



République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté Génie Mécanique et Génie des Procédés

Département Thermo-Energétique

1<sup>ère</sup> année Master Energétique

*Document de cours*

# **Transfert de Chaleur et de Masse Approfondi**

*Auteur : Dr FARSI Hichem*

**Maître de Conférences**

# Introduction

Le présent document de cours traite d'aspects approfondis liés à la physique du *Transfert de Chaleur et de Masse*. Il est destiné aux étudiant(e)s de la première année du Master en génie mécanique, option : Energétique. Son objectif est d'amener les étudiant(e)s à comprendre et à réfléchir sur les phénomènes physiques ayant lien avec le *Transfert de Chaleur et de Masse*. Ceci leur permettra en particulier de modéliser les problèmes d'ingénierie et de recherche liés à cette discipline, en vue de leur résolution.

Ce cours n'a pas l'objectif d'être exhaustif dans un domaine aussi vaste que le *Transfert de Chaleur et de Masse*. Nous avons sélectionné les thématiques qui nous semblent les plus intéressantes à enseigner aux étudiant(e)s et qui complètent les enseignements de la matière *Transfert de Chaleur* dispensés en troisième année de Licence en génie mécanique, option : Energétique ; ceci étant complété par l'enseignement d'un nouveau domaine (*Transfert de Masse*).

Les thématiques traitées dans le présent cours sont en accord avec le programme officiel du Ministère de l'Enseignement et de la Recherche Scientifique (MESRS). Le volume horaire affecté à cette matière, et qui s'étale sur un seul semestre (quinze semaines d'enseignement), se compose d'un volume horaire en présentiel de 67h30 (trois heures de cours par semaine et 1h30 de Travaux-Dirigés), ainsi que d'un volume global de 82h30 de travail complémentaire en consultation.

Le volet *transfert de Chaleur* est constitué de trois parties : *Conduction*, *Convection*, *Rayonnement*. En *Conduction de chaleur*, nous élargissons le périmètre d'étude de la conduction monodimensionnelle à celle de la conduction multidimensionnelle (2D) en régime permanent. Nous nous focalisons principalement sur les méthodes de résolutions analytiques, telles que la technique de séparation de variables et l'utilisation des facteurs de forme de conduction. Par la suite, la conduction en régime transitoire est traitée via l'approche *lumped system analysis* (corps thermiquement minces).

En *Convection de chaleur*, nous abordons d'abord la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale, en donnant la part belle à l'étude de similitude. Ensuite, le transfert de chaleur avec changement de phase est traité. Pour le transfert de chaleur par *Ebullition*, on a choisi de traiter l'ébullition en vase (Pool boiling), à travers à la fois la compréhension des mécanismes physiques et des régimes d'ébullition qui caractérisent ce mode de transfert, ainsi que les corrélations qui permettent de calculer les flux de chaleur mis en jeu. Pour le transfert de

chaleur par *Condensation*, le cours se focalise sur la condensation en film se produisant le long d'une plaque plane verticale. Les phénomènes dynamiques et thermiques sont mis en équation, particulièrement dans le cas du régime d'écoulement laminaire lisse.

En *Rayonnement*, nous avons introduit la notion de milieu semi-transparent, complétée par la présentation et l'établissement des équations régissant le rayonnement au sein de ce type de milieux, en l'occurrence : l'Equation de Transfert Radiatif (ETR) et la loi de Beer.

Concernant le volet *Transfert de Masse*, ce dernier se structure autour de deux chapitres : la *Diffusion massique* et la *Convection massique*. La loi de Fick est mise en évidence pour ces modes de transport massique. Ce volet est conclu par la présentation de l'analogie existant entre le *Transfert de Chaleur* et le *Transfert de Masse*.

Les chapitres du présent cours comportent chacun 4 exercices permettant de mettre en application les notions et les concepts présentés. 2 de ces exercices comportent des solutions détaillées, et dans les 2 autres exercices, nous présentons juste les résultats finaux ; ceci afin d'accompagner progressivement les étudiant(e)s dans leur approche de solutionnement des problèmes traitant de ce domaine.

Finalement, il y a lieu de préciser que le présent document de cours a pour vocation d'être amélioré en continu, en réponse aux questions et remarques formulées par les étudiant(e)s recevant cet enseignement, ou par toute personne l'ayant utilisé.

*L'auteur*

# Sommaire

<b>Nomenclature.....</b>	<b>6</b>
<b>Partie I : Conduction.....</b>	<b>9</b>
<b>Chapitre 1 : Conduction bidimensionnelle en régime permanent.....</b>	<b>10</b>
1. Vocabulaire.....	10
2. L'aspect bidimensionnel (2D).....	10
3. Température et Flux de chaleur.....	12
4. Méthodes de résolution.....	13
4.1 Méthode graphique.....	13
4.2 Méthodes numériques.....	13
5. Méthodes analytiques.....	13
5.1 Méthode de séparation des variables - Exemple.....	14
5.2 Facteur de forme de conduction.....	19
Exercices.....	22
<b>Chapitre 2 : Conduction en régime transitoire.....</b>	<b>27</b>
1. Introduction.....	27
2. Lumped Capacitance Method (LCM).....	27
3. Domaine de validité de la méthode LCM.....	31
Exercices.....	35
<b>Partie II : Convection .....</b>	<b>40</b>
<b>Chapitre 3 : Convection naturelle.....</b>	<b>41</b>
1. Mécanismes physiques.....	41
2. Equations de la couche limite en régime laminaire.....	43
3. Adimensionnalisation des équations de la couche limite.....	46
4. Convection naturelle laminaire - Etude de similitude.....	48
5. Transition vers le régime turbulent.....	50
Exercices.....	52
<b>Chapitre 4 : Ebullition.....</b>	<b>56</b>
1. Mécanismes physiques.....	56
2. Modes d'ébullition.....	58
3. Ebullition en vase saturée.....	59
4. Régimes d'ébullition.....	62

Exercices.....	64
<b>Chapitre 5 : Condensation.....</b>	<b>74</b>
1. Types de condensation.....	74
2. Condensation en film laminaire le long d'une plaque plane verticale.....	77
3. Régimes d'écoulement dans le film liquide.....	84
Exercices.....	88
<b>Partie III : Rayonnement.....</b>	<b>96</b>
<b>Chapitre 6 : Rayonnement dans les milieux semi-transparentes.....</b>	<b>97</b>
1. Introduction.....	97
2. Gaz absorbants.....	97
3. Luminance, Flux et Densité d'énergie.....	98
4. Absorption, Diffusion et Emission thermique.....	99
4.1 Absorption .....	99
4.2 Extinction par diffusion .....	99
4.3 Emission thermique .....	100
5. Etablissement de l'Equation de Transfert Radiatif (ETR) .....	101
6. Loi de Beer .....	102
<b>Partie IV : Transfert de masse.....</b>	<b>104</b>
<b>Chapitre 7 : Transfert de masse par diffusion.....</b>	<b>105</b>
1. Mécanismes physiques.....	105
2. Composition d'un mélange.....	107
3. Loi de Fick.....	109
4. Diffusivité massique.....	111
Exercices.....	113
<b>Chapitre 8 : Transfert de masse par convection.....</b>	<b>118</b>
1. Couche limite massique.....	118
2. Flux massique convectif.....	119
3. Nombre adimensionnel de Sherwood.....	121
4. Epaisseurs de couche limite.....	122
Exercices.....	125
<b>Références bibliographiques.....</b>	<b>130</b>

# Nomenclature

a	: Diffusivité thermique, en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
$A_s$	: Surface d'échange, en $\text{m}^2$
b	: Largeur (de la plaque), en m
Bi	: Nombre de Biot, sans dimension
c	: Capacité calorifique massique, en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
C	: Concentration molaire, en $\text{kmol} \cdot \text{m}^{-3}$
D	: Diamètre, en m ; ou Coefficient de diffusion, en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
E	: Différence de potentiel, en V
Fo	: Nombre de Fourier, sans dimension
g	: Accélération de la pesanteur, en $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$
Gr	: Nombre de Grashof, sans dimension
k	: Conductivité thermique, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$
h	: Coefficient d'échange de chaleur, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ ; ou Enthalpie, en $\text{J} \cdot \text{kg}^{-1}$
I	: Intensité du courant électrique, en A
J	: Flux massique ou molaire (diffusion), en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$ ou en $\text{kmol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
l	: Libre parcours moyen, en m
L	: Longueur (de la plaque), en m ; ou Luminance, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$
Le	: Nombre de Lewis, sans dimension
M	: Masse molaire, en $\text{kg} \cdot \text{kmol}^{-1}$
$\dot{m}$	: Débit massique, en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$
N	: Flux massique ou molaire (convection), en $\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}$ ou en $\text{kmol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$
Nu	: Nombre de Nusselt, sans dimension
P	: Pression, en Pa ; ou Puissance électrique, en W
Pr	: Nombre de Prandtl, sans dimension
Q	: Quantité de chaleur, en J
q	: Flux de chaleur, en W
q'	: Flux de chaleur linéique, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-1}$
q''	: Flux de chaleur surfacique, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-2}$
$\dot{q}$	: Source (ou puits) volumique de chaleur, en $\text{W} \cdot \text{m}^{-3}$
R	: Rayon, en m
Ra	: Nombre de Rayleigh, sans dimension
Re	: Nombre de Reynolds, sans dimension

$R_{th}$	: Résistance thermique, en $K.W^{-1}$
$S$	: Facteur de forme de conduction, en $m$ ; ou Surface, en $m^2$
$Sc$	: Nombre de Schmidt, sans dimension
$Sh$	: Nombre de Sherwood, sans dimension
$t$	: temps, en $s$
$T$	: Température, en $K$
$u$	: Vitesse selon l'axe $x$ , en $m.s^{-1}$
$v$	: Vitesse selon l'axe $y$ , en $m.s^{-1}$
$V$	: Volume, en $m^3$ ; ou Vitesse, en $m.s^{-1}$

## Lettres grecques

$\rho$	: Masse volumique, en $kg.m^{-3}$
$\tau$	: Constante de temps, en $s$ ; ou Contrainte de cisaillement, en $Pa$
$\delta$	: Épaisseur de couche limite (convection naturelle) ou de film liquide (condensation)
$\mu$	: Viscosité dynamique, en $N.s.m^{-2}$
$\nu$	: Viscosité cinématique, en $m^2.s^{-1}$ ; ou Fréquence, en $Hz$
$\beta$	: Coefficient de dilatation (ou d'expansion) volumique thermique, en $K^{-1}$
$\eta$	: Variable de similitude, sans unité
$\sigma$	: Tension superficielle, en $N.m^{-1}$ ; ou Constante de Stefan-Boltzmann, en $W.m^{-2}.K^{-4}$
$\varepsilon$	: Émissivité, sans unité
$\Gamma$	: Débit massique par unité de largeur de la plaque (condensation), en $kg.s^{-1}.m^{-1}$
$\Phi$	: Hygrométrie relative, sans unité
$\Omega$	: Angle solide, en $sr$

## Indices

boiling	: Ébullition ou vaporisation
c	: Caractéristique ; ou Convection ; ou Concentration
cr	: Critique
e	: Excess (surchauffe à la paroi)
fg	: Changement d'état fluid (liquide) - gas (vapeur)
film	: Couche limite (convection naturelle) ; ou film liquide (condensation)
g	: Généré

in	: Inlet (entrant)
l	: Liquide
m	: Massique
out	: Outlet (sortant)
r	: Rayonnement
s	: Surface
sat	: Saturation
st	: Stockage
t	: Thermique
v	: Vaporisation ; ou Vapeur
v	: Fréquence

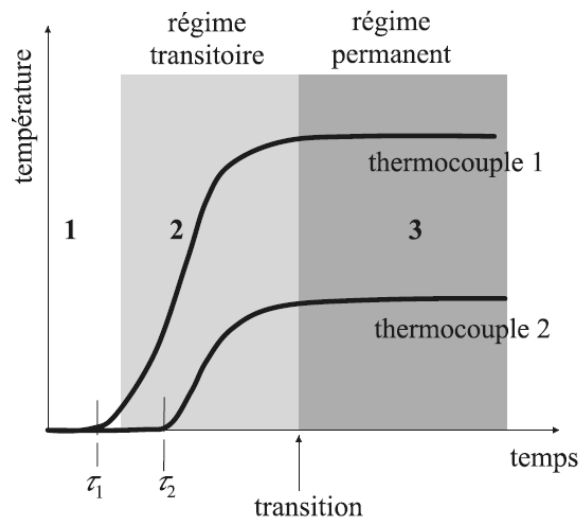
# **Partie I : Conduction**

# Chapitre 1 : Conduction bidimensionnelle en régime permanent

## 1. Vocabulaire

Synonymes pour *permanent* : stationnaire, établi, stable.

L'ensemble des grandeurs physiques considérées (température, pression, ...) est indépendant du temps (t), et ce en tout point de l'espace (**Fig. 1**).



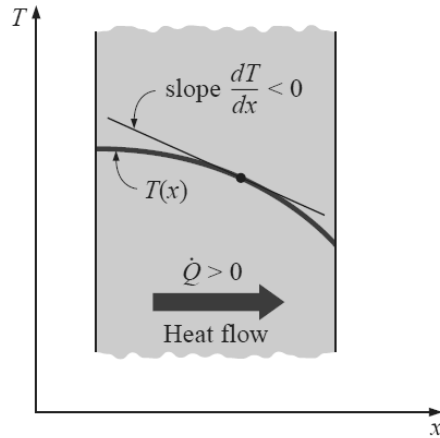
**Fig. 1.** Exemple de régime permanent : Température mesurée par deux thermocouples [1]

Isothermes (ou courbes de niveau de T) : Lignes tel que  $T = \text{constante}$ .

Lignes de flux : Directions du vecteur flux de chaleur ( $\vec{q}$ ).

## 2. L'aspect bidimensionnel (2D)

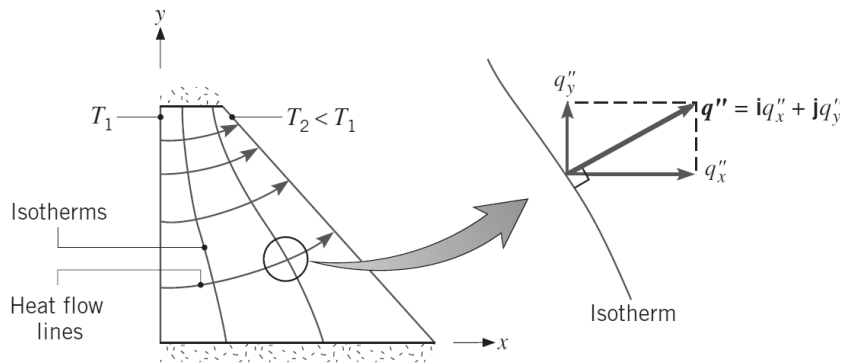
Pour un problème monodimensionnel 1D, le gradient de température ( $\vec{\nabla} T$ ) est significatif (ou  $\neq \vec{0}$ ) suivant uniquement un seul axe du repère de l'espace  $R(O,x,y,z)$ . Un exemple de conduction 1D est présenté dans **Fig. 2**.



**Fig. 2.** Conduction 1D à travers un mur [2]

Dans beaucoup de cas, l'approche 1D n'est pas suffisante pour modéliser correctement le phénomène de conduction. Dans ce cas, il est nécessaire de prendre en considération les effets multidimensionnels (2D ou 3D) de la conduction.

*Exemple de cas 2D (Fig. 3) :* Il s'agit d'un solide prismatique fin (épaisseur  $\approx 0$ , i.e. épaisseur très faible devant les autres dimensions : longueur ( $x$ ) et largeur ( $y$ )). Dans ce cas, le gradient de température suivant la direction  $z$  est négligeable ( $\frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$ ). Les surfaces supérieure et inférieure du solide sont adiabatiques (isolées thermiquement). Les deux autres surfaces (droite et gauche) sont maintenues à des températures uniformes (c'est à dire constantes dans l'espace) :  $T_1$ ,  $T_2$  (avec  $T_1 > T_2$ ). Dans ce cas, le flux de chaleur par conduction se fait de la surface chaude (à  $T_1$ ) vers la surface froide (à  $T_2$ ).



**Fig. 3.** Conduction 2D au sein d'un solide prismatique [3]

*Rappel* : La loi de Fourier pour la conduction énonce que le flux de chaleur local dans le milieu solide est un vecteur qui est en tout point orthogonal aux isothermes.

### 3. Température et Flux de chaleur

Dans tout problème de conduction, on cherche à déterminer :

- la température (T) ;
- et le flux de chaleur ( $\vec{q}$ ).

Pour la *température*, on parle de : champ de T, distribution ou répartition (spatiale) de T : T(x,y).

Pour le *flux de chaleur*, on parle de :

- Flux de chaleur : q, en W ;
- Flux de chaleur linéique (ou linéaire) ou flux de chaleur par unité de longueur, ou densité linéique de flux de chaleur :  $q' = \frac{q}{L}$ , en W.m<sup>-1</sup>.
- Flux de chaleur surfacique ou flux de chaleur par unité de surface, ou densité surfacique de flux de chaleur :  $q'' = \frac{q}{A_s}$ , en W.m<sup>-2</sup>.
- Source ou puits (volumique) de chaleur :  $\dot{q}$ , en W.m<sup>-3</sup>.

*Détermination de la température (T) :*

Elle se fait par la résolution de l'équation de la chaleur (ou équation de diffusion de chaleur), sous sa forme appropriée. Si on considère par exemple les hypothèses suivantes : régime permanent, conduction 2D, absence de source de chaleur au sein du solide, propriétés thermophysiques ( $\rho$ , k, c) constantes. Dans ce cas, l'équation de la chaleur est représentée par l'équation de Laplace :

$$\Delta T = 0 \quad (\text{Eq. 1})$$

$\Delta$  : L'opérateur Laplacien ;  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  dans le cas 2D et en coordonnées cartésiennes.

*Détermination du flux de chaleur ( $\vec{q}$ ) :*

La densité (surfaccique) de flux de chaleur ( $q''$ ) est obtenue à partir de la loi de Fourier :

$$\begin{cases} q''_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \\ q''_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \end{cases} \quad (\text{Eq. 2})$$

## 4. Méthodes de résolution

La température ( $T$ ) et le flux de chaleur ( $\vec{q}$ ) peuvent être déterminés selon différentes approches qui donnent :

- des solutions exactes (méthodes analytiques) ;
- des solutions approchées (méthode graphique, méthodes numériques).

Ces approches permettent de calculer  $T$  et  $\vec{q}$  à l'intérieur du système et à ses frontières.

### 4.1 Méthode graphique

Elle est utilisée pour estimer rapidement la distribution de  $T$ , en des points discrets du solide. Cette méthode convient uniquement pour les configurations 2D impliquant des conditions aux limites isothermes ou adiabatiques.

L'approche sur laquelle est basée cette méthode, repose sur le fait que les isothermes sont orthogonales aux lignes de flux.

### 4.2 Méthodes numériques

Elles sont utilisées pour une grande variété de complexité des problèmes traités et des précisions recherchées, ainsi qu'une grande diversité de géométries et de conditions aux limites.

Le champ de  $T$  est estimé en des points discrets de l'espace 2D.

*Exemples de méthodes numériques* : Différences finies, Eléments finis.

## 5. Méthodes analytiques

Pour la suite du chapitre, nous traiterons uniquement les méthodes analytiques.

Plusieurs techniques analytiques existent pour résoudre l'équation de la chaleur. Elles impliquent des séries et des fonctions mathématiques complexes. Les solutions peuvent être obtenues uniquement dans un nombre restreint de cas : géométries simples, conditions aux limites (ou aux frontières) simples. Cette résolution analytique est compliquée et souvent on ne sait pas faire. Elle est plus complexe dans le cas 2D (par rapport au cas 1D), car elle implique une équation aux dérivées partielles ( $\partial$ ), en  $x$  et  $y$ , au lieu d'une équation différentielle ordinaire ( $d$ ), uniquement en  $x$ .

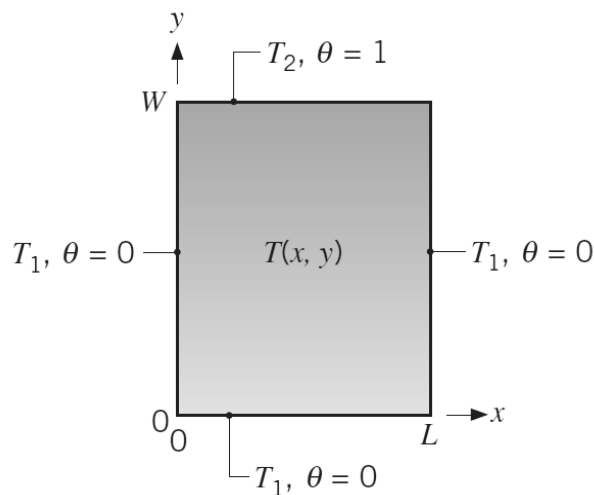
L'approche analytique présente l'intérêt de fournir une solution mathématique exacte. Elle donne la température en tout point  $(x,y)$  du domaine étudié. Dans ce cas,  $T$  est une fonction continue des variables  $x$  et  $y$ .

Nous allons traiter par la suite les techniques et approches analytiques suivantes :

- La méthode de séparation des variables ;
- La méthode du facteur de forme de conduction : Il s'agit d'une compilation de solutions analytiques existantes établies pour des géométries couramment rencontrées en ingénierie. L'utilisation de cette méthode dépend de la disponibilité de ces solutions analytiques.

## 5.1 Méthode de séparation des variables - Exemple

Soit une plaque plane de longueur (L) et de largeur (W) (**Fig. 4**). Cette plaque est supposée fine (épaisseur faible devant les autres dimensions L et W).



**Fig. 4.** Schéma de l'étude [3]

*Hypothèses :*

- Régime permanent ;
- Absence de source de chaleur au sein du solide ( $\dot{q} = 0$ ) ;
- Les propriétés thermophysiques du solide, en particulier la conductivité thermique ( $k$ ), sont constantes.
- $T_1$  et  $T_2$  uniformes ;  $T_2 > T_1$ .
- La plaque étant supposée fine ; la conduction selon l'axe  $z$  perpendiculaire à la plaque est donc négligeable ( $\frac{\partial T}{\partial z} \approx 0$ ). Le transfert de chaleur par conduction à travers la plaque est de ce fait bidimensionnel selon les axes  $x$  et  $y$ .

*Objectif :* Déterminer la distribution de température  $T(x,y)$  au sein du solide et le flux de chaleur conductif ( $\vec{q}$ ) correspondant, par la méthode analytique de séparation des variables.

*Point de départ* : L'écriture de l'équation de la chaleur sous sa forme appropriée (il s'agit ici de l'équation de Laplace) :

$$\Delta T = \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Eq. 3})$$

On opère le changement de variable suivant :  $\theta = \frac{T-T_1}{T_2-T_1}$ .

$\theta$  : Nombre adimensionnel, compris entre 0 et 1 (du fait de l'absence de source de chaleur au sein du solide).

L'**Eq. 3** devient ainsi :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Eq. 4})$$

Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles du second ordre.

Les conditions aux limites du premier type (dites de Dirichlet, ou à température de paroi imposée) s'écrivent de la manière suivante :

- Face supérieure :  $0 \leq x \leq L$        $y = W$        $\rightarrow$        $\theta = 1$
- Face inférieure :  $0 \leq x \leq L$        $y = 0$        $\rightarrow$        $\theta = 0$
- Face droite :  $x = L$        $0 \leq y \leq W$        $\rightarrow$        $\theta = 0$
- Face gauche :  $x = 0$        $0 \leq y \leq W$        $\rightarrow$        $\theta = 0$

Appliquons à l'équation de la chaleur (**Eq. 1**), la technique de séparation des variables. Il s'agit d'une méthode bien connue et très utilisée. A cet effet, nous cherchons des solutions particulières du type :

$$\theta(x,y) = X(x).Y(y) \quad (\text{Eq. 5})$$

$\theta(x,y)$  : Produit de deux fonctions :

- La première fonction (X) dépend exclusivement de la variable x : X(x)
- La deuxième fonction (Y) dépend exclusivement de la variable y : Y(y)

L'**Eq. 4** devient :

$$-\frac{1}{X} \cdot \frac{d^2X}{dx^2} = \frac{1}{Y} \cdot \frac{d^2Y}{dy^2} = K \quad (\text{Eq. 6})$$

$K$  : Constante de séparation. Nous pouvons démontrer aisément que cette constante ne peut être que strictement positive. On pose donc :  $K = \lambda^2$ .

L'Eq. 6 s'écrit ainsi sous la forme de deux équations différentielles ordinaires :

$$\begin{cases} \frac{d^2X}{dx^2} + \lambda^2X = 0 \\ \frac{d^2Y}{dy^2} - \lambda^2Y = 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 7})$$

La solution générale de l'Eq. 7 est :

$$\theta(x,y) = [C_1\cos(\lambda x) + C_2\sin(\lambda x)].[C_3e^{-\lambda y} + C_4e^{\lambda y}] \quad (\text{Eq. 8})$$

Les constantes  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  sont déterminées à partir de l'application des conditions aux limites du système.

▪ **Condition aux limites - Face gauche**

Cette condition aux limites s'écrit :  $\theta(x=0, y) = 0 ; y \in [0, W]$ .

En remplaçant dans Eq. 8, nous obtenons :  $C_1.[C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}] = 0 ; \forall y \in [0, W]$ , ce qui donne les conditions suivantes :  $C_1 = 0$  ou  $C_3 = C_4 = 0$ .

La condition ( $C_3 = C_4 = 0$ ) ne peut pas se produire car elle implique une valeur nulle de  $\theta(x,y) ; \forall x \in [0, L]$  et  $\forall y \in [0, W]$ , ce qui est faux.

La condition restante est donc :  $C_1 = 0$ . La solution générale du problème devient ainsi :

$$\theta(x,y) = C_2 \sin(\lambda x).[C_3 e^{-\lambda y} + C_4 e^{\lambda y}] \quad (\text{Eq. 9})$$

▪ **Condition aux limites - Face inférieure**

Cette condition aux limites s'écrit :  $\theta(x, y=0) = 0 ; x \in [0, L]$ .

En remplaçant dans (Eq. 9), nous obtenons :  $C_2 \sin(\lambda x).[C_3 + C_4] = 0 ; \forall x \in [0, L]$ , ce qui donne les conditions suivantes :  $C_2 = 0$  ou  $\lambda = 0$  ou  $C_3 + C_4 = 0$ .

La condition  $C_2 = 0$  ou  $\lambda = 0$  est impossible à réaliser car elle implique que  $\theta(x, y) = 0 ; \forall x \in [0, L]$  et  $\forall y \in [0, W]$ , ce qui est faux.

La condition restante est donc :  $C_3 = -C_4$ . La solution générale (**Eq. 9**) du problème devient :

$$\theta(x,y) = C_2 C_4 \sin(\lambda x) \cdot [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}] \quad (\text{Eq. 10})$$

▪ **Condition aux limites - Face droite**

La condition aux limites sur cette face s'écrit :  $\theta(x=L, y) = 0 ; y \in [0, W]$ .

En remplaçant dans (**Eq. 10**), nous obtenons :

$C_2 C_4 \sin(\lambda L) \cdot [e^{\lambda y} - e^{-\lambda y}] = 0 ; \forall y \in [0, W]$ , ce qui donne les conditions suivantes :  $C_2 = 0$  ou  $C_4 = 0$  ou  $\lambda = 0$  ou  $\lambda L = n\pi$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Les conditions ( $C_2 = 0, C_4 = 0, \lambda = 0$ ) sont impossibles à réaliser car elles impliquent que  $\theta(x,y) = 0 ; \forall x \in [0, L]$  et  $\forall y \in [0, W]$ , ce qui est faux.

La condition restante est donc :  $\lambda = \frac{n\pi}{L}$ . La solution générale (**Eq. 10**) du problème devient:

$$\theta(x,y) = C_2 C_4 \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \cdot \left[e^{-\frac{n\pi}{L}y} - e^{\frac{n\pi}{L}y}\right] \quad (\text{Eq. 11})$$

En introduisant la fonction sinus hyperbolique, on obtient, en regroupant les divers coefficients en un coefficient unique ( $C_n$ ) :

$$\theta(x,y) = C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \quad (\text{Eq. 12})$$

Le problème traité ici étant linéaire, nous pouvons obtenir une solution de superposition plus générale qui s'écrit de la manière suivante :

$$\theta(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) \quad (\text{Eq. 13})$$

▪ **Condition aux limites - Face supérieure**

La condition limite sur cette face s'écrit :  $\theta(x, y=W) = 1$ .

En remplaçant dans (**Eq. 13**), nous obtenons :  $\sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right) = 1$ .

Cette expression étant assez difficile à résoudre, nous avons recours à une technique standard faisant appel aux fonctions orthogonales.

*Rappel* : Les fonctions  $g_1(x), g_2(x), \dots, g_n(x)$  sont dites orthogonales pour  $a \leq x \leq b$ , si :

$$\int_a^b g_m(x)g_n(x) dx = 0 \text{ pour } m \neq n.$$

Par exemple, les fonctions trigonométriques  $\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  et  $\cos\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  pour  $a \leq x \leq L$ , sont considérées comme des fonctions orthogonales.

Il est à noter que toute fonction  $f(x)$  peut s'exprimer à partir d'un nombre infini de fonctions orthogonales :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) \quad (\text{Eq. 14})$$

$$\int_a^b f(x)g_m(x) dx = \int_a^b g_m(x) \sum_{n=1}^{\infty} A_n g_n(x) dx \quad (\text{Eq. 15})$$

$$\int_a^b f(x)g_m(x) dx = A_m \int_a^b g_m^2(x) dx \quad (\text{Eq. 16})$$

$$A_n = \frac{\int_a^b f(x)g_n(x)dx}{\int_a^b g_n^2(x)dx} \quad (\text{Eq. 17})$$

Nous faisons pour la suite les choix suivants :  $f(x) = 1$  ;  $g_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$  ;  $a = 0$  et  $b = L$ .

Ceci nous donne :

$$A_n = \frac{\int_a^b \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx}{\int_a^b \sin^2\left(\frac{n\pi}{L}x\right) dx} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \quad (\text{Eq. 18})$$

Par identification avec **(Eq. 13)**, nous obtenons l'expression du coefficient ( $C_n$ ) :

$$C_n = \frac{2 [(-1)^{n+1}+1]}{n\pi \sinh\left(\frac{n\pi}{L}w\right)} \quad (\text{Eq. 19})$$

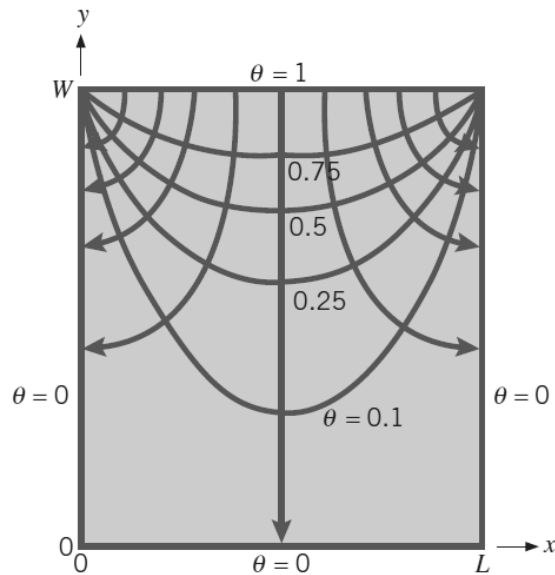
Ceci nous permet d'aboutir à la solution finale du problème qui s'écrit :

$$\theta(x, y) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \frac{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}y\right)}{\sinh\left(\frac{n\pi}{L}w\right)} \quad (\text{Eq. 20})$$

L'**Eq. 20** est une série convergente. Elle nous fournit la distribution bidimensionnelle (suivant  $x$  et  $y$ ) de la température en tout point du système au régime permanent.

La loi de Fourier pour la conduction nous permet par la suite de calculer le flux de chaleur conductif.

Les résultats des calculs réalisés ci-dessus sont représentés dans **Fig. 5**.



**Fig. 5.** Résultats de l'étude : Isothermes et lignes de flux [3]

Dans cette figure sont représentées les courbes de niveau pour la température (isothermes) ainsi que les lignes de flux.

Le transfert de chaleur par conduction s'effectue des zones où la température est la plus élevée (face supérieure à  $T_1$ ) vers les zones où la température est moins élevée (les autres faces à  $T_2$ ).

Les lignes de flux indiquent clairement que le transfert de chaleur conductif est bidimensionnel. Il est à noter que  $\left\{x = \frac{L}{2}\right\}$  est un plan de symétrie ; il s'agit donc d'une surface adiabatique et aussi d'une ligne de flux.

Pour les zones qui sont proches des deux angles présents sur la face supérieure, il est nécessaire d'y affiner les calculs, car à ce niveau, il n'y a pas de discontinuité pour passer de la température  $T_2$  (face supérieure) à la température  $T_1$  (faces droite et gauche). Ces zones comportent donc de fortes valeurs de gradient de température.

## 5.2 Facteur de forme de conduction

En général, trouver des solutions analytiques pour un problème bidimensionnel (ou tridimensionnel) en conduction, consomme beaucoup de temps, et dans beaucoup de cas, on ne sait pas faire. Une approche différente est souvent adoptée ; elle est simple, pratique et rapide. Les problèmes bidimensionnels dans beaucoup de cas, peuvent être rapidement résolus en utilisant des solutions analytiques existantes de l'équation de la chaleur (sous réserve de leur disponibilité). Il s'agit d'une compilation de solutions analytiques existantes pour des géométries couramment rencontrées en ingénierie.

Les solutions analytiques existantes ont recours au concept de *facteur de forme de conduction (S)*, qui est défini par la formule suivante :

$$q = S k \Delta T_{1-2} \quad (\text{Eq. 21})$$

$q$  : Flux de chaleur conductif, en W.

$S$  : Facteur de forme de conduction, en m.

$k$  : Conductivité thermique du milieu séparant les surfaces 1 et 2, en  $\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

$\Delta T_{1-2}$  : Ecart de température aux frontières (entre 1 et 2)  $= T_1 - T_2$ . On suppose que  $T_1$  et  $T_2$  sont uniformes et que  $T_1 > T_2$ .

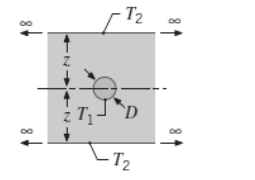
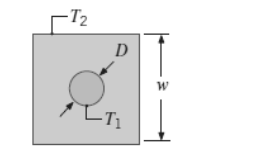
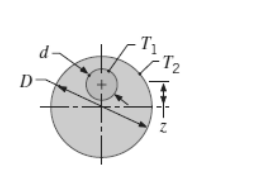
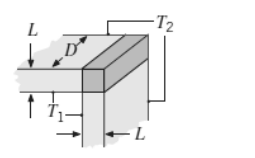
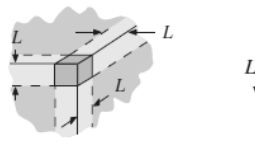
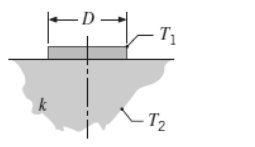
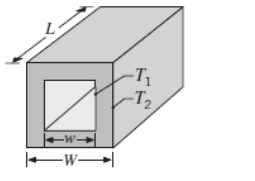
Les valeurs de  $S$  sont données, à toutes fins utiles, dans **Fig. 6**.

$S$  peut être donné aussi par la relation suivante :

$$R_{\text{th},2D} = \frac{1}{k S} \quad (\text{Eq. 22})$$

$R_{\text{th},2D}$  : Résistance thermique par conduction bidimensionnelle, en  $\text{K.W}^{-1}$ .

System	Schematic	Restrictions	Shape Factor
<b>Case 1</b> Isothermal sphere buried in a semi-infinite medium		$z > D/2$	$\frac{2\pi D}{1 - D/4z}$
<b>Case 2</b> Horizontal isothermal cylinder of length $L$ buried in a semi-infinite medium		$L \gg D$ $L \gg D$ $z > 3D/2$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}(2z/D)}$ $\frac{2\pi L}{\ln(4z/D)}$
<b>Case 3</b> Vertical cylinder in a semi-infinite medium		$L \gg D$	$\frac{2\pi L}{\ln(4L/D)}$
<b>Case 4</b> Conduction between two cylinders of length $L$ in infinite medium		$L \gg D_1, D_2$ $L \gg w$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)}$

<p><b>Case 5</b> Horizontal circular cylinder of length <math>L</math> midway between parallel planes of equal length and infinite width</p>		$\begin{aligned} z &\gg D/2 \\ L &\gg z \end{aligned}$	$\frac{2\pi L}{\ln(8z/\pi D)}$
<p><b>Case 6</b> Circular cylinder of length <math>L</math> centered in a square solid of equal length</p>		$\begin{aligned} w &> D \\ L &\gg w \end{aligned}$	$\frac{2\pi L}{\ln(1.08 w/D)}$
<p><b>Case 7</b> Eccentric circular cylinder of length <math>L</math> in a cylinder of equal length</p>		$\begin{aligned} D &> d \\ L &\gg D \end{aligned}$	$\frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2 + d^2 - 4z^2}{2Dd}\right)}$
<p><b>Case 8</b> Conduction through the edge of adjoining walls</p>		$D > 5L$	$0.54D$
<p><b>Case 9</b> Conduction through corner of three walls with a temperature difference <math>\Delta T_{1-2}</math> across the walls</p>		$L \ll \text{length and width of wall}$	$0.15L$
<p><b>Case 10</b> Disk of diameter <math>D</math> and temperature <math>T_1</math> on a semi-infinite medium of thermal conductivity <math>k</math> and temperature <math>T_2</math></p>		$\text{None}$	$2D$
<p><b>Case 11</b> Square channel of length <math>L</math></p>		$\begin{aligned} \frac{W}{w} &< 1.4 \\ \frac{W}{w} &> 1.4 \\ L &\gg W \end{aligned}$	$\begin{aligned} &\frac{2\pi L}{0.785 \ln(W/w)} \\ &\frac{2\pi L}{0.930 \ln(W/w) - 0.050} \end{aligned}$

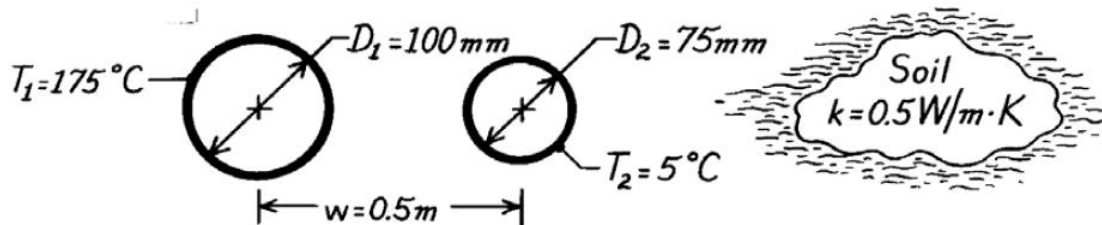
**Fig. 6.** Exemples d'expressions donnant le facteur de forme (S) [3]

On se propose de traiter dans ce qui suit, quatre exercices portant sur les facteurs de forme de conduction (S). L'objectif est de calculer le flux de chaleur conductif bidimensionnel en régime permanent, à partir des valeurs de S relevées dans **Fig. 6**.

## Exercice 1

Deux canalisations espacées l'une de l'autre d'une distance  $w = 0.5 \text{ m}$ , sont enterrées dans le sol (**Fig. 7**). La conductivité thermique du sol est :  $k = 0.5 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ . Les diamètres externes des canalisations sont :  $D_1 = 100 \text{ mm}$  et  $D_2 = 75 \text{ mm}$ . Les températures surfaciques de ces canalisations sont :  $T_1 = 175 \text{ }^\circ\text{C}$  et  $T_2 = 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

Estimez le flux de chaleur (conductif) par unité de longueur échangé entre les deux canalisations.



**Fig. 7.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

#### Hypothèses :

- Conduction de chaleur bidimensionnelle ;
- Régime permanent ;
- Propriétés constantes ;
- Les 2 canalisations sont enterrées profondément dans le sol ; ce dernier est donc considéré comme un milieu infini ;
- $T_1$  et  $T_2$  sont uniformes ;
- Les longueurs des deux canalisations sont supposées être très grandes devant leurs diamètres :  $L \gg D_1$  et  $D_2$  ;
- On suppose que :  $L \gg w$ .

L'expression du flux de chaleur linéique par conduction (**Eq. 21**) s'écrit comme suit :

$$q' = \frac{q}{L} = \frac{1}{L} \cdot [S k (T_1 - T_2)] = \frac{S}{L} k (T_1 - T_2) \quad (\text{Eq. 23})$$

Le facteur de forme de conduction (S) est obtenu à partir de : **Fig. 6**, Cas 4 :

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{4w^2 - D_1^2 - D_2^2}{2D_1 D_2}\right)} \quad (\text{Eq.24})$$

En remplaçant par les valeurs de  $w$ ,  $D_1$  et  $D_2$ , on obtient :  $\frac{S}{L} = 1.29$ .

Le flux de chaleur linéique est :

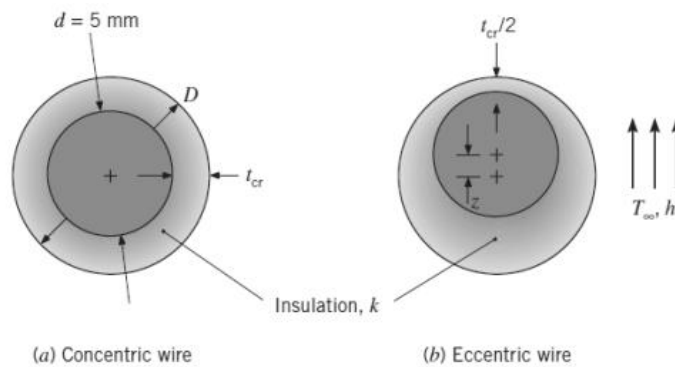
$$\mathbf{q}' = 1.29 \times 0.5 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \times (175 - 5) \text{ }^\circ\text{C} = \mathbf{110 \text{ W.m}^{-1}}$$

## Exercice 2

Un câble électrique métallique, d'une longueur unitaire, a un diamètre  $d = 5 \text{ mm}$ . Il est recouvert d'un isolant ayant une épaisseur critique ( $t_{cr}$ ) et une conductivité thermique  $k = 0.35 \text{ W.m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$ . L'ensemble (câble + isolant) baigne dans une atmosphère avec un coefficient d'échange de chaleur global (convection + rayonnement) :  $h = 15 \text{ W.m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

L'excentricité ( $z$ ) est de 50 % de l'épaisseur critique d'isolation :  $z = \frac{t_{cr}}{2}$ .

Comparez les valeurs de la résistance thermique de l'isolant pour les deux cas *centré* et *excentré* du câble métallique (**Fig. 8**).



**Fig. 8.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

#### Hypothèses :

- Conduction 2D (en coordonnées polaires) ;
- Régime permanent ;
- Propriétés constantes ;
- Le coefficient d'échange ( $h$ ) est constant ;

- Les températures intérieure ( $T_{int}$ ) et extérieure ( $T_{ext}$ ) de l'isolant sont uniformes.

On cherche à déterminer la résistance thermique ( $R_{th}$ ) de l'isolant du câble pour une variation périphérique de son épaisseur.

Le rayon d'isolation critique ( $r_{cr}$ ) est donné par :

$$r_{cr} = \frac{k}{h} = 23 \text{ mm} \quad (\text{Eq. 25})$$

L'épaisseur critique d'isolation ( $t_{cr}$ ) est donc :

$$t_{cr} = r_{cr} - \frac{d}{2} = 20.5 \text{ mm} \quad (\text{Eq. 26})$$

Dans le cas *centré*, la résistance thermique ( $R_{th1}$ ) s'écrit :

$$R_{th1} = \frac{\ln\left(\frac{r_{cr}}{\frac{d}{2}}\right)}{2\pi kL} \quad (\text{Eq. 27})$$

De ce fait :  $R_{th1} = 1.01 \text{ K.W}^{-1}$ .

Dans le cas *excentré*, la résistance thermique ( $R_{th2}$ ) s'écrit :

$$R_{th2} = \frac{1}{S k} \quad (\text{Eq. 28})$$

Le facteur de forme de conduction ( $S$ ) est donné par Fig. 6, Cas 7 :

$$S = \frac{2\pi L}{\cosh^{-1}\left(\frac{D^2+d^2-4z^2}{2Dd}\right)} \quad (\text{Eq. 29})$$

Ce qui donne :  $R_{th2} = 0.907 \text{ K.W}^{-1}$ .

L'écart relatif entre les résistances thermiques pour les deux cas (*centré, excentré*) est :

$$\Delta R_{th} = \frac{R_{th2} - R_{th1}}{R_{th1}}$$

Ce qui donne :  $\Delta R_{th} = -10\%$ . La résistance thermique dans le cas *excentré* est donc 10 % moins élevée que dans le cas *centré*.

Remarques :

- L'abaissement de la valeur de l'épaisseur locale d'isolation implique la diminution de la valeur de la résistance thermique locale. L'augmentation de la valeur de l'épaisseur locale d'isolation implique l'augmentation de la valeur de la résistance thermique locale. Ces deux effets tendent à se compenser, mais pas totalement vu que  $R_{th1} > R_{th2}$ .

C'est le cas *excentré* qui permet d'obtenir la meilleure performance thermique (ou meilleur taux de transfert de chaleur) qui est d'ailleurs l'effet recherché. La diminution de la valeur de la résistance thermique de l'isolant est recherchée pour un écoulement électrique dans un câble car le flux de chaleur transféré augmente. Ainsi, la dissipation de chaleur du câble est mieux évacuée vers l'ambiance extérieure.

- La température de la face interne de l'isolation peut être considérée comme uniforme si la conductivité thermique du câble est très grande devant celle de l'isolant (ce qui est le cas pour un câble métallique). Cependant, la température de la face externe de l'isolant ne peut être considérée comme uniforme en raison de la variation de l'épaisseur locale d'isolation.

### Exercice 3

Un élément chauffant électrique de diamètre  $D = 5\text{ mm}$  et de longueur  $L = 100\text{ mm}$ , est inséré dans un trou percé perpendiculairement à la surface d'un grand bloc de matériau (**Fig. 9**). La conductivité thermique de ce matériau est de  $5\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ .

Estimez la température  $T_1$  atteinte par l'élément chauffant lorsqu'il dissipe une puissance thermique de  $50\text{ W}$ . La surface du bloc est à une température de  $25\text{ °C}$ .

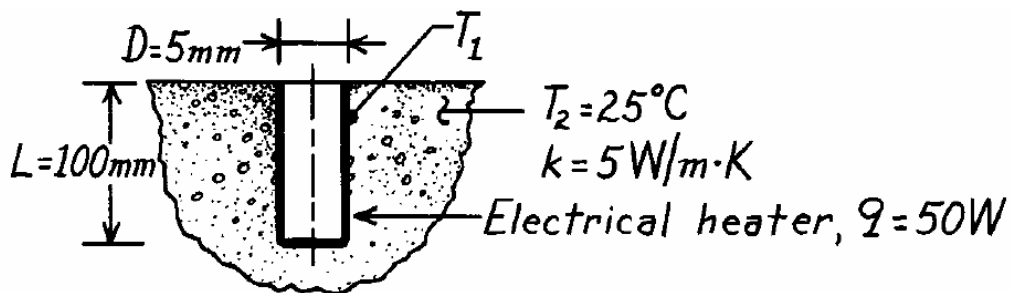
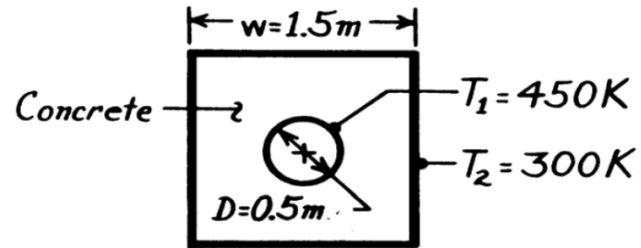


Fig. 9. Schéma de l'étude [3]

**Solution :**  $T_1 = 94.9\text{ °C}$ .

### Exercice 4

De la vapeur sous pression à 450 K s'écoule dans un long tube à paroi mince et de diamètre  $D = 0.5$  m. Le tube est entouré d'une enveloppe en béton de section carrée et de 1.5 m de côté. L'axe du tube est centré dans l'enveloppe et les surfaces extérieures de la gaine sont maintenues à 300 K (**Fig. 10**). Calculer les pertes de chaleur (par unité de longueur) du tube.



**Fig. 10.** Schéma de l'étude [3]

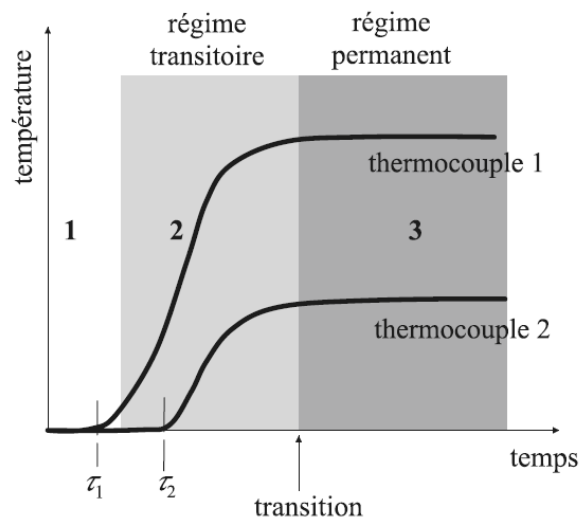
**Solution :**  $q' = 1\,122\text{ W.m}^{-1}$ .

# Chapitre 2 : Conduction en régime transitoire

## 1. Introduction

**Terminologie (Fig. 1) :** Régime transitoire, instationnaire, variable.

Dans le cas le plus général, la température ( $T$ ) dépend à la fois des coordonnées spatiales ( $x, y, z$ ) et temporelle ( $t$ ) :  $T = T(x, y, z, t)$ .



**Fig. 1.** Régimes transitoire et permanent [1] :

Evolution de la température mesurée par deux thermocouples au cours du temps

De nombreux problèmes de conduction dépendent du temps ; particulièrement lorsque les conditions aux limites du système physique changent. Supposons qu'un système donné est au régime permanent. Si sa température de surface change, alors la température à l'intérieur de ce système variera jusqu'à atteindre un nouveau régime permanent.

L'objectif de ce chapitre est de présenter les méthodes (ou techniques) pour calculer la température au sein d'un système, durant un processus transitoire, ainsi que pour calculer le flux de chaleur entre le système et son environnement extérieur (i.e. à la frontière du système).

Concernant la température en particulier, il s'agit d'exprimer son *évolution* (temporelle), i.e. : sa variation dans le temps.

## 2. Lumped Capacitance Method (LCM)

*Hypothèse :* On considère que le gradient de température au sein du système est négligeable.

$$\vec{\nabla} T \approx \vec{0} \quad (\text{Eq. 1})$$

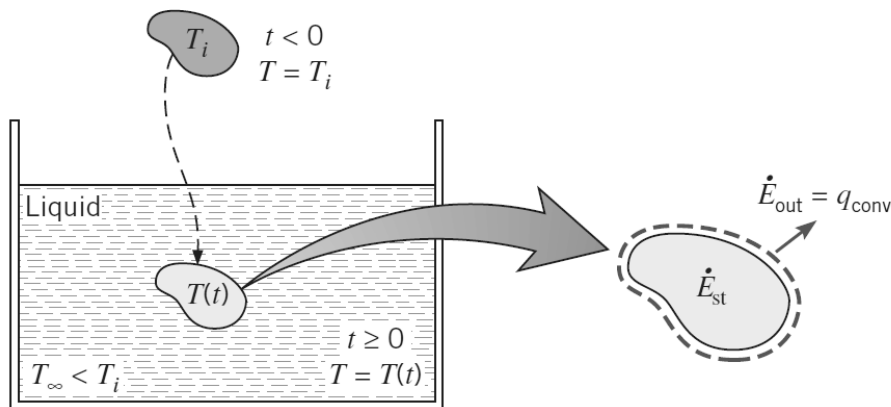
i.e.

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial x} \approx 0 \\ \frac{\partial T}{\partial y} \approx 0 \\ \frac{\partial T}{\partial z} \approx 0 \end{cases} \quad (\text{Eq. 2})$$

Dans ce cas, la température du système peut être considérée comme *uniforme* ou *homogène* (ou constante en tout point du système, ou constante dans l'espace). La température ne dépend plus que du temps :  $T(x, y, z, t) = T(t)$ . On dit que le système est un corps *thermiquement mince*.

Lorsque cette hypothèse est vérifiée, on peut utiliser la méthode appelée *Lumped System Analysis* ou *Lumped Capacitance Method (LCM)*, qui est une technique couramment utilisée ; son utilisation est même très souhaitée lorsque cela est possible, du fait de sa simplicité et de son efficacité.

*Exemple (Fig. 2)* : Un solide subissant une brusque variation des conditions de son environnement, tel qu'un processus de refroidissement (cooling process).



**Fig. 2.** Conduction transitoire lors d'un processus de refroidissement [3]

L'**Eq. 1** implique que l'on ne peut plus utiliser l'équation de la chaleur pour obtenir l'évolution de la température ( $T$ ), car cette dernière s'écrit en fonction des coordonnées spatiales ( $x, y, z$ ). Dans ce cas, on a recours à l'écriture du bilan d'énergie global (ou équation de conservation de l'énergie, ou premier principe de la thermodynamique) appliqué au système.

Prenons l'exemple présenté dans **Fig. 2**. Le solide, de volume ( $V$ ), est délimité par sa frontière ou surface ( $A_s$ ).

Le bilan d'énergie (ou pour être plus précis : bilan de puissance thermique) s'écrit :

$$q_{st} = q_{in} - q_{out} + q_g \quad (\text{Eq. 3})$$

$q_{st}$  (ou  $\dot{E}_{st}$  dans **Fig. 2**) : Flux de chaleur stocké (ou accumulé ou inertiel) ;

$q_{in}$  : Flux de chaleur entrant dans le système ;

$q_{out}$  (ou  $\dot{E}_{out}$  dans **Fig. 2**) : Flux de chaleur sortant du système ;

$q_g$  : Source ou puits de chaleur ( $g = \text{génééré}$ ). Ce terme est positif quand il s'agit d'une source de chaleur, et négatif quand il s'agit d'un puits de chaleur.

Dans l'exemple traité, les termes  $q_{in}$  et  $q_g$  (pas de source ou puits de chaleur au sein du système) sont nuls. Dans ce cas, l'**Eq. 3** devient :

$$q_{st} = -q_{out} \quad (\text{Eq. 4})$$

Pour la suite des calculs, les hypothèses suivantes sont considérées :

- Les propriétés (thermophysiques) du solide ( $\rho$ ,  $c$ ,  $k$ ) sont constantes. Elles sont indépendantes de la température et de la pression.
- Le volume du solide ( $V$ ) est constant (corps rigide ou indéformable). La surface ( $A_s$ ) est constante.
- Le coefficient d'échange de chaleur convectif ( $h$ ) entre le système et son environnement est considéré comme constant (dans l'espace et dans le temps). Idem pour la température de cet environnement ( $T_\infty$ ).

L'**Eq. 4** devient :

$$q_{st} = \rho V c \frac{dT}{dt} = -q_{out} = -h A_s (T - T_\infty) \quad (\text{Eq. 5})$$

Afin de rendre les calculs plus commodes, on opère le changement de variable suivant :

$$\theta = T - T_\infty \quad (\text{Eq. 6})$$

L'**Eq. 5** devient (après la séparation des variables  $\theta$  et  $t$ ) :

$$-\frac{\rho V c}{h A_s} \cdot \frac{d\theta}{\theta} = dt \quad (\text{Eq. 7})$$

On intègre cette expression entre l'instant initial  $t = t_i = 0$  et un instant donné  $t$  :

$$-\frac{\rho Vc}{hA_s} \int_{\theta_i}^{\theta} \frac{d\theta}{\theta} = \int_0^t dt \quad (\text{Eq. 8})$$

Avec :  $\theta_i = T_i - T_\infty$ ,  $T_i$  étant la température initiale du solide.

La solution de l'Eq. 8 peut s'écrire de 2 manières équivalentes :

$$t = -\frac{\rho Vc}{hA_s} \ln\left(\frac{\theta}{\theta_i}\right) \quad (\text{Eq. 9})$$

ou

$$\frac{\theta}{\theta_i} = \frac{T - T_\infty}{T_i - T_\infty} = e\left(-\frac{hA_s}{\rho Vc} t\right) \quad (\text{Eq. 10})$$

L'Eq. 9 permet de calculer le temps ( $t$ ) nécessaire pour atteindre une certaine température ( $T$ ) du solide, tandis que L'Eq. 10 permet de calculer la température ( $T$ ) du solide atteinte à un temps ( $t$ ).

*Remarques :*

- Lorsque  $t \rightarrow \infty$ , la grandeur  $\theta \rightarrow 0$ , i.e. :  $T \rightarrow T_\infty$  ;
- La quantité  $\left(\frac{\rho Vc}{hA_s}\right)$  est homogène à un temps. Elle est appelée constante de temps (*thermique*) du système ou *temps caractéristique* ou *temps de réponse*. Son symbole est :  $\tau$ .

En intégrant ce concept, l'Eq. 10 devient :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (\text{Eq. 11})$$

Il est à noter que  $\tau$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\tau = \left(\frac{1}{hA_s}\right) \cdot (\rho Vc) \quad (\text{Eq. 12})$$

i.e., le produit de la résistance thermique de convection  $\left(\frac{1}{hA_s}\right)$  par la capacité thermique du solide  $(\rho Vc)$ .

L'expression donnant l'évolution de la température du système au cours du temps (**Eq. 11**) nous permet de calculer la quantité de chaleur (Q) échangée entre le solide et son environnement pendant une durée  $\Delta t = [0, t]$  et qui s'écrit de la manière suivante :

$$Q = - \int_0^t q_{out} dt \quad (\text{Eq. 13})$$

i.e.

$$Q = - \int_0^t h A_s \theta dt \quad (\text{Eq. 14})$$

En utilisant l'**Eq. 11** et après intégration, on obtient l'expression finale de la chaleur (Q) :

$$Q = -\rho V c \theta_i \left( 1 - e^{-\left(\frac{t}{\tau}\right)} \right) \quad (\text{Eq. 15})$$

Il est à noter que l'expression  $\left\{ \frac{t}{\tau} \right\}$  peut s'écrire de la manière suivante :

$$\frac{t}{\tau} = \frac{h A_s}{\rho V c} t = \frac{h}{\rho c L_c} t = \frac{h L_c}{k} \cdot \frac{k}{\rho c} \cdot \frac{t}{L_c^2} = \frac{h L_c}{k} \cdot \frac{a t}{L_c^2} = \text{Bi} \cdot \text{Fo} \quad (\text{Eq. 16})$$

$L_c = \frac{V}{A_s}$  : Longueur (ou dimension) caractéristique du système, en m ;

a : Diffusivité thermique du solide (déplacement du front de chaleur au sein du système), en  $\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;

Bi : Nombre adimensionnel de Biot ;

Fo : Nombre adimensionnel de Fourier. Il s'agit d'un temps adimensionnel.

Dans ces conditions, l'**Eq. 11** peut s'écrire aussi de la manière suivante :

$$\frac{\theta}{\theta_i} = e^{(-\text{Bi} \cdot \text{Fo})} \quad (\text{Eq. 17})$$

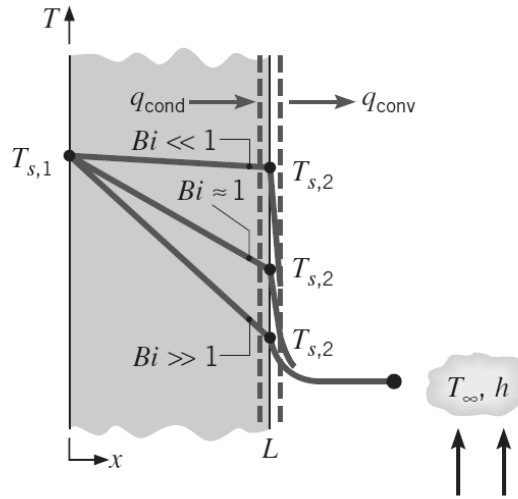
Les nombres adimensionnels de Biot et de Fourier caractérisent les problèmes de conduction thermique transitoire avec de la convection de chaleur à la surface.

### 3. Domaine de validité de la méthode LCM

Une question naturelle se pose : sous quelles conditions (ou critères), la méthode LCM peut être utilisée avec une précision raisonnable ?

A cet effet, on considère en premier abord, le problème mono-dimensionnel permanent suivant : celui d'un mur plan de surface ( $A_s$ ) (**Fig. 3**). L'extension au cas transitoire sera simple à réaliser.

On a :  $T_{s,1} > T_{s,2} > T_\infty$



**Fig. 3.** Conduction de chaleur au sein d'un mur en régime permanent [3]

Le bilan d'énergie réalisé sur le mur donne :

$$\frac{kA_s}{L} (T_{s,1} - T_{s,2}) = hA_s (T_{s,2} - T_\infty) \quad (\text{Eq. 18})$$

$\frac{kA_s}{L} (T_{s,1} - T_{s,2})$  : Flux de chaleur conductif à travers le mur ;

$hA_s (T_{s,2} - T_\infty)$  : Flux de chaleur convectif entre le mur et son environnement.

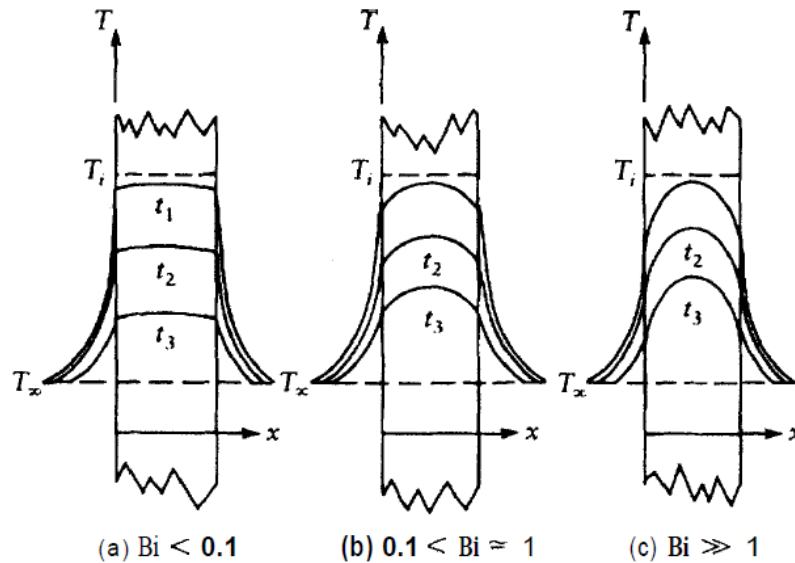
L'**Eq. 18** devient ainsi :

$$\frac{T_{s,1} - T_{s,2}}{T_{s,2} - T_\infty} = \frac{\frac{L}{kA_s}}{\frac{1}{hA_s}} = \frac{R_{th,conduction}}{R_{th,convection}} = \frac{hL}{k} = Bi \quad (\text{Eq. 19})$$

$k$  : Conductivité thermique du mur.

Si le nombre de Biot ( $Bi$ ) prend des valeurs faibles, i.e.  $\ll 1$ , alors :  $R_{th,conduction} \ll R_{th,convection}$  ; ce qui implique que l'hypothèse d'uniformité de la température au sein du mur est raisonnable. La méthode LCM est donc dans ce cas applicable.

Plaçons-nous maintenant dans le cas du régime transitoire (**Fig. 4**). Le nombre de Biot joue un rôle tout aussi important. Par souci de simplification, considérons que le problème traité est monodimensionnel suivant  $x$ , i.e. :  $T(x, y, z, t) = T(x, t)$ .



**Fig. 4.** Mise en évidence du rôle du nombre de Biot en régime transitoire [4]

Relation entre les valeurs prises par le nombre de Biot et les profils de température ( $t_3 > t_2 > t_1$ )

L'étude de la conduction transitoire au sein du mur révèle que :

- Si  $Bi \ll 1$  (ou  $Bi \leq 0.1$ ), alors le gradient de température au sein du mur est négligeable ( $\vec{\nabla} T \approx \vec{0}$ ). Dans ce cas, nous avons :  $T(x, t) = T(t)$ , i.e. que l'on peut considérer (avec une bonne précision) que la température au sein du mur est uniforme (méthode LCM applicable).
- pour des valeurs modérées ( $Bi \approx 1$ ) ou élevées de  $Bi$  ( $Bi \gg 1$ ), i.e.  $Bi > 0.1$ , le gradient de température dans le mur est significatif et ne peut plus être négligé. Il n'est plus raisonnable d'utiliser la méthode LCM dans ce cas.

*Conclusions :*

- Pour un problème de conduction transitoire de chauffage (heating process) ou de refroidissement (cooling process), la première étape à réaliser consiste à calculer le nombre de Biot. Si la condition suivante (préconisée dans le domaine de l'ingénierie) :

$$Bi = \frac{h L_c}{k} \leq 0.1 \quad (\text{Eq. 20})$$

est vérifiée, alors dans ce cas, on pourra utiliser la méthode LCM avec une bonne précision (ou une erreur acceptable).

- Il est d'usage de considérer pour le calcul de la longueur caractéristique ( $L_c$ ), la relation suivante :

$$L_c = \frac{V}{A_s} \quad \text{(Eq. 21)}$$

$L_c$  : Longueur caractéristique du solide, en m ;

$V$  : Volume du solide, en  $m^3$  ;

$A_s$  : Surface qui délimite le solide, en  $m^2$ .

On donne à titre d'exemple des valeurs de  $L_c$  pour des géométries couramment rencontrées dans le domaine de l'ingénierie :

- Sphère, de diamètre  $D$  ou de rayon  $R$  :  $L_c = \frac{D}{6} = \frac{R}{3}$  ;
- Cylindre long ( $L \gg R$ ) de rayon  $R$  :  $L_c = \frac{R}{2}$  ;
- Mur d'épaisseur ( $2L$ ), soumis à de la convection sur ses deux faces :  $L_c = L$ .

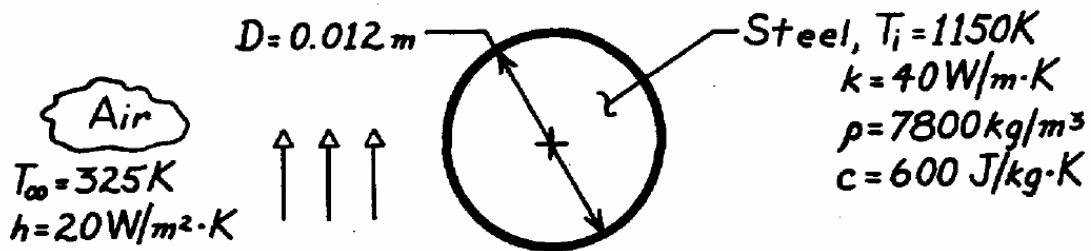
Les exercices que l'on se propose de traiter dans ce chapitre, ont pour objectif de se familiariser avec l'utilisation de la méthode LCM. On aura à calculer soit la température du solide en phase transitoire ou bien le temps nécessaire à ce solide pour atteindre une température finale donnée. L'accent est mis aussi sur la vérification du critère portant sur le nombre adimensionnel de Biot et qui permet de valider l'utilisation de la méthode LCM.

## Exercice 1

Un solide sous forme d'une sphère en acier, de diamètre  $D = 12 \text{ mm}$ , est placé dans un écoulement d'air à  $T_\infty = 325 \text{ K}$  et  $h = 20 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$  (**Fig. 5**). A l'instant initial, la température de la sphère est  $T_i = 1150 \text{ K}$ .

Calculer le temps nécessaire pour refroidir la sphère jusqu'à la température finale de  $400 \text{ K}$ .

Données pour l'acier :  $\rho = 7800 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ;  $c = 600 \text{ J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$  ;  $k = 40 \text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$



**Fig. 5.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :**

*Hypothèses :*

- Le transfert de chaleur par rayonnement n'est pas traité ;
- Propriétés constantes.

On calcule le nombre de Biot :  $Bi = \frac{h L_c}{k}$ .

La longueur caractéristique (pour une sphère) est (**Eq. 21**) :  $L_c = \frac{D}{6}$ .

Dans ce cas :  $Bi = 0.001 \leq 0.1$  (on peut même dire que :  $Bi \ll 0.1$ ).

On peut donc considérer que la température de la sphère est quasiment uniforme durant le processus transitoire de refroidissement. La méthode LCM peut dans ce cas être utilisée avec une bonne précision.

À partir d'**Eq. 9**, on obtient l'expression et la valeur du temps nécessaire pour atteindre la température finale  $T = 400 \text{ K}$  :

$$t = \frac{\rho c V}{h A_s} \ln \left( \frac{T_i - T_\infty}{T - T_\infty} \right) = 1122 \text{ s} \approx 19 \text{ minutes}$$

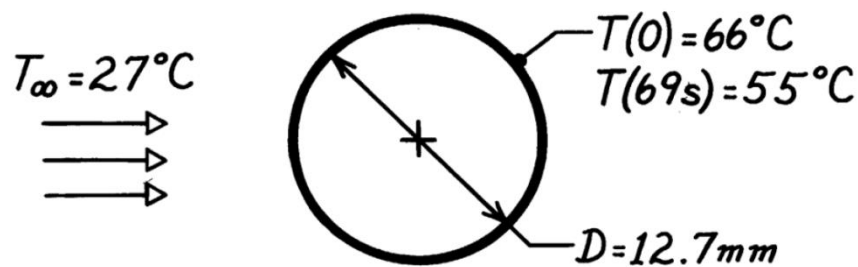
## Exercice 2

Le coefficient d'échange de chaleur ( $h$ ) de l'air circulant autour d'une sphère doit être déterminé en observant l'historique température-temps  $T(t)$  d'une sphère fabriquée en cuivre. La sphère en question, qui a un diamètre de 12.7 mm, est à 66 °C avant d'être insérée dans le flux d'air qui est à une température de 27 °C (**Fig. 6**). Un thermocouple situé sur la surface extérieure de la sphère indique 55 °C, et ce 69 s après l'insertion de la sphère dans le flux d'air.

Supposez, puis justifiez, que la sphère se comporte comme un objet à température uniforme.

Calculer le coefficient d'échange de chaleur ( $h$ ).

*Données :* Cuivre pur (à 333 K) :  $\rho = 8\,933 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $c = 389 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $k = 398 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$



**Fig. 6.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

#### Hypothèses :

- La température de la sphère est uniforme (méthode LCM applicable) ;
- Le transfert de chaleur par rayonnement n'est pas considéré ;
- Propriétés constantes.

L'équation (**Eq. 11**) donnant l'évolution de la température de la sphère s'écrit :

$$\frac{\theta(t)}{\theta_i} = e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Avec l'expression de la constante de temps ( $\tau$ ) du système :

$$\tau = \frac{\rho V c}{h A_s}$$

On obtient ainsi :

$$\frac{\theta(t)}{\theta_i} = \frac{(55-27)^\circ\text{C}}{(66-27)^\circ\text{C}} = 0.718 = e^{-\frac{69\text{ s}}{\tau}}$$

D'où :  $\tau = 208$  s (entre trois et quatre minutes).

De ce fait, le coefficient d'échange de chaleur (h) se calcule comme suit :

$$h = \frac{\rho V c}{A_s \tau} = 35.3 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Avec

$$V = \frac{\pi D^3}{6}$$

$$A_s = \pi D^2$$

$$\text{Ou bien : } L_c = \frac{V}{A_s} = \frac{D}{6}$$

L'hypothèse de l'uniformité de la température de la sphère (et donc l'applicabilité de la méthode LCM) est vérifiée en s'assurant que  $Bi < 0.1$ .

$$Bi = \frac{h L_c}{k}$$

Ce qui donne :

$$Bi = 1.88 \times 10^{-4} \ll 0.1$$

La condition d'uniformité de la température de la sphère est donc bel et bien vérifiée (à postériori).

### Exercice 3

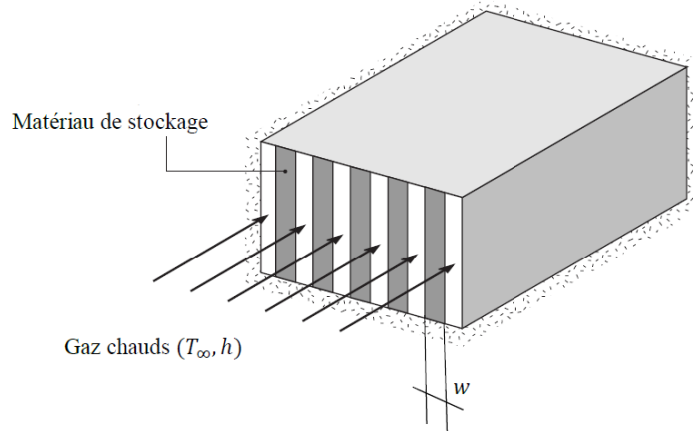
Une unité de stockage de chaleur est composée d'un grand canal rectangulaire. Le canal contient des couches alternées de matériau de stockage et de passages (**Fig. 7**). Chaque couche de matériau de stockage est une plaque en aluminium de largeur  $w = 0.05$  m, et qui est initialement à  $T_i = 25$  °C. Les passages sont traversés par des gaz chauds à  $T_\infty = 600$  °C. Le coefficient d'échange convectif est  $h = 100 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ . La longueur caractéristique à considérer est  $L_c = w/2$ .

1) Pour une couche de matériau de stockage donné et à partir de l'équation d'évolution de la température (méthode LCM), établir l'expression de la chaleur (Q) échangée entre les gaz chauds et le matériau de stockage.

2) En déduire l'expression du maximum de chaleur qu'il est possible de stocker ( $Q_{\max}$ ).

- 3) Combien de temps  $t_{75\%}$  faut-il pour que la chaleur échangée atteigne 75 % de la valeur de  $Q_{\max}$  ?  
 4) Quelle est la température du matériau de stockage atteinte à  $t_{75\%}$  ?

Données : Aluminium :  $\rho = 2\,702\text{ kg.m}^{-3}$  ;  $c = 1.033\text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $k = 231\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$



**Fig. 7.** Schéma de l'étude [3]

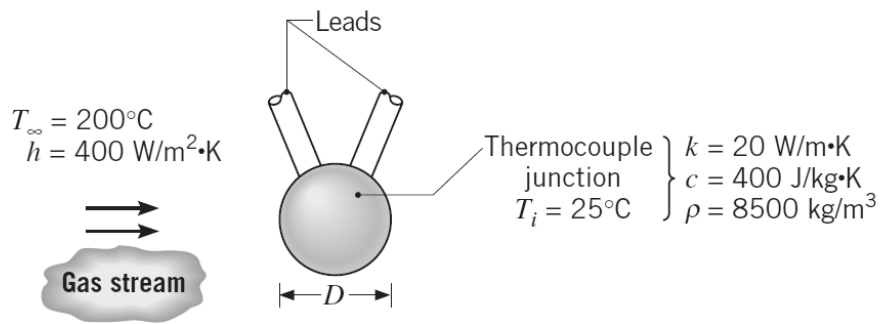
**Solution :**

1)  $Q = \rho V c \theta_i \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$  ; 2)  $Q = \rho V c \theta_i$  ; 3)  $t_{75\%} = 967\text{ s}$  ; 4)  $T(t_{75\%}) = 456\text{ }^\circ\text{C}$ .

### Exercice 4

Une jonction de thermocouple, qui peut être assimilée à une sphère, doit être utilisée pour mesurer la température dans un flux de gaz (**Fig. 8**). Le coefficient d'échange de chaleur par convection entre la surface de la jonction et le gaz est  $h = 400\text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ . Les propriétés thermophysiques de la jonction sont :  $k = 20\text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $c = 400\text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $\rho = 8500\text{ kg.m}^{-3}$ .

- 1) Déterminez le diamètre de la jonction nécessaire pour que le thermocouple ait une constante de temps  $\tau = 1\text{ s}$ .  
 2) Si la jonction est initialement à  $25\text{ }^\circ\text{C}$ , combien de temps lui faudra-t-il pour atteindre  $199\text{ }^\circ\text{C}$  ?



**Fig. 8.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :** 1)  $D = 7.06 \times 10^{-4} \text{ m}$  ; 2)  $t = 5.2 \text{ s}$ .

## **Partie II : Convection**

# Chapitre 3 : Convection naturelle

## 1. Mécanismes physiques

La convection de chaleur peut être classée en trois catégories :

- La *convection Naturelle* (CN) / *Free Convection*, ou convection naturelle (ou libre) pure.  
Dans ce cas, la Convection Forcée est négligée.
- La *Convection Mixte* (CM)  
Dans ce cas, les intensités des CN et CF sont du même ordre.
- La *Convection Forcée* (CF) / *Forced Convection*, ou convection forcée pure.  
Dans ce cas, la CN est négligée.

Pour rappel, en CF, la vitesse du fluide est forcée, i.e. qu'elle a une origine extérieure (*exemple* : un moteur de pompe ou de ventilateur). Elle est en lien avec une force volumique agissant à l'intérieur du système.

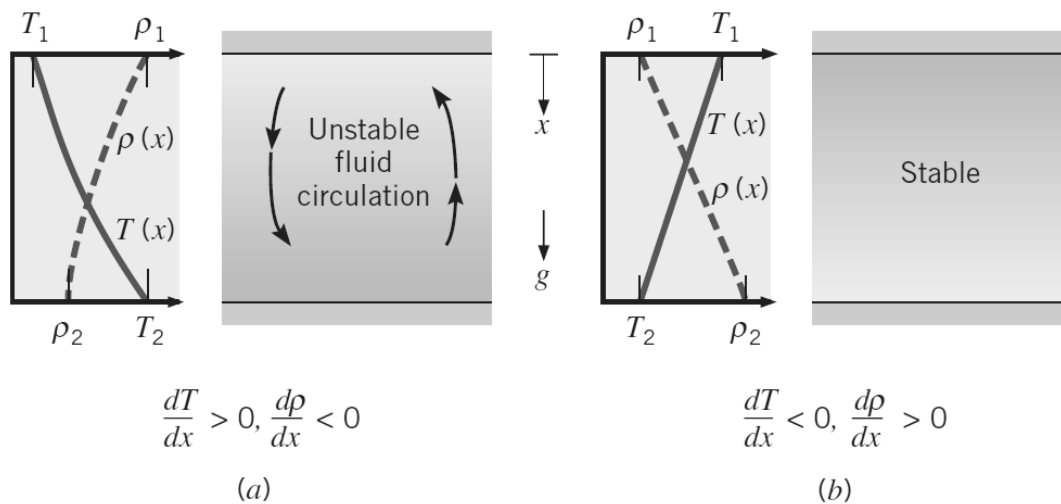
La CN est une combinaison de deux phénomènes physiques :

- Une force volumique agissant sur le système. Dans presque tous les cas (et c'est ce que l'on retiendra pour la suite), il s'agit des forces issues d'un champ gravitationnel ( $\vec{g}$ ).
- Un gradient de masse volumique ( $\vec{\nabla}\rho$ ) au sein du fluide. Dans presque tous les cas (et c'est ce que l'on retiendra pour la suite), ce gradient de masse volumique est généré par un gradient de température ( $\vec{\nabla}T$ ).

On sait que :  $\rho_{\text{fluide}} = f(T)$  : Le fluide peut être sous la forme liquide ou gazeuse. Lorsque la température (T) augmente, la masse volumique ( $\rho$ ) du fluide diminue, en raison de la dilatation (ou de l'expansion) du fluide. Ceci implique alors :  $\frac{\partial \rho}{\partial T} < 0$ .

Ces deux phénomènes permettent de générer *une force de flottabilité*, qui crée des mouvements (ou des courants) de convection (naturelle) au sein du fluide (**Fig. 1**).

Il est à noter que pour la CN, on a :  $\vec{V}_{\text{CN}} \ll \vec{V}_{\text{CF}} ; h_{\text{CN}} \ll h_{\text{CF}} ; R_{\text{th,CN}} \gg R_{\text{th,CF}}$ .



**Fig. 1.** Transferts de chaleur entre deux plaques horizontales.

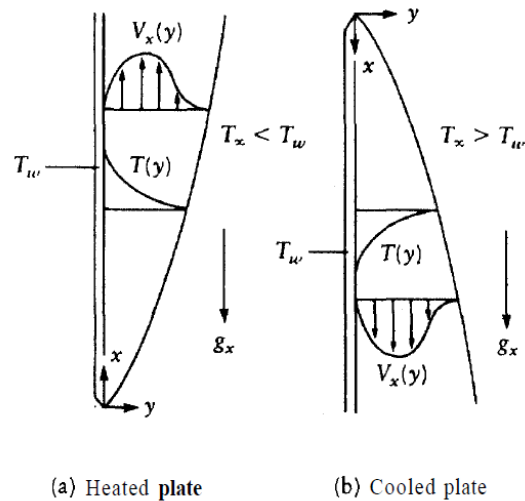
Mise en évidence des mécanismes de la convection naturelle [3]

a) Convection naturelle ; b) Conduction

On va se concentrer par la suite sur la CN limitée par une surface (ou paroi). En particulier, on va se focaliser sur l'étude du développement d'une couche limite (CL) sur une plaque plane verticale chauffée et isotherme (à  $T = T_s$ , avec  $T_s > T_\infty$ ).

La plaque est immergée au sein d'un fluide au repos. Le fluide est à une vitesse  $\vec{V}_\infty = \vec{0}$  et à une masse volumique et température respectivement de  $\rho_\infty$  et  $T_\infty$ .

Il est à noter que du fait que  $\rho_{\text{au voisinage de la plaque}} < \rho_\infty$ , les forces de flottabilité créent des courants convectifs naturels vers le haut, entraînant ainsi avec eux le fluide au repos. Dans le cas où la plaque est refroidie et isotherme (à  $T = T_s$ , avec  $T_s < T_\infty$ ), les courants convectifs naturels se font vers le bas (**Fig. 2**).



**Fig. 2.** Couche limite de convection naturelle [4]

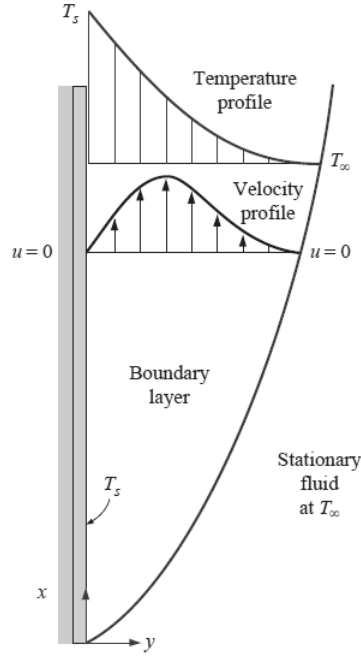
Par ailleurs, on note aussi que le profil des vitesses dans la CL (d'épaisseur  $\delta$ ) en CN est différent de celui observé pour une CL en CF, car dans le cas de la convection naturelle, le fluide externe est au repos :  $u = 0$  pour  $y = 0$  et  $y > \delta$  (ou bien  $y \rightarrow \infty$ ).

## 2. Equations de la couche limite en régime laminaire

*Point de départ* : Equations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement (ou impulsion) et de l'énergie.

On considère les hypothèses suivantes (**Fig. 3**) :

- Régime permanent ;
- Problème bidimensionnel suivant  $x$  et  $y$  ;
- Propriétés constantes ;
- Fluide incompressible ( $\rho$  est constant). Il est à noter que ceci n'est pas en contradiction avec ce qui a été avancé auparavant au sujet de l'existence d'un gradient de masse volumique  $\vec{\nabla}\rho$  au sein du fluide.



**Fig. 3.** Développement des couches limites pour une plaque plane verticale [2]

a) Couche limite hydrodynamique ; b) Couche limite thermique.

Dans ce qui suit, on va considérer uniquement l'équation de conservation de la quantité de mouvement, projetée sur l'axe des x ; x étant la direction de l'écoulement ascendant du fluide :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} - g + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{Eq. 1})$$

$\frac{dP}{dx}$  : Gradient de pression du fluide au repos (à l'extérieur de la couche limite). Il s'agit du gradient de pression hydrostatique au sein du fluide qui est stagnant (au repos). Son expression est :

$$\frac{dP}{dx} = -\rho_{\infty} g \quad (\text{Eq. 2})$$

ce qui donne

$$-\frac{1}{\rho} \cdot \frac{dP}{dx} - g = \frac{\Delta\rho}{\rho} g \quad (\text{Eq. 3})$$

avec

$$\Delta\rho = \rho_{\infty} - \rho \quad (\text{Eq. 4})$$

En remplaçant l'Eq. 3 dans l'expression Eq. 1, on obtient :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta\rho}{\rho} g + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{Eq. 5})$$

$\frac{\Delta\rho}{\rho} g$  : Force de flottabilité par unité de masse.

En faisant l'hypothèse que le gradient de masse volumique ( $\vec{\nabla}\rho$ ) provient uniquement du gradient de température ( $\vec{\nabla}T$ ), on pourra recourir alors au coefficient de dilatation (ou d'expansion) volumique thermique ( $\beta$ ) :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial\rho}{\partial T} \right)_P \quad (\text{Eq. 6})$$

$\beta$  est une propriété thermodynamique du fluide. Il mesure la quantité à laquelle la masse volumique  $\rho$  change en réponse à un changement de température ( $T$ ), et à pression ( $P$ ) constante.

*Cas particulier du gaz parfait :*

$$\beta = \frac{1}{T} \quad (\text{Eq. 7})$$

Pour les gaz réels et les liquides,  $\beta$  est extrait des tables (propriétés des fluides).

Pour aller plus loin, on utilise *l'hypothèse de Boussinesq* :

$$\rho_\infty - \rho = \rho \beta (T - T_\infty) \quad (\text{Eq. 8})$$

L'**Eq. 5** devient ainsi :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_\infty) + \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{Eq. 9})$$

On note qu'ici, la force de flottabilité par unité de masse  $g \beta (T - T_\infty)$  est reliée ici au gradient de température ( $\vec{\nabla}T$ ).

*Résumé des équations de conservation :*

- *Equation de conservation de la masse :*

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{Eq. 10})$$

- *Equation de conservation de la quantité de mouvement, projetée sur l'axe des x :*

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = g \beta (T - T_{\infty}) + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{Eq. 11})$$

- *Equation de conservation de l'énergie :*

La dissipation visqueuse est considérée comme négligeable. Ceci est d'autant plus vrai que pour la convection naturelle, les vitesses mises en jeu sont faibles.

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (\text{Eq. 12})$$

$a$  : Diffusivité thermique ;  $a = \frac{k}{\rho c_p}$ .

### 3. Adimensionnalisation des équations de la couche limite

*But* : Mettre en évidence les nombres adimensionnels qui gouvernent la convection naturelle.

Pour rappel, le nombre adimensionnel qui gouverne la convection forcée est le nombre de Reynolds (Re).

On procède à l'adimensionnalisation des équations de conservation qui gouvernent le système :

$$x^* = \frac{x}{L} \quad (\text{Eq. 13})$$

$$y^* = \frac{y}{L} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$u^* = \frac{u}{u_0} \quad (\text{Eq. 15})$$

$$v^* = \frac{v}{u_0} \quad (\text{Eq. 16})$$

$$T^* = \frac{T - T_{\infty}}{T_s - T_{\infty}} \quad (\text{Eq. 17})$$

$L$  : Longueur de la plaque (choisie ici comme dimension caractéristique) ;

$u_0$  : Vitesse de référence.

L'Eq. 11 s'écrit dans ce cas :

$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = \frac{g\beta(T_s - T_{\infty})L}{u_0^2} T^* + \frac{1}{\text{Re}_L} \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (\text{Eq. 18})$$

avec

$$\text{Re}_L = \frac{u_0 L}{\nu} \quad (\text{Eq. 19})$$

On pose :

$$u_0 = [g \beta (T_s - T_\infty)L]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 20})$$

L'expression du nombre de Reynolds devient ainsi :

$$\text{Re}_L = \left[ \frac{g \beta (T_s - T_\infty)L^3}{\nu^2} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{Eq. 21})$$

L'Eq. 18 s'écrit alors :

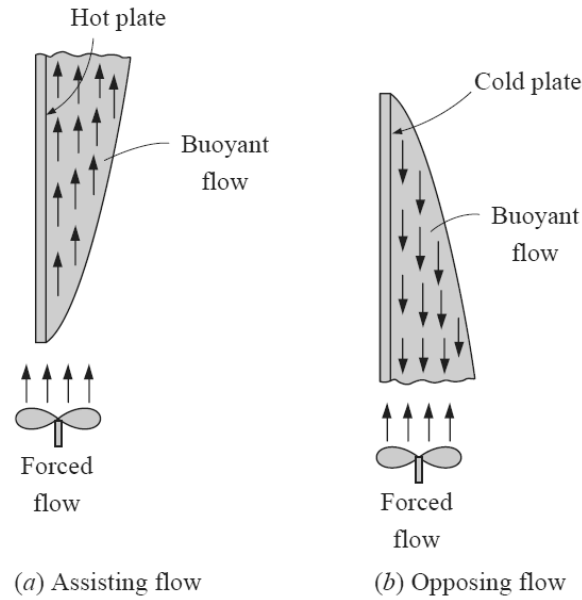
$$u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} = T^* + \frac{1}{\text{Re}_L} \cdot \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} \quad (\text{Eq. 22})$$

On définit le nombre de Grashof (Gr) de la manière suivante :

$$\text{Gr}_L = (\text{Re}_L)^2 = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) L^3}{\nu^2} = \frac{\text{forces de flottabilité}}{\text{forces visqueuses}} \quad (\text{Eq. 23})$$

*Remarques :*

- Le nombre de Grashof joue le même rôle pour la convection naturelle que celui joué par le nombre de Reynolds vis-à-vis de la convection forcée ;
- En convection naturelle :  $\text{Nu}_L = f(\text{Gr}_L, \text{Pr})$  ;
- En convection forcée :  $\text{Nu}_L = f(\text{Re}_L, \text{Pr})$  ;
- Lorsque  $\frac{\text{Gr}_L}{\text{Re}_L^2} \gg 1$ , on est en présence d'une convection naturelle pure (convection forcée négligée) ;
- Lorsque  $\frac{\text{Gr}_L}{\text{Re}_L^2} \ll 1$ , on est en présence d'une convection forcée pure (convection naturelle négligée) ;
- Lorsque  $\frac{\text{Gr}_L}{\text{Re}_L^2} \approx 1$ , on est en présence d'une convection mixte (**Fig. 4**). La convection naturelle et la convection forcée coexistent et leurs effets sont comparables. Dans ce cas :  $\text{Nu}_L = f(\text{Gr}_L, \text{Re}_L, \text{Pr})$ .



**Fig. 4.** Convection mixte [2]

## 4. Convection naturelle laminaire - Etude de similitude

*Hypothèse* : Plaque plane verticale isotherme ( $T_s = \text{constante}$ ) baignant dans un milieu fluide au repos.

Les conditions aux limites à la frontière du système s'écrivent :

$$\begin{aligned}
 y = 0 & : & u = 0 & \text{ et } & T = T_s \\
 y \rightarrow \infty & : & u = 0 & \text{ et } & T = T_\infty
 \end{aligned}$$

Le nombre de Nusselt local (pour une valeur donnée de  $x$ ) s'écrit :

$$\text{Nu}_x = \frac{h_x x}{k} = \frac{\left(\frac{q_s''}{T_s - T_\infty}\right) x}{k} \tag{Eq. 24}$$

avec :  $0 \leq x \leq L$  ;

$h$  ou  $h_x$  : Coefficient d'échange de chaleur local (calculé pour la position  $x$ ).

$$q_s'' = -k \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{Loi de Fourier pour la conduction}) \tag{Eq. 25}$$

$$\text{Nu}_x = \left(\frac{\text{Gr}_x}{4}\right)^{\frac{1}{4}} g(\text{Pr}) \tag{Eq. 26}$$

Le nombre de Grashof local s'écrit :

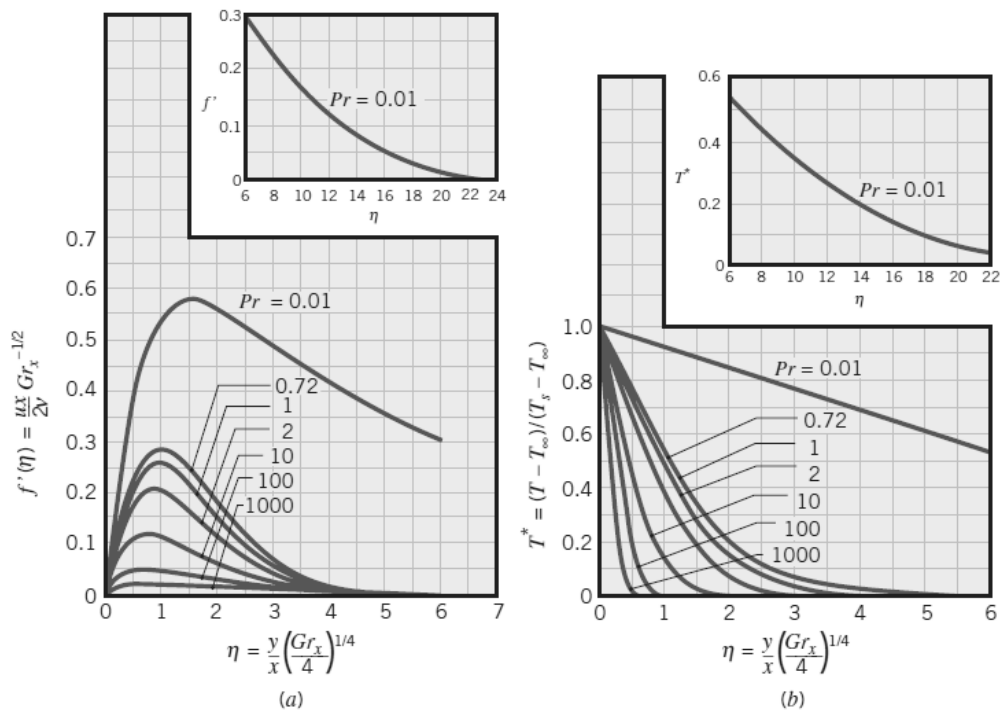
$$Gr_x = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) x^3}{\nu^2} \quad (\text{Eq. 27})$$

$g(\text{Pr})$  est une formule d'interpolation obtenue à partir de simulations numériques pour différentes valeurs du nombre de Prandtl ( $\text{Pr}$ ) :

$$g(\text{Pr}) = \frac{0.75 \text{Pr}^{\frac{1}{2}}}{\left(0.609 + 1.221 \text{Pr}^{\frac{1}{2}} + 1.238 \text{Pr}\right)^{\frac{1}{4}}} \quad (\text{Eq. 28})$$

avec :  $0 \leq \text{Pr} \leq \infty$ .

Les résultats de l'étude de similitude sont présentés dans **Fig. 5**. L'étude de similitude en question n'est valable qu'en régime laminaire. L'utilisation des courbes de cette figure sera expliquée dans les exercices traités à la fin de ce chapitre.



**Fig. 5.** Couches limites laminaires pour de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale isotherme (étude de similitude) [3]

a) Couche limite hydrodynamique ; b) Couche limite thermique.

*Rappel :* Le nombre de Nusselt ( $\text{Nu}$ ) mesure le transfert de chaleur par convection se produisant à la surface de la plaque. Il est égal au gradient de température adimensionnel à la surface de la plaque :

$$\text{Nu} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (\text{Eq. 29})$$

$\bar{h}$  ou  $\bar{h}_L$  : valeur moyenne de h sur toute la longueur de la plaque L :

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (\text{Eq. 30})$$

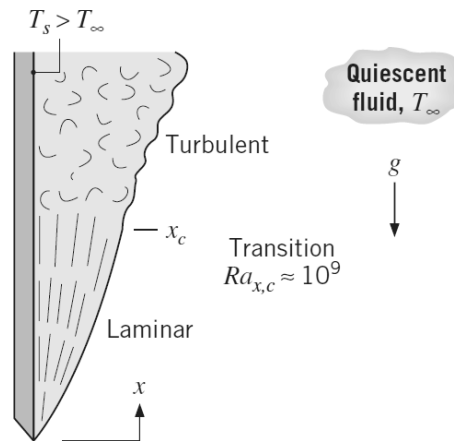
## 5. Transition vers le régime turbulent

L'apparition du régime d'écoulement de transition le long d'une plaque plane verticale, est corrélée avec le nombre adimensionnel de Rayleigh (Ra) :

$$Ra = Gr \cdot Pr \quad (\text{Eq. 31})$$

$$Ra_{x,c} = Gr_{x,c} \cdot Pr = \frac{g \beta (T_s - T_\infty) x_c^3}{\alpha \nu} \approx 10^9 \quad (\text{Eq. 32})$$

$Ra_{x,c}$  : Nombre adimensionnel de Rayleigh correspondant à la transition entre les régimes laminaire et turbulent (**Fig. 6 et Fig. 7**).

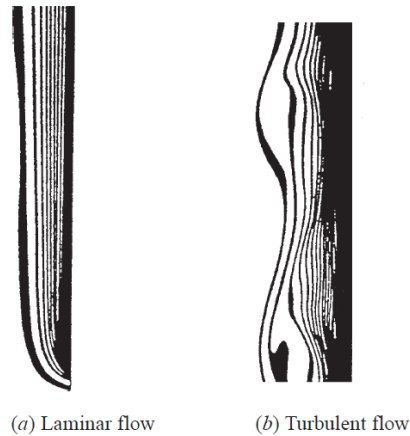


**Fig. 6.** Régimes d'écoulement au sein de la couche limite de convection naturelle le long d'une plaque plane verticale [3]

Comme pour le cas de la convection forcée, la transition vers le régime d'écoulement turbulent présente un fort impact sur le transfert de chaleur.

Les résultats de l'étude de similitude présentée dans le §4 sont valables en régime laminaire ( $Ra \leq 10^9$ ).

*Remarque* : Les corrélations de transfert de chaleur, en régime turbulent, sont basées sur les expérimentations.



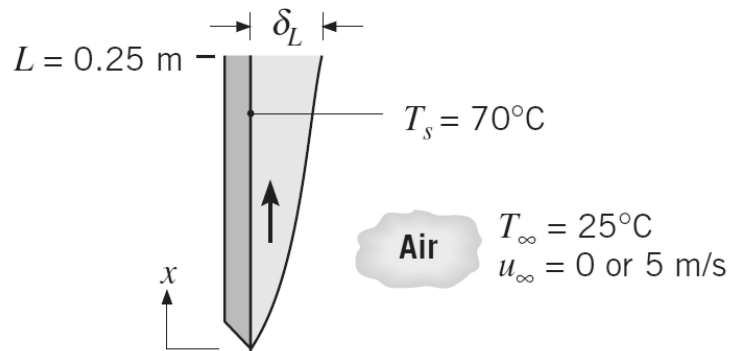
**Fig. 7.** Lignes isothermes pour de la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale chauffée, en contact avec l'air [2]

Le cours présenté ci-dessus est renforcé par quelques exercices traitant essentiellement de l'étude de similitude appliqué à la convection naturelle. D'une part, les profils de vitesse au sein de la couche limite sont décrits, et d'autre part, le flux de chaleur convectif est estimé au moyen de l'étude de similitude, mais aussi en utilisant d'autres corrélations.

## Exercice 1

Soit une plaque plane verticale de longueur  $L = 0.25 \text{ m}$  et dont la température de surface est uniforme  $T_s = 70 \text{ °C}$  (**Fig. 8**). Cette plaque baigne dans de l'air au repos qui est à une température  $T_\infty = 25 \text{ °C}$  et une pression  $P = 1 \text{ atm}$ .

- 1) Calculer la valeur de l'épaisseur de la couche limite hydrodynamique ( $\delta$ ) pour  $x = L$  ;  $x$  étant la distance à partir de l'extrémité basse de la plaque (ou bord d'attaque) ;
- 2) Calculer la valeur de la vitesse maximale au sein de la couche limite ( $u_{\max}$ ) pour  $x = L$  ;  
Pour quelle valeur de  $y$  (la distance à partir de la surface de la plaque), cette valeur de  $u_{\max}$  est-elle atteinte ?



**Fig. 8.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

1) Afin de pouvoir appliquer l'étude de similitude, on s'assure d'abord que le régime d'écoulement est laminaire. Pour cela, on calcule le nombre adimensionnel de Rayleigh (Ra) pour  $x = L = 0.25 \text{ m}$  :

$$\text{Ra} = \text{Ra}|_{x=0.25} = \text{Gr}|_{x=0.25} \cdot \text{Pr}$$

$$\text{Gr}|_{x=0.25} = \left. \frac{g \beta (T_s - T_\infty) x^3}{\nu^2} \right|_{x=0.25}$$

L'air étant supposé être un gaz parfait, le coefficient d'expansion volumique thermique ( $\beta$ ) s'écrit :

$$\beta = \frac{1}{T} = 0.00312 \text{ K}^{-1}$$

$$(T = T_{\text{film}} = \frac{T_s + T_\infty}{2} \approx 320.5 \text{ K})$$

Les propriétés de l'air, à  $T = 320.5 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ atm}$ , sont :

$$\nu = 17.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

$$k = 0.030 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\text{Pr} = 0.7$$

$$g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$$

De ce fait, on a

$$\text{Gr}|_{x=0.25} = \frac{9.8 \text{ m/s}^2 \cdot 0.00312 \text{ K}^{-1} \cdot (70 - 25) \text{ }^\circ\text{C} \cdot (0.25 \text{ m})^3}{(17.95 \times 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s})^2}$$

$$\text{Gr}|_{x=0.25} = 6.68 \times 10^7$$

$$\text{Ra}|_{x=0.25} = 6.68 \times 10^7 \cdot 0.7$$

$\text{Ra}|_{x=0.25} = 4.48 \times 10^7 < 10^9$  ; le régime d'écoulement est laminaire. L'étude de similitude peut donc être appliquée.

A partir de la définition de la variable de similitude :

$$\eta = \frac{y}{x} \left( \frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 33})$$

On obtient l'expression et la valeur de l'épaisseur de la couche limite :

$$\delta|_{x=0.25 \text{ m}} = \eta \times \left( \frac{\text{Gr}_x}{4} \right)^{-\frac{1}{4}} = 2.3 \text{ cm}$$

(Fig. 5 →  $\eta = 6$ )

▪ L'expression de la vitesse  $u_{\max}$  est la suivante :

$$u_{\max}|_x = \frac{2\nu}{x} \cdot \text{Gr}_x^{\frac{1}{2}} \cdot f'(\eta) \quad (\text{Eq. 34})$$

Ce qui donne

$$u_{\max}|_{x=0.25 \text{ m}} = 0.33 \text{ m.s}^{-1}$$

(Fig. 5 →  $f'(\eta) = 0.28$ )

et

$$y|_{u_{\max}} = 3.9 \text{ mm}$$

(Fig. 5 →  $\eta = 1$ )

## Exercice 2

Soit une plaque plane verticale en aluminium et de forme carrée (200 mm x 200 mm). L'épaisseur de la plaque est de 5 mm. Les deux côtés étant isothermes à la température  $T_s = 15\text{ °C}$ . La plaque est suspendue verticalement dans un fluide (air) au repos. Ce dernier est à une température  $T_\infty = 40\text{ °C}$  (**Fig. 9**).

Estimer le coefficient d'échange de chaleur ( $h$ ) de la plaque par les deux méthodes suivantes :

- 1) En utilisant les résultats de l'étude de similitude de la couche limite
- 2) En utilisant les résultats des corrélations empiriques :

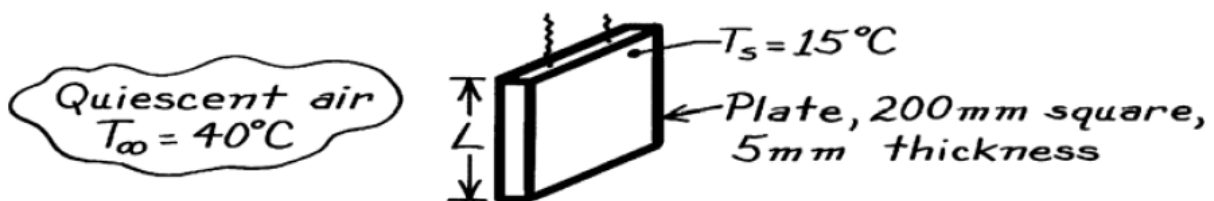
$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.670 Ra^{\frac{1}{4}}}{\left(1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{4}{9}}} \quad (\text{valable en régime laminaire})$$

Corrélation de Churchill and Chu (valable en régimes laminaire et turbulent) :

$$\overline{Nu}_L = \left( 0.825 + \frac{0.387 Ra^{\frac{1}{6}}}{\left(1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{\frac{9}{16}}\right)^{\frac{8}{27}}} \right)^2$$

Données : à  $T_f = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 300\text{ K}$  et  $P = 1\text{ atm}$  ;

$\nu = 15.89 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $Pr = 0.707$  ;  $k_f = 0.0263\text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $\alpha = 22.5 \times 10^{-6}\text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .



**Fig. 9.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :**

*Hypothèses :*

- La température des deux faces de la plaque est uniforme ;
- Le transfert de chaleur par rayonnement entre la plaque et son environnement est négligé ;
- L'air est considéré comme un gaz parfait.

On commence par calculer le nombre de Rayleigh (Ra) pour connaître le régime d'écoulement au niveau de la couche limite :

$$Ra_L = \frac{g \beta (T_\infty - T_s) L^3}{\nu \alpha}$$

L'air étant un gaz parfait, on a :  $\beta = \frac{1}{T_f}$ .

L'application numérique donne

$$Ra_L = 1.827 \times 10^7 < 10^9$$

Le régime d'écoulement est donc laminaire. On peut donc utiliser les résultats de l'étude de similitude :

$$\overline{Nu}_L = \frac{h L}{k_f} = \frac{4}{3} Nu_L = \frac{4}{3} \left( \frac{Gr_L}{4} \right)^{\frac{1}{4}} g(Pr)$$

$g(Pr)$  est donné par l'**Eq. 28** :  $g(Pr) = 0.501$

De ce fait, le coefficient d'échange de chaleur de la plaque est :

$$\bar{h}_L = 4.42 \text{ W. m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

En utilisant la corrélation suivante, valable en régime laminaire :

$$\overline{Nu}_L = 0.68 + \frac{0.670 Ra^{\frac{1}{4}}}{\left( 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right)^{\frac{4}{9}}}$$

On obtient :  $\bar{h}_L = 4.51 \text{ W. m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

L'accord observé pour ces deux valeurs de  $\bar{h}_L$ , est d'excellente qualité.

Par ailleurs, la corrélation de Churchill and Chu donne une valeur plus importante :

$$\bar{h}_L = 4.87 \text{ W. m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Cette corrélation, quoique valable en régimes laminaire et turbulent, n'est pas la plus précise en ce qui concerne le régime laminaire.

### Exercice 3

Considérons deux plaques planes verticales (**Fig. 10**). La première plaque a une hauteur  $L_1 = 1$  m et une largeur  $W_1 = 0.6$  m. L'écart de température entre la surface de la plaque et l'air (supposé au repos) est de 20 K. La deuxième plaque a une hauteur  $L_2 = 0.6$  m et une largeur  $W_2 = 1$  m. L'écart de température entre l'air (supposé au repos) et la surface de la plaque est de 20 K. Le transfert de chaleur par rayonnement est négligé. On considère l'air à la température  $T = 300$  K et à 1 atm.

Calculer le ratio des deux flux de chaleur :  $q_1 / q_2$ .

Données :  $\overline{Nu}_L = C Ra_L^n$  avec ( $C = 0.59$  et  $n = 1/4$  en laminaire) et ( $C = 0.10$  et  $n = 1/3$  en turbulent).

Propriétés de l'air à 300 K et 1 atm :  $\nu = 15.89 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 22.5 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

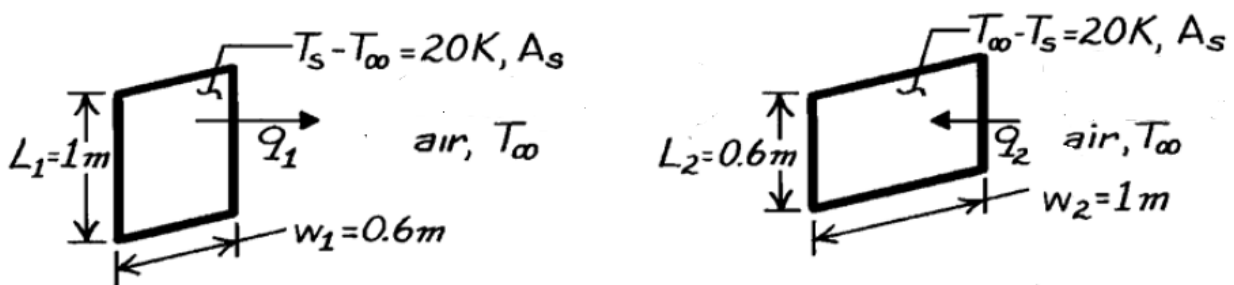


Fig. 10. Schéma de l'étude [3]

**Solution :**  $q_1 / q_2 = 0.881$ .

### Exercice 4

1) Calculer le coefficient d'échange de chaleur moyen ( $\bar{h}_L$ ) pour un mur vertical de hauteur  $L = 2.5$  m, dans des conditions d'hiver : Température de surface du mur uniforme  $T_s = 10$  °C, Température de l'air (au repos)  $T_\infty = 20$  °C. La pression de l'air est de 1 atm.

2) Refaire le même calcul dans des conditions d'été ( $T_s = 37$  °C,  $T_\infty = 27$  °C, 1 atm).

Données :  $g = 9.8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ . Propriétés de l'air à  $T_f = 288$  K et 1 atm :  $\nu = 14.82 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 20.96 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $k = 0.0253 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $Pr = 0.710$ .

Propriétés de l'air à  $T_f = 305$  K et 1 atm :  $\nu = 16.39 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $\alpha = 23.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $k = 0.0267 \text{ W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$  ;  $Pr = 0.706$ .

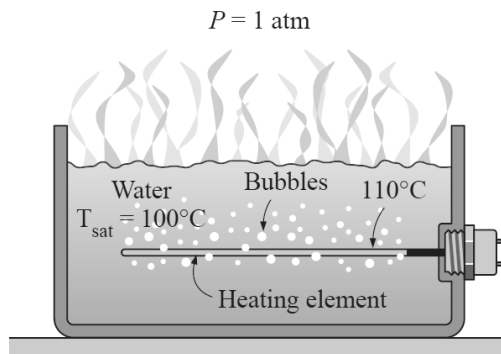
$$\text{Corrélation de Churchill \& Chu : } \overline{Nu}_L = \left\{ 0.825 + \frac{0.387 Ra_L^{\frac{1}{6}}}{\left[ 1 + \left( \frac{0.492}{Pr} \right)^{\frac{9}{16}} \right]^{\frac{8}{27}}} \right\}^2$$

**Solution :** 1)  $\bar{h}_L = 3.03 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$  ; 2)  $\bar{h}_L = 2.94 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$ .

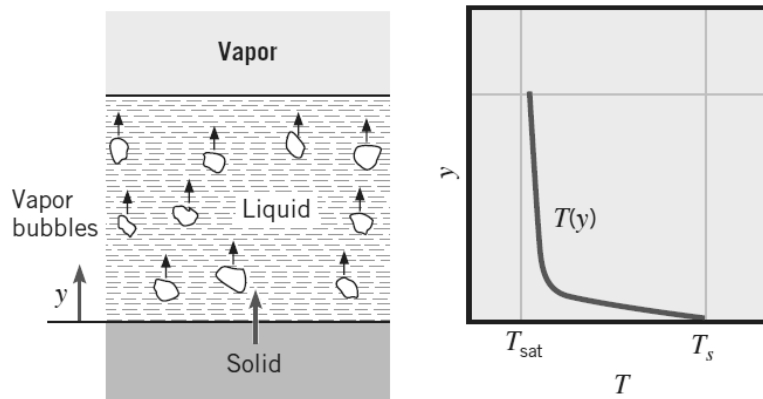
# Chapitre 4 : Ebullition

## 1. Mécanismes physiques

Ebullition ou Vaporisation = processus de convection + changement de phase liquide-vapeur d'un fluide. En ébullition, le changement de phase liquide-vapeur est assuré par le transfert de chaleur venant de la surface du solide vers le fluide (**Fig. 1 et Fig. 2**).



**Fig. 1.** Exemple de phénomène d'ébullition [2]



**Fig. 2.** Ebullition en vase saturée - Distribution de la température [3]

En condensation, c'est l'effet inverse : le changement de phase vapeur-liquide est assuré par le transfert de chaleur venant du fluide vers la surface du solide. L'intensité de l'échange de chaleur diphasique (ébullition ou condensation) est très supérieure à celle de la convection forcée monophasique.

Vu qu'ils impliquent un mouvement du fluide (en particulier au voisinage de la paroi), l'ébullition et la condensation sont classés comme des formes de convection. Cependant, ils ont des spécificités :

- Changement de phase liquide-vapeur :

La température du fluide est quasiment uniforme. De grandes quantités de chaleur peuvent ainsi être transportées avec de petites différences de température.

- En ébullition, les paramètres importants qui interviennent sont :
  - L'enthalpie de changement d'état, ou chaleur latente de changement d'état, ici de vaporisation  $h_{fg}$  (ou  $L_v$ ) ; appelée aussi : enthalpie de vaporisation ;
  - La tension superficielle à l'interface liquide-vapeur (au niveau des bulles de vapeur) :  $\sigma$  ;
  - Différences de masse volumique entre les phases liquide (l) et vapeur (v) :  $\rho_l - \rho_v$ .  
Ces différences génèrent des forces de flottabilité proportionnelles à la quantité :  $g (\rho_l - \rho_v)$ .

## 2. Modes d'ébullition

Ebullition = Vaporisation à l'interface solide-liquide. Elle se produit lorsque :  $T_s > T_{sat}$ .

$T_s$  : Température de surface du solide, appelée aussi température de paroi ( $T_p$ ) ;

$T_{sat}$  : Température de saturation du fluide correspondant à la pression régnant au sein du liquide.

La densité (surfactive) de flux de chaleur de la surface du solide vers le liquide ( $q_s''$ ), en  $W.m^{-2}$ , est donnée par la loi (de convection) de Newton :

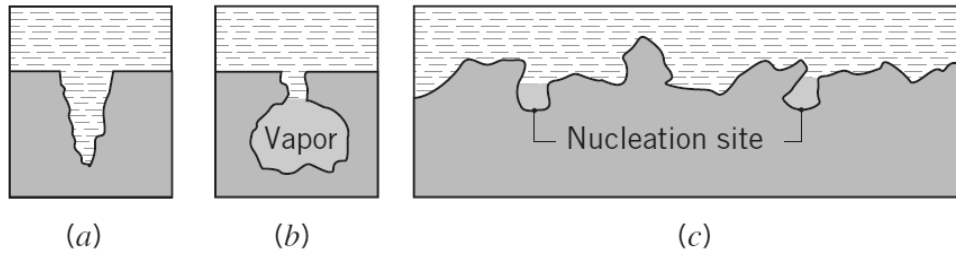
$$q_s'' = h (T_s - T_{sat}) = h \Delta T_e \quad (\text{Eq. 1})$$

$\Delta T_e$  : Surchauffe (de la température) à la paroi

Le processus d'ébullition est caractérisé par la formation de bulles de vapeur qui croissent au niveau des sites de nucléation puis se détachent de la paroi (**Fig. 3**). La dynamique de croissance d'une bulle de vapeur dépend, de manière compliquée, de :

- la surchauffe à la paroi ( $\Delta T_e$ ) ;
- la nature de la surface (lisse ou rugueuse) ;
- des propriétés thermophysiques du fluide, en particulier la tension superficielle ( $\sigma$ ).

Cette dynamique a un impact sur le mouvement du liquide au voisinage de la paroi, et donc influence beaucoup le coefficient d'échange de chaleur ( $h$ ).



**Fig. 3.** Formation de sites de nucléation [3]

- a) Cavité mouillée sans présence de vapeur piégée ; b) Cavité rentrante avec vapeur piégée ;
- c) Nucléation pour une surface rugueuse.

On peut classer l'ébullition en plusieurs modes (ou catégories) :

- *Ebullition en vase et Ebullition convective :*

*Ebullition en vase (en anglais : Pool boiling) :* Le corps du fluide est au repos (stagnant). Le mouvement du fluide au voisinage de la paroi est dû à la convection naturelle et au mélange généré par la croissance des bulles de vapeur et leur détachement.

*Ebullition convective :* Le mouvement du fluide est assuré par des forces extérieures assurant l'écoulement forcé du fluide ainsi que par de la convection naturelle et le mélange induit par les bulles de vapeur.

- *Ebullition saturée et Ebullition sous-saturée :*

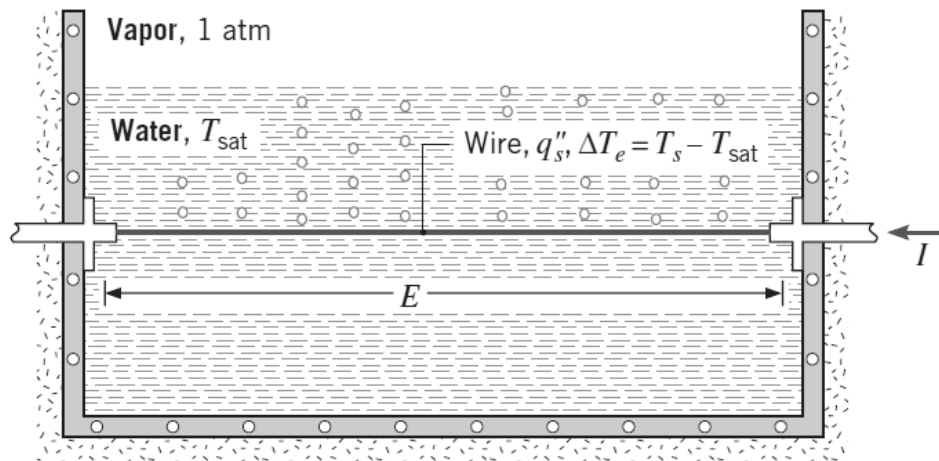
*Ebullition saturée :* La température du liquide dépasse légèrement la température de saturation du fluide. Les bulles de vapeur formées à la paroi sont propulsées à travers le liquide par les forces de flottabilité puis s'échappent par la surface libre liquide-vapeur.

*Ebullition sous-saturée ou sous-refroidie :* Au cœur du liquide, la température du fluide est inférieure à la température de saturation. Les bulles de vapeur formées à la surface du solide peuvent se condenser dans le liquide.

### 3. Ebullition en vase saturée

Pour étudier les mécanismes physiques qui ont lieu pendant l'ébullition, on examine la courbe d'ébullition.

En 1934, Nukiyama [6] fût le 1<sup>er</sup> à identifier les différents régimes liés à l'ébullition en vase, en utilisant le dispositif expérimental suivant (**Fig. 4**) :



**Fig. 4.** Dispositif expérimental de Nukiyama [3]

- Une résistance électrique horizontale en nichrome. Il s'agit donc d'un chauffage à flux imposé. La puissance électrique ( $P$ ) de l'élément chauffant est :

$$P = I \cdot E \quad (\text{Eq. 2})$$

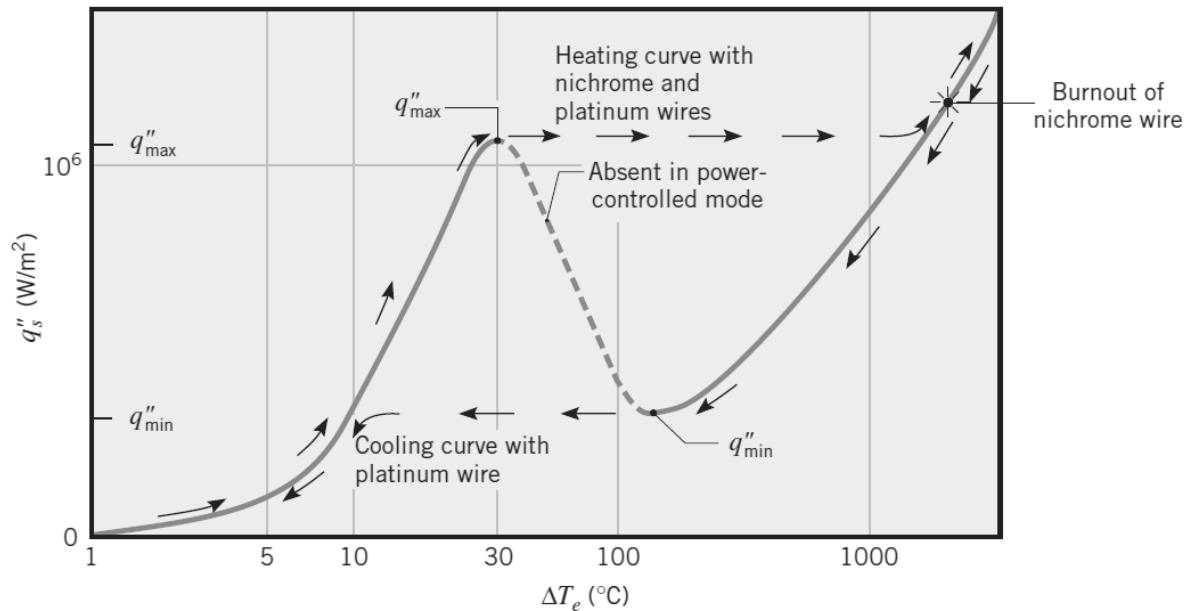
Le courant ( $I$ ) et la différence de potentiel ( $E$ ) sont mesurés.

- La température de l'élément chauffant est déterminée à partir d'une courbe d'étalonnage  $P = f(T)$ .
- La variable indépendante (ou paramètre de contrôle) est la densité de flux ( $q_s''$ ).
- La variable dépendante est la température de paroi ( $T_s$ ) ; et donc la surchauffe à la paroi ( $\Delta T_e$ ).

Nukiyama a représenté les résultats obtenus avec son dispositif expérimental sur une courbe d'ébullition (**Fig. 5**). Il a relevé le comportement suivant :

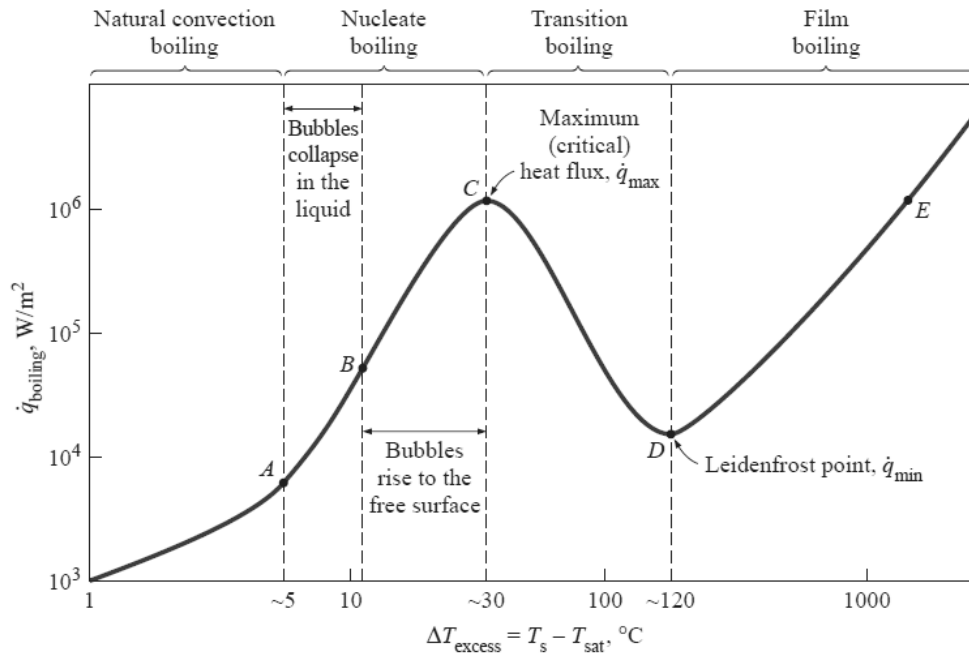
- Le phénomène d'ébullition (nucléation) est mis en évidence par la présence de bulles de vapeur. Il ne commence qu'à partir de  $\Delta T_e \approx 5 \text{ }^\circ\text{C}$ .

- Lorsque la puissance électrique de l'élément chauffant augmente, le flux de chaleur à la paroi ( $q_s''$ ) augmente très fortement vers des valeurs très élevées.
- Pour une valeur légèrement supérieure à  $q_{\max}''$ , la température de l'élément chauffant effectue un *saut* jusqu'au point de fusion ( $T \approx 1\,500\text{ K}$ ), provoquant ainsi le *burn-out* du fil en nichrome.



**Fig. 5.** Courbe d'ébullition de Nukiyama pour de l'eau saturée à  $P = 1\text{ atm}$  [3]  
(Chauffage à flux imposé)

L'expérience a été refaite avec une résistance en platine ayant une température de fusion plus élevée que le nichrome (point de fusion  $\approx 2\,045\text{ K}$ ). Nukiyama a pu maintenir le flux de chaleur à la paroi au-dessus de  $q_{\max}''$  sans l'apparition du phénomène de burn-out. Quand il a réduit la puissance électrique de l'élément chauffant, la variation de la surchauffe à la paroi ( $\Delta T_e$ ) avec  $q_{\max}''$  a suivi la courbe de refroidissement. Lorsque le flux de chaleur à la paroi ( $q_s''$ ) a atteint  $q_{\min}''$ , un abaissement supplémentaire de la puissance électrique de l'élément chauffant a conduit  $\Delta T_e$  à faire un *saut* brutal. Par la suite, le processus a suivi la courbe de chauffe originelle, pour revenir au point de saturation. L'effet d'hystérésis observé ici, disparaît lorsque la variable indépendante devient  $\Delta T_e$  ; l'étude ayant été menée en 1937 par Drew & Mueller [7] (**Fig. 6**).



**Fig. 6.** Courbe d'ébullition pour de l'eau saturée à  $P = 1 \text{ atm}$  [2]  
(Chauffage à température de paroi imposée)

## 4. Régimes d'ébullition

Pour de l'ébullition à température de paroi imposée, il existe quatre régimes d'ébullition (**Fig. 5**) :

- *Convection naturelle* :  $\Delta T_e \leq \Delta T_{e,A}$  ;  $\Delta T_{e,A} \approx 5 \text{ °C}$

A : Déclenchement de l'ébullition nucléée

En convection naturelle laminaire, on a :

$$h \sim \Delta T_e^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 3})$$

$$q_s'' \sim \Delta T_e^{\frac{5}{4}} \quad (\text{Eq. 4})$$

En convection naturelle turbulente, on a :

$$h \sim \Delta T_e^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Eq. 5})$$

$$q_s'' \sim \Delta T_e^{\frac{4}{3}} \quad (\text{Eq. 6})$$

- *Ebullition nucléée* :  $\Delta T_{e,A} \leq \Delta T_e \leq \Delta T_{e,C}$  ;  $\Delta T_{e,C} \approx 30 \text{ °C}$

Le recours à ce régime d'ébullition est recherché pour beaucoup de dispositifs de l'ingénierie, car le coefficient d'échange de chaleur en ébullition est bien supérieur à celui correspondant à la convection

forcée monophasique :  $h_{\text{ébullition}} \sim 10^4 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1} \gg h_{\text{monophasique}}$ . Dans ce régime, on distingue deux régions :

*Région AB* : Des bulles de vapeur isolées se forment au niveau des sites de nucléation, et qui se détachent de la surface du solide. Dans ce régime, la majorité du transfert de chaleur est dû à un échange direct entre la surface du solide et le liquide qui est en mouvement au voisinage de cette surface ; et non pas via les bulles de vapeur qui croissent au niveau de la surface. Lorsque  $\Delta T_e$  augmente, de plus en plus de sites de nucléation sont activés ; le nombre de bulles de vapeur augmente ainsi et une coalescence de bulles de vapeur est observée.

*Région BC* : La vapeur s'échappe en jets ou colonnes, puis en bouchons. Ceci réduit le mouvement du fluide au voisinage de la paroi. Au point C, beaucoup de vapeur se forme. Le mouillage de la paroi par le liquide devient ainsi plus ardu.

Le flux de chaleur critique ou maximal appelé aussi crise d'ébullition (Critical Heat Flux - CHF). Pour de l'eau à  $P = 1 \text{ atm}$  :  $q_{s,C}'' = q_{\text{max}}'' = 1 \text{ MW.m}^{-2}$ .

- *Ebullition de transition* :  $\Delta T_{e,C} \leq \Delta T_e \leq \Delta T_{e,D}$  ;  $\Delta T_{e,D} \approx 120 \text{ }^\circ\text{C}$

La formation de bulles de vapeur est tellement rapide qu'un film de vapeur commence à se former à la surface du solide. En tout point de la surface, les conditions vont osciller entre l'ébullition nucléée et l'ébullition en film. La surface couverte par le film de vapeur augmente avec  $\Delta T_e$ .

Le coefficient d'échange ( $h$ ) et  $q_s''$  diminuent lorsque  $\Delta T_e$  augmente, du fait que :  $k_{\text{vapeur}} \ll k_{\text{liquide}}$ .

- *Ebullition en film* :  $\Delta T_e \geq \Delta T_{e,D}$  ;  $\Delta T_{e,D} \approx 120 \text{ }^\circ\text{C}$

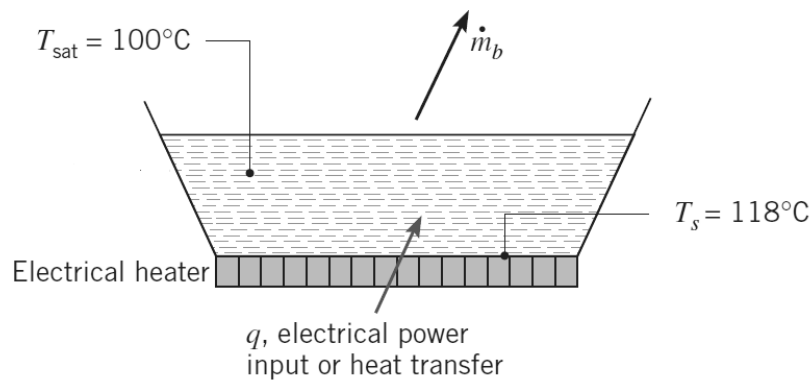
D : point de Leidenfrost. En ce point, la surface du solide est entièrement recouverte par le film de vapeur et  $q_{s,D}'' = q_{\text{min}}''$ . Le transfert de chaleur de la paroi au fluide (liquide) se fait par conduction à travers le film liquide et par rayonnement. Lorsque  $\Delta T_e$  augmente, le transfert de chaleur par rayonnement augmente. Et de ce fait,  $q_s''$  augmentera.

Dans les exercices qui vont suivre, on traitera essentiellement deux régimes d'ébullition : l'ébullition nucléée et l'ébullition en film. On présentera les corrélations les plus utilisées dans le domaine et qui traitent des paramètres tels que le flux de chaleur diphasique, le flux critique, le flux minimum et le coefficient d'échange de chaleur diphasique.

## Exercice 1

Le fond d'une casserole en cuivre, de Diamètre  $D = 30$  cm, est maintenu à une température de paroi  $T_s = 118$  °C par un réchauffeur électrique (**Fig. 6**). Calculer :

- 1) La puissance électrique nécessaire pour faire bouillir l'eau ( $P_{\text{électrique}}$ ) ;
- 2) Le débit massique de vaporisation ( $\dot{m}_{\text{ébullition}}$ ) ;
- 3) Le flux de chaleur critique ( $q''_{\text{max}}$ ).



**Fig. 6.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

En 1<sup>er</sup> lieu, on considère les hypothèses suivantes :

- On est en régime stationnaire (ou permanent) ;
- L'eau est à une pression  $P = 1$  atm ;
- L'eau est à l'état de saturation ;
- La face inférieure de la casserole (en cuivre lisse et poli), est considérée avoir de grandes dimensions ;
- Les pertes de chaleur du réchauffeur électrique sont négligées.

1) On est en situation de chauffage à température de paroi imposée.

On cherche en 1<sup>er</sup> lieu à identifier le régime d'ébullition correspondant à notre cas. Pour cela, on calcule la surchauffe à la paroi :

$$\Delta T_e = T_s - T_{\text{sat}} = 118 - 100 = 18 \text{ °C}$$

$T_{\text{sat}} = 100$  °C, est la température de saturation de l'eau à  $P = 1$  atm.

En se rapportant à la courbe d'ébullition de l'eau saturée (**Fig. 5**), on relève qu'on se retrouve en régime d'ébullition nucléée.

On utilise pour le calcul de la densité de flux à la paroi ( $q_s''$ ) la corrélation de Rohsenow [8], valable pour les surfaces propres et peu contaminées :

$$q_s'' = \mu_l h_{fg} \left[ \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{c_{p,l} \Delta T_e}{C_{s,f} h_{fg} Pr_l^n} \right)^3 \quad (\text{Eq. 7})$$

$q_s''$  : Densité de flux de chaleur par ébullition correspondant au régime d'ébullition nucléée ;

$\mu_l$  : Viscosité dynamique du liquide ;

$h_{fg}$  : Enthalpie de changement d'état liquide-vapeur ;

$g$  : Accélération de la pesanteur ;

$\rho_l$  et  $\rho_v$  : respectivement les masses volumiques du liquide et de la vapeur ;

$\sigma$  : Tension superficielle de l'eau ;

$c_{p,l}$  : Capacité calorifique massique du liquide ;

$\Delta T_e$  : Surchauffe (de température) à la paroi ;

$C_{s,f}$  et  $n$  sont des données issues de mesures expérimentales (**Fig. 7**) ;

$Pr_l$  : Nombre adimensionnel de Prandtl liquide.

La corrélation de Rohsenow est la première à avoir été établie pour le régime d'ébullition nucléée. Elle reste d'ailleurs la plus utilisée de nos jours.

Values of the coefficient  $C_{s,f}$  and  $n$  for various fluid–surface combinations

Fluid-Heating Surface Combination	$C_{s,f}$	$n$
Water–copper (polished)	0.0130	1.0
Water–copper (scored)	0.0068	1.0
Water–stainless steel (mechanically polished)	0.0130	1.0
Water–stainless steel (ground and polished)	0.0060	1.0
Water–stainless steel (teflon pitted)	0.0058	1.0
Water–stainless steel (chemically etched)	0.0130	1.0
Water–brass	0.0060	1.0
Water–nickel	0.0060	1.0
Water–platinum	0.0130	1.0
<i>n</i> -Pentane–copper (polished)	0.0154	1.7
<i>n</i> -Pentane–chromium	0.0150	1.7
Benzene–chromium	0.1010	1.7
Ethyl alcohol–chromium	0.0027	1.7
Carbon tetrachloride–copper	0.0130	1.7
Isopropanol–copper	0.0025	1.7

**Fig.7.** Valeurs des coefficients  $C_{s,f}$  et  $n$  pour différentes combinaisons paroi-fluide [2]

Détermination des propriétés de l'eau (à partir des tables thermodynamiques) :

- Eau liquide saturée :

$$\rho_l = \frac{1}{v_f} = 957.9 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_{p,l} = c_{p,f} = 4217 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\mu_l = \mu_f = 279 \times 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$$

$$\text{Pr}_l = \text{Pr}_f = 1.76$$

- Vapeur saturée :

$$\rho_v = \frac{1}{v_g} = 0.5956 \text{ kg.m}^{-3}$$

- Eau saturée :

$$h_{fg} = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

$$\sigma = 58.9 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$$

- Autres données :

$$g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$$

$$C_{s,f} = 0.0130 \text{ (Fig. 7, combinaison paroi - fluide = cuivre poli - eau)}$$

$$n = 1 \text{ (Fig. 7)}$$

L'utilisation des données ci-dessus donne le résultat suivant :

$$q_s'' = 0.836 \text{ MW.m}^{-2}$$

Le flux de chaleur par ébullition nucléée est :

$$q_s = q_s'' A = q_s'' \left( \frac{\pi D^2}{4} \right) \quad \text{(Eq. 8)}$$

$$q_s = 59.1 \text{ kW}$$

Les pertes de chaleur du réchauffeur électrique étant négligées, on obtient le résultat final :

$$P_{\text{électrique}} = q_s = 59.1 \text{ kW}$$

*Remarque* : Le coefficient d'échange de chaleur en ébullition ( $h_{\text{ébullition}}$ ) se calcule de la manière suivante :

$$h_{\text{ébullition}} = \frac{q_s''}{\Delta T_e} \approx 40\,000 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

2) Au régime stationnaire, toute la chaleur reçue par la casserole sert à vaporiser l'eau :

$$q_s = P_{\text{électrique}} = \dot{m}_{\text{ébullition}} h_{fg} \quad (\text{Eq. 9})$$

ou

$$\dot{m}_{\text{ébullition}} = \frac{P_{\text{électrique}}}{h_{fg}}$$

On obtient ainsi :

$$\dot{m}_{\text{ébullition}} = 26.2 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}$$

3) On utilise la corrélation de Kutateladze [9] :

$$q_{\text{max}}'' = C h_{fg} \rho_v \left( \frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 10})$$

La constante de Zuber vaut dans notre cas  $C = 0.149$  (plaque horizontale de grandes dimensions). Pour les cylindres horizontaux de grandes dimensions, des sphères ou bien des surfaces finies de grandes dimensions : la constante de Zuber vaut :  $C = 0.131$ .

Les propriétés thermophysiques du fluide ( $\rho_l$ ,  $\rho_v$ ,  $\sigma$ , ...) sont évaluées à la température de saturation  $T_{\text{sat}}$  (liquide ou vapeur). L'application numérique nous donne le résultat recherché :

$$q_{\text{max}}'' = 1.26 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2} = 126 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$$

$q_{\text{max}}''$  est la valeur maximale pour faire bouillir de l'eau à la pression atmosphérique normale. Dans notre cas (question 1) :  $q_s'' = 0.836 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$ . C'est une valeur qui est inférieure aux conditions critiques ( $q_{\text{max}}'' = 1.26 \text{ MW} \cdot \text{m}^{-2}$ ).

**Question supplémentaire** : Calculer la valeur du flux de chaleur minimum ( $q_{\text{min}}''$ ) correspondant au point de Leidenfrost.

La modélisation théorique de Zuber (pour des plaques horizontales de grandes dimensions) donne la corrélation suivante [10] :

$$q_{\min}'' = C h_{fg} \rho_v \left( \frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{(\rho_l + \rho_v)^2} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 11})$$

La constante C a été déterminée expérimentalement par Berenson [11] :  $C = 0.09$ .

Les propriétés thermophysiques du fluide sont déterminées à partir de la température de saturation  $T_{\text{sat}}$  (liquide ou vapeur).

L'application numérique nous donne :

$$q_{\min}'' = 18.9 \text{ kW} \cdot \text{m}^{-2} = 1.89 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2}$$

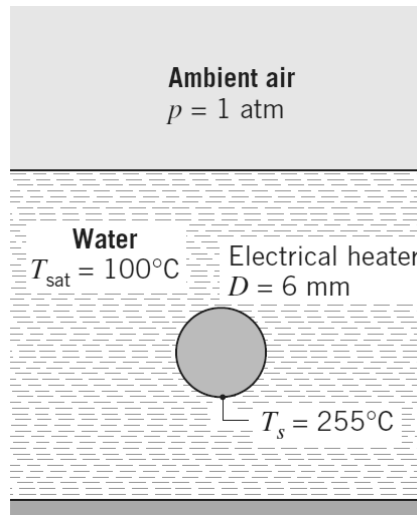
La courbe d'ébullition (**Fig. 5**) indique que la surchauffe à la paroi correspondant au point de Leidenfrost est :  $\Delta T_e = 120 \text{ K}$ .

Cette corrélation est valable pour des plaques horizontales de grandes dimensions ainsi que pour des cylindres horizontaux. Elle est précise pour environ 50 % des fluides examinés à des pressions modérées, mais fournit des estimations imprécises pour des pressions élevées.

## Exercice 2

Un élément chauffant électrique ayant un diamètre  $D = 6 \text{ mm}$  et une émissivité  $\varepsilon = 1$ , est immergé horizontalement dans un bain d'eau (**Fig. 8**). La température de surface de l'élément chauffant dans des conditions stationnaires d'ébullition, est  $T_s = 255 \text{ °C}$ .

Estimer la dissipation de chaleur par unité de longueur de l'élément chauffant ( $q'_s$ ).



**Fig. 8.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

Les hypothèses suivantes sont considérées :

- Régime permanent ;
- Eau saturée à  $P = 1 \text{ atm}$ .

Afin d'identifier le régime d'ébullition correspondant à notre cas, on calcule la surchauffe à la paroi (sachant que :  $T_{\text{sat}} = 100 \text{ °C}$ ) :  $\Delta T_e = T_s - T_{\text{sat}} = 155 \text{ K}$ .

Courbe d'ébullition : **Fig. 5** → pool boiling saturé avec température de paroi imposée.

Le régime d'ébullition est donc : ébullition en film  $\Delta T_e > 120 \text{ K}$ .

Le flux de chaleur linéique ( $q'_s$ ) s'écrit de la manière suivante :

$$q'_s = \frac{q_s}{L} = \frac{q_s'' \pi D L}{L} = q_s'' \pi D = \bar{h} \Delta T_e \pi D \quad (\text{Eq. 12})$$

Pour calculer le coefficient d'échange de chaleur global (convection et rayonnement), on utilise la corrélation établie par Bromley [12] qui est valable pour une ébullition en film sur la surface extérieure d'un cylindre horizontal :

$$\bar{h}^4 = \bar{h}_{\text{convection}}^4 + \bar{h}_{\text{rayonnement}} \cdot \bar{h}^3 \quad (\text{Eq. 13})$$

Le coefficient d'échange radiatif ( $\bar{h}_{\text{rayonnement}}$ ) se calcule par la formule suivante :

$$\bar{h}_{\text{rayonnement}} = \frac{\varepsilon \sigma (T_s^4 - T_{\text{sat}}^4)}{T_s - T_{\text{sat}}} \quad (\text{Eq. 14})$$

$\sigma$  : Constante de Stefan-Boltzmann.  $\sigma = 5.67 \times 10^{-8} \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}$ .

On obtient ainsi :

$$\bar{h}_{\text{rayonnement}} = 21.3 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Le coefficient d'échange convectif ( $\bar{h}_{\text{convection}}$ ) est calculé avec la corrélation suivante :

$$\overline{Nu}_D = \frac{\bar{h}_{\text{convection}} D}{k_v} = C \left( \frac{g (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} D^3}{\nu_v k_v (T_s - T_{\text{sat}})} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 15})$$

Cette corrélation est valable pour des cylindres ou des sphères de diamètre (D). La constante C vaut :

- 0.62 pour les cylindres horizontaux ;
- 0.67 pour les sphères.

L'expression de  $\bar{h}_{\text{convection}}$  devient :

$$\bar{h}_{\text{convection}} = 0.62 \left( \frac{k_v^3 \rho_v (\rho_l - \rho_v) g (h_{fg} + 0.8 c_{p,v} \Delta T_e)}{\mu_v D \Delta T_e} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 16})$$

$h'_{fg} = h_{fg} + 0.8 c_{p,v} \Delta T_e$  : enthalpie de changement d'état (ou chaleur latente de vaporisation) « corrigée », qui tient compte du fait que la température au sein du film de vapeur est supérieure à la température de saturation ; ce qui revient à préciser que la chaleur sensible existant au sein du film de vapeur est prise en compte.

Détermination des propriétés de l'eau (à partir des tables thermodynamiques) :

- Eau liquide saturée :  $\rho_l = 957.9 \text{ kg.m}^{-3}$
- Vapeur à la température moyenne du film de vapeur :

$$(\bar{T} = T_{\text{film}} = \frac{T_s + T_{\text{sat}}}{2} \approx 450 \text{ K})$$

$$\rho_v = 0.4902 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_{p,v} = 1980 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\mu_v = 15.25 \times 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$$

$$k_v = 0.0299 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

- Eau saturée :  $h_{fg} = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}$
- Autres données :  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$

En intégrant ces données dans **Eq. 16**, on obtient :

$$\bar{h}_{\text{convection}} = 238 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

On résout par la suite l'**Eq. 13** (par tâtonnement par exemple) :

$$\bar{h}^{4/3} = 238^{4/3} + 21.3 \bar{h}^{1/3}$$

Ceci donne :

$$\bar{h} = 254.1 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

Et

$$q'_s = 742 \text{ W.m}^{-1}$$

**Remarque :** Si la condition  $\bar{h}_{\text{rayonnement}} < \bar{h}_{\text{convection}}$  est vérifiée, on pourra utiliser l'approximation suivante :

$$\bar{h} = \bar{h}_{\text{convection}} + \frac{3}{4} \bar{h}_{\text{rayonnement}} \quad \text{(Eq. 17)}$$

Ce qui donne :

$$\bar{h} = 254 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$$

### Exercice 3

Une puce en silicium, d'une épaisseur  $L = 2.5 \text{ mm}$  et d'une conductivité thermique  $k = 135 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ , est refroidie à sa surface par l'ébullition (en régime d'ébullition nucléée) d'un liquide fluorocarbure (FC) saturé ( $T_{\text{sat}} = 57 \text{ °C}$ ). Le circuit électronique, qui se trouve sous la puce, dissipe une densité de flux de chaleur uniforme  $q''_0 = 5 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}$ . Les surfaces latérales de la puce sont supposées être parfaitement isolées (**Fig. 9**).

- 1) Calculer la température  $T_0$  à la surface inférieure de la puce ;
- 2) Calculer la densité de flux de chaleur critique ( $q''_{\text{max}}$ ).

**Données :**  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ .

Pour le fluide (FC saturé) :  $\rho_l = 1619.2 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $\rho_v = 13.4 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $c_{p,l} = 1.1 \text{ kJ.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;

$\sigma = 8.1 \times 10^{-3} \text{ N.m}^{-1}$  ;  $\mu_l = 440 \times 10^{-6} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$  ;  $Pr_l = 9.01$  ;  $h_{fg} = 84.4 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

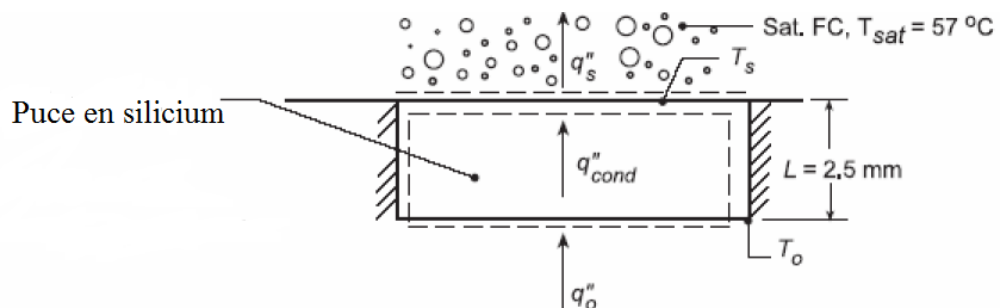
Les constantes de l'ébullition nucléée sont :  $C_{s,f} = 0.005$  et  $n = 1.7$ .

Corrélation de Rohsenow pour le régime d'ébullition nucléée :

$$q''_s = \mu_l h_{fg} \left[ \frac{g(\rho_l - \rho_v)}{\sigma} \right]^{\frac{1}{2}} \left( \frac{c_{p,l} \Delta T_e}{C_{s,f} h_{fg} Pr_l^n} \right)^3$$

Corrélation de Kutateladze & Zuber pour la densité de flux de chaleur critique ( $C = 0.149$ ) :

$$q''_{\text{max}} = C h_{fg} \rho_v \left( \frac{\sigma g (\rho_l - \rho_v)}{\rho_v^2} \right)^{\frac{1}{4}}$$



**Fig. 9.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :** 1)  $T_0 = 73.8 \text{ °C}$  ; 2)  $q''_{\text{max}} = 15.5 \times 10^4 \text{ W.m}^{-2}$ .

## Exercice 4

Estimer le coefficient d'échange de chaleur  $h$  par ébullition nucléée pour de l'eau à pression atmosphérique, à la surface extérieure d'un tube recouvert de platine (Fig. 10). Ce dernier a un diamètre de  $D = 10$  mm. Il est maintenu à une température (de paroi)  $T_s$  supérieure de  $10$  °C à la température de saturation.

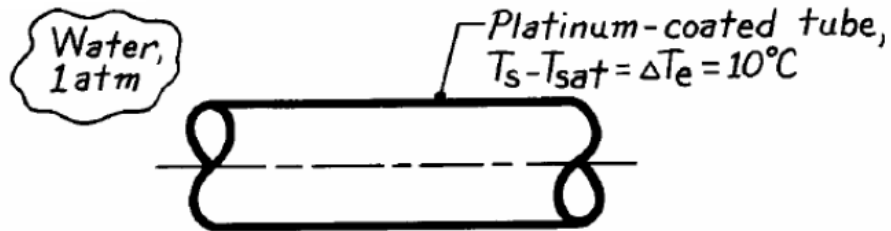


Fig. 10. Schéma de l'étude [3]

**Solution :**  $h = 13\,690 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ .

# Chapitre 5 : Condensation

## 1. Types de condensation

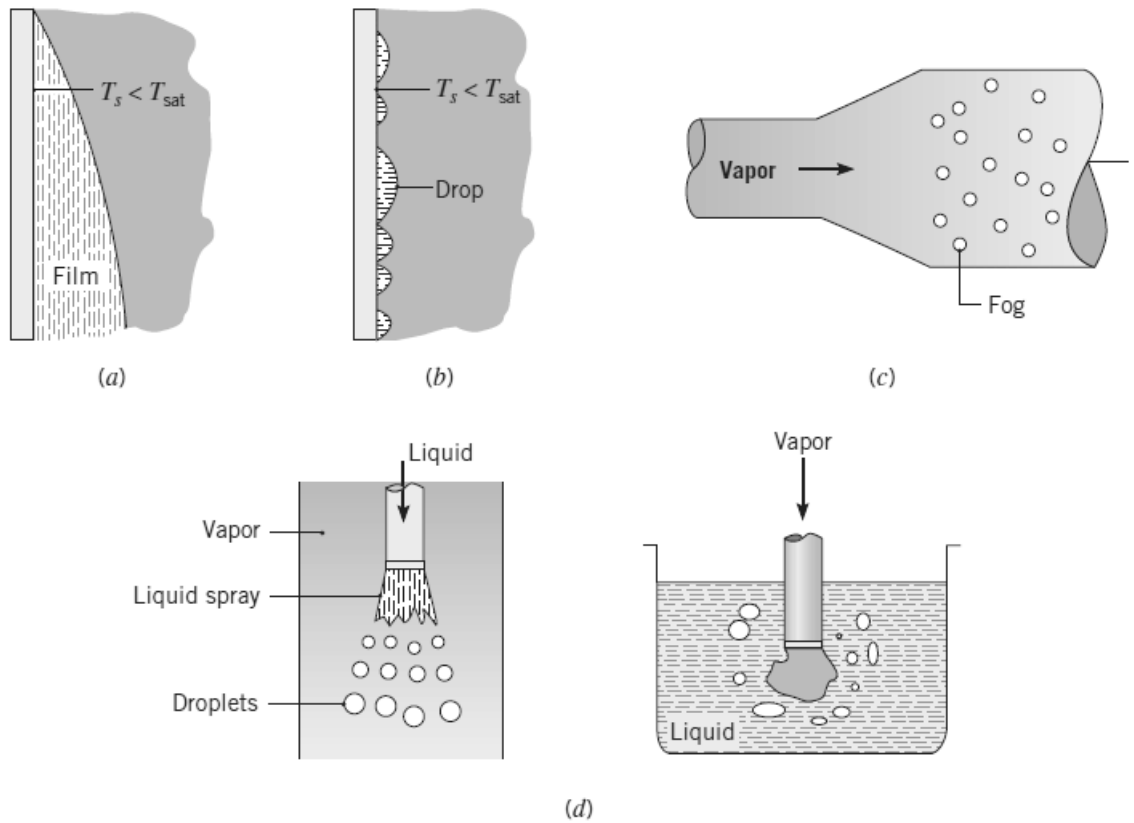
La condensation est un changement d'état (ou changement de phase) vapeur - liquide qui se produit lorsque la température de la vapeur ( $T_v$ ) descend en dessous de sa température de saturation ( $T_{sat}$ ).

Il existe plusieurs modes (ou types) de condensation (**Fig. 1**) :

- *Condensation homogène* : issue de l'augmentation de pression suite au phénomène d'expansion.
- *Condensation à contact direct* : la vapeur est en contact avec un liquide froid.
- *Condensation de surface* : La vapeur est en contact avec une paroi (ou une surface) froide qui est une à une température de surface ( $T_s$ ) tel que :  $T_s < T_{sat}$ .

Selon le degré de mouillabilité de la surface en question, on distingue deux types de condensation de surface :

- *Condensation en gouttes (en anglais : dropwise condensation)* : La surface est recouverte de matériau ou revêtement hydrophobe (un promoteur ; *exemple* : téflon, silicone) qui inhibe la mouillabilité de cette paroi. Des gouttes de petite taille se forment et coalescent par la suite pour s'écouler par gravité le long de la paroi. 90 % de la paroi est recouverte de gouttes dont le diamètre va de quelques microns à des gouttes pouvant être visibles à l'œil nu.
- *Condensation en film (en anglais : filmwise condensation)* : C'est la forme dominante de la condensation de surface. Elle se produit sur des surfaces propres et non contaminées. Le film liquide recouvre toute la paroi et s'écoule le long de cette paroi par gravité.



**Fig. 1.** Modes de condensation [3]

- a) Condensation de surface (en film) ; b) Condensation de surface (en gouttes) ;
- c) Condensation homogène ; d) Condensation à contact direct.

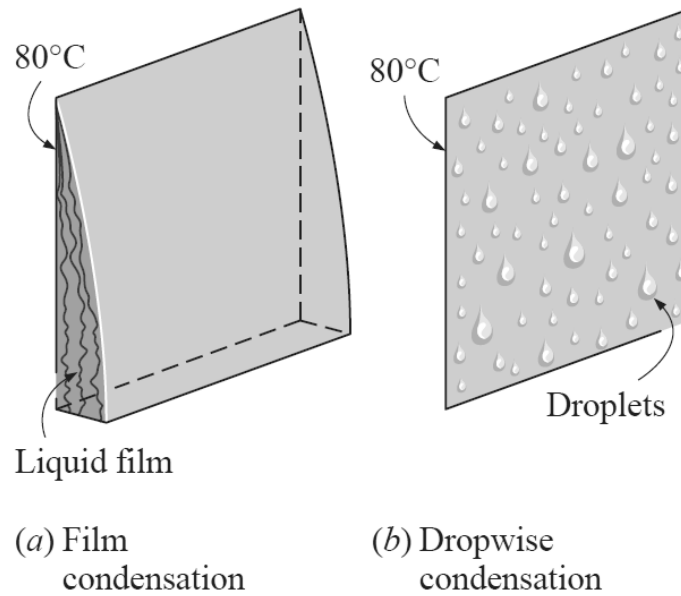
Le condensât (gouttes ou film) représente une résistance thermique ( $R_{th}$ ) entre la vapeur et la paroi. Dans la direction de l'écoulement du film liquide, l'épaisseur du condensât augmente, impliquant de ce fait l'accroissement de la résistance thermique. A cet effet, il est préférable d'utiliser des surfaces verticales courtes ou bien des cylindres horizontaux (intérieur : liquide froid ; extérieur : vapeur à condenser).

En comparant les deux types de condensation de surface, on relève que :

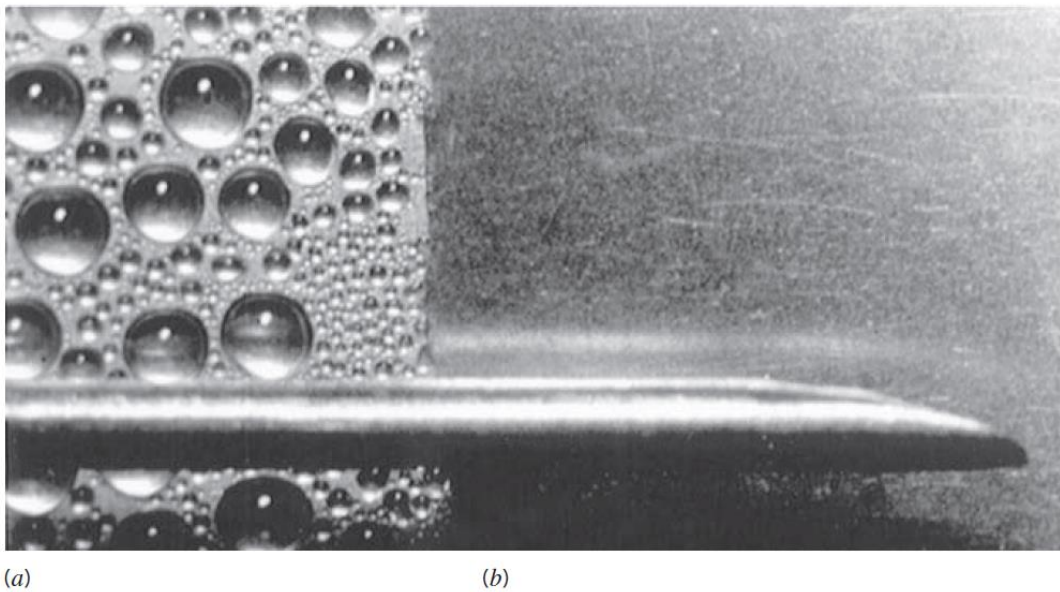
$$q \text{ (condensation en gouttes)} \gg q \text{ (condensation en film)}$$

$$h \text{ (condensation en gouttes)} \gg h \text{ (condensation en film)}$$

Pour la condensation en gouttes, le gros du transfert de chaleur est assuré par des gouttes de diamètre supérieur à  $100 \mu\text{m}$  (**Fig. 2 et Fig. 3**).



**Fig. 2.** Condensation sur une surface verticale, la température de surface étant inférieure à  $T_{\text{sat}}$  [2]  
 a) Condensation en film ; b) Condensation en gouttes.



**Fig. 3.** Condensation sur une surface verticale [3]  
 a) Condensation en gouttes ; b) Condensation en film.

Il est à souligner que les revêtements inhibant la mouillabilité de la paroi perdent peu à peu leur efficacité en raison de leur oxydation. Après un bout de temps, la condensation en gouttes est ainsi remplacée par la condensation en film. Dans les applications industrielles, il est préférable de recourir à la condensation en gouttes ; cependant, il est souvent difficile de maintenir dans le temps ce type de

condensation. Pour cette raison, et le fait aussi que les performances de la condensation en film sont inférieures à celles de la condensation en gouttes (la condensation en film est le phénomène limitant), le dimensionnement du condenseur est souvent basé sur l'hypothèse que la condensation est en film. Par la suite, on se concentrera uniquement sur ce type de condensation.

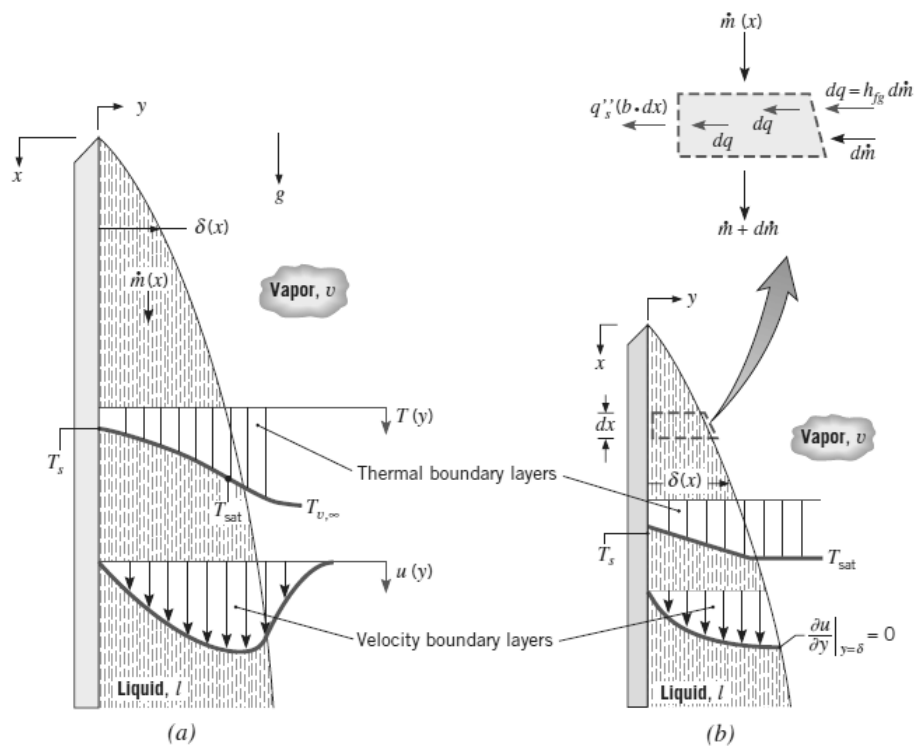
## 2. Condensation en film laminaire le long d'une plaque plane verticale

Soient (Fig. 4) :

$\delta$  : Epaisseur du film liquide ;

$\dot{m}$  : Débit massique du film liquide (ou débit massique du condensât) ;

$x$  : Distance à partir du bord d'attaque de la plaque plane verticale.



**Fig. 4.** Effets sur les couches limites hydrodynamique et thermique de la condensation en film le long d'une plaque plane de longueur (L) et de largeur (b) [3]  
a) Sans approximations ; b) Avec les hypothèses de Nusselt (1916).

$\delta$  et  $\dot{m}$  croissent lorsque  $x$  croit, en raison de la condensation continue de la vapeur au niveau de l'interface liquide-vapeur (qui est à  $T_{sat}$ ).

On a :  $T_s < T_{sat}$ , avec :

$T_s$  : Température de surface (ou de paroi) de la plaque. Cette température est supposée uniforme par la suite ;

$T_{sat}$  : Température de saturation de la vapeur correspondant à la pression de la vapeur.

Analysons dans ce qui suit les mécanismes physiques complexes qui existent pour le film liquide :

- La vapeur peut être surchauffée :  $T_{v,\infty} > T_s$  ;
- La vapeur peut être composée d'un ou plusieurs gaz incondensables (*exemple* : l'air). Dans ce cas, la vapeur n'est pas pure ;
- Il existe une contrainte de cisaillement ( $\tau$ ) à l'interface liquide-vapeur. De ce fait, il existe un gradient de vitesse entre les phases vapeur et liquide.

En 1916, Nusselt [13] a réalisé une étude théorique analytique du film liquide qui relie le coefficient d'échange de chaleur (diphase) par condensation aux différents paramètres intervenant dans la condensation. Les principales hypothèses sur lesquelles ce modèle est bâti sont les suivantes :

- Le régime d'écoulement du film liquide est laminaire lisse ( $Re \leq 30$ ) ;
- les propriétés thermophysiques ( $\rho$ ,  $k$ ,  $\mu$ , ...) du fluide sont constantes (en particulier, elles sont indépendantes de la température) ;
- La vapeur est supposée être pure et stagnante (i.e. au repos). Sa température est uniforme et égale à  $T_{sat}$ . Il n'y a donc pas de gradient de température au sein de la phase vapeur (pas de conduction de chaleur). Il y a uniquement de la condensation au niveau de l'interface liquide-vapeur ;
- La contrainte de cisaillement à l'interface liquide-vapeur ( $\tau$ ) est négligée, en raison des faibles valeurs des vitesses de la vapeur (cette dernière étant stagnante) et du film liquide :

$$\tau = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0 \quad \text{(Eq. 1)}$$

d'où :

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0 \quad \text{(Eq. 2)}$$

- L'advection (de la quantité de mouvement et de l'énergie) est négligée au sein du film liquide, du fait des faibles valeurs pour la vitesse du film liquide.

Dans ce cas, on a :

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{Eq. 3})$$

L'expression de la température au sein du film liquide devient :

$$T(y) = A y + B \quad (\text{Eq. 4})$$

A et B sont des constantes.

Le profil de température au sein du film liquide est donc linéaire : Le transfert de chaleur dans le film liquide se fait uniquement par conduction de chaleur.

L'équation de conservation de la quantité de mouvement projetée sur x, s'écrit après avoir considéré :

$$\frac{dP_\infty}{dx} = \rho_v g \quad (\text{Eq. 5})$$

$$\frac{d^2 u}{dy^2} = -\frac{g}{\mu_l} (\rho_l - \rho_v) \quad (\text{Eq. 6})$$

En intégrant cette expression deux fois et en considérant les conditions aux limites suivantes :

$$u|_{y=0} = 0 \quad (\text{à la paroi}) \quad (\text{Eq. 7})$$

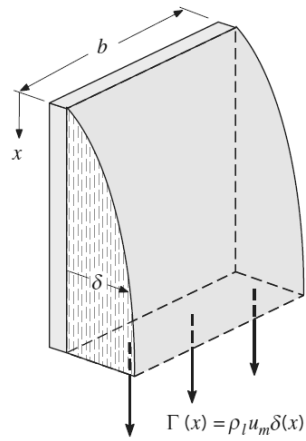
$$\left. \frac{du}{dy} \right|_{y=\delta} = 0 \quad (\text{à l'interface liquide-vapeur}) \quad (\text{Eq. 8})$$

On obtient ainsi le profil (parabolique) des vitesses dans le film liquide :

$$u(y) = \frac{g(\rho_l - \rho_v) \delta^2}{\mu_l} \left[ \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \quad (\text{Eq. 9})$$

On définit le débit massique du film liquide par unité de largeur de la plaque (b) (**Fig. 5**) :

$$\Gamma(x) = \frac{\dot{m}_x}{b} = \int_{y=0}^{y=\delta(x)} \rho_l u(y) dy \quad (\text{Eq. 10})$$



**Fig. 5.** Débit massique du film liquide par unité de largeur de la plaque ( $\Gamma$ ) [3]

À partir de l'Eq. 9, on obtient :

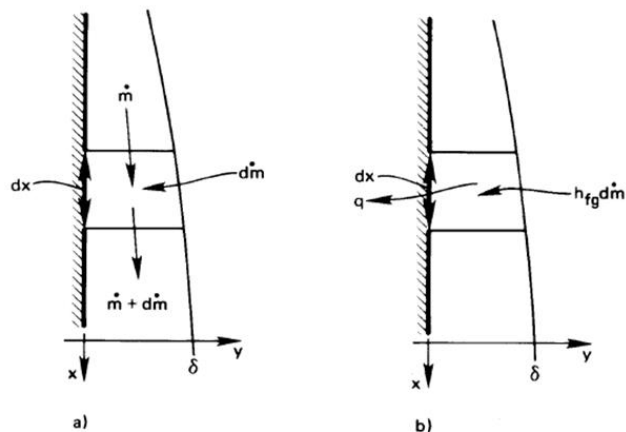
$$\Gamma(x) = \frac{g\rho_l(\rho_l - \rho_v)\delta^3}{3\mu_l} \quad (\text{Eq. 11})$$

L'équation de la conservation de l'énergie pour un petit élément du film liquide (**Fig. 6**), s'écrit :

$$dq = h_{fg}d\dot{m} \quad (\text{Eq. 12})$$

$dq$  : Flux de chaleur traversant le film liquide ;

$h_{fg}d\dot{m}$  : Flux de chaleur rejeté (de la vapeur) par condensation.



**Fig. 6.** Transferts de masse et de chaleur au sein du film liquide [5]

a) Bilan de matière ; b) Bilan d'énergie.

L'advection thermique au sein du film liquide étant négligée, on a :

$$dq = q_s'' b dx \quad (\text{Eq. 13})$$

Le profil de température étant linéaire au sein du film liquide, on utilise la loi de Fourier (pour la conduction) :

$$q_s'' = \frac{k_l (T_{\text{sat}} - T_s)}{\delta} \quad (\text{Eq. 14})$$

$$dq = h_{fg} d\dot{m} = q_s'' b dx \quad (\text{Eq. 15})$$

d'où :

$$\frac{q_s''}{h_{fg}} = \frac{d\dot{m}}{b dx} = \frac{d\Gamma}{dx} \quad (\text{Eq. 16})$$

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{q_s''}{h_{fg}} = \frac{k_l (T_{\text{sat}} - T_s)}{\delta h_{fg}} \quad (\text{Eq. 17})$$

or,

$$\frac{d\Gamma}{dx} = \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) \delta^2}{\mu_l} \cdot \frac{d\delta}{dx} \quad (\text{Eq. 18})$$

Les équations **Eq. 11** et **Eq. 18** permettent d'obtenir l'expression suivante :

$$\delta^3 d\delta = \frac{k_l \mu_l (T_{\text{sat}} - T_s)}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h_{fg}} dx \quad (\text{Eq. 19})$$

On intègre cette expression en tenant compte de la condition limite (à la paroi) :

$$\delta(x)|_{x=0} = 0 \quad (\text{Eq. 20})$$

On obtient ainsi :

$$\delta(x) = \left( \frac{4 k_l \mu_l (T_{\text{sat}} - T_s) x}{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h_{fg}} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 21})$$

et

$$\Gamma(x) = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v)}{\mu_l} \right)^{\frac{1}{4}} \cdot \left( \frac{k_l (T_{\text{sat}} - T_s) x}{h_{fg}} \right)^{\frac{3}{4}} \quad (\text{Eq. 22})$$

Les résultats de la théorie de Nusselt ont été améliorés par Nusselt lui-même puis par Rohsenow, en prenant en compte les effets de l'advection thermique (le film liquide n'est pas saturé, mais sous-refroidi) :

$$h'_{fg} = h_{fg} + 0.68 c_{p,l}(T_{sat} - T_s) = h_{fg} (1 + 0.68 Ja) \quad (\text{Eq. 23})$$

Ja : Nombre adimensionnel de Jakob, qui est défini par la relation suivante :

$$Ja = \frac{c_{p,l}(T_{sat}-T_s)}{h_{fg}} \quad (\text{Eq. 24})$$

Le nombre de Jakob représente le ratio maximum de l'énergie sensible absorbée par le film liquide et de la chaleur latente ( $h_{fg}$ ) absorbée par le film liquide pendant la condensation.

Afin de prendre en compte cette amélioration des résultats, toutes les expressions qui ont été établies auparavant ou qui seront établies par la suite utiliseront la grandeur enthalpie de changement d'état *modifiée* ou *corrigée* ( $h'_{fg}$ ) au lieu de l'enthalpie de changement d'état ( $h_{fg}$ ).

Le flux de chaleur local s'écrit avec la loi de Newton :

$$q_s''|_x = h_x(T_{sat} - T_s) \quad (\text{Eq. 25})$$

avec

$$h_x = \frac{k_l}{\delta(x)} \quad (\text{Eq. 26})$$

En utilisant l'expression de l'épaisseur du film liquide (**Eq. 21**), on obtient la formule permettant de calculer la valeur du coefficient d'échange de chaleur (local) par condensation :

$$h_x = \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{4 \mu_l (T_{sat} - T_s) x} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 27})$$

On relève ainsi que :

$$h_x \sim x^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 28})$$

Le coefficient d'échange de chaleur (global ou moyen) par condensation, s'écrit :

$$\bar{h}_L = \frac{1}{L} \int_0^L h_x dx \quad (\text{Eq. 29})$$

On démontre facilement que :

$$\bar{h}_L = \frac{4}{3} h_L \quad (\text{Eq. 30})$$

Dans ce cas, on obtient :

$$\bar{h}_L = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l (T_{sat} - T_s) L} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 31})$$

or

$$\overline{Nu}_L = \frac{\bar{h}_L \cdot L}{k_l} \quad (\text{Eq. 32})$$

On obtient ainsi :

$$\overline{Nu}_L = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} L^3}{\mu_l k_l (T_{sat} - T_s)} \right)^{\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 33})$$

*Remarques :*

- Les propriétés du film liquide sont évaluées à la température (moyenne) :

$$T_{\text{film}} = \frac{T_{\text{sat}} + T_s}{2} \quad (\text{Eq. 34})$$

En considérant que le film est saturé liquide à cette température ( $T_{\text{film}}$ ).

$\rho_v$  et  $h'_{fg}$  correspondent à l'état saturation (à  $T_{\text{sat}}$ ).

- Cette expression du nombre de Nusselt (**Eq. 33**) a été testée par les travaux de Sparrow & Gregg et Chen. L'erreur observée a été inférieure à 3 % (pour  $Ja \leq 0.1$  et  $1 \leq Pr_l \leq 100$ ).
- Cette expression du nombre de Nusselt peut être utilisée pour de la condensation sur la surface interne ou externe d'un cylindre vertical de rayon  $R$  si :

$$\delta \ll R \quad (\text{Eq. 35})$$

Donc un cylindre de faible courbure ;  $\delta$  étant l'épaisseur du film liquide.

- Le flux de chaleur total (ou global :  $q$ ) sur toute la plaque (de surface  $A = L \times b$  ;  $L$  étant la longueur de la plaque et  $b$  étant sa largeur) s'écrit :

$$q = \bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s) \quad (\text{Eq. 36})$$

- Le débit massique global de condensation ( $\dot{m}_c$ ) s'écrit :

$$\dot{m}_c = \dot{m}|_{x=L} = \frac{q}{h'_{fg}} = \frac{\bar{h}_L A (T_{\text{sat}} - T_s)}{h'_{fg}} \quad (\text{Eq. 37})$$

- Les expressions donnant  $q$  et  $\dot{m}_c$  sont applicables pour toutes les géométries ( $\bar{h}_L$  qui sera fonction de la géométrie et du régime d'écoulement du film liquide).

### 3. Régimes d'écoulement dans le film liquide

On définit le nombre de Reynolds de la manière suivante :

$$Re = \frac{4 \Gamma}{\mu_l} \quad (\text{Eq. 38})$$

avec

$$\Gamma = \frac{\dot{m}}{b} \quad (\text{Eq. 39})$$

et

$$\dot{m} = \rho_l u_m (\delta \cdot b) \quad (\text{Eq. 40})$$

$u_m$  : Vitesse moyenne dans le film liquide pour une abscisse  $x$  donnée ;

$\delta \cdot b$  : Section de passage du film liquide pour une abscisse  $x$  donnée.

De ce fait :

$$Re = \frac{4 \dot{m}}{\mu_l b} = \frac{4 \rho_l u_m \delta}{\mu_l} \quad (\text{Eq. 41})$$

Les régimes d'écoulement pour le film liquide sont au nombre de 3 (**Fig. 7**) :

- $Re \leq 30$  : *Régime laminaire lisse*

On applique ici une autre formulation du nombre de Nusselt ; et qui est plus adaptée à l'étude de la condensation en film sur une plaque plane verticale :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} \quad (\text{Eq. 42})$$

Dans ce cas, le nombre de Nusselt s'écrit :

$$\overline{Nu} = 1.47 Re_{\delta}^{\frac{1}{3}} \quad (\text{Eq. 43})$$

Le nombre de Reynolds ( $Re_{\delta}$ ) est associé à  $\delta|_{x=L}$  (extrémité basse de la plaque) :  $Re_{\delta} = Re|_{x=L}$ .

- $30 < Re \leq 1\ 800$  : *Régime laminaire ondulé*

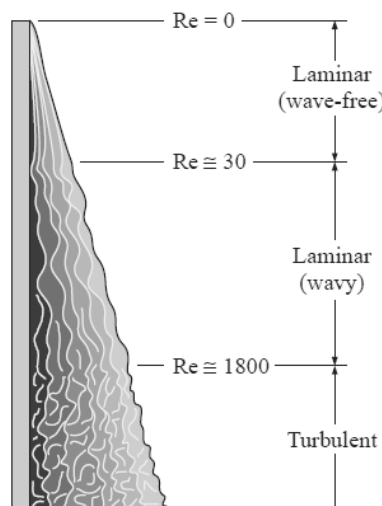
Les corrélations sont d'origine expérimentale. Kutateladze a proposé et recommandé la corrélation suivante [14] :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = \frac{Re_{\delta}}{1.08 Re_{\delta}^{1.22} - 5.2} \quad (\text{Eq. 44})$$

- $Re > 1\ 800$  et  $Pr_l \geq 1$  : *Régime turbulent*

Labuntsov a recommandé la corrélation suivante [15] :

$$\overline{Nu} = \frac{\bar{h} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = \frac{Re_{\delta}}{8\ 750 + 58 Pr_l^{-0.5} (Re_{\delta}^{0.75} - 253)} \quad (\text{Eq. 45})$$



**Fig. 7.** Régimes d'écoulement au sein du film liquide [2]

Généralement, l'épaisseur du film liquide ( $\delta$ ) n'est pas connue. On procède alors à la réécriture des équations précédentes de façon à s'affranchir de  $Re_\delta$  :

$$Re = \frac{4\Gamma}{\mu_1} = \frac{4\dot{m}}{\mu_1 b} = \frac{4}{\mu_1 b} \cdot \frac{\bar{h}_L(L \cdot b)(T_{sat} - T_s)}{h'_{fg}} = \frac{4\bar{h}_L L (T_{sat} - T_s)}{\mu_1 h'_{fg}} \cdot \frac{\left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{\left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \cdot \frac{k_l}{k_l} \quad (\text{Eq. 46})$$

d'où :

$$Re = 4 P \bar{Nu} \quad (\text{Eq. 47})$$

$P$  est un nombre adimensionnel donné par l'expression suivante :

$$P = \frac{k_l L (T_{sat} - T_s)}{\mu_1 h'_{fg} \left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \quad (\text{Eq. 48})$$

Les corrélations correspondant aux différents régimes d'écoulement du film liquide s'écrivent ainsi :

- $P \leq 15.8$  : Régime laminaire lisse

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h} \left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = 0.943 P^{-\frac{1}{4}} \quad (\text{Eq. 49})$$

- $15.8 < P \leq 2530$  : Régime laminaire ondulé

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h} \left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = \frac{1}{P} (0.68 P + 0.89)^{0.82} \quad (\text{Eq. 50})$$

- $P > 2530$  et  $Pr_1 \geq 1$  : Régime turbulent

$$\bar{Nu} = \frac{\bar{h} \left(\frac{v_1^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = \frac{1}{P} \left[ (0.024 P - 53) \cdot Pr_1^{\frac{1}{2}} + 89 \right]^{\frac{4}{3}} \quad (\text{Eq. 51})$$

*Synthèse* : Pour un problème donné, on calcule le nombre adimensionnel  $P$  à partir de sa formule de définition (Eq. 48). Ensuite, selon la nature du régime d'écoulement du film liquide, on utilise l'une des trois corrélations ci-dessus (Eq. 49 à Eq. 51) pour calculer le nombre de Nusselt ( $\bar{Nu}$ ) puis le

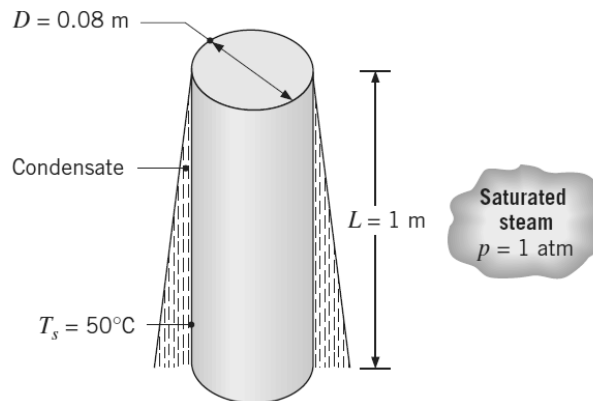
coefficient d'échange de chaleur par condensation ( $\bar{h}$ ) et enfin le flux de chaleur et le débit massique de condensation.

Dans ce qui suit, des exercices sont proposés pour se familiariser avec le calcul des principaux paramètres liés à la condensation : flux de chaleur et débit massique, et ce à partir de la connaissance du régime d'écoulement du film liquide.

## Exercice 1

La surface extérieure d'un cylindre vertical, de longueur  $L = 1$  m et de diamètre extérieur  $D = 80$  mm, est exposé à de la vapeur saturée à  $P = 1$  atm (**Fig. 8**). Cette surface est maintenue à une température  $T_s = 50$  °C par l'écoulement de l'eau froide à l'intérieur du tube. Calculer :

- 1) le flux de chaleur évacué vers l'eau froide, par condensation ( $q_c$ ) ;
- 2) le débit massique de condensation ( $\dot{m}_c$ ).



**Fig. 8.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

Les hypothèses suivantes sont considérées :

Régime permanent

- L'épaisseur du film liquide ( $\delta$ ) est supposée être très inférieure au rayon du cylindre ( $R$ ) :  $\delta \ll R$ . Cette hypothèse sera vérifiée à posteriori (à la fin de cette application). De ce fait, les résultats de l'étude de la condensation en film sur une plaque plane verticale de longueur ( $L$ ) sont applicables pour de la condensation en film le long d'un cylindre verticale de rayon ( $R$ ) et de longueur ( $L$ ) ;
- Il n'y a pas de gaz incondensables au sein de la phase vapeur (ou concentration ou teneur massique négligeable).

1) Calcul du flux de chaleur par condensation ( $q_c$ ) :

$$q_c = \bar{h} A (T_{\text{sat}} - T_s) = \bar{h} (\pi D L) (T_{\text{sat}} - T_s)$$

On calcule le nombre adimensionnel  $P$  à partir de l'**Eq. 48** :

$$P = \frac{k_l L (T_{\text{sat}} - T_s)}{\mu_l h'_{fg} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}}$$

Les propriétés du liquide sont considérées pour  $T_{\text{film}} = \frac{T_{\text{sat}} + T_s}{2} = 348 \text{ K}$  :

$$k_l = k_f = 0.668 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

$$\mu_l = \mu_f = 375 \times 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$$

$$v_l = v_f = \frac{\mu_f}{\rho_f} = 385 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2.\text{s}^{-1}$$

$$\rho_l = \rho_f = \frac{1}{v_f} = 975 \text{ kg.m}^{-3}$$

$$c_{p,l} = c_{p,f} = 4193 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$$

L'eau étant saturée à  $P = 1 \text{ atm}$ , la température de saturation correspondante est donc :  $T_{\text{sat}} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ .

De ce fait, la chaleur latente de condensation est :  $h_{fg} = 2257 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

La vapeur étant saturée, la masse volumique de la vapeur est donc :  $\rho_v = \frac{1}{v_g} = 0.5955 \text{ kg.m}^{-3}$ .

On calcule la valeur de la chaleur latente modifiée :  $h'_{fg} = h_{fg}(1 + 0.68 \text{ Ja})$ .

Le nombre adimensionnel de Jakob est :

$$\text{Ja} = \frac{c_{p,l}(T_{\text{sat}} - T_s)}{h_{fg}} = 0.029$$

d'où :

$$h'_{fg} = 2301.5 \text{ kJ.kg}^{-1}$$

Après calcul, on a :

$$P = 1501$$

Comme  $15.8 < P \leq 2530$ , le régime d'écoulement du film liquide est laminaire ondulé.

Le nombre de Nusselt vaut dans ce cas :

$$\overline{\text{Nu}} = \frac{\bar{h} \left( \frac{v_l^2}{g} \right)^{\frac{1}{3}}}{k_l} = \frac{1}{P} (0.68 P + 0.89)^{0.82}$$

$$\overline{Nu} = 0.2$$

$$\bar{h} = 5\,400 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1}$$

Enfin, le flux de chaleur global par condensation est :

$$q_c = \bar{h} (\pi D L) (T_{\text{sat}} - T_s) \approx \mathbf{68 \text{ kW}}$$

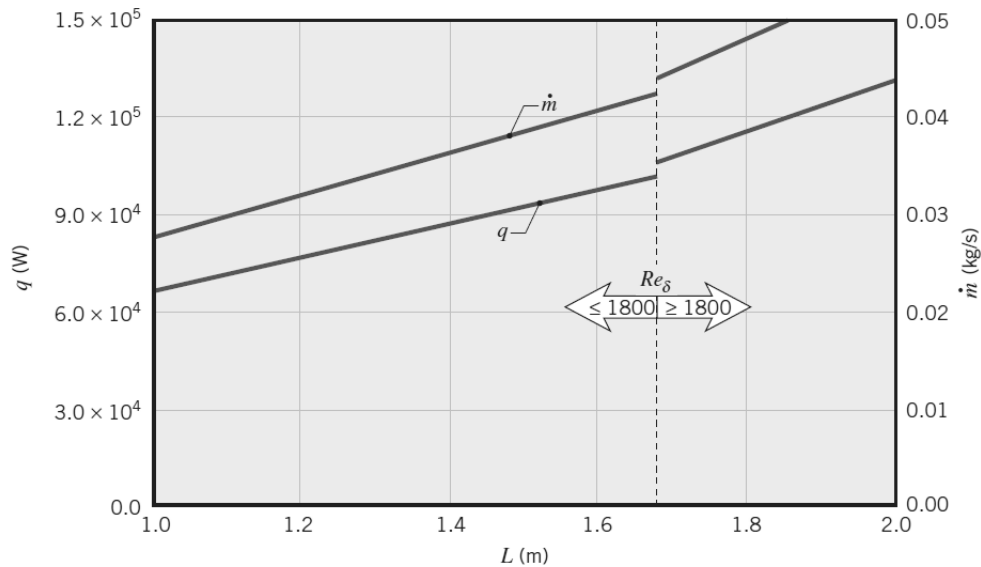
3) Calcul du débit massique global par condensation :

$$\dot{m}_c = \frac{q_c}{h_{fg}} = \mathbf{28.3 \text{ g} \cdot \text{s}^{-1}}$$

Il s'agit ici du débit massique du film liquide pour  $x = L$  ; c'est aussi le débit massique total de condensation et la quantité totale de vapeur condensée par unité de temps.

*Remarques :*

- En calculant approximativement l'épaisseur maximale du film liquide (donc pour  $x = L$ ) avec l'**Eq. 21**, on trouve :  $\delta = 0.218 \text{ mm}$ , or,  $R = 40 \text{ mm}$ . De ce fait :  $\delta \ll R$ . Ceci justifie la deuxième hypothèse que l'on a prise au début de l'application.
- Effets de la présence de gaz incondensables (exemple : l'air) présents dans la phase vapeur :  
Il en résulte une baisse importante du flux de chaleur par condensation et du débit massique global par condensation.  
*Exemple :* Si la vapeur contient la proportion massique de 1 % en gaz incondensables, alors les grandeurs  $q_c$  et  $\dot{m}_c$  diminueraient de 65 %.
- Effets de l'augmentation de la longueur du cylindre  $L$  (**Fig. 9**) :  
Si on augmente  $L$  de 1 m à 2 m : le flux de chaleur de condensation augmenterait de 70 kW à 130 kW et le débit massique de condensation augmenterait de 30 g.s<sup>-1</sup> à plus de 50 g.s<sup>-1</sup>.



**Fig. 9.** Influence de la longueur de la plaque ( $L$ ) sur les paramètres de condensation [3]

## Exercice 2

De la vapeur d'eau saturée, à 1 atm, condense le long de la surface extérieure d'un cylindre vertical (diamètre externe  $D = 100$  mm, longueur  $L = 1$  m) (**Fig. 10**). La température de la surface extérieure du cylindre est uniforme ( $T_s = 94$  °C).

- 1) Peut-on assimiler la condensation en film le long de ce cylindre vertical à de la condensation en film le long d'une plaque plane verticale ? Justifier votre réponse (considérer que l'épaisseur du film liquide  $\delta|_{x=L} = 0.12$  mm) ;
- 2) Quel est le régime d'écoulement du film liquide ?
- 3) Calculer le coefficient d'échange de chaleur ( $\bar{h}$ ) ;
- 4) Calculer le flux de chaleur de condensation ( $q_c$ ) ;
- 5) Calculer le débit massique de condensation ( $\dot{m}_c$ ).

On considère que le condenseur ne contient pas de gaz incondensables.

Données :  $g = 9.8$  m.s<sup>-2</sup>.

Vapeur d'eau saturée à 1 atm :  $T_{\text{sat}} = 100$  °C ;  $\rho_v = 0.596$  kg.m<sup>-3</sup> ;  $h_{fg} = 2257$  kJ.kg<sup>-1</sup>.

Eau liquide à  $T_f = \frac{T_s + T_{\infty}}{2} = 97$  °C :  $\rho_l = 960.6$  kg.m<sup>-3</sup> ;  $\mu_l = 289 \times 10^{-6}$  N.s.m<sup>-2</sup> ;  $c_{p,l} = 4214$  J.kg<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup> ;  $k_l = 0.679$  W.m<sup>-1</sup>.K<sup>-1</sup>.

Régime laminaire lisse :

$$Re_{\delta} = 3.78 \left\{ \frac{k_l L (T_{sat} - T_s)}{\mu_l h'_{fg} \left(\frac{\nu_l^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \right\}^{\frac{3}{4}}$$

Régime laminaire à vagues :

$$Re_{\delta} = \left\{ \frac{3.7 k_l L (T_{sat} - T_s)}{\mu_l h'_{fg} \left(\frac{\nu_l^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} + 4.8 \right\}^{0.82}$$

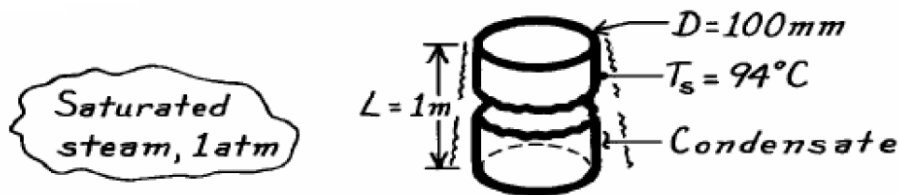


Fig. 10. Schéma de l'étude [3]

**Solution :**

- 1) On a :  $\delta = 0.12 \text{ mm}$  et  $R = \frac{D}{2} = 50 \text{ mm}$ . De ce fait :  $\delta \ll R$ . Ceci justifie le fait que dans le cas de cet exercice, les résultats obtenus pour la condensation en film le long d'une plaque verticale restent valables pour de la condensation en film le long d'un cylindre vertical.
- 2) On commence par supposer que le régime d'écoulement du film liquide est laminaire. De ce fait, on utilise la formule suivante :

$$Re_{\delta} = 3.78 \left\{ \frac{k_l L (T_{sat} - T_s)}{\mu_l h'_{fg} \left(\frac{\nu_l^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} \right\}^{\frac{3}{4}}$$

avec

$$h'_{fg} = h_{fg} (1 + 0,68 \text{ Ja})$$

$$\text{Ja} = \frac{c_{p,l} (T_{sat} - T_s)}{h_{fg}}$$

ce qui donne :  $\text{Ja} = 0.0112$  et  $h'_{fg} = 2\,274 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

De ce fait, on obtient :  $Re_{\delta} = 269$ . On a donc :  $30 < Re_{\delta} < 1\ 800$ . Le régime d'écoulement est donc laminaire à vagues. Le nombre de Reynolds est ainsi recalculé avec la formule appropriée :

$$Re_{\delta} = \left\{ \frac{3.7 k_l L (T_{sat} - T_s)}{\mu_l h'_{fg} \left(\frac{v_l^2}{g}\right)^{\frac{1}{3}}} + 4.8 \right\}^{0.82}$$

Ce qui donne :  $Re_{\delta} = 311$ .

3) Le coefficient d'échange de chaleur de condensation ( $\bar{h}$ ) est calculé avec la formule suivante :

$$\bar{h} = \frac{Re_{\delta} \mu_l h'_{fg}}{4 L (T_{sat} - T_s)}$$

Ce qui donne :  $\bar{h} = 8\ 530\ W.m^{-2}.K^{-1}$ .

4) Le flux de chaleur global de condensation est donné par l'équation suivante :

$$q_c = \bar{h} \pi D L (T_{sat} - T_s)$$

Ce qui donne :  $q_c = 16\ kW$ .

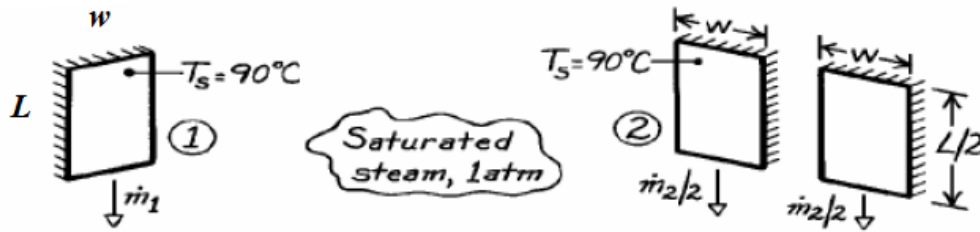
5) Le débit massique global de condensation est donné par l'équation suivante :

$$\dot{m}_c = \frac{q}{h'_{fg}}$$

Ce qui donne :  $\dot{m}_c = 7.1\ g.s^{-1}$ .

### Exercice 3

Lors de la conception d'un condenseur utilisant de la vapeur d'eau saturée (à  $P = 1\ atm$ ), deux configurations sont considérées (**Fig. 11**). Dans la configuration 1, nous avons une plaque plane verticale de dimensions ( $L \times w$ ). Dans la configuration 2, nous avons deux plaques planes verticales ; chacune de ces deux plaques a des dimensions  $\left(\frac{L}{2} \times w\right)$ . La température (uniforme) des plaques est  $T_s = 90\ ^\circ C$ . Le régime d'écoulement est supposé être laminaire lisse.



**Fig. 11.** Schéma de l'étude [3]

- 1) Pour la configuration 1 : Calculer le coefficient d'échange de chaleur moyen ( $\bar{h}_L$ ). En déduire la longueur  $L$  ;
- 2) A partir des expressions des flux de chaleur mis en jeu, identifier la configuration correspondant au meilleur transfert de chaleur.

*Données :*  $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$  ;  $Re_\delta = 30$ .

*Vapeur saturée* ( $T_{sat} = 100 \text{ }^\circ\text{C}$ ) :  $h_{fg} = 2\,257 \text{ kJ.kg}^{-1}$  ;  $\rho_l \gg \rho_v$  (ou  $\rho_v \approx 0$ ).

à  $T_{film} = 95 \text{ }^\circ\text{C}$  :  $\mu_l = 296 \times 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$  ;  $\rho_l = 962 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $k_l = 0.678 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;  $c_{p,l} = 4\,212 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$$\overline{Nu} = 1.47 Re_\delta^{\frac{1}{3}} ; \bar{h} = 0.943 \left( \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) k_l^3 h'_{fg}}{\mu_l (T_{sat} - T_s) L} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

**Solution :**

1)  $\bar{h} = 15\,061 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$  ;  $L = 33 \text{ mm}$  ;

2)  $q$  (configuration 1) /  $q$  (configuration 2) = 0.84. La configuration 2 est donc meilleure.

## Exercice 4

De la vapeur d'eau saturée ( $T_{sat} = 333 \text{ K}$ ,  $P = 0.2 \text{ bar}$ ) condense le long de la surface extérieure d'un cylindre horizontal ayant un diamètre extérieur  $D = 50 \text{ mm}$  (**Fig. 12**). La température de la surface extérieure du cylindre est uniforme ( $T_s = 307 \text{ K}$ ). Le régime d'écoulement est supposé être laminaire lisse.

1) Calculer la valeur de la chaleur latente modifiée ( $h'_{fg}$ ) ;

2) Calculer le coefficient d'échange global ( $\bar{h}_D$ ) ;

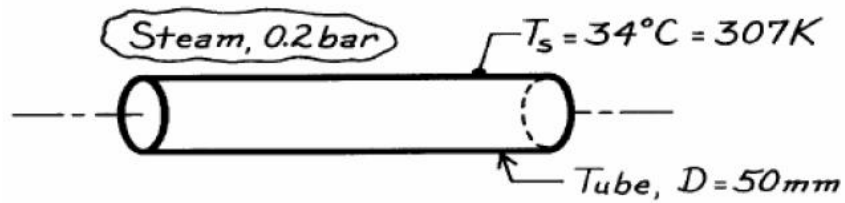
3) Calculer, par unité de longueur du cylindre, le flux de chaleur global de condensation ( $q'_c$ ) ainsi que le débit massique global de condensation ( $\dot{m}'_c$ ).

*Données :*  $g = 9.8 \text{ m.s}^{-2}$ .

*Vapeur d'eau saturée* à  $T_{sat} = 333 \text{ K}$  et  $P = 0.2 \text{ bar}$  :  $\rho_v = 0.129 \text{ kg.m}^{-3}$  ;  $h_{fg} = 2358 \text{ kJ.kg}^{-1}$ .

Eau liquide à  $T_{film} = 320 \text{ K}$  :  $\rho_l = 989.1 \text{ kg.m}^{-3}$ ;  $\mu_l = 577 \times 10^{-6} \text{ N.s.m}^{-2}$ ;  $c_{p,l} = 4180 \text{ J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$ ;  
 $k_l = 0,640 \text{ W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

$$\overline{Nu}_D = 0.729 \left[ \frac{g \rho_l (\rho_l - \rho_v) h'_{fg} D^3}{\mu_l k_l (T_{sat} - T_s)} \right]^{\frac{1}{4}}$$



**Fig. 12.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :**

- 1)  $h'_{fg} = 2432 \text{ kJ.kg}^{-1}$ ;
- 2)  $\bar{h}_D = 6926 \text{ W.m}^{-2}.\text{K}^{-1}$ ;
- 3)  $q'_c = 28.3 \text{ kW.m}^{-1}$ ;
- 4)  $\dot{m}'_c = 11.6 \text{ g.s}^{-1}.\text{m}^{-1}$ .

## **Partie III : Rayonnement**

# Chapitre 6 : Rayonnement dans les milieux semi-transparents

## 1. Introduction

**Préambule :** Dans ce chapitre, on ne s'intéressa pas au rayonnement se produisant dans un milieu transparent. On se focalisera uniquement sur le rayonnement au sein d'un milieu semi-transparent.

Un Milieu Semi-Transparent (MST) est un milieu qui absorbe, éventuellement diffuse, et émet le rayonnement thermique de manière volumique. On dit que pour un MST, qu'il s'agit d'un milieu participant aux échanges de chaleur par rayonnement.

### Exemples :

- La combustion : les gaz à hautes température absorbent et émettent le rayonnement de façon volumique.
- Il y a des domaines de grand intérêt industriel où le rayonnement à travers un MST est prépondérant, tels que les procédés à haute température (fours verriers, chaudières), les moteurs d'avion ou de fusée (thermique des chambres de combustion, télédétection infrarouge), la conception d'isolants, la prévention des incendies, ...

Le caractère semi-transparent d'un milieu dépend de sa capacité à laisser pénétrer plus ou moins profondément les photons avant de les absorber ou de les diffuser :

- Si cette pénétration est (très) faible devant les dimensions du milieu étudié, ce dernier sera considéré comme optiquement épais, voir même *opaque*. Dans ce cas, le rayonnement sera éventuellement limité à un effet de surface.
- Inversement, si les photons peuvent traverser le milieu sans être absorbés (ou seulement en très petit nombre), le milieu sera considéré comme optiquement mince, voire *transparent*.

## 2. Gaz absorbants

Les principaux gaz absorbants rencontrés en sciences de l'ingénieur sont : la vapeur d'eau ( $H_2O$ ), le gaz carbonique ( $CO_2$ ), le méthane ( $CH_4$ ) et le monoxyde de carbone ( $CO$ ). Tous ces gaz sont formés de molécules ayant un moment électrique dipolaire qui leur permet d'interagir avec le rayonnement (en tant qu'onde électromagnétique). Par contre, l'oxygène ( $O_2$ ) et l'azote ( $N_2$ ) en restent dépourvus et restent neutres du point de vue radiatif (transparents à toutes les longueurs d'onde).

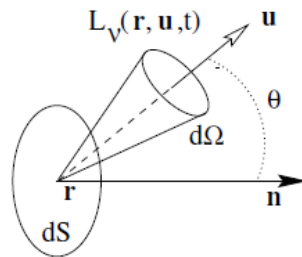
D'une façon générale, et quoique l'air sec (sans trace de vapeur d'eau) est considéré comme transparent (car il est composé à 99 % d'oxygène et d'azote), il n'est toutefois pas totalement

transparent, du fait de la présence du CO<sub>2</sub> en son sein. Le CO<sub>2</sub> peut jouer un rôle à certaines longueurs d'ondes, mais c'est souvent négligeable.

### 3. Luminance, Flux et Densité d'énergie

La luminance  $L_\nu(\vec{r}, \vec{u}, t)$  est le flux d'énergie radiative monochromatique  $P_\nu$  traversant un élément (**Fig. 1**) :

- de surface  $dS$  ;
- centré au point  $\vec{r} = (x, y, z)$  ;
- dans un angle solide élémentaire  $d\Omega$  ;
- centré sur la direction  $\vec{u}$  ;
- dans l'intervalle de fréquence  $[\nu, \nu+d\nu]$  ;
- au temps  $t$ .



**Fig. 1.** Géométrie utilisée pour définir la luminance [20]

Il s'écrit :

$$P_\nu(\vec{r}, \vec{u}, t) = L_\nu(\vec{r}, \vec{u}, t) \vec{u} \cdot \vec{n} dS d\Omega d\nu \quad (\text{Eq. 1})$$

L'unité de la luminance est :  $\text{W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{sr}^{-1} \cdot \text{Hz}^{-1}$ .

Le vecteur flux radiatif ( $q_\nu$ ) est une quantité non directionnelle, qui s'exprime en fonction de la luminance ( $L_\nu$ ), par :

$$q_\nu(\vec{r}, t) = \int_{(4\pi)} L_\nu(\vec{r}, \vec{u}, t) \vec{u} d\Omega \quad (\text{Eq. 2})$$

Ce flux à travers une surface  $S$  donne le flux global, par unité de fréquence, qui traverse cette surface (unité  $\text{W} \cdot \text{Hz}^{-1}$ ).

La densité d'énergie par unité de fréquence, au point  $\vec{r}$  et à l'instant  $t$ , est donnée par :

$$u_v(\vec{r}, t) = \int_{(4\pi)} \frac{L_v(\vec{r}, \vec{u}, t)}{c} d\Omega \quad (\text{Eq. 3})$$

$c$  : Vitesse de propagation de l'énergie.

## 4. Absorption, Diffusion et Emission thermique

### 4.1 Absorption

On considère un flux d'énergie radiative monochromatique ( $P_v$ ) se propageant dans un milieu absorbant dans une direction  $\vec{u}$  perpendiculaire à la surface  $dS$ . On note  $s$  l'abscisse curviligne le long de la direction  $\vec{u}$ . Sur un élément de longueur  $ds$ , une fraction  $dP_v$  de l'énergie est absorbée :

$$dP_v(s + ds, \vec{u}, t) = -\kappa_v P_v(s, \vec{u}, t) ds \quad (\text{Eq. 4})$$

$\kappa_v$  : Coefficient d'absorption monochromatique. Son inverse  $l_a = \frac{1}{\kappa_v}$  est le libre parcours moyen de l'absorption (ou longueur d'absorption).

### 4.2 Extinction par diffusion

Dans le processus de diffusion, une fraction de l'énergie se propageant initialement dans la direction  $\vec{u}$  est diffusée dans une direction  $\vec{u}'$  différente, ce qui contribue ainsi à la diminution du flux d'énergie dans la direction  $\vec{u}$ .

On introduit le coefficient de diffusion (en anglais : scattering coefficient) ( $\sigma_v$ ). Son inverse  $l_d = \frac{1}{\sigma_v}$  est le libre parcours moyen de diffusion (ou longueur de diffusion).

Si l'on s'intéresse à l'énergie se propageant dans une direction déterminée (un faisceau collimaté par exemple), alors les deux processus d'absorption et de diffusion contribuent à l'extinction de l'énergie incidente.

On parle d'un milieu absorbant lorsque le processus d'absorption prédomine sur celui de la diffusion (et inversement). Par exemple, les particules constituant l'encre de Chine ou de suies dans une fumée vont plus absorber le rayonnement visible incident que le diffuser (elles apparaissent noires). Par contre, un nuage est un milieu très diffusant (et peu absorbant) dans le domaine visible (il apparaît blanc).

On peut alors introduire le coefficient d'extinction ( $\beta_v$ ) :

$$\beta_v = \sigma_v + \kappa_v \quad (\text{Eq. 5})$$

Son inverse  $l_{\text{ext}} = \frac{1}{\beta_v}$  est la longueur d'extinction.

En particulier, le flux d'énergie associé à un faisceau collimaté dans une direction donnée dans un milieu décroît selon la loi de Beer-Lambert :

$$P_v(s) = P_v(0) \exp(-\beta_v s) \quad (\text{Eq. 6})$$

Pour caractériser le pouvoir diffusant d'un milieu, on utilise l'albédo, qui est défini par :

$$a_v = \frac{\sigma_v}{\beta_v} = \frac{\sigma_v}{\sigma_v + \kappa_v} \quad (\text{Eq. 7})$$

Si l'albédo vaut 0, le milieu est purement absorbant (encre de Chine dans le visible). Si l'albédo vaut 1, le milieu est purement diffusant (nuage dans le visible).

Lors de la diffusion, l'énergie est redistribuée dans toutes les directions. En particulier, si l'on s'intéresse à l'évolution entre  $s$  et  $s+ds$  du flux se propageant dans la direction  $\vec{u}$ , de l'énergie se propageant initialement dans une direction différente  $\vec{u}'$ , peut après diffusion, se propager dans la direction  $\vec{u}$ . Elle contribue alors à l'augmentation du flux dans la direction  $\vec{u}$ . Pour décrire ce phénomène, on introduit la fonction de phase  $P_v(\vec{r}, \vec{u}, \vec{u}')$ . Elle représente la fraction du flux d'énergie qui, arrivant au point  $\vec{r}$  dans la direction  $\vec{u}$ , est diffusé dans la direction  $\vec{u}'$ .

L'accroissement du flux dû à la diffusion entre  $s$  et  $s+ds$  s'écrit alors :

$$dP_v(s + ds, \vec{u}, t) = \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_{(4\pi)} P_v(s, \vec{u}, \vec{u}') P_v(s, \vec{u}', t) d\Omega' ds \quad (\text{Eq. 8})$$

*Remarques :*

- Lorsque le milieu est homogène, la fonction de phase est indépendante de la position  $\vec{r}$ .
- Si la fonction de phase est constante, on parle de diffusion isotrope (répartition équiprobable de l'énergie dans toutes les directions de l'espace par diffusion). Sinon, on parle de diffusion anisotrope.

### 4.3 Emission thermique

Sur un élément de longueur  $ds$  le long de la direction  $\vec{u}$ , une fraction  $dP_v$  d'énergie peut être émise thermiquement, on écrit alors :

$$dP_v(s + ds, \vec{u}, t) = \eta_v ds \quad (\text{Eq. 9})$$

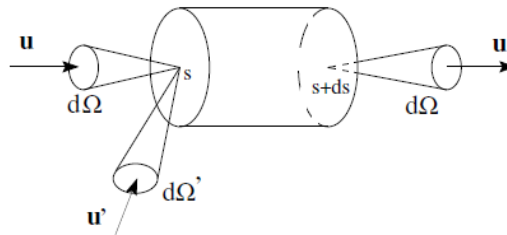
$\eta_v$  : Coefficient d'émission monochromatique

Si le milieu est à l'Equilibre Thermodynamique Local (ETL), la luminance en tout point est la luminance d'équilibre  $n^2 L_v^\circ(T)$  à la température locale (T), où n est la partie réelle de l'indice de réfraction du milieu et  $L_v^\circ(T)$  la luminance de Planck. De plus, à l'ETL, le flux absorbé est égal au flux émis en tout point. On a donc :

$$\eta_v = \kappa_v n^2 L_v^\circ(T) \quad (\text{Eq. 10})$$

## 5. Etablissement de l'Equation de Transfert Radiatif (ETR)

Un bilan d'énergie radiative est effectué sur un élément de volume  $dV$  (Fig. 2). La contribution positive au bilan provient à la fois de la diffusion et de l'émission thermique, tandis que la contribution négative provient de l'extinction (par absorption et diffusion).



**Fig. 2.** Système considéré pour effectuer le bilan d'énergie radiative [20]

On considère la densité d'énergie directionnelle  $u_v(s, \vec{u}, t)$  qui est reliée à la luminance par la relation suivante :

$$u_v(s, \vec{u}, t) = \frac{L_v(s, \vec{u}, t)}{c} \quad (\text{Eq. 11})$$

c : Vitesse de propagation de l'énergie.

Le bilan d'énergie sur l'élément de volume  $dV$  s'écrit :

$$u_v(s + cdt, \vec{u}, t + dt)dV = u_v(s, \vec{u}, t)dV - (\kappa_v + \sigma_v)u_v(s, \vec{u}, t)dVcdt + \kappa_v n^2 \frac{L_v^0(T)}{c} dVcdt + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_{(4\pi)} p_v(\vec{u}, \vec{u}') u_v(s, \vec{u}', t) d\Omega' dVcdt \quad (\text{Eq. 12})$$

En réarrangeant les termes de cette équation et en utilisant l'Eq. 11, on obtient :

$$\frac{L_v(s + cdt, \vec{u}, t + dt) - L_v(s, \vec{u}, t)}{cdt} = -(\kappa_v + \sigma_v)L_v(s, \vec{u}, t) + \kappa_v n^2 \frac{L_v^0(T)}{c} + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_{(4\pi)} p_v(\vec{u}, \vec{u}') L_v(s, \vec{u}', t) d\Omega' \quad (\text{Eq. 13})$$

A la limite où dt tend vers zéro, le membre de gauche de l'Eq. 13 est la dérivée totale de la luminance :

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt} L_v(s, \vec{u}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial s} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \quad (\text{Eq. 14})$$

$\nabla$  : Opérateur gradient par rapport à la variable de position  $\vec{r}$ .

On obtient finalement l'équation de transfert radiatif qui s'écrit :

$$\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} L_v(\vec{r}, \vec{u}, t) + \vec{u} \cdot \nabla L_v(\vec{r}, \vec{u}, t) = -(\kappa_v + \sigma_v)L_v(\vec{r}, \vec{u}, t) + \kappa_v n^2 L_v^0(T) + \frac{\sigma_v}{4\pi} \int_{(4\pi)} p_v(\vec{u}, \vec{u}') L_v(\vec{r}, \vec{u}', t) d\Omega' \quad (\text{Eq. 15})$$

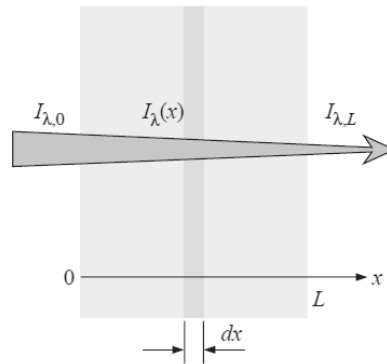
L'ETR est une équation intégro-différentielle qui décrit le transport de la luminance, grandeur dépendant de la position, d'une direction et du temps.

## 6. Loi de Beer

Considérons un milieu participant d'épaisseur L (Fig. 3). Un faisceau de rayonnement spectral d'intensité  $I_{\lambda,0}$  est incident sur le milieu, qui est atténué lors de sa propagation en raison de l'absorption. La diminution de l'intensité du rayonnement lorsqu'il traverse une couche d'épaisseur dx est proportionnelle à l'intensité elle-même et à l'épaisseur dx. Cette loi est connue sous le nom de loi de Beer et s'exprime comme suit :

$$dI_{\lambda}(x) = -\kappa_{\lambda}I_{\lambda}(x) dx \quad (\text{Eq. 16})$$

Où la constante de proportionnalité  $\kappa_{\lambda}$  est le coefficient d'absorption spectrale du milieu dont l'unité est le  $m^{-1}$ .



**Fig. 3.** Atténuation d'un faisceau de rayonnement lors de son passage à travers un milieu absorbant d'épaisseur L [2]

En séparant les variables et en intégrant de  $x = 0$  à  $x = L$ , on obtient :

$$\frac{I_{\lambda,L}}{I_{\lambda,0}} = e^{-\kappa_{\lambda}L} \quad (\text{Eq. 17})$$

où nous avons supposé que l'absorptivité du milieu est indépendante de  $x$ .

On note que l'intensité du rayonnement décroît exponentiellement conformément à la loi de Beer.

## **Partie IV : Transfert de masse**

# Chapitre 7 : Transfert de masse par diffusion

## 1. Mécanismes physiques

La présence d'un *gradient de température* ( $\vec{\nabla} T$ ) implique l'existence d'un *transfert de chaleur par diffusion* (ou conduction) de la température (T) la plus élevée vers la température la moins élevée.

Le gradient de température est le moteur du transfert de chaleur par conduction.

La présence d'un *gradient de concentration* ( $\vec{\nabla} C$ ) implique l'existence d'un *transfert de masse par diffusion* de la concentration (C) la plus élevée vers la concentration la moins élevée.

$C =$  Concentration d'une espèce chimique au sein d'un mélange d'espèces chimiques.

Le gradient de concentration est le moteur du transfert de masse par diffusion.

De ce point de vue, il y a une analogie entre le transfert de chaleur par conduction et le transfert de masse par diffusion (i.e. des phénomènes physiques similaires).

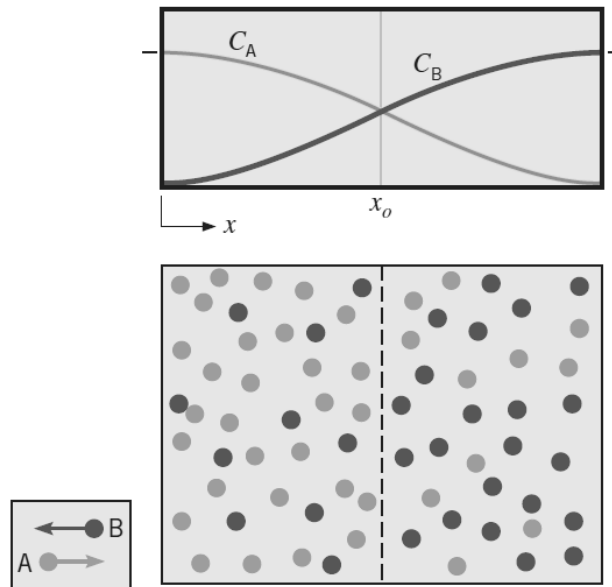
*Modes de transfert de chaleur :*

- Conduction de chaleur ;
- Convection de chaleur.

*Modes de transfert de masse :*

- Diffusion massique ;
- Convection massique : cf. Chapitre 8.

*Transfert de masse (Fig. 1) :* appelé aussi *Transfert de matière*. Il s'agit de la matière en mouvement, résultant d'une différence de concentration d'une espèce chimique (ou d'un constituant) au sein d'un mélange d'espèces chimiques. Ce mélange est appelé aussi une mixture. Cette dernière est formée de n constituants ( $n \geq 2$ ).



**Fig. 1.** Transfert de masse par diffusion au sein d'un mélange gazeux binaire [3]

$C_A$  : Concentration de l'espèce A ;  $C_B$  : Concentration de l'espèce B.

*Hypothèse* : Pour la suite du chapitre, on travaillera uniquement avec des mélanges binaires (A+B), formé donc de 2 constituants A et B. *Exemple* : Mélange binaire de deux gaz.

*Exemples de phénomènes de diffusion massique :*

- La diffusion de la vapeur d'eau dans l'air d'une pièce, à partir d'un humidificateur domestique
- La dispersion des oxydes de sulfure ( $SO_x$ ), issus de la cheminée d'une centrale thermique, dans l'environnement

Pour un mélange binaire (A+B), le constituant B est appelé *milieu*. Ce dernier peut être un gaz, un liquide ou un solide.

La diffusion massique est plus importante au sein des gaz qu'au sein des liquides, et plus importante au sein des liquides qu'au sein des solides, car elle dépend fortement de l'espacement qui existe entre les molécules de ces milieux.

*Exemples de transfert de masse au sein d'un milieu :*

- Gazeux → Air : Les  $NO_x$  des gaz d'échappement des véhicules dans l'air
- Liquide → Eau : Oxygène dissous dans l'eau
- Solide → Pyrex : Hélium au sein du pyrex

- $A = \text{Gaz} / B = \text{Gaz}$   
Vapeur d'eau / Air (humidification)  
Gaz d'échappement automobile / Air  
Fumées de combustion de centrales thermiques / Air  
Parfum / Air
- $A = \text{Gaz} / B = \text{Liquide}$   
Oxygène dissous / Eau liquide ( $\text{H}_2\text{O}$ )
- $A = \text{Gaz} / B = \text{Solide}$   
Vapeur d'eau ( $\text{H}_2\text{O}$ ) / Mur (transfert hygrométrique)  
Hélium / Pyrex
- $A = \text{Liquide} / B = \text{Liquide}$   
Sirop / Eau  
Colorant / Eau
- $A = \text{Solide} / B = \text{Solide}$   
Quand deux matériaux  $A$  et  $B$  sont chauffés et mis en contact, leurs atomes diffusent l'un dans l'autre (*exemple* : cuivre/étain).  
Engrenage traité en carbone, en exploitant le phénomène de diffusion. Cela permet d'augmenter la rigidité du fer au niveau de la couche superficielle.  
Migration d'une lacune : sauts effectués par les atomes dans les défauts du cristal sous l'effet de l'agitation thermique.  
Fabrication de céramique, de semi-conducteurs, de cellules solaires, ...  
Traitement des métaux (au carbone, à la chaleur), Métallurgie/Physique.

## 2. Composition d'un mélange

Considérons un mélange binaire ( $A+B$ ) formé des constituants  $A$  et  $B$  ou bien des constituants  $i$  ( $i = 1, 2$ ).

Soient :

- $\rho_i$  : Masse volumique (ou concentration massique) de  $i$ , en  $\text{kg.m}^{-3}$  ;
- $C_i$  : Concentration molaire de  $i$ , en  $\text{kmol.m}^{-3}$ .

Nous avons la relation suivante :

$$\rho_i = M_i C_i \quad (\text{Eq. 1})$$

$M_i$  : Masse molaire de  $i$ ,  $\text{kg.kmol}^{-1}$ .

Par ailleurs, on a :

$$\sum_i \rho_i = \rho \quad (\text{Eq. 2})$$

et

$$\sum_i C_i = C \quad (\text{Eq. 3})$$

$\rho$  : Masse volumique du mélange ;

$C$  : Concentration molaire du mélange.

On définit les deux grandeurs (sans dimensions) suivantes :

- La *fraction massique* ( $m_i$ ) du constituant  $i$  au sein du mélange :

$$m_i = \frac{\rho_i}{\rho} \quad (\text{Eq. 4})$$

Il est à noter que :

$$0 \leq m_i \leq 1 \quad (\text{Eq. 5})$$

et

$$\sum_i m_i = 1 \quad (\text{Eq. 6})$$

- La *fraction molaire* ( $x_i$ ) du constituant  $i$  au sein du mélange :

$$x_i = \frac{C_i}{C} \quad (\text{Eq. 7})$$

Il est à noter que :

$$0 \leq x_i \leq 1 \quad (\text{Eq. 8})$$

et

$$\sum_i x_i = 1 \quad (\text{Eq. 9})$$

*Cas particulier* : Mélange de gaz parfaits

Soient :

$P_i$  : Pression partielle du constituant  $i$ , dans le mélange, en Pa ;

$R_i$  : Constante des gaz parfaits spécifique au constituant  $i$ , en  $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$  ;

$R$  : Constante (universelle) des gaz parfaits,  $R = 8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$ .

L'équation d'état des gaz parfaits donne :

$$C_i = \frac{P_i}{RT} \quad (\text{Eq. 10})$$

$$\rho_i = \frac{P_i}{R_i T} \quad (\text{Eq. 11})$$

En utilisant la loi de Dalton :

$$\sum_i P_i = P \quad (\text{Eq. 12})$$

on obtient :

$$x_i = \frac{P_i}{P} \quad (\text{Eq. 13})$$

Dans certains cas, surtout dans la théorie cinétique des gaz, on utilise la grandeur  $N_i$  (nombre de molécules de  $i$  par unité de volume, en molécule.m<sup>-3</sup>) au lieu de  $\rho_i$  :

$$N_i = N_A C_i \quad (\text{Eq. 14})$$

$N_A$  : Nombre d'Avogadro = 6.022141 x 10<sup>26</sup> molécule.kmol<sup>-1</sup>.

### 3. Loi de Fick

La loi de diffusion de Fick est analogue (ou de même forme) que l'équation de diffusion de chaleur (ou loi de Fourier).

Le transfert de masse par diffusion d'un constituant A, dans un mélange binaire formé des constituants A et B, s'écrit :

En écriture ou sur une base massique ( $\rho$ ) :

$$\vec{J}_A = -\rho D_{AB} \vec{\nabla} m_A \quad (\text{Eq. 15})$$

En écriture ou sur une base molaire (C) :

$$\vec{J}_A^* = -C D_{AB} \vec{\nabla} x_A \quad (\text{Eq. 16})$$

Remarque :  $\vec{J}_A$  et  $\vec{J}_A^*$  (en diffusion massique) sont analogues à la densité de flux de chaleur (en diffusion thermique).

La loi de Fourier définit une propriété de transport pour la diffusion de chaleur :  $k$  = conductivité thermique.

De manière analogue, la loi de Fick définit une propriété de transport pour la diffusion de masse :

$D_{AB}$  : Diffusivité massique ou coefficient de diffusion massique, en  $m^2 \cdot s^{-1}$

Les valeurs de  $D_{AB}$  sont données à titre d'illustration (et aussi pour utilisation) dans **Fig. 2**.

Binary Diffusion Coefficients at One Atmosphere			
Substance A	Substance B	T (K)	$D_{AB}$ ( $m^2/s$ )
<b>Gases</b>			
NH <sub>3</sub>	Air	298	$0.28 \times 10^{-4}$
H <sub>2</sub> O	Air	298	$0.26 \times 10^{-4}$
CO <sub>2</sub>	Air	298	$0.16 \times 10^{-4}$
H <sub>2</sub>	Air	298	$0.41 \times 10^{-4}$
O <sub>2</sub>	Air	298	$0.21 \times 10^{-4}$
Acetone	Air	273	$0.11 \times 10^{-4}$
Benzene	Air	298	$0.88 \times 10^{-5}$
Naphthalene	Air	300	$0.62 \times 10^{-5}$
Ar	N <sub>2</sub>	293	$0.19 \times 10^{-4}$
H <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	273	$0.70 \times 10^{-4}$
H <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	273	$0.68 \times 10^{-4}$
H <sub>2</sub>	CO <sub>2</sub>	273	$0.55 \times 10^{-4}$
CO <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	293	$0.16 \times 10^{-4}$
CO <sub>2</sub>	O <sub>2</sub>	273	$0.14 \times 10^{-4}$
O <sub>2</sub>	N <sub>2</sub>	273	$0.18 \times 10^{-4}$
<b>Dilute Solutions</b>			
Caffeine	H <sub>2</sub> O	298	$0.63 \times 10^{-9}$
Ethanol	H <sub>2</sub> O	298	$0.12 \times 10^{-8}$
Glucose	H <sub>2</sub> O	298	$0.69 \times 10^{-9}$
Glycerol	H <sub>2</sub> O	298	$0.94 \times 10^{-9}$
Acetone	H <sub>2</sub> O	298	$0.13 \times 10^{-8}$
CO <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	298	$0.20 \times 10^{-8}$
O <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	298	$0.24 \times 10^{-8}$
H <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	298	$0.63 \times 10^{-8}$
N <sub>2</sub>	H <sub>2</sub> O	298	$0.26 \times 10^{-8}$
<b>Solids</b>			
O <sub>2</sub>	Rubber	298	$0.21 \times 10^{-9}$
N <sub>2</sub>	Rubber	298	$0.15 \times 10^{-9}$
CO <sub>2</sub>	Rubber	298	$0.11 \times 10^{-9}$
He	SiO <sub>2</sub>	293	$0.4 \times 10^{-13}$
H <sub>2</sub>	Fe	293	$0.26 \times 10^{-12}$
Cd	Cu	293	$0.27 \times 10^{-18}$
Al	Cu	293	$0.13 \times 10^{-33}$

**Fig. 2.** Valeurs du coefficient de diffusion massique ( $D_{AB}$ ) [3]

$\vec{J}_A$  : Densité de flux de diffusion massique du constituant A, en  $kg \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ . C'est la quantité (ou masse) de A qui est transférée par diffusion, par unité de temps, et par unité de surface perpendiculaire à la direction du transfert.

$\vec{J}_A^*$  : Densité de flux de diffusion molaire du constituant A en  $kmol \cdot s^{-1} \cdot m^{-2}$ . C'est la quantité (ou nombre de moles) de A qui est transférée par diffusion, par unité de temps, et par unité de surface perpendiculaire à la direction du transfert.

## 4. Diffusivité massique

On se place toujours dans le cas d'un mélange binaire (A+B). Dans le cas d'un mélange de gaz parfaits, la théorie cinétique des gaz indique que :

$$D_{AB} \sim P^{-1} T^{\frac{3}{2}} \quad (\text{Eq. 17})$$

Donc, l'augmentation de la température T ou la diminution de la pression P permettent l'augmentation de la diffusivité massique  $D_{AB}$ , i.e. une diffusion massique améliorée.

Il est à noter que  $D_{AB}$  augmente lorsque la masse molaire M diminue.

Dans le cas de solutions liquides binaires A+B (A = soluté, B = solvant tel que l'eau), les mesures expérimentales indiquent que pour les solutions diluées ( $C_A$  faible ou  $C_A \ll C$ ), la valeur de la diffusivité massique augmente lorsque la température augmente.

Le mécanisme de diffusion de gaz, liquides et solides au sein de milieux solides est extrêmement compliqué. Un nombre limité de résultats expérimentaux sont disponibles dans la littérature scientifique.

*Milieu :*

- Gaz  $\rightarrow D_{AB} \sim 10^{-5} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  à température ambiante
- Liquide  $\rightarrow D_{AB} \sim 10^{-9} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  à température ambiante
- Solide  $\rightarrow D_{AB} \sim 10^{-9}$  à  $10^{-20} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  selon les constituants et la température

*Références bibliographiques traitant de la diffusivité massique :*

- Skelland, A.H.P., Diffusional mass transfer, Krieger, Malabar, FL, 1985
- Poling, B.E., Prausnitz, J.M., O'Connell, J., The properties of gases and liquids, 5th edition, Mc Graw-Hill, New York, 2001

*Exemple :*

A+B = H<sub>2</sub>O (vapeur) / Air

Il s'agit donc de la diffusion massique de la vapeur d'eau dans l'air (d'une pièce par exemple).

On donne la corrélation empirique suivante et qui est spécifique à ce mélange :

$$D_{AB} = 1.87 \times 10^{-10} \left( \frac{T^{2.072}}{P} \right) \quad (\text{Eq. 18})$$

282 K  $\leq$  T  $\leq$  450 K ; T est en K, P est en atm. Cette valeur est calculée à +/-10 %.

Dans ce qui suit, des exercices sont proposés pour d'une part se familiariser avec les mécanismes liés au transfert de masse par diffusion et d'autre part pour s'entraîner à calculer le flux de diffusion massique, à partir de la loi de Fick.

## Exercice 1

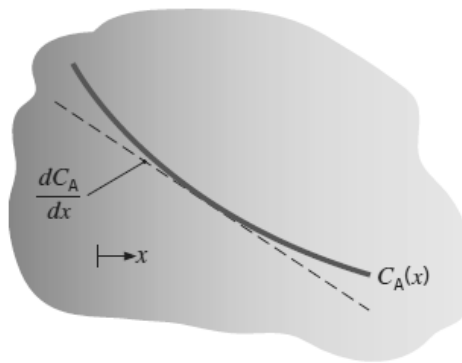
Considérons la diffusion de l'hydrogène (constituant A) dans (successivement) l'un des milieux (constituant B) suivants : Air, Eau liquide, Fer à  $T = 293 \text{ K}$  (**Fig. 3**).

1) Calculer le flux de masse (sur une base molaire puis sur une base massique).

On donne : Le gradient de concentration  $\frac{dC_A}{dx} = 1 \text{ kmol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{m}^{-1}$  ;

On considère que la fraction molaire de l'hydrogène ( $x_A$ ) est très faible devant l'unité ;

2) Comparer les valeurs de la diffusivité massique à celles de la diffusivité thermique.



**Fig. 3.** Schéma de l'étude [3]

### Solution :

A+B :  $\text{H}_2 / \text{Air}$

Les constituants sont supposés être des gaz parfaits.

1) **Fig. 2** nous donne :  $D_{AB} = 0.41 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  à  $T = 298 \text{ K}$ .

Or, la température donnée dans cet exercice est de  $293 \text{ K}$ .

On utilise dans ce cas **Eq. 17** ( $D_{AB} \sim P^{-1} T^{\frac{3}{2}}$ ) pour obtenir la valeur corrigée de  $D_{AB}$  :

$$D_{AB}|_{T=293 \text{ K}} \sim P^{-1} (293)^{\frac{3}{2}}$$

$$D_{AB}|_{T=298 \text{ K}} \sim P^{-1} (298)^{\frac{3}{2}}$$

d'où :

$$D_{AB}|_{T=293 \text{ K}} = D_{AB}|_{T=298 \text{ K}} \cdot \left(\frac{293}{298}\right)^{\frac{3}{2}} = 0.40 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

La loi de Fick, sur une base molaire, s'écrit :

$$\vec{J}_A^* = -C \cdot D_{AB} \cdot \vec{\nabla} x_A$$

i.e.

$$J_A^* = -C \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dx}$$

C : Concentration du mélange H<sub>2</sub>+Air ≈ constante car l'hydrogène gazeux H<sub>2</sub> est supposé être dilué dans le mélange (x<sub>A</sub> << 1 ou C<sub>A</sub> << C).

De ce fait, on a :

$$J_A^* = -D_{AB} \cdot \frac{dC_A}{dx} = -4 \times 10^{-5} \text{ kmol} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

En multipliant l'équation précédente par la masse molaire du constituant A (M<sub>A</sub> = 2 kg.kmol<sup>-1</sup>), on obtient la valeur du flux massique :

$$j_A = -8 \cdot 10^{-5} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

On résume l'ensemble des résultats dans **Fig. 4** :

Constituant B (milieu)	Diffusivité thermique (a x 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	Diffusivité massique (D <sub>AB</sub> x 10 <sup>6</sup> m <sup>2</sup> .s <sup>-1</sup> )	Nombre de Lewis (Le)	j <sub>A</sub> x 10 <sup>6</sup> en kg.s <sup>-1</sup> .m <sup>-2</sup>
Air	21.6	40	0.54	80
H <sub>2</sub> O liquide	0.144	6.3 x 10 <sup>-3</sup>	23	12.6 x 10 <sup>-3</sup>
Fer	23.1	260 x 10 <sup>-9</sup>	89 x 10 <sup>6</sup>	0.52 x 10 <sup>-6</sup>

**Fig. 4.** Résultats de l'étude

La diffusivité thermique a est celle du constituant B car le constituant A est dilué dans le milieu B (x<sub>A</sub> << 1) : a ≈ a<sub>B</sub>. Pour rappel :  $a = \frac{k}{\rho c_p}$ .

2) Pour les trois milieux, la diffusivité thermique α varie de deux ordres de grandeurs (de 10<sup>-1</sup> à 10) tandis que la diffusivité massique (D<sub>AB</sub>) varie de 8 ordres de grandeurs ou plus (de 10<sup>-5</sup> à 10<sup>-13</sup>). Les valeurs des diffusivités massiques les plus importantes correspondent au milieu gazeux (Air), tandis

que les valeurs les moins élevées correspondent au milieu solide (Fer). Ainsi, on relève pour le transfert de masse, des réponses très différentes selon le milieu.

Pour rappel, le nombre de Lewis (Le) est considéré lorsque l'on est en présence d'un transfert conjugué (ou simultané) de chaleur et de masse. Il est défini par la relation suivante :

$$Le = \frac{\alpha}{D_{AB}} = \frac{Sc}{Pr}$$

avec :

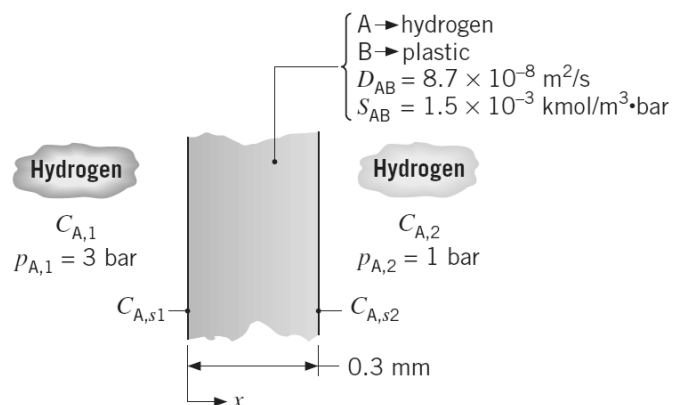
$$Sc = \frac{v}{D_{AB}} \quad \text{et} \quad Pr = \frac{v}{\alpha}$$

Le nombre de Lewis est de l'ordre de l'unité pour les gaz ( $Le \sim 1$ ). Ainsi, le transfert de masse (par diffusion) et le transfert de chaleur (par conduction) sont comparables en intensité et en rapidité. Pour les liquides et les gaz, le nombre de Lewis est de l'ordre de dizaines et beaucoup plus, i.e. la conduction de chaleur se fait beaucoup plus facilement que la diffusion massique.

## Exercice 2

L'hydrogène gazeux est maintenu à des pressions de 3 bars et à 1 bar de part et d'autre d'une membrane en plastique qui a une épaisseur de 3 mm (**Fig. 5**). La température est de 25 °C, et la diffusivité massique (binaire) de l'hydrogène diffusant dans le plastique est  $8.7 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ . La solubilité de l'hydrogène au sein de la membrane est  $1.5 \times 10^{-3} \text{ kmol} \cdot \text{m}^{-3} \cdot \text{bar}^{-1}$ .

Calculer le flux de diffusion massique de l'hydrogène à travers la membrane.



**Fig. 5.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :**A+B : H<sub>2</sub> / Air*Hypothèses :*

- Régime permanent ;
- Transfert de masse unidirectionnel (1D).

Le flux de diffusion massique (sur une base molaire) de l'hydrogène à travers la membrane ( $N_{A,x}''$ ) se calcule avec la formule suivante :

$$(N_{A,x}'') = C D_{AB} \frac{x_{A,s1} - x_{A,s2}}{L} = \frac{D_{AB}}{L} (C_{A,s1} - C_{A,s2}) \quad (\text{Eq. 19})$$

Les concentrations molaires d'hydrogène sur chaque face de la membrane en plastique sont :

$$C_{A,s1} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kmol.m}^{-3} \cdot \text{bar}^{-1} \times 3 \text{ bars} = 4.5 \times 10^{-3} \text{ kmol.m}^{-3}$$

$$C_{A,s2} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kmol.m}^{-3} \cdot \text{bar}^{-1} \times 1 \text{ bars} = 1.5 \times 10^{-3} \text{ kmol.m}^{-3}$$

d'où :

$$N_{A,x}'' = \frac{8.7 \times 10^{-8} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{0.3 \times 10^{-3} \text{ m}} (4.5 \times 10^{-3} - 1.5 \times 10^{-3}) \text{ kmol.m}^{-3}$$

$$N_{A,x}'' = \mathbf{8.7 \times 10^{-7} \text{ kmol.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}}$$

Sur une base massique, on a :

$$n_{A,x}'' = N_{A,x}'' \cdot M_A = 8.7 \times 10^{-7} \text{ kmol.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} \cdot 2 \text{ kg.kmol}^{-1}$$

$$n_{A,x}'' = \mathbf{1.74 \times 10^{-6} \text{ kg.s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}}$$

**Exercice 3**

En supposant que l'air est composé exclusivement de dioxygène (O<sub>2</sub>) et d'azote (N<sub>2</sub>), avec des pressions partielles respectives respectant le ratio :  $\frac{P_{O_2}}{P_{N_2}} = \frac{0.21}{0.79}$

Quelles sont les fractions massiques de ces deux gaz au sein du mélange (Air) ?

**Solution :**  $m(O_2) = 0.233$  ;  $m(N_2) = 0.767$

#### Exercice 4

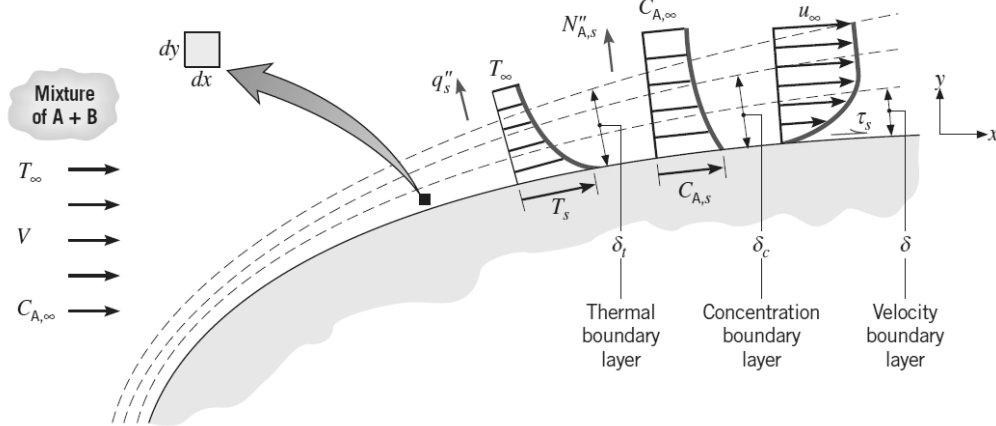
Estimez les valeurs de la diffusivité massique ( $D_{AB}$ ) pour les deux mélanges binaires suivants (à 350 K et 1 atm) : Ammoniac+Air, Hydrogène+Air.

**Solution :**  $D_{AB}$  (Ammoniac+Air) =  $0.36 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$  ;  $D_{AB}$  (Hydrogène+Air) =  $0.52 \times 10^{-4} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ .

# Chapitre 8 : Transfert de masse par convection

## 1. Couche limite massique

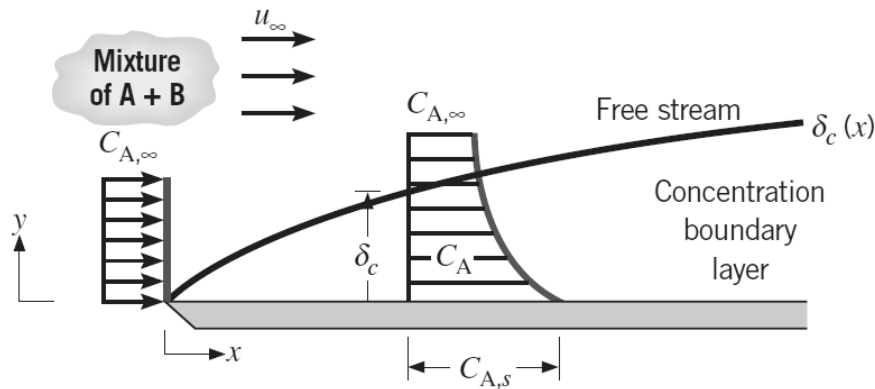
La couche limite massique est appelée aussi *Couche limite de concentration* (**Fig. 1**).



**Fig. 1.** Couches limites hydrodynamique, thermique et massique [3]

*Exemple :* Ecoulement d'air à la surface d'un plan d'eau (cf. Exercice 1) → L'eau liquide s'évapore. La vapeur d'eau ainsi produite est transférée à l'intérieur de l'écoulement de l'air libre.

Par la suite, on se place dans le cas d'une plaque plane horizontale (**Fig. 2**).



**Fig. 2.** Couche limite massique pour une plaque plane horizontale [3]

$\delta_c$  : Epaisseur de la couche limite massique.

A partir de la définition de l'épaisseur d'une couche limite on a :  $\delta_c = y$  tel que :  $\frac{C_{A,s} - C_A(y)}{C_{A,s} - C_{A,\infty}} = 99 \%$ .

$C_{A,s}$  : Concentration molaire du constituant A dans l'écoulement à la surface de la plaque ( $y = 0$ ), en  $\text{kmol.m}^{-3}$ .

$C_{A,\infty}$  : Concentration molaire du constituant A dans l'écoulement de l'air libre  $y \rightarrow \infty$  ou  $y > \delta_c$ .

## 2. Flux massique convectif

Soit le mélange binaire (A+B).

On écrit la loi de Fick simplifiée, i.e. écrite en considérant que le constituant A est dilué dans le mélange ( $C_A \ll C$  ou  $x_A \ll 1$  ;  $C = C_A + C_B = \text{constante} \approx C_B$ ).

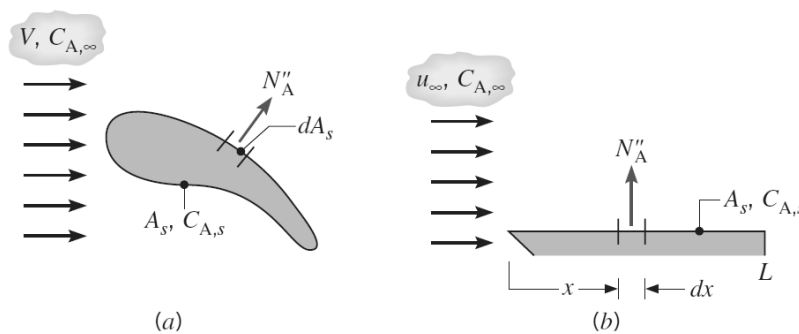
On écrira les équations qui vont suivre, sur une base molaire puis sur une base massique.

*Base molaire :*

La densité de flux molaire s'écrit (loi de Fick), en considérant que  $C = \text{constante}$  :

$$N_A'' = -C D_{AB} \frac{\partial x_A}{\partial y} = -D_{AB} \cdot \frac{\partial(C x_A)}{\partial y} = -D_{AB} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial y} \quad (\text{Eq. 1})$$

Cette densité de flux molaire est calculée pour un  $x$  donné ;  $0 \leq x \leq L$  ;  $L$  étant la longueur de la plaque (**Fig. 3**).



**Fig. 3.** Transfert de masse par convection (local, global) [3]

a) Surface arbitraire ; b) plaque plane horizontale.

On rappelle ici que le problème traité est bidimensionnel (en  $x$  et  $y$ ).

A la surface de la plaque, et on utilisant la loi de Newton pour le transfert de masse (analogue à celle du transfert de chaleur par convection), on a :

$$N_{A,s}'' = -D_{AB} \cdot \frac{\partial C_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = h_m (C_{A,s} - C_{A,\infty}) \quad (\text{Eq. 2})$$

$h_m$  : Coefficient de transfert de masse par convection, en  $m.s^{-1}$ . Ce coefficient est analogue au coefficient d'échange de chaleur  $h$  utilisé dans le transfert de chaleur par convection.

Il s'agit ici d'un coefficient de transfert de masse local, i.e. pour calculé pour un  $x$  donné.

$h_m$  est donné par la relation suivante :

$$h_m = \frac{-D_{AB} \cdot \left. \frac{\partial C_A}{\partial y} \right|_{y=0}}{C_{A,s} - C_{A,\infty}} \quad (\text{Eq. 3})$$

Par la suite, les grandeurs  $N_{A,s}''$  et  $N_A''$  seront confondues.

Le flux de transfert de masse global ou *flux molaire global*, en  $kmol.s^{-1}$ , s'écrit :

$$N_A = N_{A,s}'' A_s = \bar{h}_m A_s (C_{A,s} - C_{A,\infty}) \quad (\text{Eq. 4})$$

$A_s$  : Surface d'échange (de masse) = Surface de la plaque =  $L \times b$  ;

$L$  et  $b$  sont respectivement la longueur et la largeur de la plaque ;

$\bar{h}_m$  : Coefficient de transfert de masse (par convection) moyen ou global. Il est défini par la relation suivante :

$$\bar{h}_m = \frac{1}{A_s} \iint_{A_s} h_m dA_s \quad (\text{Eq. 5})$$

Pour une plaque plane de longueur  $L$ , l'équation précédente devient :

$$\bar{h}_m = \frac{1}{L} \int_0^L h_m dx \quad (\text{Eq. 6})$$

*Base massique :*

La loi de Fick, pour une écriture en base massique, donne :

$$\dot{n}_{A,s}'' = -D_{AB} \cdot \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0} = h_m (\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}) \quad (\text{Eq. 7})$$

et

$$h_m = \frac{-D_{AB} \cdot \left. \frac{\partial \rho_A}{\partial y} \right|_{y=0}}{\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty}} \quad (\text{Eq. 8})$$

En multipliant l'**Eq. 7** par la masse molaire du constituant ( $M_A$ ), on obtient l'expression du flux de transfert de masse global ou *flux massique* global, en  $\text{kg.s}^{-1}$ .

$$n_A = n_A'' A_S = \bar{h}_m A_S (\rho_{A,S} - \rho_{A,\infty}) \quad \text{(Eq. 9)}$$

$n_A''$  : Densité (surfactive) de flux massique, en  $\text{kg. s}^{-1}.\text{m}^{-2}$  ;

$\rho_{A,S}$  : Masse volumique du constituant A dans l'écoulement, à la surface de la plaque ( $y = 0$ ), en  $\text{kmol.m}^{-3}$  ;

$\rho_{A,\infty}$  : Masse volumique du constituant A dans l'écoulement de l'air libre ( $y \rightarrow \infty$  ou  $y > \delta_c$ ).

Il est à noter que le flux massique ( $n_A$ ) est analogue au flux de chaleur ( $q$ ).

*Remarque* : Il est nécessaire de déterminer les valeurs de  $C_{A,S}$  ou de  $\rho_{A,S}$ . A cet effet, on suppose l'existence d'un équilibre thermodynamique à l'interface entre la vapeur et le liquide (ou vapeur-solide). On a donc :

$$T_v(\text{à l'interface}) = T_s \quad \text{(Eq. 10)}$$

La vapeur étant saturée, on peut calculer ses propriétés à partir des tables thermodynamiques pour le fluide considéré. On a donc :

$$T_v = T_{\text{sat}} = T_s \quad \text{(Eq. 11)}$$

On a recours aussi à l'équation d'état des gaz parfaits pour obtenir l'expression de :

$$C_{A,S} = \frac{P_{\text{sat}}(T_s)}{RT_s} \quad \text{ou} \quad \rho_{A,S} = \frac{P_{\text{sat}}(T_s)}{R_A T_s} \quad \text{(Eq. 12)}$$

$R$  : Constante (universelle) des gaz parfaits =  $8.314 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$

$R_A$  : Constante (spécifique) du gaz parfait A, en  $\text{J.kg}^{-1}.\text{K}^{-1}$

Pour rappel, on a :  $\rho_A = M_A C_A$ .

### 3. Nombre adimensionnel de Sherwood

On considère le nombre adimensionnel  $C_A^*$  :

$$C_A^* = \frac{C_{A,S} - C_A(y)}{C_{A,S} - C_{A,\infty}} \quad \text{(Eq. 13)}$$

On introduit le nombre adimensionnel de Sherwood (Sh) :

$$\text{Sh} = \frac{h_m L}{D_{AB}} = \left. \frac{\partial C_A^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (\text{Eq. 14})$$

Le nombre de Sherwood joue le même rôle que celui joué par le nombre de Nusselt utilisé pour le transfert de chaleur par convection. Pour rappel :

$$\text{Nu} = \frac{h L}{k_f} = \left. \frac{\partial T^*}{\partial y^*} \right|_{y^*=0} \quad (\text{Eq. 15})$$

avec :

$$y^* = \frac{y}{L} \quad \text{et} \quad T^* = \frac{T_s - T(y)}{T_s - T_\infty} \quad (\text{Eq. 16})$$

Le nombre de Sherwood caractérise le transfert de masse entre un fluide (gaz ou liquide) et une interface (solide). On a :

$$\text{Sh} = \frac{\text{Transfert de masse par convection}}{\text{Transfert de masse par diffusion}} \quad (\text{Eq. 17})$$

#### 4. Epaisseurs de couches limites

Pour les couches limites, plusieurs épaisseurs peuvent exister :

- $\delta$  : Epaisseur de la couche limite hydrodynamique (ou des vitesses) ;
- $\delta_t$  : Epaisseur de la couche limite thermique ;
- $\delta_c$  : Epaisseur de la couche limite massique (ou de concentration).

Ces trois épaisseurs ont rarement les mêmes valeurs.

Par la suite, *on se place dans le cas d'une couche limite laminaire.*

On a :

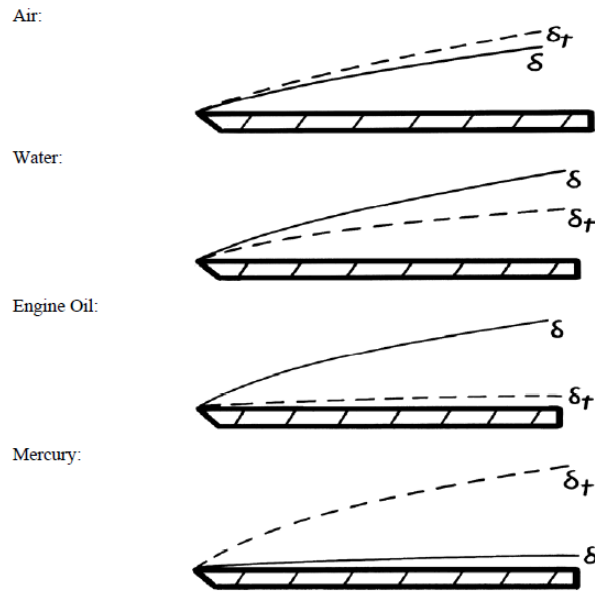
$$\frac{\delta}{\delta_t} \approx \text{Pr}^n \quad (\text{Eq. 18})$$

avec :

$$\text{Pr} = \text{nombre de Prandtl} = \frac{\nu}{a} = \frac{\text{diffusivité de la quantité de mouvement}}{\text{diffusivité thermique}} \quad (\text{Eq. 19})$$

Pour rappel, le nombre de Prandtl compare les couches limites hydrodynamique et thermique (**Fig. 4**) :

- pour un gaz :  $\delta_t \approx \delta$  ( $Pr \approx 1$ ) ;
- pour un métal liquide :  $\delta_t \gg \delta$  ( $Pr \ll 1$ ) ;
- pour une huile :  $\delta_t \ll \delta$  ( $Pr \gg 1$ ).



**Fig. 4.** Epaisseurs des couches limites hydrodynamique et thermique [3]

On a aussi :

$$\frac{\delta}{\delta_c} \approx Sc^n \quad (\text{Eq. 20})$$

avec :

$$Sc = \text{nombre de Schmidt} = \frac{\nu}{D_{AB}} = \frac{\text{diffusivité de la quantité de mouvement}}{\text{diffusivité massique}} \quad (\text{Eq. 21})$$

Le nombre de Schmidt compare les couches limites hydrodynamique et massique.

On a enfin :

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} \approx Le^n \quad (\text{Eq. 22})$$

avec :

$$Le = \text{nombre de Lewis} = \frac{\alpha}{D_{AB}} = \frac{\text{diffusivité thermique}}{\text{diffusivité massique}} = \frac{Sc}{Pr} \quad (\text{Eq. 23})$$

Le nombre de Lewis compare les couches limites thermique et massique. Ce nombre est à considérer lorsque l'on est en présence d'un transfert conjugué (ou simultané) de chaleur et de masse.

*Remarques :*

- Dans les **Eq. 18, 20 et 22** : pour la plupart des applications, il serait raisonnable de considérer (pour la valeur de  $n$ ) :  $n = \frac{1}{3}$  ;
- Chacun des nombres adimensionnels (Pr, Sc, Le), permet de comparer les intensités relatives de deux processus différents :
  - Pr : Hydrodynamique vs Thermique ;
  - Sc : Hydrodynamique vs Massique ;
  - Le : Thermique vs Massique.

Dans les exercices liés au présent chapitre, on aborde le calcul du flux massique par convection en faisant la lumière sur les principales grandeurs permettant ce calcul. Par ailleurs, il est à souligner qu'un aspect très intéressant et qui porte sur l'analogie entre le transfert de masse (par convection) et le transfert de chaleur (par convection) fait l'objet de l'exercice 2.

## Exercice 1

Dans une journée d'été, la température de l'air est  $T_\infty = 27^\circ\text{C}$  et l'humidité relative est  $\Phi = 30\%$  (Fig. 5). L'eau s'évapore à la surface d'un lac d'eau avec un débit massique de  $0.1\text{ kg}\cdot\text{h}^{-1}$  par  $\text{m}^2$  de surface d'eau. La température de l'eau est à  $27^\circ\text{C}$ .

Calculer la valeur du coefficient de transfert de masse par convection.



Fig. 5. Schéma de l'étude [3]

### Solution :

On a un mélange gazeux binaire (A+B) ; avec A = Vapeur d'eau et B = Air.

### Hypothèses :

- Régime permanent ;
- L'air est à la pression  $P = 1\text{ atm}$  ;
- La surface « Vapeur d'eau - Eau liquide » est à l'équilibre thermodynamique :

$$T_v = T_s = T_{\text{sat}} = 300\text{ K} ;$$

- La vapeur d'eau est considérée comme un gaz parfait ;
- $\rho_{A,\text{sat}} = \frac{1}{v_g} = 0.02556\text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$  ;

Trois Sources sont possibles pour la détermination de la valeur de  $\rho_{A,\text{sat}}$  :

Tables thermodynamiques de l'eau (pour  $T = 300\text{ K}$ )

Equation d'état des gaz parfaits

Diagramme psychrométrique

- $P_{A,\text{sat}} = 0.03531\text{ bar}$ .

La densité de flux massique s'écrit :  $n_A'' = \bar{h}_m A_s (\rho_{A,s} - \rho_{A,\infty})$ , avec :

$\rho_{A,s}$  : Masse volumique de la vapeur d'eau saturée à la température du liquide ( $T_s$ ) :  $\rho_{A,s} = \rho_{A,\text{sat}}(T_s)$  ;

$\rho_{A,\infty}$  : Masse volumique de la vapeur d'eau saturée présente dans l'air :  $\rho_{A,\infty} = \Phi \rho_{A,\text{sat}}$  . Cette expression vient du fait que (en utilisant aussi l'équation d'état des gaz parfaits) :

$$\phi = \text{humidité relative de l'air} = \frac{P_v(T_\infty)}{P_{v,\text{sat}}(T_\infty)} = \frac{\rho_{A,\infty}}{\rho_{A,\text{sat}}}$$

De ce fait, on peut calculer la valeur de  $\bar{h}_m$  :

$$\bar{h}_m = \frac{n_A''}{\rho_{A,\text{sat}}(1-\phi)} = 1.55 \times 10^{-3} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

## Exercice 02 (Analogie transfert de chaleur – transfert de masse)

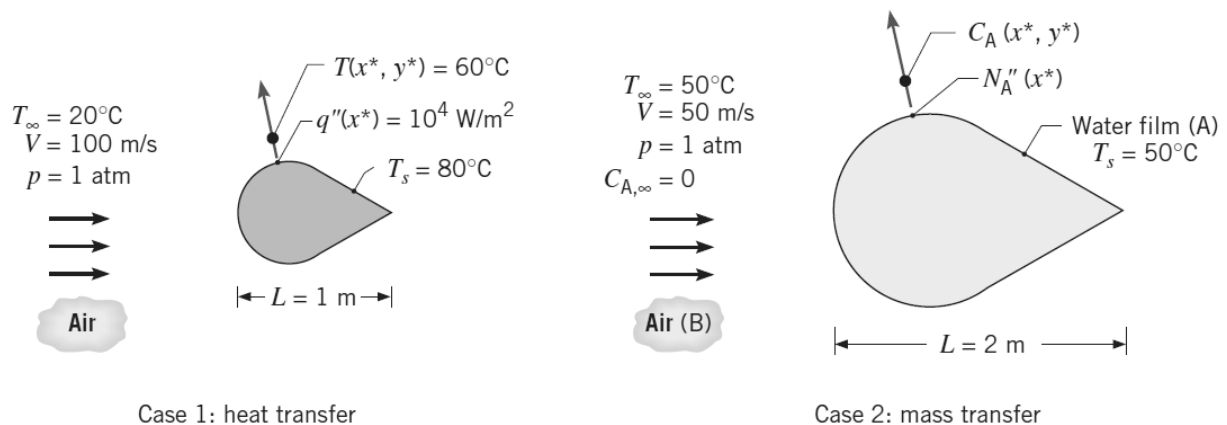
Dans cet exercice, est examiné un exemple de l'analogie existant entre le transfert de masse et le transfert de chaleur.

Un solide de forme arbitraire (*cas 1*) est suspendu dans un écoulement libre d'air à la pression atmosphérique (**Fig. 6**). La température et la vitesse de l'écoulement libre sont respectivement :  $T_\infty = 20^\circ\text{C}$  et  $V = 100 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . La longueur caractéristique du solide est  $L = 1 \text{ m}$  et sa surface est maintenue à une température de surface  $T_s = 80^\circ\text{C}$ .

Dans ces conditions, des mesures de densité de flux de chaleur et de température dans la couche limite à une position ( $x^* = \frac{x}{L}$ ,  $y^* = \frac{y}{L}$ ) donnent respectivement  $q''(x^*) = 10^4 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}$  et  $T(x^*, y^*) = 60^\circ\text{C}$ .

Un transfert de masse est opéré sur un autre solide (*cas 2*) de même forme géométrique et avec une longueur caractéristique  $L = 2 \text{ m}$ . Un film d'eau liquide, d'épaisseur fine, est présent sur la surface de ce solide. Il s'évapore au contact d'un écoulement d'air atmosphérique d'une vitesse d'écoulement libre  $V = 50 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ . L'air et le solide sont à la même température  $T_\infty = T_s = 50^\circ\text{C}$ .

Calculer la concentration molaire  $C_A^*(x^*, y^*)$  ainsi que le flux de transfert de masse de la vapeur d'eau  $N_A''(x^*)$  à la même localisation considérée pour le solide 1, là où les mesures de transfert de chaleur ont été réalisées, c'est-à-dire ( $x^*$ ,  $y^*$ ).



**Fig. 6.** Schéma de l'étude [3]

**Solution :**

On a une mixture binaire de gaz (A+B) ; avec A = Vapeur d'eau et B = milieu = Air.

*Hypothèses :*

- Régime permanent ;
- Problème bidimensionnel (en x et y) ;
- Les propriétés thermophysiques du fluide sont constantes ;
- Le constituant A est dilué dans le mélange (ou couche limite de concentration) :  $x_A \ll 1$ .

1) Calcul de la concentration molaire (adimensionnelle) :  $C_A^*(x^*, y^*)$

*Cas 1 :*

Les propriétés de l'air sont évaluées à :  $T_{\text{film}} = \frac{T_s + T_\infty}{2} = 50 \text{ °C}$  ou 323 K et  $P = 1 \text{ atm}$

De ce fait, on a :

$$\text{Re}_{L,1} = \frac{V_{1,\infty} \cdot L_1}{\nu_1} = 5.5 \cdot 10^{-6}$$

$$(V_{1,\infty} = 100 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; L_1 = 1 \text{ m} ; \nu_1 = 18.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\text{Pr}_1 = 0.7$$

$$(\text{à } T = 323 \text{ K et } P = 1 \text{ atm})$$

*Cas 2 :*

Du fait que  $x_A \ll 1$  :  $\nu_2 = \nu_B$  ou  $\nu_{\text{air}}$  (déterminée pour  $T = 323 \text{ K}$  et  $P = 1 \text{ atm}$ )

De ce fait, on a :

$$\text{Re}_{L,2} = \frac{V_{2,\infty} \cdot L_2}{\nu_2} = 5.5 \cdot 10^{-6}$$

$$(V_{2,\infty} = 50 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} ; L_2 = 2 \text{ m} ; \nu_2 = 18.2 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

$$\text{Sc}_2 = \frac{\nu_2}{D_{AB}} = 0.7$$

$$(D_{AB} = 26 \times 10^{-6} \text{ m}^2 \cdot \text{s}^{-1})$$

*Conclusion :* Nous avons : les mêmes formes géométriques pour les *cas 1* et *2* ;  $x_1^* = x_2^*$  ;  $\text{Re}_{L,1} = \text{Re}_{L,2}$  ;

$\text{Pr}_1 = \text{Sc}_2$  . Donc, la distribution de la température et la distribution de la concentration sont analogues,

i.e. elles ont la même forme :

$$\frac{C_{A,s} - C_A^*(x^*, y^*)}{C_{A,s} - C_{A,\infty}} = \frac{T_s - T^*(x^*, y^*)}{T_s - T_\infty} = 0.33$$

Or :  $C_{A,\infty} = 0$ , donc :  $C_A^*(x^*, y^*) = 0.67 C_{A,s}$

$$C_{A,s} = C_{A,\text{sat}}(50^\circ\text{C}) = \frac{\rho_{A,\text{sat}}}{M_A} = 0.0046 \text{ kmol. m}^{-3}$$

On a donc :

$$C_A^*(x^*, y^*) = 0.0031 \text{ kmol. m}^{-3}$$

2) Calcul de la densité de flux molaire :  $N_A''(x^*)$

On a :

$$N_A'' = h_m(C_{A,s} - C_{A,\infty})$$

Le coefficient de transfert de masse par convection ( $h_m$ ) est évalué à partir de l'analogie « transfert de masse - transfert de chaleur » :  $Sh = Nu$

i.e. :

$$\frac{h_m L_2}{D_{AB}} = \frac{h L_1}{k_{\text{air}}}$$

or,

$$h = \frac{q''}{T_s - T_\infty}$$

De ce fait :

$$h_m = \frac{L_1}{L_2} \cdot \frac{D_{AB}}{k_{\text{air}}} \cdot \frac{q''}{T_s - T_\infty} = 0.77 \text{ m. s}^{-1}$$

et donc :

$$N_A'' = 3.54 \times 10^{-4} \text{ kmol. s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

### Exercice 3

Une casserole d'eau, de diamètre  $D = 230 \text{ mm}$ , et à une température  $T_s = 23^\circ\text{C}$ , a un taux de perte de masse de  $1.5 \times 10^{-5} \text{ kg. s}^{-1}$  lorsque l'air ambiant est sec et à une température  $T = 23^\circ\text{C}$  (**Fig. 7**).

1) Déterminez le coefficient de transfert de masse par convection ( $\bar{h}_m$ ) ;

2) Estimez le taux de perte de masse par évaporation ( $\dot{m}_{\text{évap}}$ ) lorsque l'air ambiant a une humidité relative ( $\phi_\infty$ ) de 50 %.

3) Estimez le taux de perte de masse par évaporation lorsque les températures de l'eau et de l'air ambiant sont à  $47^\circ\text{C}$ . On suppose que le coefficient de transfert de masse par convection reste inchangé et que l'air ambiant est sec.

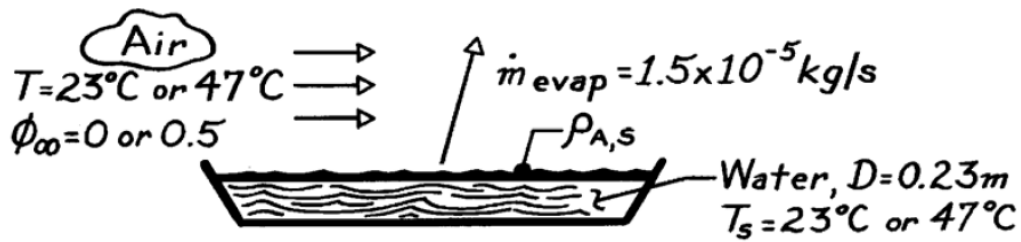


Fig. 7. Schéma de l'étude [3]

Solution : 1)  $\bar{h}_m = 0.0179 \text{ m.s}^{-1}$  ; 2)  $\dot{m}_{\text{évap}} = 0.75 \times 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}$  ; 3)  $\dot{m}_{\text{évap}} = 5.31 \times 10^{-5} \text{ kg.s}^{-1}$ .

### Exercice 4

La photosynthèse, telle qu'elle se produit dans les feuilles d'une plante verte, implique le transport de dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) de l'atmosphère vers les chloroplastes des feuilles. Le taux de photosynthèse peut être quantifié en termes de taux d'assimilation du  $\text{CO}_2$  par les chloroplastes. Cette assimilation est fortement influencée par le transfert de  $\text{CO}_2$  à travers la couche limite qui se développe à la surface des feuilles.

Dans des conditions pour lesquelles la masse volumique du  $\text{CO}_2$  est  $\rho_{A,\infty} = 6 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$  dans l'air et  $\rho_{A,s} = 5 \times 10^{-4} \text{ kg.m}^{-3}$  à la surface de la feuille et que le coefficient de transfert de masse par convection ( $h_m$ ) est de  $10^{-2} \text{ m.s}^{-1}$  (Fig. 8), quelle est la vitesse de la photosynthèse en termes de kilogrammes de  $\text{CO}_2$  assimilés par unité de temps et de surface de la feuille ( $n_A''$ ) ?

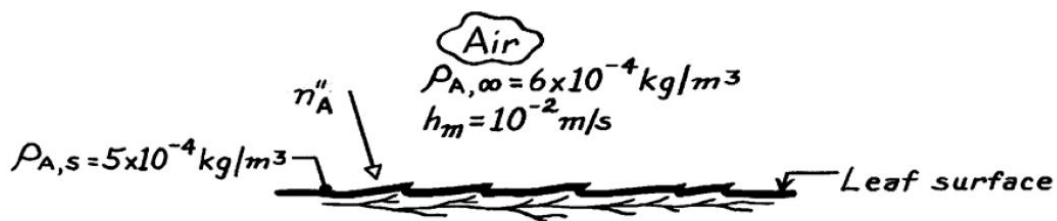


Fig. 8. Schéma de l'étude [3]

Solution :  $n_A'' = 10^{-6} \text{ kg.s}^{-1}.\text{m}^{-2}$ .

## Références bibliographiques

- [1] Battaglia J.L., Kusiak A., Puiggalli J.R., Introduction aux transferts thermiques, Cours et exercices corrigés, Dunod, 2010 ;
- [2] Cengel Y. A., Heat transfer -a practical approach, McGraw-Hill Science Engineering Math, 2002 ;
- [3] Bergman T. L., Lavine A. S., Incropera F. P., Dewitt D. P., Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 7<sup>th</sup> edition, , Edition John Wiley & Sons, 2011 ;
- [4] Janna W. S., Engineering heat transfer, Second Edition, CRC Press, 2000 ;
- [5] Lienhard J. H. (IV), Lienhard J.H. (V), A Heat Transfer Text Book, 4<sup>th</sup> edition, Phlogiston Press, 2017 ;
- [6] Nukiyama S., J. Japan Soc. Mech. Eng., 37, 367, 1934 ;
- [7] Drew T. B., Mueller C., Trans. AIChE, 33, 449, 1937 ;
- [8] Rohsenow W. M., Trans. ASME, 74, 969, 1952 ;
- [9] Kutateladze S. S., Kotloturbostroenie, 3, 10, 1948 ;
- [10] Zuber N., Trans. ASME, 80, 711, 1958 ;
- [11] Berenson P. J., J. Heat Transfer, 83, 351, 1961 ;
- [12] Bromley L. A., Chem. Eng. Prog., 46, 221, 1950 ;
- [13] Nusselt W. Z., Ver. Deut. Ing., 60, 541, 1916 ;
- [14] Kutateladze S. S., Fundamentals of Heat Transfer, Academic Press, New York, 1963 ;
- [15] Labuntsov D. A., Teploenergetika, 4, 72, 1957 ;
- [16] Naterer G. F., Heat transfer in single and multiphase systems, CRC Press, 2002 ;
- [17] Munson B. R., DeWitt D. P., Shapiro H. N., Introduction to thermal systems engineering thermodynamics, fluid mechanics and heat transfer, John Wiley & Sons, 2002 ;
- [18] Pitts D. R., Sissom L. E., Theory and problems of heat transfer, Schaum's outlines series, Mc-Graw-Hill, 1998 ;
- [19] Baehr H. D., Stephan K., Heat and mass transfer, Springer, 2006 ;
- [20] Carminati R., Introduction aux transferts radiatifs, Laboratoire d'Energétique Moléculaire et Macroscopique, Combustion (EM2C), Ecole Centrale de Paris, Centre National de la Recherche Scientifique (CNRS).