

N° d'ordre: 02/2008-M/G.C

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE GENIE CIVIL



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de *MAGISTER*

EN : *GENIE CIVIL*

Spécialité : *CONSTRUCTION*

Par : *BELHADJ Ahmed Fouad*

Sujet

*Contribution à l'étude d'une Console en Béton Armé
avec Introduction d'un Signal Sismique Digitalisé*

Soutenu le: 16 /12/ 2008, devant le jury composé de

Mr BOUHADEF .M	<i>Professeur, FGC/USTHB</i>	<i>Président</i>
Mr NECHNECH .A.	<i>Maître de Conférences classe A, FGC/USTHB</i>	<i>Directeur de thèse</i>
Mme KHARCHI .F	<i>Professeur, FGC/USTHB</i>	<i>Examineur</i>
Mr BOUKHALED .A	<i>Maître de Conférences classe A, FGC/USTHB</i>	<i>Examineur</i>
Mr KHALED .O.	<i>Chargé de Recherche, USTHB</i>	<i>Examineur</i>

DEDICACE

A mon père et ma mère pour leur soutien.

A mes frères et mes soeurs

A mes proches

A mon oncle Aissa et tante Cherifa et leurs enfants.

A mes amis et collègues.

A tous ceux qui m'ont aidé.

A vous tous, ce mémoire vous est dédié.

REMERCIEMENTS

Je désire remercier mon directeur de thèse Dr. **Nechnech. A** pour son aide précieuse dans la réalisation de cette étude. Sa confiance, sa perception intellectuelle et l'autonomie laissée dans l'élaboration de ce mémoire ont été fortement appréciées. Sans oublier Mr **Chalah. F** qui avec ses recommandations scientifiques efficaces, ses orientations, ses conseils et son encadrement, a contribué énormément à la réalisation de ce travail.

J'adresse ma gratitude aux Pr. **Chabaat**, Pr **Chamrouk**, Pr **Kharchi**, Dr **Boukhaled**, Pr **Anil .K Chopra**, Dr **Cemalettin Donmez** et Dr **Tommaso Albanesi** pour leurs informations et leurs réponses aux nombreuses questions engendrées lors de la réalisation de ce mémoire.

C'est avec un grand honneur que je tiens à adresser mes sincères remerciements au Pr **Bouhadeb** qui a bien voulu accepter de présider le jury d'examen, ainsi que tous les membres du jury.

Je remercie également le corps professoral de la faculté du génie civil pour leur dévouement et leurs qualités humaines.

Enfin je désire remercier mes parents pour leur soutien et leur confiance.

TABLE DES MATIERES

DEDICACE	i
REMERCIEMENTS	ii
TABLE DES MATIERES	iii
INDEX DES TABLEAUX ET DES ALGORITHMES	v
Liste des figures	vi
RESUME	viii
ABSTRACT	ix
ملخص	x
Liste des symboles et notations	xi
CHAPITRE I : INTRODUCTION.....	1
<i>I.1</i> <i>Motivations</i>	2
<i>I.2</i> <i>Organisation</i>	3
CHAPITRE II : EVALUATION ANALYTIQUE DE LA REPONSE DES SYSTEMES STRUCTURAUX LINEAIRES.....	5
<i>II.1</i> <i>Réponse d'un système linéaire à un seul degré de liberté</i>	6
II.1.1. Intégrale de Duhamel	6
II.1.2. Intégration numérique directe	9
II.1.3. Erreurs	16
<i>II.2</i> <i>Réponse d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté</i>	18
II.2.1. Généralités.....	18
II.2.2. Analyse des systèmes linéaires	20
II.2.3. Méthode de Newmark	21
CHAPITRE III : EVALUATION ANALYTIQUE DE LA REPONSE DES SYSTEMES STRUCTURAUX NON LINEAIRES	24
<i>III.1</i> <i>Sources de non linéarité</i>	26
III.1.1. Non linéarité géométrique.....	27
III.1.2. Non linéarité matérielle.....	28
<i>III.2.</i> <i>Analyses dynamiques</i>	28
<i>III.3</i> <i>Analyse de la réponse non linéaire</i>	29
III.3.1. Méthode de Newmark	29
III.3.2. Solution non linéaire	35
CHAPITRE IV : MODELES MATERIELS ANALYTIQUES	40
<i>IV.1</i> <i>Définitions décrivant les courbes hystérétiques</i>	44
<i>IV.2</i> <i>Modèle hystérésis de l'acier</i>	45
<i>IV.3</i> <i>Modèle hystérésis pour le béton</i>	49
CHAPITRE V : MISE EN APPLICATION ET VALIDATION DE LA REPONSE D'UN SYSTEME LINEAIRE A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE	54
<i>V.1</i> <i>Réponse d'un oscillateur simple excité par un signal sismique, obtenue par l'intégrale de Duhamel</i>	55

V.2	<i>Réponse d'un oscillateur simple excité par un signal sismique par la méthode de Newmark</i>	60
CHAPITRE VI : MISE EN APPLICATION ET VALIDATION DE LA REPONSE D'UN SYSTEME NON LINEAIRE A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE.....		66
VI.1	<i>Réponse d'une console en béton armé sollicitée par un signal sismique bi directionnel</i>	67
VI.2	<i>Description d'un modèle pour calculer la réponse cyclique des éléments en béton armé soumis aux forces bi axiales</i>	71
VI.3	<i>Calcul des moments incrémentaux pour des flèches incrémentales données</i>	73
VI.3.1.	Calcul de la composante de la flèche due à la flexion	73
VI.3.2.	Calcul de la composante de la flèche due au cisaillement	73
VI.3.3.	Calcul de la composante de la flèche associée au glissement des armatures.....	74
VI.4	<i>Procédure de calcul des moments incrémentaux pour des flèches incrémentales données</i>	74
VI.5	<i>Calcul de la relation moment-courbure</i>	76
VI.6	<i>Application</i>	88
CHAPITRE VII : CONCLUSION ET PRESPECTIVES.....		92
BIBLIOGRAPHIE		96
ANNEXES		99
A.1	<i>Algorithme du modèle adopté pour le béton [7]</i>	100
A.2	<i>Algorithme du modèle adopté pour l'acier (Menegotto-Pinto) [7]</i>	107

INDEX DES TABLEAUX ET DES ALGORITHMES

<i>Algorithme. II.1 : Méthode de Newmark pour un système linéaire à un seul degré de liberté.....</i>	<i>15</i>
<i>Algorithme.II. 2 : Méthode de Newmark pour un système linéaire</i>	<i>22</i>
<i>Algorithme .III. 1: la méthode de Newton-Raphson modifiée pour un système à un seul degré de liberté.</i>	<i>33</i>
<i>Algorithme .III. 2 : Méthode de Newmark pour un système non linéaire à un seul degré de liberté.</i>	<i>34</i>
<i>Algorithme. III. 3 : Méthode des accélérations moyennes pour un système non linéaire à plusieurs degrés de liberté.</i>	<i>37</i>
<i>Algorithme .III. 4: la méthode de Newton-Raphson modifiée à plusieurs degrés de liberté.</i>	<i>38</i>
<i>Tableau .IV. 1: sommaire des spécifications de quelques modèles hystérésis [5].....</i>	<i>43</i>
<i>Tableau .A. 1: modèle adopté pour le béton [7].</i>	<i>102</i>
<i>Tableau .A. 2 : modèle adopté pour l'acier (Menegotto-Pinto) [7].</i>	<i>109</i>

LISTE DES FIGURES

Figure .II. 1: Notations pour un chargement dynamique.	6
Figure .II. 2: Schématisation de la variation de l'amplitude AD et de la période PE.....	10
Figure .II. 3: Notation de l'interpolation linéaire de l'excitation.	12
Figure .II. 4: Notations pour la méthode d'accélération linéaire.	13
Figure .II. 5: Déplacement pour un système en vibrations libres donné par les quatre méthodes numériques ($\Delta t/T=0.1$) ainsi que la solution théorique.	16
Figure .II. 6: la variation de l'amplitude selon la méthode numérique utilisée.	17
Figure .III. 1: La non linéarité géométrique [4].....	27
Figure .III. 2: définition de la matrice de rigidité tangente et la matrice de rigidité sécante.	29
Figure .III. 3: définition des erreurs [3].	31
Figure .III. 4: les itérations durant l'étape de temps pour un système non linéaire:	32
Figure .IV. 1: La relation entre les courbes dans les règles de bases d'un modèle hystérésis [5].	41
Figure .IV. 2: Modèle représentatif et équation de Menegotto et Pinto [7].	46
Figure .IV. 3: les formes possibles des courbes de Menegotto-Pinto pour un chargement monotonique croissant [7].	47
Figure .IV. 4: Le décalage de la déformation dans la courbe enveloppe [7].	48
Figure .IV. 5: Courbes hystérésis de réponse mesurée et testée pour une barre d'acier 49	49
Figure .IV. 6: Modèle hystérésis pour le béton [7].	52
Figure .IV. 7: Règles définissant le début de contact pour la section fissurée du béton[7].	52
Figure .IV. 8: Comparaison entre les courbes hystérésis mesurées et calculées pour le béton comprimé (Données expérimentales de Otani [28]).	53
Figure .V. 1: Caractéristiques d'un système à un seul degré de liberté.	55
Figure .V. 2: Signal d'EL-CENTRO 18 Mai 1940 composante N-S.....	55
Figure .V. 3: Intégrale de Duhamel pour un système linéaire à un seul degré de liberté.	56
Figure .V. 4: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	57
Figure .V. 5: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].	57
Figure .V. 6: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	58
Figure .V. 7: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].	58
Figure .V. 8: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	59
Figure .V. 9: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].	59
Figure .V. 10: Méthode de Newmark pour un système linéaire à un seul degré de liberté.	62
Figure .V. 11: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	62
Figure .V. 12: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].	63
Figure .V. 13: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	63
Figure .V. 14: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].	64
Figure .V. 15: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=\pi$ rad/s et $\xi=2\%$	64

Figure .V. 16: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega = \pi$ rad/s et $\xi = 2\%$ [3].	65
Figure .VI. 1: Système structural et configuration des armatures longitudinales du système.	68
Figure .VI. 3: Représentation de la section rectangulaire comme un ensemble de fibres en acier et en béton [7].	80
Figure .VI. 4: Les sections dans la colonne et la distribution supposée des courbures [7]	81
Figure .VI. 5: Sommaire représentatif de la distribution supposée des courbures à différents niveaux du chargement [7].	82
Figure .VI. 6: Glissement des barres d'armatures [7].	83
Figure .VI. 7: Résultante de la courbure et ses composantes [7].	83
Figure .VI. 8: Enveloppe du moment d'écoulement pour l'épuisement de la barre la plus lointaine de l'axe neutre [7].	84
Figure .VI. 9: les moments dans la région d'écoulement [7].	84
Figure .VI. 10: Relation simplifiée moment-courbure [7].	85
Figure .VI. 11: Géométrie de la section transversale [7].	85
Figure .VI. 12: Changement dans la déformation du centre de la section due au changement de la position de l'axe neutre [7].	86
Figure .VI. 13: Signal d'EL-CENTRO 18 Mai 1940 composante N-S.	86
Figure .VI. 14: Signal d'EL-CENTRO 18 Mai 1940 composante E-W.	86
Figure .VI. 15: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante N-S.	87
Figure .VI. 16: les déplacements du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante N-S [7].	87
Figure .VI. 17: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante E-W.	87
Figure .VI. 18: les déplacements du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante E-W [7].	88
Figure .VI. 19: Composante E-W du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003	88
Figure .VI. 20: Composante N-S du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003	89
Figure .VI. 21: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.	89
Figure .VI. 22 : les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S.	89
Figure .VI. 23: les déplacements calculés par l'intégrale de Duhamel du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.	90
Figure .VI. 24: les déplacements calculés par l'intégrale de Duhamel du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S	90
Figure .VI. 25: les déplacements calculés par la méthode de Newmark du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.	91
Figure .VI. 26: les déplacements calculés par la méthode de Newmark du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S.	91
Figure .A.1. 1: Les intervalles utilisés dans l'algorithme du béton [7].	105
Figure .A.1. 2: Domaines des expressions données dans le tableau A.1 [7].	106
Figure .A.2. 1: Courbes hystérésis représentatives indiquant les intervalles utilisés dans l'algorithme du modèle de l'acier de Mengotto-Pinto [7].	110
Figure .A.2. 2 : Comportement de l'acier en traction - compression :	111

RESUME

L'analyse sismique des bâtiments existants constitue un domaine de plus en plus important en génie parasismique. Si les méthodes de dimensionnement des structures neuves sont bien maîtrisées, la prévision du niveau sismique auquel résiste un bâtiment existant est un problème beaucoup plus difficile à cerner.

L'objectif de cette recherche est de développer des programmes de simulation en Matlab basés sur le calcul non linéaire (du matériau) d'une console en béton armé excitée par des charges d'origine sismique sous forme d'accélérogrammes digitalisés, en utilisant une procédure d'intégration numérique. Cette procédure nécessite un calibrage dicté par des lois de comportement physique des matériaux constituant cette console, déterminées par des essais dynamiques effectués aux laboratoires de recherches.

La modélisation en macro modèles sous forme de fibres en employant les lois de comportement, offrent une alternative aux onéreux essais à échelle réelle servant à déterminer la réponse réelle et les caractéristiques d'un élément structural en béton armé dans tous les points du système et à chaque instant de la durée du signal.

Les résultats obtenus par cette analyse montrent que les déplacements du sommet de la console étudiée suivent exactement l'excitation, puisque les maximaux sont enregistrés pour les mêmes instants où l'excitation est élevée. En revanche, une analyse linéaire sous-estime la réponse du système et de plus les valeurs maximales des déplacements ne correspondent pas aux pics de l'accélération de la base.

ABSTRACT

Seismic analyzes of existing buildings is a field increasingly important in seismic engineering. If the methods of design new structures are well controlled, the forecast of the seismic level which resists an existing building is a problem much more difficult to define.

The objective of this research is to develop simulation programs in Matlab based on the calculation of reinforced concrete cantilever material nonlinearity excited by loads having a seismic origin in the form of digitalized accélérogram by using a process of numerical integration. This procedure requires a calibration dictated by the physical behaviour laws displayed by the constituent materials of reinforced concrete element given by the dynamic tests carried out to the research laboratories.

The use of the modelling macro models in the fibre shape by employing the laws of behaviour, offer an alternative to the expensive tests in real scale used for determine the real response and the characteristics of a structural reinforced concrete element in all the points and at every moment of the duration of the signal.

The results obtained for information after this analysis shows that displacements of the summit of the studied cantilever follow exactly the excitement, since the maximum are recorded for the same moments when the excitement is high. However, a linear analysis shows underestimation of the response system; in addition, the maximum value of a displacement does not correspond to the peak of the acceleration of the base.

ملخص

يعد التحليل الزلزالي للبنى القائمة مجالاً مهماً في الهندسة المضادة للزلازل. إذا كانت طرق تصميم الهياكل الجديدة متمكن منها، فتوقع المستوى الزلزالي الذي تقاومه البنى القائمة يشكل إشكالية صعبة التحديد.

الهدف من هذا البحث هو تطوير برنامج محاكاة في بيئة Matlab على أساس الحساب الناجم عن لاختطية المادة لعارضة من الخرسانة المسلحة الخاضعة لقوى ذي أصل زلزالي في شكل تسجيل رقمي للتسارع باستعمال إجراء تكامل عددي ، هذا الإجراء يحتاج إلى ضبط وفق قوانين السلوك الفيزيائي للمواد المكونة للعارضة ناتجة عن التجارب الديناميكية التي تجرى في مختبرات البحث.

إن استعمال طرق تمثيل عنصر الخرسانة المسلحة بنماذج مكبرة في شكل ألياف يمثل بديلاً للتجارب على النماذج الحقيقية باهظة التكاليف لتحديد التجاوب الحقيقي و خصائص هذا العنصر في جميع النقاط و في كل لحظة من مدة الإشارة الزلزالية .

النتائج المتحصل عليها توضح أن تحركات قمة العارضة تتبع مباشرة تغيرات تسارع القاعدة بما أن القيم القصوى تسجل في نفس الأزمنة عندما يكون هذا التسارع في أوجه عكس ما يعطيه التحليل الخطي من نقص في تقدير تجاوب النظام، إضافة إلى أن القيم القصوى للانتقالات لا تتوافق مع القيم القصوى لتسارع القاعدة

Liste des symboles et notations

- β, γ : paramètres de Newmark
- ε_{tol} : tolérance
- ε_0 : déformation au centre de la surface de la section.
- $d\varepsilon_0$: variation de la déformation au centre de la surface de la section.
- ε : déformation
- ε_{cx} : déformation compressive à laquelle le béton perd sa résistance.
- ε_{cen} : déformation du revirement maximal sur la courbe enveloppe.
- ε_{ec} : déformation au contact complet.
- ε_{cp} : déformation permanente à considérer pour le béton définie par l'équation 4-9.
- ε_{ct} : déformation du béton atteignant sa résistance à la traction.
- ε_{new} : nouvelle déformation.
- ε_{cur} : coordonnée déformation de la position courante.
- ζ : facteur d'amortissement visqueux
- ϕ_x, ϕ_y : composantes de la courbure.
- σ_{cen} : contrainte du revirement maximal sur la courbe enveloppe.
- σ_{ec} : contrainte à l'achèvement du contact complet.
- σ : nouvelle contrainte calculée pour la nouvelle déformation ε_{new} .
- σ_{cur} : coordonnée contrainte de la position actuelle.
- σ_r, ε_r : position du point de revirement maximal sur l'enveloppe pour l'acier.
- σ_y : contrainte d'épuisement de l'acier
- ω : pulsation du système.
- ζ : durée du signal
- A : accélération au sommet du système.
- A_{ij} : surface du sous domaine.
- C, c : Amortissement du système.
- $\Delta d_y, \Delta d_z$: flèche incrémentale le long de l'axe Y, de l'axe Z.
- D_{NA} : profondeur de l'axe neutre.
- ΔD_{NA} : variation dans la profondeur de l'axe neutre.
- d_{yr} : longueur de la " région d'épuisement".
- $(E_t)_{ij}$: module de rigidité tangentiel du sous domaine.
- E_c : module initial d'élasticité du béton.
- E_s : module initial d'élasticité de l'acier
- $fs(0)$: force de rappel initiale

g : gravité terrestre
 $(I_x), (I_y)$: Deuxième moment de la section selon l'axe des X, des Y
 K, k : rigidité du système.
 M, m : masse du système.
 M_y, M_z : moments le long de l'axe Y , Z.
 M_{y0} : moment d'épuisement dans la direction courante.
 L : longueur de l'élément.
 $p(0)$: force extérieure initiale
 $p(t)$: chargement dynamique.
 Δt : incrément temporel.
 t : temps.
 T : période du système.
 U : déplacement au sommet du système.
 $U(0)$: déplacement initial
 $\ddot{u}_g, \ddot{a}(t)$: Accélération du sol.
 V : vitesse au sommet du système.
 $V(0)$: vitesse initiale
 x_{ij}, y_{ij} : composantes du centre de la surface du sous domaine.

CHAPITRE I : INTRODUCTION

Parmi les catastrophes naturelles qui affectent régulièrement l'Algérie, les secousses telluriques sont sans doute celles qui ont le plus d'effet destructeur dans les zones urbaines.

Pour assurer la parade qui limite les dégâts, la seule prévision valable est la construction parasismique.

Pour arriver à cette fin, il faut connaître le comportement d'une structure vis-à-vis d'un séisme et plus précisément les comportements des matériaux et des éléments constituant cette structure.

1.1 Motivations

L'étude de l'accélérogramme permet d'accéder à la période d'oscillation des structures des bâtiments neufs et leurs amplitudes maximales. On définit ainsi les limites supérieures auxquelles devront résister les ouvrages en cas de séisme. Ces limites sont déterminées par les spectres de réponse obtenus en considérant un grand nombre d'oscillateurs élastiques linéaires caractérisés par leurs masses et leurs raideurs et dont les périodes propres couvrent une plage de valeurs courantes dans le génie civil.

Mais une fois sollicitée par un séisme, toute structure subie des transformations sur l'échelle macroscopique comme à l'échelle microscopique puisque chaque cycle cause des dommages qui dépendent de l'amplitude de ce cycle, de la charge axiale, des propriétés matérielles et des détails conceptuels des éléments. Dans ce cas, la majorité des notions et concepts utilisés lors de l'élaboration de la note de calcul ne sont plus représentatifs car ils ont été construits sur le principe de la linéarité, or en réalité, les transformations d'une structure causées par une excitation sismique sont régies par des comportements non linéaires, surtout si cette structure est réalisée par un matériau comme le béton armé.

Les procédures non linéaires posent des problèmes d'analyse beaucoup plus importants que celles des problèmes linéaires. La non linéarité peut être trouvée dans la dépendance des coefficients des équations de la solution elle-même ou des aspects des énergies et les produits de ces inconnues et de leurs dérivées [23].

Une procédure non linéaire convenable doit s'intéresser à l'excitation telle qu'elle se présente sur site sans la transformer, donc pour la prise en compte d'un signal sismique deux questions s'imposent :

- a) Y'a-t-il une possibilité d'exploiter un signal digitalisé d'accélérographe dans l'évaluation de la réponse d'une structure sans passer par les notions de période et de fréquence de vibrations et spectre de réponse ?
- b) Que se passe-t-il à l'intérieur d'un système structural sollicité par ce signal ?

La complexité des analyses non linéaires a été traitée seulement ces 30 dernières années par l'utilisation efficace des ordinateurs modernes (très rapides). Le développement des caractéristiques des éléments et la disponibilité des algorithmes de solutions non linéaires très efficaces et l'expérience acquise dans leur application aux problèmes d'engineering ont permis l'évaluation des caractéristiques d'une structure grâce à deux types d'analyses non linéaires :

- analyse statique non linéaire « *push over* »
- analyse dynamique non linéaire « *time history* »

Une analyse globale traite les aspects suivants : les non linéarités, l'interaction sol-structure, les éléments de frontière, les critères de ruptures, le flambement et les lois de comportement en 2D et 3D (cisaillement et torsion), ainsi que les lois régissant la rigidité et l'amortissement...

Ce travail est essentiellement focalisé sur la détermination du déplacement au sommet d'un système structural en béton armé affichant une non linéarité matérielle due à la flexion seulement puisqu'elle peut être simulée comme un comportement uni axial qui est acceptable à ce stade de la recherche, dans une analyse dynamique non linéaire de type « *time history* », par contre une analyse globale nécessiterait un travail énorme entraînant plusieurs équipes de recherche et du temps.

Dans ce mémoire nous présentons quelques méthodes pratiques permettant d'évaluer les réponses des structures aux excitations d'origine sismique, ainsi qu'une approche non linéaire qui analyse une console en béton armé soumise à un signal sismique bi directionnel horizontal.

1.2 Organisation

Ce mémoire de magistère se compose de deux parties :

- La première partie est une synthèse bibliographique qui comporte quatre chapitres.
 - Dans le premier chapitre nous avons établi une introduction à l'analyse parasismique des structures et les différents paramètres influant sur cette analyse.
 - Le deuxième chapitre est une synthèse bibliographique des méthodes numériques permettant de trouver la réponse d'un système structural linéaire.
 - Dans troisième chapitre nous présentons une synthèse bibliographique des aspects non linéaires d'une structure et les méthodes numériques pour résoudre l'équation de mouvement dynamique d'un système à un seul degré de liberté.
 - Dans le quatrième chapitre sont exposées quelques lois de comportements permettant de prendre en compte l'aspect dynamique non linéaire de la réponse d'un élément en béton armé.

Deux annexes additionnées permettent la compréhension des lois de comportements utilisées.

- La deuxième partie est consacrée aux développements et aux validations des simulations générées par des programmes réalisés dans un environnement Matlab grâce à ce qui a été exposé dans les quatre premiers chapitres, elle comporte deux chapitres.
 - Le cinquième chapitre constitue un développement et une mise en application traitant la réponse d'un système linéaire à un seul degré de liberté via deux méthodes différentes. Les résultats affichés sont comparés à ceux donner par la référence [3].
 - Le sixième chapitre, comporte la réponse d'une console en béton armé sollicitée à sa base par le signal sismique bi directionnel horizontal du Séisme d'EL-Centro (enregistrement du California Institute of Technology) en utilisant la méthode de Newmark pour déterminer la réponse. Les résultats obtenus sont proches de ceux trouvés par la référence [7], ainsi qu'une application traitant la même console, mais excitée cette fois par un signal sismique bi directionnel horizontal du Séisme de Boumerdès du 21 mai 2003 (enregistrement du barrage de Keddara).
- Le septième chapitre achèvera ce rapport par une conclusion, des recommandations et des perspectives.

CHAPITRE II : EVALUATION ANALYTIQUE DE
LA REponse DES SYSTEMES STRUCTURAUX
LINEAIRES

Introduction

Le but principal de ce chapitre est de présenter des méthodes permettant l'étude des déplacements communiqués à une structure donnée soumise à un chargement dynamique arbitraire (sismique). Dans ce sens, on peut considérer notre objectif comme la généralisation des méthodes classiques de la théorie des structures qui ne traitent en général que les charges statiques, pour permettre la prise en compte des charges dynamiques.

Vu sous cet angle, on voit qu'il est alors possible de considérer un chargement statique comme un simple cas particulier de chargement dynamique.

Dans ce qui suit, on donne une présentation de quelques méthodes analytiques d'évaluation de la réponse d'un système structural à une excitation dynamique quelconque.

Il est à noter qu'on va présenter ces méthodes en supposant que le lecteur a une connaissance des bases de la dynamique des structures et cela afin d'avoir la possibilité d'une définition élargie de ces méthodes et de leurs applications.

II.1 Réponse d'un système linéaire à un seul degré de liberté

Il existe dans la littérature un nombre considérable d'approches analytiques afin de déterminer la réponse d'un système structural à un seul degré de liberté, dans ce qui suit on va exposer quelques méthodes fréquemment utilisées dans l'analyse dynamique.

II.1.1. Intégrale de Duhamel

Considérons un chargement dynamique $p(t)$ quelconque, pendant la fraction de temps $d\tau$, il fait subir à une structure à un seul degré de liberté une impulsion $p(\tau)d\tau$, pour une durée dt infiniment petite mais finie, si on suppose que $U(0)=0$ et $V(0)=0$.

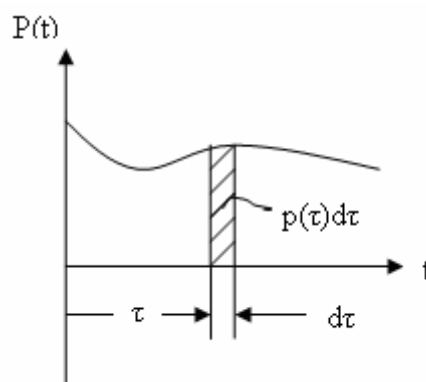


Figure .II. 1: Notations pour un chargement dynamique.

La réponse produite par ce chargement est [3] :

$$dU(t) = e^{-\xi\omega(t-\tau)} \left[\frac{p(\tau)}{m\omega_D} \sin \omega_D(t-\tau) \right] \quad t > \tau \quad (2-1)$$

La décroissance exponentielle commence dès que le chargement est appliqué, c'est-à-dire à l'instant $t=\tau$.

En intégrant sur la durée totale du chargement on obtient :

$$U(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2-2)$$

Cette équation est appelée intégrale de **Duhamel**, basée sur le principe de superposition, applicable seulement aux systèmes linéaires [3].

Pour calculer numériquement cette réponse, on a

$$\sin(\omega_D t - \omega_D \tau) = \sin \omega_D t \cos \omega_D \tau - \cos \omega_D t \sin \omega_D \tau$$

donc :

$$U(t) = \frac{\sin \omega_D t}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \cos(\omega_D \tau) d\tau - \frac{\cos \omega_D t}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin(\omega_D \tau) d\tau \quad (2-3)$$

$$\text{Posons :} \quad \check{A}(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \cos(\omega_D \tau) d\tau$$

et

$$B(t) = \frac{1}{m\omega_D} \int_0^t p(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \sin(\omega_D \tau) d\tau$$

$$\text{donc :} \quad U(t) = \check{A}(t) \sin \omega_D t - B(t) \cos \omega_D t \quad (2-4)$$

En résolvant ces intégrales, on détermine la réponse $U(t)$, si le chargement dynamique $p(t)$ est dû à une accélération $\ddot{a}(t)$ d'un signal sismique (El-Centro 18 mai 1940 composante N-S par exemple) [3], la force effective résultante de cette accélération est donnée par :

$$P_{\text{eff}}(\tau) = -m \ddot{a}(\tau)$$

donc

$$U(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{a}(\tau) e^{-\xi\omega(t-\tau)} \sin \omega_D(t-\tau) d\tau \quad (2-5)$$

$$\check{A}(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{a}(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \cos(\omega_D \tau) d\tau$$

$$B(t) = -\frac{1}{\omega_D} \int_0^t \ddot{a}(\tau) \frac{e^{\xi\omega\tau}}{e^{\xi\omega t}} \sin(\omega_D \tau) d\tau$$

On ne peut plus résoudre ces intégrales par les méthodes classiques car on n'a pas une fonction, mais un tableau qui contient des valeurs numériques des accélérations en fonction du temps, on utilise alors un procédé de sommation [13].

donc :

$$\ddot{A}(t) = -\frac{\Delta t}{\omega_D} \times \frac{1}{\zeta} \times \sum_{\zeta}^A(t)$$

$$B(t) = -\frac{\Delta t}{\omega_D} \times \frac{1}{\zeta} \times \dot{\Omega}^A(t)$$

Souvent, l'une des trois méthodes exprimées comme suit est utilisée :

1) Méthode des sommations simples ($\zeta=1$) :

$$\sum_1^A(t) = \left[\sum_1^A(t - \Delta t) + \ddot{a}(t - \Delta t) \times \cos \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)}$$

$$\dot{\Omega}_1^A(t) = \left[\dot{\Omega}_1^A(t - \Delta t) + \ddot{a}(t - \Delta t) \times \sin \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)}$$

2) Méthode des trapèzes ($\zeta=2$) :

$$\sum_2^A(t) = \left[\sum_2^A(t - \Delta t) + \ddot{a}(t - \Delta t) \times \cos \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)} + \ddot{a}(t) \times \cos \omega_D t$$

$$\dot{\Omega}_2^A(t) = \left[\dot{\Omega}_2^A(t - \Delta t) + \ddot{a}(t - \Delta t) \times \sin \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)} + \ddot{a}(t) \times \sin \omega_D t$$

3) Méthode de Simpson ($\zeta=3$) :

$$\sum_3^A(t) = \left[\sum_3^A(t - 2\Delta t) + \ddot{a}(t - 2\Delta t) \times \cos \omega_D(t - 2\Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega 2\Delta t)} + \left[4\ddot{a}(t - \Delta t) \times \cos \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)} + \ddot{a}(t) \times \cos \omega_D t$$

$$\dot{\Omega}_3^A(t) = \left[\dot{\Omega}_3^A(t - 2\Delta t) + \ddot{a}(t - 2\Delta t) \times \sin \omega_D(t - 2\Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega 2\Delta t)} + \left[4\ddot{a}(t - \Delta t) \times \sin \omega_D(t - \Delta t) \right] \times e^{(-\xi \omega \Delta t)} + \ddot{a}(t) \times \sin \omega_D t$$

La précision de la solution de ces procédés numériques dépend de la durée de l'intervalle Δt , en général, il doit être choisi suffisamment court à la fois pour que la fonction de chargement et les fonctions trigonométriques soient définies ; Δt inférieur ou égale à $T/10$ est une règle pratique largement utilisée et qui donne de bons résultats.

La précision et le volume des calculs nécessaires augmentent avec l'ordre du procédé de sommation ; en règle générale, la précision accrue que procure la méthode de Simpson justifie son utilisation en dépit d'une plus grande complexité numérique.

II.1.2. Intégration numérique directe

Dans le cas de structures linéaires soumises à des chargements arbitraires, l'intégrale de Duhamel, où l'étude dans le domaine des fréquences procure, généralement la technique de résolution la plus commode.

Il faut cependant souligner que lorsque le principe de superposition est utilisé dans la définition de cette méthode, on ne peut l'utiliser qu'avec des systèmes linéaires, c'est-à-dire des systèmes dont les caractéristiques restent invariables sur l'ensemble de la réponse. Mais pour de nombreuses structures, il ne sera pas possible de supposer un comportement linéaire, il est donc nécessaire de mettre au point d'autres méthodes de calcul susceptibles d'être utilisées dans le cas des systèmes non linéaires.

Dans ces méthodes, on intègre directement l'équation de mouvement par des procédures dites pas à pas. Le terme «**directe**» signifie qu'avant l'intégration numérique aucune transformation de l'équation d'équilibre dans une forme différente n'est effectuée.

Ces méthodes sont basées sur deux idées :

1) Au lieu de satisfaire l'équation du mouvement à tout instant t , on la satisfait dans un intervalle de temps Δt . Ceci veut dire qu'on solutionne pour un équilibre statique, incluant les forces d'inerties et d'amortissement, à une série de temps discret.

2) On suppose une variation des déplacements, vitesses et accélérations à l'intérieur de l'intervalle de temps Δt . La précision des résultats et la stabilité de la solution dépendent de la supposition sur la variation des déplacements, vitesses et accélérations.

Soient U_0 et V_0 les conditions initiales à l'instant $t=0$. Par équilibre, on peut calculer l'accélération A_0 , à partir de :

$$MA_0 + CV_0 + KU_0 = P_0 \quad (2-6)$$

On a: $A_0 = M^{-1}(P_0 - CV_0 - KU_0)$

On cherche à trouver la solution de l'instant $t=0$ à l'instant $t=T$. Pour cela, on subdivise le temps T en n intervalles de temps Δt (C.à.d. $\Delta t = T/n$) et on applique une méthode d'intégration aux instants : $0, \Delta t, 2\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$.

En général, l'algorithme calcule la solution à l'instant $t+\Delta t$ en se basant sur la solution à l'instant t . Si la méthode de calcul ne dépend que de la solution à l'étape précédente à l'instant t , alors la méthode est dite explicite. Si la solution à l'instant $t+\Delta t$ dépend des résultats à l'instant t mais aussi des données de l'étape courante à l'instant $t+\Delta t$, la méthode est dite implicite [21].

Les méthodes d'intégration directes qui nécessitent l'utilisation d'intervalles de temps Δt plus petits qu'un intervalle de temps critique Δt_{cr} sont dites conditionnellement stables. Dans le cas contraire elles sont dites inconditionnellement stables [3].

Dans une méthode conditionnellement stable, si on utilise $\Delta t > \Delta t_{cr}$, il y aura accumulation d'erreurs sans limite et les résultats seront inutilisables.

La convergence de la méthode est assurée quand l'incrément temporel diminue, la solution numérique devrait approcher la solution exacte.

La précision des résultats dépend des caractéristiques du chargement dynamique et de la grandeur de Δt , la précision d'une méthode peut être mesurée à partir d'une analyse en vibration libre et exprimée en terme d'allongement artificiel de la période de vibration et de réduction artificielle de l'amplitude [3].

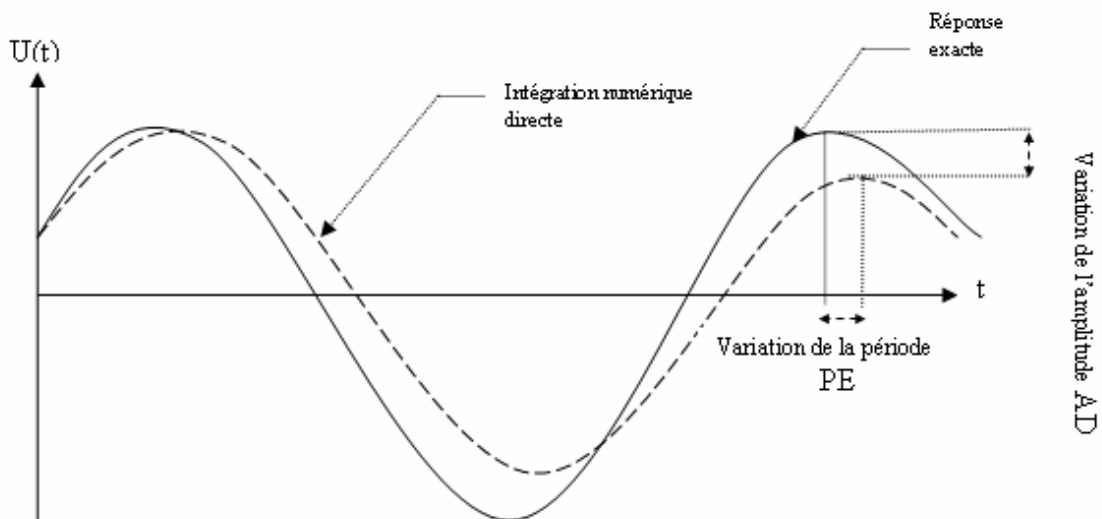


Figure .II. 2: Schématisation de la variation de l'amplitude AD et de la période PE.

La précision d'une intégration numérique directe est liée à la grandeur de l'intervalle Δt choisi, qui ne doit pas être trop grand afin d'obtenir de bons résultats.

Plusieurs méthodes existent pour l'intégration directe des équations de mouvement : méthode de la différence centrale, méthode de **Houbolt**, méthodes de **Newmark** et de **Wilson**

Voici un aperçu de quelques-unes de ces méthodes:

Méthode de Newmark

En 1959, **Newmark** [3] présenta une famille de méthodes à pas unique d'intégration pour résoudre les problèmes de la dynamique des structures sous une charge sismique ou une explosion. Pendant les 45 dernières années, la méthode de **Newmark** a été appliquée à l'analyse dynamique de beaucoup de structures particulières en génie civil. En outre, elle a été modifiée et améliorée par d'autres chercheurs.

Pour illustrer l'utilisation de cette famille de méthodes numériques d'intégration, considérons la solution de l'équation linéaire de l'équilibre dynamique écrite sous la forme suivante :

$$MA_t + CV_t + KU_t = P_t \quad (2-7)$$

L'utilisation directe des séries de **Taylor** [13] fournit une approche rigoureuse pour obtenir les deux équations additionnelles suivantes [14] :

$$\begin{cases} U_t = U_{t-\Delta t} + \Delta t V_{t+\Delta t} + (\Delta t^2/2)A_{t-\Delta t} + (\Delta t^3/6)\ddot{A}_{t-\Delta t} + \dots \\ V_t = V_{t-\Delta t} + \Delta t A_{t-\Delta t} + (\Delta t^2/2)\ddot{A}_{t-\Delta t} + \dots \end{cases}$$

où $\ddot{A}_{t-\Delta t} = \ddot{U}_{t-\Delta t}$

Newmark a tronqué ces équations et il les a exprimées sous la forme suivante [3] :

$$\begin{cases} U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta t V_t + [(0.5-\beta)(\Delta t^2)]A_t + (\beta\Delta t^2) A_{t+\Delta t} & (2-8) \\ V_{t+\Delta t} = V_t + [(1-\gamma)\Delta t]A_t + (\gamma\Delta t)A_{t+\Delta t} & (2-9) \end{cases}$$

β et γ représentent les paramètres d'intégration définissant la variation de l'accélération au-dessus d'une étape de temps et déterminent la stabilité et la précision caractéristique de la méthode .

La sélection typique de ces paramètres est $\gamma = 0.5$ et $1/6 \leq \beta \leq 1/4$.

Newmark a résolu ces équations par itération pour chaque incrément temporel Δt et pour chacun des degrés de liberté de la structure.

Le terme $A_{t+\Delta t}$ est obtenu en divisant l'équation (2-7) par la masse associée à chaque degré de liberté.

Il y a deux méthodes qui représentent des cas spéciaux de la méthode de **Newmark** :

1. Méthode d'accélération moyenne constante

C'est le cas de l'équation de **Newmark** avec $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/4$ [3]

On suppose que l'accélération est constante dans l'intervalle de temps Δt ;

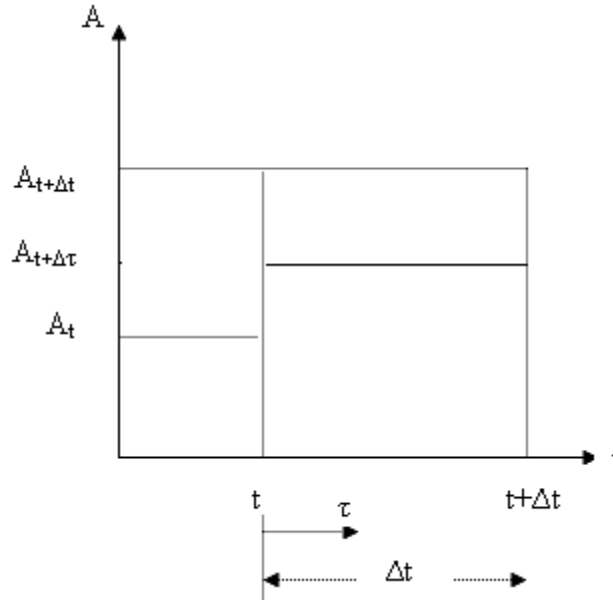


Figure .II. 3: Notation de l'interpolation linéaire de l'excitation.

on a :
$$A_{t+\tau} = 1/2[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

après intégration, on a la vitesse

$$V_{t+\tau} = V_t + \tau/2[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

une seconde intégration nous donne le déplacement :

$$U_{t+\tau} = U_t + V_t \tau + \tau^2/4[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

et pour $\tau = \Delta t$:

$$V_{t+\Delta t} = V_t + \Delta t/2[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + V_t \Delta t + \Delta t^2/4[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

Commentaires :

- la méthode est inconditionnellement stable.
- La méthode est exacte si l'accélération est constante dans l'intervalle Δt .
- La méthode n'introduit pas d'amortissement numérique.
- Cette méthode est implicite.

2. Méthode d'accélération linéaire

C'est le cas de l'équation de **Newmark** avec $\gamma = 1/2$, $\beta = 1/6$ [3].

On suppose que l'accélération varie linéairement dans l'intervalle de temps Δt ;

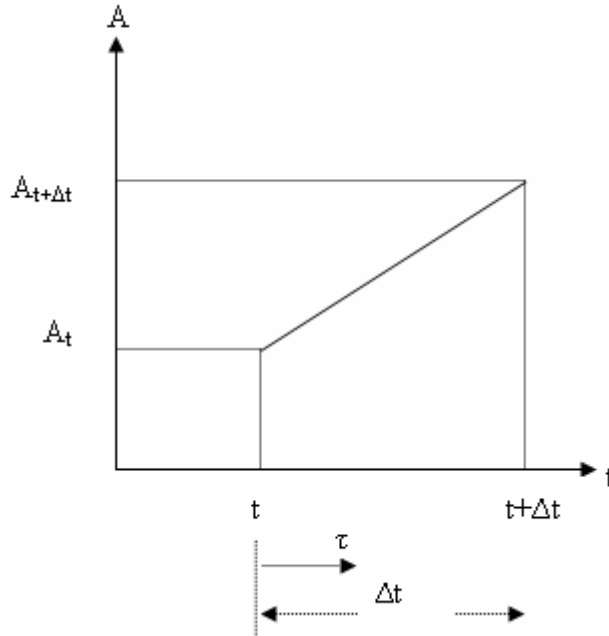


Figure .II. 4: Notations pour la méthode d'accélération linéaire.

on a :
$$A_{t+\tau} = A_t + (\tau/\Delta t)[A_{t+\Delta t} - A_t]$$

après intégration, la vitesse est :

$$V_{t+\tau} = V_t + A_t \tau + (\tau^2/2\Delta t)[A_{t+\Delta t} - A_t]$$

Et après une seconde intégration, le déplacement est :

$$U_{t+\tau} = U_t + V_t \tau + A_t \tau^2/2 + (\tau^3/6\Delta t)[A_{t+\Delta t} - A_t]$$

donc pour $\tau=\Delta t$:

$$V_{t+\Delta t} = V_t + \Delta t/2[A_t + A_{t+\Delta t}]$$

$$U_{t+\Delta t} = U_t + V_t \Delta t + \Delta t^2 \left[\frac{1}{6} A_t + \frac{1}{3} A_{t+\Delta t} \right]$$

Commentaires :

- la méthode est conditionnellement stable.
- c'est une méthode implicite.
- la méthode n'introduit pas d'amortissement numérique.

Pour les systèmes linéaires, il est possible de modifier la formulation originale de **Newmark**[3], de manière à permettre la résolution des équations (2-7), (2-8) et (2-9) sans itération.

Pour cela :

Posons $\Delta U_t = U_{t+\Delta t} - U_t$, $\Delta V_t = V_{t+\Delta t} - V_t$, $\Delta A_t = A_{t+\Delta t} - A_t$, $\Delta P_t = P_{t+\Delta t} - P_t$

on a :

$$\Delta V_t = (\Delta t) A_t + (\gamma \Delta t) \Delta U_t \quad (2-10)$$

$$\Delta U_t = (\Delta t) V_t + ((\Delta t)^2 A_t / 2) + \beta (\Delta t)^2 \Delta A_t \quad (2-11)$$

d'où $\Delta A_t = (\Delta U_t / \beta (\Delta t)^2) - (V_t / \beta \Delta t) - (A_t / 2\beta)$ (2-12)

En remplaçant toutes ces expressions dans l'équation de mouvement incrémentale

$$M \Delta A_t + C \Delta V_t + K \Delta U_t = \Delta P_t \quad (2-13)$$

donc $\hat{K} \Delta U_t = \hat{\Delta P}_t$ (2-14)

Avec $\hat{K} = K + \frac{\gamma}{(\beta) \Delta t} C + \frac{1}{(\beta) \Delta t^2} M$ (2-15)

$$\hat{\Delta P}_t = \Delta P_t + \left(\frac{M}{(\beta) \Delta t} + \frac{\gamma}{\beta} C \right) V_t + \left[\frac{M}{2\beta} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) C \right] A_t \quad (2-16)$$

En connaissant \hat{K} et $\hat{\Delta P}_t$ à partir des propriétés du système M,C et K ainsi que les paramètres de l'algorithme γ et β et V_t, A_t du début de l'étape, le déplacement incrémental est donné par :

$$\Delta U_t = \frac{\hat{\Delta P}_t}{\hat{K}}$$

Une fois que le ΔU_t est connu, il est possible de calculer ΔV_t et ΔA_t des expressions (2-11), (2-12) et donc on a $U_{t+\Delta t}, V_{t+\Delta t}$ et $A_{t+\Delta t}$ à l'instant $t+\Delta t$.

L'accélération $A_{t+\Delta t}$ à l'instant $t+\Delta t$ peut être obtenu par l'expression suivante :

$$A_{t+\Delta t} = \frac{P_{t+\Delta t} - C V_{t+\Delta t} - K U_{t+\Delta t}}{M} \quad (2-17)$$

Cette expression nous permet d'avoir l'accélération initiale A_0 pour commencer le calcul.

Algorithme. II.1 : Méthode de Newmark pour un système linéaire à un seul degré de liberté

1) Calcul initial :

- 1.1) introduction des coefficients (de rigidité K , de masse M et d'amortissement C).
- 1.2) spécification de paramètres d'intégration β et γ et des conditions initiales U_0, V_0, A_0 (si celles-ci sont connues a priori).

1.3) Calcul de l'accélération initiale $A_0 = \frac{P_0 - CV_0 - KU_0}{M}$

1.4) Sélection de l'incrément temporel Δt .

1.5) Calcul de la rigidité effective $\hat{K} = K + \frac{\gamma}{(\beta)\Delta t}C + \frac{1}{(\beta)\Delta t^2}M$.

1.6) Calcul des paramètres d'intégration

$$a = \frac{M}{(\beta)\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta}C \quad \text{et} \quad b = \frac{M}{2\beta} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) C$$

2) pour chaque instant t du signal:

2.1) Calcul de la charge effective : $\Delta \hat{P}_t = \Delta P_t + aV_t + bA_t$

2.2) Calcul du déplacement incrémental: $\Delta U_t = \frac{\Delta \hat{P}_t}{\hat{K}}$

2.3) Calcul de la vitesse incrémentale :

$$\Delta V_t = (\gamma \Delta U_t / \beta \Delta t) - (\gamma V_t / \beta) + \Delta t (1 - \gamma / 2\beta) A_t$$

2.4) Calcul de l'accélération incrémentale :

$$\Delta A_t = (\Delta U_t / \beta (\Delta t)^2) - (V_t / \beta \Delta t) - (A_t / 2\beta)$$

2.5) Détermination du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'instant $t + \Delta t$:

$$U_{t+\Delta t} = U_t + \Delta U_t, \quad V_{t+\Delta t} = V_t + \Delta V_t, \quad A_{t+\Delta t} = A_t + \Delta A_t$$

2.6) **revenir à l'étape 2.1 avec $t = t + \Delta t$.**

La stabilité de la méthode Newmark :

Pour un amortissement nul, la méthode de **Newmark** est conditionnellement stable [3] si :

$$\gamma \geq 0.5 \quad , \quad \beta \leq 0.5 \quad \text{et} \quad \frac{\Delta t}{T_n} \leq \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\gamma - 2\beta}}$$

T_n : est la période naturelle de la structure.

La méthode de **Newmark** est inconditionnellement stable si :

$$2\beta \geq \gamma \geq 0.5$$

Cependant, si $\gamma \gg 0,5$ des erreurs sont générées et seront associées à l'amortissement numérique et à l'élongation de la période.

II.1.3. Erreurs

L'erreur est inhérente à n'importe quelle solution numérique de l'équation de mouvement. Nous examinons deux caractéristiques importantes de la solution numérique pour développer une détection sur la nature des erreurs et mentionner alors une manière simple et utile pour contrôler ces erreurs.

Considérons l'équation de mouvement d'un problème en vibrations libres : $MA+KU = 0$;

avec

$$U_0 = 0; V_0 = 0$$

La solution théorique de ce problème est :

$$U_t = \cos(\omega t) ,$$

Ce problème a été résolu par quatre méthodes numériques : méthode des différences centrales, méthode d'accélération moyenne, méthode d'accélération linéaire et la méthode θ de **Wilson**, les résultats numériques ainsi obtenus en utilisant $\Delta t = 0.1T$ sont comparés avec la solution théorique .

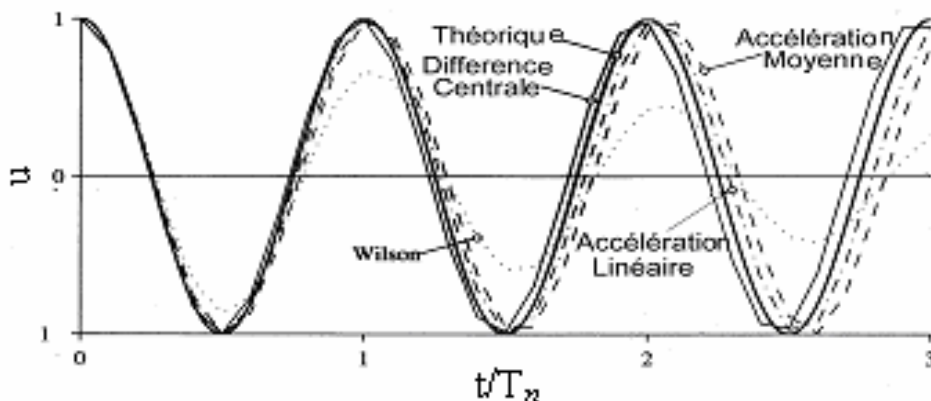


Figure .II. 5: Déplacement pour un système en vibrations libres donné par les quatre méthodes numériques ($\Delta t/T=0.1$) ainsi que la solution théorique.

Cette comparaison prouve que quelques méthodes numériques peuvent prévoir que l'amplitude de déplacement diverge avec le temps. Bien que le système soit non amorti, sa période naturelle varie.

Trois de ces méthodes ne prévoient pas la variation de l'amplitude du déplacement et seule la méthode θ de **Wilson** contient la variation de cette amplitude, donc la méthode introduit un amortissement numérique dans le système ; le coefficient d'amortissement visqueux équivalent $\bar{\xi}$ est montré dans la figure suivante :

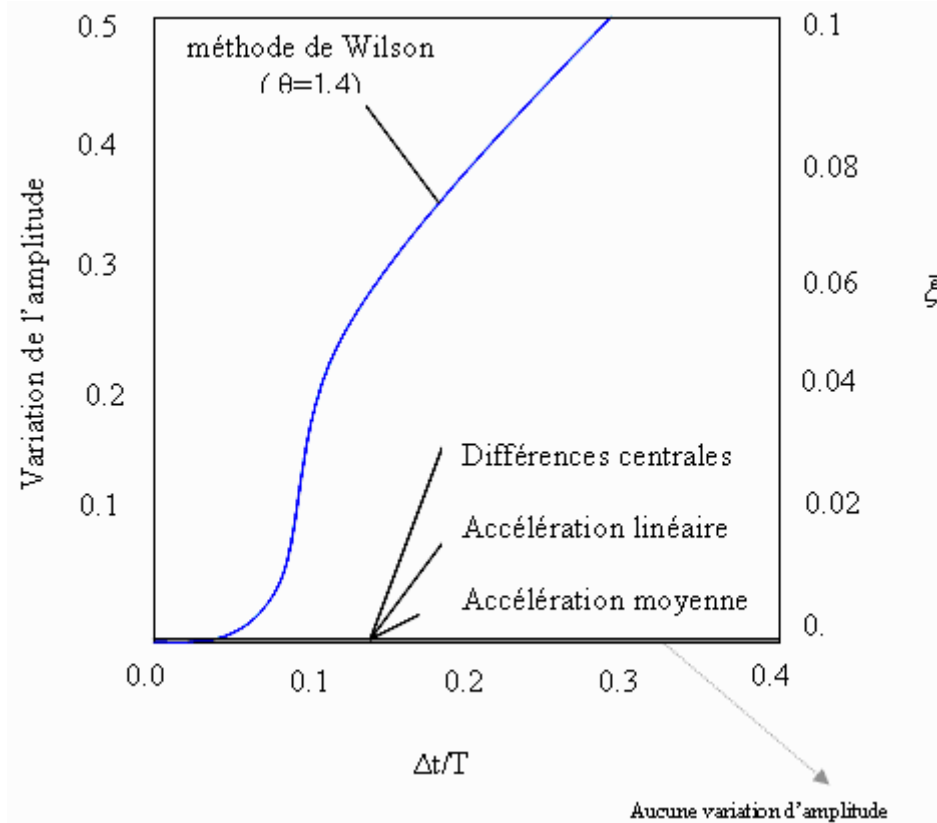


Figure .II. 6: la variation de l'amplitude selon la méthode numérique utilisée.

II.2 Réponse d'un système linéaire à plusieurs degrés de liberté

II.2.1. Généralités

Dans la section précédente, on a traité la réponse dynamique des systèmes linéaires à un seul degré de liberté, et on a vu quelques méthodes d'intégration numériques directes, dans ce qui suit, on va appliquer ces méthodes à des systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté.

L'objectif est donc de résoudre numériquement le système d'équations différentielles gouvernant la réponse des systèmes linéaires à plusieurs degrés de liberté :

$$m\ddot{U} + c\dot{V} + f_s(U, V) = p(t) \quad (2-18)$$

Où : A , V , U représentent respectivement les matrices d'accélération, de vitesse et de déplacement.

m : la matrice masse du système.

c : la matrice d'amortissement du système.

$f_s(U, V)$: la matrice des forces de rappel du système.

Si $p(t)$ est une excitation résultante d'un signal sismique, alors $p(t) = -m \ell \ddot{u}_g(t)$.

Où : ℓ : représente le vecteur d'influence du système.

$\ddot{u}_g(t)$: représente l'accélération du sol.

Donc l'équation (2-18) s'écrit :

$$m\ddot{U} + c\dot{V} + f_s(U, V) = -m \ell \ddot{u}_g(t) \quad (2-19)$$

Définition :

Dans cette approche générale, le déplacement total pour chaque masse est exprimé comme un déplacement U_j^s en conséquence de l'application du mouvement statique du sol plus le déplacement dynamique U_j relatif au déplacement quasi-statique :

$$U_j^t(t) = U_j^s(t) + U_j(t) \quad \text{où } U^t(t) = U^s(t) + U(t) \quad (2-20)$$

Le déplacement quasi-statique peut être exprimé comme : $U^s(t) = \ell \mathbf{u}_g(t)$, où le vecteur d'influence du système ℓ représente les déplacements des masses résultant de l'application d'un mouvement statique du sol égale à l'unité.

Donc l'équation (2-20) devient :

$$U^t(t) = \ell \mathbf{u}_g(t) + U(t) \quad (2-21)$$

Le vecteur d'influence ℓ du système entre en considération si tous les degrés de liberté du système n'ont pas la même direction du mouvement de sol ou si l'excitation sismique n'est pas identique au niveau de tous les supports structuraux [3].

Dans ce qui suit, on considère que le mouvement de sol en translation affectera les N masses et toutes de la même façon, de ce fait le vecteur d'influence du système ℓ sera pris de dimension $1 \times N$ et égal à :

$$I = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (2-22)$$

L'équation (2-19) s'écrit :

$$m\ddot{A} + c\dot{V} + f_s(U, V) = -m I \ddot{u}_g(t) \quad (2-23)$$

avec des conditions initiales à l'instant $t = 0$: $U = U(0)$ et $V = V(0)$ (2-24)

La solution fournira le vecteur des déplacements en fonction du temps.

Comme dans la section précédente, l'échelle du temps est divisée en série d'intervalles temporels, généralement l'intervalle Δt est constant. L'excitation est donnée à des instants de temps discrétisés $t_i = i \times \Delta t$; $t = t_i$ est noté i , le vecteur d'excitation $p_i = p(t_i)$. La réponse qui sera déterminée pour cet instant est notée $U_i = U(t_i)$, $V_i = V(t_i)$ et $A_i = A(t_i)$.

En commençant par la réponse du système connue à l'instant $t = i$ qui satisfait l'équation (2-18) :

$$mA_i + cV_i + (f_s)_i = p_i \quad (2-25)$$

Les méthodes de temps échelonnées nous permettent de déterminer les réponses U_{i+1} , V_{i+1} et A_{i+1} du système à l'instant $t = i+1$ et qui satisferont l'équation (2-18) à l'instant $t = i+1$:

$$mA_{i+1} + cV_{i+1} + (f_s)_{i+1} = p_{i+1} \quad (2-26)$$

Appliquées pour $i = 0, 1, 2, 3, \dots$, en connaissant les conditions initiales à l'instant $i = 0$, les méthodes de temps échelonnées nous donnent la réponse souhaitée à tous les instants $i = 1, 2, 3, \dots$

La procédure numérique nécessite trois équations matricielles pour déterminer les trois vecteurs inconnus U_{i+1} , V_{i+1} et A_{i+1} . Deux de ces trois équations sont dérivées à partir de leurs équations de différences finis pour les vecteurs de vitesse et d'accélération ou à partir des hypothèses sur la variation de la réponse durant l'étape temporelle. La troisième est l'équation (2-18) à l'instant sélectionné. Si cet instant i est le temps courant, la méthode d'intégration est appelée **méthode explicite**. Si l'instant $i+1$ de la fin de l'étape de temps est utilisé, la méthode est dite **méthode implicite**.

La procédure numérique utilisée doit [3] :

- 1) converger vers la solution exacte à chaque réduction de Δt .
- 2) Etre stable dans la présence des erreurs numériques.
- 3) Etre précise (c.à.d que les erreurs de calcul soient dans la limite de l'acceptable).

Le critère de stabilité comme il a été mentionné n'est pas restrictif dans l'analyse de la réponse des systèmes à un seul degré de liberté puisque Δt est considérablement plus petit que la limite de stabilité garantissant une précision adéquate dans les résultats numériques, cependant la stabilité de la méthode numérique est une considération cruciale dans l'analyse de la réponse des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

II.2.2. Analyse des systèmes linéaires

Dans ce qui suit on suppose que le principe de la superposition modale est valable.

Les N équations (2-18) sont résolues pour les déplacements nodaux U , quand elles sont spécialisées pour les systèmes linéaires, on a :

$$m\ddot{U} + c\dot{U} + kU = p(t) \quad \text{ou} \quad -m\ddot{u}_g(t) \quad (2-27)$$

Ainsi, les déplacements nodaux du système sont rapprochés par une combinaison linéaire des modes naturels du système :

$$U(t) = \Phi q(t) \quad (2-28)$$

Où : Φ représente la matrice modale du système.

$q(t)$ sont les coordonnées modales (normales) du système.

Définition :

La matrice modale du système est constituée des N vecteurs propres de ce système, plusieurs méthodes numériques sont utilisées pour déterminer les valeurs et les vecteurs propres, on peut citer [21] :

- La méthode d'itération de sous-espace.
- La méthode d'itération de **LANCZOS**.
- Les méthodes d'itérations polynomiales et les techniques de séquence de **STURM**.
- Les méthodes de transformation (**Jacobi**, itération en solution inverse de **Householder-QR**).

Dans l'environnement MATLAB [24], les sous-routines LAPACK sont utilisées pour calculer les valeurs et les vecteurs propres.

On peut écrire l'équation (2-27) en terme de coordonnées modales sous la forme suivante:

$$M\ddot{q} + C\dot{q} + Kq = P(t) \quad (2-29)$$

où : $M = \Phi^T m \Phi$, $C = \Phi^T c \Phi$, $K = \Phi^T k \Phi$, $P(t) = \Phi^T p(t)$.

(M, K sont des matrices diagonales).

L'équation matricielle (2-29) est un système de j équations qui ont $Q_n(t)$ comme inconnues et si j est beaucoup plus petit que N , il est alors avantageux de les résoudre numériquement au lieu de l'équation (2-27).

Le gain de temps de calcul résultant peut être plus important pour compenser l'effort nécessaire pour déterminer les j premiers modes, qui contribuent significativement dans la réponse.

Les j équations peuvent être couplées ou découplées selon la forme de la matrice d'amortissement : elles sont couplées pour des systèmes avec un amortissement classique et chaque équation peut être résolue par l'une des méthodes exposées dans la première section. Pour les systèmes avec un amortissement non classique, où la matrice d'amortissement C n'est pas une matrice diagonale et toutes les équations sont couplées.

Dans ce qui suit on exposera quelques méthodes parmi les plus utilisées dans la littérature.

II.2.3.Méthode de Newmark

Développée précédemment pour les systèmes à un seul degré de liberté, cette méthode implicite peut être facilement prolongée aux systèmes à plusieurs degrés de liberté, les équations scalaires qui concernent la réponse incrémentale en terme de déplacement, vitesse et accélération durant l'étape de temps de i à $i+1$, ainsi que l'équation incrémentale d'équilibre (2-13), toutes deviennent des équations matricielles.

En introduisant ces changements dans le schéma de solution vu dans la section précédente et en transformant les conditions initiales en coordonnées modales, et les solutions modales en terme de déplacements nodaux on aura le schéma de solution de la méthode de **Newmark** suivant tel qu'il s'exécute sur ordinateur [3].

Algorithme.II. 2 : Méthode de Newmark pour un système linéaire

1.0 Calcul initial:

$$1.1 \quad (q_n)_0 = \frac{\Phi_n^T m U_0}{\Phi_n^T m \Phi_n} \quad ; \quad (\dot{q}_n)_0 = \frac{\Phi_n^T m V_0}{\Phi_n^T m \Phi_n}$$

$$q_0^T = \langle (q_1)_0, \dots, (q_j)_0 \rangle, \quad \dot{q}_0^T = \langle (\dot{q}_1)_0, \dots, (\dot{q}_j)_0 \rangle$$

$$1.2 \quad P_0 = \Phi^T p_0$$

1.3 résoudre l'équation suivante : $M \ddot{q}_0 = P_0 - C \dot{q}_0 - K q_0$ pour avoir \ddot{q}_0 .

1.4 Sélection de Δt .

$$1.5 \quad \hat{K} = K + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} C + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} M$$

$$1.6 \quad a = \frac{1}{\beta \Delta t} M + \frac{\gamma}{\beta} C \quad ; \quad b = \frac{1}{2\beta} M + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) C$$

2.0 Calcul pour chaque étape de temps i:

$$2.1 \quad P_i = \Phi^T p_i$$

$$2.2 \quad \Delta \hat{P}_i = \Delta P_i + a \dot{q}_i + b \ddot{q}_i$$

2.3 résoudre l'équation suivante : $\hat{K} \Delta q_i = \Delta \hat{P}_i$ pour avoir Δq_i .

$$2.4 \quad \Delta \dot{q}_i = \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \Delta q_i - \frac{\gamma}{\beta} \dot{q}_i + \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) \ddot{q}_i$$

$$2.5 \quad \Delta \ddot{q}_i = \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} \Delta q_i - \frac{1}{\beta \Delta t} \dot{q}_i - \frac{1}{2\beta} \ddot{q}_i$$

$$2.6 \quad q_{i+1} = q_i + \Delta q_i, \quad \dot{q}_{i+1} = \dot{q}_i + \Delta \dot{q}_i, \quad \ddot{q}_{i+1} = \ddot{q}_i + \Delta \ddot{q}_i$$

$$2.7 \quad U_{i+1} = \Phi q_{i+1}$$

3.0 **Répétition pour étape de temps suivante, en remplaçant i par i+1 et on répète les étapes 2.1 a 2.7 pour l'étape de temps suivante jusqu'à la fin du signal.**

Les deux cas spéciaux de cette méthode qui sont souvent utilisés sont :

- 1) la méthode d'accélération moyenne pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$, qui est une méthode inconditionnellement stable.
- 2) la méthode d'accélération linéaire pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$, qui est une méthode conditionnellement stable pour $\Delta t \leq 0.551 T_j$; pour une étape de temps donnée qui est beaucoup plus petite que cette limite de stabilité, la méthode d'accélération linéaire est

plus précise que la méthode d'accélération moyenne, pour cela elle est utilisée spécialement pour les systèmes linéaires puisque Δt choisi pour obtenir une réponse précise dans les modes supérieurs inclus doit satisfaire les exigences de stabilité .

La méthode de **Newmark** peut être aussi utilisée pour la solution directe de l'équation originale en terme de déplacements nodaux (équation (2-27)), sans la transformer en terme de coordonnées modales, en modifiant le schéma précédent comme suit :

- Supprimer les étapes 1.1, 1.2, 2.1, et 2.5
- Remplacer :
 1. q, \dot{q} et \ddot{q} par U, V et A
 2. M, C et K par m, c et k
 3. P par p
 4. \hat{P} et \hat{K} par \hat{p} et \hat{k}

Cette méthode offre une solution convenable à notre première préoccupation, soit la possibilité d'exploiter un signal d'accélérogramme digitalisé dans l'évaluation de la réponse d'une structure sans utiliser le spectre de réponse.

Néanmoins, dans les structures existantes sollicitées par un séisme; l'utilisation des notions de période et de fréquence de vibrations et de spectre de réponse conduit à une appréciation aberrante de la réponse, puisque l'état réel de ces structures n'est connu, pour cela le chapitre suivant, expose les notions et les définitions qui doivent être manipulées afin de traiter les systèmes structuraux non linéaires.

CHAPITRE III : EVALUATION ANALYTIQUE DE
LA REponse DES SYSTEMES STRUCTURAUX
NON LINEAIRES

Généralités

Longtemps, la mécanique des structures et la mécanique des sols sont concentrées principalement sur des problèmes linéaires, or tout comportement structural est non linéaire.

Aucune structure ou formation de sol ne se comporte linéairement. En fait, pour une conception conventionnelle appropriée dans le génie parasismique, il est de la responsabilité primaire de l'ingénieur de laisser les matériaux entrer dans le domaine plastique.

En 1914 **Kazinczy** [26] a été le premier à observer et à expliquer théoriquement la redistribution des moments dans les structures hyperstatiques en béton armé. A cette époque on n'a prêté que peu d'attention aux avantages qu'elle présentait.

L'intérêt porté aux propriétés plastiques des structures continues en béton ne s'est manifesté que dans les années trente à peut près à la même époque des structures métalliques ; mais à ce moment-la, le calcul plastique n'a pas reçu d'application, car sa justification théorique n'était pas encore suffisamment certaine et d'autre part, le dimensionnement des structures en béton se fondait sur la notion de « contraintes admissibles », basée sur la théorie élastique. Le fait que le comportement plastique du béton et de l'acier était en contradiction avec une telle conception, prévenait plutôt défavorablement les ingénieurs contre l'application pratique du calcul plastique.

Toutes les déformations n'ont pas besoin d'être ni petites, ni élastiques et récupérables.

Le flambement et la stabilité des poutres, des plaques et des coques et presque tous les problèmes dans le sol et la mécanique des roches exigent des solutions non élastiques et non linéaires.

La complexité des analyses non linéaires a été traitée seulement ces 30 dernières années par l'utilisation efficace des ordinateurs modernes (très rapides). Le développement des caractéristiques des éléments structuraux et la disponibilité des algorithmes de solution non linéaire très efficaces ainsi que l'expérience gagnée dans leur application aux problèmes d'engineering ont permit l'évaluation des performances d'une structure grâce à deux types d'analyse non linéaire :

- analyse statique non linéaire « *push over* »
- analyse dynamique non linéaire « *time history* »

Les avancées récentes dans le calcul de la plasticité, l'existence d'outils numériques efficaces tels que la méthode des éléments finis et la disponibilité des ordinateurs de plus en plus puissants ont rendu optimal le coût d'analyse des problèmes de valeurs limites effectives à grande échelle, cela exige le développement et l'exécution robuste des modèles matériels plus réalistes. La modélisation du comportement constitutive matériel et l'exécution numérique correspondante ne

sont nullement insignifiantes puisqu'elles impliquent un équilibre subtil entre la complexité associée avec le réalisme décrivant la réponse matérielle et l'utilisation des algorithmes numériques robustes et précis pour l'intégration des lois constitutives résultantes.

Les procédures non linéaires posent des problèmes d'analyse beaucoup plus importants que ceux des problèmes linéaires. La non linéarité peut être trouvée dans la dépendance des coefficients des équations de la solution elle-même ou des aspects des énergies et les produits de ces inconnues et de leurs dérivées [23].

L'analyse de la ruine employant une technique d'analyse exige la compréhension des sources potentielles de la non linéarité. Les hypothèses utilisées pour développer le modèle informatique doivent raisonnablement aborder le problème des non linéarité, afin d'obtenir des résultats précis. L'histoire charge-réponse de la structure doit être soigneusement modélisée, avec une attention proportionnée donnée à la taille de l'incrément de la charge. Proche de la ruine, de grandes déformations peuvent se produire et des sources de non linéarité peuvent causer des inexactitudes et des instabilités dans l'analyse.

La linéarité est affichée quand la courbe de charge-déplacement est linéaire dans toute la gamme du chargement et des déplacements. Ainsi, la linéarité a lieu seulement quand la rigidité structurale reste constante pour chaque incrément de déplacement.

Une rigidité structurale constante exige une relation effort-déplacement linéaire et une relation contrainte-déformation linéaire. A énoncer plus simplement, la linéarité se produit seulement quand les propriétés de la géométrie et du matériau restent linéaires.

Cependant, beaucoup de problèmes réels ne sont pas des problèmes linéaires et l'utilisation des approximations linéaires peut mener à des résultats imprécis. Le comportement structural non linéaire est caractérisé par une courbe charge-déformation non linéaire et un changement dans la rigidité structurale.

III.1 Sources de non linéarité

La non linéarité peut être introduite par le matériau ou/et par la géométrie. Une troisième source de non linéarité, est le "changement de statut", elle se produit quand un comportement structural dépend d'un statut ou d'une condition qui peut changer pendant le chargement [4]. On peut citer comme exemples de la non linéarité due au "changement de statut": un élément axial en traction pure tel qu'un câble qui maintient un support en rouleau qui fournit une réaction seulement quand la structure est en contact avec l'appui, ou un vide dans la structure qui peut s'ouvrir et se fermer suivant la structure déformable avec le chargement, un problème de contact où la région de contact ainsi que l'effort de contact peuvent changer avec le chargement. Clairement, ces

exemples sont une conséquence des changements de la rigidité structurale pendant le chargement.

III.1.1. Non linéarité géométrique

La non linéarité géométrique est caractérisée par un changement de la configuration géométrique résultant de grandes déformations pendant le chargement. Les grandes rotations et les déplacements dans la structure peuvent produire des changements cruciaux dans la rigidité structurale. La figure III.1 est un exemple d'une relation non linéaire de charge-déplacement résultant d'une non linéarité géométrique. N'importe quel changement dans la rigidité structurale pendant le chargement provoqué par la géométrie, est une non linéarité géométrique.

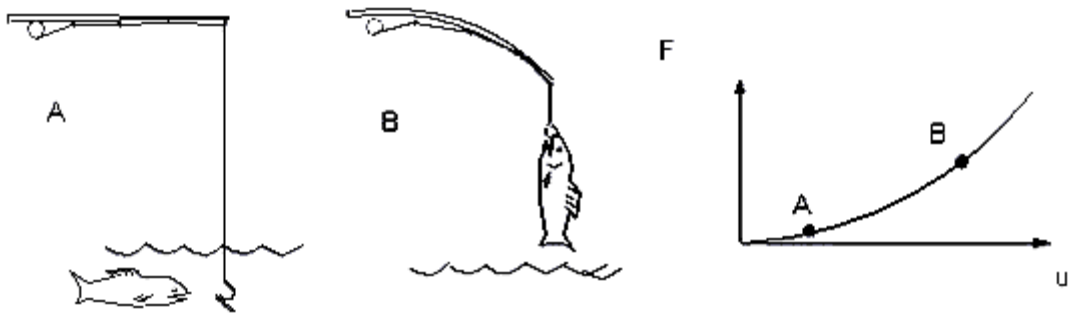


Figure .III. 1: La non linéarité géométrique [4].

Une non linéarité géométrique peut également se produire pour les charges appliquées aux frontières de la structure. Par exemple, considérons la pression sur la surface d'une structure ; la charge surfacique extérieure appliquée est normale à la surface d'un élément de la structure et la direction changera suivant la structure qui se déforme pendant le chargement.

Les grandes déformations se produisent dans les parties de la structure, où le chargement approche la charge ultime. Dans la théorie classique des petits déplacements, pour chaque incrément de déformation, les déformations et les angles de la rotation sont supposés petits, et les rotations sont considérées petites comparées aux déformations. Donc les termes quadratiques du tenseur des déformations du second degré peuvent être négligés. Ces termes d'ordre supérieur sont maintenus dans les problèmes de grandes déformations. La non linéarité est introduite en maintenant ces termes à ordre supérieur dans la dérivation et l'utilisation de la relation déformation-déplacement améliore l'exactitude des problèmes de grandes déformations.

III.1.2. Non linéarité matérielle

Les effets de la température, et les effets qui dépendent du temps tels que les changements volumétriques dus au fluage et au rétrécissement, sont des sources potentielles de non linéarité matérielle.

Il existe des matériaux qui se comportent linéairement ou non linéairement, de manière élastique ou inélastique. Un matériau élastique linéaire montre une rigidité matérielle constante tout le long du processus de charge et l'état courant des déformations et des contraintes, elle peut être déterminé uniquement à partir des conditions de charge courantes. En revanche, l'état courant des déformations et des contraintes pour un matériau inélastique non linéaire ne peut être déterminé uniquement à partir du chargement courant, mais plutôt du processus de charge. Un matériau se comporte élastiquement seulement quand le processus de charge est réversible. Le travail externe dépensé en chargeant le matériau élastique est converti en énergie de déformation interne, comme un matériau se déformant sous le chargement.

III.2. Analyses dynamiques

Il en existe deux types : une analyse dynamique explicite et une analyse dynamique implicite. La différence entre elles est dans la méthode d'intégration dans le temps [6].

Dans une analyse dynamique explicite, les valeurs connues des vecteurs de l'accélération, de la vitesse et du déplacement sont employées dans l'équation du mouvement pour prévoir la prochaine étape de temps. Dans une analyse dynamique implicite, l'équation du mouvement est employée pour prévoir la prochaine étape de temps basée sur une accélération constante moyenne à travers l'incrément temporel. La méthode de différences centrales est généralement employée dans une analyse dynamique explicite, et la méthode d'accélération moyenne de **Newmark** est généralement utilisée dans une analyse dynamique implicite.

Une analyse dynamique explicite considère les effets inertiels de la masse et de l'amortissement. Typiquement on suppose que la masse est "concentrée" aux noeuds, ainsi la matrice masse peut être facilement inversée [15]. Une analyse dynamique implicite est d'habitude employée pour des problèmes linéaires, des problèmes avec des durées de temps très longues et des problèmes qui n'incluent pas les frontières. Pour l'analyse dynamique implicite, les effets d'inertie de la masse et de l'amortissement ne sont pas habituellement inclus, et la matrice de rigidité est généralement supposée constante, puisque l'inversion de la matrice de rigidité est exigée [15]. Alternativement, l'analyse dynamique explicite est employée dans un problème non linéaire, pour considérer les effets des non linéarités matérielle et géométrique. Les problèmes de contact

sont particulièrement favorables à la solution en utilisant des méthodes explicites parce qu'aucune matrice de rigidité tangente n'est exigée dans la dynamique explicite.

III.3 Analyse de la réponse non linéaire

III.3.1. Méthode de Newmark

La méthode de **Newmark**, décrite dans le chapitre précédent pour les systèmes linéaires, est élargie aux systèmes non linéaires. Bien que pas aussi simple que la méthode de différences centrales, elle peut-être la plus utilisée pour l'analyse de la réponse sismique en raison de sa très bonne précision.

La différence entre les équations (2-25) et (2-26) donne une équation incrémentale d'équilibre :

$$m\Delta A_i + c\Delta V_i + (\Delta f_s)_i = \Delta p_i \quad (3-1)$$

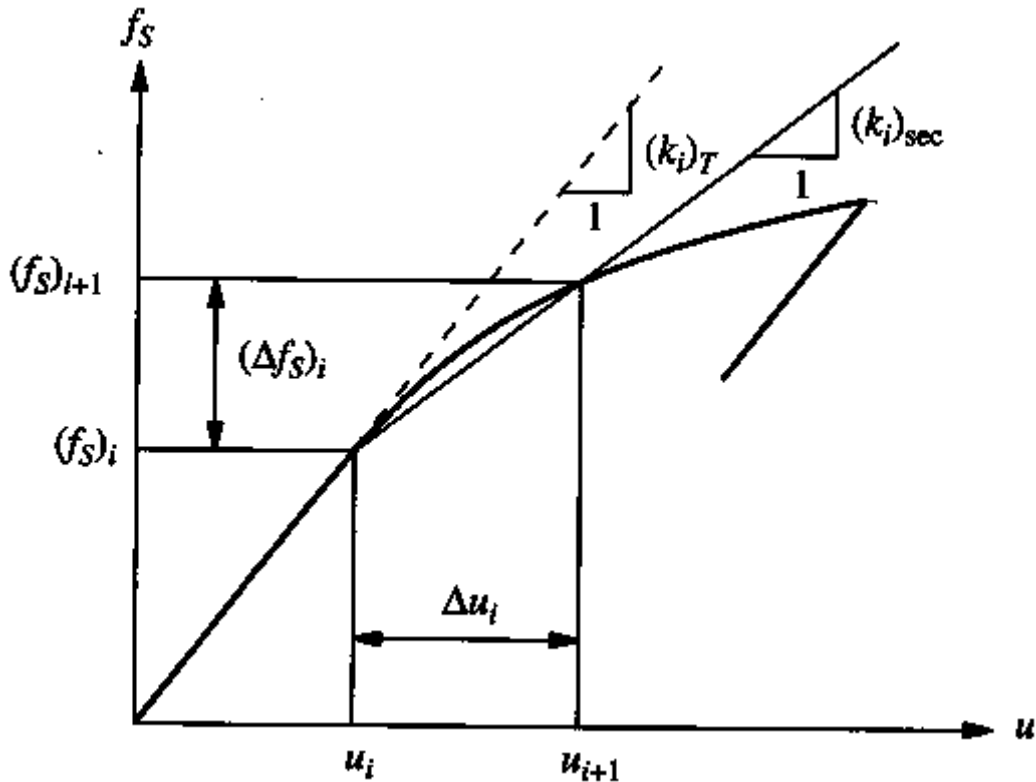


Figure .III. 2: définition de la matrice de rigidité tangente et la matrice de rigidité sécante.

La force incrémentale de résistance est :

$$(\Delta f_s)_i = (k_i)_{sec} \Delta U_i \quad (3-2)$$

Où la rigidité sécante $(k_i)_{sec}$, représentée dans la figure III.2 ne peut pas être déterminée parce que U_{i+1} n'est pas connu. Si on assume la supposition que tout le long de la petite étape du temps Δt , la rigidité sécante $(k_i)_{sec}$ peut être remplacée par la rigidité tangente $(k_i)_T$ montrée dans la figure III.2, donc l'équation (3-2) peut être rapprochée de :

$$(\Delta f_s)_i \approx (k_i)_T \Delta U_i \quad (3-3)$$

En omettant l'indice T de $(k_i)_T$ dans l'équation (3-3) et en le remplaçant dans l'équation (3-1) cela donne :

$$m\Delta A_i + c\Delta V_i + k_i \Delta U_i = \Delta p_i \quad (3-4)$$

La similarité entre cette équation et l'équation correspondante pour un système linéaire ; l'équation(2-13) suggère que la formulation non itérative de la méthode de **Newmark** présentée précédemment pour un système linéaire peut être utilisée dans la réponse de l'analyse non linéaire. Tout cela est donné en remplaçant k dans l'équation (2-15) par la rigidité tangente k_i et elle est évaluée au début de chaque étape de temps. Ce changement implique que l'étape 1.3 du Tableau II-1 doit être suivie par l'étape 2.1. Pour les systèmes non linéaires l'étape 2.5 et l'équation (2-17) donnent des valeurs différentes de $A_{t+\Delta t}$. et la dernière valeur est préférable parce qu'elle satisfait l'équilibre à l'instant " i+1" (ou t+Δt) .

Cette procédure avec une étape de temps Δt constante peut conduire à des résultats d'une précision non acceptable. Des erreurs significatives surgissent pour deux raisons :

- La rigidité tangente est utilisée au lieu de la rigidité sécante.
- L'utilisation d'une étape de temps constante gêne la détection des transitions dans la relation force-déformation.

Premièrement, on considère la seconde source d'erreurs illustrée par la relation force-déformation de la figure III.3.a. Supposons que le déplacement à l'instant i (ou t), au début de l'étape de temps est U_i et la vitesse V_i est positive (c.à.d que le déplacement augmente) ; cela est montré par le point **a** dans la figure. L'application de la procédure numérique précédemment décrite pour une étape de temps résulte dans le déplacement U_{i+1} et la vitesse V_{i+1} à l'instant i+1 ; cela est montré par le point **b** dans la figure .

Si V_{i+1} est négative, alors en un certain point **b'** durant l'étape de temps, la vitesse devient nulle, change de signe et le déplacement amorce sa décroissance. Dans la procédure numérique, si la localisation de **b'** ne dérange pas, on continue le calcul en commençant par l'étape de temps suivante au point **b** et on utilise la rigidité tangente associée à la branche non chargée du diagramme force-déformation, cette procédure localise le point **c** à la fin de l'étape de temps suivante avec un déplacement U_{i+2} et une vitesse négative. D'un autre coté, si l'instant associé à **b'** (quand la vitesse est en fait égale à zéro) peut être déterminé, le calcul pour l'étape de temps suivante commence avec l'état du système à **b'** et donne le déplacement et la vitesse à la fin de l'étape de temps, identifié comme **c'**.

Si \mathbf{b}' est non localisé, cela a pour effet de manquer le point \mathbf{b} et ne suit pas le modèle exact dans le diagramme force-déformation. Cet écartement survient à chaque annulation de la vitesse et introduit des erreurs dans les résultats numériques. Un problème similaire surgit dans l'autre coin tranchant dans la relation force-déformation, comme dans les systèmes elastoplastiques.

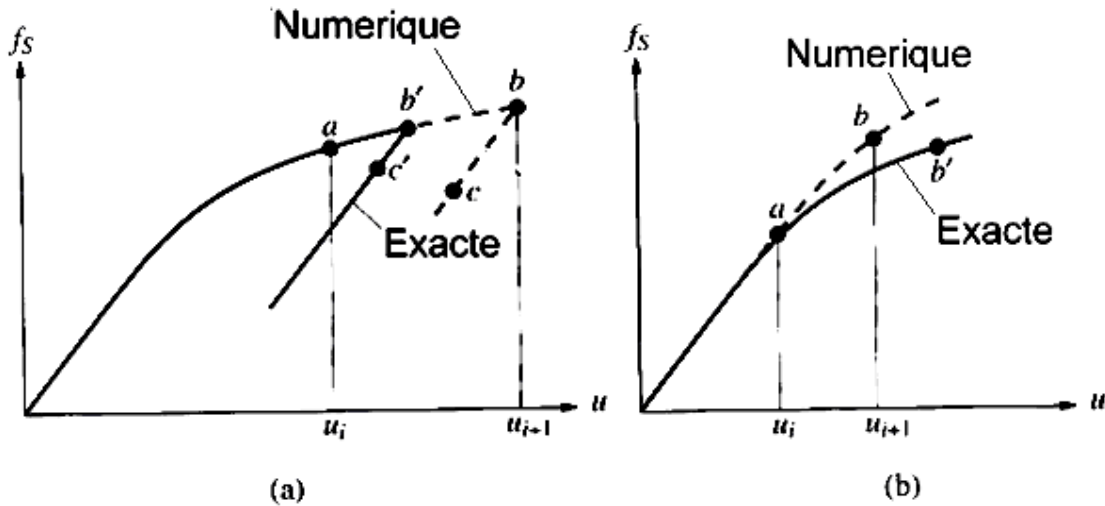


Figure .III. 3: définition des erreurs [3].

Ces erreurs peuvent être évitées par la localisation exacte de \mathbf{b}' . Ceci peut être mené en reconstituant l'intégration sur l'intervalle de temps i à $i+1$ avec une étape de temps plus petite, voir, $\Delta t / 4$.

Alternativement, on peut employer le processus itératif dans lequel l'intégration durant le temps i est reprise avec une étape plus petite que celle de toute l'étape, dont la taille est progressivement ajustée de sorte qu'à la fin d'une telle étape d'ajustement de temps, la vitesse soit proche de zéro.

Maintenant, retournant à la première source d'erreur qui est associée à l'utilisation de la rigidité tangente au lieu de la rigidité sécante inconnue et elle est illustrée dans la relation force-déformation de la figure III.3.b. Le déplacement à l'instant i , au début de l'étape de temps, est représenté par le point \mathbf{a} . En utilisant la rigidité tangente dans \mathbf{a} , l'intégration numérique de l'instant i à l'instant $i+1$ conduit au déplacement U_{i+1} , identifiée comme le point \mathbf{b} .

Si nous pouvions suivre exactement la courbe, le résultat peut être le déplacement \mathbf{b}' . Cette anomalie accumulée pendant une série d'étapes de temps peut présenter des erreurs significatives.

Ces erreurs peuvent être minimisées par l'utilisation d'une procédure itérative. L'équation clé résolue à chaque étape de temps dans la méthode de **Newmark** est l'équation (2-14), qui est modifiée pour un système non linéaire et devient :

$$\hat{k}_i \Delta U_i = \Delta \hat{p}_i \quad (3-5)$$

Où $\Delta \hat{p}_i$ est donné par l'équation (2-16) et \hat{k}_i par :

$$\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \quad (3-6)$$

Pour la commodité dans la notation nous omettons le souscrit i dans k_i et on le remplace par T pour insister sur la rigidité tangente ; aussi, l'indice i est enlevé de ΔU_i et de $\Delta \hat{p}_i$.

Donc les équations (3-5) et (3-6) deviennent :

$$\hat{k}_T \Delta u = \Delta \hat{p} \quad (3-7)$$

Et

$$\hat{k}_T = k_T + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta (\Delta t)^2} m \quad (3-8)$$

La figure III.4.a montre un schéma de l'équation (3-7). La relation est non linéaire puisque la rigidité tangente k_T dépend du déplacement U et donc la pente \hat{k}_T est non constante.

Dans l'analyse statique du système non linéaire $\hat{k}_T = k_T$, la non linéarité de \hat{k}_T est la même que celle de k_T .

Dans l'analyse dynamique, la présence des termes de masse et d'amortissement diminue la non linéarité à cause du terme constant $\frac{m}{\beta (\Delta t)^2}$, qui est généralement pour des valeurs typiques de

Δt plus grand que k_T .

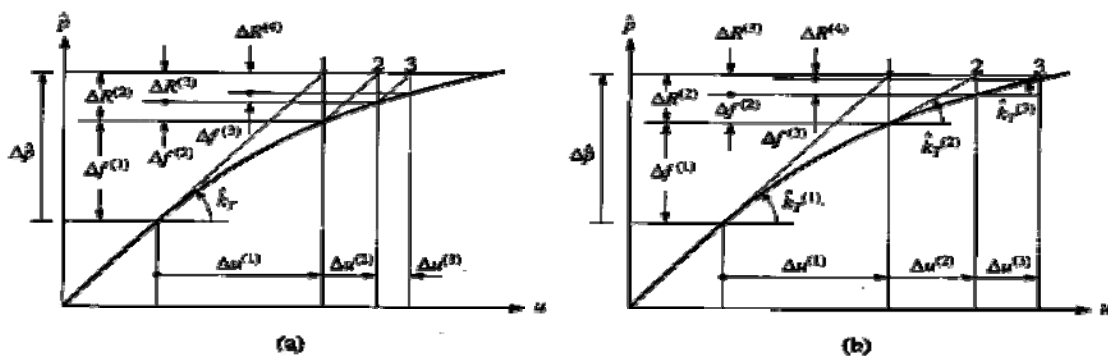


Figure .III. 4: les itérations durant l'étape de temps pour un système non linéaire:

(a) avec la méthode de Newton-Raphson.

(b) avec la méthode de Newton-Raphson modifiée.

En se référant à la figure III.4.a , la première étape itérative est l'application de l'équation (3-7) dans la procédure décrite précédemment :

$$\hat{k}_T \Delta u^{(1)} = \Delta \hat{p} \quad (3-9)$$

Pour déterminer $\Delta u^{(1)}$ (qui correspond au point **b** dans la figure III.3.b).

La première approximation de Δu finale (correspond au point **b'** dans la figure III.3.b) qui est associé à $\Delta u^{(1)}$ et la force réelle $\Delta f^{(1)}$ est inférieure à $\Delta \hat{p}$.

La force résiduelle est définie par :
$$\Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)}$$

Le déplacement additionnel $\Delta u^{(2)}$ due à cette force résiduelle est déterminé par :

$$\hat{k}_T \Delta u^{(2)} = \Delta R^{(2)} = \Delta \hat{p} - \Delta f^{(1)} \quad (3-10)$$

Ce déplacement additionnel est utilisé pour trouver une nouvelle valeur de la force résiduelle et le processus continu jusqu'à ce que l'on obtienne la convergence. Ce processus itératif d'une étape de temps i à l'étape de temps $i+1$, est résumé dans le l'algorithme III-1 suivant, connu sous le nom de la méthode de **Newton-Raphson modifiée**.

Algorithme .III. 1: la méthode de Newton-Raphson modifiée pour un système à un seul degré de liberté.

1.0 données initiales :

$$U_{i+1}^{(0)} = U_i, \quad f_s^{(0)} = (f_s)_i, \quad \Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i, \quad \hat{k}_T = k_i .$$

2.0 calcul pour chaque itération $j=1,2,3,\dots$

2.1 résoudre l'équation suivante : $\hat{K}_T \Delta U^{(j)} = \Delta R^{(j)}$ pour avoir $\Delta U^{(j)}$.

$$2.2 \quad U_{i+1}^{(j)} = U_{i+1}^{(j-1)} + \Delta U^{(j)} .$$

$$2.3 \quad \Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T) \Delta U^{(j)} .$$

$$2.4 \quad \Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)} .$$

3.0 **Répétition pour l'itération suivante, en remplaçant j par $j+1$ et on refait les étapes 2.1 à 2.4, jusqu'à la fin du signal**

L'équation dans l'étape 2.3 n'est pas évidente. Au lieu d'une dérivation formelle on fournira une interprétation intuitive. Dans l'analyse statique d'un système non linéaire $\hat{k}_T = k_T$ et $\Delta \hat{p}_i = \Delta p$ dans l'équation (3-7) et le graphe $\hat{p} - U$ dans la figure III.4.a est réduit au graphe de p (ou f_s) - U . Par conséquent, dans l'analyse inélastique $\Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-1)}$, le terme restant dans l'équation de l'étape 2.3 vient de la dynamique du système, qui est reflété par les termes c et m impliquées dans l'équation (3-8), qui peut être exprimé par $(\hat{k}_T - k_T)$.

Le processus itératif est terminé après ℓ itérations quand le déplacement incrémental $\Delta U^{(\ell)}$ devient assez petit, comparé à l'estimation en cours de $\Delta U = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta U^{(j)}$; cela est exprimé par :

$$\frac{\Delta U^{(\ell)}}{\Delta U} < \varepsilon_{\text{tol}}$$

Le déplacement incrémental durant l'étape de temps de i à $i+1$ est ensuite donné par :

$$\Delta U_i = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta U^{(j)} \quad (3-11)$$

Cela est la valeur exacte de ΔU_i qui remplacera celle obtenue sans itérations à partir de l'équation (3-5); cette dernière est la même que $\Delta U^{(\ell)}$ obtenue après une itération.

Avec ΔU_i connu, le calcul procède comme avant ; en particulier, ΔA_i et ΔV_i sont déterminés, respectivement, à partir des équations suivantes :

$$\Delta A_i = \frac{\Delta U_i}{\beta(\Delta t)^2} - \frac{V_i}{\beta \Delta t} - \frac{A_i}{2\beta} \quad \text{et} \quad \Delta V_i = \frac{\gamma \Delta U_i}{\beta \Delta t} - \frac{\gamma V_i}{\beta} - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) A_i$$

Le algorithme III-2 résume la solution temporelle pas à pas qui peut être calculée par ordinateur.

Algorithme .III. 2 : Méthode de Newmark pour un système non linéaire à un seul degré de liberté.

Cas spéciaux : (1) la méthode d'accélération moyenne pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$.

(2) la méthode des accélérations linéaires pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{6}$.

1) Conditions initiales :

1.1) calcul de l'accélération $A_0 = \frac{p_0 - cV_0 - kU_0}{m}$.

1.2) Sélection de l'incrément temporel Δt .

1.3) Calcul des paramètres d'intégration

$$a = \frac{m}{\beta(\Delta t)} + \frac{\gamma}{\beta} c \quad b = \frac{m}{2\beta} + \Delta t \left(\frac{\gamma}{2\beta} - 1 \right) c$$

2) pour chaque étape de temps i :

2.1) Calcul du vecteur charge effectif : $\Delta \hat{P}_i = \Delta P_i + aV_i + b A_i$

2.2) Détermination de la matrice de rigidité tangente k_i .

2.3) $\hat{k}_i = k_i + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} c + \frac{1}{\beta(\Delta t)^2} m$.

- 2.4) Utilisation du tableau III-1 pour des valeurs de \hat{k}_i et $\Delta\hat{p}_i$ afin d'avoir ΔU_i .
- 2.5) Calcul de la vitesse incrémentale : $\Delta V_i = \frac{\gamma \Delta U_i}{\beta \Delta t} - \frac{\gamma V_i}{\beta} - \Delta t \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta} \right) A_i$
- 2.6) Calcul de l'accélération incrémentale : $\Delta A_i = \frac{\Delta U_i}{\beta (\Delta t)^2} - \frac{V_i}{\beta \Delta t} - \frac{A_i}{2\beta}$
- 2.7) Détermination du déplacement, de la vitesse et de l'accélération à l'instant $i+1$:
 $U_{i+1} = U_i + \Delta U_i$, $V_{i+1} = V_i + \Delta V_i$, $A_{i+1} = A_i + \Delta A_i$

3) Répétition pour l'étape de temps suivante, en remplaçant i par $i+1$ et on répète les étapes 2.1 à 2.7 pour l'étape de temps suivante jusqu'à la fin du signal.

La méthode originale de **Newton-Raphson** converge plus rapidement (figure III.4) que le processus itératif décrit ci-dessus aux dépens du calcul additionnel. Cette convergence améliorée est accomplie par l'utilisation à chaque itération de la rigidité tangente courante $k_T^{(i)}$ et de la valeur associée de $\hat{k}_T^{(i)}$ à partir de l'équation (3-8) au lieu de k_T et \hat{k}_T . A chaque itération, le vecteur de forces résiduelles $\Delta R^{(j)}$ est maintenant petit. Cela est vu en comparant les parties (a) et (b) de la figure III.4 et le processus convergera en quelques itérations. Cependant, il est nécessaire, que la rigidité tangente soit évaluée à chaque itération, entraînant un calcul additionnel, qui peut être significatif pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

III.3.2. Solution non linéaire

L'évaluation numérique de la réponse dynamique des systèmes au delà de leur domaine élastique linéaire est le but de calcul pour les systèmes à grand nombre de degrés de liberté.

Les N équations pour un système de N degrés de liberté sont résolues habituellement sous leurs formes originales (équation (2-23)), puisque les analyses modales classiques ne sont pas applicables aux systèmes non linéaires. Cependant, les déplacements lors des analyses d'un système non linéaire peuvent toujours être exprimés comme une combinaison de modes naturels du système vibrant non amorti dans le domaine de son comportement linéaire :

$$U(t) = \sum_{n=1}^N \phi_n q_n \quad (3-12)$$

Cette transformation servira à découpler les équations du mouvement d'un système non amorti classique seulement si toute la structure demeure linéaire. Après épuisement, les équations modales deviennent couplées, excluant l'analyse modale classique. En dépit de cette complication, il peut sembler attractif de tronquer la transformation modale de l'équation (3-12)

pour inclure seulement les premiers J modes (généralement, $J \ll N$) qui contribuent significativement dans la réponse et en suite résoudre les J équations couplées dans des coordonnées modales au lieu des N équations dans les déplacements nodaux. Cependant, habituellement cette approche n'est pas efficace pour les systèmes non linéaires mais peut être employée avantageusement pour des structures composées de sous-systèmes linéaires reliés par des éléments non linéaires. Bien que les équations (2-23) étant résolues ne sont pas des équations non couplées, il est commode, pour poursuivre la discussion, de penser à la réponse en terme de sa décomposition modale (équation (3-12)).

La solution directe de l'équation (2-27) est équivalente à inclure dans l'analyse tous les N modes, bien que seulement les premiers J termes dans l'équation (3-12) sont suffisants pour représenter exactement la réponse structurale. Il apparaît que le choix de Δt devrait être basé sur l'exactitude des conditions pour le $J^{\text{ème}}$ mode, soit $\Delta t = T_J / 10$, où T_J est la période du $J^{\text{ème}}$ mode de vibration linéaire non amortie.

La solution directe de l'équation (2-27) avec ce choix de Δt donne un $U(t)$ semblable aux termes des modes élevés (de $J + 1$ à N) dans l'équation (3-12) qui peut être non précis, mais cela ne devrait pas être concerné puisque on a conclu que les contributions des modes élevés à la réponse sont négligeables. Bien que ce choix de Δt semble fournir des résultats précis, il peut être non suffisamment petit pour assurer la stabilité de la procédure numérique.

L'exactitude est exigée seulement pour les premiers J modes, mais la stabilité doit être assurée pour tous les modes parce que même si la réponse dans les modes plus élevés est insignifiante, elle "divergera" si les conditions de stabilité relatives à ces modes ne sont pas satisfaites.

La méthode des accélérations moyennes a l'inconvénient de ne fournir aucun amortissement numérique atténuant (figure II.6). C'est un inconvénient parce qu'il est préférable pour filtrer les contributions des modes plus élevés dans la réponse au delà des J modes significatifs parce que ces modes plus élevés et leurs fréquences, qui ont été calculés à partir d'une idéalisation de la structure, généralement ne sont pas exacts relativement aux propriétés réelles de la structure. Une seule approche pour réaliser ce but est de définir une matrice d'amortissement compatible avec le rapport d'amortissement croissant pour les modes plus élevés que le $J^{\text{ème}}$ mode.

Des recherches s'intéressent également à la formulation des algorithmes numériques pas à pas, qui dans un certain sens, possèdent l'amortissement numérique optimal.

La méthode de Wilson, prévoit un amortissement numérique, dans des modes de période T_n avec $\Delta t/T_n \geq 1.0$ et d'autres méthodes sont aussi disponibles.

III.3.2.1. Méthode des accélérations moyennes

La méthode des accélérations moyennes a été déjà présentée pour l'analyse de la réponse non linéaire des systèmes à un seul degré de liberté; c'est la procédure résumée dans le tableau III-2, spécialement pour $\gamma = \frac{1}{2}$ et $\beta = \frac{1}{4}$. Cette procédure porte directement sur les systèmes à plusieurs degrés de liberté où chaque équation scalaire dans la procédure pour les systèmes à un seul degré de liberté devient maintenant une équation matricielle pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Le algorithme III-3 résume la procédure programmée dans l'ordinateur.

Algorithme. III. 3 : Méthode des accélérations moyennes pour un système non linéaire à plusieurs degrés de liberté.

1.0 Calcul initial:

1.1 résoudre l'équation suivante : $mA_0 = p_0 - cV_0 - (f_s)_0$ pour avoir A_0 .

1.2 Sélection de Δt .

1.3
$$a = \frac{4}{\Delta t} m + 2 c ; b = 2m$$

2.0 Calcul pour chaque étape de temps i:

2.1
$$\Delta \hat{p}_i = \Delta p_i + aV_i + bA_i$$

2.2 Déterminer la matrice de rigidité tangente k_i .

2.3
$$\hat{k}_i = k_i + \frac{2}{\Delta t} c + \frac{4}{(\Delta t)^2} m$$

2.4 Utilisation du tableau III-1 pour des valeurs de \hat{k}_i et $\Delta \hat{p}_i$ afin d'avoir ΔU_i

2.5
$$\Delta V_i = \frac{2}{\Delta t} \Delta U_i - 2 V_i$$

2.6
$$\Delta A_i = \frac{4}{(\Delta t)^2} \Delta U_i - \frac{4}{\Delta t} V_i - 2 A_i$$

2.7
$$U_{i+1} = U_i + \Delta U_i, \quad V_{i+1} = V_i + \Delta V_i, \quad A_{i+1} = A_i + \Delta A_i$$

3.0 **Répétition pour étape de temps suivante, en remplaçant i par i+1 et on répète les étapes 2.1 à 2.6 pour l'étape de temps suivante.**

Les étapes 2.2 et 2.4 dans le tableau III-3 sont les étapes les plus longues. Le calcul de la matrice de rigidité tangente et des forces de résistance à partir de déplacements U_i à chaque étape de temps peut être complètement compliqué pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté non

linéaires. Comme, dans le cas des systèmes à un seul degré de liberté, l'étape de temps Δt doit être raccourcie convenablement pour détecter exactement la transition de la branche du déchargement à celle du chargement, ou autour des revirements dans les courbes de force-déformation. Mémoriser ces transitions pour chaque élément structural rend le procédé informatique exigeant pour des systèmes ayant beaucoup d'éléments.

III.3.2.2. Itération de Newton-Raphson modifiée

Comme dans le cas d'un système à un seul degré de liberté, l'itération dans l'étape de temps (étape 2.4) est nécessaire pour réduire l'erreur introduite par l'utilisation de la matrice de rigidité tangente au lieu de la matrice de rigidité sécante inconnue. Une telle itération peut être effectuée par la méthode de Newton-Raphson modifiée décrite dans le tableau III-1 pour des systèmes à un seul degré de liberté. Quand elle est généralisée pour les systèmes à plusieurs degrés de liberté, toutes les équations scalaires se transforment en équations matricielles.

L'algorithme III-4 résume la procédure programmée dans l'ordinateur.

Algorithme III. 4: la méthode de Newton-Raphson modifiée à plusieurs degrés de liberté.

1.0 données initiales :

$$U_{i+1}^{(0)} = U_i, \quad f_s^{(0)} = (f_s)_i, \quad \Delta R^{(1)} = \Delta \hat{p}_i, \quad \hat{k}_T = k_i$$

2.0 calcul pour chaque itération $j = 1, 2, 3, \dots$

2.1 résoudre l'équation suivante : $\hat{K}_T \Delta U^{(j)} = \Delta R^{(j)}$ pour avoir $\Delta U^{(j)}$

2.2
$$U_{i+1}^{(j)} = U_{i+1}^{(j-1)} + \Delta U^{(j)}$$

2.3
$$\Delta f^{(j)} = f_s^{(j)} - f_s^{(j-1)} + (\hat{k}_T - k_T) \Delta U^{(j)}$$

2.4
$$\Delta R^{(j+1)} = \Delta R^{(j)} - \Delta f^{(j)}$$

3.0 **Répétition pour l'itération suivante, en remplaçant j par $j+1$ et on répète les étapes 2.1 à 2.4**

Dans la méthode de **Newton-Raphson** modifiée la matrice de rigidité tangente est calculée à l'instant i , au début de l'étape de temps et elle est utilisée par toutes les itérations dans cette étape de temps. Ainsi la matrice de rigidité tangente \hat{k}_T devra être factorisée seulement une fois et elle est utilisée à plusieurs reprises dans la résolution des équations algébriques dans l'étape 2.1. Cette méthode est généralement préférée par rapport à la méthode de **Newton-Raphson** originale, où, comme mentionné précédemment, la matrice de rigidité tangente et \hat{k}_T sont mises

à jour pour chaque itération. Ceci améliore la convergence (figure III.4), mais un effort informatique additionnel est exigé pour former une nouvelle matrice de rigidité tangente \hat{k}_T et la factoriser à chaque cycle d'itération.

Le processus itératif est terminé après ℓ itérations quand le vecteur de déplacement incrémental $\Delta U^{(\ell)}$ devient assez petit. La petite valeur de ce vecteur est jugée par le besoin de sa norme Euclidienne pour être petite comparée à celle de l'évaluation courante, $\Delta U = \sum_{j=1}^{\ell} \Delta U^{(j)}$ des déplacements incrémentaux. En d'autres termes:

$$\frac{\|\Delta U^{(\ell)}\|_2}{\|\Delta U\|_2} < \varepsilon_{\text{tol}} \quad (3-13)$$

Ce critère intuitivement attractif peut être non satisfaisant si les différents éléments du vecteur déplacement sont mesurés dans de différentes unités et leurs valeurs numériques diffèrent considérablement. Tel est le cas dans l'analyse des bâtiments où les déplacements des planchers et les rotations des nœuds ont des unités différentes et les rotations des nœuds sont en ordre de grandeur plus petites que les déplacements des planchers. Dans cette situation l'équation (3-13) peut indiquer la convergence parce que les déplacements des planchers qui dominent la norme convergent ; cependant, les rotations des nœuds peuvent toujours être dans une erreur significative.

Pour éviter de telles difficultés et pour s'assurer que les déplacements et les forces sont près de leurs valeurs finales, un critère de convergence utile, est défini par :

$$\frac{[\Delta R^{(j)}]^T \Delta U^{(j)}}{[\Delta \hat{p}_i]^T \Delta U} < \varepsilon_{\text{tol}} \quad (3-14)$$

Dans ce critère, le travail effectué par les forces résiduelles $\Delta R^{(j)}$ dans les déplacements incrémentaux $\Delta U^{(j)}$ est comparé avec le travail associé avec des forces incrémentales totales $\Delta \hat{p}_i$ (durant l'étape de temps) et l'évaluation courante du déplacement incrémental total (ΔU).

A la lumière de ce qui a été exposé précédemment, une analyse non linéaire nécessite la définition d'une matrice de rigidité tangente qui est sensiblement liée au comportement du matériau utiliser et donc aux modèles analytiques définissant ce comportement. Ces derniers sont exposés dans le chapitre suivant.

CHAPITRE IV : MODELES MATERIELS
ANALYTIQUES

Généralités

La conception et l'analyse du comportement de toute structure ou élément en béton armé, exigent des modèles et des méthodes analytiques qui reflètent exactement le chargement cyclique non linéaire réel du comportement de l'élément. Les techniques courantes de la modélisation analytique des éléments structuraux emploient une macro approche ou une micro approche par éléments finis.

Plusieurs modèles sont proposés pour la relation contrainte-déformation du matériau pour une macro approche dans un élément en béton armé. En général, le modèle de la réponse monotonique sert de courbe enveloppe au modèle du comportement hystérésis [5].

Vu que cette étude s'intéresse d'avantage à la réponse dynamique des structures en béton armé, le comportement hystérésis des armatures d'acier et du béton, particulièrement le noyau du béton a un effet remarquable sur la réponse d'un élément en béton armé.

Donc, la modélisation du comportement hystérésis de l'acier et du béton est cruciale dans une étude détaillée du comportement. Des observations Générales prouvent que trois composantes de base sont dans la réponse hystérésis. Ces composantes de base peuvent être décrites comme suit :

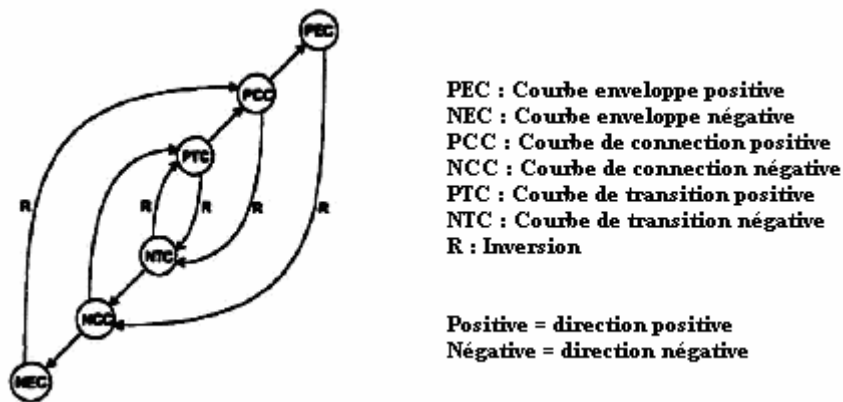


Figure .IV. 1: La relation entre les courbes dans les règles de bases d'un modèle hystérésis [5].

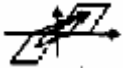
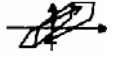
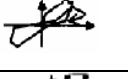

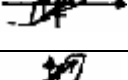


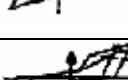
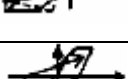
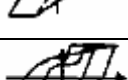
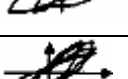
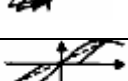
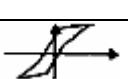
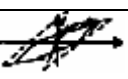

- Les courbes enveloppes peuvent être fixées ou re-situées. Ces courbes sont les bases de la réponse hystérésis générale. La dégradation du matériau est habituellement simulée par le décalage et le calibrage des courbes enveloppes. Les dégradations peuvent être également simulées par le décalage du point de retour. Ceci signifie que le point de retour d'une courbe enveloppe est différent comparé au point où la dernière inversion s'est produite.
- Les courbes de connexion sont des raccords entre les courbes enveloppes. Puisqu'il peut y avoir plusieurs points de changement d'allure dans ces courbes qui peuvent être utilisés pour représenter le pincement, et d'autres phénomènes d'écrouissage et de ramollissement dans le

matériau ou les éléments structuraux. D'habitude plus d'une d'équation sont utilisées afin de simuler ce genre de courbes.

- Les courbes de transition qui sont utilisées quand une inversion de la courbe de connexion prend place pour permettre la transition à une courbe de connexion qui évolue dans la direction opposée.

Le tableau IV.1 résume quelques modèles hystérésis proposés par différents chercheurs. Ces modèles ne peuvent pas être considéré comme des modèles généraux et précis, car chacun de ces modèles ne peut être appliqué relativement avec succès que dans un cas spécifique et peut échouer dans certains autres cas. Comme il est montré dans le tableau, certains d'entre eux peuvent être mis au point pour convenir à un cas particulier.

Tableau .IV. 1: sommaire des spécifications de quelques modèles hystérésis [5].

modèle	Type	Paramètres Contrôlés			Remarques Comparatives			Croquis
		Dégradation de la rigidité	Pincement	Niveau de détérioration	Paramètres Additionnels	Faculté générale d'adaptation	Complexité générale	
Clough	D	N	N	N	0	F	F	
Fukada	D	O	N	N	0	F	F	
Aoyama	D	N	O	O	4	M	H	
Kustu	D	N	O	N	4	M	H	
Tani	D	O	N	N	2	H	M	
Takeda	D	O	N	N	1	F	M	
Park	C	O	N	N	2	H	H	
Iwan	D	N	O	N	1	F	M	
Takayangi	D	O	O	O	3	M	M	
Muto	D	O	N	N	0	F	F	
Atalay	C	O	O	N	4	F	H	
Nakata	C	O	O	O	6	H	H	
Blakeley	D	O	N	O	0	F	F	
Mo	D	O	O	N	2	F	F	
Pivot	D	O	O	N	0	M	F	

Notations : O : Oui, N : Non, D : droite, C : Courbe, F : Faible, M : Moyen, H : Fort.

Dans cette étude on adopté les lois de comportement suivant le modèle hystérésis de **Takeda** [9] qui est capable de simuler avec succès la réponse des éléments en béton armé soumis aux moments réversibles autour d'un axe, puisqu'il prend en considération la dégradation de la rigidité en dépit de sa complexité moyenne.

IV.1 Définitions décrivant les courbes hystérétiques

Les courbes hystérétiques sont employées pour définir le parcours d'un point dans le plan contrainte-déformation. Le point est localisé par deux coordonnées cartésiennes. L'explication de la façon dont ce point parcourt le plan contrainte-déformation exige plusieurs définitions spécifiques. Celles-ci sont présentées ci-dessous pour faciliter les descriptions qui suivent dans les sections IV.2 pour les armatures et IV.3 pour le béton.

Asymptot , Asymptote : une ligne droite définissant la limite de la courbe contrainte-déformation de l'acier pour une déformation infinie. La position de cette ligne change selon l'histoire du chargement.

Current Position, Position Actuelle : position dans le plan contrainte-déformation définie par des coordonnées de déformation et de force au début du calcul d'une nouvelle position.

Envelope Curve, Courbe enveloppe : une courbe définissant la contrainte limite pour le béton comprimé sous différentes contraintes. C'est, en effet, la courbe contrainte-déformation pour le béton soumis à des contraintes compressives monotoniques ascendantes. On suppose que la courbe enveloppe est indépendante de l'histoire du chargement.

Fiber, Fibre : un élément matériel (acier ou béton) représentant une petite aire de la section transversale.

Flag, étiquette : un endroit de la mémoire contenant des informations sur l'état d'une fibre.

History, Histoire : les coordonnées déformation et contrainte par lesquelles la fibre est passée.

Incremental Stiffness, Rigidité incrémentale : la rigidité sécante de la fibre à la position actuelle.

Loading, Chargement : le passage le long de l'axe des déformations avec une augmentation de la déformation.

Loading History Parameters, Paramètres de l'histoire du chargement : ce sont les paramètres qui retiennent l'information sur le chemin du chargement au-delà des extrémités et l'état du matériau, nécessaires pour la définition du chemin de passage pour la nouvelle étape.

Position of Maximum Excursion on the Envelope Curve, Position du revirement maximal de la courbe enveloppe : c'est la position extrême atteinte sur la courbe enveloppe pour le béton comprimé.

Nonstationary, Non stationnaire : Se rapporte aux courbes qui changent leur position dans le plan contrainte-déformation selon l'histoire.

Position, Position : un point sur le plan contrainte-déformation.

Primary Curve, Courbe primaire : une ligne droite définie par le module de Young de l'acier.

Refresh, Actualiser : Changer l'état, contrainte-déformation et les paramètres de l'histoire du chargement selon les valeurs à la fin de l'étape de calcul.

Reversal, Revirement (Inversion) : Changer le chargement en déchargement ou vice-versa.

Reversal Point: Point d'Inversion : La position de l'inversion ou du revirement.

Secondary Curve, Courbe Secondaire : ligne droite définie par la pente de déformation d'écroutissage pour l'acier.

Secondary Stiffness: Rigidité Secondaire : La pente de la tangente de la courbe limite.

State of Complete Contact, État de Contact Complet : la fermeture complète de la fissure dans le béton.

State of Cracking, Etat de Fissuration : indique (par une étiquette) si la fibre du béton n'a jamais été fissurée.

State of Incomplete Contact, Etat de Contact Incomplet : La position à attribuer aux régions de la surface fissurée qui assurent le contact avant que la déformation de la fibre n'atteigne la déformation à laquelle la fissure s'est formée.

Stationary, Stationnaire : Se rapporte aux courbes qui ne changent pas leurs positions dans le plan contrainte-déformation selon l'histoire du chargement.

Transition, Transition : Changement de la rigidité à partir de la rigidité primaire à celle commandé par l'asymptote.

Travel, Parcours ou Tracé : changement de la position dans le plan contrainte-déformation.

Unloading, Déchargement : le passage le long de l'axe des déformations avec des déformations décroissantes.

IV.2 Modèle hystérésis de l'acier

Des modèles à paramètres variables ont été employés par beaucoup de chercheurs pour simuler le comportement hystérésis de l'acier (**Kent** [20], **Menegotto-Pinto**[25], [38] **Aktan**[1], **Thompson** [37], **Stanton et McNiven** [33]). Le modèle adopté pour cette étude, est une modification de celui développé par **Stanton et McNiven**. Leur modèle est basé sur les courbes de **Menegotto-Pinto** (M-P). Une courbe M-P typique est illustrée dans la figure IV.2. Cette courbe est régie par la formulation suivante :

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \frac{(1-b)\varepsilon^*}{(1 + \varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad (4-1)$$

Où : $\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}$, $\sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}$

σ : est la contrainte dans l'acier.

ε_r, σ_r : sont les coordonnées déformation et contrainte du point de revirement (Figure IV.2).

ε_0, σ_0 : sont les coordonnées déformation et contrainte du point d'intersection de la courbe primaire et l'asymptote (Figure IV.2).

$b = \frac{E_2}{E_1}$: est le rapport des pentes de la courbe primaire et l'asymptote.

$E_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}$: est la pente de la courbe primaire.

E_2 : est la pente de l'asymptote (Figure IV.2).

R : est le paramètre définissant la transition du parcours de la courbe primaire à l'asymptote.

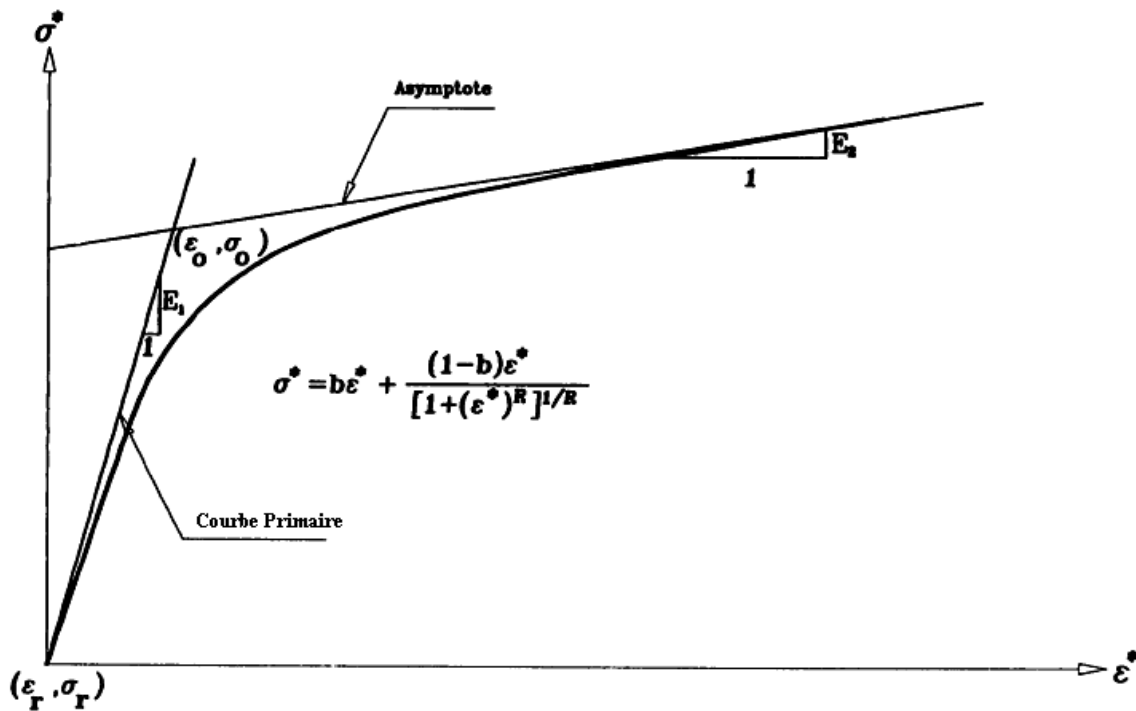


Figure IV. 2: Modèle représentatif et équation de Menegotto et Pinto [7].

Il y a plusieurs avantages à employer les courbes M-P. Un modèle basé sur les courbes M-P est économique du point de vue effort de calcul, parce que la contrainte est calculée à partir de la déformation. Elle est explicite. Des caractéristiques hystérétiques distinctes de l'acier peuvent être représentées par les paramètres des courbes M-P. Cela permet la manipulation des paramètres indépendamment. En outre, ces paramètres peuvent être obtenus

conventionnellement à partir des essais hystérésis sur l'acier (**Stanton et McNiven**[33]). La figure IV.3 montre les formes possibles de ces courbes M-P.

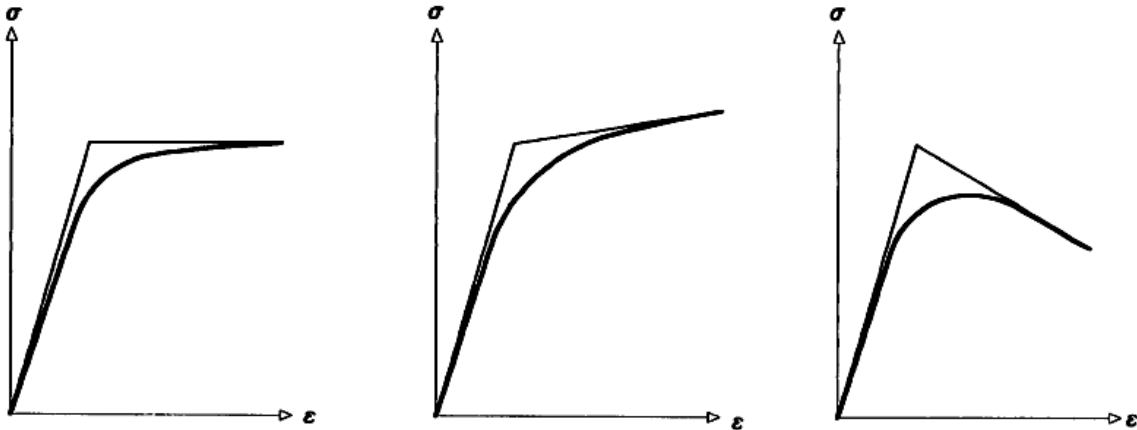


Figure .IV. 3: les formes possibles des courbes de Menegotto-Pinto pour un chargement monotonique croissant [7].

Avant le premier revirement, les résultats du modèle M-P sont semblables à ceux du modèle bilinéaire de l'acier. Si la fibre n'est pas épuisée dans aucune direction (voir annexe A.2), le tracé se fait le long de la courbe primaire (figure A.2.1.a). Après le premier épuisement, dans n'importe quelle direction, le tracé suit la courbe secondaire (figure A.2.1.a). Au premier déchargement de la courbe secondaire, le tracé suit les courbes M-P. La courbe primaire, l'asymptote (courbe secondaire dans la figure A.2.1.a) et le paramètre de transition R doivent être définis pour construire une courbe M-P. La courbe primaire et l'asymptote nécessitent deux points pour leurs définitions : le point de revirement (ϵ_r, σ_r) (figure IV.4) et le point d'intersection de la courbe primaire et l'asymptote (ϵ_0, σ_0) (figure IV.4). Le point de revirement est le point de déchargement.

En considérant le point revirement (ϵ_r, σ_r) dans la figure IV.5, la tangente de pente E_0 , est dessinée au point (ϵ_r, σ_r) . Cette tangente croise l'axe des déformations à ϵ_z . La courbe bilinéaire initiale de chargement est décalée de sorte que son origine soit au point ϵ_z .

La tangente dessinée au point (ϵ_r, σ_r) est prolongée pour croiser la courbe décalée.

Le point d'intersection (ϵ_0, σ_0) devient la nouvelle origine pour définir le parcours dans cette direction. Un nouveau ensemble de courbes limites doit être défini à chaque inversion. Des détails de l'algorithme utilisé pour le modèle de l'acier sont décrits dans l'annexe A.2.

Les valeurs de E_0 et de R sont définies par **Stanton et McNiven** [33] basées sur des données expérimentales.

La rigidité est modifiée pour avoir un module initial de 29000 ksi ($\cong 200000$ MPa).

$$E_0 = 29000 - 108000 \epsilon_r - 1928(1.0 - \exp(-390.0 \epsilon_r)), \quad (\text{en ksi}) \quad (4-2)$$

avec $E_0 \geq 22000 \text{ ksi}$

La définition de R est modifiée en ajoutant la constante, C_2 à la forme originale,

$$R = \frac{r\sigma_y}{C_2} \quad (4-3)$$

où : $r = 0.074 - 1.092 \varepsilon_{max t}^p$, en traction, (4-3a)

$r = 0.069 - 0.632 \varepsilon_{max c}^p$, en compression. (4-3b)

ε_r est la déformation à la dernière inversion.

$\varepsilon_{max t}^p$, $\varepsilon_{max c}^p$ sont la déformation plastique maximale dans la demi boucle, en traction et en compression.

σ_y est la contrainte d'épuisement de l'acier, (en ksi).

$C_2 = 17$, en se basant sur des données expérimentales obtenues par **Aktan** [2].

Un résultat expérimental représentatif (**Aktan** [2]) est tracé dans la figure IV.5, avec les simulations correspondantes en utilisant ce modèle.

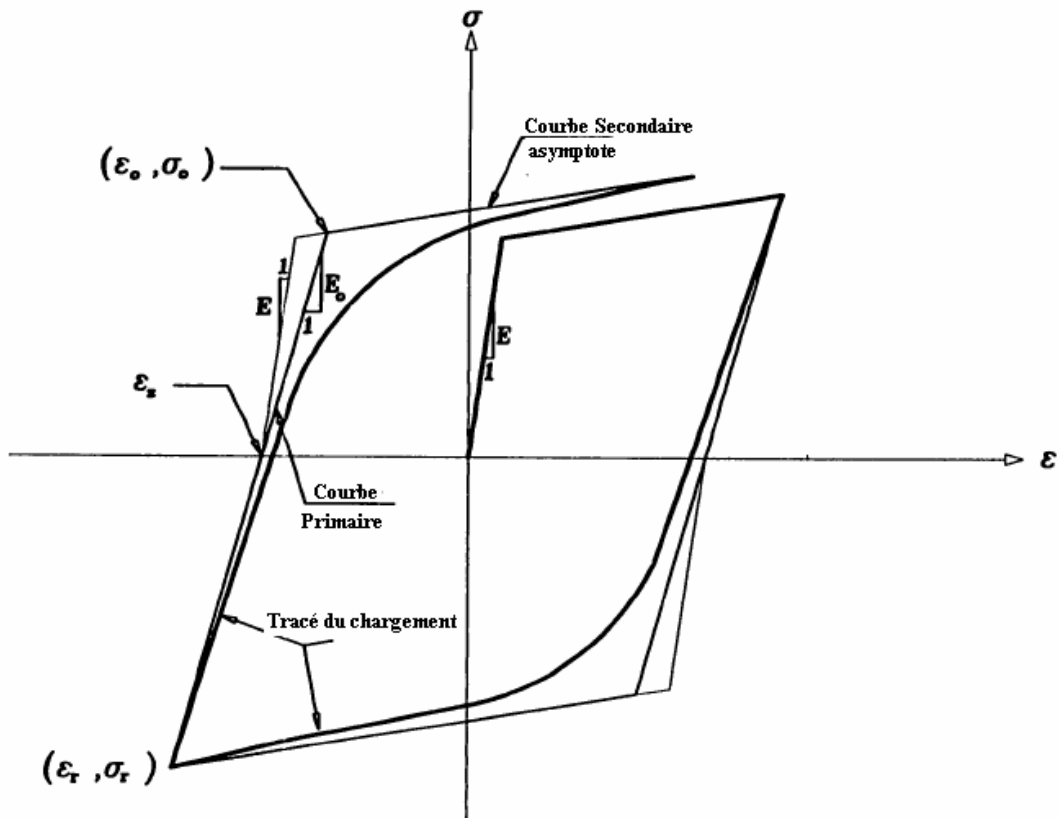


Figure .IV. 4: Le décalage de la déformation dans la courbe enveloppe [7].

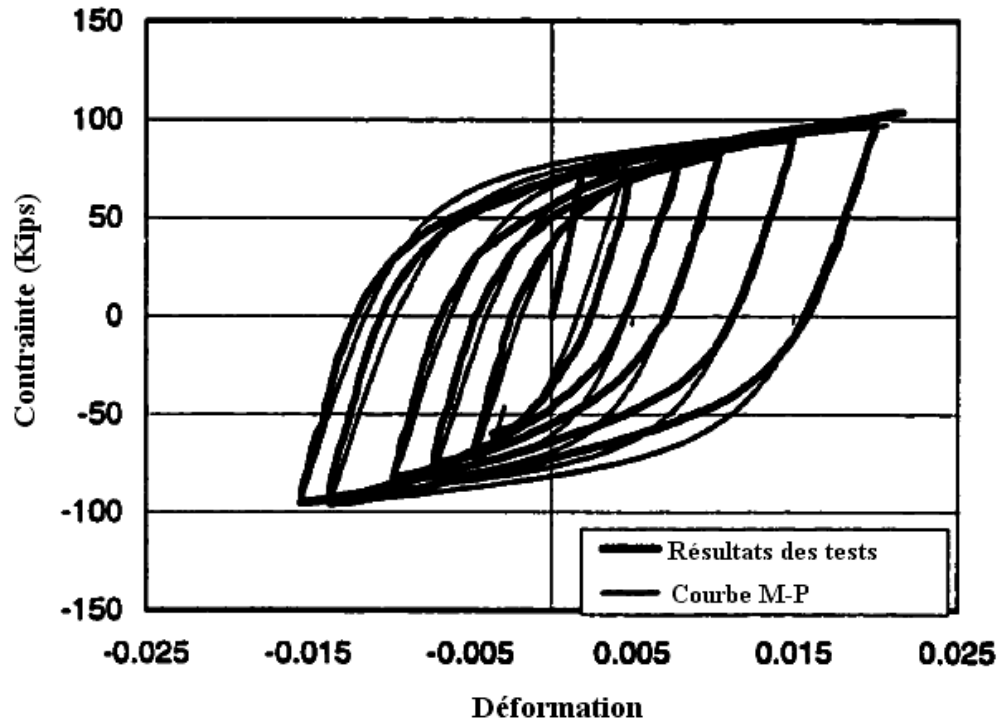


Figure IV. 5: Courbes hystérétiques de réponse mesurée et testée pour une barre d'acier (#6 $\equiv \varnothing=19.05\text{mm}=0.75''$) basées sur les Courbes M-P (Aktan et al [2], Test9).

IV.3 Modèle hystérétique pour le béton

Au début, le modèle hystérétique pour le béton a été adopté par **Dradjat** [11]. La figure IV.6 montre les caractéristiques générales du modèle de **Dradjat**. Les limites de la réponse à une contrainte compressive sont liées par la parabole de Ritter jusqu'au pic des contraintes et une ligne droite joignant les coordonnées de l'effort maximal en un point sur l'axe des déformations (**Hognestad** [16]).

Les limites de la courbe contrainte-déformation pour le béton sont :

$$1. \quad \sigma_c = 0.0 \quad \varepsilon_c < \varepsilon_t \quad (4-4)$$

$$2. \quad \sigma_c = E_c \varepsilon_c \quad \varepsilon_t \leq \varepsilon_c \leq 0.0 \quad (4-5)$$

$$3. \quad \sigma_c = f'_c \left[2 \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{co}} \right)^2 \right] \quad 0.0 < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{co} \quad (4-6)$$

$$4. \quad \sigma_c = f'_c [1 - \Omega(\varepsilon_c - \varepsilon_{co})] \quad \varepsilon_{co} < \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cx} \quad (4-7)$$

$$\varepsilon_{cx} = 7 \varepsilon_{co} \quad (4-7a)$$

$$\Omega = \frac{1}{(6\varepsilon_{co})} \quad (4-7b)$$

$$5. \quad \sigma_c = 0.0 \quad \varepsilon_{cx} < \varepsilon_c \quad (4-8)$$

où :

$\varepsilon_t = \frac{f_t}{E_c}$: est la déformation en traction correspondant à la contrainte maximale de traction.

$\varepsilon_{co} = \left(\frac{C_1 f'_c}{E_c} \right)$: est la déformation compressive du béton correspondant à la résistance à la compression f'_c .

C_1 : est une constante définie comme étant égale à 2 en se basant sur des résultats expérimentaux.

f_t : la résistance du béton à la traction (en psi).

f_c : la contrainte compressive du béton (en psi).

ε_c : la déformation du béton.

Ω : une constante qui définit la pente descendante de la courbe contrainte-déformation.

f'_c : la résistance compressive du béton (en psi).

ε_{cx} : la déformation compressive maximale du béton.

E_c : module de **Young** pour le béton (en psi).

L'équation 4-6 définit l'approximation du second degré de la courbe contrainte-déformation du béton proposée par **Ritter (Hognestad [16])**. L'équation 4-7 définit la variation de la capacité de la contrainte compressive dans le béton non confiné au delà de la déformation ε_{co} .

Les règles pour le chargement cyclique sont également illustrées dans la figure IV.6.

Le déchargement et le chargement dans la courbe enveloppe suivent une ligne droite, reliant le point du déchargement sur la courbe enveloppe ($\varepsilon_{cen}, \sigma_{cen}$) et le point du chargement ($\varepsilon_{cp}, 0$). La déformation ε_{cp} au point du chargement est calculée par :

$$\varepsilon_{cp} = \varepsilon_{co} \left[\frac{1}{7} \left(\frac{\varepsilon_{cen}}{\varepsilon_{co}} \right)^2 + \frac{1}{8} \frac{\varepsilon_{cen}}{\varepsilon_{co}} \right] \quad (4-9)$$

où :

ε_{cp} : est la déformation du béton sur l'axe de contrainte pour un déchargement à partir de la position maximale du revirement (figure IV.6).

ε_{cen} : est la position maximale du revirement sur la courbe enveloppe (figure IV.6).

L'équation 4-9 est une version légèrement simplifiée des règles du déchargement proposées par **Karsan et Jirsa [19]**. Le déchargement de la courbe enveloppe est illustré par la ligne AB dans la figure IV.6. Si le déchargement continue et le béton n'a pas été précédemment fissuré, le tracé suit la ligne BC avec une pente égale à E_c , jusqu'à la position C qui est définie par la résistance du béton à la traction. En suivant le tracé d'avantage cela va réduire la contrainte à

zéro pour suivre le chemin CDE. Si le béton est précédemment fissuré, le chemin du déchargement suit la courbe BDE. Le chargement suit le chemin utilisé dans le déchargement le plus récent. Cependant, si le béton est fissuré, le chemin du chargement est EDDBA. Si le chargement continue au delà de la dernière position sur la courbe enveloppe (ϵ_{cen} , σ_{cen}), alors le chargement suit la courbe enveloppe. Si la déformation compressive dépasse la déformation ϵ_{cx} , la contrainte devient nulle.

Les surfaces du béton autour d'une fissure, en étant comprimées, ne peuvent pas avoir un ajustement parfait. En conséquence, les parties relevées de chaque surface limite vont probablement avoir un contact avant la fermeture complète de la fissure. La compression est développée avant la déformation, dans ce cas le point B, est atteint. Le chemin reliant E à F dans la figure IV.6 est ajouté au modèle de **Dradjat** pour simuler à l'avance l'augmentation de la résistance du béton pendant la fermeture de la fissure. Reconnaisant ainsi qu'il y a un domaine de "contact incomplet" avant qu'un contact complet ne se produise, et pour cela un ensemble de règles hystérésis pour simuler ce phénomène a été choisi. Ces règles sont décrites en référence à la figure IV.7. La vue détaillée dans la figure IV.7b montre une partie de la courbe contrainte-déformation pour le béton (figure IV.7.a). Un point E est défini à une déformation de $6\sigma_t/E_c$ du point B, qui est supposé être la déformation à la contrainte nulle pour le plus récent déchargement de la courbe enveloppe. Si la déformation calculée tend vers une déformation à droite du point E, lors du revirement, la relation contrainte-déformation suit le chemin EF. Le point F est situé sur le déchargement le plus récent de la courbe enveloppe pour une contrainte de $\sigma_{cen}/5$. S'il y'a encore une inversion de la contrainte avant d'atteindre le point F, le déchargement est supposé se produire le long de la ligne EF.

Si, après le déchargement au point B, il y a une inversion de contrainte avant d'atteindre le point E, la courbe du déchargement va directement vers le point F, comme illustré par la ligne E'F. Encore, s'il y a une autre inversion dans la ligne E'F, le déchargement se produit le long de la ligne E'F. Si le point F est atteint pendant le chargement, le déchargement se produit alors le long de la ligne AB.

Des détails de l'algorithme pour l'hystérésis du béton sont donnés dans l'annexe A.1.

Une courbe contrainte-déformation représentative mesurée pour le béton sous un chargement cyclique est montrée dans la figure IV.8, et comparée à la courbe basée sur le modèle proposé pour le béton.

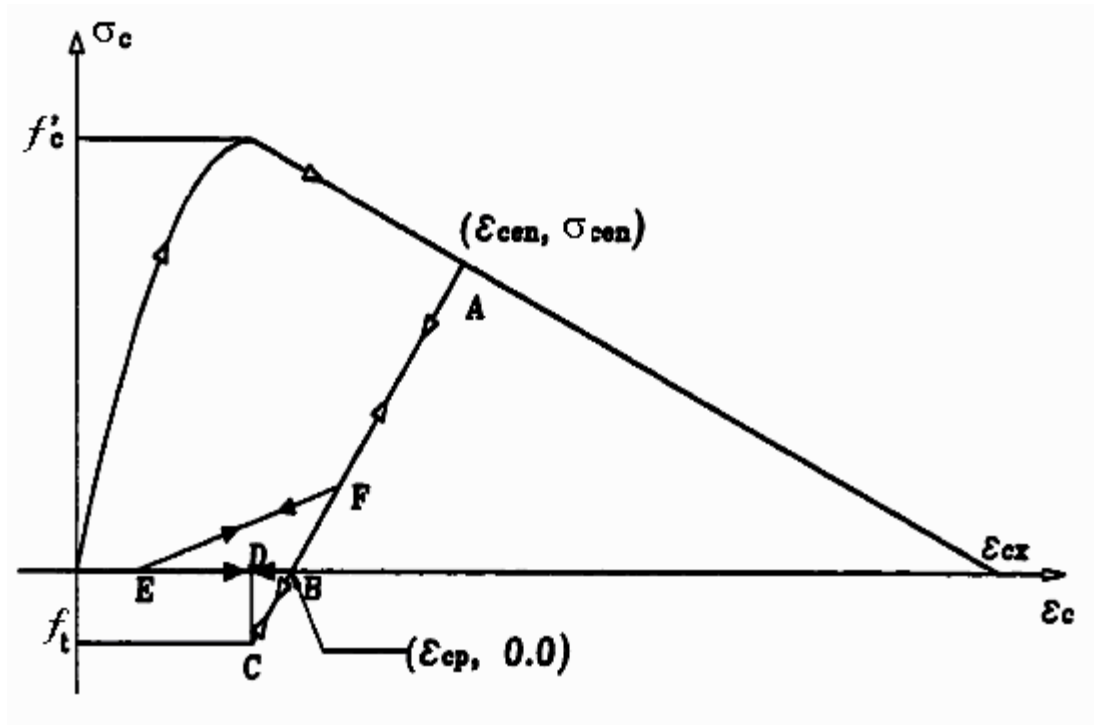


Figure .IV. 6: Modèle hystérésis pour le béton [7].

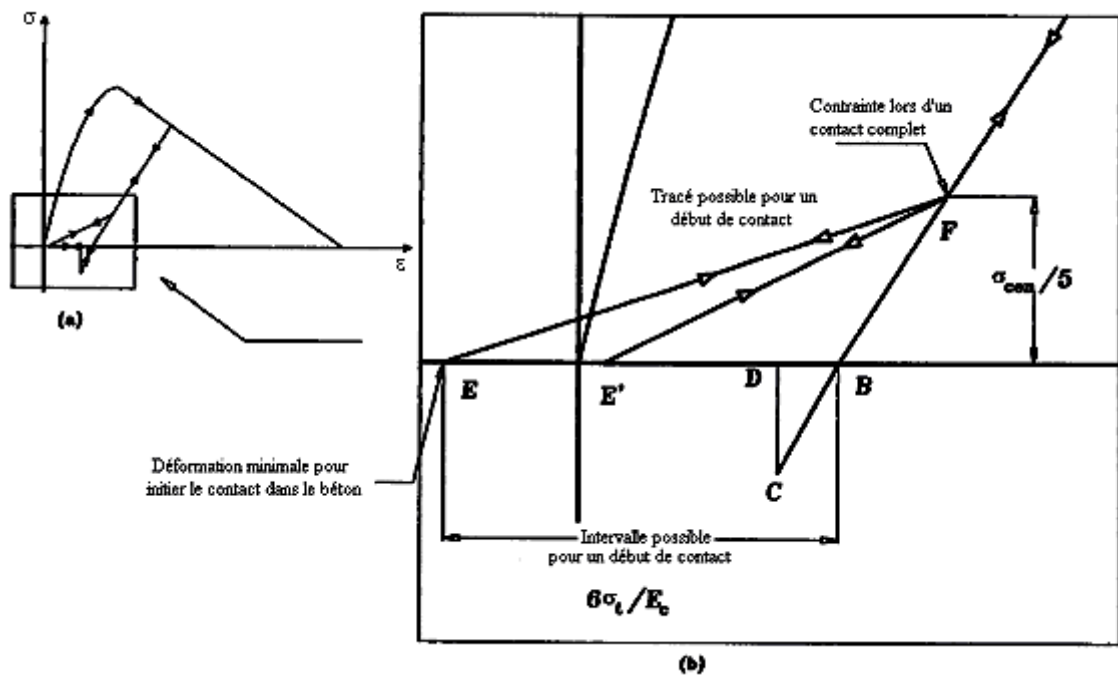


Figure .IV. 7: Règles définissant le début de contact pour la section fissurée du béton[7].

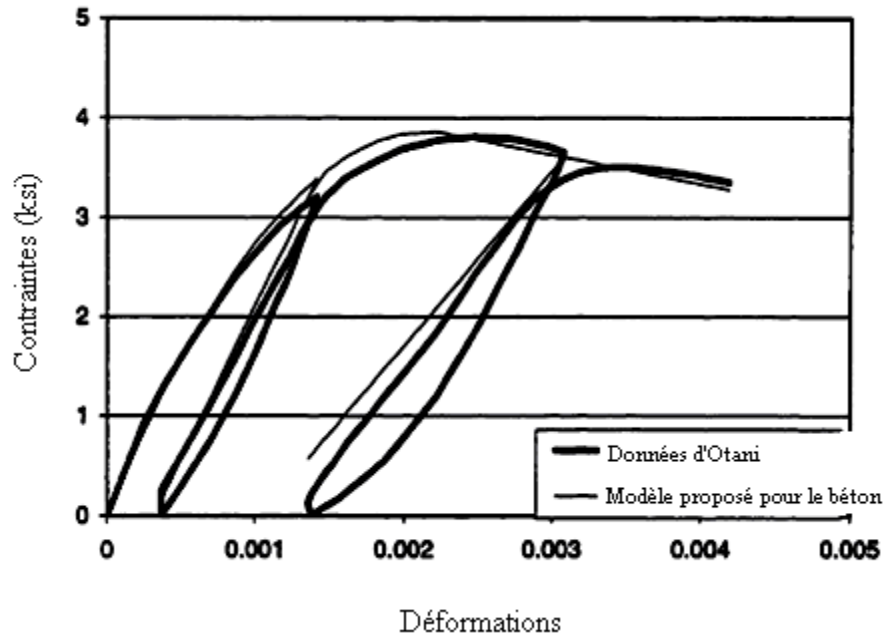


Figure .IV. 8: Comparaison entre les courbes hystérésis mesurées et calculées pour le béton comprimé (Données expérimentales de Otani [28]).

En se servant de ces modèles, des programmes sont réalisés permettant des applications sur quelques cas sollicités par des séismes réels, illustrées dans le chapitre suivant.

CHAPITRE V : MISE EN APPLICATION ET
VALIDATION DE LA REPONSE D'UN SYSTEME
LINEAIRE A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE

Aperçu

En premier lieu, un programme en Matlab est exécuté pour un système linéaire à un seul degré de liberté sollicité par un signal sismique en appliquant l'intégral de Duhamel pour déterminer la réponse de ce système.

En second lieu, un autre programme en Matlab est réalisé pour un système linéaire à un seul degré de liberté sollicité par un signal sismique mais cette fois, c'est la méthode de Newmark qui est utilisée pour déterminer la réponse du système.

V.1 Réponse d'un oscillateur simple excité par un signal sismique, obtenue par l'intégrale de Duhamel

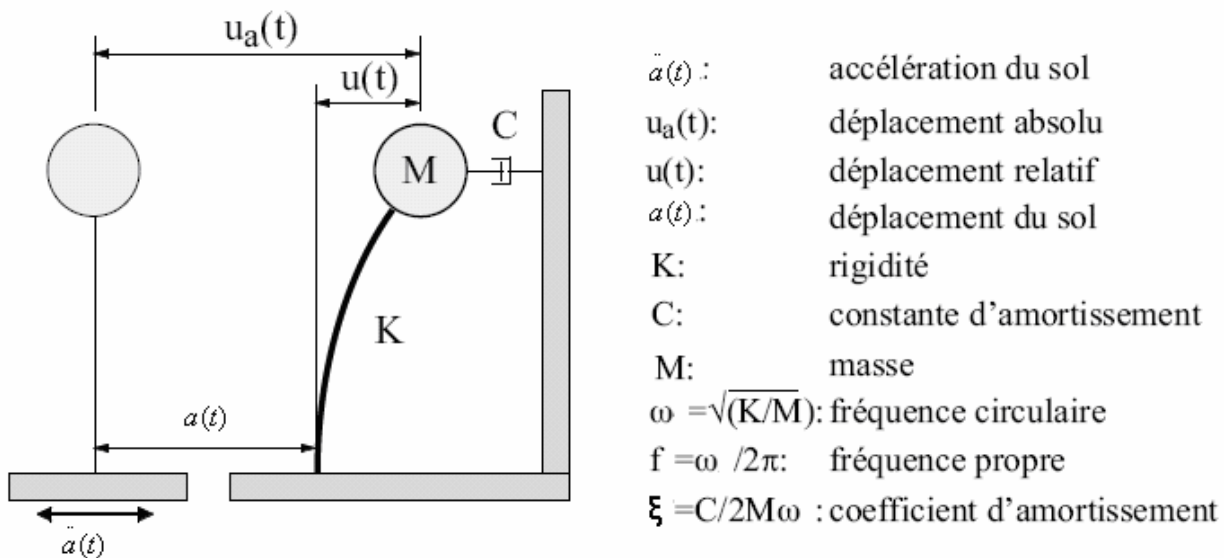


Figure .V. 1: Caractéristiques d'un système à un seul degré de liberté.

Un système à un seul degré de liberté est excité par un signal du séisme de **El-Centro** (18 Mai 1940) composante N-S dont l'accélérogramme est le suivant :

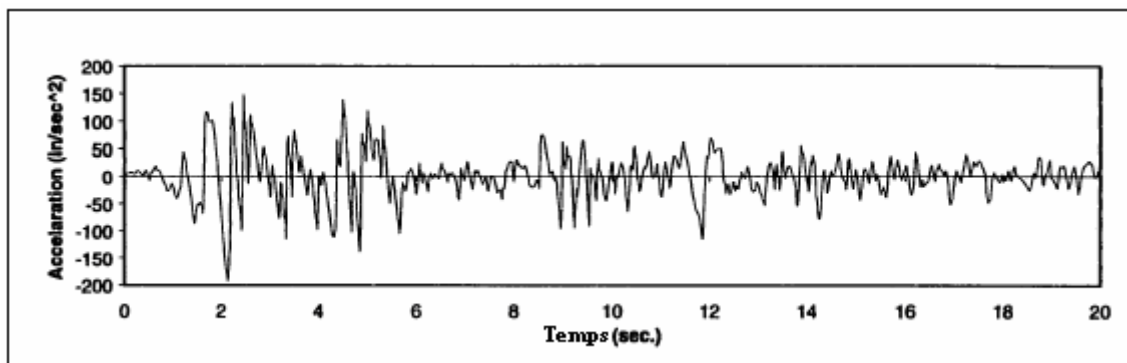


Figure .V. 2: Signal d'EL-CENTRO 18 Mai 1940 composante N-S.

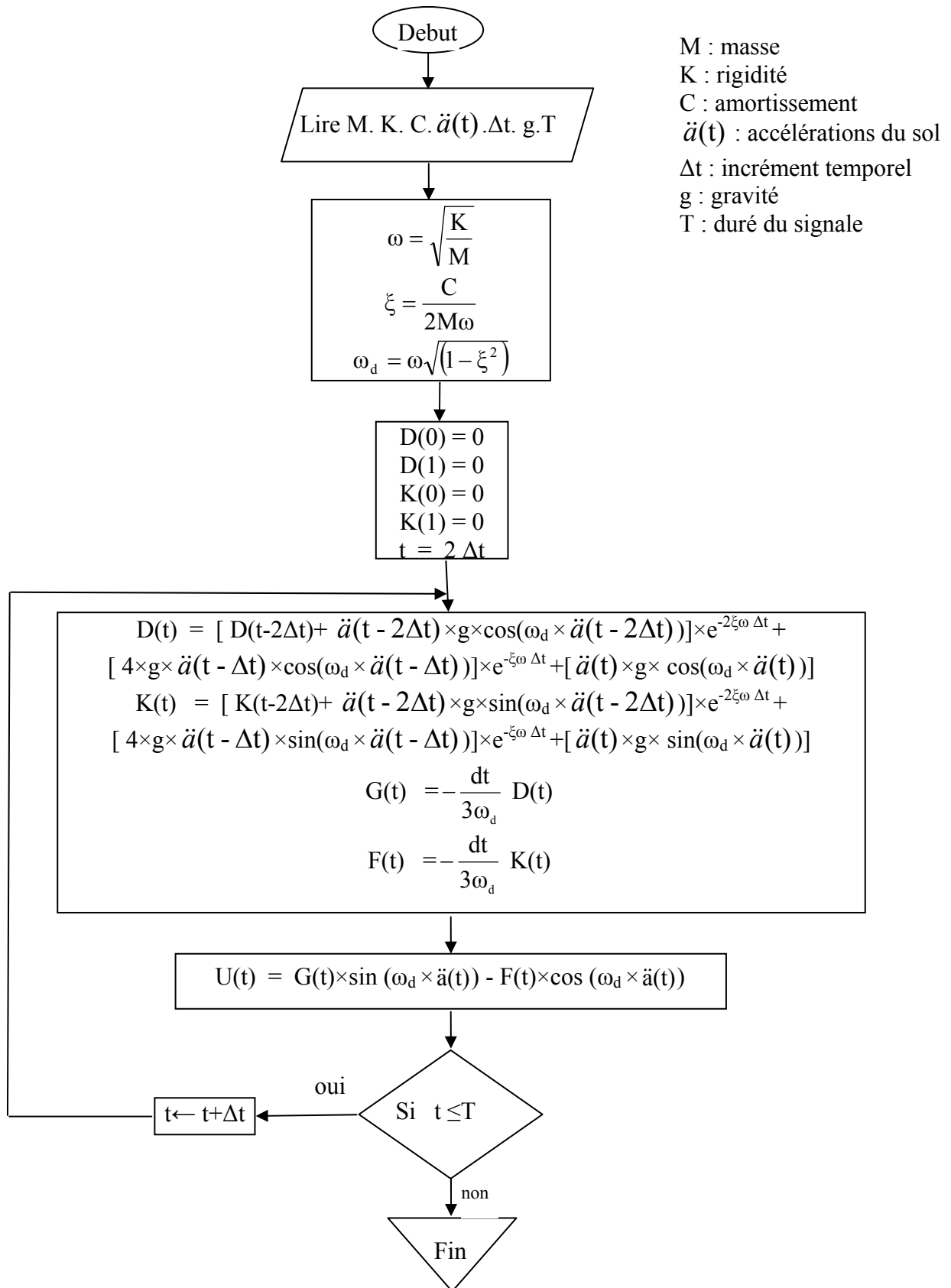


Figure .V. 3: Intégrale de Duhamel pour un système linéaire à un seul degré de liberté.

Les figures suivantes indiquent les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple dont on change les valeurs des paramètres ξ et ω grâce au programme développé en environnement MATLAB dans le cadre de cette recherche et basé sur l'évaluation de l'intégrale de Duhamel.

Donc les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par: $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$; sont :

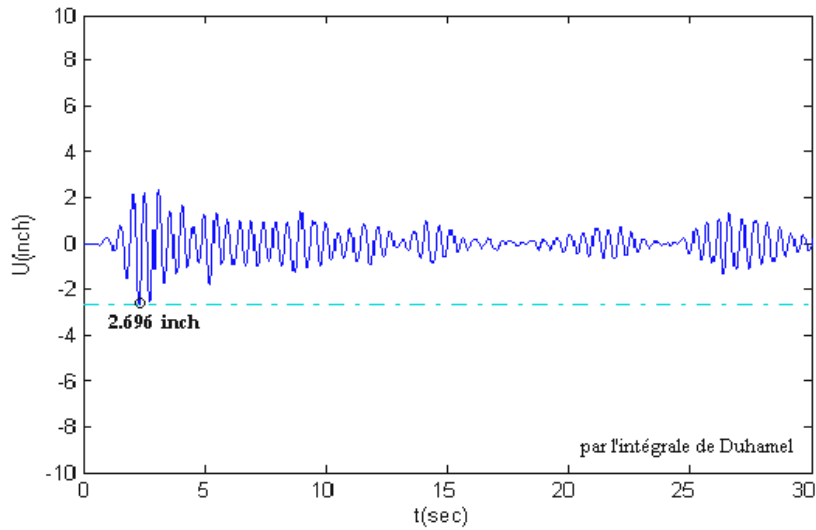


Figure .V. 4: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$.

Ces déplacements relatifs sont comparés aux résultats suivants, donnés par la référence [3].

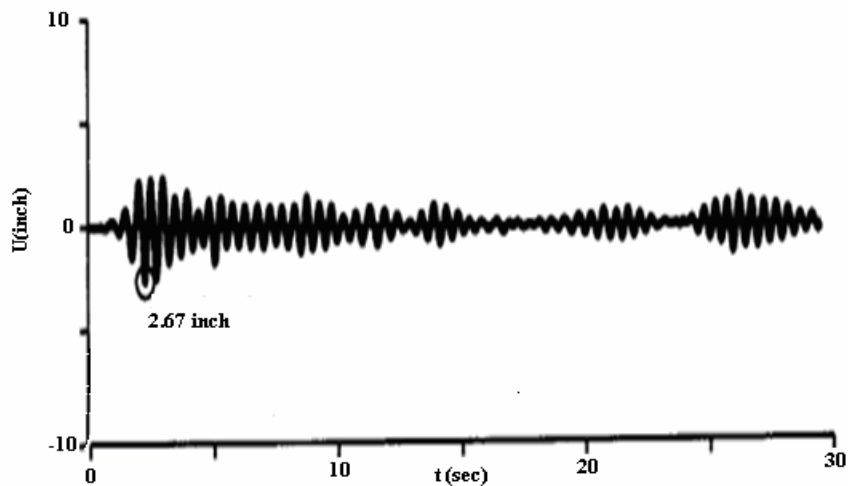


Figure .V. 5: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].

Et de la même façon on a :

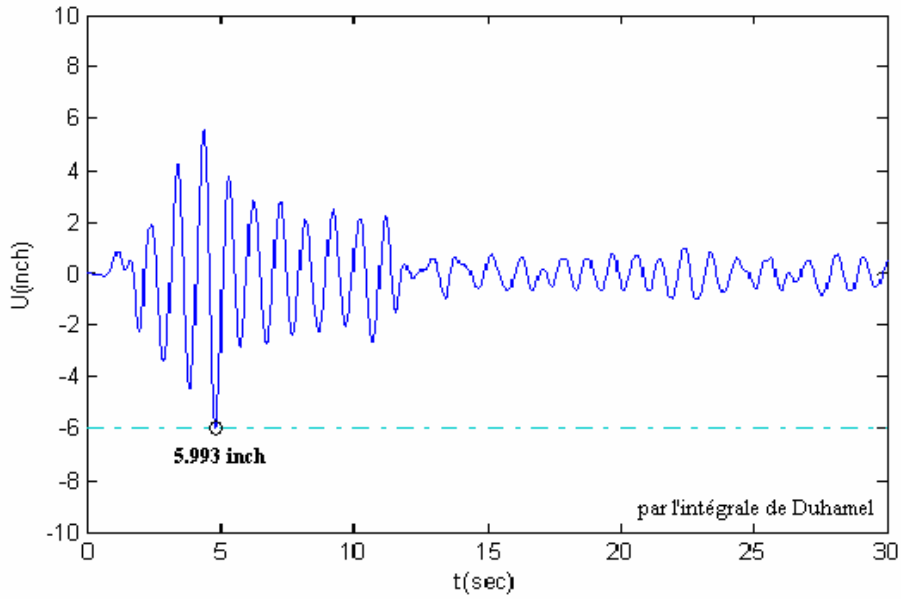


Figure .V. 6: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi =2\%$.

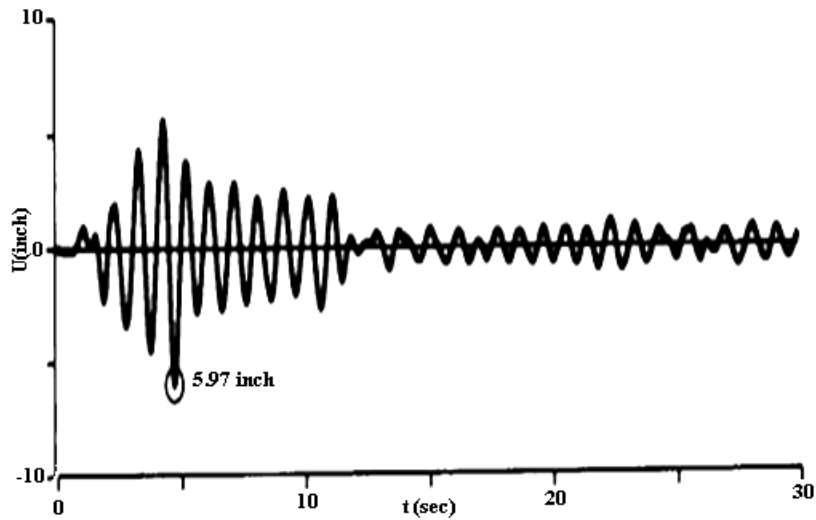


Figure .V. 7: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi =2\%$ [3].

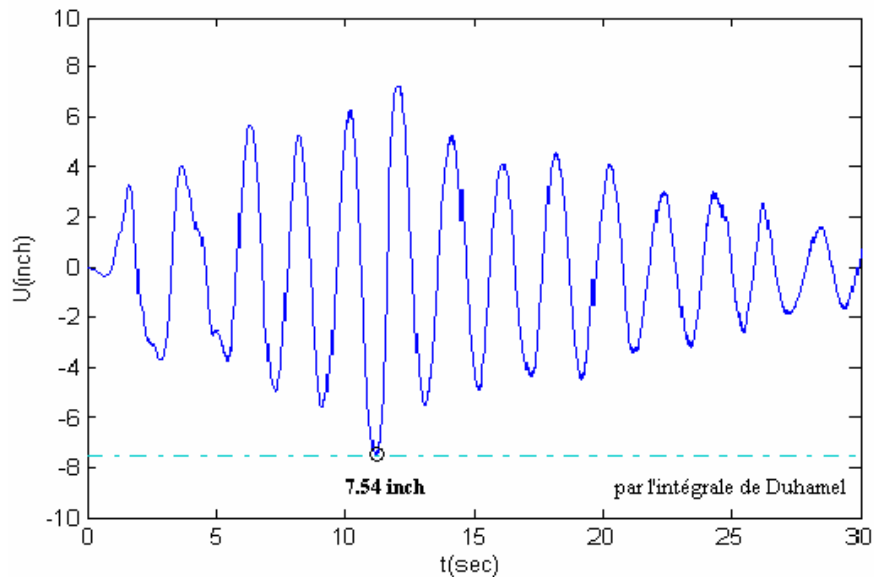


Figure .V. 8: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega = \pi \text{ rad/s}$ et $\xi = 2\%$.

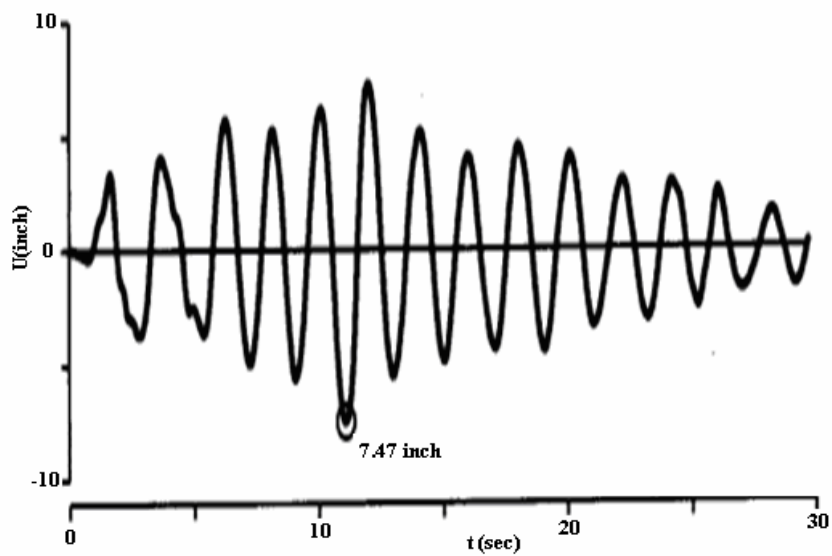
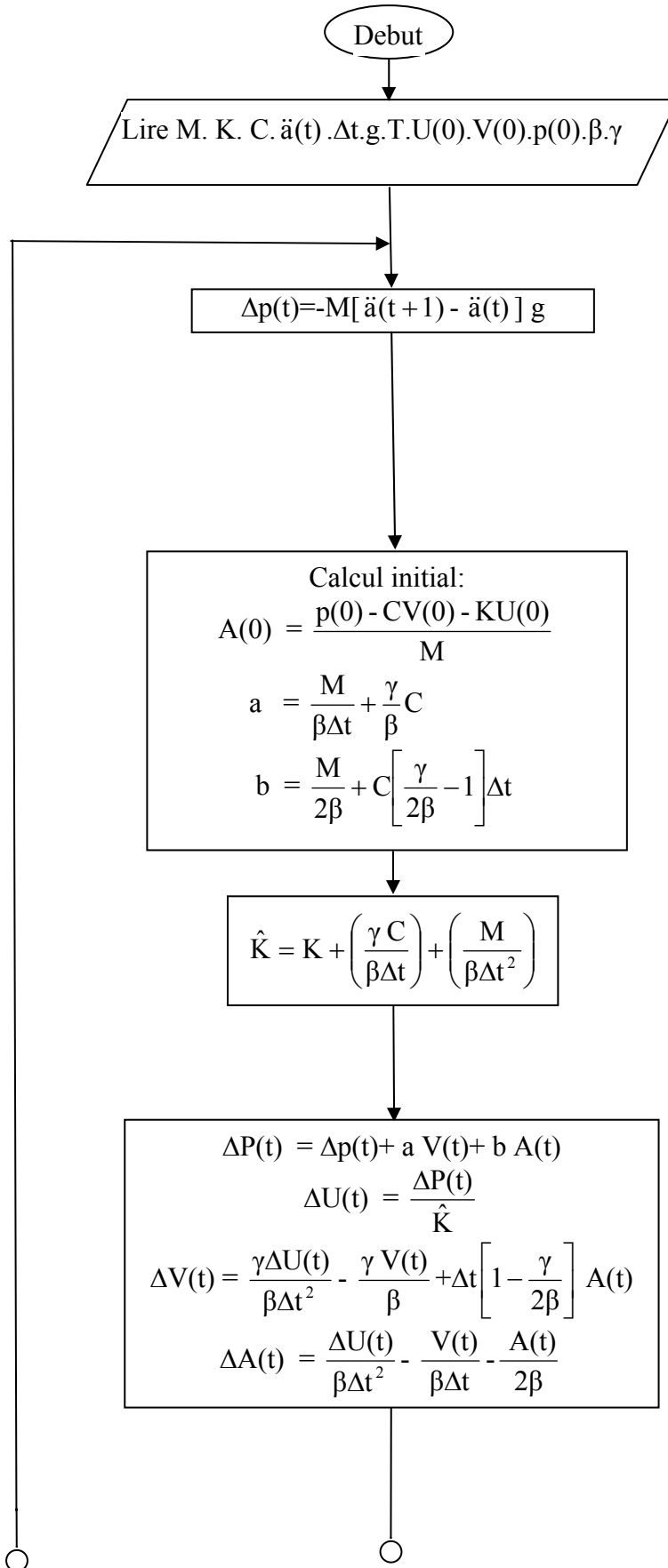


Figure .V. 9: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega = \pi \text{ rad/s}$ et $\xi = 2\%$ [3].

V.2 Réponse d'un oscillateur simple excité par un signal sismique par la méthode de Newmark

Pour le même système à un seul degré de liberté de la figure V.1 mentionné précédemment excité par le signal sismique d'**EL-CENTRO** (18 Mai 1940) composante N-S.

Les figures suivantes représentent les déplacements relatifs au sommet d'un oscillateur simple dont on change les valeurs des paramètres ξ et ω grâce au programme développé en environnement **MATLAB** dans le cadre de cette recherche et basé sur l'évaluation de **Newmark**.



- M : masse
- K : rigidité
- C : amortissement
- ä(t) : accélérations du sol
- Δt : incrément temporel
- g : gravité
- T : duré du signal
- U(0) :déplacement initial
- V(0) : vitesse initiale
- p(0) : force initiale
- β,γ : paramètres de Newmark

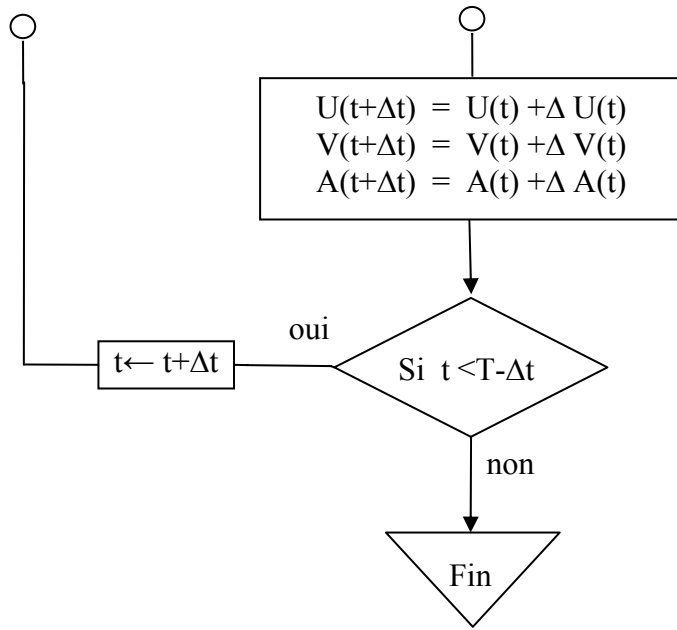


Figure .V. 10: Méthode de Newmark pour un système linéaire à un seul degré de liberté.

Donc les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par: $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$; sont :

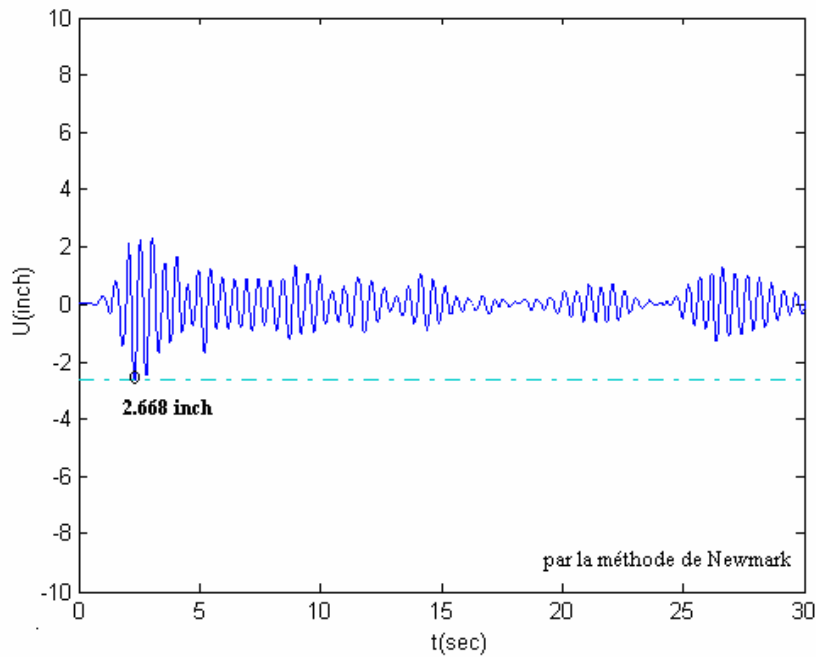


Figure .V. 11: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$.

Ces déplacements relatifs sont et comparés aux résultats donnés par la référence [3].

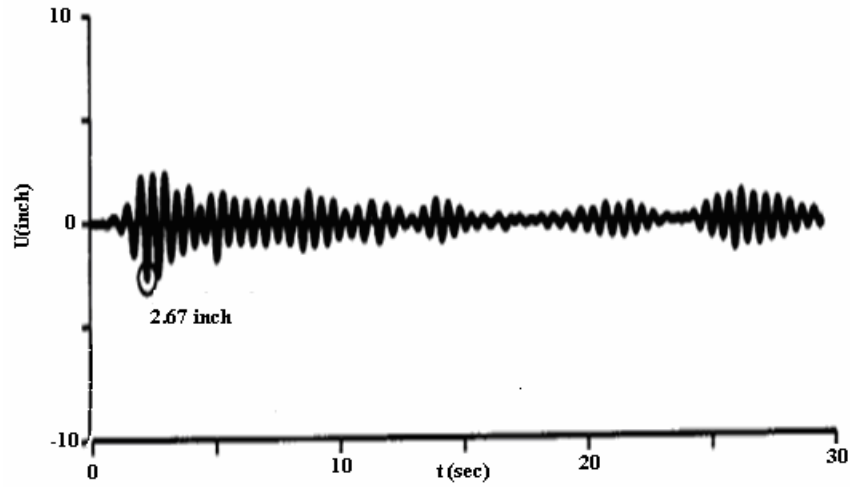


Figure .V. 12: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=4\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].

de la même façon, on a :

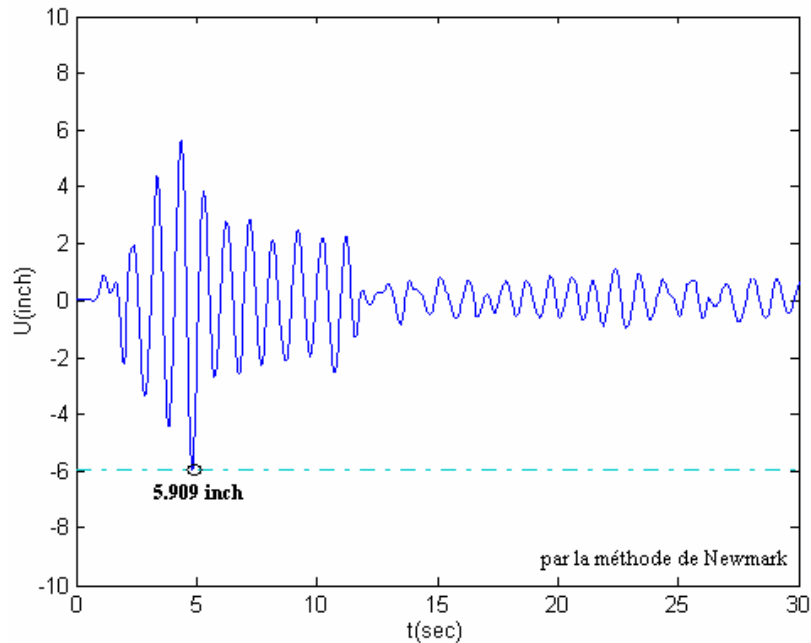


Figure .V. 13: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$.

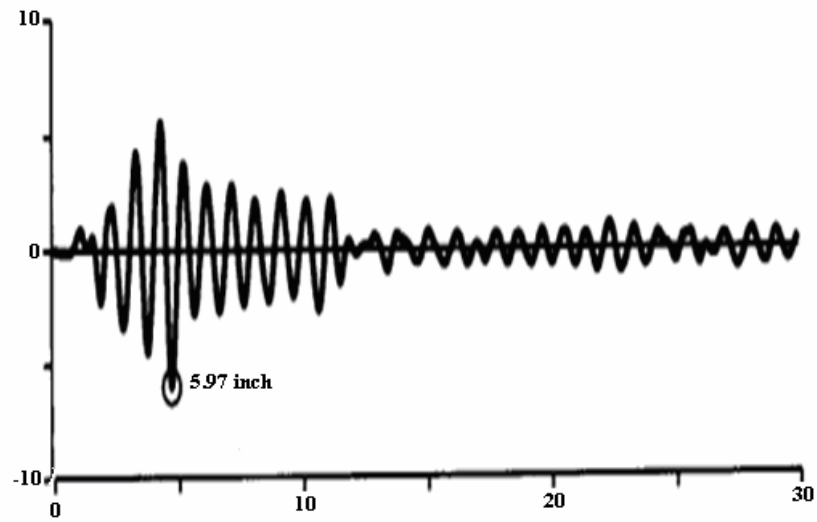


Figure .V. 14: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=2\pi$ rad/s et $\xi=2\%$ [3].

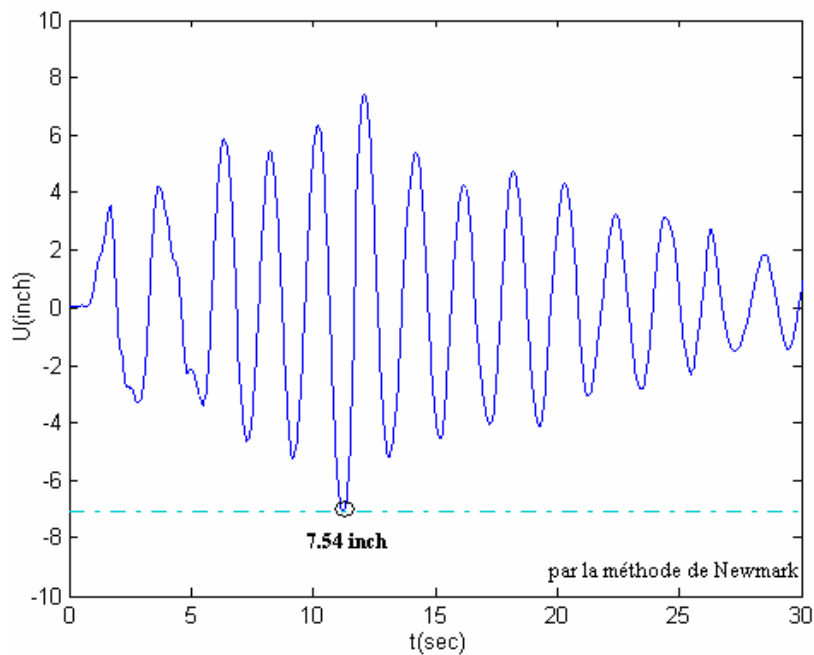


Figure .V. 15: les déplacements relatifs calculés pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=\pi$ rad/s et $\xi=2\%$.

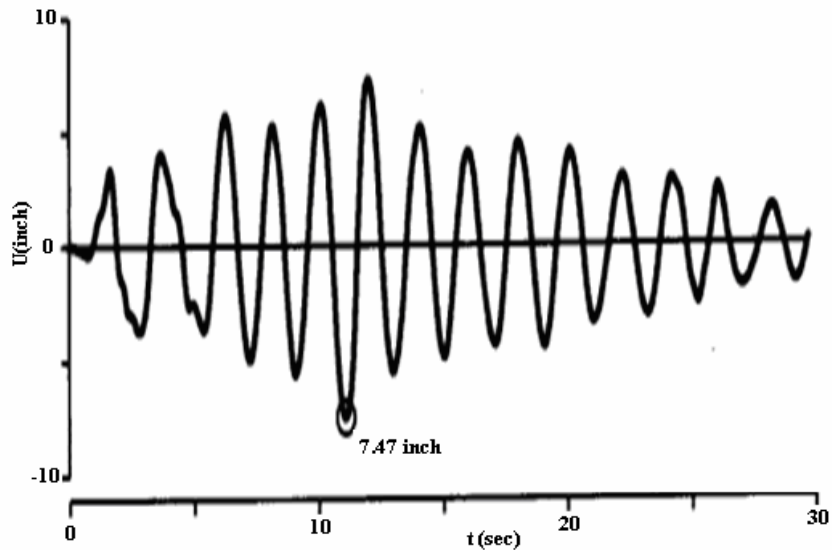


Figure .V. 16: les déplacements relatifs pour le sommet d'un oscillateur simple caractérisé par : $\omega=\pi$ rad/s et $\xi =2\%$ [3].

On voit clairement que deux méthodes différentes (méthode de Newmark et l'intégrale de Duhamel) donnent le même résultat comparé à la référence, c'est ce qui a permis la validation des algorithmes utilisés.

La méthode de Newmark offre des possibilités plus importantes que l'intégrale de Duhamel, puisqu'elle est applicable à des systèmes structuraux à plusieurs degrés de liberté, ainsi que des systèmes non linéaires en la complétant par des termes introduisant la non linéarité.

Le chapitre suivant expose la procédure à adoptée dans une analyse non linéaire d'une console en béton armé sous un chargement sismique.

**CHAPITRE VI : MISE EN APPLICATION ET
VALIDATION DE LA REPONSE D'UN SYSTEME
NON LINEAIRE A UN SEUL DEGRE DE LIBERTE**

VI.1 Réponse d'une console en béton armé sollicitée par un signal sismique bi directionnel

Le système structural traité peut permettre une analyse dynamique de la non linéarité matérielle sans prendre en considération les autres aspects du comportement structural.

Dans cette application, une console en béton armé est sollicitée à sa base par le signal bi directionnel horizontal du Séisme d'EL-CENTRO (enregistrement du **California Institute of Technology**).

Les dimensions et la configuration des armatures longitudinales de la console sont données dans la figure VI.1.

La résistance du béton utilisé est de 6000 psi ($\equiv 41.37$ MPa), et la contrainte d'écoulement (ou d'épuisement) des armatures longitudinales de la console est de 60000 psi ($\equiv 413.7$ MPa).

Pour calculer la réponse dynamique non linéaire du béton armé, il est nécessaire d'avoir un ensemble de règles définissant les changements de la rigidité incrémentale dans tous les niveaux et les directions de la réponse. Le modèle hystérésis de **Takeda** [33] est capable de simuler avec succès la réponse des éléments en béton armé soumis aux moments réversibles autour d'un axe. L'algorithme présenté dans ce chapitre a été développé pour déterminer les changements de la rigidité pour les éléments en béton armé soumis aux moments réversibles autour deux axes orthogonaux.

L'algorithme proposé est basé sur un modèle qui représente la section en béton armé comme un ensemble de ressorts non linéaires. Les propriétés hystérésis des ressorts sont basées sur le comportement observé du béton et de l'acier sous un chargement uni axial. Les ressorts non linéaires uni axiaux représentant ces deux matériaux fonctionnant ensemble procurent à la section ces caractéristiques composites [7]. Les propriétés choisies pour l'hystérésis matérielle ont pour effet le changement de la rigidité incrémentale et de l'amortissement hystérésis.

Dans cette étude, le cas considéré comporte la flexion seulement, en supposant que l'élément n'est pas vulnérable à la rupture par cisaillement, puisque c'est la déformation provoquée par la flexion est plus importante que celle provoquée par le cisaillement.

La console étudiée a une masse volumique de 2.5 tonne/m^3 , l'analyse se fait en utilisant la moitié de sa masse concentrée au sommet de cette console et un facteur d'amortissement visqueux ξ égale à 2%, ainsi qu'une rigidité calculée pour une console encastrée à sa base et libre à son sommet.

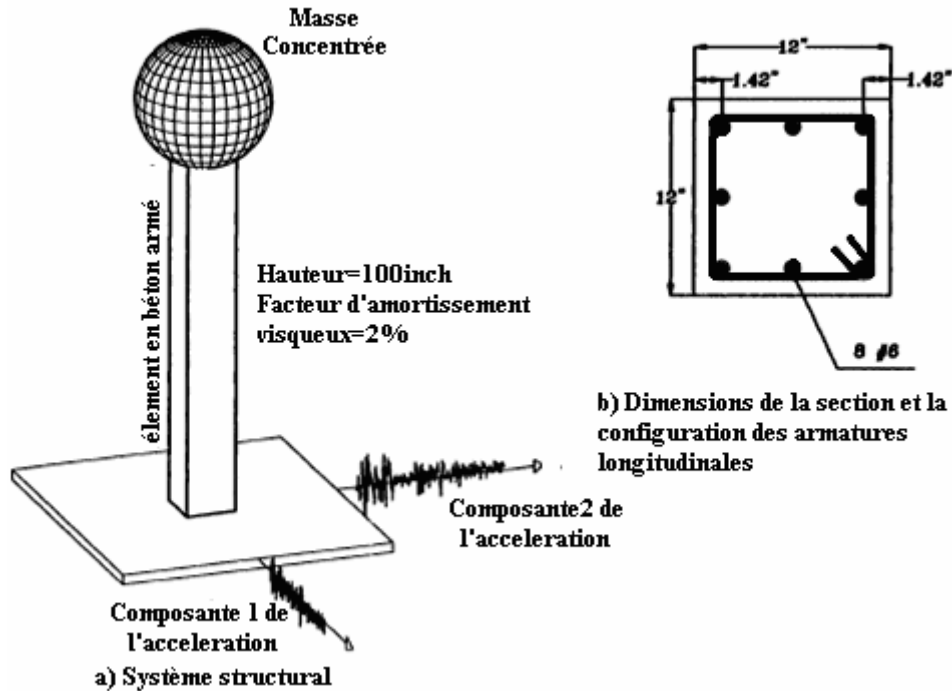


Figure .VI. 1: Système structural et configuration des armatures longitudinales du système.

Caractéristiques du système

$K = 3E I / L^3$, $C = 2 \sqrt{KM} \xi$, $M = \frac{mv \times V}{2}$, $L = 100$ (inch) : hauteur de la console,

$mv = 0.0903$ pound/inch³ = 2.5 t/m³ : masse volumique du béton armé.

$V = 12$ inch \times 12 inch \times 100 inch: volume de la console.

E : module d'élasticité de la section.

(Initialement : $E_c = 57000 \sqrt{f'_c}$ (Ksi) pour le béton, $E_s = 29000$ (Ksi) pour l'acier).

$I = \frac{bh^3}{12}$ (inch⁴) : moment d'inertie de la section $b \times h$ de la console.

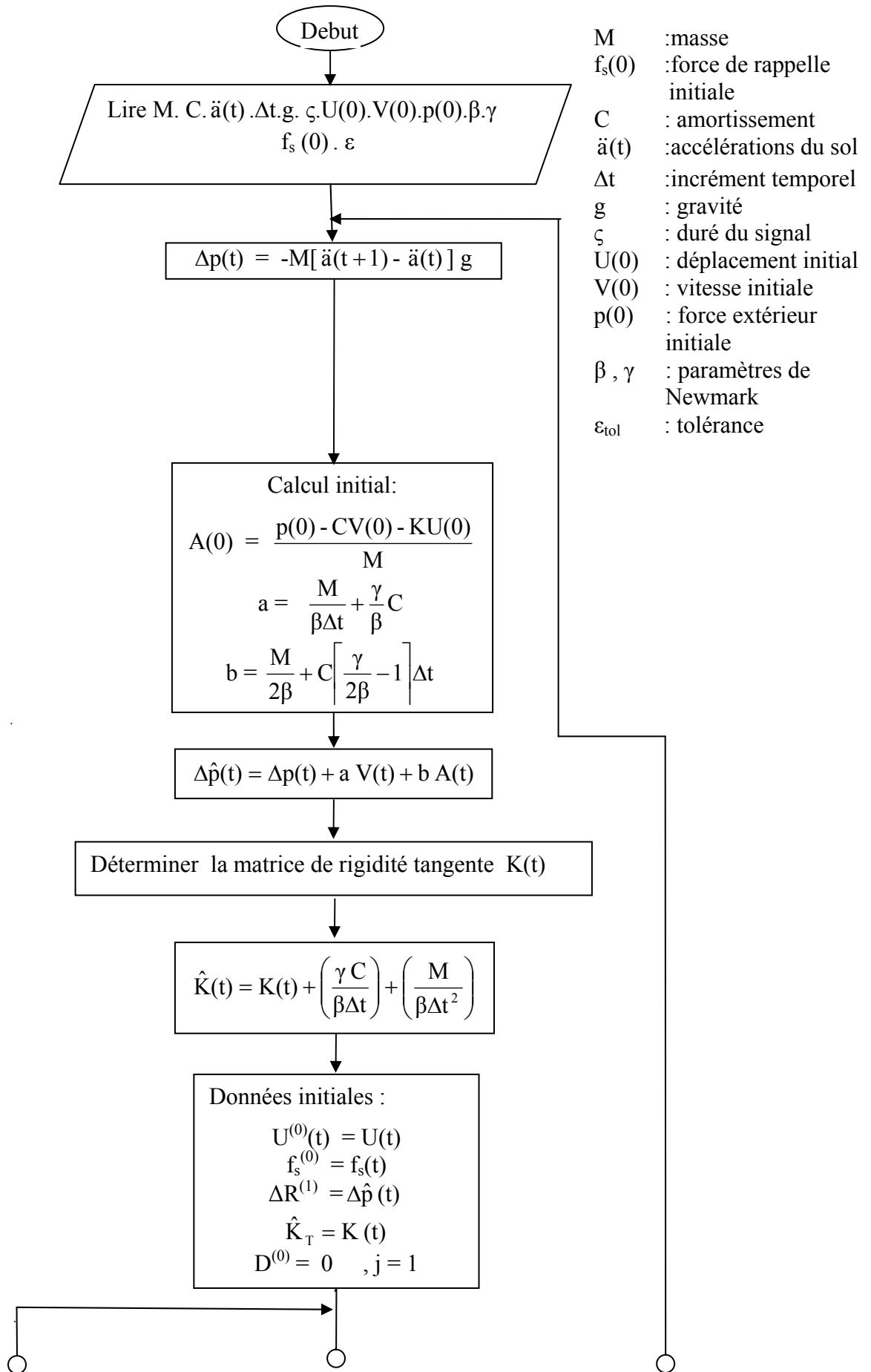
$f'_c = 6000$ (psi) : résistance du béton.

$\sigma_y = 60000$ (psi) : contrainte d'épuisement de l'acier.

(#6 \equiv $\varnothing = 0.75$ inch = 19.05 mm, 1 inch = 2.54 cm, 1 Ksi = 6.895 MPa, 1 psi = 6.895 10⁻³ MPa,

1 pound = 0.4535 Kg).

La réponse de la console est calculée en employant la méthode de Newmark pour un système non linéaire et les résultats donnés par l'algorithme sont testés en utilisant les mesures obtenues par les testes dynamiques.



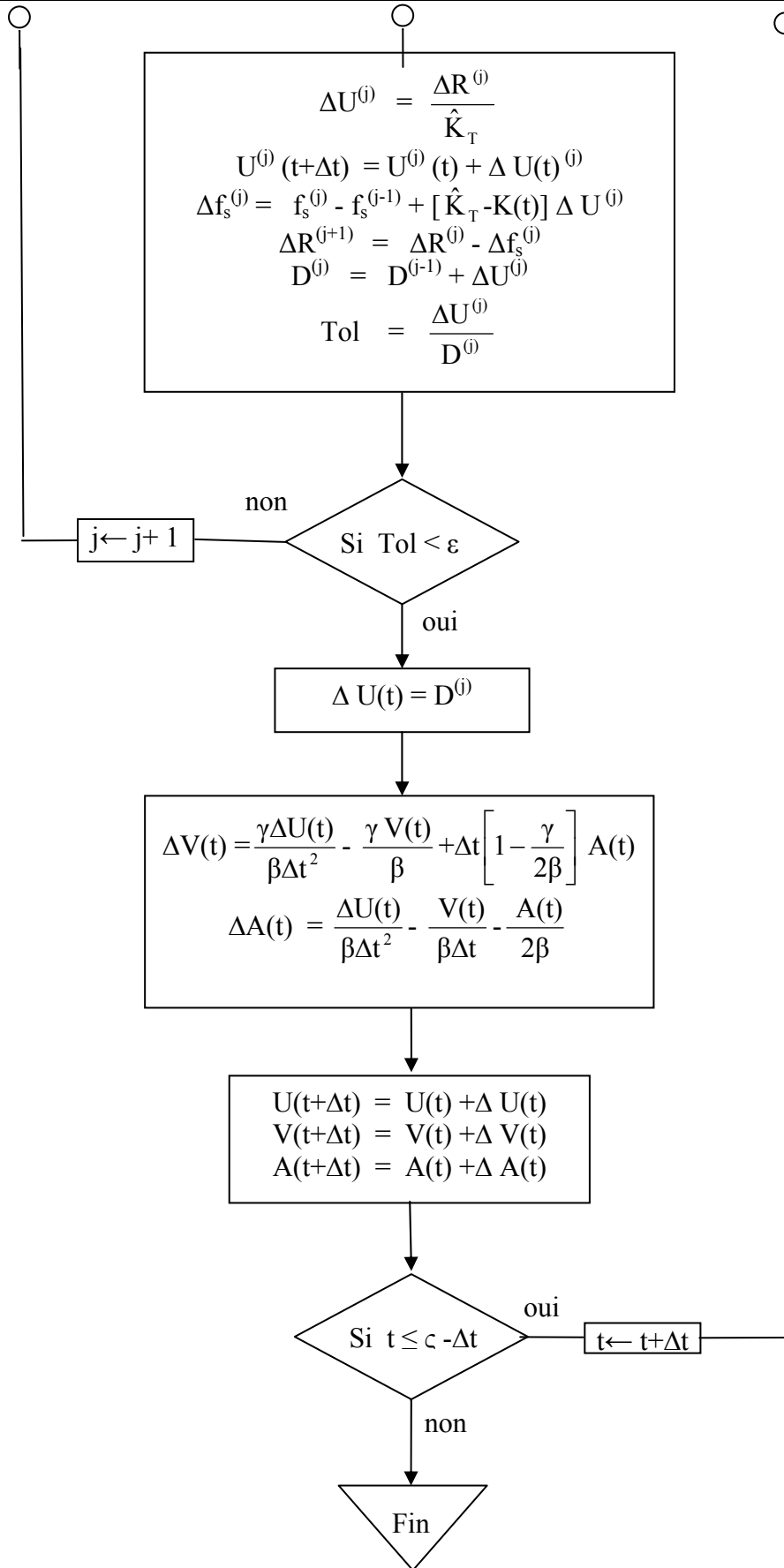


Figure .VI. 2: Méthode de Newmark pour un système non linéaire à un seul degré de liberté.

VI.2 Description d'un modèle pour calculer la réponse cyclique des éléments en béton armé soumis aux forces bi axiales

Un modèle constitutif est une formulation mathématique de la relation contrainte-déformation du matériau pendant le chargement, dans l'espace des contraintes tridimensionnelles.

Le modèle décrit simultanément le rapport avant l'épuisement initial, et après l'épuisement (l'écoulement).

Les relations constitutives des matériaux doivent être dériver des observations expérimentales, ainsi la rigidité matérielle est dérivée des données de contrainte-déformation obtenues des recherches expérimentales. Les expérimentalistes ont enregistré les données après l'exécution de la traction, la compression, le cisaillement pur (torsion), et d'autres essais sur des spécimens des matériaux. Pour des matériaux isotropes, le module de **Young** et le coefficient de **Poisson** sont obtenus à partir des essais unis axiaux de chargement. Les essais de chargement de cisaillement pur fournissent le module de cisaillement.

Des paramètres matériels additionnels sont empiriquement dérivés pour être utilisés dans les relations constitutives qui modélisent le comportement plastique du matériau.

Les relations constitutives indiquent mathématiquement le comportement des matériaux, simultanément dans la zone élastique avant que les efforts dépassent la limite d'élasticité, et dans la zone du travail d'écrouissage «*work hardning*» du matériau après écoulement. Ces relations indiquent la surface initiale d'écoulement (théorie de la ruine), la surface d'écoulement consécutive, tout comme le chargement à l'état d'épuisement produisent la déformation plastique dans le matériau (la règle d'écrouissage «*hardning rules*»), et les incréments des déformations élastiques ou plastiques pour l'incrément d'effort à l'état d'épuisement (règles d'écoulement).

Trois types de modèles sont employés habituellement pour définir la réponse des sections en béton armé soumises aux moments bi axiaux réversibles.

Ils diffèrent dans la manière de définir la réponse bi axiale, comme il est indiqué ci-dessous :

1. Définition de la réponse bi axiale basée sur la réponse flexionnelle uni axiale (**Colina** [10], **Takizawa** et **Aoyama** [35]).
2. Définition implicite du comportement de la section par les règles d'écoulement et de chargement et déchargement (**Chen** et **Powell** [9], **Sfakianakis** et **Fardis** [32], **Ricles** et al [30]).

3. Représentation de la section par un ensemble de ressorts non linéaires distribués uniformément (**Aktan** et al. [2], **Zeris** [39], **Kitajima** et al. [18], **Taucer** et al [36]) ou concentrés dans des endroits spécifiques sur la section (**Suharwardy** et **Pecknold** [34], **Saiidi** et al [31], **Lai** [22], **Jiang et Saiidi** [17]).

Le modèle proposé dans cette étude est classé dans la catégorie du type 3. La conception des composants du modèle est faite de tel sorte que ses éléments devraient être aussi simples qu'ils pourraient l'être. Au début, le béton est modélisé par la parabole de **Ritter** et une prolongation linéaire, semblable au modèle de **Hognestad** [16]. Le tracé du déchargement est défini de sorte à être linéaire avec une pente basée sur les observations de **Karsan** et **Jirsa** [19]. Le chargement utilise le tracé de déchargement. Des études ont indiquées que ceci ne peut pas simuler la réponse observée parce que la fermeture de la fissure n'est pas un phénomène aussi simple comme il est reflété dans l'utilisation du même tracé dans le chargement et le déchargement. Pour répondre à cette demande, la pente du tracé de chargement est modifiée de sorte à tenir compte du fait que la fissure se referme (ou que la contrainte compressive se re-développe) lors d'une déformation inférieure à celle où le retour du tracé croise l'axe des déformations.

L'armature est initialement modélisée comme une courbe bilinéaire avec trois paramètres définissant les pentes initiale et secondaire et la contrainte d'écoulement. Malheureusement, ce modèle est incapable de représenter la dissipation d'énergie lors des faibles amplitudes, C'est pourquoi, cette étude utilise le modèle pour l'acier basé sur l'équation de **Menegotto-Pinto** (**Menegotto** et **Pinto** [25] [38]).

Dans le modèle proposé, la section est remplacée par un ensemble de ressorts non linéaires uniformément distribués (figure. VI.3). Malgré que le modèle choisi coûte plus cher en terme de calcul informatique que le type 1 et 2, c'est une manière commode et flexible pour modéliser le comportement non linéaire du béton armé sous un chargement généralisé. La variété des phénomènes physiques associés au comportement flexionnel des éléments en béton armé peut être facilement définie par ce modèle. L'ouverture et la fermeture des fissures, le ramollissement du béton, l'effet **Bauschinger**, les déformations permanentes des armatures d'acier et la propagation de la région plastique le long de l'élément peuvent être convenablement modélisés. Le modèle est capable de représenter la réduction des boucles hystérésis, l'interaction résistance/rigidité autours des axes orthogonaux des éléments.

Une explication détaillée du procédé numérique utilisé pour le calcul des moments incrémentaux pour des flèches incrémentales données est proposée dans ce qui suit :

VI.3 Calcul des moments incrémentaux pour des flèches incrémentales données

Cette section décrit la procédure employée pour calculer les moments incrémentaux dans une console en béton armé pour des flèches incrémentales données à son extrémité libre. Le calcul du moment incrémental pour une flèche incrémentale donnée n'est pas une procédure simple. Le caractère non linéaire et le tracé du chargement dépend des règles hystérésis supposées pour les matériaux nécessite un procédé itératif.

La flèche de la console en béton armé est formée de trois composantes : des flèches attribuées à la flexion, au cisaillement et au glissement d'armatures (perte d'adhérence).

VI.3.1. Calcul de la composante de la flèche due à la flexion

La flèche due à la flexion est déterminée en utilisant la distribution de la courbure le long de la console montrée dans la figure VI.4.a. La corrélation entre le moment et la courbure à l'endroit de la section du moment maximum m_2 et Φ_2 , est donnée par l'algorithme hystérésis. Si m_2 est plus grand que le moment d'épuisement, la localisation de l'endroit du moment d'épuisement, m_1 le long de la console est déterminée directement à partir de la statique. La courbure Φ_1 est la courbure d'épuisement (figure VI.4.c). Si m_2 augmente, la position de m_1 se déplace vers l'extrémité libre de la console. La courbure dans la section où m_1 se produit est la courbure d'épuisement. Si m_2 diminue (après avoir excédé le moment d'épuisement), la "région d'épuisement"; distance entre les points où sont situés les moments m_1 et m_2 (figure VI.4.a), n'est pas réduite mais la courbure diminue proportionnellement. Si le moment m_1 est réduit en un niveau qui correspond à la région du premier contact (figure VI.4.d) le taux de réduction dépend de niveau du contact. Le sommaire représentatif de la distribution supposée de la courbure est donné dans la figure VI.5 pour différentes étapes du chargement.

VI.3.2. Calcul de la composante de la flèche due au cisaillement

La contribution maximale calculée de la flèche due au cisaillement dans la flèche totale calculée est de 0.35% du total. La flèche due au cisaillement est basée sur un élément linéaire en béton armé non fissuré. Avec cette hypothèse, la flèche due au cisaillement de l'extrémité libre d'une console de section rectangulaire est [7]:

$$\Delta_{\text{shear}} = \frac{6VL}{5GA} \quad (6-1)$$

où,

Δ_{shear} : la flèche due au cisaillement.

V : la Force de cisaillement à l'extrémité.

L : la longueur de l'élément.

A : la section transversale de l'élément.

G : le module de cisaillement.
$$G = \frac{E_c}{2(1+\nu)} \quad (6-2)$$

E_c : le module de Young pour le béton.

ν : Coefficient de Poisson supposé être égal à 1/6.

VI.3.3. Calcul de la composante de la flèche associée au glissement des armatures

Le glissement des barres d'armatures est estimé en supposant un développement de longueur constante (basé sur les expériences faites par **Dragovich** [12], 50 fois le diamètre des barres pour les éléments couplés et 40 fois pour les éléments dé-couplés) et une diminution linéaire de la déformation de la barre du côté de l'appui, jusqu'à la fin de la longueur définie pour le développement (figure VI.6). Le glissement est calculé pour la barre d'armature qui a la déformation la plus importante dans la section.

Le glissement est calculé et converti en rotation en utilisant la distance entre la barre et l'axe neutre (figure VI.6). Alors la flèche de l'extrémité libre de la console est calculée en multipliant la rotation due au glissement par la longueur de l'élément.

VI.4 Procédure de calcul des moments incrémentaux pour des flèches incrémentales données

Dans le procédé pas à pas de calcul de l'historique force-déplacement, les paramètres suivants sont obtenus à partir de l'étape précédente et sont actualisés après atteinte de la convergence dans chaque étape :

- Les courbures (rotations) Φ_y et Φ_z autour des axes Y et Z (figure VI.7).
- Les moments M_y et M_z selon les axes Y et Z.
- La longueur de la "région d'épuisement", d_{yr} .
- Les déplacements d_y et d_z suivant les axes Y et Z.

Étape 1 : faire la première hypothèse pour les courbures incrémentales en utilisant la relation entre déplacement incrémental et la courbure pour un élément élastique linéaire.

$$\Delta\Phi_y = \frac{3\Delta d_z}{L^2} \quad , \quad \Delta\Phi_z = \frac{3\Delta d_y}{L^2} \quad (6-3)$$

où :

Δd_y et Δd_z sont les flèches incrémentales données pour l'extrémité libre de l'élément le long des axes Y et Z.

$\Delta\Phi_y$ et $\Delta\Phi_z$ sont les premières valeurs supposées pour les courbures incrémentales.

Etape 2 : Calculer la direction de la courbure en utilisant les valeurs actualisées de la courbure avec les courbures incrémentales supposées. La direction de la flèche est différente de 90 degrés par rapport à la direction de la courbure (figure VI.7).

Etape 3 : Calculer le moment incrémental de la section en utilisant l'équilibre axial des contraintes.

La procédure pour calculer les moments incrémentaux est présentée dans la section. VI.4.

Etape 4 : Calculer la nouvelle longueur de la "région d'épuisement" de l'élément en utilisant les moments incrémentaux calculés dans l'étape 3. Si la nouvelle longueur est plus grande que la longueur courante, la longueur est actualisée avec la nouvelle valeur, autrement on maintient l'ancienne valeur. La longueur de la "région d'épuisement" est calculée en utilisant le moment incrémental le plus récent atteint ainsi que le moment d'épuisement dans la direction du moment courant.

$$M_{\text{calc}} = \sqrt{(M_y + \Delta M_y)^2 + (M_z + \Delta M_z)^2} \quad (6-4)$$

$$d_{\text{yr}} = \frac{(M_{\text{calc}} - M_{y\theta})}{\left(\frac{M_{\text{calc}}}{L}\right)} \quad (6-5)$$

où :

M_{calc} : amplitude du vecteur de moment calculé.

d_{yr} : longueur de la " région d'épuisement".

$M_{y\theta}$: moment d'épuisement dans la direction courante.

L : longueur de l'élément.

Le moment d'épuisement dans la direction courante est calculé en assignant la déformation d'épuisement à la barre la plus lointaine de l'axe neutre (figure VI.8). Après l'obtention de la longueur de la " région d'épuisement", elle est décomposée le long des axes Y et Z en l_y et l_z .

Etape 5 : Calculer les moments à la fin de la "région d'épuisement", M_{y1} et M_{z1} (figure.VI .9).

Etape 6 : Employer les relations moment-courbure simplifiées (figureVI.10) et les valeurs de moment obtenues dans l'étape 5, pour calculer les courbures à l'extrémité de la "région d'épuisement " Φ_{y1} et Φ_{z1} .

Etape 7 : Utiliser la distribution des courbures obtenues (figureVI.4c), pour calculer la flèche due à la flexion.

Etape 8 : Calculer la flèche due au glissement des barres en utilisant la procédure mentionnée dans la section VI.2.3.

Etape 9 : Calculer la flèche due au cisaillement en utilisant la procédure mentionnée dans la section VI.2.2.

Etape 10 : Ajouter les composantes de la flèche calculées dans les étapes 7, 8 et 9 pour déterminer la flèche totale. La flèche incrémentale est la différence entre la flèche calculée et la flèche début de l'incrément

$$(\Delta d_y)_{\text{calc}} = (d_y)_{\text{calc}} - d_y \quad (6-6)$$

$$(\Delta d_z)_{\text{calc}} = (d_z)_{\text{calc}} - d_z \quad (6-7)$$

où :

$(\Delta d_y)_{\text{calc}}$: flèche incrémentale calculée le long de l'axe Y.

$(\Delta d_z)_{\text{calc}}$: flèche incrémentale calculée le long de l'axe Z.

$(d_y)_{\text{calc}}$: flèche calculée le long de l'axe Y.

$(d_z)_{\text{calc}}$: flèche calculée le long de l'axe Z.

Si les flèches incrémentales calculées sont dans la limite de la convergence d'une flèche incrémentale donnée, les courbures supposées et les moments calculés sont les valeurs recherchées. Autrement, il faut calculer de nouvelles courbures incrémentales en employant la formulation suivante :

$$\left(\Delta\Phi_y\right)_{\text{new}} = \frac{\Delta d_z}{\left(\Delta d_z\right)_{\text{calc}}} \Delta\Phi_y \quad \text{et} \quad \left(\Delta\Phi_z\right)_{\text{new}} = \frac{\Delta d_y}{\left(\Delta d_y\right)_{\text{calc}}} \Delta\Phi_z \quad (6-8)$$

Répéter les étapes 2-10 jusqu'à ce qu'une convergence acceptable soit atteinte. Cette procédure exige une série d'itérations sur des courbures incrémentales supposées pour arriver à des déplacements incrémentaux. On suppose que la convergence est achevée si la flèche incrémentale calculée est moins de 0.001 inch de la flèche incrémentale. Pour les incréments de temps utilisés, la valeur idéale dans le domaine non linéaire est 0.09 sec. La distribution de la courbure le long de la console est donnée en fonction de la courbure supposée. Lors des itérations successives, la courbure change et sa distribution peut également changer. Il est à noter que la procédure numérique décrite ci-dessus donne des résultats indépendants de la taille de l'étape. Cependant, le nombre d'itérations requises pour prévoir des courbures correctes et la hauteur de l'axe neutre pour satisfaire l'équilibre axial des contraintes augmentent avec une plus grande taille pour l'étape.

VI.5 Calcul de la relation moment-courbure

Cette section donne les détails de la procédure numérique utilisée pour calculer les relations bi-axiales moment-courbure pour les sections en béton armé. La section transversale est discrétisée en sous domaines ou fibres (figure VI.3), chacun d'eux a une coordonnée et une

surface spécifiques. La procédure pour calculer les déformations relatives à la section transversale est adoptée par **Dragovich** [12].

En supposant une variation linéaire de la déformation à travers la section transversale, la déformation au centre d'une fibre donnée est liée à la position et à l'inclinaison de l'axe neutre (figure VI.11).

La distance la plus courte entre la fibre qui a une inclinaison Θ et l'axe neutre, est $|\vec{D}| + D_0$.

La ligne alpha traverse le centre de la section et elle est parallèle à l'axe neutre. Le vecteur unité $\vec{\alpha}$ est obtenu par la rotation du vecteur unité de l'axe des X, de Θ degrés dans le sens contraire des aiguilles d'une montre.

Le vecteur \vec{D} est calculé à partir de :

$$\vec{D} = \vec{R} - \vec{P} \quad (6-9)$$

\vec{R} Est connu, mais \vec{D} ne l'est pas, \vec{P} est la projection de \vec{R} sur la ligne α , défini par :

$$\{P\} = [Q]\{R\} \quad (6-10)$$

où :

$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_x \\ P_y \end{Bmatrix}$: sont les composantes de \vec{P} le long des axes X et Y.

$\{R\} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \end{Bmatrix}$: sont les composantes de \vec{R} le long des axes X et Y.

$[Q]$: est la matrice de projection $[Q] = \{\alpha\}\{\alpha\}^T$

Le vecteur unité $\vec{\alpha} = \begin{Bmatrix} a_x \\ a_y \end{Bmatrix}$ est le vecteur de **Strang**,(1986).

La combinaison des équations 6-9 et 6-10 donne :

$$\{D\} = \begin{Bmatrix} r_x(1-a_x^2) - r_y a_x a_y \\ r_y(1-a_y^2) - r_x a_x a_y \end{Bmatrix} \quad (6-11)$$

La partie comprimée de la section peut être déterminée par une rotation de 90° dans le sens contraire des aiguilles d'une montre du vecteur unité α , comme montré dans la figure VI.11. Le signe de $\|\vec{D}\|$ est déterminé à partir du signe de la composante selon l'axe des Z du produit vectoriel $\vec{\alpha} * \vec{D}$, qui est positif pour les éléments du côté comprimé de la ligne α et négatif pour éléments du côté de la traction.

En regroupant toutes les définitions données ci-dessus, la déformation ε d'un point de la section transversale est :

$$\varepsilon(x, y) = \phi \left(\text{sgn}(a_x d_y - a_y d_x) \left\| \bar{D} \right\| - D_0 \right) \quad (6-12)$$

Où :

d_x, d_y : sont les composantes de D selon x et y .

$\text{sgn}(\)$: la fonction signum, définie comme étant égale à -1, 0, 1 pour les valeurs qui sont négatives, nulles et positives.

Après avoir calculé les déformations aux centres des surfaces des fibres, les contraintes correspondantes à ces déformations peuvent être calculées en utilisant les valeurs des déformations et les paramètres de l'histoire du chargement, qui sont préservés séparément dans la mémoire de chaque matériau hystérésis uni axial. En raison des caractéristiques dépendantes du tracé de l'hystérésis matérielle, l'analyse doit être fait d'une façon incrémentale.

L'inconnu D_0 (figure VI.11) peut être défini, si la position de l'axe neutre est connue.

A cause de l'équilibre normal des contraintes, il n'y aura qu'une position unique de l'axe neutre pour une courbure donnée et les paramètres de l'histoire du chargement. Les contraintes normales et les moments dans la section peuvent être exprimés comme suit :

$$P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sigma_{ij} A_{ij} \quad (6-13)$$

$$M_x = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(-\sigma_{ij} A_{ij} y_{ij} + (E_t)_{ij} (I_x)_{ij} \phi_x \right) \quad (6-14)$$

$$M_y = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\sigma_{ij} A_{ij} x_{ij} + (E_t)_{ij} (I_y)_{ij} \phi_y \right) \quad (6-15)$$

Où :

σ_{ij} : contrainte du sous domaine.

x_{ij}, y_{ij} : composantes du centre de la surface du sous domaine.

A_{ij} : surface du sous domaine.

$(E_t)_{ij}$: module tangentiel du sous domaine.

ϕ_x, ϕ_y : composantes de la courbure.

$(I_x)_{ij}, (I_y)_{ij}$: Deuxième moment des sections des sous domaines.

Les moments de la section sont calculés pour des paramètres donnés de l'histoire du chargement, ainsi que la courbure et la condition stipulant que les efforts normaux doivent intégrer le zéro. Le moment peut être calculé à partir des équations 6-14, 6-15 et de l'algorithme du matériau hystérésis si la position de l'axe neutre est connue. Les conditions limites des contraintes normales fournissent les conditions nécessaires pour déterminer la profondeur de l'axe neutre. Mais, dans sa forme courante, l'équation des contraintes normales (équation 6-13) n'est pas

directement liée aux paramètres donnés. Une fonction reliant la résultante des efforts normaux aux paramètres donnés doit être définie. La variation dans les efforts normaux peut être liée à la variation des déformations au centre de la section selon l'équation suivante :

$$\Delta P = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (E_t)_{ij} d\varepsilon_0 A_{ij} \quad (6-16)$$

où :

$d\varepsilon_0$: variation dans la déformation au centre de la surface de la section.

ΔP : variation dans l'effort normal due à la variation $d\varepsilon_0$ de la déformation au centre de la surface de la section.

Cette équation peut être réécrite comme suit :

$$d\varepsilon_0 = \frac{\Delta P}{K_{TP}} \quad (6-17)$$

où :

$K_{TP} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (E_t)_{ij} A_{ij}$ est la rigidité tangente de la section transversale des efforts normaux.

La déformation au centre de surface de section est liée à la profondeur de l'axe neutre et à la courbure (figure VI.12).

$$\varepsilon_0 = D_{NA} * \phi \quad (6-18)$$

La variation de la déformation au centre de surface de section est liée à la variation de la profondeur de l'axe neutre et la courbure (figure VI.12),

$$d\varepsilon_0 = \Delta D_{NA} * \phi \quad (6-19)$$

Où : ε_0 : déformation au centre de la surface de la section.

$d\varepsilon_0$: variation de la déformation au centre de la surface de la section.

D_{NA} : profondeur de l'axe neutre.

ΔD_{NA} : variation dans la profondeur de l'axe neutre.

ϕ : courbure.

La combinaison des équations 6-17 et 6-19 donne :

$$\Delta P = (K_{TP})(\Delta D_{NA})\phi \quad (6-20)$$

L'équation 6-14 fournit la formulation explicite requise pour les itérations décrites ci-dessous :

1. Utiliser la profondeur de l'axe neutre de l'étape précédente et de la nouvelle courbure, pour calculer les efforts normaux de la section. La différence entre la résultante des efforts normaux calculée P et la résultante des efforts normaux donnée, est la charge incrémentale axiale ΔP .

2. Calculer la variation de la profondeur de l'axe neutre en utilisant l'équation 6-20.
3. Calculer les nouvelles valeurs de ΔP et de P pour le nouveau axe neutre.
4. Si ΔP de l'étape 3 est du même signe que celui dans l'étape 1, il faut répéter les étapes 2 à 4 jusqu'à ce que la valeur absolue de ΔP soit petite devant la tolérance permise dans la charge axiale. Si ΔP dans l'étape 3 change de signe, Il faudra employer la méthode de bisection pour trouver la racine.

Le procédé expliqué ci-dessus pour trouver la position de l'axe neutre est adopté par **Suharwardy** et **Pecknold** [34]. Sa convergence est très rapide. Cependant, elle est incertaine. Afin de surmonter ce problème, un nombre limité de tests est faits avec l'algorithme donné ci-après. Si la convergence n'est pas atteinte dans ces tests, une autre procédure itérative (la méthode de **brent**, **press** et al [29]) est utilisée, elle garantie la convergence dans un domaine incluant la racine désirée.

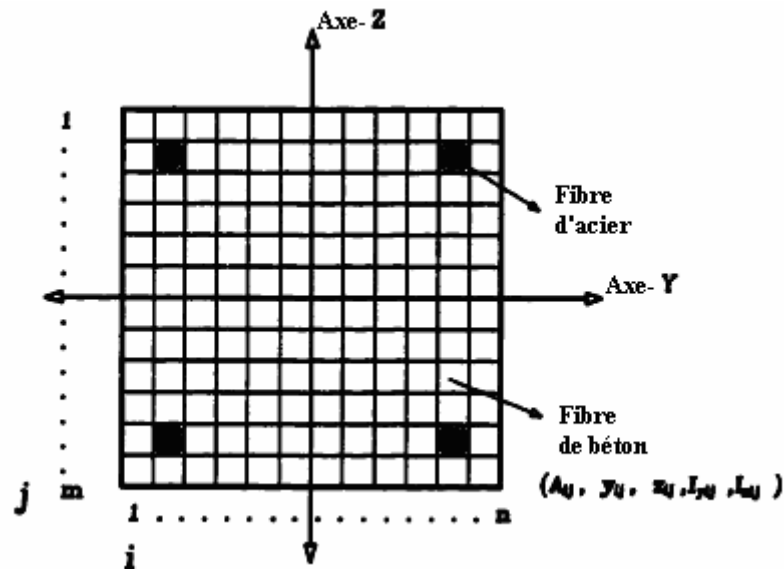
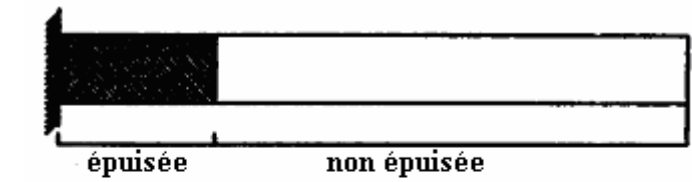
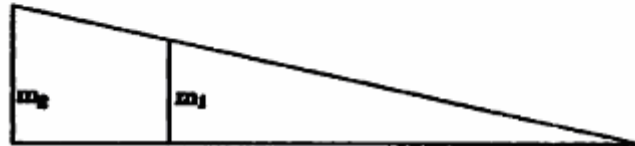


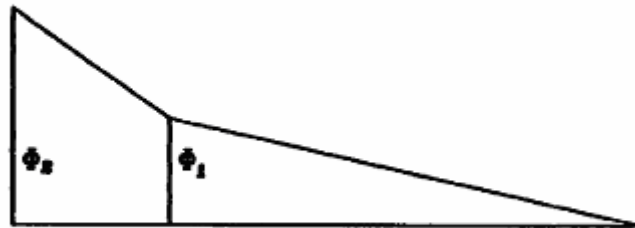
Figure .VI. 3: Représentation de la section rectangulaire comme un ensemble de fibres en acier et en béton [7].



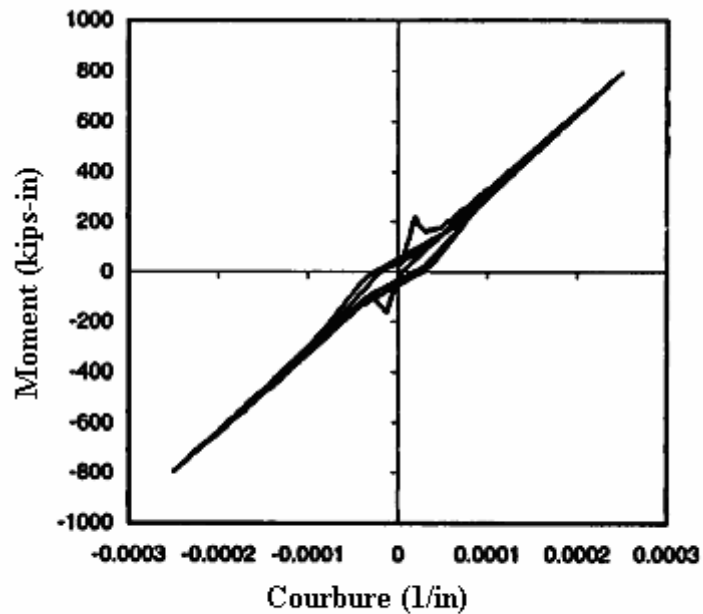
a) Les sections



b) Le diagramme des moments



c) Le diagramme des courbures



d) Réponse représentative Moment-Courbure pour le modèle proposé pour les faibles cycles

Figure .VI. 4: Les sections dans la colonne et la distribution supposée des courbures [7]

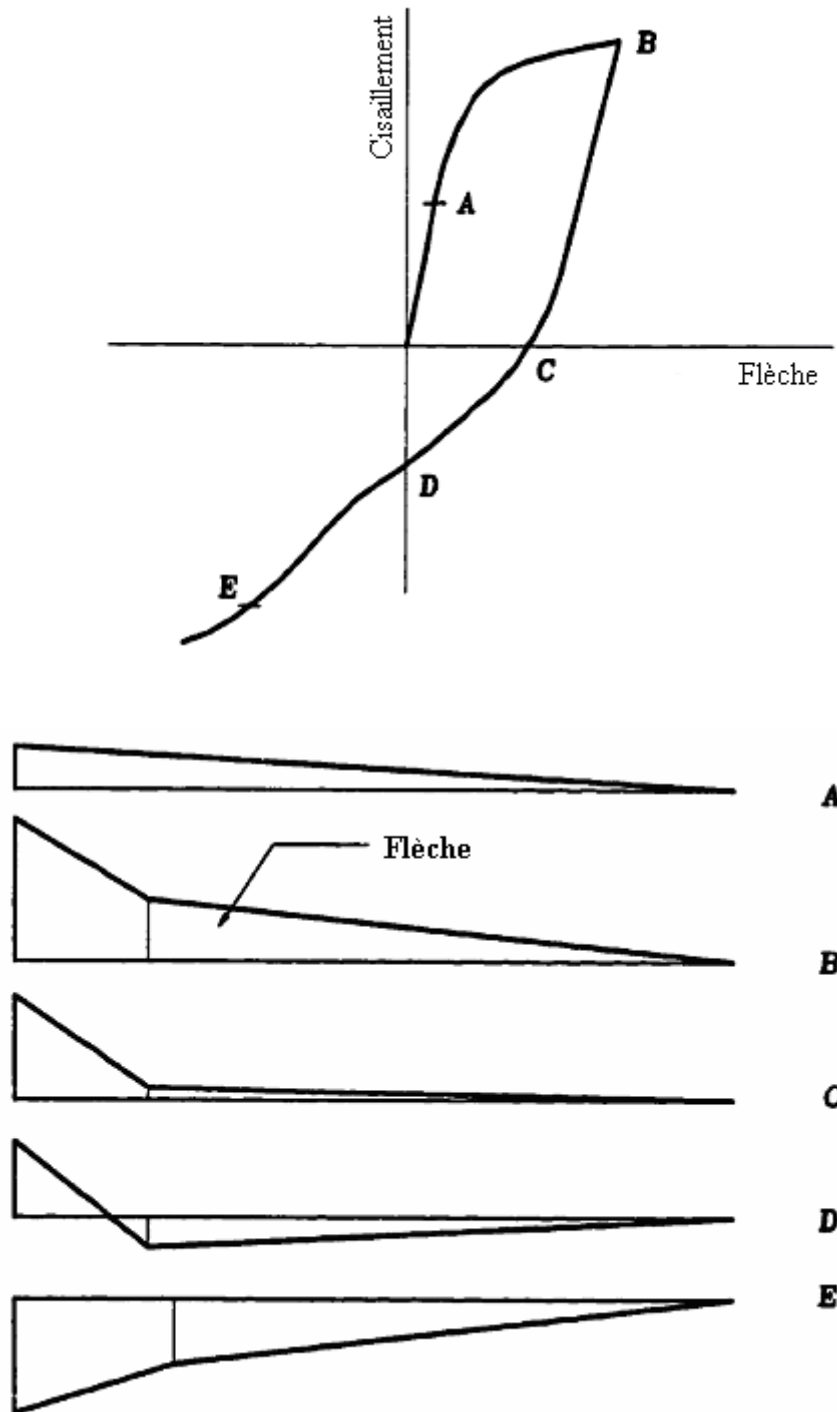


Figure .VI. 5: Sommaire représentatif de la distribution supposée des courbures à différents niveaux du chargement [7].

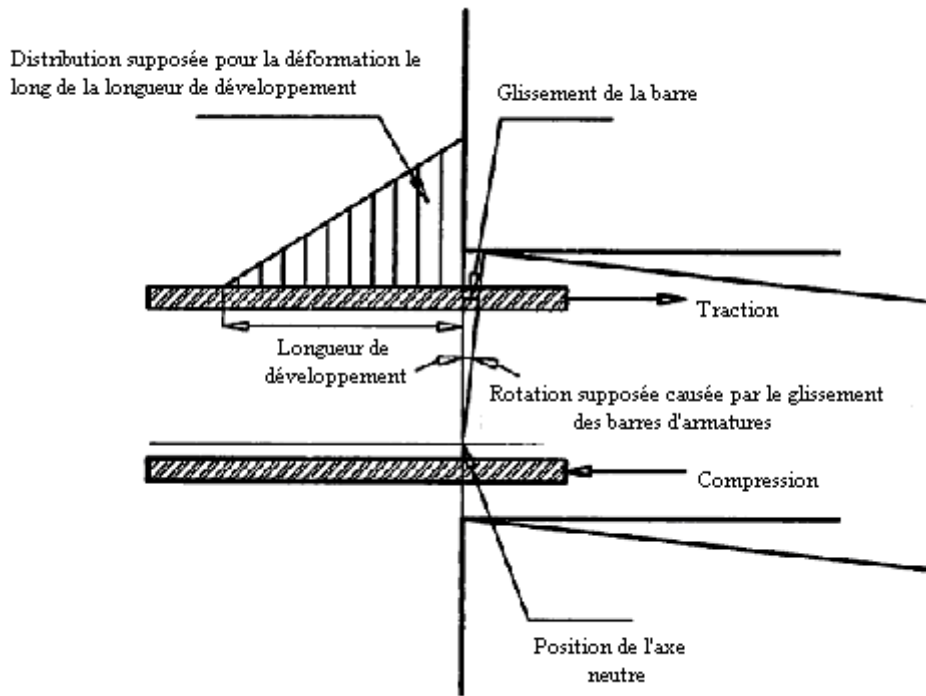


Figure .VI. 6: Glissement des barres d'armatures [7].

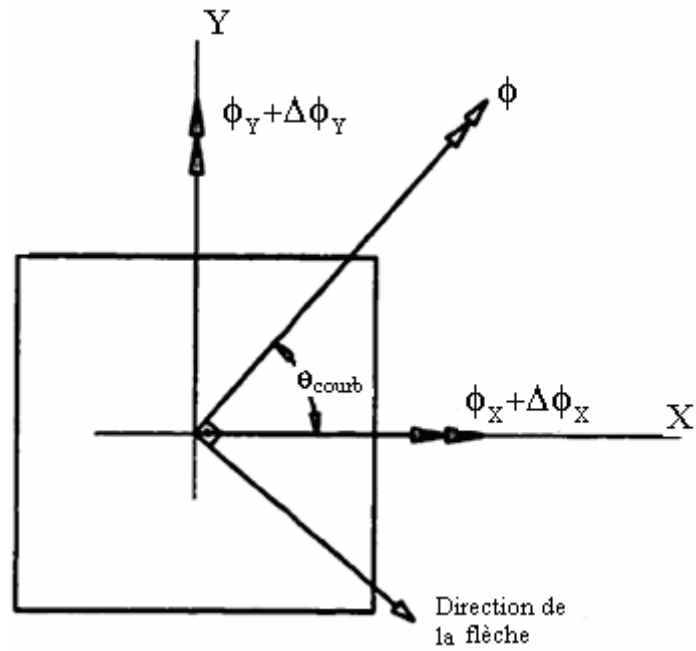


Figure .VI. 7: Résultante de la courbure et ses composantes [7].

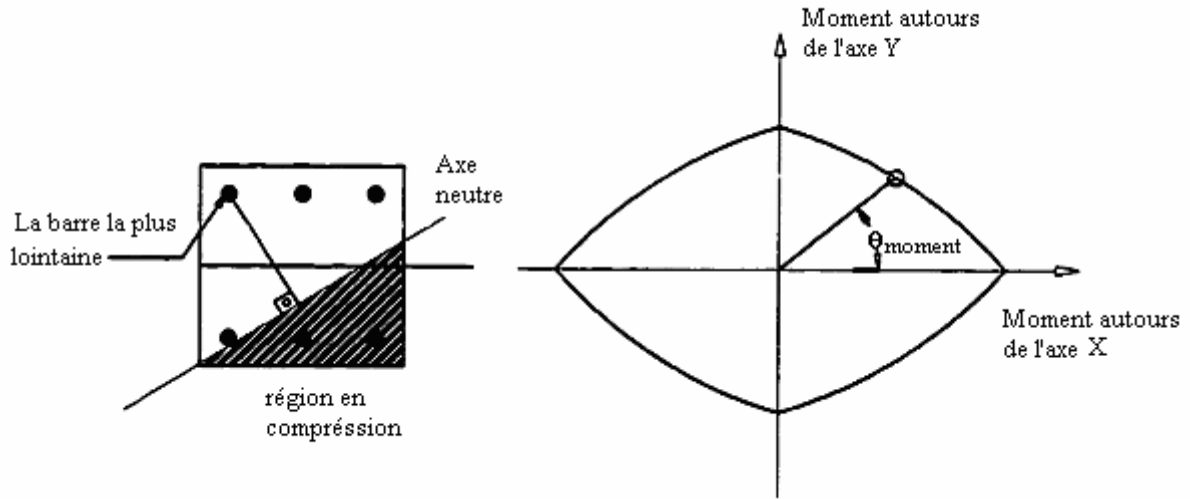


Figure .VI. 8: Enveloppe du moment d'écoulement pour l'épuisement de la barre la plus lointaine de l'axe neutre [7].

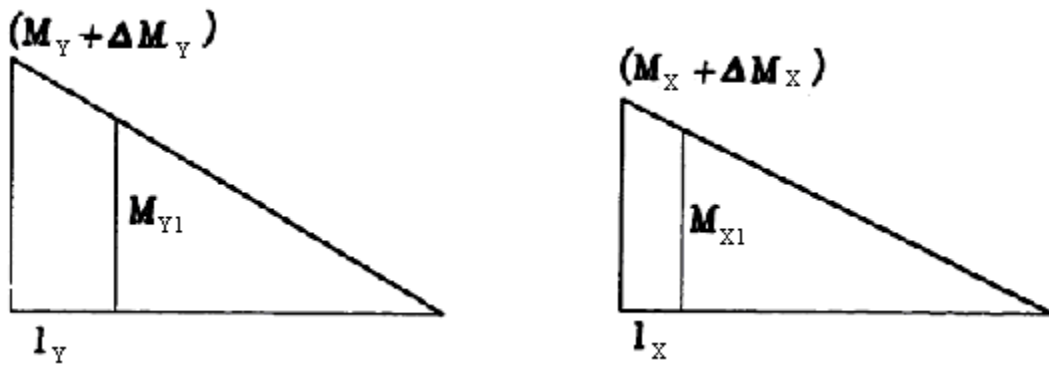


Figure .VI. 9: les moments dans la région d'écoulement [7].

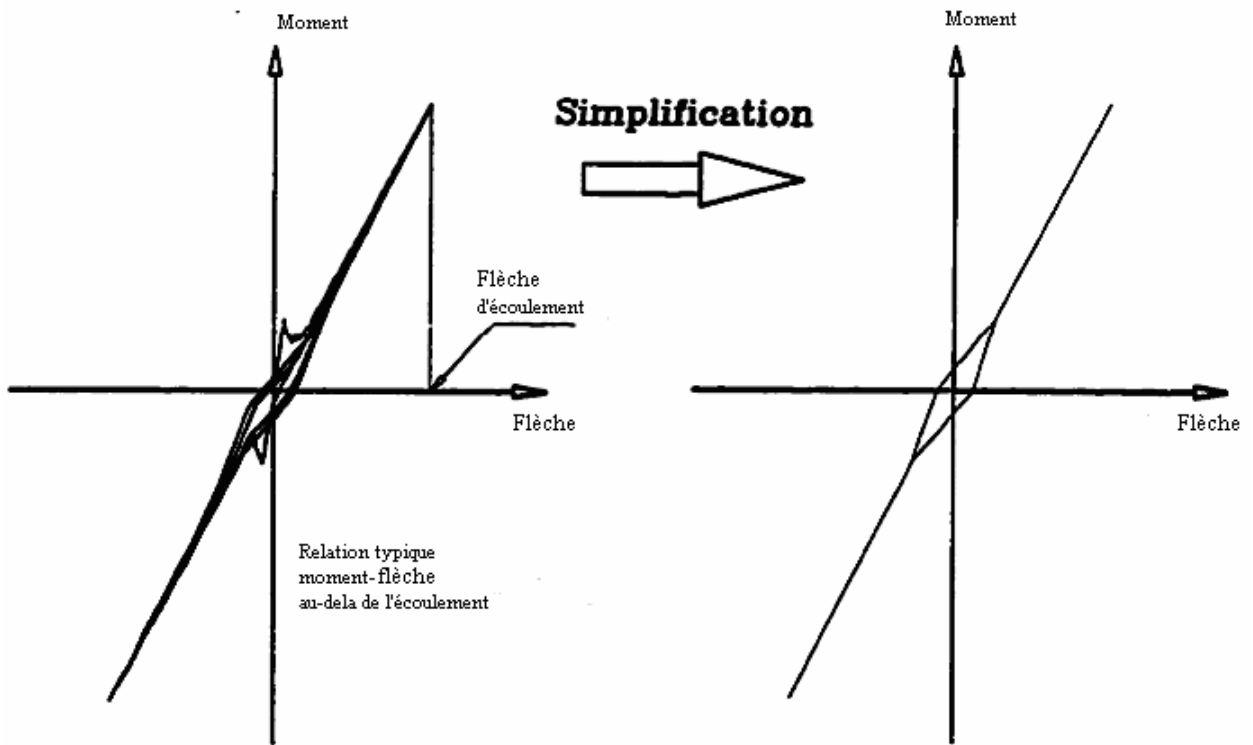


Figure .VI. 10: Relation simplifiée moment-courbure [7].

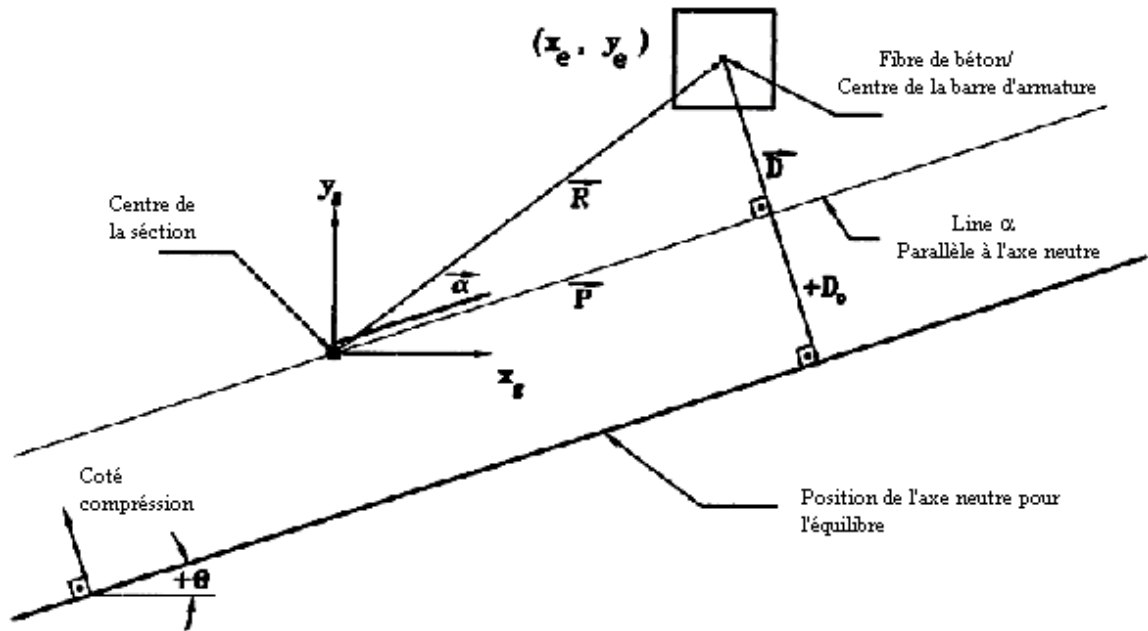


Figure .VI. 11: Géométrie de la section transversale [7].

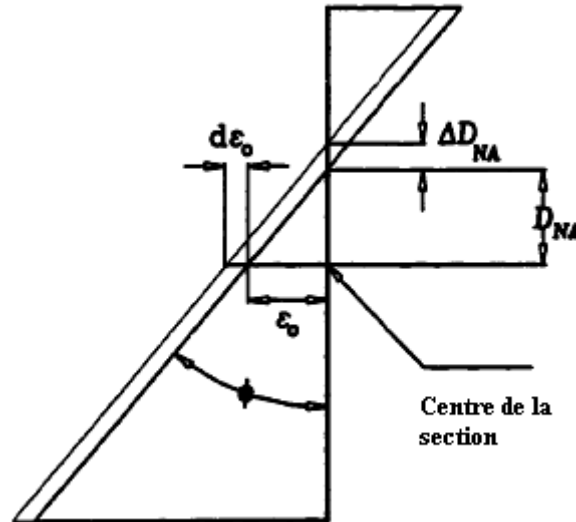


Figure .VI. 12: Changement dans la déformation du centre de la section due au changement de la position de l'axe neutre [7].

L'application des définitions exposées précédemment sur une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO (enregistrement du **California Institute of Technology**) ; nous permet d'avoir les résultats suivants qui sont comparés à la référence [7] :

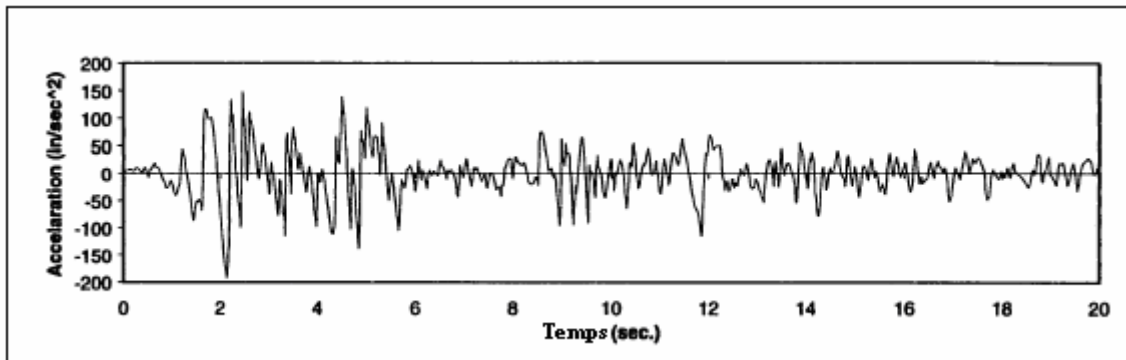


Figure .VI. 13:Signal d'EL-CENTRO 18 Mai 1940 composante N-S.

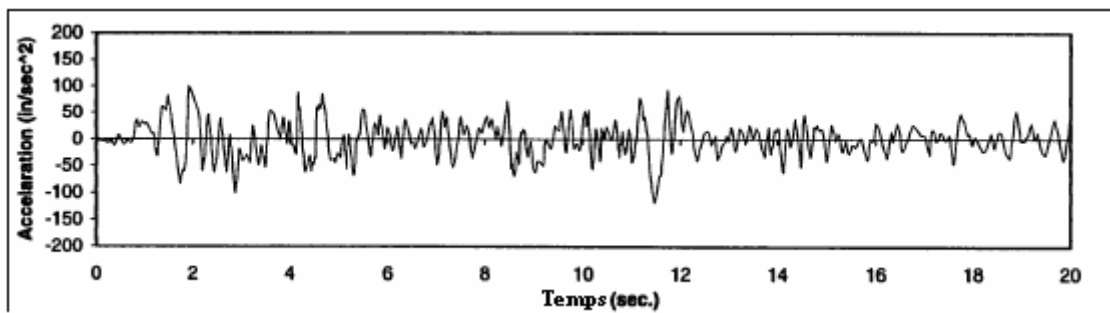


Figure .VI. 14:Signal d'EL-CENTRO 18Mai1940 composante E-W.

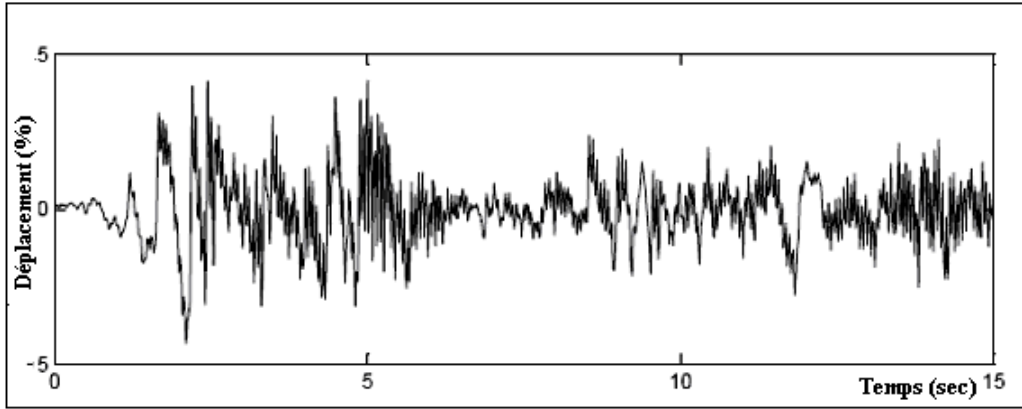


Figure .VI. 15: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante N-S.

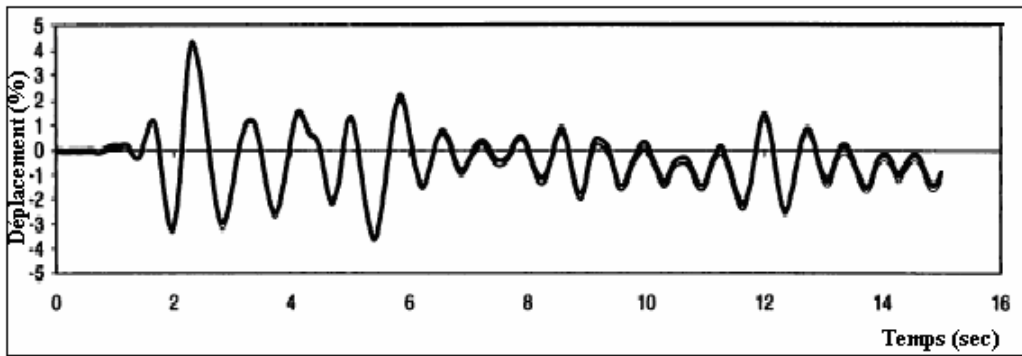


Figure .VI. 16: les déplacements du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante N-S [7].

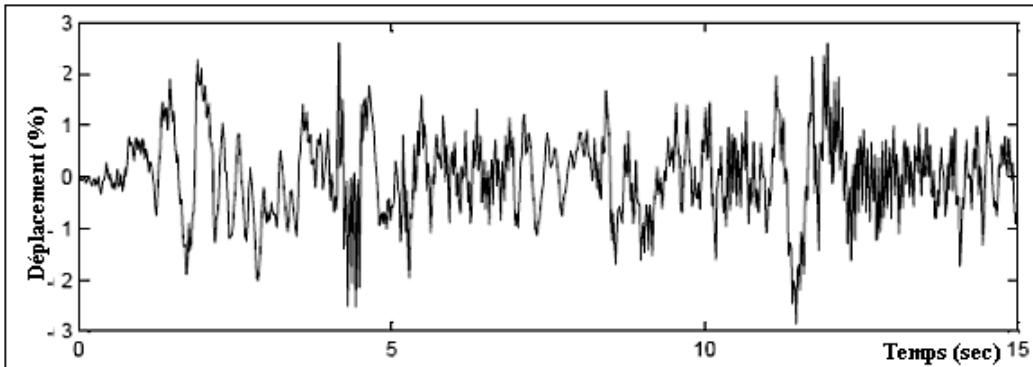


Figure .VI. 17: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante E-W.

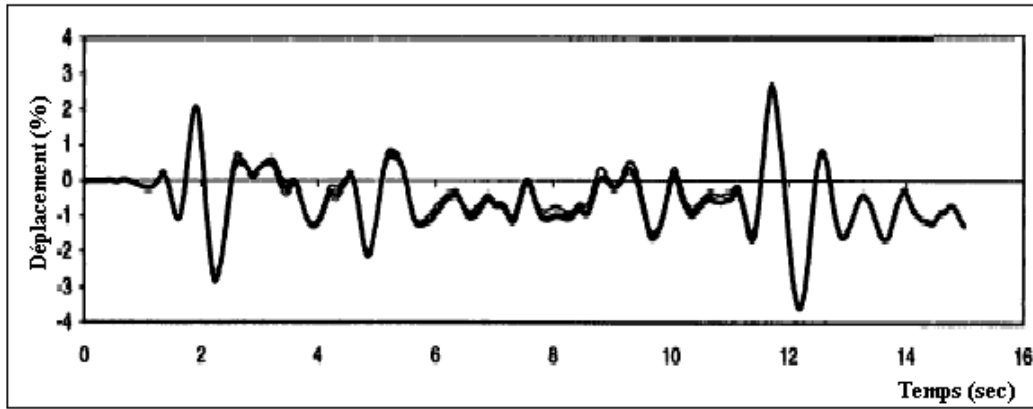


Figure .VI. 18: les déplacements du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel d'EL-CENTRO du 18 Mai 1940 composante E-W [7].

Dans ces figures, l'axe des abscisses représente le temps en secondes, et l'axe des ordonnées représente les déplacements de la console en pourcentage de sa longueur

Ces résultats concordent avec ceux obtenus et analysés au laboratoire, et indiquent que la réponse suit parfaitement la variation de l'excitation.

De ce fait la validation du programme utilisé est obtenue.

VI.6 Application

A ce stade d'étude une application est réalisée sur la même console en béton armé sollicitée à sa base cette fois par un signal bi directionnel horizontal du Séisme de **Boumerdes** du 21 Mai 2003 (enregistrement du Barrage de **Keddara**) [8].

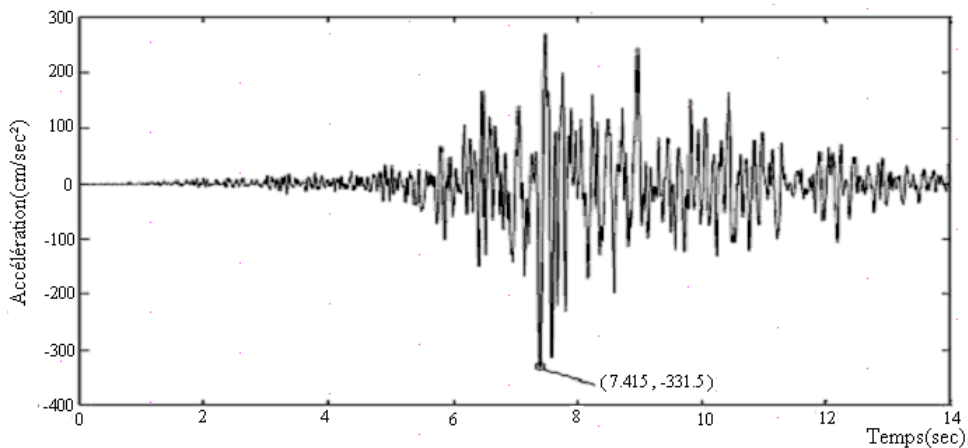
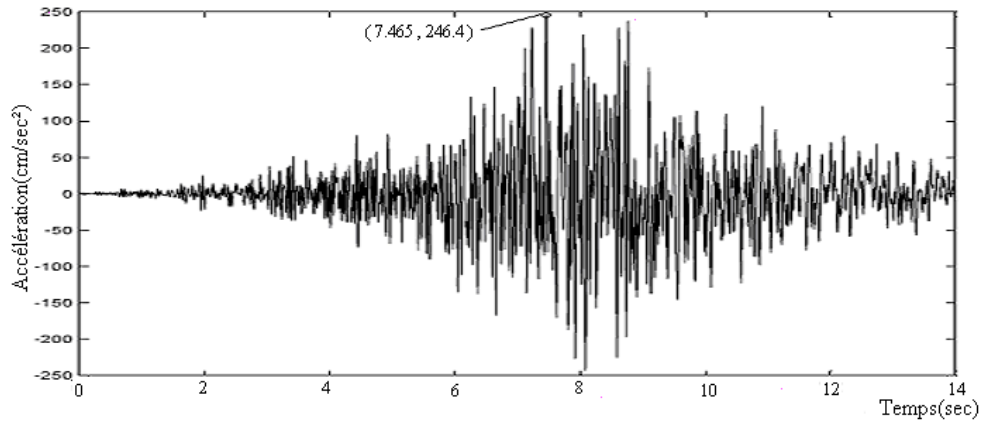


Figure .VI. 19: Composante E-W du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 (Enregistrement du Barrage de Keddara) [8].



**Figure .VI. 20: Composante N-S du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003
(Enregistrement du Barrage de Keddara) [8].**

L'exécution du programme élaboré pour l'analyse non linéaire affiche pour le système étudié la réponse suivante :

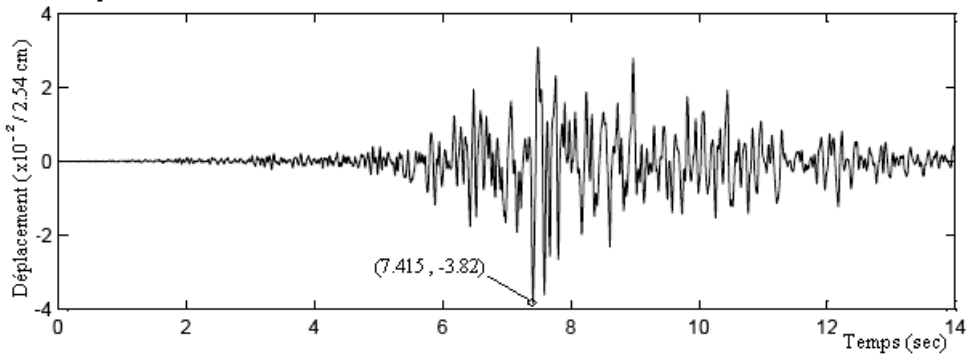


Figure .VI. 21: les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.

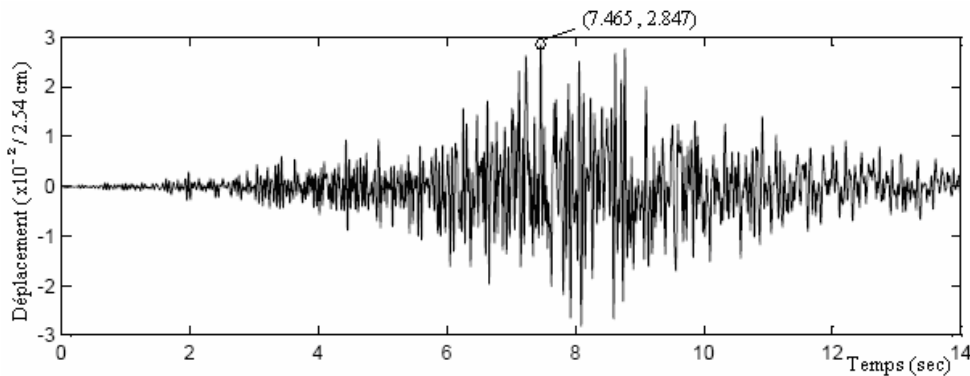


Figure .VI. 22 : les déplacements calculés du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S.

Ces courbes montrent que les déplacements du sommet de la console suivent exactement l'excitation puisque les optimums sont enregistrés pour les mêmes instants où l'excitation est élevée.

En revanche, les courbes suivantes sont données par une analyse linéaire pour le même système en utilisant l'intégrale de **Duhamel**

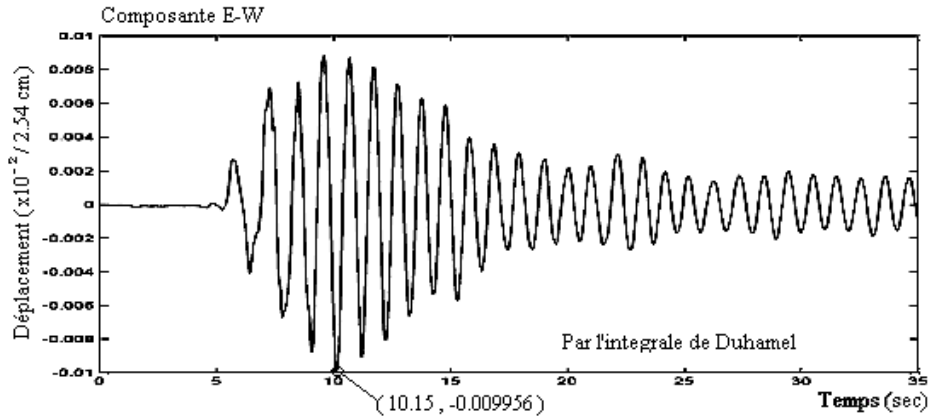


Figure .VI. 23: les déplacements calculés par l'intégrale de Duhamel du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.

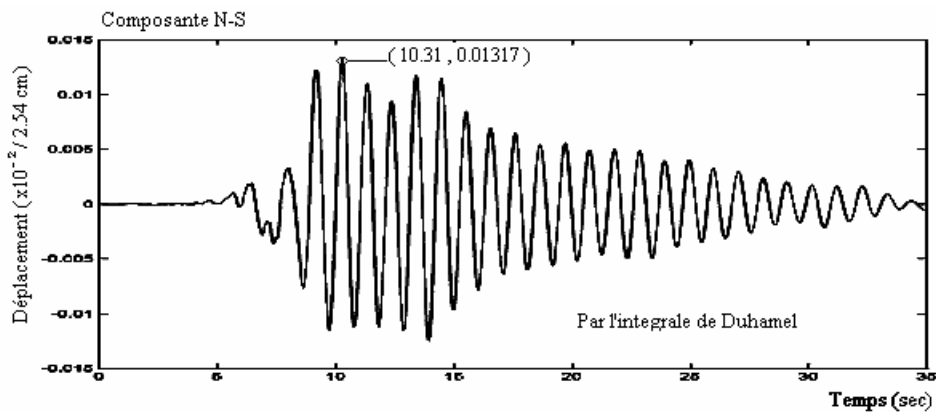


Figure .VI. 24: les déplacements calculés par l'intégrale de Duhamel du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S.

ou la méthode de **Newmark**

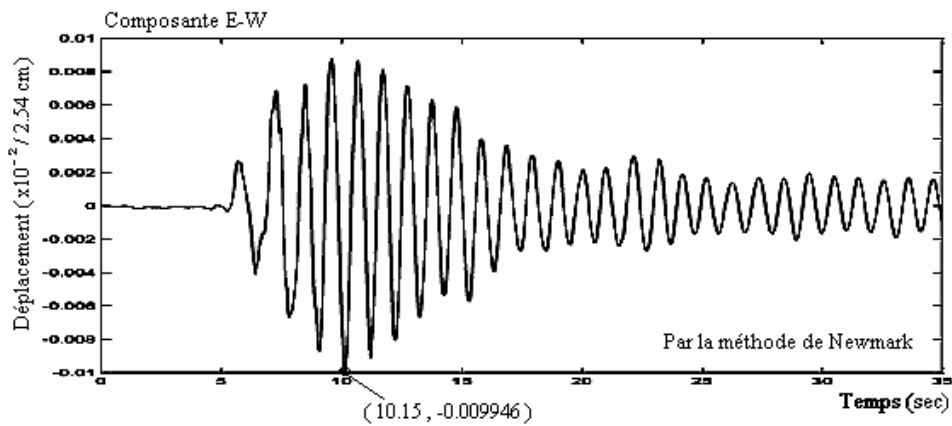


Figure .VI. 25: les déplacements calculés par la méthode de Newmark du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante E-W.

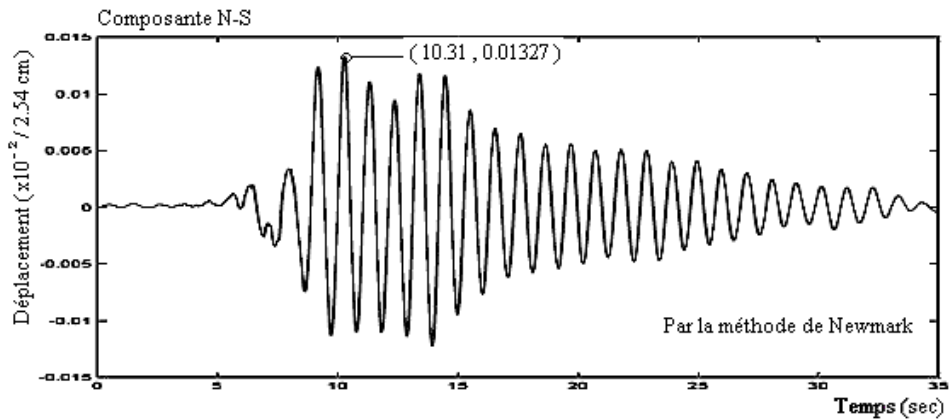


Figure .VI. 26: les déplacements calculés par la méthode de Newmark du sommet d'une console en béton armé sollicitée par le signal bi directionnel du séisme de Boumerdes du 21 Mai 2003 Composante N-S.

Contrairement à ce que donne une analyse non linéaire, ces courbes montrent une sous estimation de la réponse du système, en plus les valeurs maximales des déplacements ne correspondent pas aux pic de l'accélération de la base puisqu'elles sont enregistré à 10.15 sec au lieu de 7.415 sec pour la composante E-W et à 10.31 sec au lieu de 7.465 sec pour la composante N-S.

Ces courbes sont à titre indicatif seulement et elles ne peuvent être exploitées que pour un cas spécial produit en laboratoire inexistant dans la réalité car le but principal de cette étude est de donner un aperçu sur un calcul dynamique non linéaire traitant le signal sismique dans le domaine temporel, pour cette raison notre analyse se termine a ce niveau.

CHAPITRE VII : CONCLUSION ET PRESPECTIVES

L'analyse sismique des bâtiments existants constitue un domaine de plus en plus important du génie parasismique. Si les méthodes de dimensionnement des structures neuves sont bien maîtrisées, le niveau sismique auquel résiste un bâtiment existant est un problème beaucoup plus difficile à prédire.

L'utilisation des simulations numériques présente un avantage considérable dans cette prédiction à condition de calibrer ces simulations numériques avec des résultats obtenus par des essais sur des structures réelles.

Ce travail présente une introduction au calcul parasismique non linéaire relatif au matériau traitant les données recueillies directement in situ et encadré par des lois obtenues par des essais aux laboratoires. Notre but est d'estimer la réponse d'une structure aux éventuelles secousses sismiques ultérieures, qui est dans l'état actuel très difficile à quantifier sur la base des calculs précis. Etayée par des travaux plus poussés, cette approche peut s'avérer très utile pour les prises de décision lors des catastrophes.

Le premier objectif de cette étude a été de conditionner le lecteur à une stratégie numérique adéquate pour résoudre l'équation de mouvement dans le domaine temporel grâce à des programmes traitants des structures très simples.

Le but essentiel était de présenter des méthodes permettant l'étude des déplacements d'une structure donnée soumise à un chargement sismique, soit la possibilité d'exploiter un signal sismique digitalisé (accélérogramme) dans l'évaluation de la réponse d'une structure sans utiliser le spectre de réponse.

Néanmoins, dans les structures réelles sollicitées par un séisme ; l'utilisation des notions de période et de fréquence de vibrations et spectre de réponse conduit à une appréciation aberrante des déplacements à cause de l'invalidité du principe de la superposition modale.

Les premiers chapitres nous ont permis d'exposer les notions et les définitions qui doivent être utilisées afin d'ajuster la solution numérique aux conditions réelles agissant sur la structure.

La notion de la rigidité tangente offre une solution acceptable vu l'utilisation d'une méthode implicite, de ce fait le quatrième chapitre expose quelques lois constitutives exigées pour apprécier l'évolution du module d'élasticité des matériaux utilisés.

Des programmes ont été réalisés sur la lumière des quatre premiers chapitres afin de déterminer les déplacements d'un système en béton armé basé sur la réponse hystérétique non linéaire du béton et de l'acier en termes de leurs propriétés spécifiques de contrainte-déformation.

Le programme a été testé et comparé aux résultats donnés par d'autres chercheurs cités dans la bibliographie. Le critère testant la validité du programme n'inclut pas seulement la réponse maximale mais aussi le comportement en entier durant l'événement sismique pendant les domaines de petits et grands déplacements.

L'algorithme proposé est basé sur le modèle représentant la section en béton armé comme un ensemble de ressorts non linéaires. Les propriétés des courbes hystérésis des ressorts reflètent les comportements observés du béton et de l'acier sous un chargement uni axial. La variété des phénomènes physiques associés au comportement flexionnel du béton armé peuvent être facilement définis à travers le modèle proposé. L'ouverture et la fermeture des fissures, le ramollissement du béton, l'effet Bauschinger, les déformations permanentes des armatures et la propagation de la rotule plastique le long des éléments peuvent être tous modélisés convenablement. Pour utiliser les définitions des propriétés hystérésis le plus simplement possible, une approche du simple au compliqué a été élaborée.

Les résultats obtenus par le biais de ce programme montrent que la réponse du système est sensible au signal sismique car les pics sont enregistrés lors des valeurs maximales de l'accélération de la base contrairement à ce que donne une analyse linéaire qui a tendance à sous estimer la réponse du système.

Il est important de noter les difficultés à cerner tous les aspects d'un comportement non linéaire des structures en béton armé. Au cours de notre recherche, on a établi un certain nombre de remarques :

- la stratégie d'analyse doit être étayée par des travaux concluant (c a d des résultats pratiques). En effet, il existe un nombre considérable d'approche mais peut d'entre elles aboutissent à des résultats exploitables, du fait que les paramètres exigés sont improbables à déterminer.
- les lois de comportement du béton armé sous un chargement dynamique cyclique tel que le séisme sont très rares vue la complexité du matériaux et de l'excitation, et même avec une loi de comportement disponible il est improbable d'avoir une appréciation réelle que sous un ensemble d'hypothèses et de conditions d'essais qui sont en général inexistantes en pratique. En plus pour le béton armé une loi de comportement exploitable doit être du type $\sigma = f(\epsilon)$ puisque c'est les déformations (déplacements) qui sont des quantités mesurables.
- Ce travail est essentiellement focalisé sur la non linéarité matérielle due à la flexion seulement, puisqu'elle peut être simulée comme un comportement uni axial ce qui est acceptable pour cette simple approche, par contre une analyse plus précise nécessiterait une étude qui traite la non

linéarité due à la variation instantané de la rigidité et de l'amortissement du système ainsi que celle due à d'autres comportements structuraux émanant d'un signal sismique.

Néanmoins cette étude servira dans le futur comme une plate forme vers le développement d'un logiciel de calcul traitant des structures en béton armé sollicitées par un signal sismique digitalisé en la complétant par :

-Des programmes traitants les différents aspects du comportement d'une structure élaborés par des équipes de recherches dans les différentes disciplines.

-Un post et un pré processeur permettant le maillage et le dépouillement des résultats.

-une intégration de ce programme dans un cadre d'aide à la décision capable de limiter les pertes en vie humaines et le temps d'interventions lors des catastrophes.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] Aktan, A. E. Karlson, B. I. Sozen, M. A., " Stress-Strain Relationships of Reinforcing Bars Subjected to Large Strain Reversals," Civil Eng. Studies, Structural Research Series No. 397, Université d'Illinois, Urbana-Champaign,1973.
- [2] Aktan A. E., Pecknold D. A. W., Sozen M. A., "Effects of Two-Dimensional Earthquake Motion on a Reinforced Concrete Column," Université d'Illinois, Urbana-Champaign, Structural Research Series No. 399, 1973.
- [3] Anil K.Chopra, Dynamics of Structures, theory and applications to earthquake engineering. 2^{ime} edition. USA: Prentice Hall; 2001.
- [4] Ansys, Inc., "Documentation ANSYS 8.0",Ansys, Inc.,Canonsburg, PA, 2003.
- [5] Asadollah Esmaeily-Ghasemabadi, "Seismic Behavior of Bridge Columns subjected to various loading patterns" Thèse PhD. Université de park, Los Angeles , californie, USA , 2001.
- [6] Bittnar, Z., and Sejnoha, J., Numerical Methods in Structural Mechanics. ASCE Press, New York, 1996.
- [7] Cemalettin, Donmez, "A Numerical Model to Simulate the Behavior of Reinforced Concrete Members Subjected to Biaxial Earthquake Excitation, " Thèse de PHD, Université de Purdue, West Lafayette, Indiana, USA, Décembre 1998.
- [8] Centre National de Recherche Appliquée en Génie-parasismique, Alger, Algérie, Mai 2003.
- [9] Chen, P. F. S., Powell, G. H., "Generalized Plastic Hinge Concepts for 3D Beam-Column Elements," Rapport No. UCBEERC 82/80, Université de Californie Berkeley, 1982.
- [10] Colina, J., " A Hysteresis Model for Reinforced Concrete Space Frame Structures," Thèse de PHD, Université d' Illinois. Urbana-Champaign, 1992.
- [11] Dradjat, H., " A Model to Simulate Lateral-Force Response of Reinforced Concrete Structures with Cylindrical and Box Sections," Thèse de PHD, Civil Eng., Université d'Illinois, Urbana-Champaign, 1983.
- [12] Dragovich, J. J., " An Experimental Study of Torsional Response of Reinforced Concrete Structures to Earthquake Excitation," Thèse Ph.D. Université de l'Illinois, Urbana-Champaign, 1996.
- [13] E L.Wilson, Numerical Methods for Dynamic Analysis. 3^{ime} edition.: Computers and Structures, Inc; USA, 2002
- [14] E L.Wilson, Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures. 3^{ime} edition. USA: Computers and Structures, Inc; 2002

- [15] Gene Alan Paulsgrove ,P.E , A practicing engineer's perspective on nonlinear finite element analysis techniques for reinforced concrete structures. Thèse de PHD, Université d'Oklahoma, Norman, 2004.
- [16] Hognestad, E., " A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Member, "University de l'Illinois Engineering Experiment Station, Bulletin Series No.399, 1951.
- [17] Jiang.. Y., Saiidi, M. " Four-Spring Element for Cyclic Response of R/C Columns," ASCE Journal of Structural Eng., Vol. 1 16, No.4, Avril, pp. 1018-1029, 1990.
- [18] Kitajima, K., Adachi, H., Kanda, M., Koimmi, T., " Elasto-Plastic Analysis of Reinforced Concrete Columns under Bi-directional Earthquake Motions," Transactions of the Japan Concrete Institute, Vol. 13, pp. 363-370, 1991.
- [19] Karsan, I. D., Irsa, J. O., "Behavior of Concrete Under Compressive Loadings" Journal of the Structural Division, ASCE, Vol. 95, No. ST 12, pp.2543-2563 ,1969.
- [20] Kent,D.C., "Inelastic Behavior of Reinforced Concrete Members with Cyclic Loading," Thèse de PHD, Université de Canterbury, Christchurch, New Zealand, 1969.
- [21] KLAUS-JÜRGEN BATHE, Finite Element Procedures, USA: Prentice Hall, 1996.
- [22] Lai S. S. " Post-Yield Hysteretic Biaxial Models for Reinforced Concrete Members," ACI Structural Journal, Mai-Juin, pp. 235-245, 1987.
- [23] L.M. Smith,D.V.Griffiths, Programming The Finite Element Method . 2^{ime} edition. John Wiley & Sons, UK, 1988.
- [24] Matlab, The Math- Works, Inc., Natick, Massachusetts, 2001.
- [25] Menegotto, M. and Pinto, E., Method of Analysis for Cyclically Loaded Reinforced Concrete Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behaviour of Elements Under Combined Normal Force and Bending, Proceedings, IABSE Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, Lisbon, Portugal, 1973.
- [26] M.Tichý, J.Rákosník, Calcul Plastique des Ossatures en Béton Armé . edition Eyrolles.Paris,1975.
- [27] NGUYEN X.H., Vulnérabilité des structures en béton armé à voiles porteurs: expérimentation et modélisation, thèse de doctorat, INPG, Grenoble, France, Juin 2006
- [28] Otani, S., Cheung, V. W., "Behaviour of Reinforced Concrete Columns Under Biaxial Lateral Load Reversals," Université deToronto, Department de genie civil.

Publication 81-02, 127 p. Février, 1981.

- [29] Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery. B. P, "Numerical Recipes in C," Cambridge University Press, 1995.
- [30] Ricles, M., Yang, S. Y., Priestley M. J. N. "Modeling Nonductile WC Columns for Seismic Analysis of Bridges," ASCE Journal of Structural Engineering, Vol. 124, No. 4, Avril, pp. 415-425, 1998.
- [31] Saiidi M., Ghosn O., Jiang Y., " Five-Spring Element for Biaxially Bent R/C Columns," ASCE, Journal of Structural Eng., Vol. 115, No.2, Février, 1989.
- [32] Sfakianis, M. G., Fardis, M. N., " R/C Column Model for Inelastic Seismic Response Analysis in 3D," Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 117, No. 12, pp. 2270-2287, 1991.
- [33] Stanton, J., McNiven, H. D., "The Development of a Mathematical Model to Predict the Flexural Response of Reinforced Concrete Beams to Cyclic Loads, Using System Identification," Report No. EERC 79/02, Université de Californie. Berkeley, p 197, Janvier 1979.
- [34] Suhawardy, M. L, Pecknold, D., A., " Inelastic Response of Reinforced Concrete Columns Subjected to Two-Dimensional Earthquake Motions," Civil Eng. Studies Research Series, No. 455, Université d'Illinois, Urbana-Champaign, 1978.
- [35] Takizawa H., Aoyama, H., "Biaxial Effects in Modeling Earthquake Response of R/C Structures," Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 4, pp. 523-552, 1976.
- [36] Taucer, F., Spacone, E., Filippou, F., "A Fiber Beam-Column Element for Seismic Response Analysis of Reinforced Concrete Structures," Report No. EERC 91/17, Université de Californie, Berkeley, Décembre, 1991, p 136.
- [37] Thompson K. J., " Ductility of Concrete Frames Under Seismic Loading. "Research Report, Department of Civil Eng., University of Canterbury, Christchurch, New Zealand, Octobre, 1975.
- [38] Tommaso Albanesi, Camillo Nuti, " Reinforcing Steel Bar Model" Département de Structures, Université de Degli Stidi Di Roma Tre, Rome, Mai 2007, page5.
- [39] Zeris, A., " Three Dimensional Nonlinear Response of Reinforced Concrete Buildings," Thèse de PHD, Civil Eng., Université de Californie, Berkeley, 1986.

ANNEXES

Annexe A.1

A.1 *Algorithme du modèle adopté pour le béton [7]*

La rigidité utilisée dans chaque incrément est calculée à partir :

1. des coordonnées contrainte et déformation définissant la position actuelle (ϵ_{cur} , σ_{cur}).
2. des coordonnées contrainte et déformation du revirement maximal sur la courbe enveloppe (ϵ_{cen} , σ_{cen}).
3. de l'état de fissuration.
4. d'information indiquant si (ϵ_{cur} , σ_{cur}) sont en état de contact incomplet.

L'algorithme produit les valeurs actualisées des quatre paramètres ci-dessus. Afin de maintenir le tracé, le domaine du comportement est considéré comme étant une surface contrainte-déformation stationnaire (courbe enveloppe figure A.1.1a), et cinq intervalles de déformation non stationnaire (figure A.1.1b-e).

La notation employée dans le texte suivant et le Tableau A.1 est définie ci-dessous.

ϵ_{cx} : déformation compressive à laquelle le béton perd sa résistance.

ϵ_{cen} : déformation du revirement maximal sur la courbe enveloppe.

ϵ_{ec} : déformation au contact complet.

ϵ_{cp} : déformation permanente à considérer pour le béton définie par l'équation 4-9.

ϵ_{ct} : déformation du béton atteignant sa résistance à la traction.

ϵ_{new} : nouvelle déformation.

ϵ_{cur} : coordonnée déformation de la position de courante.

σ_{cen} : contrainte du revirement maximal sur la courbe enveloppe.

σ_{ec} : contrainte à l'achèvement du contact complet.

σ : nouvelle contrainte calculée pour la nouvelle déformation ϵ_{new} .

σ_{cur} : coordonnée contrainte de la position actuelle.

E_c : module initial d'élasticité de la fibre du béton.

crack_flag : étiquette indiquant l'état des fissures. Si la fibre est fissurée, l'étiquette prend la valeur -1. Autre part, elle prend la valeur 1.

ec_flag : étiquette indiquant l'état de contact incomplet. Si la fibre est dans un état de contact incomplet, l'étiquette prend la valeur de la déformation de la frontière gauche du contact incomplet. Autrement, elle prend la valeur 101.

Les définitions suivantes sont données pour éviter des répétitions dans le Tableau A.1 :

$$f(\varepsilon_{\text{new}}) \text{ définit l'effort sur la courbe enveloppe, selon la section IV.3.} \quad (\text{A-1})$$

$$f_2(\varepsilon_{\text{new}}, \varepsilon_{\text{cen}}, \sigma_{\text{cen}}, \varepsilon_{\text{cp}}) = \sigma_{\text{cen}} \left(\frac{\varepsilon_{\text{new}} - \varepsilon_{\text{cp}}}{\varepsilon_{\text{cen}} - \varepsilon_{\text{cp}}} \right) \quad (\text{A-2})$$

$$f_3(\varepsilon_{\text{new}}, E_c, \sigma_{\text{cur}}, \varepsilon_{\text{cp}}) = -E_c \left(\frac{\varepsilon_{\text{cur}} - \varepsilon_{\text{new}}}{\varepsilon_{\text{cur}} - \varepsilon_{\text{cp}}} \right) \quad (\text{A-3})$$

$$f'_3(\varepsilon_{\text{new}}, E_c, \varepsilon_{\text{cp}}) = -E_c(\varepsilon_{\text{cp}} - \varepsilon_{\text{new}}) \quad (\text{A-4})$$

$$f_4(\varepsilon_{\text{new}}, f_{\text{ec}}, \varepsilon_{\text{ec}}, \text{ec_flag}) = f_{\text{ec}} \left(\frac{\varepsilon_{\text{new}} - \text{ec_flag}}{\varepsilon_{\text{ec}} - \text{ec_flag}} \right) \quad (\text{A-5})$$

Les règles spécifiques utilisées pour l'algorithme définissant la réponse du béton sont décrites dans le Tableau A.1 et dans les figures d'accompagnement A.1.1 et A.1.2. Les lignes continues dans les figures A.1.1 a-f indiquent la relation contrainte-déformation supposée pour cet intervalle. Le domaine de chaque expression utilisée dans l'algorithme indiqué dans les figures d'accompagnement par des lignes gras est identifié dans le Tableau A.1. Il convient de noter que les intervalles 1 à 5 changent si la contrainte maximale dans un cycle excède le maximum précédent. Pour expliquer le processus utilisé dans le Tableau A.1, la première rangée de cellules est exposée ci-dessous.

La première colonne du tableau identifie l'intervalle des déformations. Par exemple, la première ligne se rapporte à la condition qui régit les coordonnées contrainte-déformation courantes situées sur la courbe enveloppe. La deuxième colonne concerne le chargement. La première ligne, stipule que si le chargement se situe sur la courbe enveloppe, les contraintes sont gouvernées par les expressions définies dans les sections IV.2 et IV.3 (équation A-1, la ligne en gras dans la figure A.1.1.a). La troisième colonne fait référence au déchargement. La première ligne, indique qui si la déformation est plus importante que celle qui est permanente à l'ensemble, ε_{cp} , c'est l'équation A-2 qui gouverne (figure A.1.2.a). Si le déchargement atteint l'axe des déformations, il y aurait deux options pour un déchargement plus loin. Si le béton est précédemment fissuré, la contrainte est nulle (figure A.1.2.e). Si non, l'équation A-3 gouverne la suite jusqu'à la déformation $(\varepsilon_{\text{cp}} - \varepsilon_{\text{ct}})$ (figure A.1.2.b). Si la déformation devient plus petite que $(\varepsilon_{\text{cp}} - \varepsilon_{\text{ct}})$, l'effort est pris égale à zéro (figure A.1.2. g et h) et l'étiquette indiquant l'état des fissures prendra alors la valeur de -1.

Certains paramètres doivent être actualisés durant les étapes. Les paramètres actualisés sont identifiés par le terme "act" mis entre parenthèses dans le Tableau A.1.

Tableau .A. 1: modèle adopté pour le béton [7].

	Chargement	Déchargement
Déformation de la fibre située dans la courbe enveloppe	$\sigma = f_1(\epsilon_{new})$ $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ $\sigma_{cen} = \sigma$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$	$\text{Si: } \epsilon_{new} \geq \epsilon_{cp} : \sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ $\text{Sinon: } (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct}) < \epsilon_{new} < \epsilon_{cp} \{$ $\sigma = 0$ $\text{sinon } \sigma = f_3(E_c, \epsilon_{cur}, \epsilon_{cp}, \epsilon_{new})$ $\}$ $\text{Sinon: } \epsilon_{new} < (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct}) \{$ $\text{Si } (crack_flag=1) \text{ crack_flag}=-1$ $\sigma = 0$ $\}$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 1	$\text{Si } \epsilon_{new} \leq \epsilon_{cen} :$ $f = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ $\text{Sinon: } \epsilon_{new} > \epsilon_{cp} \{$ $\sigma = f_2(\epsilon_{new})$ $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ $\sigma_{cen} = \sigma$ $\}$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$	$\text{Si: } \epsilon_{new} > \epsilon_{cp} : \sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ $\text{Si: } (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct}) \leq \epsilon_{new} < \epsilon_{cp} \{$ $\text{Si: } (crack_flag=-1) \quad \sigma = 0$ $\text{Sinon: } \sigma = f_3(E_c, \epsilon_{cur}, \epsilon_{cp}, \epsilon_{new})$ $\}$ $\text{Si: } \epsilon_{new} < (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct}) \{$ $\text{Si } (crack_flag=1) \text{ crack_flag}=-1$ $\sigma = 0$ $\}$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 2	$\text{Si: } (\epsilon_{new} > \epsilon_{ec}) \{$ $\text{Si: } (ec_flag > 100)$ $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ $\text{Sinon: } \sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ $\}$ $\text{Si: } (\epsilon_{ec} < \epsilon_{new} < \epsilon_{cen})$ $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ $\text{Si: } (\epsilon_{cen} < \epsilon_{new}) \{$ $\sigma = f_1(\epsilon_{new})$ $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ $\sigma_{cen} = \sigma$ $\}$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$	$\text{Si: } (\epsilon_{new} \geq \epsilon_{cp}) \{$ $\text{Si: } (ec_flag > 100)$ $\text{Sinon: } \sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ $\text{si: } (\sigma < 0) \{ \text{(voir note 1)}$ $\sigma = 0;$ $ec_flag = 101$ $\}$ $\}$ $\text{Si: } (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct} \leq \epsilon_{new} < \epsilon_{cp}) \{$ $\text{Si: } (ec_flag > 100) \{$ $\text{Si: } (crack_flag=1) \quad \sigma = f_3(E_c, \epsilon_{cur}, \epsilon_{cp}, \epsilon_{new})$ $\text{Si: } (crack_flag=-1) \quad \sigma = 0$ $\}$ $\text{Si: } (ec_flag < 100) \{$ $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ $\text{si: } (\sigma < 0) \{ \text{(voir note 1)}$ $\sigma = 0;$ $ec_flag = 101$ $\}$ $\}$ $\text{Si: } (end_ec \leq \epsilon_{new} < \epsilon_{cp}) \{$ $\text{Si: } (ec_flag > 100) \{$ $\sigma = 0;$ $crack_flag = -1$ $\}$ $\}$
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 2 (suite)		$\text{Si: } (ec_flag < 100) \{$ $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ $\text{si: } (\sigma < 0) \{ \text{(voir note 1)}$ $\sigma = 0;$ $ec_flag = 101$ $\}$ $\}$ $\text{Si: } (\epsilon_{new} < end_ec) \{$ $\sigma = 0;$ $crack_flag = -1$ $ec_flag = 101$ $\}$ $\}$ $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$

	Chargement	Déchargement
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 3	<p>Si : ($\epsilon_{new} \leq \epsilon_{cp}$) { Si : (crack_flag =1) Si : (ec_flag > 100) { (voir note 2) Si : ($\epsilon_{cur} > end_ec$) ec_flag = ϵ_{cur} Sinon : ec_flag = end_ec $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f } Si : (ec_flag < 100) $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f } Si : ($\epsilon_{cp} < \epsilon_{new} \leq \epsilon_{ec}$) { Si : (ec_flag > 100) $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ figA.1.2.c Sinon : $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.d } Si : ($\epsilon_{ec} < \epsilon_{new} \leq \epsilon_{cen}$) { $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ figA.1.2.b ec_flag = 101 (act) } Sinon : { $\sigma = f_1(\epsilon_{new})$ figA.1.1.a $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ (act) $\sigma_{cen} = \sigma$ (act) } $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)</p>	<p>Si : ($\epsilon_{cp} - \epsilon_{new} \leq \epsilon_{ct}$) { Si : (ec_flag < 100) { $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.d si : ($\sigma < 0$) { (voir note 1) $\sigma = 0$; ec_flag = 101 } } Si : (ec_flag > 100) $\sigma = f_3^*(E_c, \epsilon_{cp}, \epsilon_{new})$ figA.1.2.b Sinon : $\sigma = 0$ figA.1.2.e } Si : ((end_ec $\leq \epsilon_{new} < (\epsilon_{cp} - \epsilon_{ct})$) et (crack_flag = 1)) { Si : (ec_flag > 100) { crack_flag = -1 (act) $\sigma = 0$ figA.1.2.g } Si : (ec_flag < 100) { $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f si : ($\sigma < 0$) { (voir note 1) $\sigma = 0$; ec_flag = 101 } } } Si : ($\epsilon_{new} < end_ec$) { crack_flag = -1 (act) $\sigma = 0$ figA.1.2.g ec_flag = 101 (act) } $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)</p>
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 4	<p>Si : ($\epsilon_{new} \leq \epsilon_{ct}$) { Si : (ec_flag < 100) $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f et d Si : (ec_flag > 100) { (voir note 2) Si : ($\epsilon_{cur} > end_ec$) ec_flag = ϵ_{cur} Sinon : ec_flag = end_ec $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f et d } } Si : ($\epsilon_{ec} < \epsilon_{new} \leq \epsilon_{cen}$) { $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ figA.1.2.b ec_flag = 101 (act) } Si : ($\epsilon_{new} < \epsilon_{cen}$) { $\sigma = f_1(\epsilon_{new})$ figA.1.1.a $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ (act) $\sigma_{cen} = \sigma$ (act) ec_flag = 101 (act) } $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)</p>	<p>Si : (end_ec < ϵ_{new}) { Si : (ec_flag < 100) { $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f si : ($\sigma < 0$) { (voir note 1) $\sigma = 0$; ec_flag = 101 } } Si : (ec_flag > 100) $\sigma = 0$ figA.1.2.g } Si : ($\epsilon_{new} < end_ec$) { $\sigma = 0$ figA.1.2.h ec_flag = 101 } $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)</p>

	Chargement	Déchargement
Déformation de la fibre située dans l'intervalle 5	Si: ($\epsilon_{new} < end_ec$) $\sigma=0$ figA.1.2.h Si: ($end_ec < \epsilon_{new} < \epsilon_{ec}$) { (voir note 2) Si : ($\epsilon_{cur} > end_ec$) $ec_flag = \epsilon_{cur}$ Sinon : $ec_flag = end_ec$ $\sigma = f_4(\epsilon_{new}, \epsilon_{ec}, \sigma_{ec}, ec_flag)$ figA.1.2.f et d } Si : ($\epsilon_{ec} < \epsilon_{new} \leq \epsilon_{cen}$) $\sigma = f_2(\epsilon_{new}, \epsilon_{cen}, \sigma_{cen}, \epsilon_{cp})$ figA.1.2.b Si : ($\epsilon_{new} > \epsilon_{cen}$) { $\sigma = f_1(\epsilon_{new})$ figA.1.1.a $\epsilon_{cen} = \epsilon_{new}$ (act) $\sigma_{cen} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)	$\epsilon_{cur} < end_ec$ $\sigma = 0$ figA.2.h $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)

Note 1 : Ce test est fait pour contrôler la fin de l'intervalle du contact incomplet. Si après calcul des contraintes sont négatives, la contrainte dans la fibre est prise comme étant nulle et l'intervalle du contact incomplet est conclu. Pour transférer cette information à la prochaine étape, l'étiquette indiquant le contact incomplet est actualisée par la valeur 101.

Note 2 : Ce bloc définit le début de l'intervalle du contact incomplet et place dans l'étiquette indiquant le contact incomplet la valeur de la contrainte à la frontière gauche de l'intervalle du contact incomplet.

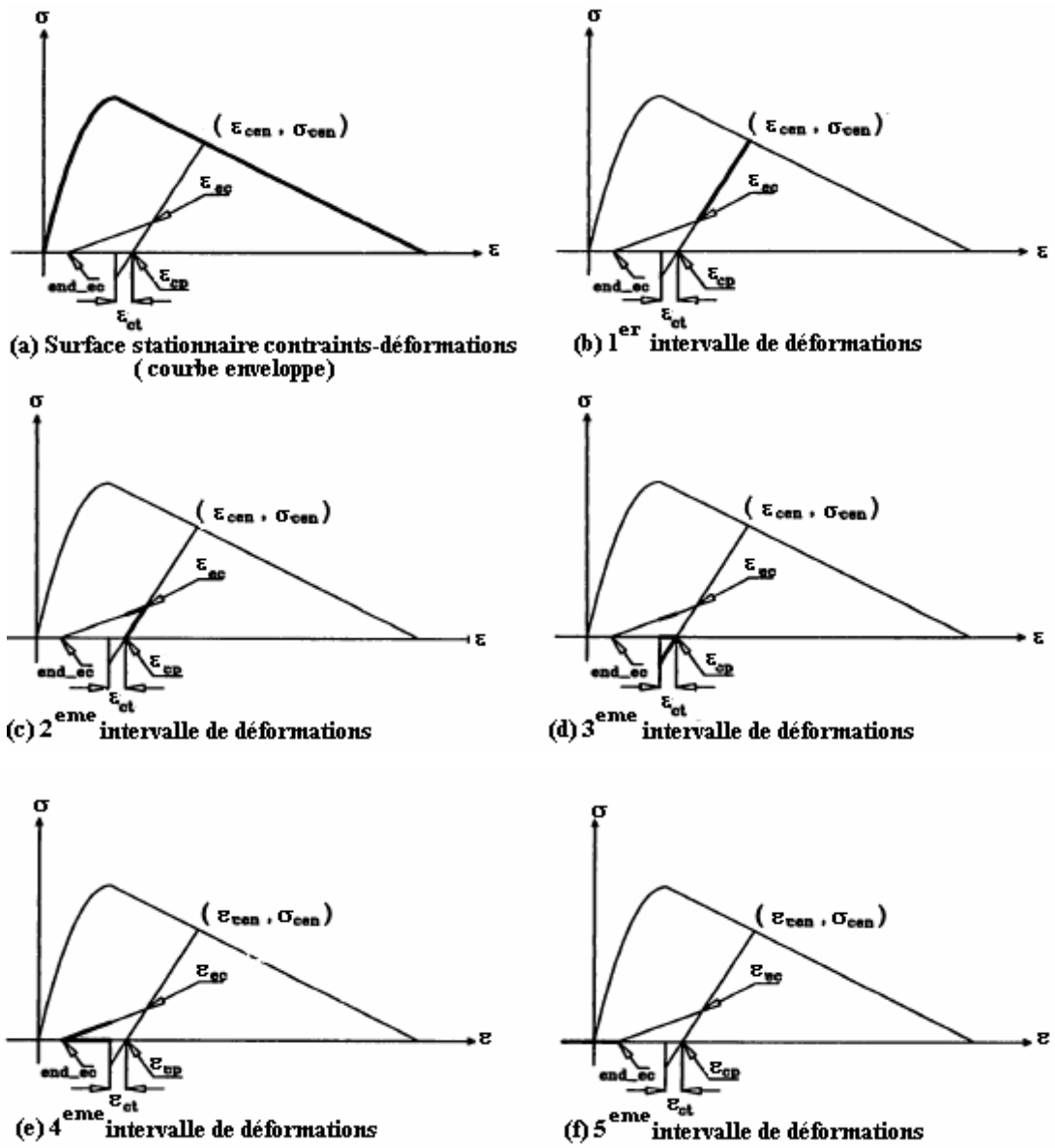


Figure .A.1. 1: Les intervalles utilisés dans l'algorithme du béton [7].

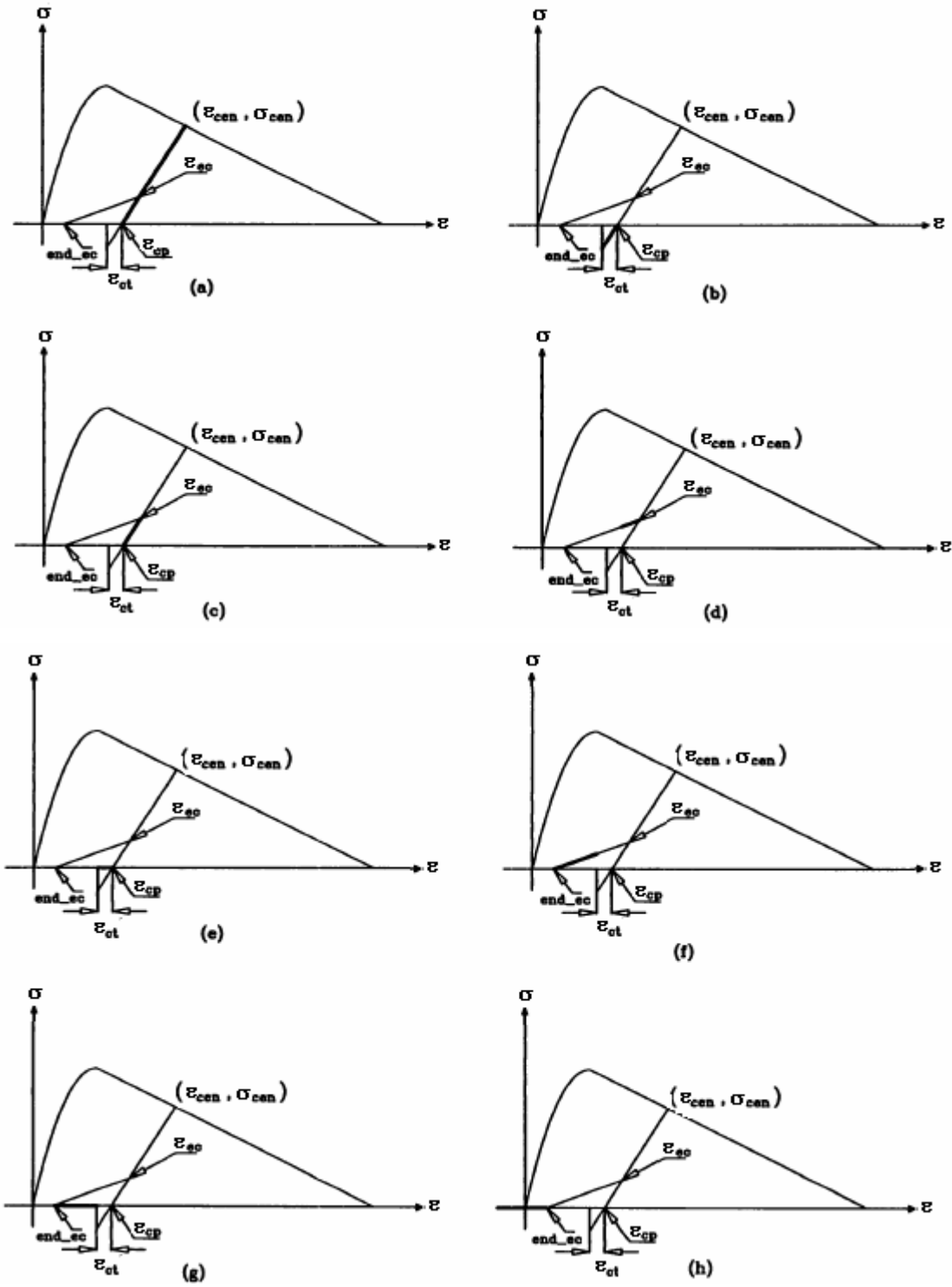


Figure A.1. 2: Domaines des expressions données dans le tableau A.1 [7].

Annexe A.2

A.2 Algorithme du modèle adopté pour l'acier (Menegotto-Pinto) [7]

L'algorithme est défini en trois intervalles durant toute l'histoire contrainte-déformation :

1. Avant d'atteindre la contrainte d'épuisement dans aucune direction (figure A.2.b).
2. Après un premier épuisement, jusqu'au premier revirement (figure A.2.c).
3. Revirement après un premier épuisement (figure A.3.d).

Les définitions suivantes sont utilisées dans le Tableau A.2.

ε_{new} : la nouvelle valeur de déformation.

σ : contrainte correspondante à la nouvelle valeur de déformation.

$\sigma_{\text{cur}}, \varepsilon_{\text{cur}}$: sont les valeurs la contrainte et de la déformation à la position actuelle.

σ_r, ε_r : position du point de revirement maximal sur l'enveloppe.

σ_0, ε_0 : sont les valeurs la contrainte et de la déformation à l'intersection des courbes limite.

E_0 : est la pente initiale de la courbe de déchargement.

$$E_0 = 29000 - 108000 \varepsilon_r - 1928(1.0 - \exp(-390.0 \varepsilon_r)), \quad (\text{en ksi}) \quad (\text{A-6})$$

avec $E_0 \geq 22000 \text{ ksi}$

R : est le paramètre qui définit la courbure de la transition de la première à la deuxième asymptote (équation 4-3).

$$R = \frac{r\sigma_y}{C_2} \quad (\text{A-7})$$

où :

$$r = 0.074 - 1.092 \varepsilon_{\text{max } t}^p, \quad \text{en traction}, \quad (\text{A-7a})$$

$$r = 0.069 - 0.632 \varepsilon_{\text{max } c}^p, \quad \text{en compression}. \quad (\text{A-7b})$$

ε_r : est la déformation à la dernière inversion.

$\varepsilon_{\text{max } t}^p, \varepsilon_{\text{max } c}^p$ déformations plastiques maximales dans la demi boucle, en traction et en compression.

σ_y est la contrainte d'épuisement de l'acier, (en ksi).

$C_2 = 17$, en se basant sur des données expérimentales obtenues par **Aktan** [2].

Yield_flag : est le paramètre qui définit l'état d'épuisement de la fibre. S'il est 1, la fibre n'est pas épuisée dans aucune direction. S'il est 0, la fibre est épuisée une fois dans chaque direction. S'il est -1, la fibre est épuisée plus qu'une fois.

σ^* , ε^* , b : sont définis dans l'équation A-8.

$$\sigma^* = b\varepsilon^* + \frac{(1-b)\varepsilon^*}{(1+\varepsilon^{*R})^{1/R}} \quad (\text{A-8})$$

où :

$$\varepsilon^* = \frac{\varepsilon - \varepsilon_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}, \quad \sigma^* = \frac{\sigma - \sigma_r}{\sigma_0 - \sigma_r}$$

σ : est l'effort dans l'acier.

ε_r, σ_r : sont les coordonnées déformation et contrainte du point de revirement (figure.IV.1).

ε_0, σ_0 : sont les coordonnées déformation et contrainte du point d'intersection de la courbe primaire et l'asymptote (figure.IV.1) .

$b = \frac{E_2}{E_1}$: est le rapport des pentes de la courbe primaire et de l'asymptote.

$E_1 = \frac{\sigma_0 - \sigma_r}{\varepsilon_0 - \varepsilon_r}$: est la pente de la courbe primaire.

E_2 : est la pente de l'asymptote (figure.IV.1).

R : est le paramètre définissant la transition du parcours de la courbe primaire à l'asymptote.

$\varepsilon_{max t}^p, \varepsilon_{max c}^p$: sont définies dans l'équation 4-2.

Les calculs des déformations $\varepsilon_2, \varepsilon_0$ et la contrainte σ_0 sont donnés ci-dessous :

1. ε_2 est une fonction de la pente initiale de la courbe de déchargement et des coordonnées contrainte-déformation $(\varepsilon_r, \sigma_r)$, de l'inversion la plus récente (figureIV.3).

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_r - \frac{\sigma_r}{E_0} \quad (\text{A-9})$$

2. Pour calculer l'intersection des asymptotes, la direction du revirement doit être connu.

Si l'inversion se fait du côté de la traction (négatif) :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y - (\varepsilon_2 + \varepsilon_y) (\text{STH}) + \varepsilon_2 E_0}{(E_0 - (\text{STH}))}, \quad \sigma_0 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) E_0 \quad (\text{A-10})$$

Si l'inversion se fait du côté de la compression (positif) :

$$\varepsilon_0 = \frac{\sigma_y - (\varepsilon_y - \varepsilon_2) (\text{STH}) - \varepsilon_2 E_0}{((\text{STH}) - E_0)}, \quad \sigma_0 = (\varepsilon_0 - \varepsilon_2) E_0 \quad (\text{A-11})$$

Les règles régissant la courbe M-P sont indiquées dans le TableauA.2. La première colonne du Tableau A.2 définit le domaine dans lequel les coordonnées contrainte-déformation du point courant se trouve. Si la fibre n'est pas épuisée en aucune direction, le tracé se fera le long de la courbe primaire (figure A.2.a) dans chaque direction. Si la fibre est épuisée pour la première fois mais n'a pas encore exprimée un revirement (la courbe

en gras dans la figure A.2.c) et si le chargement continue, la condition dans la seconde colonne de la deuxième ligne s'applique. Si une inversion se produit, les conditions dans la troisième ligne du Tableau A.2 s'appliquent.

Tableau A. 2 : modèle adopté pour l'acier (Menegotto-Pinto) [7].

La fibre n'est épuisée dans aucune direction	$\sigma = \sigma_{cur} + E (\epsilon_{new} - \epsilon_{cur})$ sur la courbe primaire (figA.3.a) $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)				
La fibre est épuisée pour la première fois mais n'a pas encore exprimée un revirement	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Chargement</th> <th>Déchargement</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> $\sigma = \sigma_{cur} + (STH) (\epsilon_{new} - \epsilon_{cur})$ sur la courbe secondaire (figA.3) $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act) </td> <td> Aller à la troisième ligne, point de revirement </td> </tr> </tbody> </table>	Chargement	Déchargement	$\sigma = \sigma_{cur} + (STH) (\epsilon_{new} - \epsilon_{cur})$ sur la courbe secondaire (figA.3) $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)	Aller à la troisième ligne, point de revirement
Chargement	Déchargement				
$\sigma = \sigma_{cur} + (STH) (\epsilon_{new} - \epsilon_{cur})$ sur la courbe secondaire (figA.3) $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)	Aller à la troisième ligne, point de revirement				
	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Revirement</th> <th>Pas de revirement</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td> Calcul des paramètres de la nouvelle courbe M-P : $\sigma_r = \sigma_{cur}$ (act) $\epsilon_r = \epsilon_{cur}$ (act) $E_0 = [29000 - 108000 \epsilon_r - 1928 (1 - e^{(-390\sigma_r)})] \times 6.895$ (MPa) $E_0 \geq 22.0$ (ksi) [x 6.895 (MPa)] $\epsilon_2 = \epsilon_r - \frac{\sigma_r}{E_0}$ Si : $(\epsilon_2 < \epsilon_{max}^t) \epsilon_{max}^t = \epsilon_2$ Si : $(\epsilon_2 > \epsilon_{max}^c) \epsilon_{max}^c = \epsilon_2$ Si le revirement se fait dans la direction de la traction : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - (\epsilon_2 + \epsilon_y)(STH) + \epsilon_2 E_0}{(E_0 - (STH))}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Si le revirement se fait dans la direction de la compression : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - \epsilon_2 E_0 - (\epsilon_y - \epsilon_2)(STH)}{((STH) - E_0)}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Calcul de R en utilisant l'équation 2.9 Calcul de b en utilisant l'équation 2.7 $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$, $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$, $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act) </td> <td> Utilisation des paramètres $(\sigma_r, \epsilon_r, E_0, \epsilon_2, \epsilon_{max}^t, \epsilon_{max}^c, \epsilon_0, \sigma_0, b, R)$ calculés pour le point de revirement le plus récent afin de calculer : $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$ $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$ $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act) </td> </tr> </tbody> </table>	Revirement	Pas de revirement	Calcul des paramètres de la nouvelle courbe M-P : $\sigma_r = \sigma_{cur}$ (act) $\epsilon_r = \epsilon_{cur}$ (act) $E_0 = [29000 - 108000 \epsilon_r - 1928 (1 - e^{(-390\sigma_r)})] \times 6.895$ (MPa) $E_0 \geq 22.0$ (ksi) [x 6.895 (MPa)] $\epsilon_2 = \epsilon_r - \frac{\sigma_r}{E_0}$ Si : $(\epsilon_2 < \epsilon_{max}^t) \epsilon_{max}^t = \epsilon_2$ Si : $(\epsilon_2 > \epsilon_{max}^c) \epsilon_{max}^c = \epsilon_2$ Si le revirement se fait dans la direction de la traction : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - (\epsilon_2 + \epsilon_y)(STH) + \epsilon_2 E_0}{(E_0 - (STH))}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Si le revirement se fait dans la direction de la compression : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - \epsilon_2 E_0 - (\epsilon_y - \epsilon_2)(STH)}{((STH) - E_0)}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Calcul de R en utilisant l'équation 2.9 Calcul de b en utilisant l'équation 2.7 $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$, $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$, $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)	Utilisation des paramètres $(\sigma_r, \epsilon_r, E_0, \epsilon_2, \epsilon_{max}^t, \epsilon_{max}^c, \epsilon_0, \sigma_0, b, R)$ calculés pour le point de revirement le plus récent afin de calculer : $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$ $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$ $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)
Revirement	Pas de revirement				
Calcul des paramètres de la nouvelle courbe M-P : $\sigma_r = \sigma_{cur}$ (act) $\epsilon_r = \epsilon_{cur}$ (act) $E_0 = [29000 - 108000 \epsilon_r - 1928 (1 - e^{(-390\sigma_r)})] \times 6.895$ (MPa) $E_0 \geq 22.0$ (ksi) [x 6.895 (MPa)] $\epsilon_2 = \epsilon_r - \frac{\sigma_r}{E_0}$ Si : $(\epsilon_2 < \epsilon_{max}^t) \epsilon_{max}^t = \epsilon_2$ Si : $(\epsilon_2 > \epsilon_{max}^c) \epsilon_{max}^c = \epsilon_2$ Si le revirement se fait dans la direction de la traction : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - (\epsilon_2 + \epsilon_y)(STH) + \epsilon_2 E_0}{(E_0 - (STH))}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Si le revirement se fait dans la direction de la compression : $\epsilon_0 = \frac{\sigma_y - \epsilon_2 E_0 - (\epsilon_y - \epsilon_2)(STH)}{((STH) - E_0)}$, $\sigma_0 = (\epsilon_0 - \epsilon_2) E_0$ Calcul de R en utilisant l'équation 2.9 Calcul de b en utilisant l'équation 2.7 $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$, $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$, $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)	Utilisation des paramètres $(\sigma_r, \epsilon_r, E_0, \epsilon_2, \epsilon_{max}^t, \epsilon_{max}^c, \epsilon_0, \sigma_0, b, R)$ calculés pour le point de revirement le plus récent afin de calculer : $\epsilon^* = \frac{\epsilon_{new} - \epsilon_r}{\epsilon_0 - \epsilon_r}$ $\sigma^* = b \epsilon^* + \frac{(1-b)\epsilon^*}{(1 + \epsilon^{*R})^{1/R}}$ $\sigma = \sigma^* (\sigma_0 - \sigma_r) + \sigma_r$ $\sigma_{cur} = \sigma$ (act) $\epsilon_{cur} = \epsilon_{new}$ (act)				
Le revirement se produit après le premier épuisement					

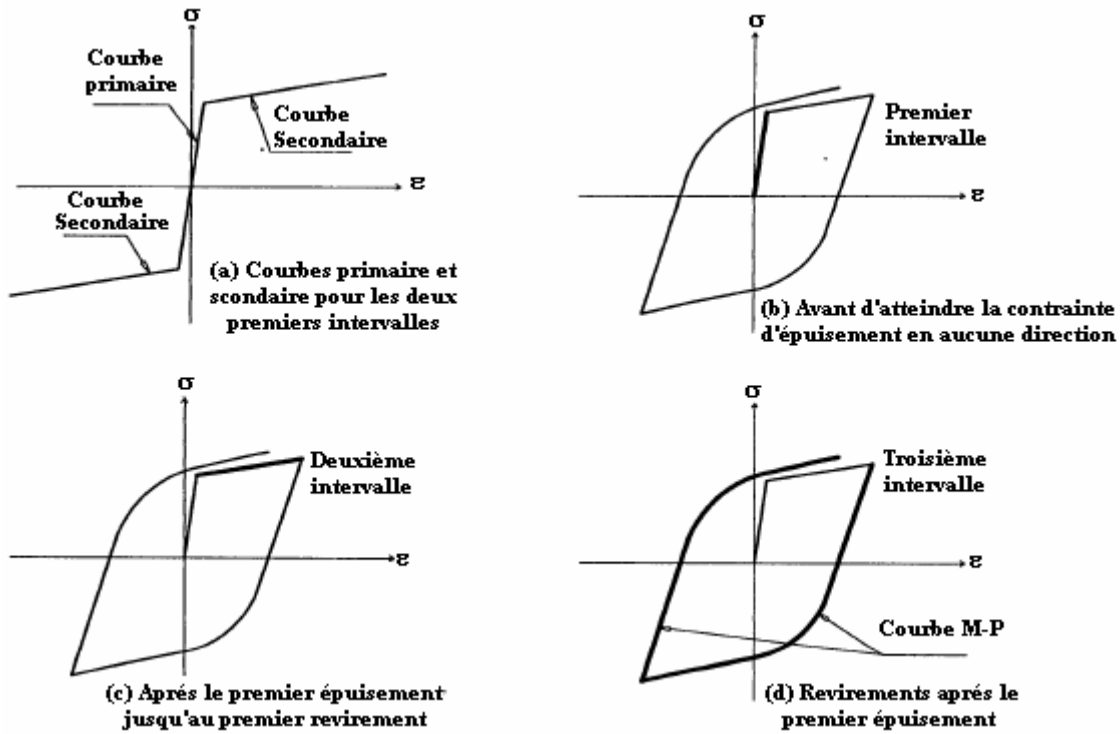
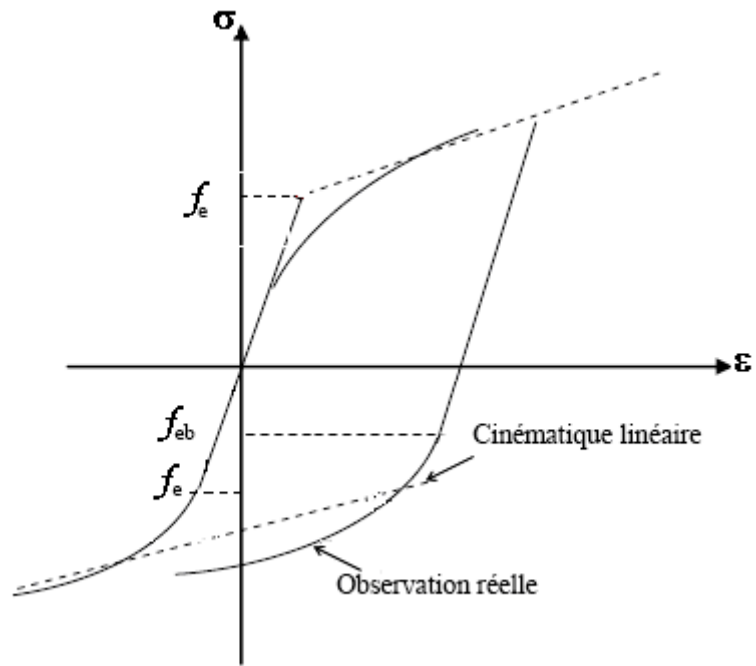


Figure A.2. 1: Courbes hystérésis représentatives indiquant les intervalles utilisés dans l'algorithme du modèle de l'acier de Mengotto-Pinto [7].

L'effet Bauschinger

Définition :

Lors des sollicitations cycliques de traction-compression, les propriétés de l'acier varient au cours des cycles. Lorsque une éprouvette est soumise à un essai de traction suivi d'un essai de compression nous constatons que la traction préalable écrouit le matériau dans le sens de traction (augmentation de la limite d'élasticité) mais l'adoucit dans le sens de la compression (c'est l'effet **Bauschinger**) [27]. La figure A.2.2 montre clairement que la limite d'élasticité en compression est plus faible que la limite initiale en compression $|f_{eb}| < |f_e|$.



**Figure .A.2. 2 : Comportement de l'acier en traction - compression :
Effet Bauschinger**