

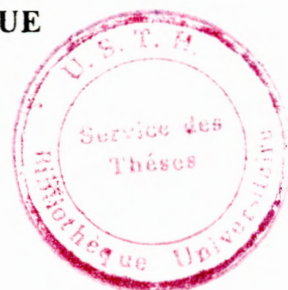
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DE GENIE CIVIL ET GENIE MECANIQUE**

**DEPARTEMENT DE GENIE MECANIQUE**



# THESE

Présentée à l'U.S.T.H.B. pour l'obtention du grade de

## MAGISTER

**Spécialité : Génie Mécanique  
Option : Systèmes Thermiques Industriels**

Par :

**M<sup>r</sup> AMEZIANI Djamel Eddine**

**Contribution à l'optimisation des phénomènes de transferts  
thermiques et massiques à travers un milieu poreux confiné.  
Application aux silos à grains.**

D'ordre :

Soutenu publiquement le : 04-07-2001  
Devant le jury, composé de :

**M<sup>r</sup> S. BENMANSOUR**  
**M<sup>me</sup> F. BENTAHER**  
**M<sup>r</sup> H. BOUMEDIENE**  
**M<sup>r</sup> S. CHIKH**  
**M<sup>me</sup> K. BOUHADEF**

**Professeur**  
**Professeur**  
**Maître de conférence**  
**Maître de conférence**  
**Professeur**

**Président**  
**Examinateur**  
**Examinateur**  
**Examinateur**  
**Directeur de thèse**

## REMERCIEMENTS

J'adresse mes vifs remerciements a monsieur S. CHIKH, maître de conference a U S T H B pour ces conseils avises et sa rigueur scientifique et pour l'excellent encadrement dont j'ai beneficie et qui ma permis d'apprendre et prendre gout a la recherche scientifique

Mes remerciements egalement a monsieur S Benmansour professeur a USTHB pour m'avoir fait l'honneur de presider le jury d'examen .

Je suis tres sensible a l'honneur que me fait Madame K.Bouhadeb professeur a USTHB d'avoir bien voulu accepter d'etre l'examinatrice de cette these.

Je tiens a exprimer aussi ma profonde gratitude a monsieur A.Boumediene maitre de conference pour avoir voulu faire parti du jury .

Je remercie egalement Monsieur L .Oufer maitre de conference a USTHB pour m'avoir consacre une partie de son temps pour examiner ce travail.

Enfin je ne saurais oublier dans mes remerciements tous ceux de pres ou de loin ont contribue a l'accomplissement de ce travail.

### CONCLUSION :

L'existence et l'importance des milieux poreux dans les phenomenes et processus industriels

L'existence et l'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologiques sont aujourd'hui bien démontrées.

Cependant la physique de tous les phénomènes de transfert est loin d'être complètement expliquée et maîtrisée beaucoup de recherches relatives à la formulation des écoulements ou des transferts thermiques ou encore relatives à l'explication de certains effets sont toujours en cours.

Ainsi le travail faisant l'objet de cette thèse a été développé afin de contribuer à l'étude des transferts de chaleur en convection forcée dans les conduites poreuses.

Il s'articule autour de deux parties la première partie qui traite des transferts thermiques dans un échangeur annulaire partiellement ou totalement poreux est répartie en trois chapitres dans un premier temps une solution exacte est trouvée pour un régime de Darcy-Brinkman.

Il est montré que pour des perméabilités faibles ( $Da \ll 1$ ) le régime est darcien et que le terme de Brinkman peut être négligé du point de vue thermique les résultats ont montré que pour des matériaux poreux faiblement conducteurs de chaleur il existe une épaisseur critique de la couche poreuse pour laquelle le nombre de Nusselt local est minimal et qu'au-dessus d'une certaine valeur du rapport des conductivités thermiques  $Ke$

si cette épaisseur critique n'existe pas et la présence du milieu poreux améliore le coefficient

# SOMMAIRE

INTRODUCTION GENERALE	...I
I-GENERALITES ET DISCRPTIONS	...1
I-1 Introduction	...1
I-2 Caractéristiques géométriques des milieux poreux	...2
I-2.1 Porosité	...2
I-2.2 Perméabilité	...3
I-3 Propriétés thermophysiques des milieux poreux	...5
I-3.1 Viscosité effective $\mu_{\text{eff}}$	...5
I-3.2 Conductivité thermique effective $k_{\text{eff}}$	...5
I-4 Modèles d'écoulements dans les milieux poreux	...7
I-4.1 Modèle de Darcy	...7
I-4.2 Modèle de Darcy Brinkman	...8
I-4.3 Modèle de Darcy-Brikman-Forchheimer	...9
I-5 Transfert de chaleur dans les milieux poreux	...10
I-6 Transfert de masse dans les milieux poreux	...11
I-6.1 Transfert de masse par diffusion moléculaire	...11
I-6.1.1 Equation de diffusion massique	...13
I-6.1.2 Equation de la diffusion massique dans les milieux poreux	...14
II-RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE	...16
I-1 Introduction	...16
I-2 La convection forcée en milieux poreux	...17
I-3 La convection transitoire	...18
III-FORMULATION MATHEMATIQUE	...26
III-1 Introduction	...26
III-2 Modèle physique	...27
III-3 Formulation mathématique	...28
III-3.1 Equations gouvernantes	...28
Equation de continuité	...28
Equation de quantité de mouvement	...28
Equation d'énergie	...28

---

Equation de concentration	...28
III-3.2 Conditions initiales et aux limites	...30
<i>Champ dynamique</i>	...30
<i>Champ thermique</i>	...30
<i>Champ massique</i>	...31
III-4 Adimensionnement des équations	...32
III-4.1 Equations de transport	...32
Equation de continuité	...33
Equation de quantité de mouvement	...33
Equation d'énergie	...33
Equation de concentration	...33
III-4.2 Conditions initiales et aux limites	...34
<i>Champ dynamique</i>	...34
<i>Champ thermique</i>	...35
<i>Champ massique</i>	...35
III-5 Coefficients de transfert de chaleur et de masse	...36
IV- PROCEDURE NUMERIQUE	...38
IV-1 Introduction	...38
IV-2 Ecriture généralisée des équations	...39
IV-3 Maillage	...41
IV-4 Discrétisation générale des équations	...44
IV-4.1 Schémas d'interpolations	...47
IV-4.1.1 Schéma centré	...47
IV-4.1.2 Schéma décentré amont «upwind »	...49
IV-4.1.3 Schéma hybride	...49
IV-4.1.4 Schéma exponentiel (exact)	...50
IV-4.1.5 Schéma de la loi de puissance «power law »	...50
IV-5 Traitement du champ dynamique	...50
IV-5.1 Equation de la Pression	...51
IV-5.2 Equation de la Correction de Pression	...53
VI-8 Champ thermique et massique	...55
VI-9 ALGORITHME	...58

---

V- RESULTATS ET INTERPRETATION	...60
V-1. Introduction	...60
V-2. Validation numérique	...60
V-2-1.- Champ dynamique établi	...60
V-2-2. Problème instationnaire	...62
V-3. Résultats et interprétations	...67
V-3-1 Evolution Instationnaire	...67
V-3-1.1 Résultats dynamiques	...67
V-3-1.2 Résultats Thermique et massique	...69
V-3-2 Régime Stationnaire	...74
V-3-2.2 Résultats dynamiques	...74
V-3-2.3 Résultats Thermiques et massiques	...81
a. Profils de température et concentration	...81
b. Coefficients de transfert thermique et massique	...92
V-4 Application pratique	...98
V-4-1 Position du problème des silos	...98
CONCLUSION GENERALE	

Figure V-1. Comparaison de la solution analytique et des profils de vitesse développés.  
Re=100

Tableau V-1. Comparaison entre solutions analytique et numérique sur l'axe du cylindre.

Tableau V-2. Comparaison entre solutions analytique et numérique sur la surface externe du cylindre.

Figure V-2. Comparaison des températures analytique et numérique à l'axe du cylindre.

Figure V-3. Comparaison des températures analytique et numérique à la paroi.

Figure V-4. Evolution temporelle des profils de vitesse Da=1.

Figure V-5. Evolution du Nusselt local dans les différentes étapes temporelles  
(Re=100, Bi= 200, Da=1.E-5).

Figure V-7. Evolution du temps de transition en fonction des paramètres thermophysiques.

Figure V-11. Développement des profils de vitesse, Hadim [1994].

Figure V-12. Effets des nombres de Darcy et de Reynolds sur les profils de vitesse développés.

Figure V-13. Effets des nombres de Darcy et de Reynolds sur la vitesse axiale développée.

Figures V-20. Comparaison des valeurs de la température axiale développée.

Figure V-21. Evolution du champ thermique.

Figure V-22. a. Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=0.01$ .

Figure V-22. b. Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=10$ .

Figure V-22. c. Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=200$ .

Figure V-23. Effets des nombres de Darcy et de Biot sur les transferts thermique et massique.

Figure V-24. Temps de transition de quelques cas pratiques.



---

## NOMENCLATURE :

A	Rapport de forme R/H
$A_{e,w,n,s,p}$	Coefficients des équations discrétisées
Bi	Nombre de Biot thermique
$Bi_m$	Nombre de Biot massique
C	Concentration
$C_p$	Chaleur spécifique
D	Diffusivité massique
Da	Nombre de Darcy
GR1,2,3,4	Groupements adimensionnels
h	Coefficient d'échange convectif
H	Hauteur du cylindre
i	Incrémentations des nœuds suivant x
j	Incrémentations des nœuds suivant r
J	Densité de flux
k	Conductivité thermique
K	Perméabilité
Nu	Nombre de Nusselt
P	Pression
Pe	Nombre de Peclet
Pr	Nombre de Prandtl
r	Coordonnée radiale
R	Rayon du cylindre
Re	Nombre de Reynolds
$R_k$	Rapport des conductivités
$R_v$	Rapport des viscosités
s	Surface
S	Terme Source
Sc	Nombre de Schmidt
Sh	Nombre de Sherwood
t	Temps
T	Température
u	Vitesse axiale
v	Vitesse radiale
x	Coordonnée longitudinale
$\alpha$	Diffusivité thermique
$\varepsilon$	Porosité
$\rho$	Masse volumique
$\nu$	Viscosité cinématique
$\mu$	Viscosité dynamique
$\Gamma$	Coefficient du flux conductif
$\sigma$	Rapport des capacités calorifiques
$\zeta$	Erreur considérée
$\emptyset$	Variable dans l'équation discrétisée
$\sigma$	Rapport des capacités calorifiques

---

---

## **Indices**

e	Entrée
eff	Effective
f	Fluide
in	Initial
p	Paroi
S	Sortie
0	Référence
n	Etape de temps
amb	Ambiant
m	Moyen

## **Exposants**

0	Etape initiale
n	Etape temporelle

---

## RESUME

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à l'étude transitoire du transfert de chaleur et de masse dans un écoulement laminaire, bidimensionnel, s'effectuant à travers une conduite cylindrique remplie par un milieu poreux. L'écoulement est modélisé par le modèle de Darcy-Brinkman. Et les équations qui en découlent sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Le code de calcul élaboré est tout d'abord validé par une comparaison avec des études relatives à des cas limites traitées analytiquement et avec certains travaux de la bibliographie (toujours pour des cas limites). Des résultats sont présentés pour différentes valeurs de la perméabilité, de l'inertie du fluide caractérisée par le nombre de Reynolds et des coefficients d'échanges thermique et massique sur la face supérieure du cylindre. L'exploitation des résultats a révélé que la diminution de la perméabilité, c'est à dire du nombre de Darcy, fait que le profil de la vitesse après établissement devient de plus en plus plat. La réduction de la perméabilité entraîne aussi une accentuation des transferts sauf pour les valeurs des nombres de Reynolds élevés où on a un champ dynamique presque inchangé (profils plats) et une indépendance de la filtration du nombre de Darcy. La durée de transition a été analysée ce qui a montré que cette dernière est d'autant plus grande que la valeur du nombre de Reynolds est petite.

Une application quant à l'optimisation des conditions de séchage ou des condition de bonne conservation de produits divers peut être ainsi envisagée à partir d'une intervention sur les caractéristiques thermophysiques du problème et les conditions aux limites thermiques et massiques.

## INTRODUCTION GENERALE :

Bien que les milieux poreux soit exploités depuis plus d'un siècle, il est encore indispensable actuellement de réserver une partie importante à l'effort de développement de nouveaux produit à l'expérimentation. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, appuyés par l'introduction des outils informatique qui ont réduit les coûts des études expérimentales, des lacunes subsistent encore sur le plan de connaissances fondamentales principalement dans la compréhension des phénomènes de transfert thermique ou massique.

Aussi, sur le plan industriel, le contexte de forte concurrence internationale, conduit les constructeurs à développer des produits de plus en plus performants (rendement optimal, coût réduit, sécurité fiable, etc.) en respectant les contraintes imposées par les réglementations de confort et de limitation de nuisances. Ainsi depuis quelques décennies, les phénomènes de transferts dans les milieux poreux attirent l'attention des auteurs et font l'objet de nombreux travaux.

Dans le présent travail, nous nous sommes intéressés à l'étude transitoire du transfert de chaleur et de masse dans un écoulement laminaire, bidimensionnel, s'effectuant à travers une conduite cylindrique remplie par un milieu poreux. Une revue bibliographique à montré que lors des études précédentes, la plupart des travaux se sont intéressés au régime stationnaire sauf dans certains problèmes relatifs, essentiellement, à la convection naturelle et au traitement numérique du régime transitoire. Certaines hypothèses simplificatrices seront adoptées pour permettre la modélisation mathématique du problème.

Une fois le problème défini, on enchaînera avec la formulation mathématique, basée sur le modèle de Darcy-Brinkman, qui conduira à un système d'équations de conservation associé à des conditions initiales et aux limites.

Ce système sera discrétisé et résolu numériquement, grâce à la méthode des volumes finis, dans le quatrième chapitre IV. L'algorithme SIMPLER, qui est le plus préconisé dans ce genre de travaux, est celui que nous choisirons pour la résolution de notre problème.

Le code de calcul élaboré est tout d'abord validé par une comparaison avec des études relatives à des cas limites traitées analytiquement et avec certains travaux de la bibliographie (toujours pour des cas limites). Des résultats sont présentés pour différentes valeurs de la perméabilité, de l'inertie du fluide caractérisée par le nombre de Reynolds et des coefficients d'échanges thermique et massique sur la face supérieure du cylindre.

Une application quant à l'optimisation des conditions de séchage ou des conditions de bonne conservation de produits divers peut être ainsi envisagée à partir d'une intervention sur les caractéristiques thermophysiques du problème.

On se propose dans la présente étude d'évaluer les transferts de chaleur et de masse dans un cylindre rempli par un milieu poreux. L'étude en question présente un intérêt considérable en raison de l'étendue de ses applications (systèmes de filtration, conditionnement de l'air, échangeur de chaleur, séchage agroalimentaire, conservation de grains dans les silos, ...). L'influence des paramètres thermophysiques de la matrice et de l'écoulement ainsi que les effets des échanges au niveau de la surface supérieure qui est ouverte sur le milieu ambiant seront analysés.

L'étude est entreprise pour un régime instationnaire, ce qui permet de mettre en évidence l'impact de la phase transitoire sur le régime établi et de suivre l'évolution des différents paramètres en présence en notant leur importance relative, jusqu'à établissement du régime.

Cependant l'étude de la convection forcée en régime transitoire a été abordée dans le travail de Nakayama et Ebinuma (1990), qui ont étudié le développement de la couche limite sur une plaque placée

dans un milieu poreux. Ils ont montré ,entre autres, que l'inertie du milieu poreux réduit la vitesse et le temps du régime transitoire.

CONCLUSION :

Nous avons traité le transfert de chaleur et de masse dans un cylindre vertical en régime transitoire dans un milieu poreux. Ce dernier est générateur de chaleur et de masse, avec aussi bien des conditions de température et de concentration à l'entrée et à la sortie. Les profils de vitesse.

- La réduction de la perméabilité accentue fortement la filtration pour les faibles nombres de Reynolds. Cependant, l'augmentation de ce nombre entraîne une indépendance du transfert de la valeur de la perméabilité.

- L'augmentation du nombre de Reynolds augmente l'inertie du fluide et réduit le temps de transition, cependant la durée du régime transitoire n'est pas très sensible à la valeur de la perméabilité.

. L'exploitation des résultats a révélé que la diminution de la perméabilité, c'est à dire du nombre de Darcy, fait que le profil de la vitesse après établissement devient de plus en plus plat. La réduction de la perméabilité entraîne aussi une accentuation des transferts sauf pour les valeurs des nombres de Reynolds élevés où on a un champ dynamique presque inchangé (profils plats) et une indépendance de la filtration du nombre de Darcy. La durée de transition a été analysée ce qui a montré que cette dernière est d'autant plus grande que la valeur du nombre de Reynolds est petite.

□PAGE □I□

## Chapitre I :

# GENERALITES ET DISCRIPTIONS

### I-1 Introduction :

On désigne par milieu poreux une matrice solide constituée de pores interconnectés qui permettent la circulation d'un fluide. La phase solide d'un milieu poreux, souvent appelée squelette, peut se présenter sous deux formes : milieu poreux consolidé, tel que les roches calcaires ou les grès, et une forme poreuse non consolidée constitué par des particules non soudées entre elles (gravier, grain, dépôt de billes, etc.). En général, la disposition et la dimension des pores sont irrégulières ce qui induit des irrégularités dans la mesure des variables dépendantes (vitesse, pression, température, etc.) à l'échelle microscopique. A cet effet, des études faisant appel à des approches statistiques ont été présentées par Georgiadis et Catton [1987] et Georgiadis [1991]. Cependant, on considère souvent, dans la littérature, des variables dépendantes moyennes mesurées sur un volume élémentaire représentatif VER qui, lorsqu'on suppose la taille de ce dernier (VER) très grande par rapport à celle des pores, permet de formuler le problème pour un milieu continu fictif, (figure I-1).

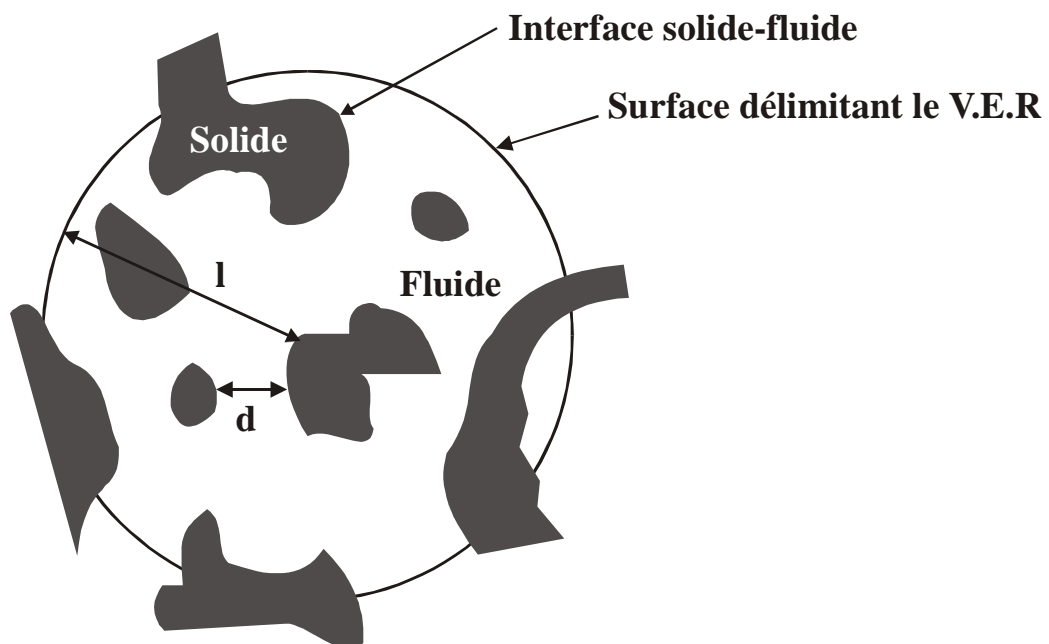


Figure I-1. Volume élémentaire représentatif.

## I-2 Caractéristiques géométriques des milieux poreux :

### I-2.1 Porosité :

La porosité représente la fraction de volume occupée par les pores par rapport au volume total du milieu poreux. Du fait que le fluide ne passe qu'à travers les pores connectés, la présence de pores isolés occasionne la définition de la porosité effective qui représente la fraction de volume des pores interconnectés. Celle-ci peut être considérablement différente de la porosité définie ci-dessus pour les milieux poreux consolidés, alors qu'elle est inchangée dans les milieux non consolidés (Bories et Prat [1990]).

Plusieurs modèles de variation de la porosité sont disponibles dans la littérature. Ainsi, Martin [1978], Chandrasekhara et Vortmeyer [1979], Vortmeyer et Schuster, [1983] et Vafai [1984] ont décrit le caractère variationnel de la porosité par une loi exponentielle qui est une approche moyenne de la variation sinusoïdale. Cette dernière (variation sinusoïdale) a été proposée par plusieurs auteurs tel que Hunt et Tien [1987] et Chaowdhury et Chang [1989] qui ont montré que le modèle sinusoïdal est plus représentatif près des parois de confinement.

Matériau	Porosité
Sable	0.37-0.5
Brique	0.12-0.34
Terre (Argile)	0.43-0.54
Poudre d'ardoise noire	0.57-0.66
Poudre de silice	0.37-0.49
Grain de silice	0.65
Charbon	0.02-0.12
Cuir	0.56-0.59
Filtre de cigarettes	0.17-0.49
Empilement de sphères	0.36-0.43
Fibre de verre	0.88-0.93
Béton	0.02-0.07
Poudre de cuivre	0.09-0.34
Calcaire (dolomite)	0.04-0.1

**Tableau I-1.** Valeurs de la porosité de quelques matériaux. Scheidegger [1974] et Nield et Bejan [1992].

## I-2.2 Perméabilité :

La perméabilité  $K$  représente la conductance de l'écoulement d'une matrice poreuse. Elle exprime la capacité du milieu à laisser passer le fluide sous un gradient de pression. Lorsque le poreux contient un seul liquide la perméabilité est donnée par la loi expérimentale de Darcy [1856] :

$$K = -\frac{\mu \cdot U_D}{\left(\frac{dP}{dx}\right)} \quad \dots(I-1)$$

où :

$U_D$  : Vitesse Darcienne, représentant le rapport du débit s'écoulant à travers le milieu sur une surface de la section droite ;

$\mu$ : Viscosité dynamique du fluide ;

$\left(\frac{dP}{dx}\right)$  : Gradient de pression dans le sens de l'écoulement.

Quantitativement, la perméabilité est une caractéristique du milieu poreux et ce dernier peut se comporter différemment avec des fluides de différentes viscosités. Plusieurs travaux, dont les mesures expérimentales de Scheidegger [1974] et Nield et Bejan [1992], ont donné des valeurs de perméabilité pour les matériaux les plus courants (Tableau I-2).

Matériaux	Perméabilité
Sable	$2 \cdot 10^{-11}$ - $1.8 \cdot 10^{-10}$
Brique	$4.8 \cdot 10^{-14}$ - $2.2 \cdot 10^{-13}$
Terre	$2.9 \cdot 10^{-13}$ - $1.4 \cdot 10^{-11}$
Poudre d'ardoise noire	$4.9 \cdot 10^{-14}$ - $1.2 \cdot 10^{-13}$
Poudre de silice	$1.3 \cdot 10^{-14}$ - $5.1 \cdot 10^{-14}$
Cuir	$9.5 \cdot 10^{-14}$ - $1.2 \cdot 10^{-13}$
Filtre de cigarettes	$1.1 \cdot 10^{-9}$
Fibre de verre	$2.4 \cdot 10^{-11}$ - $5.1 \cdot 10^{-11}$
Béton bitumineux	$10^{-13}$ - $2.3 \cdot 10^{-11}$
Poudre de cuivre	$3.3 \cdot 10^{-10}$ - $1.5 \cdot 10^{-9}$
Calcaire (dolomite)	$2 \cdot 10^{-15}$ - $4.5 \cdot 10^{-14}$

**Tableau I-2.** Valeurs de perméabilité de quelques matériaux.

(Scheidegger [1974], Nield et Bejan [1992])

Plusieurs modèles de variation de la perméabilité ont été proposés. Ainsi, Karman et Kozeny [1973], ont préconisé une formulation mathématique développée à partir d'un modèle capillaire formé de conduites parallèles. L'expression est écrite sous la forme :

$$K = \frac{\varepsilon^3 d^2}{36C(1-\varepsilon)^2} \quad \dots(I-2)$$

Où d désigne une dimension caractéristique et C est le coefficient de Cozeny, un paramètre de forme ( $3.6 < C < 5$ ) qui prend la valeur de 4.84 pour des grains sphériques entassés. Il prend, dans le cas de fibres, l'expression suivante :

$$C = \frac{62.3 \left( \sqrt{\frac{2\pi}{1-\varepsilon}} - 2.5 \right) (1-\varepsilon) + 107.4}{16\varepsilon^3(1-\varepsilon)^4} \quad \dots(I-3)$$

En 1971, Rumpf et Gupte ont proposé, pour des particules sphériques entassées, l'expression suivante :

$$C = \varepsilon^{5.5} \frac{d^2}{5.6} \quad \dots(I-4)$$

D'autres modèles empiriques ont proposé une expression similaire, donnée par :

$$K = \frac{dp^2 \varepsilon^3}{A(1-\varepsilon)^2} \quad \dots(I-5)$$

où la valeur du coefficient A varie selon les différents auteurs. on citera les exemples suivants :

Carman et Kozeny [1937]	A=180 ;
Ergun [1952]	A=150 ;
Robsenow et Harnett [1973]	A=175 ;
Fand et al [1986]	A=182 ;
Fand et al [1989]	A=215.

### I-3 Propriétés thermophysiques des milieux poreux :

#### I-3.1 Viscosité effective $\mu_{\text{eff}}$ :

Lorsque l'approche des modèles moyennés sur un VER est adoptée, il est nécessaire de définir les propriétés thermophysiques évaluées sur un VER incluant les deux phases fluide et solide. Ainsi, la viscosité effective a été introduite dans le modèle de Brinkman [1947] afin de mettre en évidence la discontinuité des contraintes aux interfaces fluides poreux. Ce modèle a été validé plus tard par Lundgren [1972] qui démontra aussi que la viscosité effective était une fonction de la viscosité du fluide et de la porosité.

Le tableau I.3 résume quelques corrélations trouvées dans la littérature. Cependant, la plupart des travaux prennent un rapport de viscosité unitaire.

MODELE	Corrélation	limite de validité
Einstein	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = 1 + 2.5 \cdot \varepsilon$	Cas de sphères $\varepsilon \rightarrow 0$
Neale et Nader	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = \alpha^2$	$\alpha$ déterminé expérimentalement
Guth et Simba	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = \frac{1 + 0.5(1 - \varepsilon) - 0.5(1 - \varepsilon)^2}{1 - 2(1 - \varepsilon) - 9.6(1 - \varepsilon)^2}$	$\mu_{\text{eff}} \rightarrow \infty$ pour $\varepsilon = 0.766$
Mooney	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = \exp\left[\frac{2.5(1 - \varepsilon)}{1 - k(1 - \varepsilon)}\right]$	$0.75 < K < 1.5$
Frankel et Akrivos	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = C \left[1 - \left(\frac{(1 - \varepsilon)}{(1 - \varepsilon)_{\text{max}}}\right)^{1/3}\right]^{-1}$ $C = 9/8$ pour $(1 - \varepsilon) \rightarrow (1 - \varepsilon)_{\text{max}}$	Suspension concentrée seulement
Happel	$\frac{\mu_{\text{eff}}}{\mu} = \exp[4.58 \cdot \varepsilon]$	Modèle théorique pour des particules sphériques $\varepsilon \leq 0.5$

Tableau I-3. Modèles de viscosité effective.

#### I-3.2 Conductivité thermique effective $k_{\text{eff}}$ :

Du fait de la complexité de la structure du milieu poreux, la conductivité effective  $k_{\text{eff}}$  est fortement dépendante de la porosité et des conductivités thermiques des phases solide et

fluide de la matrice poreuse. D'une manière générale les modèles proposés sont tous des combinaisons pondérées des modèles en série et parallèles basés sur l'analogie électrique. Dans le modèle en série, le flux de chaleur traverse successivement les phases solide et fluide. La résistance thermique du fluide est alors égale à la somme des résistances thermiques dans chacune des phases.

$$\frac{1}{k_{\text{eff}}} = \frac{\varepsilon}{k_f} + \frac{1-\varepsilon}{k_s} \quad \dots(\text{I-6})$$

Dans le modèle parallèle, le flux de chaleur traverse les deux phases (fluide et solide) en même temps. La conductivité effective est alors égale à la somme pondérée des taux d'occupation d'espace des conductivités phasiques. Elle est donnée par :

$$k_{\text{eff}} = \varepsilon \cdot k_f + (1-\varepsilon) \cdot k_s \quad \dots(\text{I-7})$$

Plusieurs modèles pour le calcul de la conductivité effective ont été proposés à commencer par le modèle de Maxwell [1904], basé sur une analogie électrique. Ce modèle est développé pour des sphères solides dans le cas où la porosité est suffisamment élevée, donc des particules éloignées les unes des autres, ce qui réduit les interférences entre elles. Par la suite, De vries [1952] propose une extension du modèle de Maxwell en introduisant un facteur représentant le rapport des gradients de température dans les phases continues et dispersées.

D'autres discussions de la conductivité effective des structures périodiques sont exposées par Quintard et Whitaker [1993] et par Ochoa-Tapia et al [1994]. Kuwahara et al [1996] ont proposé une corrélation pour les arrangements en ligne de tubes à section carrée avec un écoulement moyen et un gradient de température oblique et perpendiculaire à l'écoulement. La liste des modèles présentés est loin d'être exhaustive. Kunii et Smith [1960] ont présenté une corrélation tenant compte du rayonnement en introduisant dans leur modèle l'émissivité, la température et le diamètre des particules. Zehner et Schneider [1970], se basant sur la supposition d'un contour convexe arbitraire autour des particules et des contacts entre les différentes particules dans la direction de propagation de conduction, ont proposé un modèle, qui ainsi que le modèle de Kunii et Smith a été vérifié par Prasad et al [1989] pour des valeurs de  $k_s / k_f$  allant jusqu'à 1000. Pour des valeurs plus élevées, le modèle de Hadley [1986] semble être celui qui donne la meilleure concordance avec l'expérimentation.

## I-4 Modèles d'écoulements dans les milieux poreux :

En raison de la complexité géométrique de l'espace des pores, les équations régissant les principes de conservation de quantité de mouvement, d'énergie ou de masse ne peuvent être mises en application qu'après passage à une échelle macroscopique qui permet de faire une équivalence entre un milieu réel désordonné et un milieu continu fictif. La formulation des équations macroscopiques de conservation est obtenue à partir d'équations microscopiques auxquelles sont appliquées des procédures de changement d'échelle telles que, la méthode stochastique qui repose sur une théorie de probabilités (Matheron [1965], Cushman [1987]), où la grandeur macroscopique est introduite à partir de prédictions mathématiques dans différentes structures de pores macroscopiquement équivalentes. La méthode d'homogénéisation repose, quand à elle, sur une approche des grandeurs (pression, vitesse) à l'aide d'un développement asymptotique utilisant les deux échelles suscitées (Bensoussan et al [1978], Sanchez – Palencia [1980]). Enfin, il y a la méthode de prise de moyenne qui n'est autre qu'une synthèse des deux premières méthodes. Elle a été initiée par Witaker [1967] puis elle a suscité l'intérêt de plusieurs chercheurs tel que Bories [1985].

Nous présenterons dans ce qui suit les différents modèles de régimes d'écoulements à partir du modèle de Darcy avec les différentes extensions tenant compte de certains effets existant dans les milieux poreux.

### I-4.1 Modèle de Darcy :

En 1856, Darcy a mis en évidence une corrélation liant le gradient de pression et la vitesse de filtration à la perméabilité et la viscosité dynamique sous la forme :

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\mu}{K} U_D \quad \dots(I-8)$$

où  $U_D$  est la vitesse de filtration, déduite du débit massique.

Bear [1972] distingue trois régimes d'écoulement suivant la valeur du nombre de Reynolds de pore. Dybbs et Edwards [1984], à l'aide de mesures par anémométrie laser, distinguent plusieurs régimes d'écoulement que l'on peut classifier de la manière suivante :

- Pour des nombres de Reynolds de pore inférieurs à l'unité, le régime d'écoulement est laminaire, les forces visqueuses sont dominantes et la loi de Darcy est applicable.

- Lorsque  $Re_p$  est compris entre 1 et 10, les couches limites au niveau des parois solides des pores se développent. En dehors de ces couches limites apparaît un régime d'écoulement inertiel. Les forces d'inertie deviennent alors importantes et il n'y a plus proportionnalité entre le gradient de pression et la vitesse de filtration : la loi de Darcy n'est plus applicable. Ce régime d'écoulement stationnaire laminaire, persiste jusqu'à un nombre de Reynolds de 150 environ.
- Pour des nombres de Reynolds de pore compris entre 150 et 300, un régime d'écoulement instationnaire se développe. Ce régime est d'abords oscillatoire résultant de la superposition de plusieurs modes de période et d'amplitude distincte.
- Au-delà de l'ordre de 300, le régime d'écoulement devient chaotique et présente les caractéristiques d'un écoulement turbulent.

Il faut noter que la vitesse à l'intérieur des pores peut être très supérieure à la vitesse de filtration puisqu'elle est multipliée par un facteur  $1/\varepsilon$  (où  $\varepsilon$  est la porosité du milieu).

#### **I-4.2 Modèle de Darcy Brinkman :**

Du fait qu'il a été montré que le modèle de Darcy n'est pas très approprié dans les cas d'écoulements à grandes vitesses ou d'écoulement de gaz. Brinkman [1947] a établi l'équation du mouvement en superposant un écoulement, où les effets visqueux sont dominants (écoulement de Stokes), avec un écoulement de Darcy pour écrire :

$$\frac{dp}{dx} = -\frac{\mu}{K} U_D + \mu' \nabla^2 U_D \quad \dots(I-9)$$

où :  $\mu'$  est la viscosité effective.

Ce modèle a été largement examiné par Durlofsky et Bardy [1987], Childless [1972], Levy [1981], et Allaire [1989]. Aussi, Lundgren [1972] a pu, à partir d'une formulation statistique, aboutir à l'équation de Brinkman.

### I-4.3 Modèle de Darcy-Brinkman-Forchheimer :

Du fait que la loi de Darcy n'est valable que pour des écoulements à faible vitesse de filtration caractérisés par des nombres de Reynolds de pores ( $Re_d$ ), où  $d$  est le diamètre moyen des pores, inférieurs à l'unité. Forchheimer [1901], a proposé une relation non linéaire pour les écoulements à grandes vitesses :

$$\frac{dp}{dx} = au + bu^2 \quad \dots(I-10)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes et le terme carré est introduit afin de tenir compte des effets inertiels microscopiques.

Ultérieurement, de nombreuses équations non linéaires, basées sur des résultats expérimentaux, ont été proposées. On citera l'équation d'Ergun [1952], qui se met sous la forme :

$$\frac{dp}{dx} = 150 \frac{(1-\varepsilon)^2 \mu}{\varepsilon^3 d^2} u + 1.75 \frac{1-\varepsilon \rho}{\varepsilon^3 d} u^2 \quad \dots(I-11)$$

où :  $\varepsilon$  est la porosité,  $d$  le diamètre du pore et  $\mu$  la viscosité.

Cette équation attira l'attention de plusieurs chercheurs dont Choudhary et al [1976] qui ont introduit le terme convectif pour avoir :

$$\bar{u} \nabla \bar{u} + \bar{\nabla} P + \bar{u} \left( 150 \frac{(1-\varepsilon)^2 \mu}{\varepsilon^3 d^2} + 1.75 \frac{(1-\varepsilon) \rho}{\varepsilon^3 d} |\bar{u}| \right) = 0 \quad \dots(I-12)$$

cependant, ils ont montré numériquement dans leur étude que la contribution du terme convectif était insignifiante.

On remarque que le modèle ci-haut ne contient pas les effets de paroi (terme de Brinkman). Beaucoup plus tard, un modèle tenant compte de ces derniers effets a été proposé par Vafai et Tien [1981], et s'écrit comme suit :

$$\frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \frac{\rho}{\varepsilon} (\bar{u} \nabla) \bar{u} = -\bar{\nabla} P + \rho \bar{g} - \frac{\mu}{k} \bar{u} - \frac{\rho \varepsilon F}{\sqrt{k}} |\bar{u}| \bar{u} + \mu \nabla^2 \bar{u} \quad \dots(I-13)$$

Des recherches plus récentes ont été effectuées dans le but d'améliorer la prise en compte de ces termes d'inertie. Quelques justifications théoriques ont été apportées par

Georgiadis et Catton [1988]. Une validation basée sur le calcul par voie numérique des champs microscopiques pour un réseau simplifié de pores a été réalisée par Coulaud et al [1988].

Barrère [1990], obtient une loi faisant intervenir une expression cubique de la vitesse de filtration, terme également proposé par Wodie et Levy [1991].

### **I-5 Transfert de chaleur dans les milieux poreux :**

La différence entre la convection en milieux poreux et la convection en milieux continus, réside dans la complication provoquée par la nature hétérogène, dans le premier cas, qui crée parfois une différence considérable entre l'écoulement macroscopique et le transfert réel. De ce fait, la notion d'équilibre thermique local est introduite. Cette notion a été largement étudiée par Carbonell et Whitaker [1984] qui ont posé des conditions d'équilibre thermique sur la mesure du temps ainsi que sur la mesure de la longueur. Beaucoup plus tard, Bennacerallah [1994] et Kaviani [1995] ont étudié la condition d'équilibre dans certaines applications. La première étude a prouvé que dans le cas de Silos à grain, la condition d'équilibre est satisfaite en régime instationnaire.

L'équation d'énergie macroscopique peut être obtenue par prise de moyenne de l'équation d'énergie dans chaque phase au sein du volume élémentaire représentatif. Elle s'écrit, dans le cas d'un équilibre thermique local, sous la forme générale suivante (Chang et al [1990]) :

$$(\rho C_p)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + (\rho C_p)_f \vec{V} \vec{\nabla} T = k_{\text{eff}} \nabla^2 T \quad \dots(\text{I-14})$$

où :

$$(\rho C_p)_{\text{eff}} = \varepsilon (\rho C_p)_f + (1 - \varepsilon) (\rho C_p)_s$$

$\rho$  : masse volumique du fluide considéré ;

$\varepsilon$  : porosité du milieu poreux ;

$k_{\text{eff}}$  : conductivité thermique effective;

$(Cp)_{\text{eff}}$  : capacité calorifique effective ;

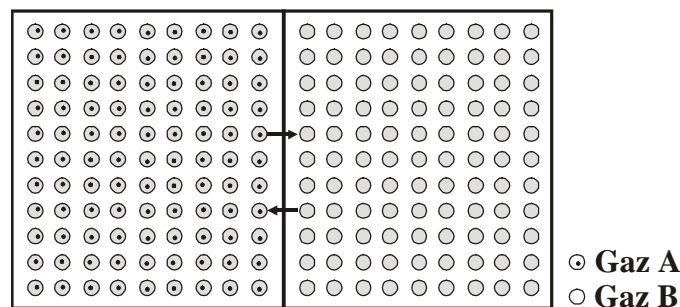
$(Cp)_f$  : capacité calorifique du fluide.

## I-6 Transfert de masse dans les milieux poreux :

Le transfert d'un constituant d'une solution fluide d'une région de haute concentration à une région à faible concentration est appelé transfert de masse. Par analogie au transfert de chaleur, la masse est diffusée dans la direction où le gradient de concentration existant va en diminuant et cesse lorsque le gradient de concentration s'annule. On distingue deux principaux types de transfert qui sont la diffusion moléculaire (généralement dans les fluides au repos ) et la convection solutale (transfert par des courants dans des fluides en écoulement).

### I-6.1 Transfert de masse par diffusion moléculaire :

Le transfert de masse par diffusion moléculaire est analogue au transfert de chaleur par conduction. Si l'on considère une cavité contenant deux gaz A et B aux mêmes températures et pressions mais séparés initialement par une cloison (figure I-2). Un transfert de masse s'effectue dans le sens décroissant de la concentration, dès qu'on met ces deux gaz en contact. On notera que le transfert de masse par diffusion moléculaire peut avoir lieu dans un fluide au repos mais également dans un écoulement de fluide.



**Figure I-2.** Transfert de masse par diffusion dans un mélange gazeux.

En régime permanent, la concentration en chaque point ne varie pas avec le temps, et suit la loi de Fick qui relie la densité de flux massique  $\vec{m}_A$  ( $\text{Kg}/\text{sm}^2$ ), échangé par diffusion solutale, au gradient de concentration et à la diffusivité massique  $D_{AB}$  du composant A dans B sous la forme :

$$\vec{m}_A = -D_{AB} \nabla C_A \quad \dots(\text{I-15})$$

On montre que  $D_{AB}=D_{BA}=D$  qui dépend en général de la pression du mélange, de la température et de la composition.

Remarquons que la loi de Fick est analogue à celle de Fourier qui détermine la densité du flux thermique transféré par conduction dans un milieu homogène de conductivité  $k$  :

$$\bar{q} = -k \nabla T \quad \dots(I-16)$$

Le tableau suivant donne une sélection de valeurs de la diffusivité massique. Les diffusivités en phase liquide sont bien inférieures à celles en phase gazeuse ; ceci est dû à la mobilité moléculaire plus petite dans les liquides.

Gaz à 25°C et 1atm solutés dilués dans l'air	Diffusivité D [m <sup>2</sup> /h]	Phase liquide à 20°C solutés dilués dans l'eau	Diffusivité D [m <sup>2</sup> /h]
Ammoniac	0.1	Ammoniac	0.63
Vapeur d'eau	0.092	Chlorure d'hydrogène	0.93
Ethanol	0.043	Ethanol	0.35
Dioxyde de carbone	0.059	Dioxyde de carbone	0.64
Oxygène	0.074	Oxygène	0.65
Hydrogène	0.15	Hydrogène	1.86
Benzène	0.032	Sucrose	0.17
---	---	Chlorure de sodium	0.49
---	---	Dioxyde de Chlorure	1.22

**Tableau I-4.** Quelques valeurs de la diffusivité massique, Bejan[1992].

La diffusion solutale peut être influencée par des paramètres extérieurs, tel que les gradients de température (effet Sorêt, effet Dufour), les gradients de pression ou les réactions chimiques. Dans notre étude, nous supposons que ces effets extérieurs sont négligeables et que la diffusion solutale ne dépend que du gradient de concentration.

En diffusion solutale, on travaille généralement sur le concept de concentration d'un élément  $e$  dans un mélange. Cette concentration représente la masse de l'élément  $e$  dans le mélange de volume  $V_d$  et elle est exprimée en Kg de solvant (l'élément  $e$ ) par m<sup>3</sup> de solution (le mélange) :

$$C_e = \frac{m_e}{V_d} = \rho_e \quad \dots(I-17)$$

La densité de flux massique locale d'un élément e dans un mélange s'exprime :

$$\vec{m}_e = \rho_e \cdot \vec{V}_e \quad \dots(\text{I-18})$$

où  $\vec{V}_e$  représente la vitesse des particules du composant e dans un système de coordonnées fixes. La vitesse moyenne massique  $\vec{V}$  est alors définie comme le rapport de la somme des flux massiques élémentaires à la densité totale du mélange :

$$\rho \cdot \vec{V} = \vec{m}_e = \sum \vec{m}_e = \sum \rho_e \cdot \vec{V}_e \quad \dots(\text{I-19})$$

$$\vec{V} = \frac{1}{\rho} \sum \rho_e \cdot \vec{V}_e \quad \dots(\text{I-20})$$

On définit alors le flux massique de l'élément e par rapport à un repère se déplaçant à la vitesse massique moyenne par :

$$\vec{M}_e = \rho_e \cdot (\vec{V}_e - \vec{V}) \quad \dots(\text{I-21})$$

si  $\vec{m}_e$  est le flux absolu de l'élément e,  $\vec{M}_e$  est le flux diffus, il représente le mouvement moyen du mélange et on peut écrire :

$$\vec{m}_e = \vec{M}_e + \rho_e \cdot \vec{V} \quad \dots(\text{I-22})$$

L'équation (I-22) nous montre qu'il y a deux contributions pour le flux absolu de l'élément e, l'une due à la diffusion (mouvement de l'élément e par rapport au mouvement moyen du mélange) et l'autre provoquée par le mouvement moyen du mélange.

### I-6.1.1 Equation de diffusion massique :

L'équation de conservation de la masse globale du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\rho \cdot \vec{V}) = 0 \quad \dots(\text{I-23})$$

soit, encore, en distinguant la contribution de chacun des éléments. L'équation relative à l'ensemble des éléments du mélange s'écrit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot (\sum \rho_e \cdot \vec{V}_e) = 0 \quad \dots(\text{I-24})$$

L'équation de la conservation de la masse pour chaque élément e du mélange sur un volume de contrôle est :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho_e \cdot \vec{V}_e) = 0 \quad \dots(I-25)$$

En tenant compte de l'équation (I-21), l'équation précédente s'écrira :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\sum \rho_e \cdot \vec{V}_e) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{M}_e \quad \dots(I-26)$$

En remplaçant le flux massique  $\vec{M}_e$  par son expression donnée par la loi de Fick (I-15) et en introduisant le concept de la concentration définie par l'équation de diffusion de chaque constituant e du mélange, on trouve :

$$\frac{\partial C_e}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot C_e = D \Delta C_e \quad \dots(I-27)$$

D étant la diffusivité massique

Cette équation se transforme dans le cas d'un seul élément sous la forme :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot C = D \Delta C \quad \dots(I-28)$$

### **I-6.1.2 Equation de la diffusion massique dans les milieux poreux :**

L'équation précédente est formulée pour le transfert de masse dans le cas purement fluide. Dans le cas d'une matrice poreuse, il est évident que dans les parties solides, aucun écoulement n'est possible. Ainsi en multipliant l'équation sus citée par la porosité tout en introduisant l'expression de la vitesse par la relation de Dupuit-Forchheimer, on écrit l'équation de transport sous sa forme finale, Donald et Bejan [1992] :

$$\frac{\partial C}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \cdot C = \nabla(D_{\text{eff}} \nabla C) \quad \dots(I-29)$$

Où  $D_{\text{eff}} = \varepsilon \cdot D$  représente la diffusivité massique effective dans le milieu poreux, du soluté considéré.

## **Conclusion :**

Après avoir passé en revue les caractéristiques essentielles des milieux poreux, le prochain chapitre sera consacré à une étude bibliographique afin de situer la portance de notre travail.s

## Chapitre II :

# RECHERCHE BIBLIOGRAPHIQUE

### II-1. Introduction :

Dans de nombreuses applications : stockage de chaleur, contamination de déchets radioactifs, réacteurs catalytiques..., les milieux poreux peuvent être assimilés à des empilements de particules sphériques. Les résultats expérimentaux font alors apparaître que le nombre de Nusselt peut dépendre du nombre de Prandtl, du nombre de Reynolds du fluide saturant, du nombre de Darcy et du rapport des conductivités thermiques des phases fluide et solide. En outre, des observations expérimentales, effectuées tant en convection naturelle qu'en convection forcée, montrent que l'introduction des contraintes visqueuses (terme de Brinkman) et des effets inertiels (terme de Forchheimer), s'avère indispensable lorsque la perméabilité et les vitesses de filtration sont importantes, pour représenter les écoulements et faire correspondre les valeurs théoriques aux mesures expérimentales.

S'il apparaît clairement que la représentation des écoulements dans des lits de billes à partir de la loi de Darcy et de ses modifications est insuffisante pour représenter la réalité physique, les hypothèses avancées pour tenter d'expliquer les divergences entre l'expérience et la réalité sont nombreuses et différentes d'un problème à l'autre. Parmi ces hypothèses, on peut citer le fait que la Porosité ne soit pas toujours constante, que l'équilibre thermique n'est pas toujours vérifié, que les fluides réels sont souvent non newtonien et compressibles. Par ailleurs, Les propriétés physiques de certains fluides ne peuvent être prises constantes. Enfin l'hypothèse de la stationnarité, qui est loin d'être valable dans certains cas spécifiques. Cette dernière hypothèse est tout à fait injustifiée dans le cas de notre problème dans la mesure où la plupart des applications préconisées (séchage, filtration, etc.) ne se conçoivent que dans une démarche de régime instationnaire.

Nous essayerons dans ce qui suit, de présenter certains travaux entrepris dans le domaine de la convection forcée, ainsi que les travaux qui ont aidé à enrichir les études instationnaires.

## II-2. La convection forcée en milieux poreux :

Rohsenow et Hartnett [1973] ont calculé le nombre de Nusselt constant pour la région établie dans un milieu poreux, limitée par deux plaques parallèles, et pour un modèle d'écoulement de Darcy. Koh et Kolony [1974] ont présenté une analyse sur l'efficacité d'un échangeur de chaleur contenant un milieu poreux conducteur tandis que Koh et Stevens [1975] ont effectué une étude expérimentale pour le même problème. Ils ont montré que pour le cas d'une température pariétale fixe, le flux de chaleur à la paroi du canal peut être augmenté de plus de trois fois en utilisant un milieu poreux dans le canal.

Lauriat et Vafai [1991] ont considéré un canal plan, totalement rempli d'un milieu poreux, chauffé par ses deux parois. Ils ont obtenu une formulation exacte des équations de la quantité de mouvement et d'énergie pour un écoulement unidirectionnel à travers le milieu poreux. Ils observent pour les nombres de Darcy élevés, que l'épaisseur de la couche limite diminue lorsque le coefficient inertiel  $\lambda$  devient significatif ; par contre pour de faibles nombres de Darcy cette épaisseur devient indépendante du coefficient inertiel et tend à diminuer. Pour de faibles perméabilités, le champ thermique reste invariable et dépend uniquement de  $\lambda$ . Ils constatèrent aussi que le nombre de Nusselt varie entre deux valeurs asymptotiques de 8.22 lorsque la perméabilité est infinie et 12 si elle tend à s'annuler.

Cheng et al [1988] ont présenté des résultats numériques concernant un écoulement forcé, thermiquement établi, dans un canal poreux chauffé asymétriquement. Une comparaison avec les données expérimentales existantes a révélé la nécessité de prendre en considération les effets des parois.

Pour tenir compte de l'effet de la paroi solide, Kaviany [1985] a présenté une étude numérique sur l'écoulement laminaire à travers un milieu poreux limité par des parois isothermes à la même température en utilisant le modèle général développé par Vafai et Tien [1981] ; il a négligé le terme quadratique de la vitesse dans l'équation du mouvement et le terme de conduction axiale dans l'équation d'énergie. Il a montré les effets des paramètres physiques du milieu poreux (perméabilité, porosité et hauteur du canal) sur le transfert de chaleur et sur la chute de pression. Les résultats ont démontré que la chute de pression décroît rapidement avec l'augmentation du rapport de forme de la conduite, ce rapport de forme étant la seule variable influençante. Du point de vue thermique, dans le cas établi, l'auteur constate

que le nombre de Nusselt tend vers une valeur de 9.87 pour des valeurs du rapport de forme supérieures à 300.

L'effet de la variation de la porosité a été étudié par Chou et al [1992] et Amiri et Vafai [1994]. Les premiers ont effectué une étude numérique en utilisant une variation sinusoïdale. Ils ont pu observer l'effet channeling où la vitesse atteint un maximum à une distance d'environ un demi diamètre de particule de la paroi. Poulikakos et Renken [1987] ont étudié numériquement l'effet de l'inertie, de la variation de la porosité et celui des parois sur l'écoulement et sur le transfert de chaleur à travers un milieu poreux situé entre des plaques parallèles ou dans une conduite cylindrique avec des températures pariétales constantes en utilisant le modèle général.

Les chercheurs Park.Hyo-Soon et al [1988] ont, pour leur part, étudié le transfert de chaleur et de masse par convection naturelle dans un canal divisé en trois parties. La première zone est humide et adiabatique, la deuxième sèche et adiabatique, alors que la troisième est sèche mais soumise à un flux constant. Les résultats obtenus montrent que la largeur du canal et la présence de la zone humide influent sur le transfert de chaleur et de masse, le long du canal. Dans le plan médian, la température adimensionnelle augmente tandis que la concentration garde un profil presque constant. La présence d'un flux secondaire venant de la sortie fait que les vitesses sont plus grandes à côté des plaques et décroissantes au milieu du canal.

### **II-3. La convection transitoire:**

Le couplage entre les équation de quantité de mouvement et de continuité est essentiellement la cause principale de la lenteur de convergence des techniques itératives. Quelques méthodes de traitement de ce couplage, dont certaines sont nouvelles, sont retrouvées dans la littérature.

Ainsi, le travail de Raithby et Schneider [1979] s'est intéressé aux cas de deux cavités, l'une carrée, l'autre rectangulaire qui ont été considérées afin de comparer les méthodes analysées.

Les équations de Navier-Stockes dans les trois directions x, y, et z sont discrétisées et écrites sous leur forme explicite, comme suit :

$$\frac{\rho\Delta V}{\Delta t^{\phi P}} \phi_P = A_e \phi_E^0 + A_w \phi_W^0 + A_n \phi_N^0 + A_s \phi_S^0 + A_u \phi_U^0 + \left( \frac{\rho\Delta V}{\Delta t^{\phi P}} - A_P^* \right) \phi_P^0 - P^* \Delta V \quad \dots(\text{II-1})$$

où :

$$A_P^* = A_e + A_w + A_n + A_s + A_u$$

une vraie solution temporelle est obtenue en prenant une seule valeur de  $\Delta t^{\phi P}$  pour toutes les variables, cependant la convergence peut être accélérée vers le régime stationnaire en relaxant les différentes variables tout en respectant la condition de stabilité suivante :

$$\Delta t^{\phi P} \leq \frac{\rho\Delta V}{A_P^*} \equiv (\Delta t^{\phi P})_{\max} \quad \dots(\text{II-2})$$

La forme implicite de l'équation (II-1) peut s'écrire comme suit :

$$A_P^* \phi_P = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S + A_u \phi_U + \left( \frac{\rho\Delta V}{\Delta t^{\phi P}} \right) \phi_P^0 - P^* \Delta V \quad \dots(\text{II-3})$$

où :

$$A_p = A_P^* + \frac{\rho\Delta V}{\Delta t^{\phi P}} \phi_P$$

et

$$\frac{\rho\Delta V}{\Delta t^{\phi P}} \phi_P = \frac{A_P^*}{E} \quad A_p = A_P^* \frac{1+E}{E} \quad E = \frac{\Delta t^{\phi P}}{(\Delta t^{\phi P})_{\max}}$$

Une formulation explicite ne peut admettre des valeurs de E supérieures à l'unité. La connexion entre cette méthode et les résolutions de Jacobi ou Gauss-Seïdel des équations discrétisées est étudiée par les mêmes auteurs. Dans cette étude, le facteur E a pris les valeurs de 1, 4, 10 et 100.

Plusieurs méthodes de résolution ont été analysées, notamment l'algorithme SIMPLE de Patankar et Spalding [1972], sous trois principales formes :

1° Forme : elle consiste à prendre une valeur de E infinie. Les auteurs ont montré que dans ce cas de figure la pression ainsi que la vitesse devaient être fortement relaxées ( $\alpha$  de

l'ordre de 0.05). Ils ont montré aussi que pour des facteurs de relaxation  $\alpha \geq 0.095$ , la solution diverge.

2° Forme : la 2<sup>ème</sup> méthode consiste à relaxer uniquement les vitesses. Une variation du facteur E montre que pour  $E \geq 2$ , on a divergence ; cependant lorsque  $E < 2$  la 2<sup>ème</sup> méthode s'avère plus économique que la première en temps de calcul.

3° Forme : cette forme, beaucoup plus performante, consiste à prendre un facteur de relaxation de pression  $\alpha = \frac{1+E}{E}$ . Les auteurs ont montré aussi que cette méthode présente une plus grande stabilité.

Les mêmes auteurs ont testé d'autres méthodes pour le même problème, en considérant un seul maillage et de fortes conditions aux limites (vitesses spécifiées sur toutes les parois).

L'étude ainsi développée par Raithby et Schneider compare les différentes méthodes, sur la base de l'erreur sur la pression uniquement. Les auteurs précisent, aussi, que la résolution temporelle utilise un seul cycle (une itération) ce qui n'est pas très valable dans le cas d'un problème à forte non linéarité.

Dans son travail Issa [1986] a utilisé une méthode non itérative basée sur une formulation implicite baptisée PISO. Il a considéré le transfert de chaleur dans une cavité cylindrique et la discrétisation des équations de transport, dans un repère cylindrique (r,x), s'écrit sous la forme suivante :

$$(B - A_p) \phi_p^{n+1} = H' \phi^{n+1} + \bar{S} \phi + B^n \phi_p^n \quad \dots(\text{II-4})$$

et l'équation de continuité :

$$\beta(\rho^{n+1} - \rho^n) + (\rho u a)_e - (\rho u a)_w + (\rho v a)_n - (\rho v a)_s = 0 \quad \dots(\text{II-5})$$

où :

$$B = \frac{\rho r \delta r \delta x}{\delta t}$$

$$H'(\phi) = A_e \phi_E + A_w \phi_W + A_n \phi_N + A_s \phi_S$$

$$A_p = - (A_e + A_w + A_n + A_s + \text{div } M)$$

et

$$\text{div } M = M_e + M_w + M_n + M_s$$

Des manipulations mathématiques entre l'équation de quantité de mouvement et celle de continuité donnent l'équation de pression, qui avec le système d'équations (II-4) écrit pour u, v et T est résolue avec l'algorithme PISO.

La non-linéarité dans l'équation (II-4), venant du fait que A et B sont dépendants des valeurs des variables dans le domaine, est traitée par l'évaluation de ces coefficients avec les valeurs des variables à l'étape précédente. Une première comparaison a été faite, pour la géométrie définie, entre l'algorithme SIMPLE dans le cas stationnaire avec les résultats trouvés avec PISO après l'atteinte de la stationnarité. L'étude a montré que l'algorithme SIMPLE est beaucoup plus sensible à la relaxation et que le temps de calcul est à l'avantage du PISO.

Une deuxième comparaison, cette fois-ci pour l'évolution temporaire, pour les deux méthodes, montre que l'effort de calcul pour le schéma PISO est de 0.19 fois le temps de calcul de la méthode itérative.

Huang et Lin [1994] dans leurs études, ont présenté des simulations numériques détaillées sur l'étude transitoire de l'écoulement tridimensionnel en convection mixte à travers une enceinte rectangulaire chauffée par le bas. La résolution du problème a été faite au moyen de la méthode dite de projection. Elle comporte deux étapes importantes ; la première étape consiste à trouver une vitesse prévisionnelle ( $V^*$ ) qui est obtenue en résolvant l'équation suivante :

$$\frac{V^* - V^n}{\Delta t} + (V^n \nabla) \cdot V^n - \frac{1}{Re} \nabla^2 V^n - B = 0 \quad \dots(\text{II-6})$$

Re étant le nombre de Reynolds et B la force de volume.

La deuxième étape consiste à corriger la vitesse en utilisant l'équation de Poisson :

$$\nabla^2 P^{n+1} = \frac{1}{\Delta t} \nabla \cdot V^* \quad \dots(\text{II-7})$$

La résolution du système algébrique est obtenue à l'aide de la méthode de Gauss-Seidel tout en respectant la condition de stabilité sur le nombre de courant :

$$\Delta t < 0.5 \min \left( \frac{\Delta x}{U_{\max}}, \frac{\Delta y}{V_{\max}}, \frac{\Delta z}{W_{\max}} \right) \quad \dots(\text{II-8})$$

Les résultats sont obtenus à l'aide d'une sur-relaxation jusqu'à satisfaction du test de convergence qui porte sur l'erreur relative sur la pression uniquement.

Le Breton [1991] pour sa part, a étudié la convection naturelle dans une cavité rectangulaire avec une couche poreuse sur les parois verticales. L'analyse s'est portée sur les résultats après stationnarité. Cependant la résolution a été faite avec l'algorithme SIMPLER pour un régime instationnaire afin de parer aux instabilités essentiellement aux grandes valeurs du nombre de Rayleigh. Cette méthode, baptisée 'False Unsteady Procedure', a été déjà utilisée par plusieurs chercheurs notamment dans les Travaux de Van Doormals et Raithby [1984] et Lage [1992]. L'étude montre qu'afin d'éviter une accumulation de l'erreur, il faut appliquer un critère de convergence sévère pour la pression. Aussi, aux premières étapes temporelles, une majoration pour les itérations a été considérée du fait qu'une solution initiale médiocre mènerait à des résultats irréels.

Lauriat et Prasad [1989] ont analysé l'importance relative des forces visqueuses et des forces d'inertie sur la convection naturelle en milieux poreux dans le cas d'une cavité chauffée différentiellement en se basant sur la formulation de Darcy- Brinkman-Forchheimer. Du fait que les auteurs se sont intéressés aux résultats stationnaires dans le cas de valeurs critiques des nombres de Rayleigh et Darcy, ils ont opté pour une formulation « fausse instationnarité » où l'on ne s'intéresse pas aux résultats temporels intermédiaires. Les investigations ont montré qu'il existe un régime asymptotique pour lequel la solution devient indépendante de la perméabilité de la matrice poreuse et des nombres de Darcy et Forchheimer. Ce régime est atteint pour des nombres de Darcy et de Forchheimer d'autant plus faibles que le nombre de Rayleigh, basé sur les propriétés physiques du fluide, est élevé. Lorsque les conductivités des deux phases sont identiques, le nombre de Nusselt global et la structure de l'écoulement sont alors proches de ceux obtenus dans un fluide seul à un même nombre de Rayleigh. Les solutions numériques montrent aussi que le flux de chaleur transféré peut être supérieur à celui calculé dans le cas d'un milieu fluide lorsque la perméabilité de la matrice est suffisamment élevée et lorsque la conductivité thermique du solide est supérieure à celle du fluide.

Lage [1992] dans son travail a étudié l'effet du terme inertiel sur la convection naturelle dans une cavité rectangulaire soumise à un gradient de température sur les parois horizontales. Les résultats numériques montrent que le terme inertiel est négligeable dans le cas de convection naturelle et que son insertion augmente le coût numérique. Cependant

l'étude montre aussi que pour de grandes valeurs de perméabilité, la constatation précédente n'est valable que pour de faibles valeurs de Prandtl ( $Pr < 0.01$ ). Ce problème numérique a été résolu d'une manière très originale ; du fait que la résolution est du type « fausse instationnarité » (False Unsteady Procedure) où l'on ne s'intéresse qu'aux résultats stationnaires, la convergence a été accélérée en imposant une perturbation sur la température initiale :

$$\theta_m = \frac{1}{2} \Pr \left( \frac{1}{2} - X \right) \quad \text{à } y = \frac{1}{2} \quad \text{et } t = 0 \quad \dots(\text{II-9})$$

Comme conséquence à cette supposition, quand le nombre de Prandtl décroît, la non-linearité dans l'équation d'énergie devient insignifiante. Aussi dans l'équation de quantité de mouvement le terme inertiel et celui de Forchheimer gagnent de l'importance engendrant une amélioration conséquente pour les nombre de Prandtl inférieurs à l'unité ( $Pr < 1$ ).

Farid Alavyoon et al [1993] ont étudié le transfert combiné dû à des flux de chaleur et de masse sur les parois verticales d'une enceinte rectangulaire. Le problème a été formulé grâce au modèle de Darcy stationnaire en ajoutant l'approximation de Boussinesq pour le champ dynamique et la formulation instationnaire s'est faite uniquement sur l'équation d'énergie. Un balayage a été fait pour les paramètres essentiels du problème,  $Rc$ ,  $N$ ,  $Le$  et  $A$  correspondants respectivement au nombre de Rayleigh-Darcy, à la poussée, au nombre de Lewis et au facteur de forme. Les résultats montrent que pour les grandes valeurs de  $Rc$ ,  $Le$  et  $A$  on a un domaine de  $N$  où on trouve une convection oscillatoire. En dehors de ce domaine la solution s'approche de la solution analytique stationnaire présentée dans la même publication.

Ce genre de formulation, où le régime dynamique est supposé stationnaire, a été utilisé dans beaucoup de travaux, on citera notamment l'étude de Bennasrallah et al [1997] qui ont considéré la convection naturelle instationnaire dans un cylindre vertical rempli de grains, ouvert à ces extrémités et dont la paroi est chauffée par un flux de chaleur constant. Deux types de modélisations ont été utilisés : un modèle à deux températures (température du solide différente de celle du fluide), et le modèle à une température (équilibre thermique local). Les résultats ont démontré la validité de l'équilibre thermique local dans la quasi totalité du domaine, l'écart entre les températures du fluide et celle du solide n'étant observé qu'à l'entrée du cylindre, aux voisinages immédiats de la paroi chauffée ainsi qu'à la surface supérieure du cylindre. L'étude montre aussi l'existence de deux classes d'écoulement selon les valeurs des nombres de Rayleigh  $Ra$  et du facteur de forme  $A$ . Pour les nombres de

Rayleigh et les facteurs de forme élevés, l'alimentation de l'écoulement pariétal se fait à la fois par le bas et par le haut du cylindre engendrant une recirculation de l'écoulement dans la zone centrale. Pour les faibles valeurs des nombres de Rayleigh Ra et du facteur de forme A, l'écoulement est ascendant dans la totalité du cylindre et la composante radiale de la vitesse est pratiquement nulle dans tout le domaine.

Van-Dyne et Stewart Jr [1994], ont formulé de la même manière, le problème du transfert combinée par convection naturelle, en régime instationnaire, dans une géométrie semi-cylindrique de longueur infinie remplie d'un milieu poreux. Ce dernier est générateur de chaleur et de masse, avec aussi bien des conditions de parois imperméables, que perméable. Les auteurs ont fait varier différents paramètres tel que les nombres de Lewis, Rayleigh (Nu étant calculé par la méthode utilisée par Tveitereid [1977] et Stewart et Dona [1985]). Les résultats obtenus numériquement, ont permis d'observer l'écoulement à travers l'évolution de la fonction de courant. L'étude a mis aussi en évidence les effets de la convection, qui sont plus importants pour le modèle aux conditions de parois perméables que pour le cas de frontières non perméables, Ceci a été observé à partir des valeurs du nombre de Nusselt ainsi que des valeurs de températures maximales.

Viollet et al [1981] ont présenté une description du modèle utilisé au Laboratoire National d'Hydraulique Français, pour traiter les écoulements plans en charge de fluide incompressible non isotherme. Les équations de départ sont celles de Navier-Stokes et la résolution de ces équations s'effectue à partir d'un algorithme rotationnel-fonction de courant. La formulation du problème a montré qu'il faut résoudre le système d'équations suivant :

$$\frac{f - f^n}{DT} + U^n \frac{\partial f^n}{\partial x} + V^n \frac{\partial f^n}{\partial y} = \nu_t \text{div grad}(f) \quad \dots(\text{II-10})$$

et

$$\Delta \Psi = -\omega \quad \dots(\text{II-11})$$

La résolution se fait en deux étapes : rechercher d'abord une solution homogène en fractionnant cette dernière de façon à séparer les deux directions de l'espace. L'équation de transport à résoudre exprime que f est constante le long d'une courbe caractéristique. Une interpolation de la valeur de f au pied de la trajectoire (courbe caractéristique) est effectuée en

respectant la condition sur le nombre de courant :

$$u_0 \frac{DT}{\Delta x} \leq 1$$

où :

$u_0$  : vitesse de référence ;

DT : pas de temps utilisé ;

$\Delta x$  : pas minimum du maillage utilisé.

Le calcul de la fonction de courant, avec des conditions aux limites de Dirichlet, utilise la méthode de Lemonier dite « éclatement de l'opérateur » et la résolution s'effectue par itérations, au cours de chacune d'elles, une optimisation des résidus se fait grâce à une méthode de gradient conjugué.

## **Conclusion :**

La recherche bibliographique a montré que les études instationnaires restent rares par rapport aux travaux traitant le régime stationnaire. Les traitements en régime transitoire peuvent être classés en deux grandes catégories : la première (la plus courante) connue sous le nom de « false unsteady procedure » est une résolution qui s'intéresse au régime stationnaire et la formulation transitoire y est introduite essentiellement pour parer aux instabilités de calculs dans les cas de paramètres critiques. La seconde classe qui traite l'évolution temporelle est plus rare, essentiellement à cause de son coût numérique élevé. Elle peut être abordée comme le propose la littérature à l'aide de plusieurs types de traitement. Dans un souci de stabilité, c'est l'algorithme SIMPLER qui est le plus préconisé. C'est celui que nous choisirons pour la suite de notre étude.

## **\_Chapitre III :**

# **FORMULATION MATHÉMATIQUE**

### **III-1 Introduction :**

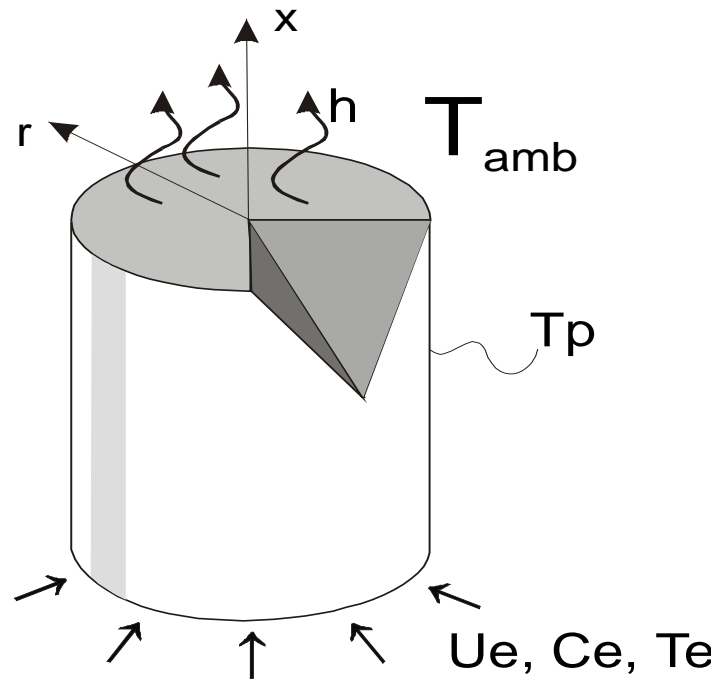
Ce chapitre est consacré à la mise en équation du problème physique considéré en utilisant les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie et de la concentration gouvernant les transferts de chaleur et de soluté, par convection forcée dans le cylindre poreux.

On commencera par l'écriture des équations sous leurs formes générales. On définira par la suite, les différentes grandeurs pour le traitement de ces équations et des conditions aux limites afin d'arriver à la forme adimensionnelle retenue dans notre travail. Nous définirons enfin les nombres de Nusselt et de Sherwood quantifiant les transferts de chaleur et de masse respectivement.

### **III-2 Modèle physique :**

Nous considérons un cylindre disposé verticalement, de hauteur  $H$  et de rayon  $R$ . Il est traversé par un fluide, constitué d'un solvant et d'un soluté, de viscosité cinématique  $\nu$ , de diffusivité thermique  $\alpha$ , et de diffusivité solutale  $D$ .

Le cylindre, ouvert à ses extrémités, est rempli d'un milieu poreux indéformable, homogène et isotrope. La paroi du cylindre est portée à des température et concentration constantes ( $T_p, C_p$ ), alors que le fluide rentre par le bas avec des température et concentration différentes ( $T_e, C_e$ ).



**Figure III-1.** Configuration géométrique.

### III-3 Formulation mathématique :

Afin de passer à un milieu continu fictif, la formulation des phénomènes est effectuée sur une échelle macroscopique (taille du volume élémentaire représentatif (VER) très grande par rapport à celle des pores). Ainsi, les équations régissant les principes de conservation sont formulées en adoptant certaines hypothèses simplificatrices à savoir :

- On considère un fluide newtonien, incompressible ;
- On suppose les propriétés physiques du fluide constantes et évaluées à une température et une concentration moyennes de référence ;
- La géométrie du problème fait que l'écoulement est considéré bidimensionnel et axisymétrique ;
- L'équilibre thermique local est admis, par conséquent une seule équation décrivant la variation de température moyenne sur un volume élémentaire représentatif, est utilisée pour représenter le champ thermique.

### III-3.1 Equations gouvernantes :

Les équations de conservation dans le milieu poreux sont formulées, en utilisant le modèle de Darcy-Brinkman pour l'écoulement, sous leurs écritures vectorielles (Lauriat et Prasad, [1989]) :

**Equation de continuité :**

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{V} = 0 \quad \dots(\text{III-1})$$

**Equation de quantité de mouvement :**

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \vec{V} \cdot \vec{\nabla} \vec{V} = -\vec{\nabla} P - \frac{\mu_f}{K} \vec{V} + \mu_{\text{eff}} \nabla^2 \vec{V} \quad \dots(\text{III-2})$$

**Equation d'énergie :**

$$\left(\rho c_p\right)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + \left(\rho c_p\right)_f \vec{V} \cdot \vec{\nabla} T = k_{\text{eff}} \nabla^2 T \quad \dots(\text{III-3})$$

**Equation de concentration :**

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{V} \cdot \vec{\nabla} C = D_{\text{eff}} \nabla^2 C \quad \dots(\text{III-4})$$

où :

$\rho$  : la masse volumique du fluide considéré ;

$\varepsilon$  : la porosité du milieu poreux ;

$\mu$  : la viscosité dynamique ;

$K$  : la perméabilité du milieu poreux ;

$k$  : conductivité thermique ;

$D$  : diffusivité massique.

Les indices :

e : représente l'entrée ;

p : représente la paroi ;

f : représente le fluide ;

eff : représente les variables effectives ;

Bien que pour certains milieux poreux (perles sphériques) la porosité peut varier à cause de l'effet Channeling près des parois (Vafai, [1984]), pour notre part, nous considérons un milieu poreux bien fermé, donc des perméabilité et porosité constantes (Hunt et Tien, [1988]). Aussi dans l'équation d'énergie, la dissipation visqueuse est négligée alors que la conduction axiale est prise en considération vu qu'elle est très importante pour de petits Reynolds (Hadim et Govindarajan, [1988]).

Après projection de ces équations suivant les coordonnées cylindriques (x,r), on obtient :

**Equation de continuité :**

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot V)}{\partial r} = 0 \quad \dots(\text{III-5})$$

**Equation de quantité de mouvement :**

Dans la direction x :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\mu_f}{K} U + \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) \quad \dots(\text{III-6a})$$

Dans la direction r :

$$\frac{\rho_f}{\varepsilon} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\rho_f}{\varepsilon^2} \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} - \frac{\mu_f}{K} V + \mu_{\text{eff}} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{V}{r^2} \right) \quad \dots(\text{III-6b})$$

**Equation d'énergie :**

$$\left( \rho c_p \right)_{\text{eff}} \frac{\partial T}{\partial t} + \left( \rho c_p \right)_f \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} \right) = k_{\text{eff}} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad \dots(\text{III-7})$$

**Equation de concentration:**

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \left( U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial r} \right) = D_{\text{eff}} \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right) \quad \dots(\text{III-8})$$

### III-3.2 Conditions initiales et aux limites :

#### *Champ dynamique :*

Les conditions initiales et aux limites, relatives à l'adhérence à la paroi, la symétrie de révolution, la vitesse d'entrée longitudinale fixée, ainsi que l'établissement de celle-ci à la sortie, sont formulées respectivement, comme suit :

$$\text{à } t = 0 \quad U(x, r, 0) = V(x, r, 0) = 0 \quad \dots(9a)$$

$$\text{à } t > 0 \quad U(x, R, t) = V(x, R, t) = 0 \quad \dots(9b)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(9c)$$

$$\begin{cases} U(o, r, t) = u_e \\ V(o, r, t) = 0 \end{cases} \quad \dots(9d)$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(H,r,t)} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(H,r,t)} = 0 \quad \dots(9e)$$

#### *Champ thermique :*

Le champ thermique est également soumis à des conditions initiales et aux limites. Les températures initiale, à l'entrée et à la paroi sont fixées, ainsi que la symétrie sur l'axe. ce qui s'écrit, respectivement :

$$\text{à } t = 0 \quad T(x, r, 0) = T_{in} \quad \dots(10a)$$

$$\text{à } t > 0 \quad T(o, r, t) = T_e \quad \dots(10b)$$

$$T(x, R, t) = T_p \quad \dots(10c)$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(10d)$$

Sur la face supérieure du cylindre ( $x = H$ ), l'échange de chaleur entre le milieu poreux et le milieu externe est formulé comme suit :

$$-k_{\text{eff}} \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(H,r,t)} = h \cdot (T(H,r,t) - T_{\text{amb}}) \quad \dots(10e)$$

Avec :

$T_{\text{in}}$  : représente la température initiale du milieu ;

$T_p$  : la température à la paroi ;

$T_e$  : la température d'entrée.

$T_{\text{amb}}$  : représente la température ambiante ;

$h$  : coefficient d'échange thermique ;

$k_{\text{eff}}$  : la conductivité thermique effective.

### ***Champ massique :***

Les conditions relatives au champ massique sont de même type que celles relatives au champ thermique à savoir : la concentration initiale, d'entrée et celle de la paroi fixées ainsi que la symétrie sur l'axe. Soit une écriture se ramenant aux équations ci-dessous :

$$t = 0 \quad C(x, r, 0) = C_{\text{in}} \quad \dots(11a)$$

$$t > 0 \quad C(0, r, t) = T_e \quad \dots(11b)$$

$$C(x, R, t) = 1 \quad \dots(11c)$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(11d)$$

La condition de sortie est exprimée par :

$$-D_{\text{eff}} \cdot \left. \frac{\partial C}{\partial X} \right|_{(1,r,t)} = h_m \cdot (C(H,r,t) - C_{\text{amb}}) \quad \dots(11e)$$

Où :

$C_{\text{amb}}$  : représente la concentration ambiante ;

$h_m$  : coefficient d'échange massique ;

$D_{\text{eff}}$  : la diffusivité massique équivalente.

### III-4 Adimensionnement des équations :

#### III-4.1 Equations de transport :

Afin de conférer une certaine généralité aux résultats, une mise sous forme adimensionnelle s'avère nécessaire. Les variables sont adimensionnées avec une longueur de référence  $H$  (longueur du cylindre) et une vitesse caractéristique  $u_0$  (vitesse d'entrée) sous la forme :

$$x^* = \frac{x}{H} ; r^* = \frac{r}{H} ; U^* = \frac{U}{u_0} ; V^* = \frac{V}{u_0} ; T^* = \frac{T - T_e}{T_p - T_e} ;$$

$$C^* = \frac{C - C_e}{C_p - C_e} ; P^* = \frac{P}{\left( \frac{\rho_f \cdot U_e^2}{\varepsilon^2} \right)} ; t^* = \frac{t}{\left( \frac{H}{U_e} \right)} ;$$

**Remarque :** Afin de ne pas encombrer l'écriture des équations, les exposants (\*) relatifs aux variables adimensionnelles seront omis par la suite.

Dans ces conditions, les équations de transfert adimensionnelles s'écrivent sous la forme :

### Equation de continuité :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot V)}{\partial r} = 0 \quad \dots(\text{III-12})$$

### Equation de quantité de mouvement :

Dans la direction x :

$$\varepsilon \frac{\partial U}{\partial t} + \left( U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial x} + \text{GR1} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) \right) - \text{GR2} \cdot U \quad \dots(\text{III-13a})$$

Dans la direction r :

$$\varepsilon \frac{\partial V}{\partial t} + \left( U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial r} \right) = - \frac{\partial P}{\partial r} + \text{GR1} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial V}{\partial r} \right) - \frac{V}{r^2} \right) - \text{GR2} \cdot V \quad \dots(\text{III-13b})$$

### Equation d'énergie :

$$\sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \left( U \frac{\partial T}{\partial x} + V \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \text{GR3} \cdot \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \right) \quad \dots(\text{III-14})$$

### Equation de concentration :

$$\varepsilon \frac{\partial C}{\partial t} + \left( U \frac{\partial C}{\partial x} + V \frac{\partial C}{\partial r} \right) = \text{GR4} \cdot \left( \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial C}{\partial r} \right) \right) \quad \dots(\text{III-15})$$

Les équations adimensionnelles introduisent des groupes sans dimension qui sont récapitulés dans le tableau suivant :

$\text{GR1} = \frac{R_v \varepsilon^2}{\text{Re}}$	$\text{GR3} = \frac{R_k}{P_r \cdot R_c}$
$\text{GR2} = - \frac{\varepsilon^2}{\text{Da} \cdot \text{Re}}$	$\text{GR4} = \frac{\varepsilon}{\text{Re} \cdot \text{Sc}}$

**Tableau III-1.** Groupes adimensionnels dans les équations de conservation.

$Re = \frac{U_e \cdot H}{\nu_f}$ : Nombre de Reynolds	$\varepsilon$ : Porosité du milieu poreux
$Da = \frac{K}{H^2}$ : Nombre de Darcy	$\sigma = \frac{(\rho \cdot C_p)_{eff}}{(\rho \cdot C_p)_f}$ : Rapport des capacités calorifiques
$Pr = \frac{\mu_f \cdot C_p}{k_f}$ : Nombre de Prandtl	$R_k = \frac{k_{eff}}{k_f}$ : Rapport des conductivités
$Sc = \frac{\nu}{D}$ : Nombre de Schmidt	$R_v = \frac{\mu_{eff}}{\mu_f}$ : Rapport des viscosités

**Tableau III-2.** Nombres adimensionnels dans les équations de conservation.

### III-4.2 Conditions initiales et aux limites :

#### *Champ dynamique :*

Les conditions (III-9 a à e) sont formulées, après adimensionnement, respectivement comme suit :

$$\text{à } t = 0 \quad U(x, r, 0) = V(x, r, 0) = 0 \quad \dots(\text{III-17a})$$

$$\text{à } t > 0 \quad U(x, A, t) = V(x, A, t) = 0 \quad \dots(\text{III-17b})$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(\text{III-17c})$$

$$\begin{cases} U(0, r, t) = 1 \\ V(0, r, t) = 0 \end{cases} \quad \dots(\text{III-17d})$$

$$\left. \frac{\partial U}{\partial x} \right|_{(1,r,t)} = \left. \frac{\partial V}{\partial x} \right|_{(1,r,t)} = 0 \quad \dots(\text{III-17e})$$

Où : A représente le rapport de forme du cylindre ( $A = \frac{R}{H}$ ).

### **Champ thermique :**

En posant des températures initiale et ambiante égales à la température d'entrée, le champ thermique est soumis à des conditions initiales et aux limites adimensionnelles qui s'écrivent, respectivement, sous la forme :

$$\text{à } t = 0 \quad T(x, r, 0) = 0 \quad \dots(\text{III-18a})$$

$$\text{à } t > 0 \quad T(0, r, t) = 0 \quad \dots(\text{III-18b})$$

$$T(x, A, t) = 1 \quad \dots(\text{III-18c})$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(\text{III-18d})$$

L'échange de chaleur entre le milieu poreux et le milieu externe est formulé comme suit :

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(1,r,t)} = -Bi \cdot T(1, r, t) \quad \dots(\text{III-18e})$$

Avec :

$$Bi = \frac{h \cdot H}{k_{\text{eff}}} : \text{représente le nombre de Biot thermique.}$$

### **Champ massique :**

En posant une concentration ambiante égale à la concentration d'entrée, tout en choisissant une concentration initiale intermédiaire entre les concentration d'entrée et de la paroi, les conditions relatives au champ massique (III-11a à e), ont une écriture se ramenant aux équations ci-dessous :

$$t = 0 \quad C(x, r, 0) = 0.5 \quad \dots(\text{III-19a})$$

$$t > 0 \quad C(0, r, t) = 0 \quad \dots(\text{III-19b})$$

$$C(x, A, t) = 1 \quad \dots(\text{III-19c})$$

$$\left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{(x,0,t)} = 0 \quad \dots(\text{III-19d})$$

La condition de sortie est exprimée par :

$$\left. \frac{\partial C}{\partial x} \right|_{(1,r,t)} = -\text{Bi}_m \cdot C(1, r, t) \quad \dots(\text{III-19e})$$

Où :

$\text{Bi}_m = \frac{h_m \cdot H}{D_{\text{eff}}}$  : Est le nombre de Biot massique, un paramètre équivalent au nombre de Biot thermique qui représente le rapport entre les effets de diffusion massique interne et les effets de convection sur la face supérieure du cylindre.

### III-5 Coefficients de transfert de chaleur et de masse :

Les transferts de chaleur et de masse sont représentés, respectivement, par les nombres de Nusselt et Sherwood. Afin de comparer les transferts pour les différents cas de figures considérés, on introduit ces nombres qui représentent les rapports du flux convectif de chaleur et de soluté, en un point donné, au flux de chaleur par conduction et au flux massique par diffusion. Ainsi le coefficient de transfert thermique s'exprime en combinant les deux équations caractérisant le flux convectif et le flux conductif, et qui sont :

$$q = -k_{\text{eff}} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R} \quad \dots(\text{III-20})$$

et

$$q = h(x)(T_p - T_m(x)) \quad \dots(\text{III-21})$$

Par la suite

$$\text{Nu}(x) = \frac{-k_{\text{eff}} \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=R}}{(T_p - T_m(x))} \quad \dots(\text{III-22})$$

Par conséquent, après adimensionnement, on obtient une forme finale du nombre de Nusselt :

$$\text{Nu}(x) = \frac{-2A \cdot \left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=A}}{1 - T_m} \quad \dots(\text{III-23})$$

Par analogie, le nombre de Sherwood, caractérisant le transfert massique, s'écrit :

$$\text{Sh}(x) = \frac{-2A \cdot \left. \frac{\partial C}{\partial r} \right|_{r=A}}{1 - C_m} \quad \dots(\text{III-24})$$

où  $T_m$  et  $C_m$  sont la température et la concentration moyennes de mélange qui s'écrivent, respectivement :

$$T_m = \frac{\int_S \vec{V} \cdot T \cdot \vec{ds}}{\int_S \vec{V} \cdot \vec{ds}} \quad \dots(\text{III-25})$$

$$C_m = \frac{\int_S \vec{V} \cdot C \cdot \vec{ds}}{\int_S \vec{V} \cdot \vec{ds}} \quad \dots(\text{III-26})$$

De même, on définit le nombre de Nusselt et le nombre de Sherwood moyens comme étant respectivement (Muralidhar, [1990]) :

$$\text{Nu} = \int_0^1 \text{Nu}(x) \cdot dx \quad \dots(\text{III-27})$$

$$\text{Sh} = \int_0^1 \text{Sh}(x) \cdot dx \quad \dots(\text{III-28})$$

## Conclusion :

Après avoir posé le modèle physique, formulé les équations relatives aux champs dynamique, thermique et à la conservation des espèces, il est à présent nécessaire de modéliser numériquement notre problème en lui associant les conditions initiales et aux limites suscitées. Les questions relatives au choix de la méthode numérique et à la résolution seront traitées dans le quatrième chapitre.

## Chapitre IV :

# PROCEDURE NUMERIQUE

### IV-1 Introduction:

Afin de résoudre le système constitué des équations de continuité, de mouvement, d'énergie et de concentration assorties des conditions initiales et aux limites correspondantes, on utilise la méthode des volumes finis (Patankar,[1980]).

La méthode des volumes finis est une méthode semi-intégrale qui consiste à intégrer l'équation considérée sur un volume de contrôle entourant le point de calcul et à évaluer les différentes variables non situées sur le maillage de calcul par des interpolations adéquates . On choisira pour plus de simplicité et de gain de temps de calcul, des interpolations jugées adéquates au régime transitoire Mojtabi [1994]. Un ordre plus élevé conduirait à des systèmes d'équations algébriques dont les matrices seraient plus difficiles à traiter et coûterait donc plus cher en temps machine.

La méthode des volumes finis a l'avantage d'être mise en œuvre plus facilement que la méthode des éléments finis bien que cette dernière prenne mieux en compte les limites de formes complexes. Les deux méthodes sont des méthodes intégrales et nécessitent la seule connaissance des variables sur le contour de l'élément tout en ignorant les phénomènes intérieurs. Les équations intégrées expriment donc la conservation exacte de la masse, de la quantité de mouvement, de l'énergie et des espèces de la même manière que les équations aux dérivées partielles de départ -valides pour tout élément infinitésimal- tout en ne nécessitant qu'un nombre fini d'éléments d'intégration. Une conséquence directe de ceci est l'utilisation de maillages plus «grossiers » que pour une méthode de différences finies classique. Cependant la propriété conservative n'est pas parfaitement vérifiée lorsqu'il y a un terme source dépendant de l'une des variables du problème dans l'équation à discrétiser.

## IV-2 Ecriture généralisée des équations:

Les phénomènes de transport sont généralement formulés par des principes de conservation d'une certaine quantité physique  $\phi$  (souvent propriété spécifique) qui sera la variable dépendante. La variable  $\phi$  peut représenter des vitesses, une enthalpie, une espèce chimique, une concentration ou des paramètres de turbulence ; et le principe de conservation de cette variable s'exprime alors, pour un élément de volume, de la manière suivante :

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = S \quad \dots(\text{IV-1})$$

où

$\rho$  : la densité ;

t: le temps ;

S: la génération volumique (ou le terme source) ;

et les  $J_i$  représentent les densités de flux total dans la direction  $i$ .

La notation tensorielle utilisée dans l'équation (IV-1) s'écrit dans un repère cartésien comme suit:

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_1}{\partial x_1} + \frac{\partial J_2}{\partial x_2} + \frac{\partial J_3}{\partial x_3} \quad \dots(\text{IV-2})$$

cette même expression s'écrit pour un problème bidimensionnel :

$$(x, y) \quad \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} \quad \dots(\text{IV-3a})$$

$$(x, r) \quad \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot J_r)}{\partial r} \quad \dots(\text{IV-3b})$$

$$(\theta, r) \quad \frac{\partial J_i}{\partial x_i} = \frac{1}{r} \frac{\partial J_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial(r \cdot J_r)}{\partial r} \quad \dots(\text{IV-3c})$$

Le flux total (ou densité du flux)  $J$  dans une direction donnée représente la sommation du flux convectif et du flux par diffusion :

$$J_i = \rho U_i \phi - \Gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) \quad \text{(IV-4)}$$

où  $U_i$  représente la vitesse du fluide dans la direction  $i$  et  $\Gamma$  le coefficient de diffusion.

En substituant l'équation (IV-4) dans l'équation de conservation (IV-1), on retrouve l'équation de conservation suivante:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \quad \text{(IV-5)}$$

L'écriture finale de l'équation de conservation pour un problème incompressible, se met sous la forme suivante :

$$f_i \cdot \frac{\partial}{\partial t}(\phi) + \frac{\partial}{\partial x_i}(U_i \phi) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) + S \quad \text{(IV-6)}$$

et les quatre termes composant cette équation représentent, respectivement, le terme instationnaire, le terme convectif, le terme de diffusion et le terme source. Le tableau (IV-1) résume les valeurs des différents paramètres relatifs à notre problème :

Equation de conservation	de	$\phi$	$\Gamma$	S	$f_i$
Equation de continuité	de	1	0	0	0
Equation du mouvement suivant x	du	U	GR1	$-\frac{\partial P}{\partial x} - GR2 \cdot U$	$\varepsilon$
Equation du mouvement suivant r	du	V	GR1	$-\frac{\partial P}{\partial r} - GR1 \frac{V}{r^2} - GR2 \cdot V$	$\varepsilon$
Equation d'énergie		T	GR3	0	$\sigma$
Equation de concentration	de	C	GR4	0	$\varepsilon$

**Tableau IV-1.** Equations générales de conservation.

Où les groupements adimensionnels (GR1, GR2, GR3) dans les équations de conservation sont définis dans le chapitre précédent (Chapitre III).

### IV-3 Maillage:

Dans ce type de problème, il a été constaté que le choix du maillage est très important pour assurer la convergence. Mis à part le maillage uniforme, largement utilisé dans la littérature, plusieurs études ont montré que les couches limites aux parois sont très dépendantes des paramètres de l'écoulement. De ce fait, l'application de maillages non uniformes est nécessaire pour assurer la rapidité de convergence, ce qui est très important dans le cas d'études instationnaires où la quasi totalité des travaux entrepris a opté pour des maillages non uniformes dont on citera, à titre d'exemple, le maillage à zones qui consiste en un découpage du domaine d'étude en plusieurs régions en adoptant des maillages uniformes dans chacune d'elles (Y. Lee [1988]). Notons que les longueurs des zones près des parois sont prises faibles. Ce type de maillage, malgré sa simplicité, présente des inconvénients parfois notables puisqu'il provoque des discontinuités au niveau des solutions.

En 1987, Poulidakos et Renken ont adopté dans leurs études un maillage géométrique de raison 1,05. Ce type de maillage a été largement utilisé notamment par Benard et al [1989] et Bennacer [1993]. Cependant, ce maillage présente un inconvénient lorsque la raison de la suite géométrique augmente, provoquant des instabilités dans les calculs. En 1991, le Breton a proposé un maillage exponentiel où les distances suivant les deux directions s'écrivent, dans les deux moitiés du domaine de calcul, comme suit :

$$x, y = D \left( e^{c(1-p,q)} - 1 \right) \quad \dots(\text{IV-7a})$$

et

$$x, y = 1 - D \left( e^{c(1-p,q)} - 1 \right) \quad \dots(\text{IV-7b})$$

p,q, étant les incréments relatifs aux positions suivant x et y respectivement ;

c est le facteur d'expansion du maillage et la constante D est donnée par:

$$D = \frac{0.5}{\left(\exp\left(\frac{c}{2}\right) - 1\right)} \quad \dots(\text{IV-8})$$

L'étude sus citée a montré que la constante c est prise de telle manière à ce que le rapport du maximum et du minimum des intervalles n'excède pas la valeur 7 ; au delà de cette valeur des instabilités se développent. D'autres études, telle que celle de Khellaf [1994] et Retiel [1995] ont repris le même maillage en prenant arbitrairement la constante c entre 0 et 2 .

Plusieurs études (Patankar [1980]) et bien d'autres auteurs ont proposé un maillage à variation en puissance sous la forme:

$$\frac{x_i}{l} = \left(\frac{i-2}{I_{\max}-2}\right)^n \quad \dots(\text{IV-9})$$

avec

- l: la longueur totale du domaine ;
- i: incrément de la position des nœuds;
- $i_{\max}$ : nombre maximal de nœuds.

D'après l'équation (IV-9), on remarque que lorsque  $n > 1$ , le maillage est plus serré à gauche du domaine ; il devient plus important en progressant de plus en plus vers la droite du domaine. Le contraire est constaté pour  $n < 1$ .

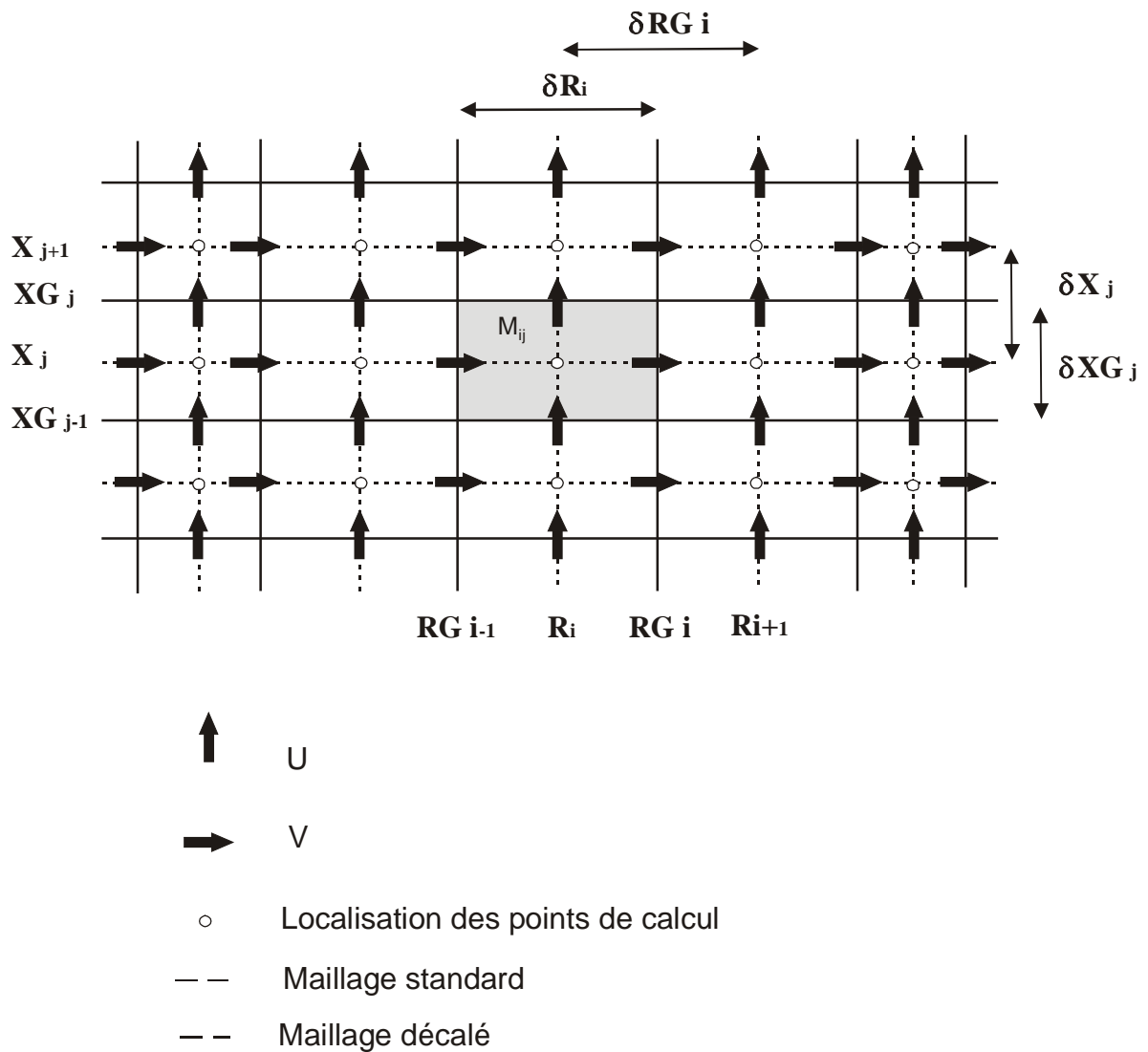
Par ailleurs lorsque la formule suivante est utilisée :

$$\frac{x_i}{l} = 1 - \left(1 - \frac{i-2}{I_{\max}-2}\right)^n \quad \dots(\text{IV-10})$$

Un facteur  $n > 1$  engendre un resserrement du maillage à droite du domaine et vice versa.

On utilisera, pour la résolution de notre problème, une combinaison entre un maillage à zones et un maillage à variation en puissance afin de resserrer les pas dans les quatre frontières du domaine. On utilisera une grille dite standard dont les frontières

coïncident avec les parois du cylindre et une autre grille décalée par rapport à cette dernière, construite en intercalant un point de la grille décalée au milieu de deux points de la grille standard. Une exception est faite pour les parois où l'on fera aussi coïncider la grille décalée (R,X) avec la grille standard (RG,XG), Figure (IV-2).



**Figure IV-2.** Portion d'une coupe longitudinale du cylindre poreux.

#### IV-4 Discrétisation générale des équations:

Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement, d'énergie et de la concentration s'écrivent pour notre problème sous la forme générale suivante:

$$f_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (r \cdot J_i)}{\partial r} + \frac{\partial J_x}{\partial x} = S \quad \dots(\text{IV-11})$$

S étant le terme source,  $J_r$  et  $J_x$  sont les flux de convection-diffusions dans les directions r et x .

Equation considérée	$f_i$	$\phi$	$J_x$	$J_r$	S
Formulation Générale	$f_i$	$\phi$	$U \phi - \Gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial x} \right)$	$V \phi - \Gamma \left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)$	S
Equation de continuité	1	1	U	V	0
Equation du mouvement suivant x	$\varepsilon$	U	$UU - GR1 \frac{\partial U}{\partial X}$	$UV - GR1 \frac{\partial U}{\partial X}$	$-\frac{\partial P}{\partial x} - GR2 \cdot U$
Equation du mouvement suivant r	$\varepsilon$	v	$UV - GR1 \frac{\partial V}{\partial X}$	$VV - GR1 \frac{\partial V}{\partial r}$	$-\frac{\partial P}{\partial r} - GR2 \cdot V$
Equation d'énergie	$\sigma$	T	$UT - GR3 \frac{\partial T}{\partial X}$	$VT - GR3 \frac{\partial T}{\partial r}$	0
Equation de concentration	$\varepsilon$	C	$UC - GR4 \frac{\partial C}{\partial X}$	$VC - GR4 \frac{\partial C}{\partial r}$	0

**Tableau IV-2.** Forme générale des équations.

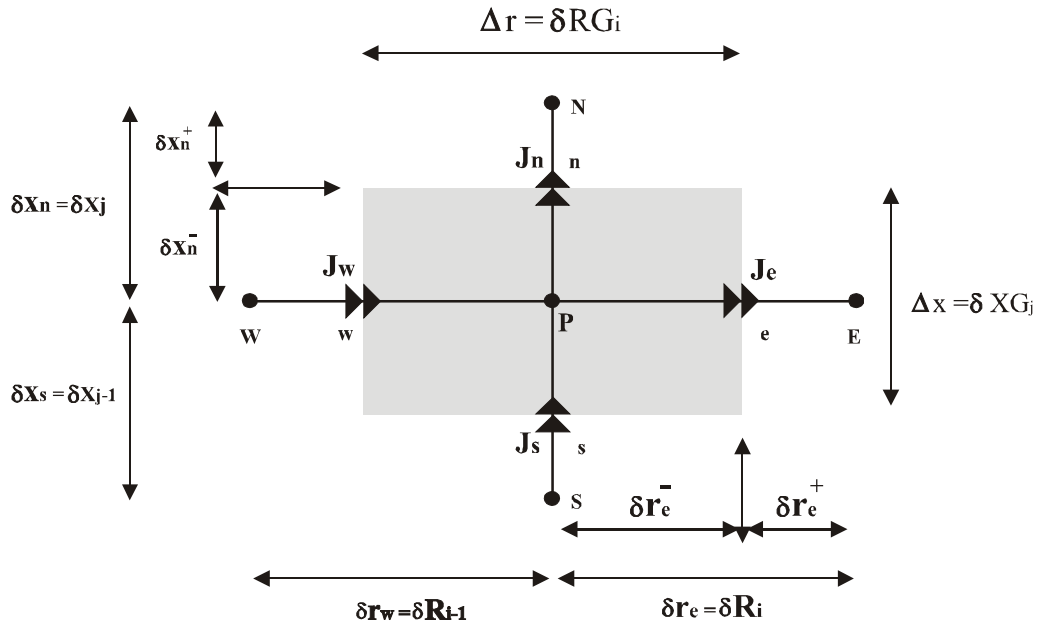


Figure VI-3. Volume de contrôle.

L'équation généralisée de conservation sur un volume de contrôle (figure VI-3), sous sa forme intégrale, s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n \left( f_i \frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rJ_r)}{\partial r} + \frac{\partial J_x}{\partial x} \right) dt dr dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w^e \int_s^n S dt dr dx \quad \dots(\text{IV-12})$$

ou aussi :

$$(\phi_p - \phi_p^o) \left( \frac{f_i \cdot \Delta V}{\Delta t} \right) = J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n + \bar{S} \Delta V \quad \dots(\text{IV-13})$$

où l'exposant o indique les valeurs connues au début de l'étape temporaire  $\Delta t$ , le terme  $\bar{S}$  définit la moyenne du terme source dans le volume de contrôle.  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle et les A (indice w.e.s et n) sont les aires des différentes faces du volume de contrôle.

Les J (indice w.e.s et n) représentent les flux totaux (convection + diffusion) passant à travers la face d'un volume de contrôle. Ils s'écrivent respectivement :

$$J_{rw} = J_w = \left[ v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] r_w \Delta x \quad \dots(\text{IV-14a})$$

$$J_{re} = J_e = \left[ v\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial r} \right] r_e \Delta x \quad \dots(\text{IV-14b})$$

$$J_{xs} = J_s = \left[ u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \Delta r r_m \quad \dots(\text{IV-14c})$$

$$J_{xn} = J_n = \left[ u\phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right] \Delta r r_m \quad \dots(\text{IV-14d})$$

où  $r_m = \frac{r_e + r_w}{2}$  est le rayon moyen.

L'évaluation des différents termes constituant l'équation nécessite un nombre d'approximations de façon à former un système d'équations algébriques liant entre les valeurs de la variable  $\phi$  aux nœuds considérés  $M_{ij}$ . L'une des difficultés de cette évaluation est le choix des profils d'interpolation adéquats exprimant l'évolution de la variable  $\phi$  aux interfaces des volumes de contrôle qui diffère d'un schéma d'interpolation à l'autre.

Après intégration de l'équation (IV-13), celle ci est réécrite de la manière suivante (Patankar, [1980]) :

$$a_p \phi_p = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad \dots(\text{IV-15})$$

ou encore

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad \dots(\text{IV-16})$$

où l'indice nb désigne les nœuds voisins et les coefficients dans les équations algébriques sont données par

avec:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad \dots(\text{IV-17a})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad \dots(\text{IV-17b})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad \dots(\text{IV-17c})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad \dots(\text{IV-17d})$$

$$b = f_i \frac{\Delta V}{\Delta t} \phi_p^0 + \bar{S} \quad \dots(\text{IV-17e})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + f_i \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \dots(\text{IV-17f})$$

Le signe  $\|a, b\|$  représente le maximum entre a et b, la fonction  $A(|P_m|)$  étant la fonction d'Interpolation qui diffère d'un schéma à un autre.

Les termes  $D_m$  et  $F_m$  représentent, respectivement, les diffusions et les débits volumiques à travers les faces respectives du volume de contrôle et les  $P_m$  ( $m=e.w.s.n$ ), expriment le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion.

Ils sont donnés par :

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta x \cdot r_e}{(\delta r)_e} \quad F_e = u_e \cdot \Delta x \cdot r_e \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad \dots(\text{IV-18a})$$

$$D_w = \Gamma_w \frac{\Delta x \cdot r_w}{(\delta r)_w} \quad F_w = u_w \cdot \Delta x \cdot r_w \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad \dots(\text{IV-18b})$$

$$D_n = \Gamma_n \frac{\Delta x \cdot r_n}{(\delta r)_n} \quad F_n = v_n \cdot \Delta r \cdot r_m \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad \dots(\text{IV-18c})$$

$$D_s = \Gamma_s \frac{\Delta x \cdot r_m}{(\delta r)_s} \quad F_s = v_s \cdot \Delta r \cdot r_m \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad \dots(\text{IV-18d})$$

#### IV-4.1 Schémas d'interpolation:

Les schémas d'interpolation sont utilisés pour évaluer la variable  $\phi$  à une interface du volume de contrôle. Nous allons analyser les différentes fonctions  $A(|P_m|)$  relatives aux différents schémas d'interpolation.

##### IV-4.1.1 Schéma centré :

Supposons qu'entre deux points voisins de la discretisation la variation est linéaire. Si, en plus, nous considérons un maillage uniforme nous aurons alors:

$$\phi_e = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_E) \quad \dots(\text{IV-19a})$$

$$\phi_w = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \quad \dots(\text{IV-19b})$$

$$\phi_n = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_N) \quad \dots(\text{IV-19c})$$

$$\phi_s = \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \quad \dots(\text{IV-19d})$$

le flux sur l'interface e (par exemple) est alors donné par :

$$J_e = \frac{F_e}{2}(\phi_P + \phi_E) - D_e(\phi_E - \phi_P) \quad \dots(\text{IV-20a})$$

$$J_e = D_e(1 - 0.5P_e)(\phi_P - \phi_E) + F_e\phi_P \quad \dots(\text{IV-20b})$$

enfin  $J_e$  s'écrit :

$$J_e = D_e(A(|P_e|) + \|\pm P_e, 0\|) \cdot (\phi_P - \phi_E) + F_e\phi_P \quad \dots(\text{IV-21})$$

De la même manière, sur les autres interfaces, on trouve une fonction :

$$A(P_m) = (1 - 0.5|P_m|) \quad \dots(\text{IV-22})$$

et nous aboutissons aux coefficients  $a_m$  sous la forme suivante :

$$a_m = D_m A(|P_m|) + \|\pm F_m, 0\| \quad \dots(\text{IV-23})$$

m étant e.w.s.n

le signe  $\pm$  prend le signe + pour les points w, s et - pour les points e, n.

Etant donné que les signes et les valeurs des termes  $F_m$  dépendent de la vitesse, les

coefficients  $a_m$  peuvent être négatifs dans le cas où  $\left| \frac{F_m}{D_m} \right| > 2$ , ce qui donne des résultats

sans aucun sens physique. Cependant en choisissant un maillage suffisamment fin, pour de faibles valeurs des termes source (indépendamment des gradients de pression), on

peut se placer dans des conditions où les valeurs  $\left| \frac{F_m}{D_m} \right|$  sont inférieures à la valeur

critique de stabilité (2).

### IV-4.1.2 Schéma décentré amont «upwind » :

Ce schéma a été introduit pour la première fois par Issacson et Rees (Patankar [1980]). Par rapport au schéma précédent, les termes de diffusion sont les mêmes ; seuls les termes de convection changent.

$$\text{si } F_e > 0 \quad (u_e > 0) \quad \phi_E = \phi_P \quad \text{et} \quad \phi_w = \phi_w \quad \dots(\text{IV-24a})$$

$$\text{si } F_e < 0 \quad (u_e < 0) \quad \phi_E = \phi_E \quad \text{et} \quad \phi_w = \phi_P \quad \dots(\text{IV-24b})$$

Les coefficients  $a_m$  peuvent être écrits, après certaines transformations, sous la forme suivante :

$$a_m = D_m A(|P_m|) + \|\pm F_m, 0\| \quad \dots(\text{IV-25})$$

où :

$$A(|P_m|) = 1 \quad \dots(\text{IV-26})$$

### IV-4.1.3 Schéma hybride :

Ce schéma a été développé par Spalding (Patankar [1980]). C'est la combinaison des deux schémas précédents. Il se réduit à l'approximation centrée lorsque  $\left| \frac{F_m}{D_m} \right| < 2$ ,

mais il devient identique au schéma «upwind » lorsque  $\left| \frac{F_m}{D_m} \right| > 2$  et les coefficients  $a_m$

s'écrivent sous la forme :

$$a_m = D_m \left( \left\| 0, (1 - 0.5|P_m|) \right\| + \|\pm P_m, 0\| \right) \quad \dots(\text{IV-27})$$

d'où

$$A(P_m) = \left\| 0, (1 - 0.5|P_m|) \right\| \quad \dots(\text{IV-28})$$

#### IV-4.1.4 Schéma exponentiel (exact) :

Ce schéma est basé sur une formulation présentée, au départ, par Spalding. Par la suite, il a été proposé et employé par Raithby et Torrance (Patankar [1980]). Sa fonction  $A(P_m)$  a pour expression :

$$A(P_m) = \frac{|P_m|}{\exp|P_m| - 1} \quad \dots(\text{IV-29})$$

Il a été confirmé que l'utilisation de ce schéma n'est pas très souhaitable à cause du temps de calcul très élevé dû à la présence du terme exponentiel qui revient cher numériquement.

#### IV-4.1.5 Schéma de la loi de puissance «power law » :

Afin de pallier les difficultés sus citées, on utilise le schéma d'approximation de la loi de puissance « Power law ». Ce schéma, a été largement vérifié et s'avère très efficace puisqu'il s'approche beaucoup mieux de la solution exacte. Il est défini, sous sa forme compacte, comme suit :

$$a_m = D_m A(|P_m|) + \|\pm F_m, 0\| \quad \dots(\text{IV-30})$$

où :

$$A(P_m) = \left\| 0, (1 - 0.1|P_m|)^5 \right\| \quad \dots(\text{IV-31})$$

Ce dernier schéma, le plus recommandé dans la littérature (Patankar [1980] et Jawad [1989]), a été le choix adopté dans le cas présent.

### IV-5 Traitement du champ dynamique:

La substitution des expressions des flux et l'introduction du terme source S dans l'équation (IV-13) donne une formulation finale qui s'écrit sous la forme :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad \dots(\text{IV-32})$$

ou encore

$$a_p \phi_p = \sum a_{nb} \phi_{nb} + b \quad \dots(\text{IV-33})$$

avec:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad \dots(\text{IV-34a})$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|+F_w, 0\| \quad \dots(\text{IV-34b})$$

$$a_N = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad \dots(\text{IV-34c})$$

$$a_S = D_s A(|P_s|) + \|+F_s, 0\| \quad \dots(\text{IV-34d})$$

$$\bar{S} = S_C + S_P \phi_p$$

$$b = S_C \Delta V + a_p^0 \phi_p^0 \quad \dots(\text{IV-34e})$$

$$a_p = a_E + a_W + a_N + a_S + a_p^0 - S_P \Delta V \quad \dots(\text{IV-34f})$$

$$a_p^0 = f_i \cdot \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \dots(\text{IV-34g})$$

Notons que le terme  $S_C$  inclut l'intégration du gradient de pression et que les coefficients sont calculés en utilisant le schéma power law.

### IV-5.1 Equation de la Pression :

Pour que le système soit bien posé, l'utilisation explicite de l'équation de continuité est nécessaire. Elle n'a été jusqu'à présent qu'implicite et, par conséquent, les champs de vitesses, de température ou de pression, satisfaisant les équations du mouvement et de l'énergie n'assureraient pas forcément la conservation de la masse. De plus, l'équation de continuité doit poser une relation entre  $U$  et  $V$  qui ne peut être satisfaite que si le champ de pression est correct. L'équation de la pression est alors déduite de l'équation de continuité. L'intégration de cette dernière à l'intérieur du volume de contrôle (figure IV-1) conduit à:

$$(V_e - V_w) \delta X G_j + (U_n - U_s) \delta R G_i R_i = 0 \quad \dots(\text{IV-35})$$

On déduit de l'équation de quantité de mouvement suivant r (IV-32), les expressions de V aux points e et w qui sont données par :

$$V_e = \frac{\sum a_{nb} V_{nb} + b_e + A_e (P_P - P_E)}{a_e} \quad V_w = \frac{\sum a_{nb} V_{nb} + b_w + A_w (P_w - P_P)}{a_w} \quad \dots(\text{IV-36})$$

La sommation sur nb se fait sur les quatre plus proches voisins des nœuds considérés.

On déduit de l'équation de quantité de mouvement suivant x (IV-32) les expressions de U aux points n et s :

$$U_n = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b_n + A_n (P_P - P_N)}{a_n} \quad U_s = \frac{\sum a_{nb} U_{nb} + b_s + A_s (P_s - P_P)}{a_s} \quad \dots(\text{IV-37})$$

où :

$$A_e = \delta X G_j \cdot R_{i+1} \quad \dots(\text{IV-38a})$$

$$A_w = \delta X G_j \cdot R_{i+1} \quad \dots(\text{IV-38b})$$

$$A_n = \delta R_i \cdot R G_i \quad \dots(\text{IV-38c})$$

$$A_s = \delta R_i \cdot R G_i \quad \dots(\text{IV-38d})$$

Les  $b_i$  sont les termes sources des équations de quantité de mouvement ne faisant pas intervenir les gradients de pression.

Définissons les pseudo-vitesses  $\hat{U}_i$  et  $\hat{V}_i$  comme suit :

$$\hat{U}_i = \frac{\sum a_{nb} V_{nb} + b_i}{a_i} \quad \hat{V}_i = \frac{\sum a_{nb} V_{nb} + b_i}{a_i} \quad \dots(\text{IV-39})$$

les équations (IV-36) et (IV-37) deviennent alors:

$$V_e = \hat{V}_e + \frac{A_e \cdot (P_P - P_E)}{a_e} \quad V_w = \hat{V}_w + \frac{A_w \cdot (P_w - P_P)}{a_w} \quad \dots(\text{IV-40a})$$

$$U_e = \hat{U}_e + \frac{A_n \cdot (P_P - P_n)}{a_n} \quad U_s = \hat{U}_s + \frac{A_s \cdot (P_s - P_P)}{a_s} \quad \dots(\text{IV-40b})$$

pour obtenir l'équation discrétisée de la pression, on reporte les expressions précédentes de  $V_e$ ,  $V_w$ ,  $U_n$ ,  $U_s$  dans l'équation de continuité (IV-35), on aboutit à :

$$a_P P_P = a_E P_E + a_W P_W + a_N P_N + a_S P_S + BP \quad \dots(\text{IV-41})$$

avec :

$$a_E = A_e \frac{\delta X G_j}{a_e} \quad a_W = A_w \frac{\delta X G_j}{a_w} \quad \dots(\text{IV-42a})$$

$$a_N = A_n \frac{\delta R G_i}{a_n} \quad a_S = A_s \frac{\delta R G_i}{a_s} \quad \dots(\text{IV-42b})$$

$$a_P = a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 \quad \dots(\text{IV-43})$$

et

$$BP = (\hat{V}_e - \hat{V}_w) \delta X G_j + (\hat{U}_n - \hat{U}_s) \delta R G_i R_i \quad \dots(\text{IV-44})$$

#### IV-5.2 Equation de la Correction de Pression :

L'algorithme dit «SIMPLER» (Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations Revised, Patankar, [1980]) est utilisé pour la simulation des problèmes posés. Il nécessite l'introduction d'une équation relative à une correction de pression ; le but de cette dernière est de corriger les vitesses à calculer à un instant donné pour converger sûrement vers la solution du problème.

Les équations du mouvement suivant les deux directions  $r$  et  $x$  peuvent être résolues dès lors qu'un champ de pression est estimé. Définissons  $\bar{P}$ ,  $\bar{V}$ ,  $\bar{U}$  comme étant le champ de pression estimé et les composantes de vitesse calculées à partir de  $\bar{P}$ . les équations ( IV - 36 ) et ( IV - 37 ) deviennent :

$$a_e \bar{V}_e = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_e + A_e (\bar{P}_P - \bar{P}_E) \quad a_w \bar{V}_w = \sum a_{nb} \bar{V}_{nb} + b_w + A_w (\bar{P}_w - \bar{P}_P) \quad \dots(\text{IV-45a})$$

$$a_n \bar{U}_n = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_n + A_n (\bar{P}_P - \bar{P}_n) \quad a_s \bar{U}_s = \sum a_{nb} \bar{U}_{nb} + b_s + A_s (\bar{P}_s - \bar{P}_P) \quad \dots(\text{IV-45b})$$

Si l'on perturbe  $\bar{V}$  de  $V'$ , et  $\bar{U}$  de  $U'$ , il s'ensuit que :

$$P = \bar{P} + P' \quad V = \bar{V} + V' \quad U = \bar{U} + U' \quad \dots(\text{IV-46})$$

$P'$ ,  $V'$  et  $U'$  sont appelées correction de pression et correction des vitesses qui vérifient les égalités suivantes tirées des équations ( IV - 36 ), (IV- 37 ), (IV – 45 a, b ) et (IV - 46) :

$$a_e V'_e = \sum a_{nb} V'_{nb} + b_e + A_e (P'_P - P'_E) a_w V'_w = \sum a_{nb} V'_{nb} + b_w + A_w (P'_w - P'_P) \dots (IV-47a)$$

$$a_n U'_n = \sum a_{nb} U'_{nb} + b_n + A_n (P'_P - P'_n) a_s U'_s = \sum a_{nb} U'_{nb} + b_s + A_s (P'_s - P'_P) \dots (IV-47b)$$

L'une des grandes hypothèses simplificatrices introduites dans SIMPLER est de supposer que les termes  $\sum a_{nb} U'_{nb}$ ,  $\sum a_{nb} V'_{nb}$  sont négligeables, cela a pour but de construire une matrice tridiagonale pour l'équation de la correction de pression. Cette hypothèse est d'autant plus justifiée que l'on est proche du régime permanent où les corrections de vitesses devraient être nulles :

$$V'_e = \frac{A_e \cdot (P'_P - P'_E)}{a_e} \quad V'_w = \frac{A_w \cdot (P'_w - P'_P)}{a_w} \quad \dots (IV-48a)$$

$$U'_e = \frac{A_n \cdot (P'_P - P'_n)}{a_n} \quad U'_s = \frac{A_s \cdot (P'_s - P'_P)}{a_s} \quad \dots (IV-48b)$$

Si on élimine les corrections de vitesses  $U'$  et  $V'$ , en utilisant (IV-46) et (IV-48 a, b), puis les vitesses  $U$  et  $V$  en se servant de (IV-35), on arrive à l'équation de la correction de pression suivante :

$$a_p P'_p = a_E P'_E + a_w P'_w + a_N P'_N + a_s P'_s + SPP \quad \dots (IV-49)$$

avec :

$$a_E = A_e \frac{\delta X G_j}{a_e} \quad a_w = A_w \frac{\delta X G_j}{a_w} \quad \dots (IV-50a)$$

$$a_N = A_n \frac{\delta R G_i}{a_n} \quad a_s = A_s \frac{\delta R G_i}{a_s} \quad \dots (IV-50b)$$

$$a_p = a_E + a_w + a_N + a_s \quad \dots (IV-50c)$$

et

$$SPP = (\bar{V}_e - \bar{V}_w) \delta X G_j + (\bar{U}_n - \bar{U}_s) \delta R G_i \quad \dots (IV-50d)$$

Dès que les vitesses  $\bar{V}$  et  $\bar{U}$  vérifient l'équation de continuité, le terme SPP devient nul. Une fois le champ de correction de pression calculé, on peut alors corriger les vitesses en utilisant les corrections de vitesses suivantes :

$$V_{i,j} = \bar{V}_{i,j} + \frac{\delta X G_j}{A_{i,j}} (P'_{i,j} - P'_{i+1,j}) \quad \dots(\text{IV-51a})$$

$$U_{i,j} = \bar{U}_{i,j} + \frac{\delta R G_j}{B_{i,j}} (P'_{i,j} - P'_{i,j+1}) \quad \dots(\text{IV-51b})$$

avec :

$$A_{i,j} = \frac{a_{i,j+1}}{(R G_i \delta X G_j)^2} \quad \dots(\text{IV-52a})$$

$$B_{i,j} = \frac{a_{i+1,j}}{(R_i \delta R G_j)^2} \quad \dots(\text{IV-52b})$$

## VI-8 Champ thermique :

L'intégration de l'Equation d'énergie sur un volume de contrôle (figure VI-3), sous sa forme intégrale, s'écrit :

$$\int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s^n \left( \sigma \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial (rJ_r)}{\partial r} + \frac{\partial J_x}{\partial x} \right) dt dr dx = \int_t^{t+\Delta t} \int_w \int_s^n S dt dr dx \quad \dots(\text{IV-53})$$

ou aussi :

$$(T_p - T_p^o) \left( \frac{\sigma \cdot \Delta V}{\Delta t} \right) = J_w A_w - J_e A_e + J_s A_s - J_n A_n \quad \dots(\text{IV-54})$$

où l'exposant o indique les valeurs connues au début de l'étape temporaire  $\Delta t$ ,  $\Delta V$  est le volume du volume de contrôle et les A (indice w.e.s et n) sont les aires des différentes faces du volume de contrôle.

Les J (indice w.e.s et n) représentent les flux totaux (convection + diffusion) passant à travers la face d'un volume de contrôle. Ils s'écrivent respectivement :

$$J_{rw} = J_w = \left[ vT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial r} \right] r_w \Delta x \quad \dots(\text{IV-55a})$$

$$J_{re} = J_e = \left[ vT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial r} \right] r_e \Delta x \quad \dots(\text{IV-55b})$$

$$J_{xs} = J_s = \left[ uT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Delta r r_m \quad \dots(\text{IV-55c})$$

$$J_{xn} = J_n = \left[ uT - \Gamma \frac{\partial T}{\partial x} \right] \Delta r r_m \quad \dots(\text{IV-55d})$$

où  $r_m = \frac{r_e + r_w}{2}$  est le rayon moyen.

Après intégration de l'équation (IV-54) on trouve l'équation suivante ( Patankar, [1980]) :

$$a_p T_p = a_e T_e + a_w T_w + a_n T_n + a_s T_s + b \quad \dots(\text{IV-56})$$

ou encore

$$a_p T_p = \sum a_{nb} T_{nb} + b \quad \dots(\text{IV-57})$$

avec:

$$a_e = D_e A(|P_e|) + \|-F_e, 0\| \quad \dots(\text{IV-58a})$$

$$a_w = D_w A(|P_w|) + \|\+F_w, 0\| \quad \dots(\text{IV-58b})$$

$$a_n = D_n A(|P_n|) + \|-F_n, 0\| \quad \dots(\text{IV-58c})$$

$$a_s = D_s A(|P_s|) + \|\+F_s, 0\| \quad \dots(\text{IV-58d})$$

$$b = \sigma \frac{\Delta V}{\Delta t} T_p^0 \quad \dots(\text{IV-58e})$$

$$a_p = a_e + a_w + a_n + a_s + \sigma \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad \dots(\text{IV-58f})$$

Les termes  $D_m$  et  $F_m$  représentent, respectivement, les diffusions et les débits volumiques à travers les faces respectives du volume de contrôle. Les  $P_m$  ( $m=e.w.s.n$ ), expriment le rapport du transfert par convection au transfert par diffusion. Ils sont donnés par :

$$D_e = \Gamma_e \frac{\Delta x \cdot r_e}{(\delta r)_e} \quad F_e = u_e \cdot \Delta x \cdot r_e \quad P_e = \frac{F_e}{D_e} \quad \dots(\text{IV-59a})$$

$$D_w = \Gamma_w \frac{\Delta x \cdot r_w}{(\delta r)_w} \quad F_w = u_w \cdot \Delta x \cdot r_w \quad P_w = \frac{F_w}{D_w} \quad \dots(\text{IV-59b})$$

$$D_n = \Gamma_n \frac{\Delta x \cdot r_n}{(\delta r)_n} \quad F_n = v_n \cdot \Delta r \cdot r_n \quad P_n = \frac{F_n}{D_n} \quad \dots(\text{IV-59c})$$

$$D_s = \Gamma_s \frac{\Delta x \cdot r_s}{(\delta r)_s} \quad F_s = v_s \cdot \Delta r \cdot r_s \quad P_s = \frac{F_s}{D_s} \quad \dots(\text{IV-59d})$$

L'équation de conservation de l'espèce est déduite par analogie avec le champ thermique.

## VI-9 Algorithme :

Rappelons que l'algorithme de calcul des champs de vitesses, de température et de pression utilisé est connu sous le nom de « SIMPLER », nous présentons ici la procédure de calcul

Etape 1: proposition des champs de vitesses, de température et de concentration.

Cette estimation est faite soit à partir de cas de conduction pure, soit d'un cas de convection ou d'un cas initial spécifique.

Etape 2 : calcul des coefficients figurant dans les deux équations de mouvement.

Etape 3: calcul des pseudo-vitesses  $\hat{U}$ ,  $\hat{V}$  avec l'équation (IV-39).

Etape 4: résolution de l'équation de la pression (IV-42) pour avoir  $\bar{P}$ .

Etape 5: A partir du champ de pression  $\bar{P}$  obtenu, on résout les deux équations de mouvement (IV-36), (IV-37) suivant r et x pour obtenir les champs de vitesses  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$ .

Etape 6: résolution de l'équation de la correction de la pression avec (IV-49) en utilisant les valeurs de  $\bar{U}$  et  $\bar{V}$  afin d'obtenir le champ de la correction de pression  $P'$ .

Etape 7: correction des champs de vitesses U et V (IV-46) sans corriger le champ de pression.

Etape 8: résolution de l'équation de l'énergie et des espèces pour obtenir les champs de température et de concentration.

Une boucle dans les étapes sus citées peut être considérée comme une solution pour un pas de temps dans un problème instationnaire sans non linéarités telle que la conduction. Pour les problèmes non linéaires, il faut résoudre à l'intérieur de chaque pas de temps, en utilisant les étapes sus citées (boucle intérieure), en retournant à l'étape 2 et ainsi de suite jusqu'à la convergence où l'erreur relative maximale sur toutes les variables indépendantes dans le domaine est inférieure à  $10^{-4}$  (Farid Alavyoon [1993]). La procédure itérative pour déterminer les champs des différentes variables au pas de temps suivant (n+1) consiste essentiellement à avancer le temps d'un pas adéquat  $\Delta t$ , initialiser par le champ  $\phi$  au temps n ( $\phi^n$ ) et procéder à des itérations internes au pas de

temps  $n+1$  en utilisant une estimation du champ ( $\phi^*$ ) à la première itération jusqu'à convergence. On reprend ensuite la même méthode jusqu'à atteinte de la stationnarité définie lorsque (Lauriat et Prasad, [1989]) :

$$\frac{\sum |\phi_{ij}^{n+1} - \phi_{ij}^n|}{\sum |\phi_{ij}^n|} < \zeta \quad \dots(\text{IV-53})$$

Où  $\zeta=10^{-6}$

On opéra, lors des itérations internes, pour une procédure de relaxation dite dynamique où les facteurs de relaxation (notamment ceux des vitesses U et V) sont diminués si la convergence n'est pas atteinte après un nombre d'itérations donné. Aussi, l'estimation de  $\Phi^*$  à la première itération est améliorée par une extrapolation utilisant les valeurs aux pas de temps  $n$ ,  $n-1$  et  $n-2$ , ce qui a permis une réduction considérable du temps de calcul.

### **Conclusion :**

Dans ce chapitre, nous avons exposé la procédure numérique choisie afin de modéliser l'écoulement et les transferts thermique et massique transitoires dans un cylindre rempli par un milieu poreux. La méthode des volumes finis a été adoptée, en utilisant l'algorithme SIMPLER, pour résoudre le système d'équations algébriques. Le prochain chapitre sera consacré à la validation du code de calcul développé et à la présentation des résultats et leurs interprétation.

## Chapitre V :

# RESULTATS ET INTERPRETATIONS

### V-1. Introduction:

Compte tenu du problème et de la structure du domaine, nous avons opté pour un maillage non uniforme suivant les deux directions avec une concentration plus importante à l'intérieur du cylindre. La taille du maillage a été choisie de telle manière que la variation du nombre de Nusselt global ne dépasse pas 2%. Un nombre de nœud de 100\*50 dans les directions longitudinale et transversale, respectivement, a été considéré et cela pour tous les calculs qui ont été effectués. Les paragraphes suivants seront consacrés à la validation du code de calcul et à l'exploitation des résultats.

### V-2. Validation numérique:

#### V-2-1.- Champ dynamique établi :

Après l'élaboration du code de calcul et afin de valider ce dernier, nous avons procédé à la résolution analytique pour le cas limite de convection forcée en régime établi stationnaire, pour lequel l'équation (III-6 a) s'écrit sous la forme :

$$-\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{R_v \varepsilon^2}{Re} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) - \frac{\varepsilon^2}{Da Re} u = 0 \quad \dots(V-1)$$

En procédant à un changement de variable tel que :

$$r = \frac{r\varepsilon}{\sqrt{Da \cdot R_v}} \quad \dots(V-2)$$

L'équation (V-1) se transforme pour donner :

$$\left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \right) - \frac{u}{Da} = -\frac{\partial P}{\partial x} \cdot \frac{Re}{R_v \varepsilon^2} \quad \dots(V-3)$$

Qui admet la solution suivante :

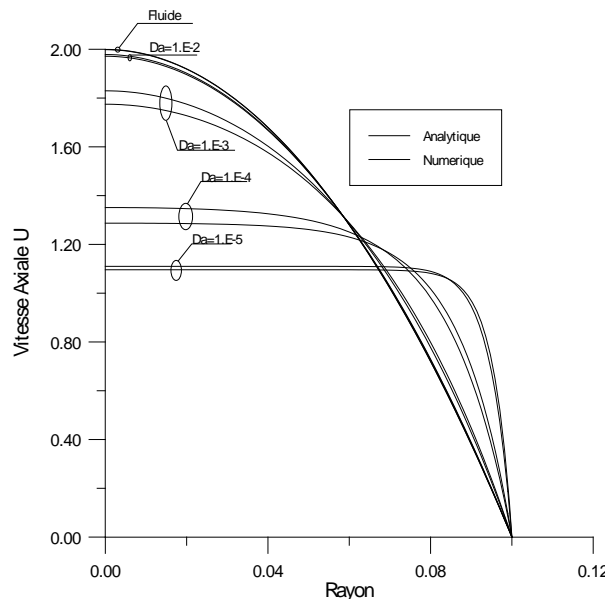
$$u(r) = C \cdot \left( \frac{I_0\left(\frac{r}{\sqrt{Da}}\right)}{I_0\left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right)} - 1 \right) \quad \dots(V-4)$$

où  $I_0$ : Fonction de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce modifiée d'ordre zéro, C étant une constante d'intégration.

Après évaluation du débit massique, la solution finale s'écrit sous la forme suivante :

$$U(r) = \frac{\left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right) \cdot \left[ I_0\left(\frac{r}{\sqrt{Da}}\right) - I_0\left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right) \right]}{2 I_1\left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right) - \left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right) \cdot I_0\left(\frac{A}{\sqrt{Da}}\right)} \quad \dots(V-5)$$

où  $I_0, I_1$  : Fonctions de Bessel de 1<sup>ère</sup> espèce modifiée d'ordre zéro et un respectivement.



**Figure V-1.** Comparaison de la solution analytique et des profils de vitesse développés. Re=100

La comparaison des simulations numériques avec la solution analytique pour les différents nombres de Darcy pour un nombre de Reynolds de 100 est illustrée sur la figure V-1.

On remarque que l'écart maximal entre les deux solutions n'excède pas 4%. Cet écart aura tendance à disparaître dans les cas limites du régime Darcien ( $Da < 10^{-5}$ ) où la vitesse axiale aura tendance à s'aplatir ( $Uc \approx 1$ ) et du régime fluide ( $Da \geq 1$ ) où la vitesse axiale est plus importante ( $Uc \approx 2$ ). Notons que l'erreur s'atténue pour de faibles nombres de Reynolds.

### V-2-2. Problème instationnaire :

Afin de vérifier l'avancement dans le temps du code de calcul, il est nécessaire de vérifier par rapport à un cas limite. Pour cela, Nous considérons un cylindre d'un rayon R de longueur infinie. Le cylindre échange de la chaleur avec le milieu extérieur avec un coefficient h constant sur toute la surface externe de la paroi. Initialement ( $t=0$ ) le cylindre est porté à une température  $T_i$  et le milieu extérieur est à une température  $T_e$ .

l'équation de conduction régissant le phénomène, s'écrit :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad \dots(V-6)$$

Avec les conditions initiales et aux limites suivantes :

$$\text{à } t = 0 \quad 0 \leq r \leq R$$

$$T = T_i \quad \dots(V-7)$$

$$\text{à } t > 0 \quad \text{pour } r = 0$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \dots(V-8)$$

$$\text{à } t > 0 \quad \text{à } r = R$$

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{r=R} = -\frac{h}{k} \cdot (T_R - T_e) \quad \dots(V-9)$$

En introduisant un changement de variable tel que :

$$\theta = \frac{T - T_e}{T_i - T_e} \quad \dots(V-10a)$$

$$r = \frac{r}{R} \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \dots(V-10b)$$

$$\frac{\alpha t}{R^2} = Fo \quad \text{Nombre de Fourier} \quad \dots(V-10c)$$

L'équation de conduction s'écrira :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) \quad \dots(V-11)$$

Et les conditions initiales et aux limites se transforment comme suit :

$$\text{à } t = 0 \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\theta = \theta_i = 1 \quad \dots(V-12a)$$

$$\text{à } t > 0 \quad \text{pour } r = 0$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad \dots(V-12b)$$

$$\text{à } t > 0 \quad \text{pour } r = 1$$

$$\left. \frac{\partial \theta}{\partial x} \right|_{r=R} = -Bi \cdot (\theta_R - \theta_e) \quad \dots(V-12c)$$

Bi étant le nombre de Biot.

La résolution de l'équation de conduction se fait grâce à la séparation de variable  $\theta(r, t) = \psi(r) \cdot \phi(t)$  et cette dernière se transforme pour donner le système d'équations suivant :

$$\phi'(t) + \lambda^2 \phi(t) = 0 \quad \dots(V-13)$$

$$\psi''(r) + \frac{1}{r} \psi'(r) + \lambda^2 \psi(r) = 0 \quad \dots(V-14)$$

Si on note  $\mu = \lambda \cdot R$ , les solutions de ces deux équations s'écrivent :

$$\phi(t) = C1 \cdot e^{-\frac{\alpha\mu^2}{R^2}t} \quad \dots(V-15)$$

$$\psi(r) = C2 \cdot J_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) + C3 \cdot Y_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) \quad \dots(V-16)$$

où : C1, C2, et C3 sont des constantes d'intégration . La température au centre du cylindre doit être finie. Or  $Y_0$  a une valeur infinie ; ce qui engendre une constante C3 nulle. D'où une solution finale de la forme :

$$\theta(r, t) = C \cdot e^{-\frac{\alpha\mu^2}{R^2}t} \cdot J_0\left(\mu \frac{r}{R}\right) \quad \dots(V-17)$$

Les valeurs de  $\mu$  sont déterminées à l'aide de la condition d'échange de chaleur :

$$\frac{J_0\mu}{J_1\mu} = \frac{\mu}{Bi} \quad \dots(V-18)$$

où Bi est le nombre de Biot.

D'où

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cdot e^{-\frac{\alpha\mu_n^2}{R^2}t} \cdot J_0\left(\mu_n \frac{r}{R}\right) \quad \dots(V-19)$$

Les constantes  $C_n$  sont déterminées grâce à la condition initiale :

$$\text{à } t = 0 \quad 0 \leq r \leq 1$$

$$\theta = 1 \quad \dots(V-20)$$

ou bien

$$\theta_i = \theta(r, 0) = \sum_{n=1}^{n=\infty} C_n \cdot J_0\left(\frac{r}{R}\right) = 1$$

Ce qui donne, après intégration :

$$\theta(r, t) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{2J_1(\mu_n)}{\mu_n [J_0^2(\mu_n) + J_1^2(\mu_n)]} \cdot e^{-\mu_n^2 Fo} \cdot J_0(\mu_n R) \quad \dots(V-21)$$

Afin de valider l'avancement dans le temps du code de calcul, on a procédé à des simulations à partir du programme écrit pour la résolution de l'équation III-14 (énergie) dans laquelle on prend  $\sigma=1$  et  $GR3 = 1$  et où le terme de convection est supprimé.

Pour le calcul de la solution analytique (V-21), on s'est limité aux quatre premiers termes de la série. Le tableau suivant donne les températures pour deux valeurs du nombre de Biot.

Fo	Bi=0.1		Fo	Bi=10	
	$\theta$ Analytique	$\theta$ Numérique		$\theta$ Analytique	$\theta$ Numérique
1	0.82821	0.82819	0.3	0.59916	0.59915
2	0.69738	0.69735	0.4	0.20905	0.20904
3	0.58494	0.58484	0.5	0.14044	0.14039
4	0.47132	0.47131	0.6	0.09018	0.09021
6	0.32317	0.32317	0.7	0.05432	0.054331
8	0.25726	0.25725	0.8	0.034431	0.034437
12	0.11508	0.11505	0.9	0.02211	0.02241
14	0.10271	0.10270	1	0.012409	0.012411

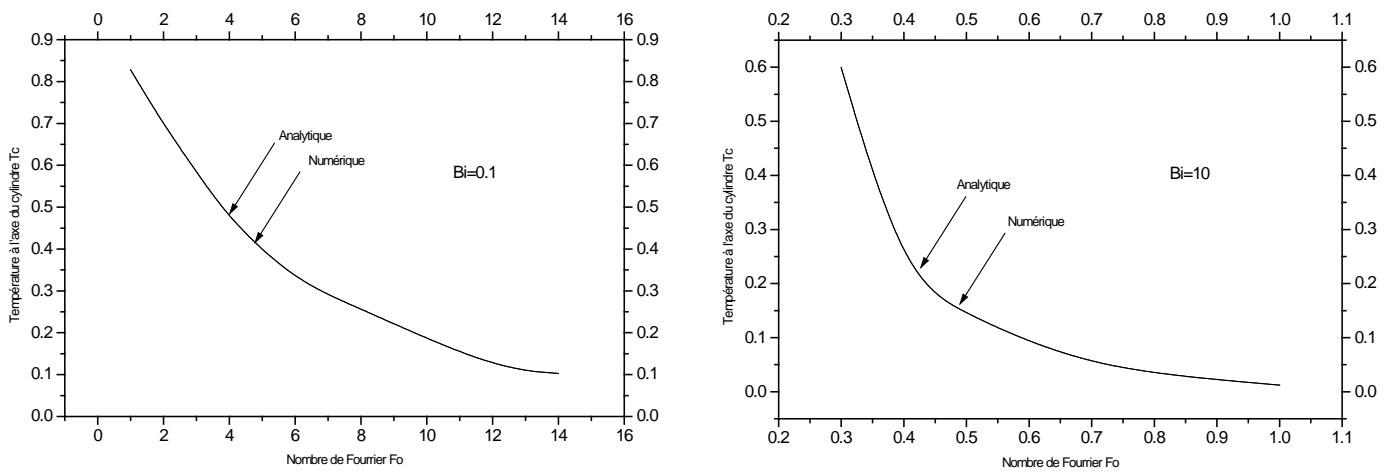
**Tableau V-1.** Comparaison entre solutions analytique et numérique sur l'axe du cylindre.

Fo	Bi=0.1		Fo	Bi=10	
	$\theta$ Analytique	$\theta$ Numérique		$\theta$ Analytique	$\theta$ Numérique
1	0.80104	0.80101	0.1	0.13814	0.13817
2	0.64925	0.64919	0.2	0.08081	0.08084
3	0.52638	0.52635	0.3	0.04521	0.04523
4	0.37142	0.37138	0.4	0.03074	0.03070
6	0.30253	0.30249	0.5	0.01865	0.01864
8	0.20124	0.20124	0.6	0.01019	0.01019
10	0.13731	0.13730			
12	0.09304	0.09304			
14	0.06211	0.06210			

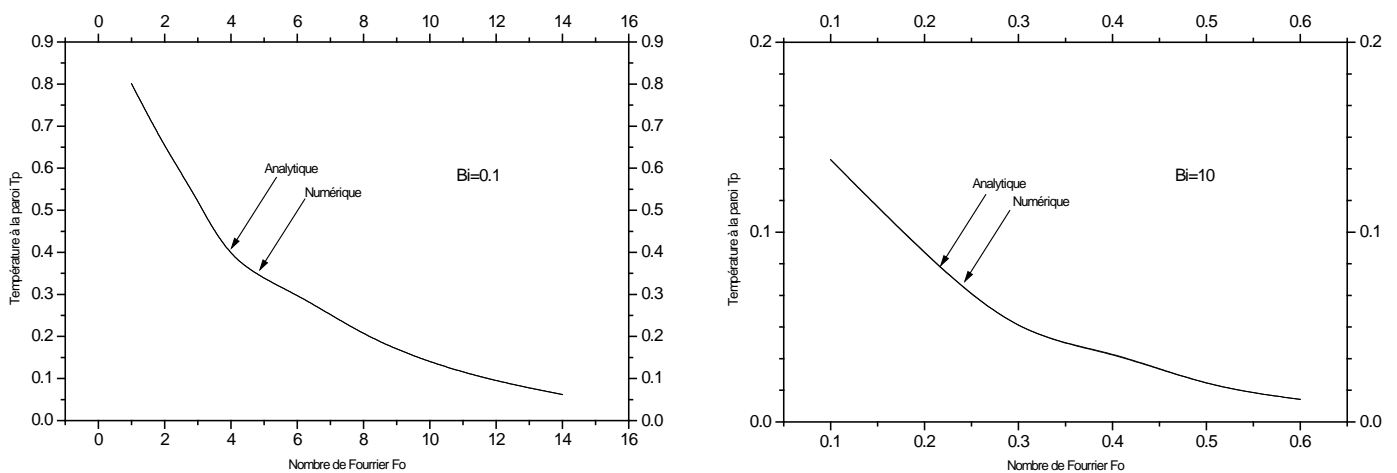
**Tableau V-2.** Comparaison entre solutions analytique et numérique sur la surface externe du cylindre.

La comparaison entre les solutions analytique et numérique Figure V-2 et V-3 montre une quasi-concordance ce qui nous permet de justifier de la fiabilité de notre code de calcul.

Après avoir validé le code de calcul pour le modèle physique formulé par les équations relatives aux champs dynamique, thermique et massique, les prochains paragraphes seront consacrés à l'illustration des résultats et leurs interprétations.



**Figure V-2.** Comparaison des températures analytique et numérique à l'axe du cylindre.



**Figure V-3.** Comparaison des températures analytique et numérique à la paroi.

### V-3. Résultats et interprétations :

L'exploitation des résultats a été entreprise sur la base d'un certain nombre de paramètres caractéristiques du problème. C'est ainsi que certaines de ces caractéristiques sont fixées, à savoir le rapport de forme du cylindre contenant le milieu poreux ( $A=0.1$ ), la porosité  $\varepsilon =0.7$ , le nombre de Schmidt ( $Sc=0.67$ , relatif au cas de la vapeur d'eau dans l'air) le nombre de Prandtl ( $Pr=0.71$ ) et la concentration adimensionnelle initiale de 0.5.

Le rapport des viscosités est supposé égal à l'unité ; ce qui dans la plupart des milieux poreux donne un bon agrément avec les résultats expérimentaux (Lundgren, [1972]). En prenant  $\sigma =0.22$  (Ben nasrallah et *al*, [1997]), un balayage est ensuite effectué en faisant varier les nombres de Darcy, de Reynolds, et de Biot afin de comparer les résultats et de dégager des conditions optimales, tout en étudiant l'influence de chacun de ces paramètres.

Dans les conditions sus citées (cas de la convection forcée) les phénomènes thermodynamiques sont sans influence sur les résultats dynamiques. Les profils de vitesses ont, par conséquent, une représentation unique quelles que soient les conditions de température ou de concentration.

#### V-3-1 Evolution Instationnaire :

##### V-3-1.1 Résultats dynamiques :

Les études de Le quéré [1987] ou Patterson et Imberger [1980] ont classé les différents régimes transitoires. Ils ont montré l'existence de régimes oscillatoires en convection naturelle pour des nombres de Rayleigh critiques. Leurs travaux ont constitué une suite au travail de Hyun et Lee [1989] qui proposa une valeur critique du nombre de Rayleigh égale à  $Ra_c=Pr^{-4}A^{-4}$  ( $Pr$  étant le nombre de Prandtl et  $A$  le rapport de forme) au delà duquel les oscillations, s'atténuant vers le régime stationnaire, apparaissent dans le cas d'une cavité rectangulaire. Une remarque a été faite par Jischke et Doty [1975] concernant les cavités cylindriques, et par Retiel [1995] pour les cavités annulaires, stipulant que la température dans ce type de cavité ne possède pas d'oscillations avec des perturbations sinusoïdales azimutales au niveau des parois car la valeur moyenne de ces perturbations est nulle.

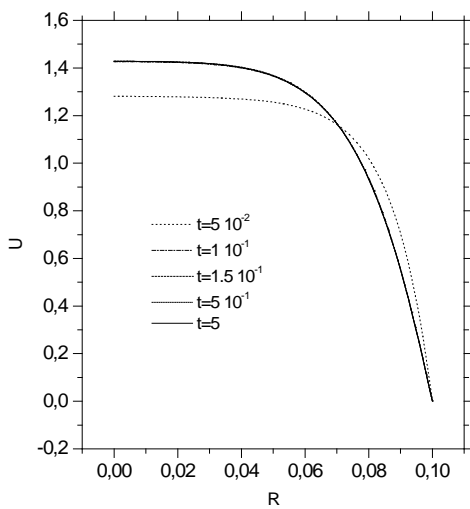
Nos résultats confirment et montrent que l'évolution des différentes paramètres est monotone et

ne présente pas d'oscillations dans les variations temporelles.

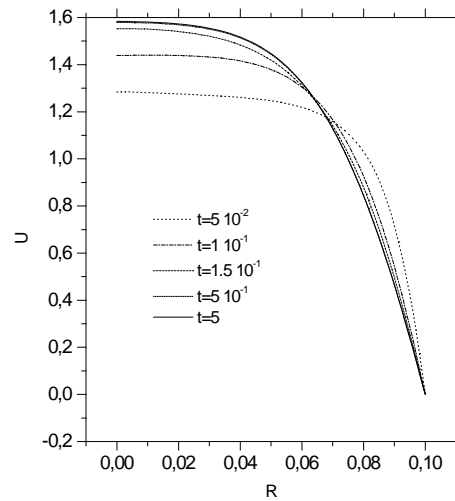
Sur la figure V-4 sont représentées les évolutions des profils des vitesses dans différentes régions du cylindre et pour plusieurs nombres de Reynolds.

Sur la figure V-4a, On voit bien qu'au delà de  $t=0.1$  le profil de vitesse au voisinage de l'entrée est quasi-constant, alors qu'au voisinage de la sortie (figure V-4 b), la transformation temporelle demeure jusqu'à des temps plus importants.

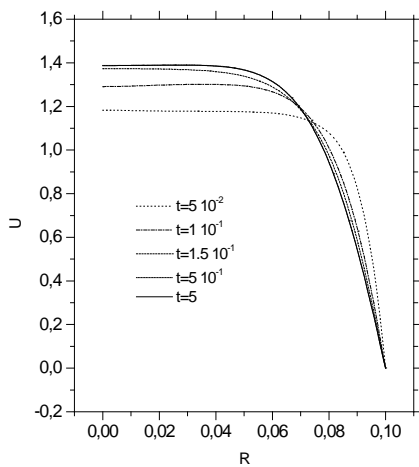
Lorsque le nombre de Reynolds passe de 250 à 500 (figure V-4 c), la durée de transition reste importante par rapport à l'entrée, cependant l'intensité des variations s'atténue lorsque le nombre de Reynolds augmente (figure V-4 d,  $Re=1000$ ).



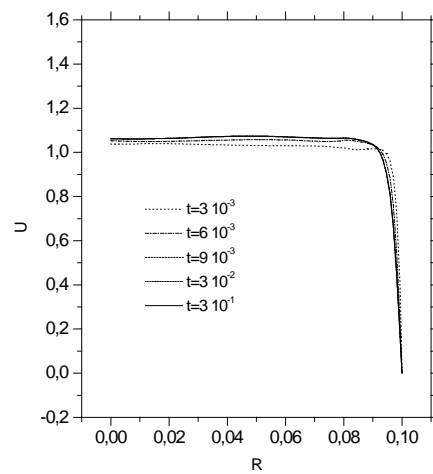
(a) voisinage de l'entrée  $Re=250$ .



(b) voisinage de la sortie  $Re=250$ .



(c) voisinage de la sortie,  $Re=500$ .



(d) voisinage de la sortie,  $Re=1000$ .

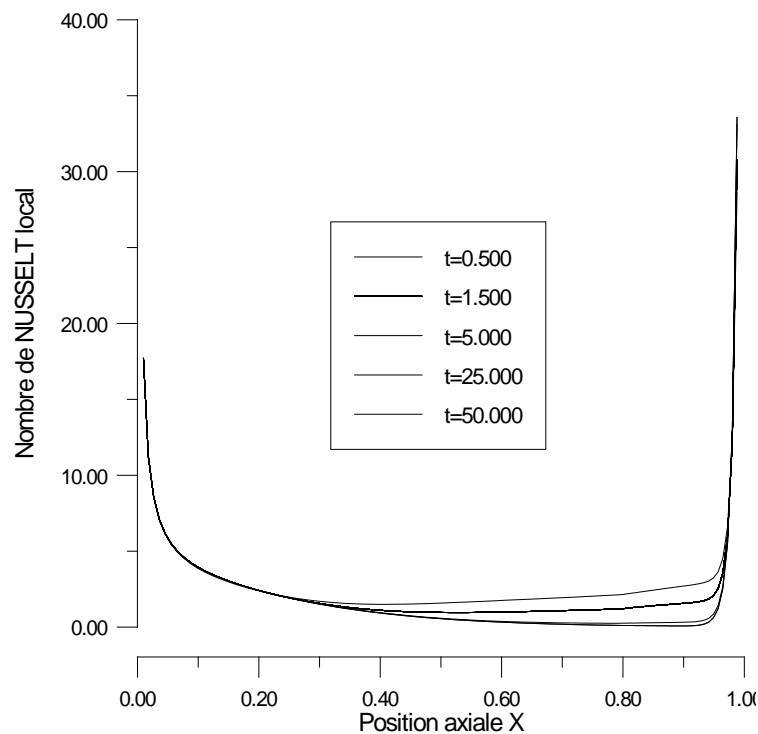
**Figure V-4.** Evolution temporelle des profils de vitesse  $Da=1$ .

### V-3-1.2 Résultats Thermique et massique :

La figure V-5 représente l'évolution du nombre de Nusselt local Pour  $Bi=200$ , au cours du temps.

On remarque une forte dépendance du coefficient de transfert avec les conditions d'entrée et de sortie du cylindre. Ainsi, à l'entrée du cylindre, la valeur élevée du Nusselt provient du fort gradient de température entre l'entrée et la paroi. Par la suite, le nombre de Nusselt chute (ce qui est normal dans le cas d'une convection forcée) et cela suite au développement de la couche limite engendrant une réduction des gradients thermiques aux voisinages de la paroi.

La variation temporelle des profils intervient essentiellement au cœur du cylindre. Ceci se traduit par une réduction des nombres de Nusselt et sherwood, et cette réduction est d'autant plus rapide qu'on est plus proche de l'entrée, ce qui est en bon accord avec les travaux analytiques de Muralidhar [1990] qui montra que la durée de transition par section, est d'autant plus grande en avançant dans le sens de l'écoulement. La seule différence réside au voisinage de la sortie où le fait que le nombre de Biot soit important crée une forte accentuation du Nusselt local, probablement suite à la perturbation du champ thermique causée par l'accroissement des échanges convectifs.



**Figure V-5.** Evolution du Nusselt local dans les différentes étapes temporelles ( $Re=100$ ,  $Bi= 200$ ,  $Da=1.E-5$ ).

Les figures V-6a et b, représentent l'évolution des coefficients de transfert moyens au cours du temps.

On remarque sur ces figures que les nombres de Nusselt et de Sherwood moyens ont une évolution décroissante qui part d'un maximum, initialement, jusqu'à atteindre une valeur stationnaire. Ceci peut être interprété par le fait qu'aux faibles valeurs du temps, le gradient de température entre la paroi et la valeur initiale dans le poreux est très importante, ce qui se traduit par des coefficients de transferts quasi-infinis.

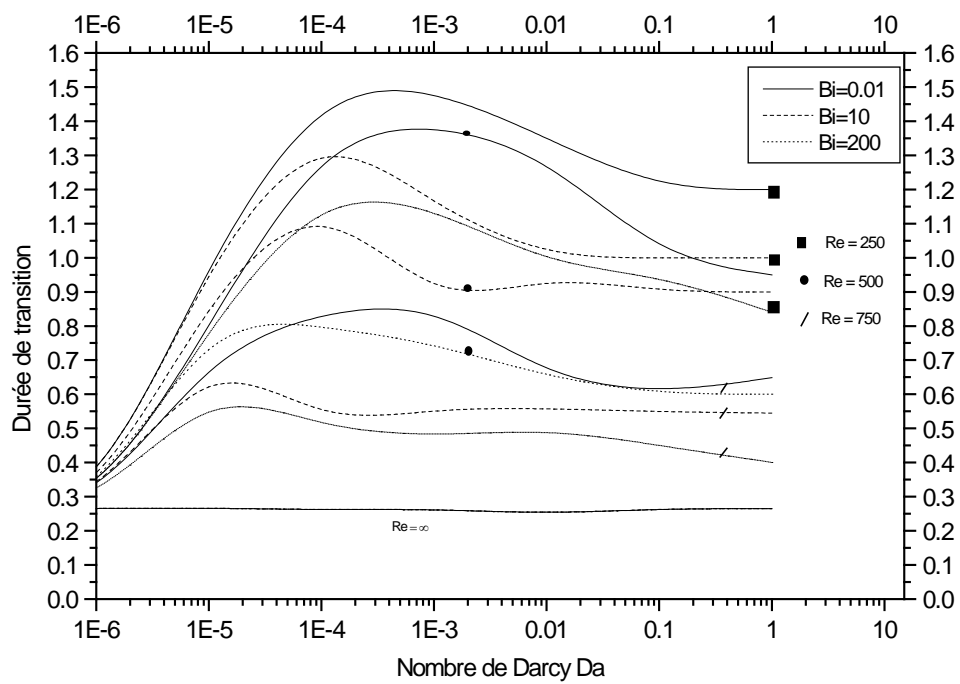
La décroissance suscitée est très dépendante des nombres de Darcy et de Biot. Mis à part aux faibles valeurs de Darcy ( $Da \leq 10^{-5}$ ) où le temps d'instationnarité est faible, la réduction de la perméabilité réduit la tangente des courbes et cette réduction est d'autant plus apparente causant la réduction de la période de transition, dans la plage des Darcy entre  $10^{-3}$  et 1.

Pour les autres plages, le temps de transition est plus explicite sur la figure V-7 qui illustre le temps de transition en fonction du nombre de Darcy pour différents nombres de Reynolds et de Biot.

A noter que les temps de transition ont été calculés sur la base du maximum des temps de transitions pour les nombres de Nusselt et de Sherwood, où la variation relative de ces derniers n'excède pas 0.1 %. Aussi, la précision est différente d'un cas à l'autre, suivant le pas temps de calcul. Cependant, on notera que le temps de calcul maximal utilisé est de 0.001.

La première remarque évidente à faire est que l'augmentation du nombre de Reynolds occasionne la réduction du temps de transition. Par exemple pour  $Bi=0.01$ ,  $Da=10^{-3}$ , le temps de transition passe d'un maximum de 1.5 pour  $Re=250$  à 0.26 pour une valeur de ce nombre supérieure ou égale à 1200.

Le nombre de Biot influence également le temps de transition, et lorsque ce nombre augmente, il engendre une réduction de cette période d'instationnarité d'un taux allant jusqu'à 30% (entre  $Bi=0.01$  et  $Bi=10$ ), dans le cas  $Re=500$  et  $Da=10^{-3}$ . Ce phénomène (augmentation du nombre de Biot) peut être accentué, dans le cas d'une application pratique en créant, par exemple, une circulation supplémentaire d'air à la sortie, ce qui contribuerait à augmenter les coefficients d'échanges thermique et massique sur cette section



**FigureV-7.** Evolution du temps de transition en fonction des paramètres thermophysiques.

## V-3-2 Régime Stationnaire :

### V-3-2.2 Résultats dynamiques :

Les figures V-8 à 10 représentent l'évolution des profils de vitesse longitudinale dans différentes sections du cylindre, pour plusieurs valeurs des nombres de Darcy et de Reynolds.

Pour le cas fluide (figure V-8a, 9a, 10a), l'évolution du profil des vitesses le long de l'écoulement se développe à partir du profil initial plat dans la section d'entrée et se transforme au fur et à mesure du développement des couches limites pour tendre vers un profil établi de valeur axiale égale à deux fois la valeur initiale.

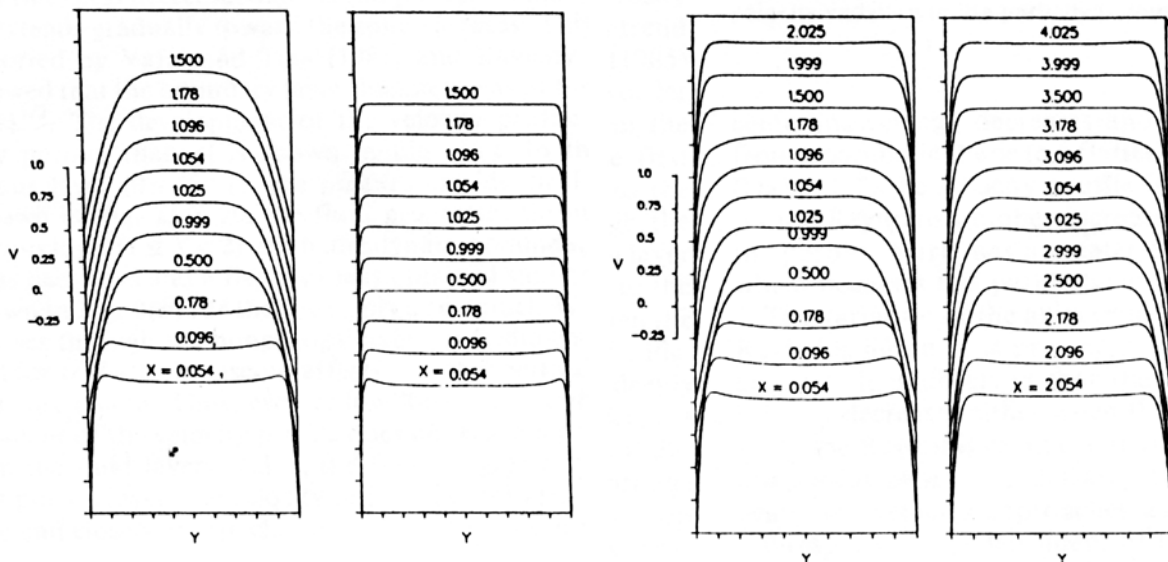
L'effet de la matrice poreuse se fait sentir sur les profils de la vitesse longitudinale ainsi que sur les longueurs d'établissement. Tout comme dans le cas d'un régime fluide, la longueur d'établissement varie à l'inverse du nombre de Reynolds. On remarque aussi, que la longueur d'établissement est étroitement liée aux valeurs du nombre de Darcy et que la réduction de la perméabilité entraîne la réduction de cette longueur d'entrée. Ceci s'explique du fait que lorsque la perméabilité ou le nombre de Reynolds diminuent, c'est le régime Darcien qui est instauré et la variation du profil des vitesses se trouve réduite. Ce résultat a déjà été démontré par les résultats analytiques de Huang et Liu [1996] pour le cas d'un écoulement entre deux plaques.

Lorsque le milieu poreux est peu perméable, du fait de la résistance au fluide causée par la présence de la matrice poreuse, les effets visqueux sont confinés près des parois. Ce qui engendre un aplatissement des profils de vitesses au cœur du cylindre.

Quand le nombre de Darcy continue à décroître, l'épaisseur de la couche limite se retrouve réduite et la limite plate de la vitesse est graduellement entraînée vers la paroi. Certains travaux antérieurs, notamment ceux de Vafai et Tien [1981] et Kaviany [1985] ont montré que l'épaisseur de la couche limite est étroitement liée à la perméabilité et serait de l'ordre de  $(K/\varepsilon)^{1/2}$ .

On remarque également sur les figures V-8 à 10a, b, c, et d, la présence d'une incurvation aux voisinages de l'entrée et la vitesse maximale n'est pas atteinte sur l'axe du cylindre ; ce phénomène aura tendance à disparaître après une certaine distance de l'entrée.

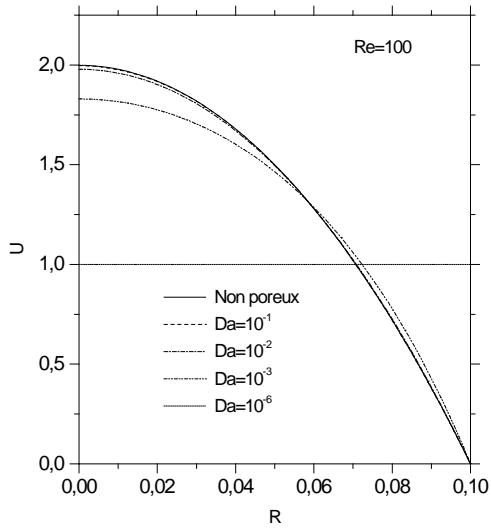
Des phénomènes similaires ont été rapportés notamment par Wang et Longwell [1964], Zeldin et Schmidt [1972] ainsi que par Hadim [1994].



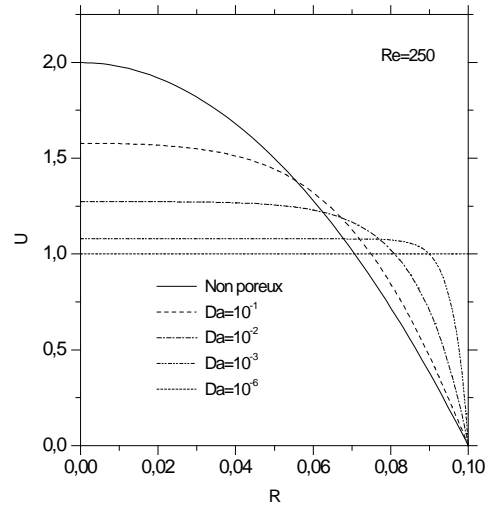
**Figure V-11.** Développement des profils de vitesse, Hadim [1994].

Les effets des nombres de Darcy et de Reynolds sur les profils développés des vitesses sont illustrés sur la figure V-12.

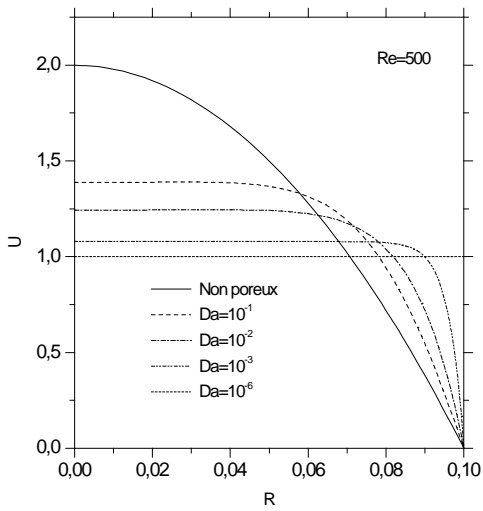
On remarque que lorsque le nombre de Darcy décroît, la vitesse axiale décroît et le profil de vitesse évolue de la forme parabolique jusqu'au profil plat pour le régime Darcien ( $Da \leq 10^{-6}$ ). Ce profil plat est également obtenu lorsque le nombre de Reynolds augmente, probablement du fait que l'augmentation de ce nombre réduit l'épaisseur de la couche limite entraînant la limite plate de la vitesse vers la paroi. Ce phénomène est conforme à l'effet remarqué dans le cas fluide où la couche limite a tendance à se tasser lorsque le nombre de Reynolds augmente.



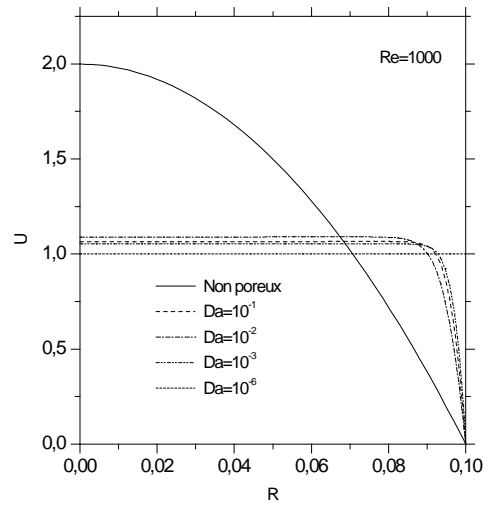
(a) Re=100



(b) Re=250



(c) Re=500



(d) Re=1000

**Figure V-12.** Effets des nombres de Darcy et de Reynolds sur les profils de vitesse développés.

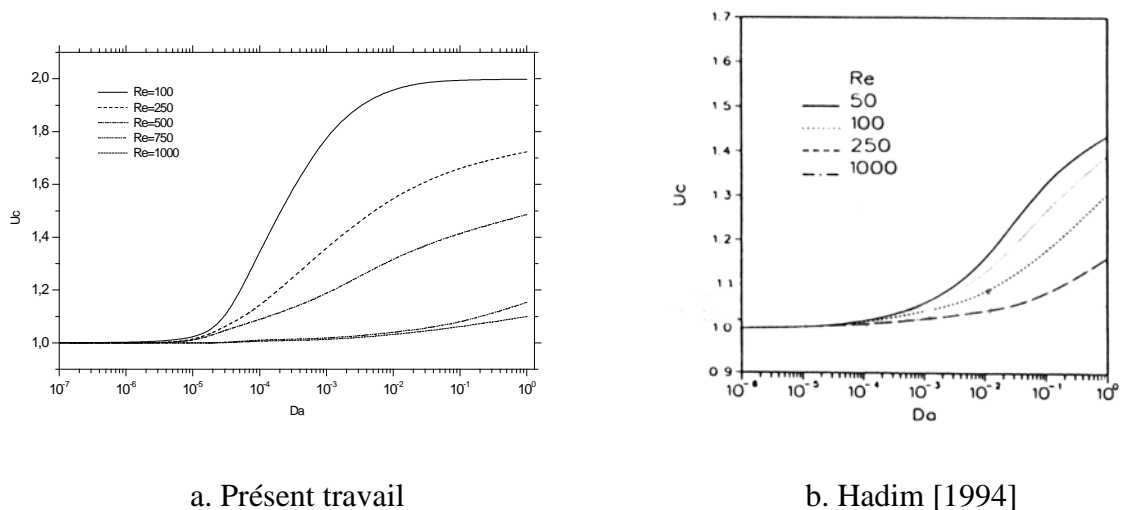
La variation de la vitesse axiale en fonction des nombres de Darcy et de Reynolds est représentée sur la figure V-13 a.

On confirme bien que la valeur de la vitesse axiale décroît lorsque la perméabilité diminue ou lorsque le Nombre de Reynolds augmente.

Une comparaison a montré que la différence des résultats entre  $Da=10^{-6}$  et  $Da=10^{-7}$  n'excède pas 1%. Ce qui nous permet de dire que le régime Darcien est quasiment atteint lorsque  $Da \approx 10^{-6}$  et ceci quel que soit la valeur du nombre de Reynolds.

Le régime fluide pour sa part est étroitement lié à la valeur du nombre de Reynolds et l'augmentation de ce nombre nécessite une perméabilité de plus en plus importante pour atteindre le régime fluide, résultat qualitativement trouvé par Hadim [1994] (figure V-13b) pour le cas d'un écoulement entre deux plaques. Les différences du point de vue quantitatif sont essentiellement dus à la différence entre les deux géométrie étudiées.

Notons que pour les faibles valeurs du nombre de Reynolds ( $Re \leq 100$ ) une perméabilité unitaire permet d'atteindre la vitesse asymptotique ( $U_c \approx 2$ ), résultat largement vérifié par la littérature.



**Figure V-13.** Effets des nombres de Darcy et de Reynolds sur la vitesse axiale développée.

### V-3-2.3 Résultats Thermiques et massiques :

#### a. Profils de température et concentration :

Les courbes des figures V-14 à 19 sont représentatives des variations, respectivement, des profils de la température et de la concentration le long du cylindre poreux.

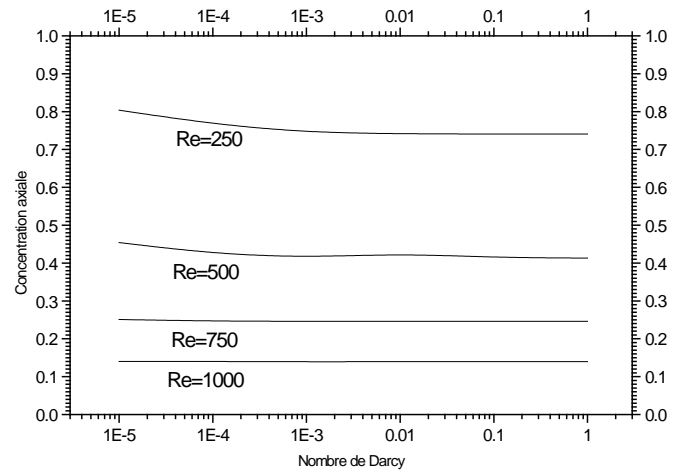
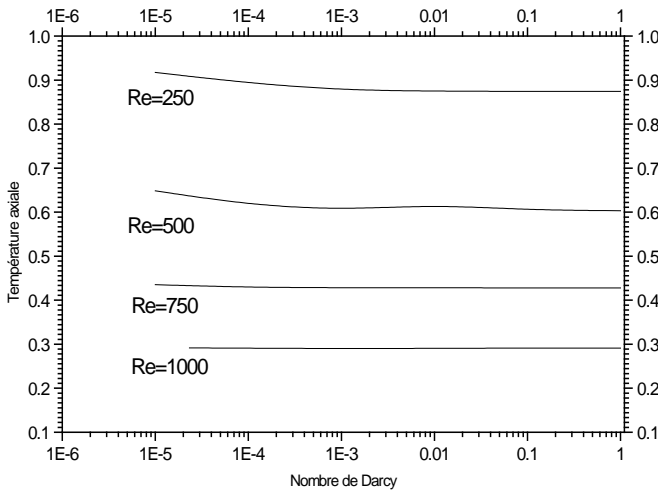
Pour le cas d'un nombre de Biot, à la sortie, réduit (figure V-15 et 17), on observe l'évolution classique d'un développement de couches limites envahissant régulièrement le milieu poreux. Le régime commence à s'établir lorsque les deux couches limites se rejoignent sur l'axe de la conduite. Il est entièrement établi quand les profils redeviennent plats.

Ainsi, les champs de température et de concentration sont fortement influencés par la valeur du nombre de Biot. L'augmentation de ce dernier, par exemple, a tendance à donner lieu à des profils de température (et de concentration) presque parallèles à la paroi au voisinage de cette dernière, engendrant ainsi des gradients radiaux importants de température (et de concentration), ce qui est en bon accord avec les résultats de Bennisrallah [1997]. Cette perturbation se traduira par une augmentation brusque des nombres de Nusselt et Sherwood locaux aux voisinages de la sortie comme nous le constaterons plus loin. Au centre du cylindre, l'augmentation du nombre de Biot entraîne, également, la réduction de la température axiale à la sortie.

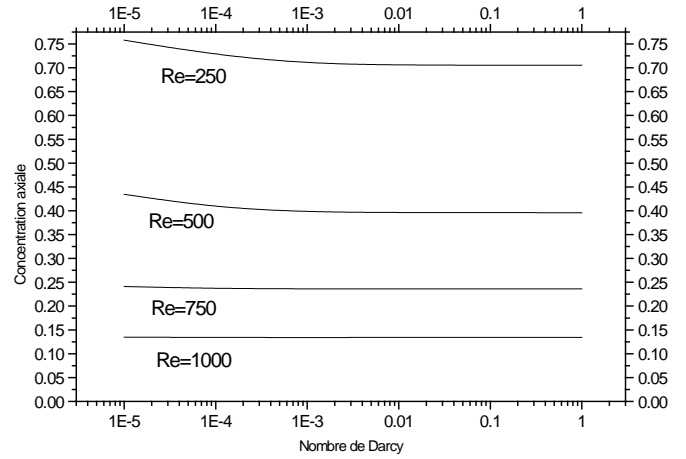
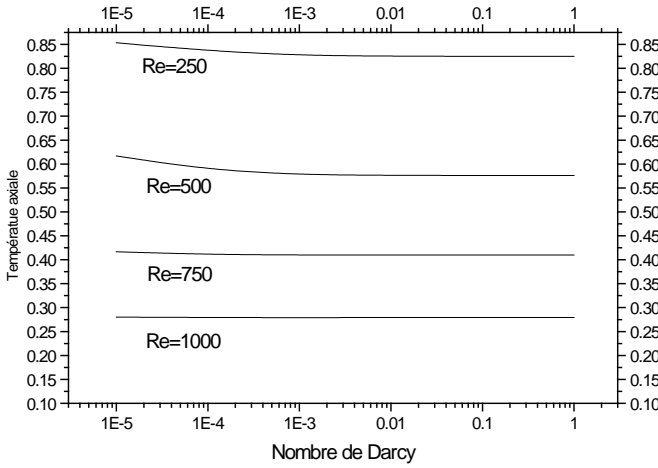
la réduction de la perméabilité augmente légèrement la température à la sortie. Cependant, son influence est relativement insignifiante au voisinage de l'entrée. Cependant lorsque le nombre de Biot est réduit, le champ de température a tendance à se développer pour avoir une propagation de la condition de la paroi au voisinage de la sortie.

Une comparaison entre les différentes températures axiales au voisinage de la sortie ( $x=0.98$ ) pour plusieurs nombres de Biot (Figures V-20), montre que l'augmentation de ce nombre réduit la température près de la sortie et cette réduction est d'autant plus grande que le nombre de Reynolds est faible, probablement du fait que pour de petits nombres de Reynolds, les effets conductifs sont plus importants.

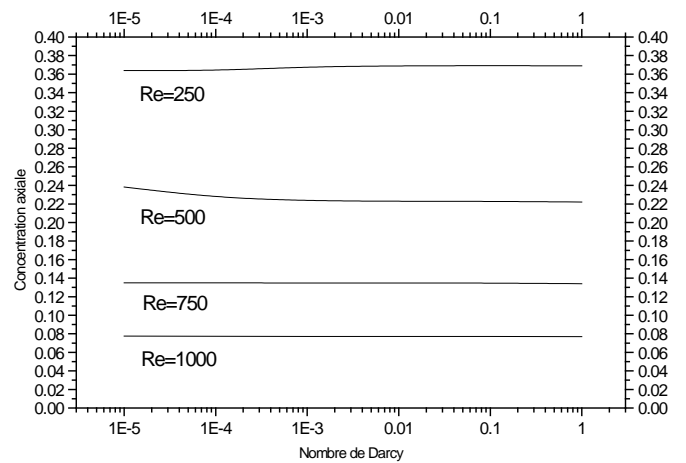
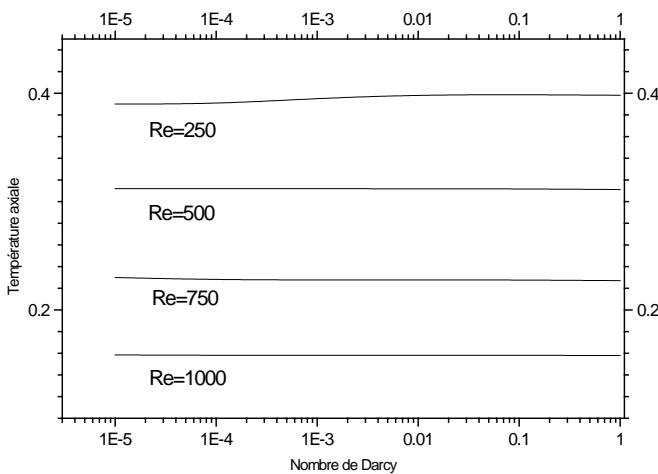
Pour un même nombre de Biot (Figures V-20a, par exemple), la réduction de la perméabilité augmente légèrement la température à la sortie. Cependant, son influence s'atténue avec l'augmentation du nombre de Reynolds.



a-  $Bi=0.01$



b-  $Bi=10$



c-  $Bi=200$

**Figures V-20.** Comparaison des valeurs de la température axiale au voisinage de la sortie ( $x=0.98$ ).

Lorsque le nombre de Biot augmente, le milieu poreux se comporte comme un corps thermiquement épais et la température au voisinage de la sortie tend vers celle du milieu ambiant et donc à devenir indépendante des autres paramètres (la variation est de 60% entre  $Re=250$  et  $1000$  pour  $Bi=0.01$ , alors qu'elle est inférieure à 20 % pour  $Bi=200$  entre les mêmes valeurs du nombre de Reynolds, Figures V-20b et c).

A noter que l'augmentation des effets inertiels, tout comme pour le champ dynamique, réduit considérablement les effets conductifs et diffusifs entraînant une indépendance de la solution des autres paramètres thermophysiques.

La figure V-21 est représentative de la variation du champ de température en fonction des nombres de Reynolds, Biot et Darcy.

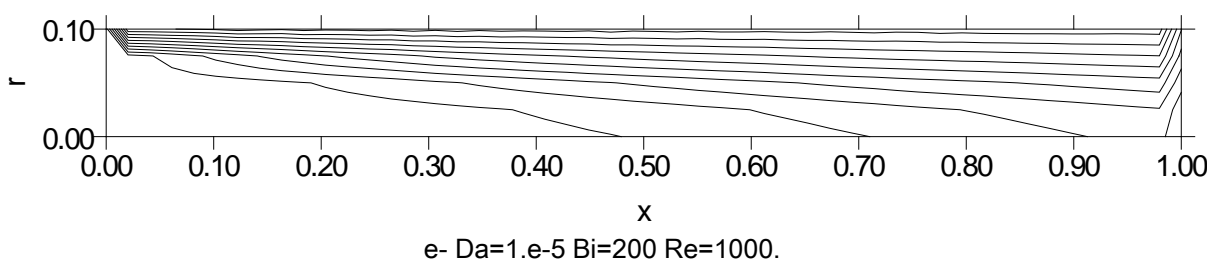
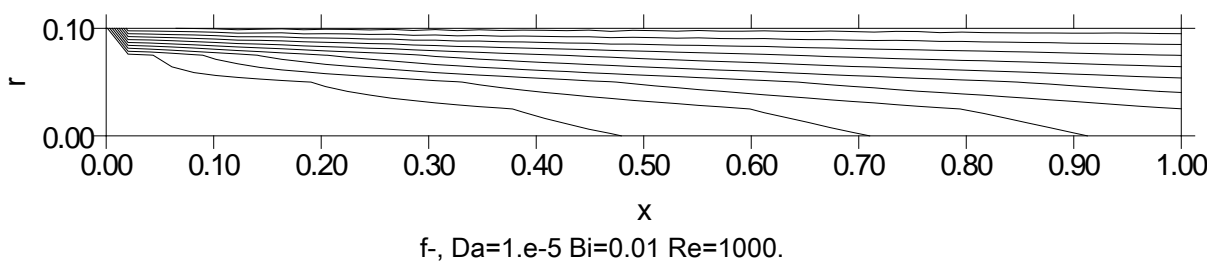
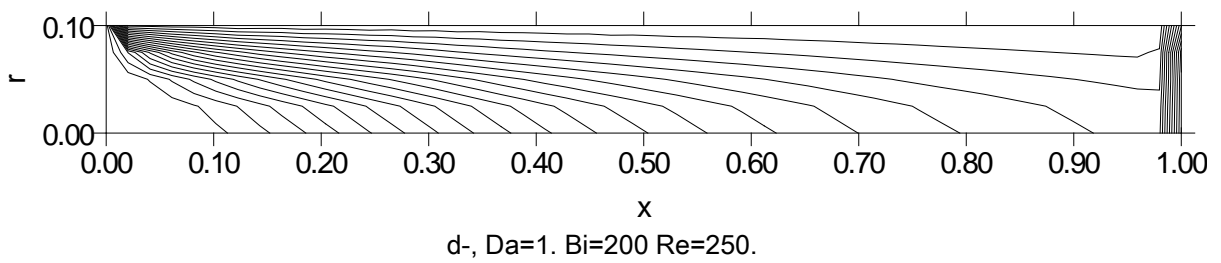
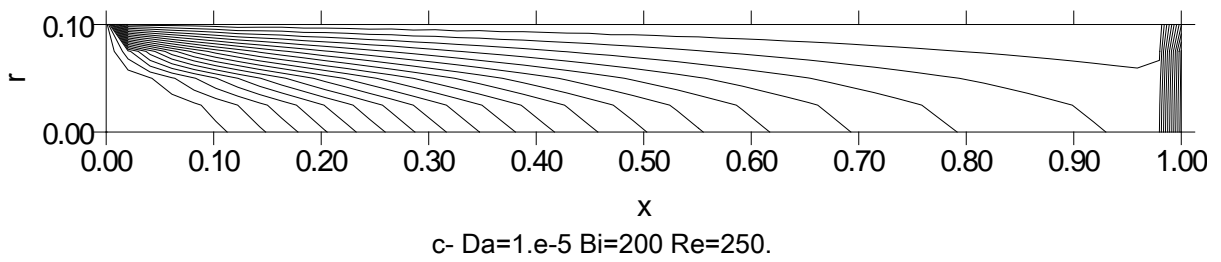
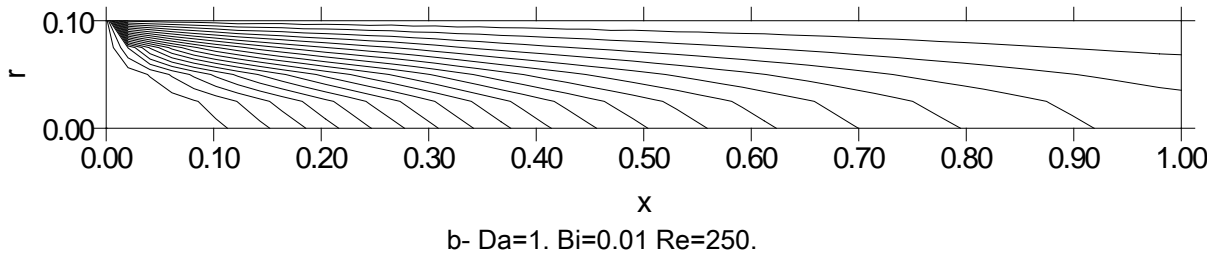
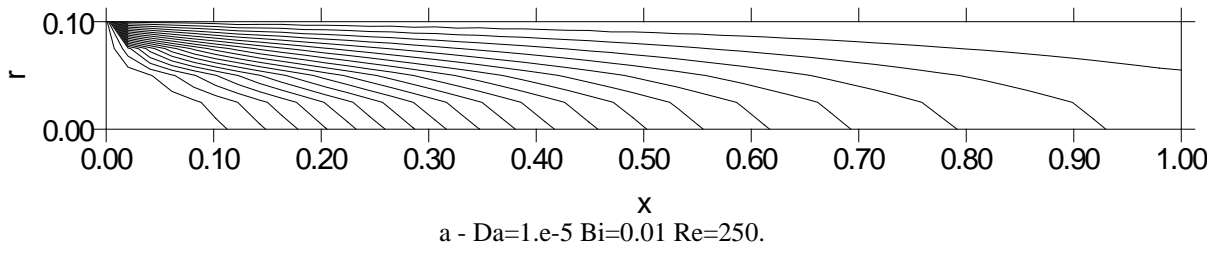
On remarque sur cette figure que les isothermes ont une représentation homogène caractérisée par des droites parallèles à la paroi au voisinage de cette dernière. Elles sont décroissantes en valeurs de la paroi vers le centre. En avançant dans le sens de l'écoulement les écarts entre les isothermes se réduisent entraînant la réduction des gradients de température. Au centre du cylindre, les isothermes changent carrément de direction et deviennent perpendiculaire à l'axe, probablement suite à la condition de symétrie.

Pour les mêmes nombre de Biot et de Reynolds ( $Bi=0.01$ ,  $Re=250$ ), lorsque la perméabilité passe d'une valeur très faible ( $Da=10^{-5}$ ) à une valeur plus élevée ( $Da=1$ ), les gradients de température, essentiellement à la sortie, diminuent (figure V-21a et b) ; ce qui est probablement dû au fait que lorsque la perméabilité est réduite, la matrice poreuse se comporte comme un solide favorisant les échanges thermiques ou massiques en propageant la condition de la paroi. Cette dernière constatation peut être préconisée quand à l'amélioration du phénomène de la filtration par exemple.

Lorsque se sont les nombres de Biot et de Darcy qui sont fixés ( $Bi=0.01$ ,  $Da=10^{-5}$ ), on remarque que l'augmentation du nombre de Reynolds accroît davantage les gradients thermiques, synonyme d'un transfert plus importants.

Parailleurs, la comparaison des figures V-21a, b et V-21c,d montre que l'augmentation du nombre de Biot entraîne une stratification des isothermes à la sortie, perpendiculairement aux parois du cylindre et évoluant d'une valeur minimale au voisinage immédiat de la sortie pour suivre ensuite une croissance monotone dans le sens inverse de l'écoulement.

Il faut également noter que l'influence du nombre de Biot de sortie est d'autant plus importante que les effets inertiels sont faibles. Lorsque le nombre de Reynolds passe de 250 (a, b, c, d) à 1000 (e, f), pour  $Bi=200$  et  $Da = 1.e-5$ , les isothermes à la sortie se transforment d'un état perpendiculaire à la paroi vers une stratification moins oblique par rapport à la paroi du cylindre, réduisant sensiblement les gradients de température.



**Figure V-21.** Evolution du champ thermique.

**b. Coefficients de transfert thermique et massique:**

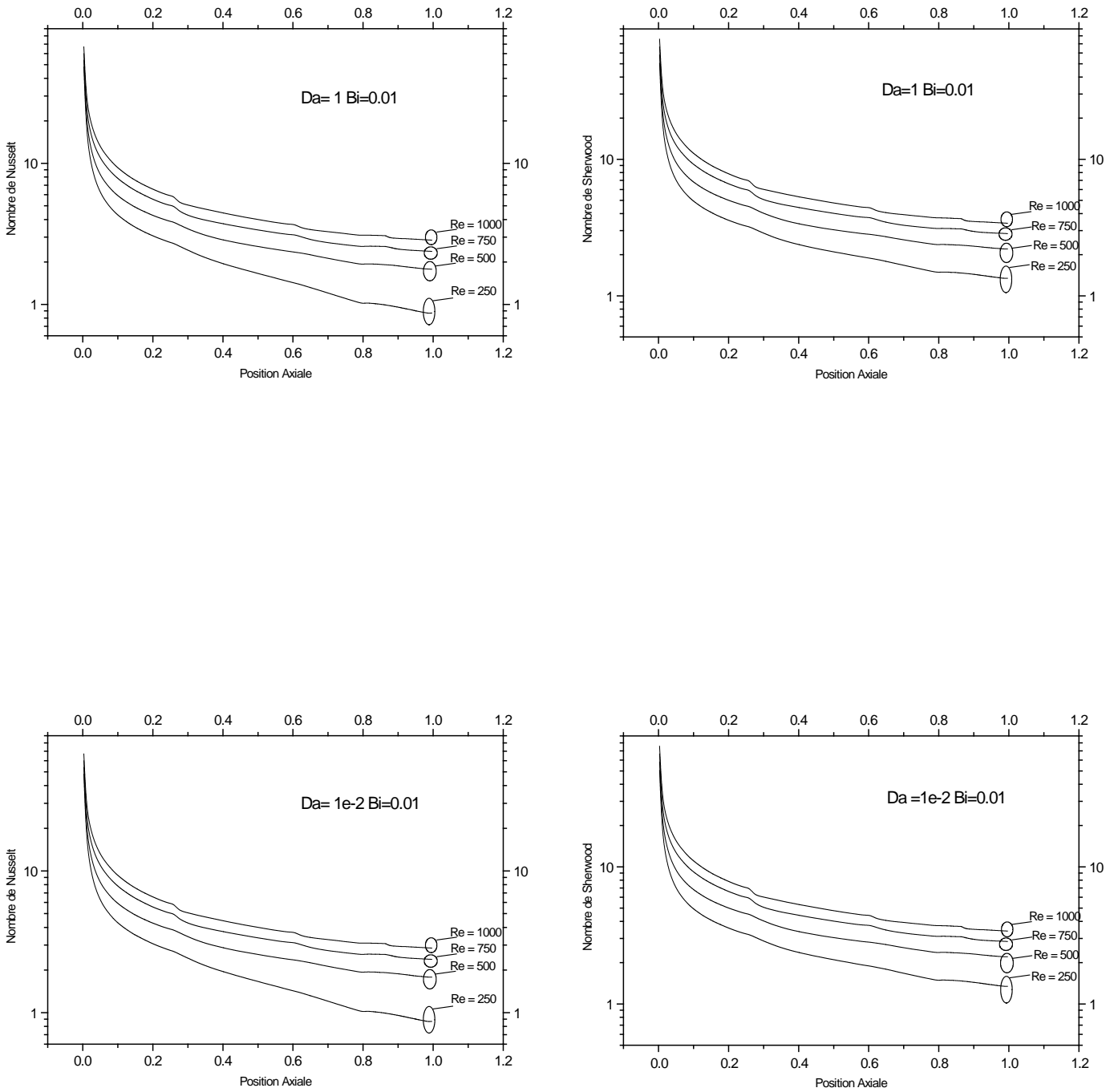
La représentation des nombres de Nusselt et de Sherwood locaux est illustrée sur les figures V-22a, b, c.

Sur la figure V-22a, on remarque une évolution classique de convection forcée (Bouhadeh [1988]) où les échanges thermiques et massiques locaux sont décroissants le long de la conduite. Leurs valeurs sont importantes dans la zone de développement des couches limites où les gradients sont plus importants et cette décroissance devient de plus en plus lente au fur et à mesure que l'on s'éloigne vers l'aval pour tendre finalement vers une valeur limite constante. Cette dernière est étroitement liée à la valeur du nombre de Reynolds. En effet, elle est importante lorsque le nombre de Reynolds augmente, favorisant les transferts convectifs, et décroît lorsque ce dernier diminue.

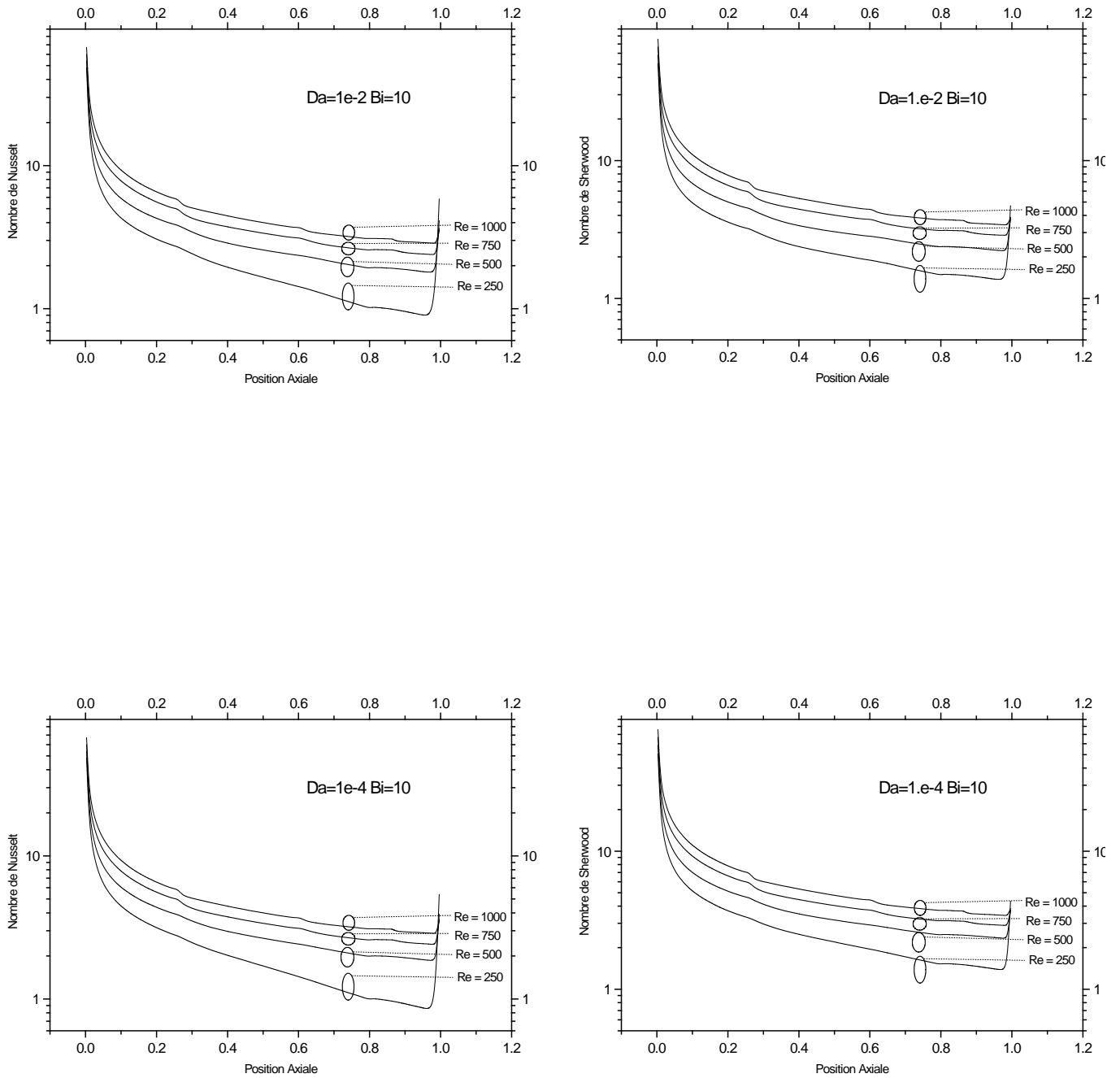
Lorsque le nombre de Reynolds augmente, suite à l'avantage donné à la convection au dépens de la conduction, il engendre des coefficients thermique et massique quantitativement plus importants sur tout le domaine.

L'augmentation du nombre de Biot (figure V-22b, c) favorise également les échanges convectifs, ce qui se traduit par des pics dans la représentation des coefficients d'échange locaux, conséquence directe des gradients de température élevés au voisinage de la paroi. Cependant sur les mêmes figures, on voit bien que l'augmentation relative des coefficients d'échanges est beaucoup plus sensible lorsque le nombre de Reynolds diminue.

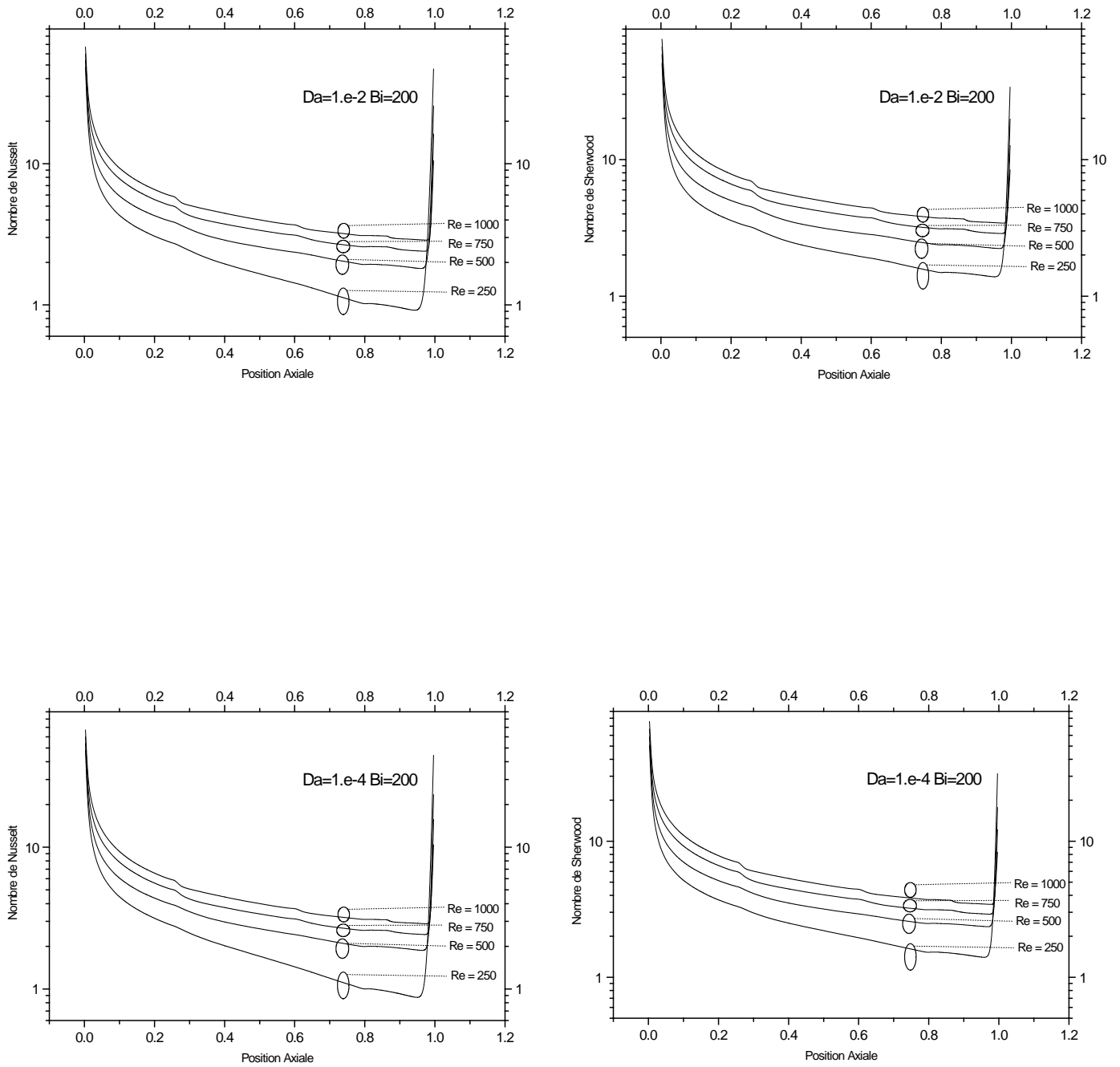
La perméabilité, comme l'indiquent les figures, est qualitativement sans influence sur la dépendance des profils des coefficients de transfert (nombres de Nusselt et Sherwood) avec les nombres de Biot et de Reynolds ce qui va sûrement donner suite à des variations petites des Nusselt et Sherwood moyens en fonction du nombre de Darcy.



**FigureV-22. a.** Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=0.01$ .



FigureV-22. b. Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=10$ .



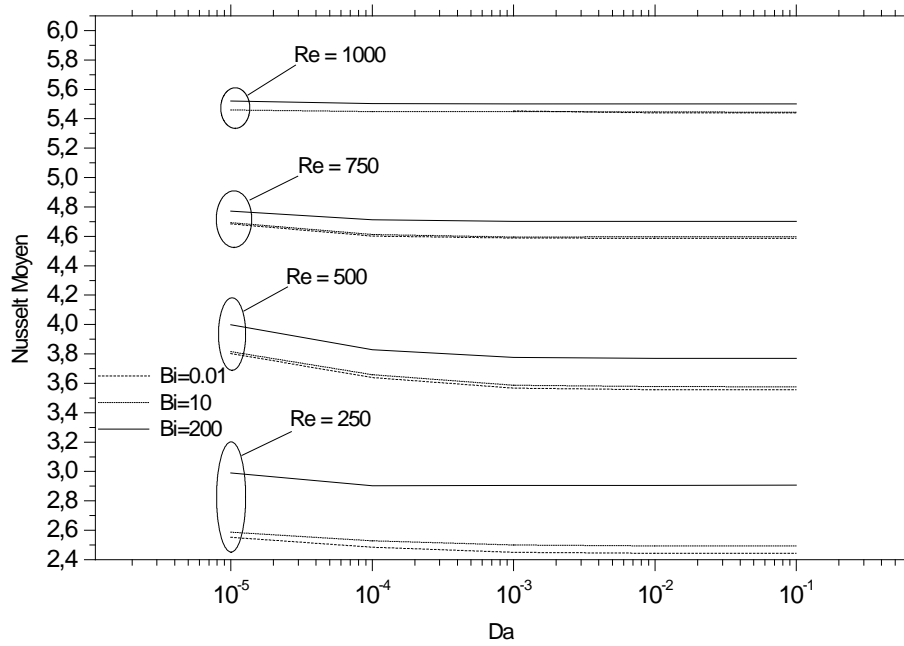
FigureV-22. c. Evolution des profils des Nusselt et Sherwood locaux  $Bi=200$ .

L'effet combiné des nombres de Darcy et de Reynolds sur les coefficients de transfert moyens après établissement est illustré sur la figure V-23.

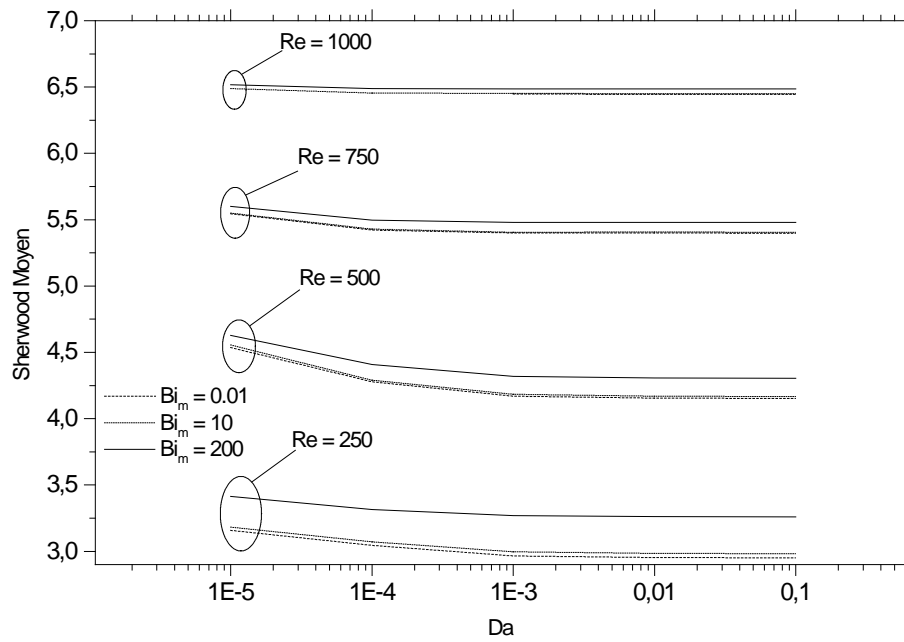
On remarque que lorsque le nombre de Reynolds augmente, l'échange de chaleur et de masse augmente et l'effet du nombre de Biot (qui lors de son augmentation favorise les échanges convectifs) devient de plus en plus faible.

Quand le nombre de Darcy décroît, il engendre une accentuation des transferts thermique et massique mais cette augmentation aura tendance à devenir insignifiante pour des nombres de Reynolds élevés (moins de 2% entre  $Da=10^{-5}$  et  $Da=10^{-1}$  pour  $Re=1000$ ) probablement parce que, dans ces conditions, le champ dynamique est pratiquement inchangé (profil plat) et donc aucune influence sur la température moyenne de mélange, d'où la variation minime des transferts.





(a) Nombre de Nusselt moyen



(b) Nombre de Sherwood moyen

**Figure V-23.** Effets des nombres de Darcy et de Biot sur les transferts thermique et massique.

## CONCLUSION :

Nous avons traité le transfert de chaleur et de masse dans un cylindre vertical en régime instationnaire. Cette étude peut représenter une simulation de la filtration dans un cylindre ou le chauffage et séchage de grains ayant des gradients de concentration et de température réduit à l'extérieur. L'effet de la matrice poreuse sur les champs dynamique, thermique et massique a été analysé.

Les principales conclusions de cette étude peuvent être formulées comme suit :

- L'effet de la matrice poreuse est largement influencé par le nombre de Reynolds qui lorsqu'il augmente a tendance à aplatir les profils de vitesse.
- La réduction de la perméabilité accentue fortement la filtration pour les faible nombre de Reynolds.
- L'augmentation du nombre de Reynolds augmente l'inertie du fluide et réduit le temps de transition, cependant la durée du régime transitoire est très sensible à la valeur du nombre de Biot, ainsi qu'à celle du nombre de Darcy.

## V-4 Application pratique :

Pour illustrer cette étude et afin de mieux comprendre les influences de la dynamique et des transferts thermique et massique sur un cas réel, un exemple pratique est étudié.

### V-4-1 Position du problème des silos :

De Douai [1993], précise que ce n'est pas la fermentation bactérienne seule qui est cause des incendies dans les silos à grains « Le mécanisme est bien connu des chimistes spécialisés en biologie : il s'agit de la chaîne de réactions chimiques, dite de Maillard, entre les acides aminés et les hexoses (sucres en C 6) contenus dans la plupart des matières organiques complexes. Très exothermiques, elles font monter les températures et s'emballent quand celles-ci s'élèvent. On connaît leur responsabilité dans les incendies de silos et même les explosions de réservoirs de mélasse dans les sucreries (alors que les agents bactériens normaux ne peuvent attaquer les mélasses, dont la teneur en eau est trop faible). Ces réactions sont très variées du fait du grand nombre d'acides aminés et de sucres susceptibles d'y participer... »

La ventilation de refroidissement ou de chauffage est nécessitée par le fait que les humidités dites commerciales (15% pour les céréales, 9% pour les oléagineux) sont supérieures au seuil biologique de stabilisation des produits. L'objectif essentiel de la ventilation est le refroidissement ou le chauffage du grain aux normes jusqu'à une plage de température entre 10 et 12°C pour un stockage inférieur à 8 mois alors qu'un stockage d'une année nécessite une température entre 5 et 10°C pour en assurer une bonne conservation. Accessoirement le but recherché par la ventilation peut être un léger séchage à condition que les grains ne soient pas trop humides (16 à 20 %). Au delà de cette valeur, le séchage artificiel est vivement recommandé. Toutefois, il faut souligner que la ventilation séchante diffère notablement de la ventilation de refroidissement tant en ce qui concerne le choix des équipements que le temps de fonctionnement (techniques agricoles).

Précisons à notre tour que la fermentation bactérienne peut bien enclencher le processus, en libérant justement les sucres et en dégradant les protéines en acides aminés. Ceci est dû à plusieurs raisons dont nous citerons les plus importantes :

- ◆ Exposition à des gradients de température pendant longtemps enclenchant des réactions chimiques en chaîne ;
- ◆ Refroidissement ou chauffage effectifs de plus de 5°C causant des dépôts de givre ;

On se référera dans notre cas au chauffage, dit « par contact direct », d'un silo à grains dont la paroi est portée à une température chaude. Le but est d'avoir une propagation « rapide » de la température de paroi vers le milieu poreux afin d'éviter les problèmes sus cités. Cependant notre étude peut être généralisée pour d'autres cas tels que la filtration, l'humidification, etc.

Etant donné que la viscosité de l'air est de  $1510^{-6}$  m<sup>2</sup>/s, Le tableau suivant donne certaines valeurs du temps de transition pour quelques cas calculés où les valeurs adimensionnelles des temps de transition maximale ont été prises de la figure V-7 et leurs translation vers un cas réel est rapportée comme suit:

Durée d'instationnarité maximales [heures]	Poreux thermiquement mince.			Poreux thermiquement épais.		
	Biot faible			Biot élevé		
Hauteur du silo à grains	10 m	20 m	40 m	10 m	20 m	40 m
<b>Re = 250</b>	11.11	44.44	177.77	9.63	38.52	154.06
<b>Re = 500</b>	48.15	192.6	770.4	38.89	155.56	622.22
<b>Re ≥ 1200</b>	0.38	1.54	6.17	0.38	1.54	6.17

**Figure V-24.** Temps de transition de quelques cas pratiques.

On a vu que le temps de transition est très important dans ce genre de procédé. Ce dernier est très lié à certains paramètres notamment la longueur du silo, le nombre de Reynolds, la perméabilité et le comportement thermique des grains. Cependant, dans l'industrie, c'est très difficile de jouer sur la variation de la perméabilité, dépendante essentiellement du produit à stocker. On s'est donc contenté dans ce qui suit de jouer sur la variation des paramètres, autres que la perméabilité.

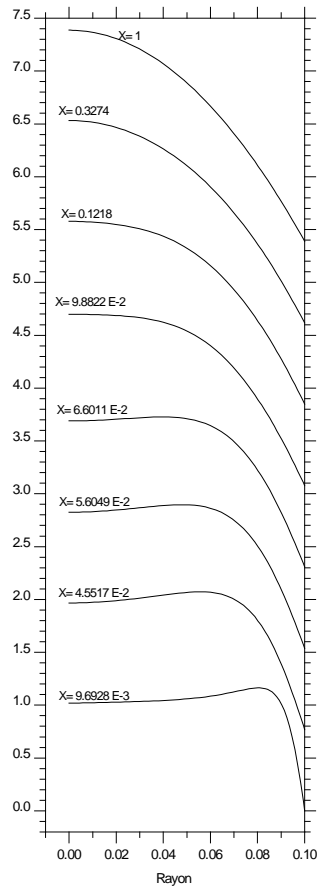
On voit bien que lorsque le nombre de Reynolds est suffisamment élevé l'évolution du temps de transition n'est dépendante que de la géométrie du silo (longueur), elle est d'autant plus grande que le silo est plus haut. Le résultat précédent est facile à prédire cependant à partir des constatations numériques : on voit que certaines valeurs de temps de transition ne

sont pas exploitables industriellement (on ne peut pas parler d'un chauffage de 177.77 heures par exemple). C'est pour cela que des solutions doivent être trouvées pour réduire le temps de transition.

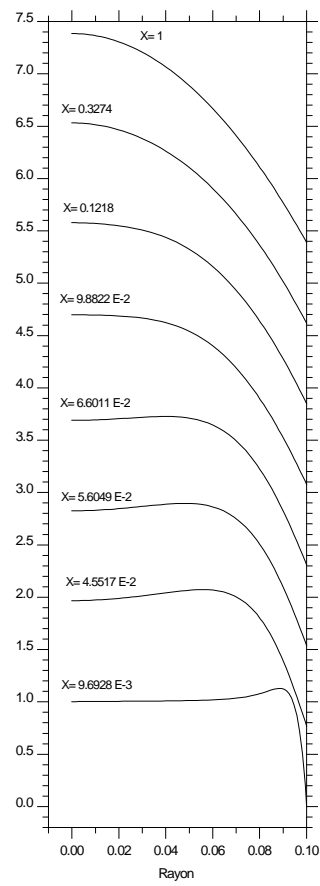
Le temps de transition peut être réduit considérablement en augmentant le nombre de Reynolds et cela en accentuant le débit d'air entrant. Parfois les pompes ne peuvent donner le débit requis, pour cela on peut toujours jouer sur les autres paramètres, plus facile à exploiter, on citera quelques uns dans ce qui suit:

- Division du silo à grains en plusieurs compartiments (chaque compartiment avec son propre système de ventilation) pour réduire le rapport de forme et donc le temps de transition. Cette solution est retrouvée dans le secteur industriel pour le cas de gros silos.
- Augmenter le nombre de Biot à la sortie en faisant circuler un débit d'air secondaire, ce qui contribuerait à augmenter les coefficients d'échanges thermique et massique sur cette section occasionnant l'accentuation des coefficients de transferts.

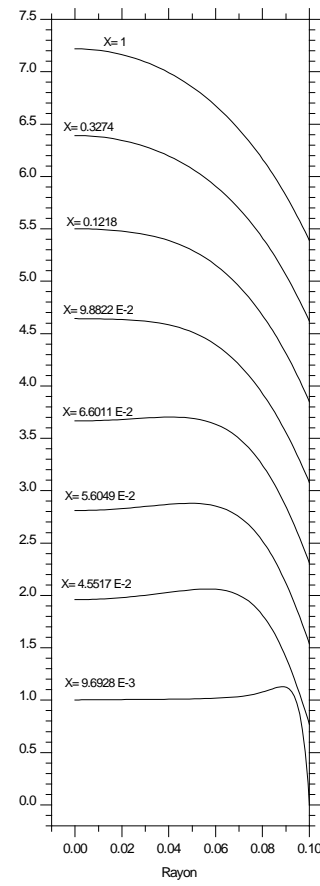




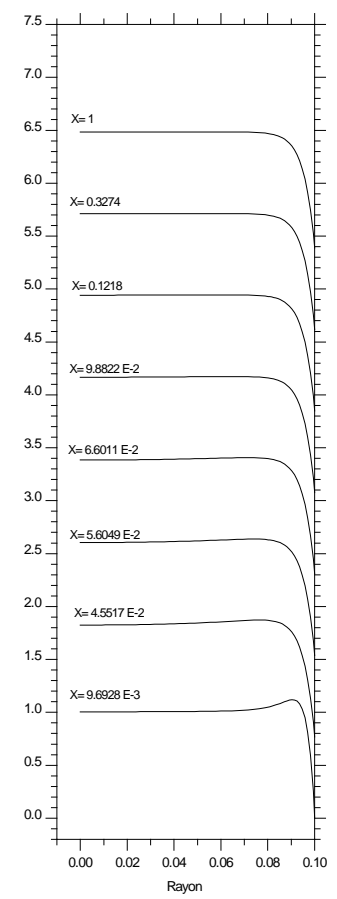
a- Cas fluide



b- Da=1.e-1

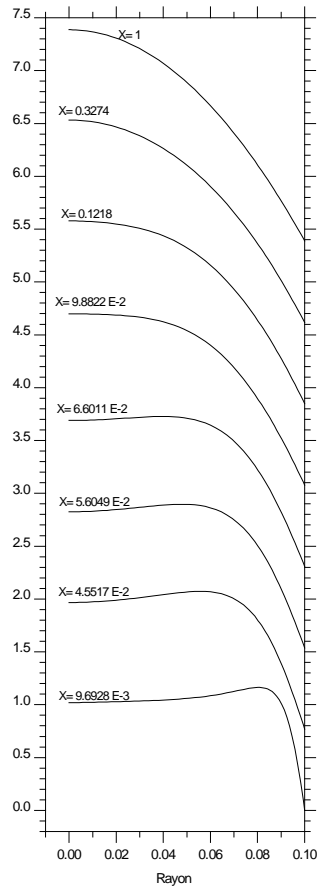


c- Da=1.e-3

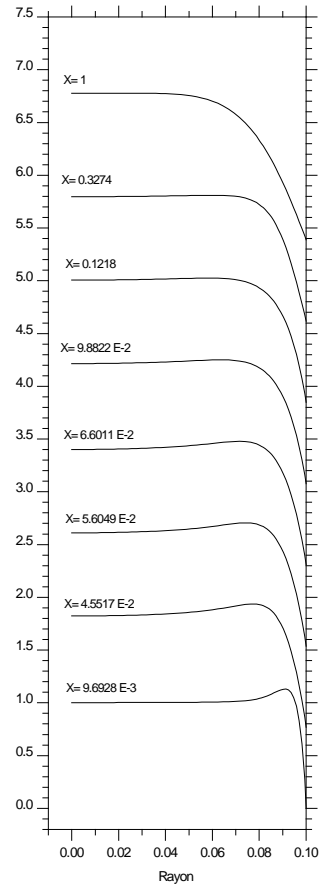


d- Da=1.e-5

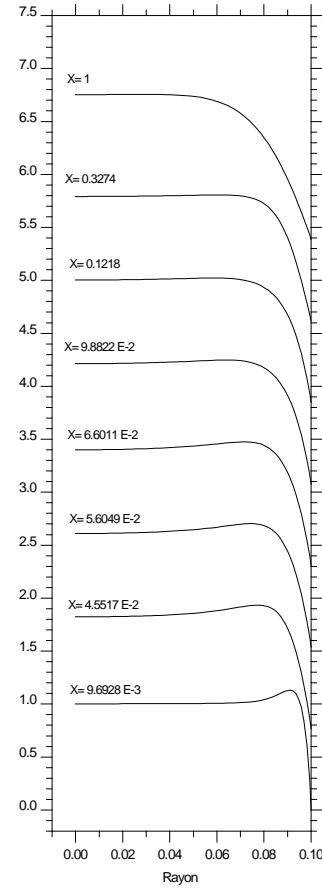
**Figure V-8.** Développement des profils de vitesse pour  $Re=100$ .



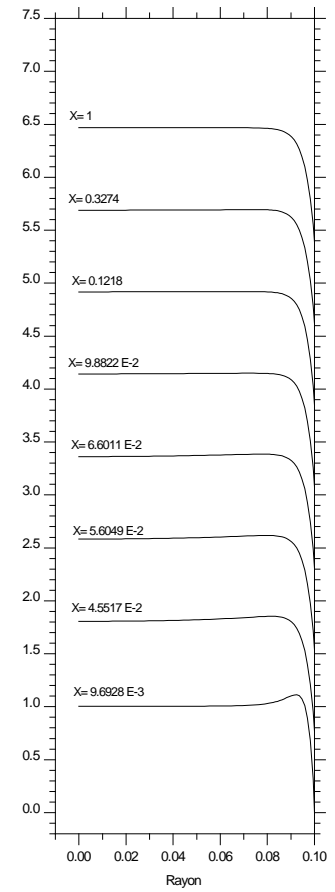
a- Cas fluide



b- Da=1.e-1

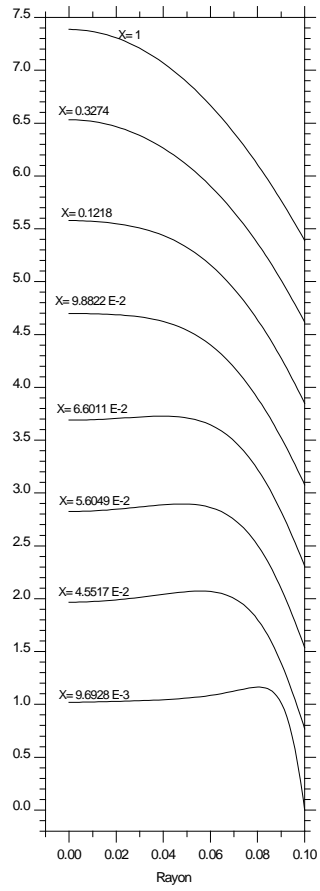


c- Da=1.e-3

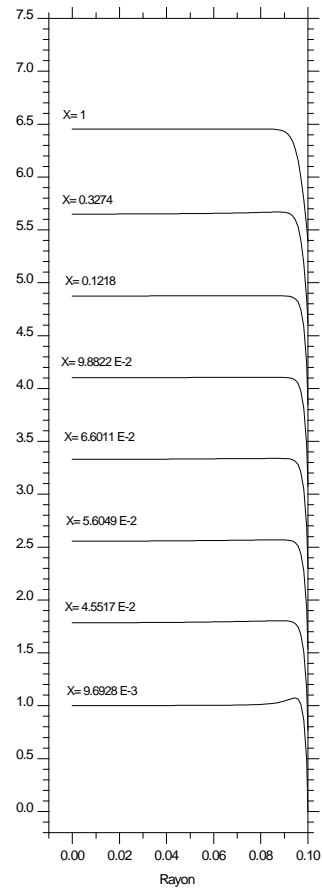


d- Da=1.e-5

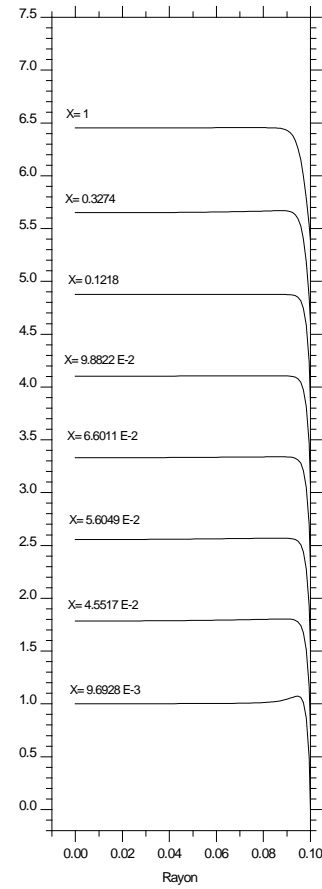
**Figure V-9.** Développement des profils de vitesse pour  $Re=500$ .



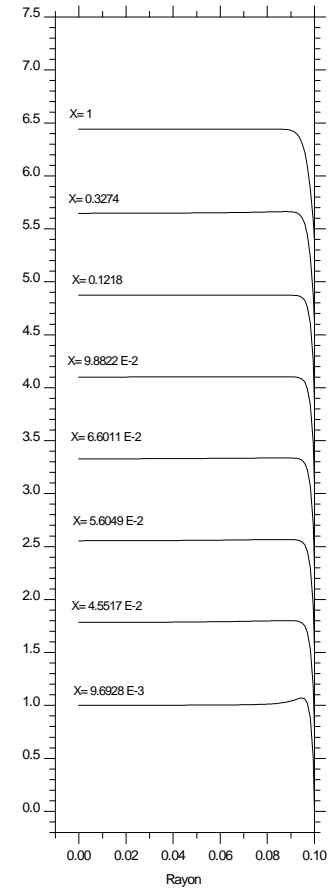
a- Cas fluide



b- Da=1.e-1

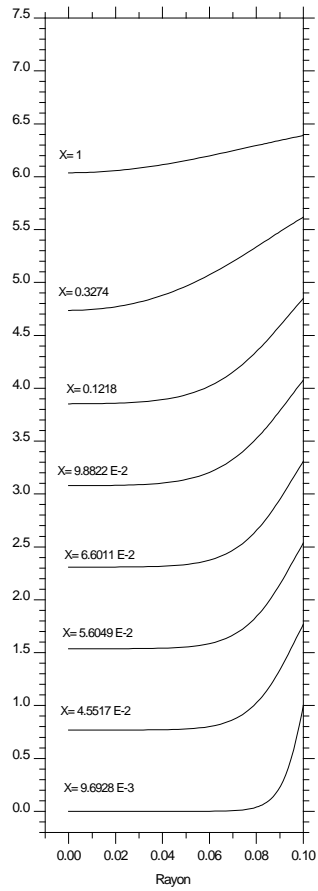


c- Da=1.e-3

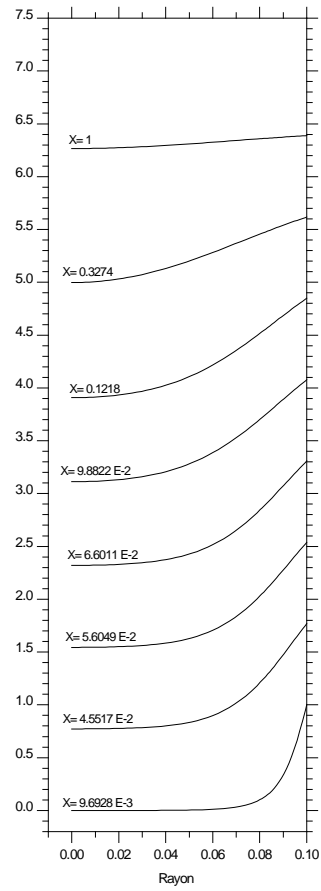


d- Da=1.e-5

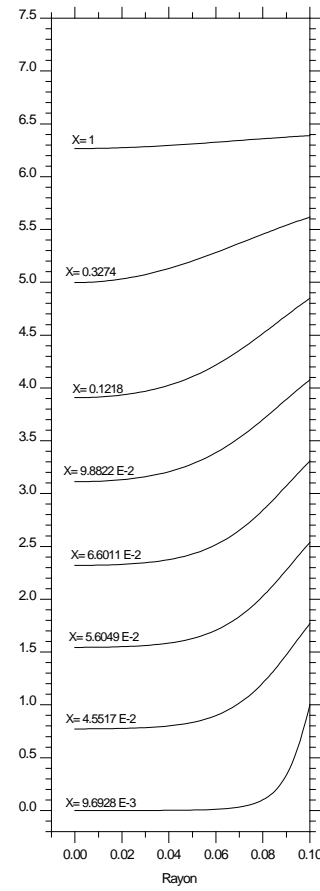
Figure V-10. Développement des profils de vitesse pour Re=1000.



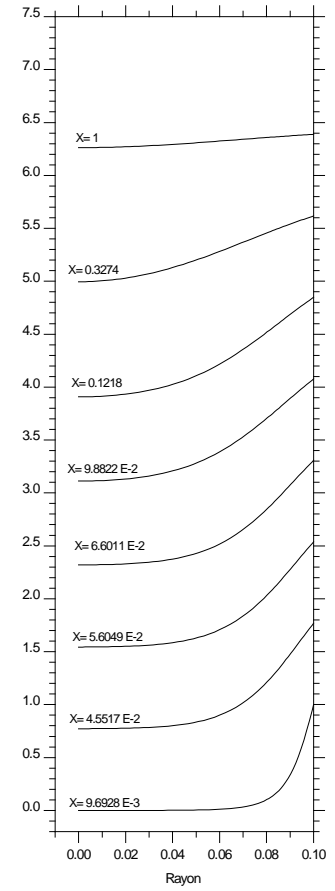
a- Cas fluide



b-  $Da=1.e-1$

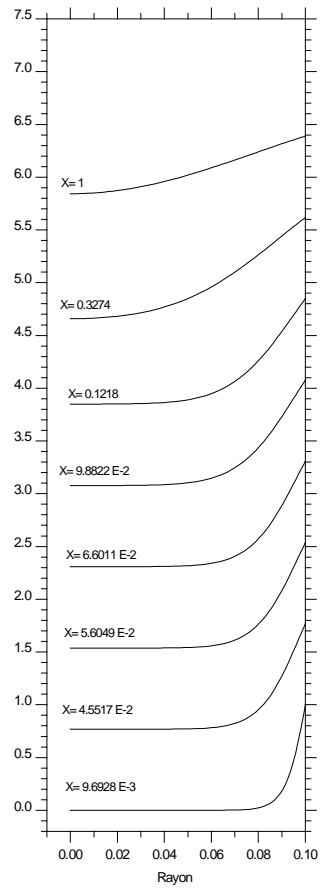


c-  $Da=1.e-3$

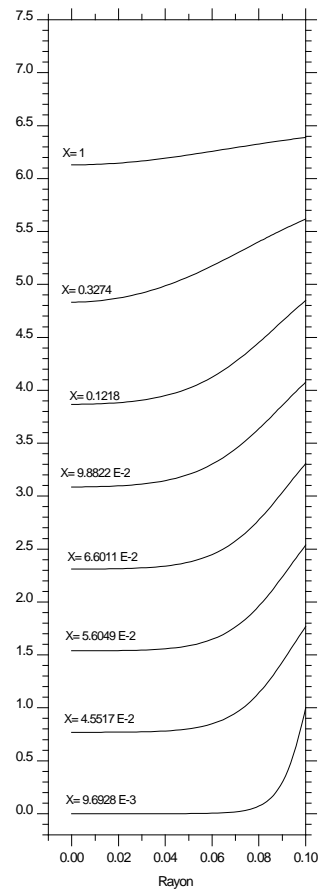


d-  $Da=1.e-5$

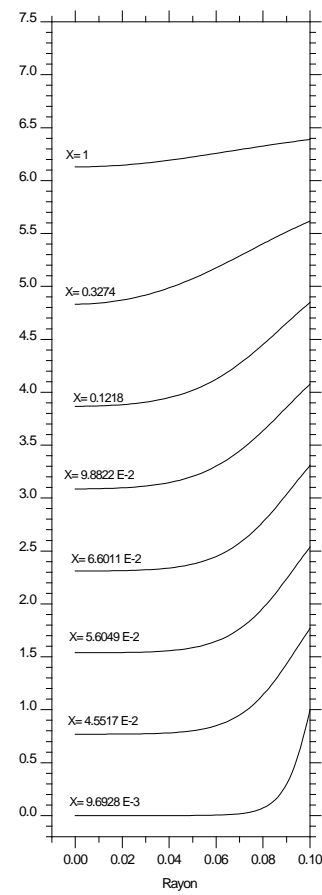
**FigureV-15** Développement des profils de température pour  $Re=250$   $Bi=10$ .



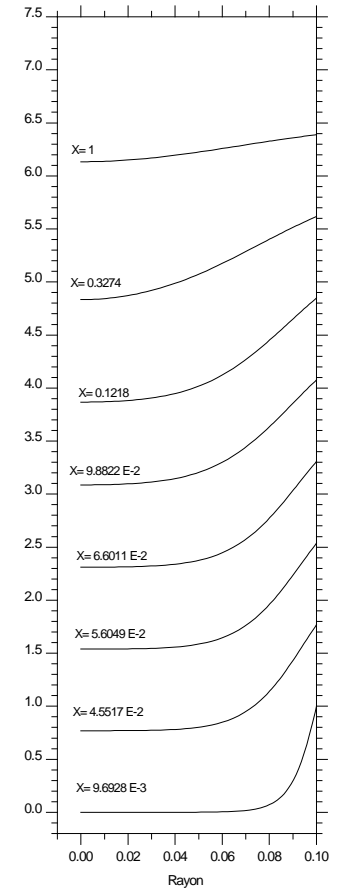
a- Cas fluide



b-  $Da=1.e-1$

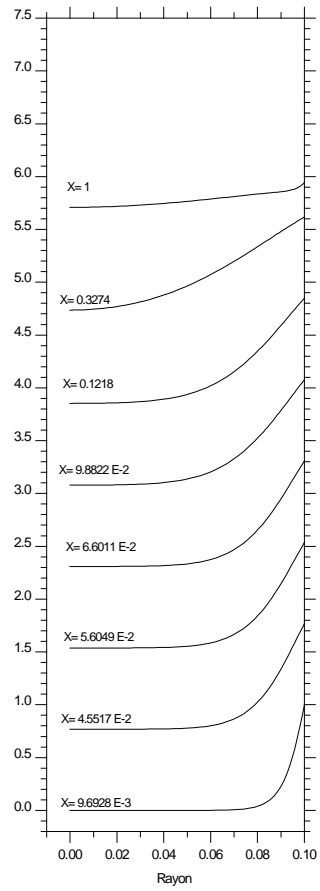


c-  $Da=1.e-3$

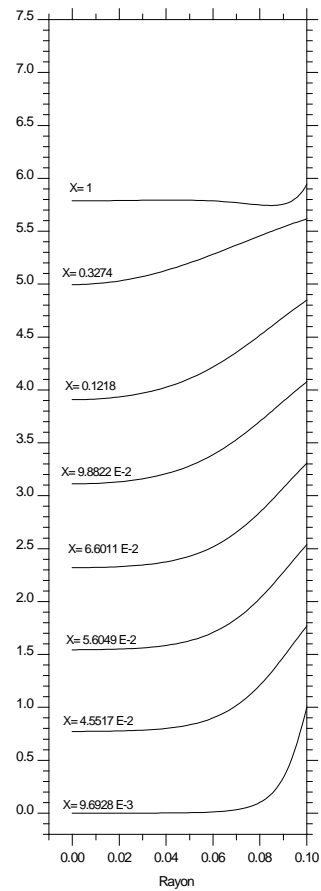


d-  $Da=1.e-5$

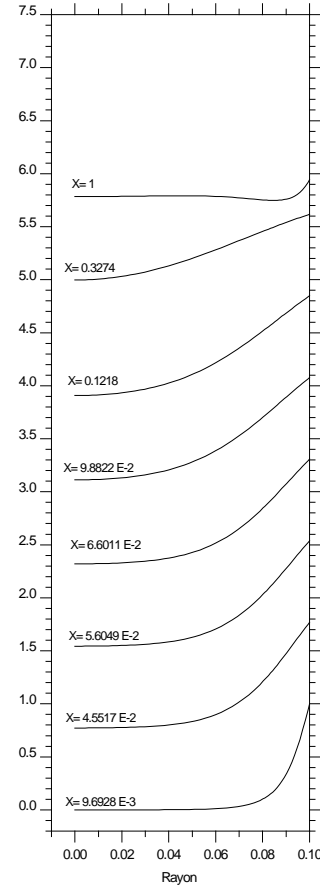
**FigureV-18** : Développement des profils de concentration pour  $Re=250$   $Bi=10$ .



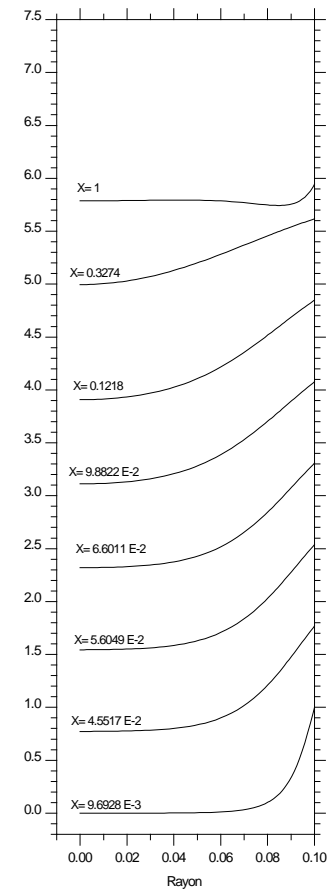
a- Cas fluide



b- Da=1.e-1

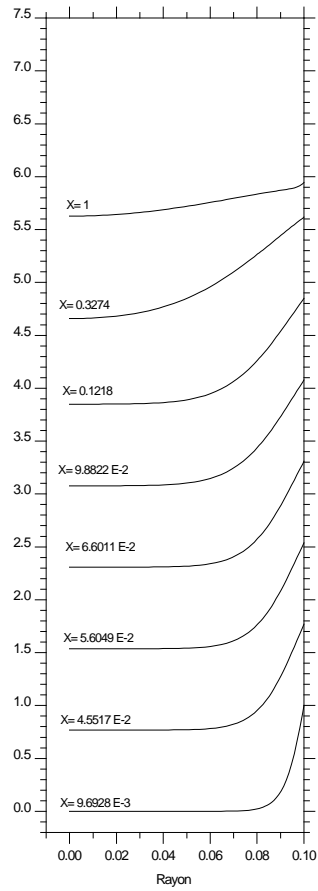


c- Da=1.e-3

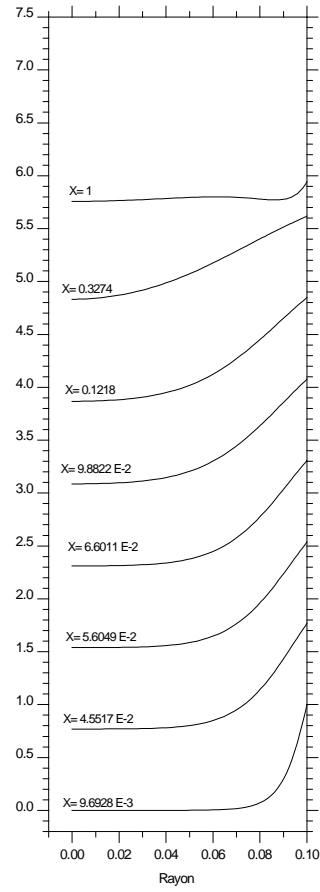


d- Da=1.e-5

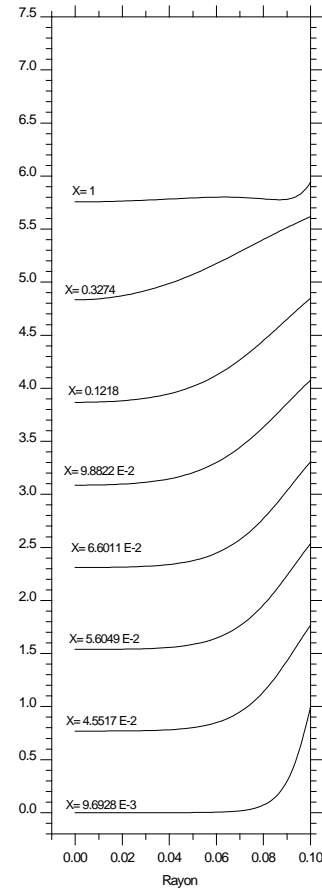
Figure V-16 : Développement des profils de température pour  $Re=250$   $Bi=200$ .



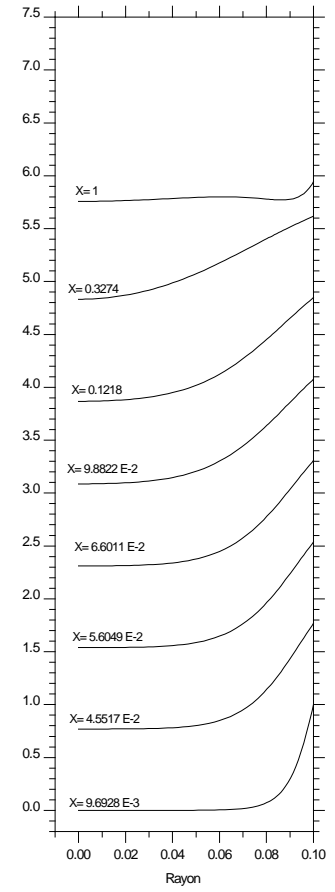
a- Cas fluide



b-  $Da=1.e-1$

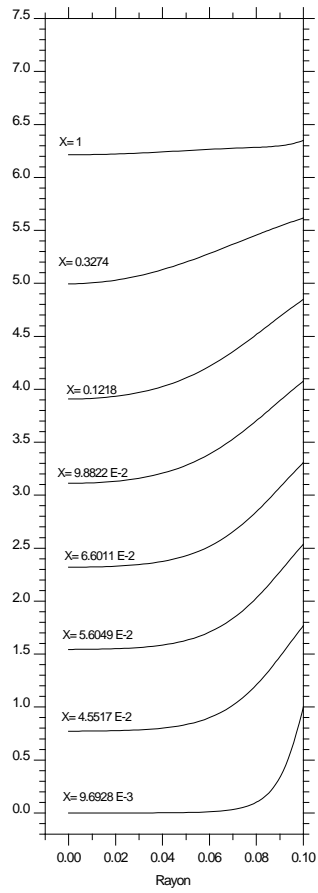


c-  $Da=1.e-3$

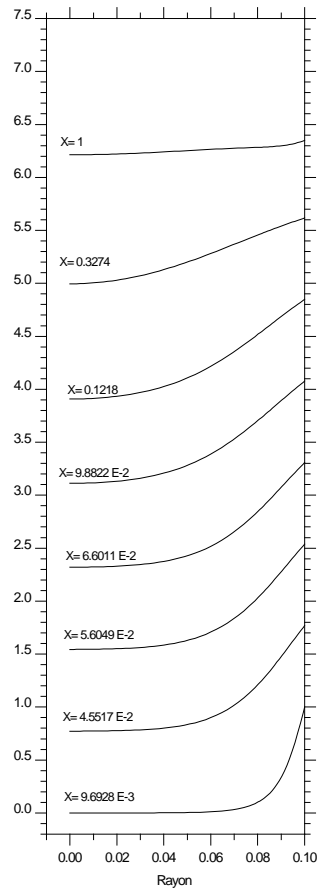


d-  $Da=1.e-5$

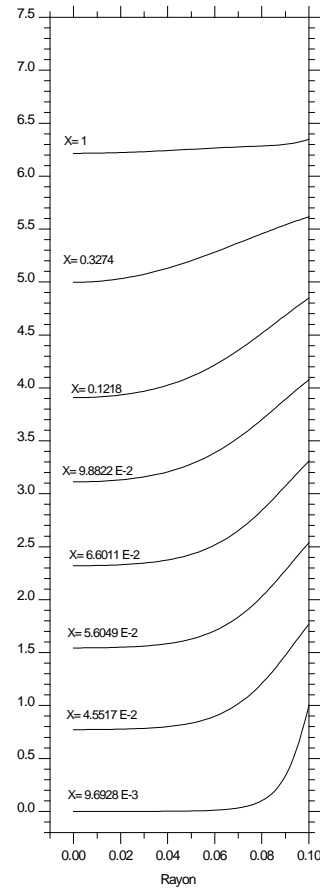
**FigureV-19.** Développement des profils de concentration pour  $Re=250$   $Bi=200$ .



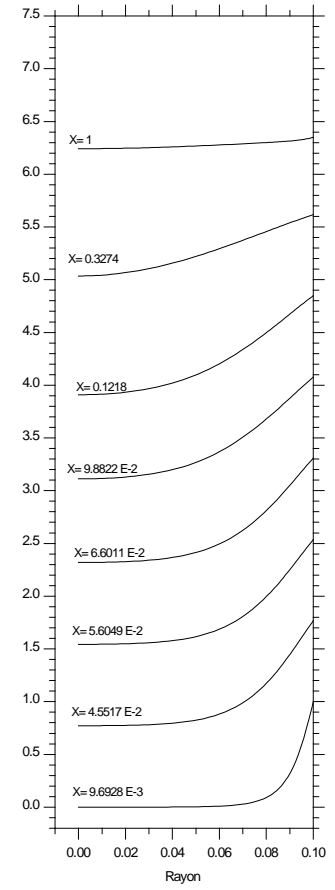
a- Cas fluide



b-  $Da=1.e-1$

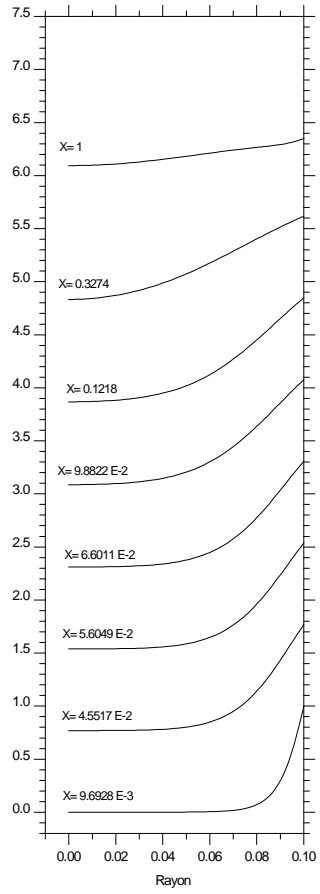


c-  $Da=1.e-3$

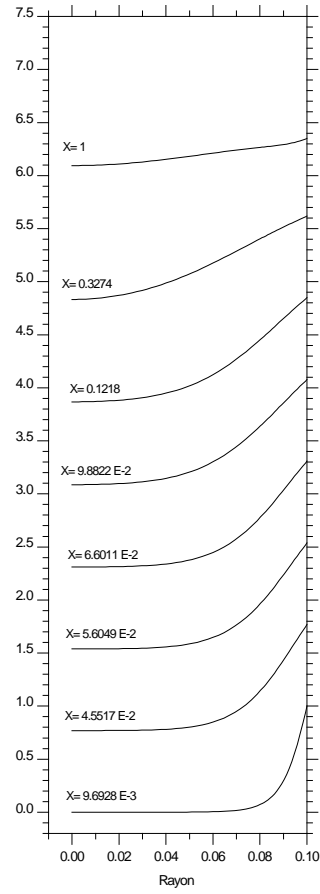


d-  $Da=1.e-5$

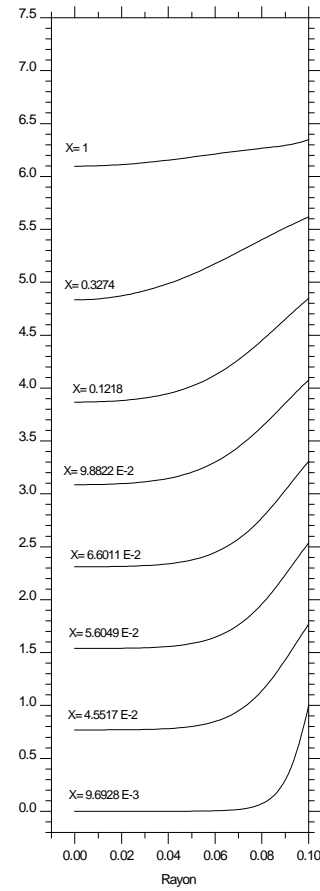
**Figure V-14.** Développement des profils de température pour  $Re=250$   $Bi=0.01$ .



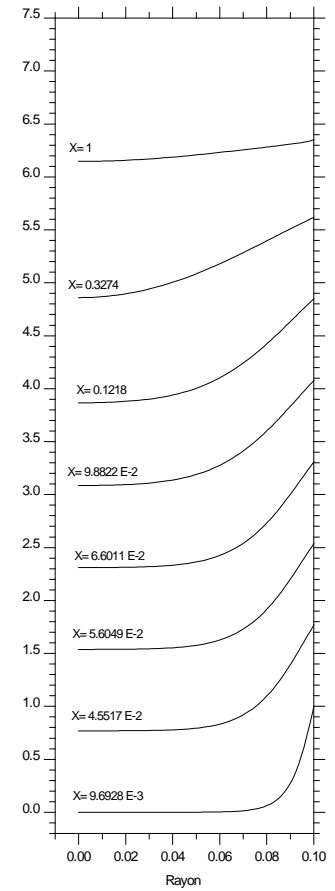
a- Cas fluide



b-  $Da=1.e-1$

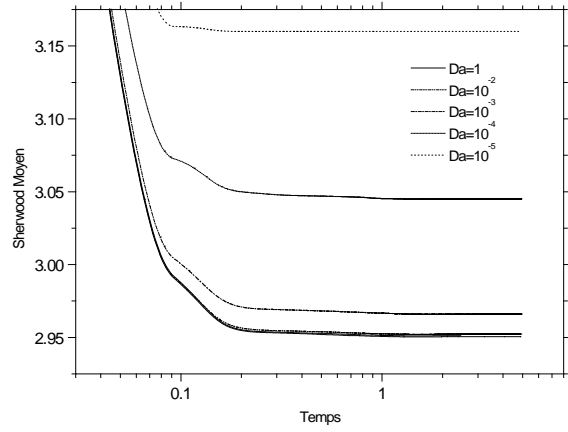
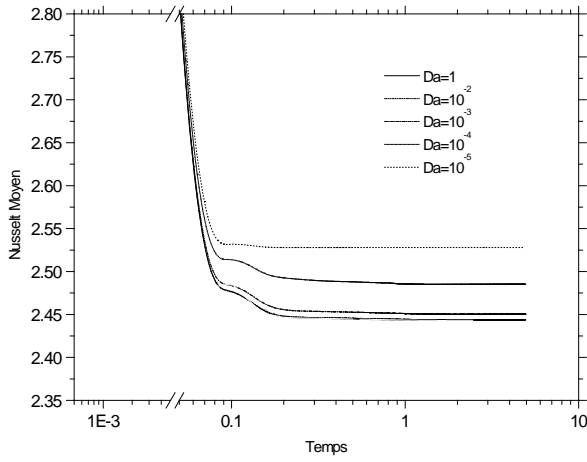


c-  $Da=1.e-3$

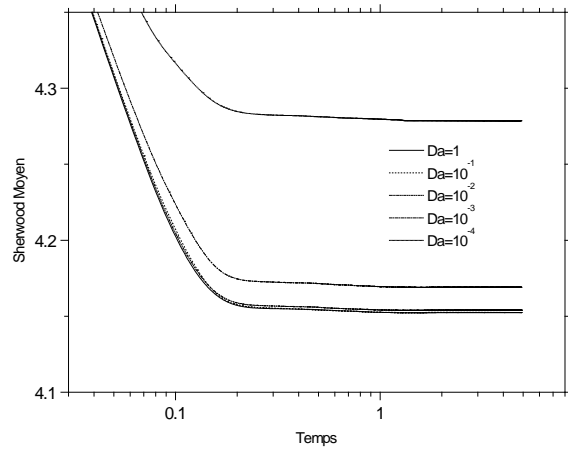
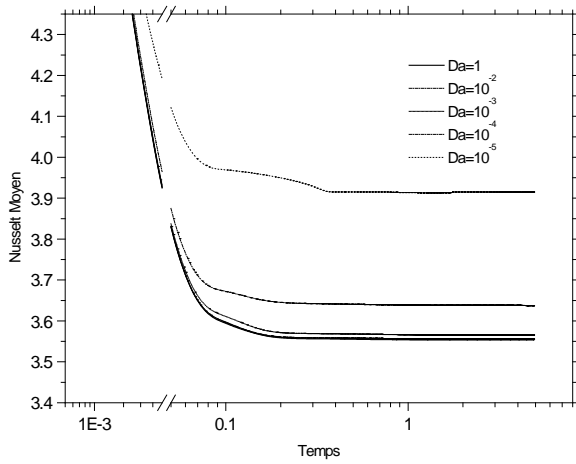


d-  $Da=1.e-5$

**FigureV-17.** Développement des profils de concentration pour  $Re=250$   $Bi=0.01$ .

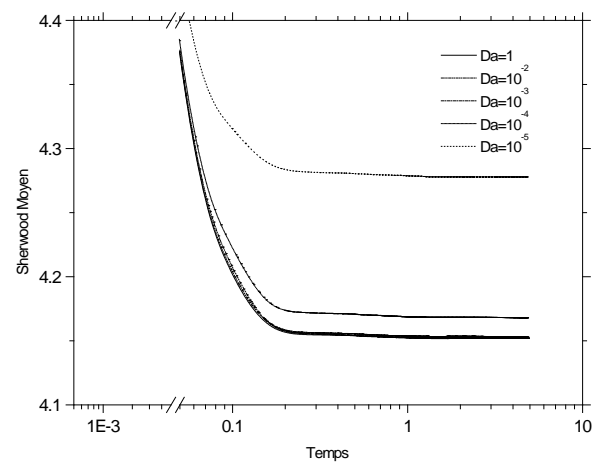
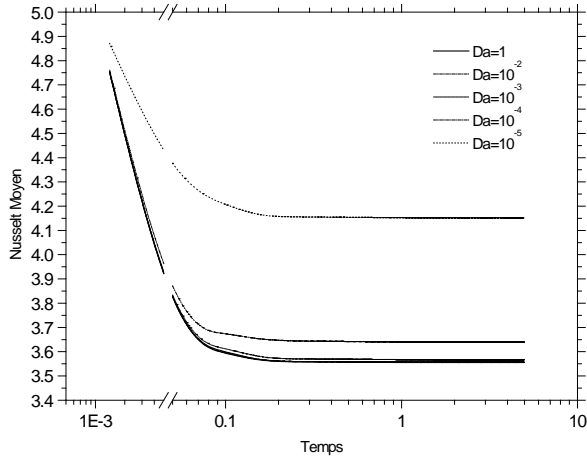


Re=250 Bi=0.01

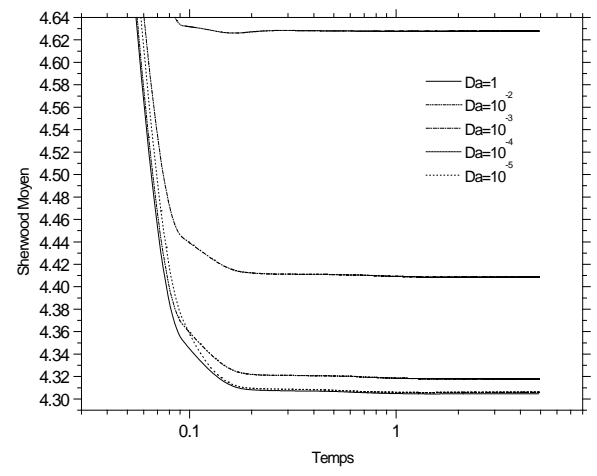
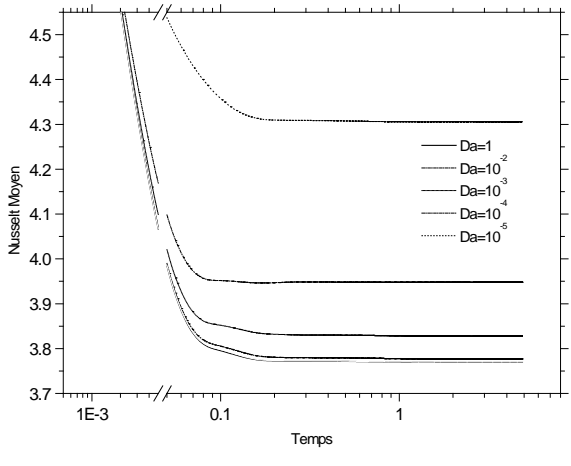


Re=500 Bi=0.01

**FigureV-6a.** Evolution Temporelle des coefficients de transfert Nusselt et Sherwood moyens Bi=0.01.



Re=500 Bi=10



Re=500 Bi=200

**FigureV-6b.** Evolution Temporelle des coefficients de transfert Nusselt et Sherwood moyens Re=500.

## CONCLUSION GENERALE :

L'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologiques est aujourd'hui bien démontrée. Cependant et malgré la montée en puissance des moyens d'étude, appuyés par l'introduction des outils informatique qui ont réduit les coûts des études, des lacunes subsistent encore sur le plan de connaissances fondamentales principalement dans la compréhension des phénomènes de transfert thermique ou massique.

Beaucoup de recherches relatives à la formulation des écoulements ou des transferts thermiques ou encore relatifs à l'explication de certains phénomènes sont toujours en cours. Ainsi le travail faisant l'objet de cette thèse a été développé afin de contribuer à l'étude des transferts de chaleur et de masse en convection forcée dans les conduites poreuses. Nous avons traité le cas des échanges de chaleur et de masse dans une conduite cylindrique en régime instationnaire. Cette étude peut représenter une simulation de la filtration dans une géométrie cylindrique ou le chauffage et séchage de grains ayant des écarts de concentration et de température réduit entre la paroi et l'extérieur. L'effet des caractéristiques de la matrice poreuse sur les champs dynamique, thermique et massique a été analysé et discuté.

L'écoulement a été modélisé par le modèle de Darcy-Brinkman qui prend en compte à la fois les effets Darcien relatifs aux faibles valeurs de la perméabilité et les effets de viscosité macroscopique. Les équations qui en découlent sont résolues numériquement par la méthode des volumes finis. Le code de calcul élaboré, basé sur l'algorithme SIMPLER, est tout d'abord validé par une comparaison avec des études relatives à des cas limites traités analytiquement ou numériquement dans la littérature.

Des résultats sont présentés pour différentes valeurs de la perméabilité, de l'inertie du fluide, caractérisée par le nombre de Reynolds, et des coefficients d'échanges thermique et massique sur la surface de sortie du cylindre. La présentation des résultats est effectuée en terme de profils de vitesse, et d'évolution de la vitesse axiale, pour les phases transitoire et stationnaire. Des profils de température et de concentration décrivant l'évolution le long du cylindre poreux sont également présentés et discutés en même temps qu'une représentation des isothermes pour différentes caractéristiques géométriques et thermophysiques.

Enfin, une discussion relative aux valeurs et aux évolutions des coefficients d'échanges thermique et massique, est menée. Elle concerne tout aussi bien les transferts locaux et les transferts moyens sur la longueur totale du milieu poreux.

L'exploitation des différents résultats a mis en évidence, notamment, les constatations suivantes:

- L'effet de la matrice poreuse est largement influencé par le nombre de Reynolds qui, lorsqu'il augmente, a tendance à aplatir les profils de vitesse.
- La réduction de la perméabilité accentue fortement la filtration pour les faibles nombres de Reynolds.
- L'augmentation du nombre de Reynolds augmente l'inertie du fluide et réduit le temps de transition, cependant la durée du régime transitoire est très sensible à la valeur de la perméabilité ainsi qu'à celle des conditions thermodynamiques de sortie (nombre de Biot). Ce temps de transition présente en fait des valeurs critiques qui dépendent de ces deux dernières caractéristiques (Biot, Darcy).

Par ailleurs, lorsque les effets inertiels augmentent (pour des nombres de Reynolds assez élevés), on observe une relative indépendance des transferts et de la durée de la phase transitoire par rapport à la perméabilité et à la valeur du nombre de Biot.

L'application pratique présentée, pour le cas des silos à grains, peut constituer une base pour beaucoup de perspectives, notamment le stockage et le séchage des produits divers ainsi que la filtration de différentes substances.

Concernant les extensions éventuelles, pour le travail présent, on peut envisager soit l'introduction des effets de la convection mixte, soit la considération d'un écoulement diphasique avec possibilité de dispersion thermique.

Cependant, l'augmentation de la valeur de ce nombre entraîne une indépendance du transfert de la valeur de la perméabilité.

## CONCLUSION GENERALE :

L'existence et l'importance des milieux poreux dans les phénomènes et processus industriels et technologiques sont aujourd'hui bien démontrées. Cependant, la physique de tous les phénomènes de transfert est loin d'être complètement expliquée et maîtrisée. Beaucoup de recherches relatives à la formulation des écoulements ou des transferts thermiques ou encore relatives à l'explication de certains effets sont toujours en cours

Ainsi le travail faisant l'objet de cette thèse a été développé afin de contribuer à l'étude des transferts de chaleur en convection forcée dans les conduites poreuses

Nous avons traité le transfert de chaleur et de masse dans un cylindre vertical en régime instationnaire. Cette étude peut représenter une simulation de la filtration dans un cylindre ou le chauffage et séchage de grains ayant des gradients de concentration et de température réduits à l'extérieur. L'effet de la matrice poreuse sur les champs dynamique, thermique et massique sera analysé.

Les principales conclusions de cette étude peuvent être formulées comme suit :

- L'effet de la matrice poreuse est largement influencé par le nombre de Reynolds qui lorsqu'il augmente a tendance à aplatir les profils de vitesse.

- La réduction de la perméabilité accentue fortement la filtration pour les faibles nombres de Reynolds. Cependant, l'augmentation de ce nombre entraîne une indépendance du transfert de la valeur de la perméabilité.

- L'augmentation du nombre de Reynolds augmente l'inertie du fluide et réduit le temps de transition, cependant la durée du régime transitoire n'est pas très sensible à la valeur de la perméabilité.

Il s'articule autour de deux parties la première partie qui traite des transferts thermiques dans un échangeur annulaire partiellement ou totalement poreux est

repartie en trois chapitres dans un premier temps une solution exacte est trouvée pour un régime de Darcy Brinkman

Il est montré que pour des perméabilités faibles ( $Da \ll 1$ ) le régime est Darcien et que le terme de Brinkman peut être négligé du point de vue thermique les résultats ont montré que pour des matériaux poreux faiblement conducteurs de chaleur il existe une épaisseur critique de la couche poreuse pour laquelle le nombre de Nusselt local est minimal et qu'au dessus d'une certaine valeur du rapport des conductivités thermiques  $Ke$

pour cette épaisseur critique n'existe pas et la présence du milieu poreux améliore le coefficient

## REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES:

**Allaire G.**, Prolongement de la pression et homogénéisation des équations de Stokes dans un milieu poreux connexe, C.R. Acad. Sci. Paris, t.309., série I, pp 717-722, 1989.

**Ameziani D. E., Bouhaded K., Chikh S., Boumedién A.**, Etude de l'influence des caractéristiques d'une matrice poreuse sur le transfert massique dans une conduite annulaire, Séminaire International de Physique Energétique, SIPE4, 1998.

**Ameziani D. E., Bouhaded K., Chikh S., Boumedién A.**, Etude du transfert de chaleur et de masse instationnaire dans une conduite poreuse, Séminaire International de Physique Energétique, SIPE5, 2000.

**Barrère J.**, Modélisation des écoulements de Stokes et de Navier-Stokes, Thèse de l'université de Bordeaux I, 1990.

**Bear J.**, Dynamics of fluid in porous media, New York, Elsevier, 1972.

**Beckermann, C., Viscanta, R., and Ramadhyani, S.**, Natural convection in vertical enclosures containing simultaneously fluid and porous layers, J. Fluid Mechanics, Vol. 186, pp. 257-284, 1988.

**Bejan A.**, The boundary layer regime in porous layer with uniform heat flux from the side, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 26, pp. 1339-1345, 1983.

**Bejan A.**, Mass and heat transfer by natural convection in vertical cavity, Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 6, pp 149-159, 1985.

**Ben Nasrallah S., Amara T. et M. A. Du Peuty**, Convection naturelle instationnaire dans un cylindre rempli de grains ouvert à ses extrémités et dont la paroi est chauffée par un flux de chaleur constant : validité de l'hypothèse de l'équilibre thermique local, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, No. 5, pp. 1155-1168, 1997.

**Benard C., Gobin D. and Trevisan J.**, Thermosolutal natural convection in a rectangular enclosure : Numerical results, HTD, Vol. 107, Heat transfer in convective flows, pp 249-254, 1989.

**Bennacer R.**, Convection naturelle thermosolutale : Simulation numérique des transferts et des structures d'écoulements, Thèse de Doctorat, Université de Pierre et Marie Curie, Paris VI, 1993.

**Bensoussan J., Lion L. and Papanicolao G.**, Asymptotic analysis for periodic structure, Amsterdam, North Holland, 1978.

**Bories S.A. et Prat M.**, Transfert de chaleur dans les milieux poreux, Techniques de l'ingénieur, B8250, 1990.

**Bories S. A.**, Fragment de description de la physique des transferts thermiques dans le sous-sol de la houille blanche, N° 3, pp 212-219, 1985.

**Bories S.**, Natural convection in porous media, In Advances in transport in porous media (Edited by J. Bear and M. Y. Corapcioglu), Martinus Nijhoff, Dordrecht, 1987.

**Brinkman H. C.**, A calculation of the viscous force exerted by a flowing fluid on a dense swarm of particles, Appl. Sci. Res., A1, pp 27-34, 1947.

**Brinkman H. C.**, On the permeability of media consisting of closely packed porous particles, Appl. Sci. Res., A1, pp 81-86, 1948.

**Carbonell R.G. and Whitaker S.**, Heat and mass transfer in porous media, in fundamentals of transport phenomena in porous media, Chem. Engng. Sci., Vol. 38, pp 1795-1802, 1984.

**Chandrasekhara B.C. and Vortmeyer D.**, Flow mode for velocity distribution in fixed porous beds under isothermal conditions, Wärme-und Stoffübertragung, Vol. 12, pp 105-111, 1979.

**Cheng P.**, Heat transfer in geothermal systems, Adv. Heat Transfer 14, pp. 1-105, 1987

**Cheng P., Chowdhury A., et Hsu T.**, Forced convection in packed tubes and channels with variable porosity and thermal dispersion effects, Proc. NATO Advanced study Institute on convective Heat and mass Transfer, pp 361-404, 1990.

**Cheng P., Hsu T., et Chowdhury A.**, Forced convection in the entrance region of a packed channel with asymmetric heating, Journal of Heat Transfer. Vol. 110, pp. 946-954, 1988.

**Cheng P. and Zhu H.**, Effects of radial thermal dispersion on fully developed forced convection in cylindrical packed tubes, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 30, pp. 2373-2383, 1987.

**Childress S.**, Viscous flow past random array of spheres, J. Chem. Phys., Vol. 56, pp 2527-2539, 1972.

**Chou F. C., Lien W. Y. and Lin S. H.**, Analysis and experiment of non darcian convection in horizontal square packed sphere channels: 1. Forced convection, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 35. No. 1, pp. 195-205, 1992.

**Chowdhury A. and Cheng P.**, Thermally developing flows in packed tubes and channels, Int. Conference of Mechanics of Two-Phases Flows, National Taiwan University, Taipei, pp 421-427, 1989.

**Chowdhury M. Propster M. and Szekely J.**, On the importance of inertial terms in modelling of flow maldistribution in packed beds, AIChE J., Vol. 22, pp 600-603, 1976.

**Combarous, M. A., and Bories, S. A.**, Hydrothermal convection in saturated Porous media, Advances in Hydrosience, Vol. 10, pp. 231—307, 1975.

**Coulaud O., Morel P. and Caltagirone J.P.**, Numerical modelling of non linear effects in laminar flow through a porous medium, J. Fluid Mechanics, Vol. 190, pp 393-407, 1988.

**Cushman J. H.**, Stochastic filtering of multiphase transport phenomena, Transport in porous media, Vol. 2, pp 425-453, 1987.

**Darcy H.**, Les fontaines publique de la ville de Dijon, Dalmont, Paris, 1856.

**De Douai**, Science & Vie N°911, Août 93, page 10.

**De Vries D. A.**, Thermal Conductivity of soil, Mededelingen van de landbouwhogeschool te wageningen, 1952.

**Dibbs A. and Edwards R. V.**, A new look at porous media mechanics-Darcy to turbulent, in fundamentals of transport phenomena in porous media, Bear and Corapcioglo, Eds, Martinis quations as a model for flow in porous media, Phys. Fluids, Vol. 11, pp 3329-3341, 1987.

**Ergun S.**, Fluid Flow through packed column, Chem. Eng. Prog., Vol. 48, pp 89-94, 1952.

**Fand R.M. , Steinberger T.E. and Cheng P.**, Natural convection heat transfer from a horizontal cylinder embeded in a porous media, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29, pp 119-133, 1986.

**Georgiadis J. G. and Catton L.**, Stochastic modeling of unidirectional fluid transport in uniform and random packed beds, Phys. Fluids, Vol. 30 N° 4, pp 1017-1022, 1987.

**Farid Alavyoon** , On naturalconvection in vertical porous enclosures due to prescribed fluxes of heat and mass at the vertical boundaries, Int. J. Heat Mass Transfer. Vol. 36. No. 10, pp. 2479-2498, 1993.

**Forchheimer F.**, Wasserveugung durch boden, Z. Ver. Deutch Ing., Vol. 45, pp 1782-1788, 1901.

**Georgiadis J. G.**, Effects of randomness on heat and mass transfer in porous media , Convective Heat and Mass Transfer in Porous Media, Kluwer Acad. Publish., pp 499-524, 1991.

**Georgiadis J. G. and Catton L.**, Stochastic modeling of unidirectional fluid transport in uniform and random packed beds, Phys. Fluids, Vol. 30 N° 4, pp 1017-1022, 1987.

Hadeley G. R., Thermal conductivity of packed metal powders, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 29, pp 909-920, 1986.

**Hadim A.**, Forced convection in a porous channel with localized heat sources, Journal of heat transfer, Vol. 116, pp 465-471, 1994.

**Hadim A. and Govindarajan S. ,** Developpement of laminar mixed convectionin a vertical porous channel, in Symbolic Computation in Fluid Mechanics and Heat Mass Transfer, ASME HTD-Vol. 105, pp. 145-153, 1988.

**Huang X. Y. and Liu C. Y.**, The developping flow in a channel filled with porous media, Int Comm Heat Mass Transfer, Vol. 23, No. 1, pp123-132,1996.

**Hunt M. L. and Tien C. L.,** Non darcian convection in cylindrical packed beds, ASME/JSME Thermal Engineering Joint Conference, 1987.

**Hunt M. L. and Tien C. L.,** Effect of thermal dispersion on forced convection in fibrous media, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 31, pp. 301-310, 1988.

**Hyun J. M., Lee J. W.,** Double-diffusive convection in a rectangle with cooperating horizontal gradients of temperature and concentration, Int. J. of Heat and Fluid Flow, Vol. 10, N° 2, pp 146-151, 1989.

**Ineba H. and Seki N. ,** a numerical study on transient heat transfer in vertical porous layer, Bull, JSME 25, pp. 934-938, 1982.

**Issa R.I., Ahmadi-Befrui B., Beshay K.R. and Gosman A.D.,** solution of the implicitity in discretised reacting flow equations A.D., splitting, journal of computational physics, Vol. 93, PP 388-10, 1991.

**Issa R.I., Gosman A.D. and Watkins A.P.,** the computation of compressible and incompressible recirculating flows by non-iterative implicit scheme, journal of computational physics, Vol. 62, PP 66-82, 1986.

**Jishke M. C., Doty R.T.,** Linearized buoyant motion in a closed container, J. Fluid Mech., pp 729-754, Vol.71, 1975.

**Kaviani M.,** Principles of heat transfer in porous media, Mechanical Engineering series, Springer Verlag, 2<sup>Nd</sup> Edition, 1995.

**Kaviani M.,** Laminar flow through a porous channel bounded by isothermal parallel plates, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 28, pp. 851-858, 1985.

**Khellaf K.,** Etude numérique de la convection thermique mixte dans les systèmes annulaires cylindriques tournants, Thèse de Doctorat, CNAM, Paris, 1994.

**Koh J.C.Y. , and Colony R.,** Analysis of cooling effectiveness for porous materials in a coolant passage, J. heat transfer, Sec. C., Vol. 96, PP 324-330, 1974.

**Koh J.C.Y and Stevens R.L.,** Enhancement of cooling effectiveness by porous materials in a coolant passage, J heat transfer, Sec. C, Vol. 97,PP 309-311,1975.

**Kunii D. and Smith J. M.,** Heat transfer characteristics of porous rocks, AIChE J., Vol. 6, pp. 71-77, 1960.

**Kuwahara F. , Nabayama A. and Koyama H.,** A numerical study of thermal dispersion in porous media, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 118, pp 756-761, 1996.

**Lage J.L. ,** effect of the convective inertial term on Benard convection in a porous medium, numerical heat transfer, part A, Vol. 22 , PP 469-485, 1992.

**Lauriat G. and Prasad V. ,** Non-Darcian effects on natural convection in a vertical porous enclosure, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 32, No. 11, pp. 2135-2148, 1989.

**Lauriat G. and Vafai K.,** Forced convective flow and heat transfer through a porous medium exposed to a flat plate or a channel, *convective heat and mass transfer*, Kluwer Acad. Publish., Vol. 32 N°11, PP 2135-2148, 1989.

**Le Breton P., Caltagirone J.P. and Arquis E.,** Natural convection in a square cavity with thin porous layers on its vertical walls, *journal of heat transfer*, Vol. 113, PP 892-899, 1991.

**Le Quere P.,** Etude de la transition à l'instationnarité des écoulements en convection naturelle en cavités verticales différentiellement chauffées par méthodes spectrales Chebychev, Thèse de Doctorat d'Etat ès Sciences, Université de Poitiers, 1987.

**Levy T.,** Loi de Darcy ou loi de Brinkman?, *C.R. Acad. Sci. Paris*, t.292,, serie II, pp 871-874, 1981.

**Lundgren T. S.,** Slow flow through stationary random beds and suspensions of spheres, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 51, pp. 273-299, 1972.

**Martin H.,** Low pecllet number particle to fluid heat and mass transfer in packed beds, *Chem. Engng. Sci.*, Vol. 33, pp 913-919, 1978.

**Matheron G. ,** Les variations régionalisées et leurs estimation, Une application de la theorie des fonctions aléatoires aux sciences de la nature. Paris, Masson, 1965.

**Maxwell J. C.,** A treatise on electrical and magnetism clarendon pres, oxford, England, 3<sup>RD</sup> Edition, Vol. 1 pp 440-445, 1904

**Muralidhar K.,** A review of free forced and mixed convection in a saturated porous annulus *sādhanā* vol 15 part I pp 1-41 1990.

**Nakayama A. and Ebinuma C. D. ,** Transient non Darcy forced convective heat transfer from a flat plat embedded in a fluid saturated porous medium, *Int. J. Heat and Fluid Flow*, Vol. 11,N° 3 , pp. 249-253, 1990.

**Nield D.A. ,** The stability of convective flow in porous media, In *Convective Heat and Mass Transfer in porous media*. Applied sciences, Vol. 196, Kluwer Academic, Dordrecht, 1991.

**Ochoa-Tapia j.A. Stroeve P. and Whitaker S.,** Diffusion transport in two phase media : Spatially periodic models and Maxwell's theory for isotropic and anisotropic systems, *Chem. Engng. Sci.*, Vol. 49, pp 709-726, 1994.

**Patankar, S. V. ,** Numerical heat transfer and fluid flow, Londres, Mac Graw Hill, 1980.

**Patankar, S. V. ,** a calculation procedure for two-dimensional elleptic situations, *numerical heat transfer*, Vol.4, pp. 409 – 425, 1981.

**Patterson J., Imberger J.,** Unsteady natural convection in a rectangular cavity, J. Fluid Mech, Vol. 100, pp 65-86, 1980.

**Poulikakos D. and Renken K.,** Forced convection in a channel filled with porous medium Including the effects of flow Inertia, variable porosity and Brinkman friction, J. Heat Transfer, Vol. 109, pp 880-888, 1987.

**Prasad V. Kladias N., Bandyopadhya A. and Tian Q.,** Evaluation of correlations for stagnant thermal conductivity of liquid saturated porous beds of spheres, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 32, pp1793-1796, 1989.

**Quintard M. and Whitaker S.,** Transport in ordered and disordered porous media: Volume averaged equations, Closure problems and comparison with experiments, Chem. Engng. Sci., Vol. 48, pp 2537-2564, 1993.

**Raithby G.D. and Schneider G.E.,** Numerical solution of problems in incompressible fluid flow, treatment of the velocity-pressure coupling, numerical heat transfer, Vol. 2, PP 417-440, 1979.

**Retiel N.,** Etude numérique de la convection thermosolutale en cavités annulaire, solutions stationnaires et instationnaires, Thèse de Doctorat, Université de Poitiers, 1995.

**Rohsenow W. and Hernett J.P.,** Handbook of transfer, Mc Graw Hill, Newyork, 1973.

Rumpf H. Gupte A. R., Einfüsse und Korngrößenverteilung in widerstandsdestz der Porenstömung, Chem.-Intg.. Tech., Vol. 43, pp 367-375, 1971.

**Whitaker S.,** Diffusion and dispersion in porous media, AIChE J., Vol. 13, pp 420-427, 1967.

**Sanchez-Palencia E.,** Non homogeneous media and vibration theory, Lecture notes in physics, N° 127, 1980.

**Scheidegger A. E.,** The physics of flow through porous media, Third Edition, University of Toronto Press, 1974.

**Seo Young Kim, Byung Ha Kang. and Jae Min Hyum ,** Heat transfer from pulsating flow in a channel filled with porous media, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 37, N° 14 , pp. 2025-2033, 1994.

**Stewart Jr W.E. and Dona C.L.G,** free convection at low Rayleigh Numbers in a heat generating porous medium in a short cylinder, ASME heat transfer in porous media and particulate flows, HTD- Vol.46, PP 217-225, 1985.

**Tveitereitd M.,** Thermal convection in a horizontal porous layer with internal heat source, Int. J heat mass transfer, Vol.20, PP 1045-1050, 1977.

**Vafai K. and Kim C. L.**, Analysis of surface enhancement by a porous substrate, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 112, pp. 700-706, 1981.

**Vafai K. and Tien C. L.**, Boundary and inertia effects on flow and heat transfer in porous media, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 24, pp. 195-203, 1981.

**Vafai K.**, Convective flow and heat transfer in variable porosity media, *J. Fluid Mechanics*, Vol. 147, pp. 233-259, 1984.

**Van Doormals J.P., and Raithby G.D.**, Enhancement of the simple method of predicting incompressible fluid flows, *Numerical heat transfer*, Vol. 7, pp. 147-163, 1984.

**Van Dyne D.G and Stewart Jr.**, Natural convection in a semi-cylindrical enclosure filled with a heat generating porous media, *International communication in heat and mass transfer*, Vol. 21, pp. 271-281, 1994.

**Vortmeyer D. and Schuster J.**, Evaluation of steady flow profiles in rectangular and circular packed beds by variation method, *Chem. Engng. Sci.*, Vol. 38, pp. 1691-1699, 1983.

**Wang Y. L. and Longwell P. A.**, Laminar flow in the inlet section of parallel plates, *AIChE Journal*, Vol. 10, pp. 323-329, 1964.

**Weber J. E.**, The boundary layer regime for convection in vertical porous layer, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol. 18, pp. 569-573, 1975.

**Whitaker S.**, Advances in theory of fluid motion in porous media, *Industrial and Engineering Chemistry*, No. 61, Vol. 12, pp. 15-26, 1969.

**Zehner P. and Schlüder E. U.**, Wärmeleitfähigkeit von Schüttungen bei niedrigen Temperaturen, *Chemie-Ing.-Techn.*, Vol. 42, pp. 933-941, 1970.

**Zeldin B. and Schmidt F. W.**, Developing flow with combined forced-free convection in an isothermal vertical tube, *ASME Journal of Heat Transfer*, Vol. 94, pp. 211-221, 1972.