

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie «Houari Boumediene»  
Faculté de Mathématiques



## THESE

Présentée pour l'obtention du diplôme de **Doctorat**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Recherche Opérationnelle** : Méthodes Stochastiques

Par

**Mouna MERZOUGUI**

Sujet

**Modèles de séries temporelles linéaires et non linéaires  
périodiques**

Soutenue le 12/01/2010

Devant le jury composé de :

AKNOUCHE	Abdelhakim	M.C.A.,	U.S.T.H.B.,	Alger	Président
BENTARZI	Mohamed	Professeur,	U.S.T.H.B.,	Alger	Directeur de thèse
GUERBYENNE	Hafida	M.C.A.,	U.S.T.H.B.,	Alger	Examineur
BIBI	Abdelouahab	Professeur,	U.Mentouri.,	Constantine	Examineur
KHALDI	Khaled	M.C.A.,	U.Bouguera.,	Boumerdes	Examineur

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>ii</b>
0.1 Apport et présentation de la thèse . . . . .	ix
<b>1 Théorie asymptotique de LeCam</b>	<b>1</b>
1.1 Normalité asymptotique locale (LAN) . . . . .	1
1.1.1 Convergence faible des expériences statistiques . . . . .	3
1.1.2 Contiguïté . . . . .	4
1.2 Concepts d’optimalité asymptotique locale . . . . .	7
1.2.1 Test most stringent . . . . .	7
1.2.2 Critère Minimax Asymptotique Local ( <i>LAM</i> ) . . . . .	8
1.3 Adaptativité . . . . .	10
<b>I Modélisation linéaires des séries temporelles périodiques</b>	<b>11</b>
<b>2 Estimation Adaptative des Modèles AR-périodiques</b>	<b>12</b>
2.1 Introduction . . . . .	12
2.2 Notations, Définitions et hypothèses principales . . . . .	14
2.2.1 Définitions et Notations . . . . .	14
2.2.2 Condition de stationarité périodique pour un modèle autorégressif pé- riodique . . . . .	15

2.2.3	Hypothèses de régularités . . . . .	16
2.3	Normalité Asymptotique Locale des modèles autorégressifs périodiques . . .	17
2.3.1	Suite de Rapports de Vraisemblance . . . . .	17
2.3.2	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	18
2.4	Existence et construction d'estimateurs LAM . . . . .	24
2.4.1	Borne inférieure des estimateurs dans les modèles LAN . . . . .	24
2.4.2	Caractéristique des estimateurs LAM . . . . .	24
2.5	Construction d'estimateurs adaptatifs . . . . .	26
2.6	Résultats numériques . . . . .	28

## II Modélisation non linéaires des séries temporelles périodiques

### 33

<b>3</b>	<b>Test de la périodicité dans un modèle <i>SETAR</i></b>	<b>34</b>
3.1	Introduction . . . . .	34
3.2	Notations, Définitions et conditions de régularités . . . . .	36
3.2.1	Définitions et notations principales . . . . .	36
3.2.2	Hypothèses de régularités techniques . . . . .	38
3.3	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	39
3.3.1	Suite de Rapports de Vraisemblance . . . . .	39
3.3.2	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	40
3.4	Test Asymptotique Locale (le plus Stringent) . . . . .	46
3.5	Test Adaptatif . . . . .	51
3.6	Résultats numériques . . . . .	53
<b>4</b>	<b>Estimation Adaptative des Modèles <i>SETAR</i>(2, 1, 1) périodiques</b>	<b>57</b>

4.1	Introduction . . . . .	57
4.2	Modèles et Hypothèses . . . . .	59
4.2.1	Modèle Autorégressif à seuils Périodique . . . . .	59
4.2.2	Hypothèses de régularités techniques . . . . .	61
4.3	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	61
4.3.1	Suite de Rapports de Vraisemblance . . . . .	61
4.3.2	Les conditions de Swensen (1985) . . . . .	64
4.3.3	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	67
4.4	Existence et construction d'estimateurs LAM . . . . .	68
4.5	Construction d'estimateurs adaptatifs . . . . .	69
4.6	Résultats de simulation . . . . .	71
<b>5</b>	<b>Test Localement Optimal du Modèle ARCH Périodique</b>	<b>77</b>
5.1	Introduction . . . . .	77
5.2	Notations, Définitions et conditions de régularités . . . . .	79
5.2.1	Définitions et notations principales . . . . .	79
5.2.2	Hypothèses de régularités techniques . . . . .	81
5.3	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	81
5.3.1	Suite de Rapports de Vraisemblance . . . . .	81
5.3.2	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	82
5.4	Test Asymptotique Locale (le plus Stringent) . . . . .	88
5.5	Test Adaptatif . . . . .	92
5.6	Résultats de simulation . . . . .	95
<b>6</b>	<b>Estimation Adaptative des Modèles ARCH Périodique</b>	<b>97</b>
6.1	Introduction . . . . .	97

6.2	Modèles et Hypothèses . . . . .	98
6.2.1	Modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique Périodique	98
6.2.2	Hypothèses de régularités techniques . . . . .	100
6.3	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	101
6.3.1	Suite de Rapports de Vraisemblance . . . . .	101
6.3.2	Normalité Asymptotique Locale . . . . .	102
6.4	Existence et construction d'estimateurs LAM . . . . .	105
6.5	Construction d'estimateurs adaptatifs . . . . .	107
<b>7</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>109</b>
<b>III</b>	<b>Annexe</b>	<b>111</b>
<b>8</b>	<b>Annexe A</b>	<b>112</b>
8.1	Estimation des moindres carrés d'un PSETAR(2,1,1) . . . . .	112
<b>9</b>	<b>Annexe B</b>	<b>115</b>
9.1	Distance de Le Cam . . . . .	115

Alà barakati Allah

# Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de quelques problèmes de l'inférence statistique liés aux modèles des séries temporelles, à coefficients périodiques dans le temps, linéaires et non linéaires. Ces modèles sont des solutions d'équations aux différences stochastiques paramétriques avec des variables retardées de la série et un processus bruit blanc  $\varepsilon$  et dépendent de paramètre  $\theta$  inconnu. Dans ce contexte, un modèle est semi paramétrique si on ne spécifie pas analytiquement la loi de  $\varepsilon$ .  $\theta$  est appelé "paramètre d'intérêt" et sera l'objet d'inférence optimale tandis que la densité des innovations est appelée "paramètre de nuisance". Nous allons étudier principalement les tests et l'estimation, dans un cadre paramétrique et semi paramétrique, en adoptant l'approche asymptotique de LeCam. Les économètres portent, depuis quelques années, un intérêt croissant aux modèles semi paramétriques c'est-à-dire à des modèles qui incorporent à la fois des composantes paramétrique et non paramétrique et les utilisent plus fréquemment. Cet intérêt est dû en premier lieu aux problèmes qui tiennent à la mauvaise spécification des modèles économétriques. Aborder un tel problème de manière semi paramétrique consiste à ne pas spécifier la forme fonctionnelle de certaines composantes du modèle à savoir la densité de son innovation. Dans ce travail, on suppose, en premier lieu, la densité des innovations  $f$  connue donc les procédures sont hautement paramétriques or, ce paramètre est généralement inconnu, et doit donc être considéré comme un paramètre de nuisance. Afin d'éliminer cette nuisance nous utilisons une méthode d'estimation adéquate.

Les procédures semi paramétriques permettent de faire l'économie d'une spécification – souvent artificielle et discutable – de la densité des innovations  $f$  sous-jacente au modèle considéré. Cette spécification qui, par opposition, engendre des procédures paramétriques, trouve en effet plus souvent son origine dans un besoin de commodité analytique que dans un réel souci de modélisation. Les procédures semi paramétriques sont ainsi valides quelles que soit la densité  $f$  symétrique. Cette condition de symétrie est expliquée d'un point de vue

théorique avec le travail de Stein (1956) qui a montré que l'orthogonalité entre les scores correspondants au paramètre d'intérêt et au processus d'innovations est une condition nécessaire d'efficacité semi paramétrique et que ceci est toujours vérifiée pour les densités d'innovation symétrique, d'un point de vue pratique on trouve souvent que la densité empirique est symétrique. De plus, ces procédures ont de bonnes propriétés d'efficacité sous une large gamme de distributions.

Le résultat clé pour dériver les procédures d'inférences optimales et les performances asymptotiques est la propriété de Normalité Asymptotique Locale (*LAN*). L'idée d'approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne remonte à Wald (1943), mais doit son développement à Lucien Lecam (1960, 1986), qui a introduit ce terme. Cet auteur a perfectionné l'idée d'une famille *LAN* en montrant que quand le modèle de départ est approximativement normal, il hérite de la structure simple des modèles normaux. Plusieurs autres outils sont associés au concept *LAN* : la contiguïté, la convergence faible des expériences statistiques et la discrétisation.

Dans les modèles paramétriques, plusieurs méthodes d'estimation, efficaces ou relativement efficaces, ont été étudié par exemple : maximum de vraisemblance, moindres carrés, estimateurs des moments,... Pour les tests, quand la forme analytique du bruit blanc est spécifiée (typiquement : forme Gaussienne), cela débouche le plus souvent sur des formes exactes résolubles analytiquement : test de Student, test de  $\chi^2$ , test de Fisher,... Au contraire, dans les modèles semi paramétriques il n'y a pas encore une méthode générale pour la construction des estimateurs et de tests efficaces. Sous la structure *LAN*, un critère d'efficacité asymptotique en estimation, souvent considéré dans la littérature statistique, est le critère Minimax Asymptotique Locale (*LAM*). Le Concept d'optimalité en théorie des tests d'hypothèses que nous allons utilisé dans ce travail, est le test "le plus stringent".

En général, le fait que dans le modèle semi paramétrique la densité des innovations  $f$  n'est pas connue entraîne une perte d'efficacité par rapport au cas paramétrique où la densité  $f$  est spécifiée. Quand cette perte est nulle on dit que : le modèle semi paramétrique est adaptatif. On parle d'estimation ou de test adaptatif dans les situations où les paramètres d'intérêts peuvent être estimés ou testés aussi efficacement, que les paramètres de nuisance du modèle soit, ou non, connus. Les modèles semi paramétriques induisent un paramètre d'intérêt de dimension finie, avec une nuisance  $f$  de dimension infinie, souvent  $f$  est la densité du bruit

blanc associée au modèle. Généralement l'élimination des paramètres de nuisances se fait par deux approches soit via :

- Le principe d'invariance d'où l'introduction des tests de rangs, cet argument est considéré quand l'hypothèse nulle est générée par un groupe de transformation, une formulation rigoureuse de la théorie asymptotique des tests de rangs a été introduite par Hájek et Šidák (1967).
- Ou l'estimation adéquate de la densité  $f$ , méthode qui sera utilisée dans ce travail.

Ainsi, la procédure adaptative basée sur l'estimation non paramétrique de la densité du noyau est aussi efficace (asymptotiquement) qu'une procédure optimale quelconque établie sous une hypothèse spécifiant la famille paramétrique de la distribution des erreurs. Bien sur, la qualité de la procédure paramétrique dépend fortement de la déviation de la forme de la densité considérée par rapport à la forme exacte. Par conséquent, la procédure adaptative est recommandée toutes les fois que l'information sur la vraie densité n'est pas clair ou complète. Donc le but des procédures adaptatives est de capturer la perte de l'efficacité asymptotique due aux procédures paramétriques qui peut être grande quand la vraie densité de probabilité des innovations est loin de la normalité.

L'étude des procédures adaptative a commencée avec les modèles traditionnelles de données indépendantes, le cas i.i.d, le premier article dans ce sens est celui de Stein (1956) qui s'est intéressé au problème de test et de l'estimation d'un paramètre avec une distribution comme paramètre de nuisance infinie. Il a donné, au moyen d'un argument heuristique, une condition nécessaire fondée sur les espaces tangents pour laquelle l'estimation adaptative est possible, cette condition est vérifiée pour le modèle de position avec une densité d'innovation symétrique. Par la suite LeCam (1960, 1986) a développé une théorie très riche en concepts et outils dans la cadre de son étude sur les limites des expériences. Une panoplie de travaux a suivi : Stone (1975) a construit un estimateur adaptatif pour le paramètre de position. Fabian et Hannan (1982) ont reformulé les résultats de Stein et ont proposé des conditions sous lesquelles l'estimation adaptative est possible pour les familles LAN. Une méthode générale de construction des estimateurs adaptatifs est proposée par Bickel (1982) pour les modèles de régression. Sa théorie est développée pour les modèles semi paramétriques dans le cas des

variables aléatoires i.i.d, voir par exemple Schick (1986, 1987), Klaassen (1987) et Bickel *et al* (1993). Dans ces travaux, la construction des estimateurs efficaces utilise une suite préliminaire d'estimateurs convergents et la technique du "partage de l'échantillon". L'approche a été étendue pour les modèles de régression semi paramétriques par Schick (1993).

L'importance des modèles à données dépendantes en a fait un champ d'application utile pour l'étude des procédures d'efficacité semi paramétrique, on dispose de quelques résultats dans les modèles de séries temporelles linéaires à bruit Gaussien. Ces modèles ont tenu la tête d'affiche jusqu'aux années 80. Largement utilisés, ils ont l'avantage d'une écriture simple qui permet le développement d'une théorie statistique complète et de plus l'estimation des paramètres ne demande pas des capacités de calculs importantes. Le travail, célèbre, dans ce contexte est celui de Kreiss (1987a) qui a étudié l'estimation adaptative pour le paramètre d'un modèle *ARMA* sous l'hypothèse de la symétrie de la densité de l'innovation, ce même auteur (1987b) a traité l'adaptativité dans le cas d'un modèle *AR* sous une densité quelconque. Shin et So (1999) ont donné des tests, de racine unitaire, basés sur l'estimateur du maximum de vraisemblance adaptatif dans les modèles *AR*. Cependant, depuis un peu plus d'une vingtaine d'années, les limitations des modèles linéaires ont été soulignées, les données réelles ayant souvent des caractéristiques non linéaires qui ne sont pas prises en compte. Dans les séries financières, par exemple, on observe des périodes très volatiles, suivies de périodes plus stables. Ce phénomène appelé "volatility clustering" ne sera donc pas expliqué par un modèle à volatilité constante dans le temps. Pour d'autres séries on peut avoir d'autres non linéarités comme l'asymétrie. Pour résoudre les problèmes évoqués, des modèles plus complexes ont été proposés à partir des années 80. Les plus utilisés aujourd'hui sont :

— Les modèles à volatilité conditionnelle hétéroscédastique de type *ARCH*. Depuis l'article pionnier d'Engle (1982) et celui de Bollerslev (1986), ces modèles Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique et leurs diverses extensions, ont été largement étudiés et utilisés. Ainsi, il est reconnu que la famille *ARCH* est capable et adéquate pour capturer plusieurs caractéristiques, comme en particulier la volatilité clustering, l'excès de kurtosis et l'asymétrie, qui ne peuvent pas être capturés par les modèles de séries temporelles linéaires standards. Motivé par ce fait les problèmes d'estimation (Weiss (1986), Nelson (1990), Bougerol et Picard (1992), Berkes et Horváth (2003), Berkes *et al* (2003), Francq et Zakoian

(2004), Aknouche et Bentarzi (2008), Aknouche et Guerbyenne (2009), Bibi et Aknouche (2009) et plusieurs autres) et de test des paramètres des modèles *GARCH*, ont reçu, dans les décennies récentes, un intérêt considérable.

— Les modèles *AR* à seuils (*TAR*) qui sont des processus linéaires par morceaux et non linéaires globalement, le principe de base est le changement des paramètres du modèle *AR* linéaire selon la valeur d'une variable observable, quand cette variable est une valeur retardée de la série temporelle le modèle est appelé *AR* à seuils Self Exciting (*SETAR*). En effet, plusieurs travaux ont montré que les modèles *TAR* semble être très réaliste et plus approprié en pratique, tant que l'existence des niveaux différents dans une série temporelle est détectée, comme mentionné dans De Gooijer et Anguerra (2000), lors de la modélisation d'une série temporelle d'inflation par un modèle autorégressifs à seuils Self-Exciting multiplicative saisonnier (*SEASETAR*). Les modèles Autorégressifs à seuils ont été introduit, pour la première fois dans la littérature des séries temporelles, par le pionnier Tong (1978) et exploré par Tong et Lim (1980) et Tong (1983). Différentes propriétés de ces modèles, en particulier celles reliées aux concepts intéressants de stationnarité et d'ergodicité, ont été intensivement étudiés par Tong (1990). Pour le *SETAR*(2, 1, 1), Petrucelli et Woolford (1984) ont montré qu'il est ergodique, Chan *et al.* (1985) ont montré que si l'erreur est de variance finie alors il est du second ordre, Chan (1993) et Tsay (1998) ont estimés les paramètres par les moindres carrés conditionnelles. Plusieurs autres modèles ont été introduit dont on cite, parmi eux, les modèles à changement de régimes, les modèles bilinéaires, les modèles *AR* exponentiel et plus récemment les modèles de mélange autorégressifs (*MAR*).

Beaucoup de chercheurs se sont intéressés à des versions semi paramétriques de ces modèles : Koul et Pflug (1990) ont traité l'estimation adaptative pour les modèles *AR* explosifs, Linton (1993) pour les modèles *ARCH*. Jeganathan (1995) et Drost *et al* (1997) ont développé des structures générales appropriées pour les modèles *ARCH* stationnaires, Koul et Schick (1996) ont estimé adaptativement les paramètres du modèle *AR* à coefficient aléatoire, ces auteurs en (1997) ont développé une structure théorique générale pour les modèles non linéaires avec des erreurs i.i.d en particulier les modèles *SETAR* et *AR* exponentiels (*EXPAR*) et ils ont clairement discuté l'efficacité et l'adaptativité et spécialement ils ont

montré que la condition nécessaire de Stein peut être satisfaite dans quelques modèles avec des erreurs asymétriques. El Melhaoui (2003) a construit un test adaptatif pour tester l'hypothèse  $AR(1)$  linéaire contre l'hypothèse  $SETAR(2, 1, 1)$ . Ling (2003) a considéré les modèles  $ARFIMA$  avec les erreurs  $GARCH$  pour lesquels il a construit des estimateurs adaptatifs et des tests, Ling et McAleer (2003) ont considéré l'estimation adaptative dans les modèles  $ARMA$  non stationnaires avec des erreurs  $GARCH$ .

Parallèlement à ces travaux, sont apparues des procédures adaptatives de tests et d'estimations basées sur les rangs. Nous en citons : Hájek et Šidák (1967), Hájek *et al* (1999) pour le modèle de régression; où ils ont proposé un estimateur convergent de la fonction score optimale, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles  $AR$  périodiques, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Allal et El Melhaoui (2006) pour les modèles  $AR$  exponentiels.

Plusieurs séries temporelles rencontrées en pratique exhibent une structure d'autocorrélation périodique, un fait qui ne peut pas être expliqué par les modèles saisonniers traditionnels ou par les modèles de séries temporelles à paramètres invariant dans le temps. L'intérêt considérable, donné à la classe des modèles linéaires et non linéaires périodiques, est expliqué par son utilité et son appropriation pour la modélisation des séries à structure de corrélation périodique (Gladyshev (1961)) qui sont très souvent rencontrés dans plusieurs domaines en particulier en économie (e.g., Ghysels *et al* (1996), Osborn et Smith (1989), et autres) de même que dans les études hydrologiques et environnementales (Bloomfield *et al* (1994), Vecchia *et al* (1983), Ula et Smadi (1997), Salas *et al* (1982) et autres).

Les divers avantages et propriétés intéressantes satisfaites par le modèle à seuils ont motivé l'extension de ces modèles aux modèles autorégressifs à seuils périodiques pour capturer, en plus, le phénomène de périodicité. Le premier travail accompli, à notre connaissance, dans cette direction est celui de Lewis et Ray (2002), dans lequel, ils ont introduit un modèle autorégressif à seuils périodique avec l'estimation des paramètres en appliquant l'algorithme *TSMARS* pour la modélisation des données de la rivière Fraser en Bretagne. De même, Bollerslev et Ghysels (1996) ont étendu le modèle  $ARCH$  au modèle  $ARCH$  périodique pour capturer la périodicité.

Dans le cadre des modèles semi paramétriques périodiques Bentarzi et Hallin (1996) sont les premiers à avoir traité le problème d'inférence optimale en testant la périodicité d'un  $AR$ . Dans ce travail ils ont introduit la notion de perturbation périodique qui ajoutée à la perturbation non périodique et associée au paramètre d'intérêt formera la suite locale de valeur du paramètre. Ce point permettra aux chercheurs de résoudre le problème de tests semi paramétriques pour les modèles périodiques. Cependant, le problème d'estimation adaptative d'un modèle  $PAR$  n'as pas été traité. De même, il n'y a pas de résultats dans le cadre semi paramétrique pour les modèles  $ARCH$  périodiques et  $AR$  à seuils périodiques.

Notre objectif dans ce travail est d'utiliser l'approche de LeCam, connectée aux modèles  $AR$  périodique,  $SETAR$  périodique et  $ARCH$  périodique, pour construire des tests et des estimateurs localement asymptotiquement optimaux dans le sens adaptatifs, ce qui va nous permettre de sortir du cadre habituel des densités gaussiennes, hypothèse qui n'est pas toujours réalisée en pratique. L'intitulé de cette thèse est "*Modèles de séries temporelles linéaires et non linéaires périodiques*", mais on traite spécifiquement les procédures adaptatives, sujet de recherche qui a connu un grand développement et succès ces dernières années. Pour accomplir cet objectif nous avons suivi une méthodologie présentée dans la section suivante.

## 0.1 Apport et présentation de la thèse

### Chapitre 1 : Théorie asymptotique de LeCam

Dans ce chapitre, on présente les notions de bases qui ont permis de faire ce travail c.à.d l'approche asymptotique de LeCam (1960, 1986) : propriété *LAN*, contiguïté, propriété de linéarité, convergence faible des expériences statistiques, les concepts d'optimalité asymptotique valable sous la structure *LAN* pour les tests et l'estimation c'est à dire le test le plus stringent et la borne minimax asymptotique locale *LAM*. On terminera par un rappel sur la procédure adaptative introduite par Stein (1956).

### Chapitre 2 : Estimation Adaptative des Modèles AR-périodiques

L'objectif de ce chapitre est la construction d'estimateurs adaptatifs pour les modèles *AR*-périodiques (*PAR*). Nous commençons par rappeler la normalité locale asymptotique, établie dans Bentarzi et Hallin (1996), que nous exploitons après adaptation, pour construire des estimateurs réguliers au sens *LAM* de Fabian et Hannan. En suivant l'approche de Kreiss(1987), nous donnons une suite d'estimateurs des fonctions scores qui permettront de construire une suite d'estimateurs adaptatifs des paramètres du processus *PAR* dont la densité n'est pas spécifiée mais supposé symétrique. Finalement, l'efficacité de l'*EA* sera comparée à l'*EMC* par simulation.

### Chapitre 3 : Test de la périodicité dans un modèle SETAR.

Après avoir décrit le modèle *AR* à seuils *SETAR*(2, 1, 1) pour lequel nous construisons les procédures optimales pour tester l'hypothèse de périodicité, nous obtenons la propriété de normalité locale asymptotique. Cette propriété, donné par Koul et Schick (1997) dans le cas non périodique, est établie à l'aide du Lemme de Swensen(1985). Les conditions de ce lemme sont aisément vérifiées, pour autant que la racine carrée de la fonction de densité caractérisant le modèle soit différentiable en moyenne quadratique. Cette dernière condition est donc le point crucial à vérifier. A partir de ce résultat, nous sommes capables de construire les tests paramétriques localement et asymptotiquement optimaux. La performance des tests établis est montrée par simulation.

## **Chapitre 4 : Estimation Adaptative des Modèles $SETAR(2, 1, 1)$ périodiques**

Ce chapitre traite le problème de l'estimation adaptatif du modèle Autorégressif à seuils Self-Exciting Périodique ( $PSETAR$ ). Les conditions suffisantes de Swensen (1985) adaptées à notre modèle, sont vérifiées et alors explorées pour établir la Normalité Asymptotique Locale ( $LAN$ ), la Quadratique Asymptotique Locale ( $LAQ$ ) et les propriétés Asymptotiques Locales satisfaites par sa suite centrale. En utilisant ces résultats, on construit des estimateurs adaptatifs pour le paramètre du modèle où la densité des innovations est non spécifiée mais symétrique, et satisfaisant seulement quelques conditions générales. Les performances de ces estimations adaptatives sont montrées par simulation.

## **Chapitre 5 : Test Localement Optimal du Modèle $ARCH$ Périodique**

le présent chapitre concerne le problème de test de périodicité dans les modèles  $ARCH$ . Un test localement asymptotiquement optimal adaptatif est obtenu, quand la densité d'innovation est inconnue mais symétrique satisfaisant seulement quelques hypothèses techniques générales, pour l'hypothèse nulle du processus  $ARCH$  classique contre la dépendance  $ARCH$  périodiquement corrélé. L'outil technique de base est la propriété de Normalité Asymptotique Locale ( $LAN$ ) de LeCam (1960). La propriété  $LAN$  de la suite centrale est montrée via les conditions suffisantes adaptées de Swensen (1985), une preuve détaillé de ce résultat pour le cas non périodique est donné dans Linton (1993). La performance du test établi est montrée par simulation.

## **Chapitre 6 : Estimation Adaptative des Modèles $ARCH$ Périodique**

Ce chapitre est une généralisation au cas périodique de l'article de Linton (1993) pour la construction d'estimateurs adaptatifs ie asymptotiquement équivalent à l' $EMV$  quand la densité des innovations est inconnue mais symétrique du modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique. Les conditions suffisantes de Swensen (1985) adaptées au modèle  $PARCH$ , sont vérifiées et permettent d'établir la propriété  $LAN$  du logarithme rapport de vraisemblance. En utilisant ces résultats, on construit des estimateurs  $LAM$  dans un cadre paramétrique ensuite  $LAM$  adaptatifs dans un cadre semi paramétrique pour le paramètre du modèle.

# Chapitre 1

## Théorie asymptotique de LeCam

### 1.1 Normalité asymptotique locale (LAN)

L'idée d'approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne remonte à Wald (1943), mais doit son développement à Lucien Lecam (1960, 1986), qui a introduit le terme de Normalité Asymptotique Locale. Ce cadre théorique est devenu un standard pour la résolution du problème d'efficacité des tests et des estimateurs au sens asymptotique, car quand le modèle de départ est approximativement normal, il hérite de la structure simple des modèles normaux.

Plusieurs chercheurs se sont intéressés à la dérivation de cette propriété pour divers modèles : Roussas (1979) pour les modèles Autorégressifs d'ordre un, Swensen (1985), qui en démontrant la propriété *LAN* pour les modèles *AR* avec tendance linéaire, a donné un lemme qui permet d'avoir cette propriété en vérifiant 6 conditions suffisantes et qui sera par la suite très utilisé, Kreiss (1987) pour le modèle *ARMA*, Linton (1993) pour les modèles *ARCH*, Bengabrit et Hallin (1998) pour les modèles bilinéaires, Bentarzi et Hallin (1996) pour les modèles *AR* périodiques, Garel et Hallin (1995) pour les modèles *ARMA* multivariés, Koul et schick (1996, 1997) pour le modèle *AR* d'ordre un à coefficient aléatoire et pour le modèle *SETAR*(2, 1, 1)...etc.

**Propriété LAN**

Soit  $\mathbf{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})'$ ,  $n \in \mathbb{N}$  une suite d'observations décrites par la suite de modèles statistiques  $E^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)})$ , où  $\mathbf{B}^n$  est la tribu de Borel engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{P}^{(n)} = \{P_\theta^{(n)}, \theta \in \Theta\}$  est une famille paramétrique de lois de probabilités définies sur  $(\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n)$  et indexées de façon injective par le paramètre  $\theta \in \Theta$ , où  $\Theta$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{R}^k$ . Pour chaque  $\theta \in \Theta$ , on définit la suite locale (localisée en  $\theta$ ) :

$$\theta^{(n)} = \theta + \nu(n)\tau^{(n)}, \quad \tau^{(n)} \in \mathbb{R}^k, \quad (1.1.1)$$

où  $\nu(n)$  est une suite de matrices  $k \times k$  non singulières, telles que  $\|\nu(n)\| \rightarrow 0$ , et  $\tau^{(n)}$  est une suite de vecteurs tels que  $\sup_n \tau^{(n)'}\tau^{(n)} < \infty$ . Considérons les suites de mesures de probabilités  $P_\theta^{(n)}$  et  $P_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}$ , et le rapport de la log-vraisemblance de  $P_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}$  par rapport à  $P_\theta^{(n)}$

$$\Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) = \log \left( \frac{dP_{\theta+\nu(n)\tau^{(n)}}^{(n)}}{dP_\theta^{(n)}} \right), \quad (1.1.2)$$

$\frac{dQ}{dP}$  est la dérivée de Radon Nikodym de la partie absolument continue de  $Q$  par rapport à  $P$ .

Le point de départ des développements de la théorie asymptotique moderne est la mise en évidence, par Lecam (1960), du fait remarquable qu'une structure extrêmement générale (structure LAN), suffisante à l'étude des performances asymptotiques de la quasi totalité des procédures statistiques, peut être caractérisée très simplement à partir du comportement de  $\Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)})$ .

**Définition 1.1.1**

Une suite d'expériences  $E^{(n)} = (\mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)})$  est dite localement asymptotiquement normale (LAN  $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$ ) si pour tout  $\theta \in \Theta$ , il existe une suite  $\Delta^{(n)}(\theta)$  de vecteurs aléatoires  $\mathbf{B}^n$ -mesurables, et une matrice  $(k \times k)$   $\Gamma(\theta)$  continue en  $\theta$  telle que : si  $n \rightarrow \infty$ , on ait, sous  $P_\theta^{(n)}$ ,

$$\begin{aligned} (i) \quad & \Lambda^{(n)}(\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) = \tau^{(n)'}\Delta^{(n)}(\theta) - \frac{1}{2}\tau^{(n)'}\Gamma(\theta)\tau^{(n)} + o_p(1), \\ (ii) \quad & \Delta^{(n)}(\theta) \implies N(0, \Gamma(\theta)), \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Le vecteur  $\Delta^{(n)}(\theta)$  est appelé suite centrale et  $\Gamma(\theta)$  est la matrice d'information.

**Remarque 1.1.1**

Si  $n \rightarrow \infty$

$$(\tau^{(n)'}\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau^{(n)})^{-\frac{1}{2}} \left( \Lambda^{(n)} (\theta + \nu(n)\tau^{(n)}) + \frac{1}{2}\tau^{(n)'}\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau^{(n)} \right) \implies N(0, 1).$$

**1.1.1 Convergence faible des expériences statistiques**

Pour interpréter et justifier la terminologie *LAN*, considérons le modèle de position gaussien

$$\{N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta)) / \tau \in \mathbb{R}^k\},$$

à une seule observation que nous notons  $\Delta$ . Il est facile de vérifier que le logarithme du rapport de vraisemblance associé à la loi gaussienne  $N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta))$  par rapport à  $N(0, \Gamma(\theta))$  est donné par

$$\tau'\Delta - \frac{1}{2}\tau'\mathbf{\Gamma}(\theta)\tau,$$

ce qui signifie (voir le second membre de (1.2.3)) que le logarithme du rapport de vraisemblance “local” en  $\theta$  est asymptotiquement équivalent au logarithme du rapport de vraisemblance dans un modèle de position gaussien classique. Comme nous l’expliquons ci-dessous, ceci a d’importantes implications sur la construction de procédures localement et asymptotiquement optimales pour la suite d’expériences en question.

La normalité locale asymptotique entraîne, pour tout  $\theta$ , la convergence faible de la suite d’expériences locales (localisées en  $\theta$ )

$$\mathcal{E}^{(n)} = \left( \mathbb{R}^n, \mathbf{B}^n, \mathbf{P}^{(n)} = \left\{ P_{\theta + \nu(n)\tau}^{(n)} / \tau \in \mathbb{R}^k \right\} \right)$$

vers le modèle de position gaussien

$$\mathcal{E}_\theta^N = \left( \mathbb{R}^k, \mathbf{B}^k, \mathbf{P}_\theta = \{N(\Gamma(\theta)\tau, \Gamma(\theta)) / \tau \in \mathbb{R}^k\} \right)$$

nous noterons  $\Delta$  l’unique observation associée à ce modèle limite. Ce concept de convergence est basé sur une pseudo-distance (dite distance de Le Cam, voir annexe B) entre les ensembles des fonctions de risque (de  $\mathbb{R}^k$  dans  $\mathbb{R}^+$ ) réalisables sous les expériences considérées, pour

les fonctions de perte bornées. Dans le contexte de test d'hypothèse, ceci signifie en quelque sorte que, lorsque  $n \rightarrow \infty$ , toutes les courbes de puissance réalisables pour l'expérience  $\mathcal{E}^{(n)}$  convergent, ponctuellement en  $\tau$  mais uniformément en l'ensemble de toutes les procédures de test possibles, vers les courbes de puissance associées au modèle limite gaussien  $\mathcal{E}_\theta^N$ . À l'inverse, pour toute fonction de risque  $R$  réalisable dans le modèle  $\mathcal{E}_\theta^N$ , il existe une suite de fonctions de risque associées à  $\mathcal{E}^{(n)}$  qui converge ponctuellement vers cette fonction de risque  $R$ . Ainsi, si un test  $\phi(\Delta)$  est exactement optimal au niveau  $\alpha$  dans  $\mathcal{E}_\theta^N$ , la suite de tests  $\phi(\Delta^{(n)}(\theta))$  sera localement en  $\theta$  et asymptotiquement optimale dans la suite d'expériences originales ce qui veut dire que modulo la connaissance des tests optimaux dans l'expérience de shift gaussien  $\mathcal{E}_\theta^N$  la construction de tests localement asymptotiquement optimaux dans la suite d'expériences originales est directe.

Donc la convergence des expériences a des conséquences décisionnelles du moment qu'elle implique que les procédures optimales (tests et estimation) dans des expériences gaussiennes seront aussi optimales dans les expériences initialement considérées.

### 1.1.2 Contiguïté

La notion de contiguïté, due à LeCam, joue un rôle primordial dans les méthodes asymptotiques. Soit  $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$  une suite d'espaces mesurables. Soient  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  deux suites de mesures de probabilités sur  $(\mathcal{X}^{(n)}, \mathcal{A}^{(n)})$ .

#### Définition 1.1.2

Si, pour toute suite  $A^{(n)} \in \mathcal{A}^{(n)}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)}(A^{(n)}) = 0 \text{ implique } \lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)}(A^{(n)}) = 0,$$

on dit que la suite  $Q^{(n)}$  est contiguë à  $P^{(n)}$ . Si  $Q^{(n)}$  est contiguë à  $P^{(n)}$  et  $P^{(n)}$  est contiguë à  $Q^{(n)}$ , on dit que  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  sont mutuellement contiguës.

Une conséquence immédiate et forte utilisée de la contiguïté est la conservation des ordres de convergences en probabilité. En effet, si  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  sont mutuellement contiguës alors,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^{(n)} \left( \left| \frac{S_n}{h(n)} \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

est équivalent à

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Q^{(n)} \left( \left| \frac{S_n}{h(n)} \right| > \varepsilon \right) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$$

pour toute statistique  $S_n$   $\mathcal{A}^{(n)}$ -mesurable.

En pratique, il n'est pas simple d'établir la contiguïté à partir de la définition, il est donc intéressant d'énoncer une démarche plus opérationnelle. Notons  $L^{(n)} = \frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}}$  la vraisemblance de  $Q^{(n)}$  par rapport à  $P^{(n)}$ .

**Lemme 1.1.1 (LeCam's first lemma, Hájek et Šidák (1967))**

Soit  $F^{(n)}$  la fonction de distribution de  $L^{(n)}$  sous  $P^{(n)}$  définie par

$$F^{(n)}(x) = P^{(n)}(L^{(n)} \leq x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Si  $F_n$  converge faiblement (aux points de continuité) vers une fonction de distribution  $F$  satisfaisant  $\int_{\mathbb{R}} x dF(x) = 1$ , alors  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  sont mutuellement contiguës.

Comme conséquence du lemme, nous énonçons le corollaire suivant qui est très utilisé en pratique : c'est la situation qu'on rencontre dans le contexte de la propriété LAN. Un résultat plus général se trouve dans Lecam (1960).

**Corollaire 1.1.1**

Si  $\log L^{(n)}$  est asymptotiquement normal de moyenne  $-\sigma^2/2$  et de variance  $\sigma^2$  sous  $P^{(n)}$ , alors  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  sont mutuellement contiguës.

Il est clair que la contiguïté conserve les convergences en probabilité. Des déductions analogues peuvent-elles être faites à propos des convergences en loi ?

La réponse à cette question est d'une grande importance notamment dans les problèmes de tests d'hypothèses. En effet la puissance d'un test en une suite  $Q^{(n)}$  de contre hypothèses

s'étudie à partir de la loi sous  $Q^{(n)}$  de la statistique du test considéré ; or il est généralement plus facile d'étudier la loi asymptotique d'une statistique sous une suite d'hypothèses nulles  $P^{(n)}$  que sous une suite de contre hypothèses  $Q^{(n)}$ . Le "3<sup>ème</sup> lemme de LeCam " fournit une réponse dans le cas particulier de la normalité asymptotique liée de la log-vraisemblance et de la statistique considérée.

**Lemme 1.1.2 (LeCam's third lemma, Hájek et Šidák (1967))**

Soit  $S^{(n)}$  une statistique  $A^{(n)}$ -mesurable. Soit  $\Lambda_n$  une version de  $\log \left( \frac{dQ^{(n)}}{dP^{(n)}} \right)$ . Supposons que si  $n \rightarrow \infty$ , on ait, sous  $P^{(n)}$ ,

$$\begin{pmatrix} S^{(n)} \\ \Lambda_n \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} N \left( \begin{pmatrix} \mu \\ -\frac{1}{2}\sigma_2^2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \right).$$

Alors :

- (i)  $P^{(n)}$  et  $Q^{(n)}$  sont mutuellement contiguës;
- (ii) si  $n \rightarrow \infty$ ,  $S^{(n)} \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\mu + \sigma_{12}, \sigma_1^2)$  sous  $Q^{(n)}$ .

## 1.2 Concepts d'optimalité asymptotique locale

Le Concept d'optimalité en théorie des tests d'hypothèses valable, dans ce travail, est le test "*most stringent*". Soit  $H_0$  une hypothèse nulle,  $H_1$  sa contre hypothèse et  $C$  l'ensemble des tests  $\phi$  vérifiant une condition de niveau  $\alpha$ , i.e.

$$C = \{\phi / E_P(\phi) \leq \alpha; \forall P \in H_0\}.$$

### 1.2.1 Test most stringent

La notion de test le plus stringent a été introduite par Wald (1943). Pour tout  $P \in H_1$ , soit  $\bar{\beta}(P) = \sup_{\phi \in C} E_P(\phi)$ .  $\bar{\beta}(P)$  est donc la meilleure puissance que puissent atteindre, en un élément  $P$  fixé de  $H_1$ , les tests de la classe  $C$ . On appelle regret d'un test  $\phi$  dans la classe  $C$  la quantité

$$\tau(\phi) = \sup_{P \in H_1} [\bar{\beta}(P) - E_P(\phi)].$$

Le regret de  $\phi$  est "le pire déficit de puissance" auquel donne lieu  $\phi$ , si on le compare sur  $H_1$  aux meilleures performances possibles au sein de  $C$ . Un test  $\phi^*$  est dit le plus stringent au niveau  $\alpha$  si son regret est minimum parmi les tests de niveau  $\alpha$ , c'est à dire si

$$\begin{cases} \phi^* \in C, \\ \tau(\phi^*) \leq \tau(\phi); \quad \forall \phi \in C. \end{cases}$$

Le test optimal dans les modèles shift gaussien se réduira à tester

$$\tau \in M(\Omega) \quad \text{contre l'alternative} \quad \tau \in M(\Omega),$$

où  $M(\Omega)$  est le sous espace de  $\mathbb{R}^k$  engendré par les colonnes  $\Omega$  ( $\Omega$  est une matrice de dimension  $k \times (k - r)$ ). On déduit alors, à partir de Lecam (1986) que pour ce type de problème le test le plus stringent au niveau  $\alpha$  est

$$\phi_\theta^*(\Delta) = I_{[\Delta'(\mathbf{\Gamma}_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \mathbf{\Gamma}_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta > \chi_{r; 1-\alpha}^2]}.$$

Donc le test localement asymptotiquement le plus stringent dans l'expérience originale est

$$\phi_\theta^*(\Delta_\theta^{(n)}) = I_{[\Delta_\theta^{(n)'}(\mathbf{\Gamma}_\theta^{-1} - \Omega(\Omega' \mathbf{\Gamma}_\theta \Omega)^{-1} \Omega') \Delta_\theta^{(n)} > \chi_{r; 1-\alpha}^2]}.$$

### 1.2.2 Critère Minimax Asymptotique Local (LAM)

Dans les modèles classiques (paramétriques), plusieurs méthodes d'estimation ont été étudiées par exemple : maximum de vraisemblance, moindres carrés, estimateurs des moments, . . . Au contraire, dans les modèles semi paramétriques il n'y a pas encore une méthode générale pour la construction des estimateurs efficaces. Une approche qui offre beaucoup de lumière dans la structure de l'efficacité et la  $\sqrt{n}$ -consistance de l'estimateur pour les modèles semi paramétriques est basée sur les bornes d'information. Dans des modèles semiparamétrique on peut définir une borne d'efficacité pour les estimateurs analogue à la borne de Cramer-Rao pour les modèles paramétriques. Ces bornes ne se contentent pas de donner une référence pour mesurer l'efficacité asymptotique d'estimateurs semi paramétriques, elles peuvent aussi suggérer des moyens de construire ces estimateurs.

Sous la structure LAN, un critère d'efficacité asymptotique, souvent considéré dans la littérature statistique, est le critère minimax asymptotique locale (voir Hajek (1972) pour l'exposé détaillé de la théorie et son histoire). Avant de présenter cette borne asymptotique, on donne la définition d'un estimateur régulier.

#### Définition 1.2.1

Une suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  est dite  $\theta$ -régulière, sous la condition LAN  $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$  si

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) - \Gamma^{-1}(\theta)\Delta^{(n)}(\theta) = o_p(1), \quad (1.2.1)$$

i.e

$$\sqrt{n}(Z_n - \theta) \implies N(0, \Gamma^{-1}(\theta)).$$

Hàjek (1972) avait donné une borne inférieure du risque encouru en prenant  $\{Z_n\}$  comme suite d'estimateurs arbitraires du paramètre  $\theta$ , Fabian et Hannan ont étendu ces résultats.

#### Théorème 1.2.1 (Local Asymptotic Minimax (LAM) )

Soit  $\{Z_n\}$  une suite d'estimateurs quelconques de  $\theta$ ,  $l$  une fonction de perte définie sur  $R$ , supposons que la condition LAN  $(\theta, \Gamma(\theta), \Delta_n(\theta))$  est vérifiée alors :

$$\lim_{M \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{Z_n} \sup_{\sqrt{n}|\theta - \theta_0| \leq M} E_{\theta} l \{ \sqrt{n}(Z_n - \theta) \} \geq El(Z), \quad (1.2.2)$$

où  $Z$  suit la  $N(0, \Gamma^{-1}(\theta))$ .

L'appellation minimax est à cause de l'"inf sup". Une suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  est dite  $LAM(\theta)$  si on a l'égalité dans l'inéquation (1.2.2). La formule précédente établit qu'aucun estimateur n'a une meilleure performance qu'un estimateur efficace dans le sens de (1.2.1), pour cette raison on donne ce lemme démontré par Fabian et Hannan (1982) Thm 6.3 p.467.

### Lemme 1.2.1

*Sous la condition LAN, pour toute suite d'estimateurs  $(Z_n)$ , si  $(Z_n)$  est  $\theta$ -régulière alors  $(Z_n)$  est LAM.*

### Remarque 1.2.1

*Une difficulté surgit dans la construction du test le plus stringent et l'estimateur LAM : la valeur de  $\theta$ , sous l'hypothèse nulle, reste non spécifiée. Bien entendu, la solution consiste à remplacer  $\theta$  par un estimateur  $\hat{\theta}^{(n)}$  qui est  $\sqrt{n}$ -consistant et discret. Notons  $\hat{\theta}^{(n)}$  une suite d'estimateurs de  $\theta$  :*

(i)  $\hat{\theta}^{(n)}$  est  $\sqrt{n}$ -consistant, i.e.

$$\sqrt{n} \left( \hat{\theta}^{(n)} - \theta \right) = O(P_\theta) \text{ où encore } \exists c > 0, \text{ tel que } \sqrt{n} \left| \hat{\theta}^{(n)} - \theta \right| \leq c, \forall n \in N, \theta \in \Theta;$$

(ii) *Pour des raisons techniques, nous utilisons des suites discrètes d'estimateurs  $\{\bar{\theta}_n\}$  telles que, si  $\hat{\theta}^{(n)}$  vérifie (i),  $\bar{\theta}_n$  est donnée par un des points de l'ensemble  $\theta$  :*

$\theta = \frac{1}{\sqrt{n}} (i_1, \dots, i_k), i_j \in Z$  le plus proche de  $\hat{\theta}^{(n)}$ . Bien sûr,  $\{\bar{\theta}_n\}$  satisfait la propriété plus générale de discrétisation.

### Définition 1.2.2

*Une suite  $\{\bar{\theta}_n\}$  d'estimateurs est dite discrète s'il existe  $K \in N$  tel que, indépendamment de  $n \in N$ ,  $\bar{\theta}_n$  prend au plus  $K$  valeurs différentes dans l'ensemble*

$$Q_n = \{ \theta \in \mathbb{R}^k : \sqrt{n} |\theta - \theta_0| \leq c \}, c > 0.$$

La condition de discrétisation est due à Lecam (1960), elle permet d'éviter certains comportements pathologiques. cette condition est cependant sans aucune conséquence pratique : à  $n$  fixé, elle n'a pas de réelle signification.

Enfin, signalons que dans les différents chapitres, nous allons utiliser une technique qui consiste à remplacer, dans des équations stochastiques, une suite de nombres réels par une suite de variables aléatoires. Cette technique est basée sur le lemme 4.4 de Kreiss (1987) que nous rappelons ici.

**Lemme 1.2.2 (Kreiss (1987))**

Supposons que  $\{T^{(n)}(\theta), n \in \mathbb{N}\}$  est une suite de variables aléatoires dépendant de  $\theta \in \Theta$ .

Si pour toute suite de réels  $\{\theta^{(n)}\}$  vérifiant

$$\sqrt{n}(\theta^{(n)} - \theta) \text{ est bornée par une constante } c > 0,$$

on a  $T^{(n)}(\theta^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$ , alors aussi  $T^{(n)}(\hat{\theta}^{(n)}) = o_{P_\theta}(1)$  est vérifiée pour toute suite d'estimateurs  $\hat{\theta}^{(n)}$  discrète et  $\sqrt{n}$ -convergente.

### 1.3 Adaptativité

Les modèles semi paramétriques induisent un paramètre d'intérêt de dimension finie  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ , avec une nuisance  $f$  de dimension infinie, souvent  $f$  est la densité du bruit blanc associé au modèle. En fait, ces modèles sont plus proches de la réalité que les modèles paramétriques classiques où  $f$  est supposée connue. En général, le fait que dans le modèle semi paramétrique la densité des innovations  $f$  n'est pas connue entraîne une perte d'efficacité par rapport au cas paramétrique où la densité  $f$  est spécifiée. Quand cette perte est nulle on dit que : le modèle semi paramétrique est adaptatif. Ainsi, un estimateur est dit adaptatif si, pour la fonction de densité des innovations inconnue  $f$ , il a la même efficacité qu'un estimateur optimal dans le modèle où  $f$  est supposée connue et un test est dit adaptatif s'il a, quand  $f$  est inconnue, la même puissance asymptotique que le test optimal dans le modèle où cette densité d'innovation est spécifiée. Généralement l'étude des modèles semi paramétriques se fait par deux approches :

- ◆ L'utilisation des principes statistiques appropriés pour contourner la méconnaissance de  $f$ , par exemple le principe de l'invariance ;
- ◆ L'estimation adéquate de la densité  $f$  ou d'une fonctionnelle de  $f$ .

Dans les différents chapitres de ce travail nous utiliserons la deuxième méthode.

# Première partie

## Modélisation linéaires des séries temporelles périodiques

# Chapitre 2

## Estimation Adaptative des Modèles AR-périodiques

### 2.1 Introduction

Comme conséquences de la reconnaissance que plusieurs séries temporelles rencontrées en pratique exhibant une structure d'autocorrélation périodique- un fait qui ne peut pas être expliqué par les modèles saisonniers traditionnels- les problèmes d'identification, estimation et tests liés aux modèles autorégressif moyenne mobile avec des coefficients périodiques ont été intensivement étudié par plusieurs auteurs. L'intérêt considérable, donné à la classe des modèles linéaires et non linéaires périodiques, est expliqué par son utilité et son appropriation pour la modélisation des des séries à structure de corrélation périodique (Gladyshev (1961)) qui sont très souvent rencontrés dans plusieurs domaines en particulier en économie (e.g., Ghysels *et al* (1996), Osborn et Smith (1989), et autres) de même que dans les études hydrologiques et environnemental (Bloomfield *et al* (1994), Vecchia *et al* (1983), Ula et Smadi (1997), Salas *et al* (1982) et autres).

Le problème de l'estimation adaptative a reçu un grand intérêt par plusieurs auteurs. En particulier, Kreiss (1987) a obtenu des estimateurs adaptatifs pour les paramètres d'un modèle *ARMA*. Linton (1993) a traité les modèles *ARCH*. Shin et So (1999) ont donné des tests de racine unitaire basés sur l'estimateur du maximum de vraisemblance adaptatif dans les modèles *AR*. Ling (2003) a considéré les modèles *ARFIMA* avec les erreurs *GARCH* pour lesquels il a construit des estimateurs adaptatifs et des tests. On rappelle qu'un estimateur adaptatif est efficace pour un modèle où la distribution des erreurs,  $f$ , est seulement spécifiée partiellement. Ainsi, l'estimateur adaptatif basé sur l'estimation non paramétrique

de la densité du noyau est aussi efficace (asymptotiquement) qu'un estimateur optimal quelconque établie sous une hypothèse spécifiant la famille paramétrique de la distribution des erreurs. Bien sur, la qualité de l'estimateur paramétrique dépend fortement de la déviation de la forme de la densité considérée par rapport à la forme exacte. Par conséquent, l'estimation adaptative est recommandée toutes les fois que l'information sur la vraie densité n'est pas clair où complète. Il est bien connu que la majorité des résultats existants, dans la littérature de l'analyse des séries temporelles concernant l'estimation adaptative, sont obtenus sous l'hypothèse de la symétrie de la distribution des erreurs. Cependant, plusieurs exemples pratiques montrent que les erreurs ne satisfont pas l'hypothèse de normalité ; en plus, leurs distributions sont rarement connues. Dans ce dernier cas, la procédure d'estimation adaptative peut fournir une estimation efficace lorsqu'on utilise l'estimation non paramétrique de la densité des erreurs. Néanmoins, la condition de symétrie n'est pas nécessaire pour l'adaptativité dans quelques cas mais elle est indispensable pour d'autres modèles, comme c'est montré par Koul et Schick (1997) (pp. 257 – 259) pour le modèle *SETAR* (2; 1, 1).

Il est à noter que le modèle autorégressif périodique traditionnel est utile en lui-même et il est très souvent combiné avec d'autres types de modèles. Le présent chapitre est essentiellement consacré à l'obtention, en utilisant la propriété *LAN* satisfaite par le modèle autorégressif périodique où la densité des innovations inconnue satisfait seulement quelques conditions de régularités, des estimateurs adaptatifs des paramètres d'un modèle autorégressif périodique. Notre estimation adaptative du modèle *PAR*, qui exige la condition de symétrie de la distribution des erreurs, est obtenue en adoptant la construction de Kreiss (1987).

Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la prochaine section, on donne les notations et définitions de base concernant le modèle autorégressif périodique, indispensables pour les sections suivantes. À travers la troisième section, on passe en revue le *LAN* (cf., Le Cam (1960), (1986), Le Cam et Yang (1990) et Swensen (1985)) et la propriété de linéarité (cf., Bentarzi et Hallin (1996)) du modèle périodique sous-jacent. Dans la quatrième section, on construit l'Estimateur Minimax Asymptotique Local (*LAME*), dans le sens de Fabian et Hannan (1982). La section 5 est consacrée à l'obtention des estimateurs adaptatifs (*AE*) des paramètres d'un processus autorégressif périodique. La performance, en utilisant le critère *RMSE* (root mean squared error), des estimateurs adaptatifs obtenus du modèle

avec une densité des innovations non spécifiée et une variance périodique, comparativement à l'estimateur classique des moindres carrés (*LSE*) est montrée via une étude de simulation intensive.

## 2.2 Notations, Définitions et hypothèses principales

### 2.2.1 Définitions et Notations

Un processus du second ordre  $\{y_t; t \in \mathbb{Z}\}$  admet une représentation autorégressif  $S$ -périodiquement corrélé d'ordre  $p_t$ , notée  $PAR_S(p_t)$ , s'il est solution de l'équation aux différences linéaire stochastique périodique suivante :

$$y_t = \sum_{i=1}^{p_t} \phi_{t,i} y_{t-i} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.2.1)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  sont indépendants identiquement distribués (pas nécessairement gaussien), de moyenne nulle et de variance finie  $\sigma_t^2$ . Les paramètres autorégressifs  $\phi_{t,i}$ ,  $i = 1, \dots, p_t$ , l'ordre  $p_t$  et la variance  $\sigma_t^2$  sont périodiques en  $t$ , de période  $S$  ( $S > 1$ ), i.e.,  $\phi_{t+rS,i} = \phi_{t,i}$ ,  $i = 1, \dots, p_t$ ,  $p_{t+rS} = p_t$  et  $\sigma_{t+rS}^2 = \sigma_t^2$ ,  $\forall t, r \in \mathbb{Z}$ . Dans ce travail, on considère le cas où la densité des innovations  $f_{\sigma_t}(\cdot)$  n'est pas spécifiée mais satisfaisant seulement quelques conditions générales. Désormais, nous prendrons l'ordre autorégressif égale à  $p = \max_{i \in \{1, 2, \dots, S\}} p_i$

et on pose  $\phi_{p_t,i} = 0$ , pour  $i > p_t$ . En posant  $t = s + S\tau$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$ , on peut réécrire la dernière equation sous la forme équivalente suivante :

$$y_{s+S\tau} = \sum_{i=1}^p \phi_{s,i} y_{s-i+S\tau} + \varepsilon_{s+S\tau}, \quad s = 1, \dots, S; \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

Soient les notations suivantes  $\underline{\phi} = (\underline{\phi}'_1, \underline{\phi}'_2, \dots, \underline{\phi}'_S)' \in \mathbb{R}^{pS}$  où  $\underline{\phi}_s = (\phi_{s,1}, \phi_{s,2}, \dots, \phi_{s,p})' \in \mathbb{R}^p$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$  et soit  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$  une suite d'hypothèse sous laquelle on suppose que le processus  $\{y_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une solution de l'équation aux différences linéaire stochastique périodique

$$y_{s+S\tau}^{(n)} = \sum_{i=1}^p \phi_{s,i} y_{s-i+S\tau}^{(n)} + \varepsilon_{s+S\tau}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S, \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

Soit  $H_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)})$ , où  $\underline{\phi}^{(n)} = (\underline{\phi}_1^{(n)'}, \underline{\phi}_2^{(n)'}, \dots, \underline{\phi}_S^{(n)'})' \in \mathbb{R}^{pS}$  avec  $\underline{\phi}_s^{(n)} = (\phi_{s,1}^{(n)}, \phi_{s,2}^{(n)}, \dots, \phi_{s,p}^{(n)})' \in \mathbb{R}^p$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , une suite d'hypothèse alternative locale qui est contiguë à  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$ , sous laquelle on suppose que le processus  $y_{s+S\tau}^{(n)}$  est une solution de l'équation aux différences linéaire stochastique périodique

$$y_{s+S\tau}^{(n)} = \sum_{i=1}^p \phi_{s,i}^{(n)} y_{s-i+S\tau}^{(n)} + \varepsilon_{s+S\tau}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S, \quad \tau \in \mathbb{Z}.$$

où  $\phi_{s,i}^{(n)} = \phi_{s,i} + \frac{h_{s,i}^{(n)}}{\sqrt{n}}$ . Le terme  $\frac{h_{s,i}^{(n)}}{\sqrt{n}}$ , pour  $s$  et  $i$  fixé, peuvent être interpréter comme une perturbation périodique locale qui dépend de la saison  $s$  et de  $i$ . Soit  $\underline{\tau}^{(n)} = (\underline{\tau}_{1,\cdot}^{(n)}, \underline{\tau}_{2,\cdot}^{(n)}, \dots, \underline{\tau}_{S,\cdot}^{(n)})'$  où  $\underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)} = (h_{s,1}^{(n)}, h_{s,2}^{(n)}, \dots, h_{s,p}^{(n)})' \in \mathbb{R}^p$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , tel que  $\underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty$ . En utilisant les notations précédentes, on peut exprimer la suite  $\{\underline{\phi}^{(n)}, n \in \mathbb{N}\}$  dans la forme condensée suivante  $\underline{\phi}^{(n)} = \underline{\phi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}$ .

### 2.2.2 Condition de stationarité périodique pour un modèle autorégressif périodique

Dorénavant, on suppose que les paramètres autorégressifs  $\underline{\phi}$  satisfont la condition nécessaire et suffisante pour le processus autorégressif périodique pour être périodiquement stationnaire (causale). En utilisant l'approche "order span lumping" (cf., Bentarzi (1998), Bentarzi and Hallin (1994), Ula and Smadi (1997)), la condition nécessaire et suffisante pour la causalité d'un modèle *PAR* est que les racines du déterminant de l'équation (de degré  $p$ )

$$|Iz - \Phi| = 0, \quad z \in \mathbb{C}, \quad (2.2.2)$$

sont tous à l'intérieur du disque unité, où  $\Phi = (A_{0,S}^{-1} A_{1,S}) (A_{0,S-1}^{-1} A_{1,S-1}) \dots (A_{0,1}^{-1} A_{1,1})$  et où les matrices

$$(A_{0,t})_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j, \\ 0, & \text{si } i > j, \\ -\phi_{pt-i+1, j-i}, & \text{si } i < j, \end{cases}$$

et

$$(A_{1,t})_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{si } i < j, \\ -\phi_{pt-i+1, p+j-i}, & \text{si } i \geq j, \end{cases}$$

sont périodique de période  $\mathbb{S}$ , tel que  $p\mathbb{S}$  est le plus petit commun multiple de  $p$  et  $S$ .

### 2.2.3 Hypothèses de régularités

Soient les hypothèses de régularités suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres autorégressifs  $\underline{\phi}$  satisfont la condition nécessaire et suffisante périodique donnée par (2.2).

Hypothèse (H2). la densité des innovations  $f(\cdot)$  est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a)  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

(b)  $f(\cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$  i.e. il existe une

fonction  $\dot{f}(\cdot)$  tel que, pour  $-\infty < a < b < \infty$ , nous avons  $f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(x) d\mu(x)$ ,

(c) L'information de Fisher  $I(f) = \int (\phi_f(x))^2 f(x) dx$  est finie, où  $\phi_f = -\frac{\dot{f}}{f}$ ,

(d)  $\int xf(x) dx = 0$  et la variance est finie, i.e.,  $\sigma_\varepsilon^2 = E(\varepsilon_t^2) < \infty$ .

On note que les deux conditions (b) et (c) impliquent la différentiabilité en moyenne qua-

dratique de la fonction  $f(\cdot)^{1/2}$ . i.e.,  $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \int \left( f_\sigma^{1/2}(x+\lambda) - f_\sigma^{1/2}(x) - \lambda \frac{\dot{f}_\sigma(x)}{f_\sigma^{1/2}(x)} \right)^2 dx = 0$ .

(Voir, Lemme 3, page 191, Hájek (1972) ou Hájek et Šidák (1967)).

## 2.3 Normalité Asymptotique Locale des modèles auto-régressifs périodiques

### 2.3.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Notons  $\underline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$  une réalisation de taille finie  $n$  d'un processus autorégressif périodiquement corrélé  $\{y_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant le modèle causal (2.1) et soit  $\underline{y}_0^{(n)} = (y_{1-p}^{(n)}, \dots, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)})$ , les  $p$  valeurs initiales dont les densités sont, respectivement,  $g_0^{(n)}(\underline{y}_{1-p}^{(n)}, \dots, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)}; \underline{\phi}, \underline{\sigma})$  et  $g_0^{(n)}(\underline{y}_{1-p}^{(n)}, \dots, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)}; \underline{\phi}^{(n)}, \underline{\sigma})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)})$ , où  $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_S)'$ . Supposons de plus que  $g_0^{(n)}(\underline{y}_{1-p}^{(n)}, \dots, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)}; \underline{\phi}^{(n)}, \underline{\sigma}) - g_0^{(n)}(\underline{y}_{1-p}^{(n)}, \dots, y_{-1}^{(n)}, y_0^{(n)}; \underline{\phi}, \underline{\sigma})$  converge en probabilité vers 0, lorsque  $\underline{\phi}^{(n)} \rightarrow \underline{\phi}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Supposons, pour des raisons de simplicité de notation, que la taille  $n$  de la série chronologique observée est un multiple de  $S$ , i.e.,  $n = mS$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $t = s + S\tau$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau = 0, 1, \dots, m-1$ . En notant  $Z_t^{(n)}(\underline{\phi})$  et  $Z_t^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)})$   $t \in \mathbb{Z}$ , les résidus calculés sous  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)})$ , respectivement, on vérifie que

$$\begin{aligned} Z_t^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)}) &= y_{s+S\tau}^{(n)} - \sum_{i=1}^p \phi_{s,i}^{(n)} y_{s-i+S\tau}^{(n)}, \\ &= Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)}, \end{aligned}$$

où  $\gamma_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^p h_{s,i}^{(n)} y_{s-i+S\tau}^{(n)}$ . Les variances empiriques correspondantes sont données par  $\hat{\sigma}_s^2 = m^{-1} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( Z_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\phi}) \right)^2$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ . Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance,  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}(\underline{\phi} + \nu^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  pour  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)})$ , est donné, pour  $n = mS$ , par

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\phi} + \nu^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)}) \right)}{f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}) \right)} + \log \frac{g_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\phi}^{(n)}, \underline{\sigma})}{g_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\phi}, \underline{\sigma})},$$

où  $\nu^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$  and the  $0_P(1)$  term accounts for the  $p$  unobserved values  $\underline{y}_0^{(n)}$ .

De là, découle l'approximation asymptotique locale :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\phi} + \nu^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s^{(n)} \right) \right)}{f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)} + 0_P(1), \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[ \log \left( f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \right) - \log \left( f_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \right) \right] + 0_P(1). \end{aligned}$$

### 2.3.2 Normalité Asymptotique Locale

Soit pour  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau = 0, \dots, m-1$ , les variables aléatoires suivantes

$$\begin{aligned} X_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) &= \frac{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s^{(n)} \right) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)} - 1 = \frac{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)} - 1, \\ \delta_{s,i,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) y_{s-i+S\tau}^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, p, \\ \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) &= \frac{1}{2} \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \gamma_{s,\tau}^{(n)} \quad \text{où} \quad \phi_{\sigma_s}(\cdot) = -\frac{\dot{f}_{\sigma_s}(\cdot)}{f_{\sigma_s}(\cdot)}, \end{aligned}$$

et les vecteurs aléatoires  $\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\phi})$  et  $\underline{y}_{s,\tau}^{(n)}$ ;  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$  :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\phi}) &= \left( \underline{\delta}_{1,\cdot}^{(n)'} \left( \underline{\phi}_1 \right), \underline{\delta}_{2,\cdot}^{(n)'} \left( \underline{\phi}_2 \right), \dots, \underline{\delta}_{S,\cdot}^{(n)'} \left( \underline{\phi}_S \right) \right)' \in \mathbb{R}^{pS}, \\ \underline{\delta}_{s,\cdot}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) &= \left( \underline{\delta}_{s,1}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right), \dots, \underline{\delta}_{s,p}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)' \in \mathbb{R}^p, \\ \underline{\delta}_{s,i}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) y_{s-i+S\tau}^{(n)}, \\ \underline{y}_{s,\tau}^{(n)} &= \left( y_{s-1+S\tau}^{(n)}, y_{s-2+S\tau}^{(n)}, \dots, y_{s-p+S\tau}^{(n)} \right)' \in \mathbb{R}^p. \end{aligned}$$

Soit  $\Gamma^s(\underline{\phi}, \underline{\sigma})$  la matrice de variance covariance de dimension  $p \times p$  du vecteur  $\underline{y}_{s,\tau}^{(n)}$ , sous

$H_f^{(n)}(\underline{\phi})$  où

$$\begin{aligned} \left( \Gamma^s(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)_{k,l} &= \sum_{u=-\infty}^{s+S\tau-\max(k,l)} g(s-k+S\tau, u) \left( \underline{\phi} \right) g(s-l+S\tau, u) \left( \underline{\phi} \right) \sigma_u^2, \\ &= \sum_{i=1}^{s-\max(k,l)+S|v|} \sum_{\tau'=-\infty}^{\tau-|v|} g(s-k+S\tau, i+S\tau') \left( \underline{\phi} \right) g(s-l+S\tau, i+S\tau')(\theta) \sigma_i^2, \end{aligned}$$

$v$  est le premier entier tel que  $1 - d|v| \leq s - \max(k, l) \leq d(1 - |v|)$ ,  $v \in \mathbb{Z}$ ,  $k, l = 1, \dots, p$ ,  $s = 1, \dots, S$  et où  $g(t, u)$   $t, u \in \mathbb{Z}$  est la fonction de Green unilatérale liée à l'opérateur aux différences associé à l'équation stochastique (2.1). La matrice de covariance de dimension  $Sp \times Sp$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$ , du vecteur  $\underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\phi})$  appelé suite centrale, est donné par

$$\underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) = \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\phi}, \underline{\sigma}),$$

avec

$$\Gamma(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma^1(\underline{\phi}, \underline{\sigma})}{\sigma_1^2} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma^2(\underline{\phi}, \underline{\sigma})}{\sigma_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \frac{\Gamma^S(\underline{\phi}, \underline{\sigma})}{\sigma_S^2} \end{pmatrix} \quad (2.3.1)$$

Sous les notations précédentes, nous pouvons énoncer le résultat suivant, qui fournit les conditions suffisantes pour l'obtention de la propriété LAN du modèle  $PAR(p_t)$   $S$ -périodique.

**Proposition 2.3.1(Bentarzi, Guerbyenne et Merzougui (2009))**

Si la densité des innovations  $f$  satisfait l'hypothèse H2, alors nous avons

(i) La propriété Quadratique Asymptotique Locale (LAQ)

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\phi} + \nu^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) - \underline{\tau}^{(n)'} \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) + \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} = o_p(1), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\phi})$$

où la matrice carrée  $\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) = \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\phi}, \underline{\sigma})$  et la suite centrale  $\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) \in R^{pS}$  est donnée par

$$\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) = \left( \delta_{1,\cdot}^{(n)'}(\underline{\phi}_1), \delta_{2,\cdot}^{(n)'}(\underline{\phi}_2), \dots, \delta_{S,\cdot}^{(n)'}(\underline{\phi}_S) \right)'$$

(ii) Normalité Asymptotique Locale de la suite centrale  $\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}, \underline{\sigma})$

$$\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) \rightarrow N_{pS} \left( \underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right) \text{ quand } n \rightarrow \infty \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\phi}).$$

**Preuve**

La preuve est essentiellement basée sur le Lemme 1 de Swensen (1985) adapté au contexte autorégressif périodique. Donc, on montre que les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses  $H1$  et  $H2$ , satisfaites, et par conséquent les propriétés  $(LAQ)$  et  $(LAN)$  suivent immédiatement :

- (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( X_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) - \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)^2 = 0,$
- (2)  $\sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)^2 < \infty,$
- (3)  $\max_s \max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right| = 0_p(1),$
- (4)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)^2 = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1),$
- (5)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left[ \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)^2 I \left[ \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right| > \frac{1}{2} \right] / \mathfrak{B}_{n,s-1+S\tau} \right] = 0_p(1),$  où  $\mathfrak{B}_{n,t}$  est la tribu engendrée par le passé du processus jusqu'au temps  $t$ .
- (6)  $E \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) / \mathfrak{B}_{n,s-1+S\tau} \right) = 0_p(1)$

où les convergences et les espérances sont prises sous  $H_f^{(n)}(\underline{\phi})$ .

**Condition (1).** En remplaçant  $X_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s)$  et  $\zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s)$  par leurs valeurs respectives dans l'expression de l'espérance, on obtient

$$E \sum_{s=1}^d \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( X_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) - \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)^2 = E \sum_{s=1}^d \sum_{\tau=0}^{m-1} \left\{ f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right) - \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{\dot{f}_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)} \right\}^2 \times f_{\sigma_s}^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right) = E \left( \sum_{s=1}^d (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right),$$

où

$$B_{1,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} \int_{|y_{s-j+S\tau}| < K} \gamma_{s,\tau}^{(n)2} \int_{|y_{s-j+S\tau}| < K} \left\{ \frac{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)}{-\gamma_{s,\tau}^{(n)}} - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right)} \right\}^2 dZ_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) dG_Y, \quad \forall j \text{ et } s \text{ fixé.}$$

et

$$B_{2,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} \int_{|y_{s-j+S\tau}| \geq K} \gamma_{s,\tau}^{(n)2} \int_{|y_{s-j+S\tau}| \geq K} \left\{ \frac{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)}{-\gamma_{s,\tau}^{(n)}} - \frac{1}{2} \frac{\dot{f}_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)} \right\}^2 dZ_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) dG_Y, \quad \forall j \text{ et } s \text{ fixé.}$$

Pour montrer que cette expression tend vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , il suffit de montrer que  $B_{1,s,m} + B_{2,s,m}$  converge à 0, pour  $s$  fixé,  $s = 1, \dots, S$  et pour un réel positif quelconque  $K$ , où  $G_Y$  est la distribution conjointe des variables aléatoires  $y_{s-j+S\tau}; j = 1, \dots, p$ . Alors, le reste de la preuve suit, puisque le processus  $y_{s+S\tau}$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , est stationnaire pour  $s$  fixé, directement à partir du résultat de Swensen.

**Condition (2).** Il suffit de montrer que, pour  $s$  fixé,  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2 < \infty$ . En utilisant la définition de  $\zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right)$ , on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2 = \frac{I(f_{\sigma_s})}{S} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2, \quad \text{pour } s \text{ fixé.}$$

Il est facile de montrer que la somme  $\sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2$  est uniformément bornée. Donc, nous avons

$$\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2 < \infty,$$

la seconde condition est alors vérifiée.

**Condition (3).** On montre que  $\max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| = 0_p(1)$ , pour  $s$  quelconque. En effet, nous avons

$$\begin{aligned} P \left( \max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| > \delta \right) &\leq \delta^{-2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)2} \left( \underline{\phi}_s \right) I \left( \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| \right) \right), \\ &= \frac{1}{4n\delta^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ \left( \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+S\tau}^{(n)2} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. \times I \left( \left| \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+S\tau}^{(n)} \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right\}, \quad \text{pour } s \text{ fixé,} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P \left( \max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| > \delta \right) &\leq \delta^{-2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)2} \left( \underline{\phi}_s \right) I \left( \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| \right) \right), \\
 &= \frac{1}{4n\delta^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ \left( \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+S\tau}^{(n)2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \times I \left( \left| \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+S\tau}^{(n)} \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right\}, \text{ pour } s \text{ fixé,}
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que le processus  $\left\{ y_{s-j+S\tau}^{(n)}, \tau \in \mathbb{R} \right\}$  pour  $s$  fixé, est stationnaire, sous la condition de stationarité périodique, alors nous avons,

$$\begin{aligned}
 P \left( \max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| > \delta \right) &\leq \frac{1}{4S\delta^2} E \left\{ \left( \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,1}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+1}^{(n)2} \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \times I \left( \left| \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,1}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+1}^{(n)} \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right\}, \text{ pour } s \text{ fixé,}
 \end{aligned}$$

ou

$$P \left( \max_{\tau} \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right| > \delta \right) \leq \frac{1}{4S\delta^2} E \left[ \xi_{s,j}^{(n)2} I \left( \left| \xi_{s,j}^{(n)} \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right], \text{ pour } s \text{ fixé,}$$

où  $\xi_{s,j}^{(n)} = \phi_{\sigma_s} \left( Z_{s,1}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right) \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} y_{s-j+1}^{(n)}$ . Il est clair que  $E \left[ \xi_{s,j}^{(n)2} I \left( \left| \xi_{s,j}^{(n)} \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right] \rightarrow 0$ ,

quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Condition (4).** En remplaçant  $\zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right)$  par sa valeur  $\frac{1}{2} \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)'} \underline{\delta}_{s,\cdot,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right)$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \right)^2 &= \frac{1}{4} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)'} \left( \sum_{\tau=0}^{m-1} \underline{\delta}_{s,\cdot,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right) \underline{\delta}_{s,\cdot,\tau}^{(n)} \left( \underline{\phi}_s \right)' \right) \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)}, \\
 &= \frac{I(f_1)}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)'} \left( \frac{1}{\sigma_s^2} E \left( \underline{y}_{s,\tau}^{(n)} \underline{y}_{s,\tau}^{(n)'} \right) \right) \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)} + 0_P(1), \\
 &= \frac{I(f_1)}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)'} \left( \frac{1}{\sigma_s^2} \Gamma^s \left( \underline{\phi}, \underline{\sigma} \right) \right) \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)} + 0_P(1), \\
 &= \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}} \left( \underline{\phi}, \underline{\sigma} \right) \underline{\tau}^{(n)} + 0_P(1),
 \end{aligned}$$

où  $\underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}} \left( \underline{\phi}, \underline{\sigma} \right)$  est donné par (2.3.1).

**Condition** (5) et (6) sont clairement vérifiés. Concernant la propriété *LAQ*, en remplaçant

$\zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s)$  par sa valeur, on obtient

$$\begin{aligned} 2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) &= \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s) \right) y_{s-j+S\tau}^{(n)}, \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{j=1}^p h_{s,j}^{(n)} \underline{\delta}_{s,j}^{(n)}(\underline{\phi}_s) = \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_{s,\cdot}^{(n)'} \underline{\delta}_{s,\cdot}^{(n)}(\underline{\phi}_s) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\phi}_s). \end{aligned}$$

A partir de la proposition précédente on peut obtenir les résultats suivants immédiatement.

**Remarque 2.3.1**

Sous la propriété *LAN*  $(\underline{\phi}, \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}), \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}))$ , nous avons :

*i)*  $P_{n,\phi_n}$  et  $P_{n,\phi}$  sont contiguës.

*ii)*  $\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi})$  satisfait la Linéarité Asymptotique Locale :

$$\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}^{(n)}) - \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) = -\underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \tau^{(n)} + o_p(1).$$

## 2.4 Existence et construction d'estimateurs LAM

### 2.4.1 Borne inférieure des estimateurs dans les modèles LAN

Soit  $l : \mathbb{R}^{pS} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction de perte qui satisfait les conditions suivantes

- (i)  $l(x) \geq 0$ ,
- (ii)  $l(x) = l(-x), \forall x \in \mathbb{R}^{pS}$ ,
- (iii)  $\{x/l(x) \leq u\}$  is convexe  $\forall u \in \mathbb{R}_+^*$ .

Le résultat qui suit donne une borne inférieure du risque encouru en prenant  $\{Z_n\}$  comme suite d'estimateurs arbitraires du paramètre  $\underline{\phi}$ .

**Théorème 2.4.1** (Hájek (1972))

Soit un modèle  $PAR_S(p_t)$   $S$ -périodique satisfaisant les conditions H1, H2 et H3 et soit  $\{Z_n\}$  une suite d'estimateurs quelconques de  $\underline{\phi}$ ,  $l$  une fonction de perte convexe définie sur  $\mathbb{R}^{pS}$ . Alors :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{\|\sqrt{n}(\underline{\phi} - \underline{\phi}_0)\| \leq K} \sup E_{n, \underline{\phi}} l \{ \sqrt{n}(Z_n - \underline{\phi}) \} \geq \int l(x) dN \left( 0, \left( \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \right) \quad (2.4.1)$$

**Définition 2.4.1**

Si la condition LAN  $\left( \underline{\phi}, \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}), \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) \right)$  est satisfaite. Toute suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  qui atteint la borne inférieure (2.4.1) est dite *Localement Asymptotiquement Minimax LAM*( $\underline{\phi}_0$ ).

### 2.4.2 Caractéristique des estimateurs LAM

**Définition 2.4.2**

La suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  est dite  $\underline{\phi}_0$ -régulière, sous LAN  $\left( \underline{\phi}, \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}), \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}) \right)$  si

$$\sqrt{n} \left( Z_n - \underline{\phi}_0 \right) - \left( \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}_0) = o(P_{\underline{\phi}_0}) \quad (2.4.2)$$

**Lemme 2.4.1**

Sous les conditions de régularités H1 et H2, nous avons pour toute suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$ , l'implication suivante

$$\sqrt{n} \left( Z_n - \underline{\phi}_0 \right) - \left( \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}_0) = o(P_{\underline{\phi}_0}) \quad (2.4.3)$$

implique que  $\{Z_n\}$  est LAM.

Afin de construire des estimateurs réguliers l'existence d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents est essentielle, on suppose que l'on dispose d'un estimateur initial  $\hat{\underline{\phi}}_n$   $\sqrt{n}$ -consistant d'où l'hypothèse H3 :  $\sqrt{n}(\hat{\underline{\phi}}_n - \underline{\phi}_0) = O(P_{\underline{\phi}_0})$ .

**Remarque 2.4.1**

La condition H3 est vérifiée pour n'importe quel estimateur pour lequel le théorème central limite est valide, i.e., pour tous les estimateurs standards.

**Théorème 2.4.2 (Bentarzi, Guerbyenne et Merzougui (2009)).**

Supposons que  $\{\bar{\phi}_n\} \in \Theta$  est une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\phi}_0 \in \Theta$ .

Alors  $\hat{\underline{\phi}}_n$  définie par

$$\hat{\underline{\phi}}_n = \bar{\phi}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \hat{\underline{\Gamma}}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} \Delta_f^{(n)}(\bar{\phi}_n), \quad (2.4.4)$$

est régulière, avec

$$\left( \hat{\underline{\Gamma}}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\phi}, \underline{\sigma}) \right)^{-1} = \frac{S}{I(f_1)} \begin{pmatrix} \frac{\hat{G}^1(\bar{\phi}_n)}{\hat{\sigma}_1^2} & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{G}^2(\bar{\phi}_n)}{\hat{\sigma}_2^2} & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{G}^S(\bar{\phi}_n)}{\hat{\sigma}_S^2} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$\text{où } \hat{G}^s(\bar{\phi}_n) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \underline{y}_{s,\tau}^{(n)} \underline{y}_{s,\tau}^{(n)'}$$

## 2.5 Construction d'estimateurs adaptatifs

Les estimateurs obtenus ci-dessus dépendent de la loi sous-jacente du bruit blanc  $f$  qui est, en pratique, inconnue. Dans cette section, et en suivant étroitement la méthode utilisée par Kreiss (1987), on considère le modèle semi-paramétrique dont le paramètre est  $(\underline{\phi}, f)$  où  $\underline{\phi}$  est le paramètre d'intérêt et  $f$  est le paramètre de nuisance appartenant à la classe des fonctions de densités symétriques  $F^+$  avec des moments d'ordres 4 finies. Un estimateur est dit adaptatif si, pour une fonction de densité inconnue  $f$ , il a la même efficacité qu'un estimateur optimal dans le modèle où  $f$  est supposée connue. Supposant que l'exigence d'adaptativité donnée par Stein est satisfaite i.e.,

$$H4 \quad \begin{array}{l} (i) \ f \text{ est symétrique,} \\ (ii) \ \int x^4 f(x) dx < \infty, \end{array}$$

on peut obtenir des estimateurs qui sont indépendants de la distribution du bruit blanc mais qui sont *LAM*, simultanément pour différents types de distributions des erreurs.

Il est évident que la performance d'un estimateur construit sur la base d'information partielle sur la densité des erreurs est, généralement, moins puissante qu'un estimateur établi en utilisant des informations plus riches et précises. En effet, le fait que la densité de probabilité des erreurs,  $f(\cdot)$ , est inconnue entraîne, généralement, une perte dans la matrice d'information de Fisher comparé au cas où  $f$  est connue. Cependant, quand cette densité est symétrique cette perte d'information disparaît dans l'estimation adaptative par conséquent la borne minimax asymptotique locale sera identique au cas où  $f$  est connue, comme ça a été montré dans Koul et Schick (1997).

De tels estimateurs, s'ils existent, sont dits adaptatifs pour la classe spécifiée de densités. Pour obtenir l'estimateur adaptatif semblable à  $\widehat{\underline{\phi}}_n$ , on a besoin d'estimer la fonction score  $\phi$  et l'information de Fisher  $I$  qui sont inconnues. La fonction score inconnue sera estimée avec consistance, en utilisant la fonction du noyau Gaussienne, cependant, n'importe quel autre noyau pourra être utilisé (cf. Ling and McAleer (2003)). Pour cette fin, on introduit les notations suivantes :

- (i)  $g(x; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), x \in \mathbb{R},$
- (ii)  $f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y; \eta) f(y) dy,$
- (iii)  $\hat{f}_{\eta,\tau}(x, \theta) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{\tau_0=0 \\ \tau_0 \neq \tau}}^{m-1} \{g(x+z_{s,\tau_0}, \eta) + g(x-z_{s,\tau_0}, \eta)\}; \tau = 0, \dots, m-1$

Soit  $\hat{q}_{n,\tau}(x, \theta)$  l'estimateur suivant de  $\phi$

$$\hat{q}_{n,\tau}(x, \theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\hat{f}'(x, \theta)}{\hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta)}, & \text{si } \begin{cases} \hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta) \geq d_n, |x| \leq g_n, \\ |\hat{f}'(x, \theta)| \leq c_n \hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta), \end{cases} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0.$

Soit  $\tilde{\delta}_{s,\cdot}(\underline{\phi}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n,\tau}(x, \underline{\phi}_s) \underline{y}_{s,\tau}$  et la version estimée de  $\Delta_f^{(n)}(\underline{\phi})$

$$\tilde{\Delta}_m(\underline{\phi}) = (\tilde{\delta}_{1,\cdot}(\underline{\phi}_1), \tilde{\delta}_{2,\cdot}(\underline{\phi}_2), \dots, \tilde{\delta}_{S,\cdot}(\underline{\phi}_S))'.$$

### Lemme 2.5.1

Soit  $(\bar{\phi}_n)_n$  une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\phi}_0$ . Sous les conditions de régularités A1 – A5, nous avons

$$\tilde{\Delta}_m(\bar{\phi}_n) - \Delta_m(\bar{\phi}_n) = o_{P_n, \underline{\phi}_0},$$

si  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n)c_n \rightarrow 0, g_n\eta(n)^{-4}/n \rightarrow 0$  et  $n\eta(n)^9$  reste borné.

### Lemme 2.5.2 (Estimation de l'information de Fisher).

L'estimateur de l'information de Fisher  $I$ , donné par

$$\hat{I}_n(\underline{\phi}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \hat{I}_n(\underline{\phi}_s) \quad \text{où} \quad \hat{I}_n(\underline{\phi}_s) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n,\tau}^2\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\phi}_s), \underline{\phi}_s\right)$$

est un estimateur consistant de l'information de Fisher  $I(f_1)$ .

**Théorème 2.5.1 (Bentarzi, Guerbyenne et Merzougui (2009))**

L'estimateur  $\tilde{\underline{\phi}}_n = \bar{\phi}_n + \frac{S}{\hat{I}(f_1)} \hat{\Gamma}^{-1}(\underline{\phi}_0, \underline{\sigma}) \tilde{\Delta}_m(\bar{\phi}_n)$ , où  $\hat{I}$  est un estimateur de  $I$  et définie à partir de  $\hat{f}_1$  qui est un estimateur de  $f_1$ , avec la méthode du noyau, satisfait la condition de régularité

$$\sqrt{n} \left( \tilde{\underline{\phi}}_n - \underline{\phi}_0 \right) - \frac{S}{I(f_1)} \Gamma^{-1}(\underline{\phi}_0, \underline{\sigma}) \Delta_f^{(n)}(\underline{\phi}_0) = o_{(P_{\underline{\phi}_0})}$$

ce qui veut dire que  $\tilde{\underline{\phi}}_n$  est LAM et nous avons

$$L \left( \sqrt{n} \left( \tilde{\underline{\phi}}_n - \underline{\phi}_0 \right) / P_{n, \underline{\phi}_0} \right) \Rightarrow N \left( 0_{\mathbb{R}^{ps}}, \frac{S}{I(f_1)} \Gamma^{-1}(\underline{\phi}_0, \underline{\sigma}) \right),$$

pour toute densité satisfaisant H4.

**Preuve.** La démonstration, qui utilise l'hypothèse de symétrie de la densité de probabilité des erreurs, est similaire à celle de Kreiss (1987).

## 2.6 Résultats numériques

Des simulations intensives ont été exécutées pour étudier le comportement de l'estimateur adaptatif  $AE$  obtenu ci-dessus. En effet, nous avons simulé les modèles suivants :

1) Le modèle  $PAR_4(1)$  :

$$y_t = \phi_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ avec } \underline{\phi} = (1.5, 0.8, 2, 0.35), \underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, 1.2, 0.9).$$

2) Le modèle  $PAR_7(1)$  :

$$y_t = \phi_t y_{t-1} + \varepsilon_t, \text{ avec } \underline{\phi} = (1.5, 0.8, 2, 0.7, 1.2, 0.5, 1), \underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, 1, 0.9, 1, 1.2, 1)$$

3) Le modèle  $PAR_4(p)$ , avec  $p_1 = p_2 = 2$ ,  $p_3 = p_4 = 1$ , et  $\underline{\phi} = (1.5, 0.8, 2, 0.7, 1.2, 0.5, 1)$ ,

$$\underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, 1, 0.9, 1, 1.2, 1)$$

pour les quatre densités des erreurs telles que données dans Kreiss (1987) mais  $f_3$  et  $f_4$  ont été modifiées afin que la densité du bruit blanc soit de variance 1

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{0.05}{\sqrt{50\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{50}\right) + \frac{0.95}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_3(x) = \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x - 3)^2}{2}\right) + \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x - 3)^2}{2}\right),$$

$$f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|),$$

$f_1$  et  $f_4$  sont fréquemment rencontrées dans la pratique,  $f_2$  et  $f_3$  sont des mélanges de lois normales alors que  $f_2$  est communément utilisée en présence de valeurs aberrantes,  $f_3$  a été choisie par Kreiss pour montrer l'efficacité de la procédure adaptative. Les paramètres de la fonction score estimée sont égale à :

$$\eta(n) = m^{-\frac{1}{3}}, \quad g_n = 4m^{\frac{1}{6}}, \quad c_n = g_n, \quad d_n = \frac{0.1}{m}.$$

Le nombre de répétition de chaque expérience est 500, pour obtenir l'estimateur des moindres carrés ( $LSE$ )  $\bar{\phi}_n$ , pris comme estimateur initial, et l'estimateur adaptatif ( $AE$ )  $\tilde{\phi}_n$ , du vecteur des paramètres  $\underline{\phi}$ . Les estimateurs adaptatifs sont comparés en utilisant le critère de l'intervalle de confiance (CI, Table1) et la racine carrée de l'erreur quadratique moyenne (Root Mean Square Error :  $RMSE$ ) définie par :  $RMSE = \sqrt{(Biais)^2 + Variance}$  (Tables 3 et 4). Les programmes de simulations sont écrit en Matlab 7.0. Les tables 2.1 et 2.2 montrent le biais et l'écart type empirique pour les deux estimateurs  $AE$  et  $LSE$ , pour les deux cas correspondant à la variance périodique et constante, respectivement.

Table 1 : Intervalle de confiance empirique à 90% pour  $\sqrt{n}(\bar{\phi}_n - \underline{\phi})$  et  $\sqrt{n}(\tilde{\phi}_n - \underline{\phi})$   
 du  $PAR_4(1)$ , avec  $\underline{\phi} = (1.5, 0.8, 2, 0.35)$ ,  $\underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, 1.2, 0.9)$  et  $n = 200$ .

$f / \underline{\phi}$		$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$
$f_1$	LSE	[-1.6004,1.2583]	[-0.9742,0.6964]	[-1.3865,1.0255]	[-0.6681,0.4070]
	AE	[-1.7628,1.3111]	[-1.0497,0.7253]	[-1.4184,1.1691]	[-0.6889,0.4089]
$f_2$	LSE	[-1.6940,1.2478]	[-1.0009,0.7012]	[-1.5406,1.0513]	[-0.6151,0.3654]
	AE	[-1.3404,1.0200]	[-0.8459,0.6457]	[-1.2012,0.8471]	[-0.5598,0.3139]
$f_3$	LSE	[-1.6702,1.2867]	[-0.8527,0.6922]	[-1.4282,1.0592]	[-0.6618,0.3995]
	AE	[-0.9054,0.9316]	[-0.4664,0.5680]	[-0.7373,0.8266]	[-0.2808,0.3336]
$f_4$	LSE	[-1.8979,1.2757]	[-0.9648,0.6398]	[-1.3665,1.0187]	[-0.6496,0.4037]
	AE	[-1.6414,1.1859]	[-0.8324,0.5648]	[-1.0936,0.9767]	[-0.5380,0.3629]

Table 2.1 : Biais et écart type empirique du  $LSE$  et  $AE$  pour  $PAR_4(1)$

$f / \underline{\phi}$		$n = 200$				$n = 400$			
		$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$
$f_1$	LSE Bias	0.0109	0.0057	0.0073	0.0056	0.0021	0.0026	0.0017	0.0029
	SD	0.0655	0.0382	0.0550	0.0223	0.0408	0.0246	0.0359	0.0144
	AE Bias	0.0099	0.0047	0.0073	0.0059	0.0017	0.0023	0.0016	0.0028
	SD	0.0673	0.0401	0.0597	0.0235	0.0436	0.0261	0.0373	0.0154
$f_2$	LSE Bias	0.0083	0.0053	0.0039	0.0064	0.0049	0.0030	0.0028	0.0022
	SD	0.0696	0.0362	0.0569	0.0230	0.0415	0.0260	0.0387	0.0143
	AE Bias	0.0074	0.0030	0.0033	0.0044	0.0033	0.0018	0.0003	0.0014
	SD	0.0520	0.0307	0.0447	0.0186	0.0337	0.0210	0.0306	0.0120
$f_3$	LSE Bias	0.0170	0.0071	0.0043	0.0047	0.0054	0.0031	0.0035	0.0027
	SD	0.0647	0.0366	0.0525	0.0232	0.0427	0.0255	0.0353	0.0155
	AE Bias	-0.0052	-0.0031	-0.0023	-0.0019	-0.0005	-0.0006	-0.0015	-0.0008
	SD	0.0430	0.0239	0.0316	0.0145	0.0214	0.0121	0.0174	0.0078
$f_4$	LSE Bias	0.0095	0.0059	0.0057	0.0055	0.0017	0.0023	0.0017	0.0046
	SD	0.0635	0.0360	0.0558	0.0236	0.0450	0.0237	0.0362	0.0160
	AE Bias	0.0089	0.0052	0.0045	0.0049	0.0002	0.0017	0.0015	0.0040
	SD	0.0656	0.0373	0.0558	0.0238	0.0459	0.0245	0.0353	0.0162

Table 2.2 : Biais et écart type empirique du  $LSE$  et  $AE$  pour  $PAR_4(1)$  avec  $\underline{\sigma}^2 = (1, 1, 1, 1)$

$f / \underline{\phi}$	$n = 200$				$n = 400$				
	$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$	
$f_1$	LSE Bias	0.0098	0.0068	0.0058	0.0057	0.0035	0.0028	0.0012	0.0029
	SD	0.0626	0.0412	0.0475	0.0226	0.0413	0.0284	0.0304	0.0155
	AE Bias	0.0087	0.0060	0.0060	0.0060	0.0030	0.0029	0.0020	0.0028
	SD	0.0642	0.0431	0.0514	0.0237	0.0432	0.0303	0.0323	0.0165
$f_2$	LSE Bias	0.0108	0.0061	0.0072	0.0077	0.0040	0.0020	0.0037	0.0025
	SD	0.0637	0.0397	0.0527	0.0240	0.0425	0.0280	0.0293	0.0152
	AE Bias	0.0076	0.0048	0.0045	0.0052	0.0027	0.0016	0.0014	0.0015
	SD	0.0532	0.0336	0.0436	0.0198	0.0355	0.0219	0.0254	0.0129
$f_3$	LSE Bias	0.0140	0.0067	0.0045	0.0057	0.0058	0.0024	0.0011	0.0017
	SD	0.0634	0.0383	0.0452	0.0235	0.0420	0.0271	0.0308	0.0154
	AE Bias	-0.0040	-0.0029	-0.0016	-0.0009	-0.0026	-0.0009	0.0003	-0.0009
	SD	0.0406	0.0246	0.0296	0.0149	0.0200	0.0126	0.0147	0.0077
$f_4$	LSE Bias	0.0085	0.0058	0.0042	0.0076	0.0065	0.0028	0.0015	0.0028
	SD	0.0646	0.0414	0.0481	0.0249	0.0392	0.0272	0.0314	0.0155
	AE Bias	0.0084	0.0049	0.0031	0.0072	0.0060	0.0021	0.0014	0.0028
	SD	0.0664	0.0417	0.0477	0.0259	0.0417	0.0277	0.0310	0.0157

Table 3 : Moyenne empirique et  $RMSE$  pour  $\bar{\phi}_n$  et  $\tilde{\phi}_n$  for  $PAR_7(1)$  avec  $\underline{\phi} = (1.5, 0.8, 2, 0.7, 1.2, 0.5, 1)$ ,  $\underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, 1, 0.9, 1, 1.2, 1)$  et  $n = 350$

$f / \underline{\phi}$	$\phi_{1,1}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{5,1}$	$\phi_{6,1}$	$\phi_{7,1}$	
$f_1$	LSE Mean	1.4941	0.7960	1.9975	0.6991	1.1984	0.4956	0.9925
	RMSE	0.0206	0.0121	0.0162	0.0067	0.0115	0.0126	0.0238
	AE Mean	1.4940	0.7961	1.9974	0.6993	1.1983	0.4956	0.9923
	RMSE	0.0216	0.0124	0.0164	0.0069	0.0116	0.0127	0.0245
$f_2$	LSE Mean	1.4966	0.7968	1.9977	0.6992	1.1980	0.4951	0.9935
	RMSE	0.0187	0.0118	0.0170	0.0071	0.0129	0.0128	0.0207
	AE Mean	1.4981	0.7981	1.9991	0.6992	1.1989	0.4969	0.9967
	RMSE	0.0152	0.0092	0.0131	0.0053	0.0094	0.0099	0.0143
$f_3$	LSE Mean	1.4935	0.7971	1.9973	0.6988	1.1978	0.4964	0.9931
	RMSE	0.0215	0.0129	0.0161	0.0077	0.0108	0.0112	0.0227
	AE Mean	1.5024	0.8013	2.0006	0.7004	1.2009	0.5014	1.0025
	RMSE	0.0115	0.0076	0.0096	0.0046	0.0072	0.0069	0.0129
$f_4$	LSE Mean	1.4962	0.7967	1.9974	0.6987	1.1982	0.4956	0.9941
	RMSE	0.0200	0.0115	0.0158	0.0075	0.0110	0.0124	0.0192
	AE Mean	1.4969	0.7975	1.9979	0.6993	1.1984	0.4969	0.9960
	RMSE	0.0172	0.0101	0.0133	0.0065	0.0093	0.0102	0.0159

Table 4 : Moyenne empirique et RMSE pour  $\bar{\phi}_n$  et  $\tilde{\phi}_n$  du  $PAR_4(p)$  :  $p_1 = p_2 = 2, p_3 = p_4 = 1$ ,  $\underline{\phi} = (-.5, -.75; 1.9, .84; -.2; -2)$ ,  $\underline{\sigma}^2 = (1, 0.8, .9, 1.2)$  et  $n = 400$

$f / \underline{\phi}$		$\phi_{1,1}$	$\phi_{1,2}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{2,2}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{4,1}$
$f_1$	LSE Mean	-0.5007	-0.7541	1.8903	0.8382	-0.1970	-1.9995
	RMSE	0.0937	0.2118	0.0871	0.0389	0.0490	0.1113
	AE Mean	-0.5015	-0.7556	1.8918	0.8383	-0.1973	-1.9990
	RMSE	0.0982	0.2239	0.0901	0.0411	0.0518	0.1194
$f_2$	LSE Mean	-0.4976	-0.7432	1.8867	0.8377	-0.1970	-2.0023
	RMSE	0.1020	0.2296	0.0988	0.0452	0.0489	0.1215
	AE Mean	-0.4987	-0.7436	1.8960	0.8397	-0.1956	-2.0023
	RMSE	0.0823	0.1872	0.0769	0.0344	0.0401	0.1036
$f_3$	LSE Mean	-0.4965	-0.7376	1.8947	0.8373	-0.1978	-2.0075
	RMSE	0.0939	0.2136	0.0866	0.0422	0.0438	0.1231
	AE Mean	-0.5049	-0.7623	1.9016	0.8406	-0.2011	-1.9974
	RMSE	0.0427	0.0992	0.0425	0.0193	0.0221	0.0559
$f_4$	LSE Mean	-0.4929	-0.7324	1.8888	0.8395	-0.1961	-2.0045
	RMSE	0.0910	0.2074	0.0876	0.0430	0.0488	0.1163
	AE Mean	-0.4937	-0.7340	1.8976	0.8409	-0.1980	-2.0031
	RMSE	0.0795	0.1813	0.0734	0.0373	0.0424	0.1010

Les résultats de simulations, reportés dans les différentes tables, montrent empiriquement que l'*AE* a toujours une meilleure performance que *LSE* pour les densités  $f_2$  et  $f_3$ , particulièrement pour  $f_3$  dont la forme de densité (une densité symétrique bimodale) est significativement différente de la normale pour laquelle le *LSE* est équivalent au *MLE*. Plus précisément, les *RMSE* de l'estimateur adaptatif sont toujours plus petits que leur correspondants du *LSE*, principalement pour  $f_3$ . En plus, la consistance des estimateurs adaptatifs peut être déduite empiriquement du fait que leur biais et variances empiriques diminuent quand la taille de la série chronologique augmente. D'un autre côté, on peut clairement voir dans les tables que le *RMSE* de  $f_1$  est légèrement en faveur du *LSE*. Ce résultat est bien attendu parce que l'estimateur des moindres carrés, qui est obtenu par une procédure nonparamétrique, sous l'hypothèse de normalité, est équivalent à l'estimateur du maximum de vraisemblance. Cependant, pour la densité  $f_4$ , dont la forme n'est pas si différente de la densité normale standard, le critère *RMSE* est en faveur de l'*AE*. En plus, les résultats de simulations montrent que même quand le nombre de paramètres augmente pour inclure des variances périodiques inconnues, l'*AE* maintient son bon comportement.

## Deuxième partie

# Modélisation non linéaires des séries temporelles périodiques

# Chapitre 3

## Test de la périodicité dans un modèle *SETAR*

### 3.1 Introduction

Il est bien connu, de nos jours, que plusieurs séries temporelles rencontrées dans différents domaines, en particulier en finance et en hydrologie, révèlent quelques caractéristiques ne pouvant être capturées par les modèles linéaires standard de séries temporelles. Ainsi, motivé par ce fait reconnu, la modélisation théorique et pratique des séries temporelles non linéaires, a reçue, dans les années récentes, un intérêt considérable. En plus, il semble que la classe des modèles non linéaires, qui est la plus étudiée théoriquement et la plus employée pratiquement, est la classe particulière des modèles Autorégressifs à seuils (*TAR*), et leur cas particulier appelé modèles Autorégressifs à seuils Self-Exciting (*SETAR*), qui sont tous simplement des modèles linéaires par morceaux dans chacun des régimes différents. En effet, plusieurs travaux ont montré que ce type de modèle semble être très réaliste et plus approprié en pratique, tant que l'existence des niveaux différents dans une série temporelle est détectée, comme mentionner dans De Gooijer et Anguerra (2000), lors de la modélisation d'une série temporelle d'inflation par un modèle autorégressifs à seuils Self-Exciting multiplicative saisonnier (*SEASETAR*). Les modèles Autorégressifs à seuils ont été introduit, pour la première fois dans la littérature des séries temporelles, par le pionnier Tong (1978) et exploré par Tong et Lim (1980) et Tong (1983). Différentes propriétés de ces modèles ont été intensivement étudiés par Petrucci et Davies (1986), Moeanaddin et Tong (1988), Tsay (1989), Tsay (1998), Tong (1990), Ling et Tong (2005) et Ling *et al* (2007).

Pour le  $SETAR(2, 1, 1)$ , Petrucelli et Woolford (1984) ont montré qu'il est ergodique, Chan *et al.* (1985) ont montré que si l'erreur est de variance finie alors il est du second ordre, Chan (1993) et Tsay (1998) ont estimés les paramètres par les moindres carrés conditionnelles, Koul et Schick (1997) ont donné la propriété  $LAN$  et ils ont étudié le problème de l'estimation efficace, puis ils ont montré qu'une estimation adaptative n'est pas possible quand la densité de l'erreur est non symétrique, El Melhaoui (2003) a construit un test adaptatif pour tester l'hypothèse  $AR(1)$  linéaire contre l'hypothèse  $SETAR(2, 1, 1)$ .

Il est reconnu que plusieurs séries temporelles financières et environnementales, rencontrées en pratique, exhibent un caractère de périodicité dans leur structure d'autocovariance qui ne peut être capturé par les modèles de séries temporelles à paramètres invariant dans le temps. Les divers avantages et propriétés intéressantes satisfaites par le modèle à seuils ont motivé l'extension de ces modèles aux modèles autorégressifs à seuils périodiques pour capturer, en plus, le phénomène de périodicité. Le premier travail accompli, à notre connaissance, dans cette direction est celui de Lewis et Ray (2002), dans lequel, ils ont introduit un modèle autorégressif à seuils périodique avec l'estimation des paramètres en appliquant l'algorithme *TSMARS* pour la modélisation des données de la rivière Fraser en Bretagne. Puisque un modèle à seuils périodique compte plus de paramètres que son analogue traditionnel et donc il est plus compliqué, il semble très important de tester le besoin de périodicité avant de le considérer. Ce chapitre est consacré au test d'un modèle autorégressif à seuils classique contre un modèle autorégressif à seuils périodique. Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on revoie brièvement les modèles autorégressifs à seuils classiques et périodiques et on donne les notations, définitions et conditions de régularités de bases, nécessaires pour les sections restantes, de ces modèles. Dans la troisième section, on établie, en adaptant les conditions de Swensen (1985) à notre modèle autorégressif à seuils, la propriété de Normalité Asymptotique Locale ( $LAN$ ). En plus, la Quadratique Asymptotique Locale ( $LAQ$ ), la Normalité Asymptotique Locale ( $LAN$ ) et la linéarité Asymptotique Locale sont obtenus. Un test localement asymptotiquement optimal pour tester un autorégressif à seuils classique contre un autorégressif à seuils périodique est établi, pour le cas où la densité des innovations est supposée être connue, dans la quatrième section. D'un autre côté, la cinquième section, est consacré à la construction, dans le contexte semi paramétrique, d'un test adaptatif quand cette densité des innovations n'est pas spécifiée mais symétrique.

Finalemment, dans la sixième section, on présente quelques résultats de simulation avec un bref commentaire.

## 3.2 Notations, Définitions et conditions de régularités

### 3.2.1 Définitions et notations principales

Un processus univarié, du second ordre,  $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle particulier Autorégressif à seuils Self-Exciting *SETAR*  $(2, 1, 1)$ , s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} I(X_{t-1} \leq c) + \varphi_2 X_{t-1} I(X_{t-1} > c) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où  $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance  $\sigma^2$ , avec une densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement gaussienne et où  $c$  est le paramètre de seuil. Ce paramètre est, dans le présent travail, considéré connu; alors on peut, sans perte de généralité, le prendre égale à 0, désormais le modèle sera réécrit sous la forme suivante :

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1}^- + \varphi_2 X_{t-1}^+ + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.1)$$

où

$$X_t^- = X_t I(X_t \leq 0), \quad \text{et} \quad X_t^+ = X_t I(X_t > 0).$$

Un processus du second ordre  $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle Autorégressif à seuils Self-Exciting Périodique *PSETAR*  $(2, 1, 1)$ , de période  $S$  ( $S \geq 2$ ), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$X_t = \varphi_{t,1} X_{t-1} I(X_{t-1} \leq c_t) + \varphi_{t,2} X_{t-1} I(X_{t-1} > c_t) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z},$$

où  $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie  $\sigma_t^2$ , avec une densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement Gaussienne et où  $c_t$  sont les paramètres de seuils. Les paramètres Autorégressifs  $\varphi_{t,1}$  et  $\varphi_{t,2}$ , la variance des innovations  $\sigma_t^2$  et les paramètres de seuils  $c_t$  sont périodiques, dans le temps, de période  $S$ , i.e.,

$$\begin{aligned}\varphi_{t+kS,1} &= \varphi_{t,1} \text{ et } \varphi_{t+kS,2} = \varphi_{t,2}, \forall k, t \in \mathbb{Z}, \\ \sigma_{t+kS}^2 &= \sigma_t^2 \text{ et } c_{t+kS} = c_t, \forall k, t \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Dans ce travail, la variance des innovations est considérée être un paramètre invariant dans le temps, i.e.,  $\sigma_t^2 = \sigma^2$ . En plus, les paramètres  $c_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , sont supposés être connus, alors on peut, sans perte de généralité, les prendre égales à 0, d'où le modèle sera réécrit sous la forme suivante :

$$X_t = \varphi_{t,1} X_{t-1}^- + \varphi_{t,2} X_{t-1}^+ + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.2.2)$$

où  $X_t^- = X_t I(X_t \leq 0)$  et  $X_t^+ = X_t I(X_t > 0)$ .

Notons  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  une suite des hypothèses nulles sous laquelle  $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle (2.1), où  $\underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)'$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$  la suite des hypothèses alternatives sous laquelle la suite  $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle Autorégressif à seuils périodique (2.2), où

$$\underline{\varphi}^{(n)} = \left( \underline{\varphi}_1^{(n)}, \underline{\varphi}_2^{(n)}, \dots, \underline{\varphi}_S^{(n)} \right),$$

avec

$$\underline{\varphi}_s^{(n)} = \left( \varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right), \varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) \right)', \quad s = 1, \dots, S,$$

tel que  $\sup_n \left( \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right)^2 + \left( \lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right)^2 \right) < \infty$ .

Les  $\underline{h}_1^{(n)} = \left( h_{1,1}^{(n)}, h_{2,1}^{(n)}, \dots, h_{S,1}^{(n)} \right)'$  et  $\underline{h}_2^{(n)} = \left( h_{1,2}^{(n)}, h_{2,2}^{(n)}, \dots, h_{S,2}^{(n)} \right)'$  peuvent être interpréter comme

des perturbations périodique locales des paramètres non périodiques  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$ , respective-

ment, tel que  $\sum_{s=1}^S h_{s,j}^{(n)} = 0$ , pour  $j = 1, 2$ .

En considérant les notations :

$$\begin{aligned}\underline{\Phi} &= \left( \underline{\varphi}', \underline{\varphi}', \dots, \underline{\varphi}' \right)' \quad \text{où } \underline{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2)', \\ \underline{\mathcal{I}}^{(n)} &= \left( \underline{\lambda}^{(n)'} , \underline{h}^{(n)'} \right)' \quad \text{où } \underline{\lambda} = \left( \lambda_1^{(n)}, \lambda_2^{(n)} \right)' \text{ et } \underline{h}^{(n)} = \left( \underline{h}_1^{(n)'} , \dots, \underline{h}_{S-1}^{(n)'} \right)'\end{aligned}$$

avec  $\underline{h}_s^{(n)'} = \left( h_{s,1}^{(n)}, h_{s,2}^{(n)} \right)'$ ,  $s = 1, \dots, S-1$ , et soit  $\underline{\nu}^{(n)}$  la matrice de dimension  $2S \times 2S$

donnée par  $\underline{\nu}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} K$ , où la matrice  $K$  est définie comme suit :

$$K = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} & & & & \\ \vdots & & I_{2(S-1) \times 2(S-1)} & & \\ I_{2 \times 2} & & & & \\ I_{2 \times 2} & -I_{2 \times 2} & \dots & & -I_{2 \times 2} \end{pmatrix},$$

on peut aisément réécrire les hypothèses alternatives sous la forme  $H_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ .

### 3.2.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres du modèle Autorégressif à seuils  $\underline{\varphi}$  satisfont la condition nécessaire et suffisante de causalité du (2.1), i.e.,  $\varphi_1 < 1, \varphi_2 < 1$  et  $\varphi_1 \varphi_2 < 1$ ,

Hypothèse (H2). La densité des innovations  $f(\cdot)$  est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a)  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$ ,

(b)  $f(\cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$  : il existe une

fonction  $\dot{f}(\cdot)$  tel que, pour  $-\infty < a < b < \infty$ , nous avons  $f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}_\sigma(x) d\mu(x)$ ,

(c) L'information de Fisher  $I(f) = \int (\phi_f(x))^2 f_\sigma(x) dx$  est finie, où  $\phi_f = -\frac{\dot{f}_\sigma(\cdot)}{f_\sigma(\cdot)}$ ,

(d)  $\int x f(x) dx = 0$  et la variance est finie, i.e.,  $\sigma^2 = E(X_t^2) < \infty$ .

On note que les deux conditions (b) et (c) impliquent la différentiabilité en moyenne quadratique de la fonction  $f(\cdot)^{\frac{1}{2}}$ . i.e.,

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \lambda^{-2} \int \left( f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x + \lambda) - f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x) - \lambda \frac{\dot{f}_\sigma(x)}{f_\sigma^{\frac{1}{2}}(x)} \right)^2 dx = 0.$$

(voir, Lemme 3, page 191, Hájek (1972) ou Hájek et Šidák (1967)).

### 3.3 Normalité Asymptotique Locale

#### 3.3.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Notons  $\underline{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$  une réalisation de taille finie  $n$  d'un processus autorégressif périodiquement corrélé  $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant le modèle Autorégressif à seuils causale (2.1) et soit  $X_0^{(n)}$  la valeur initiale dont les densités sont  $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma)$  et  $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma)$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement. En plus, on suppose que  $g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma) - g_0^{(n)}(X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma)$  converge en probabilité vers 0, quand  $\underline{\varphi}^{(n)} \rightarrow \underline{\Phi}$  avec  $n \rightarrow \infty$ . Supposons, pour simplifier les notations, que la taille de la série temporelle observée  $n$  est un multiple de  $S$ , i.e.,  $n = mS$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $t = s + S\tau$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau = 0, 1, \dots, m-1$ . On note par  $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , les résidus calculés sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement. Alors, nous avons

$$Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) = X_{s+S\tau}^{(n)} - \varphi_1 X_{s-1+S\tau}^{(n)-} - \varphi_2 X_{s-1+S\tau}^{(n)+},$$

et

$$\begin{aligned} Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) &= \\ & X_{s+S\tau}^{(n)} - \left( \varphi_1 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}) \right) X_{s-1+S\tau}^{(n)-} - \left( \varphi_2 + \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)}) \right) X_{s-1+S\tau}^{(n)+}, \\ &= Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}) X_{s-1+S\tau}^{(n)-} - \frac{1}{\sqrt{n}} (\lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)}) X_{s-1+S\tau}^{(n)+}, \\ &= Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{*(n)'} \underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)} = Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)}, \end{aligned}$$

où  $\underline{\tau}^{*(n)} = (\underline{\tau}_1^{*(n)'}, \underline{\tau}_2^{*(n)'}, \dots, \underline{\tau}_S^{*(n)'})'$  avec  $\underline{\tau}_s^{*(n)} = (\lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)}, \lambda_2^{(n)} + h_{s,2}^{(n)})$ , et où  $\underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)} = (X_{s-1+S\tau}^{(n)-}, X_{s-1+S\tau}^{(n)+})'$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $S \in \mathbb{Z}$ . La variance empirique correspondante est donnée par  $\hat{\sigma}^2 = n^{-1} \sum_{t=1}^n (Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}))^2$ .

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance,  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  pour  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , est alors donné, pour  $n = mS$ , par :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{T}^{(n)}) = \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) \right)}{f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} + \log \frac{g_0^{(n)} \left( X_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \sigma \right)}{g_0^{(n)} \left( X_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \sigma \right)},$$

par conséquent, nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ , l'approximation asymptotique locale :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{T}^{(n)}) &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) \right)}{f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} + 0_P(1), \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[ \log \left( f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \right) - \log \left( f_\sigma \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \right) \right] + 0_P(1). \end{aligned}$$

où le terme  $0_P(1)$  correspond à l'influence de la valeur initiale  $X_0^{(n)}$ .

### 3.3.2 Normalité Asymptotique Locale

La structure théorique consistant à approcher une suite d'expériences statistiques par une famille gaussienne, qui remonte à Wald (1943), mais doit son développement à LeCam (1960, 1986), est devenu standard pour la résolution du problème d'efficacité des tests et des estimateurs. En effet, plusieurs chercheurs se sont intéressés à la dérivation de la normalité asymptotique locale pour divers modèles (cf., Roussas (1979), Swensen (1985), Kreiss (1987), Linton (1993), Bengabrit et Hallin (1998), Bentarzi et Hallin (1996), Koul et Schick (1997) et autres.). Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle autorégressif à seuils périodique  $PSETAR(2, 1, 1)$ , nous avons besoin des variables suivantes

$$\begin{aligned} \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \frac{f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)}{f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} - 1, \\ \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \frac{1}{2} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \gamma_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{2} \delta_{s,\tau}^{(n)'} \underline{T}_s^{*(n)} \text{ où } \delta_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)}, \\ \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}) &= (\delta_1^{(n)'}, \dots, \delta_S^{(n)'})' \in \mathbb{R}^{2S} \text{ où } \delta_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)}, \quad s = 1, \dots, S, \\ \delta_{s,1}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s-1+S\tau}^{(n)-} \text{ et } \delta_{s,2}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X_{s-1+S\tau}^{(n)+}. \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

Considérons la matrice bloc diagonale de dimension  $2S \times 2S$  :

$$\underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) = \frac{1}{\sigma^2} \begin{pmatrix} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \ddots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix} = I_{S \times S} \otimes \left( \frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \right), \quad (3.3.2)$$

où  $\Gamma(\underline{\varphi})$  est la matrice de variance du vecteur  $\underline{X}_{s-1+S\tau}^{(n)}$ ,

$$\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_0^{-2}) & 0 \\ 0 & E(X_0^{+2}) \end{pmatrix}.$$

En utilisant les définitions et notations précédentes, on peut formuler les conditions de Swensen adaptées, qui impliquent la propriété LAN .

**Proposition 3.3.1** (Conditions de Swensen Adaptées (1985), Bentarzi et Merzougui (2009a))

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) et (H2), satisfaites :

- (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 = 0,$
- (2)  $\sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty,$
- (3)  $\max_s \max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = 0_p(1),$
- (4)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \underline{I}^{*(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{I}^{*(n)} = 0_p(1),$
- (5)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left[ \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) I_{\left[ \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n, s-1+S\tau} \right] = 0_p(1),$   
 $\mathcal{B}_{n, s-1+S\tau}$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par le passé du processus jusqu'au temps  $s-1+S\tau$ ,
- (6)  $E \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) / \mathcal{B}_{n, s-1+S\tau} \right) = 0_p(1),$

**Preuve.**

**Condition (1).** En remplaçant  $\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$  par leurs valeurs respectives dans l'expression de l'espérance donnée en (3.1), on obtient

$$\begin{aligned}
 E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) - \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)}{f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} \right)^2 f^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right), \\
 &= E \left( \sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right),
 \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
 B_{1,s,m} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{[|X_{s-1+S\tau}^-| < K \text{ et } |X_{s-1+S\tau}^+| < K]} \left( f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)}{f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} \right)^2 \times f^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \right\},
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 B_{2,s,m} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{[|X_{s-1+S\tau}^-| \geq K \text{ ou } |X_{s-1+S\tau}^+| \geq K]} \left( f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) - \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)}{f^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)} \right)^2 \times f^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \right\},
 \end{aligned}$$

pour un nombre réel quelconque  $K$ . Alors, afin de prouver que  $E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2$

converge vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , il suffit de montrer que  $B_{1,s,m}$  et  $B_{2,s,m}$  converge vers 0, pour  $s$  fixé,  $s = 1, \dots, S$  et pour un nombre réel positive quelconque  $K$ . Par conséquent, le reste de la preuve s'ensuit directement à partir du résultat de Swensen (1985).

**Condition** (2). Il suffit de montrer que, pour  $s$  fixé,  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty$ . En utilisant la définition de  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$ , on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

Il est facile de montrer, pour  $s$  fixé, que la somme  $\sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2$  est uniformément bornée (cf.,

Swensen 1985). Donc, nous avons

$$\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 < \infty,$$

la seconde condition est alors vérifiée.

**Condition (3).**

On montre que  $\max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = \max_{\tau} \left| \frac{1}{2} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{T}_s^{*(n)'} X(S\tau + s - 1) \right) \right| = 0_p(1)$ ,

pour  $s$  quelconque. Ainsi, on doit prouver que

$$\begin{aligned} & \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \\ & \text{et} \\ & \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^+ \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} & p \left( \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{\tau=0}^{m-1} p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right), \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ \frac{1}{n} \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right)^2 I_{\left[ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right]} \right\}, \\ & \leq \frac{1}{S\varepsilon^2} E \left( \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right)^2 I_{\left[ \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \sqrt{n}\varepsilon \right]} \right), \end{aligned}$$

ainsi le coté droit converge vers 0, quand  $n \rightarrow \infty$ . De la même manière, on peut montrer la seconde expression.

**Condition (4).** Nous avons

$$\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{1}{4n} \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{T}_s^{*(n)'} X(S\tau + s - 1) X(S\tau + s - 1)' \underline{T}_s^{*(n)},$$

en utilisant le fait que le processus est ergodique, nous avons

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X(S\tau + s - 1) X(S\tau + s - 1)' \rightarrow E(\phi^2) E(X(0) X(0)'),$$

où  $E(\phi^2) = I(f_{\sigma})$  avec  $I(f_{\sigma}) = \frac{1}{\sigma^2} I(f_1)$ .

$$E(X(0)X(0)') = \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} E(X_0^{-2}) & E(X_0^- X_0^+) \\ E(X_0^- X_0^+) & E(X_0^{+2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(X_0^{-2}) & 0 \\ 0 & E(X_0^{+2}) \end{pmatrix},$$

puisque  $E(X_0^- X_0^+) = 0$ . Ainsi, nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) &= \frac{1}{4S} \sum_{s=1}^S \underline{\tau}_s^{*(n)'} I(f_1) \left( \frac{1}{\sigma^2} \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \right) \underline{\tau}_s^{*(n)} + 0_p(1), \\ &= \frac{I(f_1)}{4S} \underline{\tau}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{*(n)} + 0_p(1). \end{aligned}$$

**Condition (6).**

Puisque  $Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$  est indépendant des variables de  $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$  et  $E\left(\phi\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})\right)\right) = 0$ , alors

nous avons  $E\left(\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}\right) = 0$ .

La preuve de la condition (5) est similaire à celle de Swensen (1985), alors elle est omise.

**Proposition 3.3.2(Bentarzi et Merzougui (2009a))**

Supposons que les hypothèses H1 et H2 sont satisfaites, alors nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ , quand  $n \rightarrow \infty$  :

(i) *Quadratique Asymptotique Locale (LAQ)*

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1),$$

où la matrice carrée  $\underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}) = \frac{I(f_1)}{S} K' \underline{\Gamma}(\underline{\varphi}, \sigma) K$  et la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  est donnée par

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}), \\ \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \left( \sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)}; \delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}; \dots; \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)} \right)'. \end{aligned}$$

(ii) *Normalité Asymptotique Locale de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$*

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \rightarrow N_{2S} \left( \underline{0}, \underline{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \right).$$

**Preuve.**

Puisque les conditions suffisantes de Swensen sont vérifiées, alors en tenant compte du fait que

$$2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\tau}^{(n)'} K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}),$$

la quadratique asymptotique locale (LAQ) et la normalité asymptotique locale de la suite centrale découlent immédiatement du Théorème 1 (Le Cam) (cf., Swensen (1985)).

### Proposition 3.3.3

Comme conséquences de la propriétés LAN, nous avons :

i)  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$  sont contiguës.

ii) La suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  satisfait la Linéarité Asymptotique Locale suivante :

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1)$$

**Preuve :** i) La contiguïté de  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$  est une conséquence directe de la propriété LAN.

ii) Soit  $V^{(n)}$  une suite de vecteurs de dimension  $2S$  telle que  $\sup_n V^{(n)'} V^{(n)} < \infty$  et

$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} V^{(n)}; \underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  le logarithme du rapport de vraisemblance pour  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} V^{(n)})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ , alors il est facile d'avoir :

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} (V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \\ \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} (V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\varphi}) - \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}; \underline{\varphi}), \end{aligned}$$

en utilisant l'expression LAQ, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ , alors par contiguïté, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ , on obtient

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} (V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \left( \underline{\nu}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) - \\ \frac{1}{2} \left( \underline{\nu}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}; \sigma) \left( \underline{\nu}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right) + 0_p(1), \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

d'un autre coté, en utilisant encore l'expression LAQ, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \Lambda_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} (V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \\
 & \quad \Lambda_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} (V^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)}); \underline{\varphi}) - \Lambda_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}; \underline{\varphi}), \\
 & = \left\{ \left( \underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi}) - \frac{1}{2} \left( \underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right)' \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \left( \underline{V}^{(n)} + \underline{\tau}^{(n)} \right) + 0_p(1) \right\} \\
 & \quad - \left\{ \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi}) - \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1) \right\}, \\
 & = \underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi}) - \frac{1}{2} \underline{V}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{V}^{(n)} - \underline{V}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1).
 \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

A partir de (3.3.3) et (3.3.4), on obtient

$$\underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) - \underline{V}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi}) = -\underline{V}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} + 0_p(1).$$

Le corollaire suivant établit les distributions asymptotiques de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi})$  et du logarithme du rapport de vraisemblance  $\Lambda_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  sous l'hypothèse alternative  $H_f^{(n)} (\underline{\varphi}^{(n)})$ .

### Corollaire 3.3.1

Si les hypothèses  $H1$  et  $H2$  sont satisfaites, alors nous avons :

- 1)  $\underline{\Delta}_f^{(n)} (\underline{\varphi}) \implies N \left( \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \right)$  sous  $H_f^{(n)} (\underline{\varphi}^{(n)})$ ,
- 2)  $\Lambda_f^{(n)} (\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) \implies N \left( \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}} (\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)} \right)$  sous  $H_f^{(n)} (\underline{\varphi}^{(n)})$ .

Ces résultats sont des conséquences de la propriété  $LAN$ .

## 3.4 Test Asymptotique Locale (le plus Stringent)

L'une des conséquences essentielles de la propriété  $LAN$  est que la suite des expériences locales :

$$\xi_f^{(n)} (\underline{\varphi}) = \left\{ P_{\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}}; \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{2S} / \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty, \underline{\tau}^{(n)} \rightarrow \underline{\tau} \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\},$$

converge faiblement vers l'expérience de position Gaussienne de dimension  $2S$ .

$$E_f = \{N(\Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}, \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \underline{\tau} \in \mathbb{R}^{2S}\}.$$

Ainsi, dans le cas des tests d'hypothèse, si un test  $\phi(\Delta)$  est exactement optimal au niveau  $\alpha$  dans  $E_f$ , alors, la suite de tests  $\phi(\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}))$  sera localement et asymptotiquement optimale au niveau asymptotique  $\alpha$  dans la suite d'expériences originales  $\xi_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ . On rappelle que :

- 1)  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \implies N(\underline{0}, \Gamma_f^{\Delta^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}),$
- 2)  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \implies N(\Gamma_f^{\Delta^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma_f^{\Delta^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}).$

Considérons la décomposition suivante de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left( \begin{array}{cc} \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)} & \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)} \end{array} \right)'$  où les vecteurs colonnes  $\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)}$  et  $\underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}$  de dimensions 2 et  $2(S-1)$ , respectivement, sont donnés par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)} &= \left( \begin{array}{cc} \sum_{s=1}^S \delta_{s,1}^{(n)} & \sum_{s=1}^S \delta_{s,2}^{(n)} \end{array} \right)', \\ \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)} &= \left( \delta_{1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)}, \dots, \delta_{S-1,1}^{(n)} - \delta_{S,1}^{(n)}, \delta_{S-1,2}^{(n)} - \delta_{S,2}^{(n)} \right)', \end{aligned}$$

et soit la partition en bloc correspondante de la matrice de variance :

$$\Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) = \begin{pmatrix} 2\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) & 0 \\ 0 & \Gamma_{22}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix},$$

où la matrice, de dimension  $2 \times 2$ ,  $\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) = I(f) \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma)$  et la matrice, de dimension  $2(S-1) \times 2(S-1)$ ,

$$\Gamma_{22}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) = \frac{I(f)}{S} \begin{pmatrix} 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \\ & 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) & \dots & 2\Gamma(\underline{\varphi}, \sigma) \end{pmatrix}.$$

Posons  $\eta = \Gamma^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \lambda \\ h \end{pmatrix}$ , alors le problème de tester l'hypothèse nulle  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  contre l'alternative locale  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$ , i.e., tester un modèle SETAR(2, 1, 1) à temps-invariant,

donné par (3.2.1), contre, un modèle *SETAR* (2, 1, 1) localement *S*–périodique, donné par (3.2.2), revient, tout simplement, au problème de test lié à l'expérience de position Gaussienne. Plus précisément : tester l'hypothèse nulle

$$H_{0,f} : N(\eta_0, \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \left( \eta_0 = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right),$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_{1,f} : N(\eta, \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)), \quad \left( \eta = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix}, \underline{h} \neq \underline{0} \right).$$

La proposition suivante établit le test localement asymptotiquement optimal pour tester  $H_{0,f}$  contre  $H_{1,f}$ .

**Proposition 3.4.1(Bentarzi et Merzougui (2009a))**

Sous les conditions *H1* et *H2*, le test qui rejette l'hypothèse nulle  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  si :

$$\widehat{Q}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) = \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)'}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \left( \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \right)^{-1} \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) > \chi_{2(S-1), 1-\alpha}^2,$$

*i)* est de niveau asymptotique  $\alpha$  (sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ ),

*ii)* est de puissance asymptotique :

$$1 - \mathcal{F}\left(\chi_{1-\alpha}^2; 2(S-1), \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) \underline{h}\right), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\mathcal{I}}),$$

où  $\mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; r, \nu)$  désigne la fonction de répartition de la loi khi deux non centré à  $r$  degré de liberté et de paramètre de non centralité  $\nu$ ,

*iii)* est un test localement asymptotiquement "most stringent" contre  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\mathcal{I}})$ .

**Preuve :**

A partir de la seconde partie de la *Proposition* 3.3.2 et la première partie du *Corollaire* 3.3.1, nous avons, respectivement,  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \xrightarrow{L} N_{2S}N\left(0, \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)\right)$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \xrightarrow{L} N\left(\mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \underline{\mathcal{I}}^{(n)}, \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)\right)$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ .

Ainsi il est facile de vérifier que la forme quadratique

$$Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\varphi}) \left( \mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma)^{-1} - \Omega \left( \Omega' \mathbf{\Gamma}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\varphi}, \sigma) \Omega \right)^{-1} \Omega' \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}),$$

où  $\Omega = \begin{pmatrix} I_{2 \times 2} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$ , suit asymptotiquement la distribution khi-deux centrale avec  $2(S-1)$  degrés de liberté,  $\chi^2(2(S-1))$ , et la loi khi-deux non centrale avec  $2(S-1)$  degrés de liberté et de paramètre de non centralité  $\underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta} \underline{h}$ ,  $\chi^{2'}(2(S-1); \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta} \underline{h})$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement. En tenant compte de la décomposition de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left( \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'}, \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$  et la décomposition correspondante de  $\mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi})$ , on peut réécrire la dernière forme quadratique dans la forme

$$\begin{aligned} Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\varphi}) \left( \left( \mathbf{\Gamma}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} - \begin{pmatrix} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}), \\ &= \left( \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)' \\ &\quad \left\{ I - \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \right\} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}). \end{aligned}$$

La distribution de la forme quadratique  $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  est obtenue directement à cause du fait que le vecteur colonne  $\left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}) \right)^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  est asymptotiquement normalement distribué de moyenne 0 et de matrice de variance  $I$  et que la matrice

$$I - \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2} \begin{pmatrix} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left( \mathbf{\Gamma}_{11}^{\Delta}(\underline{\varphi}, \sigma) \right)^{1/2}$$
 est idempotente. En effet, la dis-

tribution asymptotique de  $Q_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  est alors, comme c'est bien connu, une  $\chi^2(2(S-1))$  et  $\chi^{2'}(2(S-1); \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\underline{\varphi}^{(n)}) \underline{h})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement. Bien sur, ces résultats sont obtenus en supposant que les paramètres  $\underline{\varphi}$  sont connus. Néanmoins, on montre qu'ils restent vrais quand ces paramètres sont inconnus. En effet, soit  $\underline{\tau}^{(n)} = \left( \underline{\nu}^{(n)} \right)^{-1} \left( \widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi} \right)$  pour un estimateur  $\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}$  quelconque  $\underline{\nu}^{(n)}$ -convergent du paramètre inconnu  $\underline{\Phi}$  et en le remplaçant dans l'expression de la linéarité asymptotique donnée par *ii*) de la *Proposition 3.3.3*,

on obtient

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma) (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi}) + 0_p(1),$$

par conséquent nous avons

$$(\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1/2} \left( \underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) = (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} (\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)} - \underline{\Phi}) + 0_p(1),$$

en multipliant le coté gauche par la matrice  $I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma))^{1/2}$

et en tenant compte de la continuité de  $\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\varphi}, \sigma)$ , on obtient, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  par conséquent sous  $H_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)})$

$$\left\{ I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{1/2} \right\} \times \\ (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}))^{-1/2} \left( \underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) = 0_p(1).$$

Qui mène à  $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)}) = Q_f^{(n)}(\underline{\varphi}) + 0_p(1)$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  par conséquent sous  $H_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)})$ .

Ainsi le test statistique  $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)})$  suit la  $\chi^2(2(S-1))$  centrale et la  $\chi^2(2(S-1); \underline{h}'\mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\varphi}^{(n)})\underline{h})$  non centrale sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\widehat{\underline{\varphi}}^{(n)})$ , respectivement. Par conséquent, la preuve de *ii*) suit immédiatement.

HOUNA

### 3.5 Test Adaptatif

Le test décrit dans la proposition précédente est valide et optimal quand la densité des innovations  $f$ , qui intervient dans la statistique du test à travers la fonction  $\phi_f(\cdot) = -\frac{\dot{f}_\sigma(\cdot)}{f_\sigma(\cdot)}$ , est spécifiée. Cependant, en pratique cette densité est fréquemment inconnue, par conséquent, elle est considérée comme un paramètre de nuisance. Ainsi, dans cette section, on considère le modèle semi-paramétrique dont le vecteur des paramètres est  $(\underline{\varphi}, f)$  où  $f$  est le paramètre de nuisance qui est supposé appartenir à la classe des densités symétriques,  $\mathcal{F}^+$  d'où on ajoute l'hypothèse suivante.

Hypothèse (H3). La fonction de densité d'innovation  $f$  est symétrique avec des moments d'ordres quatre finis.

Brièvement, un test est dit adaptatif s'il a, quand  $f$  est inconnue, la même puissance asymptotique que le test optimal dans le modèle où cette densité d'innovation est spécifiée. En suivant les étapes de Kreiss(1987), lorsqu'il a appliqué la méthode de la fonction du noyau, l'estimation de la densité d'innovation  $f$  est établit. Pour atteindre cette tache on a besoin des notations et définitions suivantes

$$(i) \quad g(x; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), x \in \mathbb{R},$$

$$(ii) \quad f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y; \eta) f(y) dy,$$

$$(iii) \quad \hat{f}_{\eta, \tau}(x, \underline{\varphi}) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{\tau_0=0 \\ \tau_0 \neq \tau}}^{m-1} \{g(x+z_{s, \tau_0}, \eta) + g(x-z_{s, \tau_0}, \eta)\}; \tau = 0, \dots, m-1,$$

et soit  $\hat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\varphi})$ , pour un  $\underline{\varphi}$  donné, l'estimateur de  $\phi_f(\cdot)$  donné par

$$\hat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\varphi}) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\varphi})}{\hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\varphi})} & \text{si } \begin{cases} \hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\varphi}) \geq d_n, |x| \leq g_n, \\ |\hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\varphi})| \leq c_n \hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\varphi}) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0$ . En remplaçant, dans l'expression de  $\delta_s^{(n)}, \phi_f(\cdot)$  par  $\hat{q}_{n,\tau}(x, \underline{\varphi})$ , on obtient

$$\tilde{\delta}_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n,\tau}(x, \underline{\varphi}) X(s-1+d\tau), \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

**Lemme 3.5.1**

Soit  $(\bar{\varphi}_n)$  une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\varphi}$  et soit  $\tilde{\Delta}_f^{(n)}(\theta) = K' \tilde{\delta}^{(n)}$ .

Alors, nous avons, sous les hypothèses (H1) – (H5) :

$$\tilde{\Delta}_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\bar{\varphi}_n) = o_p(1),$$

pour  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n)c_n \rightarrow 0, g_n\eta(n)^{-4}/n \rightarrow 0$  et  $n\eta(n)^9$  reste borné.

**Lemme 3.5.2**

$$\hat{I}_n(\tilde{\varphi}_n) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n,\tau}^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\tilde{\varphi}_n), \tilde{\varphi}_n \right) \right)$$

est un estimateur consistant de l'information de Fisher  $I(f_1)$ , i.e.,

$$\hat{I}_n(\tilde{\varphi}_n) = I(f_1) + o_p(1).$$

La preuve est similaire à celle de Kreiss (1987).

La proposition suivante établit le test adaptatif du modèle SETAR(2, 1, 1) classique contre un autre périodique.

**Proposition 3.5.1(Bentarzi et Merzougui (2009a))**

Sous les hypothèses (H1) – (H5), nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ , la statistique du test

$$\tilde{Q}_f^{(n)}(\hat{\varphi}^{(n)}) = \tilde{\Delta}_{II,f}^{(n)'}(\hat{\varphi}^{(n)}) \left( \hat{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\hat{\varphi}^{(n)}) \right)^{-1} \tilde{\Delta}_{II,f}^{(n)}(\hat{\varphi}^{(n)}) > \chi_{2(S-1), 1-\alpha}^2,$$

est telle que :

i) le niveau asymptotique est  $\alpha$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ ,

ii) est un test adaptatif locale de  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\Phi} + \nu^{(n)}\underline{\tau})$ , i.e., pour tester  $\underline{h} = \underline{0}$

contre  $\underline{h} \neq \underline{0}$ , avec un niveau asymptotique  $\alpha$  et  $f \in F^+$ ,

iii) La puissance asymptotique de ce test est la même que celle obtenue dans le cas paramétrique.

**Preuve :**

Il découle des deux Lemmes, 5.1 et 5.2, que la statistique donnée par la *Proposition* 4.1 est équivalente, en probabilité, à celle donnée par la *Proposition* 5.1.

### 3.6 Résultats numériques

La performance du test adaptatif construit est montrée par simulation. Premièrement, trois processus générateur de données  $SETAR(2; 1, 1)$  deux-périodiques,  $M1, M2$  et  $M3$ , sont utilisés pour simuler les séries temporelles de taille petite, modéré et relativement grande ( $n = 100, 150, 200, 300$  et  $400$ ). Les valeurs des paramètres sont choisies telle que les modèles sous jacent sont périodiquement stationnaires. Où la condition de stationnarité périodique appliquée ici est la condition suffisante :  $\varphi_{s,1} < 1, \varphi_{s,2} < 1$  et  $\varphi_{s,1} \varphi_{s,2} < 1$ ,  $s = 1, \dots, S$ . Néanmoins, les valeurs des paramètres du second modèle sont choisies pour être dans le voisinage des bords de la condition de stationnarité périodique et ceci pour observer le comportement du test dans une telle situation. En plus, pour étudier la puissance empirique du test en détectant la périodicité en termes de déviations aux hypothèses nulles, le vecteur des valeurs  $\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{h}_1^{(n)}$  ( $= -\frac{1}{\sqrt{n}}\underline{h}_2^{(n)}$ ) dans les modèles  $M1, M2$  et  $M3$  sont, respectivement :  $(0.3, 0.3)'$ ,  $(-0.4, -0.3)'$  et  $(-0.1, -0.1)'$ . Deuxièmement, le modèle  $M4$  ( $SETAR$  non-périodique) est utilisé avec le but de calculer les niveaux empiriques du test obtenu. Pour chaque processus générateur de donnée, on considère 1000 répétitions Monte Carlo et on reporte les fréquences des cas où la périodicité est correctement, pour  $M1, M2$  et  $M3$  et de façon erroné pour  $M4$ , identifiée. Les vrais valeurs des paramètres du troisième modèle sont sélectionnées pour étudier la sensibilité du test dans le cas de faible présence de périodicité, i.e., les paramètres des deux saisons ne sont pas très distincts. Les processus générateur de données périodiques et classique  $SETAR(2; 1, 1)$  et leurs trajectoires sont données comme suit :

Modèle.  $M1$  :

$$\begin{cases} X_{2\tau+1} = -0.2X_{2\tau}^- + 0.9X_{2\tau}^+ + \varepsilon_{2\tau+1}, \\ X_{2\tau+2} = -0.8X_{2\tau+1}^- + 0.3X_{2\tau+1}^+ + \varepsilon_{2\tau+2}. \end{cases}$$

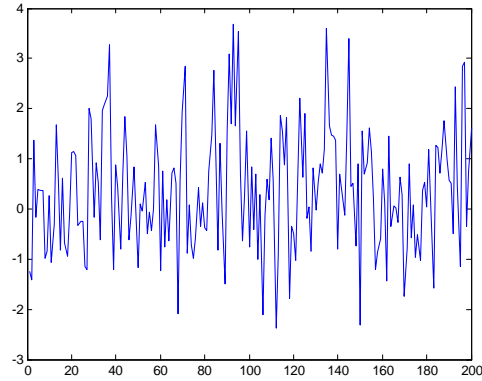


Figure 1. Trajectoire Simulée générée à partir de  $M1$

Modèle.  $M2$  :

$$\begin{cases} X_{2\tau+1} = -1.2X_{2\tau}^- - 0.8X_{2\tau}^+ + \varepsilon_{2\tau+1}, \\ X_{2\tau+2} = -0.4X_{2\tau+1}^- - 0.2X_{2\tau+1}^+ + \varepsilon_{2\tau+2}. \end{cases}$$

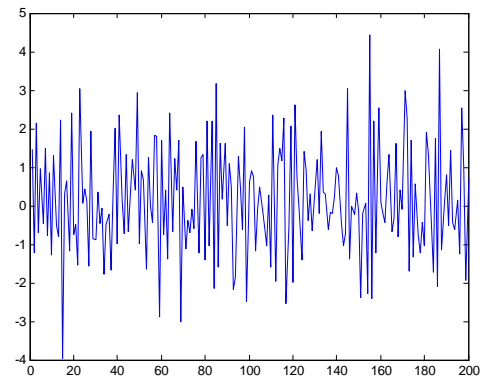
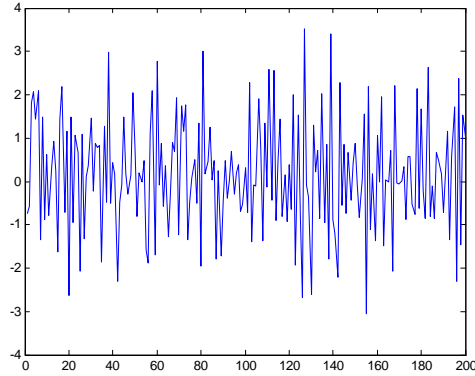


Figure 2. Trajectoire Simulée générée à partir de  $M2$

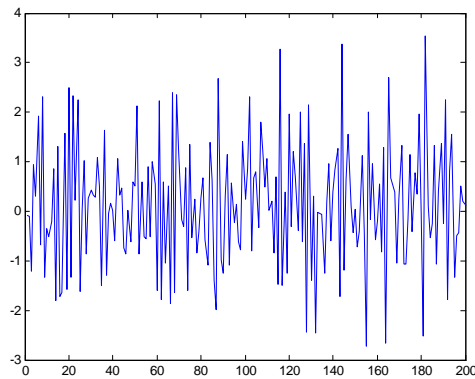
Modèle.  $M3$  :

$$\begin{cases} X_{2\tau+1} = -0.9X_{2\tau}^- - 0.5X_{2\tau}^+ + \varepsilon_{2\tau+1}, \\ X_{2\tau+2} = -0.7X_{2\tau+1}^- - 0.3X_{2\tau+1}^+ + \varepsilon_{2\tau+2}. \end{cases}$$

Figure 3. Trajectoire Simulée générée à partir de  $M3$ 

Modèle.  $M4$  :

$$X_t = -0.8X_t^- - 0.4X_t^+ + \varepsilon_t$$

Figure 4. Trajectoire Simulée générée à partir de  $M4$ 

Les densités de probabilité considérées des processus des innovations sont la loi normale standard et la double exponentielle :

$$f_N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_{De}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|).$$

Table 1 (resp. Table 2) montre les puissances et niveaux des tests paramétriques et adaptatifs

$\phi$  et  $\tilde{\phi}$ , respectivement, correspondant à  $f_N(x)$  et  $f_{De}(x)$ , pour le niveau 5% (resp. 10%).

$n$	100		150		200		300		400	
	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$
$M1 f_N$	.8950	.8540	.9750	.9530	.9880	.9870	.9970	.9960	.9980	.9980
$f_{De}$	.8790	.8810	.9520	.9600	.9770	.9880	.9880	.9980	.9940	1
$M2 f_N$	.9500	.9360	.9910	.9880	.9990	.9970	1	1	1	1
$f_{De}$	.9560	.9590	.9940	.9970	.9970	1	1	1	1	1
$M3 f_N$	.3510	.3180	.3860	.3390	.4620	.4310	.5540	.5230	.6030	.5780
$f_{De}$	.3650	.3910	.3720	.4470	.4130	.5130	.5580	.6690	.6340	.7410
$M4 f_N$	.0550	.0460	.0530	.0600	.0430	.0450	.0520	.0470	.0570	.0570
$f_{De}$	.0510	.0580	.0540	.0460	.0550	.0590	.0520	.0560	.0510	.0450

Table 1

$n$	100		150		200		300		400	
	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$	$\phi$	$\tilde{\phi}$
$M1 f_N$	.9460	.9350	.9830	.9760	.9960	.9940	1	1	1	1
$f_{De}$	.9090	.9110	.9710	.9800	.9930	.9930	.9980	1	1	1
$M2 f_N$	.9750	.9610	.9960	.9920	.9990	.9990	1	1	1	1
$f_{De}$	.9690	.9800	.9960	.9980	1	1	1	1	1	1
$M3 f_N$	.4580	.4220	.5100	.4670	.5570	.5310	.6360	.6220	.7490	.7280
$f_{De}$	.4550	.5180	.5030	.6010	.6100	.6750	.6420	.7390	.7270	.8150
$M4 f_N$	.1100	.1070	.1110	.1170	.1030	.1070	.1090	.1140	.1050	.0910
$f_{De}$	.0890	.1030	.0830	.0830	.1060	.0960	.0870	.0950	.1140	.1060

Table 2

Les deux tables montrent, clairement, d'un coté, que le test adaptatif est, sous la distribution double exponentielle, plus puissant que le test paramétrique Gaussien, pour les trois modèles périodiques, et d'un autre coté, que la propriété de consistance désirée est rencontrée. Aussi, elles montrent que ces tests sont capables de détecter la périodicité, avec de grandes puissances, même si le modèle est presque non périodique comme dans le modèle  $M3$ . En conclusion, ces résultats indiquent que le test adaptatif montre, pour les densités symétriques des innovations, une bonne performance et qu'il est recommandé de l'utiliser, en pratique, à la place du test paramétrique Gaussien pour détecter la périodicité dans les modèles à seuils. Les résultats pour le modèle  $M4$  montrent que les niveaux empiriques sont similaires, acceptable et très proches des niveaux correspondants 5% et 10%.

Dans ce travail les paramètres de seuils  $c_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , sont supposés être connus. Cependant, dans la pratique ils ne sont pas connus et doivent être estimés.

# Chapitre 4

## Estimation Adaptative des Modèles $SETAR(2, 1, 1)$ périodiques

### 4.1 Introduction

La procédure d'estimation adaptative retourne au premier travail de Stein (1956) dans lequel l'auteur a donné une condition pour qu'un modèle, de position symétrique, puisse être estimé de manière adaptative. Cette méthode d'estimation a été profondément explorée par Fabian et Hannan (1982). Ces auteurs ont établis, pour la famille des modèles qui satisfait la propriété de Normalité Asymptotique Locale ( $LAN$ ), les conditions sous lesquelles, on peut établir l'estimation adaptative. Bickel (1982) a proposé une méthode générale pour construire de tels estimateurs pour les modèles de régressions linéaires. L'estimation adaptative a été introduite, pour la première fois, dans l'analyse des séries temporelles par Kreiss (1987) dans lequel il construit un estimateur adaptatif pour un modèle  $ARMA$  ayant une densité d'innovation symétrique. Ce travail est devenu une référence et une méthodologie suivie pour la construction d'estimation adaptative dans l'analyse des séries temporelles. Brièvement, la méthode d'estimation adaptative est appliquée avec succès, par plusieurs auteurs, pour estimer les paramètres inconnus de différents modèles linéaires et non linéaires qui satisfont la propriété  $LAN$ . Parmi eux, on peut citer sans prétendre l'exhaustivité, Linton (1993) pour le modèle  $ARCH$ , Koul et Schick (1996, 1997) pour le modèle  $AR(1)$  avec des coefficients aléatoires, un  $SETAR(2, 1, 1)$  et pour un  $EXPAR(1)$ .

Motivé par le fait que plusieurs séries temporelles rencontrées dans différents domaines, en particulier en finance et en hydrologie, révèlent quelques caractéristiques ne pouvant être capturées par les modèles linéaires standard de séries temporelles, la modélisation théorique et pratique des séries temporelles non linéaires, a reçue, dans les années récentes, un intérêt considérable. En plus, il semble que la classe des modèles non linéaires, qui est la plus étudiée théoriquement et la plus employée pratiquement, est la classe particulière des modèles Autorégressifs à seuils ( $TAR$ ), et leur cas particulier appelé modèles Autorégressifs à seuils Self-Exciting ( $SETAR$ ). Ces modèles sont tous simplement des modèles linéaires par morceaux dans chacun des régimes différents. Les modèles Autorégressifs à seuils ont été introduit, pour la première fois, dans la littérature des séries temporelles, par le pionnier Tong (1978) et exploré par Tong et Lim (1980) et Tong (1983). Différentes propriétés de ces modèles, en particulier celles reliées aux concepts intéressants de stationnarité et d'ergodicité, ont été intensivement étudiés par Tong (1990), (pour plus de détails, voir par exemple Petrucci et Davies (1986), Moeanaddin et Tong (1988), Tsay (1989), Chan (1990) et Tsay (1998)).

D'un autre côté, Il est bien connu que plusieurs séries temporelles financières et environnementales, rencontrées en pratique, exhibent un caractère de périodicité dans leur structure d'autocovariance qui ne peut être capturé par les modèles de séries temporelles à paramètres invariant dans le temps. Les divers avantages et propriétés intéressantes satisfaites par le modèle à seuils ont motivé l'extension de ces modèles aux modèles autorégressifs à seuils périodiques pour capturer, en plus, le phénomène de périodicité. Le premier travail accompli, à notre connaissance, dans cette direction est celui de Lewis et Ray (2002), dans lequel, ils ont introduit un modèle autorégressif à seuils périodique avec l'estimation des paramètres en appliquant l'algorithme  $TSMARS$  pour la modélisation des données de la rivière Fraser en Bretagne.

Ce travail est consacré à établir l'estimation adaptative d'un modèle Autorégressifs à seuils périodique, généralisant le cas non périodique de Koul et Schick (1997), avec une densité des innovations symétrique non spécifiée. Le reste du chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on revoit brièvement les modèles autorégressifs à seuils périodiques et on donne les notations, définitions et conditions de régularités de bases de ces modèles, nécessaires pour les sections restantes. Dans la troisième section, on établit, en adaptant à

notre modèle autorégressif à seuils périodique les conditions de Swensen (1985), la propriété de Normalité Asymptotique Locale (*LAN*). En plus, la Quadratique Asymptotique Locale (*LAQ*) et la linéarité Asymptotique Locale de la suite centrale sont obtenues. Une estimation adaptative des paramètres inconnus du modèle autorégressif à seuils périodique est établie, pour le cas où la densité des innovations est supposée être connue, dans la quatrième section. D'un autre côté, la cinquième section, est consacrée à la construction, dans un contexte semi-paramétrique, de l'estimation adaptative quand cette densité des innovations est non spécifiée mais symétrique. Finalement, dans la sixième section, on présente quelques résultats de simulation.

## 4.2 Modèles et Hypothèses

### 4.2.1 Modèle Autorégressif à seuils Périodique

On rappelle qu'un processus du second ordre  $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle Autorégressif à seuils Self-Exciting Périodique  $PSETAR(2, 1, 1)$ , de période  $S$  ( $S \geq 2$ ), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$X_t = \varphi_{t,1} X_{t-1} I(X_{t-1} \leq c_t) + \varphi_{t,2} X_{t-1} I(X_{t-1} > c_t) + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.1)$$

où  $\{\varepsilon_t; t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et de variance finie  $\sigma_t^2$ , avec une densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement Gaussienne et où  $c_t$  sont les paramètres de seuils. Les paramètres Autorégressifs  $\varphi_{t,1}$  et  $\varphi_{t,2}$ , la variance des innovations  $\sigma_t^2$  et les paramètres de seuils  $c_t$  sont périodiques, dans le temps, de période  $S$ , i.e.,

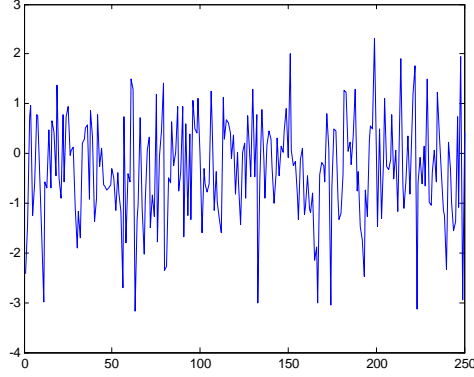
$$\begin{aligned} \varphi_{t+kS,1} &= \varphi_{t,1} \text{ et } \varphi_{t+kS,2} = \varphi_{t,2}, \quad \forall k, t \in \mathbb{Z}, \\ \sigma_{t+kS}^2 &= \sigma_t^2 \text{ et } c_{t+kS} = c_t, \quad \forall k, t \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Les paramètres  $c_s$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , sont, dans ce travail, supposés être connus, alors on peut, sans perte de généralité, les prendre égales à 0, d'où le modèle sera réécrit sous la forme suivante :

$$X_t = \varphi_{t,1} X_{t-1}^- + \varphi_{t,2} X_{t-1}^+ + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.2.2)$$

où  $X_t^- = X_t I(X_t \leq 0)$ , et  $X_t^+ = X_t I(X_t > 0)$ .

La Figure 4.2.1, montre la trajectoire simulée d'un processus Autorégressif à seuils Périodique, générée d'un SETAR(2, 1, 1) de période 2 avec  $\underline{\varphi}_1 = (0.5, -0.7)'$  et  $\underline{\varphi}_2 = (0.3, 0.25)'$  et où  $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 1)$ .



Notons  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  une suite des hypothèses nulles sous laquelle  $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle (4.2.2), où  $\underline{\varphi} = (\underline{\varphi}'_1; \underline{\varphi}'_2; \dots; \underline{\varphi}'_S)'$  avec  $\underline{\varphi}'_s = (\varphi_{s,1}, \varphi_{s,2})'$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$  la suite des hypothèses alternatives sous laquelle la suite  $\{X_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle Autorégressif à seuils périodique (4.2.2), où

$$\underline{\varphi}^{(n)} = \left( \underline{\varphi}_1^{(n)}; \underline{\varphi}_2^{(n)}; \dots; \underline{\varphi}_S^{(n)} \right)',$$

avec

$$\underline{\varphi}_s^{(n)} = \left( \varphi_{s,1} + \frac{h_{s,1}^{(n)}}{\sqrt{n}}, \varphi_{s,2} + \frac{h_{s,2}^{(n)}}{\sqrt{n}} \right)', \quad s = 1, \dots, S,$$

tel que  $\sup_n \left( h_{s,1}^{(n)2} + h_{s,2}^{(n)2} \right) < \infty$ ,  $s = 1, \dots, S$ . Les quantités  $h_{s,1}^{(n)}$  et  $h_{s,2}^{(n)}$ ,  $s = 1, \dots, S$ , peuvent être interpréter comme des perturbations locales des paramètres  $\varphi_{s,1}$  et  $\varphi_{s,2}$  respectivement.

Soit  $\underline{\mathcal{I}}^{(n)} = \left( \underline{\mathcal{I}}_1^{(n)}, \underline{\mathcal{I}}_2^{(n)}, \dots, \underline{\mathcal{I}}_S^{(n)} \right)'$  où  $\underline{\mathcal{I}}_s^{(n)} = \left( h_{s,1}^{(n)}, h_{s,2}^{(n)} \right)'$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , alors on peut avoir

$$\underline{\varphi}^{(n)} = \underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\mathcal{I}}^{(n)}, \quad \underline{\mathcal{I}}^{(n)} \in \mathbb{R}^{2S} \text{ tel que } \sup_n \underline{\mathcal{I}}^{(n)'} \underline{\mathcal{I}}^{(n)} < \infty.$$

## 4.2.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres autorégressifs  $\underline{\varphi}$  satisfont la condition de stationnarité périodique de (2.2). Une condition suffisante est donnée par  $\varphi_{s,1} < 1, \varphi_{s,2} < 1$  et  $\varphi_{s,1} \varphi_{s,2} < 1, s = 1, 2, \dots, S$ .

Hypothèse (H2). La densité des innovations  $f(\cdot)$  est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a)  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R}$  et elle est symétrique i.e.,  $\int xf(x)dx = 0$ , avec  $\sigma_t^2 = E(\varepsilon_t^2) < \infty$ .

(b)  $f(\cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$  : il existe une

fonction  $\dot{f}(\cdot)$  tel que, pour  $-\infty < a < b < \infty$ , nous avons  $f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(x) d\mu(x)$ ,

(c) L'information de Fisher  $I(f) = \int (\phi_f(x))^2 f(x) dx$  est finie, où  $\phi_f = -\frac{\dot{f}}{f}$ .

## 4.3 Normalité Asymptotique Locale

Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle autorégressif à seuils périodique  $PSETAR(2, 1, 1)$ , nous avons besoin des variables suivantes.

### 4.3.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Soit  $\underline{X}^{(n)} = (X_1^{(n)}, \dots, X_n^{(n)})$  une réalisation de taille finie  $n$  d'un processus autorégressif périodiquement corrélé  $\{X_t^{(n)}; t \in \mathbb{Z}\}$  satisfaisant le modèle autorégressif périodique causale (2.2) et notons par  $X_0^{(n)}$  la valeur initiale dont les densités sont  $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \underline{\sigma})$  et  $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\sigma})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement, où  $\underline{\sigma} = (\sigma_1, \dots, \sigma_S)'$ . En plus, on suppose que  $g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\sigma}) - g_0^{(n)}(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \underline{\sigma})$  converge en probabilité vers 0, quand  $\underline{\varphi}^{(n)} \rightarrow \underline{\varphi}$  avec  $n \rightarrow \infty$ . Supposons, pour simplifier les notations, que la taille de la série temporelle observée  $n$  est un multiple de  $S$ , i.e.,  $n = mS, m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $t = s + S\tau, s = 1, \dots, S$

et  $\tau = 0, 1, \dots, m-1$ . On note par  $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $Z_t^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , les résidus calculés sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , respectivement. Alors, nous avons

$$Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = X_{S\tau+s}^{(n)} - \varphi_{s,1} X_{S\tau+s-1}^{(n)-} - \varphi_{s,2} X_{S\tau+s-1}^{(n)+}, \quad s = 1, \dots, S, \tau = 0, \dots, m-1,$$

où il est clair que  $Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)$  coïncide avec  $\varepsilon_{S\tau+s}$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  et

$$Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s^{(n)}) = Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)-} - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)+}.$$

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance,  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right)$  pour  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)})$ , est alors donné, pour  $n = mS$ , par

$$\begin{aligned} \Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right) &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \frac{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s^{(n)})\right)}{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)} + \log \frac{g_0^{(n)}\left(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}^{(n)}, \underline{\sigma}\right)}{g_0^{(n)}\left(x_0^{(n)}; \underline{\varphi}, \underline{\sigma}\right)}, \\ &= \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)-} - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)+}\right) \\ &\quad - \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right) + 0_p(1), \end{aligned}$$

Soient les variables aléatoires :

$$\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \left( \frac{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)-} - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)+}\right)}{f_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)} \right)^{\frac{1}{2}} - 1, \\ s = 1, 2, \dots, S, \tau = 0, \dots, m-1,$$

et

$$\zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{2} \phi_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,1}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)-} - \frac{1}{\sqrt{n}} h_{s,2}^{(n)} X_{S\tau+s-1}^{(n)+} \right),$$

cette dernière expression peut être réécrite sous la forme suivante

$$\zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{2} \phi_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right) \gamma_{s,\tau}^{(n)} = \Delta_{s,\tau}^{(n)'}(\underline{\varphi}_s) \tau_s^{(n)}$$

où

$$\underline{X}_{s-1+S\tau} = (X_{S\tau+s-1}^-, X_{S\tau+s-1}^+)', \quad \gamma_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \tau_s^{(n)'} \underline{X}_{s-1+S\tau},$$

et  $\Delta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{\sigma_t} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}$ ,  $s = 1 \dots S$ ,

en plus soit

$$\begin{aligned} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) &= (\Delta_1^{(n)'(\underline{\varphi}_1)}, \dots, \Delta_S^{(n)'(\underline{\varphi}_S)}) \in \mathbb{R}^{2S}, \\ \Delta_s^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{\sigma_t} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) \underline{X}_{s-1+S\tau}, \quad s = 1, \dots, S, \\ \Delta_{s,1}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{\sigma_t} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) X_{s-1+S\tau}^-, \\ \Delta_{s,2}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{\sigma_t} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) X_{s-1+S\tau}^+. \end{aligned}$$

Notons  $\Gamma_s(\underline{\varphi})$  la matrice de variance-covariance de  $\underline{X}_{s-1+S\tau}$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$  :

$$\Gamma_s(\underline{\varphi}) = \begin{pmatrix} E(X_{s-1}^{-2}) & 0 \\ 0 & E(X_{s-1}^{+2}) \end{pmatrix}$$

et la matrice carrée bloc diagonal de dimension  $2S \times 2S$  :

$$\Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) = \begin{pmatrix} \frac{\Gamma_1(\underline{\varphi})}{\sigma_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\Gamma_2(\underline{\varphi})}{\sigma_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{\Gamma_S(\underline{\varphi})}{\sigma_S^2} \end{pmatrix}$$

Sous les notations précédentes, on peut formuler la proposition suivante qui donne les conditions de Swensen adaptées.

### 4.3.2 Les conditions de Swensen (1985)

**Proposition 4.3.1**(Conditions de Swensen Adaptées (1985), Bentarzi et Merzougui (2009b))

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) et (H2), satisfaites :

- (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 = 0,$
- (2)  $\sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty,$
- (3)  $\max_s \max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = 0_p(1),$
- (4)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}_s) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \tau'_n \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \tau_n = 0_p(1),$
- (5)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left[ \zeta_{s,\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}_s) I_{\left[ \left| \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right] = 0_p(1),$   
 $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par le passé du processus jusqu'au temps  $s-1+S\tau$ ,
- (6)  $E \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right) = 0_p(1),$

**Preuve.**

**Condition (1) :**

$$E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right)^2 = E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{n,S\tau+s} \right) - \right. \\ \left. f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) - \frac{1}{2} (-\gamma_{n,s+S\tau}) \frac{f'_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right)} \right)^2 \times f_{\sigma_s}^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right),$$

pour montrer que cette quantité converge vers 0, quand  $m \rightarrow \infty$ , il est suffisant de montrer que l'expression suivante converge, pour chaque  $s$  fixé, vers 0 :

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) - f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right) - \frac{1}{2} (-\gamma_{s,\tau}^{(n)}) \frac{f'_{\sigma_s} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right)}{f_{\sigma_s}^{\frac{1}{2}} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right)} \right)^2 \\ \times f_{\sigma_s}^{-1} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) \right).$$

En remplaçant  $f_{\sigma_s}$  par  $\frac{1}{\sigma_t} f_1 \left( \frac{x}{\sigma_t} \right)$ , alors pour un nombre réel positive quelconque  $K$ , nous

avons

$$\begin{aligned}
 E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)}}{\sigma_s} \right) - f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) - \frac{1}{2\sigma_s} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{f_1 \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)}{f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)} \right)^2 f_1^{-1} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right), \\
 = B_{1,s,m} + B_{2,s,m},
 \end{aligned}$$

où

$$B_{1,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{[|X_{s-1+S\tau}^-| < K \text{ et } |X_{s-1+S\tau}^+| < K]} \left( f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)}}{\sigma_s} \right) - f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) - \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{1}{\sigma_s} \frac{f_1 \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)}{f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)} \right)^2 \times f_1^{-1} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) \right\},$$

$$B_{2,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{[|X_{s-1+S\tau}^-| \geq K \text{ ou } |X_{s-1+S\tau}^+| \geq K]} \left( f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) - \gamma_{s,\tau}^{(n)}}{\sigma_s} \right) - f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) \right. \right.$$

et

$$\left. - \frac{1}{2} \left( -\gamma_{s,\tau}^{(n)} \right) \frac{1}{\sigma_s} \frac{f_1 \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)}{f_1^{\frac{1}{2}} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right)} \right)^2 \times f_1^{-1} \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) \left. \right\}.$$

Alors, afin de prouver que  $E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2$  converge vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ ,

il suffit de montrer que  $B_{1,s,m}$  et  $B_{2,s,m}$  converge vers 0, pour  $s$  fixé,  $s = 1, \dots, S$  et pour un nombre réel positive quelconque  $K$ . Par conséquent, le reste de la preuve s'ensuit directement, puisque les processus  $\{X_{s-1+S\tau}, \tau \in \mathbb{Z}\}$  sont stationnaires, à partir du résultat de Swensen (1985).

**Condition (2) :** Il suffit de montrer que, pour  $s$  fixé,  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) < \infty$ . En

utilisant la définition de  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi})$ , on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé,}$$

Il est facile de montrer, pour  $s$  fixé, que la somme  $\sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2$  est uniformément bornée (cf.,

Swensen 1985). Donc, nous avons  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right)^2 < \infty$ ,

la seconde condition est alors vérifié.

**Condition (3)**

On montre que  $\max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right| = \max_{\tau} \left| \frac{1}{2} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}_s^{(n)'} X(S\tau + s - 1) \right) \right| = 0_p(1)$ ,

pour  $s$  quelconque. Ainsi, on doit prouver que

$$\begin{aligned} & \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \\ & \text{et} \\ & \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,2}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^+ \right| = 0_p(1), \quad \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\varphi}) \end{aligned}$$

Par conséquent, nous avons

$$\begin{aligned} & p \left( \max_{\tau} \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right) \\ & \leq \sum_{\tau=0}^{m-1} p \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right), \\ & \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ \frac{1}{n} \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right)^2 I_{\left[ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \varepsilon \right]} \right\}, \\ & \leq \frac{1}{S\varepsilon^2} E \left( \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right)^2 I_{\left[ \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \left( \lambda_1^{(n)} + h_{s,1}^{(n)} \right) X_{S\tau+s-1}^- \right| > \sqrt{n}\varepsilon \right]} \right), \end{aligned}$$

ainsi le coté droit converge vers 0, quand  $n \rightarrow \infty$ . De la même manière, on peut montrer la seconde expression.

**Condition (4)** :  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \mathbf{Z}_{n,S\tau+s}^2(\underline{\varphi}_s) \right) - \frac{1}{4S} I(f_1) \tau^{(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \tau^{(n)} = 0_p(1)$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

Nous avons

$$\begin{aligned} & \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \mathbf{Z}_{n,S\tau+s}^2(\underline{\varphi}_s) \right) = \frac{1}{4n} \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{\sigma_s}^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) \underline{\tau}_s^{(n)'} X_{s-1+S\tau} X'_{s-1+S\tau} \underline{\tau}_s^{(n)} \\ & = \frac{1}{4S} \sum_{s=1}^S \tau_s^{(n)'} \left[ \frac{1}{m\sigma_s^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi_{f_1}^2 \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)}{\sigma_s} \right) X_{s-1+S\tau} X'_{s-1+S\tau} \right] \tau_s^{(n)} \end{aligned}$$

où  $E(\phi_f^2) = I(f_{\sigma})$  avec  $I(f_{\sigma_s}) = \frac{1}{\sigma_s^2} I(f_1)$ . en utilisant le fait que le processus est ergodique,

nous avons

$$\frac{1}{\sigma_s^2} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \phi^2 \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}) \right) X(S\tau + s - 1) X(S\tau + s - 1)' \rightarrow \frac{E(\phi_f^2)}{\sigma_s^2} E(X(s-1)X(s-1)')$$

Soit

$$\Gamma_s(\underline{\varphi}) = E(X(s-1)X(s-1)') = \begin{pmatrix} E(X_{s-1}^{-2}) & E(X_{s-1}^- X_{s-1}^+) \\ E(X_{s-1}^- X_{s-1}^+) & E(X_{s-1}^{+2}) \end{pmatrix},$$

puisque  $E(X_{s-1}^- X_{s-1}^+) = 0$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ . Ainsi, nous avons

$$\Gamma_s(\underline{\varphi}) = \begin{pmatrix} E(X_{s-1}^{-2}) & 0 \\ 0 & E(X_{s-1}^{+2}) \end{pmatrix}.$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\varphi}) \right) &= \frac{I(f_1)}{4S} \sum_{s=1}^S \tau_s^{(n)'} \left( \frac{1}{\sigma_s^2} \Gamma_s(\underline{\varphi}) \right) \tau_s^{(n)} + 0_p(1), \\ &= \frac{I(f_1)}{4S} \tau^{(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \tau^{(n)} + 0_p(1). \end{aligned}$$

**Condition (6)** : Puisque  $Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)$  est indépendant des variables  $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$ -mesurables, et

puisque  $E\left[\phi_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)\right] = 0$ , alors

$$E\left(\zeta_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}\right) = \frac{1}{2} E\left[\phi_{\sigma_s}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s)\right)\right] \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \tau_s^{(n)'} X(S\tau + s - 1)\right) = 0,$$

La preuve de la condition (5) est similaire à celle de Swensen (1985).

### 4.3.3 Normalité Asymptotique Locale

#### Proposition 4.3.2 (Bentarzi et Merzougui (2009b))

Sous les conditions de régularités (H1) et (H2) et sous  $H_f^{(n)}(\underline{\varphi})$ , nous avons, pour  $n \rightarrow \infty$  :

- 1)  $\Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\varphi} + \frac{1}{\sqrt{n}} \tau^{(n)}\right) = \tau^{(n)'} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{I(f_1)}{2S} \tau^{(n)'} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \tau^{(n)} + 0_p(1)$ ,
- 2)  $L(\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) / P_{n,\varphi}) \implies N\left(0, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)$ .

A partir de la proposition précédente on peut obtenir les résultats suivants immédiatement.

**Remarque 4.3.1**

Sous la propriété LAN  $\left(\underline{\varphi}, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}), \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})\right)$ , nous avons :

i)  $P_{n, \varphi_n}$  et  $P_{n, \varphi}$  sont contiguës.

ii)  $\Delta^{(n)}(\underline{\varphi})$  satisfait la Linéarité Asymptotique Locale :

$$\Delta^{(n)}(\underline{\varphi}^{(n)}) - \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) = -\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}) \tau^{(n)} + o_p(1).$$

## 4.4 Existence et construction d'estimateurs LAM

Le critère d'efficacité adopté est la Minimaxité Asymptotique Locale (LAM) (Fabian et Hannan (1982)). Soit  $l$  une fonction de perte de  $\mathbb{R}^{2S}$  à  $\mathbb{R}^+$  telle que  $l(x) = l(-x), \forall x \in \mathbb{R}^{2S}$  où l'ensemble  $\{l \leq u\}$  est convexe pour chaque  $u > 0$ .

**Théorème 4.4.1** (Fabian et Hannan (1982))

Soit un modèle  $PSETAR(2, 1, 1)$   $S$ -périodique satisfaisant les conditions  $H1$  et  $H2$  et soit  $\{Z_n\}$  une suite d'estimateurs quelconques de  $\underline{\varphi}$ . Alors :

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_{Z_n} \sup_{\|\sqrt{n}(\underline{\varphi} - \underline{\varphi}_0)\| \leq K} E_{n, \underline{\varphi}} l\{\sqrt{n}(Z_n - \underline{\varphi})\} \geq \int l(x) dN\left(0, \left(\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)^{-1}\right). \quad (4.4.1)$$

On rappelle que la suite d'estimateurs qui atteint la borne inférieure (4.4.1) est dite LAM  $(\underline{\varphi})$ , et qu'une condition suffisante pour qu'un estimateur soit LAM est, donnée par Fabian et Hannan, qu'il soit  $\underline{\varphi}$ -régulier.

**Définition 4.4.1**

La suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  est dite  $\underline{\varphi}$ -régulière, sous LAN  $\left(\underline{\varphi}, \frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma}), \Delta^{(n)}(\underline{\varphi})\right)$ , si

$$\sqrt{n}(Z_n - \underline{\varphi}) - \left(\frac{I(f_1)}{S} \Gamma(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right)^{-1} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) = o_p(1).$$

Puisque les estimateurs réguliers dépendent du paramètre inconnu  $\underline{\varphi}$ , alors on suppose l'exis-

tence d'estimateur préliminaire  $\sqrt{n}$ -consistent.

**Proposition 4.4.1 (Bentarzi et Merzougui (2009b))**

Si  $\{\bar{\varphi}_n\} \in \Theta$  est une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\varphi} \in \Theta$ . Alors l'estimateur suivant  $\hat{\underline{\varphi}}_n$  est régulier :

$$\hat{\underline{\varphi}}_n = \bar{\varphi}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S \hat{\Gamma}_n(\bar{\varphi}_n)^{-1}}{I(f_1)} \Delta^{(n)}(\bar{\varphi}_n),$$

où

$$\hat{\Gamma}_n(\bar{\varphi}_n) = \begin{pmatrix} \frac{\hat{\Gamma}_{n,1}(\bar{\varphi}_n)}{\hat{\sigma}_1^2} & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \frac{\hat{\Gamma}_{n,2}(\bar{\varphi}_n)}{\hat{\sigma}_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\hat{\Gamma}_{n,s}(\bar{\varphi}_n)}{\hat{\sigma}_s^2} \end{pmatrix},$$

tel que  $\hat{\Gamma}_{n,s}(\bar{\varphi}_n) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} X(S\tau + s - 1) X(S\tau + s - 1)'$  où  $\hat{\Gamma}_n$  est un estimateur consistant de  $\Gamma(\underline{\varphi})$ .

## 4.5 Construction d'estimateurs adaptatifs

L'estimateur donné dans la proposition précédente est valide et optimale quand la densité  $f$  est spécifiée. Cependant, dans la pratique,  $f$  reste inconnu. Dans cette section, on considère le modèle semi-paramétrique dont le paramètre est  $(\underline{\varphi}, f)$  où  $\underline{\varphi}$  est le paramètre d'intérêt et  $f$  est le paramètre de nuisance appartenant à la classe des fonctions de densités symétriques  $F^+$ . Un estimateur est dit adaptatif s'il a pour une fonction de densité inconnue  $f$  la même efficacité qu'un estimateur optimal dans le modèle où  $f$  est supposée connue. L'exigence d'adaptativité donnée par Stein (1956) est satisfaite dès que la densité  $f$  est symétrique avec des moments d'ordres quatre finis, d'où l'hypothèse (H.2), cette densité intervient dans l'estimation à travers la fonction score  $\phi$ . On peut estimer  $f$  par la méthode du noyau, et contrairement à Koul et Schick (1997), on envisage, dans ce travail, les estimateurs proposés par Kreiss (1987) ensuite on définit l'estimateur adaptatif similaire à  $\hat{\underline{\varphi}}_n$ . Pour cette fin, les

notations suivantes sont introduites :

$$i) \quad g(x; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), \quad x \in \mathbb{R},$$

$$ii) \quad f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y; \eta) f(y) dy,$$

$$iii) \quad \hat{f}_{\eta, \tau}(x; \varphi) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{\tau_0=0 \\ \tau_0 \neq \tau}}^{m-1} \{g(x+z_{s, \tau_0}, \eta) + g(x-z_{s, \tau_0}, \eta)\}; \tau = 0, \dots, m-1,$$

Soit  $\hat{q}_{n, \tau}(x, \varphi)$  l'estimateur de  $\phi$

$$\hat{q}_{n, \tau}(x, \varphi) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \varphi)}{\hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \varphi)}, & \text{si } \begin{cases} \hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \varphi) \geq d_n, |x| \leq g_n \\ \left| \hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \varphi) \right| \leq c_n \hat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \varphi) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

avec  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0$ . Soit  $\tilde{\Delta}_s(\underline{\varphi}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\varphi}_s) X_{s-1+S\tau}$  et

l'estimateur  $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\varphi})$  de  $\Delta^{(n)}(\underline{\varphi})$  par  $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\varphi}) = \left(\tilde{\Delta}_1(\underline{\varphi}_1), \tilde{\Delta}_2(\underline{\varphi}_2), \dots, \tilde{\Delta}_S(\underline{\varphi}_S)\right)'$ ,

et l'estimateur sans biais  $\hat{I}_n(\underline{\varphi}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n, \tau}^2\left(Z_{s, \tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s), \underline{\varphi}_s\right)\right)$  de  $I(f_1)$ .

#### Lemme 4.5.1

Soit  $(\bar{\varphi}_n)$  une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\varphi}$ . Alors, sous les hypothèses *H1* et *H2*, nous avons :  $\tilde{\Delta}^{(n)}(\bar{\varphi}_n) - \Delta^{(n)}(\bar{\varphi}_n) = 0_p(1)$ ,

si  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n) c_n \rightarrow 0, g_n \eta(n)^{-4} / n \rightarrow 0$  et  $n\eta(n)^9$  reste borné.

**Lemme 4.5.2** (Estimation de l'information de Fisher).

$$\hat{I}_n(\underline{\varphi}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left(\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \hat{q}_{n, \tau}^2\left(Z_{s, \tau}^{(n)}(\underline{\varphi}_s), \underline{\varphi}_s\right)\right),$$

est un estimateur consistant de  $I(f_1)$ , *i.e.*,  $\hat{I}_n(\underline{\varphi}) = I(f_1) + 0_p(1)$ .

La proposition suivante établit les estimateurs adaptatifs pour les paramètres des modèles SETAR (2, 1, 1) périodiques.

**Proposition 4.5.1 (Bentarzi et Merzougui (2009b))**

Sous les hypothèses  $H1$  et  $H2$ , l'estimateur  $\tilde{\varphi}_n$  défini par :

$$\tilde{\varphi}_n = \bar{\varphi}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S \hat{\Gamma}_n(\bar{\varphi}_n)^{-1}}{\tilde{I}_n} \tilde{\Delta}^{(n)}(\bar{\varphi}_n),$$

est un estimateur *LAM*, par conséquent, il est adaptatif et on obtient

$$L\left(\sqrt{n}(\tilde{\varphi}_n - \underline{\varphi})/P_{n,\underline{\varphi}}\right) \Rightarrow N\left(0, \frac{S}{I(f_1)}\Gamma^{-1}(\underline{\varphi}, \underline{\sigma})\right).$$

**Preuve.** La preuve de cette proposition, qui repose sur les deux lemmes précédents, est similaire à celle de Kreiss (1987).

## 4.6 Résultats de simulation

La performance de l'estimation adaptative construite est montrée par simulation. Deux processus périodiques générateurs sont utilisés pour simuler des séries temporelles de tailles modérés ( $n = 200, 280$ ). Les processus périodiques générateurs de données *PSETAR*(2, 1, 1) sont donnés par :

$$X_t = \varphi_{t,1} X_{t-1}^- + \varphi_{t,2} X_{t-1}^+ + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad t \in \mathbb{Z},$$

*M1.* 4 – *PSETAR*(2, 1, 1) avec  $\underline{\varphi} = (0.9, -0.5; -0.3, 0.8; -0.7, 0.2; 0.4, -0.6)$  et

*M2.* 7 – *PSETAR*(2, 1, 1) avec  $\underline{\varphi} = (-1.1, 0.4; -0.3, 0.5; 0.2, -0.6; 0.7, 0.1; -0.8, -0.4)$ ;

Pour chaque processus générateur de données, on considère 1000 répétitions Monte Carlo et on reporte les estimations adaptatives et leurs écarts types tout en les comparant à celles obtenues par le *LSE* (Voir annexe A). Les programmes de simulations sont écrits en Matlab 7.0. Pour les densités des innovations, on utilise

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right), \quad f_2(x) = \frac{0.05}{\sqrt{50\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{50}\right) + \frac{0.95}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_3(x) = \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x-3)^2}{2}\right) + \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x-3)^2}{2}\right), \quad f_4(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \exp(-\sqrt{2}|x|).$$

Les résultats d'estimation pour les deux séries temporelles périodiques simulées sont reportés dans les Table 1 et Table 2, respectivement.

Table 1

$f/\underline{\phi}$		$\phi_{1,1}$	$\phi_{1,2}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{2,2}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$
$f_1$	<i>LSE Mean</i>	.9007	-.4929	-.2971	.8078	-.6985	.2047	.3884	-.6102
	<i>S. D</i>	.1409	.2977	.1101	.3748	.2950	.1463	.2725	.1614
	<i>AE Mean</i>	.9003	-.4901	-.2966	.8066	-.6997	.2068	.3944	-.6111
	<i>S. D</i>	.1482	.3112	.1124	.3885	.3072	.1529	.2785	.1683
$f_2$	<i>LSE Mean</i>	.8961	-.4877	-.3072	.7901	-.7238	.2008	.4008	-.5910
	<i>S. D</i>	.1625	.3886	.1206	.3627	.3633	.1719	.3099	.1755
	<i>AE Mean</i>	.8978	-.4813	-.3032	.7862	-.7142	.2019	.4070	-.5941
	<i>S. D</i>	.1326	.3361	.0991	.3245	.3089	.1404	.2602	.1458
$f_3$	<i>LSE Mean</i>	.8964	-.5125	-.3041	.7900	-.7086	.1953	.4074	-.6072
	<i>S. D</i>	.1340	.3458	.1044	.3696	.3100	.1388	.2787	.1548
	<i>AE Mean</i>	.9047	-.5008	-.2970	.8104	-.6929	.2034	.4030	-.5977
	<i>S. D</i>	.0808	.2077	.0617	.2353	.1897	.0836	.1668	.0941
$f_4$	<i>LSE Mean</i>	.9053	-.5017	-.3043	.8018	-.7089	.2001	.4035	-.6028
	<i>S. D</i>	.1401	.3138	.1103	.4063	.3094	.1511	.2764	.1726
	<i>AE Mean</i>	.9062	-.5045	-.3037	.8033	-.7093	.1997	.4083	-.5982
	<i>S. D</i>	.1260	.2979	.1020	.3748	.2916	.1330	.2614	.1558

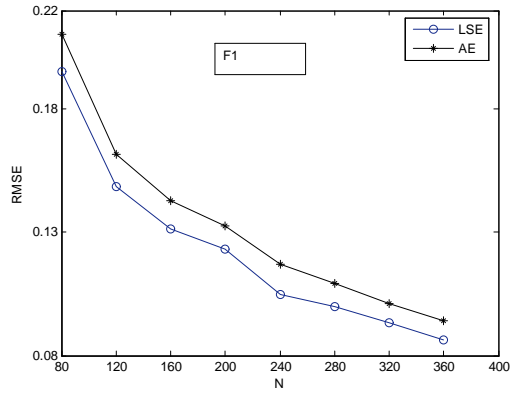
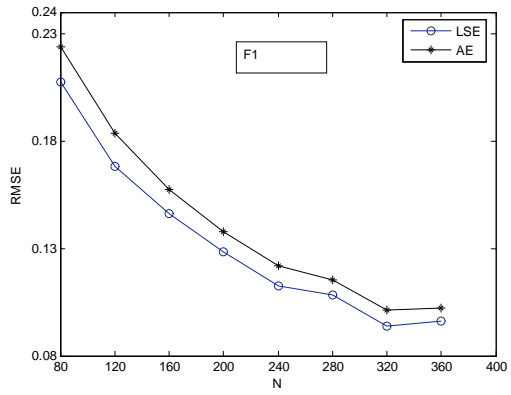
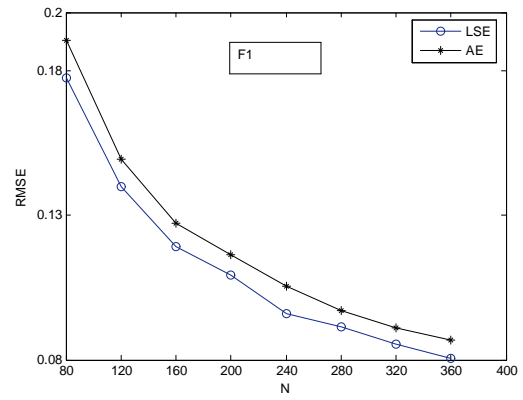
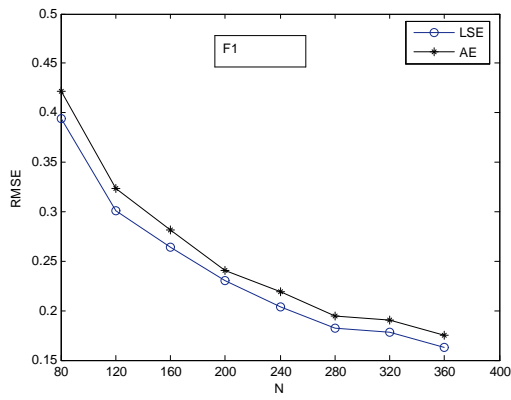
Table 2

$f/\underline{\phi}$		$\phi_{1,1}$	$\phi_{1,2}$	$\phi_{2,1}$	$\phi_{2,2}$	$\phi_{3,1}$	$\phi_{3,2}$	$\phi_{4,1}$	$\phi_{4,2}$
$f_1$	<i>LSE Mean</i>	-1.1006	.4222	-.3225	.5018	.1754	-.5968	.7027	.1002
		.1114	.4356	.5787	.0852	.4383	.1271	.1367	.3748
	<i>AE Mean</i>	-1.0995	.4176	-.3228	.5025	.1773	-.5958	.7040	.0932
		.1159	.4484	.5927	.0872	.4507	.1307	.1401	.3810
$f_2$	<i>LSE Mean</i>	-1.1018	.4295	-.2969	.5018	.2070	-.5927	.6990	.0665
	<i>S. D</i>	.1292	.5200	.6476	.0956	.5271	.1278	.1617	.5764
	<i>AE Mean</i>	-1.0989	.4130	-.2966	.5023	.1931	-.5945	.6992	.0799
	<i>S. D</i>	.1031	.4587	.6058	.0764	.4419	.1099	.1293	.4829
$f_3$	<i>LSE Mean</i>	-1.1015	.3873	-.2905	.5035	.1848	-.6015	.6937	.0978
	<i>S. D</i>	.1040	.4528	.5271	.0826	.4203	.1215	.1361	.3759
	<i>AE Mean</i>	-1.1016	.3933	-.2731	.4986	.2014	-.5985	.7031	.1009
	<i>S. D</i>	.0699	.3453	.4115	.0567	.3049	.0821	.0898	.2408
$f_4$	<i>LSE Mean</i>	-1.1024	.3651	-.2981	.4976	.1890	-.5970	.6967	.0825
	<i>S. D</i>	.1130	.4724	.6838	.0895	.4398	.1326	.1455	.4271
	<i>AE Mean</i>	-1.1029	.3724	-.3043	.4981	.1854	-.5968	.6971	.0768
	<i>S. D</i>	.1002	.4569	.6581	.0798	.4113	.1149	.1303	.4062

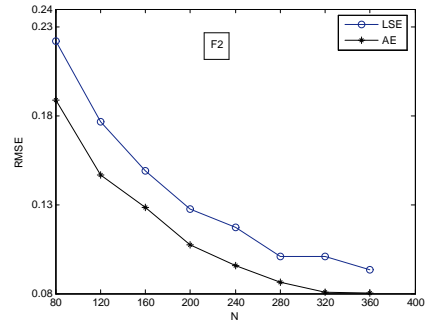
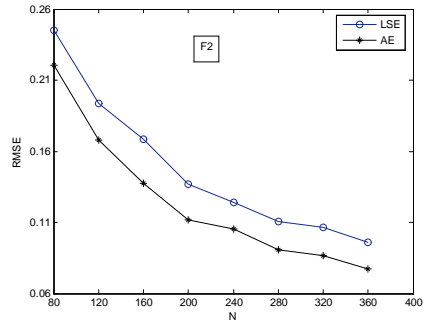
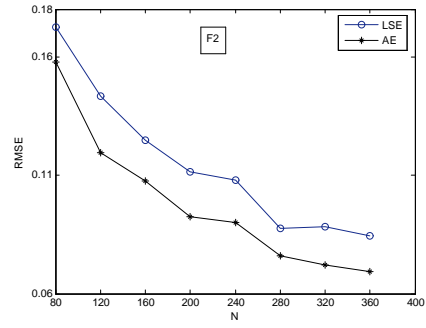
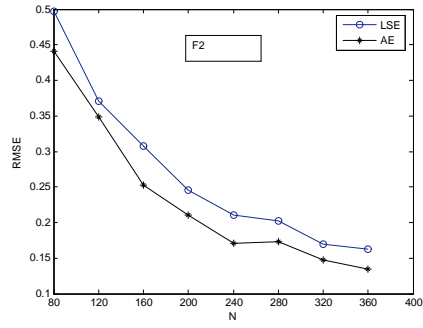
Continuation of Table 2

$f / \underline{\phi}$		$\phi_{5,1}$	$\phi_{5,2}$	$\phi_{6,1}$	$\phi_{6,2}$	$\phi_{7,1}$	$\phi_{7,2}$
$f_1$	<i>LSE Mean</i>						
	<i>S. D</i>	-0.7954	-0.3669	0.1261	0.8548	0.3037	-0.9049
	<i>AE Mean</i>	0.1398	0.3292	0.2816	0.1270	0.3257	0.1171
	<i>S. D</i>	-0.7950	-0.3626	0.1296	0.8542	0.3041	-0.9060
$f_2$		0.1441	0.3399	0.2891	0.1312	0.3334	0.1224
	<i>LSE Mean</i>	-0.8027	-0.3967	0.1481	0.8491	0.3207	-0.8938
	<i>S. D</i>	0.1553	0.4330	0.3509	0.1500	0.3775	0.1420
	<i>AE Mean</i>	-0.8012	-0.4032	0.1366	0.8513	0.3102	-0.8944
$f_3$	<i>S. D</i>	0.1281	0.3713	0.3029	0.1216	0.3316	0.1128
	<i>LSE Mean</i>	-0.8005	-0.4085	0.1574	0.8502	0.3066	-0.9024
	<i>S. D</i>	0.1290	0.3260	0.2868	0.1329	0.3218	0.1136
	<i>AE Mean</i>	-0.7993	-0.3946	0.1551	0.8428	0.3034	-0.8995
$f_4$	<i>S. D</i>	0.0876	0.2104	0.2038	0.0858	0.2047	0.0766
	<i>LSE Mean</i>	-0.7962	-0.4050	0.1706	0.8447	0.3014	-0.8965
	<i>S. D</i>	0.1462	0.3579	0.3075	0.1393	0.3315	0.1276
	<i>AE Mean</i>	-0.7977	-0.3959	0.1634	0.8448	0.3014	-0.8968
	<i>S. D</i>	0.1334	0.3452	0.2815	0.1226	0.3244	0.1170

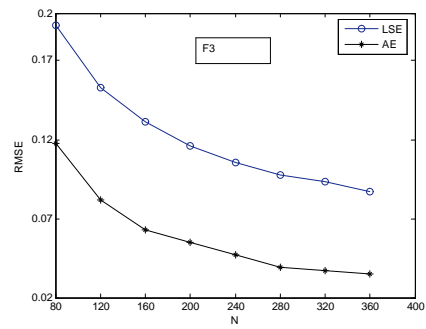
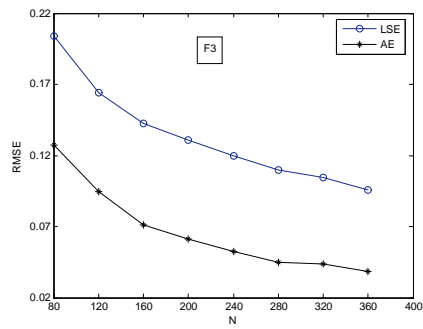
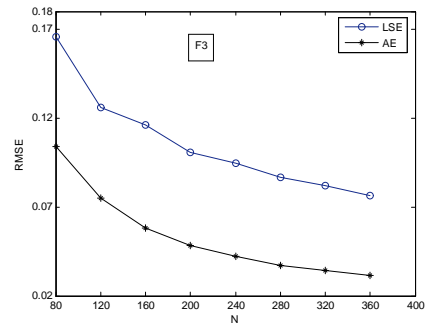
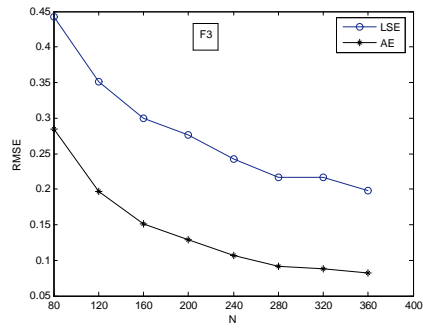
L'estimateur des moindres carrés (*LSE*) est utilisé comme estimateur initial  $\varphi_n$  et il est comparé, en utilisant le critère *RMSE*, à l'estimateur adaptatif obtenu. Les valeurs du  $RMSE = \sqrt{(Biais)^2 + Variance}$  sont calculés pour différentes taille d'échantillon  $n = 80$  à 360. Les résultats de simulation sont représentés par les graphes suivants.



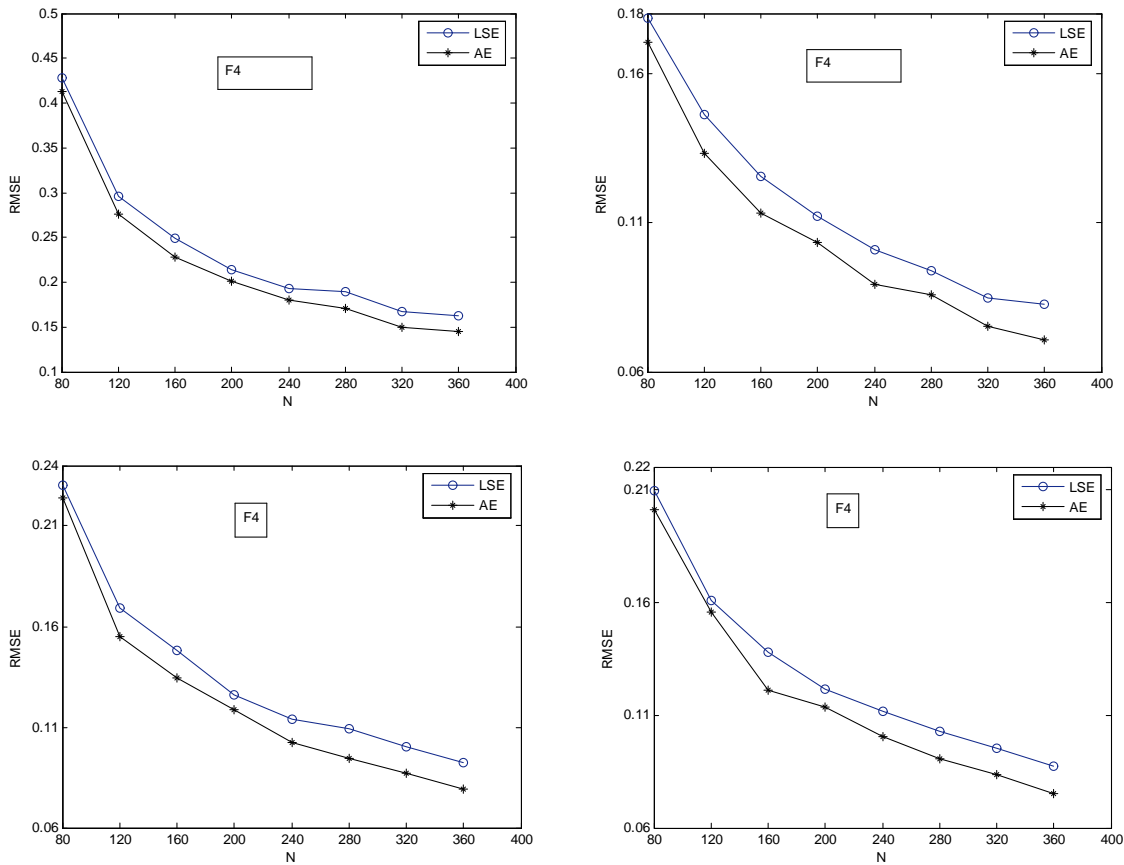
RMSE pour  $f_1$



RMSE pour  $f_2$



RMSE pour  $f_3$



*RMSE pour  $f_4$*

Les simulations montrent la supériorité de l'estimateur adaptatif quand la densité des innovations est  $f_2$  ou  $f_3$  spécialement pour  $f_3$ , qui représente l'extrême déviation de la normalité, où la différence en faveur de l' $AE$  est très grande. Pour les densités  $f_1$  et  $f_4$  les deux estimateurs ont presque la même performance ; plus précisément, pour  $f_4$  l' $AE$  est légèrement meilleur comparé au  $LSE$  contrairement au cas où la densité d'innovation est  $f_1$ , on conclut que la performance des estimateurs adaptatifs s'améliore quand la déviation de la normalité augmente.



# Chapitre 5

## Test Localement Optimal du Modèle *ARCH* Périodique

### 5.1 Introduction

Malgré le fait que les modèles à volatilité stochastique ont reçu un intérêt considérable, il semble que la classe des modèles non linéaires, qui est la plus étudié théoriquement et la plus employé pratiquement, est la classe particulière des processus Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique (*ARCH*) et leurs diverses extensions. En effet, ces modèles sont largement étudiés et utilisés, depuis l'article pionnier d'Engle (1982) et celui de Bollerslev (1986). Ainsi, il est reconnu que la famille *ARCH* est capable et adéquate pour capturer plusieurs caractéristiques, comme en particulier la volatilité clustering, l'excès de kurtosis et l'asymétrie, qui ne peuvent pas être capturés par les modèles de séries temporelles linéaires standard. Motivé par ce fait les problèmes d'estimation (Weiss (1986), Nelson (1990), Bougerol et Picard (1992), Berkes et Horváth (2003), Berkes *et al* (2003), Francq et Zakoian (2004), Aknouche et Bentarzi (2008), Aknouche et Bibi (2009), Aknouche et Guerbyenne (2009), Bibi et Aknouche (2009) et plusieurs autres), et de test (et plusieurs autres) des paramètres des modèles *GARCH*, ont reçu, dans les décennies récentes, un intérêt considérable. Aussi, il est observé que plusieurs séries temporelles, venue de plusieurs domaines, exhibent un trait de périodicité dans les structures d'autocovariance qui ne peut être capturé par les modèles avec des paramètres invariant dans le temps.

Les divers avantages et les propriétés intéressantes satisfaites par le modèle *ARCH* ont motivé Bollerslev et Ghysels (1996) à étendre ce modèle au modèle *ARCH* périodique pour capturer, en plus, le phénomène de périodicité. Puisque le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique compte plus de paramètres que son analogue traditionnel et donc il est plus compliqué, il semble très important de tester la périodicité des paramètres du modèle *ARCH*. Ce chapitre est consacré au test d'un modèle *ARCH* classique contre un modèle *ARCH* périodique.

Il faut noter que le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique traditionnel ou périodique est utile en lui-même, par exemple pour la modélisation des rendements d'un actif, et aussi il est très souvent combiné avec d'autres types de modèles. Le présent chapitre est principalement consacré à l'obtention d'un test adaptatif de la périodicité des paramètres du modèle *ARCH* où la densité des innovations inconnue est symétrique et satisfait seulement quelques conditions de régularités.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on revoit brièvement les modèles *ARCH* classiques et périodiques et on donne les notations, définitions et conditions de régularités de bases de ces modèles, nécessaires pour les sections restantes. Dans la troisième section, on établit, en adaptant les conditions de Swensen (1985) à notre modèle *ARCH*, la propriété de Normalité Asymptotique Locale (*LAN*). En plus, la Quadratique Asymptotique Locale (*LAQ*), la Normalité Asymptotique Locale (*LAN*) et la linéarité Asymptotique Locale de la suite centrale sont obtenues. Un test localement asymptotiquement optimal pour tester un *ARCH* classique contre un *ARCH* périodique est établie, pour le cas où la densité des innovations est supposée être connue, dans la quatrième section. D'un autre côté, la cinquième section, est consacrée à la construction, dans un contexte semi paramétrique, d'un test adaptatif quand cette densité des innovations est non spécifiée mais symétrique. Finalement, dans la sixième section, on présente quelques résultats de simulation avec un bref commentaire.

## 5.2 Notations, Définitions et conditions de régularités

### 5.2.1 Définitions et notations principales

On rappelle qu'un processus univarié, du second ordre,  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle *ARCH* ( $q$ ), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique de la forme :

$$y_t = \sigma_t(\underline{\theta}) \varepsilon_t, \quad (5.2.1a)$$

$$\sigma_t(\underline{\theta}) = c + \sum_{j=1}^q \theta_j y_{t-j}^2, \quad (5.2.1b)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et, sans perte de généralité, de variance 1, de densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement Gaussienne.

Un processus du second ordre  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle *ARCH* ( $q$ ) périodique, de période  $S$  ( $S \geq 2$ ), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$y_t = \sigma_t(\underline{\theta}) \varepsilon_t, \quad (5.2.2a)$$

$$\sigma_t^2(\underline{\theta}) = c_t + \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} y_{t-j}^2, \quad (5.2.2b)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et, sans perte de généralité, de variance 1, de densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement Gaussienne.

Les paramètres  $c_t$  et  $\theta_{t,j}$  sont périodiques, dans le temps, de période  $S$ , i.e.,  $c_{t+kS} = c_t$  et  $\theta_{t+kS,j} = \theta_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$ . En plus, pour la positivité de la variance conditionnelle ces paramètres sont supposés satisfaire :  $c_t > 0$  et  $\theta_{t,j} \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$  et  $j = 1, \dots, q$ .

Notons  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  une suite des hypothèses nulles sous laquelle  $\{y_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle (5.2.1.a) et (5.2.1.c), où  $\underline{\theta} = (c, \theta_1, \dots, \theta_q)'$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$  la suite des hypothèses alternatives sous laquelle la suite  $\{y_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une



## 5.2.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres  $\underline{\theta}$  du ARCH ( $q$ ) satisfont la condition nécessaire et suffisante de causalité de (2.1) i.e.,  $\sum_{j=1}^q \theta_j < 1$

Hypothèse (H2). La densité des innovations  $f(\cdot)$  est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a)  $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R},$

(b)  $f(\cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$  : il existe une

fonction  $\dot{f}(\cdot)$  tel que, pour  $-\infty < a < b < \infty$ , nous avons  $f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(x) d\mu(x),$

(c) L'information de Fisher  $I(f) = \int (\phi_f(x))^2 f(x) dx$  est finie, où  $\phi_f = -x \frac{f'(x)}{f(x)} - 1$

est la fonction score du paramètre d'échelle  $\sigma$ ,

(d)  $\int x f(x) dx = 0, \int x^2 f(x) dx = 1, \int x^4 f(x) dx < \infty$  et  $\int (\phi_f(x))^4 f(x) dx < \infty.$

Hypothèse (H3). Le processus  $(\sigma_t^2)_t$  satisfait  $E(\sigma_t^4) < \infty.$

## 5.3 Normalité Asymptotique Locale

### 5.3.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Soit  $\underline{y}_0^{(n)} = (y_0^{(n)}, \dots, y_{-1+q}^{(n)})$  la valeur initiale dont les densités sont  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})$  et  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , respectivement. En plus, on suppose que  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)}) - f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})$  converge en probabilité vers 0, quand  $\underline{\theta}^{(n)} \rightarrow \underline{\Theta}$  avec  $n \rightarrow \infty.$

La fonction de vraisemblance de la réalisation  $\underline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$  est :

$$f(\underline{y}^{(n)}, \underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) = f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) \prod_{t=1}^n f(y_t^{(n)} / \underline{\theta}, \underline{y}_0^{(n)}) = f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) \prod_{t=1}^n \left( \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) f\left(\varepsilon_t^{(n)} / \underline{y}_0^{(n)}\right) \right);$$

On note par  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , les résidus calculés sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ ,

respectivement. Alors, nous avons

$$\begin{aligned}
 Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) &= y_t^{(n)} \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) \quad \text{et} \quad Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = y_t^{(n)} \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}), \\
 \sigma_t^2(\underline{\theta}^{(n)}) &= \sigma_t^2(\underline{\theta}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \beta^{(n)} + \eta_t^{(n)} + \sum_{j=1}^q (\lambda_j^{(n)} + h_t^{(n)}) y_{t-j}^2 \right), \\
 Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) &= Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\beta^{(n)} + \eta_t^{(n)} + \sum_{j=1}^q (\lambda_j^{(n)} + h_t^{(n)}) y_{t-j}^2}{\sigma_t^2(\underline{\theta})} \right)^{-1/2}.
 \end{aligned}$$

Supposons, pour simplifier la notation, que la taille  $n$  est un multiple de  $S$ , i.e.,  $n = mS$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $t = s + S\tau$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau = 0, 1, \dots, m-1$ .

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance,  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  pour  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , est alors donné par :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = \sum_{t=1}^n \log \left( \frac{\sigma_t^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f(Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}))}{\sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) f(Z_t^{(n)}(\underline{\theta}))} \right) + \log \left( \frac{f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)})}{f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})} \right),$$

par conséquent, nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , l'approximation asymptotique locale :

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) = 2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \left( \frac{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}))}{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}) f(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}))} \right)^{1/2} + o_p(1)$$

où le terme  $o_p(1)$  correspond à l'influence de la valeur initiale  $\underline{y}_0^{(n)}$ .

### 5.3.2 Normalité Asymptotique Locale

Afin d'adapter les conditions de Swensen pour traiter le modèle  $ARCH(q)$  périodique, nous avons besoin des variables suivantes.

$$\begin{aligned}
 \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \left( \frac{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})\right)}{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)} \right)^{1/2} - 1, \\
 \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \frac{1}{2} \delta_{s,\tau}^{(n)'} \underline{\mathcal{I}}_s^{*(n)} \text{ où } \delta_{s,\tau}^{(n)} = \left( \delta_{1s,\tau}^{(n)}, \delta_{2s,\tau}^{(n)'} \right)', \\
 \delta_{1s,\tau}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}), \\
 \delta_{2s,\tau}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-1+S\tau}^2, \dots, \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-q+S\tau}^2 \right)', \\
 \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) &= -Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \frac{f'\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)}{f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)} - 1, \\
 \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \left( \delta_{1.}^{(n)'}, \dots, \delta_{S.}^{(n)'} \right)' \in \mathbb{R}^{(q+1)S} \text{ où } \delta_s^{(n)} = \left( \delta_{1s.}^{(n)}, \delta_{2s.}^{(n)} \right), \quad s = 1, \dots, S \\
 \delta_{1s.}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{1s,\tau}^{(n)} \text{ et } \delta_{2s.}^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{2s,\tau}^{(n)}.
 \end{aligned} \tag{5.3.1}$$

Soit  $Y(s-1+S\tau) = (\sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}), \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-1+S\tau}^2, \dots, \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-q+S\tau}^2)'$ ,  $s = 1, \dots, S$ , alors

$$\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \phi\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \gamma_{s,\tau}^{(n)}$$

où

$$\gamma_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\mathcal{I}}_s^{*(n)'} Y(s-1+S\tau)$$

Considérons la matrice bloc diagonale de dimension  $(q+1)S \times (q+1)S$  :

$$\underline{\mathbf{\Gamma}}(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} \Gamma(\underline{\theta}) & \cdot & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma(\underline{\theta}) & \dots & 0 \\ \vdots & \cdot & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdot & 0 & \Gamma(\underline{\theta}) \end{pmatrix} = I_{S \times S} \otimes \Gamma(\underline{\theta})$$

où  $\Gamma(\underline{\theta})$  est la matrice de variance limite du vecteur  $Y(s-1+S\tau)$ ,

$$\Gamma(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} E\left(\sigma_0^{-4}(\underline{\theta})\right) & E\left(\sigma_0^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_0^{2'}\right) \\ E\left(\sigma_0^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_0^2\right) & E\left(\sigma_0^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_0^2 \underline{y}_0^{2'}\right) \end{pmatrix}$$

où  $\underline{y}_{-s\tau}^2 = (y_{s-1+S\tau}^2, \dots, y_{s-q+S\tau}^2)'$ .

En utilisant les définitions et notations précédentes, on peut formuler les conditions de Swensen adaptées, qui impliquent la propriété LAN .

**Proposition 5.3.1** (Conditions de Swensen Adaptées (1985), Bentarzi et Merzougui (2009c))

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) – (H3), satisfaites.

- (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2 = 0,$
- (2)  $\sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) < \infty,$
- (3)  $\max_s \max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| = 0_p(1),$
- (4)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) - \frac{1}{4S} I(f) \underline{\Gamma}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \underline{\Gamma}^{*(n)} = 0_p(1),$
- (5)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left[ \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) I_{\left[ \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right] = 0_p(1),$   
 $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$  est la  $\sigma$  – algèbre engendrée par le passé du processus jusqu’au temps  $s - 1 + S\tau$ ,
- (6)  $E \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right) = 0_p(1).$

**Preuve.**

**Condition** (1). Nous avons  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) \left( 1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^{-1/2}$ . En remplaçant  $\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta})$  par leurs valeurs respectives dans l’expression de l’espérance, on obtient

$$\begin{aligned}
 E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2 &= \\
 &= E \left( \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{\left( 1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \left( 1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^{1/2}} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2 \right) \\
 &= E \left( \sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right),
 \end{aligned}$$

où

$$B_{1,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{|y_{s-j+S\tau}| < K} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)})^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) (1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)})^{1/2}} \right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2, \right.$$

et

$$B_{2,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{|y_{s-j+S\tau}| \geq K} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)})^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) (1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)})^{1/2}} \right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2, \right.$$

$\forall j$  et  $s$  fixé.

pour un nombre réel quelconque  $K$ . Alors, afin de prouver que  $E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2$  converge vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , il suffit de montrer que  $B_{1,s,m}$  et  $B_{2,s,m}$  converge vers 0, pour  $s$  fixé,  $s = 1, \dots, S$  et pour un nombre réel positive quelconque  $K$ . Par conséquent, le reste de la preuve s'ensuit, puisque les processus  $y_{s+S\tau}$  et  $\sigma_{s+S\tau}^2$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , sont stationnaires pour  $s$  fixé, directement à partir du résultat Linton (1993).

**Condition (2)**. Il suffit de montrer que, pour  $s$  fixé,  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) < \infty$ . En utilisant la définition de  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta})$ , on obtient

$$E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) = \frac{I(f)}{4} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2, \text{ pour } s \text{ fixé.}$$

Il est facile de montrer, pour  $s$  fixé, que la somme  $\sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \gamma_{s,\tau}^{(n)} \right)^2$  est uniformément bornée (cf.,

Swensen 1985). Donc, nous avons  $\sup_m E \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) < \infty$ ,

la seconde condition est alors vérifié.

**Condition (3).** On montre que  $\max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| = 0_p(1)$ , pour  $s$  quelconque. En effet, nous avons

$$\begin{aligned}
 P \left( \max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| > \delta \right) &\leq \delta^{-2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) I \left( \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| > \delta \right) \right), \\
 &= \frac{1}{4n\delta^2} \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ \left( \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) \left( \beta^{(n)} + \eta_s^{(n)} + \sum_{j=1}^q \left( \lambda_j^{(n)} + h_s^{(n)} \right) y_{s-j+S\tau}^2 \right) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \times I \left( \left| \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) \left( \beta^{(n)} + \eta_s^{(n)} + \sum_{j=1}^q \left( \lambda_j^{(n)} + h_s^{(n)} \right) y_{s-j+S\tau}^2 \right) \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right\}, \\
 &\leq \frac{1}{4S\delta^2} E \left\{ \left( \phi \left( Z_{s,1}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \sigma_{s,1}^{-2}(\underline{\theta}) \left( \beta^{(n)} + \eta_s^{(n)} + \sum_{j=1}^q \left( \lambda_j^{(n)} + h_s^{(n)} \right) y_{s-j+1}^2 \right) \right)^2 \right. \\
 &\quad \left. \times I \left( \left| \phi \left( Z_{s,1}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \sigma_{s,1}^{-2}(\underline{\theta}) \left( \beta^{(n)} + \eta_s^{(n)} + \sum_{j=1}^q \left( \lambda_j^{(n)} + h_s^{(n)} \right) y_{s-j+1}^2 \right) \right| > 2\delta\sqrt{n} \right) \right\}, \text{ pour } s \text{ fixé,}
 \end{aligned}$$

ainsi le coté droit converge vers 0, quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Condition (4).** Nous avons

$$\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) = \frac{1}{4} \sum_{s=1}^S \underline{T}_s^{*(n)'} \left( \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{s,\tau}^{(n)} \delta_{s,\tau}^{(n)'} \right) \underline{T}_s^{*(n)}.$$

Soit  $M^{(n)}$  la matrice de dimension  $((q+1)S) \times ((q+1)S)$  :

$$M^{(n)} = \delta_{s,\tau}^{(n)} \delta_{s,\tau}^{(n)'} = \begin{pmatrix} \delta_{1s,\tau}^{(n)} \\ \delta_{2s,\tau}^{(n)} \end{pmatrix} \left( \delta_{1s,\tau}^{(n)}, \delta_{2s,\tau}^{(n)'} \right) = \begin{pmatrix} M_{11}^{(n)} & M_{12}^{(n)} \\ M_{21}^{(n)} & M_{22}^{(n)} \end{pmatrix}$$

où les matrices  $M_{11}^{(n)}$ ,  $M_{12}^{(n)}$ ,  $M_{21}^{(n)}$  et  $M_{22}^{(n)}$  sont données par :

$$\begin{aligned}
 M_{11}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} M_{11}^{(n)}(s, \tau) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \delta_{1s, \tau}^{(n)} \right)^2 = \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{1}{n} \left( \varphi_{s, \tau}^{(n)} \right)^2 \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) = \frac{1}{S} I(f) E \left( \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \right) + 0_p(1), \\
 M_{12}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} M_{12}^{(n)}(s, \tau) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{1s, \tau}^{(n)} \delta_{2s, \tau}^{(n)'} = \sum_{\tau=0}^{m-1} \frac{1}{n} \left( \varphi_{s, \tau}^{(n)} \right)^2 \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^{2'}, \\
 &= \frac{1}{S} I(f) E \left( \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^{2'} \right) + 0_p(1), \\
 M_{21}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} M_{21}^{(n)}(s, \tau) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{2s, \tau}^{(n)} \delta_{1s, \tau}^{(n)'} = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \varphi_{s, \tau}^{(n)} \right)^2 \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^2, \\
 &= \frac{1}{S} I(f) E \left( \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^2 \right) + 0_p(1), \\
 M_{22}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} M_{22}^{(n)}(s, \tau) = \sum_{\tau=0}^{m-1} \delta_{2s, \tau}^{(n)} \delta_{2s, \tau}^{(n)'} = \frac{1}{n} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \varphi_{s, \tau}^{(n)} \right)^2 \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^2 \underline{y}_{s\tau}^{2'}, \\
 &= \frac{1}{S} I(f) E \left( \sigma_{s, \tau}^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_{s\tau}^2 \underline{y}_{s\tau}^{2'} \right) + 0_p(1).
 \end{aligned}$$

alors  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) = \frac{1}{4S} I(f) \underline{\Gamma}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \underline{\Gamma}^{*(n)} + 0_p(1)$ .

**Condition (6).**

Puisque  $Z_{s, \tau}^{(n)}(\underline{\theta})$  est indépendant des variables de  $\mathcal{B}_{n, s-1+S\tau}$  et  $E \left( \phi \left( Z_{s, \tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right) = 0$ , alors nous avons  $E \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) / \mathcal{B}_{n, s-1+S\tau} \right) = 0$ .

La preuve de la condition (5) est similaire à celle de Swensen (1985).

**Proposition 5.3.2 (Bentarzi et Merzougui (2009c))**

Supposons que les hypothèses  $H1$ ,  $H2$  et  $H3$  sont satisfaites, alors nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , quand  $n \rightarrow \infty$  :

(i) Quadratique Asymptotique Locale (LAQ)

$$\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\Gamma}^{(n)}) = \underline{\Gamma}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) - \frac{1}{2} \underline{\Gamma}^{(n)'} \underline{\Gamma} \Delta_f^{(n)}(\underline{\theta}) \underline{\Gamma}^{(n)} + 0_p(1),$$

où la matrice carrée  $\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) = \frac{I(f)}{S} K' \Gamma(\underline{\theta}) K$  et la suite centrale  $\Delta_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , de dimension

$(q+1) \times S$ , est donnée par

$$\begin{aligned}
 \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) &= K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\theta}), \\
 \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) &= \left( \sum_{s=1}^S \delta_{1s}^{(n)}, \sum_{s=1}^S \delta_{2s}^{(n)}; \delta_{11}^{(n)} - \delta_{1S}^{(n)}, \delta_{21}^{(n)} - \delta_{2S}^{(n)}; \dots; \delta_{1S-1}^{(n)} - \delta_{1S}^{(n)}, \delta_{2S-1}^{(n)} - \delta_{2S}^{(n)} \right)'.
 \end{aligned}$$

(ii) Normalité Asymptotique Locale de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$

$$\Delta_f^{(n)}(\underline{\theta}) \rightarrow N_{(q+1) \times S} \left( \underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \right).$$

**Preuve.** Puisque les conditions suffisantes de Swensen sont vérifiées, alors en tenant compte du fait que  $2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) = \underline{\tau}^{(n)'} K' \underline{\delta}^{(n)}(\underline{\theta}) = \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , la quadratique asymptotique locale (LAQ) et la normalité asymptotique locale de la suite centrale découlent immédiatement du Théorème 1 (LeCam) (cf., Swensen (1985)).

### Corollaire 5.3.1

Comme conséquences de la propriétés LAN, nous avons :

i)  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$  sont contiguës.

ii) La suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$  satisfait la Linéarité Asymptotique Locale suivante :

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = -\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1).$$

**Preuve :** Voir la preuve de la proposition 3.3 du chapitre 3.

Le corollaire suivant établit les distributions asymptotiques de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et du logarithme du rapport de vraisemblance  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)})$  sous l'hypothèse alternative  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ .

### Corollaire 5.3.2

Si les hypothèses H1, H2 et H3 sont satisfaites, alors nous avons :

- 1)  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) \implies N \left( \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \right)$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ ,
- 2)  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}) \implies N \left( \frac{1}{2} \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)}, \underline{\tau}^{(n)'} \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)} \right)$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ .

Ces résultats sont des conséquences de la propriété LAN.

## 5.4 Test Asymptotique Locale (le plus Stringent)

L'une des conséquences essentielles de la propriété LAN est que la suite des expériences locales :

$$\xi_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left\{ P_{\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}^{(n)}}; \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{(q+1)S} / \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty, \underline{\tau}^{(n)} \rightarrow \underline{\tau} \text{ quand } n \rightarrow \infty \right\},$$

converge faiblement vers l'expérience de position Gaussienne de dimension  $(q+1)S$ .

$$E_f = \{ N(\Gamma^\Delta(\underline{\theta}) \underline{\tau}, \Gamma^\Delta(\underline{\theta})) , \quad \underline{\tau} \in \mathbb{R}^{(q+1)S} \}.$$

( $\Delta$  représente l'observation à partir de cette expérience). Ainsi, dans le cas des tests d'hypothèse, si un test  $\phi(\Delta)$  est exactement optimal au niveau  $\alpha$  dans  $E_f$ , alors, la suite de tests  $\phi(\Delta^{(n)}(\underline{\theta}))$  sera localement et asymptotiquement optimale au niveau asymptotique  $\alpha$  dans la suite d'expériences originales  $\xi_f^{(n)}(\underline{\theta})$ . On rappelle que :

$$\begin{aligned} 1) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) &\implies N(\underline{0}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta})), & \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\theta}), \\ 2) \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) &\implies N(\Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)}, \Gamma^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta})), & \text{sous } H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\tau}). \end{aligned}$$

Considérons la décomposition suivante de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left( \begin{array}{cc} \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'} & \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \end{array} \right)'$  où les vecteurs colonnes  $\underline{\Delta}_{I,f}^{(n)}$  et  $\underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}$  de dimensions  $q+1$  et  $(q+1) \times (S-1)$ , respectivement, sont donnés par :

$$\begin{aligned} \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)} &= \left( \sum_{s=1}^S \delta_{1s}^{(n)} \quad \sum_{s=1}^S \delta_{2s}^{(n)} \right)', \\ \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)} &= \left( \delta_{11}^{(n)} - \delta_{1S}^{(n)}, \delta_{21}^{(n)} - \delta_{2S}^{(n)}; \dots; \delta_{1S-1}^{(n)} - \delta_{1S}^{(n)}, \delta_{2S-1}^{(n)} - \delta_{2S}^{(n)} \right)', \end{aligned}$$

et soit la partition en bloc correspondante de la matrice de variance :

$$\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} \mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\theta}) & 0 \\ 0 & \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\theta}) \end{pmatrix},$$

où la matrice, de dimension  $(q+1) \times (q+1)$ ,  $\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\theta}) = I(f) \Gamma(\underline{\theta})$  et la matrice, de dimension  $(q+1)(S-1) \times (q+1)(S-1)$ ,

$$\mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\theta}) = \frac{I(f)}{S} \begin{pmatrix} 2\Gamma(\underline{\theta}) & \Gamma(\underline{\theta}) & \dots & \Gamma(\underline{\theta}) \\ & 2\Gamma(\underline{\theta}) & \dots & \Gamma(\underline{\theta}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma(\underline{\theta}) & \Gamma(\underline{\theta}) & \dots & 2\Gamma(\underline{\theta}) \end{pmatrix}.$$

Posons  $\eta = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}) \begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{h} \end{pmatrix}$  où  $\underline{\lambda} = (\beta, \lambda_1, \dots, \lambda_q)$  et  $\underline{h} = (\eta_1, h_{1,1}, \dots, h_{1,q}; \dots; \eta_{S-1}, h_{S-1,1}, \dots, h_{S-1,q})'$ ,

alors le problème de tester l'hypothèse nulle  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  contre l'alternative locale  $H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\mathcal{T}}^{(n)})$ , i.e., tester un modèle *ARCH*( $q$ ) à temps-invariant, donné par (5.2.1), contre, un modèle *ARCH*( $q$ ) localement  $S$ -périodique, donné par (5.2.2), revient, tout simplement, au problème de test lié à l'expérience de position Gaussienne. Plus précisément : tester l'hypothèse nulle

$$H_{0,f} : N(\eta_0, \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta})), \quad \left( \eta_0 = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \underline{0} \end{pmatrix} \right),$$

contre l'hypothèse alternative

$$H_{1,f} : N(\eta, \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta})), \quad \left( \eta = \mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}) \begin{pmatrix} \lambda \\ \underline{h} \end{pmatrix}, \underline{h} \neq \underline{0} \right).$$

La proposition suivante établit le test localement asymptotiquement optimal pour tester  $H_{0,f}$  contre  $H_{1,f}$ .

**Proposition 5.4.1 (Bentarzi et Merzougui (2009c))**

Sous les conditions  $H1 - H3$ , le test qui rejette l'hypothèse nulle  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  si :

$$\widehat{Q}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) = \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)'}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) \left( \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) \right)^{-1} \widehat{\underline{\Delta}}_{II,f}^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) > \chi_{(q+1)(S-1), 1-\alpha}^2,$$

*i*) est de niveau asymptotique  $\alpha$  (sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ ),

*ii*) est de puissance asymptotique :

$$1 - \mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; (q+1)(S-1), \underline{h}' \mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) \underline{h}), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\mathcal{T}}),$$

où  $\mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; r, \nu)$  désigne la fonction de répartition de la loi khi deux non centré à  $r$  degré de liberté et de paramètre de non centralité  $\nu$ ,

*iii*) est un test localement asymptotiquement "most stringent" contre  $H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)}\underline{\mathcal{T}})$ .

**Preuve :**

A partir de la seconde partie de la Proposition 5.3.2 et la première partie du Corollaire 5.3.1, nous avons, respectivement,  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) \xrightarrow{L} N_{(q+1)S} N(0, \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}))$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) \xrightarrow{L} N(\mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}) \underline{\mathcal{T}}^{(n)}, \mathbf{\Gamma}_{22}^{\Delta_f^{(n)}}(\underline{\theta}))$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ .

Soit  $\begin{pmatrix} \underline{\lambda} \\ \underline{0} \end{pmatrix} = \Omega \underline{\lambda}$  où  $\Omega = \begin{pmatrix} I_{(q+1) \times (q+1)} \\ \underline{0} \end{pmatrix}$  est la matrice de dimension  $(q+1)S \times (q+1)$  et  $M(\Omega)$  le sous espace de  $\mathbb{R}^{(q+1)S}$  généré par  $\Omega$  alors le problème du test se réduit à tester :  $\eta \in M(\Gamma^\Delta(\underline{\theta})\Omega)$  contre  $\eta \notin M(\Gamma^\Delta(\underline{\theta})\Omega)$ . Le test le plus stringant, de niveau  $\alpha$ , est  $\varphi(\Delta)$  qui rejette  $\eta \in M(\Gamma^\Delta(\underline{\theta})\Omega)$  si

$$\begin{aligned} Q_f^{(n)}(\underline{\theta}) &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\theta}) [\Gamma^\Delta(\underline{\theta})^{-1} - \Omega(\Omega' \Gamma^\Delta(\underline{\theta})\Omega)^{-1} \Omega'] \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}), \\ &= \underline{\Delta}_f^{(n)'}(\underline{\theta}) \left\{ \Gamma^\Delta(\underline{\theta})^{-1} - \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}), \\ &= \left( (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) \right)' \left\{ I - (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2} \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2} \right\} \\ &\quad \times (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) > \chi_{(q+1)(S-1), 1-\alpha}^2. \end{aligned}$$

En tenant compte de la décomposition de la suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \left( \underline{\Delta}_{I,f}^{(n)'}, \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'} \right)'$  et la décomposition correspondante de  $\Gamma^\Delta(\underline{\theta})$ , on peut réécrire la dernière forme quadratique dans la forme

$$Q_f^{(n)}(\underline{\theta}) = \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)'}(\underline{\theta}) (\Gamma_{22}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1} \underline{\Delta}_{II,f}^{(n)}(\underline{\theta})$$

La distribution de la forme quadratique  $Q_f^{(n)}(\underline{\theta})$  est obtenue directement à cause du fait que le vecteur colonne  $(\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2} \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$  est asymptotiquement normalement distribué de moyenne 0 et de matrice de variance  $I$  et que la matrice

$$I - (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\Gamma_{11}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\Gamma^\Delta(\underline{\theta}))^{1/2}$$
 est idempotente. En effet, la distribu-

tion asymptotique de  $Q_f^{(n)}(\underline{\theta})$  est alors, comme c'est bien connu, une  $\chi^2((q+1)(S-1))$  et  $\chi^{2r}((q+1)(S-1); \underline{h}' \Gamma_{22}^\Delta(\underline{\theta}^{(n)}) \underline{h})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , respectivement. Bien sur, ces résultats sont obtenus en supposant que les paramètres  $\underline{\theta}$  sont connus. Néanmoins, on montre qu'ils restent vrais quand ces paramètres sont inconnus. En effet, soit  $\underline{\tau}^{(n)} = (\underline{\nu}^{(n)})^{-1} \left( \widehat{\underline{\theta}}^{(n)} - \underline{\Theta} \right)$  pour un estimateur  $\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}$  quelconque  $\underline{\nu}^{(n)}$ -convergent du paramètre inconnu  $\underline{\Theta}$  et en le remplaçant dans l'expression de la linéarité asymptotique donnée par *ii*) de la *Proposition* 5.3.3, on obtient

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = -\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta})(\underline{\nu}^{(n)})^{-1}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)} - \underline{\Theta}) + 0_p(1),$$

par conséquent nous avons

$$(\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1/2}(\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})) = (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}))^{1/2}(\underline{\nu}^{(n)})^{-1}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)} - \underline{\Theta}) + 0_p(1),$$

en multipliant le coté gauche par la matrice  $I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\underline{\theta}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta}))^{1/2}$

et en tenant compte de la continuité de  $\mathbf{\Gamma}^\Delta(\underline{\theta})$ , on obtient, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  par conséquent sous

$$H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$$

$$\left\{ I - (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}))^{1/2} \begin{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}_{11}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}))^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}))^{1/2} \right\} \times \\ (\mathbf{\Gamma}^\Delta(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}))^{-1/2}(\underline{\Delta}_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})) = 0_p(1).$$

Qui mène à  $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)}) = Q_f^{(n)}(\underline{\theta}) + 0_p(1)$ , sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  par conséquent sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ .

Ainsi le test statistique  $Q_f^{(n)}(\widehat{\underline{\theta}}^{(n)})$  suit la  $\chi^2((q+1)(S-1))$  centrale et la

$\chi^{2'}((q+1)(S-1); \underline{h}'\mathbf{\Gamma}_{22}^\Delta(\underline{\theta}^{(n)})\underline{h})$  non centrale sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , respective-

ment. Par conséquent, la preuve de *ii*) suit immédiatement.

## 5.5 Test Adaptatif

Le test décrit dans la proposition précédente est valide et optimal quand la densité des innovations  $f$ , qui intervient dans la statistique du test à travers la fonction  $\phi_f(\cdot)$ , est spécifiée. Cependant, en pratique cette densité est fréquemment inconnue, par conséquent, elle est considérée comme un paramètre de nuisance. Ainsi, dans cette section, on considère le modèle semi-paramétrique dont le vecteur des paramètres est  $(\underline{\theta}, f)$  où  $f$  est le paramètre de nuisance qui est supposé appartenir à la classe de toutes les densités symétriques,  $\mathcal{F}^+$  d'où on ajoute l'hypothèse suivante.

**Hypothèse (H4).** La fonction de densité d'innovation  $f$  est symétrique.

Brièvement, un test est dit adaptatif s'il a, quand  $f$  est inconnue, la même puissance asymptotique que le test optimal dans le modèle où cette densité d'innovation est spécifiée. Pour les modèles de types *ARCH* les paramètres de la variance ne sont pas généralement adaptativement estimables : Linton (1993) a montré que les paramètres  $(c, \underline{\theta}, f)$  ne sont pas conjointement identifiables donc on adopte sa solution qui consiste à fixer  $c$  par exemple  $c = 1$  et on redéfinit  $\underline{\theta}$  tel que  $\underline{\theta} = (\theta_1, \dots, \theta_q)' \in \mathbb{R}^q$ . Comme dans Linton (1993) et Kreiss (1987) on estime  $f$  par la méthode du noyau, pour cela on a besoin des notations et définitions suivantes.

$$\begin{aligned} (i) \quad g(x; \eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), x \in \mathbb{R}, \\ (ii) \quad f_\eta(x) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x-y; \eta) f(y) dy, \\ (iii) \quad \widehat{f}_{\eta, \tau}(x, \underline{\theta}) &= \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{\tau_0=0 \\ \tau_0 \neq \tau}}^{m-1} \{g(x+z_{s, \tau_0}, \eta) + g(x-z_{s, \tau_0}, \eta)\}; \tau = 0, \dots, m-1, \end{aligned}$$

et pour l'estimation de  $\phi_f(\cdot)$  soit  $\widehat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\theta})$ , pour un  $\underline{\theta}$  quelconque, donné par

$$\widehat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\theta}) = \begin{cases} -\frac{\widehat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\theta})}{\widehat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\theta})} \text{ si } \begin{cases} \widehat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\theta}) \geq d_n, |x| \leq g_n, \\ \left| \widehat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\theta}) \right| \leq c_n \widehat{f}_{\eta(n), \tau}(x, \underline{\theta}) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0$ .

En remplaçant, dans l'expression de  $\delta_s^{(n)}$  on obtient

$$\widetilde{\delta}_s^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} (x \widehat{q}_{n, \tau}(x, \underline{\theta}) - 1) Y(s-1+S\tau), \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

### Lemme 5.5.1

Soit  $(\bar{\theta}_n)$  une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\theta}$  et soit  $\widetilde{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = K' \widetilde{\delta}^{(n)}$ .

Alors, nous avons, sous les hypothèses (H1) – (H4) :

$$\widetilde{\Delta}_f^{(n)}(\bar{\theta}_n) - \Delta_f^{(n)}(\bar{\theta}_n) = o_p(1),$$

pour  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n) c_n \rightarrow 0$  et  $n\eta(n)^3 c_n^{-2} g_n^{-2} \rightarrow \infty$ .

**Lemme 5.5.2**

$\hat{I}_n(\bar{\theta}_n) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[ Z_{s,\tau}^{(n)}(\bar{\theta}_n) \hat{q}_{n,\tau} \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\bar{\theta}_n), \bar{\theta}_n \right) - 1 \right]^2 \right)$  est un estimateur consistant

de l'information de Fisher  $I(f)$ , i.e.,

$$\hat{I}_n(\bar{\theta}_n) = I(f) + o_p(1).$$

La preuve est similaire à celle de Linton (1993) basée sur Kreiss (1987).

La proposition suivante établit le test adaptatif du modèle  $ARCH(q)$  classique contre un autre périodique.

**Proposition 5.5.1 (Bentarzi et Merzougui (2009c))**

Sous les hypothèses (H1) – (H4), nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , la statistique du test

$$\tilde{Q}_f^{(n)}(\hat{\underline{\theta}}^{(n)}) = \tilde{\Delta}_{II,f}^{(n)'}(\hat{\underline{\theta}}^{(n)}) \left( \hat{\Gamma}_{22}^{\Delta}(\hat{\underline{\theta}}^{(n)}) \right)^{-1} \tilde{\Delta}_{II,f}^{(n)}(\hat{\underline{\theta}}^{(n)}) > \chi_{q(S-1), 1-\alpha}^2,$$

est telle que :

- i) le niveau asymptotique est  $\alpha$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ ,
- ii) est un test adaptatif locale de  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\mathcal{I}})$ , i.e., pour tester  $\underline{h} = \underline{0}$  contre  $\underline{h} \neq \underline{0}$ , avec un niveau asymptotique  $\alpha$  et  $f \in F^+$ ,
- iii) La puissance asymptotique de ce test est :

$$1 - \mathcal{F}(\chi_{1-\alpha}^2; q(S-1), \underline{h}' \Gamma_{22}^{\Delta}(\hat{\underline{\theta}}^{(n)}) \underline{h}), \text{ sous } H_f^{(n)}(\underline{\Theta} + \underline{\nu}^{(n)} \underline{\mathcal{I}}).$$

**Preuve :** Il découle des deux Lemmes, 5.5.1 et 5.5.2, que la statistique donnée par la Proposition 5.4.1, avec la reparamétrisation nécessaire, est équivalente, en probabilité, à celle donnée par la Proposition 5.5.1

## 5.6 Résultats de simulation

Quelques simulations sont exécutées pour étudier le test adaptatif. Premièrement, le modèle  $M.1$  ( $ARCH(1)$  non périodique) est utilisé dans le but de calculer les niveaux empiriques des tests obtenus. Ensuite, quatre modèles périodiques, de taille  $n$  petite, modéré et relativement grande et pour  $S = 4, 7$ , sont utilisés pour calculer les puissances empiriques des tests. Les modèles  $M.2$  et  $M.3$  sont périodiquement stationnaires mais pour les modèles  $M.2'$  et  $M.3'$  il y a quelques saisons proches ou sur les bords de non stationnarité. Pour chaque processus générateur de données, on considère 1000 répétitions Monte Carlo et on reporte les fréquences des cas où la périodicité est correctement identifiée.

Les densités de probabilité considérées des processus des innovations sont la loi normale standard et la fameuse loi de Kreiss :

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right),$$

$$f_2(x) = \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x-3)^2}{2}\right) + \frac{0.5\sqrt{10}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\sqrt{10}x+3)^2}{2}\right).$$

$M.1$  :  $ARCH(1)$  classique

$$y_t = \sigma_t(\underline{\theta})\varepsilon_t,$$

$$\sigma_t^2(\underline{\theta}) = 1 + 0.7 y_{t-1}^2,$$

pour ce modèle nous avons obtenus les résultats suivants

Table 1 : Niveaux empiriques du test adaptatif pour  $M.1$  et  $S = 4$

5%	n	100	200	300	400	500	10%	n	100	200	300	400	500
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.0480	0.0490	0.0480	0.0530	0.0410			0.1160	0.1020	0.0960	0.0940	0.0940
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.0570	0.0440	0.0380	0.0490	0.0400			0.1030	0.0800	0.1020	0.1000	0.0980

Table 2 : Niveaux empiriques du test adaptatif pour  $M.1$  et  $S = 7$

5%	n	140	210	350	420	560	10%	n	140	210	350	420	560
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.0550	0.0490	0.0570	0.0510	0.0610			0.1160	0.1010	0.1080	0.0970	0.1150
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.0530	0.0480	0.0480	0.0570	0.0510			0.0950	0.1140	0.1100	0.0970	0.0990

Et pour étudier la puissance empirique du test obtenu, on considère le modèle autorégressif conditionnellement hétéroscédastique périodique, de période  $S$ , d'ordre un,  $PARCH(1)_S$  :

$$y_{s+S\tau} = \sigma_{s+S\tau}(\underline{\theta}) \varepsilon_{s+S\tau},$$

$$\sigma_{s+S\tau}^2(\underline{\theta}) = 1 + \theta_{s,1} y_{s-1+S\tau}^2,$$

où le vecteur des paramètres est  $\underline{\theta} = (\theta_{1,1}; \dots; \theta_{S,1})'$ .

$M.2 : PARCH(1)_4 \quad \underline{\theta} = (0.3; 0.7; 0.4; 0.6),$

$M.3 : PARCH(1)_7 \quad \underline{\theta} = (0.3; 0.7; 0.4; 0.6; 0.1; 0.9; 0.5)$  qui sont donnés en Tables 3 et 4.

Table 3 : Puissances empiriques du test adaptatif pour  $M.2$

5%	n	100	200	300	400	500	10%	n	100	200	300	400	500
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.4750	0.5960	0.6520	0.7150	0.7750			0.5820	0.7010	0.7580	0.7900	0.8180
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.7150	0.8150	0.8740	0.8840	0.9170			0.7690	0.8630	0.8880	0.9210	0.9360

Table 4 : Puissances empiriques du test adaptatif pour  $M.3$

5%	n	140	210	350	420	560	10%	n	140	210	350	420	560
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.7030	0.7680	0.8730	0.9010	0.9330			0.8040	0.8470	0.9190	0.9300	0.9610
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.8720	0.9210	0.9610	0.9660	0.9820			0.9090	0.9410	0.9770	0.9810	0.9910

On considère maintenant des modèles avec des saisons proches ou sur les bords de non stationnarité. Le vecteur des paramètres est  $\underline{\theta} = (\theta_{1,1}; \dots; \theta_{S,1})'$ .

$M.2' : PARCH(1)_4 \quad \underline{\theta} = (0.95; 1.2; 1; 0.45),$

$M.3' : PARCH(1)_7 \quad \underline{\theta} = (0.9; 1; 1.1; 0.8; 0.75; 1.15; 0.95)$  qui sont donnés en Tables 5 et 6.

Table 5 : Puissances empiriques du test adaptatif pour  $M.2'$

5%	n	100	200	300	400	500	10%	n	100	200	300	400	500
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.6750	0.8050	0.8780	0.8920	0.9370			0.7550	0.8580	0.9050	0.9360	0.9540
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.7760	0.8750	0.9220	0.9520	0.9630			0.8200	0.9200	0.9450	0.9710	0.9780

Table 6 : Puissances empiriques du test adaptatif pour  $M.3'$

5%	$S$	140	210	350	420	560	10%	$S$	140	210	350	420	560
$f_1$	$\tilde{\phi}$	0.8040	0.8850	0.9390	0.9620	0.9810			0.8850	0.9350	0.9730	0.9770	0.9900
$f_2$	$\tilde{\phi}$	0.9180	0.9680	0.9890	0.9920	0.9940			0.9380	0.9660	0.9870	0.9940	0.9960

A partir des tables 1 et 2, les résultats montrent que les niveaux empiriques du test adaptatif sont acceptables et très proches des niveaux correspondants 5% et 10%. Les résultats, reportés dans les tables 3 et 4, montrent clairement que la puissance augmente avec la taille  $n$  et sous la distribution de Kreiss le test est plus puissant que sous la distribution normale. Finalement, des tables 5 et 6, on remarque que quand il y a quelques saisons proches ou sur les bords de non stationnarité le bon comportement du test adaptatif est maintenu.

# Chapitre 6

## Estimation Adaptative des Modèles *ARCH* Périodique

### 6.1 Introduction

La volatilité clustering est une importante caractéristique des séries temporelles financière et a des implications majeures pour l'estimation et test des modèles de prix des actifs, pour prendre en compte la volatilité plusieurs chercheurs ont utilisé les modèles *ARCH* et ses variantes développé par Engle (1982) Bollerslev (1986). La méthode d'estimation préférée dans les modèles *ARCH* est le maximum de vraisemblance elle produit des estimateurs efficaces consistants et asymptotiquement normal si la fonction de densité de probabilité de l'erreur est correctement spécifiée. Dans plusieurs études empiriques, l'hypothèse la plus commune sur la distribution des erreurs est la normalité mais cette hypothèse est rejetée très souvent, par conséquent les chercheurs utilisent d'autres densités qui sont plus proches des données sous étude. Linton (1993) a construit, pour ce modèle, des estimateurs adaptatifs ie asymptotiquement équivalent à l'*EMV* quand la densité des innovations est inconnue mais symétrique. Pour les modèles de types *ARCH* les paramètres de la variance ne sont pas généralement adaptativement estimable : Linton (1993), Gonzalez-Rivera (1997) et d'autres recherches se sont dirigés vers la recherche de différentes spécifications de l'équation de variance qui ramène la propriété d'adaptativité. Ce chapitre est une généralisation au cas périodique de l'article de Linton (1993), pour cette raison on adopte la spécification sous jacente.

Le reste de ce chapitre est organisé comme suit. Dans la section suivante, on revoie brièvement les modèles *ARCH* périodiques et on donne les notations, définitions et conditions de régularités de bases de ces modèles, nécessaires pour les sections restantes. Dans la troisième section, on établit, en adaptant les conditions de Swensen (1985) à notre modèle *ARCH* périodique, la propriété (*LAN*). En plus, la Quadratique Asymptotique Locale (*LAQ*), la Normalité Asymptotique Locale (*LAN*) et la linéarité Asymptotique Locale de la suite centrale sont obtenues. Une estimation adaptative des paramètres inconnus du *ARCH* périodique est établie, pour le cas où la densité des innovations est supposée être connue, dans la quatrième section. D'un autre côté, la cinquième section, est consacrée à la construction, dans un contexte semi-paramétrique, de l'estimation adaptative quand cette densité des innovations est non spécifiée mais symétrique.

## 6.2 Modèles et Hypothèses

### 6.2.1 Modèle Autorégressif Conditionnellement Hétéroscédastique Périodique

Un processus du second ordre  $\{y_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est dit suivre le modèle *ARCH* ( $q$ ) périodique, de période  $S$  ( $S \geq 2$ ), s'il est solution de l'équation aux différences non linéaire stochastique périodique de la forme :

$$y_t = \sigma_t(\underline{\theta}) \varepsilon_t, \quad (6.2.1a)$$

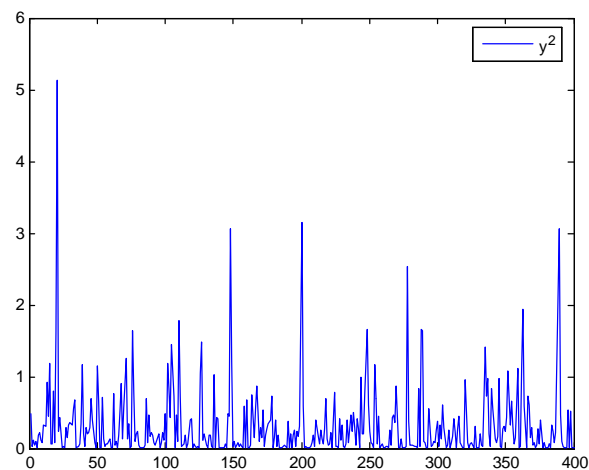
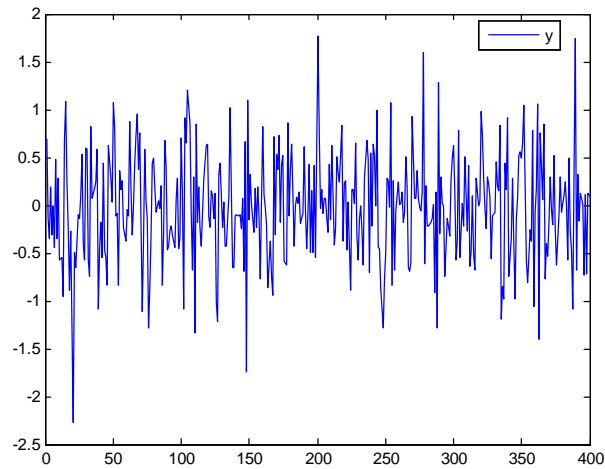
$$\sigma_t^2(\underline{\theta}) = c_t + \sum_{j=1}^q \theta_{t,j} y_{t-j}^2, \quad (6.2.1b)$$

où  $\{\varepsilon_t, t \in \mathbb{Z}\}$  est un processus bruit blanc, i.e., une suite de variables indépendantes identiquement distribuées, de moyenne 0 et, sans perte de généralité, de variance 1, de densité de probabilité  $f(\cdot)$ , pas nécessairement Gaussienne.

Les paramètres  $c_t$  et  $\theta_{t,j}$  sont périodiques, dans le temps, de période  $S$ , i.e.,  $c_{t+kS} = c_t$  et  $\theta_{t+kS,j} = \theta_{t,j}$ ,  $j = 1, \dots, q$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$ . En plus, pour la positivité de la variance conditionnelle ces paramètres sont supposés satisfaire :  $c_t > 0$  et  $\theta_{t,j} \geq 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{Z}$  et  $j = 1, \dots, q$ .

La Figure 2.1, montre une trajectoire simulée d'un processus *ARCH* périodique, générée

d'un  $ARCH(1)$  de période 2 avec  $\theta = (0.05, 0.7, 0.3, 0.1)$  et où  $\varepsilon_t \rightsquigarrow N(0, 1)$ .



Notons  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  une suite des hypothèses nulles sous laquelle  $\{y_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle (2.1), où  $\underline{\theta} = (\underline{\theta}'_1; \underline{\theta}'_2; \dots; \underline{\theta}'_S)'$  avec  $\underline{\theta}'_s = (c_s, \theta_{s,1}, \dots, \theta_{s,q})'$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$  la suite des hypothèses alternatives sous laquelle la suite  $\{y_t^{(n)}, t \in \mathbb{Z}\}$  est une suite de réalisations d'un processus satisfaisant le modèle  $ARCH$  périodique (6.2.1), où

$$\underline{\theta}^{(n)} = \left( \underline{\theta}_1^{(n)}; \underline{\theta}_2^{(n)}; \dots; \underline{\theta}_S^{(n)} \right)',$$

$$\underline{\theta}_s^{(n)} = \left( c_s + \frac{\eta_s^{(n)}}{\sqrt{n}}, \theta_{s,1} + \frac{h_{s,1}^{(n)}}{\sqrt{n}}, \dots, \theta_{s,q} + \frac{h_{s,q}^{(n)}}{\sqrt{n}} \right)', \quad s = 1, \dots, S,$$

tel que  $\sup_n \left( \eta_s^{(n)2} + h_{s,j}^{(n)2} \right) < \infty$ ,  $s = 1, \dots, S$ . Les quantités  $\eta_s^{(n)}$  et  $h_{s,j}^{(n)}$ ,  $s = 1, \dots, S$ , peuvent être interpréter comme des perturbations locales des paramètres  $c_s$  et  $\theta_{s,j}$  respectivement.

Soit  $\underline{\tau}^{(n)} = \left( \underline{\tau}_1^{(n)}, \underline{\tau}_2^{(n)}, \dots, \underline{\tau}_S^{(n)} \right)'$  où  $\underline{\tau}_s^{(n)} = \left( \eta_s^{(n)}, h_{s,1}^{(n)}, \dots, h_{s,q}^{(n)} \right)'$ ,  $s = 1, 2, \dots, S$ , alors on a

$$\underline{\theta}^{(n)} = \underline{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}, \quad \underline{\tau}^{(n)} \in \mathbb{R}^{(q+1)S} \text{ such that } \sup_n \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\tau}^{(n)} < \infty.$$

### 6.2.2 Hypothèses de régularités techniques

A travers ce chapitre, nous faisons les hypothèses suivantes :

Hypothèse (H1). Les paramètres  $\underline{\theta}$  du modèle *ARCH* ( $q$ ) périodique satisfont la condition nécessaire et suffisante de causalité de (2.1).

Hypothèse (H2). La densité des innovations  $f(\cdot)$  est supposée satisfaire les conditions suivantes :

(a)  $f(x) > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$  et elle est symétrique,

(b)  $f(\cdot)$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mu$  : il existe une

fonction  $\dot{f}(\cdot)$  tel que, pour  $-\infty < a < b < \infty$ , nous avons  $f(b) - f(a) = \int_a^b \dot{f}(x) d\mu(x)$ ,

(c) L'information de Fisher  $I(f) = \int (\phi_f(x))^2 f(x) dx$  est finie, où  $\phi_f = -x \frac{f'(x)}{f(x)} - 1$

est la fonction score du paramètre d'échelle  $\sigma$ ,

(d)  $\int x f(x) dx = 0$ ,  $\int x^2 f(x) dx = 1$ ,  $\int x^4 f(x) dx < \infty$  et  $\int (\phi_f(x))^4 f(x) dx < \infty$ .

Hypothèse (H3). Le processus  $(\sigma_t^2)_t$  satisfait  $E(\sigma_t^4) < \infty$ .

## 6.3 Normalité Asymptotique Locale

### 6.3.1 Suite de Rapports de Vraisemblance

Soit  $\underline{y}_0^{(n)} = (y_0^{(n)}, \dots, y_{-1+q}^{(n)})$  la valeur initiale dont les densités sont  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})$  et  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)})$  sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , respectivement. En plus, on suppose que  $f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)}) - f_0^{(n)}(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})$  converge en probabilité vers 0, quand  $\underline{\theta}^{(n)} \rightarrow \underline{\theta}$  avec  $n \rightarrow \infty$ .

La fonction de vraisemblance de la réalisation  $\underline{y}^{(n)} = (y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)})$  est :

$$f(\underline{y}^{(n)}, \underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) = f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) \prod_{t=1}^n f(\underline{y}^{(n)}/\underline{\theta}, \underline{y}_0^{(n)}) = f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}) \prod_{t=1}^n \left( \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) f(\varepsilon_t^{(n)}/\underline{y}_0^{(n)}) \right);$$

On note par  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ ,  $t \in \mathbb{Z}$ , les résidus calculés sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , respectivement. Alors, nous avons

$$\begin{aligned} Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) &= y_t^{(n)} \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) \quad \text{et} \quad Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = y_t^{(n)} \sigma_t^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}), \\ \sigma_t^2(\underline{\theta}^{(n)}) &= \sigma_t^2(\underline{\theta}) + \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \eta_t^{(n)} + \sum_{j=1}^q h_t^{(n)} y_{t-j}^2 \right), \\ Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) &= Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{\eta_t^{(n)} + \sum_{j=1}^q h_t^{(n)} y_{t-j}^2}{\sigma_t^2(\underline{\theta})} \right)^{-1/2}. \end{aligned}$$

Supposons, pour simplifier la notation, que la taille  $n$  est un multiple de  $S$ , i.e.,  $n = mS$ ,  $m \in \mathbb{N}^*$  et soit  $t = s + S\tau$ ,  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau = 0, 1, \dots, m-1$ .

Alors, le logarithme du rapports de vraisemblance,  $\Lambda_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = \Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right)$  pour  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  contre  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$ , est alors donné par :

$$\Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)}\right) = \sum_{t=1}^n \log \left( \frac{\sigma_t^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f(Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}))}{\sigma_t^{-1}(\underline{\theta}) f(Z_t^{(n)}(\underline{\theta}))} \right) + \log \left( \frac{f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta}^{(n)})}{f_0(\underline{y}_0^{(n)}; \underline{\theta})} \right),$$

par conséquent, nous avons, sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , l'approximation asymptotique locale :

$$\Lambda_f^{(n)}\left(\underline{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}}\underline{\tau}^{(n)}\right) = 2 \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \log \left( \frac{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})\right)}{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)} \right)^{1/2} + 0_p(1)$$

où le terme  $0_p(1)$  est due à l'effet de la valeur inobservable  $\underline{y}_0^{(n)}$ .

### 6.3.2 Normalité Asymptotique Locale

Définissons les variables aléatoires :

$$\begin{aligned} \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \left( \frac{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}^{(n)}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})\right)}{\sigma_{s,\tau}^{-1}(\underline{\theta}) f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)} \right)^{1/2} - 1, \\ \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \frac{1}{2} \Delta_{s,\tau}^{(n)'} \underline{I}_s^{*(n)} \quad \text{où } \Delta_{s,\tau}^{(n)} = \left( \Delta_{1s,\tau}^{(n)}, \Delta_{2s,\tau}^{(n)} \right)', \\ \Delta_{1s,\tau}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}), \\ \Delta_{2s,\tau}^{(n)} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left( \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-1+S\tau}^2, \dots, \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-q+S\tau}^2 \right)', \\ \phi_{s,\tau}^{(n)}\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) &= -Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \frac{f'\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)}{f\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right)} - 1, \\ \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta}) &= \left( \Delta_{1.}^{(n)'}, \dots, \Delta_{S.}^{(n)'} \right)' \in \mathbb{R}^{(q+1)S} \quad \text{où } \Delta_s^{(n)} = \left( \Delta_{1s.}^{(n)}, \Delta_{2s.}^{(n)} \right), \quad s = 1, \dots, S. \\ \Delta_{1s.}^{(n)} &= \sum_{\tau=0}^{m-1} \Delta_{1s,\tau}^{(n)} \quad \text{et} \quad \Delta_{2s.}^{(n)} = \sum_{\tau=0}^{m-1} \Delta_{2s,\tau}^{(n)}. \end{aligned} \tag{6.3.1}$$

Soit  $Y(s-1+S\tau) = \left( \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}), \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-1+S\tau}^2, \dots, \sigma_{s,\tau}^{-2}(\underline{\theta}) y_{s-q+S\tau}^2 \right)'$ ,  $s = 1, \dots, S$ , alors

$$\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) = \frac{1}{2} \phi\left(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})\right) \gamma_{s,\tau}^{(n)}$$

où

$$\gamma_{s,\tau}^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{I}_s^{*(n)'} Y(s-1+S\tau)$$

Considérons la matrice bloc diagonale de dimension  $(q + 1)S \times (q + 1)S$  :

$$\underline{\Gamma}(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} \Gamma_1(\underline{\theta}) & . & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma_2(\underline{\theta}) & \dots & 0 \\ \vdots & . & \ddots & \vdots \\ 0 & . & 0 & \Gamma_S(\underline{\theta}) \end{pmatrix}$$

où  $\Gamma_s(\underline{\theta})$  est la matrice de variance limite du vecteur  $Y(s - 1 + S\tau)$ ,

$$\Gamma_s(\underline{\theta}) = \begin{pmatrix} E(\sigma_s^{-4}(\underline{\theta})) & E(\sigma_s^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_s^{2'}) \\ E(\sigma_s^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_s^2) & E(\sigma_s^{-4}(\underline{\theta}) \underline{y}_s^2 \underline{y}_s^{2'}) \end{pmatrix}$$

où  $\underline{y}_s^2 = (y_{s-1}^2, \dots, y_{s-q}^2)'$ .

Sous ces notations, on peut formuler la proposition suivante qui donne une adaptation des conditions de Swensen.

**Proposition 6.3.1** (Conditions de Swensen Adaptées (1985))

Les conditions adaptées suivantes sont, sous les hypothèses (H1) – (H3), satisfaites :

- (1)  $\lim_{m \rightarrow \infty} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2 = 0,$
- (2)  $\sup_m E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) < \infty,$
- (3)  $\max_s \max_{\tau} \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| = 0_p(1),$
- (4)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) \right) - \frac{1}{4S} I(f) \underline{\Gamma}^{*(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \underline{\Gamma}^{*(n)} = 0_p(1),$
- (5)  $\sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left[ \zeta_{s+S\tau}^{(n)2}(\underline{\theta}) I_{\left[ \left| \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right| > \frac{1}{2} \right]} / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right] = 0_p(1),$   
 $\mathcal{B}_{n,s-1+S\tau}$  est la  $\sigma$ -algèbre engendrée par le passé du processus jusqu'au temps  $s - 1 + S\tau$ ,
- (6)  $E \left( \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) / \mathcal{B}_{n,s-1+S\tau} \right) = 0_p(1).$

**Preuve.** La preuve est reliée au premier lemme de Swensen (1985), la plupart des conditions suffisantes suivent directement par des arguments standards à partir de la forme des vraisemblances locales, la première condition est le point essentielle, pour l'ARCH classique elle a été démontrée par Linton (1993).

**Condition** (1). Nous avons  $Z_t^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) = Z_t^{(n)}(\underline{\theta}) \left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{-1/2}$ . En remplaçant  $\xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $\zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta})$  par leurs valeurs respectives dans l'expression de l'espérance, on obtient

$$\begin{aligned} E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2 &= \\ &= E \left( \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{\left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2 \right) \\ &= E \left( \sum_{s=1}^S (B_{1,s,m} + B_{2,s,m}) \right), \end{aligned}$$

où

$$B_{1,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{|y_{s-j+S\tau}| < K} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{\left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2 \right\},$$

et

$$B_{2,s,m} = \sum_{\tau=0}^{m-1} E \left\{ I_{|y_{s-j+S\tau}| \geq K} \left( \left( \frac{f \left( \frac{Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta})}{\left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)}{f \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \left(1 + \gamma_{s,\tau}^{(n)}\right)^{1/2}} \right)^{1/2} - 1 - \frac{1}{2} \gamma_{s,\tau}^{(n)} \phi \left( Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right) \right)^2 \right\},$$

$\forall j$  et  $s$  fixé.

pour un nombre réel quelconque  $K$ . Alors, afin de prouver que  $E \sum_{s=1}^S \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \xi_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) - \zeta_{s+S\tau}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)^2$

converge vers 0 quand  $m \rightarrow \infty$ , il suffit de montrer que  $B_{1,s,m}$  et  $B_{2,s,m}$  converge vers 0, pour  $s$  fixé,  $s = 1, \dots, S$  et pour un nombre réel positive quelconque  $K$ . Par conséquent, le reste de la preuve s'ensuit, puisque les processus  $y_{s+S\tau}$  et  $\sigma_{s+S\tau}^2$ ,  $\tau \in \mathbb{Z}$ , sont stationnaires pour  $s$  fixé, directement à partir du résultat de Linton (1993).

**Proposition 6.3.2**

Sous les conditions de régularités (H1) – (H3) et sous  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$ , nous avons, pour  $n \rightarrow \infty$  :

$$\begin{aligned} 1) \Lambda_f^{(n)} \left( \underline{\theta} + \frac{1}{\sqrt{n}} \underline{\tau}^{(n)} \right) &= \underline{\tau}^{(n)'} \Delta^{(n)}(\underline{\varphi}) - \frac{I(f)}{2S} \underline{\tau}^{(n)'} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1), \\ 2) L(\Delta^{(n)}(\underline{\theta}) / P_{n,\underline{\theta}}) &\implies N \left( 0, \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \right). \end{aligned}$$

**Corollaire 6.3.1**

Sous la propriété LAN  $\left( \underline{\theta}, \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}), \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta}) \right)$ , nous avons :

i)  $H_f^{(n)}(\underline{\theta})$  et  $H_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)})$  sont contiguës.

ii) La suite centrale  $\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta})$  satisfait la Linéarité Asymptotique Locale suivante :

$$\underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}^{(n)}) - \underline{\Delta}_f^{(n)}(\underline{\theta}) = -\frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \underline{\tau}^{(n)} + o_p(1).$$

## 6.4 Existence et construction d'estimateurs LAM

Une conséquence immédiate du théorème précédent est le résultat standard suivant sur la borne inférieure LAM pour le risque des estimateurs de  $\underline{\theta}$ . Soit  $l$  une fonction de perte de  $\mathbb{R}^{(q+1)S}$  à  $\mathbb{R}^+$  telle que  $l(x) = l(-x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}^{(q+1)S}$  où l'ensemble  $\{l \leq u\}$  est convexe pour chaque  $u > 0$ .

**Théorème 6.4.1** (Fabian et Hannan (1982)).

Soit  $\{Z_n\}$  une suite d'estimateurs quelconques de  $\underline{\theta}$  et supposons que la condition LAN

$\left(\underline{\theta}, \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}), \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta})\right)$  est vérifiée alors

$$\lim_{K \rightarrow \infty} \liminf_{n \rightarrow \infty} \sup_{\|\sqrt{n}(\underline{\theta} - \underline{\theta}_0)\| \leq K} E_{n, \underline{\theta}} l \{ \sqrt{n}(Z_n - \underline{\theta}) \} \geq \int l(x) dN \left( 0, \left( \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \right)^{-1} \right). \quad (6.4.1)$$

Le théorème précédant suggère la définition suivante de l'efficacité asymptotique de la suite d'estimateurs nommément une suite d'estimateurs est dite  $LAM(\underline{\theta})$  si elle atteint la borne (6.4.1).

On rappelle qu'une condition suffisante pour qu'un estimateur soit  $LAM$  est, donnée par Fabian et Hannan, qu'il soit  $\underline{\varphi}$ -régulier.

**Définition 6.4.2.**

La suite d'estimateurs  $\{Z_n\}$  est dite  $\underline{\theta}$ -régulière, sous LAN  $\left(\underline{\theta}, \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}), \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta})\right)$ , si

$$\sqrt{n}(Z_n - \underline{\theta}) - \left( \frac{I(f)}{S} \underline{\Gamma}(\underline{\theta}) \right)^{-1} \underline{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta}) = o_p(1).$$

Puisque les estimateurs réguliers dépendent du paramètre inconnu  $\underline{\theta}$ , alors on suppose l'existence d'estimateur préliminaire  $\sqrt{n}$ -consistent.

**Proposition 6.4.1 (Merzougui et Bentarzi (2009))**

Si  $\{\bar{\theta}_n\} \in \Theta$  est une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\theta} \in \Theta$ . Alors l'estimateur suivant  $\hat{\underline{\theta}}_n$  est régulier :

$$\hat{\underline{\theta}}_n = \bar{\theta}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S \hat{\underline{\Gamma}}_n(\bar{\theta}_n)^{-1}}{I(f)} \underline{\Delta}^{(n)}(\bar{\theta}_n),$$

où

$$\widehat{\Gamma}_n(\bar{\theta}_n) = \begin{pmatrix} \widehat{\Gamma}_{n,1}(\bar{\theta}_n) & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \widehat{\Gamma}_{n,2}(\bar{\theta}_n) & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \widehat{\Gamma}_{n,S}(\bar{\theta}_n) \end{pmatrix},$$

tel que  $\widehat{\Gamma}_{n,s}(\bar{\theta}_n) = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y(S\tau + s - 1) Y(S\tau + s - 1)'$  où  $\widehat{\Gamma}_n$  est un estimateur consistant de  $\Gamma(\theta)$ .

## 6.5 Construction d'estimateurs adaptatifs

L'estimateur donné dans la proposition précédente est valide et optimale quand la densité  $f$  est spécifiée. Cependant, dans la pratique,  $f$  reste inconnu. Dans cette section, on considère le modèle semi-paramétrique dont le paramètre est  $(\underline{\theta}, f)$  où  $\underline{\theta}$  est le paramètre d'intérêt et  $f$  est le paramètre de nuisance appartenant à la classe des fonctions de densités symétriques  $F^+$ . Un estimateur est dit adaptatif s'il a pour une fonction de densité inconnue  $f$  la même efficacité qu'un estimateur optimal dans le modèle où  $f$  est supposée connue. Linton (1993) a montré, pour  $S = 1$ , qu'on peut construire des estimateurs *LAM* pour le modèle (6.2.1) en supposant que la densité des erreurs est connu mais en supposant que  $f$  est inconnue on ne peut pas estimer séparément  $c_t$  et  $f$ , comme dans Linton la solution consiste à fixer  $c_t = 1$ ,  $\forall t$  et on redéfinit  $\underline{\theta}$  tel que  $\underline{\theta} = (\underline{\theta}'_1; \underline{\theta}'_2; \dots; \underline{\theta}'_S)' \in \mathbb{R}^{qS}$  avec  $\underline{\theta}_s = (\theta_{s,1}, \dots, \theta_{s,q})'$ . On commence par construire des estimateurs appropriés de la fonction score et de l'information de Fisher ensuite on montre que la suite d'estimateurs est régulière, la preuve dépend cruciallement de la symétrie de  $f$  d'où l'hypothèse (H.2). Comme dans Linton (1993), on estime  $f$  par la méthode du noyau, pour cette fin, les notations suivantes sont introduites :

$$i) \quad g(x; \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta^2}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\eta^2}\right), x \in \mathbb{R},$$

$$ii) \quad f_\eta(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x - y; \eta) f(y) dy,$$

$$iii) \quad \widehat{f}_{\eta,\tau}(x; \theta) = \frac{1}{2(m-1)} \sum_{\substack{\tau_0=0 \\ \tau_0 \neq \tau}}^{m-1} \{g(x + z_{s,\tau_0}, \eta) + g(x - z_{s,\tau_0}, \eta)\}; \tau = 0, \dots, m-1,$$

Soit  $\widehat{q}_{n,\tau}(x, \theta)$  l'estimateur de  $\phi$

$$\hat{q}_{n,\tau}(x, \theta) = \begin{cases} -\frac{1}{2} \frac{\hat{f}'_{\eta(n),\tau}(x, \theta)}{\hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta)}, & \text{si } \begin{cases} \hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta) \geq d_n, |x| \leq g_n \\ |\hat{f}'_{\eta(n),\tau}(x, \theta)| \leq c_n \hat{f}_{\eta(n),\tau}(x, \theta) \end{cases} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases},$$

avec  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0$ . Soit  $\tilde{\Delta}_s(\underline{\theta}_s) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{\tau=0}^{m-1} (-x \hat{q}_{n,\tau}(x, \underline{\theta}) - 1) Y(s - 1 + S\tau)$  et l'estimateur  $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta})$  de  $\Delta^{(n)}(\underline{\theta})$  par  $\tilde{\Delta}^{(n)}(\underline{\theta}) = \left( \tilde{\Delta}_1(\underline{\theta}_1), \tilde{\Delta}_2(\underline{\theta}_2), \dots, \tilde{\Delta}_S(\underline{\theta}_S) \right)'$ , et l'estimateur sans biais  $\hat{I}_n(\bar{\theta}_n) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[ Z_{s,\tau}^{(n)}(\bar{\theta}_n) \hat{q}_{n,\tau}(Z_{s,\tau}^{(n)}(\bar{\theta}_n), \bar{\theta}_n) + 1 \right]^2 \right)$  de  $I(f)$ .

### Lemme 6.5.1

Soit  $(\bar{\theta}_n)$  une suite discrète d'estimateurs  $\sqrt{n}$ -consistents pour  $\underline{\theta}$ . Alors, sous les hypothèses  $H1 - H4$ , nous avons :  $\tilde{\Delta}_f^{(n)}(\bar{\theta}_n) - \Delta_f^{(n)}(\bar{\theta}_n) = 0_p(1)$ ,  
pour  $c_n \rightarrow \infty, g_n \rightarrow \infty, \eta(n) \rightarrow 0, d_n \rightarrow 0, \eta(n) c_n \rightarrow 0$  et  $n\eta(n)^3 c_n^{-2} g_n^{-2} \rightarrow \infty$ .

**Lemme 6.5.2** (Estimation de l'information de Fisher).

$$\hat{I}_n(\underline{\theta}) = \frac{1}{S} \sum_{s=1}^S \left( \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left[ Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}_s) \hat{q}_{n,\tau}(Z_{s,\tau}^{(n)}(\underline{\theta}_s), \underline{\theta}_s) + 1 \right] \right),$$

est un estimateur consistant de  $I(f_1)$ , *i.e.*,  $\hat{I}_n(\underline{\varphi}) = I(f) + 0_p(1)$ .

La proposition suivante établit les estimateurs adaptatifs pour les paramètres des modèles *ARCH* ( $q$ ) périodiques.

### Proposition 6.5.1. (Merzougui et Bentarzi (2009))

Sous les hypothèses  $H1 - H4$ , l'estimateur  $\tilde{\underline{\theta}}_n$  défini par :

$$\tilde{\underline{\theta}}_n = \bar{\theta}_n + \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{S \hat{\Gamma}_n(\bar{\theta}_n)^{-1}}{\hat{I}_n} \tilde{\Delta}^{(n)}(\bar{\theta}_n),$$

est un estimateur *LAM*, par conséquent, il est adaptatif.

**Preuve.** La preuve de cette proposition repose sur les deux lemmes précédents qui sont établis dans Linton (1993) pour  $S = 1$ .

# Chapitre 7

## Conclusion et perspectives

Le but de ce document a été de mettre en évidence l'utilité des procédures, test et estimation, adaptatives dans l'analyse des séries temporelles. Ces procédures sont asymptotiquement optimales, elles sont simple à implémenter et ont un bon comportement dans les petits échantillons. L'étude par simulation a montré le gain apporter par la méthode adaptative quand la densité des innovations est loin de la loi normale.

Nous avons abordé une classe de séries temporelles linéaires : les modèles *PAR* et deux classes non linéaires : les modèles *SETAR* périodiques et les modèles *ARCH* périodiques.

Il y a plusieurs généralisations possibles des résultats à d'autre classe de modèles par exemple : les modèles *AR* exponentiel périodiques, *AR* à coefficients aléatoires périodiques, bilinéaires périodiques, *PGARCH*, les modèles *PARMA* à erreurs *GARCH* périodiques, les modèles multivariés périodiques..etc.

Dans ce travail nous avons considérés uniquement les séries temporelles stationnaires alors qu'il y a un intérêt croissant des procédures efficaces pour les séries temporelles non stationnaires. Une autre question importante serait de relâcher l'exigence de symétrie pour obtenir des procédures adaptatives pour une classe de densités plus large.

Pour les modèles *PAR* et *ARCH* périodiques il y a une abondance de travaux par plusieurs chercheurs alors que pour les modèles *SETAR* périodiques il reste beaucoup de choses à faire à commencer par l'ergodicité, l'existence de solution stationnaire unique et une théorie d'identification avec l'estimation des paramètres de seuils supposé dans ce travail connu et fixer à 0, les critères de choix de l'ordre et les tests de non linéarités et l'estimation des

paramètres. Ces modèles sont en effet très complexes et la théorie dans ce domaine est encore fort incomplète.

# Troisième partie

## Annexe

# Chapitre 8

## Annexe A

### 8.1 Estimation des moindres carrés d'un PSETAR(2,1,1)

En posant  $t = i + S\tau$  et  $n = Sm$ , le modèle *AR* à seuils *PSETAR*(2, 1, 1) s'écrit :

$$Y_{S\tau+i} = \varphi_{i,1}Y_{S\tau+i-1}^- + \varphi_{i,2}Y_{S\tau+i-1}^+ + \varepsilon_{S\tau+i}, \quad i = 1, \dots, S, \quad \tau = 0, \dots, m-1$$

Les estimateurs des moindres carrés des paramètres  $\varphi_{i,1}$ ,  $\varphi_{i,2}$  et  $\sigma_i$  sont :

$$\widehat{\varphi}_{i,1} = \frac{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i} Y_{S\tau+i-1}^-}{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2}} \quad (1)$$

$$\widehat{\varphi}_{i,2} = \frac{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i} Y_{S\tau+i-1}^+}{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{+2}} \quad (2)$$

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} (Y_{S\tau+i} - \widehat{\varphi}_{i,1} Y_{S\tau+i-1}^- - \widehat{\varphi}_{i,2} Y_{S\tau+i-1}^+)^2 \quad (3)$$

Nous allons établir la consistance des estimateurs et leur normalité asymptotique :

#### **Théorème**

Si le modèle *PSETAR*(2, 1, 1) est stationnaire alors :

i)  $\widehat{\varphi}_{i,1}$ ,  $\widehat{\varphi}_{i,2}$  et  $\widehat{\sigma}_i^2$  sont des estimateurs consistant des paramètres  $\varphi_{i,1}$ ,  $\varphi_{i,2}$  et  $\sigma_i^2$  respectivement.

ii) En plus nous avons :

$$\begin{aligned} \sqrt{m} (\hat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{D} N \left( 0, \sigma_i^2 E (X_{i-1}^{-2})^{-1} \right) \\ \sqrt{m} (\hat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2}) &\xrightarrow[m \rightarrow \infty]{D} N \left( 0, \sigma_i^2 E (X_{i-1}^{-2})^{-1} \right). \end{aligned}$$

**Preuve**

i) En remplaçant  $Y_{S\tau+i}$  dans la formule (1) on obtient :

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{i,1} &= \frac{\sum_{\tau=0}^{m-1} (\varphi_{i,1} Y_{S\tau+i-1}^- + \varphi_{i,2} Y_{S\tau+i-1}^+ + \varepsilon_{S\tau+i}) Y_{S\tau+i-1}^-}{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2}} \\ &= \frac{\varphi_{i,1} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2} + \varphi_{i,2} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^+ Y_{S\tau+i-1}^- + \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{S\tau+i} Y_{S\tau+i-1}^-}{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2}} \\ &= \varphi_{i,1} + \frac{\sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{S\tau+i} Y_{S\tau+i-1}^-}{\sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2}}. \end{aligned} \tag{4}$$

puisque  $Y_{S\tau+i-1}^+ Y_{S\tau+i-1}^- = 0$ .

Le processus  $Y_t$  etant stationnaire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{d\tau+i-1}^{-2} &\rightarrow E (Y_{i-1}^{-2}) \\ \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{d\tau+i} Y_{d\tau+i-1}^- &\rightarrow E(\varepsilon_i) E (Y_{i-1}^{-2}) = 0 \end{aligned}$$

alors  $:\hat{\varphi}_{i,1} \rightarrow \varphi_{i,1}$  quand  $m \rightarrow \infty$ . De la même manière  $\hat{\varphi}_{i,2} \rightarrow \varphi_{i,2}$  quand  $m \rightarrow \infty$ .

A partir de (3) on a :

$$\begin{aligned}
 \widehat{\sigma}_i^2 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( (\varphi_{i,1} Y_{S\tau+i-1}^- + \varphi_{i,2} Y_{S\tau+i-1}^+ + \varepsilon_{S\tau+i}) - \widehat{\varphi}_{i,1} Y_{S\tau+i-1}^- - \widehat{\varphi}_{i,2} Y_{S\tau+i-1}^+ \right)^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \left( \varepsilon_{S\tau+i} - (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) Y_{S\tau+i-1}^- - (\widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2}) Y_{S\tau+i-1}^+ \right)^2 \\
 &= \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{S\tau+i}^2 - 2 (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^- \varepsilon_{S\tau+i} - 2 (\widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2}) \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^+ \varepsilon_{S\tau+i} + \\
 &\quad (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1})^2 \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2} - (\widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2})^2 \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{+2}.
 \end{aligned}$$

En utilisant la relation (4) on obtient :

$$\widehat{\sigma}_i^2 = \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} \varepsilon_{S\tau+i}^2 - (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^- \varepsilon_{S\tau+i} - (\widehat{\varphi}_{i,2} - \varphi_{i,2}) \frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^+ \varepsilon_{S\tau+i}$$

D'après les résultats précédents on a : quand  $m \rightarrow \infty$ ,  $\widehat{\sigma}_i^2 \rightarrow E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2$ .

ii) A partir de (4) :

$$\sqrt{m} (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) = \frac{\frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^- \varepsilon_{S\tau+i}}{\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2}}.$$

Puisque  $\{Y_{S\tau+i-1}^- \varepsilon_{S\tau+i}\}_\tau$  est une suite de différence de martingale donc on applique le théorème centrale limite des martingales (cf. Hall et Heyde, (1980)) :

$$\frac{1}{m} \sum_{\tau=0}^{m-1} Y_{S\tau+i-1}^{-2} \varepsilon_{S\tau+i}^2 \rightarrow E(X_{i-1}^{-2}) E(\varepsilon_i^2) = \sigma_i^2 E(X_{i-1}^{-2}).$$

d'où

$$\sqrt{m} (\widehat{\varphi}_{i,1} - \varphi_{i,1}) \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{D} N\left(0, \sigma_i^2 E(X_{i-1}^{-2})^{-1}\right).$$

# Chapitre 9

## Annexe B

### 9.1 Distance de Le Cam

Considérons une expérience statistique  $\mathcal{E} = (\chi, A, P = \{p_\theta\})$  indicée par  $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ . Une procédure statistique  $\rho$  (à valeurs dans un espace de décisions  $D$ ) et une fonction de perte  $W$  définissent une fonction de risque  $\theta \rightarrow \mathbf{R}_W^\rho(\theta)$ .

Notons  $R(P, D, W)$  l'ensemble de toutes les fonctions de risque qui peuvent être réalisées dans  $P$  au moyen de procédures statistiques à valeurs dans  $D$ , si la fonction de perte  $W$  est utilisée. Plus précisément

$$R(P, D, W) = \{r : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} / \exists \rho \text{ tel que } \mathbf{R}_W^\rho(\theta) \leq r(\theta)\},$$

et notons  $\overline{R}(P, D, W)$  la fermeture ponctuelle de  $R(P, D, W)$  :

$$\overline{R}(P, D, W) = \left\{ r : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R} / \forall \theta, r(\theta) = \lim_{i \rightarrow \infty} r_i(\theta) \text{ pour une suite } r_i \in R(P, D, W) \right\},$$

Soient  $\mathcal{E}_1 = (\chi_1, A_1, P_1 = \{p_{1,\theta}\})$  et  $\mathcal{E}_2 = (\chi_2, A_2, P_2 = \{p_{2,\theta}\})$  deux expériences statistiques indicées par le même paramètre  $\theta$ .

**Définition 1.** La déficience  $\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2)$  de  $\mathcal{E}_1$  par rapport à  $\mathcal{E}_2$  est

$$\begin{aligned} \delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) &= \inf \{ \varepsilon \in [0, 1] / \forall W \text{ à valeur dans } [0, 1], \forall r_2 \in R(P_2, D, W), \\ &\quad \exists r_1 \in \overline{R}(P_1, D, W) : r_1(\theta) \leq r_2(\theta) + \varepsilon \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^k \}. \end{aligned}$$

**Définition 2.** La distance de Lecam  $\Delta(E_1, E_2)$  entre  $E_1$  et  $E_2$  est

$$\Delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2) = \max(\delta(\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2), \delta(\mathcal{E}_2, \mathcal{E}_1))$$

c'est à dire toutes les fonctions de risques  $\theta \rightarrow r(\theta)$  réalisables dans  $\mathcal{E}_1$  le sont dans  $\mathcal{E}_2$  à  $\pm\Delta$  près. Cette distance induit naturellement un concept de convergence de suites d'expériences.

Soient  $\mathcal{E} = (\chi, A, P = \{p_\theta\})$  et  $\mathcal{E}^{(n)} = (\chi^{(n)}, A^{(n)}, P^{(n)} = \{p_\theta^{(n)}\})$ ,  $n \in \mathbb{N}$  des expériences indicées par le même paramètre  $\theta$ .

**Définition3.**  $\mathcal{E}^{(n)}$  converge faiblement vers  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $\forall m \in \mathbb{N}$  et  $\forall \Theta_0 = \{\theta_1, \dots, \theta_m\}$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Delta(\mathcal{E}_{\Theta_0}^{(n)}, \mathcal{E}_{\Theta_0}) = 0,$$

où  $\mathcal{E}_{\Theta_0}^{(n)} = (\chi^{(n)}, A^{(n)}, \{p_\theta^{(n)}/\theta \in \Theta_0\})$  et  $\mathcal{E}_{\Theta_0} = (\chi, A, \{p_\theta/\theta \in \Theta_0\})$ .

C'est cette convergence ponctuelle en  $\theta$ , mais uniforme en les fonctions de risques qui est adoptée, c'est à dire l'ensemble des fonctions réalisable dans l'expérience limite  $\mathcal{E}$  est la limite ponctuelle et uniforme de celles réalisables dans  $\mathcal{E}^{(n)}$ .

Il est extrêmement difficile de montrer que  $\mathcal{E}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}$  au moyen de la définition, ce qui explique l'intérêt du résultat suivant qui donne une condition nécessaire et suffisante très simple pour  $\mathcal{E}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}$  :

**Théorème (Le cam 1969) :**  $\mathcal{E}^{(n)} \rightarrow \mathcal{E}$  si et seulement si toutes les marges de dimension finie du processus de log-vraisemblance de  $\mathcal{E}^{(n)}$  convergent en distribution vers les marges correspondantes de  $\mathcal{E}$ , c'est à dire si et seulement si,  $\forall t \in \mathbb{R}^k$ , on a

$$\forall l \in \mathbb{N}, \forall s_1, \dots, s_l, \begin{pmatrix} \Lambda^{(n)}(s_1, t) \\ \vdots \\ \Lambda^{(n)}(s_l, t) \end{pmatrix} \xrightarrow{D} \begin{pmatrix} \Lambda(s_1, t) \\ \vdots \\ \Lambda(s_l, t) \end{pmatrix}, \text{ si } n \rightarrow \infty,$$

sous  $p_t^{(n)}$ , où  $\Lambda^{(n)}(s, t) = \log(dp_s^{(n)}/dp_t^{(n)})$  et  $\Lambda(s, t) = \log(dp_s/dp_t)$ .

En notant  $\Lambda(s, t) = \log(dp_s/dp_t)$  les log-vraisemblances associées à l'expérience  $\mathcal{E}_\theta^N = (\mathbb{R}^k, \mathbf{B}^k, P_\theta = \{N(\Gamma_\theta \tau, \Gamma_\theta)/\tau \in \mathbb{R}^k\})$ , on a  $\forall s_1, t \in \mathbb{R}^k$ ,

$$\begin{aligned} \Lambda(s_1, t) &= \Lambda(s_1, 0) - \Lambda(t, 0) \\ &= (s_1 - t)' \Delta - \frac{1}{2} (s_1 - t)' \Gamma_\theta (s_1 - t) \end{aligned}$$

puisque  $\Delta_\theta^{(n)} \xrightarrow{D} \Delta$ , sous  $p_{\theta+\nu_n t}^{(n)}$ , si  $n \rightarrow \infty$ , on obtient que

$$\Lambda^{(n)}(s_1, t) \xrightarrow{D} \Lambda(s_1, t), \text{ sous } p_{\theta+\nu_n t}^{(n)}, \text{ si } n \rightarrow \infty.$$

# Bibliographie

- [1] Aknouche, A., (2006). Etude théorique et algorithmique de la modélisation des séries chronologiques périodiques. Thèse de Doctorat. Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [2] Aknouche, A. and Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments for periodic GARCH models. *Statistics and Probability Letters*, 78, 3262-3268.
- [3] Aknouche A. and Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. *Journal of Time Series Analysis*, 28, 19-46.
- [4] Aknouche, A. and Guerbyenne, H. (2009). On some probabilistic properties of double periodic AR models. *Statistics & Probability Letters*, 79, 407-413.
- [5] Allal, J. and El Melhaoui, S. (2006). Optimal detection of exponential component in Autoregressive models. *Journal of Time Series Analysis*. Vol. 27, No. 6.
- [6] Beněs, V. E. (1967). Existence of Finite Invariant Measures for Markov Processes. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 18, 1058-1061.
- [7] Bengabrit, Y. and Hallin, M.(1998). Locally asymptotically optimal tests for  $AR(p)$  against diagonal bilinear dependence. *Journal of Statistical Planning Inference*, 68, 47-63.
- [8] Bentarzi, M. (1995). "Modèles de séries chronologiques à coefficients périodiques". Thèse de Doctorat es sciences. Institut de mathématiques, U.S.T.H.B, Alger, Algérie.
- [9] Bentarzi, M.(1998). Model-Building Problem of Periodically Correlated m-Variate Moving Average Processes. *Journal of Multivariate Analysis*. 66, 1-21.
- [10] Bentarzi, M., Guerbyenne, H. and Merzougui, M. (2009). Adaptive Estimation of Causal Periodic Autoregressive Model. *Comm. Simulation Comput.* 38, 1592-1609.

- [11] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1994). On the Invertibility of Periodic Moving Average Models. *Journal of Time Series Analysis*. Vol 15, N°3, 263-268.
- [12] Bentarzi, M. and Hallin, M. (1996). Locally Optimal Tests against Periodic Autoregression : Parametric and Nonparametric Approaches. *Journal of Econometrics Theory*. Vol 12, 88-112.
- [13] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2007). Moments of Mixture Periodic Autoregressive Models. Revised.
- [14] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2009a). Adaptive Test for Periodicity in Self-Exciting Threshold Autoregressive Models. *Comm. Simulation Comput.* 38, 1-19.
- [15] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2009b). Adaptive Estimation of Periodic First Order Threshold Autoregressive Model. Submitted.
- [16] Bentarzi, M. and Merzougui, M. (2009c). Adaptive Test for Periodicity in Autoregressive Conditional Heteroskedastic Processes. Submitted.
- [17] Berkes, I. and Horváth, L. (2003). *Asymptotics in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
- [18] Berkes, I., Horváth, L. and Kokoska, P. S. (2003). *Asymptotics in Statistics*. Springer-Verlag, New York.
- [19] Bibi, A. and Aknouche, A. (2009). On the probabilistic properties of periodic GARCH processes. *Mathematical Methods of Statistics*,17, 305-316.
- [20] Bickel, P. J., (1982). On adaptive Estimation. *Ann.Statist.***10** 647-671.
- [21] Bickel, P. J., Klaassen, C. A. J., Ritov, Y. and Wellner, J. (1993). *Efficient and Adaptive Statistical Inference for Semiparametric models*. John Hopkins University Press.
- [22] Bloomfield, P., Hurd, H. L. and Lund, R. B.(1994). Periodic correlation in stratospheric ozone data. *J. Time. Ser. Anal.* 15,127-150.
- [23] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, 31, 307-327.
- [24] Bollerslev, T. and Ghysels, E. (1996). Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Business and Economic Statistics*, 14, 139-152.
- [25] Bougerol, P. and Picard, N. (1992a). Stationarity of *GARCH* processes and some non-negative time series. *Journal of Econometrics*, 52, 115-127.

- [26] Chan, K. S. (1990). Testing for Threshold Autoregression. *The Annals of Statistics*. Vol. 18, No. 4, 1886-1894.
- [27] Chan, K. S. (1993). Consistency and limiting distribution of the Least Squares Estimator of a Threshold Autoregressive Model. *The Annals of Statistics*. Vol. 21, No. 1, 520-533.
- [28] Chan, K. S., Petrucelli, J. D., Tong, H. and Woolford, S. W. (1985). A multiple-threshold  $AR(1)$  model. *J.Appl. Prob.*, **22**, 267-279.
- [29] De Gooijer, J. G. and Anguera, A. V. (2000). Modelling Seasonalities in Nonlinear Inflation Rates using SEASETARs. *Tinbergen Institute Discussion Paper*, TI 098/4.
- [30] Dempster, A. P., Laird, N. M., and Rubin, D. B. (1977). Maximum Likelihood From Incomplete Data via the EM Algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 39, 1 – 38.
- [31] Drost, F. C., Klaassen, C. A. J. and Werker, B. J. M. (1997). Adaptive estimation in Time Series Models. *The Annals of Statistics*, 25. 789-817.
- [32] El Melhaoui, S. (2003). Contribution à la résolution de problèmes de tests d'hypothèses paramétriques et non paramétriques dans quelques modèles de séries temporelles. Thèse de Doctorat. Faculté des Sciences, Université Mohammed 1er Oujda.
- [33] Engle, R. F. (1982). Autoregressive Conditional Heteroskedasticity with estimates of variance of U.K. Inflation. *Econometrica*, 50, 987-1008.
- [34] Fabian, V. and Hannan, J. (1982). On estimation and adaptive estimation for locally asymptotically normal families. *Z.Wahrsh.verw.gebiete* **59** 459-478.
- [35] Francq, C. and Zakoïan, J. M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure  $GARCH$  and  $ARMA-GARCH$  processes. *Bernoulli*, 10, 605-637.
- [36] Garel, B. and Hallin, M. (1995). Local asymptotic normality of multivariate ARMA processes with a linear trend. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* **47**, 551-579.
- [37] Gladyshev, E. G. (1961). Periodically correlated random sequences. *Soviet. Math.*, **2**, 385-88.
- [38] Ghysels, E., Hall, A. and Lee, H. S. (1996). On Periodic Structures and Testing for Seasonal Unit Roots. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 91, N.436, 1551-1559.

- [39] Gonzalez-Rivera, G. (1997). A note on adaptation in GARCH models. *Econometric Reviews* 16(1), 55-68.
- [40] Guerbyenne, H. (2007). Modèles de séries chronologiques conditionnellement hétéroscédastiques. Thèse de Doctorat. Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [41] Hájek, J. (1972). Local Asymptotic Minimax and Admissibility in Estimation. *Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Stat. Proba. 1* 175-194. Univ. California Press.
- [42] Hájek, J. and Šidák, Z. (1967). *Theory of Rank Tests*, Academic Press, New York.
- [43] Hájek, J., Šidák, Z. and Sen, P. K. (1999). *Theory of Rank Tests*, Academic Press. (Second Edition).
- [44] Hall, P. and Heyde, C.C. (1980). *Martingale Limit Theory and Applications*. Academic Press, New York.
- [45] Jeganathan, P. (1995). Some aspects of asymptotic theory with applications to time series models. *Econometric Theory*, **11**, 818-887.
- [46] Koul, H. L. and Pflug, G. (1990). Weakly adaptive estimators in explosive autoregression. *Ann. Statist.*, **18**, 939-960.
- [47] Koul, H. L. and Schick, A. (1996). Adaptive estimation in a Random Coefficient Autoregressive Model. *The Annals of Statistics*, 24, 1025-1052.
- [48] Koul, H. L. and Schick, A. (1997). Efficient estimation in nonlinear autoregressive time series models. *Bernoulli*, 3, 247-277.
- [49] Kreiss, J. P. (1987a). On Adaptive Estimation in Stationary ARMA Processes. *The Annals of Statistics*. Vol 15, N°1, 112-133.
- [50] Kreiss, J. P. (1987b). On Adaptive Estimation in autoregressive models when there are nuisance functions. *Statistics and Decisions* 5 : 59-76.
- [51] Le Cam, L. (1960). Locally Asymptotically Normal Families of Distributions. Univ California Publ. Statist.3 37-98.
- [52] Le Cam, L. (1986). *Asymptotic Methods in Statistical Decision Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [53] Le Cam, L. and Yang, G. L. (1990). *Asymptotics in Statistics*. Springer-Verlag, New York.

- [54] Le, N. D., Martin, R. D. and Raftery, A. Z. (1996). Modeling flat stretches, bursts and outliers in time series using mixture transition distribution models. *Journal of the American Statistical Association* 91, 1504 – 14.
- [55] Lewis, P. A. W. and Ray, B. K. (2002). Nonlinear Modelling of Periodic Threshold Autoregressions using TSMARS. *J. Time. Series Anal.* Vol. 23, No. 4, 459-471.
- [56] Ling, S. (2003). Adaptive Estimators and Tests of Stationary and Nonstationary Short- and Long-Memory ARFIMA-GARCH Models. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 98, N 464. P. 955-967.
- [57] Ling, S. and McAleer, M. (2003). On Adaptive Estimation in Nonstationary ARMA Models With GARCH errors. *The Annals of Statistics*. 31, 642-674.
- [58] Ling, S., Tong.H. and Li, D. (2007). Ergodicity and Inversibility of Threshold *MA* models. *Bernoulli* 13(1), 161-168.
- [59] Linton, O. (1993). Adaptive Estimation in *ARCH* Models. *Econometric Theory* 9, 539–569.
- [60] Merzougui, M. and Bentarzi, M. (2009). Adaptive Estimation of Periodic Autoregressive Conditional Heteroskedastic Process. Submitted.
- [61] Moeanaddin, R. and Tong, H. (1988). A comparison of likelihood ratio test and CUSUM test for threshold autoregression. *The Statistician*, 37, 213-25.
- [62] Nelson, D. B. (1990). *ARCH* Models as Diffusion Approximations. *Journal of Econometrics*, 45, 7-38.
- [63] Osborn, D. R. and Smith, J. P. (1989). The performance of periodic autoregressive models in forecasting seasonal U. K. consumption. *Journal of Business and Economic Statistics*, 7,117-127.
- [64] Petrucci, J. and Davies, N. (1986). A Portmanteau test for self-exciting threshold autoregressive-type nonlinearity in time series. *Biometrika*, 73, 687-694.
- [65] Petrucci, J. D. and Woolford, S. W. (1984). A threshold *AR*(1) model. *J.Appl. Probab.*, 21, 270-286.
- [66] Roussas, G. G. (1979). Asymptotic distribution of the log-likelihood function for stochastic processes. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete*, 47, 31-46.

- [67] Salas, J. D, Duane C. Boes and Smith, R. A. (1982). Estimation of *ARMA* Models with Seasonal Parameters. *Water Resources Research*, **18**, 1006-1010.
- [68] Schick, A. (1986). On asymptotically efficient estimation in semi-parametric models. *Ann. Statist.*, **14**, 1139-1151.
- [69] Schick, A. (1987). A note on the construction of asymptotically linear estimators. *J. Statist. Plann. Inference* **16**, 89-105.
- [70] Schick, A. (1993). On efficient estimation in regression models. *Ann. Statist.*, **21**, 1486-1521.
- [71] Shao, Q. (2006). Mixture periodic autoregressive time series model. *Statistics & Probability Letters. Volume 76, Issue 6, Pages 609 – 618.*
- [72] Shin, D.W. and So, B. S. (1999). Unit Root Tests Based on Adaptive Maximum Likelihood Estimation. *Econometric Theory*. 15, 1-23.
- [73] Stein, C. (1956). Efficient nonparametric estimation and testing. In J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Vol. 1, pp. 187-195. Berkeley : University of California Press.
- [74] Stone, C. (1975). Adaptive maximum likelihood estimation of a location parameter. *Ann. Statist.* 3 267-284.
- [75] Swensen, A. R. (1985). The Asymptotic Distribution of the likelihood ratio for autoregressive time series with a regression trend. *Journal of Multivariate Analysis*. 16, 54-70.
- [76] Tong, H (1978). On threshold models. In *Pattern Recognition and Signal Processing*, (ed. C. H. Chen). Amsterdam : Sijhoff & Noordhoff.
- [77] Tong, H. (1983). *Threshold models in nonlinear time series*. New York. Springer.
- [78] Tong, H. and Lim, K. S. (1980). Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *J. Royal. Soc. Ser. B*, 4, 245-292.
- [79] Tong, H. (1990). *Nonlinear Time Series : a Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.
- [80] Tsay, R. S. (1989). Testing and Modeling Threshold Autoregressive Processes. *Journal of the American Statistical Association*. Vol. 84, 231-240.

- [81] Tsay, R. S. (1998). Testing and Modelling Multivariate Threshold Models. *Journal of the American Statistical Association*. 93 : 1188-202.
- [82] Ula, T. A. and Smadi, A. A. (1997). Periodic stationary conditions for periodic autoregressive moving average processes as eigenvalue problems. *Water Resources Research*, **33**, 1929-1934.
- [83] Vecchia, A. V., Obeysekera, J. T. and Salas, J. D. (1983). Aggregation and estimation for low-order periodic ARMA models. *Water Resources Research*, **19**, 1297-1306.
- [84] Wald, A. (1943). Tests of statistical hypotheses concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Amer. Math. Soc.* 54, 426-482.
- [85] Weiss, A. A. (1986). Asymptotic theory for *ARCH* models : estimation and testing. *Econometric Theory*, **2**, 107-131.
- [86] Wong, C. S. and Li, W. K. (2000). On a mixture autoregressive model. *Journal of the Royal Statistical Society, Ser. B*, 62, 95 – 115.
- [87] Wong, C. S. and Li, W. K. (2001). On a mixture autoregressive conditional heteroscedastic model. *Journal of the American Statistical Association* 96, 982 – 995.