N° d'ordre : 70/2023.C/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR
En : Mathématiques
Spécialité: Mathématiques Fondamentales et Cryptographie

Par : MAHREZ Yugurta

Sujet

Applications des bases de Gröbner dans l'étude qualitative d'un système différentiel cubique

Soutenue publiquement, le 16/07/2023, devant le jury composé de :

(Nom et Prénom)	(Grade)	(Lieu d'exercice)	(Désignation)
M. REZAOUI Med-Salem	Maître de Conférence/A	à l'USTHB	Président
Mme DALI Dahira	Maître de Conférence/A	à l'USTHB	Directrice de thèse
M. BEHLOUL Djilali	Professeur	à l'USTHB	Examinateur 1
M. AIT MOKHTAR Ahmed	Professeur	à l'ENS Kouba	Examinateur 2
M. BERKANE Djamel	Maître de Conférence/A	à l'Univ. de Blida	Examinateur 3
M. SOUILAH Messaoud	Maître de Conférence/A	à l'USTHB	Examinateur 4

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse aux applications des bases de Gröbner dans l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux cubiques plans. On se propose dans un premier temps de déterminer les points d'équilibre d'un système différentiel polynômial dans un corps $\mathbb{k}$ de caractéristique zéro. Pour se faire, nous développerons deux méthodes algorithmiques, l'une basée sur la recherche d'une résolvante pour un système algébrique associé à un système différentiel polynômial donné, l'autre basée sur le calcul des bases de Gröbner. Dans un second temps, nous allons caractériser le nombre et la nature des points d'équilibre d'un système différentiel polynômial donné à l'aide de la théorie des invariants. En effet, grâce à une matrice de transformation associée à un système différentiel polynômial donné, on construit un système différentiel polynômial équivalent dont les coefficients sont des invariants. Par conséquent, grâce au théorème de Hartman-Grobman et à la théorie des invariants, on pourra caractériser la stabilité locale d'un point d'équilibre d'un système différentiel polynômial donné à l'aide des relations algébriques ou semi-algébriques en fonction des coeffcients du système différentiel polynômial considéré.

Table des matières

Introduction

Les bases de Gröbner est l'un des concepts développé dans la théorie des idéaux, le plus remarquable. On connait l'algorithme d'Euclide et les calculs qu'on peut effectuer avec cet algorithme dans l'anneau des polynômes d'une indéterminée à coefficients dans un corps. Les bases de Gröbner sont des systèmes de générateurs d'idéaux de polynômes de plusieurs indéterminées à coefficients dans un corps possédant des propriétés intéressantes. Elles viennent en particulier généraliser l'algorithme d'Euclide pour les polynômes de plusieurs variables. Elles permettent en particulier des résolutions algorithmiques de nombreux problèmes fondamentaux tels le test d'appartenance à un idéal et la détermination implicite des variétés. Le concept des bases de Gröbner, ainsi que les algorithmes qui les calculent, a été introduit par Bruno Buchberger en 1965 qui leur donna le nom de son directeur de thèse Wolfgang Gröbner. C'est un outil puissant dans la résolution des systèmes algébriques. A l'aide d'un procédé d'élimination elles ont permis la généralisation de la méthode de réduction de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires aux systèmes algébriques. Les bases de Gröbner contribuent essentiellement dans l'évolution du calcul formel. De plus en plus de travaux de recherches intensifs leurs sont dévolues et de nombreux chercheurs s'intéressent de plus en plus à la théorie constructive des bases de Gröbner pour améliorer les implementations et les algorithmes. Elles sont très riches en applications dans différents domaines mathématiques. En particulier dans l'algèbre commutative, l'algèbre différentielle, la géométrie algébrique, la théorie des invariants etc. Elles modélisent différents problèmes dans différents autres domaines, en robotique, en théorie du signal, en cryptographie, etc. Elles sont derrière la réalisation et l'évolution d'un grand nombre de logiciels de calcul formel. On peut citer Maple, Mathématica, Matlab, Magma, Singular etc.

L'étude qualitative des équations différentielles, introduite au début du 19-ème siècle par Henri Poincaré [17] est une nouvelle problématique pour l'étude de ces équations différentielles qui ne peuvent être résolues explicitement. À la fin du 19-ème siècle, la théorie des invariants introduite par Hilbert [8], a permis l'évolution de la théorie qualitative des équations différentielles. En effet, en 1890 Hilbert a prouvé l'existence d'une base d'invariants, et ce n'est qu'en 1893 qu'il a donné une preuve constructive du théorème qui dit que tout système fini de polynômes homogènes admet une base pour ses invariants. Hilbert a résolu aussi le problème de finitude de la base des syzygies des invariants des formes n-aires. En fait, ce théorème est une conséquence du fameux théorème fondamental Nullstellensatz.

Cette théorie devient un outil puissant dans l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux, lorsque Sibirskii [19] a eu l'idée d'écrire les coefficients des systèmes différentiels sous forme de coefficients tensoriels. Dans le cas des systèmes différentiels linéaires autonomes, la stabilité de Lyapunov d'un point d'équilibre est connue à l'aide de la classification de Poincaré [10]. Dans le cas des systèmes différentiels non- linéaires, le problème de leur stabilité se réduit dans certains cas à l'étude de la stabilité de certains systèmes différentiels linéaires. Henri Poincaré [17] a introduit une classification des champs de vecteurs linéaires qui regroupe les champs linéaires en un nombre fini de classes selon la nature de leurs points d'équilibre. Dans certains cas, cette classification permet d'étudier la stabilité locale des champs non-linéaires à l'aide du théorème de linéarisation de Hartman-Grobman [16]. En général, l'étude de la stabilité d'un point d'équilibre pour une équation différentielle non-linéaire est déterminée à l'aide d'une fonction appelée fonction de Lyapunov [11]. De nombreux travaux sont consacrés à la stabilité des systèmes différentiels non linéaires.

A l'aide de la théorie des invariants, d'importants résultats ont été obtenus tels que, le nombre et la nature des points, les formes normales, la classification géométrique et topologique des formes quadratiques et cubiques. Ainsi, pour appliquer la théorie des invariants dans l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux, nous devons d'abord construire un système minimal de générateurs de ces invariants pour les systèmes différentiels considérés. Les premiers travaux sur cette problématique reviennent à C. Sibirskii, N. Vulpe et D. Boularas [19, 21] qui ont construit un système minimal de générateurs d'invariants centro-affines des systèmes différentiels quadratiques plans, que plus tard, D. Boularas et D. Dali [1] ont déterminé une base de covariants centro-affines pour les systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans complets. Ces systèmes de générateurs permettent de dégager plusieurs résultats concernant l'étude qualitative des systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans. C. Sibirskii et ses étudiants (N. I. Vulpe, D. Boularas et M. N. Popa) [19, 21] arrivent à classifier les systèmes différentiels quadratiques plans homogènes (resp. quadratiques sans terme libre) par rapport au groupe $GL(2, \mathbb{R})$ en donnant une classification affine, géométrique et topologique complète.

Dans cette thèse, nous allons voir comment faire une étude qualitative d'un système différentiel polynômial de deux variables et ce, à l'aide des bases de Gröbner et de la théorie des invariants. Pour se faire nous partagerons notre thèse en 5 chapitres.

Dans le chapitre 1, nous allons introduire les bases de Gröbner. Pour cela, nous allons d'abord rappeler quelques notions algébriques telles que la division des polynômes de plusieurs variables et les idéaux. Ensuite, nous introduirons les S-polynômes, qui vont nous permettre de donner l'algorithme de Buchberger, qui n'est rien d'autre que l'algorithme de construction des bases de Gröbner. Pour finir, nous donnerons quelques résultats fondamentaux sur les bases de Gröbner, en particulier l'existance d'une base de Gröbner pour tout ideal de $\Bbbk\,[x]$.

Dans le chapitre 2, nous allons nous intéresser à la résolution des systèmes algébriques. Pour cela, nous allons introduire une théorie fondamentale, qui est la théorie de l'élimination et de l'extension. A l'aide des théorèmes des zéros de Hilbert et du test d'appartenance à un idéal, nous construirons une méthode algorithmique de résolution de systèmes algbériques.

Dans le chapitre 3, nous nous intéresserons à la théorie des invariants, en particulier aux covariants centro-affines. Nous énoncerons deux théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants, dont le théorème de gurevich, qui vont nous permettre de construire des familles génératrices d'invariants pour des systèmes différentiels donnés. Enfin, nous donnerons deux méthodes constructives permettant de réduire les familles génératrices d'invariants en familles génératrices minimales.

Dans le chapitre 4, nous allons nous intéresser aux systèmes différentiels polynômiaux de deux variables. Nous donnerons une méthode permettant de transformer un système différentiel polynômial en un système différentiel polynômial à coeffecients invariants (covariants centro-affines dans notre cas), et ce grâce à une matrice de transformation bien définie. Une fois notre système différentiel polynômial transformé, nous construirons grâce aux bases de Gröbner, deux méthodes algorithmiques permettant de déterminer et de caractériser les points d'équilibre du système différentiel consideré, dont les expressions sont des expressions de covariants centro-affines.

Dans le chapitre 5, nous allons faire une étude qualitative de systèmes différentiels polynômiaux cubiques plans. Dans un premier temps, nous rappellerons ce qu'est la stabilité locale d'un point d'équilibre d'un système différentiel polynômial plan. Dans un second temps, nous nous intéresserons aux systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans. En effet, la connaissance d'une matrice de transformation [19] et d'un système minimal de générateurs de covariants centro-affines [1] pour des systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans, nous permet de faire une étude qualitative directe de ces derniers. Pour finir, nous construirons une matrice de transformation pour des systèmes différentiels polynômiaux cubiques plans, et grâce aux théorèmes fondamentaux de la théorie des invariants, nous réduirons les invariants ainsi obtenus et passerons à l'étude qualitative de ces systèmes.

Chapitre 1

Bases de Gröbner

1.1 Rappels

Dans ce qui suit $\mathbb{k}$ est un corps de caractéristique zéro.

Considérons $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$ l'anneau des polynômes de n indéterminées. Posons $x=(x^1,...,x^n)\in\mathbb{k}^n$ et $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n)\in\mathbb{N}^n$. On designera par x^α le monôme $(x^1)^{\alpha_1}...(x^n)^{\alpha_n}$.
Soit f un polynôme de $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. Ainsi, f peut être considéré comme étant une fonction définie comme suit :

$$\begin{array}{rcl} f:\mathbb{k}^n & \longrightarrow & \mathbb{k} \\ a_i=(a_{i_1},...,a_{i_n}) & \longmapsto & f(a_i)=\sum_{\alpha_i} a_{\alpha_i}x^{\alpha_i}; i=1,...,n \end{array}$$

Définition 1.1.1 *On dira que $f=\sum_{\alpha\in A}a_\alpha x^\alpha, A\subset\mathbb{N};$ est un polynôme nul si tous ses coefficients a_{α_i} sont nuls.*

Définition 1.1.2 *Considérons un polynôme $f=\sum_{\alpha\in A}a_\alpha x^\alpha$, $A\subset\mathbb{N};$ de $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. Posons $x^{\alpha(f)}=\max\{x^\alpha,\alpha\neq 0\}$, alors :*

- *$\alpha(f)$ est dit multidegré de f ou simplement degré de f, noté* $\deg(f)$.
- *$x^{\alpha(f)}$ est appelé monôme dominant de f, noté $LM(f)$.*
- *$a_{\alpha(f)}$ est appelé coefficient dominant de f, noté $LC(f)$.*
- *$a_{\alpha(f)}x^{\alpha(f)}$ est appelé terme dominant de f, noté $LT(f)$.*

1.1.1 Division euclidienne

Soit $\mathbb{k}[x]$ l'anneau des polynômes d'une seule variable.

Proposition 1.1.1 *Soit $f\in\mathbb{k}[x]$. On a,*

$$f\equiv 0 \textit{ si et seulement si } f \textit{ est la fonction nulle, } \forall n\in\mathbb{N}^*.$$

Preuve. Si $f \equiv 0$ dans $\Bbbk[x]$, alors f est la fonction nulle, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
Supposons maintenant que f est la fonction nulle, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, nous voulons montrer que $f \equiv 0$ dans $\Bbbk[x]$. Procédons par récurrence sur le nombre de variables.
Pour $n = 1$: soit $m = \deg f$. Nous admettrons que f possède au plus m solutions dans $\Bbbk[x]$ (voir Proposition 1.1.3). Or, on a $f(a) = 0$, $\forall a \in \Bbbk$. Alors f est un polynôme nul.
Supposons que cela reste vrai pour le cas de $(n-1)$ variables. Soit $f \in \Bbbk[x]$, f peut s'écrire :

$$f(x^1, ..., x^{n-1}, x^n) = \sum_i g_i(x^1, ..., x^{n-1})(x^n)^i$$

avec $g_i \in \Bbbk[x^1, ..., x^{n-1}]$. Soit $(a_1, ..., a_{n-1}) \in \Bbbk^{n-1}$, on a alors :

$$f(a_1, ..., a_{n-1}, x^n) = \sum_i g_i(a_1, ..., a_{n-1})(x^n)^i \in \Bbbk[x^n]$$

et $\forall a_n$,

$$f(a_1, ..., a_{n-1}, a_n) = \sum_i g_i(a_1, ..., a_{n-1})(a_n)^i = 0$$

Alors :

$$g_i(a_1, ..., a_{n-1}) = 0, \ \forall i \Rightarrow f \equiv 0.$$

Ce qui achève la preuve. ■

Définition 1.1.3 *Soient f et g deux polynômes de $\Bbbk[x]$. On dira que g divise f, qu'on note g/f, s'il existe un $q \in \Bbbk[x]$ tel que $f = qg$.*

Proposition 1.1.2 *Soit $g \in \Bbbk[x]$ non nul. Pour tout $f \in \Bbbk[x]$, il existe deux polynômes uniques $q, r \in \Bbbk[x]$ tels que $f = qg + r$ et $r = 0$ où $\deg(r) < \deg(g)$.*

L'algorithme d'Euclide nous permet de déterminer ces deux polynômes.

Algorithme 1 : Entrée : deux polynômes f et g.
étape1.

$$\begin{array}{rcl} q & \leftarrow & 0 \\ r & \leftarrow & f \end{array}$$

étape2. tant que $r \neq 0$ et $LT(g)$ divise $LT(r)$ faire :

$$q \leftarrow q + \frac{LT(r)}{LT(g)}$$

$$r \leftarrow r - \frac{LT(r)}{LT(g)}g.$$

étape3. Sortir q, r.

Définition 1.1.4 *Soient f , $g \in \Bbbk[x]$. Un polynôme $h \in \Bbbk[x]$ est dit plus grand diviseur commun de f et g si ce polynôme h divise f et g et si un autre polynôme p divise f et g alors p divise h. On note $h = PGCD(f, g)$.*

Proposition 1.1.3 *Soit $f \in \Bbbk[x]$ non nul, de degré n. f possède au plus n racines dans $\Bbbk$.*

Preuve. On raisonne par récurrence.
Supposons que $n = 0$, alors f est une constante non nulle et elle vérifie la proposition.
Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour les polynômes de degré $n-1$.
Montrons que cela reste vrai pour les polynômes de degré n.
On a deux cas :

1. Si f ne possède pas de racine dans $\mathbb{k}$, la proposition est vérifiée.

2. Si f possède une racine a dans $\mathbb{k}$, on peut appliquer la division euclidienne et on a :
$$f = q(x-a) + r.$$
Or $r = 0$, donc $f = q(x-a)$ avec q polynôme de degré $n-1$. Ainsi q possède au plus $n-1$ racines, donc f possède au plus n racines.

Ce qui achève la preuve.

■

1.1.2 Division des polynômes de plusieurs variables

Pour l'algorithme de division des polynômes d'une seule variable, nous avons à faire à l'ordre imposé par le degré des monômes. Dans le cas des équations linéaires, on peut ordonner les variables $x^1, ..., x^n$ comme suit
$$x^1 > x^2 > ... > x^n$$
Ainsi, en s'inspirant du cas univarié et du cas linéaire, on voudrait arranger les termes des polynômes de plusieurs variables dans l'ordre décroissant (ou croissant). Sachant qu'un polynôme de plusieurs variables est une somme de monômes, nous devons comparer chaque paire de monômes pour établir leurs positions relatives propres. Pour se faire, nous devons introduire une relation dite d'ordre.

Définition 1.1.5 *Une relation d'ordre sur un ensemble est une relation binaire $\Re$ sur cet ensemble ayant les propriétés suivantes :*

1. *$\Re$ est réflexive ;*

2. *$\Re$ est antisymétrique ;*

3. *$\Re$ est transitive.*

Dans ce qui suit, on notera notre relation d'ordre $\Re$ par $\geq$.

Définition 1.1.6 *Une relation d'ordre sur un ensemble E notée $\geq$ est dite relation d'ordre total si, $\forall a, b \in E$; on a : $a \geq b$ ou $b \geq a$.*

Définition 1.1.7 *Soit E un ensemble ordonné par $\geq$. On dit que $\geq$ est un bon ordre si toute partie non vide de cet ensemble admet un minimum, c'est-à-dire,*
$$\forall A \subset E,\, A \neq \emptyset \Rightarrow \exists\, a \in A, \forall\, b \in A,\, b \geq a.$$

Lemme 1.1.1 *Si $\geq$ est un bon ordre sur E alors E est totalement ordonné par $\geq$.*

Preuve. $\forall a, b \in E$, la partie $\{a, b\}$ est non vide et admet un plus petit élément qui est soit a soit b ; donc $b \geq a$ ou $a \geq b$. ■

Définition 1.1.8 *Une relation $\geq$ sur un ensemble de monômes de $\mathbb{k}[x]$ est dite relation d'ordre monômial si $\geq$ satisfait les propriétés suivantes :*

1. *$\geq$ est un ordre total.*
2. *$\geq$ est compatible avec l'addition i.e. pour tout $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{N}^n$,si $x^\alpha \geq x^\beta$ alors $x^{\alpha+\gamma} \geq x^{\beta+\gamma}$.*
3. *$\geq$ est un bon ordre.*

Exemple 1.1.1 *Voici deux exemples :*

1. *Ordre lexicographique : On définit l'ordre lexicographique noté $\geq_{lex}$ comme suit :*
   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. On dit que $x^\alpha \geq_{lex} x^\beta$ si et seulement si le premier coefficient non nul de $\alpha - \beta$ est positif.
2. *Ordre lexicographique gradué : Pour α dans $\mathbb{N}^n$ on pose $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$. On définit l'ordre lexicographique gradué noté $\geq_{glex}$comme suit :*
   Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$. On dit que $x^\alpha \geq_{glex} x^\beta$ si et seulement si $(|\alpha| > |\beta|)$ ou $(|\alpha| = |\beta|$ et $x^\alpha \geq_{lex} x^\beta)$.

Soient $\geq$ un ordre monômial sur $\mathbb{k}[x]$ et $f \in \mathbb{k}[x]$ non nul tel que $f = \sum_{\alpha \in A} a_\alpha x^\alpha$ où $A \subset \mathbb{N}^n$. Supposons que f est ordonné dans le sens croissant des monômes.

Définition 1.1.9 *Soient $f \in \mathbb{k}[x]$ et $F = \{f_1, ..., f_s\}$ une famille de polynômes dans $\mathbb{k}[x]$. On dit que la famille F divise f ou f est divisible par F si et seulement si il existe $q_1, ..., q_s$ dans $\mathbb{k}[x]$ tels que $f = q_1 f_1 + ... + q_s f_s$. On dit que f est réduite à zéro modulo F et on écrit : $f \equiv 0 \mod (F)$.*

Théorème 1.1.1 *Fixons un ordre monômial et soit $F = \{f_1, ..., f_s\}$ une famille de polynômes dans $\mathbb{k}[x]$. Alors, tout $f \in \mathbb{k}[x]$ peut s'écrire :*

$$f = q_1 f_1 + ... + q_s f_s + r$$

et aucun terme de r n'est divisible par un des $LT(f_i)$.

Donnons alors l'algorithme de la division d'un polynôme f par une famille $F = \{f_1, ..., f_s\}$ dans $\mathbb{k}[x]$.

Algorithme 2 : Entrées : un polynôme f et une famille $F = \{f_1, ..., f_s\}$ de polynômes non nuls dans $\mathbb{k}[x]$.
étape1.

$$\begin{aligned} q_1 &\leftarrow 0, \\ &... \\ q_s &\leftarrow 0, \\ r &\leftarrow 0. \end{aligned}$$

étape2. Si $f = 0$ Alors aller à **étape4.**
Sinon aller à **étape3.**
étape3. Pour $i = 1, ..., s$ faire
Tant que $LM(f_i)$ divise $LM(f)$ faire

$$\begin{aligned} q_i &= q_i + \frac{LM(f)}{LM(f_i)} \\ f &= f - q_i f_i; \end{aligned}$$

sinon faire

$$\begin{aligned} f &= f - LT(f); \\ r &= r + LT(f) \end{aligned}$$

étape4. Sortir les polynômes $r, q_1, ..., q_s$.

L'écriture de $f = q_1 f_1 + ... + q_s f_s + r$ n'est pas unique puisque le polynôme r change avec le choix de l'ordre des polynômes $f_1, ..., f_s$.

Une question se pose alors : existe-t-il un moyen tel que le reste de la division d'un polynôme de plusieurs variables par une famille donnée $F = \{f_1, ..., f_s\}$ soit unique ? C'est ce que nous allons développer dans les sections suivantes grâce à l'introduction de la notion des bases de Gröbner.

1.1.3 Idéaux

Définition 1.1.10 *Soient $(A, +, \cdot)$ un anneau et I une partie de A. On dit que I est un idéal à droite (respectivement à gauche) de A si et seulement si les conditions suivantes sont respectées :*

1. *$(I, +)$ est un sous groupe de $(A, +)$;*
2. *$\forall i \in I, \forall a \in A, ia \in I$ (respectivement $ai \in I$).*

Définition 1.1.11 *Si A un anneau commutatif , on dira que I est un idéal principal de A, s'il est engendré par un seul élément. Autrement dit, il existe $a \in I$ tel que, tout élément de I s'écrit ah, où $h \in A$. On notera :*

$$I = \langle a \rangle .$$

Définition 1.1.12 *Soit $(A, +, \cdot)$ un anneau, on dit que A est principal si et seulement si A est commutatif, intègre et tous ses idéaux sont principaux.*

Définition 1.1.13 *Soit I un ensemble dans $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. I est un idéal s'il vérifie les propriétés suivantes :*

1. $0 \in I$,
2. *si* $f, g \in I$ *alors* $f + g \in I$,
3. *si* $f \in I$ *et* $h \in \mathbb{k}[x^1,...,x^n]$ *alors* $hf \in I$.

Proposition 1.1.4 *Soient $f_1, ..., f_s$ des polynômes dans $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. L'ensemble noté $\langle f_1, ..., f_s\rangle$ et défini par :*

$$\langle f_1, ..., f_s\rangle = \left\{ \sum_{i=1}^{s} h_i f_i \ ; i = \{1, ..., s\}; h_i \in \mathbb{k}[x^1,...,x^n] \right\}$$

est un idéal de $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$.

Preuve. Il est clair que $0 \in \langle f_1, ..., f_s\rangle$. En effet,

si on pose $h_i = 0 \ \forall i$ alors $\sum_{i=1}^{s} h_i f_i = 0$.
Soient $p, q \in \langle f_1, ..., f_s\rangle$ alors $p = \sum_{i=1}^{s} h_i f_i$ et $q = \sum_{i=1}^{s} k_i f_i$ donc :

$$p + q = \sum_{i=1}^{s} (h_i + k_i) f_i \ .$$

Soit $c \in \mathbb{k}[x^1,...,x^n]$ alors, $c \sum_{i=1}^{s} h_i f_i = \sum_{i=1}^{s} c h_i f_i = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i$ et $A_i f_i \in \langle f_1, ..., f_s\rangle$.
D'où le résultat. ■

Définition 1.1.14 *Soit I un idéal de $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. On dit que I est un idéal de type fini s'il existe une famille finie $\{f_1, ..., f_s\}$ de polynômes dans $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$ tel que $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$. On dit que I est engendré par $\{f_1, ..., f_s\}$ où encore que $\{f_1, ..., f_s\}$ est une famille génératrice de l'idéal I.*

Définition 1.1.15 *On appelle espace affine de dimension $n \in \mathbb{N}$ sur $\mathbb{k}$, l'ensemble défini par :*

$$\mathbb{k}^n = \{a = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n); \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{k}\} \, .$$

Définition 1.1.16 *On appelle variété affine dans $\mathbb{k}^n$, définie par $f_1, ..., f_s$; l'ensemble algébrique associé à $f_1(x^1,...,x^n), ..., f_s(x^1,...,x^n)$ défini par :*

$$\mathcal{V}\left(f_1, ..., f_s\right) = \{a \in \mathbb{k}^n; \ f_i(a) = 0, \forall i \in \{1, \ldots, n\}\} \, .$$

On notera $\mathcal{V}\left(f_1, ..., f_s\right)$ simplement $\mathcal{V}$.

Définition 1.1.17 *Soit $\mathcal{V}$ une variété affine dans $\mathbb{k}^n$. L'ensemble noté $I(\mathcal{V})$ et défini par :*

$$I(\mathcal{V}) = \left\{ f \in \mathbb{k}[x^1,...,x^n]; f(a_{i_1}, ..., a_{i_n}) = 0 \ \forall (a_{i_1}, ..., a_{i_n}) \in \mathcal{V} \right\}$$

est un idéal de $\mathbb{k}[x^1,...,x^n]$. $I(\mathcal{V})$ est appelé idéal de la variété $\mathcal{V}$.

Proposition 1.1.5 *Soient $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ deux variétés affines on a :*

1. $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ *si et seulement si* $I(\mathcal{V}) \supset I(\mathcal{W})$.

2. $\mathcal{V} = \mathcal{W}$ *si et seulement si* $I(\mathcal{V}) = I(\mathcal{W})$.

Preuve.

1. Si $\mathcal{V} \subset \mathcal{W}$ alors, $\forall a \in \mathcal{V}$; $a \in \mathcal{W}$ donc, $\forall f \in I(\mathcal{W})$, $f(a) = 0$ alors, $f \in I(V)$. D'où $I(\mathcal{W}) \subset I(\mathcal{V})$.
2. Découle de (1).

■

Définition 1.1.18 *Un idéal* $I \subset \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ *est dit idéal monômial s'il est engendré par des monômes, c'est-à-dire qu'il existe* $A \subset \mathbb{N}^n$ *tel que :*

$$I = \{f \in \mathbb{k}[x], f = \sum_{\alpha \in A} h_\alpha x^\alpha \ \text{où}\ h_\alpha \in \mathbb{k}[x]\}$$

On note $I = \langle x^\alpha, \alpha \in A \rangle$.

Dans toute la suite, on notera par $\mathbb{k}[x]$ l'anneau des polynômes de n variables $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$.

Définition 1.1.19 *Un idéal* I *de* $\mathbb{k}[x]$ *est dit de type fini s'il existe une famille finie* $\{f_1, ..., f_s\}$ *dans* I *tel que* $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$.

Lemme 1.1.2 *Soit* $I = \langle x^\alpha, \alpha \in A \rangle$ *un idéal monômial de* $\mathbb{k}[x]$.

$$x^\beta \in I \Leftrightarrow \exists \alpha \in A \ \text{tel que}\ x^\alpha / x^\beta.$$

Preuve. Si x^α divise x^β alors $x^\beta \in I$.
Supposons que $x^\beta \in I$ alors $x^\beta = \sum_\alpha p_\alpha x^\alpha$ avec $\alpha \in A$ et p_α dans $\mathbb{k}[x]$. Donc $p_\alpha x^\alpha$ est un multiple de x^α, alors x^β est un multiple de x^α ou encore, x^α divise x^β.
Le lemme est démontré. ■

Lemme 1.1.3 (Dickson Lemma) *Tout idéal monômial est de type fini.*

Preuve. Il s'agit de montrer que si $I = \langle x^\alpha, \alpha \in A \rangle$ est un idéal monômial de $\mathbb{k}[x]$, alors il existe une famille finie $\{\alpha_1, ..., \alpha_s\}$ dans A telle que $\{x^{\alpha_1}, ..., x^{\alpha_s}\}$ engendre I.
Procédons par récurrence sur n. Soit I un idéal monômial de l'anneau $\mathbb{k}[x]$ des polynômes univariés. Soit $A = \{\alpha; \alpha \in \mathbb{N}\}$ une partie de $\mathbb{N}$, donc A possède un plus petit élément. Soit β cet élément. $\forall \alpha \in A, x^\beta$ divise x^α. Alors I est engendré par x^β. Le lemme de Dickson est donc vrai dans le cas $n = 1$.

Supposons maintenant que tout idéal monômial de l'anneau $\mathbb{k}[x]$ des polynômes de $(n-1)$ variables est de type fini et montrons qu'il en est de même pour tout idéal I monômial de l'anneau $\mathbb{k}[x]$ des polynômes de n variables. Soit $r \geq 0$ et $J_r = \{x^\alpha, \alpha \in \mathbb{N}^{n-1}\}$ l'idéal monômial de l'anneau $\mathbb{k}[x]$ des polynômes de $(n-1)$ variables tel que $x^\alpha (x^n)^r \in I$. Soit $(J_r)_r$ la suite formée par de tels idéaux. C'est une suite strictement croissante. La réunion de ces idéaux, $\cup_r J_r$, est un idéal monômial de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^{n-1}]$ et donc de type fini, alors $\exists \left\{\alpha_{m_1}, ..., \alpha_{m_{s'}}\right\} \in \mathbb{N}^{n-1}$ tel que $\{x^{\alpha_{m_1}}, ..., x^{\alpha_{m_{s'}}}\}$ engendre $\cup_r J_r$. Posons $J_m = \cup_r J_r$, alors $\forall r > m, J_r = J_m$. Ce qui implique que la suite des idéaux $(J_r)_r$ est stationnaire. Comme J_r est de type fini alors $\exists\ x^{\alpha_{r_1}}, ..., x^{\alpha_{r_{s''}}} \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^{n-1}]$ tels que la famille $\{x^{\alpha_{r_1}}, ..., x^{\alpha_{r_{s''}}}\}$ engendre J_r.

Considérons l'idéal J engendré par les monômes $x^{\alpha_{r_1}}(x^n)^r, ..., x^{\alpha_{r_{s''}}}(x^n)^r$. On a $J \subset I$. Montrons que $I \subset J$. Soit $\alpha = \{\alpha_1, ..., \alpha_{n-1}, \alpha_n\} \in \mathbb{N}^n$. Alors $x^\alpha = x^\gamma(x^n)^{\alpha_n} \in I$ où $x^\gamma \in J_{\alpha_n}$, par conséquent, il existe $r \in \{1, \ldots, m\}$ tel que $x^\gamma \in J_r$. Donc x^γ est divisible par l'un des $x^{\alpha_{r_i}}$. De plus $(x^n)^r$ divise $(x^n)^{\alpha_n}$ alors un des monômes $x^{\alpha_{r_1}}(x^n)^r, ..., x^{\alpha_{r_{s''}}}(x^n)^r$ divise x^α. D'où $I \subset J$.
Ce qui achève la peuve du lemme de Dickson. ■

Notation 1.1.1 *Soit I un idéal de $\mathbb{k}[x]$. On note par :*

$$LT(I) = \{cx^\alpha \in \mathbb{k}[x]/\exists f \in I, LT(f) = cx^\alpha\}$$

et $\langle LT(I)\rangle$ l'idéal engendré par les éléments de $LT(I)$.

Corollaire 1.1.1 *L'idéal $\langle LT(I)\rangle$ est un idéal monômial de type fini.*

1.2 Construction des bases de Gröbner

Définition 1.2.1 *Soient I un idéal de $\mathbb{k}[x]$ muni d'un ordre monômial et $G = \{g_1, ..., g_s\}$ une famille dans $\mathbb{k}[x]$. G est dite base de Gröbner de I si on a :*

$$\langle LT(I)\rangle = \left\langle LT(g_1), ..., LT(g_{s)}\right\rangle.$$

Une question se pose. Étant donné un idéal I de $\mathbb{k}[x], I$ possède-t-il une base de Gröbner $G = \{g_1, \ldots, g_s\}$, et a-t-on $I = \langle g_1, \ldots, g_s\rangle$? Nous allons y répondre dans ce qui suit.

Théorème 1.2.1 *Toute suite croissante d'idéaux dans $\mathbb{k}[x]$ est stationnaire.*

Preuve. Soit $(I_r)_r$ une suite d'idéaux telle que $I_1 \subset I_2 \subset ... \subset \mathbb{k}[x]$. Considérons $I = \cup_{r\geq 1} I_r$. Soit $G = \{g_1, ..., g_s\}$ une base finie de I. Pour tout $i = 1, ..., s$; il existe r_i tel que $g_i \in I_{r_i}$.
Soit $r_0 = \max(r_i)$. Comme $(I_r)_r$ est croissante on a $g_1, ..., g_s \in I_{r_0}$, donc $I = I_{r_0}$.
Le théorème est démontré. ■

Théorème 1.2.2 *Tout idéal I de $\mathbb{k}[x]$ possède une base de Gröbner G. De plus,*

$$I = \langle G\rangle.$$

Preuve. L'existence d'une base de Gröbner pour tout idéal I résulte du fait que l'idéal $\langle LT(I)\rangle$ est monomial, donc de type fini. Par conséquent, il existe une famille

$$G = \{g_1, ..., g_s\} \in I$$

telle que

$$\langle LT(I)\rangle = \langle LT(g_1), ..., LT(g_s)\rangle.$$

Montrons que G engendre I. Soit $f \in I$. La division de f par G nous donne :

$$f = a_1 g_1 + ... + a_s g_s + r$$

avec $LT(r)$ n'est divisible par aucun des $LT(g_i)$. Si $r \neq 0$, alors :

$$r = f - a_1 g_1 + ... + a_s g_s \Rightarrow r \in I$$

donc $LT(r) \in \langle LT(I) \rangle$. Par conséquent, $\exists g_i \in G$ tel que $LT(r)$ est divisible par $LT(g_i)$ ce qui est impossible, donc $f = a_1 g_1 + ... + a_s g_s$. D'où $\{g_1, ..., g_s\}$ engendre I. Le théorème est démontré. ■

Théorème 1.2.3 (Théorème de la base finie de Hilbert) *Tout idéal de $\Bbbk[x]$ est de type fini.*

Preuve. Le théorème de la base de Hilbert peut être vu comme une conséquence du théorème précédent. ■

Définition 1.2.2 *Soient x^α et x^β deux monômes. On appelle plus petit commun multiple de x^α et x^β, qu'on note $PPCM(x^\alpha, x^\beta)$ le monôme x^γ où $\gamma_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$.*

Définition 1.2.3 *Soient $f, g \in \Bbbk[x]$. On appelle polynôme de Syzygy ou simplement S-polynôme de f et g, qu'on note $S(f, g)$ la combinaison polynômiale :*

$$S(f, g) = \frac{x^\gamma}{LT(f)} f - \frac{x^\gamma}{LT(g)} g,$$

où :

$$x^\gamma = PPCM(LM(f), LM(g)).$$

Lemme 1.2.1 *Soit $f \in \Bbbk[x]$. Si la division de f par une famille finie $\{f_1, ..., f_s\}$ dans $\Bbbk[x]$ donne :*

$$f = q_1 f_1 + ... + q_s f_s + r$$

alors,

$$LM(r) \leq LM(f)$$

et

$$LM(q_i f_i) \leq LM(f), \forall i \in \{1, ..., s\}.$$

Preuve. Découle de la division des polynômes de plusieurs variables. ■

Lemme 1.2.2 *Soient $i > j$ et $\{f_1, ..., f_s\}$ une famille finie dans $\Bbbk[x]$. Supposons que le reste de la division de $S(f_i, f_j)$ par $\{f_1, ..., f_s\}$ est nul, c'est-à-dire,*

$$S(f_i, f_j) = q_1 f_1 + ... + q_s f_s,$$

alors le reste de la division de $\dfrac{LC(f_j)PPCM(LM(f_i), LM(f_j))}{LM(f_i)} f_i$ par $\{f_1, ..., f_s\}$ est nul et on a :

$$\frac{LC(f_j)PPCM(LM(f_i), LM(f_j))}{LM(f_i)} f_i = b_1 f_1 + ... + b_s f_s$$

où pour tout $k \neq j, b_k = q_k$ et

$$b_j = q_j + LM\left(\frac{LC(f_i)PPCM(LM(f_i), LM(f_j))}{LM(f_j)}\right).$$

Preuve. Découle de la division des polynômes de plusieurs variables et du fait que

$$LM(S(f_i, f_j) \leq LM\left(\frac{LC(f_j)PPC(LM(f_i), LM(f_j))}{LM(f_i)} f_i\right)$$

où

$$LM\left(\frac{LC(f_j)PPCM(LM(f_i), LM(f_j))}{LM(f_i)} f_i\right) = PPCM(LM(f_i), LM(f_j)).$$

■

Avant de donner l'algorithme qui construit une base de Gröbner pour un idéal I ; nous allons énoncer un théorème connu sous le nom de Critère de Buchberger, permettant de caractériser une base de Gröbner d'un idéal I.

Définition 1.2.4 *Soient $I \subset \Bbbk[x]$ et $G = \{g_1, ..., g_s\}$ une famille génératrice de I. On dit qu'un terme mg_i est réductible si on peut l'écrire comme suit :*

$$mg_i = hg_j + \sum_{k=1}^{s} r_k g_k$$

où h et r_k des monômes avec $j < i$ et $LM(hg_j) = LM(mg_i)$ lorsque $LM(r_k g_k) < LM(mg_i)$.

Théorème 1.2.4 (Critère de Buchberger) *Soient $I \subset \Bbbk[x]$ et $G = \{g_1, ..., g_s\}$ une famille génératrice de I.*
G est une base de Gröbner si et seulement si, $\forall (i, j)$; tel que $i \neq j$, le reste de la division de $S(g_i, g_j)$ par G est nul.

Preuve. Supposons que G est une base de Gröbner de I. On sait que $S(g_i, g_j) \in I$ alors le reste de la division de $S(g_i, g_j)$ par G est nul.
Supposons maintenant que le reste de la division des $S(g_i, g_j)$ par G soit nul. On veut montrer que G est une base de Gröbner de I, c'est-à-dire :

$$\langle LT(I) \rangle = \langle LT(g_1), ..., LT(g_s) \rangle .$$

Soit $f \in I$. On veut montrer que $LT(f)$ est dans $\langle LT(g_1), ..., LT(g_s) \rangle$. Cela revient à montrer que l'un des $LT(g_i)$ divise $LT(f)$.
f peut s'écrire :

$$f = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} g_i,$$

où $m_{i,k}$ sont des monômes. En remplaçant chaque $m_{i,k}g_i$ par sa forme réduite, on a :

$$f = \sum_{i=1}^{n} h_{i,k} g_i$$

tel qu'aucun des termes n'est réductible. Alors s'il existe un i, k tel que $LM(h_{i,k}g_i) = LM(f)$, donc $LM(g_i)$ divise $LM(f)$ sinon il existerait au moins deux termes hg_i et $h^{'}g_j$ avec $i < j$ tels que :

$$\begin{aligned} LM(hg_i) &= LM(h^{'}g_j) \\ &= LM(f) \end{aligned}$$

et
$$LM(h)LM(g_i) = LM(h^{'})LM(g_j)$$
par conséquent, il existe un monôme m tel que :
$$LM(h)LM(g_i) = mPPCM(LM(g_i), LM(g_j)),$$
d'où :
$$LM(h) = m\frac{PPCM(LM(g_i), LM(g_j))}{LM(g_j)}.$$
Supposons que $LC(h) = cLC(g_j)$ alors :
$$hg_i = cm\frac{LC(g_j)PPCM(LM(g_i), LM(g_i)}{LM(g_i)}$$
ce qui implique que le terme hg_i est réductible, ce qui est impossible. Donc l'écriture $f = \sum_{i=1}^{n} h_i g_i$, f possède un seul terme tel que :
$$\deg(h_i g_i) = \deg(f)$$
et donc :
$$f \in \langle LT(g_1), ..., LT(g_s)\rangle .$$
Le théorème est démontré.
■

Soit $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$ un idéal de $\Bbbk[x]$ non nul. La caractérisation de Buchberger (1.2.4) nous assure que l'algorithme suivant se termine et nous retourne une base de Gröbner à partir du système de générateurs $\{f_1, ..., f_s\}$.

Algorithme 3 : Entrées : $\{f_1, ..., f_s\}$ une famille génératrice d'un idéal de $\Bbbk[x]$.
étape1. Pour tout $i \neq j$, diviser $S(g_i, g_j)$ par $\{f_1, ..., f_s\}$.
étape2. Si tous les restes sont nuls retourner $\{f_1, ..., f_s\}$.
étape3. Sinon faire $G = \{f_1, ..., f_s, r_1, ..., r_t\}$
où $r_1, ..., r_t$ sont les restes de **étape1.**
étape4. Retourner G une base de Gröbner.

Preuve. Supposons que l'algorithme se termine. On vérifie en appliquant le théorème (1.2.4) que G est une base de Gröbner de I.
Montrons maintenant que l'algorithme termine au bout de n-itérations. Posons G_n l'ensemble obtenu après n-itérations de l'algorithme et G_{n+1} l'ensemble obtenu après une itération de l'algorithme sur G_n. Considérons alors la suite $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Cette suite est strictement croissante. Alors $\langle LT(G_n)\rangle \subset \langle LT(G_{n+1})\rangle$ et donc les $\langle LT(G_n)\rangle$ forment une suite croissante d'idéaux de $\langle LT(I)\rangle$ qui sont des idéaux monômiaux. Ainsi, par le Lemme de Dickson (1.1.3) cette suite est stationnaire et donc il existe un rang $m \geq 1$ tel que $\langle LT(G_m)\rangle = \langle LT(G_{m+1})\rangle$. Supposons qu'il existe un $r \in G_{m+1}$ et $r \notin G_M$. Il est le reste de la division d'un S-polynômes de G_m. En particulier $LT(r)$ n'est divisible par aucun des termes dominants de G_m ainsi $LT(r) \notin \langle LT(G_M)\rangle$, ce qui est absurde car $\langle LT(G_m)\rangle = \langle LT(G_{m+1})\rangle$. ■

1.3 Propriétés des Bases de Gröbner

Proposition 1.3.1 *Soit* $\{g_1, ..., g_s\}$ *une base de Gröbner d'un idéal* I *et* $f \in \Bbbk[x]$ *. Alors il existe un unique* $r \in \Bbbk[x]$ *satisfaisant les propriétés suivantes :*

1. *r n'est divisble par aucun des $LT(g_i)$.*

2. *$\exists\, g \in I$ tel que, $f = g + r$.*

Preuve. La division de f par $\{g_1, ..., g_s\}$ dans $\Bbbk[x]$ nous donne :

$$f = q_1g_1 + ... + q_sg_s + r$$

tel qu'aucun terme de r n'est divisible par un des $LT(g_i), \forall i = \{1, ..., s\}$. En posons $g = q_1g_1 + ... + q_sg_s$,où $g \in I$, f s'écrit :

$$f = g + r.$$

Par conséquent, r et g vérifient (1) et (2).

Montrons l'unicité de r. Supposons $\exists r_1, r_2$ tel que $r_1 \neq r_2$ vérifiant les propriétés (1) et (2). Posons $r = r_1 - r_2$. Par conséquent $r \in I$, d'où $LT(r)$ est divisible par l'un des $LT(g_i)$. Ce qui est absurde puisque aucun terme de r_1, r_2 n'est divisible par $LT(g_i), \forall i = \{1, ..., s\}$. D'où $r = 0$, ce qui implique $r_1 = r_2$. ■

Corollaire 1.3.1 *Soient* $\{g_1, ..., g_n\}$ *une base de Gröbner de l'idéal* I *et* $f \in \Bbbk[x]$*, on a :*

$$f \in I \Leftrightarrow f = q_1g_1 + ... + q_sg_s$$

Autrement dit, le reste de la division de f par $\{g_1, ..., g_n\}$ est nul.

Preuve. Supposons que $f \in I$ et que le reste de la division de f par $\{g_1, ..., g_n\}$ ne soit pas nul. Donc :

$$r = f - q_1g - ... - q_ng_n \in I,$$

par conséquent, $LT(r) \in \langle LT(g_i)\rangle$, c'est-à-dire, l'un des $LT(g_i)$ divise $LT(r)$, ce qui est impossible. ■

Remarque 1.3.1 *Les bases de Gröbner obtenues par l'algorithme de Buchberger sont assez grandes et peu faciles à utiliser dans la pratique. En effet elles contiennent des éléments qui se répètent. Le lemme suivant nous permet de construire des bases moins grosses.*

Lemme 1.3.1 *Soit* G *une base de Gröbner d'un idéal* I*. Si* $g \in G$ *tel que* $LT(g) \in \langle LT(G \backslash \{g\})\rangle$*, alors* $G \backslash \{g\}$ *est aussi une base de Gröbner de* I*.*

Preuve. En effet, on a $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$ et $LT(g) \in LT(G\backslash\{g\})$. Donc $\langle LT(G\backslash\{g\})\rangle = \langle LT(I)\rangle$, d'où $G\backslash\{g\}$ est une base de Gröbner de I. ■

Définition 1.3.1 *Soit* G *une base de Gröbner de* I*. On dit que* G *est minimale si :*

1. *$LC(g) = 1$, $\forall g \in G$.*

2. *$\forall g \in G, LT(g) \notin \langle LT(G\backslash\{g\})\rangle$.*

Lemme 1.3.2 *Soient G et G' deux bases de Gröbner minimales alors, $LT(G) = LT(G')$ et G, G' ont le même nombre d'éléments.*

Preuve. Supposons G une base de Gröbner minimale. Si $g \neq g'$ dans G alors $LT(g)$ ne divise pas $LT(g')$. De plus G et $LT(G)$ possèdent le même nombre d'éléments. Il nous suffit de montrer que $LT(G) = LT(G')$. Soit $g \in G$. G' est une autre base de Gröbner minimale de I, donc $LT(g)$ est divisible par l'un des $LT(g')$ de G'. De même, il existe h dans G tel que $LT(h)$ divise $LT(g')$, donc $LT(h)$ divise $LT(g)$. Or G est minimale, donc $h = g$. Alors $LT(g') = LT(g)$, d'où $LT(G) \subset LT(G')$. On montre de la même manière que $LT(G') \subset LT(G)$.
Le lemme est démontré. ■

Définition 1.3.2 *Une base de Gröbner G minimale est dite réduite si, pour toute paire d'indices (i, j) telle que $i \neq j$, aucun terme de g_i n'est divisible par $LT(g_j)$.*

Proposition 1.3.2 *Tout idéal I de $\Bbbk[x]$ admet une unique base de Gröbner réduite.*

Preuve. Montrons d'abord l'existence d'une base de Gröbner réduite. Soient G une base de Gröbner minimale et $g \in G$. Considérons h le reste de la division de g par $G\backslash\{g\}$. Comme G est minimale alors $LT(g)$ n'est divisible par aucun des éléments de $G\backslash\{g\}$. $LT(g) = LT(h)$ (car $LT(g)$ est considéré comme reste dans l'algorithme de la division à des polynômes de n variables). Posons :

$$G' = (G\backslash\{g\}) \cup \{h\}.$$

C'est une base de Gröbner minimale (par construction et on a $LT(G) = LT(G')$). h est un élément réduit (car issu de la division de g par G). On refait de même pour chaque élément de G et on obtient ainsi une base de Gröbner réduite.
Montrons maintenant l'unicité d'une base de Gröbner réduite. Soient G et G' deux bases de Gröbner réduites de I alors G et G' sont minimales donc $LT(G)$ et $LT(G')$ ont même cardinal. Si $g \in G$, il existe un $g' \in G'$ tel que $LT(g) = LT(g')$ et donc $g - g' \in I$. Or $g - g'$ n'est divisible par aucun des éléments de $LT(G) = LT(G')$, donc $g = g'$.
D'où la proposition. ■

Chapitre 2

Systèmes algébriques

Dans ce chapitre, nous allons mettre en évidence le role des bases de Gröbner dans la résolution des systèmes algébriques. Pour cela nous devons d'abord introduire certains résultats primordiaux.

Soit

$$\begin{cases} P_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ \\ P_s(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases} \tag{2.1}$$

un système algébrique donné, tel que $P_1, ..., P_s$ sont des polynômes dans $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$.

Lemme 2.0.1 *Si $\mathcal{V}$ et $\mathcal{W}$ de $\mathbb{k}^n$ sont des variétés affines alors il en est de même pour leur intersection $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ et leur réunion $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$.*

Preuve. Montrons d'abord que $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ est une variété affine de $\mathbb{k}^n$.
Considérons $\mathcal{V} = \mathcal{V}(f_1, ..., f_s)$ et $\mathcal{W} = \mathcal{V}(g_1, ..., g_r)$. Posons $a = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$. Si $a \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ alors $f_i(a) = g_j(a) = 0$, $\forall i \in \{1, ..., s\}$ et $\forall j \in \{1, ..., r\}$. Alors :

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{V}(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r). \tag{2.2}$$

De plus,

$$\mathcal{V}(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r) \subset \mathcal{V} \cap \mathcal{W} \tag{2.3}$$

par construction. Par conséquent, d'après (2.2) et (2.3) on a :

$$\mathcal{V} \cap \mathcal{W} = \mathcal{V}(f_1, ..., f_s, g_1, ..., g_r).$$

Donc $\mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ est une variété affines de $\mathbb{k}^n$.
Montrons d'abord que $\mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ est une variété affines de $\mathbb{k}^n$.
Soit $a \in \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$. Alors $a \in \mathcal{V}$ ou $a \in \mathcal{W}$. Si $a \in \mathcal{V}$ alors $\forall i \in \{1, ..., s\}, f_i(a) = 0$. Donc $\forall j \in \{1, ..., r\}, f_i(a)g_j(a) = 0$. Par conséquent $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i,j})$. Idem pour $\mathcal{W}$. D'où :

$$\mathcal{V} \cup \mathcal{W} \subset \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i,j}).$$

Soit $a \in \mathcal{V}(\{f_i g_j\}_{i,j})$. Si $a \in \mathcal{V}$ c'est terminé, sinon $\exists f_{i_0}$tel que $f_{i_0}(a) \neq 0$. Or $f_{i_0}(a)g_j(a) = 0$. Alors $a \in \mathcal{W}$, donc $a \in \mathcal{V} \cup \mathcal{W}$ d'où l'égalité.
Le lemme est démontré. ■

2.1 Résultants

2.1.1 Résultants des polynômes d'une variable

Soit $\mathbb{k}[x]$ l'anneau des polynômes d'une variable. On veut déterminer un facteur commun de deux polynômes de $\mathbb{k}[x]$ sans passer par la factorisation et le calcul du $PGCD$, autrement dit « la division euclidienne ».

Lemme 2.1.1 *Soient f $,g \in \mathbb{k}[x]$ de degrés l et m respectivement. Alors f et g possèdent un facteur commun si et seulement si $\exists$ $A, B \in \mathbb{k}[x]$ tels que :*

1. $AB \neq 0$;
2. $\deg A \leq m-1$ *et* $\deg B \leq l-1$;
3. $Af + Bg = 0$.

Preuve. Supposons qu'il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{k}[x]$ qui vérifient les conditions (1), (2) et (3). Si f et g ne possèdent pas de facteurs communs alors $PGCD(f, g) = 1$. Par conséquent, $\exists$ $\widetilde{A}$, $\widetilde{B} \in \mathbb{k}[x]$ tels que :

$$\widetilde{A}f + \widetilde{B}g = 1 \tag{2.4}$$

Or on sait que $Af + Bg = 0$ donc, $Af = -Bg$. En multipliant (2.4) par B on a :

$$\begin{aligned} B &= B\widetilde{A}f + B\widetilde{B}g \\ &= \left(B\widetilde{A} - \widetilde{B}A\right) f \end{aligned}$$

d'où $\deg B > \deg f$, ce qui est impossible par hypothèse. Donc $PGCD(f, g) \neq 1$. D'où notre résultat.
Supposons maintenat que f et g possèdent un facteur commun h. Donc h/f et h/g. Autrement dit, $f = hf_1$ et $g = hg_1$. Ainsi, $fhg_1 = ghf_1$,d'où $fg_1 - gf_1 = 0$ avec f_1 et g_1 vérfiant les conditions (1), (2) et (3).
D'où le résultat. ■

Le lemme que nous venons de voir nous dit que si f, $g \in \mathbb{k}[x]$ possèdent un facteur commun alors il existe A et B tel que $Af + Bg = 0$. On se demande donc de quelle manière doit-on procéder pour trouver formellement ces polynômes A et B.

Posons :

$$\left\{ \begin{array}{l} A = c_0x^{q-1} + \ldots + c_{q-1} \\ B = d_0x^{p-1} + \ldots + d_{p-1} \end{array} \right. \text{et} \left\{ \begin{array}{l} f = a_0x^p + \ldots + a_p \\ g = b_0x^q + \ldots + b_q \end{array} \right.$$

avec $a_0b_0 \neq 0$.On cherche les coefficients c_i et d_j tel que $Af + Bg = 0$, c'est-à-dire les coefficients c_i et d_j vérifiant le système :

$$\left\{ \begin{array}{c} a_0c_0 + b_0d_0 = 0 \\ a_1c_0 + a_0c_1 + b_1d_0 + b_0d_1 = 0 \\ \ldots \\ a_pc_{q-1} + b_qd_{p-1} = 0 \end{array} \right. . \tag{2.5}$$

C'est un système linéaire de $p + q$ équations et $p + q$ inconnues.

Définition 2.1.1 *Soient f et $g \in \Bbbk[x]$. On appelle matrice de Sylvester de f et g en x, notée $Syl(f,g,x)$, la matrice associée au système (2.5) où $a_i, b_j \in \Bbbk$. Elle est donnée par :*

$$Syl(f,g,x) = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & ... & 0 & b_0 & 0 & ... & 0 & ... \\ a_1 & a_0 & ... & 0 & b_1 & b_0 & ... & ... & ... \\ ... & a_1 & ... & ... & ... & b_1 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & a_0 & b_q & ... & ... & ... & ... \\ a_p & ... & ... & ... & 0 & b_q & ... & ... & ... \\ 0 & a_p & ... & ... & ... & 0 & ... & ... & ... \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & ... & ... & a_p & 0 & 0 & ... & ... & b_q \end{pmatrix} \tag{2.6}$$

Définition 2.1.2 *Soient f et $g \in \Bbbk[x]$. On appelle résultant de f, g,noté $Res(f,g,x)$, le déterminant de la matrice de Sylvester, c'est-à-dire :*

$$Res(f,g,x) = |Syl(f,g,x)|.$$

Proposition 2.1.1 *Soient f et $g \in \Bbbk[x]$. Il existe A et $B \in \Bbbk[x]$ tels que :*

$$Af + Bg = Res(f,g,x)$$

Preuve. Supposons que :

$$Res(f,g,x) = 0$$

alors, il suffit de prendre $A = B = 0$.
Supposons maintenant que :

$$Res(f,g,x) \neq 0;$$

alors, il existe $\widetilde{A}$ et $\widetilde{B}$ tels que :

$$\widetilde{A}f + \widetilde{B}g = 1.$$

Notons :

$$\begin{cases} f = a_0x^l + ... + a_l \\ g = b_0x^m + ... + b_m \\ \widetilde{A} = c_0x^{m-1} + ... + c_{m-1} \\ \widetilde{B} = d_0x^{l-1} + ... + d_{l-1} \end{cases}$$

On obtient donc le système suivant :

$$\begin{cases} a_0c_0 + b_0d_0 = 0 \\ a_1c_0 + a_0c_1 + b_1d_0 + b_0d_1 = 0 \\ ... \\ a_lc_{m-1} + b_md_{l-1} = 1 \end{cases}$$

La matrice associée à ce système est la matrice $Syl(f,g,x)$ dont le déterminant est $\neq 0$. Donc notre système est de Cramer. Il admet une solution unique. Autrement dit, il existe des c_i (et d_j) uniques vérifiant ce système, donnés par :

$$c_i = \frac{1}{Res(f,g,x)} S_i$$

où S_i est la matrice obtenue à partir de la matrice $(Syl(f,g,x))$ en remplaçant la *i-eme* colonne (celle des coefficients de c_i) par la colonne du second membre de l'égalité (on fait de même pour les d_j). On a alors :

$$\begin{cases} \widetilde{A} = c_0 x^{m-1} + ... + c_{m-1} \\ \widetilde{B} = d_0 x^{l-1} + ... + d_{l-1} \end{cases}$$

qui peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} \widetilde{A} = \frac{1}{Res(f,g,x)} A \\ \widetilde{B} = \frac{1}{Res(f,g,x)} B \end{cases}.$$

Donc, il existe A et $B \in \Bbbk[x]$ tels que :

$$Af + Bg = Res(f,g,x).$$

D'où le résultat. ∎

2.1.2 Résultants de polynômes de plusieurs variables

Considérons maintenant l'anneau $\Bbbk[x^1,...,x^n]$ des polynômes de n variables.

Définition 2.1.3 *On dit que $f \in \Bbbk[x^1,...,x^n]$ est irréductible si et seulement si f n'est pas une constante et f ne peut s'écrire comme produit de deux polynômes non constants dans $\Bbbk[x^1,...,x^n]$.*

Proposition 2.1.2 *Soit $f \in \Bbbk[x^1,...,x^n]$. Alors f peut s'écrire comme produit de polynômes irréductibles dans $\Bbbk[x^1,...,x^n]$.*

Lemme 2.1.2 *Soit $u \in \Bbbk[x^2,...,x^n]$ tel que u est irréductible et u divise gh dans $\Bbbk[x^1,...,x^n]$. Alors u divise g ou u divise h.*

Preuve. Posons $g = \sum_{i=0}^{l} a_i (x^1)^i$ et $h = \sum_{j=0}^{m} b_j (x^1)^j$ avec a_i et $b_j \in \Bbbk[x^2,...,x^n]$, alors on a :

1. Soit u divise g donc, u divise $a_i, \forall i \in \{1,...,l\}$.
2. Soit u divise h donc, u divise $b_j, \forall j \in \{1,...,m\}$.
3. Soit u ne divise ni g et ni h alors $\exists i \in \{1,...,l\}$ et $\exists j \in \{1,...,m\}$ tel que u ne divise ni a_i et ni b_j. Posons :

   $$c_{i+j} = (a_0 b_{i+j} + a_1 b_{i+j-1} + ... + a_{i-1} b_{j+1}) + a_i b_j + (a_{i+j+1} b_{j-1} + ... + a_{i+j} b_0)$$

   Comme u ne divise ni a_i ni b_j donc u ne divise pas $a_i b_j$, alors u ne divise pas c_{i+j}. Par conséquent, u ne dvise pas gh. Ce qui est absurde car u divise gh dans $\Bbbk[x^1,...,x^n]$.

D'où le lemme. ∎

Lemme 2.1.3 *Soit $f \in \Bbbk[x^1,...,x^n]$ tel que $\deg f$ par rapport à x^1 est non nul. Si f est irréductible dans $\Bbbk[x^1,...,x^n]$ alors f est irréductible dans $\Bbbk(x^2,...,x^n)[x^1]$.*

Preuve. En effet, si $f = AB$ avec $A, B \in \Bbbk(x^2, ..., x^n)[x^1]$ alors $\exists\, d \in \Bbbk[x^2, ..., x^n]$ dénominateur commun de A et B tel que :

$$d^2 f = \widetilde{A}\widetilde{B}$$

d'où :

$$d^2 f = \widetilde{A}\widetilde{B} \in \Bbbk[x^1, ..., x^n].$$

d^2 peut s'écrire comme produit d'éléments irréductibles dans $\Bbbk[x^2, ..., x^n]$. Donc d'après Lemme 2.1.2, d^2 divise $\widetilde{A}$ et/ou $\widetilde{B}$. Ainsi après simplification des facteurs irréductibles de d^2 on a :

$$f = \widetilde{A_1}\widetilde{B_1} \in \Bbbk[x^1, ..., x^n].$$

Or f est irréductible donc $\widetilde{A_1}$ ou $\widetilde{B_1}$ est constant avec $\widetilde{A_1}$ et $\widetilde{B_1}$ obtenus par multiplications et division de A et B dans $\Bbbk[x^2, ..., x^n]$, par conséquent, A ou B ne dépend pas de x^1. Donc :

$$f \text{ irréductible dans } \Bbbk[x^1, ..., x^n], \text{ alors } f \text{ irréductible dans } \Bbbk(x^2, ..., x^n)[x^1].$$

■

Théorème 2.1.1 *Soit $f \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$ irréductible tel que f/gh avec $h, g \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$ alors, f/h ou f/g.*

Preuve. On procède par récurrence sur le nombre de variables.
Cas $n = 1$.
Supposons que $f \in \Bbbk[x^1]$ irréductible tel que f/gh avec $h, g \in \Bbbk[x^1]$. Posons $p = PGCD(f, g)$. On a alors :

1. Soit p n'est pas une constante et donc p/f. Comme f est irréductible alors f est un multiple de p par une constante. Par conséquent, f/g.

2. Soit p est une constante (on suppose que $p = 1$). Par conséquent, il existe deux polynômes $A, B \in \Bbbk[x^1]$ tels que $Af + Bg = 1$ et donc :

   $$h = Ahf + bhg.$$

   Or f divise gh , autrement dit, $\exists k \in \Bbbk[x^1]$ tel que $kf = gh$. Donc :

   $$h = (Ah + Bk)f$$

   d'où f/h.

Supposons que ce résultat est vrai pour les polynômes de $(n-1)$-variables et montrons que cela reste vrai pour n.
D'après le cas $n = 1$ et f irréductible dans $\Bbbk(x^2, ..., x^n)[x^1]$ alors f/g ou f/h. Supposons que f/g, alors $\exists\, A \in \Bbbk[x^1]$ tel que :

$$g = Af.$$

Si on élimine les dénominateurs, on obtient :

$$dg = \widetilde{A}f \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$$

où $d \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$. Or tout facteur irréductible de $d/\ \widetilde{A}$ ou f. Comme f est irréductible ; donc ces facteurs divisent $\widetilde{A}$, d'où $f\ /g$ dans $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$.
D'où le théorème. ■

Définition 2.1.4 *Soient $f, g \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$. La matrice de Sylvester de f et g en x^1, notée $Syl(f, g, x^1)$, la matrice associée au système (2.5) où les $a_i, b_j \in \mathbb{k}[x^2, ..., x^n]$. Le résultant de f et g en x^1, noté $Res(f, g, x^1)$, est le déterminant de la matrice de Sylvester.*

Proposition 2.1.3 *Soient f, $g \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$. On a le résultat suivant :*

$$Res(f, g, x^1) = 0 \quad \textit{si et seulement si} \quad \begin{array}{l} f \textit{ et } g \textit{ possèdent un facteur commun dans} \\ \mathbb{k}[x^1, ..., x^n] \textit{ de degré non nul par rapport à } x^1. \end{array}$$

Preuve. Soient f et g deux polynômes en x^1 à coefficients dans $\mathbb{k}[x^2, ..., x^n] \subset \mathbb{k}(x^2, ..., x^n)$ donc f et $g \in \mathbb{k}(x^2, ..., x^n)[x^1]$. $Res(f, g, x^1) = 0$ si et seulement si f et g possèdent un facteur commun dans $\mathbb{k}(x^2, ..., x^n)[x^1]$. Or si un facteur commun existe dans $\mathbb{k}(x^2, ..., x^n)[x^1]$ alors un facteur commun existe dans $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$.
D'où la proposition. ∎

2.2 Théorie de l'élimination et de l'extension

Dans cette section nous allons introduire des notions algébriques essentielles qui vont nous permettre de construire par la suite notre méthode algorithmique, basée sur les bases de Gröbner, pour la résolution de systèmes algébriques.

Proposition 2.2.1 *Si I et J deux idéaux de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ alors :*

$$I + J = \{f + g, f \in I \textit{ et } g \in J\}$$

est un idéal.
De plus, si $I = \langle f_1, ..., f_r\rangle$ et $J = \langle g_1, ..., g_s\rangle$ alors :

$$I + J = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s\rangle .$$

Preuve. On a $0 \in I + J$. Soient $h_1, h_2 \in I + J$; alors $\exists f_1, f_2 \in I$ et $\exists g_1, g_2 \in J$ tels que :

$$h_1 = f_1 + g_1$$

et

$$h_2 = f_2 + g_2$$

ainsi :

$$h_1 + h_2 = (f_1 + f_2) + (g_1 + g_2) \in I + J.$$

Soit $h \in I + J$ et $k \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ alors :

$$h = f + g \text{ où } f \in I, g \in J$$

d'où :

$$kh = k(f + g) = kf + kg \in I + J.$$

Donc $I + J$ est un idéal.
Soit H un idéal tel que $I, J \subset H$.

$$f + g \in H, \forall f \in I \text{ et } \forall g \in J.$$

Donc $H \supset I+J$ et $I+J$ plus petit idéal contenant I et J.
Si $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ et $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$; on a :

$$\langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle \subset I + J.$$

De plus, $I, J \subset \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle$, donc :

$$I + J \subset \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle .$$

D'où :

$$I + J = \langle f_1, ..., f_r, g_1, ..., g_s \rangle .$$

■

Proposition 2.2.2 *Soient $I = \langle f_1, ..., f_r \rangle$ et $J = \langle g_1, ..., g_s \rangle$, alors l'idéal IJ est défini par :*

$$IJ = \left\langle f_i g_j \in \Bbbk[x^1, ..., x^n] / \ f_i \in I, \forall i \in \{1, \dots, r\}; g_j \in J, \forall j \in \{1, \dots, s\} \right\rangle$$

.

Preuve. On a :

$$\left\langle f_i g_j \in \Bbbk[x^1, ..., x^n] / \ f_i \in I, \forall i \in \{1, \dots, r\}; g_j \in J, \forall j \in \{1, \dots, s\} \right\rangle \supset I.J$$

par construction.
Soit $h \in I.J$ donc $h = \sum\limits_{i,j} a_{i,j} f_i g_j$. En effet, $h \in I.J$ alors $\exists f \in I$ et $\exists g \in J$ tels que $h = fg$. Or

$$f = \sum_i u_i f_i$$

et

$$g = \sum_j v_j g_j.$$

Donc :

$$h = \sum_{i,j} a_{i,j} f_i g_j \in \left\langle f_i g_j \in \Bbbk[x^1, ..., x^n] / \ f_i \in I, \forall i \in \{1, \dots, r\}; g_j \in J, \forall j \in \{1, \dots, s\} \right\rangle .$$

Par conséquent,

$$I.J \supset \left\langle f_i g_j \in \Bbbk[x^1, ..., x^n] / \ f_i \in I, \forall i \in \{1, \dots, r\}; g_j \in J, \forall j \in \{1, \dots, s\} \right\rangle .$$

D'où la proposition. ■

Considérons le système algébrique suivant :

$$\begin{cases} f_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ \\ f_s(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

Dans le cas où $f_1, \dots, f_s$ sont de degré 1, c'est un système d'équations linéaires qu'on sait résoudre parfaitement grâce à la méthode des pivots de Gauss qui consiste à transformer le système initial en un système équivalent où x^1 est la seule inconnue dans la première équation, x^1 et x^2 les seules inconnues dans la deuxième équation et ainsi de suite , appelé système triangulaire. La question qu'on se pose alors, est-il possible de généraliser cette méthode aux systèmes algébriques de deg > 1 et ainsi résoudre un système algébrique (2.7) de manière analogue à la méthode des pivots de Gauss.

Définition 2.2.1 *Soient $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$ un idéal de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ et $G = \{g_1, ..., g_r\}$ une base de Gröbner de I. On appelle l-ieme idéal d'élimination de I noté I_l, l'idéal défini par :*

$$I_l = I \cap \Bbbk[x^{l+1}, ..., x^n].$$

Théorème 2.2.1 (Théorème de l'élimination) *Soient $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$ un idéal de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ et $G = \{g_1, ..., g_r\}$ sa base de Gröbner. Alors :*

$$G_l = G \cap \Bbbk[x^{l+1}, ..., x^n]$$

est une base de Gröbner du l-ieme idéal d'élimination I_l.

Preuve. Soit G une base de Gröbner de I, donc $\langle LT(G)\rangle = \langle LT(I)\rangle$. On veut montrer que $\langle LT(G_l)\rangle = \langle LT(I_l)\rangle$.
Par construction on a :

$$\langle LT(G_l)\rangle \subset \langle LT(I_l)\rangle .$$

Il nous suffit de montrer que $\langle LT(I_l)\rangle \subset \langle LT(G_l)\rangle$.
Soit $f \in I_l \subset I$ alors $\exists g_i \in G$ tel que $LT(g_i)/LT(f)$. Or f ne dépend que de $x^{l+1}, ..., x^n$; donc g_i aussi. D'où, $LT(g_i)$ ne dépend que de $x^{l+1}, ..., x^n$. Donc $LT(g_i) \in \langle LT(G_l)\rangle$. Ainsi $f \in \langle LT(G_l)\rangle$.
D'où le théorème.
■

Dans ce qui suit, nous allons décrire l'ensemble des points de la variété suivante :

$$V(I) = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Bbbk^n / f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall f \in I\}.$$

Définition 2.2.2 *Soit $(a_{l+1}, \dots, a_n) \in V(I_l)$.*
S'il existe $a_1, \dots, a_l$ tels que $(a_1, ..., a_l, a_{l+1} \dots, a_n) \in V(I)$ alors on dit que la solution $(a_{l+1}, \dots, a_n)$ dans $V(I_l)$ s'étend dans $V(I)$ en la solution $(a_1, ..., a_l, a_{l+1} \dots, a_n)$.
$(a_{l+1}, \dots, a_n)$ est dite solution partielle et $(a_1, ..., a_l, a_{l+1} \dots, a_n)$ est dite solution globale.

Dans ce qui suit, $\Bbbk$ un corps algébriquement clôs.

Théorème 2.2.2 (Théorème de l'extension) *Soient $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle$ un idéal de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ et I_1 le premier idéal d'élimination de I.*
Posons :

$$f_i = g_i(x^2, ..., x^n)(x^1)^{N_i} + \text{termes en } x^1 \text{de degré} < N_i.$$

Soit $(a_2, \dots, a_n) \in V(I_1)$. Si $(a_2, \dots, a_n) \notin V(g_1, ..., g_s)$, il existe alors $a_1 \in \Bbbk$ tel que $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in V(I)$.

Preuve. Soit $I = \langle f_1, ..., f_s\rangle \subset \Bbbk[x^1, ..., x^n]$. Écrivons $\forall i \in \{1, ..., s\}$:

$$f_i = g_i(x^2, ..., x^n)(x^1)^{\alpha_i} + \text{termes de degré} < \alpha_i \text{ par rapport à } \ x^1.$$

Posons $c = (c_2, \dots, c_n)$ et considérons :

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \Bbbk[x^1, ..., x^n] & \to & \Bbbk[x^1] \\ f(x_1, x_2, \dots, x_n) & \mapsto & f(x^1, c). \end{array}$$

$\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ est principal donc l'image d'un idéal de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ est un idéal principal. Par conséquent, il existe $u(x^1)$ tel que :

$$\varphi(I) = \langle u(x_1) \rangle$$

autrement dit :

$$\{f(x^1, c), f \in I\} = \langle u(x_1) \rangle .$$

Si $u(x_1)$ n'est pas constant alors, il existe $c_1 \in \mathbb{k}$ tel que $u(c_1) = 0$, donc $f(c_1, c) = 0, \forall f \in I$ et donc $(c_1, c) \in V(I)$.

Si $u(x^1)$ est nul, il est clair que $(c_1, c) \in V(I)$.

Si $u(x^1)$ est une constante u_0 non nulle alors, il existe $f \in I$ tel que $f(x^1, c) = u_0$. Comme $c \notin V(g_1, ..., g_s)$ donc $g_i(c) \neq 0$.

Posons :

$$h = Res(f_i, f, x^1) \in \mathbb{k}[x^2, ..., x^n].$$

D'après ce qu'on a vu dans le paragraphe précédent sur les résultants, on a :

$$h(c) = (g_0(c))^{\deg(f)}\, Res(f_i(x^1, c), u_0, x^1).$$

Or,

$$Res(f_i(x^1, c), u_0, x^1) = (u_0)^{\alpha_i} \neq 0$$

donc $h(c) \neq 0$ car $g_0(c) \neq 0$. Mais $h \in I_1$. Comme $c \in V(I_1)$ alors $h(c) = 0$, ce qui est contradictoire.
Ce qui achève la démonstration. ■

Corollaire 2.2.1 *Soient $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$ un idéal de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ et I_1 le premier idéal d'élimination de I. Si :*

$$f_i = c(x^1)^{\alpha_i} + termes\ en\ x^1 de\ \deg < \alpha_i$$

où c est une constant alors pour tout $(a_2, \ldots, a_n) \in V(I_1)$, il existe $a_1 \in \mathbb{k}$ tel que $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in V(I)$. Autrement dit toute solution dans $V(I_1)$ peut s'étendre en une solution dans $V(I)$.

On peut dire sans trop de difficulté que la théorie de l'élimination peut être vue comme la projection d'une variété sur un espace de dimension inférieure.

Définition 2.2.3 *L'application π_l définie par :*

$$\begin{array}{rcl} \pi_l : \mathbb{k}^n & \to & \mathbb{k}^{n-1} \\ (a_1, a_2, \ldots, a_n) & \mapsto & \pi_l(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (a_{l+1}, \ldots, a_n). \end{array}$$

est appelée projection.

Lemme 2.2.1 *Soit $I_l = I \cap \mathbb{k}[x_{l+1}, \ldots, x_n]$. On a :*

$$\pi_l(V) \subset V(I_l).$$

Preuve. Soit $f \in I_l$ tel que $\forall(a_{l+1},\dots,a_n), f(a_{l+1},\dots,a_n) = 0$. Or, $f \in I$ donc $\exists(a_1,\dots,a_n)$ tel que $f(a_1,\dots,a_n) = 0$. Comme f ne dépend que de $x^{l+1},...,x^n$ alors :

$$f(\pi_l(a_1,a_2,\dots,a_n)) = 0.$$

D'où le lemme. ∎

Remarque 2.2.1 *$\pi_l(V)$ consiste en l'ensemble de toutes les solutions partielles que nous pouvons étendre en une solution générale de V.*

Théorème 2.2.3 *Posons $V(I) = V(f_1,...,f_s) \subset \mathbb{k}^n$. Soient $g_i \in \mathbb{k}[x^2,\dots,x^n]$ tel que :*

$$f_i = g_i(x^2,\dots,x^n)(x^1)^{N_i} + \textit{termes en } x^1 \textit{de deg} < N_i.$$

Si I_1 est le premier idéal d'élimination de I alors :

$$V(I_1) = \pi_1(V) \cup (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1)).$$

Preuve. Soit $(a_2,\dots,a_n) \in \pi_1(V) \cup (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1))$ une solution qu'on peut étendre ; donc $(a_2,\dots,a_n) \notin V(g_1,\dots,g_s)$. Alors $(a_2,\dots,a_n) \in \pi_1(V)$. Or $\pi_1(V) \subset V(I_1)$; d'où :

$$\pi_1(V) \cup (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1)) \subset V(I_1).$$

De façon analogue, si $(a_2,\dots,a_n)$ est une solution dans $\pi_1(V) \cup (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1))$ qui ne peut pas s'étendre alors $(a_2,\dots,a_n) \notin \pi_1(V)$; donc $(a_2,\dots,a_n) \in V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1)$; d'où :

$$\pi_1(V) \cup (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1) \subset V(I_1)\,.$$

Supposons maintenant que $(a_2,\dots,a_n) \in V(I_1)$. Si $(a_2,\dots,a_n)$ est une solution qu'on peut étendre alors :

$$(a_2,\dots,a_n) \notin V(g_1,\dots,g_s). \tag{2.8}$$

Si $(a_2,\dots,a_n)$ est une solution qu'on ne peut pas étendre alors :

$$(a_2,\dots,a_n) \in V(g_1,\dots,g_s). \tag{2.9}$$

D'après (2.8) et (2.9) on a :

$$V(I_1) \subset (V(g_1,\dots,g_s) \cap V(I_1)).$$

D'où le théorème. ∎

Théorème 2.2.4 ([3]) *Soient $\mathcal{V} = V(I) = V(f_1,...,f_s) \subset \mathbb{k}^n$, et I_l le l-ieme idéal d'élimination de I, on a :*

1. *$V(I_l)$ est la plus petite variété contenant $\pi_l(V)$ dans $\mathbb{k}^{n-l}$.*
2. *Si $\mathcal{V} \neq \emptyset$, alors il existe une variété $\mathcal{W} \subset V(I_l)$ telle que $V(I_l)\backslash\mathcal{W} \subset \pi_l(\mathcal{V})$.*

Corollaire 2.2.2 *Soit $\mathcal{V} = V(I) = V(f_1,...,f_s) \subset \mathbb{k}^n$. Si les f_i peuvent s'écrire comme suit :*

$$f_i = c(x^1)^{\alpha_i} + \textit{termes en } x^1 \textit{de } \deg < \alpha_i$$

où c est une constante et I_1 le premier idéal d'élimination de I alors on a :

$$\pi_1(V) = V(I_1)$$

c'est-à-dire que toutes les solutions peuvent s'étendre.

Preuve. Découle du théorème de l'extension. ∎

2.3 Théorèmes de zéros de Hilbert

On se propose d'étudier le lien entre les variétés et les idéaux à l'aide du théorème des zéros de Hilbert connu sous le nom de Nullstellensatz.

Proposition 2.3.1 *Soit $\mathbb{k}$ un corps algébriquement clôs et $\mathbb{k}[x]$ l'anneau des polynômes univariés. Soit I un idéal de $\mathbb{k}[x]$ tel que $I \neq \langle c \rangle$ où c est une constante non nulle. Alors $V(I) \neq \emptyset$.*

Preuve. I est principal alors $\forall I, \exists f \in \mathbb{k}[x]$ tel que $I = \langle f \rangle$. Et comme $\mathbb{k}$ est algébriquement clôs, $\exists\, a$ tel que $f(a) = 0$ d'où $V(I) \neq 0$. ■

Théorème 2.3.1 (Weak Nullstellensatz) *Soit $\mathbb{k}$ est un corps algébriquement clos. Soit I un idéal de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ tel que $V(I) = \emptyset$ alors :*

$$I = \mathbb{k}[x^1, ..., x^n].$$

Preuve. Pour démonter ce résultat procédons par récurrence sur le nombre de variables n.
Pour $n = 1$. On vient de le voir plus haut.
Supposons que le théorème est vrai dans $\mathbb{k}[x^2, ..., x^n]$. Soit I un idéal de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$. Posons $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$ tel que $V(I) = \emptyset$. Si tous les f_i sont des constantes alors la preuve est terminée. Supposons qu'au moins l'un des f_i n'est pas une constante. Soit f_1 ce polynôme de degré α_1. Considérons la paramétrisation suivante :

$$\left\{ \begin{array}{c} x^1 = \widetilde{x^1} \\ x^2 = \widetilde{x^2} + \alpha_2 \widetilde{x^1} \\ \\ x^n = \widetilde{x^n} + \alpha_n \widetilde{x^1} \end{array} \right. \quad \text{avec } \alpha_i \text{ constante}$$

On a donc :

$$\begin{aligned} f_1(x^1, ..., x^n) &= f_1\left(\widetilde{x^1}, \widetilde{x^2} + \alpha_2 \widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n} + \alpha_n \widetilde{x^1}\right) \\ &= h(\widetilde{x^2}, ..., \widetilde{x^n}) \left(\widetilde{x^1}\right)^{N_1} + \text{termes en } \widetilde{x^1} \text{ de } \deg < N_1 \end{aligned}$$

où h est un polynôme de $\mathbb{k}[\widetilde{x^2}, ..., \widetilde{x^n}]$ ne s'annulant pas en $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$. Ainsi on est passé d'un polynôme $f_1 \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ à un polynôme $\widetilde{f_1} \in \mathbb{k}[\widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n}]$. Notons :

$$\widetilde{I} = \left\{ \widetilde{f} \in \mathbb{k}[\widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n}] / f \in I \right\}.$$

On vérifie facilement que $\widetilde{I}$ est un idéal de $\mathbb{k}[\widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n}]$. On a par hypothèse $V(I) = \emptyset$ donc $V\left(\widetilde{I}\right) = \emptyset$. En effet, si $V\left(\widetilde{I}\right) \neq \emptyset$ alors $V(I)$ possède au moins un élément. De plus,

$$\widetilde{f}\left(\widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n}\right) = c(\alpha_2, ..., \alpha_n) \left(\widetilde{x^1}\right)^N + \text{termes en } \widetilde{x^1} \text{ de } \deg < N.$$

En appliquant la théorie de l'extension (2.2.2) à ce cas de figure et en notant :

$$\tilde{I}_1 = \tilde{I} \cap \mathbb{k}[\widetilde{x^1}, ..., \widetilde{x^n}];$$

on a toujours l'existence d'une solution $(\alpha_1, ..., \alpha_n)$ qui est l'extension de la solution partielle $(\alpha_2, ..., \alpha_n)$; donc :

$$\begin{array}{rcl} V(\tilde{I}_1) & = & \pi_1(V(\tilde{I})) \\ & = & \pi_1(\emptyset) \\ & = & \emptyset \end{array}$$

et donc par hypothèse de récurrence $\tilde{I}_1 = \mathbb{k}[\widetilde{x^2}, ..., \widetilde{x^n}]$. Enfin $1 \in \tilde{I}_1 \subset \tilde{I}$ d'où $1 \in I_1 \subset I$. D'où :

$$I = \mathbb{k}[x^1, ..., x^n].$$

■

Théorème 2.3.2 (Hilbert Nullstellensatz) *Soit $\mathbb{k}$ un corps algébriquement clôs et considérons l'idéal $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle$ tels que $\forall i \in \{1, ..., s\}$, $f_i \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$.*

$$f \in I(V(I)) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{N}^*, m \geq 1 / f^m \in \langle f_1, ..., f_s \rangle .$$

Preuve. Soit $f \in \mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ tel que $f \in V(I)$. Considérons :

$$\widetilde{I} = \langle f_1, ..., f_s, 1 - yf \rangle .$$

On vérifie facilement que $\widetilde{I}$ est un idéal de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n, y]$.
On a :

$$V(\tilde{I}) = \emptyset.$$

En effet, soit $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{k}^{n+1}$. Par conséquent :

1. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in V(\tilde{I})$ alors $f(\alpha_1, ..., \alpha_n) = 0$; donc $1 - yf \neq 0$. Alors $\forall a_{n+1} \in \mathbb{k}$, $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}) \notin V(\tilde{I})$.

2. Si $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \notin V(\tilde{I})$ alors $f_i(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq 0$ pour un certain i. Considérons alors f_i comme une fonction de $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n, y]$ (ne dépendant pas de y). On a toujours $f_i(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}) \neq 0$. Alors $(\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_{n+1}) \notin V(\tilde{I})$. D'où $V(\tilde{I}) = \emptyset$. D'après le Weak Nullstellensatz (2.3.1), $1 \in \tilde{I}$; donc ;

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x^1, ..., x^n, y) f_i + q(x^1, ..., x^n, y)(1 - yf).$$

Or $V(\tilde{I}) = \emptyset$, alors posons $y = \frac{1}{f(x^1, ..., x^n)}$ ainsi :

$$1 = \sum_{i=1}^{s} p_i(x^1, ..., x^n, \frac{1}{f(x^1, ..., x^n)}) f_i.$$

Multiplions par f^m (pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ tel qu'il ne reste plus de $f(x^1, ..., x^n)$ au dénominateur) ; on obtient alors :

$$f^m = \sum_{i=1}^{s} A_i f_i.$$

■

Définition 2.3.1 *On appelle radical d'un idéal I l'ensemble noté $\sqrt{I}$, défini par :*

$$\sqrt{I} = \left\{ f \in \Bbbk[x^1, ..., x^n] / \exists m > 0, f^m \in I \right\}.$$

Proposition 2.3.2 *$\sqrt{I}$ est un idéal contenant I.*

Preuve. On a bien $I \subset \sqrt{I}$. En effet,

$$\forall f \in I, f^1 \in I.$$

Soient $f, g \in \sqrt{I}$. $\exists m \in \mathbb{N}^*, \exists n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f^m, g^n \in I$. Montrons que $(f+g)^{m+n} \in I$. En utilisant la loi du binôme de Newton on a $\forall f^i, g^j; \deg f^i > m$ ou $\deg g^j > n$ donc $f^i g^j \in I$ et donc $(f+g)^{m+n} \in I$. D'où $f+g \in \sqrt{I}$. De plus $\forall h \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$; $(hf)^m = h^m f^m \in I$ car $f^m \in I$; donc $hf \in \sqrt{I}$.
D'où $\sqrt{I}$ est un idéal. ■

Remarque 2.3.1 *$I(V)$ est un idéal radical.*

Théorème 2.3.3 (Strong Nullstellensatz) *Soit $\Bbbk$ un corps algébriquement clôs. Si I est un idéal de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ alors $I(V(I)) = \sqrt{I}$*

Preuve. On a $\sqrt{I} \subset I(V(I))$. En effet, $f \in \sqrt{I}$, alors $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m \in I$; donc $f^m \in I(V(I))$, d'où $f \in I(V(I))$.
Soit $f \in I(V(I))$, d'après le théorème des zéros de Hilbert 2.3.2, $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m \in I$; donc $f \in \sqrt{I}$, d'où $I(V(I)) \subset \sqrt{I}$.
Ce qui achève la preuve.
■

Étant donné que le reste de la division des polynômes de plusieurs variables n'est pas unique, il n'est pas facile de décider de l'appartenance d'un polynôme f à un idéal I engendré par une famille $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$. Ceci motive la section suivante.

2.4 Test d'appartenance à un idéal

Soient $f \in \Bbbk[x^1, ..., x^n]$ et I un idéal de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$. On sait que tout idéal polynômial est de type fini. Soit $F = \{f_1, \ldots, f_s\}$ une famille génératrice de cet idéal I.

Proposition 2.4.1 *Soit $I = \langle f_1, \ldots, f_s \rangle$ et G une base de Gröbner de I, alors :*

$$f \in I \Leftrightarrow f \equiv 0 \mod G.$$

Preuve. Conséquence du théorème 1.2.2. ■

Remarque 2.4.1 *Dans certains cas, le fait de connaître les éléments qui constituent notre base de Gröbner nous permet de décider quand à l'appartenance d'un polynôme f à notre idéal I. En effet, il nous suffit de comparer $LT(f)$ et $\{LT(G)\}$.*

Illustrons notre proposition (2.4.1) à l'aide d'un exemple.

Exemple 2.4.1 *Soit*

$$I = \left\langle xz - y^2; x^3 - z^2 \right\rangle \subset \mathbb{C}\left[x, y, z\right]$$

Considérons :

$$f = -4x^2y^2z^2 + y^6 + 3z^5.$$

On veut savoir si $f \in I$. Nous choisirons comme ordre monomial l'ordre lexicographique gradué. Notons par

$$F = \{f_1, f_2\}$$

la famille génératrice de I, où $f_1 = xz - y^2$ et $f_2 = x^3 - z^2$. F n'est pas une base de Gröbner. En effet,

$$LT\left(S\left(f_1, f_2\right)\right) = -x^2y^2 \notin \left\langle LT\left(I\right)\right\rangle = \left\langle xz, x^3\right\rangle.$$

A l'aide des algorithmes de calcul des bases de Gröbner, on peut déterminer une base de Gröbner G définie par :

$$G = \left\{xz - y^2, x^3 - z^2, x^2y^2 - z^3, xy^4 - z^3, y^6 - z^5\right\}$$

qu'on notera :

$$G = \{g_1, ..., g_5\}.$$

Il nous suffit maintenant d'appliquer l'algorithme de la division polynômiale (2) à f par G et on obtient :

$$f = (-4xy^2z - 4y^4)g_1 - 2g_5.$$

On en déduit que $f \in \langle G\rangle$, d'où $f \in I$.

Nous sommes en mesure de donner un algorithme qui permet de vérifier si un polynôme donné f appartient à un idéal I.

Algorithme 4 : Entrées : f un polynôme, $F = \{f_1, ..., f_s\}$ famille génératrice d'un idéal I, B caractère.
étape1. Calculer la base de Gröbner $G = \{g_1, ..., g_k\}$ de l'idéal I
étape2. Diviser f par G

$$f = a_1g_1 + ... + a_kg_k + r$$

étape3. Si $f \equiv 0 \mod G$ alors :

$$\begin{array}{rcl} f & \in & I \\ B & : & = \text{Vrai} \end{array}$$

Sinon

$$\begin{array}{rcl} f & \notin & I \\ B & : & = \text{Faux} \end{array}$$

étape4. Retourner B.

Proposition 2.4.2 *Supposons que $\Bbbk$ est algébriquement clos.*

$$f \in \sqrt{I} \Leftrightarrow 1 \in \tilde{I} =< f_1, \ldots, f_n, 1 - yf >$$

où $\tilde{I}$ est un idéal de $\Bbbk[y, x^1, \ldots, x^n]$.

Preuve. En appliquant le théorème des zéros de Hilbert (2.3.2), on a $1 \in \tilde{I}$; donc $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m \in I$. Alors $f \in \sqrt{I}$.
Supposons maintenant que $f \in \sqrt{I}$. Alors $\exists m \in \mathbb{N}^*$ tel que $f^m \in I \subset \tilde{I}$. De plus, on a $1 - yf \in \tilde{I}$ donc :

$$1 = y^m f^m + (1 - y^m f^m) = y^m f^m + (1 - yf)(1 + yf + \cdots + y^{m-1} f^{m-1}) \in \tilde{I}.$$

■

Remarque 2.4.2 *Pour vérifier si un polynôme $f \in \sqrt{I}$ avec $I =< f_1, \ldots, f_s >$, il nous suffit alors de calculer la base de Gröbner réduite de l'idéal $\langle f_1, \ldots, f_n, 1 - yf \rangle$ de $\Bbbk[y, x^1, \ldots, x^n]$. Si cette base réduite est $\{1\}$ alors $f \in \sqrt{I}$.*

Exemple 2.4.2 *Soient*

$$I = \left\langle xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1 \right\rangle$$

et

$$f = y - x^2 + 1.$$

On veut savoir si $f \in \sqrt{I}$. Pour cela considérons l'idéal

$$\tilde{I} = \left\langle xy^2 + 2y^2, x^4 - 2x^2 + 1, 1 - z(y - x^2 + 1) \right\rangle.$$

On choisit comme ordre monomial, l'ordre lexicographique et calculons la base de Gröbner de $\tilde{I}$. On obtient comme base de Gröbner $G = \{1\}$ alors $f \in \sqrt{I}$.

2.5 Générateurs d'une intersection d'idéaux

Soient I et J deux idéaux de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$. On sait que $I \cap J$ est un idéal et que $I.J \subset I \cap J$. On veut déterminer les générateurs de $I \cap J$.

Lemme 2.5.1 (inter) *Soit l'idéal $I = \langle f_1, ..., f_s \rangle \subset \Bbbk[x^1, ..., x^n]$ et $p(t)$ un polynôme d'une variable dans $\Bbbk[t]$. Alors l'idéal $p(t)I$ de $\Bbbk[t, x^1, ..., x^n]$ est engendré par $\{p(t)f_1, ..., p(t)f_s\}$, et si $g(x^1, \ldots, x^n, t) \in p(t)I$ alors $\forall a \in \Bbbk, g(x^1, \ldots, x^n, a) \in I$.*

Preuve. Soit $g(x, t) \in p(t)I$ alors :

$$g(x, t) = \sum_{i=1}^{s} h(x, t) q_i(x) f_i(x) p(t);$$

En posant :

$$h(x, t) q_i(x) = A_i(x, t)$$

alors :

$$g(x, t) = \sum_{i=1}^{s} A_i(x, t) f_i(x) p(t).$$

D'où :

$$p(t)I = \langle p(t)f_1, \ldots, p(t)f_s \rangle.$$

Si $g(x^1, \ldots, x^n, t) \in p(t)I$, il est clair que pour tout a dans $\Bbbk$ on a $g(x^1, ..., x^n, a) \in I$.
■

Théorème 2.5.1 *Soient I et J deux idéaux de $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ alors :*

$$I \cap J = (tI + (1-t)J) \cap \Bbbk[x^1, ..., x^n].$$

Preuve. Soit $f \in I \cap J$. $f \in I$ et $f \in J$. f peut s'écrire :

$$f = tf + (1-t)f$$

et d'après le lemme 2.5.1 on a $tf \in tI$ et $(1-t)f \in (1-t)J$. Donc $f \in tI + (1-t)J$. Or I et J sont dans $\Bbbk[x^1, ..., x^n]$ alors :

$$f \in (tI + (1-t)J) \cap \Bbbk[x^1, ..., x^n].$$

D'où :

$$I \cap J \subset (tI + (1-t)J) \cap \Bbbk[x^1, ..., x^n].$$

Soit $f \in (tI + (1-t)J) \cap \Bbbk[x^1, ..., x^n]$. f peut s'écrire :

$$f(x) = g(x,t) + h(x,t),$$

où $g \in tI$ et $h \in (1-t)J$. Si $t = 0$ alors $f(x) = h(x, 0)$. Donc $f \in J$. Si $t = 1$ alors $f(x) = g(x, 1)$. Donc $f \in I$. Alors $f \in I \cap J$. D'où :

$$(tI + (1-t)J) \cap \Bbbk[x^1, ..., x^n] \subset I \cap J.$$

Ce qui complète la preuve. ■

Exemple 2.5.1 *Soient $I = \langle x^2y \rangle$ et $J = \langle xy^2 \rangle$. Considérons l'idéal $tI + (1-t)J = \langle tx^2y, (1-t)xy^2 \rangle$. Calculons sa base de Gröbner G en utilisant l'ordre lexicographique comme ordre monômial. On obtient :*

$$G = \left\{tx^2y, txy^2 - xy^2, x^2y^2\right\}.$$

Il nous suffit maintenant de calculer le premier idéal d'élimination de $tI + (1-t)J$. On obtient ainsi :

$$I \cap J = \left\langle x^2y^2 \right\rangle.$$

Nous avons énoncer l'ensemble des notions algébriques nécessaires pour la construction d'une méthode algorithmique permettant de résoudre des systèmes algébriques de plusieurs variables, basée sur les bases de Gröbner.

2.6 Algorithme de résolution des systèmes algébriques

Proposition 2.6.1 *Le système algébrique (2.1) admet une solution si et seulement si la base de Gröbner réduite de l'idéal I engendré par les polynômes de (2.1) est différente de $\{1\}$.*

Preuve. Il est clair que le système possède des solutions si et seulement si $\mathcal{V} \neq \emptyset$. D'où la proposition d'après le Weak Nullstellensatz (2.3.1). ■

Définition 2.6.1 *Deux systèmes algébriques sont dits équivalents s'ils possèdent les mêmes solutions.*

Théorème 2.6.1 *Soient I l'idéal engendré par les polynômes $P_1, ..., P_s$ du système algébrique (2.1) et $G = \{g_1, \ldots, g_r\}$ sa base de Gröbner réduite. Alors le système (2.1) est équivalent au système algébrique suivant :*

$$\begin{cases} g_1(x^1, ..., x^n) = 0 \\ \\ g_r(x^1, ..., x^n) = 0 \end{cases} \tag{2.10}$$

Preuve. Si $G = \{1\}$ d'après la proposition (2.6.1), le système (2.10) n'a pas de solutions. Par conséquent,le système (2.1) n'a pas de solutions.
Si $G \neq \{1\}$ d'après la même proposition (2.6.1) le système (2.10) admet une solution. Il nous suffit de montrer que les deux systèmes possèdent les mêmes solutions. Par le théorème (1.2.2) on a :

$$\langle P_1, ..., P_s \rangle = \langle g_1, ..., g_r \rangle .$$

Donc :

$$V(P_1, ..., P_s) = V(g_1, ..., g_r).$$

D'où l'équivalence des systèmes (2.1) et (2.10).
Ce qui achève la preuve.

■

Dans ce qui suit, $\Bbbk$ est un corps algebriquement clôs. Nous allons donner un algorithme qui permet de résoudre un système algébrique (2.1) donné, à l'aide des bases de Gröbner.

Algorithme 5 : Entrées : $\{P_1, ..., P_s\}$ un système algébrique (2.1) donné
étape1. Construire l'idéal $I = \langle P_1, ..., P_s \rangle$.
étape2. Choisir un ordre monômial.
étape3. Calculer une base de Gröbner minimale G de I.
étape4. Si $G \neq \{1\}$ aller à **étape5.**
Sinon $\varepsilon(a) = \emptyset$ aller à **étape7.**
étape5. Pour $l = 1$ à $n - 1$, faire
Construire $G_l = G \cap \Bbbk \left[x^{l+1}, ...x^n\right]$,
Associer $I_l = \langle G_l \rangle$.
étape6. Pour $j = 1$ à n faire :
Si $j = 1$, construire $\varepsilon_1 = \{x^n \text{ tel que } x^n \in V(I_1)\}$,
Sinon, construire
$\varepsilon_j = \{(x^{n-j+1}, ..., x^n) \in V(I_{n-j}) \text{ tel que } (x^{n-j+2}, ..., x^n) \in V(I_{n-j+1})\}$.
Associer $\varepsilon = \varepsilon_j$.
étape7. Retourner ε.

Remarque 2.6.1 *Cet algorithme est donné pour un corps $\Bbbk$ algébriquement clôs. Si notre corps de référence n'est pas clôs, il suffit de prendre sa cloture algébrique. Une fois les solutions determinées, nous ne prendrons que les solutions se trouvant dans $\Bbbk^n$.*

Dans cette thèse, on cherche à faire une étude qualitative de systèmes différentiels polynômiaux de deux variables. La première étape étant de déterminer les points d'équilibre d'un système différentiel polynômial. Grâce aux bases de Gröbner et aux systèmes algébriques, nous allons donner des méthodes constructives pour déterminer les points d'équilibre d'un système différentiel polynômial donné et ainsi pouvoir en faire une étude qualitative.

De plus, il est nécessaire d'introduire un outil essentiel pour l'étude des systèmes différentiels polynômiaux. C'est la théorie classique des invariants algébriques. En effet, grâce à cette théorie nous seront capable de faire une caractérisation des points d'équilibre et une classification de systèmes différentiels polynômiaux à l'aide d'expressions invariantes. C'est ce qui motive le chapitre qui suit.

Chapitre 3

Covariants centro-affines des systèmes différentiels polynômiaux.

Soient E un espace vectoriel sur un corps $\Bbbk$ de dimension finie et G un groupe de transformations linéaires agissant sur l'espace des phases $\Bbbk^n$. On notera par $GL\,(E)$ le groupe des automorphismes de E.

Définition 3.0.1 *Un homomorphisme de groupes $\rho : G \longrightarrow GL\,(E)$, est appelé représentation de groupe.*

Définition 3.0.2 *Une fonction polynômiale $P \in \Bbbk[E]$ est dite covariante par rapport au groupe G ou G-covariante de E, s'il existe une fonction scalaire, notée Λ, ne dépendant que des éléments du groupe G telle que :*

$$\forall g \in G, \;\; (P \circ \rho)\,(g) = \Lambda(g)P$$

où ρ est une représentation du groupe considéré.
Si $\Lambda(g) = 1, \forall g \in G$, le G-covariant P est dit absolu, sinon il est dit relatif.
Λ est appelé caractère du groupe linéaire G.

Définition 3.0.3

1. *Un G-covariant P est dit réductible s'il s'exprime polynômialement en fonction des éléments d'une famille finie $\mathcal{F}$ de G-covariants de degrés inférieurs. On dit que P est réduit à zéro modulo $\mathcal{F}$ et on écrit :*

$$P \equiv 0 \mod \mathcal{F}.$$

2. *Une famille finie $\mathcal{B}$ de G-covariants de E est un système de générateurs de G-covariants de E si tout G-covariant de E est réduit à zéro modulo $\mathcal{B}$.*
3. *Un système $\mathcal{B}$ de générateurs des G-covariants de E, est une base des G-covariants de E, si aucun élément de $\mathcal{B}$ n'est réductible à zéro modulo l'ensemble des autres éléments.*

Proposition 3.0.1 *L'ensemble $\Bbbk\,[E]^G$ défini par :*

$$\Bbbk\,[E]^G = \{P \in \Bbbk\,[E] : (P \circ \rho)\,(g) = \Lambda(g)P\}$$

est une $\Bbbk$-algèbre.

Preuve. Il suffit de montrer que $\mathbb{k}\left[E\right]^G$ est une sous-algèbre de $\mathbb{k}\left[E\right]$.
Il est clair que $1_{\mathbb{k}[E]} \in \mathbb{k}\left[E\right]^G$. De plus, $\mathbb{k}\left[E\right]^G$ est stable par rapport à la somme et à la multiplication par un scalaire. ■

Définition 3.0.4 *La $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{k}\left[E\right]^G$ est appelée algèbre des G-covariants de E.*

Définition 3.0.5 *Soit $\mathcal{A}$ une algèbre sur un corps $\mathbb{k}$. $\mathcal{A}$ est une algèbre graduée si l'anneau $\mathcal{A}$ admet une décomposition en somme directe de $\mathbb{k}$-espaces vectoriels $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{A}$ $(i \in \mathbb{N})$ de dimension fini, c'est-à-dire.*

$$\mathcal{A} = \bigoplus{}_{i\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_i$$

et

$$\mathcal{A}_i.\mathcal{A}_j \subset \mathcal{A}_{i+j}.$$

Définition 3.0.6 *Un polynôme $P \in \mathbb{k}\left[E\right]$ est dit homogène de degré d, si pour tout $\lambda \in \mathbb{k}^*$:*

$$P\left(\lambda x\right) = \lambda^d P\left(x\right).$$

On note par $\mathbb{k}\left[E\right]_d^G$ l'ensemble des polynômes de $\mathbb{k}\left[E\right]^G$ homgènes de degré d.

3.1 Covariants centro-affines

Considérons les systèmes différentiels polynômiaux de n variables de degré au plus k à coefficients dans $\mathbb{k}$:

$$\frac{dx^j}{dt} = P_j(x^1, ..., x^n);\ j = 1, ..., n \tag{3.1}$$

où pour $j = 1, ..., n$; $P_j(x^1, ..., x^n)$ est un polynôme dans $\mathbb{k}[x^1, ..., x^n]$ de degré $r; 1 \leq r \leq k$. En utilisant la notation d'Einstein, les systèmes (3.1) peuvent s'écrire :

$$\frac{dx^j}{dt} = a^j + ... + a^j_{\alpha_1 ... \alpha_r} x^{\alpha_1} ... x^{\alpha_r}; j, \alpha_1, ..., \alpha_r \in \{1, ..., n\}\,; r = 1, ..., k \tag{3.2}$$

où pour $j = 1, ..., n$ et $r = 1, ..., k; a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r} \in \mathcal{T}^1_r$, tel que pour $r = 0, ..., k$, $\mathcal{T}^1_r$ est l'espace des tenseurs une fois contravariant et r fois covariants, symétriques par rapport à leurs indices inférieurs. $\mathcal{T}^1_r$ correspond à la partie homogène de degré r des polynômes de second membre du système (3.2). On notera par $\mathcal{C}(n, k, \mathbb{k})$ l'ensemble de tous les coefficients de second membre des systèmes (3.2) et on notera par $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \mathbb{k}))$ l'ensemble de tous ces systèmes différentiels.

Remarque 3.1.1 *L'ensemble $\mathcal{C}(n, k, \mathbb{k})$ peut être identifié à la somme directe :*

$$\mathcal{T}^1_0 \oplus \mathcal{T}^1_1 \oplus ... \oplus \mathcal{T}^1_r, 0 \leq r \leq k.$$

Notation 3.1.1 *Soit a un sous ensemble de $\mathcal{C}(n, k, \mathbb{k})$, alors $S(a)$ définit un système différentiel de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \mathbb{k}))$.*

Définition 3.1.1 *Soit $S(a)$ un système différentiel de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\mathbb{k}))$. On note $p(a)$ le système algébrique défini par les polynômes de second membre du systeme $S(a)$:*

$$\left\{a^j + ... + a^j_{\alpha_1...\alpha_r} x^{\alpha_1}...x^{\alpha_r} = 0\ ; j, \alpha_1, ..., \alpha_r = 1, ..., n. \tag{3.3}$$

$p(a)$ est appelé système algébrique associé à $S(a)$.

Notation 3.1.2 *On notera par $\mathcal{E}(a)$ l'ensemble algébrique associé à $p(a)$, défini par :*

$$\mathcal{E}(a) = \left\{(x^1, x^2) \in \mathbb{k}^2; a^j + ... + a^j_{\alpha_1...\alpha_r} x^{\alpha_1}...x^{\alpha_r} = 0;\ j, \alpha_1, ..., \alpha_r = 1, ..., n\right\}.$$

Remarque 3.1.2 *$\mathcal{E}(a)$ est l'ensemble des points d'équilibre de $S(a)$.*

Soit $E = \mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}).GL(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$ le groupe des automorphismes linéaires de $\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k})$. Considérons le groupe $GL(n,\mathbb{k})$ des matrices $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{k}$ inversibles muni de la multiplication matricielle, appelé groupe général linéaire de degré n sur le corps $\mathbb{k}$ ou simplement le groupe des transformations centro-affines.

3.1.1 Lois de transformations centro-affines

L'action du groupe $GL(n,\mathbb{k})$ sur $\mathbb{k}^n$ est définie par :

$$\begin{array}{ccc} GL(n,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n & \to & \mathbb{k}^n \\ (q,x) & \mapsto & x^{*j} \end{array}$$

où

$$x^{*j} = q^j_i x^i,\ i, j = 1, 2, ..., n.$$

induit une représentation

$$\begin{array}{cccc} \rho : & GL(n,\mathbb{k}) & \to & GL(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k})) \\ & q & \mapsto & \rho(q) \end{array}$$

définie par :

$$\begin{array}{lcl} \rho(q)a^j & = & q^j_i a^i, \\ \rho(q)a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r} & = & q^j_i p^{\beta_1}_{\alpha_1} p^{\beta_2}_{\alpha_2} ... p^{\beta_r}_{\alpha_r} a^i_{\beta_1\beta_2...\beta r}, \end{array} \tag{3.4}$$

Les lois (3.4) sont appelées lois de transformations centro-affines.

Théorème 3.1.1 *Soit f un $GL(n,\mathbb{k})$-covariant de $\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n$. Alors le caractère Λ a pour expression :*

$$\Lambda(q) = |q|^{-\varkappa}$$

où $\varkappa \in \mathbb{Z}$ est le poids du covariant considéré.

Preuve. Soit $q \in GL(n,\mathbb{k})$. Pour tout $(a,x) \in \mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n$ nous avons :

$$(a^*, x^*) = (\rho(q)a, \rho(q)x) \Longleftrightarrow (a,x) = (\rho(p)a^*, \rho(p)x^*)$$

où $p = q^{-1}$. Sachant que f est un $GL(n,\mathbb{k})$-covariant de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$ alors on a :

$$f(a^*, x^*) = \Lambda(q) f(a,x) \text{ et } f(a,x) = \Lambda(p) f(a^*, x^*). \tag{3.5}$$

Comme :

$$p=\left(\frac{\widetilde{q}_i^j}{|q|}\right)_{i,j=1,2,\ldots,n}$$

où $\widetilde{q}_i^j$ est le cofacteur de q_i^j. Alors d'après la formule (3.4) $\Lambda(q)$ a la forme suivante :

$$\Lambda(q)=\frac{\varphi\left(q\right)}{|q|^{\mu}},$$

où φ est un polynôme dépendant des éléments de la matrice q et $\mu\in\mathbb{N}$.
On remarque aussi que :

$$\Lambda(p)=\frac{\psi\left(q\right)}{|q|^{\nu}},$$

où ψ est un polynôme dépendant des éléments de la matrice q et $\nu\in\mathbb{N}$.
Donc de (3.5) on obtient :

$$\Lambda(q)\Lambda(p)=1,$$

ce qui imlique que

$$\varphi\left(q\right)\psi\left(p\right)=|q|^{\nu+u},$$

Or, $|q|$ est un polynôme irrédectible par rapport aux éléments de la matrice q, d'où $\varphi\left(q\right)$ est de la forme :

$$\varphi\left(q\right)=|q|^{\omega},$$

ce qui donne $\Lambda(q)=|q|^{-\varkappa}$ avec $\varkappa\in\mathbb{Z}$. ■

Exemple 3.1.1 *La trace d'une matrice, notée $Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}$, définie par :*

$$Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=\sum_{i=1}^{n}a_i^i,$$

est un covariant centro-affine absolu. En effet, en utilisant les notations d'Einstein, $Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}$ s'écrit :

$$Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=a_\alpha^\alpha,\alpha=1,...,n.$$

Par les lois de transformations centro-affines (3.4), le transformé $Tr^*(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}$ de $Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}$ est donné par :

$$Tr^*(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=Q_i^\alpha P_i^j a_j^i \text{ avec } i,j,\alpha=1,...,n$$

où Q est une matrice inversible d'ordre n et P sa matrice inverse. Donc :

$$Tr^*(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=\delta_i^j a_j^i;i,j,\alpha=1,...,n$$

d'où :

$$Tr^*(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=a_i^i;i,j,\alpha=1,...,n$$

Par conséquent,

$$Tr^*(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}=Tr(a_j^i)_{1\leq i\leq j\leq n}$$

3.1.2 Algèbre des covariants centro-affines

Dans ce qui suit, $G = GL(n, \Bbbk)$.

Le théorème de la base finie de Hilbert (1.2.3) nous assure que l'algèbre des covariants centro-affines $\Bbbk\left[\mathcal{C}(n,k,\Bbbk)\times\Bbbk^n\right]^{GL(n,\Bbbk)}$ pour les systèmes différentiels polynômiaux de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ est de type fini.

Définition 3.1.2 *Un covariant centro-affine pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ est dit de type (ou homogène de multidegré) $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ $(1 \le r \le k)$ s'il est de degré d_0 par rapport à a^j, de degré d_1 par rapport à $a^j_{\alpha_1}$, de degré d_2 par rapport à $a^j_{\alpha_1\alpha_2}$, ..., de degré d_r par rapport à $a^j_{\alpha_1...\alpha_r}$ et de degré δ par rapport à $x \in \Bbbk^n$. L'entier δ est dit ordre par rapport a x.*

Exemple 3.1.2 *i) $K = \sum_{\alpha,\beta=1}^n a^\alpha_{\alpha\beta}x^\beta$ est de type $(0,0,1,0,...,0,1)$.*
ii) $Tr(a^i_j)_{1\le i\le j\le n} = \sum_{i=j=1}^n a^i_j$ est de type $(0,1,0,...,0)$.

Définition 3.1.3 *On appelle invariant centro-affine, tout covariant centro-affine d'ordre $\delta = 0$.*

Remarque 3.1.3 *Soit f un covariant centro-affine pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ de type $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$, alors pour tout $\lambda \in \Bbbk^*$, on a :*

$$\begin{aligned} f(\lambda a, \lambda x) &= f(\lambda a^1, ..., ..., \lambda a^n_{n...n}, \lambda x^1, ..., \lambda x^n) \\ &= \lambda^{d_0+...+d_n+\delta} f(a,x) \end{aligned}$$

Notation 3.1.3 *Dans ce qui suit, nous allons noter par $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les $GL(n,\Bbbk)$-covariants pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$.*

Théorème 3.1.2 *Un polynôme f est un G-covariant pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ si et seulement si ses parties homogènes sont des G-covariants de même poids.*

Preuve. Soit f un polynôme. $f(a,x)$ peut se décomposer sous la forme suivante :

$$f(a,x) = f_1(a,x) + ... + f_s(a,x),$$

où f_i $(i = 1, ..., s)$ sont des polynômes homogènes. f est un G-covariant si et seulement si pour tout $q \in GL(n,\Bbbk)$ on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^s f_i(\rho(q)(\lambda a), \rho(q)(\lambda x)) &= |q|^{-\varkappa} \sum_{i=1}^s f_i(\lambda a, \lambda x) \\ &= \sum_{i=1}^s |q|^{-\varkappa} f_i(\lambda a, \lambda x) \quad (\lambda \in \Bbbk^*). \end{aligned}$$

Or,

$$\sum_{i=1}^s \lambda^{\varkappa_i} f_i(\rho(q)a, \rho(q)x) = \sum_{i=1}^s |q|^{-\varkappa} \lambda^{\varkappa_i} f_i(a,x).$$

Comme ceci est valable pour tout $\lambda \in \Bbbk^*$ alors :

$$f \in \mathcal{F} \Leftrightarrow f_i(\rho(q)a, \rho(q)x) = |q|^{-\varkappa} f_i(a,x), \forall i \in \{1, ..., s\}.$$

D'où le théorème. ■

Proposition 3.1.1 *L'ensemble $\mathcal{F}$ des $GL(n,\mathbb{k})$-covariants pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$ admet une base polynômiale finie.*

Preuve. Soit $\mathcal{F}$ l'ensemble de tous les $GL(n,\mathbb{k})$-covariants pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$. Il est clair que :

$$\mathcal{F} \subset \mathbb{k}[\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n]^{GL(n,\mathbb{k})},$$

D'après le théorème de la base finie de Hilbert (1.2.3), la $\mathbb{k}$-algèbre $\mathbb{k}[\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n]^{GL(n,\mathbb{k})}$ est de type fini. Par conséquent $\mathbb{k}[\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n]^{GL(n,\mathbb{k})}$ est engendré par un nombre fini de $GL(n,\mathbb{k})$-covariants. D'où $\mathcal{F}$ admet une base polynômiale finie de $GL(n,\mathbb{k})$-covariants. ■

Proposition 3.1.2 *L'ensemble des covariants centro-affines de type $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$, noté $\mathcal{A}_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$, est un $\mathbb{k}$-espace vectoriel de dimension fini, et pour tout $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ et $(d'_0, d'_1, ..., d'_r, \delta') \in \mathbb{N}^{r+1}$ nous avons :*

$$\mathcal{A}_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}\mathcal{A}_{(d'_0,d'_1,...,d'_r,\delta')} \subset \mathcal{A}_{(d_0+d'_0,d_1+d'_1,...,d_r+d'_r,\delta+\delta')}$$

Par conséquent, $\mathbb{k}[\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n]^{GL(n,\mathbb{k})}$ est une algèbre graduée, c'est-à-dire :

$$\mathbb{k}[\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}) \times \mathbb{k}^n]^{GL(n,\mathbb{k})} = \bigoplus{}_{d_0,d_1,...,d_r,\delta\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}.$$

3.2 Théorèmes fondamentaux des covariants centro-affines

Dans cette section, nous allons énoncer des théorèmes fondamentaux de la théorie classique des invariants notamment le théorème de Gurevich. C'est un théorème constructif qui va nous permettre de déterminer un système de générateurs de covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$. Rappelons d'abord la notion de tenseurs et de produit tensoriel.

3.2.1 Produit tensoriel

Définition 3.2.1 *Soient E un $\mathbb{k}$-espace vectoriel et r, s deux entiers naturels. Le produit tensoriel :*

$$E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s} = \underbrace{E \otimes E \otimes ... \otimes E}_{r\ fois} \otimes \underbrace{E^* \otimes E^* \otimes ... \otimes E^*}_{s\ fois}$$

où E^* est le dual de E, s'appelle espace des tenseurs r-fois covariants et s-fois contravariants.

Considérons un tenseur t de $E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ alors on a :

$$t = \sum_{i_1,i_2...,i_r,j_1,j_2...,j_s=1}^{n} t^{i_1 i_2 ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_r} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_s}.$$

En utilisant les notations d'Einstein, on obtient :

$$t = t^{i_1 i_2 ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} \otimes e_{i_1} \otimes ... \otimes e_{i_p} \otimes e^{j_1} \otimes ... \otimes e^{j_q},$$

où $t^{i_1 i_2 \ldots i_p}_{j_1 j_2 \ldots j_q} \in \mathbb{k}$, $(e_i)_{i=1,2,\ldots,r}$ base de E et $(e^j)_{j=1,2,\ldots,q}$ base de E^*.

Dans ce qui suit, un tenseur $t \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ sera noté $t = t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$.
Considérons $q \in GL(n, \mathbb{k})$. On sait que les nouvelles bases des $\mathbb{k}$-espaces vectoriels E et E^* par la transformation q sont données par :

$$\begin{aligned} \widetilde{e}_i &= q_i^j e_j,\ j = 1, 2, \ldots, n \\ \widetilde{e}^i &= \left(q^{-1}\right)_j^j e^j,\ j = 1, 2, \ldots, n \end{aligned}$$

Proposition 3.2.1 *Soit $q \in GL(n, \mathbb{k})$ avec $q^{-1} = p$. L'expression d'un tenseur $t = t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ dans la nouvelle base*

$$\left(\widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}_{i_r} \otimes \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}^{j_s}\right)_{i_1,\ldots,i_r,j_1,j_2\ldots,j_s=1,2,\ldots,n}$$

de $E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ est donnée par :

$$\bar{t} = \bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}_{i_r} \otimes \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}^{j_s},$$

où,

$$\bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = q^{i_1}_{l_1} \ldots q^{i_r}_{l_r} p^{k_1}_{j_1} \ldots p^{k_s}_{j_s} t^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}.$$

Preuve. Soient $q \in GL(n, \mathbb{R})$ et $p = q^{-1}$. L'expression d'un tenseur $t = t^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ dans la nouvelle base est donnée par :

$$t = \bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}_{i_r} \otimes \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}^{j_s}.$$

En effet, nous avons :

$$\begin{aligned} t &= t^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s} e_{l_1} \otimes \ldots \otimes e_{l_r} \otimes e^{k_1} \otimes \ldots \otimes e^{k_s} \\ &= t^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s} q^{i_1}_{l_1} \widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes q^{i_r}_{i_r} \widetilde{e}_{i_r} \otimes p^{l_1}_{j_1} \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes p^{k_s}_{j_s} \widetilde{e}^{j_s} \\ &= t^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s} q^{i_1}_{l_1} \ldots q^{i_r}_{i_r} p^{k_1}_{j_1} \ldots p^{k_s}_{j_s} \widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}_{i_r} \otimes \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}^{j_s} \end{aligned}$$

d'où :

$$t = \bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \widetilde{e}_{i_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}_{i_r} \otimes \widetilde{e}^{j_1} \otimes \ldots \otimes \widetilde{e}^{j_s},$$

Donc :

$$\bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = q^{i_1}_{l_1} \ldots q^{i_r}_{l_r} p^{k_1}_{j_1} \ldots p^{k_s}_{j_s} t^{k_1}_{j_1} \ldots t^{k_s}_{j_s} t^{l_1 l_2 \ldots l_r}_{k_1 k_2 \ldots k_s}.$$

■

Proposition 3.2.2 *L'espace tensoriel $E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ induit l'action du groupe $GL(n, \mathbb{k})$ à gauche sur $E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ définie par :*

$$\begin{aligned} GL(n, \mathbb{k}) \times E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s} &\longrightarrow E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s} \\ (q, t) &\longmapsto q.t = \bar{t} \end{aligned}$$

où

$$\bar{t}^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = q^{i_1}_{\alpha_1} q^{i_2}_{\alpha_2} \ldots q^{i_r}_{\alpha_r} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} \ldots p^{\beta_s}_{j_s} t^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s}. \tag{3.6}$$

Preuve. En effet, il est clair que pour tout $t \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ on a $I_n.t = t$ (I_n matrice identité) et pour tout $q, h \in GL(n, \mathbb{k})$ on a :

$$\begin{aligned}(t.q).h &= h_{\xi_1}^{l_1}h_{\xi_2}^{l_2}...h_{\xi_r}^{l_r}\left(h^{-1}\right)_{k_1}^{\mu_1}\left(h^{-1}\right)_{k_2}^{\mu_2}...\left(h^{-1}\right)_{k_s}^{\mu_s}q_{i_1}^{\xi_1}q_{i_2}^{\xi_2}...q_{i_r}^{\xi_r}\left(q^{-1}\right)_{\mu_1}^{\alpha_1}\left(q^{-1}\right)_{\mu_2}^{\alpha_2}\\ &\quad ...\left(q^{-1}\right)_{\mu_s}^{\alpha_s}t_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_s}^{i_1i_2...i_r}\\ &= \left(h_{\xi_1}^{l_1}q_{i_1}^{\xi_1}\right)\left(h_{\xi_2}^{l_2}q_{i_2}^{\xi_2}\right)...\left(h_{\xi_r}^{l_r}q_{i_r}^{\xi_r}\right)\left(\left(h^{-1}\right)_{k_1}^{\mu_1}\left(q^{-1}\right)_{\mu_1}^{\alpha_1}\right)...\left(\left(h^{-1}\right)_{k_s}^{\mu_s}\left(q^{-1}\right)_{\mu_s}^{\alpha_s}\right)\\ &\quad t_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r}^{i_1i_2...i_r}.\end{aligned}$$

Comme $qh = \left(h_l^j q_i^l\right)_{i,j=\overline{1,n}}$ alors on déduit :

$$(t.q).h = t.(q.h).$$

■

3.2.2 Propriétés des tenseurs

Définition 3.2.2 *Un tenseur $t = t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ est dit tenseur relatif si*

$$\forall q \in GL(n, \Bbbk),\ q.t = (\det(q))^{-g}\, t$$

c'est-à-dire :

$$q_{\alpha_1}^{i_1}q_{\alpha_2}^{i_2}...q_{\alpha_r}^{i_r}\left(q^{-1}\right)_{j_1}^{\beta_1}\left(q^{-1}\right)_{j_2}^{\beta_2}...\left(q^{-1}\right)_{j_s}^{\beta_s}t_{\beta_1\beta_2...\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r} = (\det(q))^{-g}\, t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r}$$

Si $g = 0$, le tenseur $t = t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r}$ est dit tenseur invariant absolu.

Lemme 3.2.1 *Un tenseur invariant $t = t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ avec $r \neq s$, est un tenseur absolu si et seulement si $t = 0$.*

Preuve. En effet, supposons que $r - s \gneqq 0$ et $t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r}$ est un tenseur relatif alors, pour $q = \left(c\delta_i^j\right) \in GL(n, \Bbbk)$ tel que $c \in \Bbbk$ et $c^{r-s} \neq 1$ on a :

$$\begin{aligned}t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r} &= c^{r-s}\delta_{\alpha_1}^{i_1}\delta_{\alpha_2}^{i_2}...\delta_{\alpha_r}^{i_r}\delta_{j_1}^{\beta_1}\delta_{j_2}^{\beta_2}...\delta_{j_s}^{\beta_s}t_{\beta_1\beta_2...\beta_s}^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r}\\ &= c^{r-s}t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r}.\end{aligned}$$

D'où :

$$\left(1 - c^{r-s}\right)t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r} = 0 \Longrightarrow t_{j_1j_2...j_s}^{i_1i_2...i_r} = 0.$$

■

Lemme 3.2.2 *Si $t_j^i \in E^{\otimes 1} \otimes E^{*\otimes 1}$ est un tenseur absolu alors on a :*

$$t_j^i = c\delta_j^i,$$

avec $c = t_1^1 = t_2^2$.

Preuve. En effet, soit $q \in GL(n, \Bbbk)$ où $q^{-1} = p$ et t_j^i un tenseur absolu alors on a :

$$t_j^i = t_j^i.q = q_\alpha^i p_j^\beta t_\beta^\alpha.$$

On multiplie le tenseur t_j^i par p, on obtient alors :

$$p_i^k t_j^i = p_i^k q_\alpha^i p_j^\beta t_\beta^\alpha = \delta_\alpha^k p_j^\beta t_\beta^\alpha = p_j^\beta t_\beta^k$$

ou encore,

$$p_i^\beta \delta_\beta^k t_j^i = p_i^\beta \delta_j^i t_\beta^k.$$

L'identification par rapport aux variables p_i^β nous donne :

$$\delta_\beta^k t_j^i = \delta_j^i t_\beta^k,$$

d'où pour $k = \beta = 1$ et on a :

$$t_j^i = t_1^1 \delta_j^i,$$

par conséquent, $t_1^1 = t_2^2$. ■

Théorème 3.2.1 *Si $t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes r}$ est un tenseur absolu alors $t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ admet la décomposition suivante :*

$$t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r} = \sum_{\sigma \in S_r} c_\sigma \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \delta_{j_{\sigma(2)}}^{i_1} \ldots \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_1}$$

avec $c_\sigma = t_{12\ldots r}^{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(r)}$ pour $\sigma \in S_r$ où S_r est le groupe des permutations.

Preuve. Soient $q \in GL(n, \Bbbk)$ où $q^{-1} = p$ et $t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}$ un tenseur absolu alors on a :

$$\begin{aligned} t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r} &= t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r}.q \\ &= q_{\alpha_1}^{i_1} q_{\alpha_2}^{i_2} \ldots q_{\alpha_r}^{i_r} p_{j_1}^{\beta_1} p_{j_2}^{\beta_2} \ldots p_{j_r}^{\beta_r} t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}^{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_r}. \end{aligned}$$

A l'aide de la démonstration du lemme (3.2.2) qu'on applique pour chaque indice i_l, j_l $(l = 1, 2, ..., r)$, on obtient :

$$p_{i_1}^{k_1} p_{i_2}^{k_2} \ldots p_{i_r}^{k_r} t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r} = p_{j_1}^{\beta_1} p_{j_2}^{\beta_2} \ldots p_{j_r}^{\beta_r} t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}^{k_1 k_2 \ldots k_r},$$

ou encore,

$$p_{i_1}^{\beta_1} p_{i_2}^{\beta_2} \ldots p_{i_r}^{\beta_r} \delta_{\beta_1}^{k_1} \ldots \delta_{\beta_r}^{k_r} t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_1 i_2 \ldots i_r} = p_{i_1}^{k_1} p_{i_2}^{k_2} \ldots p_{i_r}^{k_r} \delta_{j_1}^{i_1} \ldots \delta_{j_r}^{i_r} t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}^{k_1 k_2 \ldots k_r}. \tag{3.7}$$

On remarque que chaque coefficient du monôme $p_{i_1}^{\beta_1} p_{i_2}^{\beta_2} \ldots p_{i_r}^{\beta_r}$ est donné par :

$$\sum_{\sigma \in S_r} \delta_{\beta_{\sigma(1)}}^{k_1} \ldots \delta_{\beta_{\sigma(r)}}^{k_r} t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(r)}}$$

alors, en identifiant par rapport à $p_{i_1}^{\beta_1} p_{i_2}^{\beta_2} \ldots p_{i_r}^{\beta_r}$ dans la formule (3.7), on obtient :

$$\sum_{\sigma \in S_r} \delta_{\beta_{\sigma(1)}}^{k_1} \ldots \delta_{\beta_{\sigma(r)}}^{k_r} t_{j_1 j_2 \ldots j_r}^{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(r)}} = \sum_{\sigma \in S_r} \delta_{j_{\sigma(1)}}^{i_1} \ldots \delta_{j_{\sigma(r)}}^{i_r} t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}^{k_{\sigma(1)} k_{\sigma(2)} \ldots k_{\sigma(r)}},$$

et pour $i_l = j_l = l$ tel que $l = 1, 2, ..., n$ on a :

$$t_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_r}^{k_1 k_2 \ldots k_r} = \sum_{\sigma \in S_r} \delta_{\beta_{\sigma(1)}}^{k_1} \ldots \delta_{\beta_{\sigma(r)}}^{k_r} t_{12 \ldots r}^{\sigma(1)\sigma(2)\ldots\sigma(r)}.$$

■

Définition 3.2.3 *Une contraction sur l'espace tensoriel $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ des tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants est une opération tensorielle entre un indice de haut et un indice de bas sur un tenseur $t^{j_1,\ldots,j_{r-1},j_r,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_l,i_{l+1},\ldots,i_q}$ de cet espace tensoriel,noté $t^{j_1,\ldots,j_{r-1},\alpha,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},\alpha,i_{l+1},\ldots,i_q}$, définie par :*

$$t^{j_1,\ldots,j_{r-1},\alpha,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},\alpha,i_{l+1},\ldots,i_q} = \sum_{\alpha=1}^{n} t^{j_1,\ldots,j_{r-1},\alpha,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},\alpha,i_{l+1},\ldots,i_q}$$

On dit que les indices j_r et i_l sont contractés.
Si tous les indices sont contractés alors la contraction est dite totale.

Définition 3.2.4 *Une alternation sur l'espace tensoriel $E^{\otimes p} \otimes E^{*\otimes q}$ des tenseurs p-fois covariants et q-fois contravariants est une operation tensorielle entre n indices supérieurs $n \leq p$, sur un tenseur $t^{j_1,\ldots,j_{r-1},j_r,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_l,i_{l+1},\ldots,i_q}$ de cet espace tensoriel, noté $t^{j_1,\ldots j_p}_{i_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,i_q}\varepsilon^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$, définie par :*

$$t^{j_1,\ldots j_p}_{i_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,i_q}\varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \sum_{\alpha_1=1}^{n}\cdots\sum_{\alpha_n=1}^{n} t^{j_1,\ldots j_p}_{i_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,i_q}\varepsilon^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

ou bien entre n inférieurs $n \leq q$ sur un tenseur $t^{j_1,\ldots,j_{r-1},j_r,j_{r+1},\ldots j_p}_{i_1,\ldots,i_{l-1},i_l,i_{l+1},\ldots,i_q}$ de cet espace tensotiel, noté $t^{j_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_q}\varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$; définie par :

$$t^{j_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_q}\varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \sum_{\alpha_1=1}^{n}\cdots\sum_{\alpha_n=1}^{n} t^{j_1,\ldots,\alpha_1,\ldots,\alpha_2,\ldots,\alpha_n,\ldots,j_q}_{i_1,\ldots,i_q}\varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n}$$

où $\varepsilon^{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} = \varepsilon_{\alpha_1,\ldots,\alpha_n} =$ signature de $(\alpha_1,..,\alpha_n)$.
Si tous les indices supérieurs et inférieurs sont alternés, l'alternation est dite totale.

Lemme 3.2.3 *Soit $q \in GL(n,\mathbb{k})$. On a :*

$$\begin{aligned}\varepsilon^{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} q^{\beta_1}_{\alpha_1} q^{\beta_2}_{\alpha_2}\ldots q^{\beta_n}_{\alpha_n}\det p &= \varepsilon^{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}.\\ \varepsilon_{\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_n} q^{\alpha_1}_{\beta_1} q^{\alpha_2}_{\beta_2}\ldots q^{\alpha_n}_{\beta_n}\det p &= \varepsilon_{\beta_1\beta_2\ldots\beta_n}.\end{aligned}$$

où $q^{-1} = p$ et les n-vecteurs contravariants (Resp. covariants)

$$\varepsilon_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_n}} \text{(Resp. } \varepsilon^{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_n}}\text{) avec } \alpha_{k_1},\alpha_{k_2}\ldots,\alpha_{k_n} = 1,2,\ldots,n,$$

sont des tenseurs alternés relatifs dont les coordonnées sont définies par :

$$\varepsilon_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_n}} = \varepsilon^{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\ldots\alpha_{k_n}} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n}) \text{ est une permutation paire,}\\ -1 & \text{if } (\alpha_{k_1},\ldots,\alpha_{k_n}) \text{ est une permutation impaire,}\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Preuve. Pour $q \in GL(n,\Bbbk)$ où $q^{-1} = p$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n} q^{\beta_1}_{\alpha_1} q^{\beta_2}_{\alpha_2} ... q^{\beta_n}_{\alpha_n} \det\left(q^{-1}\right) \\
= & \begin{vmatrix} q^{\beta_1}_1 & q^{\beta_1}_2 & ... & q^{\beta_1}_n \\ q^{\beta_2}_1 & q^{\beta_2}_2 & ... & q^{\beta_2}_n \\ & & ... & \\ q^{\beta_n}_1 & q^{\beta_n}_2 & ... & q^{\beta_n}_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} p^1_1 & p^1_2 & ... & p^1_n \\ p^2_1 & p^2_2 & ... & p^2_n \\ & & ... & \\ p^n_1 & p^n_2 & ... & p^n_n \end{vmatrix} \\
= & \begin{vmatrix} q^{\beta_1}_i p^i_1 & q^{\beta_1}_i p^i_2 & ... & q^{\beta_1}_i p^i_n \\ q^{\beta_2}_i p^i_1 & q^{\beta_2}_i p^i_2 & ... & q^{\beta_2}_i p^i_n \\ & & ... & \\ q^{\beta_n}_i p^i_1 & q^{\beta_n}_i p^i_2 & ... & q^{\beta_n}_i p^i_n \end{vmatrix} \\
= & q^{\beta_1}_i p^i_{\lambda_1} ... q^{\beta_1}_i p^i_{\lambda_n} \varepsilon^{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n} \\
= & \delta^{\beta_1}_{\lambda_1} \delta^{\beta_2}_{\lambda_2} ... \delta^{\beta_n}_{\lambda_n} \varepsilon^{\lambda_1\lambda_2...\lambda_n} \\
= & \varepsilon^{\beta_1\beta_2...\beta_n}.
\end{aligned}$$

■

Lemme 3.2.4 *Si* $t^{i_1i_2...i_r}_{j_1j_2...j_s} \in E^{\otimes r} \otimes E^{*\otimes s}$ *est un tenseur invariant de poids* $g > 0$ *(resp.* $g < 0$*) alors :*

$$\begin{aligned}
\widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} ... i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 ... j_s} &= t^{i_1 i_2 .. i_{\omega_1} .... i_{\omega_s} ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} \underbrace{\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} ... i_{k_n}} ... \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} ... i_{l_n}}}_{g \text{ fois}} \\
\text{resp. } \widetilde{t}^{i_1 i_2 ... i_r}_{j_{\omega_1} j_{\omega_2} ... j_{\omega_r}} &= t^{i_1 i_2 .. i_r}_{j_1 j_2 .. j_{\omega_1} .... j_{\omega_r} ... j_s} \underbrace{\varepsilon^{j_{k_1} j_{k_2} ... j_{k_n}} ... \varepsilon^{j_{l_1} j_{l_2} ... j_{l_n}}}_{g \text{ fois}}
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\left\{ i_{\omega_1} ... i_{\omega_v} \right\} \cup \left\{ i_{k_1}, i_{k_2} ... i_{k_n}, ..., i_{l_1}, i_{l_2} ..., i_{l_n} \right\} &= \left\{ i_1, i_2 ..., i_r \right\} \\
\text{resp. } \left\{ j_{\omega_1} ... j_{\omega_v} \right\} \cup \left\{ j_{k_1}, j_{k_2} ... j_{k_n}, ..., j_{l_1}, j_{l_2} ..., j_{l_n} \right\} &= \left\{ j_1, j_2 ..., j_s \right\}
\end{aligned}$$

est un tenseur invariant absolu.

Preuve. Si $t^{i_1i_2...i_r}_{j_1j_2...j_s}$ un tenseur invariant de poids $g \gneqq 0$, alors on a $r - s = ng$ et pour tout $q \in GL(n,\Bbbk)$ où $q^{-1} = p$:

$$\begin{aligned}
t^{i_1i_2...i_r}_{j_1j_2...j_s}.q &= q^{i_1}_{\alpha_1} ... q^{i_r}_{\alpha_r} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} ... p^{\beta_s}_{j_s} t^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r}_{\beta_1\beta_2...\beta_s} \\
&= (\det q)^g \, t^{i_1i_2...i_r}_{j_1j_2...j_s}.
\end{aligned}$$

On démontre que :

$$\widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} ... i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 ... j_s} = t^{i_1 i_2 .. i_{\omega_1} .... i_{\omega_s} ... i_r}_{j_1 j_2 ... j_s} \underbrace{\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} ... i_{k_n}} ... \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} ... i_{l_n}}}_{g \text{ fois}}$$

où :

$$\left\{ i_{\omega_1} i_{\omega_2} ... i_{\omega_s} \right\} \cup \left\{ i_{k_1}, i_{k_2} ... i_{k_n}, ..., i_{l_1}, i_{l_2} ..., i_{l_n} \right\} = \left\{ i_1, i_2 ..., i_r \right\}$$

est un tenseur invariant absolu.
En effet soit $q \in GL(n,\mathbb{R})$ $(q^{-1} = p)$, nous avons :

$$\begin{aligned}
& \widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} ... i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 ... j_s}.q = q^{i_{\omega_1}}_{\alpha_{\omega_1}} q^{i_{\omega_2}}_{\omega_2} ... q^{i_{\omega_s}}_{\omega_s} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} ... p^{\beta_s}_{j_s} \widetilde{t}^{\alpha_{\omega_1} \alpha_{\omega_2} ... \alpha_{\omega_s}}_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_s} \\
= & \; q^{i_{\omega_1}}_{\alpha_{\omega_1}} q^{i_{\omega_2}}_{\omega_2} ... q^{i_{\omega_s}}_{\omega_s} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} ... p^{\beta_s}_{j_s} t^{i_1 i_2 .. \alpha_{\omega_1} .... \alpha_{\omega_s} ... i_r}_{\beta_1 \beta_2 ... \beta_s} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} ... i_{k_n}} ... \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} ... i_{l_n}}
\end{aligned}$$

mais d'après le lemme (3.2.3) on a :

$$\begin{cases} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \ldots i_{k_n}} = |p| \, q^{\alpha_{i_{k_1}}}_{i_{i_{k_1}}} q^{\alpha_{k_2}}_{i_{k_2}} \ldots q^{\alpha_{k_n}}_{i_{k_n}} \varepsilon_{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_n}}, \\ \ldots \\ \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \ldots i_{l_n}} = |p| \, q^{\alpha_{l_1}}_{\alpha_{i_{l_1}}} q^{\alpha_{l_2}}_{i_{l_2}} \ldots q^{\alpha_{l_n}}_{i_{l_n}} \varepsilon_{\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \ldots \alpha_{l_n}}. \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{aligned} & \widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} \ldots i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 \ldots j_s} .q \\ = \; & |p|^g \left(q^{\alpha_{i_{k_1}}}_{i_{i_{k_1}}} q^{\alpha_{k_2}}_{i_{k_2}} \ldots q^{\alpha_{k_n}}_{i_{k_n}} \varepsilon_{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_n}} \right) \ldots \left(q^{\alpha_{l_1}}_{\alpha_{i_{l_1}}} q^{\alpha_{l_2}}_{i_{l_2}} \ldots q^{\alpha_{l_n}}_{i_{l_n}} \varepsilon_{\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \ldots \alpha_{l_n}} \right) \\ & \times q^{i_{\omega_1}}_{\alpha_{i_{\omega_1}}} q^{i_{\omega_2}}_{\alpha_{\omega_2}} \ldots q^{i_{\omega_s}}_{\alpha_{\omega_s}} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} \ldots p^{\beta_s}_{j_s} t^{i_1 i_2 .. \alpha_{\omega_1} \ldots . \alpha_{\omega_s} \ldots i_r}_{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_s} \\ = \; & |p|^g \, q^{\alpha_{i_{k_1}}}_{i_{i_{k_1}}} q^{\alpha_{k_2}}_{i_{k_2}} \ldots q^{\alpha_{k_n}}_{i_{k_n}} \ldots q^{\alpha_{l_1}}_{i_{l_1}} q^{\alpha_{l_2}}_{i_{l_2}} \ldots q^{\alpha_{l_n}}_{i_{l_n}} q^{i_{\omega_1}}_{\alpha_{i_{\omega_1}}} q^{i_{\omega_2}}_{\alpha_{\omega_2}} \ldots q^{i_{\omega_s}}_{\alpha_{\omega_s}} p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} \ldots p^{\beta_s}_{j_s} \\ & \times t^{i_1 i_2 .. \alpha_{\omega_1} \ldots . \alpha_{\omega_s} \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \varepsilon_{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_n}} \ldots \varepsilon_{\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \ldots \alpha_{l_n}} \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} & q^{\alpha_{i_{k_1}}}_{i_{i_{k_1}}} q^{\alpha_{k_2}}_{i_{k_2}} \ldots q^{\alpha_{k_n}}_{i_{k_n}} \ldots q^{\alpha_{l_1}}_{i_{l_1}} q^{\alpha_{l_2}}_{i_{l_2}} \ldots q^{\alpha_{l_n}}_{i_{l_n}} q^{i_{\omega_1}}_{\alpha_{\omega_1}} q^{i_{\omega_2}}_{\alpha_{\omega_2}} \ldots q^{i_{\omega_s}}_{\alpha_{\omega_s}} \times p^{\beta_1}_{j_1} p^{\beta_2}_{j_2} \ldots p^{\beta_s}_{j_s} \\ & \times t^{i_1 i_2 .. \alpha_{\omega_1} \ldots . \alpha_{\omega_s} \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s} = |q|^g \, t^{\alpha_{i_{k_1}} \ldots i_{\omega_1} \ldots i_{\omega_s} \ldots \alpha_{l_n}}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \end{aligned}$$

on obtient alors :

$$\begin{aligned} \widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} \ldots i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 \ldots j_s} .q &= |p|^g \, |q|^g \, t^{\alpha_{i_{k_1}} \ldots i_{\omega_1} \ldots i_{\omega_s} \ldots \alpha_{l_n}}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \varepsilon_{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_n}} \ldots \varepsilon_{\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \ldots \alpha_{l_n}} \\ &= t^{\alpha_{i_{k_1}} \ldots i_{\omega_1} \ldots i_{\omega_s} \ldots \alpha_{l_n}}_{j_1 j_2 \ldots j_s} \varepsilon_{\alpha_{k_1} \alpha_{k_2} \ldots \alpha_{k_n}} \ldots \varepsilon_{\alpha_{l_1} \alpha_{l_2} \ldots \alpha_{l_n}} \\ &= \widetilde{t}^{i_{\omega_1} i_{\omega_2} \ldots i_{\omega_s}}_{j_1 j_2 \ldots j_s}. \end{aligned}$$

La même preuve dans le cas où le poids est $g < 0$. ■

3.2.3 Théorèmes fondamentaux

On considère le produit tensoriel :

$$(\mathcal{T}^1_0)^{\otimes d_0} \otimes (\mathcal{T}^1_1)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes (\mathcal{T}^1_s)^{\otimes d_r} \otimes \Bbbk^{\otimes \delta}, \; 1 \leq r \leq k.$$

Un tenseur a de ce produit tensoriel est défini par :

$$a = a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_v}$$

où :

$$k = d_0 + d_1 + \ldots + d_r + \delta$$

et

$$v = d_0 + d_1 + 2d_2 + \ldots + rd_r.$$

Théorème 3.2.2 *Les expressions obtenues à partir d'alternations successives et de contractions totales sur les produits tensoriels :*

$$(\mathcal{T}^1_0)^{\otimes d_0} \otimes (\mathcal{T}^1_1)^{\otimes d_1} \otimes \cdots \otimes (\mathcal{T}^1_s)^{\otimes d_r} \otimes \Bbbk^{\otimes \delta}, \; 1 \leq r \leq k.$$

sont des covariants centro-affines pour les systèmes différentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$.

Preuve. Il est clair qu'une expression obtenue à partir d'alternations successives et d'une contraction totale des coefficients tensoriels des systèmes différentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$, a pour expression :

$$\begin{aligned} i)\ & a^{-\dots-}_{-\dots-}\varepsilon_{--\dots-}\dots\varepsilon_{--\dots-} \\ ii)\ & a^{-\dots-}_{-\dots-}\ \varepsilon^{-\dots-}\dots\varepsilon^{-\dots-} \\ iii)\ & a^{-\dots-}_{-\dots-}\varepsilon^{-\dots-}\dots\varepsilon_{--\dots-}\dots\varepsilon^{-\dots-}. \end{aligned}$$

Démontrons que les expressions de la forme $i)$ sont des tenseurs invariants. Les cas $ii)$ et $iii)$ peuvent être démontrés de la même manière.

Une expression obtenue à partir d'alternations successives et des contractions totales des coefficients tensoriels des systèmes différentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$ a la forme suivante :

$$a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}}\underbrace{\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\dots\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}}_{g \text{ fois}},$$

où

$$\sigma \in S_s \text{ permutation}$$
$$r - s = ng \geq 0,$$

$$\left\{i_{\sigma(1),} i_{\sigma(2)},\dots,i_{\sigma(s)}\right\} \cup \left\{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n},\dots,i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}\right\} = \left\{i_1, i_2\dots, i_r\right\}.$$

Soit $q \in GL(n,\mathbb{k})$ où $q^{-1} = p$ on a :

$$\begin{aligned} & a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\dots\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}.q \\ = \ & q^{i_1}_{\alpha_1} q^{i_2}_{\alpha_2}\dots q^{i_r}_{\alpha_r} p^{\beta_1}_{i_{\sigma(1)}} p^{\beta_2}_{i_{\sigma(2)}}\dots p^{\beta_s}_{i_{\sigma(s)}} a^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\dots\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}. \end{aligned}$$

Comme $\left\{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n},\dots,i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}\right\} \subset \left\{i_1, i_2\dots, i_r\right\}$, alors on a :

$$\begin{aligned} & a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\dots\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}.q \\ = \ & \left(q^{i_{i_{k_1}}}_{\alpha_{i_{k_1}}} q^{i_{k_2}}_{\alpha_{k_2}}\dots q^{i_{k_n}}_{\alpha_{k_n}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\right)\dots\left(q^{i_{l_1}}_{\alpha_{l_1}} q^{i_{l_2}}_{\alpha l_2}\dots q^{i_{l_n}}_{\alpha_{l_n}}\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}\right)\times q^{i_{\sigma(1)}}_{\alpha_{\sigma(1)}} q^{i_{\sigma(2)}}_{\alpha_{\delta,(2)}}\dots q^{i_{\sigma(s)}}_{\alpha_{\sigma(s)}} \\ & \times p^{\beta_1}_{i_{\sigma(1)}} p^{\beta_2}_{i_{\sigma(2)}}\dots p^{\beta_s}_{i_{\sigma(s)}} a^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(s)}\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s} \\ = \ & \left(q^{i_{i_{k_1}}}_{\alpha_{i_{k_1}}} q^{i_{k_2}}_{\alpha_{k_2}}\dots q^{i_{k_n}}_{\alpha_{k_n}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\right)\dots\left(q^{i_{l_1}}_{\alpha_{l_1}} q^{i_{l_2}}_{\alpha l_2}\dots q^{i_{l_n}}_{\alpha_{l_n}}\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}\right) \\ & \times\left(q^{i_{\sigma(1)}}_{\alpha_{\sigma(1)}} p^{\beta_1}_{i_{\sigma(1)}}\right)\dots\left(q^{i_{\sigma(s)}}_{\alpha_{\sigma(s)}} p^{\beta_s}_{i_{\sigma(s)}}\right) a^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(s)}\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s} \\ = \ & \left(q^{i_{i_{k_1}}}_{\alpha_{i_{k_1}}} q^{i_{k_2}}_{\alpha_{k_2}}\dots q^{i_{k_n}}_{\alpha_{k_n}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\right)\dots\left(q^{i_{l_1}}_{\alpha_{l_1}} q^{i_{l_2}}_{\alpha l_2}\dots q^{i_{l_n}}_{\alpha_{l_n}}\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}\right)\times\delta^{\beta_1}_{\alpha_{\sigma(1)}}\dots\delta^{\beta_s}_{\alpha_{\sigma(s)}} \\ & a^{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_{\sigma(1)}\dots\alpha_{\sigma(s)}\dots\alpha_r}_{\beta_1\beta_2\dots\beta_s} \\ \\ = \ & \left(q^{i_{i_{k_1}}}_{\alpha_{i_{k_1}}} q^{i_{k_2}}_{\alpha_{k_2}}\dots q^{i_{k_n}}_{\alpha_{k_n}}\varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2}\dots i_{k_n}}\right)\dots\left(q^{i_{l_1}}_{\alpha_{l_1}} q^{i_{l_2}}_{\alpha l_2}\dots q^{i_{l_n}}_{\alpha_{l_n}}\varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2}\dots i_{l_n}}\right) a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}} \\ = \ & \left(|q|\,\varepsilon_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_n}}\right)\dots\left(|q|\,\varepsilon_{\alpha_{l_1} i_{l_2}\dots i_{\alpha_n}}\right) a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}} \\ = \ & |q|^g\, a^{i_1 i_2\dots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}\dots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)}\dots i_{\sigma(s)}}\varepsilon_{\alpha_{k_1}\alpha_{k_2}\dots\alpha_{k_n}}\dots\varepsilon_{\alpha_{l_1} i_{l_2}\dots i_{\alpha_n}} \end{aligned}$$

On obtient donc :

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(s)} \ldots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(s)}} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \ldots i_{k_n}} \ldots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \ldots i_{l_n}} .q = |q|^g \, a^{i_1 i_2 \ldots i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(s)} \ldots i_r}_{i_{\sigma(1)} i_{\sigma(2)} \ldots i_{\sigma(s)}} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \ldots i_{k_n}} \ldots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \ldots i_{l_n}}$$

■

Énonçons maintenant le théorème de Gurevich.

Théorème 3.2.3 (Gurevich) *Les expressions obtenues à partir des alternations ou de contractions totales des coefficients tensoriels des systèmes différentiels de* $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ *forment un système de générateurs des covariants centro-affines de ces systèmes différentiels.*

Preuve. Les expressions obtenues à partir d'alternations ou contractions totales des coefficients tensoriels des systèmes différentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ sont des covariants centro-affines pour les système différentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$. Il suffit donc de démontrer que tout covariant centro-affine peut s'exprimer en fonction des covariants générateurs des covariants centro-affine pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$. Soit $I(a)$ un covariant centro-affine pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$. $I(a)$ peut s'écrire sous la forme suivante :

$$I(a) = I_1(a) + \ldots + I_s(a)$$

où $I_i(a)$ $(i = 1, 2, \ldots, s)$ sont des polynômes homogènes en fonction de $a \in \mathcal{C}(n,k,\Bbbk)$. On sait que $I(a)$ est un covariant centro-affine si et seulement si les $I_i(a)$, $i = 1, .., s$; le sont. Donc pour démontrer notre théorème il suffit de démontrer que tout covariant homogène pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ peut s'exprimer en fonction linéaire de covariants générateurs des covariants centro-affine pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$.
Soit $B(a)$ un covariant homogène pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ de poids $g \gneqq 0$ par exemple. Alors, $B(a)$ est de la forme :

$$B(a) = \sum_{\substack{d_0+d_1+\ldots+d_r=m \\ d_0,d_1,\ldots,d_r \in \mathbb{N}}} c_{(d_0,d_1,\ldots,d_r)} (a^j)^{d_0} (a^j_{\alpha_1})^{d_1} (a^j_{\alpha_1\alpha_2})^{d_2} \cdots (a^j_{\alpha_1\cdots\alpha_r})^{d_r}$$

On peut remarquer que les termes de $B(a)$ ne sont rien d'autre que les composantes du tenseur $a^{i_1 i_2 \ldots i_r}_{j_1 j_2 \ldots j_s}$ donné par :

$$a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_v} = (a^i)^{d_0} (a^i_{j_1})^{d_1} (a^i_{j_1 j_2})^{d_2} \cdots (a^i_{j_1 \cdots j_r})^{d_r},$$

où :

$$k = d_0 + d_1 + \ldots + d_r$$

et

$$v = d_1 + 2d_2 + \ldots + rd_r.$$

On peut réécrire $B(a)$ sous la forme contractée suivante :

$$B(a) = t^{j_1 j_2 \ldots j_v}_{i_1 i_2 \ldots i_k} a^{i_1 i_2 \ldots i_k}_{j_1 j_2 \ldots j_v},$$

telle que pour chaque indice fixé $d_0, d_1, \ldots, d_r \in \mathbb{N}$ où $d_0 + d_1 + \ldots + d_r = m$ on a :

$$t^{j_1 j_2 \ldots j_v}_{i_1 i_2 \ldots i_k} = c_{(d_0,d_1,\ldots,d_r)}.$$

Nous avons pour tout $q \in GL(n,\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned}
B(a.q) &= t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} a_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_k}.q \\
&= t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} q_{\alpha_1}^{i_1} q_{\alpha_2}^{i_2} \dots q_{\alpha_r}^{i_r} \left(q^{-1}\right)_{j_1}^{\beta_1} \left(q^{-1}\right)_{j_2}^{\beta_2} \dots \left(q^{-1}\right)_{j_s}^{\beta_s} a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_s}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_r} \\
&= (\det q)^g B(a) \\
&= (\det q)^g t_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v} a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}
\end{aligned}$$

D'où :

$$\left(t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} q_{\alpha_1}^{i_1} q_{\alpha_2}^{i_2} \dots q_{\alpha_r}^{i_r} \left(q^{-1}\right)_{j_1}^{\beta_1} \left(q^{-1}\right)_{j_2}^{\beta_2} \dots \left(q^{-1}\right)_{j_s}^{\beta_s} - (\det q)^g t_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v}\right) a_{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v}^{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k} = 0$$

ce qui implique :

$$t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} q_{\alpha_1}^{i_1} q_{\alpha_2}^{i_2} \dots q_{\alpha_k}^{i_k} \left(q^{-1}\right)_{j_1}^{\beta_1} \left(q^{-1}\right)_{j_2}^{\beta_2} \dots \left(q^{-1}\right)_{j_v}^{\beta_v} = (\det q)^g t_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v},$$

c'est-à-dire :

$$t_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v}.p = (\det p)^{-g} t_{\alpha_1 \alpha_2 \dots \alpha_k}^{\beta_1 \beta_2 \dots \beta_v}$$

Donc $t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v}$ est un tenseur covariant de poids $-g$. Mais d'après le lemme (3.2.1) le tenseur :

$$\widetilde{t}_{i_{\omega_1} \dots i_{\omega_v}}^{j_1 j_2 \dots j_v} = t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} \varepsilon^{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_n}} \dots \varepsilon^{i_{l_1} i_{l_2} \dots i_{l_n}},$$

où

$$\left\{i_{\omega_1} \dots i_{\omega_v}\right\} \cup \left\{i_{k_1}, i_{k_2} \dots i_{k_n}, \dots, i_{l_1}, i_{l_2} \dots, i_{l_n}\right\} = \{i_1, i_2 \dots, i_k\}$$

est un tenseur absolu, donc d'après le lemme (3.2.3) on a :

$$\begin{cases}
t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} = \sum\limits_{\sigma \in S_r} c_\sigma^* \delta_{i_{\sigma(\omega_1)}}^{\cdot j_1} \delta_{i_{\sigma(\omega_2)}}^{\cdot j_2} \dots \delta_{i_{\sigma(\omega_v)}}^{\cdot j_v} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_n}} \dots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \dots i_{l_n}} \\
t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} a_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_{\sigma(\omega_1)} \dots i_{\sigma(\omega_v)} \dots i_k} = \sum\limits_{\sigma \in S_r} c_\sigma^* a_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_{\sigma(\omega_1)} \dots i_{\sigma(\omega_v)} \dots i_k} \delta_{i_{\sigma(\omega_1)}}^{\cdot j_1} \delta_{i_{\sigma(\omega_2)}}^{\cdot j_2} \dots \\
\qquad \delta_{i_{\sigma(\omega_v)}}^{\cdot j_v} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_n}} \dots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \dots i_{l_n}} \\
t_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} a_{j_1 j_2 \dots j_v}^{i_1 i_2 \dots i_k} = \sum\limits_{\sigma \in S_r} c_\sigma^* a_{i_1 i_2 \dots i_k}^{j_1 j_2 \dots j_v} a_{i_{\sigma(\omega_1)} i_{\sigma(\omega_2)} \dots i_{\sigma(\omega_v)}}^{i_1 i_2 \dots i_{\sigma(\omega_1)} \dots i_{\sigma(\omega_v)} \dots i_k} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_n}} \dots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \dots i_{l_n}}
\end{cases}$$

où :

$$\left\{i_{\sigma(\omega_1)} \dots i_{\sigma(\omega_v)}\right\} \cup \left\{i_{k_1}, i_{k_2} \dots i_{k_n}, \dots, i_{l_1}, i_{l_2} \dots, i_{l_n}\right\} = \{i_1, i_2 \dots, i_k\}.$$

Comme $a_{i_{\sigma(\omega_1)} i_{\sigma(\omega_2)} \dots i_{\sigma(\omega_v)}}^{i_1 i_2 \dots i_{\sigma(\omega_1)} \dots i_{\sigma(\omega_v)} \dots i_k} \varepsilon_{i_{k_1} i_{k_2} \dots i_{k_n}} \dots \varepsilon_{i_{l_1} i_{l_2} \dots i_{l_n}}$ n'est rien d'autre qu'un covariant générateur, d'où le théorème.

■

Le théorème de la base finie de Hilbert (1.2.3), est un théorème fondamental de la théorie des invariants. On sait que d'après le théorème de la finitude des systèmes de générateurs des covariants centro-affines des systèmes différentiels polynômiaux $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$, il existe $f_1, f_2, \dots, f_s$ des $GL(n,\Bbbk)$-covariant pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ tels que pour tout $GL(n,\Bbbk)$-covariant I pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$, il existe un polynôme $P \in \Bbbk[x^1, \dots, x^n]$ tel que $I = P(f_1, f_2, \dots, f_s)$. D'autre part, d'après le théorème de Gurevich, pour chaque covariant f_i il existe des covariants générateurs $f_{1,i}, f_{2,i}, \dots, f_{k_i,i}$ tels que :

$$f_i = \sum_{l=1}^{k_i} c_{l,i} f_{l,i} \quad (c_{l,i} \in \Bbbk)$$

d'où :

$$\begin{aligned} I &= P\left(f_1, f_2, ..., f_s\right) \\ &= P\left(\sum_{l=1}^{k_1} c_{l,i} f_{l,1}, \sum_{l=1}^{k_s} c_{l,i} f_{l,2}, ..., \sum_{l=1}^{k_s} c_{l,s} f_{l,s}\right) \\ &= \widetilde{P}\left(\{f_{1,i}, f_{2,i}, ..., f_{k_i,i}\}\right) \end{aligned}$$

Ainsi, il existe un nombre fini des covariants générateurs qui forment une base polynômiale des covariants centro-affine pour $\mathcal{S}\left(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk)\right)$.

Le théorème de Gurevich (3.2.3) est un théorème fondamental pour les covariants centro-affines des systèmes différentiels de $\mathcal{S}\left(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk)\right)$. Il nous permet de déterminer un système de générateurs pour ces covariants centro-affines. En effet, il nous suffit de construire des expressions polynômiales à partir des coefficients de ces systèmes différentiels et du vecteur x de $\Bbbk^n$ à l'aide d'alternations ou de contractions totales. Une fois un système de générateurs construit, le problème qui se pose est celui de sa réduction en un système minimal.

3.3 Réduction d'un système de générateurs de covariants centro-affines

3.3.1 Calcul symbolique d'Aronhold

La méthode d'Aronhold consiste en la décomposition symbolique d'un tenseur 1-fois covariant et m-fois contravariants $a^j_{i_1 \dots i_m}$, symétrique par rapport aux indices inférieurs, en un vecteur contravariant $\widetilde{b}$ et m vecteurs covariant b. L'opération de contraction (entre indices de haut et indices de bas) est représentée par un facteur du type $(\widetilde{b}\ c)$ et l'opération alternation entre indices de haut (respectivement indices de bas) est représentée par un facteur du type $[\widetilde{b}\ \widetilde{c}]$ (respectivement $[b\ c]$).

Exemple 3.3.1 *On a les écritures symboliques suivantes :*

$$\begin{aligned} I &= a^\alpha_\alpha \\ &= (\widetilde{b}\ b) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} K &= a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta \\ &= (\widetilde{a}\ \ a)\ (\widetilde{x}\ \ b). \end{aligned}$$

Cette méthode est basée sur deux identités appelées identités symboliques ([19]) **:**

i) $b[\widetilde{c} \cdots \widetilde{f}\, g] - \widetilde{c}[b \cdots \widetilde{f}\, g] + \cdots + (-1)^n g[b\, \widetilde{c} \cdots \widetilde{f}] = 0.$

ii) $[b\,\widetilde{c}\cdots\widetilde{f}\,\widetilde{g}]\times[\widetilde{k}\,l\cdots p\,\widetilde{q}]=\begin{vmatrix}(b\,\widetilde{k}) & (\widetilde{c}\,\widetilde{k}) & \cdots & (\widetilde{g}\,\widetilde{k})\\ (b\,l) & (\widetilde{c}\,l) & \cdots & (\widetilde{g}\,l)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (b\,\widetilde{q}) & (\widetilde{c}\,\widetilde{q}) & \cdots & (\widetilde{g}\,\widetilde{q})\end{vmatrix}.$

La première relation est le développement d'un déterminant. La seconde exprime que le produit des déterminants est le déterminant des produits de matrices.

Ces identités symboliques permettent d'établir des relations polynômiales entre les G-covariants.
Cette méthode très élégante d'ailleurs, est un outil efficace de calcul et de la réduction des covariants centro-affines. Cependant, la difficulté calculatoire constitue une barrière empêchant souvent de profiter de ces identités symboliques d'Aronhold due à la difficulté des calculs de déterminant.

3.3.2 Méthode alternative

On se propose de développer une méthode algorithmique alternative à la méthode d'Aronhold, pour la construction d'un système de générateurs minimal de covariants centro-affines pour les systèmes différentiels de $\mathcal{S}\left(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk)\right)$ ainsi que pour la réduction d'un covariant donné de ces systèmes différentiels modulo cette base.

Il est clair que le recours au calcul formel est sous entendu dans la théorie des invariants. Les algorithmes de Buchberger, basés sur la définition des S-polynômes semblent une alternative au calcul symbolique d'Aronhold. Notre méthode algorithmique sera basée sur le test d'appartenance au radical d'un idéal. Cette dernière va nous permettre de réduire un système de générateurs de covariants centro-affines des systèmes différentiels donnés de $\mathcal{S}\left(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk)\right)$.

Proposition 3.3.1 *Les covariants centro-affines de type $(d_0,d_1,...,d_r,\delta)$ vérifient nécessairement la relation :*

$$(r-1)d_r+(r-2)d_{r-1}+...+2d_3+d_2+d_0\equiv 0 \mod n.$$

Preuve. Si $(r-1)d_r+(r-2)d_{r-1}+...+2d_3+d_2+d_0\not\equiv 0 \mod n$ alors le covariant centro-affine aurait au moins un indice libre, ce qui contredirait le théorème de Gurevich (3.2.3). ■

Soient un type $T=(d_0,d_1,d_2,...,d_r,\delta)$ et $\mathcal{A}_{(d_0,d_1,d_2,...,d_r,\delta)}$ le sous espace vectoriel correspondant. Notons par $F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ une famille génératrice du $\Bbbk$-espace vectoriel $\mathcal{A}_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$.

Théorème 3.3.1 *$F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ est de type fini.*

Preuve. En effet,

$$\mathcal{A}=\oplus_{d_0,d_1,d_2,...,d_r,\delta\in\mathbb{N}}\mathcal{A}_{(d_0,d_1,d_2,...,d_r,\delta)}$$

et $\mathcal{A}$ est de type fini d'après le théorème de la base de Hilbert (1.2.3).
■

Considérons le système minimal $B=\{C_1,...,C_s\}$ de générateurs de l'idéal des covariants centro-affines des systèmes différentiels $\mathcal{S}\left(\mathcal{C}\left(n,k,\Bbbk\right)\right)$. Soient $TC_1,...,TC_s$ leurs types respectifs.

Théorème 3.3.2 *$f \in F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ si et seulement si, il existe s entiers naturels $\lambda_1, ..., \lambda_s$ tels que $f = C_1^{\lambda_1}...C_s^{\lambda_s}$ et $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_s TC_s$.*

Preuve. En effet, $C \in \mathcal{A}_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ si et seulement si C est une somme finie

$$C = \sum_{\lambda_1,...,\lambda_r \in \mathbb{N}} c_{\lambda_1,...,\lambda_r} C_1^{\lambda_1}...C_r^{\lambda_r}$$

car $B = \{C_1, ..., C_s\}$ est un système minimal de générateurs de l'idéal des covariants centro-affines des systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$ et $f \in F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ est de la forme $C_1^{\lambda_1}...C_r^{\lambda_r}$.

D'autre part $C_1, ..., C_r$ sont des polynômes homogènes de multidegré respectifs $\lambda_1 TC_1, ..., \lambda_s TC_s$. On a donc :

$$(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_s TC_s.$$

■

Théorème 3.3.3 *$f \in F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ si et seulement si, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_s \in \mathbb{Q}$ tels que :*

$$(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_s TC_s$$

et

$$0 \leq \lambda_1 \leq \alpha_1, ..., \lambda_s \leq \alpha_s.$$

Preuve. Les éléments $f \in F_{(d_0,d_1,...,d_r,\delta)}$ sont des covariants centro-affines de la forme $f = C_1^{\lambda_1}...C_s^{\lambda_s}$ où :

$$(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_s TC_s.$$

Pour déterminer le type de $C_1^{\lambda_1}, ..., C_r^{\lambda_r}$ nous avons besoin de déterminer $\lambda_1, ..., \lambda_r$ tel que $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_s TC_s$.
Posons pour $i = 1, ..., s$ et $j = 0, ..., r$

$$t_i[j+1] = \begin{cases} \frac{d_j}{TC_i[j+1]} \text{ si } TC_i[j+1] \neq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}.$$

On prend

$$\alpha_i = \left[\min_{k=1,...r+1} (t_i[k] \neq 0) \right], i = 1, ..., s$$

où $[x]$ est la partie entière de x.
La réciproque est immédiate. ■

Notation 3.3.1 *On note par $I(F)$ l'idéal engendré par la famille $F = \{C_1, ..., C_s\}$ où F est une famille génératrice de covariants centro-affines pour les systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$.*

Supposons que chaque covariant $C_i, i = 1, ..., s$ est de type $(d_0^i, d_1^i, ..., d_r^i, \delta^i), 1 \leq i \leq s$ et $1 \leq r \leq k$. Soit C un covariant centro-affine pour les systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$ de type $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$. On a le théorème suivant :

Théorème 3.3.4 *S'il existe un entier $s_0, 0 \leq s_0 \leq k$ tel que d_{s_0} n'admet aucune partition en $d_{s_0}^{i_1}, ..., d_{s_0}^{i_r}$ alors $C \notin I(F)$.*

Preuve. D'après le théorème (3.3.3), en remplaçant pour tout $i = 1, ..., s$ chaque TC_i par $(d_0^i, d_1^i, ..., d_r^i, \delta^i); C \in I(F)$ si et seulement si $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ est combinaison linéaire des $(d_0^{i_r}, d_1^{i_r}, ..., d_k^{i_r}, \delta^{i_r}), 1 \leq r \leq s$; ce qui est impossible puisque d_{s_0} n'admet aucune partition en $d_{s_0}^{i_1}, ..., d_{s_0}^{i_r}$. ■

Corollaire 3.3.1 *Si tous les éléments de F ont un degré nul par rapport à l'un des tenseurs $a_{i_1,...,i_s}^j, 1 \leq s \leq k$ et d_s le degré de C par rapport à ce même tenseur est non nul alors $C \notin I(F)$.*

Preuve. Conséquence du théorème précédent (3.3.4). ■

Corollaire 3.3.2 *S'il existe deux entiers r_0, i_0, $1 \leq r_0 \leq r$ et $0 \leq i_0 \leq s$; tel que pour tout $i = 1, ..., s$, $d_{s_0} < d_{s_0}^i$ alors $C \notin I(F)$.*

Soit $F = \{C_1, ..., C_s\}$ un système de générateurs de covariants centro-affines pour des systèmes de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$ construit degré par degré à l'aide du théorème de Gurevich (3.2.3). Nous allons maintenant donner un algorithme qui permet de déterminer un système minimal de générateurs $B = \{b_1, ..., b_r\}$ de covariants centro-affines pour des systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$ à partir de $F = \{C_1, ..., C_s\}$. En effet, à l'aide des bases de Gröbner et en utilisant le test d'appartenance au radical d'un idéal, on réduit notre famille génératrice $F = \{C_1, ..., C_s\}$ en un système minimal de générateurs puis, on décomposera un covariant C dans ce système minimal de générateurs.

Algorithme 6 : Entrées : C un covariant centro-affine de type $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ et $F = \{C_1, ..., C_s\}$ une famille génératrice.
étape1. Fixer un ordre monomial $\preceq$.
étape2. Pour $i = 1, ..., s$ faire :
$B_i = \{C_1, ..., C_i\}$.
Construire la base de Gröbner I de $\{C_1, ..., C_i, 1 - tC_{i+1}\}$.
si : $I = \langle 1 \rangle$ alors $B_{i+1} = B_i$
sinon, $B_{i+1} = B_i \cup \{C_{i+1}\}$.
Associer $B = B \cup B_{i+1}$.
étape3. Décomposer C dans B i.e $(d_0, d_1, ..., d_r, \delta) = \lambda_1 TC_1 + ... + \lambda_k TC_k$ où TC_i type de C_i covariant de B.
étape4. Retourner B et $\lambda_1, ..., \lambda_k$.

Une fois notre système minimal de génerateurs de covariants centro-affines pour un système différentiel donné est construit, une grande étape est dépassée pour l'étude qualitative de ces sytèmes différentiels.

Chapitre 4

Caractérisation des points d'équilibre d'un système différentiel polynômial de deux variables.

Soient $a \subset \mathcal{C}(2,k,\Bbbk)$ et $\mathcal{F} = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$ un système minimal de générateurs de covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\Bbbk))$. Dans ce chapitre nous allons nous intéresser aux points d'équilibre des systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\Bbbk))$. Nous développerons deux méthodes algorithmiques permettant de déterminer les points d'équilibre d'un système $S(a)$ à l'aide de relations algébriques de covariants centro-affines. En effet, l'idée est de construire un système différentiel $S(b)$ équivalent à $S(a)$ dont les coefficents sont des covariants centro-affines.

4.1 Matrice de Transformation

Soit $S(a)$ un système différentiel donné de $S(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$. Dans cette section, nous allons construire une transformation centro-affine Q telle que pour tout $a \subset \mathcal{C}(n,k,\Bbbk)$, $\rho(Q)a$ et $\det Q$ sont des covariants centro-affines pour $S(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$.

Définition 4.1.1 *Considérons la matrice carrée Q, définie par n tenseurs $T^1_{i_1}, ..., T^n_{i_n}; j, i_j = 1, ..., n$:*

$$Q^j_{i_j} = T^i_{i_j}; i, i_j = 1, ..., n \tag{4.1}$$

où pour $j = 1, ..., n$ et $0 \leq r \leq k$, $T^j_{i_j}$ est un tenseur 1-fois covariant et 0- fois contravariant de type $(d_0(j), d_1, ..., d_r(j), \delta(j))$, associé à $S(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$. Si tous les tenseurs $T^j_{i_j}$ sont des tenseurs constitués de coeffcients de $a \subset \mathcal{C}(n,k,\Bbbk)$ alors la matrice (4.1) est dite matrice associée à $S(a)$, notée Q_a.

Exemple 4.1.1 *Soit $S(a)$ le système différentiel défini par $a \subset \mathcal{C}(2,2,\mathbb{R})$ tel que :*

$$a = \left\{a^1 = -a^2 = 1, a^1_{11} = a^1_{12} = a^1_{22} = a^2_{11} = a^2_{12} = 0, a^2_{22} = 1\right\}$$

Considérons les tenseurs 1-fois covariant et 0-fois contravariant $J_j = a^\alpha_{\alpha j}$ et $T_i = a^\alpha \varepsilon_{i\alpha}$, où $i, j, \alpha = 1, 2$ alors :

$$Q_a = \begin{pmatrix} T_1 & T_1 \\ J_1 & J_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & -a^1 \\ a^\alpha_{\alpha 1} & a^\alpha_{\alpha 2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

est une matrice associée à $S(a)$.

Une question se pose : peut-on toujours déterminer une telle matrice Q_a associée à $S(a)$?

Proposition 4.1.1 *Soit $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ un tenseur associé à $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$.Si $d_2 + 2d_3 + ... + (r-1)d_r - d_0 - \delta \equiv \lambda\,[n]$ où λ est un entier tel que $1 \leq \lambda \leq n-1$, alors il nous est possible de construire à partir de $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$, au moins un tenseur λ-fois covariants et 0-fois contravariant, noté $T_{i_1,...,i_\lambda}(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)\,; i_1, ..., i_\lambda = 1, ..., n$.*

Preuve. Soit $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ un tenseur associé à $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$ tel que :

$$d_2 + 2d_3 + ... + (r-1)d_r - d_0 - \delta \equiv \lambda\,[n]$$

alors $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ est un tenseur p-fois contravariants et q-fois covariants avec $p - q = mn + \lambda; m \in \mathbb{Z}$. Ainsi, après p opérations de contractions et m opérations d'alternations sur $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$, on obtient au moins un tenseur λ-fois covariants et 0-fois contravariant. ■

Remarque 4.1.1 *Soit $T(d_0, d_1, ..., d_r, \delta)$ un tenseur associé à $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$.Si*

$$d_2 + 2d_3 + ... + (r-1)d_r - d_0 - \delta \equiv 1\,[n]\,,$$

on peut construire un tenseur 1-fois covariant et 0-fois contravariant.

Exemple 4.1.2 *Considérons le tenseur suivant :*

$$T(1,1,5,1) = a^{\alpha} a^{\beta}_{-} a^{-}_{-\alpha} a^{-}_{-\beta} a^{-}_{--} a^{-}_{--} a^{-}_{--} x^{-}$$

où '$-$' et '$^{-}$' désignent les indices de libres. T est un tenseur 6-fois contravariants et 9-fois covariants. Deplus, $d_2 - d_0 - \delta = 3 \equiv 1\,[2]$. Nous pouvons alors construire des tenseurs 1-fois covariant et 0-fois contravariant à partir de $T(1,1,5,1)$ tel que :

$$T_i(1,1,5,1) = a^{\alpha} a^{\beta}_{p} a^{\delta}_{q\alpha} a^{\lambda}_{\delta\beta} a^{\mu}_{\lambda i} a^{\xi}_{\mu\omega} a^{\omega}_{\xi v} x^{v} \varepsilon^{pq}$$

Par conséquent, d'après la proposition (4.1.1), pour construire une matrice Q_a associée à $S(a) \subset S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$, il nous suffit de trouver n tenseurs $T^j(d_0(j), d_1(j), ..., d_r(j), \delta(j))$ associés à $S(a)$, qui vérifient :

$$d_2(j) + 2d_3(j) + ... + (r-1)d_r(j) - d_0(j) - \delta(j) \equiv 1\,[n]\,, j = 1, ..., n \tag{4.2}$$

Lemme 4.1.1 *Soit $S(a) \subset S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$. Si Q_a est une matrice associée à $S(a)$ alors le déterminant $|Q_a|$ est un covariant centro-affine pour $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$.*
Preuve. *Si Q_a est définie par (4.1), alors :*

$$|Q_a| = T^1_{\alpha_1} T^2_{\alpha_2} ... T^n_{\alpha_n} \varepsilon^{\alpha_1\alpha_2...\alpha_n},$$

Par conséquent, d'après le théorème de Gurevich (3.2.3), $|Q_a|$ est un covariant centro-affine pour $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$. ■

Théorème 4.1.1 (*[20]*) *Le déterminant $|Q_a|$ d'une matrice Q_a associée à $S(a)$ est un covariant centro-affine pour $S(a)$ et si $|Q_a| \neq 0$ alors Q_a transforme $S(a)$ en $S(b)$ dont les coefficents sont des covariants centro-affines pour $S(\mathcal{C}(n,k,\mathbb{k}))$, où b est défini par :*

$$b = \left\{ b^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r} = \rho(Q_a) a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r}; j = 1, ..., n; r = 1, ..., k, a^j_{\alpha_1\alpha_2...\alpha_r} \in a \right\}.$$

D'après le théorème (4.1.1), si $|Q_a| \neq 0$, la transformation linéaire Q_a de $\Bbbk^n$

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ \dots \\ y^n \end{pmatrix} = Q_a \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^2 \end{pmatrix}$$

est un homéomorphisme qui transforme un système donné $S(a)$ en un système $S(b)$ dont les coefficients sont des covariants centro-affines. Alors, $(x_0^1, ..., x_0^n) \in \Bbbk^n$ est un point d'équilibre de $S(a)$ si et seulement si $\left(Q_a \begin{pmatrix} x_0^1 \\ \dots \\ x_0^n \end{pmatrix} \right)^T$ est un point d'équilibre de $S(b)$. Ainsi, nous sommes en mesure de faire une caractérisation des points d'équilibre d'un système différentiel donné $S(a) \subset S(\mathcal{C}(n, k, \Bbbk))$, à l'aide de covariants centro-affines. C'est ce qui motive la section suivante. En effet, nous allons donner deux méthodes de résolutions algorithmiques, nous permettant d'exprimer les points d'équilibre d'un système donné $S(a) \subset S(\mathcal{C}(2, k, \Bbbk))$ à l'aide de covariants centro-affines.

4.2 Méhtodes algorithmiques de résolution des systèmes différentiels de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, k, \Bbbk))$

Soient $S(a)$ un système donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, k, \Bbbk))$ et $S(b)$ son système équivalent dont les coefficients sont des covariants centro-affines. On note par $p(b)$ le système algébrique associé à $S(b)$ et $\mathcal{E}(b)$ son ensemble algébrique associé.

Le théorème suivant nous permet de majorer le cardinal de $\mathcal{E}(b)$.

Théorème 4.2.1 (Théorème de Bézout) *Soient $h(x^1, x^2)$ et $f(x^1, x^2)$ deux polynômes de $\Bbbk[x^1, x^2]$ de degrés respectifs d et d'. Si $h(x^1, x^2)$ et $f(x^1, x^2)$ n'ont aucun facteur commun de degré ≥ 1 alors le cardinal de $\mathcal{V}(h(x^1, x^2), f(x^1, x^2))$ est au plus dd'.*

D'après le théorème (4.2.1), $\mathcal{E}(b)$ est un ensemble fini de cardinal au plus r^2 si les polynômes de droite de $S(b)$ n'ont aucun facteur commun de degré ≥ 1.

On peut facilement remarquer que $p(b)$ peut s'écrire comme un système algébrique d'une variable x^2 à coefficients polynômiaux en x^1. En effet, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(r)}(x^2) = 0 \\ f^{(r)}(x^2) = 0 \end{array} \right. \tag{4.3}$$

pour $r = 0, ..., k$

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(r)}(x^2) = A_\alpha^{(r)}(x^2)^\alpha \\ \\ f^{(r)}(x^2) = B_\beta^{(r)}(x^2)^\beta \end{array} \right. \quad \alpha, \beta = 0, ..., r. \tag{4.4}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} A_\alpha^{(r)} = \sum_{k=0}^{r-\alpha} \binom{k+\alpha}{k} a^1_{\underbrace{1...1}_{k \text{ times}} \underbrace{2...2}_{\alpha \text{times}}} (x^1)^k ; \alpha = 0, ..., r \\ \\ B_\beta^{(r)} = \sum_{l=0}^{r-\beta} \binom{l+\beta}{l} a^2_{\underbrace{1...1}_{l \text{ times}} \underbrace{2...2}_{\beta \text{times}}} (x^1)^l ; \beta = 0, ..., r \end{array} \right. . \tag{4.5}$$

Soient $LC(h^{(r)}(x^2))$ et $LC(f^{(r)}(x^2))$ les coefficients dominants de $h^{(r)}(x^2)$ et $f^{(r)}(x^2)$ respectivement. Alors, il existe deux entiers, $s \leq r$ et $t \leq r$, tels que $LC(h^{(r)}(x^2))$ et $LC(f^{(r)}(x^2))$ sont de degré au plus $r-s$ et $r-t$ respectivement. Donc, $p(b)$ peut s'écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} h^{(s)}(x^2) = 0 \\ f^{(t)}(x^2) = 0 \end{array} \right. \quad 1 \leq s, t \leq r \tag{4.6}$$

qu'on note $\mathcal{A}(s,t,b)$. Pareillement, $p(b)$ peut s'écrire comme un système algébrique d'une variable en x^1 à coefficients polynômiaux $C_\alpha^{(l)}$ and $D_\beta^{(m)}$ en x^2, noté $\mathcal{D}(l,m,b)$.

Exemple 4.2.1 *Considérons le système différentiel* $S(a)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dx^1}{dt} = x^1 - x^2 + x^1x^2 - (x^2)^2 \\ \dfrac{dx^2}{dt} = 1 + x^2 + x^1x^2 - (x^1)^2 \end{array} \right. . \tag{4.7}$$

La matrice Q_a définie dans (5.6), est une matrice associée au système (4.7). On vérifie facilement que $|Q_a| = I_9 = -\frac{1}{2}$. Alors, $S(a)$ se transforme en $S(b)$ donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\widetilde{x^1}}{dt} = b^1 + b^1_{1}\widetilde{x^1} + b^1_{2}\widetilde{x^2} + b^1_{11}\widetilde{x^1}^2 + b^1_{22}\widetilde{x^2}^2 \\ \\ \dfrac{d\widetilde{x^2}}{dt} = b^2 + b^2_{1}\widetilde{x^1} + b^2_{2}\widetilde{x^2} + 2b^2_{12}\widetilde{x^1}\widetilde{x^2} + b^2_{11}\widetilde{x^1}^2 \end{array} \right. \tag{4.8}$$

autrement dit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{d\widetilde{x^1}}{dt} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\widetilde{x^1} - \dfrac{1}{4}\widetilde{x^2} - \dfrac{1}{2}\widetilde{x^2}^2 \\ \\ \dfrac{d\widetilde{x^2}}{dt} = 1 + \widetilde{x^1} + \dfrac{3}{2}\widetilde{x^2} + 2\widetilde{x^1}\widetilde{x^2} \end{array} \right. . \tag{4.9}$$

Le système algébrique associé à (4.9) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \widetilde{A_0} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\widetilde{x^1} \\ \\ \widetilde{A_1} = -\dfrac{1}{4} \\ \\ \widetilde{A_2} = -\dfrac{1}{2} \end{array} \right. \quad \textit{and} \left\{ \begin{array}{l} \widetilde{B_0} = 1 + \widetilde{x^1} \\ \\ \widetilde{B_1} = \dfrac{3}{2} + 2\widetilde{x^1} \end{array} \right. . \tag{4.10}$$

autrement dit le système (4.10) s'écrit $\mathcal{A}(2,1,b)$ *avec*

$$b = \left\{ b^1 = \frac{1}{2}, b^1_1 = \frac{1}{2}, b^1_2 = -\frac{1}{4}, b^1_{22} = -\frac{1}{2}, b^2 = 1, b^2_1 = 1, b^2_2 = \frac{3}{2}, b^2_{12} = 1 \right\}$$

Soit $\mathcal{A}(s,t,b)$ un système algébrique associé à un système donné $S(b)$ de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\Bbbk))$. Si $\mathcal{A}(s,t,b)$ est de la forme $\mathcal{A}(0,1,b)$

$$\left\{ \begin{array}{l} A_0^{(0)} = 0 \\ \\ B_0^{(1)} + B_1^{(1)}x^2 = 0 \end{array} \right. ,$$

le coefficient polynômial $A_0^{(0)}$ est une résolvante de $S(b)$ et $(x_0^1, x_0^2) \in \mathcal{E}(b)$ si et seulement si $x_0^1 \in \mathcal{V}\left(A_0^{(0)}\right)$ et $x_0^2 \in \mathcal{V}\left(B_0^{(1)} + B_1^{(1)}x^2\right)$, avec x_0^1 substitué dans $B_0^{(1)}$ et $B_1^{(1)}$.

Une question se pose : comment transformer $\mathcal{A}(s,t,b)$ à fin de déterminer une résolvante pour $S(b)$ quand $(s,t) \neq (0,1);(1,0)$?

Posons $s_0 = s$ et $t_0 = t$ et supposons que $1 \leq t_0 \leq s_0$.

Pour $x^2 \neq 0$ et $x^1 \notin \mathcal{V}(A_{s_0}^{(s_0)}B_{t_0}^{(t_0)})$, on considère l'opération suivante :

$$h^{(s_1)}(x^2) \leftarrow B_{t_0}^{(t_0)}h^{(s_0)}(x^2) - A_{s_0}^{(s_0)}(x^2)^{s_0-t_0}f^{(t_0)}(x^2) \tag{4.11}$$

appelée opération élémentaire de substitution dans $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ sur $h^{(s_0)}(x^2)$. Ainsi, $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(s_1,t_0,b)$ où :

$$\left\{\begin{array}{c} A_\alpha^{(s_1)} = B_{t_0}^{(t_0)}A_\alpha^{(s_0)};\alpha = 0,...,s_0-t_0-1 \\ \\ A_\alpha^{(s_1)} = B_{t_0}^{(t_0)}A_\alpha^{(s_0)} - A_{s_0}^{(s_0)}B_{\alpha-(s_0-t_0)}^{(t_0)};\alpha = s_0-t_0,...,t_0 \end{array}\right. \quad s_1 < s_0$$

sinon, si $h^{(s_1)}(x^2) \equiv 0$, $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ peut s'écrire comme un système d'une seule équation algébrique :

$$f^{(t_0)}(x^2) = 0.$$

On peut voir que les opérations élémentaires de susbstitution (4.11) dans $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ sur $h^{(s_0)}(x^2)$ peuvent être appliquées successivement au plus "$s_0 - t_0$"-fois. En effet, tant que $x^2 \neq 0$ et $x^1 \notin \mathcal{V}(A_{s_0}^{(s_0)}A_{s_1}^{(s_1)}...A_{s_{i-1}}^{(s_{i-1})}B_{t_0}^{(t_0)})$:

$$h^{(s_i)}(x^2) = B_{t_0}^{(t_0)}h^{(s_{i-1})}(x^2) - A_{s_{i-1}}^{(s_{i-1})}(x^2)^{s_{i-1}-t_0}f^{(t_0)}(x^2)$$

où :

$$\begin{array}{c} A_\alpha^{(s_i)} = B_{t_0}^{(t_0)}A_\alpha^{(s_{i-1})};\alpha = 0,...,s_{i-1}-t_0-1 \\ \\ A_\alpha^{(s_i)} = B_{t_0}^{(t_0)}A_\alpha^{(s_{i-1})} - A_{s_i}^{(s_i)}B_{\alpha-(s_{i-1}-t_0)}^{(t_0)};\alpha = s_{i-1}-t_0,...,t_0 \end{array}. \tag{4.12}$$

Ainsi, il exsite $m \in \{1,...,s_0-t_0\}$ tel que $s_m \leq t_0$ et $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(s_m,t_0,b)$ sinon, si $h^{(s_m)}(x^2) \equiv 0$, $\mathcal{A}(s_0,t_0,b)$ peut s'écrire comme un système d'une seule équation algébrique $f^{(t_0)}(x^2) = 0$. De la même manière, tant que $s_m \leq t_0$, les opérations élémentaires de substitution (4.11) peuvent être appliquées dans $\mathcal{A}(s_m,t_0,b)$ sur $f^{(t_0)}(x^2)$ au plus "$t_0 - s_m$"-fois. On obtient :

$$f^{(t_j)}(x^2) = A_{s_m}^{(s_m)}f^{(t_{j-1})}(x^2) - B_{t_{j-1}}^{(t_{j-1})}(x^2)^{t_{j-1}-s_m}h^{(s_m)}(x^2)$$

où $j \in \{1,...,t_{j-1}-s_m\}$ et

$$\begin{array}{c} B_\beta^{(t_j)} = A_{s_m}^{(s_m)}B_\beta^{(t_{j-1})};\beta = 0,...,t_{j-1}-s_m-1 \\ \\ B_\beta^{(t_j)} = A_{s_m}^{(s_m)}B_\beta^{(t_{j-1})} - B_{t_{j-1}}^{(t_{j-1})}A_{\beta-(t_{j-1}-s_m)}^{(s_m)};\beta = t_{j-1}-s_m,...,t \end{array}. \tag{4.13}$$

Il existe donc $w \in \{1,...,t_0-s_m\}$ tel que :

$$x^2 \neq 0$$

et

$$x^1 \notin \mathcal{V}(A_{s_0}^{(s_0)}...A_{s_m}^{(s_m)}B_t^{(t)}...B_{t_{w-1}}^{(t_{w-1})}),$$

$\mathcal{A}(s_m, t_0, b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(s_m, t_w, b)$ où $t_w \leq s_m$ sinon, si $f^{(t_w)}(x^2) \equiv 0$, $\mathcal{A}(s_m, t_0, b)$ s'écrit comme un système d'une seule équation algébrique $h^{(s_m)}(x^2) = 0$.

Fixons x^1 dans $\mathcal{V}(A_{s_0}^{(s_0)}A_{s_1}^{(s_1)}...A_{s_{i-1}}^{(s_{i-1})}B_{t_0}^{(t_0)})$. Alors, le système algébrique $\mathcal{A}(s_0, t_0, b)$ peut s'écrire comme un système $\mathcal{A}(s_k, t_l, b)$, défini par :

$$\begin{cases} a_\alpha^{(s_k)}(x^2)^\alpha = 0 \\ & s_k < s_0 \text{ or } t_l < t_0. \\ b_\beta^{(t_l)}(x^2)^\beta = 0 \end{cases} \tag{4.14}$$

En effet, pour $\alpha = 1, ..., s_0; \beta = 1, ..., t_0; a_\alpha^{(s_0)}$ et $b_\beta^{(t_0)}$ sont les valeurs des polynômes $A_\alpha^{(s_0)}$ et $B_\beta^{(t_0)}$ en x^1. Alors, soient $s_k \leq s_0$ et $t_l \leq t_0$ les plus grands entiers non nul $a_{s_k}^{(s_0)} \neq 0$ et $b_{t_l}^{(t_0)} \neq 0$. Notons par :

$$\begin{cases} C_{x^1}(x^2) = a_\alpha^{(s_i)}(x^2)^\alpha \\ \\ D_{x^1}(x^2) = b_\beta^{(t_j)}(x^2)^\beta = 0 \end{cases} \tag{4.15}$$

les polynômes définis par $h^{(s_0)}(x^2)$ et $f^{(t_0)}(x^2)$ quand

$$\begin{cases} x^2 \neq 0 \\ \text{et} \\ x^1 \in \mathcal{V}(A_{s_0}^{(s_0)}...A_{s_m}^{(s_m)}B_t^{(t)}...B_{t_{w-1}}^{(t_{w-1})}) \end{cases}.$$

Pareillement, pour $x^2 = 0$, $\mathcal{A}(s, t, b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(0, 0, b)$.

Théorème 4.2.2 *Tout système algébrique $\mathcal{A}(s, t, b)$ associé à un système $S(b)$ donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, k, \Bbbk))$, peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(0, 1, b)$ (ou $\mathcal{A}(1, 0, b)$) sinon, il peut s'écrire comme un système d'une équation algébrique.*

Preuve. Les opérations élémentaires de susbtitution (4.11) peuvent être appliquées au plus $''s + t - 1''$-fois dans $\mathcal{A}(s, t, b)$ sur les polynômes $h^{(s)}(x^2)$ et $f^{(t)}(x^2)$. Ainsi, au moyen de ses opérations élémentaires de substitution et tant

$$x^2 \neq 0$$

et

$$x^1 \notin \mathcal{V}\left(A_s^{(s)} \cdots A_{s_{i_0}}^{(s_{i_0})} B_t^{(t)} \cdots B_{s_{j_0}}^{(s_{j_0})}\right);$$

$\mathcal{A}(s, t, b)$ peut s'écrire comme un système algébrique de la forme $\mathcal{A}(0, 1, b)$ (ou $\mathcal{A}(1, 0, b)$) sinon, il peut s'écrire comme un système d'une seule équation algébrique. ■

D'après ce théorème (4.2.2), $\mathcal{A}(s, t, b)$ peut s'écrire comme un système algébrique dont une équation ne dépend que d'une seule variable x^1, qu'on note par $R(x^1)$, et une équation algébrique en x^2 de degré au plus 1 dont ses coefficients sont des polynômes en x^1. $R(x^1)$ est appelée résolvante de $S(b)$.

Corollaire 4.2.1 *Soit $\mathcal{A}(s,t,b)$ un système algébrique associé à un système donné $S(b)$ de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\Bbbk))$. Si $h^{(s)}(x^2)$ et $f^{(t)}(x^2)$ possèdent un facteur commun de degré ≥ 1 alors, il existe w (ou m) tel que $\mathcal{A}(s,t,a)$ peut être écrit comme un système d'une seule équation algébrique $f^{(w)}(x^2)=0$ (ou $h^{(m)}(x^2)=0$).*

On déduit aisément que l'ensemble algébrique $\mathcal{E}(b)$ associé à $p(b)$ est défini par :

$$\mathcal{E}(b)=\mathcal{E}_1(b)\cup\mathcal{E}_2(b)\cup\mathcal{E}_3(b)$$

où :

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(b) &= \left\{(x^1,x^2),\text{où}\begin{pmatrix} x^1\in\mathcal{V}\left(R(x^1)\right)\ \cap\complement\mathcal{V}\left(B_1^{(1)}\right)\\ x^2=\frac{B_0^{(1)}}{B_1^{(1)}}\end{pmatrix}\right\}\\
\mathcal{E}_2(b) &= \left\{(x^1,x^2),\text{où}\begin{pmatrix} x^1\in\mathcal{V}\left(A_s^{(s)}...A_0^{(0)}B_t^{(t)}...B_1^{(1)}\right)\\ x^2\in\mathcal{V}\left(C_{x^1}\right)\cap\mathcal{V}\left(D_{x^1}\right)\end{pmatrix}\right\}\\
\mathcal{E}_3(b) &= \left\{(x^1,0),\text{où } x^1\in\mathcal{V}\left(A_0^{(s)}\right)\cap\mathcal{V}\left(B_0^{(t)}\right)\right\}
\end{aligned}\qquad(4.16)$$

si $\mathcal{A}(s,t,b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(0,1,b)$, sinon

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1(b) &= \left\{\mathcal{V}(q^{(t_{j_0})}(x^2)),\text{où}\begin{pmatrix} x^1\in\Bbbk/\mathcal{V}\left(A_s^{(s)}...A_{s_{i_0}}^{(s_{i_0})}B_t^{(t)}...B_{s_{j_0}}^{(s_{j_0})}\right)\\ x^2\in\Bbbk^*\end{pmatrix}\ \right\}\\
\mathcal{E}_2(b) &= \left\{(x^1,x^2),\text{où}\begin{pmatrix} x^1\in\mathcal{V}\left(A_s^{(s)}...A_{s_{i_0}}^{(s_{i_0})}B_t^{(t)}...B_{s_{j_0}}^{(s_{j_0})}\right)\\ x^2\in\mathcal{V}\left(C_{x^1}\right)\cap\mathcal{V}\left(D_{x^1}\right)\end{pmatrix}\right\}\\
\mathcal{E}_3(b) &= \left\{(x^1,0),\text{où } x^1\in\mathcal{V}\left(A_0^{(s)}\right)\cap\mathcal{V}\left(B_0^{(t)}\right)\right\}.
\end{aligned}\qquad(4.17)$$

où, $A_s^{(s)},...,A_{s_{i_0}}^{(s_{i_0})},B_t^{(t)},...,B_{s_{j_0}}^{(s_{j_0})},C_{x^1}$ et D_{x^1} sont donnés par (4.12), (4.13) et (4.15).

Illustrons notre idée à l'aide d'un exemple.

Exemple 4.2.2 *Reprenons l'exemple (4.2.1).*
Par conséquent, tant que :

$$\widetilde{x^2}\neq 0$$

et

$$\widetilde{x^1}\notin\mathcal{V}\left(\widetilde{A_1^{(1)}}\widetilde{B_1^{(1)}}\right);$$

$\widetilde{A_1^{(1)}},\widetilde{B_1^{(1)}}$ *donnés par (4.12) et (4.13) ; le système algébrique associé à (4.9) peut s'écrire comme un système de la forme $\mathcal{A}(0,1,b)$ défini par :*

$$\begin{cases} R(\widetilde{x^1})=2\widetilde{x^1}^3+5\widetilde{x^1}^2+4\widetilde{x^1}+1\\ \\ B_0^{(1)}+B_1^{(1)}\widetilde{x^2}=1+\widetilde{x^1}+(\frac{3}{2}+2\widetilde{x^1})\widetilde{x^2}\end{cases}.$$

où $R(\widetilde{x^1})$ est donnée par (5.8),...,(5.2). À l'aide de (4.16), l'ensemble algébrique $\mathcal{E}(b)$ associé à $S(b)$ est défini par :

$$\mathcal{E}(b)=\left\{(-1,0);(-\frac{1}{2},-1)\right\}.$$

Comme $(\widetilde{x_0^1}, \widetilde{x_0^2}) \in \mathbb{R}^2$ *est un point d'équilibre de* $S(b)$*, on déduit que* $\left(Q_a^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{x_0^1} \\ \widetilde{x_0^2} \end{pmatrix} \right)^T$ *est un point d'équilibre de* $S(a)$ *alors, l'ensemble algébrique* $\mathcal{E}(a)$ *associé à* $S(a)$ *est :*

$$\mathcal{E}(a) = \{(-1, -1); (0, -1)\} .$$

Proposition 4.2.1 *Tout système différentiel homogène plan de* $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, k, \mathbb{k})$ *possède une infinité de points d'équilibres ou un seul équilibre à l'origine.*

Preuve. Soit $\mathcal{A}(s, t, b)$ un système algébrique associé à un système différentiel polynômial homogène plan $S(b)$. D'après le Théorème (4.2.2), $\mathcal{A}(s, t, b)$ peut s'écrire comme un système algébrique $\mathcal{A}(0, 1, b)$ (ou $\mathcal{A}(1, 0, b)$) ou comme un système d'une seule équation algébrique.
Les coefficients $A_i^{(s)}, B_i^{(t)}$ où $i = 0, ..., s$ (t) sont des monômes, alors les opérations élémentaires de susbstitution dans $\mathcal{A}(s, t, b)$ nous fournissent des coeffcients monômiaux $A_0^{(0)}, B_0^{(1)}, B_1^{(1)}$. Donc, l'ensemble algébrique $\mathcal{V}\left(A_s^{(s)}...A_1^{(1)}B_t^{(t)}...B_1^{(1)}\right) = \{0\}$. Par conséquent,

$$\mathcal{E}(b) = \{(0, 0)\}.$$

Maintenant, supposons que $\mathcal{A}(s, t, b)$ s'écrit comme un système d'une seule équation algébrique. Soit $q^{(t_{j_0})}(x^2) = 0$ cette équation. $S(b)$ est un système différentiel polynômial homogène plan, dont les coefficients $A_i^{(s)}, B_i^{(t)}$ où $i = 0, ..., s$ (t) et $0 < t, s \leq r$ sont des monômes. Alors, les coefficients de $q^{(t_{j_0})}(x^2)$ le sont aussi. $\mathcal{E}(b)$ est donné par (4.17). Ainsi, $\mathcal{E}_1(b)$ est vide ou infini, $\mathcal{E}_2(b)$ est vide et $\mathcal{E}_3(b) = \{(0, 0)\}$. D'où $\mathcal{E}(b)$ est infini ou $\mathcal{E}(b) = \{(0, 0)\}$.

■

Nous sommes en mesure de donner un algorithme permetant de déterminer une résolvante $R(x^1)$ ainsi que, l'ensemble $\mathcal{E}(a)$ des points d'équilibre d'un système différentiel donné $S(a)$ de $S(\mathcal{C}(2, k, \mathbb{k}))$, à l'aide de relations algébriques de covariants centro-affines.

Algorithme 7 : Entrées : $S(a)$ un système différentiel de $S(\mathcal{C}(2,k,\mathbb{k})), Q_a$ matrice associée à $S(a)$
étape1. Construire le système algébrique $p(a)$ associé à $S(a)$.
étape2. Transformer $p(a)$ en $p(b)$ par la matrice Q_a.
étape3. Associer :

$$h\left(x^2\right) \leftarrow 0; \qquad f\left(x^2\right) \leftarrow 0;$$
$$\mathcal{E}_2(b) \leftarrow \emptyset; \qquad \mathcal{E}(b) \leftarrow \emptyset.$$

étape4. Pour $i = 0, ..., r$ et $j = 0, ..., r$, faire :
Construire :

$$A_i = \sum_{\beta=0}^{r-i} \binom{\beta+i}{\beta} a^1_{\underbrace{1...1}_{\beta \text{ fois}}\underbrace{2...2}_{i \text{ fois}}}(x^1)^\beta;$$
$$B_j = \sum_{\beta=0}^{r-j} \binom{\beta+j}{\beta} a^2_{\underbrace{1...1}_{\beta \text{ fois}}\underbrace{2...2}_{j \text{ fois}}}(x^1)^\beta.$$

Si $A_i \not\equiv 0$ ou $B_j \not\equiv 0$ alors :

$$h(x^2) = h(x^2) + A_i(x^2)^i$$
$$f(x^2) = f(x^2) + B_j(x^2)^j$$

étape5. Associer :

$$s \leftarrow \deg h(x^2);$$
$$t \leftarrow \deg f(x^2);$$
$$h_1(x^2) \leftarrow h(x^2);$$
$$f_1(x^2) \leftarrow f(x^2);$$
$$H(x^1) \leftarrow LC(h(x^2)) \times LC(f(x^2)).$$

étape6. Tant que $s + t \neq 1$ faire :
si $s \geq t$ alors :

$$h(x^2) \leftarrow h(x^2) \times LC(f(x^2)) - (x^2)^{s-t} \times f(x^2) \times LC(h(x^2)).$$

si $h(x^2) \equiv 0$, alors :

$$R(x^1) \leftarrow 0;$$
$$\varphi(x^2) \leftarrow f(x^2).$$

et aller à **étape8.**
sinon :

$$s \leftarrow \deg h(x^2);$$
$$H(x^1) = H(x^1) \times LC(h(x^2)).$$

sinon, si $s < t$, alors :

$$f(x^2) \leftarrow f(x^2) \times LC(h(x^2)) - (x^2)^{t-s} \times h(x^2) \times LC(f(x^2)).$$

si $f(x^2) \equiv 0$, alors :

$$R(x^1) \leftarrow 0;$$
$$\varphi(x^2) \leftarrow h(x^2).$$

aller à **étape8.**

sinon :

$$t \leftarrow \deg f(x^2);$$
$$H(x^1) \leftarrow H(x^1) \times LC(f(x^2)).$$

étape7. Si $s = 0$, alors :

$$R(x^1) \leftarrow h(x^2);$$
$$\varphi(x^2) \leftarrow f(x^2).$$

sinon, si $t = 0$, alors :

$$R(x^1) \leftarrow f(x^2);$$
$$\varphi(x^2) \leftarrow h(x^2).$$

étape8. Construire :

$$\Omega = \left\{x^1 \in \mathbb{k}/H(x^1) = 0\right\}.$$

étape9. Pour $x^1 \in \Omega$, Faire : Construire :

$$\mathcal{V} = \left\{(x^1, x^2)/x^2 \in \mathbb{k}^*, h_1(x^2) = 0, f_1(x^2) = 0\right\}.$$

Associer :

$$\mathcal{E}_2(b) \leftarrow \mathcal{E}_2(b) \cup \mathcal{V}.$$

étape10. Construire :

$$\mathcal{E}_1(b) \leftarrow \left\{(x^1, x^2) \in \mathbb{k}/\Omega \times \mathbb{k}^* \text{tel que } R(x^1) = 0 \text{ et } \varphi(x^2) = 0\right\}.$$

$$\mathcal{E}_3(b) \leftarrow \left\{(x^1, 0) \in \mathbb{k} \times \{0\} \text{tel que } A_0 = 0 \text{ et } B_0 = 0\right\}.$$

étape11. Associer :

$$\mathcal{E}(b) \leftarrow \mathcal{E}(b) \cup \mathcal{E}_1(b) \cup \mathcal{E}_2(b) \cup \mathcal{E}_3(b).$$

étape12. Construire :

$$\mathcal{E}(a) = \left\{ \left(x_0^1, x_0^2\right) \text{ tel que } \left(x_0^1, x_0^2\right) = Q_a^{-1} \begin{pmatrix} \widetilde{x_0^1} \\ \widetilde{x_0^2} \end{pmatrix} \right\}.$$

étape13. Retourner $\mathcal{E}(a)$.

Vue la taille des polynômes en question, la complexité de cet algorithme peut nous freiner. C'est pour cela que nous allons proposer un second algorithme, basé sur le calcul des bases de Gröbner.

Algorithme 8 : Entrées : $S(a)$ un système différentiel de $S(\mathcal{C}(2,k,\mathbb{k})), Q_a$ matrice associée à $S(a)$
étape1. Construire le système algébrique $p(a)$ associé à $S(a)$.
étape2. Transformer $p(a)$ en $p(b)$ par la matrice Q_a.
étape3. Résoudre $p(b)$.
étape4. Construire :

$$\mathcal{E}(a)=\left\{\left(\widetilde{x_0^1},...,\widetilde{x_0^n}\right) \text{ tel que } \left(x_0^1,x_0^2\right)=Q_a^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{x_0^1}\\ ...\\ \widetilde{x_0^n}\end{pmatrix} \text{ où } \left(\widetilde{x_0^1},\widetilde{x_0^2}\right)\in\mathcal{E}(b)\right\}.$$

étape5. Retourner $\mathcal{E}(a)$.

Chapitre 5

Sur l'étude qualitative de systèmes différentiels polynômiaux cubiques plans.

L'un des problèmes classiques de la théorie qualitative de systèmes différentiels est celui de la caractérisation de la stabilité locale des points d'équilibre. Ce problème est complètement résolu pour les systèmes différentiels quadratiques plans, d'abord par C. S. Siberskii en utilisant la théorie des invariant algébrique par rapport à l'action $GL(2,\mathbb{R})$ pour les systèmes différentiels polynômiaux quadratiques sans termes libres puis completé par D.Boularas et N.I.Vulpe pour les systèmes différentiels polynômiaux quadratiques complets.

Dans cette section, notre but est de montrer comment caractériser la stabilité locale des points d'équilibre des systèmes $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$ à l'aide de covariants centro-affines. Pour cela nous allons d'abord nous intéresser aux systèmes differentiels $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,2,\mathbb{R}))$ car nous connaissons un système minimal de générateurs $\mathcal{F}$ de covariants centro-affines.

Faisons un bref rappel sur la stabilité locale.

5.1 Stabilité locale et covariants centro-affines

Définition 5.1.1 *Un point d'équilibre $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ est dit stable, si pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un $\delta > 0$ tel que toute solution $\varphi^{t_0}(t)$ de $S(a)$ avec la condition initiale $x(t_0) \in \mathbb{R}^2$ à distance δ de l'équilibre x_0 reste à distance ε pour tout $t \geq t_0$. L'équilibre x_0 est dit instable s'il n'est pas stable.*

Définition 5.1.2 *Considérons le $\mathbb{R}-$espace vectoriel $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ des matrices 2×2. Le spectre d'une matrice $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ noté σ_M est l'ensemble des scalaires λ tel que la matrice $M - \lambda I$, où I est la matrice unité, n'est pas inversible. Autrement dit :*

$$\sigma_M = \{\lambda \in \mathbb{C}, \det(M - \lambda I) = 0\}.$$

Les scalaires λ sont les valeurs propres M.

Proposition 5.1.1 *Deux systèmes différentiels $S(a)$ et $S(b)$ de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,k,\mathbb{R}))$ sont dits topologiquement équivalents, s'il existe un homéomorphisme*

$$h : S(a) \to S(b)$$

qui transforme les trajectoires de $S(a)$ en les trajectoires de $S(b)$.

Les systèmes différentiels linéaires planaires autonomes sont complètement résolus par une théorie développée dans l'algèbre linéaire. Par conséquent, la stabilité de l'*origine* d'un système différentiel planaire donné $S((a^i_j)_{i,j=1,2})$ est connue. Henri Poincare [17] a donné une classification topologique complète des systèmes différentiels planaires $S((a^i_j)_{i,j=1,2})$ selon le signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice $(a^i_j)_{i,j=1,2}$.

Définition 5.1.3 *Soit $S(a)$:*

$$\begin{cases} \dfrac{dx^1}{dt} = p_1^{(s_1)}(x^1, x^2) \\ \dfrac{dx^2}{dt} = p_2^{(s_2)}(x^1, x^2) \end{cases}$$

un système différentiel donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, k, \mathbb{R}))$. La matrice jacobienne $\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$ définie en $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ par :

$$\mathcal{J}_{(a)}(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{dp_1^{s_1}(x_0)}{dx^1} & \dfrac{dp_1^{s_1}(x_0)}{dx^2} \\ & \\ \dfrac{dp_2^{s_2}(x_0)}{dx^1} & \dfrac{dp_2^{s_2}(x_0)}{dx^2} \end{pmatrix}$$

est dite matrice jacobienne associée à $S(a)$ en x_0.

Définition 5.1.4 *Le point d'équilibre x_0 est dit hyperbolique si et seulement si le spectre $\sigma_{\mathcal{J}_{(a)}(x_0)}$ est inclu dans l'ensemble $\{\lambda \in \mathbb{C}, Re\lambda \neq 0\}$.*

Soit x_0 un point hyperbolique. Considérons le système différentiel linéaire suivant :

$$\begin{pmatrix} \dfrac{dy^1}{dt} \\ \\ \dfrac{dy^2}{dt} \end{pmatrix} = \mathcal{J}_{(a)}(x_0) \begin{pmatrix} y^1 \\ \\ y^2 \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

apppelé le linéarisé associé au système $S(a)$ en x_0, qu'on note par $\mathcal{L}_{(x_0)}(a)$ où $y^1 = x^1 - x_0^1$ et $y^2 = x^2 - x_0^2$.

$\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$ n'est pas dégénerée. Ainsi, l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $\mathcal{L}_{(x_0)}(a)$ est trivial. D'après le théorème de linéarisation de Hartman-Grobman [16], le comportement des solutions du système différentiel $S(a)$ et le comportement des solutions du linéarisé $\mathcal{L}_{(x_0)}(a)$ sont topologiquement équivalents au voisinage de x_0. Ainsi, la stabilité du point d'équilibre x_0 pour le système donné $S(a)$ peut être déduite de la stabilité du point d'équilibre $(0, 0)$ du système différentiel $\mathcal{L}_{(x_0)}(a)$.

Une classification de la stabilité de x_0 peut être déterminée selon les éléments de similarité de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$.

Comme les éléments de similarité sont des covariants centro-affines, l'idée est de caractériser le signe des valeurs propres λ_1 et λ_2 du jacobien $\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$ d'un système $S(a)$ donné en un point d'équilibre hyperbolique x_0 du système considéré à l'aide de relations algébriques ou semi-algébriques en covariantes centro-affines pour ces systèmes.

5.2 Systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans

Un système minimal de générateurs de covariants centro-affines est connu pour les systèmes différentiels polynômiaux quadratiques plans. En effet, dans [[19], voir page 25-41], 16 invariants centro-affines $I_1, ..., I_{16}$ et 20 covariants centro-affines $K_1, ..., K_{20}$ sont donnés pour les systèmes homogènes quadratiques plans :

$$\begin{aligned}
&I_1 = a^{\alpha}_{\alpha}, && I_9 = a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\gamma s}a^{\delta}_{\alpha\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
&I_2 = a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha}, && I_{10} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\delta}a^{\gamma}_{\mu}a^{\delta}_{\alpha q}a^{\mu}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq},\\
&I_3 = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}, && I_{11} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\alpha\gamma}a^{\mu}_{\delta\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
&I_4 = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\alpha\gamma}\varepsilon^{pq}, && I_{12} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\alpha\delta}a^{\mu}_{\gamma\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
&I_5 = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\gamma q}a^{\gamma}_{\alpha\beta}\varepsilon^{pq}, && I_{13} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{qr}a^{\gamma}_{\gamma s}a^{\delta}_{\alpha\beta}a^{\mu}_{\delta\mu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
&I_6 = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\gamma}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta\delta}\varepsilon^{pq}, && I_{14} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{r}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta s}a^{\mu}_{\gamma\delta}a^{\nu}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},\\
&I_7 = a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta s}a^{\delta}_{\gamma\delta}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}, && I_{15} = a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{qk}a^{\gamma}_{\alpha s}a^{\delta}_{\delta l}a^{\mu}_{\beta\gamma}a^{\nu}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}\varepsilon^{kl},\\
&I_8 = a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\delta s}a^{\delta}_{\beta\gamma}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}, && I_{16} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{r}a^{\gamma}_{\delta}a^{\delta}_{\alpha q}a^{\mu}_{\beta s}a^{\nu}_{\gamma\tau}a^{\tau}_{\mu\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs},
\end{aligned} \tag{5.2}$$

$$\begin{aligned}
&K_1 = a^{\alpha}_{\alpha\beta}x^{\beta}, && K_{11} = a^{p}_{\alpha}a^{\alpha}_{\beta\gamma}x^{\beta}x^{\gamma}x^{q}\varepsilon_{pq},\\
&K_2 = a^{p}_{\alpha}x^{\alpha}x^{q}\varepsilon_{pq}, && K_{12} = a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu},\\
&K_3 = a^{\alpha}_{\beta}a^{\beta}_{\alpha\gamma}x^{\gamma}, && K_{13} = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha\beta}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu},\\
&K_4 = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\alpha\beta}x^{\gamma}, && K_{14} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\delta}a^{\delta}_{\gamma\mu}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\\
&K_5 = a^{p}_{\alpha\beta}a^{\alpha}x^{\beta}x^{q}\varepsilon_{pq}, && K_{15} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\mu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\\
&K_6 = a^{\alpha}_{\alpha\beta}a^{\beta}_{\gamma\delta}x^{\gamma}x^{\delta}, && K_{16} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\beta q}a^{\gamma}_{\alpha\mu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}\varepsilon^{pq},\\
&K_7 = a^{\alpha}_{\beta\gamma}a^{\beta}_{\alpha\delta}x^{\gamma}x^{\delta}, && K_{17} = a^{\alpha}_{\beta\nu}a^{\beta}_{\alpha\gamma}a^{\gamma}_{\delta\mu}x^{\delta}x^{\mu}x^{\nu},\\
&K_8 = a^{\alpha}_{\gamma}a^{\beta}_{\delta}a^{\gamma}_{\alpha\beta}x^{\delta}, && K_{18} = a^{\alpha}_{\mu p}a^{\beta}_{\alpha q}a^{\gamma}_{\beta\nu}a^{\delta}_{\gamma\delta}x^{\mu}x^{\nu}\varepsilon^{pq},\\
&K_9 = a^{\alpha}_{\alpha p}a^{\beta}_{\gamma q}a^{\gamma}_{\beta\delta}x^{\delta}\varepsilon^{pq}, && K_{19} = a^{\alpha}_{p}a^{\beta}_{\nu}a^{\gamma}_{\alpha q}a^{\delta}_{\beta\mu}a^{\mu}_{\gamma\delta}x^{\nu}\varepsilon^{pq},\\
&K_{10} = a^{\alpha}_{\alpha p}a^{\beta}_{\delta q}a^{\gamma}_{\beta\gamma}x^{\delta}\varepsilon^{pq}, && K_{20} = a^{\alpha}_{pr}a^{\beta}_{\nu q}a^{\gamma}_{\alpha s}a^{\delta}_{\beta\gamma}a^{\mu}_{\delta\mu}x^{\nu}\varepsilon^{pq}\varepsilon^{rs}
\end{aligned} \tag{5.3}$$

D'autres invariants $I_{17}, ..., I_{36}$ et covariants $K_{21}, ..., K_{33}$ [1, 21] complètent cette base pour former une base polynômiale pour les systèmes différentiels quadratiques complets plans :

$$
\begin{array}{ll}
I_{17} = a^{\beta} a^{\alpha}_{\alpha\beta}, & I_{27} = a^{p}_{\alpha} a^{\alpha}_{\beta\gamma} a^{\beta} a^{\gamma} a^{q} \varepsilon_{pq}, \\
I_{18} = a^{\alpha} a^{q} a^{p}_{\alpha} \varepsilon_{pq}, & I_{28} = a^{\alpha}_{\beta} a^{\beta}_{\alpha\gamma} a^{\gamma}_{\delta\mu} a^{\delta} a^{\mu}, \\
I_{19} = a^{\alpha}_{\beta} a^{\beta}_{\alpha\gamma} a^{\gamma}, & I_{29} = a^{\alpha}_{\gamma} a^{\beta}_{\alpha\beta} a^{\gamma}_{\delta\mu} a^{\delta} a^{\mu}, \\
I_{20} = a^{\alpha}_{\gamma} a^{\beta}_{\alpha\beta} a^{\gamma}, & I_{30} = a^{\alpha}_{p} a^{\beta}_{\alpha q} a^{\gamma}_{\beta\delta} a^{\delta}_{\gamma\mu} a^{\mu} \varepsilon^{pq}, \\
I_{21} = a^{p}_{\alpha\beta} a^{\alpha} a^{\beta} a^{q} \varepsilon_{pq}, & I_{31} = a^{\alpha}_{p} a^{\beta}_{\alpha q} a^{\gamma}_{\beta\mu} a^{\delta}_{\gamma\delta} a^{\mu} \varepsilon^{pq}, \\
I_{22} = a^{\alpha}_{\alpha\beta} a^{\beta}_{\gamma\delta} a^{\gamma} a^{\delta}, & I_{32} = a^{\alpha}_{p} a^{\beta}_{\beta q} a^{\gamma}_{\alpha\mu} a^{\delta}_{\gamma\delta} a^{\mu} \varepsilon^{pq}, \\
I_{23} = a^{\alpha}_{\beta\gamma} a^{\beta}_{\alpha\delta} a^{\gamma} a^{\delta}, & I_{33} = a^{\alpha}_{\beta\nu} a^{\beta}_{\alpha\gamma} a^{\gamma}_{\delta\mu} a^{\delta} a^{\mu} a^{\nu}, \\
I_{24} = a^{\alpha}_{\gamma} a^{\beta}_{\delta} a^{\gamma}_{\alpha\beta} a^{\delta}, & I_{34} = a^{\alpha}_{\mu p} a^{\beta}_{\alpha q} a^{\gamma}_{\beta\nu} a^{\delta}_{\gamma\delta} a^{\mu} a^{\nu} \varepsilon^{pq}, \\
I_{25} = a^{\alpha}_{\alpha p} a^{\beta}_{\gamma q} a^{\gamma}_{\beta\delta} a^{\delta} \varepsilon^{pq}, & I_{35} = a^{\alpha}_{p} a^{\beta}_{\nu} a^{\gamma}_{\alpha q} a^{\delta}_{\beta\mu} a^{\mu}_{\gamma\delta} a^{\nu} \varepsilon^{pq}, \\
I_{26} = a^{\alpha}_{\alpha p} a^{\beta}_{\gamma q} a^{\gamma}_{\beta\delta} a^{\delta} \varepsilon^{pq}, & I_{36} = a^{\alpha}_{pr} a^{\beta}_{\nu q} a^{\gamma}_{\alpha s} a^{\delta}_{\beta\gamma} a^{\mu}_{\delta\mu} a^{\nu} \varepsilon^{pq} \varepsilon^{rs},
\end{array}
\tag{5.4}
$$

$$
\begin{array}{ll}
K_{21} = a^{p} x^{q} \varepsilon_{pq}, & K_{27} = a^{\alpha} a^{\beta}_{\alpha\gamma} a^{\gamma}_{\beta\delta} x^{\delta}, \\
K_{22} = a^{p}_{\alpha} a^{\alpha} x^{q} \varepsilon_{pq}, & K_{28} = a^{\alpha} a^{\beta} a^{p}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\beta} x^{q} \varepsilon_{pq}, \\
K_{23} = a^{p} a^{q}_{\alpha\beta} x^{\alpha} x^{\beta} \varepsilon_{pq}, & K_{29} = a^{\alpha} a^{\beta}_{\delta} a^{\gamma}_{\alpha\mu} a^{\delta}_{\beta\delta} x^{\mu}, \\
K_{24} = a^{p} a^{q}_{\alpha} a^{\alpha}_{\beta\gamma} x^{\beta} x^{\gamma} \varepsilon_{pq}, & K_{30} = a^{\alpha} a^{\beta}_{\gamma} a^{\gamma}_{\alpha\mu} a^{\delta}_{\beta\delta} x^{\mu}, \\
K_{25} = a^{\alpha} a^{\beta} a^{p}_{\alpha\beta} x^{q} \varepsilon_{pq}, & K_{31} = a^{\alpha} a^{\beta}_{\alpha\gamma} a^{\gamma}_{\beta\delta} a^{\delta}_{\mu\nu} x^{\mu} x^{\nu}, \\
K_{26} = a^{\alpha} a^{\beta}_{\alpha\delta} a^{\gamma}_{\beta\gamma} x^{\delta} & K_{32} = a^{\alpha} a^{\beta} a^{\gamma}_{\alpha\beta} a^{\delta}_{\mu\nu} a^{\mu}_{\gamma\delta} x^{\nu}. \\
K_{33} = a^{\alpha} a^{\beta}_{p\alpha} a^{\gamma}_{q\beta} a^{\delta}_{\gamma\nu} a^{\mu}_{\delta\mu} x^{\nu} \varepsilon^{pq}, &
\end{array}
\tag{5.5}
$$

Soit $S(a)$ un système différentiel de $S(\mathcal{C}(2, 2, \mathbb{R}))$:

$$
\left\{
\begin{array}{l}
\dfrac{dx^1}{dt} = a^1 + a^1_1 x^1 + a^1_2 x^2 + a^1_{11} (x^1)^2 + 2a^1_{12} x^1 x^2 + a^1_{22} (x^2)^2 \\[2ex]
\dfrac{dx^2}{dt} = a^2 + a^2_1 x^1 + a^2_2 x^2 + a^2_{11} (x^1)^2 + 2a^2_{12} x^1 x^2 + a^2_{22} (x^2)^2
\end{array}
\right.
$$

Supposons que les polynômes de droite de $S(a)$ sont sans facteur commun de degré ≥ 1. On veut étudier la stabilité locale de $S(a)$ à l'aide de covariants centro-affines. Pour cela nous allons d'abord déterminer une matrice de transformation Q_a

qui va nous permettre de transformer $S(a)$ en un système $S(b)$ équivalent dont les coefficients sont des covariants centro-affines. Dans [19] une matrice de transformation Q_a a été donnée. En effet, considérons la matrice carrée q_a définie par :

$$q_a = \begin{pmatrix} -a^{\alpha}_{\alpha 1} & -a^{\alpha}_{\alpha 2} \\ \\ a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{s1} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} & a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{s2} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} \end{pmatrix}.$$

q_a est une matrice associée à $S(a)$ de déterminant $|q_a| = I_9$. Si $I_9 \neq 0$, alors Q_a définie par :

$$Q_a = \frac{1}{I_9} \begin{pmatrix} -a^{\alpha}_{\alpha 1} & -a^{\alpha}_{\alpha 2} \\ \\ a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{s1} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} & a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{s2} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} \end{pmatrix} \tag{5.6}$$

est une matrice inversible associée à $S(a)$.

La transformation linéaire

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x^1} \\ \widetilde{x^2} \end{pmatrix} = Q_a \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

transforme $S(a)$ en un système $S(b)$ dont ses coefficients sont donnés par

$$\begin{aligned}
b^1 &= a^{\alpha}_{\alpha i} a^i, \\
b^2 &= \tfrac{1}{I_9} a^i a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{si} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs}, \\
b^1_1 &= \tfrac{1}{I_9} a^i_{j_1} a^u_{ui} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{sv} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 v}, \\
b^1_2 &= -a^u_{ui} a^{\alpha}_{\alpha v} a^i_{j_1} \varepsilon^{j_1 v}, \\
b^2_1 &= \tfrac{1}{I_9^2} a^i_{j_1} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{si} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^p_{pl} a^q_{kv} a^t_{qt} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{lk} \varepsilon^{j_1 v}, \\
b^2_2 &= -\tfrac{1}{I_9} a^i_j a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{sp} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^{\delta}_{\delta v} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 v}, \\
b^1_{11} &= \tfrac{1}{I_9^2} a^u_{ui} a^i_{j_1 j_2} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{sv} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^{\theta}_{\theta p} a^t_{qw} a^{\delta}_{t\delta} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 v} \varepsilon^{pq} \varepsilon^{j_2 w}, \\
b^2_{11} &= \tfrac{1}{I_9^3} a^i_{j_1 j_2} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{si} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^u_{up} a^v_{tq} a^{\delta}_{v\delta} a^n_{nk} a^m_{l\theta} a^w_{mw} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 q} \varepsilon^{pt} \varepsilon^{j_2 \theta} \varepsilon^{kl}, \\
b^1_{12} &= -\tfrac{1}{I_9} a^{\alpha}_{\alpha v} a^{\beta}_{\beta r} a^{\gamma}_{st} a^{\delta}_{\delta\gamma} a^{\mu}_{\mu v} a^r_{j_1 j_2} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 t} \varepsilon^{j_2 v}, \\
b^2_{12} &= -\tfrac{1}{I_9^2} a^l_{t\theta} a^k_{kw} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{si} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^u_{up} a^{\beta}_{qv} a^{\gamma}_{\beta\gamma} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{pq} \varepsilon^{j_1 v} \varepsilon^{j_2 w}, \\
b^1_{22} &= a^i_{j_1 j_2} a^b_{bv} a^c_{cw} a^{\alpha}_{\alpha i} \varepsilon^{j_1 v} \varepsilon^{j_2 w}, \\
b^2_{22} &= \tfrac{1}{I_9} a^{\alpha}_{\alpha r} a^{\beta}_{si} a^{\gamma}_{\beta\gamma} a^{\delta}_{\delta v} a^{\mu}_{\mu v} a^i_{j_1 j_2} \varepsilon^{rs} \varepsilon^{j_1 t} \varepsilon^{j_2 v}.
\end{aligned}$$

où

$$i, j, j_1, j_2, \alpha, \beta, \theta, \gamma, \delta, \mu, r, s, t, v, p, q, t, u, m, n, k, l, w \in \{1, 2\}.$$

À l'aide de l'Algorithme 2 [6] on a :

$$\left\{\begin{array}{lcl} b^1 & = & I_{17}, \\ b^1_1 & = & \frac{1}{2}I_1 - \frac{1}{2I_9}(I_1 I_7 + 2I_{13}), \\ b^1_2 & = & -I_4, \\ b^1_{11} & = & \frac{1}{2} + \frac{1}{2I_9}I_7, \\ b^1_{12} & = & 0, \\ b^1_{22} & = & I_9, \\ \widetilde{x^1} & = & K_1, \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{lcl} b^2 & = & \frac{1}{I_9}I_{26}, \\ b^2_1 & = & \frac{1}{2I_9}(2I_3 - I_4) - \frac{1}{2(I_9)^2}I_4 I_7, \\ b^2_2 & = & \frac{1}{2}I_1 + \frac{1}{2I_9}(I_1 I_7 + 2I_{13}), \\ b^2_{11} & = & \frac{1}{(I_9)^2}I_{15}, \\ b^2_{12} & = & \frac{1}{2} - \frac{1}{2I_9}I_7, \\ b^2_{22} & = & 0, \\ \widetilde{x^2} & = & \frac{1}{I_9}K_{10}. \end{array}\right.$$

(5.7)

Pour étudier la stabilité locale du système $S(a)$ à l'aide de covariants centro-affine, nous devons dans un premier temps déterminer ses points d'équilibre. Comme nous avons transformé $S(a)$ en un système $S(b)$ à coefficients covariants centro-affines, nous pouvons déterminer l'expression des points d'équilibre de $S(a)$ à l'aide d'expressions covariantes. En effet, à l'aide de l'algorithme 7, nous pouvons déterminer une résolvante $R(\widetilde{x^1})$ du système différentiel $S(b)$. Ainsi $R(\widetilde{x^1})$ est de degré au plus 4 donnée par :

$$R(\widetilde{x^1}) = A\widetilde{x^1}^4 + B\widetilde{x^1}^3 + C\widetilde{x^1}^2 + D\widetilde{x^1} + E$$

où

$$A = \frac{I_7^3 - I_7^2 I_9 - I_7 I_9^2 + I_9^3 + I_{15}^2}{I_9^3} \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} B = & \frac{I_1 I_7^2 I_9 - I_1 I_7^3 - I_1 I_7 I_9^2 + I_1 I_9^3 - 2I_3 I_9 I_{15}}{I_9^3} \\ & + \frac{2I_4 I_7 I_{15} - 2I_7^2 I_{13} + 2I_7 I_9 I_{13}}{I_9^3} \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$\begin{aligned} C = & \frac{5I_1^2 I_7^3 - I_1^2 I_7^2 I_9 - I_1^2 I_7 I_9^2 + 5I_1^2 I_9^3 + 20 I_1 I_7^2 I_{13}}{8I_9^3} \\ & - \frac{4I_1 I_4 I_7 I_{15} + 4I_1 I_4 I_9 I_{15} + 8I_1 I_7 I_9 I_{13}}{8I_9^3} \\ & + \frac{4I_1 I_{13} I_9^2 + 8I_3^2 I_9^2 - 16 I_3 I_4 I_7 I_9 + 6I_4^2 I_7^2}{8I_9^3} \\ & + \frac{4I_4^2 I_7 I_9 - 2I_4^2 I_9^2 + 8I_7^2 I_9 I_{17} - 16 I_7 I_9^2 I_{17} + 20 I_7 I_{13}^2}{8I_9^3} \\ & + \frac{8I_9^3 I_{17} - 8I_4 I_{13} I_{15} - 12 I_9 I_{13}^2 - 16 I_9 I_{15} I_{26}}{8I_9^3} \end{aligned} \tag{5.10}$$

$$
\begin{aligned}
D \quad = \quad & \frac{I_1^3 I_7 I_9^2 + I_1^3 I_9^3 - I_1^3 I_7^3 - I_1^3 I_7^2 I_9 - 6 I_1^2 I_7^2 I_{13} + 2 I_1^2 I_9^2 I_{13}}{8 I_9^3} \\
& + \frac{4 I_1 I_3 I_4 I_7 I_9 - 4 I_1^2 I_7 I_9 I_{13} + 4 I_1 I_3 I_4 I_9^2 + 16 I_3 I_9^2 I_{26}}{8 I_9^3} \\
& + \frac{8 I_3 I_4 I_9 I_{13} - 2 I_1 I_4^2 I_7^2 - 4 I_1 I_4^2 I_7 I_9 + 16 I_9^2 I_{13} I_{17} - 8 I_{13}^3}{8 I_9^3} \\
& - \frac{2 I_1 I_4^2 I_9^2 + 8 I_1 I_7^2 I_9 I_{17} - 8 I_1 I_9^3 I_{17} + 12 I_1 I_7 I_{13}^2 + 4 I_1 I_9 I_{13}^2}{8 I_9^3} \\
& - \frac{4 I_4^2 I_7 I_{13} + 4 I_4^2 I_9 I_{13} + 16 I_4 I_7 I_9 I_{26} + 16 I_7 I_9 I_{13} I_{17}}{8 I_9^3}
\end{aligned}
\tag{5.11}
$$

$$
\begin{aligned}
E \quad = \quad & \frac{I_1^2 I_7^2 I_{17} + 2 I_1^2 I_7 I_9 I_{17} + I_1^2 I_9^2 I_{17} + 2 I_1 I_4 I_7 I_{26} + 2 I_1 I_4 I_9 I_{26}}{4 I_9^3} \\
& + \frac{4 I_1 I_7 I_{13} I_{17} + 4 I_1 I_9 I_{13} I_{17} + 4 I_1 I_{13} I_{26} + +4 I_9 I_{26}^2 + 4 I_{13}^2 I_{17}}{4 I_9^2}
\end{aligned}
$$

(5.12)

À l'aide de (4.16), on peut calculer l'ensemble des points d'équilibre $\mathcal{E}(b)$ du système $S(b)$.

Par conséquent, un point d'équilibre (x_0^1, x_0^2) de $\mathcal{E}(a)$ peut être déterminer à l'aide d'expressions covariantes. En effet, soit $(\widetilde{x_0^1}, \widetilde{x_0^2})$ un point d'équilibre du système $S(b)$, on déduit que $\left(Q_a^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{x_0^1}\\ \widetilde{x_0^2}\end{pmatrix}\right)^t$ est un point d'équilibre du système $S(a)$.

Passons maintenant à l'étude de la stabilité locale d'un point d'équilibre.

Soit $S(a)$ un système différentiel polynômial quadratique complet plan, tel que $x_0 = (x_0^1, x_0^2)$ un point d'équilibre de $S(a)$. Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$ associée a $S(a)$ est :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0)) + \det \mathcal{J}_{(a)}(x_0).$$

Alors, le linéarisé associé à $\mathcal{S}(a)$ en x_0 est donné par :

$$
\begin{aligned}
L_1^1 &= a_1^1 + 2a_{12}^1 x_0^2 + 2a_{11}^1 x_0^1;\\
L_2^1 &= a_2^1 + 2a_{12}^1 x_0^1 + 2a_{22}^1 x_0^2;\\
L_1^2 &= a_1^2 + 2a_{12}^2 x_0^2 + 2a_{11}^2 x_0^1;\\
L_2^2 &= a_2^2 + 2a_{12}^2 x_0^1 + 2a_{22}^2 x_0^2.
\end{aligned}
$$

Ainsi,

$$trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0) = (a_1^1 + a_2^2) + 2(a_{12}^1 x_0^2 + a_{11}^1 x_0^1 + a_{12}^2 x_0^1 + a_{22}^2 x_0^2),$$

et

$$
\begin{aligned}
&\det \mathcal{J}_{(a)}(x_0) = (a_1^1 a_2^2 - a_2^1 a_1^2) + 2(a_1^1 a_{12}^2 + a_2^2 a_{11}^1 - a_2^1 a_{11}^2 - a_1^2 a_{12}^1)x^1\\
&+2(a_1^1 a_{22}^2 + a_2^2 a_{12}^1 - a_2^1 a_{12}^2 - a_1^2 a_{22}^1)x^2 + 4(a_{11}^1 a_{22}^2 - a_{22}^1 a_{11}^2)x^1 x^2\\
&+4(a_{11}^1 a_{12}^2 - a_{12}^1 a_{11}^2)(x^1)^2 + 4(a_{12}^1 a_{22}^2 - a_{22}^1 a_{12}^2)(x^2)^2,
\end{aligned}
$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0) &= A + 2B(x_0) \\ \det \mathcal{J}_{(a)}(x_0) &= \frac{1}{2}C + 2J(x_0) + 2M(x_0)) \end{aligned} \tag{5.13}$$

où :

$$\begin{aligned} A &= a^\alpha_\alpha, & C &= a^p_r a^q_s \ \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}, \\ B(x_0) &= a^\alpha_{\alpha\beta}x^\beta_0, & J(x_0) &= a^p_r a^q_{s\alpha}x^\alpha_0\varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}, \\ M(x_0) &= a^p_{r\alpha}a^q_{s\beta}x^\alpha_0 x^\beta_0\varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}. \end{aligned}$$

tel que :

$$\alpha, \beta, p, q, r, s = \{1, 2\}.$$

Proposition 5.2.1 *Les éléments de l'ensemble $S = \{A, B, C, J, M\}$ donnés par (5.13), sont des covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, 2, \mathbb{R}))$ et sont polynômialement indépendants, tel qu'aucun des éléments A, B, C, J, M ne peuvent s'écrire polynômialement en fonction des autres.*

Preuve. A l'aide de [[7],page 170-245], A, B, C, J, M sont des covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, 2, \mathbb{R}))$. Les éléments A et B de la famille S sont polynômialement indépendants puisqu'ils sont des éléments du système minimal de générateurs des covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, 2, \mathbb{R}))$.
Rappelons que la $\mathbb{R}$-algèbre $\mathbb{R}[x]^{GL(2,\mathbb{R})}$ des covariants centro-affines pour $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, 2, \mathbb{R}))$ est graduée

$$\mathbb{R}[x]^{GL(2,\mathbb{R})} = \bigoplus_{d_0,d_1,d_2,\delta\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_{(d_0,d_1,d_2,\delta)}$$

où $\mathcal{A}_{(d_0,d_1,d_2,\delta)}$ est le sous espace vectoriel des covariants de type (d_0, d_1, d_2, δ). Par conséquent :

$$A \in \mathcal{A}_{(0,1,0,0)} \qquad B \in \mathcal{A}_{(0,0,1,1)} \qquad C \in \mathcal{A}_{(0,2,0,0)}$$

$$J \in \mathcal{A}_{(0,1,1,1)} \qquad M \in \mathcal{A}_{(0,0,2,2)}$$

De plus, si un covariant de la famille S peut être écri en fonction des autres covariants, alors son type peut s'écrire comme une combinaison linéaire de leurs types [6]. Ainsi, il suffit de vérifier que C ne peut être généré à partir de A, J ne peut être généré à partir de A et B ; et M ne peut être généré à partir de B.
En effet, $-a^1_2a^2_1$ est un terme de C mais pas A^2 ; $a^1_2a^2_{11}x^1$ est un terme de J mais pas de AB ; $-a^1_{22}a^2_{11}x^1x^2$ est un terme M mais pas de B^2.
■

À l'aide de l'algorithme 2 [6], les covariants centro-affines A, B, C, J, M peuvent s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned} A &= I_1, & C &= I_1^2 - I_2, \\ B(x_0) &= K_1(x_0), & J(x_0) &= I_1K_1(x_0) - K_3(x_0), \\ M(x_0) &= K_1^2(x_0) - K_7(x_0). \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned}
&trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0) = I_1 + 2K_1(x_0) \\
&\det \mathcal{J}_{(a)}(x_0) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) + 2(I_1K_1(x_0) - K_3(x_0)) + 2(K_1^2(x_0) - K_7(x_0))
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\Delta &= (trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0))^2 - 4\det \mathcal{J}_{(a)}(x_0) \\
&= -I_1^2 + 2I_2 - 4K_1(x_0)(I_1 + K_1(x_0)) + 8(K_3(x_0) + K_7(x_0)).
\end{aligned}$$

Proposition 5.2.2 *Soit $S(a)$ un système différentiel polynômial quadratique plan donné. Les points d'équilibre de $S(a)$ peuvent être caractérisés à l'aide des covariants centro-affines suivant :*

$$\{I_1, I_2, K_1, K_3, K_7\}.$$

Théorème 5.2.1 *Une classification de la nature des points d'équilibre x_0 d'un système différentiel polynômial quadratique plan, est donnée par le tableau suivant :*

Type	$E(x_0)$	$F(x_0)$	$(E(x_0))^2 - 4F(x_0)$
point selle		$-$	$+$
noeud stable	$-$	$+$	$+$
spirale stable	$-$	$+$	$-$
noeud instable	$+$	$+$	$+$
spirale instable	$+$	$+$	$-$
centre	0	$+$	$-$
noeud stable dégénéré	$-$	$+$	0
noeud instable dégénéré	$+$	$+$	0

où

$$\begin{aligned}
&E(x_0) = I_1 + 2K_1(x_0) \\
&F(x_0) = \frac{1}{2}(I_1^2 - I_2) + 2(I_1K_1(x_0) - K_3(x_0)) + 2(K_1^2(x_0) - K_7(x_0))
\end{aligned}$$

Nous allons illustrer notre idée développée ci-dessus à l'aide d'un exemple.

Exemple 5.2.1 *Nous reprenons l'exemple (4.2.1). Nous avons déjà déterminé les points d'équilibre. Ainsi, d'après le Théorème 5.2.1, les points d'équilibre peuvent être caractérisés à l'aide des covariants centro-affines suivants :*

$$\{I_1, I_2, K_1, K_3, K_7\}.$$

Alors :
$(x_0^1, y_0^1) = (-1,-1)$ *est un centre, car :*

$$\begin{cases} E(x_0) = 0 \\ F(x_0) = 2 \\ (E(x_0))^2 - 4F(x_0) = 2. \end{cases}$$

$(x_0^1, y_0^1) = (0,1)$ *est une spirale instable, car :*

$$\begin{cases} E(x_0) = 3 \\ F(x_0) = 3 \\ (E(x_0))^2 - 4F(x_0) = -3. \end{cases}$$

5.3 Systèmes différentiels polynômiaux cubiques plans

Notons que la connaissance d'un système minimal de générateurs $\mathcal{F}$ de covariants centro-affines d'un système différentiel polynômial donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ simplifie le problème de transformation de ce dernier en un système à coefficients covariants centro-affines. Il nous est toujours possible de déterminer un système minimal de générateurs de covariants centro-affines pour un système différentiel donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ grâce aux différents algorithmes et théorèmes vus précédemment, mais les difficultés calculatoires ainsi que la complexité des algorithmes utilisés peuvent nous freiner.

Considérons les systèmes de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$. Un système minimal de générateurs de covariants centro-affines de l'ensemble des systèmes différentiels quadratiques complets $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,2,\mathbb{R}))$ est connu. Par conséquent, les covariants centro-affines des parties linéaires et quadratiques de l'ensemble considéré $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$ peut être décomposés en $\mathcal{E} = \{I_1,\ldots,I_{36},K_1,...,K_{33}\}$ et pour l'ensemble des covariants centro-affines des parties cubiques, il suffit de le réduire modulo $GL(2,\mathbb{R})$.

Soit $S(a), a = \left\{a^i, a^i_\alpha, a^i_{\alpha\beta}, a^i_{\alpha\beta\gamma}\right\}_{i=1,2;\alpha,\beta,\gamma=1,2,3}$ un système différentiel donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$. Supposons que les polynômes de droite de $S(a)$ sont sans facteur commun de degré ≥ 1. Comme pour le cas quadratique, étudions la stabilité locale de $S(a)$ à l'aide de covariants centro-affines. Nous devons dans un premier temps déterminer une matrice de transformation Q_a qui va nous permettre de transformer $S(a)$ en un système $S(b)$ équivalent, dont les coefficients sont des covariants centro-affines. Dans [20] une matrice de transformation Q_a a été donnée. On a :

$$Q_a = \begin{pmatrix} a^\alpha \varepsilon_{1\alpha} & a^\alpha \varepsilon_{2\alpha} \\ a^\alpha a^\beta_\alpha \varepsilon_{\beta 1} & a^\alpha a^\beta_\alpha \varepsilon_{\beta 2} \end{pmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} |Q_a| &= -a^\alpha a^q a^p_\alpha \varepsilon_{pq} \\ &= -I_{18}. \end{aligned}$$

Supposons que $I_{18} \neq 0$, alors la transformation linéaire :

$$\begin{pmatrix} \widetilde{x^1} \\ \widetilde{x^2} \end{pmatrix} = Q_a \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix}$$

transforme $S(a)$ en un système $S(b)$ dont les coefficients sont donnés par :

$$b^1 = a^p a^q \varepsilon_{pq}, \qquad b^2 = a^p a^q_\alpha a^\alpha \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_1 = \frac{1}{I_{18}} a^\alpha a^\delta a^\beta_\lambda a^\lambda_\delta \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad b^1_2 = \frac{1}{I_{18}} a^\alpha a^p a^q_\alpha \varepsilon_{pq},$$

$$b^2_1 = \frac{1}{I_{18}} a^\alpha a^\beta a^p_\alpha a^q_\lambda a^\lambda_\beta \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_2 = \frac{1}{I_{18}} a^\alpha a^\beta a^p_\alpha a^q_\beta \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{22} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\alpha a^\beta a^p a^q_{\alpha\beta} \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{22} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\mu a^\alpha a^\beta a^p_\mu a^q_{\alpha\beta} \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{21} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\alpha a^\beta a^p a^\lambda_\alpha a^q_{\lambda\beta} \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{21} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\mu a^\alpha a^\beta a^\lambda_\alpha a^p_\mu a^q_{\lambda\beta} \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{11} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\alpha a^\beta a^p a^q_{\delta\lambda} a^\delta_\beta a^\lambda_\alpha \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{11} = \frac{1}{I^2_{18}} a^\mu a^\alpha a^\beta a^q_{\delta\lambda} a^p_\mu a^\delta_\beta a^\lambda_\alpha \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{111} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^p a^\gamma_\alpha a^\lambda_\beta a^\mu_\delta a^q_{\gamma\lambda\mu} \varepsilon_{pq}, \quad b^2_{111} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^\nu a^\gamma_\alpha a^\lambda_\beta a^\mu_\delta a^p_\nu a^q_{\gamma\lambda\mu} \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{211} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^p a^\lambda_\beta a^\gamma_\alpha a^q_{\gamma\lambda\delta} \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{211} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^\nu a^\gamma_\alpha a^\lambda_\beta a^p_\nu a^q_{\gamma\lambda\delta} \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{221} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^p a^\gamma_\alpha a^q_{\beta\delta\gamma} \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{221} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^\nu a^\gamma_\alpha a^p_\nu a^q_{\gamma\beta\delta} \varepsilon_{pq},$$

$$b^1_{222} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^p a^q_{\alpha\beta\delta} \varepsilon_{pq}, \qquad b^2_{222} = \frac{1}{I^3_{18}} a^\alpha a^\beta a^\delta a^\nu a^p_\nu a^q_{\alpha\beta\delta} \varepsilon_{pq}.$$

$\mathcal{E} = \{I_1, \ldots, I_{36}, K_1, ..., K_{33}\}$ est un système minimal de générateurs des covariants centro-affines pour les systèmes différentiels polynômiaux qudratiques plan. À l'aide de l'algorithme 2 [6], on a :

$$\left\{ \begin{array}{lcl}
b^1 & = & 0 \\
b^2 & = & -I_{18} \\
b^1_1 & = & -I_1 \\
b^1_2 & = & -1 \\
b^2_1 & = & \frac{1}{2}\left(I_2 - I_1^2\right) \\
b^2_2 & = & 0 \\
b^1_{22} & = & \frac{I_{21}}{I^2_{18}} \\
b^2_{22} & = & -\frac{1}{I^2_{18}}\left(I_{27} + I_{21}I_1\right) \\
b^1_{12} & = & \frac{1}{I^2_{18}}\left(I_{27} + I_{21}I_1 - I_{17}I_{18}\right) \\
b^2_{12} & = & \frac{1}{I^2_{18}}\left(-2I_1I_{27} + \ I_2I_{21} + 2I_{18}I_{19} - \ 3I_1^2I_{21} + 2I_1I_{17}I_{18}\right) \\
b^1_{11} & = & \frac{1}{I^2_{18}}\left(I_{20}I_{18} + 2I_1I_{27} - \ I_2I_{21} - 2I_{18}I_{19} + \ 3I_1^2I_{21} - 2I_1I_{17}I_{18}\right) \\
b^2_{11} & = & \begin{array}{l} \frac{1}{I^2_{18}}(I_2I_{27} - 2I_{24}I_{18} - 7I_1^3I_{21} - 5I_1^2I_{27} + 5I_1^2I_{17}I_{18} \\ +3I_1I_2I_{21} - 2I_1I_{20}I_{18} - I_2I_{17}I_{18} + 4I_1I_{18}I_{19}). \end{array}
\end{array} \right. \tag{5.14}$$

On notera par :

$$I = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{p}a^{\gamma}_{\alpha}a^{\lambda}_{\beta}a^{\mu}_{\delta}a^{q}_{\gamma\lambda\mu}\varepsilon_{pq}, \quad M = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{\nu}a^{\gamma}_{\alpha}a^{\lambda}_{\beta}a^{\mu}_{\delta}a^{p}_{\nu}a^{q}_{\gamma\lambda\mu}\varepsilon_{pq},$$

$$J = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{p}a^{\lambda}_{\beta}a^{\gamma}_{\alpha}a^{q}_{\gamma\lambda\delta}\varepsilon_{pq}, \quad N = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{\nu}a^{\gamma}_{\alpha}a^{\lambda}_{\beta}a^{p}_{\nu}a^{q}_{\gamma\lambda\delta}\varepsilon_{pq},$$

$$K = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{p}a^{\gamma}_{\alpha}a^{q}_{\beta\delta\gamma}\varepsilon_{pq}, \quad O = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{\nu}a^{\gamma}_{\alpha}a^{p}_{\nu}a^{q}_{\gamma\beta\delta}\varepsilon_{pq},$$

$$L = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{p}a^{q}_{\alpha\beta\delta}\varepsilon_{pq}, \quad P = a^{\alpha}a^{\beta}a^{\delta}a^{\nu}a^{p}_{\nu}a^{q}_{\alpha\beta\delta}\varepsilon_{pq},$$

les covariants centro-affines pour la partie cubique. Par conséquent :

$$\begin{aligned} b^1_{111} &= \frac{I}{I^3_{18}}, \quad b^2_{111} = \frac{M}{I^3_{18}}, \\ b^1_{211} &= \frac{J}{I^3_{18}}, \quad b^2_{211} = \frac{N}{I^3_{18}}, \\ b^1_{221} &= \frac{K}{I^3_{18}}, \quad b^2_{221} = \frac{O}{I^3_{18}}, \\ b^1_{222} &= \frac{L}{I^3_{18}}, \quad b^2_{222} = \frac{P}{I^3_{18}}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Soit $S(a)$ un système donné de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$ tel que $I_{18}(a) \neq 0$. Par la matrice de transformation Q_a donnée précédemment, $S(a)$ se transforme en un système $S(b)$ à coefficients covariants centro-affines. On a vu que la recherche des points d'équilibre d'un système différentiel de deux variables pouvait se résoudre grâce à l'algorithme 7. Or, pour le cas cubique nous seront amenés à résoudre une résolvante $R(\widetilde{x}^1)$ de degré au plus 12. D'où une complexité importante pour exprimer les points d'équilibre d'un système donné $S(a)$ de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$ à l'aide d'expressions formées de covariants centro-affines. Les bases de Gröbner sont un bon outil pour déterminer ces points d'équilibre. Ainsi, il est préférable d'utiliser l'algorithme 8 basé sur le calcul des bases de Gröbner.

Si $(\widetilde{x^1_0}, \widetilde{x^2_0})$ un point d'équilibre du système $S(b)$ alors $\left(Q_a^{-1}\begin{pmatrix}\widetilde{x^1_0}\\ \widetilde{x^2_0}\end{pmatrix}\right)^t$ est un point d'équilibre du système $S(a)$. Soit $x_0 = (x^1_0, x^2_0)$ un point d'équilibre de $S(a)$. Le polynôme caractéristique $\chi(\lambda)$ de la matrice jacobienne $\mathcal{J}_{(a)}(x_0)$ associée à $S(a)$ est :

$$\chi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0)) + \det \mathcal{J}_{(a)}(x_0).$$

Le linéarisé associé à $\mathcal{S}(a)$ en x_0 est donné par

$$\begin{aligned} L^1_1 &= a^1_1 + 2a^1_{12}x^2_0 + 2a^1_{11}x^1_0 + 3a^1_{111}(x^1_0)^2 + 6a^1_{112}x^1_0x^2_0 + 3a^1_{122}(x^2_0)^2; \\ L^1_2 &= a^1_2 + 2a^1_{12}x^1_0 + 2a^1_{22}x^2_0 + 3a^1_{112}(x^1_0)^2 + 6a^1_{122}x^1_0x^2_0 + 3a^1_{222}(x^2_0)^2; \\ L^2_1 &= a^2_1 + 2a^2_{12}x^2_0 + 2a^2_{11}x^1_0 + 3a^2_{111}(x^1_0)^2 + 6a^2_{112}x^1_0x^2_0 + 3a^2_{122}(x^2_0)^2; \\ L^2_2 &= a^2_2 + 2a^2_{12}x^1_0 + 2a^2_{22}x^2_0 + 3a^2_{112}(x^1_0)^2 + 6a^2_{122}x^1_0x^2_0 + 3a^2_{222}(x^2_0)^2. \end{aligned}$$

Comme

$$trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0) = L^i_i$$

et

$$\det \mathcal{J}_{(a)}(x_0) = \frac{1}{2} L^p_r L^q_s \varepsilon_{pq} \varepsilon^{rs}$$

On a :

$$trace\mathcal{J}_{(a)}(x_0) = a^\alpha_\alpha + 2a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta_0 + 3a^\alpha_{\alpha\beta\gamma} x^\beta_0 x^\gamma_0$$

et

$$\det \mathcal{J}_{(a)} x_0) = \begin{array}{c} \frac{1}{2}(a^p_r a^q_s\ \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} + 4a^p_r a^q_{s\alpha} x^\alpha_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} + 6a^p_r a^q_{s\alpha\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \\ +4a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} + 12a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta\gamma} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \\ +9a^p_{r\alpha\beta} a^q_{s\gamma\delta} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 x^\delta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}) \end{array}$$

Dans ce qui suit, notons par :

$$\begin{array}{ll} A = a^\alpha_\alpha; & B(x_0) = a^\alpha_{\alpha\beta} x^\beta_0; \\ C(x_0) = a^\alpha_{\alpha\beta\gamma} x^\beta_0 x^\gamma_0; & D = a^p_r a^q_s\ \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \\ J(x_0) = a^p_r a^q_{r\alpha} x^\alpha_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}; & K(x_0) = a^p_r a^q_{s\alpha\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}; \\ M(x_0) = a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} & N(x_0) = a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta\gamma} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \\ U(x_0) = a^p_{r\alpha\beta} a^q_{s\gamma\delta} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 x^\delta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} & \end{array} \tag{5.16}$$

tels que :

$$\alpha, \beta, p, q, r, s = \{1, 2\}.$$

On remarque que :

$$A = I_1; \quad B(x) = K_1(x); \quad D = \tfrac{1}{2}((I_1)^2 - I_2)$$

Théorème 5.3.1 *Les éléments de l'ensemble $\mathcal{L} = \{C, J, K, M, N, U\}$ où,*

$$\begin{array}{ll} C(x_0) = a^\alpha_{\alpha\beta\gamma} x^\beta_0 x^\gamma_0; & J(x_0) = a^p_r a^q_{r\alpha} x^\alpha_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}; \\ K(x_0) = a^p_r a^q_{s\alpha\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs}; & M(x_0) = a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta} x^\alpha_0 x^\beta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \\ N(x_0) = a^p_{r\alpha} a^q_{s\beta\gamma} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} & U(x_0) = a^p_{r\alpha\beta} a^q_{s\gamma\delta} x^\alpha_0 x^\beta_0 x^\gamma_0 x^\delta_0 \varepsilon_{pq}\varepsilon^{rs} \end{array}$$

sont des covariants centro-affines de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$ qui sont "polynômialement indépendants" en ce sens qu'aucun des éléments C, J, K, M, N, U ne peut être écrit comme une fonction polynômiale des autres.

Preuve. En effet, d'après le théorème de Gurevich (3.2.3), C, J, K, M, N, U sont des covariants centro-affines du système de générateurs de $\mathcal{A}(2,3,\mathbb{R})$ des covariants centro-affines des systèmes différentiels $S(\mathcal{C}(2,3,\mathbb{R}))$. Rappelons que le $\Bbbk$-algèbre $\mathcal{A}(n,k,\Bbbk)$ des covariants centro-affines de $S(\mathcal{C}(n,k,\Bbbk))$ est gradué :

$$\mathcal{A}(n,k,\Bbbk) = \oplus_{d_0,d_1,\ldots,d_r \in \mathbb{N}} \mathcal{A}_{(d_0,d_1,\ldots,d_r)},$$

où $\mathcal{A}_{(d_0,d_1,\ldots,d_r)}$ est le sous-espace vectoriel des covariants de type $(d_0, d_1, \ldots, d_r)$, $(1 \leq r \leq k)$. Par conséquent, si un des covariants C, J, K, M, N, U, peut être généré par les autres, alors son type peut être décomposé comme combinaison linéaire de leurs types [3], ce qui est impossible. ■

Corollaire 5.3.1 *Les éléments de l'ensemble $A, B, D, C, J, K, M, N, U$ sont des covariants centro-affines de $\mathcal{S}(\mathcal{C}(2, 3, \mathbb{R}))$ et ils sont polynômialement indépendants.*

Proposition 5.3.1 *Soit $S(a)$ un système différentiel polynômial cubique plan. Les points d'équilibre de $S(a)$ peuvent être caractérisés à l'aide des covariants centro-affines suivants :*

$$\{I_1, I_2, K_1, C, J, K, M, N, U\}.$$

Théorème 5.3.2 *Une classification de la nature des points d'équilibre x_0 d'un système différentiel polynômial cubique plan, est donnée par le tableau suivant :*

Type	$E(x_0)$	$F(x_0)$	$(E(x_0))^2 - 4F(x_0)$
point selle		$-$	$+$
noeud stable	$-$	$+$	$+$
spirale stable	$-$	$+$	$-$
noeud instable	$+$	$+$	$+$
spirale instable	$+$	$+$	$-$
centre	0	$+$	$-$
noeud stable dégénéré	$-$	$+$	0
noeud instable dégénéré	$+$	$+$	0

Conclusion

Les bases de Gröbner sont une théorie attrayante de par leur conception et leur puissance dans la résolution des systèmes d'équations polynômiales. C'est un outil de la théorie de l'élimination. C'est pourquoi elles engendrent la résolution d'un grand nombre de problèmes mathématiques et applications dans différents domaines scientifiques. Elles permettent en particulier le passage entre la géométrie et l'algèbre. Évoluant dans la théorie des idéaux de plusieurs variables, il est évident que la difficulté de leur calcul est liée au degré et au nombre des variables des polynômes. Il est nécessaire d'apprendre à maitriser l'outil informatique et savoir faire le bon choix d'un langage ou d'un logiciel lorsqu'on on veut appliquer les bases de Gröbner. L'implémentation d'un algorithme est aussi importante que sa conception.

La théorie des invariants algébriques des équations différentielles est l'un des outils les plus importants dans la théorie qualitative des systèmes différentiels polynômiaux. En effet, en partant d'un système différentiel polynômial quelconque, sous l'action d'un groupe de transformation linéaire tel que $GL(n, \Bbbk)$, il nous est possible de construire un système différentiel polynômial à coefficients covariants centro-affines. Ainsi, la connaissance d'un système minimal de générateurs de covariants centro-affines d'un système différentiel polynômial donné, simplifie le problème de la décomposition des coefficients. Grâce au théorème de Gurevich, nous pouvons déterminer un système de générateurs de covariants centro-affines pour un système différentiel polynômial donné. Ce système de générateurs peut être réduit en un système minimal grâce aux algorithmes basés sur la théorie des bases de Gröbner. En effet, nous avons décrit une méthode algorithmique nous permettant de déterminer une base de l'algèbre des covariants centro-affines d'un système différentiel polynômial à coefficients dans un corps de caractéristique zéro.

A l'aide des covariants centro-affines nous pouvons identifier une famille de systèmes differentiels polynômiaux à une forme de système bien précise dont les coefficients sont des covariants centro-affines. Par les bases de Gröbner, on peut calculer les points d'équilibre de cette forme et par la suite, grâce à la théorie des invariants nous sommes capables de caractériser la stabilité locale d'un point d'équilibre de cette forme. On peut faire une classification affine d'un système différentiel polynômial de dimension finie à coefficients dans un corps de caractéristique zéro par rapport au groupe de transformations centro-affines. Cette classification peut être généralisée à un groupe de transformation affine.

Enfin, si on parvient à dépasser les difficultés calculatoires nous pourrons alors exprimer des propriétés géometriques d'un système différentiel polynômial donné à l'aide de relations algébriques ou semi-algébriques de leurs coefficients. On verra alors la puissance des bases de Gröbner ainsi que celle de la théorie des invariants dans l'étude des systèmes différentiels polynômiaux.

Bibliographie

[1] Boularas,D., Dali,D. : Sur les bases des concomitants centro-affine des systèmes différentiels. Cahiers mathématique de l'Université d'Oran, Oran (1987).

[2] Curtz, P. : Stabilité locale des systèmes quadratiques. Annales scientifiques de l'E.N.S. 4ème série, tome 13, n°3, pages 293-302 (1980).

[3] Cox, D., Little,J., O'Shea, D. : Ideals Varieties and Algorithms, An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra, pages 49-180, Undergraduate Texts in Mathematics, 3rd edition, Springer, New York (2015)

[4] Dieudonné, J., Carrell, J. : Invariant theory, old and new, Advances in Mathematics,Volume 4, Issue 1, pages 1-80 (1970)

[5] Dali, D. : Gröbner Bases of algebraic invariants in polynômial differential systems, LE MATEMATICHE, Vol LXIIIX- Fasc. II, pages 16-21 (2008)

[6] Dali, D., Cheng, S.S. : Decomposition of centro-Affine Covariants of Polynomial Differential Systems, Taiwanese J. Math, Volume14, Number 5, 1903-1924, ISSN 1027-5487 (2010)

[7] Gurevich, G. B. : Foundation of the Theory of Algebraic Invariants, Moscow & Leningrad, GITTL (1948)

[8] Hilbert, D. : Invariant Theory, Cambridge University Press, Cambridge (1993)

[9] Hubert, E. : Etude Algébrique et Algorithmique Des Singularités des Equations Différentielles Implicites, Institut National Polytechnique Grenoble (1997)

[10] Jiang,Q., Llibre, J. : Qualitative classification of singular points, Qualitative Theory Of Dynamical System, Volume 6, pages 87-167 (2005)

[11] Liapunov, A. M. : Problème général de la stabilité du mouvement, Annales de la faculté des sciences de Toulouse, 2^{eme} serie, Tome 9, pages 203-474 (1907)

[12] Lazard, D. : Gröbner Bases, Gaussian Elimination and Resolution of Systems of Algebraic Equaions, Computer Algebra, Lecture notes in Computer science, EUROCAL 1983, Volume162, pages 146-156 (1983)

[13] Mahrez, Y., Dali, D. : Algebraic invariants and local staility od planar differential system, Bulletin of iranian mathematical society (2022)

[14] Mott, J. L., Kandel, A., Baker, T. P. : Discrete Mathematics for Computer Scientists and Mathematicians,pages 373-375, Prentice Hall, New Delhi, India (1986)

[15] Popov, V.L. : Invarint Theory, Am. Math. Soc. Trans., pages 99-112 (1991)

[16] Perko, L. : Differential Equations and Dynamical Systems, Springer-Verlag, New York (2001)

[17] Poincaré, H. : Sur les courbes définies par les équations différentielles, Journal de Mathematiques Pures et Appliquées, Volume 1, pages 167-244 (1985)

[18] Szpirglas, A. : Mathématiques Algèbre L3, page 588-595, Pearson Education France, 4 bis rue des Vinaigriers 75010 Paris (2009)

[19] Sibirsky,C. S. : Introduction to the Algebraic Theory of Invariants of Differential Equations, Nonlinear Science, Theory and Applications, Manchester University Press, Manchester (1988)

[20] Turqui, A., Dali, D. : Normal Forms of Planar Polynomial Differential Systems, Qualitative Theory of Dynamical Systems, Volume 18, pages 11-33 (2019)

[21] Vulpe, N. I. : Polynomial basis of centro-affine comitants of a differential system, Differ. Uravn, Volume 17, Number 9, pages 1682-1684 (1981)