profil est la fonction partition d'entier en un nombre fini de blocs (voir exemples de profils en page 36).

Dans le cas des structures ordonnées, il n'y a pas de symétries : si deux structures sont isomorphes, l'isomorphisme est unique. Nous montrons que dans ce cas le profil est un polynôme.

Nous rappelons auparavant, un lemme de [92] valable pour la notion de décomposition monomorphe.

Soit $(E_x)_{x \in X}$ une partition d'un ensemble E . Soit $d \in \mathbb{N}$. Un sous-ensemble A de E est dit d -large si pour tout $x \in X$, $d_x(A) \geq d$ lorsque $A \not\supseteq E_x$.

Lemme 7.61. (voir [92])

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle infinie de base E ayant une décomposition monomorphe finie et soit $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ sa décomposition canonique. Alors, il existe un entier d tel que pour tout

sous-ensemble A de E qui est d -large (par rapporte à $\mathcal{P}(\mathcal{R})$) la partition $\mathcal{P}(\mathcal{R})|_A$ induite par $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ sur A coïncide avec $\mathcal{P}(\mathcal{R}|_A)$. En particulier le spectre de A par rapport à $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ coïncide avec le spectre de A par rapport à $\mathcal{P}(\mathcal{R}|_A)$.

Théorème 7.62. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures ordonnées de signature μ finie. S'il existe un entier ℓ tel que $\dim_{\text{int}}(\mathcal{R}) \leq \ell + 1$ pour tout élément $\mathcal{R}$ de $\mathcal{C}$ alors le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme de degré au plus ℓ .*

Preuve. D'après le Théorème 7.46 et la Proposition 7.57, $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée, donc belordonnée. Puisque la collection des sous-classes héréditaires de $\mathcal{C}$ est bien fondée nous pouvons raisonner par induction. Considérons une classe héréditaire $\mathcal{C}' \subseteq \mathcal{C}$ telle que $\varphi_{\mathcal{C}'}$ est un polynôme pour toute sous-classe héréditaire propre $\mathcal{C}'' \subset \mathcal{C}'$ et montrons que $\varphi_{\mathcal{C}'}$ est un polynôme. Nous pouvons supposer que $\mathcal{C}'$ n'est pas vide.

Si $\mathcal{C}'$ est une union de deux sous-classe héréditaires propres, disons $\mathcal{C}'_1$ et $\mathcal{C}'_2$ alors, d'après l'équation :

$$\varphi_{\mathcal{C}'} = \varphi_{\mathcal{C}'_1} + \varphi_{\mathcal{C}'_2} - \varphi_{\mathcal{C}'_1 \cap \mathcal{C}'_2} \quad (7.3)$$

nous déduisons que $\varphi_{\mathcal{C}'}$ est un polynôme. Nous pouvons donc supposer que $\mathcal{C}'$ n'est pas l'union de deux sous-classes héréditaires propres. Puisque $\mathcal{C}'$ n'est pas vide, c'est donc l'âge d'une structure relationnelle $\mathcal{R}$. D'après le Théorème 7.24 et le Théorème 7.46, $\mathcal{R}$ a une décomposition en intervalles ayant un nombre fini de blocs. Soit $\mathcal{P} := (V_x)_{x \in X}$ la décomposition canonique de $\mathcal{R}$, $X_\infty := \{x \in X : V_x \text{ est infini}\}$, K l'union des composantes monomorphes finies de $\mathcal{R}$, $+1 := |X_\infty|$ et d donné par le Lemme 7.61. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble des sous-ensembles A de $V(\mathcal{R})$ contenant K qui sont d -larges. D'après le Lemme 7.61, $\mathcal{P}(\mathcal{R}|_A)$ est induite par $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ et a le même nombre de classes que $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ pour tout $A \in \mathcal{F}$. Puisque $\mathcal{R}$ est ordonnée, deux éléments $A, A' \in \mathcal{F}$ ont le même spectre si et seulement si $\mathcal{R}|_A$ et $\mathcal{R}|_{A'}$ sont isomorphes. Donc la collection $\mathcal{F} := \{\mathcal{R}|_A : A \in \mathcal{F}\}$ est un segment final non vide de $\mathcal{C}'$ et l'application qui, à $\mathcal{R}|_A$ associe $(d_x(A) - d)_{x \in X_\infty}$ est un isomorphisme (d'ensembles ordonnés) de $\mathcal{F}$ sur $\mathbb{N}^{l+1}$. Soit ϑ la fonction génératrice de $\mathbb{N}^{l+1}$ (qui compte, pour tout entier m le nombre d'éléments de $\mathbb{N}^{l+1}$ dont la somme des composantes vaut m). Nous avons $\vartheta(m) = \binom{m+l}{l}$ et $\varphi_{\mathcal{F}}(n) = \vartheta(n - (l+1)d - |K|)$; ainsi $\varphi_{\mathcal{F}}$ est un polynôme de degré l . Puisque $\mathcal{C}' \setminus \mathcal{F}$ est une classe héréditaire propre de $\mathcal{C}'$, par induction son profil est un polynôme. Il s'ensuit que le profil de $\mathcal{C}'$ est un polynôme. $\square$

La réciproque du Théorème 7.62 n'est pas vraie en général, des exemples dans le cas des graphes sont en page 202. Nous montrons, dans le chapitre 8, que la réciproque est vraie dans le cas d'une structure binaire ordonnée.

Dans le cas où le profil d'une classe de structures relationnelles ordonnées n'est pas borné par un polynôme, nous avons le résultat suivant :

Proposition 7.63. *Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles ordonnées finies de signature μ finie a un profil non borné par un polynôme alors elle contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$ minimale pour l'inclusion ayant la même propriété.*

Cette proposition donne une instance d'un résultat plus général valable pour une classe de structures relationnelles finies (pas nécessairement ordonnées).

Théorème 7.64. *Si une classe héréditaire $\mathcal{C}$ de structures relationnelles finies (de signature μ finie) a un profil non borné par un polynôme alors elle contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$ minimale pour l'inclusion ayant la même propriété.*

Preuve. La preuve suit, en tout point, les étapes de la preuve du Lemme 7.58 en utilisant, à la place du Corollaire 7.56 le Théorème 1.26. $\square$

7.3 Multi-enchaînabilité et structures invariantes

7.3.1 Presque multi-enchaînabilité

Une *presque multichaîne* est une structure relationnelle $\mathcal{R}$ sur un ensemble de la forme $V := F \cup (L \times K)$ où F et K sont deux ensembles finis, pour laquelle il existe un ordre linéaire sur L tel que pour tout isomorphisme local h de la chaîne $C := (L, \leq)$ l'application $(h, 1_K)$ étendue par l'identité sur F est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$ (l'application $(h, 1_K)$ est définie par $(h, 1_K)(x, y) := (h(x), y)$).

Soit m un entier. Nous disons que $\mathcal{R}$ a au plus le type (ω, m) si C est de type ω et $|F| + |K| \leq m$. Une structure relationnelle qui est isomorphe à une presque multichaîne est *presque multi-enchaînable*.

La notion de presque multi-enchaînabilité a été introduite par Pouzet [81] (voir [85]). Le cas particulier $|K| = 1$ est la notion de *presque enchaînabilité* introduite par Fraïssé (voir [41]).

Une structure presque multi-enchaînable peut avoir une décomposition monomorphe finie (exemple. la somme directe d'un nombre fini de copies du graphe complet dénombrable). Voici un simple test pour déterminer si une structure presque multi-enchaînable possède une telle décomposition.

Lemme 7.65. *Soit $\mathcal{R}$ une presque multichaîne infinie définie sur $V := F \cup (L \times K)$. Alors $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) = \infty$ si et seulement s'il existe $x, x' \in L$ et $y \in K$ tels que $(x, y) \not\sim_{\mathcal{R}} (x', y)$. Ceci est particulièrement le cas si les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{(x, y)\} \cup F \cup (\{x\} \times (K \setminus \{y\}))$ et $\{(x', y)\} \cup F \cup (\{x\} \times (K \setminus \{y\}))$ ne sont pas isomorphes.*

Preuve. La première partie est évidente. Si $\dim_{\text{mon}}(\mathcal{R}) = \infty$ alors V contient un nombre infini de paires d'éléments non équivalents $a_n := (x_n, y_n)$. Puisque K est fini, il existe $n \neq n'$ tels que $y_n = y_{n'}$. Posons $x = x_n$, $x' := x_{n'}$ et $y = y_n$.

Inversement, supposons qu'il existe deux éléments $(x, y), (x', y)$ de $L \times K$ tels que $(x, y) \not\sim_{\mathcal{R}} (x', y)$. Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $x < x'$. Donc il existe un entier k tel que $(x, y) \not\sim_{k, \mathcal{R}} (x', y)$. Soit A une k -partie de $V \setminus \{(x, y), (x', y)\}$ telle que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{(x, y)\} \cup A$ et $\{(x', y)\} \cup A$ ne soient pas isomorphes. Soit $C(A)$ la projection de A sur L et posons $\ell = |C(A)|$. Comme C est une chaîne et L est infini, il existe une infinité de copies de $C(A) \cup \{x, x'\}$ sur L (des $\ell + 2$ -parties de L dont les éléments sont disposés dans la chaîne C de la même façon que ceux de $C(A) \cup \{x, x'\}$). Soit B une de ces copies et soit h l'isomorphisme local de C qui transforme $C(A) \cup \{x, x'\}$ en B . Désignons par $\hat{h}$ l'application $(h, 1_K)$ étendue par l'identité sur F . Soient $(x_1, y) = \hat{h}(x, y)$ et $(x'_1, y) = \hat{h}(x', y)$. D'après la définition de la multi-enchaînabilité, l'application $\hat{h}$ est un isomorphisme local de $\mathcal{R}$. Il s'ensuit que les restrictions de

$\mathcal{R}$ à $A \cup \{(x, y), (x', y)\}$ et $\hat{h}(A) \cup \{(x_1, y), (x'_1, y)\}$ sont isomorphes. Comme les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{(x, y)\} \cup A$ et $\{(x', y)\} \cup A$ ne sont pas isomorphes, nous déduisons que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\hat{h}(A) \cup \{(x_1, y)\}$ et $\hat{h}(A) \cup \{(x'_1, y)\}$ ne sont pas isomorphes, ainsi $(x_1, y) \not\sim_{\mathcal{R}} (x'_1, y)$. Nous avons donc une infinité de paires (x, x') de L^2 avec $x < x'$ tel que $(x, y) \not\sim_{\mathcal{R}} (x', y)$. $\square$

Question 2. Soit $y \in K$, est-il vrai que pour la relation $\simeq_{\mathcal{R}}$ ou bien tous les éléments de $L \times \{y\}$ sont inéquivalents ou bien ils sont tous équivalents ?

Proposition 7.66. Si la signature μ est finie, il existe un nombre fini de structures presque multi-enchaînables deux à deux non isomorphes de signature μ qui sont au plus de type (ω, m) .

Preuve. Soit ℓ le maximum de la signature μ . Soit $V := F \cup (L \times K)$ où F et K sont deux ensembles finis tels que $|F| + |K| \leq a$ et " $\leq$ " un ordre linéaire sur L de type ω . Soit L' une ℓ -partie de L . Observons que si $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont deux structures relationnelles presque multi-enchaînables sur V (avec cette décomposition de V) qui coïncident sur $F \cup (L' \times K)$ elles sont égales. Le nombre de structures relationnelles de signature μ sur un ensemble fini étant fini, le nombre de telles structures $\mathcal{R}$ est forcément fini. $\square$

Pour construire des structures presque multi-enchaînables, un des outils est le théorème de Ramsey. Nous l'utiliserons à travers la notion de structures invariantes donnée dans [25] que nous rappelons ci-dessous.

7.3.2 Structures invariantes

Soit $C := (L, \leq)$ une chaîne. Pour tout entier n , soit $[C]^n$ l'ensemble des n -tuples $\vec{a} := (a_1, \dots, a_n) \in L^n$ tels que $a_1 < \dots < a_n$. Cet ensemble est identifié à l'ensemble des n -parties de L .

Pour tout automorphisme local h de C de domaine D , posons $h(\vec{a}) := (h(a_1), \dots, h(a_n))$ pour tout $\vec{a} \in [D]^n$.

Soit $\mathfrak{L} := \langle C, \mathcal{R}, \Phi \rangle$ un triplet formé d'une chaîne C sur L , d'une structure relationnelle $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I})$ et d'un ensemble Φ d'applications, chacune étant une application ψ de $[C]^{a(\psi)}$ dans V , où $a(\psi)$ est un entier, l'arité de ψ .

Nous disons que $\mathfrak{L}$ est *invariante* si :

$$\rho_i(\psi_1(\vec{\alpha}_1), \dots, \psi_{m_i}(\vec{\alpha}_{m_i})) = \rho_i(\psi_1(h(\vec{\alpha}_1)), \dots, \psi_{m_i}(h(\vec{\alpha}_{m_i}))) \quad (7.4)$$

pour tout $i \in I$ et tout automorphisme local h de C dont le domaine contient $\vec{\alpha}_1, \dots, \vec{\alpha}_{m_i}$, où m_i est l'arité de ρ_i , $\psi_1, \dots, \psi_{m_i} \in \Phi$, $\vec{\alpha}_j \in [C]^{a(\psi_j)}$ pour $j = 1, \dots, m_i$.

Cette condition exprime le fait que chaque ρ_i est invariante pour la transformation des m_i -tuples de V qui est induite sur V par les automorphismes locaux de C . Par exemple, si ρ est une relation binaire et $\Phi = \{\psi\}$ alors

$$\rho(\psi(\vec{\alpha}), \psi(\vec{\beta})) = \rho(\psi(h(\vec{\alpha})), \psi(h(\vec{\beta})))$$

ce qui signifie que, $\rho(\psi(\vec{\alpha}), \psi(\vec{\beta}))$ dépend uniquement des positions relative de $\vec{\alpha}$ et $\vec{\beta}$ sur la chaîne C .

Si $\mathfrak{L} := \langle C, \mathcal{R}, \Phi \rangle$ et A est un sous-ensemble de L , posons $\Phi|_A := \{\psi|_{[A]^{a(\psi)}} : \psi \in \Phi\}$ et $\mathfrak{L}|_A := \langle C|_A, \mathcal{R}, \Phi|_A \rangle$ la restriction de $\mathfrak{L}$ à A .

Le résultat suivant est une conséquence du théorème de Ramsey (Théorème 1.9) :

Théorème 7.67. (voir [25])

Soit $\mathfrak{L} := \langle C, \mathcal{R}, \Phi \rangle$ une structure telle que le domain L de C est infini, $\mathcal{R}$ formée d'un nombre fini de relations et Φ est fini. Alors il existe un sous-ensemble infini L' de L tel que $\mathfrak{L}|_{L'}$ est invariante.

7.3.3 Une application

Désignons par $\mathcal{S}_\mu$ la classe des structures relationnelles de signature μ qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie.

Conjecture 3. Il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{A}$ formé de structures incomparables de $\mathcal{S}_\mu$ tel que tout élément de $\mathcal{S}_\mu$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$.

Notons que si nous remplaçons $\mathcal{S}_\mu$ par la classe $\mathcal{B}$ formée de bichaînes, $\mathfrak{A}$ possède vingt éléments [70], tandis que si $\mathcal{S}_\mu$ est remplacée par la classe $\mathcal{T}$ formée de tournois, $\mathfrak{A}$ possède douze éléments [25]. Nous montrons (Théorème 7.68) que la Conjecture 3 est également vraie dans le cas de structures ordonnées. Les cas des graphes non dirigés et des graphes ordonnés sont renvoyés au chapitre 8.

Soit la classe $\mathcal{D}_\mu$ des structures relationnelles ordonnées de signature μ (finie) ne possédant pas de décomposition en intervalles ayant un nombre fini de blocs.

Théorème 7.68. Il existe un sous-ensemble fini $\mathfrak{A}$ formé de structures incomparables de $\mathcal{D}_\mu$ tel que tout élément de $\mathcal{D}_\mu$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$.

La preuve de ce théorème nécessite le résultat suivant.

Soit k un entier. Soit $\mathcal{D}_{\mu,k}$ la classe des structures ordonnées $\mathcal{R}$ de signature μ telle que $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ possède un nombre infini de classes.

Proposition 7.69. Soit k un entier et μ finie. Tout élément de $\mathcal{D}_{\mu,k}$ abrite un élément de $\mathcal{D}_{\mu,k}$ qui est presque multi-enchaînable et est de type au plus $(\omega, k+1)$.

Preuve. Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{D}_{\mu,k}$ de base V . Alors $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ a un nombre infini de classes. Prendre une suite infinie $(x_p)_{p \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux à deux non équivalents. Pour toute paire (p, q) , $p < q$, nous pouvons trouver un sous-ensemble $\mathcal{F}(p, q)$ de $V \setminus \{x_p, x_q\}$ d'au plus k éléments témoignant du fait que x_p et x_q sont non équivalents. En fait, nous pouvons trouver une famille Φ d'applications $f : \mathbb{N} \rightarrow V$, $g_i : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow V$ pour $i = 1, \dots, k$ telles que pour tous $p < q \in \mathbb{N}$, $x_p = f(p)$, $\mathcal{F}(p, q) = \{g_i(p, q), i = 1, \dots, k\}$.

Soit $C := (\mathbb{N}, \leq)$ et $\mathfrak{L} := \langle C, \mathcal{R}, \Phi \rangle$. Le Théorème de Ramsey sous la forme du Théorème 7.67 assure qu'il existe un sous-ensemble infini X de $\mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}|_X$ est invariante.

Nous pouvons supposer, sans perte de généralité, que $X = \mathbb{N}$.

Affirmation 3. *Supposons que $\mathfrak{L}$ est invariante.*

1. *Soit $i, j \in \{1, \dots, k\}$. Alors $g_i = g_j$ si et seulement s'il existe $p < q$ tels que $g_i(p, q) = g_j(p, q)$.*
2. *Soit $i \in \{1, \dots, k\}$. Alors g_i est constante si et seulement s'il existe trois entiers $p < q < r$ tels que $g_i(p, q) = g_i(q, r)$.*
3. *Si les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ sont isomorphes pour des entiers $p < q < r$ alors les restrictions correspondantes pour $p' < q' < r'$ sont isomorphes.*

Preuve.

1. La condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, supposons qu'il existe $p < q$ tels que $g_i(p, q) = g_j(p, q)$. Soient $p' < q'$ et h l'isomorphisme local de $(\mathbb{N}, \leq)$ qui envoie p, q sur p', q' . Appliquons deux fois l'Equation (7.4) à l'ordre défini sur $\mathcal{R}$, nous avons :

$$g_i(p, q) \leq g_j(p, q) \Leftrightarrow g_i(p', q') \leq g_j(p', q')$$

et

$$g_j(p, q) \leq g_i(p, q) \Leftrightarrow g_j(p', q') \leq g_i(p', q')$$

Nous obtenons $g_i(p', q') = g_j(p', q')$ pour tous $p' < q'$.

2. De même que pour 1., la condition nécessaire est évidente. Pour la condition suffisante, soient $p' < q' < r'$ et h l'isomorphisme local de $(\mathbb{N}, \leq)$ qui envoie p, q, r sur p', q', r' . De même que précédemment, en appliquant deux fois l'Equation (7.4) à l'ordre défini sur $\mathcal{R}$ nous obtenons $g_i(p', q') = g_i(q', r')$. En particulier, nous obtenons $g_i(n, m) = g_i(m, l)$ pour tout $l > m$. Ainsi pour tous $n < m$, la valeur $g_i(n, m)$ est indépendante de m . Il s'ensuit que g_i est constante.
3. Se démontre de la même façon.

◇

Ainsi, si $\mathfrak{L}$ est invariante, la cardinalité de $\mathcal{F}(p, q)$ est constante pour tous $p < q$. Soit ℓ cette cardinalité.

Nous disons que $\mathfrak{L}$ est de type (I) si les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ sont isomorphes pour des entiers $p < q < r$. Autrement elle est de type (II).

Affirmation 4. *Soient $p < q < r$. Si $\mathfrak{L}$ est de type (I) alors les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(q)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ ne sont pas isomorphes, par contre si $\mathfrak{L}$ est de type (II) les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ ne sont pas isomorphes.*

Preuve. Puisque $\mathfrak{L}$ est invariante, si elle est de type (I) alors les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ sont isomorphes. Comme $f(p)$ et $f(q)$ ne sont pas équivalents et $\mathcal{F}(p, q)$ en témoigne, les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(q)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ ne sont pas isomorphes, ainsi les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(q)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ ne sont pas isomorphes. Par définition, si $\mathfrak{L}$ est de type (II) les restrictions $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(p)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ et $\mathcal{R}_{\upharpoonright_{\{f(r)\} \cup \mathcal{F}(p, q)}}$ ne sont pas isomorphes.

◇

Soit J la plus grande (au sens de l'inclusion) partie de $\{1, \dots, k\}$ vérifiant, pour tout $j \in \{1, \dots, k\} \setminus J$ il existe $i \in J$ tel que $g_i = g_j$. Posons $|J| = \ell$. Soit $F' := \{i \in J : g_i \text{ est constante}\}$. Posons $F = \bigcup_{i \in F'} g_i(\mathbb{N}^2)$ l'image de ces g_i et $K' := \{0\} \cup (J \setminus F')$. Nous pouvons supposer, quitte à réindexer les éléments, que $K' := \{0, \dots, k'\}$. Soit $V' := (\mathbb{N} \times K') \cup F'$. Nous définissons une application $\tilde{\Phi}$ de V' dans V comme suit.

Nous posons $\tilde{\Phi}(i) = g_i(0, 1)$ pour $i \in F'$ et $\tilde{\Phi}(n, i) := g_i(2n, 2n + 1)$ pour $i = 1, \dots, k'$. Si $\mathcal{L}$ est de type (I), nous posons $\tilde{\Phi}(n, 0) := f(2n + 1)$ et si $\mathcal{L}$ est de type (II), nous posons $\tilde{\Phi}(n, 0) := f(2n)$. Soit $Im(\tilde{\Phi})$ l'image de $\tilde{\Phi}$.

Affirmation 5. *La restriction de $\mathcal{R}$ à $Im(\tilde{\Phi})$ est presque multi-enchaînable et appartient à $\mathcal{D}_{\mu, k}$.*

Preuve. L'application $\tilde{\Phi}$ est injective d'après la définition de F' et de K' et l'Affirmation 3.

Soit $\mathcal{S}$ l'image inverse de $\mathcal{R}$ par $\tilde{\Phi}$ (c'est à dire la structure définie sur V' et qui est isomorphe à la restriction de $\mathcal{R}$ à $\tilde{\Phi}(V')$). Nous montrons que $\mathcal{S}$ est une presque multichaîne en montrant que pour tout isomorphisme local h de $C := (\mathbb{N}, \leq)$ l'application $\hat{h} := (h, 1_{K'})$ étendue par l'identité sur F' est un isomorphisme local de $\mathcal{S}$ (l'application $(h, 1_{K'})$ est définie par $(f, 1_{K'})(x, y) := (f(x), y)$). Ceci est donné par l'invariance de $\mathcal{L}$. Maintenant, observons que par construction, $(n, 0) \not\preceq_{k, \mathcal{S}} (n', 0)$ pour $n < n'$. En effet, posons $A' := (\{n\} \times K' \setminus \{0\}) \cup F'$ et $A := \tilde{\Phi}(A')$. Nous avons que $\mathcal{S}_{\uparrow\{(n,0)\} \cup A'}$ est isomorphe à $\mathcal{R}_{\uparrow\{\tilde{\Phi}(n,0)\} \cup A}$ et $\mathcal{S}_{\uparrow\{(n',0)\} \cup A'}$ est isomorphe à $\mathcal{R}_{\uparrow\{\tilde{\Phi}(n',0)\} \cup A}$. Nous avons $A := \{g_i(2n, 2n + 1) : i = 1, \dots, k'\} \cup F$ (c'est à dire $A = \mathcal{F}(2n, 2n + 1)$). Si $\mathcal{L}$ est de type (I), $\tilde{\Phi}(n, 0) = f(2n + 1)$, $\tilde{\Phi}(n', 0) = f(2n' + 1)$ et par l'Affirmation 4, les restrictions $\mathcal{R}_{\uparrow\{f(2n+1)\} \cup A}$ et $\mathcal{R}_{\uparrow\{f(2n'+1)\} \cup A}$ ne sont pas isomorphes, autrement dit $(n, 0) \not\preceq_{k, \mathcal{S}} (n', 0)$. Si $\mathcal{L}$ est de type (II), nous avons $\tilde{\Phi}(n, 0) = f(2n)$ et $\tilde{\Phi}(n', 0) = f(2n')$. En appliquant encore l'Affirmation 4, les restrictions $\mathcal{R}_{\uparrow\{f(2n)\} \cup A}$ et $\mathcal{R}_{\uparrow\{f(2n')\} \cup A}$ ne sont pas isomorphes, c'est à dire $(n, 0) \not\preceq_{k, \mathcal{S}} (n', 0)$.

Ainsi, d'après le Lemme 7.65, $\mathcal{S} \in \mathcal{D}_{\mu, k}$, donc $\mathcal{R}_{\uparrow Im(\tilde{\Phi})} \in \mathcal{D}_{\mu, k}$. ◇

Ceci termine la preuve de la Proposition 7.69. □

Preuve du Théorème 7.68. Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{D}_{\mu}$. Soit m le maximum de μ . Soit $k = i(m)$ tel que $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncide avec $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ (voir le paragraphe 7.2.6). D'après la Proposition 7.69, $\mathcal{R}$ possède une restriction appartenant à $\mathcal{D}_{\mu, k}$ qui est presque multi-enchaînable et est de type au plus $(\omega, k + 1)$. D'après la Proposition 7.66 le nombre de ces structures est fini. □

Comme conséquence et en utilisant le Lemme 7.59, nous avons le théorème de dichotomie pour les classes de structures ordonnées :

Théorème 7.70. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures relationnelles ordonnées finies de signature finie. Alors ou bien il existe un entier ℓ tel que tout membre de $\mathcal{C}$ possède une décomposition en intervalles ayant au plus $\ell + 1$ intervalles et dans ce cas le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme de degré au plus ℓ , ou bien $\mathcal{C}$ contient l'âge d'une structure presque multi-enchaînable appartenant à un ensemble fini.*

Nous conjecturons que les profils des structures presque multi-enchaînables de $\mathfrak{A}$ dans le Théorème 7.68 sont au moins exponentiels, c'est à dire :

Conjecture 4. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures ordonnées finies de signature finie. Alors, ou bien il existe un entier ℓ tel que tout membre de $\mathcal{C}$ possède une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs, auquel cas $\mathcal{C}$ est une union finie d'âges de structures ordonnées, chacune ayant une décomposition en intervalles ayant au plus $\ell + 1$ blocs et le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme, ou bien le profil de $\mathcal{C}$ est au moins exponentiel.*

Dans le chapitre 8, nous démontrons la Conjecture 4 dans le cas particulier où $\mathcal{C}$ est une classe héréditaire de structures binaires ordonnées finies de type k .

7.4 Une tentative de description des structures à profil polynomial

Comme nous l'avons noté, le profil de l'âge d'une structure relationnelle admettant une décomposition monomorphe finie est borné par un polynôme et en fait est un quasi polynôme. La réciproque est fausse, nous verrons dans la section 8.3.1, en page 202 des exemples de graphes ayant un profil polynomial parmi les graphes sans décomposition monomorphe finie. Pouzet a montré en 1978 [81] que si le profil d'une structure relationnelle est borné par un polynôme, alors son âge est celui d'une structure presque multi-enchaînable. Ce résultat est loin d'une caractérisation, comme nous le verrons dans la section 8.3.2, de tels âges peuvent avoir un profil exponentiel. Par contre, Pouzet en 2006 [85] a caractérisé les âge de graphes (non dirigés et sans boucle) dont le profil est borné par un polynôme à l'aide d'une notion voisine de celle de décomposition monomorphe, la cellularité, introduite par Schmerl en 1990 [99]. Nous présentons cette notion ci-dessous.

7.4.1 Structures cellulaires

Une structure $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I})$ est dite *cellulaire* s'il existe un sous-ensemble fini F de V et une énumération $(a_{x,y})_{(x,y) \in L \times K}$ des éléments de $V \setminus F$ par un ensemble $L \times K$, où K est fini, de sorte que pour chaque permutation f de L l'application $(f, 1_K)$ étendue par l'identité sur F est un automorphisme local de $\mathcal{R}$ (l'application $(f, 1_K)$ est définie par $(f, 1_K)(x, y) := (f(x), y)$). Notons que par définition une structure cellulaire est presque multi-enchaînable.

Le profil d'une relation cellulaire est borné par un polynôme, en effet si $|K| = k$ alors $\varphi_{\mathcal{R}}(n) \leq \binom{n+k}{k}$.

D'après le Théorème 2.14 de (Pouzet, 2006 [85]) nous avons

Théorème 7.71. [85]

Le profil de l'âge d'un graphe (non dirigés et sans boucle) est borné par un polynôme si et seulement si c'est l'âge d'un graphe cellulaire.

Ce théorème s'ensuit des deux résultats suivants (Théorème 7.73 et Lemme 7.72)

Lemme 7.72. [85]

La croissance du profil d'un graphe non cellulaire presque multi-enchaînable est au moins exponentielle.

Théorème 7.73. [85]

Soit $\mathcal{R}$ une structure relationnelle de signature finie. Si le profil de $\mathcal{R}$ est borné (supérieurement) par un polynôme alors $\mathcal{R}$ est une structure presque multi-enchaînable.

7.4.2 Décomposition cellulaire

Les graphes mis à part, il n'est pas vrai en général que les structures relationnelles dont le profil est borné par un polynôme soient des structures cellulaires. Comme le lecteur peut facilement le constater, si $\mathcal{P}$ est un ensemble ordonné donné par la somme directe de deux copies de la chaîne des entiers non négatifs, alors $\mathcal{P}$ a une décomposition monomorphe finie (chaque bloc est formé d'une chaîne) donc son profil est borné par un polynôme (il est linéaire), en fait $\varphi_{\mathcal{P}}(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1$. Par contre, $\mathcal{P}$ n'est pas cellulaire. Si au lieu de $\mathcal{P}$, on considère la somme directe de deux cliques dénombrables cette structure est cellulaire et a même profil. Ceci nous amène à la notion de décomposition cellulaire.

Appelons *décomposition cellulaire* d'une structure $\mathcal{R} := (V, (\rho_i)_{i \in I})$ la donnée d'un sous-ensemble fini F de V et d'une énumération $(a_{x,y})_{(x,y) \in L \times K}$ des éléments de $V \setminus F$ par un ensemble $L \times K$ où K est fini, de sorte que les restrictions de $\mathcal{R}$ à deux parties finies A et A' de V soient isomorphes si $A \cap F = A' \cap F$ et les *vecteurs fréquences* χ_A et $\chi_{A'}$ sont égaux; le vecteur fréquence χ_A est égal à $(\chi_A(K'))_{\emptyset \neq K' \subseteq K}$ et $\chi_A(K')$ est le nombre d'éléments y de L tels que $A \cap (\{y\} \times K) = \{y\} \times K'$.

Clairement, les ensembles intervenant dans la définition de structure cellulaire forment une décomposition cellulaire. Ainsi une structure cellulaire a une décomposition cellulaire. La réciproque est fautive, si $\mathcal{P}$ est la somme directe de deux copies de la chaîne des entiers non négatifs, la famille $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans laquelle $E_n := \{n\} \times \{0, 1\}$ est une décomposition cellulaire mais $\mathcal{P}$ n'est pas cellulaire.

Cette notion généralise la notion de décomposition monomorphe.

Proposition 7.74. *Si une structure relationnelle $\mathcal{R}$ a une décomposition monomorphe finie alors une restriction du même âge admet une décomposition cellulaire.*

Preuve. Soit $(V_x)_{x \in X}$ une décomposition monomorphe finie de $\mathcal{R}$. Soit X' l'ensemble des $x \in X$ tels que V_x soit infini. Pour tout $x \in X'$ soit f_x une injection de $\mathbb{N}$ dans V_x ; pour chaque $n \in \mathbb{N}$ soit $E_n := \{f_x(n) : x \in X'\}$. Soit $F := \bigcup_{x \in X \setminus X'} V_x$ et soit $V' := F \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$ et $\mathcal{R}' := \mathcal{R}|_{V'}$.

Alors $\mathcal{R}'$ est du même âge que $\mathcal{R}$ et $(F, (E_n)_n)$ est une décomposition cellulaire de $\mathcal{R}'$. En effet, posons $V'_x := V_x$ si $x \in X \setminus X'$ et $V'_x := \text{Im}(f_x)$ si $x \in X'$. Alors, $(V'_x)_{x \in X}$ est une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}'$ et donc $\mathcal{R}'$ a même âge que $\mathcal{R}$. Si deux sous-ensembles finis de V' ont même fréquence sur $(F, (E_n)_n)$ alors comme on le constate aisément, leurs traces sur V'_x ont même cardinalité et donc puisque $(V'_x)_{x \in X}$ est une décomposition monomorphe de $\mathcal{R}'$, les restrictions à ces deux sous-ensembles sont isomorphes. Ce qui prouve que $(F, (E_n)_n)$ est une décomposition cellulaire. $\square$

Nous avons facilement :

Lemme 7.75. *Si une structure relationnelle a une décomposition cellulaire alors son profil est borné par un polynôme.*

Problème 4. *Est-ce qu'une structure relationnelle d'arité bornée a une décomposition cellulaire dès que son profil est borné par un polynôme ?*

Comme autre problèmes, mentionnons les suivants :

Problèmes 1. 1. *Est-ce que le profil de $\mathcal{R}$ est un quasi-polynôme si $\mathcal{R}$ a une décomposition cellulaire ?*

2. *Est-ce que la fonction génératrice de $\mathcal{R}$ est une fraction rationnelle dès que $\mathcal{R}$ a une décomposition cellulaire ?*

Chapitre 8

Exemples de structures binaires sans décomposition monomorphe finie

8.1 Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons au cas des structures binaires avec un intérêt particulier pour celles qui sont ordonnées. Le résultat principal de ce chapitre est le résultat de dichotomie, pour les structures binaires ordonnées, donné par le Théorème 8.29 où nous montrons que le profil d'une structure binaire ordonnée de type k est soit polynomial soit borné par une exponentielle. Résultat qui sera étendu aux classes héréditaires de structures binaires ordonnées.

8.2 La relation d'équivalence sur quelques exemples

Dans cette section nous revenons sur la relation d'équivalence définie dans la sous-section 7.2.5, nous étudions les propriétés de cette relation sur certains cas particuliers de structures binaires.

8.2.1 Le cas des bichaînes

Soit " $\leq$ " un ordre linéaire défini sur un ensemble V et soient $x, y, z \in V$. Nous disons que z est entre x et y modulo $\leq$, ou juste entre x et y s'il n'y a pas de risque de confusion, si ou bien $x \leq z \leq y$ ou bien $y \leq z \leq x$.

Lemme 8.1. *Soit $\mathcal{B} := (V, \leq_1, \leq_2)$ une bichaîne. Deux éléments $x, y \in V$ sont 1-équivalents si et seulement si tout élément $z \in V$ qui est entre x et y pour l'un des ordres l'est aussi pour l'autre ordre.*

Preuve. Soit $z \in V \setminus \{x, y\}$. Supposons z entre x et y pour $\leq_1$. Si x et y sont $\{z\}$ -équivalents alors par définition, les restrictions à $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont isomorphes, donc les deux ordres coïncident sur $\{x, z\}$ si et seulement s'ils coïncident sur $\{y, z\}$. Donc si z est entre x et y pour

$\leq_1$ alors ou bien les deux ordres coïncident sur $\{x, z\}$ et dans ce cas ils coïncident sur $\{y, z\}$ ou bien ils sont opposés sur les deux, donc dans tous les cas z est entre x et y pour $\leq_2$.

Inversement, supposons que tout élément z qui est entre x et y pour l'un des ordres l'est pour l'autre ordre et montrons que x et y sont 1-équivalents. Soit $z \in V \setminus \{x, y\}$. Alors z est entre x et y modulo $\leq_1$ si et seulement si z est entre x et y modulo $\leq_2$ et si z n'est pas entre x et y (modulo $\leq_1$ et $\leq_2$) alors $z \leq_i x$ si et seulement si $z \leq_i y$ et $x \leq_i z$ si et seulement si $y \leq_i z$ pour $i \in \{1, 2\}$. Donc les restrictions de $\mathcal{B}$ à $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont isomorphes. Il s'ensuit que x et y sont 1-équivalents. $\square$

Monteil et Pouzet dans leur article [70] ont étudié la décomposition monomorphe d'une bichaîne. Ils ont défini la relation d'équivalence suivante.

Soit $\mathcal{B} := (V, \leq_1, \leq_2)$ une bichaîne. Deux éléments $x, y \in V$ sont *équivalents*, fait noté $x \equiv y$, si pour tout $t \in V$, t est entre x, y modulo $\leq_1$ si et seulement si t est entre x, y modulo $\leq_2$. Si $B_{\leq_i}(x, y)$ désigne le sous-ensemble des éléments $z \in V$ qui sont entre x et y modulo $\leq_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, alors x et y sont équivalents si et seulement si $B_{\leq_1}(x, y) = B_{\leq_2}(x, y)$.

Lemme 8.2. (voir [70])

1. Sur chaque classe d'équivalence, les deux ordres coïncident ou sont opposés.
2. Soient $x, y, z, t \in V$. Si $x \leq_1 z \leq_1 y \leq_1 t$ et si de plus $x \equiv y$ et $z \equiv t$, alors x, y, z et t sont équivalents.
3. Toute classe d'équivalence est une union de composantes monomorphes.

Ainsi, d'après le Lemme 8.1, pour deux éléments $x, y \in V$ nous avons

$$x \simeq_{1, \mathcal{B}} y \Leftrightarrow x \equiv y$$

Nous avons le résultat suivant

Lemme 8.3. Soient $\mathcal{B} := (V, \leq_1, \leq_2)$ une bichaîne, F une partie finie de V d'au moins trois éléments et $x, y \in V \setminus F$. Si $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{\{x\} \cup F'}}$ et $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{\{y\} \cup F'}}$ sont isomorphes pour chaque partie stricte F' de F alors $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{\{x\} \cup F}}$ et $\mathcal{B}_{\upharpoonright_{\{y\} \cup F}}$ sont isomorphes.

Preuve. D'après le Lemme 8.1 ci-dessus, tout élément z qui est entre x et y pour l'un des ordres est entre x et y pour l'autre. En prenant des parties F' à deux éléments contenues dans l'intervalle commun déterminé par x et y , nous montrons qu'en fait, ou bien ces deux ordres coïncident sur cet intervalle ou bien ils sont opposés et ceci est suffisant. $\square$

Du Lemme 8.3 nous pouvons déduire directement

Théorème 8.4. Les relations d'équivalence $\simeq_{\leq_2, \mathcal{B}}$ et $\simeq_{\mathcal{B}}$ coïncident pour une bichaîne $\mathcal{B}$.

8.2.2 Le cas des graphes

Soit G un graphe non dirigé (symétrique).

Lemme 8.5. *Deux éléments $x, y \in V(G)$ sont équivalents si et seulement s'ils forment un intervalle de G .*

Preuve. La condition est évidemment suffisante ; pour en voir la nécessité, noter que s'ils ne forment pas un intervalle alors il existe $z \in V(G)$ qui n'est pas lié de la même façon avec x qu'avec y (z possède un seul voisin parmi x et y) et donc x et y ne seraient pas équivalents. $\square$

Théorème 8.6. *Pour un graphe G les relations $\simeq_{1,G}$ et $\simeq_G$ coïncident. Dans ce cas, les classes d'équivalence sont les intervalles maximaux qui sont des cliques ou des indépendants.*

8.2.3 Le cas des tournois

Proposition 8.7. *Si T est un tournoi, la ≤ 3 -équivalence est égale à l'équivalence.*

Ce résultat se déduit trivialement du Lemme 8.10 ci-dessous.

Pour cela introduisons quelques définitions et notations. Un *diamant*, resp. un *double diamant*, est un tournoi obtenu en remplaçant un sommet d'un tournoi à deux sommets, resp. d'un tournoi acyclique à trois sommets, par un 3-cycle (un cycle à trois éléments). Un double diamant est autodual si et seulement si le sommet du milieu du tournoi acyclique à trois sommets est remplacé par un 3-cycle. Soit $D := C_3(1, 1, C_3)$ (on substitue un 3-cycle à un élément d'un 3-cycle) ; soit $B := C_3(1, 1, 2)$ (on substitue à un élément d'un 3 cycle un tournoi à deux éléments).

Notons que dans D les deux éléments du 3-cycle qui n'ont pas été touchés par la substitution ne sont pas 3-équivalents mais sont 2-équivalents, de même dans le cas du double diamant autodual.

Boudabbous et Pouzet dans leur article [25] ont étudié la décomposition monomorphe d'un tournoi. Nous rappelons deux de leurs résultats (Lemmes 9 et 13 de [25])

Lemme 8.8. *(voir [25])*

Deux sommets x, y d'un tournoi T ne sont pas dans un même intervalle acyclique de T si et seulement si x et y sont distincts et ou bien :

- (i) x et y appartiennent à un 3-cycle, ou bien
- (ii) x et y appartiennent à un diamant, ou bien
- (iii) x et y appartiennent à un double diamant autodual.

Lemme 8.9. [25]

Soit T un tournoi et A un sous-ensemble de $V(T)$.

1. *Si A est un intervalle acyclique alors A est un bloc monomorphe.*
2. *Si A est une composante monomorphe alors ou bien A est un intervalle qui est un 3-cycle, ou bien $A = \{a, b\}$ et $A \cup C(\{a, b\})^1$ est un intervalle, ou bien A est une composante acyclique de T (une composante acyclique est un intervalle acyclique maximal pour l'inclusion) de T .*

1. $C(\{a, b\})$ est l'ensemble des sommets x tel que $\{a, b, x\}$ est un 3-cycle de T .

Nous avons le lemme suivant :

Lemme 8.10. *Deux sommets x, y d'un tournoi T ne sont pas dans une même classe d'équivalence si et seulement s'ils sont distincts et ou bien*

- 1) x, y sont deux sommets d'un seul 3-cycle d'un B , ou bien
- 2) x, y appartiennent à un bord d'un diamant (non dans le cycle), ou bien
- 3) x, y sont les extrémités d'un double diamant autodual, ou bien
- 4) x, y sont les sommets d'un D appartenant à trois de ses 3-cycles.

Preuve. La condition suffisante se vérifie facilement. Pour la condition nécessaire, si x et y ne sont pas équivalents alors il existe une partie $F \subseteq V(T) \setminus \{x, y\}$ telle que les restrictions de T à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne sont pas isomorphes. Considérons une telle partie F de cardinalité minimale. Dans le cas d'un tournoi, F a au moins deux éléments (car un tournoi est 2-monomorphe). Nous pouvons remplacer T par $T' := T|_{F \cup \{x, y\}}$. Comme $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne sont pas isomorphes, au moins un de ces deux ensembles contient un 3-cycle.

a) Si F a deux éléments, alors un seul de ces ensembles contient un 3-cycle. Posons $F' := F \cup \{x, y\}$.

- Si F' ne contient qu'un seul 3-cycle alors F' est un diamant dont x, y est un bord et on est en 2).

- Si F' contient un autre 3-cycle alors F' est comme en 1).

b) Supposons que F a au moins trois éléments.

Cas 1 : Il existe un 3-cycle dans F' qui passe par x et y . Soit C l'ensemble des sommets $z \in F$ tels que x, y, z forment un 3-cycle. Soit $E := F \setminus C$.

Affirmation 6. E est vide.

Preuve. Montrons que si E est non vide alors $C \cup \{x, y\}$ est un intervalle de T' ce qui, en raison du Lemme 7.51 constitue une contradiction. Pour cela, supposons E non vide. Soit $u \in E$ et $z \in C$.

Fait 8. Si $\{x, y, z\}$ n'est pas un intervalle de $\{x, y, z, u\}$ alors il existe un 3-cycle contenant u, z et un seul des sommets x, y .

Preuve. Si $\{x, y, z\}$ n'est pas un intervalle de $\{x, y, z, u\}$ alors $\{x, y, z, u\}$ n'est pas un diamant donc contient un 3-cycle contenant u . Comme $u \notin C$ ce 3-cycle ne peut contenir x et y , donc il contient z et un seul des sommets x, y . ♦

Fait 9. Ce 3-cycle ne peut contenir y .

Preuve. Sinon, $\{u, z, y\}$ et $\{x, y, z\}$ étant deux 3-cycles, $\{x, z, u\}$ ne peut-être un 3-cycle. Compte tenu du rôle symétrique joué par x et y , ce 3-cycle ne peut contenir y . ♦

De ces deux faits, nous déduisons que x et y ne sont pas $\{z, u\}$ équivalents, contredisant la minimalité de F . Ainsi $\{x, y, z\}$ est un intervalle de $\{x, y, z, u\}$. De ceci découle que $C \cup \{x, y\}$ est un intervalle de F' , comme requis. D'où $E = \emptyset$, ceci termine la preuve de l'Affirmation 6. ♦

Pour conclure, les seuls 3-cycles inclus dans F' passent par x et y ou ne les contiennent pas. S'il n'y a pas de 3-cycle ne contenant ni x ni y alors $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ sont acycliques donc x et y sont équivalents dans T' , ce qui n'est pas le cas. Donc, il y a un 3-cycle ne contenant ni x ni y . Ce 3-cycle étant inclus dans C , il forme un D avec x et y et nous sommes dans le cas 4).

Cas 2 : Il ne passe aucun 3-cycle ni par x ni par y dans F' . Donc tous les 3-cycles de T' ont leurs sommets dans F . Considérons les composantes fortement connexes de T' , deux sommets appartiennent à une même composante fortement connexe s'ils sont égaux ou appartiennent à un même cycle (orienté). Comme T' est un tournoi, deux sommets sont dans une même composante fortement connexe s'il appartiennent à un 3-cycle. Comme il n'y a aucun cycle contenant x et aucun cycle contenant y , la composante de x est réduite à x et celle de y est réduite à y . L'ensemble de ces composantes fortement connexes forme un ordre total dans lequel les composantes de x et de y ne se suivent pas (il y a des composantes entre les deux) car sinon x et y seraient équivalents dans T' . Les composantes fortement connexes qui sont entre celles de x et de y ne sont pas toutes des singletons, car sinon x et y seraient équivalents. Donc, il y a un 3-cycle entre les deux, c'est à dire que x et y sont les extrémités d'un double diamant autodual et on est en 3). $\square$

Théorème 8.11. *Soit T un tournoi. Le nombre de classes de 2-équivalence est fini si et seulement si le nombre de classes d'équivalence est fini.*

Preuve. Si le nombre de classes d'équivalence est fini, il est évident que le nombre de classe de 2-équivalence est fini car chaque classe de 2-équivalence est une union de classes d'équivalence. Supposons que le nombre de classes de 2-équivalence soit fini et égal à k . Notons d'abord qu'une classe d'équivalence étant une composante monomorphe (Lemme 7.49) sa forme est donnée par l'assertion 2 du Lemme 8.9.

Soit C une classe de 2-équivalence. Supposons que cette classe a au moins 4 éléments. Il est facile de voir que C est acyclique, en effet, s'il existe un 3-cycle, disons x, y, z dans C , alors tout élément $t \in C \setminus \{x, y, z\}$ serait non 2-équivalent aux sommets x, y et z .

Plus fortement, aucun 3-cycle n'intersecte C en deux éléments distincts. Supposons qu'un 3-cycle xyz intersecte C en x, y avec $x < y \pmod{T}$. Soit t un élément de C distinct de x, y . Comme t est 2-équivalent à x , alors les restrictions de T à $\{x, y, z\}$ et $\{y, z, t\}$ sont isomorphes. Mais ceci est impossible puisque la restriction à $\{x, z, t\}$ n'est pas un cycle et la restriction à $\{x, y, z\}$ est un 3-cycle.

Si C est un intervalle de T , alors C est une classe d'équivalence en vertu du Lemme 8.9. Supposons que C ne soit pas un intervalle de T . Dans ce cas, il existe deux éléments distincts x, y de C qui ne sont pas dans une même composante acyclique. Appliquons le Lemme 8.8 de Boudabbous-Pouzet [25]. Le premier cas n'est pas possible d'après ce qu'on vient de voir. Le second cas n'est pas possible non plus, en effet si x, y est dans un diamant il est sur un bord, et si y est la pointe du diamant et x, z, t forment le 3-cycle alors x et y ne sont pas $\{z, t\}$ -équivalents. Reste donc le troisième cas. Soient donc u, v, w formant un 3-cycle tels que x soit la pointe d'un diamant positif et y la pointe d'un diamant négatif (un diamant est positif si le sommet x qui n'appartient pas au 3-cycle est tel que $u < x \pmod{T}$ pour tout sommet u du 3-cycle, si $x < u \pmod{T}$ pour tout sommet u du 3-cycle, le diamant est négatif). Ce 3-cycle est forcément disjoint de C . Soit z un autre élément de C , alors z, u, v, w forment un diamant (en

effet, comme x et z sont 2-équivalents et que x, u, v ne forment pas un 3-cycle, alors z, u, v n'est pas un cycle, de même on obtient que z, u, w et z, v, w non plus ; ainsi z, u, v, w ne contient qu'un 3-cycle, c'est donc un diamant. La classe C se partage en deux intervalles C^- et C^+ formés chacun des éléments qui forment avec u, v, w un diamant négatif, resp positif.

Disons que deux éléments x et y de C sont *fortement équivalents* si en supposant $x < y$ on ne peut les compléter par un 3-cycle tels que x soit la pointe d'un diamant positif et y la pointe d'un diamant négatif. Nous obtenons une relation d'équivalence dont les classes sont des intervalles de T donc des classes d'équivalence. Donc la classe C donne lieu à plusieurs classes d'équivalence définies par des 3-cycles, mais comme ces 3-cycles sont dans des classes différentes, il y a au plus $k - 1$ tels cycles ce qui donne au plus k intervalles de C . Donc le nombre de classes d'équivalence est fini. $\square$

8.2.4 Le cas des graphes dirigés

Soit $G = (V, E)$ un graphe dirigé sans boucle, donc G est une relation binaire irréflexive.

Le résultat suivant se déduit trivialement du Lemme 8.15 ci-dessous.

Théorème 8.12. *Si G est un graphe dirigé sans boucles alors la ≤ 3 -équivalence est égale à l'équivalence.*

Rappelons que ce résultat a été démontré indépendamment par Boudabbous (2013) [24].

Nous introduisons quelques notations. Soit $W := \{0, 1\}^2$. Pour tout élément $u := (a, b) \in W$, posons $\bar{u} := (b, a)$. Posons également $0 := (0, 0)$.

Soit $G := (V, E)$ un graphe dirigé sans boucle. Soit ρ la fonction caractéristique de E et d l'application de V^2 dans W définie par

$$d(x, y) := (\rho(x, y), \rho(y, x)) \text{ pour tous } x, y \in V.$$

Il est clair que $d(x, y) = \overline{d(y, x)}$ pour tous $x, y \in V$. Il est également clair que

$$d(x, y) = (1, 0) \Leftrightarrow d(y, x) = (0, 1)$$

et que

$$d(x, y) = d(y, x) \Leftrightarrow \rho(x, y) = \rho(y, x).$$

Nous disons que la paire $\{x, y\}$ est vide si $d(x, y) = 0$, *asymétrique* si $d(x, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$ et *symétrique* si $d(x, y) = (1, 1)$.

Soient $V' = \{x, y, z, t\} \subseteq V$, supposons qu'il existe dans G un chemin de longueur 2, que nous noterons P_3 , reliant les sommets x, y, z de V' avec $d(x, z) = d(z, y) = (1, 0)$.

Nous disons que V' est un *carré* de type :

1. Q_1 si $d(y, t) = d(t, x) = (1, 0)$ (les sommets de V' forment un circuit de longueur 4).
2. Q_2 si $d(y, t) = d(t, x) = (1, 1)$.
3. Q_3 si $d(y, t) = d(t, x) = (0, 0)$.

4. Q_4 si $d(y, t) = d(t, x) = (0, 1)$.

5. Q_5 si $d(y, t) = d(x, t) = (1, 0)$.

Les paires de sommets $\{x, y\}$ et $\{z, t\}$ sont les *diagonales* de ces carrés, la paire $\{x, y\}$ étant la *diagonale principale* pour chacun des carrés Q_i ($2 \leq i \leq 5$). Les valeurs de d en ces diagonales ne sont pas nécessairement égales. Ces carrés sont représentés sur la FIGURE 8.1.

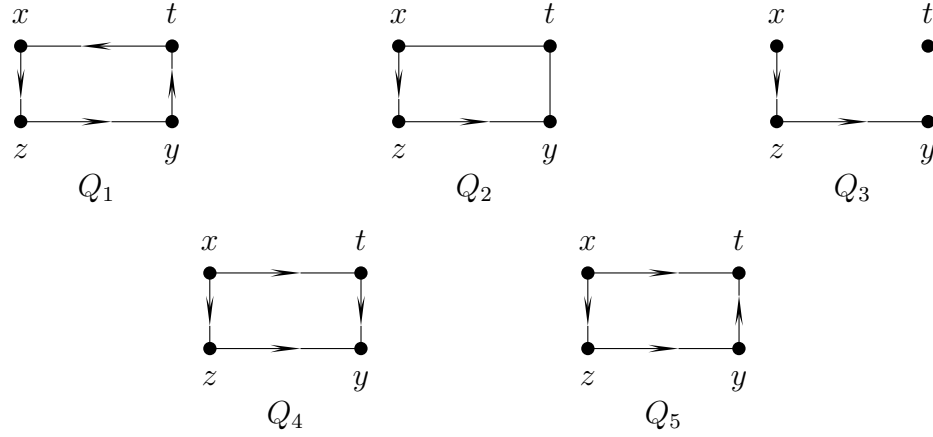


FIGURE 8.1 – Les carrés de type Q_i pour $1 \leq i \leq 5$.

De même, considérons $V'' = \{x, y, z, t, u\}$ un sous-ensemble de V . Nous disons que les sommets de V'' forment un *prisme* P si $\{x, y, z, t\}$ et $\{x, u, z, t\}$ sont deux carrés de type Q_1 , avec $d(x, z) = d(z, y) = d(y, t) = d(t, x) = (1, 0)$, et la paire $\{z, u\}$ est asymétrique. Les diagonales des deux carrés $\{x, y, z, t\}$ et $\{x, u, z, t\}$ sont les diagonales du prisme (dans notre cas se sont les paires $\{x, y\}$, $\{z, t\}$ et $\{t, u\}$), la diagonale commune (ie, $\{x, y\}$) étant la diagonale principale de P (voir FIGURE 8.2).

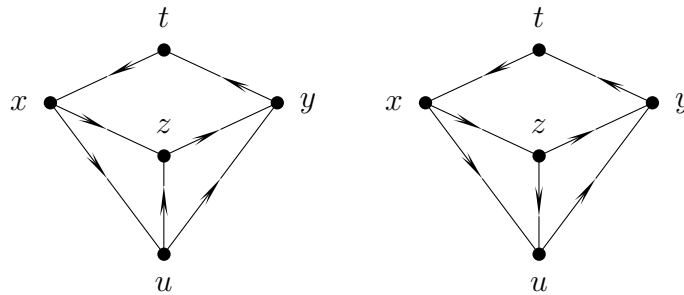


FIGURE 8.2 – Représentation des prismes.

Nous avons de manière évidente le fait suivant :

Fait 10. Deux sommets x, y de V ne sont pas 1-équivalents si et seulement s'il existe $z \in V \setminus \{x, y\}$ tel que les paires $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ ne sont pas toutes les deux vides, symétriques ou asymétriques.

Nous avons :

Lemme 8.13. *Soit $G := (V, E)$ un graphe dirigé ayant au moins quatre sommets. Deux sommets x, y de V qui sont 1-équivalents ne sont pas 2-équivalents si et seulement s'ils sont distincts et ou bien*

- (1) $\{x, y\}$ est une diagonale d'un carré de type Q_1 dont l'autre diagonale est asymétrique, ou bien
- (2) $\{x, y\}$ est la diagonale principale d'un carré de type Q_2 dont l'autre diagonale n'est pas symétrique, ou bien
- (3) $\{x, y\}$ est la diagonale principale d'un carré de type Q_3 dont l'autre diagonale n'est pas vide, ou bien
- (4) $\{x, y\}$ est la diagonale principale d'un carré de type Q_4 dont l'autre diagonale n'est pas asymétrique, ou bien
- (5) $\{x, y\}$ est une diagonale d'un carré de type Q_5 tel que l'autre diagonale est vide, symétrique ou asymétrique et dans ce dernier cas elle est dans un 3-cycle.

Preuve. La condition suffisante se vérifie facilement. Pour la condition nécessaire, soit $F = \{z, z'\}$ une partie à deux éléments de $V \setminus \{x, y\}$ telle que les restrictions de G à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne sont pas isomorphes. Posons $V' = F \cup \{x, y\}$ et $G' = G|_{V'}$.

Comme x et y sont 1-équivalents alors d'après le Fait 10, les paires $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ (resp. $\{x, z'\}$ et $\{y, z'\}$) sont toutes les deux soit vides, soit symétriques soit asymétriques.

Si $d(x, z) = d(y, z)$ et $d(x, z') = d(y, z')$ les restrictions de G à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ sont isomorphes, donc nous avons

- ou bien $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont asymétriques et $d(x, z) = d(z, y)$,
- ou bien $\{x, z'\}$ et $\{y, z'\}$ sont asymétriques et $d(x, z') = d(z', y)$.

Supposons, sans perte de généralité, que $d(x, z) = d(z, y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$. Il existe alors, dans G' , un chemin P_3 d'extrémités x, y . Nous pouvons encore supposer, sans perte de généralité, que $d(x, z) = d(z, y) = (1, 0)$, nous avons alors deux cas :

Cas 1 : $d(x, z') = d(z', y) \in \{(1, 0), (0, 1)\}$, alors

1-a) si $d(x, z') = d(z', y) = (1, 0)$ alors la paire $\{z, z'\}$ ne peut pas être asymétrique car sinon x et y seraient $\{z, z'\}$ -équivalents et on est dans le cas (4) du lemme,

1-b) si $d(x, z') = d(z', y) = (0, 1)$, alors $\{z, z'\}$ ne peut pas être vide ou symétrique car sinon x et y seraient $\{z, z'\}$ -équivalents. Donc $\{z, z'\}$ est asymétrique et on est dans le cas (1) du lemme.

Cas 2 : $d(x, z') = d(y, z')$, nous avons alors quatre cas :

2-a) $d(x, z') = d(y, z') = (1, 0)$ alors $d(z, z') \neq (1, 0)$ car sinon x et y seraient $\{z, z'\}$ -équivalents et on est dans le cas (5) du lemme.

2-b) $d(x, z') = d(y, z') = (0, 1)$, nous avons la même conclusion que dans le cas **2-a)** ci-dessus.

2-c) $d(x, z') = d(y, z') = (0, 0)$ alors $d(z, z') \neq (0, 0)$ car sinon x et y seraient $\{z, z'\}$ -équivalents et on est dans le cas (3) du lemme.

2-d) $d(x, z') = d(y, z') = (1, 1)$ alors $d(z, z') \neq (1, 1)$ car sinon x et y seraient $\{z, z'\}$ -équivalents et on est dans le cas (2) du lemme. $\square$

Remarque 8.14. Les cas 1) et 2) du Lemme 8.10 se retrouvent respectivement dans le cas (1) pour $\{x, y\}$ assymétrique et le cas (5) pour $d(x, y) = (1, 0)$ et $\{z, z'\}$ assymétrique du Lemme 8.13.

Lemme 8.15. Soit $G := (V, E)$ un graphe dirigé. Deux sommets x, y de V qui sont ≤ 2 -équivalents ne sont pas équivalents si et seulement s'ils sont distincts et ou bien

- (1) il existe trois sommets de V qui forment avec l'un des sommets x, y un diamant positif et avec l'autre un diamant négatif, ou bien
- (2) $\{x, y\}$ est la diagonales principale d'un prisme dont chacune des autres diagonales est soit vide soit symétrique.

Preuve. La condition suffisante est facile à vérifier. Pour la condition nécessaire, soit F une partie minimale de $V \setminus \{x, y\}$ telle que les restrictions de G à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne soient pas isomorphes. Les sommets x et y étant ≤ 2 -équivalents, F a au moins trois éléments. D'après le Fait 10, pour tout $z \in F$, les paires $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont toutes les deux soit vides, soit symétriques soit assymétriques. Si $d(x, z) = d(y, z)$ pour tout $z \in F$ les restrictions de G à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ sont isomorphes, ce qui contredit le choix de F . Donc il existe $z \in F$ tel que $\{x, z\}$ et $\{y, z\}$ sont assymétriques et $d(x, z) = d(z, y)$. Posons

$$D = \{z \in F : d(x, z) \neq d(y, z)\},$$

et $D' = F \setminus D$.

Il est clair que $D \neq \emptyset$.

Affirmation 7. $D' = \emptyset$.

Preuve. Supposons $D' \neq \emptyset$. Soit $z \in D$ et $h \in D'$. Alors comme x et y sont 2-équivalents, les restrictions de G à $\{x, z, h\}$ et à $\{y, z, h\}$ sont isomorphes. On constate facilement qu'il n'y a qu'un isomorphisme, celui qui fixe h , envoie x sur z et z sur y . Par conséquent $d(z, h) = d(y, h) = d(x, h)$. Il s'ensuit que $D \cap \{x, y\}$ est un intervalle Fraïssé de $G_{\upharpoonright_{F \cup \{x, y\}}}$. Ceci contredit le Lemme 7.51. $\diamond$

Donc $F = D$, nous avons alors deux cas.

Cas 1 : $d(x, z)$ est constante pour tout $z \in F$. Dans ce cas, pour tous $z, z' \in F$, les sommets x, y, z, z' forment un carré de type Q_4 et la 2-équivalence de x, y impose à $\{z, z'\}$ d'être assymétrique d'après le Lemme 8.13, donc $G_{\upharpoonright_F}$ est un tournoi.

Affirmation 8. F possède un 3-cycle.

Preuve. Si F n'a pas de 3-cycle alors $G_{\upharpoonright_F}$ est un ordre total strict. Comme $d(x, z)$ est constante, $G_{\upharpoonright_{F \cup \{x\}}}$ est un ordre total strict. De même $G_{\upharpoonright_{F \cup \{y\}}}$. Et donc les restrictions de G à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ sont isomorphe, ce qui est impossible de par la définition de F . $\diamond$

Soient alors a, b, c les sommets du 3-cycle de F , alors les restrictions de G à $\{a, b, c, x\}$ et $\{a, b, c, y\}$ sont des diamants, l'un positif et l'autre négatif et on est dans le cas (1) du Lemme 8.15.

Cas 2 : il existe deux sommets $a, b \in F$ tels que $d(x, a) \neq d(x, b)$, ce qui signifie que $d(x, a) = d(b, x)$. Supposons, sans perte de généralité que $d(x, a) = d(b, x) = (1, 0)$. Donc les sommets x, y, a, b forment un carré de type Q_1 et ceci, en vertu du Lemme 8.13, impose à $\{a, b\}$ d'être vide ou symétrique.

Comme $|F| \geq 3$, il existe $c \in F \setminus \{a, b\}$ tel que l'un parmi les deux sous-ensembles $\{x, y, a, c\}$ et $\{x, y, b, c\}$ forme un carré de type Q_1 et l'autre un carré de type Q_4 . Plus précisément, c vérifie ou bien $d(x, c) = d(x, a)$ ou bien $d(x, c) = d(x, b)$. Supposons, sans perte de généralité, que $d(x, c) = d(x, a)$. Dans ce cas le sous-ensemble $\{x, y, a, c\}$ forme un carré de type Q_4 et le sous-ensemble $\{x, y, b, c\}$ forme un carré de type Q_1 . Comme x et y sont 2-équivalents, le Lemme 8.13 impose à $\{a, c\}$ d'être asymétrique et à $\{b, c\}$ d'être vide ou symétrique. Les sommets $\{x, y, a, b, c\}$ forment alors un prisme de diagonale principale $\{x, y\}$ et chacune des deux autres diagonales $\{a, b\}$ et $\{b, c\}$ est vide ou symétrique. On est dans le cas (2) du Lemme 8.15. $\square$

Remarque 8.16. Les cas 3) et 4) du Lemme 8.10 se retrouvent dans le cas (1) du Lemme 8.15.

8.2.5 Le cas des structures binaires

Dans cette sous-section nous utilisons les définitions et notations introduites dans la sous-section 8.2.4.

Théorème 8.17. Si $\mathcal{R}$ est une structure binaire de type k , $k \in \mathbb{N}$, alors la ≤ 3 -équivalence est égale à l'équivalence.

Ce résultat se déduit trivialement du Lemme 8.20 ci dessous.

Soit $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire de type k , $k \geq 2$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, identifions la relation ρ_i à sa fonction caractéristique et posons

$$d_i(x, y) := (\rho_i(x, y), \rho_i(y, x)) \text{ pour tous } x, y \in E.$$

Pour $u := (u_i)_{i=1, \dots, k}$ posons $\bar{u} := (\bar{u}_i)_{i=1, \dots, k}$. Soit d l'application de V^2 dans W définie par $d(x, y) := (d_i(x, y))_{i=1, \dots, k}$. Nous avons $d(x, y) = \overline{d(y, x)}$.

Nous avons de manière évidente le lemme suivant :

Lemme 8.18. Soit $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire de type k où E possède au moins trois éléments. Deux éléments x et y de E sont 1-équivalents si et seulement si $d(x, z) = d(y, z)$ ou $d(x, z) = d(z, y)$ pour tout $z \in E \setminus \{x, y\}$.

Posons pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, $\mathcal{R}_i := (E, \rho_i)$. Pour tout i , $\mathcal{R}_i$ est un graphe dirigé. Remarquons que si $x \simeq_{n, \mathcal{R}} y$, $n \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ on a $x \simeq_{n, \mathcal{R}_i} y$. La réciproque est fausse.

Nous avons :

Lemme 8.19. Soit $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire de type k où E possède au moins quatre éléments. Deux sommets x, y de E qui sont 1-équivalents ne sont pas 2-équivalents si et seulement si ils sont distincts et ou bien

1. il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $x \not\succeq_{2, \mathcal{R}_i} y$, ou bien
2. $x \simeq_{2, \mathcal{R}_i} y, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ et il existe $i \neq j$ et $z, z' \in E \setminus \{x, y\}$ tels que l'on ait une seule des situations suivantes.
 - (a) Dans $\mathcal{R}_i, \{x, y, z, z'\}$ est un carré de type Q_1 de diagonale principale $\{x, y\}$ avec $\{z, z'\}$ vide ou symétrique et dans $\mathcal{R}_j, \{x, y, z, z'\}$ est un carré de type Q_4 de diagonale principale $\{x, y\}$ avec $\{z, z'\}$ asymétrique.
 - (b) Pour chacune des structures $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j, F = \{x, y, z, z'\}$ est un carré de type Q_4 de diagonale principale $\{x, y\}$ avec $\{z, z'\}$ asymétrique tel que l'isomorphisme f qui envoie $\mathcal{R}_i|_F$ sur $\mathcal{R}_j|_F$ fixe une seule des paires $\{x, y\}$ ou $\{z, z'\}$.

Preuve. On vérifie facilement que ces conditions sont suffisante. Voyons qu'elles sont nécessaires. Soient donc x et y deux éléments 1-équivalents qui ne sont pas 2-équivalents. Nous avons deux cas.

Cas 1 : Il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $x \not\succeq_{2, \mathcal{R}_i} y$. C'est la condition 1. du Lemme 8.19.

Cas 2 : Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, on a $x \simeq_{2, \mathcal{R}_i} y$. Comme x et y sont 1-équivalents, d'après le Lemme 8.18 nous avons trois cas :

2.1 : Pour tout $z \in E \setminus \{x, y\}, d_i(x, z) = d_i(y, z), \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Dans ce cas, pour toute partie A à deux éléments de $E \setminus \{x, y\}$, l'application f qui envoie x sur y et fixe les éléments de A est un isomorphisme de $\mathcal{R}|_{A \cup \{x\}}$ sur $\mathcal{R}|_{A \cup \{y\}}$. Il s'ensuit que x et y sont 2-équivalents, ce qui contredit l'hypothèse, donc ce cas ne peut pas se présenter.

2.2 : Il existe $z \neq z'$ tels que

$$d_i(x, z) = d_i(y, z), \forall i \in \{1, \dots, k\},$$

$$\text{et } d_i(x, z') = d_i(z', y) \neq d_i(y, z'), \forall i \in \{1, \dots, k\}.$$

Donc les paires $\{x, z'\}$ et $\{y, z'\}$ sont asymétriques et pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $\{x, y, z, z'\}$ a l'une des formes données dans la FIGURE 8.3.

Posons $F = \{x, y, z, z'\}$. Dans les graphes (i) et (i') de la FIGURE 8.3, F est un carré de type Q_3 . Dans (ii) et (ii'), F est un carré de type Q_2 et dans (iii), (iv), (iii') et (iv'), F est un carré de type Q_5 .

Comme $x \simeq_{2, \mathcal{R}_i} y$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le Lemme 8.13 permet d'avoir la relation entre z et z' dans chacun des cas. On obtient :

- $\{z, z'\}$ est vide dans (i) et (i').
- $\{z, z'\}$ est symétrique dans (ii) et (ii').
- $\{z, z'\}$ est asymétrique et n'appartient pas à un 3-cycle dans les autres cas.

Dans chacun des cas ci-dessus, l'application f qui fixe z et envoie x sur z' et z' sur y est un isomorphisme de $\mathcal{R}|_{\{x, z, z'\}}$ sur $\mathcal{R}|_{\{y, z, z'\}}$. Ceci signifie que x et y sont 2-équivalents, ce qui contredit l'hypothèse. Ce cas ne peut donc pas se présenter.

2.3 : Pour tout $z \in E \setminus \{x, y\}, d_i(x, z) = d_i(z, y) \neq d_i(y, z), \forall i \in \{1, \dots, k\}$. Donc, pour tous $z, z' \in E \setminus \{x, y\}, z \neq z'$, la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F = \{x, y, z, z'\}$ a l'une des formes données dans la FIGURE 8.4 suivante.

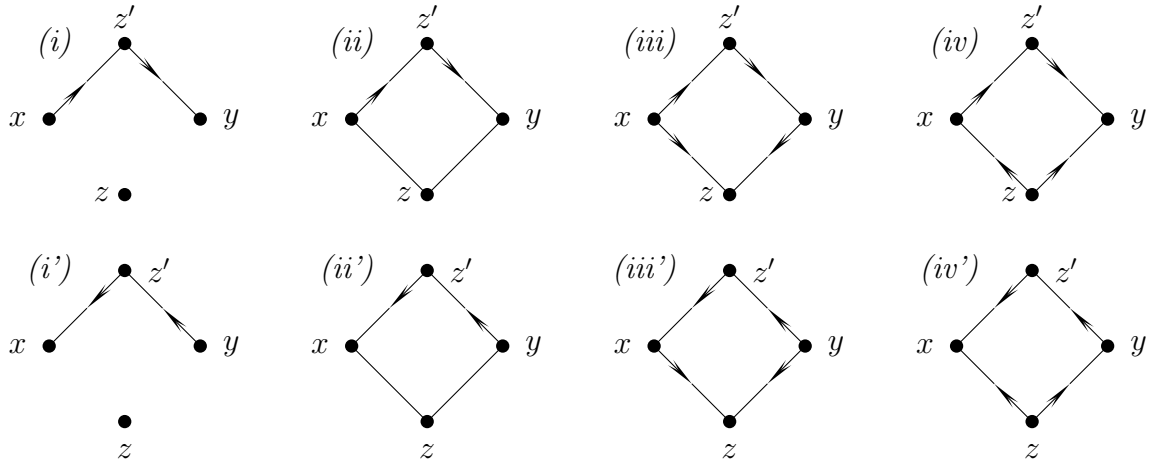


FIGURE 8.3 –

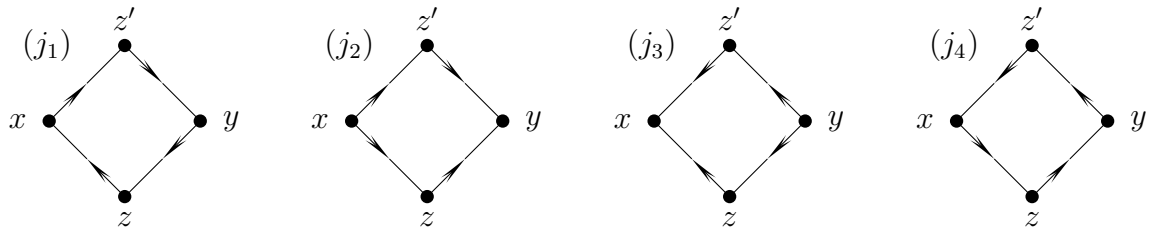


FIGURE 8.4 –

Dans les graphes (j_1) et (j_4) de la FIGURE 8.4, F est un carré de type Q_1 et dans (j_2) et (j_3) , F est un carré de type Q_4 .

Comme $x \simeq_{2, \mathcal{R}_i} y$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, le Lemme 8.13 donne :

- $\{z, z'\}$ est vide ou symétrique dans (j_1) et (j_4) .
- $\{z, z'\}$ est asymétrique dans (j_2) et (j_3) .

Les configurations de la FIGURE 8.4 donnent alors lieu aux huit configurations de la FIGURE 8.5 suivante.

Remarquons que les configurations (j'_1) et (j'_4) sont isomorphes ainsi que (j''_1) et (j''_4) et l'isomorphisme dans ces deux situations est le même, il permute x et y et fixe z et z' . Si la restriction de $\mathcal{R}_i$ à F a l'une des formes (j'_1) , (j''_1) , (j'_4) et (j''_4) pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ alors x et y sont 2-équivalents, donc ceci ne peut pas avoir lieu.

Remarquons également que les configurations (j'_2) , (j'_3) , (j''_2) et (j''_3) sont isomorphes. Les isomorphismes les reliant deux à deux sont de trois types :

- Soit il permute x et y et fixe z et z' comme c'est le cas pour l'isomorphisme reliant les graphes (j'_2) et (j'_3) et celui reliant les graphes (j''_2) et (j''_3) .
- Soit il fixe x et y et permute z et z' comme c'est le cas pour l'isomorphisme reliant les graphes (j'_2) et (j''_2) et celui reliant les graphes (j'_3) et (j''_3) .
- Soit il permute x et y et permute z et z' comme c'est le cas pour l'isomorphisme reliant les graphes (j'_2) et (j''_3) et celui reliant les graphes (j''_2) et (j'_3) .

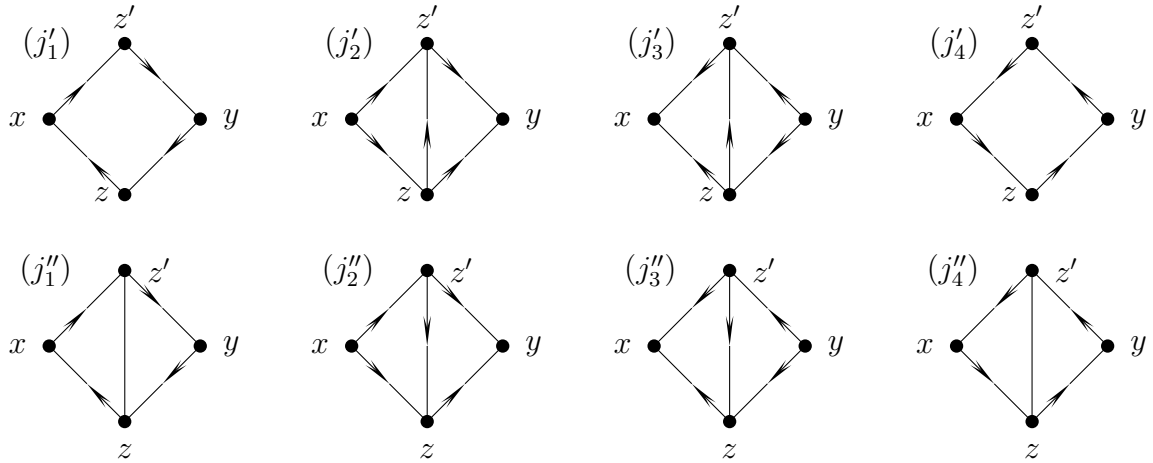


FIGURE 8.5 –

On vérifie que si la restriction de $\mathcal{R}_i$ à F est soit dans $\{(j'_2), (j'_3)\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, soit dans $\{(j''_2), (j'_3)\}$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, alors x et y sont 2-équivalents, donc ceci ne peut pas avoir lieu.

Il s'ensuit qu'il existe $i \neq j$ et $z, z' \in E \setminus \{x, y\}$ tels que l'on ait l'une des deux situations suivantes :

- ou bien la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F = \{x, y, z, z'\}$ est dans l'ensemble $\{(j'_1), (j''_1), (j'_4), (j''_4)\}$ et celle de $\mathcal{R}_j$ à F dans l'ensemble $\{(j'_2), (j''_2), (j'_3), (j''_3)\}$ et on est dans le cas 2.(a) du Lemme 8.19.
- ou bien la paire de restrictions $\{\mathcal{R}_{i|_F}, \mathcal{R}_{j|_F}\}$ est dans l'ensemble

$$\left\{ \{(j'_2), (j'_3)\}; \{(j''_2), (j''_3)\}; \{(j'_2), (j''_2)\}; \{(j'_3), (j''_3)\} \right\}$$

et on est dans le cas 2.(b) du Lemme 8.19. Ceci termine la preuve. $\square$

Soient E un ensemble, $x, y \in E$ et $F = \{a, b, c\} \subseteq E \setminus \{x, y\}$. Désignons par $A_{x \rightarrow y}^F$ l'ensemble de toutes les relations binaires ρ , définies sur $F \cup \{x, y\}$ tels que les éléments de F forment une chaîne pour ρ , $d_\rho(x, z) = (1, 0)$ et $d_\rho(y, z) = (0, 1)$ pour tout $z \in F$, où $d_\rho(x, y) := (\rho(x, y), \rho(y, x))$, la relation ρ étant identifiée à sa fonction caractéristique. L'ensemble $A_{x \rightarrow y}^F$ contient six relations qui sont toutes isomorphes. En inversant les relations sur x et y on obtient $A_{y \rightarrow x}^F$.

Lemme 8.20. Soit $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire de type k . Deux éléments x, y de E qui sont ≤ 2 -équivalents ne sont pas équivalents si et seulement s'ils sont distincts et ou bien

1. il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que x et y ne sont pas équivalents dans $\mathcal{R}_i$, ou bien
2. il existe $i \neq j$ tels que l'on ait une seule parmi les deux situations suivante :
 - (a) les relations $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j$ abritent chacune un élément de $A_{x \rightarrow y}^F$ (ou chacune un élément de $A_{y \rightarrow x}^F$) pour une partie à trois éléments F de $E \setminus \{x, y\}$, ces deux éléments étant distincts.

- (b) Il existe une partie F à trois éléments de $E \setminus \{x, y\}$ telle que l'une des deux relations $\mathcal{R}_i$ ou $\mathcal{R}_j$ abrite un élément de $A_{x \rightarrow y}^F$, l'autre un élément de $A_{y \rightarrow x}^F$ tels que les deux ordres reliant les éléments de F ne soient pas inverses l'un de l'autre.

Soient $x, y \in E$ et $i \in \{1, \dots, k\}$. Pour $\mathcal{R}_i := (E, \rho_i)$, considérons les sous-ensembles de E suivants :

$$\begin{aligned} A_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(y, z) = (1, 1)\}, \\ B_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(y, z) = (1, 0)\}, \\ B'_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(y, z) = (0, 1)\}, \\ C_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(y, z) = (0, 0)\}, \\ D_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(z, y) = (1, 0)\}, \\ D'_i &= \{z \in E \setminus \{x, y\} : d_i(x, z) = d_i(z, y) = (0, 1)\}, \end{aligned}$$

L'ensemble $\{A_i, B_i, B'_i, C_i, D_i, D'_i\}$ est une partition de $E \setminus \{x, y\}$. Nous avons les remarques suivantes :

Remarques 8.21. Si x et y sont ≤ 2 -équivalents pour $\mathcal{R}_i$, le Lemme 8.13 donne :

- les restrictions de $\mathcal{R}_i$ à D_i et à D'_i sont des tournois,
- $\{z, z'\}$ est symétrique $\forall z \in A_i, \forall z' \in D_i \cup D'_i$,
- $\{z, z'\}$ est vide $\forall z \in C_i, \forall z' \in D_i \cup D'_i$,
- $\{z, z'\}$ est symétrique ou vide $\forall z \in D_i, \forall z' \in D'_i$,
- $d_i(z, z') = (1, 0), \forall z \in B'_i, \forall z' \in D_i \cup D'_i$,
- $d_i(z, z') = (1, 0), \forall z \in D_i \cup D'_i, \forall z' \in B_i$,

De ceci nous pouvons déduire que si $A_i \cup B_i \cup B'_i \cup C_i \neq \emptyset$ alors :

- Pour toute partie non vide F de $A_i \cup B_i \cup B'_i \cup C_i$, l'application qui envoie x sur y et fixe les éléments de F est un isomorphisme de la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F \cup \{x\}$ sur la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F \cup \{y\}$.

- Pour toute partie non vide F de $E \setminus \{x, y\}$ telle que $F \cap (D_i \cup D'_i) = \{a\}$, l'application qui envoie x sur a , a sur y et fixe les autres éléments de F est un isomorphisme de la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F \cup \{x\}$ sur la restriction de $\mathcal{R}_i$ à $F \cup \{y\}$.

- $d_i(z, z') = d_i(z, x) = d_i(z, y), \forall z \in A_i \cup B_i \cup B'_i \cup C_i, \forall z' \in D_i \cup D'_i$,

Donc si $A_i \cup B_i \cup B'_i \cup C_i \neq \emptyset$ alors $\{x, y\} \cup D_i \cup D'_i$ est un intervalle de $\mathcal{R}_i$.

Remarquons, d'après le Lemme 8.18, que si x et y sont 1-équivalents, alors pour tout $z \in E \setminus \{x, y\}$ nous avons ou bien $z \in D_i \cup D'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ ou bien $z \in E \setminus \{x, y\} \setminus D_i \cup D'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$. Posons alors dans ce cas $D = \{z \in E \setminus \{x, y\} : d(x, z) \neq d(y, z)\}$.

Preuve du Lemme 8.20. La condition suffisante se vérifie facilement. Pour la condition nécessaire, soit F une partie minimale de $E \setminus \{x, y\}$ telle que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne soient pas isomorphes. Les éléments x et y étant ≤ 2 -équivalents, F a au moins trois éléments. Si, $F \cap D = \emptyset$, alors $\mathcal{R}|_{F \cup \{x\}}$ et $\mathcal{R}|_{F \cup \{y\}}$ sont isomorphes. Donc $F \cap D \neq \emptyset$.

Si $F \cap (E \setminus D) \neq \emptyset$ alors, d'après ce qui précède, $F \cap D \cup \{x, y\}$ est un intervalle Fraïssé de $\mathcal{R}|_{F \cup \{x, y\}}$, ce qui contredit le Lemme 7.51. Donc $F \subseteq D$.

Soit $F' = \{a, b, c\} \subseteq F$. Pour chacune des relations $\mathcal{R}_i := (E, \rho_i)$, $i \in \{1, \dots, k\}$, nous avons les cas suivants :

- (a) $|F' \cap D_i| = 1$,
- (b) $|F' \cap D_i| = 2$,
- (c) $F \subseteq D_i$.

(Remarquons qu'il y a une symétrie entre D_i et D'_i , donc en raisonnant sur D'_i au lieu de D_i nous aurons les mêmes conclusions).

Donc pour $\mathcal{R}$, nous avons les cas suivants :

Cas 1 : Il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\mathcal{R}_i$ vérifie la condition (a) ci-dessus, ie, $|F' \cap D_i| = 1$. Supposons $a \in F' \cap D_i$, donc $b, c \in F' \cap D'_i$. Alors, les éléments de l'ensemble $\{x, y, a, b, c\}$ forment un prisme de diagonale principale $\{x, y\}$ les autres diagonales sont vides ou symétriques. D'après le Lemme 8.15, x, y ne sont pas équivalents dans $\mathcal{R}_i$ et on est dans le cas (1) du Lemme 8.20.

Cas 2 : Il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\mathcal{R}_i$ vérifie la condition (b) ci-dessus, ie, $|F' \cap D_i| = 2$. Nous avons la même conclusion que dans le cas 1 précédent.

Cas 3 : Il n'existe pas de $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\mathcal{R}_i$ vérifie l'une des conditions (a) ou (b) ci-dessus, donc $\mathcal{R}_i$ vérifie la condition (c) $\forall i \in \{1, \dots, k\}$. D'après les Remarques 8.21 précédentes, pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la restriction de $\mathcal{R}_i$ à F' est un tournoi. Nous avons alors deux situations :

1. il existe $i \in \{1, \dots, k\}$ tel que $\mathcal{R}_{i|_{F'}}$ est un 3-cycle. Dans ce cas F' forme avec x un diamant négatif et avec y un diamant positif. D'après le Lemme 8.15, x, y ne sont pas équivalents dans $\mathcal{R}_i$ et on est encore dans le cas (1) du Lemme 8.20.
2. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, la restriction $\mathcal{R}_{i|_{F'}}$ est une chaîne. Dans ce cas $\mathcal{R}_{i|_{F' \cup \{x, y\}}} \in A_{x \rightarrow y}^{F'}$. Il est facile de vérifier que les restrictions de toute relation $\rho \in A_{x \rightarrow y}^{F'}$ à $F' \cup \{x\}$ et $F' \cup \{y\}$ sont isomorphes et cet isomorphisme f , dans le cas où $a \leq_\rho b \leq_\rho c$, est donné par : $f(x) = a, f(a) = b, f(b) = c$ et $f(c) = y$. Donc si nous avons deux relations $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j$, $i \neq j$, telles que leurs restrictions à $F' \cup \{x, y\}$ sont dans $A_{x \rightarrow y}^{F'}$ et sont distinctes alors $x \not\sim_{\mathcal{R}} y$ et nous sommes dans le cas 2.(a) du Lemme 8.20. Et dans le cas où $\mathcal{R}_{i|_{F' \cup \{x, y\}}} \in A_{x \rightarrow y}^{F'}$ et $\mathcal{R}_{j|_{F' \cup \{x, y\}}} \in A_{y \rightarrow x}^{F'}$ alors $x \not\sim_{\mathcal{R}} y$ sauf si les chaînes reliant a, b, c dans $\mathcal{R}_i$ et $\mathcal{R}_j$ sont duales l'une de l'autre et nous sommes dans le cas 2.(b) du Lemme 8.20.

Ceci termine la preuve. □

8.2.6 Le cas des structures binaires ordonnées

Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire ordonnée de type k , où chacune des relations ρ_i est identifiée à sa fonction caractéristique. Posons $C := (E, \leq)$.

Pour tous $x, y \in E$ et tout $1 \leq i \leq k$, posons $d_i(x, y) := (\rho_i(x, y), \rho_i(y, x))$. Notons par $I_{\leq}(x, y)$ le sous-ensemble des éléments $z \in E$ qui sont entre x et y modulo $\leq$, c'est à dire le plus petit intervalle de C contenant x, y .

Nous avons de manière évidente

Fait 11. Deux sommets x et y de E sont 1-équivalents si et seulement si pour tout $1 \leq i \leq k$ on a

$$\begin{cases} d_i(x, z) = d_i(z, y) & \text{si } z \in I_{\leq}(x, y), \\ d_i(x, z) = d_i(y, z) & \text{si } z \notin I_{\leq}(x, y) \end{cases}$$

Lemme 8.22. Soit $\mathcal{R}$ une structure binaire ordonnée de type k définie sur E ayant au moins trois éléments.

- (1) Si deux éléments x et y sont 1-équivalents alors tous les éléments de $I_{\leq}(x, y)$ sont 0-équivalents.
- (2) Si deux éléments x et y sont 2-équivalents alors $I_{\leq}(x, y)$ est un intervalle de $\mathcal{R}$.
- (3) Si E a au moins cinq éléments et x et y sont 2-équivalents alors les restrictions de $\mathcal{R}$ à $I_{\leq}(x, y) \setminus \{x\}$ et $I_{\leq}(x, y) \setminus \{y\}$ sont 2-monomorphes donc isomorphes.

Preuve. Le (1) du lemme vient directement du fait que si deux restrictions de $\mathcal{R}$ sont isomorphes, l'isomorphisme est unique.

Pour le (2) si $I_{\leq}(x, y) = \{x, y\}$ le résultat est évident d'après le Fait 11. Si $I_{\leq}(x, y) \neq \{x, y\}$, soit $z \in I_{\leq}(x, y) \setminus \{x, y\}$ et $a \notin I_{\leq}(x, y)$. Il est facile de voir que $d_i(a, z) = d_i(a, x) = d_i(a, y)$ pour tout $1 \leq i \leq k$, en effet x et y étant 2-équivalents, les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x, a, z\}$ et $\{y, a, z\}$ sont isomorphes et l'isomorphisme est unique.

Pour la preuve de l'assertion (3), d'après le Corollaire 7.53, x et y sont 1-équivalents. Le résultat est évident si $I_{\leq}(x, y)$ a deux éléments et si $I_{\leq}(x, y)$ a trois éléments, il se déduit de la 1-équivalence de x et y . Si $I_{\leq}(x, y)$ a au moins quatre éléments, il suffit de montrer que pour tous $z, z' \in I_{\leq}(x, y) \setminus \{x, y\}$, les restrictions à $\{x, z, z'\}$ et $\{y, z, z'\}$ sont 2-monomorphes. Les restrictions à $\{x, z, z'\}$ et $\{y, z, z'\}$ sont isomorphes et l'isomorphisme est unique. Donc si on suppose $x < z < z' < y$, cet isomorphisme envoie x sur z , z sur z' et z' sur y . On a donc pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$d_i(x, z) = d_i(z, z') = d_i(z', y)$$

et

$$d_i(x, z') = d_i(z, y).$$

Nous devons montrer que pour tout $1 \leq i \leq k$,

$$d_i(x, z) = d_i(z, z') = d_i(z', y) = d_i(x, z') = d_i(z, y).$$

Ceci vient du fait que E a au moins cinq éléments, donc il existe $a \in E \setminus \{x, y, z, z'\}$. Si $a \notin I_{\leq}(x, y)$ on utilise le fait que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{a, x, z\}$ et $\{a, y, z\}$ sont isomorphes et si $a \in I_{\leq}(x, y)$ on utilise le fait que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{a, x, z\}$ et $\{a, y, z\}$ resp. à $\{a, x, z'\}$ et $\{a, y, z'\}$ sont isomorphes. $\square$

Du Lemme 8.22 nous déduisons

Théorème 8.23. Les relations d'équivalence $\simeq_{\leq 2, \mathcal{R}}$ et $\simeq_{\mathcal{R}}$ coïncident.

Preuve. Supposons que deux éléments x et y soient ≤ 2 -équivalents mais non équivalents. Il existe alors un sous-ensemble F d'au moins trois éléments tel que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ ne sont pas isomorphes. Il est clair que $F \subseteq I_{\leq}(x, y)$ car sinon $I_{\leq}(x, y)$ serait un intervalle de $\mathcal{R}_{|_{F \cup \{x, y\}}}$ ce qui contredirait le Lemme 7.51. D'après (3) du Lemme 8.22, on déduit que les restrictions de $\mathcal{R}$ à $F \cup \{x\}$ et $F \cup \{y\}$ sont isomorphes, ce qui contredit l'hypothèse. Donc x et y sont équivalents. $\square$

De la Proposition 7.41, le Lemme 7.49 et le Lemme 7.10 nous avons

Lemme 8.24. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire ordonnée de type k . Toute classe d'équivalence d'au moins trois éléments est un intervalle de $\mathcal{R}$, donc un intervalle de $\leq$, sur lequel toute relation ρ_i qui est réflexive est soit une chaîne qui coïncide ou est opposée à $\leq$, soit une clique réflexive, soit une antichaîne et toute relation ρ_i qui est irréflexive est soit un tournoi acyclique qui coïncide ou est opposé à l'ordre strict $<$, soit une clique ou une relation vide. Inversement, un intervalle de $\mathcal{R}$ n'est pas nécessairement une classe de 1-équivalence, mais tout intervalle qui est contenu dans une classe de 1-équivalence est contenu dans une classe d'équivalence.*

Preuve. Du Lemme 7.49 nous avons que toute classe d'équivalence est une composante monomorphe. De la Proposition 7.41 nous avons que toute composante monomorphe ayant au moins trois éléments est un intervalle monomorphe maximal, donc un intervalle de $\mathcal{R}$. La forme des relations ρ_i vient du (3) du Lemme 8.22 et du Lemme 7.10.

Pour l'inverse, le fait que tout intervalle qui est contenu dans une classe de 1-équivalence est contenu dans une classe d'équivalence est dû à la forme des classes de 1-équivalence donnée par le Fait 7 (en page 165) et le Corollaire 7.12. Pour voir qu'un intervalle de $\mathcal{R}$ n'est pas nécessairement une classe de 1-équivalence, voici un contre-exemple. Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho)$ où $E = \{x, y, z, t\}$ avec

$$x < y < z < t \text{ et } \rho = \{(x, y), (x, z), (x, t), (z, t), (t, z)\}.$$

$A = \{y, z, t\}$ est un intervalle de $\mathcal{R}$ mais n'est pas une classe de 1-équivalence car y et z ne sont pas $\{t\}$ -équivalents. Les classes de 1-équivalence sont $\{x\}$, $\{y\}$ et $\{z, t\}$. Ces classes sont également des classes d'équivalence. $\square$

Lemme 8.25. *Si deux classes d'équivalence sont telles que leur union est un intervalle de $\leq$ alors elles ne sont pas contenues dans une même classe de 1-équivalence.*

Preuve. Ceci est dû au fait que si deux éléments x et y sont tels que $I_{\leq}(x, y) = \{x, y\}$ alors x et y sont 1-équivalents si et seulement si ils sont équivalents car dans ce cas $\{x, y\}$ est un intervalle de $\mathcal{R}$ d'après le Fait 11 (en page 196). $\square$

Comme conséquence du Fait 11, du Théorème 8.23 et du Lemme 8.22 nous avons :

Lemme 8.26. *Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire ordonnée de type k . Deux sommets x, y de E ne sont pas équivalents si et seulement si ils sont distincts et ou bien*

1. x, y ne sont pas 1-équivalent, ou bien

2. x, y sont 1-équivalents et une seule parmi les deux conditions suivantes a lieu ;

- (a) Il existe $z, z' \in I_{\leq}(x, y) \setminus \{x, y\}$ tels que ou bien $d_i(x, z) \neq d_i(x, z')$ ou bien $d_i(x, z) \neq d_i(z, z')$ pour un $1 \leq i \leq k$.
- (b) Il existe $z \in I_{\leq}(x, y) \setminus \{x, y\}$ et $z' \notin I_{\leq}(x, y)$ tels que $d_i(z', z) \neq d_i(z', x) = d_i(z', y)$ pour un $1 \leq i \leq k$.

Le Lemme 8.26 stipule que si deux sommets x, y sont 1-équivalents mais non équivalents, alors les classes d'équivalence C_x et C_y de x et y respectivement sont séparées par au moins une troisième classe C_z ($C_z \subseteq I_{\leq}(x, y)$) qui n'appartient pas à la même classe de 1-équivalence que C_x et C_y .

8.3 Structures binaires ayant une infinité de classes d'équivalence. Application au profil

Dans cette section, nous montrons que la Conjecture 3 (page 174) est vraie dans le cas des graphes non dirigés et des graphes dirigés ordonnés et que la réciproque du Théorème 7.62 est vraie dans le cas des structures binaires ordonnées.

Dans le cas des graphes non dirigés (sans boucle) nous avons

Théorème 8.27. *Il existe un ensemble $\mathfrak{A}$ formé de dix graphes infinis tel que tout graphe qui ne se décompose pas en une somme lexicographique finie de cliques et d'indépendants abrite une copie de l'un de ces graphes.*

Dans le cas des graphes dirigés ordonnés, nous avons le résultat suivant si nous remplaçons $\mathcal{S}_\mu$, dans la Conjecture 3, par la classe $\mathcal{D}$ formée de graphes dirigés ordonnés qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie :

Théorème 8.28. *Il existe un ensemble $\mathfrak{A}$ formé de mille deux cent quarante six graphes (dirigés) ordonnés tel que tout élément de $\mathcal{D}$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$.*

Nous avons montré, dans le Théorème 7.62 que toute structure ordonnée qui possède une décomposition monomorphe finie et ainsi toute classe formée de telles structures, a un profil polynômial. De manière générale, une structure relationnelle infinie ayant un profil borné par un polynôme n'a pas forcément une décomposition monomorphe finie, sauf si la structure est binaire ordonnée (des exemples de graphes sans décomposition monomorphe finie ayant un profil polynômial sont donnés en page 202). Ceci est une conséquence du résultat suivant dont la preuve s'appuie, en partie, sur le Théorème 8.28 :

Théorème 8.29. *Si une structure binaire ordonnée $\mathcal{R}$, de type k , a une décomposition monomorphe finie alors le profil de son âge $\text{Age}(\mathcal{R})$ est un polynôme, autrement ce profil est au moins exponentiel.*

Ce résultat de dichotomie s'étend aux classes héréditaires de structures binaires ordonnées.

Théorème 8.30. *Soit $\mathcal{C}$ une classe héréditaire de structures binaires ordonnées finies de type k . Alors, ou bien il existe un entier ℓ tel que tout membre de $\mathcal{C}$ possède une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs, auquel cas $\mathcal{C}$ est une union finie d'âges de structures binaires ordonnées, chacune ayant une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs et le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme, ou bien le profil de $\mathcal{C}$ est au moins exponentiel.*

Preuve. S'il existe un entier ℓ tel que tout membre de $\mathcal{C}$ possède une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs, alors d'après la Proposition 7.57, $\mathcal{C}$ est héréditairement belordonnée, c'est donc une union finie d'âges de structures binaires ordonnées, chacune ayant une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs d'après le Théorème 7.24 et le profil de $\mathcal{C}$ est un polynôme d'après le Théorème 7.62.

S'il n'existe aucun entier ℓ tel que tout membre de $\mathcal{C}$ possède une décomposition monomorphe en au plus $\ell + 1$ blocs, alors d'après le Lemme 7.59, $\mathcal{C}$ contient une classe héréditaire $\mathcal{A}$, ayant la même propriété, qui est minimale pour l'inclusion. Cette classe est l'âge d'une structure relationnelle binaire ordonnée $\mathcal{R}$ qui ne possède pas de décomposition monomorphe finie (d'après le Théorème 7.24). Donc d'après le Théorème 8.29, le profil de $\mathcal{R}$, et donc de $\mathcal{A}$, est au moins exponentiel. Il s'ensuit que le profil de $\mathcal{C}$ est au moins exponentiel. $\square$

La preuve du Théorème 8.29 repose sur la description des structures de $\mathfrak{A}$ du Théorème 8.28. Pour les preuves des Théorèmes 8.27 et 8.28, nous utilisons le théorème de Ramsey sous la forme du Théorème 7.67 pour trouver les éléments de l'ensemble $\mathfrak{A}$ dans chacun de ces théorèmes. Ces membres, comme il a été montré dans la Proposition 7.69, sont presque multi-enchaînables et sont définis sur $F \cup (L \times K)$ avec $L := \mathbb{N}$, $|K| = 2$ et $F = \emptyset$ dans le cas des graphes non dirigés et $|F| \leq 1$ dans le cas des graphes dirigés ordonnés. Avant de faire une description de ces graphes (resp. graphes dirigés ordonnés), donnons d'abord la manière de les construire.

8.3.1 Le cas des graphes. Preuve du Théorème 8.27

Les graphes considérés dans ce paragraphe sont non dirigés.

Soit $G := (V, E)$ un graphe non dirigé. Nous rappelons que si un graphe G est une somme lexicographique $\sum_{i \in H} G_i$ d'une famille de graphes G_i , indexée par un graphe H , alors, si les ensembles $V(G_i)$ sont deux à deux disjoints, ils forment une partition de V en intervalles. Inversement, si l'ensemble V est partitionné en intervalles, alors G est la somme lexicographique des graphes induits par les blocs de cette partition.

La preuve du Théorème 8.27 se fait comme suit. Soit G un graphe qui ne se décompose pas en une somme lexicographique finie $\sum_{i \in H} G_i$ d'une famille de graphes G_i , chacun étant une clique ou un indépendant, indexée par un graphe fini H . Alors, d'après le Théorème 8.6, G possède un nombre infini de classes d'équivalence. Donc, il existe une application injective $f : \mathbb{N} \rightarrow V(G)$ telle que les images de deux éléments distincts sont non équivalentes. Nous pouvons alors définir une application $g : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow V(G)$ telle que $g(n, m)$ témoigne du fait que $f(n)$ et $f(m)$ sont non équivalents pour tous $n < m$. C'est à dire,

$$\{f(n), g(n, m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(m), g(n, m)\} \notin E(G). \quad (8.1)$$

Soit $\omega := (\mathbb{N}, \leq)$, $\Phi := \{f, g\}$ et $\mathfrak{L} := \langle \omega, G, \Phi \rangle$. Le Théorème 7.67 permet de trouver un sous-ensemble infini X de $\mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}|_X$ est invariante.

En indexant les éléments de l'ensemble X par des entiers, nous pouvons supposer que $X = \mathbb{N}$ et donc $\mathfrak{L}$ est invariante.

- Affirmation 9.**
1. $\{f(n), f(m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(n'), f(m')\} \in E(G), \forall n < m, n' < m'$.
 2. $\{g(n, m), g(n', m')\} \in E(G) \Leftrightarrow \{g(k, l), g(k', l')\} \in E(G), \forall n < m < n' < m', k < l < k' < l'$.
 3. $\{f(n), g(n, m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(k), g(k, l)\} \in E(G), \forall n < m, k < l$.
 4. $\{f(m), g(n, m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(l), g(k, l)\} \in E(G), \forall n < m, k < l$.
 5. $\{f(k), g(n, m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(l), g(p, q)\} \in E(G), \forall n < m < k, p < q < l$.
 6. $\{f(n), g(m, k)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(p), g(q, l)\} \in E(G), \forall n < m < k, p < q < l$.
 7. Si $\{f(n), g(n, m)\}$ et $\{f(k), g(n, m)\}$ sont tous les deux des arêtes ou des non arêtes pour trois entiers $n < m < k$, il en est de même pour $\{f(n'), g(n', m')\}$ et $\{f(k'), g(n', m')\}$ pour tous $n' < m' < k'$.
 8. $g(n, m)$ et $f(k)$ sont distincts pour tous entiers $n < m$ et k .
 9. $g(n, m)$ et $g(n', m')$ sont distincts pour tous $n < m < n' < m'$.

Preuve. Les six premières assertions découlent de l'invariance de $\mathfrak{L}$. L'assertion 7 est la même que l'assertion 3 de l'Affirmation 3 (dans la preuve de la Proposition 7.69 en page 175), elle découle des assertions 3 et 5 ci-dessus. Pour montrer l'assertion 8, supposons, sans perte de généralité, qu'il existe des entiers $n < m < k$ tels que $g(n, m) = f(k)$. Par construction des fonctions f et g nous avons

$$\{f(n), g(n, m)\} \in E(G) \Leftrightarrow \{f(m), g(n, m)\} \notin E(G).$$

D'après l'assertion 1, $\{f(n), f(k)\}$ et $\{f(m), f(k)\}$ sont tous deux des arêtes ou des non arêtes, en remplaçant $f(k)$ par $g(n, m)$ nous arrivons à une contradiction avec l'équivalence (8.1). Pour l'assertion 9, supposons qu'il existe des entiers $n < m < n' < m'$ tels que $g(n, m) = g(n', m')$. D'après l'assertion 5, $\{f(n'), g(n, m)\}$ et $\{f(m'), g(n, m)\}$ sont tous deux des arêtes ou des non arêtes. En remplaçant $g(n, m)$ par $g(n', m')$, nous obtenons $\{f(n'), g(n', m')\}$ et $\{f(m'), g(n', m')\}$ sont tous deux des arêtes ou des non arêtes. Ce qui contredit l'équivalence (8.1). $\diamond$

Soit $F : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \longrightarrow V(G)$. Posons $F(n, 1) := g(2n, 2n + 1)$. A partir de l'assertion 7 de l'Affirmation 9 nous avons deux cas. Si $\{f(n), g(n, m)\}$ et $\{f(k), g(n, m)\}$ sont tous deux des arêtes ou des non arêtes pour des entiers $n < m < k$, alors nous posons $F(n, 0) := f(2n + 1)$. Autrement, nous posons $F(n, 0) := f(2n)$.

Soit G' le graph ayant pour sommets l'ensemble $V(G') := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ tel que

$$\{x, y\} \in E(G') \Leftrightarrow \{F(x), F(y)\} \in E(G)$$

pour tous x, y de $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$.

Par construction de G' nous avons :

$$\{(n, 0), (n, 1)\} \in E(G') \Leftrightarrow \{(m, 0), (n, 1)\} \notin E(G') \quad (8.2)$$

pour tous entiers $n < m$, alors $(n, 0)$ et $(m, 0)$ sont non équivalents pour tous $n < m$ et donc G' possède un nombre infini de classes d'équivalence. Par l'invariance de $\mathfrak{L}$ le graphe G' est une presque multichaîne et donc $G|_{Im(F)}$ est presque multi-enchaînable.

Ainsi, pour construire G' il suffit de décider des relations reliant les quatre sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, les relations restantes seront déduites à partir des isomorphismes locaux de $C := (\mathbb{N}, \leq)$ et de l'Affirmation 9.

Par exemple si $\{(0, 0), (0, 1)\} \in E(G')$, alors $\{(0, 1), (1, 0)\} \notin E(G')$ et l'invariance donne $\{(1, 0), (1, 1)\} \in E(G')$ nous avons alors à décider sur les relations entre les sommets des ensembles $\{(0, 0), (1, 0)\}$, $\{(0, 0), (1, 1)\}$ et $\{(0, 1), (1, 1)\}$, ceci donne huit (2^3) graphes, mais deux des graphes obtenus sont isomorphes, donc nous avons seulement sept graphes. Si $\{(0, 0), (0, 1)\} \notin E(G')$, alors $\{(0, 1), (1, 0)\} \in E(G')$ et par invariance $\{(1, 0), (1, 1)\} \notin E(G')$, nous avons huit autres cas mais cinq ont déjà été obtenus dans le cas précédent, ainsi nous avons seulement trois nouveaux graphes. Le total donne les dix graphes annoncés.

Si $\{(0, 0), (1, 0)\} \in E(G')$ alors $\{(n, 0), (m, 0)\} \in E(G')$ pour tous $n < m$ et donc $\{(n, 0), n \in \mathbb{N}\}$ est une clique, elle est notée $K_{\mathbb{N}}$ et si $\{(0, 0), (1, 0)\} \notin E(G')$ alors $\{(n, 0), (m, 0)\} \notin E(G')$ pour tous $n < m$ et donc $\{(n, 0), n \in \mathbb{N}\}$ est un stable et est noté $I_{\mathbb{N}}$.

Description des dix graphes

Notons par G_i , $1 \leq i \leq 10$, les dix graphes. Ils ont le même ensemble de sommets $V(G_i) := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Posons $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$.

Pour $i := 1, 2, 3$, les sous-ensembles A et B sont des stables et une paire $\{(n, 0), (m, 1)\}$ pour $n, m \in \mathbb{N}$ est une arête de G_1 si $n = m$, une arête de G_2 si $n \leq m$ et une arête de G_3 si $n \neq m$.

Ainsi, G_1 est la somme directe d'une infinité de copies de K_2 (le graphe complet à deux sommets) et G_2 est le biparti demi-complet de Schmerl et Trotter [100] (les graphes G_2 et G_3 ont été étudié dans le chapitre 6).

Pour $4 \leq i \leq 7$, l'un des sous-ensembles A , B est une clique et l'autre est un stable. Ces graphes ont pour ensembles d'arêtes

$$E(G_4) = E(G_1) \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\},$$

$$E(G_5) = E(G_2) \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\},$$

$$E(G_6) = E(G_2) \cup \{\{(n, 1), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$

et

$$E(G_7) = E(G_3) \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}.$$

Les graphes G_i pour $i = 8, 9, 10$, sont tels que les sous-ensembles A et B sont tous les deux des cliques avec $E(G_8) \cap E(G_1) = E(G_1)$, $E(G_9) \cap E(G_2) = E(G_2)$ et $E(G_{10}) \cap E(G_3) = E(G_3)$. Les graphes G_7 , G_8 et G_{10} sont les complémentaires des graphes G_4 , G_3 , et G_1 respectivement. Chacun des graphes G_5 et G_6 est équimorphe, mais non isomorphe, à son graphe complémentaire. Toute restriction finie de G_5 (resp. G_6) s'abrite dans G_6 (resp. G_5). Donc, les graphes G_5 et G_6 ont le même âge. Chacun des graphes G_2 et G_9 s'abrite dans le graphe complémentaire de l'autre. Ces dix graphes sont donnés dans la FIGURE 8.6.

Profils des dix graphes

Si G est un graphe, nous désignons par φ_G son profil. Clairement, le profil de G est égal à celui de son complémentaire $\overline{G}$ et si G abrite un graphe H alors $\varphi_H \leq \varphi_G$. Donc, d'après la description ci-dessus, les graphes G_1 , G_2 , G_3 , G_4 et G_5 ont les mêmes profils que G_{10} , G_9 , G_8 , G_7 et G_6 respectivement. Comme nous le verrons ci-dessous, les profils φ_{G_1} , φ_{G_3} et φ_{G_4} ont des croissances polynomiales tandis que φ_{G_2} et φ_{G_5} ont des croissances exponentielles. Ceci montre en particulier qu'une structure ayant un profil polynomialement borné n'a pas forcément une décomposition monomorphe finie.

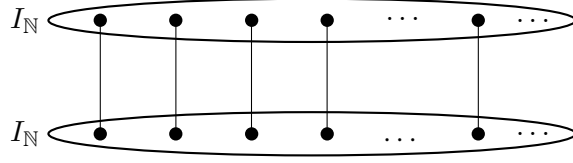
Profil de G_1 : nous avons $\varphi_{G_1}(n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 1, \forall n \in \mathbb{N}$, sa croissance est polynomiale, $\varphi_{G_1} \simeq \frac{n}{2}$. En effet, tout sous-graphe de G_1 défini sur n sommets est isomorphe, pour deux entiers p, q , à $pK_2 \oplus q$, qui est la somme directe de p copies de K_2 , la clique à deux sommets, et d'un indépendant d'ordre q , tels que $p \leq \frac{n}{2}$ et $q = n - 2p$. Donc, nous pouvons représenter tout sous-graphe d'ordre n par un couple (n, p) d'entiers avec $p \leq \frac{n}{2}$ et inversement. Deux sous-graphes représentés par (n, p) et (n', p') sont isomorphes si et seulement si $n = n'$ et $p = p'$. Sa fonction génératrice est rationnelle (voir dans la sous-section 1.4.4 en page 36), elle est donnée par :

$$F_{G_1}(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}.$$

Profil de G_2 : Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont 1, 1, 2, 3, 6, 10, 20, 36, 72, 136. Il vérifie la récurrence suivante : $\varphi_{G_2}(n) = \varphi_{G_2}(n-1) + 2^{n-3}$ pour $n \geq 3$ et n impair ; $\varphi_{G_2}(n) = \varphi_{G_2}(n-1) + 2^{n-3} + 2^{\frac{n-4}{2}}$ pour $n \geq 4$ et n pair. Ainsi $\varphi_{G_2}(n) \geq 2^{n-3}$ pour $n \geq 3$ (voir paragraphe 6.4 du chapitre 6). Sa fonction génératrice est rationnelle, elle est donnée par :

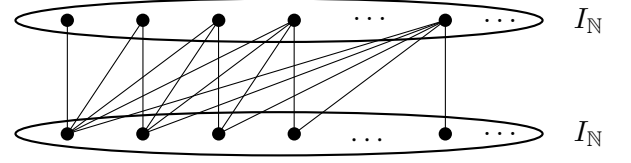
$$F_{G_2}(x) = \frac{1-x-2x^2+x^3}{(1-2x)(1-2x^2)}.$$

Profil de G_3 : Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ sont 1, 1, 2, 3, 6, 6, 10, 10. Il est donné par $\varphi_{G_3}(n) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} (k+1)$ pour tout $n \neq 2$, sa croissance est polynomiale de puissance 2, $\varphi_0(n) \simeq \frac{n^2}{8}$. La fonction génératrice est la fonction rationnelle (voir paragraphe



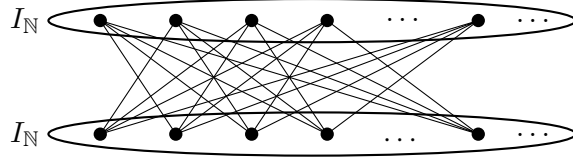
$$G_1 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_1)$$

$$E_1 := \{\{(n, 0), (n, 1)\}, n \in \mathbb{N}\}$$



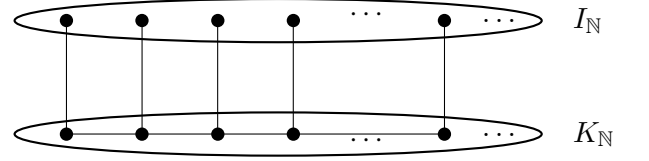
$$G_2 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_2)$$

$$E_2 := \{\{(n, 0), (m, 1)\}, n \leq m \in \mathbb{N}\}$$



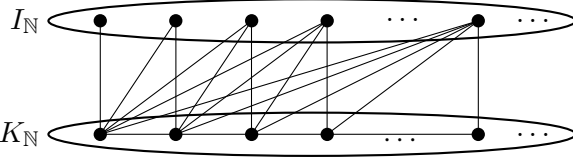
$$G_3 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_3)$$

$$E_3 := \{\{(n, 0), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



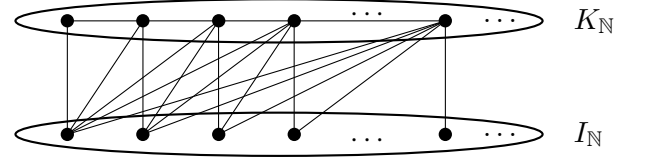
$$G_4 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_4)$$

$$E_4 := E_1 \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



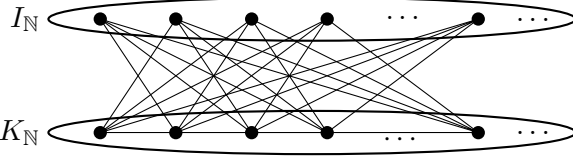
$$G_5 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_5)$$

$$E_5 := E_2 \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



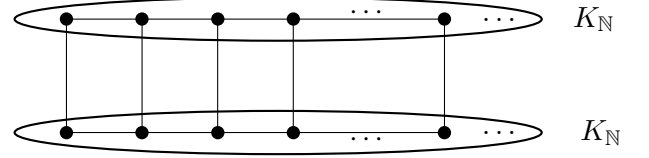
$$G_6 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_6)$$

$$E_6 := E_2 \cup \{\{(n, 1), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



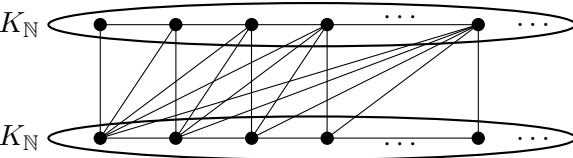
$$G_7 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_7)$$

$$E_7 := E_3 \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



$$G_8 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_8)$$

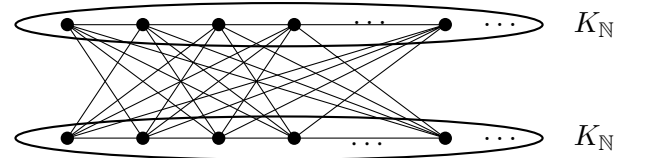
$$E_8 := E_4 \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



$$G_9 := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_9)$$

$$E_9 := E_5 \cup \{\{(n, 1), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$

$$\text{ou } E_9 := E_6 \cup \{\{(n, 0), (m, 0)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$



$$G_{10} := (\mathbb{N} \times \{0, 1\}, E_{10})$$

$$E_{10} := E_7 \cup \{\{(n, 1), (m, 1)\}, n \neq m \in \mathbb{N}\}$$

FIGURE 8.6 – Les graphes minimaux n'admettant pas de décomposition monomorphe finie.

6.3.3 du chapitre 6) :

$$F_{G_3}(x) = \frac{1 - x^2 + x^3 + 2x^4 - 2x^5 - x^6 + x^7}{(1 - x)(1 - x^2)^2}.$$

Profil de G_4 : Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$ sont 1, 1, 2, 4, 7, 10, 14, 18, 23, 28. Il vérifie la relation suivante : $\varphi_{G_4}(n) = \frac{1}{4}(n-1)(n+5)$ pour $n \geq 3$ et n impair ; $\varphi_{G_4}(n) = \frac{1}{4}n(n+4) - 1$ pour $n \geq 4$ et n pair et nous avons $\varphi_4 \simeq \frac{n^2}{4}$. Sa fonction génératrice est la fonction rationnelle (voir paragraphe 6.7.3 du chapitre 6)

$$F_{G_4}(x) = \frac{1 - x + 2x^3 - x^5}{(1 - x)^3(1 + x)}.$$

Profil de G_5 : $\varphi_{G_5}(n) = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$. Les premières valeurs du profil pour $n = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ sont 1, 1, 2, 4, 8, 16, 32 (voir paragraphe 6.8 du chapitre 6). Sa fonction génératrice est la fonction rationnelle, elle est donnée par :

$$F_{G_5}(x) = \frac{1 + x - 2x^2}{(1 - 2x)}.$$

8.3.2 Graphes dirigés ordonnés. Preuve du Théorème 8.28

Soit $\mathcal{G} := (V, \leq, \rho)$ un graphe dirigé ordonné où ρ est identifiée à sa fonction caractéristique. Le sous-ensemble E de V^2 tel que $(x, y) \in E$ si et seulement si $\rho(x, y) = 1$ est l'ensemble des arcs de $\mathcal{G}$ et $G := (V, E)$ est le graphe dirigé associé à $\mathcal{G}$. Pour tous $x, y \in V$, $d(x, y) := (\rho(x, y), \rho(y, x))$ et $I_{\leq}(x, y)$ sont définis comme dans la section 8.2.6 ci-dessus.

Un graphes dirigés ordonnés étant une structure binaire ordonnée (de type 1), tous les résultats de la section 8.2.6 sont vrais dans ce cas.

Lemme 8.31. *Si un graphe dirigé ordonné $\mathcal{G} := (V, \leq, \rho)$ possède une infinité de classes d'équivalence alors il vérifie une seule des deux assertions suivantes :*

1. *Il existe un sous-ensemble infini $A \subseteq V$ tel que deux éléments distincts de A sont 0-équivalents mais non 1-équivalents.*
2. *Il existe deux sous-ensembles infinis disjoints A_1 et A_2 de V tels que deux éléments distincts de A_i , $i = 1, 2$, sont 1-équivalents mais non équivalents et pour tous $x, y \in A_i$, la trace de l'intervalle $I_{\leq}(x, y)$ sur A_j , $j \neq i \in \{1, 2\}$, est non vide.*

Preuve. Si $\mathcal{G}$ possède une infinité de classes d'équivalence alors nous avons deux cas :

Cas 1 : $\mathcal{G}$ possède une infinité de classes de 1-équivalence. Ces classes sont réparties suivant deux classes de 0-équivalence. D'après le théorème de Ramsey (Thérème 1.9), il existe une classe de 0-équivalence qui contient une infinité de classes de 1-équivalence. Désignons cette classe par Cl . Comme toute classe d'équivalence est contenue dans une classe de 1-équivalence, nous pouvons piquer un élément de chaque classe de 1-équivalence appartenant à Cl pour former un sous-ensemble A de V . L'ensemble A vérifie l'assertion 1 du lemme.

Cas 2 : $\mathcal{G}$ possède un nombre fini de classes de 1-équivalence. Supposons un ensemble F formé d'une infinité d'éléments deux à deux non équivalents. Comme $\mathcal{G}$ possède un nombre fini de classes de 1-équivalence, on peut supposer que tous les éléments de F sont 1-équivalents (en utilisant le théorème de Ramsey), donc $F \subseteq C$ où C est une classe de 1-équivalence. Soient $a, b \in F$. Les éléments de l'intervalle $I_{\leq}(a, b)$ ne peuvent pas être tous 1-équivalents car sinon $I_{\leq}(a, b)$ serait un intervalle monomorphe d'après le Lemme 8.24. Donc, il existe $c \in I_{\leq}(a, b)$ qui est dans une classe de 1-équivalence $C' \neq C$. Nous pouvons extraire de F une suite monotone $(a_i)_{i \geq 0}$. D'après ce qui précède, pour tout $i \geq 0$, il existe $c_i \in I_{\leq}(a_i, a_{i+1})$ avec c_i appartenant à une classe de 1-équivalence différente de C . Nous pouvons donc trouver une sous-suite infinie $(c'_i)_{i \geq 0}$ de $(c_i)_{i \geq 0}$ dont les éléments sont tous dans une même classe de 1-équivalence (toujours en utilisant le théorème de Ramsey). Soit alors $(a'_i)_{i \geq 0}$ une sous-suite de $(a_i)_{i \geq 0}$ tel que $c'_i \in I_{\leq}(a'_i, a'_{i+1})$. Posons $A_1 = \{a'_i, i \in \mathbb{N}\}$ et $A_2 = \{c'_i, i \in \mathbb{N}\}$. Les ensembles A_1 et A_2 vérifient l'assertion 2 du lemme. $\square$

La preuve du Théorème 8.28 se fait comme suit. Soit $\mathcal{G} := (V, \leq, \rho)$ un graphe dirigé ordonné qui a une infinité de classes d'équivalence, alors d'après le Lemme 8.31, nous avons deux cas.

Etude du premier cas

Si $\mathcal{G}$ vérifie l'assertion 1 du Lemme 8.31, alors, comme il a été fait, ci-dessus, pour les graphes non dirigés, nous pouvons trouver deux applications $f : \mathbb{N} \rightarrow V$ et $g : [\mathbb{N}]^2 \rightarrow V$ telles que $f(\mathbb{N}) = A$ (A donné par le Lemme 8.31). Ainsi $f(n)$ et $f(m)$ ne sont pas 1-équivalents pour tous $n < m$ et $g(n, m)$ témoigne de ce fait, c'est à dire que les restrictions de $\mathcal{G}$ à $\{f(n), g(n, m)\}$ et $\{f(m), g(n, m)\}$ ne sont pas isomorphes pour tous $n < m$.

Soit $\Phi := \{f, g\}$ et $\mathfrak{L} := \langle \omega, \mathcal{G}, \Phi \rangle$. Le Théorème 7.67 permet de trouver un sous-ensemble infini $X \subseteq \mathbb{N}$ tel que $\mathfrak{L}|_X$ est invariante. En indexant les éléments de X par des entiers, nous pouvons supposer $X = \mathbb{N}$ et ainsi $\mathfrak{L}$ est invariante.

- Affirmation 10.**
1. $f(n) \leq f(m) \Leftrightarrow f(n') \leq f(m'), \forall n < m, n' < m'$.
 2. $d(f(n), f(m)) = d(f(n'), f(m')), \forall n < m, n' < m'$.
 3. $g(n, m) \leq g(k, l) \Leftrightarrow g(n', m') \leq g(k', l'), \forall n < m \leq k < l, n' < m' \leq k' < l'$.
 4. $d(g(n, m), g(k, l)) = d(g(n', m'), g(k', l')), \forall n < m \leq k < l, n' < m' \leq k' < l'$.
 5. $g(n, m) \in I_{\leq}(f(n), f(m)) \Leftrightarrow g(n', m') \in I_{\leq}(f(n'), f(m')), \forall n < m, n' < m'$.
 6. $g(n, m) \leq f(k)$ pour certains entiers $n < m < k \Leftrightarrow g(n, m) \leq f(l)$ pour tout $l > m$.
 7. $d(f(n), g(n, m)) = d(f(k), g(k, l)), \forall n < m, k < l$.
 8. $d(g(n, m), f(k)) = d(g(p, q), f(l)), \forall n < m < k, p < q < l$.
 9. Si les restrictions $\mathcal{G}|_{\{f(n), g(n, m)\}}$ et $\mathcal{G}|_{\{f(k), g(n, m)\}}$ sont isomorphes pour des entiers $n < m < k$ alors $\mathcal{G}|_{\{f(n'), g(n', m')\}}$ et $\mathcal{G}|_{\{f(k'), g(n', m')\}}$ sont isomorphes pour tous $n' < m' < k'$.
 10. $g(n, m)$ et $f(k)$ sont distincts pour tous entiers $n < m$ et k .
 11. $g(n, m) \neq g(n', m')$ pour tous $n < m < n' < m'$.

Preuve. La preuve se fait de la même façon que pour l'Affirmation 9. $\diamond$

Soit $F : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \longrightarrow V(\mathcal{G})$. Posons $F(n, 1) := g(2n, 2n + 1)$. A partir de l'assertion 9 de l'Affirmation 10 nous avons deux cas. Si $\mathcal{G}_{\upharpoonright_{\{f(n), g(n, m)\}}}$ et $\mathcal{G}_{\upharpoonright_{\{f(k), g(n, m)\}}}$ sont isomorphes pour certains entiers $n < m < k$, alors nous posons $F(n, 0) := f(2n + 1)$. Autrement nous posons $F(n, 0) := f(2n)$.

Nous définissons un graphe dirigé ordonné $\mathcal{G}_1 := (V_1, \leq_1, \rho_1)$ ayant pour ensemble de sommets $V_1 := \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ tel que

$$\begin{cases} x \leq_1 y \Leftrightarrow F(x) \leq F(y) \\ d_1(x, y) = d(F(x), F(y)) \end{cases}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, où $d_1(x, y) := (\rho_1(x, y), \rho_1(y, x))$.

Par construction de $\mathcal{G}_1$ nous avons :

$$\mathcal{G}_{1\upharpoonright_{\{(n,0),(n,1)\}}} \text{ et } \mathcal{G}_{1\upharpoonright_{\{(n,1),(m,0)\}}} \text{ ne sont pas isomorphes.} \quad (8.3)$$

pour tous entiers $n < m$. Donc $\mathcal{G}_1$ possède une infinité de classes d'équivalence et ainsi $\mathcal{G}_1 \in \mathcal{D}$.

Par l'invariance de $\mathfrak{L}$ le graphe $\mathcal{G}_1$ est une presque multichaîne et donc $\mathcal{G}_{\upharpoonright_{Im(F)}}$ est presque multi-enchaînable.

Pour construire $\mathcal{G}_1$, comme pour les graphes non dirigés, il suffit de décider sur les relations entre les quatre sommets $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$, les relations restantes seront déduites à partir des isomorphismes locaux de $C := (\mathbb{N}, \leq_1)$ et de l'Affirmation 10.

Par exemple si nous supposons que $(0, 1)$ est entre $(0, 0)$ et $(1, 0)$ pour l'ordre $\leq_1$, alors

1. si $(0, 0) <_1 (1, 0)$, nécessairement nous avons $(0, 0) <_1 (0, 1) <_1 (1, 0)$. L'invariance de la structure donne $(1, 0) <_1 (1, 1)$. Par la transitivité de l'ordre nous obtenons $(0, 1) <_1 (1, 1)$ et donc $(0, 0) <_1 (1, 1)$. Soit $n < m$, par l'invariance, les inéquations précédentes sont vérifiées si nous remplaçons 0 et 1 dans la première composante de chacune des paires ci-dessus par n et m . Alors $(n, 0) <_1 (n, 1) <_1 (m, 0) <_1 (m, 1)$ pour tous $n < m$. Donc $\leq_1$ est ordonné comme ω , la chaîne des entiers naturels. Nous considérons alors toutes les situations pour la relation ρ_1 en prenant en considération la condition (8.3) qui est dans ce cas ;

$$d_1((n, 0), (n, 1)) \neq d_1((n, 1), (m, 0)), \quad \forall n < m \in \mathbb{N}. \quad (8.4)$$

Ceci donne 3.(4⁴) cas, mais certains graphes peuvent s'abriter dans d'autres.

2. Si $(1, 0) <_1 (0, 0)$, les mêmes considérations que précédemment donnent $\leq_1$ ordonné comme ω^* . Nous obtenons les mêmes cas pour ρ_1 .

Et si nous supposons que $(0, 1)$ n'est pas entre $(0, 0)$ et $(1, 0)$ pour $\leq_1$, alors, avec les mêmes arguments, $\leq_1$ est isomorphe à un ordre de l'ensemble $\{\underline{2}^*.\omega, \underline{2}.\omega^*, \omega + \omega, \omega^* + \omega, \omega + \omega^*, \omega^* + \omega^*\}$, où $\underline{2}$ est la chaîne à deux éléments $\{0, 1\}$ ordonnés naturellement, $\underline{2}^*$ son ordre dual, $\underline{2}^*.\omega$ est le produit lexicographique de $\underline{2}^*$ et ω , c'est à dire la chaîne ω dans laquelle on substitut chaque élément par la chaîne $\underline{2}^*$. La relation ρ_1 est définie comme ci-dessus, la condition (8.3) est dans ce cas

$$d_1((n, 0), (n, 1)) \neq d_1((m, 0), (n, 1)), \quad \forall n < m \in \mathbb{N}. \quad (8.5)$$

Soit $\mathfrak{A}_1$ l'ensemble des graphes dirigés ordonnés minimaux (pour l'abritement) induits par ce cas.

Etude du second cas

Si $\mathcal{G}$ vérifie l'assertion 2 du Lemme 8.31, alors, par construction de A_1 et A_2 du Lemme 8.31 nous avons :

- d est constante sur toute paire (x, y) d'éléments distincts de A_i , $i \in \{1, 2\}$ telle que $x < y$ et
- tout sommet de A_i se trouve entre deux sommets de A_j (relativement à l'ordre $\leq$) pour $i, j \in \{1, 2\}, i \neq j$.

Alors $(A_1 \cup A_2, \leq_{|A_1 \cup A_2})$ est ordonné comme ω ou ω^* . Les ensembles A_1 et A_2 étant, chacun, contenu dans une classe de 1-équivalence, nous avons alors deux situations :

Première situation. Il existe $x_0 \in V \setminus (A_1 \cup A_2)$ qui témoigne du fait que A_1 et A_2 sont dans deux classes de 1-équivalence différentes. Comme $A_1 \cup A_2$ est ordonné comme ω ou ω^* , nous pouvons supposer que nous avons ou bien $x_0 \leq a$ ou bien $x_0 \geq a$, pour tout $a \in A_1 \cup A_2$, car sinon, nous pouvons trouver un sous-ensemble infini de $A_1 \cup A_2$ pour lequel c'est vérifié.

Nous pouvons alors trouver des applications $f', g', g'' : \mathbb{N} \rightarrow V$ telles que, $f'(\mathbb{N}) = A_1$, $g'(\mathbb{N}) = A_2$, $g''(\mathbb{N}) := \{x_0\}$, avec $g'(i) \in I_{\leq}(f'(i), f'(i+1))$, $\forall i \in \mathbb{N}$ et les restrictions de $\mathcal{G}$ à $\{f'(i), g'(i), g''(0)\}$ et $\{f'(j), g'(i), g''(0)\}$ ne sont pas isomorphes pour tous $i, j \in \mathbb{N}$.

Posons $F' := \{a\} \cup (\mathbb{N} \times \{0, 1\}) \rightarrow V$, avec $a \notin \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, telle que $F'(a) := g''(0)$, $F'(n, 0) := f'(n)$ et $F'(n, 1) := g'(n)$. Soit $\mathcal{G}_2 := (V_2, \leq_2, \rho_2)$ un graphe ordonné ayant pour sommets l'ensemble $V_2 = \{a\} \cup (\mathbb{N} \times \{0, 1\})$ tel que

$$\begin{cases} x \leq_2 y \Leftrightarrow F'(x) \leq F'(y) \\ d_2(x, y) = d(F'(x), F'(y)) \end{cases}$$

pour tous $x, y \in V_2$, où $d_2(x, y) := (\rho_2(x, y), \rho_2(y, x))$.

Par construction, $\mathcal{G}_2$ vérifie la relation (8.6) ci-dessous, ainsi $\mathcal{G}_2$ possède une infinité de classes d'équivalence.

$$\forall n < m \in \mathbb{N}, \mathcal{G}_2|_{\{a, (n, 0), (n, 1)\}} \text{ et } \mathcal{G}_2|_{\{a, (n, 1), (m, 0)\}} \text{ ne sont pas isomorphes.} \quad (8.6)$$

$\mathcal{G}_2$ vérifie également l'Observation 8.32 ci-dessous qui se déduit directement du fait que les éléments de A_i pour $i \in \{0, 1\}$ sont 1-équivalents.

Observation 8.32. 1. $a \leq_2 (n, i) \Leftrightarrow a \leq_2 (m, i)$, $\forall n < m$, $i \in \{0, 1\}$.

2. $a \leq_2 (n, 0) \Leftrightarrow a \leq_2 (n, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. $d_2(a, (n, i)) = d_2(a, (m, i))$, $\forall n < m$, $i \in \{0, 1\}$.

4. $d_2((n, i), (m, i)) = d_2((n', i), (m', i))$, $\forall n < m$, $n' < m'$, $i \in \{0, 1\}$.

5. $d_2((n, 0), (n, 1)) = d_2((m, 0), (m, 1))$, $\forall n < m$.

6. $d_2((n, 0), (n, 1)) = d_2((n, 1), (m, 0))$, $\forall n < m$.

7. $d_2((n, 0), (m, 1)) = d_2((m, 1), (m+1, 0))$, $\forall n < m$.

Il s'ensuit que $\mathcal{G}_2$ est une presque multichaîne. Avec ceci, nous obtenons un sous-ensemble fini $\mathfrak{B}_1$ de graphes ordonnés ayant le même ensemble de sommets $\{a\} \cup (\mathbb{N} \times \{0, 1\})$.

Deuxième situation. Il n'existe pas de sommet x_0 comme ci-dessus, alors, d'après le Lemme 8.26, deux sommets x, y de A_i sont séparés par deux sommets z, z' avec $z \in I_{\leq}(x, y) \cap A_j$, $j \neq i$ et $z' \notin I_{\leq}(x, y)$. Dans ce cas et à partir des Lemmes 8.26 et 8.31, la relation entre deux éléments de A_i , pour au moins un $i = 1, 2$, est différente de la relation entre deux éléments qui se trouvent l'un dans A_1 et l'autre dans A_2 . Nous pouvons alors définir deux applications $f_1, g_1 : \mathbb{N} \rightarrow V$ telles que, $f_1(\mathbb{N}) = A_1$, $g_1(\mathbb{N}) = A_2$, $g_1(i) \in I_{\leq}(f_1(i), f_1(i+1))$, $\forall i \in \mathbb{N}$. Posons $F'' : \mathbb{N} \times \{0, 1\} \rightarrow V$ telle que $F''(n, 0) := f(n)$ et $F''(n, 1) := g(n)$. Nous pouvons définir un graphe dirigé ordonné $\mathcal{G}_3 := (V_3, \leq_3, \rho_3)$ avec l'ensemble de sommets $V_3 = \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ tel que

$$\begin{cases} x \leq_3 y \Leftrightarrow F''(x) \leq F''(y) \\ d_3(x, y) = d(F''(x), F''(y)) \end{cases}$$

pour tous $x, y \in \mathbb{N} \times \{0, 1\}$, où $d_3(x, y) := (\rho_3(x, y), \rho_3(y, x))$. Comme nous l'avons signalé auparavant, par construction de $\mathcal{G}_3$, l'ordre $\leq_3$ est isomorphe à ω ou ω^* avec $(n, 1) \in I_{\leq_3}((n, 0), (n+1, 0))$ et pour tous $n < m$ nous avons l'un des trois cas

$$d_3((n, 0), (m, 0)) \neq d_3((n, 0), (m, 1)),$$

ou

$$d_3((n, 0), (m, 0)) \neq d_3((n, 1), (m, 1)),$$

ou

$$d_3((n, 0), (n, 1)) \neq d_3((n, 1), (m, 1)).$$

Alors, avec le fait que A_1 et A_2 sont chacun dans une classe de 1-équivalence, $\mathcal{G}_3$ vérifie l'Observation 8.33 ci-dessous :

- Observation 8.33.**
1. $d_3((n, i), (m, i)) = d_3((n', i), (m', i))$, $\forall n < m, n' < m', i \in \{0, 1\}$.
 2. $d_3((n, 0), (n, 1)) = d_3((m, 0), (m, 1))$, $\forall n < m$.
 3. $d_3((n, 0), (n, 1)) = d_3((n, 1), (m, 0))$, $\forall n < m$.
 4. $d_3((n, 0), (m, 1)) = d_3((m, 1), (m+1, 0))$, $\forall n < m$.

Il est alors clair que $\mathcal{G}_3$ est une presque multichaîne définie sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ et ayant une infinité de classes d'équivalence, donc $\mathcal{G}_3 \in \mathcal{D}$. Soit $\mathfrak{B}_2$ l'ensemble des graphes dirigés ordonnés obtenus dans ce cas. Il s'avère que des membres de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1$ peuvent abriter un membre de $\mathfrak{B}_2$. Soit alors $\mathfrak{A}$ l'ensemble des graphes minimaux (pour l'abritement) de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_1 \cup \mathfrak{B}_2$. Cet ensemble contient mille deux cent quarante six graphes. Ils sont décrits ci-dessous.

Description des graphes

Si G est un graphe dirigé, le graphe G' , obtenu à partir de G en rajoutant tout arc u tel que u^{-1} est un arc de G est le *symétrisé* de G . Ainsi, G' est un graphe dirigé dans lequel la relation ρ est symétrique et donc G peut être considéré comme un graphe non dirigé.

Désignons par $\mathcal{G}_{\ell, k}^{(p)} := (V_{\ell, k}^{(p)}, \leq_{\ell, k}^{(p)}, \rho_{\ell, k}^{(p)})$ les graphes dirigés ordonnés de $\mathfrak{A}$ (du Théorème 8.28), où p, ℓ et k sont des entiers tels que $1 \leq p \leq 10$, $1 \leq \ell \leq 8$. L'ensemble des sommets $V_{\ell, k}^{(p)}$ est soit $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ (si $\mathcal{G}_{\ell, k}^{(p)}$ est dans $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_2$) soit $\{a\} \cup \mathbb{N} \times \{0, 1\}$ (si $\mathcal{G}_{\ell, k}^{(p)}$ est dans $\mathfrak{B}_1$).

Les graphes ordonnés avec la même valeur de p sont dits de *classe* p , tous ont leurs restrictions à $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ (resp. $B := \mathbb{N} \times \{1\}$) qui sont isomorphes. S'il ont la même valeur de ℓ , leurs ordres linéaires sont de même type, ℓ prend les valeurs de 1 à 8 si l'ordre linéaire est isomorphe à ω , ω^* , $\underline{2}^*.\omega$, $\underline{2}.\omega^*$, $\omega + \omega$, $\omega^* + \omega$, $\omega + \omega^*$, $\omega^* + \omega^*$ respectivement.

L'entier k énumère les graphes pour toutes valeurs de p et ℓ . Différentes classes n'ont pas nécessairement les mêmes cardinalités.

Pour $p = 1$ si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 18$ et si $5 \leq \ell \leq 8$ nous avons $1 \leq k \leq 15$, il n'y a pas de graphe si $\ell = 3, 4$. Pour $p = 2, 3$, si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 21$, si $\ell = 3, 4$, alors $k = 1$ et si $5 \leq \ell \leq 8$ nous avons $1 \leq k \leq 15$. Pour $p = 4$ nous avons les mêmes valeurs de k que pour $p = 3$ excepté pour $\ell = 3, 4$ où nous n'avons aucun graphe. Pour $5 \leq p \leq 10$, si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 22$ et si $5 \leq \ell \leq 8$ nous avons $1 \leq k \leq 24$, pas de graphes si $\ell = 3, 4$. Le total est de mille deux cent quarante six graphes comme annoncé.

Dans chaque classe p , lorsque $\ell = 1$, (l'ordre linéaire $\leq_{\ell,k}^{(p)}$ est isomorphe à ω), nous avons, $(0, 0) <_{\ell,k}^{(p)} (0, 1) <_{\ell,k}^{(p)} (1, 0)$ quand l'ensemble des sommets est $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$ et $a <_{\ell,k}^{(p)} (0, 0) <_{\ell,k}^{(p)} (0, 1) <_{\ell,k}^{(p)} (1, 0)$ lorsqu'il est $\{a\} \cup \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Les relations sont inversées lorsque $\ell = 2$. Si $\ell \geq 3$, l'ensemble des sommets est $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$.

Nous donnons les représentations des graphes pour certaines classes. Toutes ces représentations sont faites sur les six sommets $\{(0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ pour les graphes de $\mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ et sur les sept sommets $\{a, (0, 0), (1, 0), (2, 0), (0, 1), (1, 1), (2, 1)\}$ pour ceux de $\mathfrak{B}_1$ (les boucles ne sont pas représentées), l'ordre $\leq_{\ell,k}^{(p)}$ étant isomorphe à ω .

Pour éviter des complications inutiles, nous supposons que dans chacun de ces graphes la relation $\rho_{\ell,k}^{(p)}$ est réflexive (nous pouvons la supposer irréflexive, les graphes obtenus vont coïncider sur les paires de sommets distincts avec les graphes obtenus pour ρ réflexive) (les autres cas peuvent se déduire facilement). Nous pouvons alors décrire les graphes dirigés associés $G_{\ell,k}^{(p)} = (V_{\ell,k}^{(p)}, E_{\ell,k}^{(p)})$.

Pour $n \in \mathbb{N}$, soit $a_n := ((n, 0), (n, 1))$.

Classe $p = 1$: Les restrictions de $G_{\ell,k}^{(1)}$ aux ensembles $A := \mathbb{N} \times \{0\}$ et $B := \mathbb{N} \times \{1\}$ sont toutes les deux des antichaînes.

I) Si $\ell = 1, 2$ alors $1 \leq k \leq 18$. Les graphes $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(1)}$ pour $1 \leq k \leq 9$ sont dans $\mathfrak{A}_1$, ils sont dans $\mathfrak{B}_2$ pour $10 \leq k \leq 12$ et dans $\mathfrak{B}_1$ pour $13 \leq k \leq 18$.

- Pour $1 \leq k \leq 12$. Une paire (x, x') de sommets, où $x = (n, i)$, $x' = (n', i')$, est
 - un arc de $G_{\ell,1}^{(1)}$ si $n = n'$ et $i < i'$;
 - un arc de $G_{\ell,2}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,1}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,2}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,1}^{(1)}$;
 - un arc de $G_{\ell,3}^{(1)}$ si $n = n'$ et $i \neq i'$. Le graphe $G_{\ell,3}^{(1)}$ est auto-dual;
 - un arc de $G_{\ell,4}^{(1)}$ si $n \leq n'$ et $i < i'$;
 - un arc de $G_{\ell,5}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,4}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,5}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,4}^{(1)}$;
 - un arc de $G_{\ell,6}^{(1)}$ s'il est soit un arc de $G_{\ell,4}^{(1)}$ soit un arc de $G_{\ell,5}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,6}^{(1)}$ est le symétrisé de $G_{\ell,4}^{(1)}$ (et de $G_{\ell,5}^{(1)}$), il est auto-dual;

- un arc de $G_{\ell,7}^{(1)}$ si $i < i'$. Le graphe $G_{\ell,7}^{(1)}$ est équimorphe à son dual.
- un arc de $G_{\ell,8}^{(1)}$ si ou bien $(n \leq n' \text{ et } i < i')$ ou bien $(n > n' \text{ et } i < i')$ ou bien $(n < n' \text{ et } i > i')$.
- un arc de $G_{\ell,9}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,8}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,9}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,8}^{(1)}$;
- un arc de $G_{\ell,10}^{(1)}$ si ou bien $(n \leq n' \text{ et } i < i')$ ou bien $(n < n' \text{ et } i > i')$;
- un arc de $G_{\ell,11}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,10}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,11}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,10}^{(1)}$;
- un arc de $G_{\ell,12}^{(1)}$ si $i \neq i'$. Le graphe $G_{\ell,12}^{(1)}$ est le symétrisé de $G_{\ell,10}^{(1)}$ (et de $G_{\ell,11}^{(1)}$).

Désignons par $\underline{2}$ l'ensemble ordonné de base $2 := \{0, 1\}$ tel que $0 < 1$. L'ensemble ordonné $\underline{2}^*$ est son dual. Désignons par K_2 le graphe complet réflexif à deux sommets et par $\Delta_{\mathbb{N}}$ l'antichaîne ayant $\mathbb{N}$ comme ensemble de sommets. Alors $G_{\ell,1}^{(1)}$ est isomorphe à $\underline{2} \cdot \Delta_{\mathbb{N}}$, le produit lexicographique de $\underline{2}$ par $\Delta_{\mathbb{N}}$. Le graphe $G_{\ell,2}^{(1)}$ est isomorphe à $\underline{2}^* \cdot \Delta_{\mathbb{N}}$, $G_{\ell,3}^{(1)}$ est isomorphe à $K_2 \cdot \Delta_{\mathbb{N}}$, le graphe $G_{\ell,6}^{(1)}$ est le graphe biparti demi-complet de Shmerl- Trotter et le graphe $G_{\ell,7}^{(1)}$ est isomorphe à la somme ordinale $\Delta_{\mathbb{N}} + \Delta_{\mathbb{N}}$.

• Pour $13 \leq k \leq 18$, l'ensemble des sommets est $\{a\} \cup A \cup B$. Une paire (x, x') de sommets est

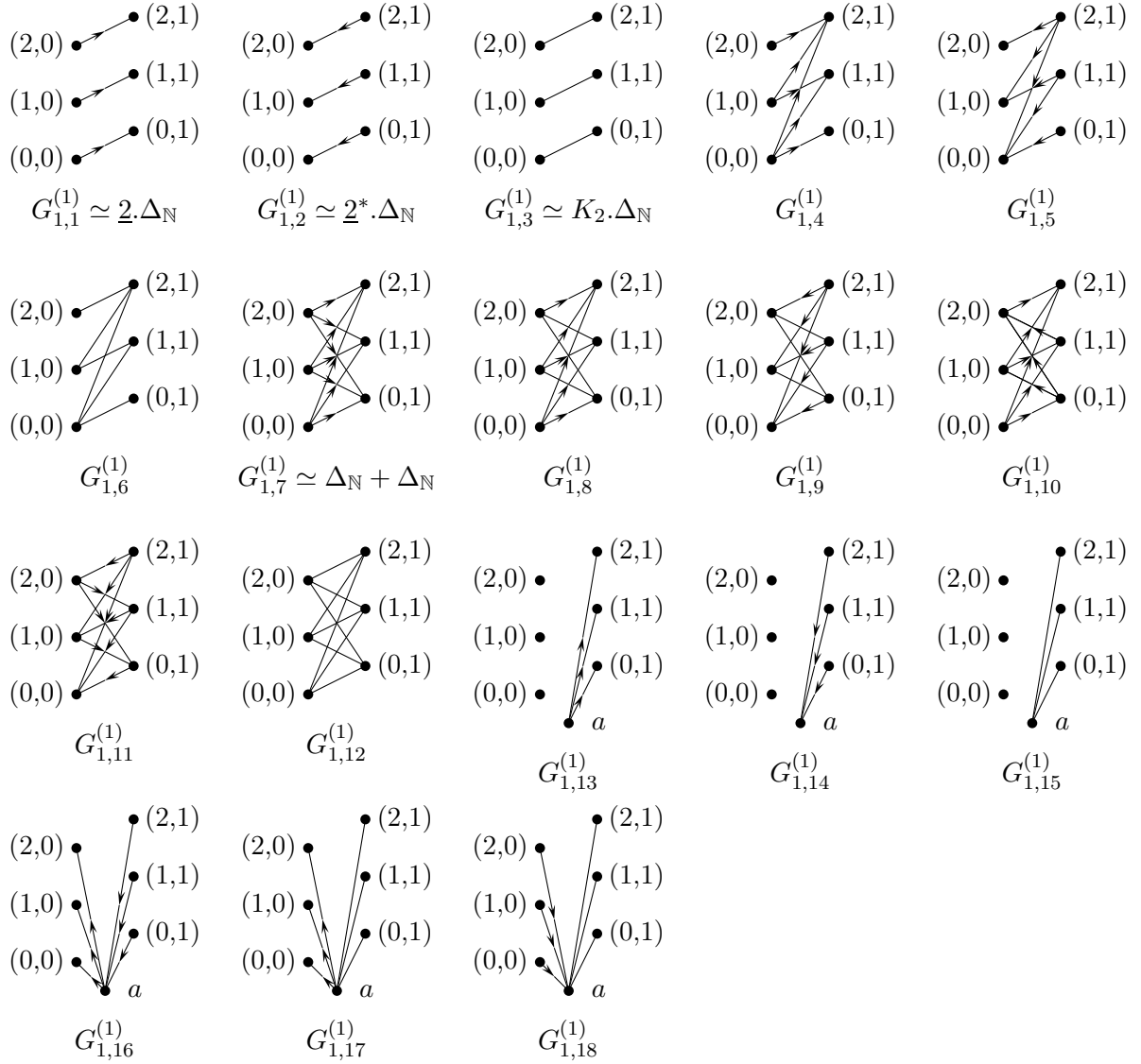
- un arc de $G_{\ell,13}^{(1)}$ si $x = a, x' = (n, 1)$;
- un arc de $G_{\ell,14}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,13}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,14}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,13}^{(1)}$;
- un arc de $G_{\ell,15}^{(1)}$ s'il est soit un arc de $G_{\ell,13}^{(1)}$ soit un arc de $G_{\ell,14}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,15}^{(1)}$ est le symétrisé de $G_{\ell,13}^{(1)}$ (et de $G_{\ell,14}^{(1)}$);
- un arc de $G_{\ell,16}^{(1)}$ si ou bien $x = a$ et $x' = (n, 0)$ ou bien $x = (n, 1)$ et $x' = a$; ce graphe est auto-dual;
- un arc de $G_{\ell,17}^{(1)}$ s'il est soit un arc de $G_{\ell,16}^{(1)}$ soit un arc de $G_{\ell,13}^{(1)}$;
- un arc de $G_{\ell,18}^{(1)}$ si (x', x) est un arc de $G_{\ell,17}^{(1)}$. Ainsi $G_{\ell,18}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,17}^{(1)}$;

Ces graphes sont représentés dans la FIGURE 8.7.

II) Si $\ell = 3, 4$ il n'y a aucun graphe.

III) Si $5 \leq \ell \leq 8$, nous avons les mêmes exemples pour chaque valeurs de ℓ et leur nombre est 15, dans l'ordre $\leq_{\ell,k}^{(1)}$, les éléments de A sont placés avant ceux de B .

- $G_{\ell,k}^{(1)} = G_{1,k}^{(1)}$ pour tout $1 \leq k \leq 6$.
- $G_{\ell,k}^{(1)} = G_{1,k+1}^{(1)}$ pour tout $7 \leq k \leq 10$.
- $G_{\ell,11}^{(1)}$ est obtenu à partir de $G_{1,7}^{(1)}$ en rajoutant tous les arcs $((n, 1), (m, 0))$ pour $n \geq m$.
- $G_{\ell,12}^{(1)}$ est obtenu à partir de $G_{1,10}^{(1)}$ en rajoutant tous les arcs $((n, 1), (m, 0))$ pour $n \geq m$, $G_{\ell,12}^{(1)}$ est le dual de $G_{\ell,11}^{(1)}$
- $G_{\ell,13}^{(1)}$ est non dirigé, c'est le graphe G_3 de la sous-section 8.3.1 (voir FIGURE 8.6 en page 203).
- $G_{\ell,14}^{(1)}$ est obtenu à partir de $G_{\ell,13}^{(1)}$ en rajoutant tous les arcs a_n pour $n \in \mathbb{N}$.
- $G_{\ell,15}^{(1)}$ est obtenu à partir de $G_{\ell,13}^{(1)}$ en rajoutant tous les arcs a_n^{-1} pour $n \in \mathbb{N}$.

FIGURE 8.7 – Les graphes minimaux de classe $p = 1$ pour $\ell = 1$.

Classe $p = 2$: Dans ce cas, les restrictions de $G_{\ell,k}^{(2)}$ à A et B sont des chaînes isomorphes à la chaîne ω .

I) Si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 21$, les graphes $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(2)}$ pour $1 \leq k \leq 12$ sont dans $\mathfrak{A}_1$, ils sont dans $\mathfrak{B}_1$ pour $13 \leq k \leq 18$ et dans $\mathfrak{B}_2$ pour $19 \leq k \leq 21$.

- Pour $1 \leq k \leq 9$ le graphe $G_{\ell,k}^{(2)}$ coïncide avec $G_{\ell,k}^{(1)}$ sur les paires de sommets de $A \times B$. Ainsi $G_{\ell,7}^{(2)}$ est une chaîne isomorphe à $\omega + \omega$.

- Pour $10 \leq k \leq 12$, le graphe $G_{\ell,k}^{(2)}$ coïncide avec $G_{\ell,10}^{(1)}$ sur les paires de sommets de $A \times B$ avec

1. la suppression de l'arc a_n , $n \in \mathbb{N}$ si $k = 10$; alors $G_{\ell,10}^{(2)}$ est isomorphe à $\Delta_2.\omega$, le produit lexicographique de l'antichaîne sur deux sommets Δ_2 avec ω , la chaîne des entiers de $\mathbb{N}$.
2. le remplacement de a_n par a_n^{-1} , $n \in \mathbb{N}$ si $k = 11$; alors $G_{\ell,11}^{(2)}$ est isomorphe à $\underline{2}^*.\omega$.
3. le rajout des arcs a_n^{-1} , $n \in \mathbb{N}$ si $k = 12$; alors $G_{\ell,12}^{(2)}$ est isomorphe à $K_2.\omega$.

• Pour $13 \leq k \leq 18$, l'ensemble des arcs sur $A \times B$ du graphe $G_{\ell,k}^{(2)}$ est l'union des ensembles d'arcs de $G_{\ell,10}^{(1)}$ et $G_{\ell,k}^{(1)}$.

• Les ensembles d'arcs des graphes $G_{\ell,19}^{(2)}$ et $G_{\ell,20}^{(2)}$ sur $A \times B$ coïncident avec ceux de $G_{\ell,11}^{(1)}$ et $G_{\ell,12}^{(1)}$ respectivement.

• L'ensemble des arcs de $G_{\ell,21}^{(2)}$ sur $A \times B$ est vide. Alors $G_{\ell,21}^{(2)}$ est isomorphe à $\omega \oplus \omega$, la somme directe de deux chaînes isomorphes à ω .

Les graphes $G_{1,k}^{(2)}$, $1 \leq k \leq 21$ sont représentés dans la FIGURE 8.8.

II) Si $\ell = 3, 4$ dans ce cas $k = 1$, nous avons un seul graphe qui est un ordre linéaire isomorphe à ω .

III) Si $5 \leq \ell \leq 8$, nous avons les mêmes exemples pour chaque valeur de ℓ et leur nombre est 15.

- $G_{\ell,k}^{(2)} = G_{1,k}^{(2)}$ pour tout $1 \leq k \leq 6$.
- $G_{\ell,7}^{(2)}$ est un ordre linéaire isomorphe à ω .
- $G_{\ell,k}^{(2)} = G_{1,k}^{(2)}$ pour tout $8 \leq k \leq 9$.
- $G_{\ell,10}^{(2)} = G_{1,19}^{(2)}$.
- Pour $11 \leq k \leq 15$, le graphe $G_{\ell,k}^{(2)}$ coïncide sur $A \times B$ avec $G_{\ell,k}^{(1)}$.

Classe $p = 3$: Dans ce cas, les restrictions de $G_{\ell,k}^{(3)}$ à A et B sont des chaînes isomorphes à ω^* .

I) Si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 21$, les graphes $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(3)}$ pour $1 \leq k \leq 12$ sont dans $\mathfrak{A}_1$, ils sont dans $\mathfrak{B}_1$ pour $13 \leq k \leq 18$ et dans $\mathfrak{B}_2$ pour $19 \leq k \leq 21$.

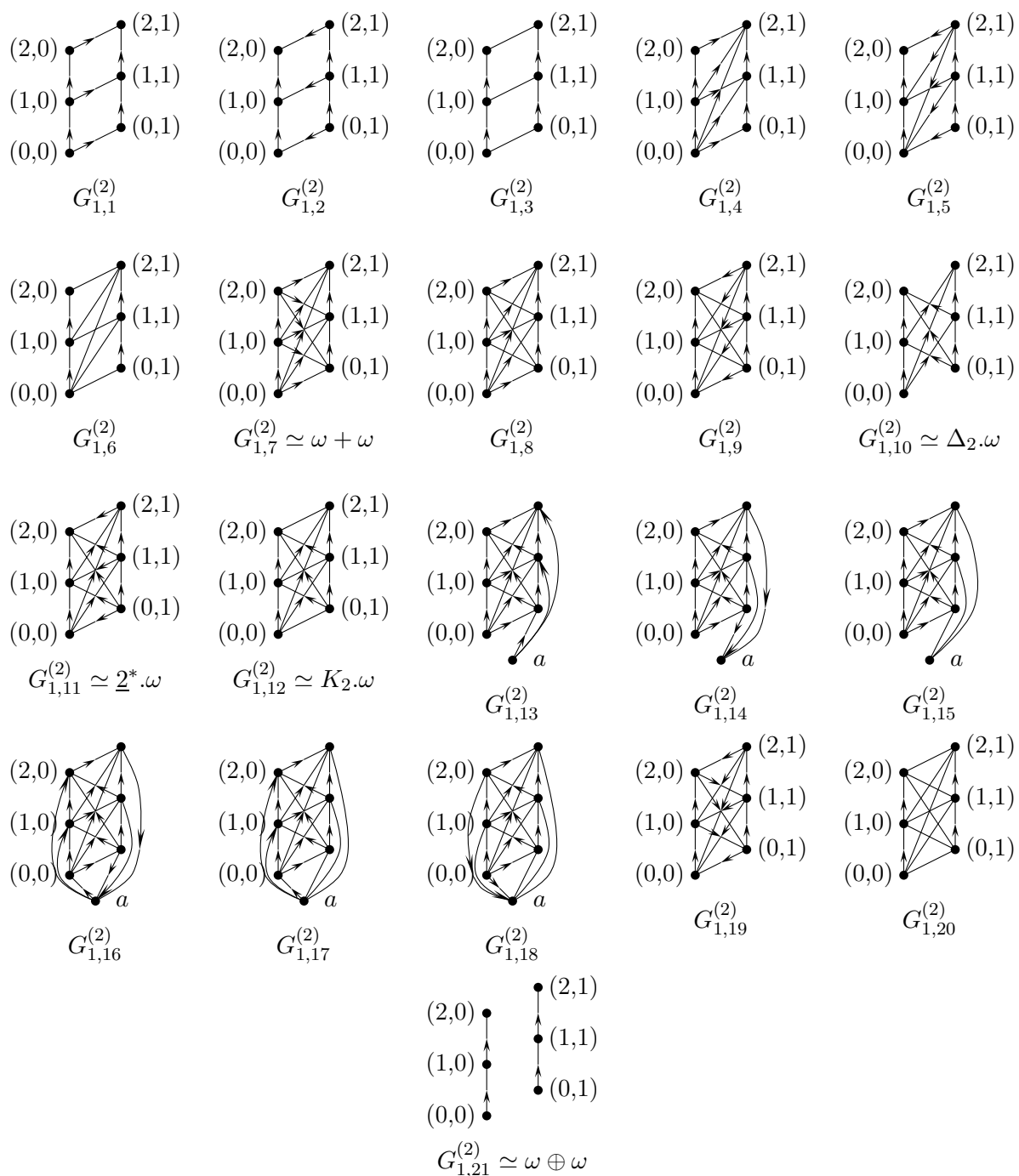
• Si $1 \leq k \leq 9$, le graphe $G_{\ell,k}^{(3)}$ coïncide sur $A \times B$ avec $G_{\ell,k}^{(1)}$. Alors $G_{\ell,7}^{(3)}$ est une chaîne isomorphe à $\omega^* + \omega^*$.

• Si $10 \leq k \leq 21$, le graphe $G_{\ell,k}^{(3)}$ est le dual de $G_{\ell,k}^{(2)}$. Ainsi le graphe $G_{\ell,10}^{(3)}$ est isomorphe à $\Delta_2.\omega^*$, le graphe $G_{\ell,11}^{(3)}$ est isomorphe à $\underline{2}.\omega^*$, le graphe $G_{\ell,12}^{(3)}$ est isomorphe à $K_2.\omega^*$ et le graphe $G_{\ell,21}^{(3)}$ est isomorphe à $\omega^* \oplus \omega^*$.

II) Si $\ell = 3, 4$, nous avons un seul graphe qui est un ordre linéaire isomorphe à ω^* .

III) Si $5 \leq \ell \leq 8$, nous avons les mêmes exemples pour chaque valeur de ℓ et leur nombre est 15.

- $G_{\ell,k}^{(3)} = G_{1,k}^{(3)}$ pour tout $1 \leq k \leq 6$.
- $G_{\ell,7}^{(3)}$ est un ordre linéaire isomorphe à ω^* .


 FIGURE 8.8 – Les graphes minimaux de classe $p = 2$ pour $\ell = 1$.

- $G_{\ell,k}^{(3)} = G_{1,k}^{(3)}$ pour tout $8 \leq k \leq 9$.
- $G_{\ell,10}^{(3)} = G_{1,19}^{(3)}$.
- Pour $11 \leq k \leq 15$, le graphe $G_{\ell,k}^{(3)}$ coïncide sur $A \times B$ avec $G_{\ell,k}^{(1)}$.

Classe $p = 4$: Dans ce cas, A et B sont tous les deux des cliques réflexives.

I) Si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 21$, les graphes pour $1 \leq k \leq 12$ sont dans $\mathfrak{A}_1$, ils sont dans $\mathfrak{B}_1$ pour $13 \leq k \leq 18$ et dans $\mathfrak{B}_2$ pour $19 \leq k \leq 21$.

• Si $1 \leq k \leq 9$, le graphe $G_{\ell,k}^{(4)}$ coïncide avec $G_{\ell,k}^{(1)}$ sur les paires de $A \times B$. Alors $G_{\ell,7}^{(4)}$ est isomorphe à $K_{\mathbb{N}} + K_{\mathbb{N}}$, la somme ordinale de deux cliques réflexives ayant chacune pour ensemble de sommets $\mathbb{N}$.

• Le graphe $G_{\ell,10}^{(4)}$ est le symétrisé de $G_{\ell,10}^{(2)}$.

• Le graphe $G_{\ell,11}^{(4)}$ (respectivement $G_{\ell,12}^{(4)}$) est obtenu à partir de $G_{\ell,10}^{(4)}$ en rajoutant les arcs $a_n, n \in \mathbb{N}$ (respectivement $a_n^{-1}, n \in \mathbb{N}$). Le graphe $G_{\ell,12}^{(4)}$ est le dual de $G_{\ell,11}^{(4)}$.

• Pour $13 \leq k \leq 18$, le graphe $G_{\ell,k}^{(4)}$ est obtenu à partir de $G_{\ell,k}^{(2)}$ en prenant le symétrisé sur $A \cup B$, les arcs restants (c'est à dire ceux pour lesquels un des sommets est a) étant les mêmes que dans $G_{\ell,k}^{(2)}$.

• Le graphe $G_{\ell,19}^{(4)}$ coïncide avec $G_{\ell,11}^{(1)}$ sur les paires de $A \times B$.

• Le graphe $G_{\ell,20}^{(4)}$ est le dual de $G_{\ell,19}^{(4)}$.

• Le graphe $G_{\ell,21}^{(4)}$ est le symétrisé de $G_{\ell,21}^{(2)}$, il est isomorphe à $K_{\mathbb{N}} \oplus K_{\mathbb{N}}$.

II) Si $\ell = 3, 4$ nous n'avons aucun graphe.

III) Si $5 \leq \ell \leq 8$, nous avons les mêmes exemples pour chaque valeur de ℓ et leur nombre est 15.

• $G_{\ell,k}^{(4)} = G_{1,k}^{(4)}$ pour tout $1 \leq k \leq 6$.

• $G_{\ell,k}^{(4)} = G_{1,k+1}^{(4)}$ pour tout $7 \leq k \leq 8$.

• $G_{\ell,9}^{(4)} = G_{1,19}^{(4)}$.

• $G_{\ell,10}^{(4)} = G_{1,20}^{(4)}$.

• Pour $11 \leq k \leq 15$, le graphe $G_{\ell,k}^{(4)}$ coïncide sur $A \times B$ avec $G_{\ell,k}^{(1)}$.

Classe $p = 5$: Dans ce cas tous les graphes ont le même ensemble de sommets qui est $A \cup B$ tel que l'un des deux ensembles A ou bien B forme une chaîne isomorphe à ω l'autre est une antichaîne.

I) Si $\ell = 1, 2$ nous avons $1 \leq k \leq 22$,

• Si $1 \leq k \leq 12$, le graphe $G_{\ell,k}^{(5)}$ est tel que A forme une chaîne, B une antichaîne, le reste des arcs étant le même que dans $G_{\ell,k}^{(1)}$.

• Si $13 \leq k \leq 21$, le graphe $G_{\ell,k}^{(5)}$ est tel que B forme une chaîne, A une antichaîne, le reste des arcs étant le même que dans $G_{\ell,k-12}^{(1)}$.

• Dans $G_{\ell,22}^{(5)}$, A est ordonné linéairement comme ω et B est une antichaîne, il n'y a pas d'autre arc. Ainsi $G_{\ell,22}^{(5)}$ est isomorphe à $\omega \oplus \Delta_{\mathbb{N}}$.

Les graphes $G_{1,k}^{(5)}$, $1 \leq k \leq 22$ sont représentés dans la FIGURE 8.9.

II) Si $\ell = 3, 4$ il n'y a aucun graphe.

III) Si $5 \leq \ell \leq 8$, nous avons les mêmes exemples pour chaque valeur de ℓ et leur nombre est 24.

- $G_{\ell,k}^{(5)} = G_{1,k}^{(5)}$ pour tout $1 \leq k \leq 6$.
- $G_{\ell,k}^{(5)} = G_{1,k+1}^{(5)}$ pour tout $7 \leq k \leq 10$.
- $G_{\ell,k}^{(5)} = G_{1,k+2}^{(5)}$ pour tout $11 \leq k \leq 16$.
- $G_{\ell,k}^{(5)} = G_{1,k+3}^{(5)}$ pour tout $17 \leq k \leq 18$.
- Les graphes $G_{\ell,19}^{(5)}$, $G_{\ell,20}^{(5)}$ et $G_{\ell,21}^{(5)}$ coïncident sur $A \times B$ avec respectivement $G_{\ell,13}^{(1)}$, $G_{\ell,14}^{(1)}$ et $G_{\ell,15}^{(1)}$ tels que A est ordonné comme ω et B est une antichaîne.
- Les graphes $G_{\ell,22}^{(5)}$, $G_{\ell,23}^{(5)}$ et $G_{\ell,24}^{(5)}$ coïncident sur $A \times B$ avec respectivement $G_{\ell,13}^{(1)}$, $G_{\ell,14}^{(1)}$ et $G_{\ell,15}^{(1)}$ tel que B est ordonné comme ω et A est une antichaîne.

Classe $p = 6$: Dans ce cas tous les graphes ont le même ensemble de sommets qui est $A \cup B$ tel que l'un des deux ensembles A ou B est une chaîne isomorphe à ω^* l'autre étant une antichaîne. Sur les paires de $A \times B$, les graphes $G_{\ell,k}^{(6)}$ sont obtenus de la même façon que dans le cas $p = 5$. Tout graphe de cette classe est le dual d'un des graphes de la classe précédente.

Classes $7 \leq p \leq 10$: Les graphes $G_{\ell,k}^{(p)}$ sont obtenus de la même façon que dans le cas $p = 6$ avec la différence que A ou B est une clique réflexive au lieu d'une chaîne si $p = 7$, A et B sont tous les deux ordonnés linéairement, l'un comme ω et l'autre comme ω^* si $p = 8$, l'un des ensembles A ou B est ordonné linéairement comme ω et l'autre est une clique réflexive si $p = 9$ et l'un des deux ensembles A ou B est ordonné linéairement comme ω^* et l'autre est une clique réflexive dans le cas $p = 10$.

Nous obtenons, parmi tous les graphes cités, les vingt bichaînes $\mathcal{B} := (V, \leq, \leq')$ de Monteil et Pouzet [70].

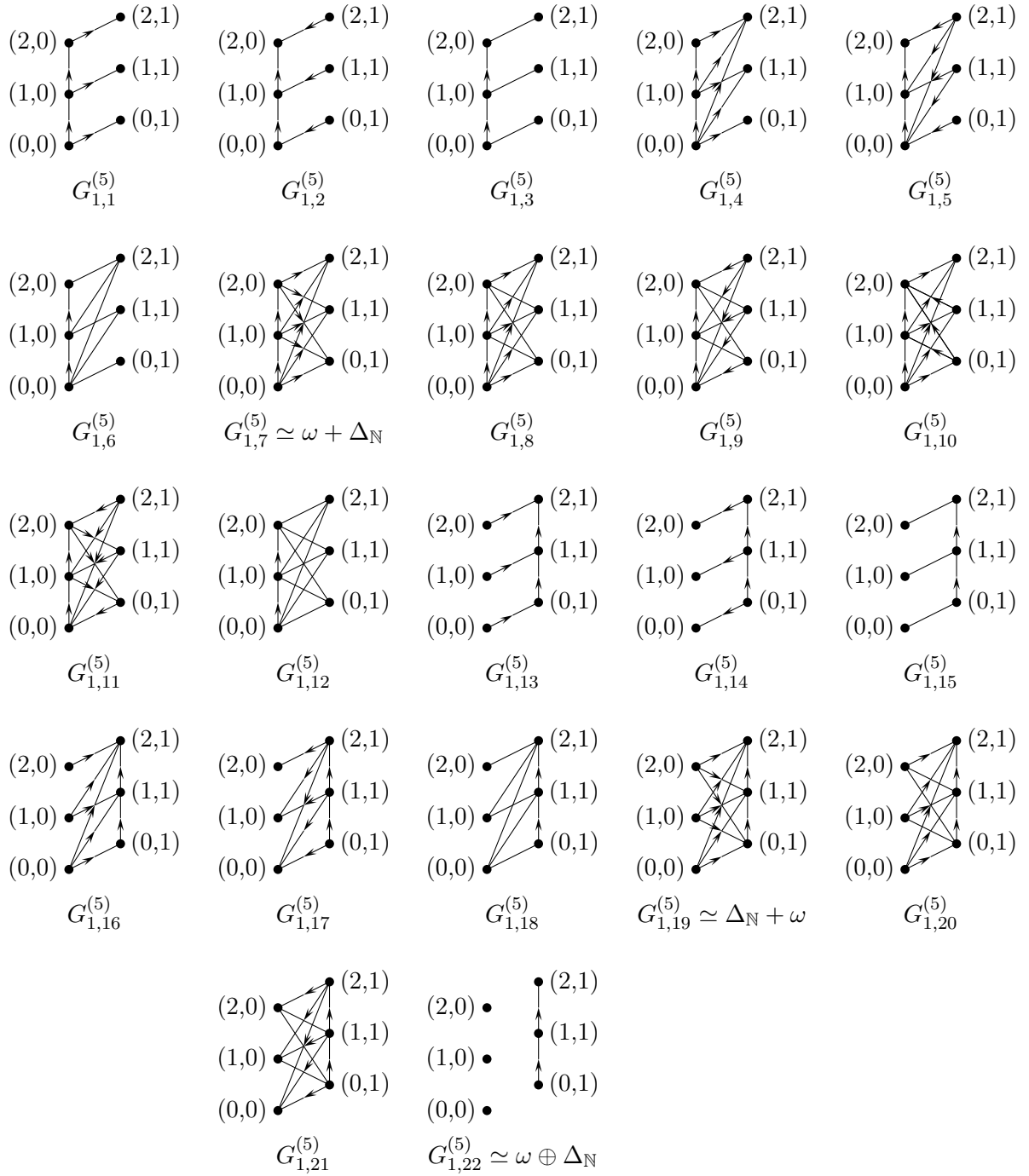
Nous avons le résultat suivant.

Lemme 8.34. *Aucun des graphes $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ ne s'abrite dans un autre.*

Preuve. Il suffit de remarquer que pour tout triplet (p, ℓ, k) la restriction de $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ à l'ensemble $\{(0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, si $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)} \in \mathfrak{A}_1 \cup \mathfrak{B}_2$ et à l'ensemble $\{a, (0,0), (1,0), (0,1), (1,1)\}$, si $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)} \in \mathfrak{B}_1$, ne s'abrite dans aucun autre graphe $\mathcal{G}_{\ell',k'}^{(p')}$ pour $(p', \ell', k') \neq (p, \ell, k)$. $\square$

Profils des éléments de $\mathfrak{A}$

Pour toutes valeurs des entiers p, ℓ et k , désignons par $\varphi_{\ell,k}^{(p)}$ le profil du graphe $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$.

FIGURE 8.9 – Les graphes minimaux de classe $p = 5$ pour $\ell = 1$.

Proposition 8.35. *Le profil d'un élément de $\mathfrak{A}$ est ou bien donné par l'une des cinq fonctions : $\varphi_1(n) := 2^n - 1$, $\varphi_2(n) := 2^n - n$, $\varphi_3(n) := 2^{n-1}$, $\varphi_4(n) := 2^{n-1} + 1$ et la fonction de Fibonacci ou bien borné inférieurement par l'une d'entre elles.*

La preuve de cette proposition découle des lemmes suivants.

Lemme 8.36. *Les graphes ordonnés $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ et ($p = 1$ et $1 \leq k \leq 3$) ou bien ($2 \leq p \leq 4$ et $10 \leq k \leq 12$) ont un profil qui a la croissance de la fonction de Fibonacci.*

Preuve. Soit $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)} = (V_{\ell,k}^{(p)}, \leq_{\ell,k}^{(p)}, \rho_{\ell,k}^{(p)})$ un des graphes cités dans le Lemme 8.36. Comme $\ell \in \{1, 2\}$, alors $\leq_{\ell,k}^{(p)}$ est isomorphe à ω ou ω^* . D'après la description des graphes faite précédemment, les restrictions de $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ aux paires de sommets différentes de $\{(n, 0), (n, 1)\}$ sont toutes isomorphes. Pour calculer $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r)$ pour $r \in \mathbb{N}$, soit r sommets distincts ordonnés suivant $\leq_{\ell,k}^{(p)}$. Alors, ou bien cet ordre se termine par une paire $\{(n, 0), (n, 1)\}$ avec $n \in \mathbb{N}$ et dans ce cas le nombre de sous-graphes non isomorphes d'ordre r est $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r - 2)$, ou bien il ne se termine pas par une telle paire et dans ce cas le nombre de sous-graphes d'ordre r est $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r - 1)$. On obtient alors

$$\begin{cases} \varphi_{\ell,k}^{(p)}(0) = \varphi_{\ell,k}^{(p)}(1) = 1 \\ \varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) = \varphi_{\ell,k}^{(p)}(r - 2) + \varphi_{\ell,k}^{(p)}(r - 1) \text{ pour } r \geq 2 \end{cases}$$

□

Lemme 8.37. *Le profil du graphe ordonné $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ avec ($p = 1$ et $7 \leq k \leq 12$) ou bien ($p = 2$ et $k \in \{5, 6, 9\}$) ou bien ($p = 3$ et $k \in \{4, 6, 8\}$) ou bien ($p = 4$ et $k \in \{4, 5, 7\}$) est donné par $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) = 2^r - 1$, $r \geq 1$.*

Preuve. Dans ces cas, nous pouvons coder chaque sous-graphe d'ordre r par un mot de longueur r sur un alphabet à deux lettres $\{0, 1\}$. Soit r sommets distincts ordonnés suivant $\leq_{\ell,k}^{(p)}$. A chaque sommet dans cet ordre, nous associons 0 s'il est dans $\mathbb{N} \times \{0\}$ et 1 s'il est dans $\mathbb{N} \times \{1\}$, les lettres étant placées de gauche à droite. Sachant que les mots composés d'une seule lettre donnent des sous-graphes isomorphes. Le nombre de sous-graphes non isomorphes d'ordre r est donc le nombre de mots différents de longueur r moins 1, d'où le résultat. □

Lemme 8.38. *Le profil du graphe ordonné $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ avec ($p = 1$, $k \in \{4, 5, 6\}$) ou bien ($p = 2$, $k \in \{4, 7, 8\}$) ou ($p = 3$, $k \in \{5, 7, 9\}$) ou bien ($p = 4$, $k \in \{6, 8, 9\}$) est donné par :*

$$\begin{cases} \varphi_{\ell,k}^{(p)}(0) = \varphi_{\ell,k}^{(p)}(1) = 1; \varphi_{\ell,k}^{(p)}(2) = 2, \\ \varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) = 2^r - r, \quad r \geq 3. \end{cases}$$

Preuve. Dans ces cas, nous pouvons coder chaque sous-graphe d'ordre r par un mot de longueur r sur un alphabet à deux lettres $\{0, 1\}$ comme dans la preuve du Lemme 8.37. Par exemple, pour $p = 1$, nous associons à chaque sommet de $\mathbb{N} \times \{0\}$ la lettre 0 et à chaque sommet de $\mathbb{N} \times \{1\}$ la lettre 1. Si $p = 2$ nous faisons l'inverse. Alors tous les mots de même longueur r de

la forme $\underbrace{1 \dots 1}_q \underbrace{0 \dots 0}_{r-q}$ donnent des sous-graphes qui sont isomorphes entre eux pour toute valeur de q ($0 \leq q \leq r$). Le nombre de sous-graphes non isomorphes d'ordre r est donc le nombre de mots différents de longueur r moins r , d'où le résultat. $\square$

Lemme 8.39. *Le profil du graphe ordonné $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ avec ($p = 1, k \in \{13, 14, 15\}$) ou bien ($2 \leq p \leq 3, k \in \{13, 16, 17, 19, 20, 21\}$) ou bien ($p = 4, k \in \{15, 17, 18, 19, 20, 21\}$) est donné par $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) = 2^{r-1}, r \geq 1$.*

Preuve. Pour $k \neq 19, 20, 21$, tous les autres graphes donnés dans ce lemme ont pour ensemble de sommets $\{a\} \cup \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Ils ont pour particularité d'être monomorphes sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Nous pouvons coder chaque sous-graphe d'ordre r par un mot sur un alphabet à trois lettres $\{a, 0, 1\}$, en associant, de la même manière que précédemment, 0 à tout sommet de $\mathbb{N} \times \{0\}$ et 1 à tout sommet de $\mathbb{N} \times \{1\}$ et en rajoutant a en début du mot si le sous-graphe contient le sommet a . Sachant que pour tout $r \in \mathbb{N}$, tous les mots de longueur r formés uniquement des lettres 0 et 1 correspondent à des sous-graphes isomorphes entre eux et isomorphes au mot de longueur r commençant par a et formé d'une seule lettre (0 pour certains graphes comme par exemple pour $\mathcal{G}_{\ell,13}^{(1)}$ et 1 pour d'autres comme par exemple pour $\mathcal{G}_{\ell,15}^{(4)}$). Donc le nombre de sous-graphes non isomorphes d'ordre r est le nombre de mots de longueur r commençant par a , ce qui donne 2^{r-1} .

Pour $k \in \{19, 20, 21\}$, les graphes ont pour ensemble de sommets $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Ils sont tels que tout sous-graphe ayant q sommets de $\mathbb{N} \times \{0\}$ et $r - q$ sommets de $\mathbb{N} \times \{1\}$ est isomorphe à un des sous-graphes ayant $r - q$ sommets de $\mathbb{N} \times \{0\}$ et q sommets de $\mathbb{N} \times \{1\}$. D'où le résultat. $\square$

Lemme 8.40. *Le profil du graphe ordonné $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ et ($p = 1, k \in \{16, 17, 18\}$) ou bien ($2 \leq p \leq 3, k \in \{14, 15, 18\}$) ou bien ($p = 4, k \in \{13, 14, 16\}$) est donné par $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) = 2^{r-1} + 1, r \geq 2$.*

Preuve. Tous les graphes donnés dans ce lemme ont pour ensemble de sommets $\{a\} \cup \mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Ils ont pour particularité d'être monomorphes sur $\mathbb{N} \times \{0, 1\}$. Nous pouvons, comme pour la preuve du Lemme 8.39 précédent, coder chaque sous-graphe d'ordre r par un mot sur un alphabet à trois lettres $\{a, 0, 1\}$, avec la différence qu'ici, les mots de longueur r commençant par a et formés d'une seule lettre ne donnent pas des sous-graphes isomorphes à ceux ne contenant pas le sommet a . Donc le nombre de sous-graphes non isomorphes d'ordre r est le nombre de mots de longueur r commençant par a auquel on rajoute un, ce qui donne $2^{r-1} + 1$. $\square$

Lemme 8.41. $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) \geq 2^r, r \geq 3$ pour $1 \leq \ell \leq 2$ et ($2 \leq p \leq 4, k \in \{1, 2, 3\}$), les premières valeurs étant 1, 1, 3 pour $r = 0, 1$ et 2.

Preuve. A tout sous-graphe à r sommets, ordonnés suivant $\leq_{\ell,k}^{(p)}$, nous pouvons associer un mot de longueur r en 0, 1. Tous les mots différents donnent des sous-graphes non isomorphes (à l'exception des deux mots formés par une seule lettre qui donnent deux sous-graphes isomorphes), donc $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) \geq 2^r - 1$. Pour $r \geq 3$, chaque mot qui contient le facteur 01 qui correspond à deux sommets $(n, 0)$ et $(m, 1)$ successifs par rapport à $\leq_{\ell,k}^{(p)}$, code deux sous-graphes non isomorphes, car nous avons deux cas, le cas où $m = n$ et le cas où $m > n$ qui donnent des sous-graphes non isomorphes. Il s'ensuit qu'à partir de $r \geq 3$ nous avons $\varphi_{\ell,k}^{(p)}(r) \geq 2^r$. $\square$

Lemme 8.42. *Pour $\ell \geq 3$ ou $p \geq 5$ le profil du graphe $\mathcal{G}_{\ell,k}^{(p)}$ est supérieur ou égal à l'une des cinq fonctions : $\varphi_1(n) := 2^n - 1$, $\varphi_2(n) := 2^n - n$, $\varphi_3(n) := 2^{n-1}$, $\varphi_4(n) := 2^{n-1} + 1$ et la fonction de Fibonacci.*

Preuve. Tous les graphes pour $p \geq 5$ se déduisent des graphes pour $p \leq 4$ avec les restrictions aux ensembles $\mathbb{N} \times \{0\}$ et $\mathbb{N} \times \{1\}$ qui ne sont pas isomorphes, donc le nombre de sous-graphes d'ordre r sera plus grand que dans le cas $p \leq 4$ dont les profils sont donnés par l'une des cinq fonctions ci-dessus. Pour $\ell \geq 3$, les graphes s'obtiennent à partir de ceux pour lesquels $\ell \leq 2$, soit en permutant $\leq_{\ell,k}^{(p)}$ et $\rho_{\ell,k}^{(p)}$ comme c'est le cas pour $\ell = 3, 4$ ou en modifiant l'ordre $\leq_{\ell,k}^{(p)}$ (pour $5 \leq \ell \leq 8$), les raisonnements adoptés dans les preuves des lemmes précédents restent valables. $\square$

Preuve du Théorème 8.29. Soit $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$ une structure binaire ordonnée de type k . Si $\mathcal{R}$ a une décomposition monomorphe finie alors, d'après le Théorème 7.24, il existe un entier ℓ tel que tout élément de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, l'âge de $\mathcal{R}$, possède une décomposition monomorphe ayant au plus ℓ blocs. D'après le Théorème 7.62, le profil de $\mathcal{A}(\mathcal{R})$, et donc celui de $\mathcal{R}$, est un polynôme. Si $\mathcal{R}$ n'a pas de décomposition monomorphe finie, alors d'après la Proposition 7.47, il existe $1 \leq i \leq k$ tel que $\mathcal{R}_i := (E, \leq, \rho_i)$ n'a pas de décomposition monomorphe finie, donc $\mathcal{R}_i \in \mathcal{D}$ et d'après le Théorème 8.28, $\mathcal{R}_i$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$. Les éléments de $\mathfrak{A}$, d'après la Proposition 8.35, ont un profil au moins exponentiel. Donc $\mathcal{R}_i$ a un profil au moins exponentiel ce qui entraîne le même résultat pour $\mathcal{R}$. $\square$

Conclusion générale

Dans ce travail, trois notions importantes ont été abordées : l'algébricité de la série énumérative d'une classe de structures finies, la notion de minimalité et le phénomène de saut dans le comportement des profils. Chacune des trois notions a constitué une partie de ce document. Cette conclusion, est consacrée à l'exposé de quelques perspectives qui feraient, en plus des questions posées et des conjectures formulées dans les différentes parties, directement suite à ce travail.

Au chapitre 2 de la première partie nous avons explicité le lien existant entre les permutations et les bichaînes, ce qui justifie que l'on considère les permutations comme des structures relationnelles. A ce titre, nous avons généralisé des résultats sur les permutations à des structures binaires ordonnées réflexives, en particulier le théorème d'Albert-Atkinson que nous avons généralisé dans le Théorème 3.33 du chapitre 3.

Certes, la littérature sur les permutations est vaste et comporte énormément de résultats et d'outils ; il serait intéressant de les traduire en terme de la théorie des relations, notamment la notion de classe grille-géométrique (voir Annexe B) qui est, en vu des Théorèmes B.1 et B.2, un outil puissant pour montrer le caractère héréditairement rationnel et héréditairement algébrique d'une classe de permutations.

Nous avons ensuite illustré, dans le chapitre 4, cette généralisation par la construction, en guise d'exemple, d'une classe de structures binaires ordonnées dont les éléments indécomposables sont de taille au plus deux. Dans le cas où les structures de cette classe sont formées d'une seule relation en plus de l'ordre linéaire, la classe est caractérisée par des bornes dont la taille est égale à trois ou quatre. Il serait intéressant de donner une caractérisation de cette classe dans le cas général.

Nous avons également établi une bijection entre la classe des structures binaires ordonnées séparables réflexive de type 1 et celle des 3-permutations séparables en passant par la classe des arbres binaires étiquetés par un ensemble à quatre éléments. Il serait intéressant de trouver une relation "plus combinatoire" entre les objets de ces deux classes.

Nous pensons que le Théorème 3.33 peut encore être généralisé et, à cet effet, nous avons proposé la Conjecture 1 (en page 83). Cette conjecture est vérifiée par au moins une classe de structures, la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques de Schmerl et Trotter. Il serait intéressant de donner une réponse, positive ou négative, à cette conjecture ou au moins d'élargir l'ensemble d'exemples qui la vérifient.

Dans la deuxième partie, nous nous sommes intéressés à la notion de minimalité. Nous avons montré que les classes ind-minimales sont les âges de structures indécomposables infinies, qu'elles sont belordonnées mais pas nécessairement héréditairement belordonnées et qu'elles sont en nombre continu-potent. Il serait intéressant d'étudier d'autres propriétés, par exemple :

- Que doit vérifier une relation d'âge ind-minimal pour que cet âge soit héréditairement belordonné ?
- Il existe un nombre continu-potent de classes formées de graphes dirigés sans boucles ou non dirigés avec des boucles. Qu'en est-il des classes de graphes non dirigés sans boucles ?

Enfin, la troisième partie a porté sur le phénomène de sauts observé dans le comportement des profils des classes héréditaires de structures finies. Nous avons montré que pour des classes de structures binaires ordonnées, la croissance du profil passe d'une croissance polynomiale à une croissance exponentielle. Nous pensons que ce résultat reste vrai dans le cas des structures ordonnées non nécessairement binaires. La preuve de notre résultat s'appuie sur la notion de décomposition monomorphe d'une structure relationnelle et le théorème de Ramsey.

Nous avons décrit, dans le cas de deux relations binaires dont un ordre linéaire, une liste de structures minimales parmi celles dont le profil n'est pas polynomialement borné et nous avons montré que les profils des structures de cette liste sont exponentiels. La cardinalité de cette liste étant très grande, il serait intéressant de confirmer ce résultat par un algorithme et un programme informatique.

Nous avons également décrit, dans le cas des graphes non dirigés, une liste formée de dix graphes minimaux parmi ceux qui n'ont pas une décomposition monomorphe finie. Parmi ces graphes, certains ont un profil polynomialement borné. Ceci montre en particulier qu'un graphe, et donc par suite une structure binaire non ordonnée, ayant un profil polynomialement borné n'a pas forcément une décomposition monomorphe finie. Nous savons qu'un graphe (non dirigé sans boucle) a un profil borné par un polynôme si et seulement si il est cellulaire au sens de Schmerl [85]. Nous mentionnons à la section 7.4 une extension de la notion de Schmerl susceptible de caractériser les structures relationnelles à profil borné par un polynôme.

Annexe A

Codage des structures relationnelles binaires séparables de type 1 par des arbres binaires étiquetés

A.1 Introduction

Dans la Proposition 4.11 de la section 4.1.2 (page 77), nous avons déterminé la fonction génératrice de $\mathcal{S}_1^{re}$, la classe des structures binaires ordonnées séparables réflexives de type 1. Il s'avère (voir [12]) que cette fonction est celle des 3-permutations séparables, elle est également la même que celle des partitions guillotine en dimension 4 (voir [1]).

En effet, dans [1], les auteurs ont étudié les partitions guillotine en dimension d et ont donné la série génératrice du nombre de ces partitions, elle vérifie

$$f = 1 + xf + (d - 1)xf^2. \quad (\text{A.1})$$

Ils ont également établi une correspondance bijective entre les partitions guillotine en dimension d et les arbres binaires étiquetés par l'ensemble $\{1, \dots, d\}$.

Dans [12], les auteurs ont donné la série génératrice des d -permutations séparables, elle vérifie

$$f = 1 + xf + (2^{d-1} - 1)xf^2. \quad (\text{A.2})$$

Il ont également établi une correspondance bijective entre les d -permutations séparables et les partitions guillotine en dimension 2^{d-1} . Il se trouve que notre série S_1^r vérifie la relation (A.1) pour $d = 4$ et la relation (A.2) pour $d = 3$.

Dans cette partie, nous construisons une bijection entre les structures binaires ordonnées séparables de type 1 et les arbres binaires étiquetés par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, ceci entraîne que l'ensemble $\mathcal{S}_1^{re}$ et l'ensemble des partitions guillotine en dimension 4 sont isomorphes. Cela entraîne également que $\mathcal{S}_1^{re}$ est isomorphe à l'ensemble des 3-permutations séparables.

A.2 Structures binaires ordonnées séparables et arbres binaires

Un *arbre binaire* est un graphe dirigé connexe sans cycle tel que le degré de chaque sommet (nœud) est au plus 3. C'est un arbre avec une racine dans lequel tout sommet possède au plus deux successeurs. La *racine* d'un arbre binaire est le sommet de degré au plus 2 qui ne possède aucun prédécesseur. Avec cette racine, chaque autre nœud a un unique prédécesseur, appelé *parent* et chaque nœud, différent d'un sommet pendant, possède au plus deux successeurs, les *fil*s. Les deux fils sont souvent désignés par *fil*s droit et *fil*s gauche. Un arbre *étiqueté* est un arbre dans lequel chaque sommet possède une *étiquette*, appelée aussi *couleur*. Ceci définit une application entre les sommets de l'arbre et l'ensemble des étiquettes.

Rappelons que $\mathcal{S}_1^{re}$ est l'ensemble des structures relationnelles binaires ordonnées séparables réflexives de type 1 et que $\mathcal{D}_{(2)}^1$, l'ensemble des structures ordonnées de type 1 définies sur des ensembles à deux éléments, possède, à l'isomorphie près, quatre structures. Ecrivons chaque r de $\mathcal{D}_{(2)}^1$ comme $r := (\{0, 1\}, \leq, \rho)$ avec $0 < 1$, et posons $\mathcal{D}_{(2)}^1 = \{r_1, r_2, r_3, r_4\}$.

A une structure de $\mathcal{S}_1^{re}$, nous associons un arbre binaire dont tous les sommets sont étiquetés par l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ en imposant la restriction suivante : le fil gauche n'a pas la même couleur que son parent. Cet arbre est construit de manière récursive comme suit.

L'arbre vide correspond à la structure à un élément et l'arbre étiqueté à un sommet correspond à la structure (considérée comme opérateur) à deux éléments (il y a quatre couleurs).

Soit $\mathcal{R} \in \mathcal{S}_1^{re}$ une structure à n éléments. Donc $\mathcal{R}$ est la somme lexicographique de deux structures $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$, ayant respectivement n_1 et n_2 éléments avec $n_1 + n_2 = n$, indexée par une structure r_i de $\mathcal{D}_{(2)}^1$, c'est à dire que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \oplus_{r_i} \mathcal{R}_2$.

Nous associons à $\mathcal{R}$ un sommet étiqueté i d'un arbre à $n - 1$ sommets, ce sommet sera la racine de l'arbre. Ce sommet a deux fils, le fil gauche représente $\mathcal{R}_1$ et le fil droit représente $\mathcal{R}_2$. Si $\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_2$ a un sommet ($n_1 = 1$ ou $n_2 = 1$) alors le sommet i de l'arbre (la racine) aura un seul fil, le droit ou le gauche. Comme, par construction, nous avons

$$\mathcal{S}_1^{re} = \{1\} \cup \bigcup_{1 \leq i \leq 4} (\mathcal{S}_1^{re}(\mathbf{r}_i) \oplus_{\mathbf{r}_i} \mathcal{S}_1^{re}), \quad (\text{A.3})$$

la structure $\mathcal{R}_1$ ne peut pas se décomposer en une somme lexicographique indexée par r_i . Donc le sommet qui la représente (c'est à dire le fil gauche du sommet racine) ne peut pas avoir i pour étiquette. Nous continuons le même processus pour construire un arbre binaire (puisque chaque structure est 2-décomposable) à $n - 1$ sommets dont les sommets pendants ont pour couleurs les indices des structures à deux éléments, qui s'abritent dans $\mathcal{R}$ et qui interviennent dans la somme lexicographique.

Soient maintenant deux structures ordonnées séparables $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ de $\mathcal{S}_1^{re}$ et soient T_1 et T_2 les arbres binaires qui leurs sont associés respectivement. Si $\mathcal{S}_1$ est r_i -indécomposable et $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus_{r_i} \mathcal{S}_2$ alors l'arbre T correspondant à $\mathcal{S}$ est obtenu à partir des deux arbres T_1 et T_2 de la manière suivante : un sommet de couleur i est associé à $\mathcal{S}$, ce sommet qui est la racine de T

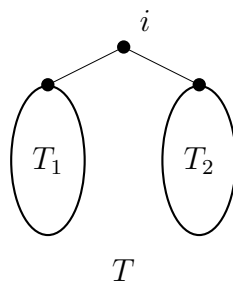


FIGURE A.1 – Construction de l'arbre de $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus_{r_i} \mathcal{S}_2$ à partir des arbres de $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$

aura pour fils gauche la racine de T_1 et pour fils droit la racine de T_2 (voir FIGURE A.1). La racine de T_1 n'a pas l'étiquette i puisque $\mathcal{S}_1$ est r_i -indécomposable, donc l'arbre T code bien la structure $\mathcal{S}$.

Il est clair, d'après la construction des structures séparables, qu'à deux structures différentes correspondent deux arbres différents construits de la manière décrite ci-dessus et qu'avec la restriction imposée sur les étiquettes et l'Equation (A.3), deux arbres différents correspondent à deux structures différentes. Donc, il existe une correspondance bijective entre les arbres binaires à n sommets, dont les sommets sont étiquetés par les éléments de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ avec la restriction que le fils gauche de tout sommet porte une étiquette différente de celle du parent, et les structures binaires ordonnées séparables (réflexives ou irréflexives) de type 1 ayant $n + 1$ sommets.

Il se trouve que cette même classe d'arbres binaires permet de coder les partitions guillotine d'une boîte de dimension 4 [1], voir aussi [12].

Le problème de partitions guillotine d'une boîte de dimension d se définit comme suit. Etant donnée une boîte B de dimension d dans $\mathbb{R}^d$, une *partition guillotine* de B est une subdivision de B en plus petites boîtes de $\mathbb{R}^d$ obtenues en coupant d'abord B en deux boîtes de $\mathbb{R}^d$ par un hyperplan parallèle à ses axes, puis couper les boîtes obtenues de la même manière (les directions des coupes peuvent changer). Clairement, il existe une infinité de partitions guillotine avec un nombre donné d'hyperplans, mais si l'on s'intéresse aux directions des coupes plutôt qu'à leurs positions exactes, alors le nombre de partitions (structurellement) différentes obtenues avec n hyperplans de $\mathbb{R}^d$ est fini.

Annexe B

Les classes grille-géométriques

Dans cette annexe, nous rappelons la définition des classes de permutations appelées *classes grille-géométriques* pour voir que les permutations exceptionnelles sont contenues dans des classes grille-géométriques. Les propriétés de ces classes nous ont permis, dans la section 4.2 en page 83, de déduire que la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques est héréditairement algébrique. Pour plus de détails sur ces classes consulter [5, 6, 54, 110].

Dans l'étude des permutations et des classes de permutations, les classes grille-géométriques sont considérées comme l'un des outils les plus puissants. Ces classes sont définies comme suit.

Soit M une matrice dont les coefficients appartiennent à $\{-1, 0, 1\}$. Contrairement aux notations conventionnelles, les coefficients de M sont indexés de gauche à droite pour les colonnes et de bas en haut pour les lignes et les indices de ligne et de colonne sont inversés. Ainsi, $M_{k,l}$ désigne le coefficient de la $k^{\text{ième}}$ colonne à partir de la gauche et de la $l^{\text{ième}}$ ligne à partir du bas comme indiqué ci-dessous :

$$\begin{pmatrix} (1, 2) & (2, 2) & (3, 2) \\ (1, 1) & (2, 1) & (3, 1) \end{pmatrix}.$$

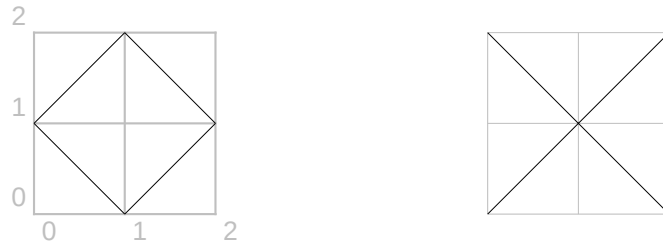
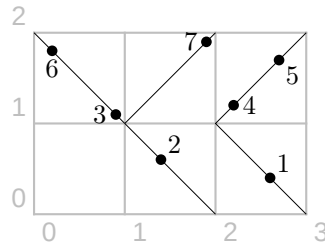
A la matrice M est associée une grille ayant un nombre de blocs égal au nombre de coefficients de M , dont la répartition en lignes et en colonnes est dictée par M .

La *figure standard* de M est l'ensemble des points de $\mathbb{R}^2$ pouvant-être placés dans cette grille de la manière suivante :

- sur le segment de droite reliant les points $(k-1, l-1)$ et (k, l) si $M_{k,l} = 1$ ou
- sur le segment de droite reliant les points $(k-1, l)$ et $(k, l-1)$ si $M_{k,l} = -1$.

Exemple : La figure standard de $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ et celle de $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ sont représentées sur la FIGURE B.1) :

La *classe grille-géométrique* de M , notée $Geom(M)$ est l'ensemble de toutes les permutations qui peuvent-être réparties en blocs tels que la sous-suite contenue dans chaque bloc est monotone et peuvent-être représentées sur la figure standard de M . Ces permutations sont définies de la manière suivante. Choisir n points sur la figure tels que deux points donnés ne soient pas sur

FIGURE B.1 – Figures standards de M_1 à gauche et M_2 à droiteFIGURE B.2 – Représentation de la permutation 6327415 sur la figure standard de M .

une même ligne horizontale ou verticale. Puis, numéroter les points de 1 à n en allant de bas en haut et réécrire ces nombres en allant de gauche à droite. Un exemple qui montre que la permutation 6327415 se trouve dans $Geom(M)$ pour $M = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ est donné dans la FIGURE B.2.

La notion de classe grille-géométrique permet de faire une description structurale des classes de permutations. Ces classes ont des propriétés intéressantes.

Théorème B.1. [5]

Toute classe grille-géométrique est héréditairement rationnelle et a un nombre fini de bornes.

Une classe de permutations est *géométriquement en grille* si elle est contenue dans une classe grille-géométrique d'une matrice M .

Théorème B.2. [6]

La clôture par sommes de toute classe géométriquement en grille est héréditairement algébrique.

Nous rappelons que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$, nous avons quatre sortes de bichaînes critiques (voir détails en page 82), $(V_n, L_{n,1}, L_{n,2})$, $(V_n, L_{n,2}, L_{n,1})$, $(V_n, L_{n,1}, (L_{n,2})^{-1})$ et $(V_n, (L_{n,2})^{-1}, L_{n,1})$ où $V_n := \{0, \dots, n-1\} \times \{0, 1\}$, $L_{n,1}$ et $L_{n,2}$ sont deux ordres linéaires sur V_n donnés par : $L_{n,1} := (0, 0) < (0, 1) < \dots < (i, 0) < (i, 1) \dots < (n-1, 0) < (n-1, 1)$ et $L_{n,2} := (n-1, 0) < \dots < (n-i, 0) < \dots < (0, 0) < (n-1, 1) < \dots < (n-i, 1) \dots < (0, 1)$.

Les types d'isomorphie des bichaînes critiques sont les permutations exceptionnelles, elles sont décrites en terme de permutations de $1, \dots, 2m$ pour $m \geq 2$ dans [2] :

- (i) $\sigma_m^1 := 2.4.6....2m.1.3.5....2m-1.$
- (ii) $\sigma_m^2 := 2m-1.2m-3....1.2m.2m-2....2.$
- (iii) $\sigma_m^3 := m+1.1.m+2.2....2m.m.$
- (vi) $\sigma_m^4 := m.2m.m-1.2m-1....1.m+1.$

Remarquons que $\sigma_m^3 = (\sigma_m^1)^{-1}$ et $\sigma_m^4 = (\sigma_m^2)^{-1}$.

Ces quatre classes de permutations sont des classes géométriquement en grille. En effet, nous avons :

- $\{\sigma_m^1 / m \in \mathbb{N}, m \geq 4\} \subseteq \text{Geom}(M_1)$ avec $M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}$.
- $\{\sigma_m^2 / m \in \mathbb{N}, m \geq 4\} \subseteq \text{Geom}(M_2)$ avec $M_2 = \begin{pmatrix} -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- $\{\sigma_m^3 / m \in \mathbb{N}, m \geq 4\} \subseteq \text{Geom}(M_3)$ avec $M_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
- $\{\sigma_m^4 / m \in \mathbb{N}, m \geq 4\} \subseteq \text{Geom}(M_3)$ avec $M_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Il s'ensuit, d'après le Théorème B.2, que la clôture par sommes de la classe des permutations exceptionnelles, et donc la clôture par sommes de la classe des bichaînes critiques, est héréditairement algébrique.

Notations

Dans ce document sont utilisées les notations suivantes.

• $\emptyset$ désigne l'ensemble vide, $\subset$, $\subseteq$, $\cup$, $\cap$ désignent les relations ensemblistes : l'inclusion au sens strict, l'inclusion au sens large, la réunion et l'intersection des ensembles respectivement.

• $A \setminus B$: complémentaire de B dans A .

• $|E|$: cardinalité de l'ensemble E .

• $\mathcal{P}(E)$: ensemble des parties de E .

• E^n : ensemble des n -uples d'éléments de E .

• $[E]^n$: ensemble des parties à n éléments de E .

• $\Delta_E := \{(x, x) : x \in E\}$.

• n un entier, $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$, $[0] := \emptyset$.

• $\mathfrak{S}_n$: ensemble des permutations de $\{1, 2, \dots, n\}$ et $\mathfrak{S} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathfrak{S}_n$.

• Si G est un graphe, $\overline{G}$ est son graphe complémentaire.

• K_n : graphe complet à n sommets.

• I_n : indépendant à n sommets ou graphe vide à n sommets.

• $K_{\mathbb{N}}$: graphe complet ayant pour ensemble de sommets l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs.

• $I_{\mathbb{N}}$: l'indépendant ayant pour ensemble de sommets l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs.

• $\Delta_{\mathbb{N}}$: l'antichaîne ayant pour ensemble de sommets l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers non négatifs.

- ω : chaîne des entiers naturels ($\mathbb{N}$ muni de l'ordre naturel).
- Si ρ est une relation n -aire, ρ^c désigne sa relation complémentaire.
- Si ρ est une relation binaire sur E , $\rho^{-1} := \{(x, y) \in E^2 : (y, x) \in \rho\}$ est sa relation inverse ou duale notée également ρ^* .
- Si $\mathcal{R}$ est une structure relationnelle alors
 - $V(\mathcal{R})$ (ou $\text{dom}(\mathcal{R})$) désigne son domaine ou sa base.
 - $\tau(\mathcal{R})$ désigne son type d'isomorphie.
 - $\mathcal{R}|_A$ désigne sa restriction à $A \subseteq \text{dom}(\mathcal{R})$, elle est parfois notée $\mathcal{R}_A$.
 - $\varphi_{\mathcal{R}}$ désigne le profil de $\mathcal{R}$.
- Ω_{μ} : classe des structures relationnelles finies de signature μ .
- T_{μ} : Collection des types d'isomorphie des structures de Ω_{μ} .
- $\mathcal{A}(\mathcal{R})$: âge de $\mathcal{R}$ est la collection des restrictions finies de $\mathcal{R}$ considérées à l'isomorphie près ou collection des types d'isomorphie des restrictions finies de $\mathcal{R}$.
- Pour $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ dans Ω_{μ} , $\mathcal{R} \leq \mathcal{R}'$ signifie $\mathcal{R}$ s'abrite dans $\mathcal{R}'$.
- Si $\mathcal{P}$ est un ensemble préordonné et $A \subseteq \mathcal{P}$ alors :
 - $\text{Forb}(A) := \{x \in \mathcal{P} : y \not\leq x, \forall y \in A\}$.
 - $\downarrow A := \{x \in \mathcal{P} : x \leq y \text{ pour au moins un } y \in A\}$.
 - $\uparrow A := \{x \in \mathcal{P} : x \geq y \text{ pour au moins un } y \in A\}$.
- $\varphi_{\mathcal{C}}$: profil de la classe $\mathcal{C}$.
- $\mathcal{R} := (E, \rho_1, \dots, \rho_k)$, où ρ_i est une relation binaire pour tout $1 \leq i \leq k$, désigne une structure binaire de type k .
- $\mathcal{R} := (E, \leq, \rho_1, \dots, \rho_k)$, où $\leq$ est un ordre total et ρ_i une relation binaire pour tout $1 \leq i \leq k$, désigne une structure binaire ordonnée de type k .
- Ω_k : classe des structures binaires finies de type k .
- Θ_k : classe des structures binaires ordonnées finies de type k , $\Theta_k \subseteq \Omega_{k+1}$.
- $\Gamma_k := \{\mathcal{R} \in \Theta_k : \mathcal{R} \text{ réflexive}\}$: classe des structures binaires ordonnées finies réflexives de type k , $\Gamma_k \subseteq \Theta_k$.

- $Ind(\mathcal{C})$: classes des membres indécomposables de la classe $\mathcal{C}$.
- $Ind(\mathcal{R})$: collection des sous-structures finies indécomposables de la structure binaire $\mathcal{R}$.
- Pour $\mathcal{I} \subseteq Ind(\Omega_k)$, $\sum \mathcal{I} := \{\mathcal{R} \in \Omega_k : Ind(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{I}\}$.
- $\mathcal{D}_{(2)}^k := \{\mathcal{R} \in \Gamma_k : |dom(\mathcal{R})| = 2\}$: ensemble des structures binaires ordonnées, réflexives de type k définies sur deux éléments, $\mathcal{D}_{(2)}^k \subseteq \Gamma_k$.
- $\mathcal{S}_k$: classe de structures binaires ordonnées séparables de type k , $\mathcal{S}_k \subseteq \Theta_k$.
- $\mathcal{T}_k^s := \{\tau(\mathcal{R}) : \mathcal{R} \in \mathcal{S}_k\}$: classe des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{S}_k$.
- $\mathcal{S}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_k^{ir}$) : sous-classe formée des structures réflexives (resp. irréflexives) de $\mathcal{S}_k$, $\mathcal{S}_k^{re} := \mathcal{S}_k \cap \Gamma_k$.
- $\mathcal{T}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{T}_k^{ir}$) : sous-classe formée des types d'isomorphie des structures de $\mathcal{S}_k^{re}$ (resp. $\mathcal{S}_k^{ir}$); $\mathcal{T}_k^{re} \subseteq \mathcal{T}_k^s$.
- Si i est un entier, τ une structure de Θ_k et $\mathcal{A}$ une sous-classe de Θ_k alors :
 - $\mathcal{A}(\tau)$ désigne l'ensemble des membres de $\mathcal{A}$ qui sont τ -indécomposables.
 - $\mathcal{A}_{(i)}$ désigne l'ensemble des membres de $\mathcal{A}$ qui ont i éléments.
 - $\mathcal{A}_{(\geq i)}$ désigne l'ensemble des membres de $\mathcal{A}$ qui ont au moins i éléments.
- $x \simeq_{F, \mathcal{R}} y$: signifie x et y sont F -équivalents dans $\mathcal{R}$, c'est à dire les restrictions de $\mathcal{R}$ à $\{x\} \cup F$ et à $\{y\} \cup F$ sont isomorphes.
- $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$: signifie x et y sont k -équivalents dans $\mathcal{R}$, c'est à dire que $x \simeq_{F, \mathcal{R}} y$ pour toute partie F à k éléments qui ne contient pas x et y .
- $x \simeq_{\leq k, \mathcal{R}} y$: signifie x et y sont $\leq k$ -équivalents dans $\mathcal{R}$, c'est à dire que $x \simeq_{k', \mathcal{R}} y$ pour tout $k' \leq k$.
- $x \simeq_{\mathcal{R}} y$: signifie x et y sont équivalents dans $\mathcal{R}$, c'est à dire que $x \simeq_{k, \mathcal{R}} y$ pour tout entier k .
- $\mathcal{D}_{\mu, k}$: la classe des structures ordonnées $\mathcal{R}$ de signature μ telle que $\simeq_{\leq k, \mathcal{R}}$ possède un nombre infini de classes.
- $dim_{fort}(\mathcal{R})$: nombre de composantes fortement monomorphes de $\mathcal{R}$. Si ce nombre n'est pas fini, on écrit $dim_{fort}(\mathcal{R}) = \infty$.
- $dim_{mon}(\mathcal{R})$: nombre de composantes monomorphes de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$, la décomposition mono-morphe canonique de $\mathcal{R}$. Si ce nombre n'est pas fini, on écrit $dim_{mon}(\mathcal{R}) = \infty$.

- $dim_{mon}^\infty(\mathcal{R})$: nombre de composantes monomorphes infinies de $\mathcal{P}(\mathcal{R})$ lorsque $dim_{mon}(\mathcal{R}) < \infty$.
- $dim_{Fraisse}(\mathcal{R})$: nombre d'intervalles Fraïssé monomorphes maximaux de $\mathcal{R}$. Si ce nombre n'est pas fini, on écrit $dim_{Fraisse}(\mathcal{R}) = \infty$.
- $dim_{int}(\mathcal{R})$: nombre d'intervalles monomorphes maximaux de $\mathcal{R}$. Si ce nombre n'est pas fini, on écrit $dim_{int}(\mathcal{R}) = \infty$.
- $\mathcal{S}_\mu$: classe de structures relationnelles de signature μ (finie) ne possédant pas de décomposition monomorphe ayant un nombre fini de blocs.
- $\mathcal{D}_\mu$: classe de structures relationnelles ordonnées de signature μ (finie) ne possédant pas de décomposition en intervalles ayant un nombre fini de blocs.

Bibliographie

- [1] E. Ackerman, G. Barquet, R.Y. Pinter, D. Romik, *The number of guillotine partitions in d dimensions*. Inform. Process. Lett., **98**(4) (2006) 162–167.
- [2] M.H. Albert, M.D. Atkinson, *Simple permutations and pattern restricted permutations*. Discrete Mathematics, **300** (2005) 1–15.
- [3] M.H. Albert, M.D. Atkinson, M. Klazar, *The enumeration of simple permutations*. Journal of integer sequences, Vol. 6 (2003), Article 03.4.4.
- [4] M.H. Albert, M.D. Atkinson, V. Vatter, *Subclasses of the separable permutations*. Bull. Lond. Math. Soc. **43** (2011), no. 5, 859–870.
- [5] M.H. Albert, M. D. Atkinson, M. Bouvel, N. Ruškuc, V. Vatter, *Geometric grid classes of permutations*. Trans. Amer. Math. Soc. **365** (2013), no. 11, 5859–5881.
- [6] M.H. Albert, N. Ruškuc, V. Vatter, *Inflations of geometric grid classes of permutations*. Israël J. Math, to appear. arXiv :1202 :1833[math.CO].
- [7] J-P. Allouche, J. Shallit, Automatic sequences. Theory, applications, generalizations. *Cambridge University Press, Cambridge*, 2003. xvi+571.
- [8] N. Alon, E. Friedgut, *On the number of permutations avoiding a given pattern*. J. Combin. Theory, Ser. A **89** (2000), no. 1, 133–140.
- [9] M. Alzohairi, M. Bouaziz, I. Boudabbous, Y. Boudabbous, D. Oudrar, M. Pouzet, *Prime extensions of cographs*. preprint (2015).
- [10] I. Anderson, A first course in Discrete Mathematics. *Springer Undergraduate Mathematics Series* ISSN 1615-2085, Springer-Verlag London Berlin Heidelberg, 2nd printing 2002.
- [11] R. Arratia, *On the Stanley-Wilf conjecture for the number of permutations avoiding a given pattern*. Electr. J. Comb., **6** (1999), N1, 1–4.
- [12] A. Asinowski, T. Mansour, *Separable d -Permutations and Guillotine Partitions*. Annals of Combinatorics **14** (2010) 17–43.
- [13] J. Balogh, B. Bollobás, R. Morris, *Hereditary properties of partitions, ordered graphs and ordered hypergraphs*. European Journal of combinatorics, **8**, (2006) 1263–1281.
- [14] J. Balogh, B. Bollobás, R. Morris, *Hereditary properties of ordered graphs*. in Topics in discrete mathematics, 179–213, Algorithms Combin., **26**, Springer, Berlin, 2006.
- [15] J. Balogh, B. Bollobás, R. Morris, *Hereditary properties of tournaments*. Electron. J. Combin. **14** (2007), no. 1, Research Paper 60, 25 pp.

- [16] J. Balogh, B. Bollobás, R. Morris, *Hereditary properties of combinatorial structures : posets and oriented graphs*. Journal of Graph Theory, **56** (2007) 311–332.
- [17] J. Balogh, B. Bollobás, M. Saks, V. T. Sós, *The unlabelled speed of a hereditary graph property*. Journal of combinatorial theory, series B **99** (2009) 9–19.
- [18] C. Berge, Graph and Hypergraphs. *North-Holland*, (1973).
- [19] M. Bóna, *Exact and asymptotique enumeration of 1342-avoiding permutations : a close link with labeled trees and planar maps*. J. of Comb. Theory, Ser. A, **80** (1997), 257–272.
- [20] M. Bóna, *Permutations avoiding certain patterns : the case of length 4 and some generalizations*. Discrete Math., **175** (1997), 55–67.
- [21] M. Bóna, *The solution of a conjecture of Stanley and Wilf for all layered patterns*. J. of Comb. Theory, Ser. A, **85** (1999), 96–104.
- [22] M. Bóna, Combinatorics of Permutations. *Chapman and Hall CRC*, (2004).
- [23] P. Bose, J. F. Buss, A. Lubiw, *Pattern matching for permutations*. Inform. Process. Lett. **65**, 5 (1998), 277–283.
- [24] Y. Boudabbous, *Personnal communication*, August 2013.
- [25] Y. Boudabbous, M. Pouzet, *The morphology of infinite tournaments ; application to the growth of their profile*. European Journal of Combinatorics. **31** (2010) 461–481.
- [26] M. Bousquet-Mélou, *Combinatoire énumérative*. Rapport scientifique pour l’Habilitation à diriger des recherches Université Bordeaux I (1996).
- [27] R. Brignall, *A survey of simple permutations. Permutation patterns*. London Math. Soc. Lecture Note Ser., **376**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, 41–65.
- [28] R. Brignall, S. Huczynska, V. Vatter, *Decomposing simple permutations with enumerative consequences*. Combinatorica **28** (2008), 385–400.
- [29] R. Brignall, N. Ruškuc, V. Vatter, *Simple permutations : decidability and unavoidable substructures*. Theoret. Comput. Sci. **391** (2008), no. 1-2, 150163.
- [30] P. J. Cameron, *Homogeneous permutations. Permutation patterns*. (Otago, 2003). Electron. J. Combin. **9** (2002/03), no. 2, Research paper 2, 9 pp.
- [31] Ch. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics. *The CRC Press Series on Discrete Mathematics and its Application* by Chapman and Hall/CRC (2002).
- [32] S. Corteel, G. Louchard, R. Pemantle, *Common intervals of permutations*. Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, **8**(1), (2006), 189–214.
- [33] M. Couceiro, M. Pouzet, *On a quasi-ordering on boolean functions*. Theoretical Computer Science, **396** (2008) 71–87.
- [34] B. Courcelle, C. Delhommé, *The modular decomposition of countable graphs. Definition and construction in monadic second-order logic*. Theoretical Computer Science, **394** (2008) 1–38.
- [35] J. Dammak, G. Lopez, M. Pouzet, H. Si Kaddour, *Hypomorphy of graphs up to complementation*. Journal of Combinatorial Theory, Series B **99** (2009) 84–96.

- [36] C. Delhommé, *Nicely bgo grounded categories and 2-structures*. Preprint (2015).
- [37] C. Delhommé, C. Laflamme, M. Pouzet, N. Sauer, *On homogeneous ultrametric spaces*. Preprint (2015).
- [38] C. Delhommé, M. Pouzet, G. Sági and N. Sauer, *Representation of ideals of relational structures*. Discrete Math. **309** (2009), n° 6 ; 1374–1384.
- [39] A. Ehrenfeucht, T. Harju, G. Rozenberg, The theory of 2-structures. A framework for decomposition and transformation of graphs. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ*, 1999.
- [40] Ph. Flajolet, R. Sedgewick, *Analytic Combinatorics*. Cambridge University Press, (2009).
- [41] R. Fraïssé, *Theory of relations. Second edition*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 2000.
- [42] R. Fraïssé, *On a decomposition of relations which generalizes the sum of ordering relations*. Bull. Amer. Math. Soc., **59** :389, 1953.
- [43] R. Fraïssé, *L'intervalle en théorie des relations ; ses généralisations ; filtre intervallaire et clôture d'une relation. (French) [The interval in relation theory ; its generalizations ; interval filter and closure of a relation]*. Orders : description and roles. (L'Arbresle, 1982), 313–341, North-Holland Math. Stud., **99**, North-Holland, Amsterdam, 1984.
- [44] R. Fraïssé, G. Lopez, *La reconstruction d'une relation dans l'hypothèse forte : Isomorphie des restrictions à chaque partie stricte de la base*. SMS, Les presses de l'université de Montréal (1990).
- [45] R. Fraïssé, M. Pouzet, *Interprétabilité d'une relation pour une chaîne*. C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B **272** (1971), pp. 1624–1627.
- [46] C. Frasnay, *Quelques problèmes combinatoires concernant les ordres totaux et les relations monomorphes*. Thèse. Paris. Annales Institut Fourier Grenoble, **15** (1965), pp. 415–524.
- [47] C. Frasnay, *Interprétation relationniste du seuil de recollement d'un groupe naturel*. Comptes rendus, vol. **277**(A) (1973), pp. 865–868.
- [48] C. Frasnay, *Détermination du degré optimal d_m de monomorphie pour les structures relationnelles au plus m -aires*. Math. Rep. Acad. Sci. Canada, vol. **12**(1) (1990), pp. 141–146.
- [49] T. Gallai, *Transitiv orientbare graphen*. Acta Math. Acad. Sci. Hungar. **18** (1967) 25–66 (English translation by F. Maffray and M. Preissmann in [95]).
- [50] M.C. Golumbic, *Algorithmic graph theory and perfect graphs*. second edition Annals of Discrete Mathematics **57** (2004). Series Editor : Peter L. HAMMER Rutgers University, Piscataway, N J, U.S.A. ISBN : 0-444-51530-5
- [51] D.H. Gottlieb, *A class of incidence matrices*. Proc. Amer. Math. Soc. **17** (1966), 1233–1237.
- [52] R. Graham, B. Rothschild and J. Spencer, *Ramsey Theory*. Wiley-interscience, 2nd ed., (1990).
- [53] G. Higman, *Ordering by divisibility in abstract algebras*. Proc. London Math. Soc. (3), **2** :326–336, 1952.

- [54] S. Huczynska, V. Vatter, *Grid classes and the Fibonacci dichotomy for restricted permutations*. Electron. J. Combin. **13** (2006), Research paper 54, 14 pp.
- [55] P. Ille, *The reconstruction of multirelations, at least one component of which is a chain*. J. Combin. Theory, Ser. A **61** (1992), no. 2, 279–291.
- [56] T. Kaizer, M. Klazar, *On growth rates of closed permutation classes*. Permutation patterns. (Otago, 2003) electr. J. Combin., **9** (2002/2003), no. 2, Research Paper 10, 20 pp.
- [57] W. Kantor, *On incidence matrices of finite projection and affine spaces*. Math. Zeitschrift **124** (1972), 315–318.
- [58] D. Kelly, *Comparability graphs*. Graphs and Orders. I. Rival (ed), NATO ASI Series, Vol. 147, D. Reidel, Dordrecht, 1985, pp. 3–40.
- [59] S. Kitaev, Patterns in Permutations and Words. Springer-Verlag Berlin Heidelberg (2011).
- [60] M. Klazar, *Overview of general results in combinatorial enumeration*. In Permutation Patterns (2010), S. Linton, N. Ruškuc, and V. Vatter, Eds., vol. **376** of London Mathematical Society Lecture Note Series, Cambridge University Press, pp. 3–40.
- [61] M. Klazar, *On growth rates of permutations, Set partitions, Ordered graphs and other objects*. The electronic Journal of Combinatorics, **15** (2008) no. 1, Research Paper 75, 22 pp.
- [62] C. Laflamme, M. Pouzet, N. Sauer, I. Zaguia, *Pairs of orthogonal ordinals*. Discrete Mathematics **335** (2014) 35–44.
- [63] B.M Landman, A. Robertson, *Ramsey Theory on the Integers*. Student Mathematical Library, v. **24** (2004) American Mathematical Society.
- [64] R. Laver, *On Fraïssé’s Order Type Conjecture*, Annals of mathematics. **93** (1) (1971) 89–111.
- [65] G. Lopez, *Sur la détermination d’une relation par les types d’isomorphie de ses restrictions*. C. R. Acad. Sci. Paris Séries. A-B **275** (1972) A951–A953.
- [66] G. Lopez, *L’indéformabilité des relations et multirelations binaires*. Z. Math. Logik Grundlagen Math. **24** (1978), no. 4, 303–317.
- [67] M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*. Cambridge University Press. (2001).
- [68] F. Maffray, M. Preissmann, *A translation of Gallai’s paper : Transitiv Orientierbare Graphen*. Perfect graphs [95], (2001), 25–66.
- [69] A. Marcus, G. Tardös, *Excluded permutation matrices and the Stanley-Wilf conjecture*. J. Combin. Theory, Ser. A **107** (2004), 153–160.
- [70] T. Monteil, M. Pouzet, *From the complexity of infinite permutations to the profile of bichains*. In ROGICS’08 : International Conference on Relations, Orders and Graphs : Interaction with computer science, pages 1–6, (2008).
- [71] F. de Montgolfier, *Décomposition modulaire des graphes. Théorie, extensions et Algorithmes*. Thèse de doctorat. Université de Montpellier II (2003).
- [72] M.M. Murphy, V. Vatter, *Profile classes and partial well-order for permutations*. Electron. J. Combin. **9**, 2 (2003), Research paper pp 17–30.

- [73] C. St. J. A. Nash-Williams, *On well-quasi-ordering infinite trees*. Proc. Camb. Phil. Soc., **61** (1965), pp 697–720.
- [74] C. St. J. A. Nash-Williams, *On better-quasi-ordering transfinite sequences*. Proc. Camb. Phil. Soc., **64** (1968), 273–290.
- [75] A. Nozaki, M. Miyakawa, G. Pogosyan, I.G. Rosenberg, *The number of orthogonal permutations*. Europ. J. Combinatorics, **16** (1995) 71–85.
- [76] D. Oudrar, M. Pouzet, *Décomposition monomorphe des structures relationnelles et profil de classes héréditaires*. 7 pp, 2014, arXiv :1409.1432[math.CO].
- [77] D. Oudrar, M. Pouzet, *Profile and hereditary classes of ordered relational structures*. Journal of Multiple-Valued Logic and Soft Computing (MVLSC), to appear. (available arXiv :1409.1108[math.CO]).
- [78] D. Oudrar, M. Pouzet, *Structures with no finite monomorphic decomposition. Application to the profile of hereditary classes*. Preprint (2015).
- [79] M. Pouzet, *Un belordre d’abritement et ses rapports avec les bornes d’une multirelation*. Comptes rendus Sci. Paris vol. **274**(A)(1972), pp. 1677–1680.
- [80] M. Pouzet, *Application d’une propriété combinatoire des parties d’un ensemble aux groupes et aux relations*. Math. Zeitschrift. vol.**150** (1976) pp 117–134.
- [81] M. Pouzet, *Sur la théorie des relations*. Thèse d’État, Université Claude-Bernard, Lyon 1, 1978.
- [82] M. Pouzet, *Relations non restructurables par leurs restrictions*. J. Combin. Theory Ser. B **26** (1979), no. 1, 22–34.
- [83] M. Pouzet, *Application de la notion de relation presque-enchaînable au dénombrement des restrictions finies d’une relation*. Z. Math. Logik Grundlag. Math., **27** (1981), 289–332.
- [84] M. Pouzet, *Belordre et profil des relations : une illustration des rapports entre l’ordre et les relations*. Exposé en l’honneur de Claude Benzaken, Grenoble, Sept 2002.
- [85] M. Pouzet, *The profile of relations*. Glob. J.Pure Applied Math. (Proceedings of the 14th symposium of the Tunisian Mathematical Society, held in Hammamet, March 20-23, 2006), **2** (2006) 237–272.
- [86] M. Pouzet, *Théorie de l’ordre : une introduction*. circulating manuscript. Lyon 2012, 349p.
- [87] M. Pouzet, N. Sauer, *From well-quasi-ordered sets to better-quasi-ordered sets*. Electron. J. Combin. **13** (2006), no. 1, Research Paper 101, 27 pp. (electronic).
- [88] M. Pouzet, H. Si Kaddour, *Isomorphy up to complementation*. 2015. <hal-01107815>.
- [89] M. Pouzet, M. Sobrani, *Sandwiches of ages*. Ann. Pure Appl. Logic **108**(3) (2001), pp, 295–326.
- [90] M. Pouzet, N.M. Thiéry, *Some relational structures with polynomial growth and their associated algebras*. In Proceeding of FPSAC’05 Taormina, (2005). arXiv :0601256 [math.Co].
- [91] M. Pouzet, N.M. Thiéry, *Some relational structures with polynomial growth and their associated algebras*. In Youcef Boudabbous and Nejib Zaguia, editors, ROGICS’08 : International Conference on Relations, Orders and Graphs : Interaction with Computer Science, 12-17 may, (2008) Mahdia, Tunisia. Nouha, 2008. arXiv :0801.4404v1 [math.Co].

- [92] M. Pouzet, N. M. Thiéry, *Some relational structures with polynomial growth and their associated algebras I : Quasi-polynomiality of the profile*. Electron. J. Combin., **20**(2) :Paper 1, 35, 2013.
- [93] M. Pouzet, I. Zaguia, *On minimal prime graphs and posets*. Order **26** (2009), no. 4, 357–375.
- [94] V. R. Pratt, *Computing permutations with double-ended queues, parallel stacks and parallel queues*. Proc. ACM Symp. Theory of Computing **5**, (1973), 268–277.
- [95] J. L. Ramírez-Alfonsín, B. A. Reed, *Perfect graphs*. Series in Discrete Mathematics and Optimization. Wiley-Interscience, 2001, pp.25–66.
- [96] N. Ray, J. West, *Posets of Matrices and Permutations with forbidden subsequences*. Annals of combinatorics. **7** (2003) 55–88.
- [97] C. Retenauer, *Personnal communication*, Nov.2011.
- [98] I. Rival, N. Zaguia, *Perpendicular orders*. Discrete Math. **137** (1995), no. 1-3, 303–313.
- [99] J.H. Schmerl, *Coinductive $\aleph_0$ -categorical theories*. The Journal of Symbolic Logic, **55**(3) 1130–1137 (1990).
- [100] J.H. Schmerl, W.T. Trotter, *Critically indecomposable partially ordered sets, graphs, tournaments and other binary relational structures*. Discrete Math., **113** (1-3) (1993) 191–205.
- [101] N. J. A. Sloane, *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*. <https://oeis.org/>
- [102] D. Spielman, M. Bóna, *An infinite antichain of permutations*. Electr. J. Comb. **7** (2000), N2.
- [103] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics*. Vol. 1, *volume 49 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1997), reprinted (2002).
- [104] R.P. Stanley, *Enumerative combinatorics*. Vol. 2, *volume 49 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1999).
- [105] R. E. Tarjan, *Sorting using networks of queues and stacks*. J. ACM **19**, (1972), 341–346.
- [106] S. Thomassé, *On better-quasi-ordering countable series-parallel orders*. Trans. Amer. Mat. Soc. **352**-6, 2491–2505 (1999).
- [107] W.T. Trotter, *Combinatorics and Partially Ordered Sets. Dimension Theory*. The Johns Hopkins University Press. Baltimore and London, (1992).
- [108] J.H. Van Lint, R.M. Wilson, *A Course in Combinatorics*. Cambridge University Press, Cambridge, (1992), reprinted (1996).
- [109] V. Vatter, *Small configurations in simple permutations*. European Journal of Combinatorics. (2010), doi :10.1016/j.ejc.2010.02.004.
- [110] V. Vatter, *Permutations classes*. In Handbook of Enumerative Combinatorics, M. Bóna, Ed. CRC Press.(2015), 69 pp. (to appear).
- [111] V. Vatter, S. Waton, *On partial well-order for monotone grid classes of permutations*. Order Do.10.1007/s11083-010-9165-1..
- [112] I. Zaguia, *Prime two-dimensional orders and perpendicular total orders*. Europ. J. of Combinatorics **19** (1998), 639–649.

Index

- 2-structure, 55
- abritement, 26
 - classe fermée pour l’-, 27
 - local, 26
- âge, 27
 - inépuisable, 100
 - noyau d’un -, 100
 - presque inépuisable, 100
- Albert et Atkinson, 46, 47, 52
- Albert, Atkinson et Vatter, 49, 66
- alphabet, 95
 - binaire, 97
- antichaîne, 18
 - infinie, 29
- application croissante, 19
- araignée, 106
- arbre
 - binaire, 224
 - racine d’un -, 224
- arête, 19
- arité, 25
- automorphisme, 26, 117
 - local, 156
- base
 - infinie, 150
- bichaîne, 49, 181
 - équimorphe, 50
 - critique, 82, 83
 - indécomposable, 52
 - intervalle d’une -, 52
 - isomorphe, 50
 - séparable, 53
- birelation, 25
- bloc fortement monomorphe, 152
- bloc monomorphe, 154
- bonordre, 22
- borne, 28
- Boudabbous et Pouzet, 183
- Cameron, 50
- carré, 186
 - diagonale d’un -, 187
 - diagonale principale d’un -, 187
- chaîne, 107
 - d’un ordre, 18
 - finie, 22
 - infinie, 18
 - maximale, 23
- chemin, 16, 17
 - infini, 122
 - longueur d’un -, 17
- classe, 25
 - d’équivalence, 17
 - des chaînes finies, 29
 - filtrante, 27
 - géométriquement en grille, 228
 - grille-géométrique, 83, 227
 - héréditaire, 27
 - héréditairement algébrique, 66
 - héréditairement belordonnée, 29
 - héréditairement rationnelle, 66
 - ind-minimale, 89, 92
 - minimale, 89, 90
- clique, 17, 19
 - infinie, 106
- codage, 32
- cographe, 28, 62
- composante
 - acyclique, 183
 - connexe, 115

- fortement monomorphe, 153
- monomorphe, 155
- corde, 17
- cycle, 150
- décomposition
 - canonique, 155
 - cellulaire, 178
 - en intervalles, 163
 - en niveaux, 23
 - fortement monomorphe, 153
 - Fraïssé monomorphe, 159
 - minimale, 155
 - monomorphe, 155
- diagramme de Hasse, 18, 157
- diamant, 183
 - double diamant, 183
- élément
 - le plus grand -, 21
 - le plus petit -, 21
 - maximal, 20, 21
 - minimal, 20, 23
- éléments comparables, 17
- éléments incomparables, 17
- endomorphisme, 19
- ensemble
 - d -large, 171
 - p -ensemble, 15
 - belordonné, 23, 24
 - bien fondé, 23
 - bien ordonné, 22
 - des bornes, 29
 - des parties, 15
 - inductif, 21
 - meilleurordonné, 102
 - ordonné, 18
 - de type minimal, 90
 - filtrant, 157
 - minimal, 89, 90
 - partiellement ordonné, 18
 - préordonné, 17
 - spectre d'un -, 167
- étoile, 110
- fonction
 - caractéristique, 25, 75
 - décalage, 95
 - génératrice, 32, 66, 121
 - rationnelle, 113, 121
 - partition d'entier, 122, 145
 - shift, 95
- Fraïssé, 52, 145, 166
- Frasnay, 148, 150
- Gallai, 60
- Gottlieb, 166
- graphe
 - arête d'un -, 16
 - arc d'un -, 16
 - biparti, 111
 - biparti complet, 110
 - biparti demi-complet, 105
 - cellulaire, 177
 - complémentaire, 16
 - complet, 17
 - connexe, 110
 - critique, 114
 - d'incomparabilité, 19
 - de comparabilité, 19
 - de permutations, 42, 114
 - dirigé, 16, 186
 - indécomposable, 112
 - indépendant, 17
 - inverse, 16
 - ordonné, 145
 - ordre d'un -, 16
 - séries-parallèles, 28
 - sans P_4 , 28
 - sommet d'un -, 16
 - sous-graphe, 111
 - sous-graphe induit, 16
 - symétrisé d'un -, 208
- hauteur, 93
- Higman, 63
- homomorphisme, 19
- idéal, 22

- infini, 28
- maximal, 22
- Ille, 167
- intervalle, 55
 - acyclique, 183
 - d'une permutation, 46
 - fort, 59
 - maximal, 59
 - Fraïssé, 156
 - monomorphe, 158
 - Gallai, 157
 - monomorphe, 160
 - trivial, 46, 52
- isomorphisme, 25
 - co-domaine d'un - local, 26
 - de bichaînes, 49
 - domaine d'un - local, 26
 - local, 26, 50, 156
- Kaiser et Klazar, 45
- Kantor, 166
- Kelly, 60
- Lemme de Zorn, 21
- Lopez, 166
- Monteil et Pouzet, 182
- mot, 24
 - éventuellement-périodique, 95
 - apériodique, 95
 - binaire, 97
 - hauteur d'un -, 97
 - pente d'un -, 97
 - concaténation de -, 95
 - de Sturm, 97, 98
 - facteur d'un -, 95
 - fini, 95
 - infini, 95
 - longueur d'un -, 95
 - périodique, 95
 - préfixe d'un -, 95
 - presque-périodique, 95
 - récurrent, 95
 - uniformément récurrent, 95
 - vide, 95
- multirelation, 25
- nombre de Fibonacci, 45
 - généralisé, 45
- nombre de Schröder, 49
- obstruction, 28
- opération de composition, 57
- opération de réduction, 57
- ordre
 - belordonné, 23
 - bien fondé, 22
 - de dimension deux, 114
 - de permutations, 42
 - des facteurs, 95
 - hauteur d'un -, 23
 - linéaire, 18
 - niveau d'un -, 23
 - partie filtrante d'un -, 22
 - partiel, 18
 - séries-parallèles, 48, 62
 - strict, 18
- partition, 58
 - d'un ensemble, 155
 - d'un entier, 122
 - en intervalles, 58, 156
 - triviale, 59
- permutation, 41
 - copie d'une -, 43
 - déflation d'une -, 46
 - exceptionnelle, 47
 - inflation d'une -, 46
 - intervalle d'une -, 46
 - longueur d'une -, 41
 - quotient d'une -, 46
 - séparable, 47, 48
 - simple, 46, 47
- plongement, 19
- Pouzet, 145, 167
- Pouzet et Thiéry, 154
- presque multichaîne, 172
- principe d'inclusion-exclusion, 31

- prisme, 187
- produit direct, 20
- profil, 31
 - à croissance exponentielle, 34
 - à croissance linéaire, 34
 - à croissance polynomiale, 34
 - à croissance quadratique, 34
 - borné, 34
 - croissance du -, 33
 - d'une structure, 35
 - polynomial, 145
 - saut, 145
- quadrirelation, 25
- Ramsey, 24, 174, 199, 204
- relation
 - n -aire, 25
 - antisymétrique, 16
 - autoduale, 15
 - base d'une -, 25
 - binaire, 15, 25
 - complémentaire, 15, 25
 - complète, 16
 - d'égalité, 149
 - d'équivalence, 17
 - d'abritement, 26
 - d'hypomorphie, 166
 - d'ordre, 17, 18
 - d'ordre partiel, 17
 - de $\leq k$ -équivalence, 165
 - de k -équivalence, 165
 - de consécutivité, 16, 27
 - de préordre, 17
 - domaine d'une -, 25
 - duale, 15
 - inverse, 15, 18
 - irréflexive, 16
 - réflexive, 16
 - symétrique, 16
 - ternaire, 25
 - totale, 16
 - transitive, 16
 - unaire, 25
 - vide, 25
- restriction, 15
- Retenauer, 66
- Schmerl et Trotter, 47, 56, 60, 114
- section finale, 21
- section initiale, 21
 - finiment engendrée, 22
 - principale, 22
- segment initial, 21
- série
 - algébrique, 33
 - quasi-polynomiale, 33
 - rationnelle, 32
- série formelle, 32
- signature
 - finie, 27
- somme
 - directe, 20
 - lexicographique, 20, 58
 - ordinaire, 20
- stable, 17
 - infini, 106
- Stanley-Wilf, 44
- structure binaire, 55
 - critique, 47, 56
 - décomposition d'une -, 58
 - décomposition de Gallai d'une -, 59
 - décomposition triviale d'une -, 59
 - de type k , 55
 - enchaînable, 61
 - indécomposable, 56
 - ordonnée, 55
 - ordonnée de type k , 55
 - ordonnée séparable, 73
 - première, 56
 - quotient, 58
 - somme-indécomposable, 59
- structure relationnelle, 25
 - 2-décomposable, 74
 - 2-indécomposable, 74
 - F -enchaînable, 149
 - F -monomorphe, 149

- $\leq n$ -monomorphe, 148
- n -monomorphe, 148
- équimorphe à, 26
- base d'une -, 25
- binaire, 55
- binaire ordonnée, 47
- cellulaire, 177
- composante d'une -, 25
- critique, 93
- de base infinie, 35
- domaine d'une -, 25
- enchaînée, 147
- enchaînable, 147
- extension d'une -, 25
- finie, 25
- hypomorphe, 166
- inépuisable, 100
- isomorphe à, 26
- libre interprétable, 147, 156
- minimale indécomposable, 99
- monomorphe, 148
- noyau d'une -, 100
- ordonnée, 25
- presque enchaînable, 172
- presque inépuisable, 100
- presque multi-enchaînable, 172
- presque-enchaînable, 149
- presque-monomorphe, 149
- reconstructible, 166
- restriction d'une -, 25
- signature d'une -, 25
- sous-structure, 35
- sous-structure induite, 25
- d'isomorphie, 26
- minimal, 90
- Vatter, 83
- vecteur fréquence, 178
- zigzags, 84, 122
- théorème de Ramsey, 145
- tournoi, 16, 183
 - acyclique, 16
 - transitif, 16, 18, 150
- trace, 163
- treillis, 21
 - complet, 21
- trirelation, 25
- type

Sur l'énumération des structures discrètes, une approche par la théorie des relations

Résumé :

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des relations. Il porte sur l'énumération des structures finies. Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de structures combinatoires finies, le *profil* de $\mathcal{C}$ est la fonction $\varphi_{\mathcal{C}}$ qui, à chaque entier n , associe le nombre de structures à n éléments appartenant à $\mathcal{C}$, les structures isomorphes étant identifiées. La série génératrice de $\mathcal{C}$ est la fonction $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(X) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{\mathcal{C}}(n)X^n$. De nombreux résultats sur le comportement de $\varphi_{\mathcal{C}}$ ont été obtenus. Albert et Atkinson ont montré que les séries génératrices de certaines classes de permutations sont algébriques. Nous montrons comment ce résultat se généralise aux classes de structures binaires ordonnées, en mettant l'accent sur les notions de la théorie des relations. Ceci fait l'objet de la première partie de notre travail.

Nous étudions ensuite la notion de minimalité. Une classe minimale étant une classe infinie de structures finies dont les sous-classes héréditaires propres sont finies. Nous considérons des classes héréditaires de structures finies, contenant une infinité de structures indécomposables dont les sous-classes propres n'en contiennent qu'un nombre fini. Nous montrons en particulier que ces classes sont des âges belordonnés et sont en nombre continûpotent, puis nous donnons des exemples d'âges ind-minimaux de graphes dont nous calculons les profils et les fonctions génératrices.

Enfin, nous nous intéressons au phénomène de *saut* observé dans le comportement des profils de classes héréditaires de structures finies. Nous partons de la notion de *décomposition monomorphe* d'une structure relationnelle. Nous montrons que le profil d'une classe héréditaire formée de structures ordonnées qui ont une décomposition monomorphe finie est un polynôme. Nous montrons également que la classe $\mathcal{D}$ des structures ordonnées qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie contient un ensemble fini $\mathfrak{A}$ tel que tout élément de $\mathcal{D}$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$. Dans le cas binaire, tout membre de $\mathfrak{A}$ a un profil au moins exponentiel. Il en résulte que, si le profil d'une classe héréditaire de structures binaires ordonnées n'est pas borné par un polynôme, il est au moins exponentiel. Un résultat généralisant une classification obtenue par Balogh, Bollobás et Morris en 2006 pour les graphes ordonnés.

Mots-clés : Ensemble ordonné, belordre, structure relationnelle, profil, indécomposabilité, graphe, tournoi, permutation, décomposition monomorphe, enchaînabilité.
