

N° d'ordre : 13/2015-M/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEURE ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE MATHEMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : MAHMOUDI Yousra

Sujet

Approche polyédrale étendue en optimisation combinatoire

Soutenu publiquement le 04/05/2015, devant le jury composé de :

<i>M^r</i> R. Ouafi	Professeur à l'USTHB	Président
<i>M^r</i> M. Aïder	Professeur à l'USTHB	Directeur de mémoire
<i>M^r</i> A. Semri	Professeur à l'USTHB	Examineur
<i>M^{me}</i> CH. Adiche	Maître de Conférences A à l'U.M.B.B	Invitée

Je dédie ce travail

A la mémoire du cher Abi Djedou.

A mes parents, Omi El Kabira et Khalti Zohra, pour leur amour inestimable, leur confiance, leur soutien, leurs sacrifices et toutes les valeurs qu'ils ont su m'inculquer.

A mon cher mari pour son soutien et son précieux encouragement.

A ma soeur pour sa tendresse, sa complicité et sa présence malgré la distance qui nous sépare.

A mes frères Abderrahmane et Lokman.

A ma chère amie Soumaya.

A tous ceux qui me sont chers et que j'ai omis de citer.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon Directeur de mémoire Monsieur AÏDER Méziane. Je le remercie de m'avoir encadrée, orientée, aidée et conseillée.

Mes vifs remerciements sont également adressés à Monsieur OUAFI Rachid pour avoir eu l'amabilité de bien vouloir présider le jury.

De même que j'adresse mes sincères remerciements à Monsieur SEMRI Ahmed et à Madame ADICHE Chahrazed pour l'intérêt qu'ils portent à mon travail et aussi au fait d'avoir accepté de faire partie du jury.

En fin, j'adresse mes remerciements et ma gratitude à Monsieur BOUZID Cherif Mouaouia et à Monsieur BAIYOU Mourad pour le temps qu'ils m'ont consacré et l'aide précieuse qu'ils m'ont apportée.

Introduction

Trouver le sommet médian dans un réseau est un problème similaire au problème du “médian géométrique dans un plan”, posé par *Pierre Fermat* durant le 17^e siècle et qui consiste à localiser le médian sur le plan de sorte à minimiser la somme des distances vers trois points dont les coordonnées sont connues. *Alfred Weber*, en 1909, a généralisé ce problème en ajoutant des poids aux sommets. Ces sommets et leurs poids correspondent à des clients et leurs demandes, respectivement. Ce problème a été généralisé, à contenir plusieurs clients et à localiser plusieurs médians. Il est dit problème “multi-Weber” ou bien problème du “ p -médian”.

Le problème du p -médian, noté PMP, est un problème classique de localisation réputé pour être NP-difficile. Quelques méthodes exactes ont été proposées pour sa résolution, elles se sont néanmoins avérées efficaces seulement pour de petites instances. Des méthodes approchées ont été décrites, par la suite, pour obtenir des solutions de bonne qualité en un temps raisonnable.

L’efficacité et la puissance marquées par l’approche polyédrale pour la résolution des problèmes combinatoires, notamment ceux qui sont NP-difficiles, ont motivé les chercheurs à explorer le polyèdre des solutions du PMP. Cependant, aucune description complète du polytope du problème du p -médian n’est obtenue, seules des descriptions partielles ont été établies.

En 2007, *Zhao et Posner* ont proposé une formulation étendue pour le PMP. Ils ont tenté, en éliminant les variables supplémentaires, d’obtenir une description complète du polytope. Cela n’a pas abouti, ils ont néanmoins pu obtenir des propriétés du polytope qui ont été utilisées pour généraliser les facettes existantes dans la littérature, et pour décrire le polytope lorsque $p = n - 2$, n étant le nombre de sommet du graphe sur lequel le PMP est défini.

Dans le présent manuscrit, nous présentons une synthèse structurée des différents travaux effectués sur ce problème. Elle englobe l’essentiel des résultats obtenus sur le pro-

blème du p -médián, les méthodes conçues pour sa résolution, et les études portées sur le polytope de solutions réalisables (propriétés générales, inégalités valides, et facettes) dans le cas de graphes ayant une structure générale et dans le cas de structures particulières. Nous illustrons, aussi, l'application d'une nouvelle technique : l'approche polyédrale étendue, qui s'avère puissante et qui a abouti à des résultats à la fois intéressants, encourageants et prometteurs sur la description du polytope du problème du p -médián. À notre connaissance, aucune synthèse rassemblant tous ces résultats n'a été faite.

Nous avons organisé notre document en quatre chapitres :

Le premier chapitre présente quelques notions fondamentales et indispensables pour la suite la suite du manuscrit. Elles concernent la théorie des graphes, la programmation linéaire, la complexité des problèmes combinatoires et les différents types de méthodes de résolution de ces problèmes.

Dans le deuxième chapitre, nous commençons par la définition du problème du p -médián dans son cas général, pour ensuite présenter les modèles mathématiques les plus utilisés dans la littérature. Nous étudions la complexité du problème, et nous passons en revue les principales méthodes de résolution exactes et approchées proposées pour la résolution du PMP.

Le troisième chapitre commence par l'introduction des différentes notions de l'étude polyédrale, suivie par les propriétés établies du polytope des solutions réalisables du PMP. Puisque le polytope du p -médián n'a pas pu être complètement décrit, nous présentons les facettes définies dès les premières études polyédrales portées sur ce problème.

Dans la première section du chapitre 3, nous introduisons quelques notions de base de l'étude polyédrale. Dans la deuxième section, nous présentons les propriétés basiques du polytope du p -médián décrites par *De Farias*[DFRS], *Avella et Sassano* [AVSA94], *De Vries et Posner* [Vries] et par *Ward et Wong* [ward] pour le cas d'un graphe général et pour le cas des arbres. Dans la troisième section, nous citons les inégalités valides et les facettes décrites dans la littérature.

Le chapitre 4 est consacré à la présentation de la formulation étendue élaborée par *Zhao et Posner*. Nous introduisons, en premier lieu, les notions fondamentales de la projection. Ensuite, nous illustrons la formulation étendue proposée et nous procédons à l'élimination des variables supplémentaires ce qui a permis d'obtenir deux propriétés des facettes du polytope du p -médián.

Ces propriétés sont utilisées pour généraliser les facettes présentées dans le troisième chapitre et pour donner une description complète du polytope du p -médián lorsque $p = n - 2$.

Notions fondamentales de l'optimisation

chapter.1

1.1	Introduction	5
1.2	Théorie des graphes	5
1.3	Programmation linéaire	8
1.4	Théorie de la complexité	9
1.4.1	Notion d'algorithme	9
1.4.2	Classe P	10
1.4.3	Classe NP	10
1.5	Approches de résolution	11
1.5.1	Méthodes exactes	12
1.5.2	Méthodes heuristiques	12
1.5.3	Méthodes métaheuristiques	12
1.6	Conclusion	13

1.1 Introduction

La recherche opérationnelle est une approche quantitative permettant de produire de meilleures décisions. Elle fournit des outils pour rationaliser, simuler et optimiser l'architecture et le fonctionnement des systèmes industriels et économiques. Elle propose des modèles pour analyser des situations complexes et permet aux décideurs de faire des choix efficaces et robustes. La recherche opérationnelle est une discipline exploitant ce qu'il y a de plus opérationnel dans les mathématiques, l'économie et l'informatique. Elle est en prise directe avec l'industrie et joue un rôle-clé dans le maintien de la compétitivité.

Sous le terme de "mathématiques appliquées", nous regroupons les méthodes qui constituent la boîte à outils d'un expert en recherche opérationnelle. La programmation linéaire, en variables réelles ou entières, qui consiste à minimiser (ou maximiser) une fonction mathématique sous des contraintes également mathématiques, ce qui, en pratique, permet de modéliser un grand nombre de situations issue du monde réel.

Aux côtés de la programmation linéaire, figure la théorie des graphes qui offre également des possibilités de modélisation très riches. Ainsi, les graphes sont très fréquemment utilisés pour représenter un réseau mais leur utilisation dépasse largement le seul cadre de ces problèmes.

En effet, tout problème décisionnel peut être traduit en un modèle mathématique ou exprimé en terme de graphe pour pouvoir lui appliquer les outils et les techniques de la recherche opérationnelle. Cette phase essentielle s'appelle la modélisation. La résolution d'un problème dépend crucialement du modèle choisi. Pour un même problème, différentes modélisations sont possibles.

La programmation linéaire et les principaux algorithmes de graphes sont souvent complétés par d'autres notions théoriques comme la théorie de la complexité qui permet d'avoir une meilleure compréhension des problèmes qui peuvent être résolus efficacement.

Dans ce premier chapitre, nous introduisons quelques notions fondamentales, nécessaires pour la suite du manuscrit concernant la théorie des graphes, la programmation linéaire, les différents types de méthodes de résolution de ces problèmes et la théorie de la complexité.

1.2 Théorie des graphes

Définition 1.1 (Graphe et propriétés). *Un graphe G est défini par un ensemble V de "sommets" ou "nœuds", et d'un ensemble E d' "arcs" où chaque arc est un couple ordonné (i, j) de nœuds. Les nœuds i et j sont dit "extrémité initiale" et "extrémité terminale", respectivement, de l'arc (i, j) . Puisque tout arc de G est dirigé, le graphe est dit "orienté".*

Il peut arriver que la direction de l'arc (i, j) n'importe pas, seul importe de savoir les paires de

sommets reliés. Dans ce cas, le graphe est dit “non-orienté”, et les paires (ij) sont dites “arêtes”.

Le graphe G étant caractérisé par le couple d'ensembles V et E , il est noté $G = (V, E)$. Si $|V| = n$, on dit que G est d'ordre n .

la figure suivante présente un exemple de graphes orienté (a) et non-orienté (b), où $V = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ et $E_a = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$ et $E_b = \{(1, 2), (1, 5), (2, 3), (3, 4), (3, 5)\}$.

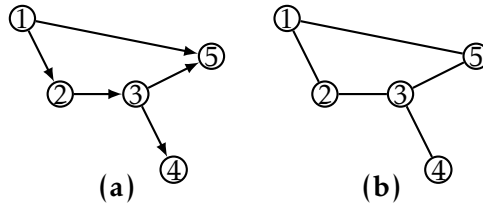


FIGURE 1.1 – Exemple d'un graphe orienté (a) et d'un graphe non orienté (b).

Le graphe G est dit “simple” s'il n'a pas plusieurs arcs (arêtes) reliant les deux sommets i et j . Les deux graphes de la figure Figure 1.1 sont simples.

Berge, dans [11], précise qu'il n'y a pas deux espèces de graphes, ceux orientés et ceux non-orientés. tout graphe est orienté, mais pour des raisons conceptuelles il est parfois peu commode de le considérer avec une orientation si le problème posé est de nature non-orienté, dans ce cas les orientations sont omises. Nous pouvons également passer d'un concept non-orienté vers un concept orienté, en dirigeant vers les deux sens chaque arête du graphe correspondant.

Définition 1.2 (Arcs (resp. arêtes) adjacents). Deux arcs (resp. arêtes) sont adjacents s'ils ont une extrémité commune.

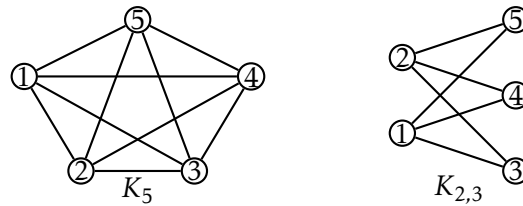
Définition 1.3 (Graphe complet). Le graphe G d'ordre n , est dit “complet” si ses sommets sont tous deux à deux reliés. Il est noté K_n .

Définition 1.4 (Graphe biparti). Un graphe est “biparti”, si l'ensemble de ses sommets V peut être partitionné en deux sous-ensembles disjoints V_1 et V_2 , tels que deux sommets du même sous-ensemble ne soient jamais adjacents. Il est noté $G = (V_1 \cup V_2, E)$.

Un graphe biparti est complet, si $\forall x_1 \in V_1, \forall x_2 \in V_2$ on a $(x_1 x_2) \in E$. Il est noté $K_{n,m}$, où $n = |V_1|$ et $m = |V_2|$.

La figure suivante donne deux exemples de graphes complets.

Définition 1.5 (Chemin et chaîne). Dans un graphe orienté (resp. non orienté), un chemin (resp. une chaîne) reliant deux sommets i et j , est une séquence d'arcs (resp. arêtes) de la forme $(i, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_{k-1}, x_k), (x_k, j)$ (resp. $(ix_1), (x_1 x_2), \dots, (x_{k-1} x_k), (x_k, j)$). La longueur d'un chemin (resp. chaîne) est le nombre d'arcs (resp. arêtes) qui la constituent. Si $i = j$, le chemin (resp. la chaîne) est appelé “circuit” (resp. “cycle”).

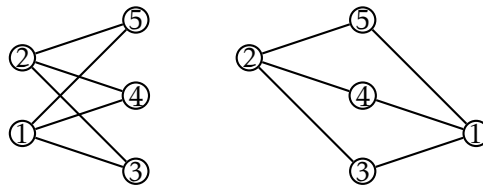
FIGURE 1.2 – Représentation des graphes K_5 et $K_{2,3}$.

Définition 1.6 (Graphe fortement connexe (resp. connexe)). *Le graphe G orienté (resp. non orienté) est dit “fortement connexe” (resp. “connexe”), si pour toute paire i, j de deux sommets disjoints, il existe un chemin reliant i à j et un chemin reliant j à i (resp. une chaîne reliant i à j).*

Définition 1.7 (Composante connexe). *Un graphe qui n’est pas connexe (resp. fortement connexe) est l’union de deux ou de plusieurs sous-graphes connexes (resp. fortement connexes), chaque paire de ceux-ci n’ayant pas de sommets en commun. Les sous-graphes connexes (resp. fortement connexe) disjoints sont dits “composantes connexes” (resp. “composantes fortement connexes”) du graphe.*

Définition 1.8 (Ensemble stable). *Un ensemble “stable” de G , est un ensemble $S \subseteq V$ de sommets deux à deux non-adjacents. I.e. $\forall i, j \in S, (i, j) \notin E$ et $(j, i) \notin E$*

Définition 1.9 (Graphe planaire). *On dit qu’un graphe G est “planaire” s’il est possible de le représenter sur un plan de telle sorte que les arêtes (arcs) ne se rencontrent pas en dehors de leurs extrémités. La figure suivante montre que le graphe $K_{2,3}$ est un graphe planaire.*

FIGURE 1.3 – Exemple de graphe planaire : le $K_{2,3}$.

Définition 1.10 (Arbre et forêt). *Un “arbre” est un graphe connexe sans cycle. Une “forêt” est un graphe dont chaque composante connexe est un arbre.*

Le théorème suivant donne les caractérisations d’un arbre :

Théorème 1.1. *Soit $G = (V, U)$ un arbre d’ordre $|V| = n \geq 2$. Les propositions suivantes sont équivalentes :*

1. G est connexe sans cycle,
2. G est sans cycle et possède $(n - 1)$ arcs,
3. G est connexe et admet $(n - 1)$ arcs,
4. G est sans cycle et l’addition d’un seul arc crée un et un seul cycle,

5. G est connexe, et si on supprime un arc quelconque, il n'est plus connexe,
6. Tout paire de sommets est reliée par une unique chaîne.

Dans la figure suivante, nous présentons un exemple d'une forêt, dont les composantes connexes sont (a) et (b), étant des arbres.

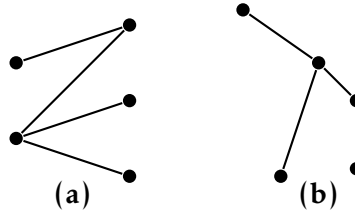


FIGURE 1.4 – Exemple d'une forêt.

Les références [11] [14] [12] [35] présentent une bibliographie assez complète sur la théorie des graphes et ses applications.

1.3 Programmation linéaire

Proposée par *Dantzig*, en 1949 [13], la programmation linéaire consiste à formuler d'une façon adéquate un problème donné, en tenant compte de sa spécificité.

La programmation linéaire a permis la résolution de différents problèmes d'optimisation de tailles très variées dans la plupart des domaines, à l'aide de plusieurs techniques et méthodes telles que le simplexe et ses variantes.

Dans cette section, nous définissons la forme générale d'un problème d'optimisation linéaire et quelques notions liées.

Définition 1.11 (Programme linéaire). Un "programme linéaire" est un problème dans lequel les variables, dites "de décision", sont des réels qui doivent satisfaire un ensemble d'équations et/ou d'inéquations linéaires, dites "contraintes", et la valeur d'une fonction linéaire des ces variables, appelée "fonction objectif", doit être maximisée ou minimisée.

Le programme (P), suivant, est un programme linéaire.

$$(P) \begin{cases} \max cx \\ Ax \leq b \quad x \geq 0 \end{cases}$$

x est le vecteur de variables de décision, $A \leq b$ est le système de contraintes, et $Z(x) = cx$ est la fonction objectif.

Définition 1.12 (Forme canonique et standard). Soient : A une (m, n) -matrice, b un m -vecteur colonne et c un n -vecteur ligne. Les programmes linéaires :

$$(PC) \begin{cases} \max(\text{resp. min}) cx \\ Ax \leq b \quad x \geq 0 \end{cases} \quad (PS) \begin{cases} \max(\text{resp. min}) cx \\ Ax = b \quad x \geq 0 \end{cases}$$

sont écrits sous "forme canonique" et sous "forme standard", respectivement.

Théorème 1.2. *Tout programme linéaire peut être écrit sous forme canonique et sous forme standard.*

Définition 1.13 (Solution réalisable). *On dit que $x \in \mathbb{R}^n$ est une “solution réalisable” ou “admissible” du programme linéaire (P), si x satisfait toutes les contraintes de (P). L'ensemble de toutes les solutions réalisables de (P) est appelé “ensemble réalisable”.*

Définition 1.14 (Solution optimale). *Une “solution optimale” $x^* \in \mathbb{R}^n$ de (P) est une solution réalisable de (P) telle que pour toute solution réalisable $y \in \mathbb{R}^n$ de (P), on a nécessairement $Z(y) \leq Z(x)$ (resp. $Z(y) \geq Z(x)$). autrement dit, une solution réalisable est optimale si elle maximise (resp. minimise) la fonction objectif sur l'ensemble réalisable.*

Théorème 1.3 (Théorème de la dualité). *Soit A une matrice, c et b des vecteurs. Alors,*

$$\max\{cx \mid Ax \leq b\} = \min\{yb' \mid y \geq 0, yA = c\}$$

à condition que les deux ensembles ne soient pas vides [12].

Plusieurs méthodes et algorithmes ont été décrits pour la résolution analytique des programmes mathématiques linéaires tels que la méthode du simplexe, la méthode du simplexe révisé, la méthode primal-dual, et la méthode de Dantzig-Wolfe pour les grandes instances de structures décomposables. Une méthode géométrique a été proposée pour les modèles à deux variables. Une autre technique de résolution dite “Approche polyédrale” exploite les propriétés du polyèdre des solutions réalisables (voir le chapitre 3).

Les références [17] [12] [35] offrent des illustrations détaillées de toutes les notions et les méthodes de la programmation linéaire, y compris des exemples d'application.

1.4 Théorie de la complexité

Dans cette section, nous introduisons la notion d'algorithme et complexité algorithmique. Ensuite, nous classons les problèmes décisionnels et combinatoires selon la difficulté de résolution.

1.4.1 Notion d'algorithme

Définition 1.15 (Algorithme). *Un algorithme est une suite finie d'instructions permettant la résolution d'un problème donné.*

Définition 1.16 (Opérations élémentaires). *On appelle “opération élémentaire” toute opération arithmétique (addition, multiplication, soustraction, division, etc.), comparaison, test, affectation ou opération logique.*

Définition 1.17 (Algorithme polynomial et algorithme exponentiel). *Un algorithme A est dit “polynomial”, si le nombre total d'opérations élémentaires à exécuter par A est inférieur ou égal à un polynôme $P(n)$, n étant la taille des données nécessaire pour l'exécution de l'algorithme. On dit que l'algorithme est en $o(P(n))$.*

Un algorithme est dit “efficace” si et seulement s’il est polynomial.

Si A n’est pas polynomial, alors il est dit “exponentiel”.

1.4.2 Classe P

Définition 1.18 (problème de reconnaissance). Étant donné un problème “d’optimisation combinatoire” :

$$\text{“Trouver } \hat{s} \in S \text{ tel que } f(\hat{s}) = \min_{s \in S} (f(s)) \text{ (resp. } \max_{s \in S} (f(s)) \text{)”}$$

où, S est l’ensemble de solutions réalisables du problème et un nombre a , on définit le problème de “reconnaissance” associé :

$$\text{“Existe-t-il } \hat{s} \in S \text{ tel que } f(\hat{s}) \leq a \text{ (resp. } f(\hat{s}) \geq a \text{)”}$$

Le résultat d’un problème de reconnaissance ne peut prendre qu’une des deux valeurs “VRAI” ou “FAUX”.

Définition 1.19 (Problème polynomial). Un problème est dit “polynomial” s’il existe un algorithme polynomial pour le résoudre. On dit que c’est un problème “facile”, autrement il est dit “difficile”.

Les problèmes polynomiaux forme la classe “P”.

Théorème 1.4. Si le problème de reconnaissance associé à un problème d’optimisation combinatoire donné est difficile, alors, le problème d’optimisation combinatoire est lui-même difficile.

Parmi les problèmes de la classe P nous citons le problème du plus court chemin, du flot maximum, de la 2-coloration sur un graphe, du couplage maximum et la programmation linéaire.

1.4.3 Classe NP

Définition 1.20 (problème non-déterministe polynomial). Un problème est “non-déterministe polynomial”, si pour une solution \hat{s} proposée, il est possible de vérifier en un temps polynomial que la réponse correspondante est “VRAI”. La classe des problèmes non-déterministes polynomiaux est noté “NP”.

Définition 1.21 (Réduction polynomiale). Soient (P_1) et (P_2) deux problèmes de reconnaissance. On dit que (P_1) se réduit polynomialement à (P_2) s’il existe un algorithme pour (P_1) faisant appel à un algorithme de résolution de (P_2) . De plus, en comptabilisant l’algorithme de résolution de (P_2) comme opération élémentaire, l’algorithme de (P_1) est polynomial.

Théorème 1.5. Si le problème (P) se réduit polynomialement à (P') et si (P') est polynomial, alors (P) est polynomial.

Définition 1.22 (Problème NP-complet). Un problème de reconnaissance est “NP-complet”, si tout problème de la classe NP se réduit polynomialement à lui.

Théorème 1.6. *Si le problème (P) est NP-complet et si (P) se réduit polynomialement à (P'), alors (P') est NP-complet.*

La propriété de “NP-complétude” est très forte puisqu’elle signifie que si nous avons un algorithme polynomial pour un problème NP-complet, alors nous aurons un algorithme polynomial pour tous les problèmes de la classe NP.

La classe des problèmes NP-complets est très riche puisqu’on a pu montrer que la plupart des problèmes pour lesquels on ne connaissait pas d’algorithme polynomial et que la plupart des problèmes de reconnaissance associés aux problèmes d’optimisation combinatoire, étaient NP-complets. Citons parmi ceux-ci le problème du stable, du voyageur de commerce, du sac à dos, de la k -coloration sur un graphe ($k \geq 3$), du p -médian, de la programmation linéaire en nombres entiers, et le problème de satisfiabilité.

Définition 1.23 (Problème NP-dur ou NP-difficile). *Un problème d’optimisation combinatoire (P) est dit “NP-dur” ou “NP-difficile” si le problème de reconnaissance associé est NP-complet.*

La relation entre la classe P et la classe NP est résumé par la figure suivante :

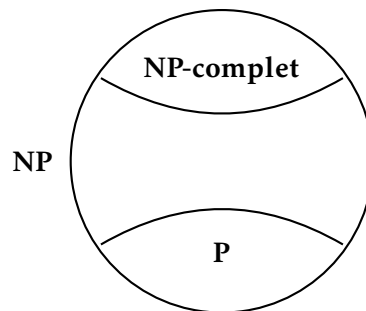


FIGURE 1.5 – La relation entre la classe P et la classe NP.

La figure montre que :

1. Tout problème polynomial est un problème non-déterministe polynomial. i.e. $P \subset NP$.
2. Il existe des problèmes dont le statut est indéterminé (le problème de reconnaissance associé appartient à la classe NP, cependant on n’a pas pu montré ni qu’il est NP-complet ni qu’il appartient à la classe P).

Il est impératif de mentionner que personne n’a pu trouvé d’algorithme polynomial pour un problème NP-Complet. En outre, personne n’a pu prouver qu’il n’en existait pas. Ainsi, la question de savoir si $NP \subset P$ ou non reste pour l’instant ouverte.

Le lecteur est invité à consulter [18] [35] [40] pour plus de détails sur la complexité des algorithmes et des problèmes.

1.5 Approches de résolution

Après l’étude et la modélisation du problème décisionnel, nous passons à l’étape de résolution. Différents types de méthodes de résolution peuvent être proposés suivant la taille,

la nature et la complexité du problème.

Nous présentons, dans la suite, les différents types d'approches de résolution.

1.5.1 Méthodes exactes

Les méthodes exactes sont des méthodes de résolution qui donnent une garantie de trouver la solution optimale d'un problème donné. Le principe essentiel d'une méthode exacte consiste, en général, à énumérer de façon implicite l'espace de recherche.

Parmi les méthodes exactes, nous trouvons les méthodes de séparation et évaluation, les méthodes de coupes, de coupe et branchement, et la programmation dynamique.

1.5.2 Méthodes heuristiques

Dans de nombreux cas, la détermination d'une solution exacte n'est pas évidente en terme de temps de résolution. De même, la complexité et la structure difficile des problèmes ou bien leurs réalités pratiques pourront demander de trouver rapidement une bonne solution pas nécessairement optimale.

Une heuristique est un algorithme approché qui permet d'identifier en temps polynomial au moins une solution réalisable, pas obligatoirement optimale. L'usage d'une heuristique est efficace pour calculer une solution approchée d'un problème et ainsi accélérer le processus de résolution exacte. Généralement une heuristique est conçue pour un problème particulier, en s'appuyant sur sa structure propre sans offrir aucune garantie quant à la qualité de la solution calculée.

Nous distinguons parmi les approches heuristiques les approches par voisinage (de recherche locale) et les approches par construction (approches gloutonnes). Les approches par voisinage partent d'une ou plusieurs solutions initiales qu'elles cherchent à améliorer à partir d'un voisinage défini, alors que les approches par construction partent d'une solution vide et génèrent de nouvelles solutions de façon incrémentale en ajoutant itérativement des composantes aux solutions en cours de construction.

1.5.3 Méthodes métaheuristiques

Le terme "métaheuristique" a été employé pour la première fois par *Glover* en 1977 [19], pour désigner un ensemble de méthodes heuristiques non-spécifiques ayant pour vocation de pouvoir être adaptées à divers problèmes. Elles s'inspirent généralement d'analogies avec la physique (recuit simulé), avec la biologie (algorithmes génétiques, systèmes immunitaires) ou encore l'éthologie (colonies de fourmis, essaims particuliers).

Toute méthode de résolution, y compris les méthodes exactes, heuristiques et métaheuristique, présente des avantages et des inconvénients. Des essais d'amélioration ont été

faits tel que l'hybridation des méthodes qui consiste à combiner les caractéristiques de deux (ou plusieurs) méthodes différentes pour tirer les avantages de chacune des méthodes. Les origines des métaheuristiques hybrides remontent aux travaux de Glover [20], Grefenstette [22] et M'uhlenbein et al. [23]. Les métaheuristiques peuvent être hybridées avec des métaheuristiques ou même avec des méthodes exactes. Cette technique d'hybridation a montré son efficacité sur de nombreux problèmes de l'optimisation combinatoire [1][18].

1.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons introduit brièvement les concepts de base de l'optimisation combinatoire nécessaires pour la suite du manuscrit. Dans le chapitre 2, nous donnons un état de l'art sur le problème du p -médian.

references

Le problème du p -médian

chapter.2

2.1	Introduction	15
2.2	Définition du problème	15
2.3	Modélisation mathématique . . .	16
2.3.1	Formulation classique . .	16
2.3.2	Formulation par les ensembles indépendants d'arcs	18
2.3.3	Formulation de De Farias .	20
2.4	Étude de la complexité	21
2.5	Approches de résolution	22
2.5.1	Méthodes exactes	22
2.5.2	Méthodes Heuristiques . .	23
2.5.3	Méthodes métaheuristiques	23
2.6	Conclusion	24

2.1 Introduction

Le sommet “médian” d’un réseau est tel que la somme de longueurs des plus courts chemins de ce sommet vers tous les autres sommets est minimale.

Trouver le sommet médian dans un réseau est un problème similaire au problème du “médian géométrique dans un plan”, posé par *Pierre Fermat* dans les années soixantes qui consiste à localiser le médian sur le plan de telle sorte à minimiser la somme des distances vers trois points dont les coordonnées sont connues. *Alfred Weber*, en 1909, a généralisé ce problème en ajoutant des poids aux sommets. Ces sommets et leurs poids correspondent à des clients et leurs demandes, respectivement. Ce problème a été généralisé, à contenir plusieurs clients et à localiser plusieurs médians. Il est dit problème “multi-Weber” ou bien problème du “ p -médian”.

Le problème du p -médian, noté PMP, est un problème classique de localisation réputé pour être NP-difficile, qui est largement étudié et appliqué dans plusieurs domaines tels que :

La santé et les installations d’urgence : La localisation des unités de soins de santé, et des ambulances et stations des pompiers et de polices ...

L’informatique : La quantification du trafic et planification des microprocesseurs, service-web et e-commerce, et restructuration des bases de données semi-structurées ...

L’éducation : L’orientation et l’affectation des élèves aux collèges dans les banlieues ...

L’industrie et la logistique : La collecte des déchets solides et la localisation des entrepôts et des centres de distributions ...

Les statistiques : La partition de nuages de points, Analyse de classification ...

Les activités des services publics ou privés : magasin, centres commerciaux, postes, banques, salles omnisports ...

Cette liste d’exemples d’applications n’est ni complète ni exhaustive.

Dans ce premier chapitre, on donne la définition et quelques modélisations mathématiques du problème du p -médian. On étudie la complexité du problème, et on présente les principales méthodes de résolutions existant dans la littérature.

2.2 Définition du problème

On considère un graphe $G = (V, E)$, Où V est un ensemble de n sommets et E est l’ensemble d’arcs reliant ces sommets. Le graphe G est muni d’une distance d_{ij} sur tout arc $(i, j) \in E$.

Le problème du p -médian, défini sur le graphe G , consiste en la sélection de “ p ” sommets à être des médians, et le reste des sommets à être des clients. L’objectif est la minimisation de la distance totale entre les clients et les médians.

Il est supposé qu’un sommet ne peut pas être à la fois client et médian, et que la demande d’un client donné est satisfaite entièrement par le médian à lequel il est affecté et aucun

coût n'est considéré pour l'ouverture des médians.

La figure 1.1 illustre un exemple du problème du p -médian avec une solution réalisable.

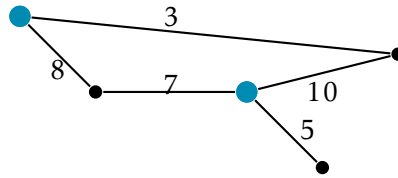


FIGURE 2.1 – Solution réalisable du PMP avec $n = 5$, $p = 2$.

Par un simple calcul combinatoire, on a que le nombre de solutions de problème, qui est en fonction du nombre de sommets n et du nombre de médians à ouvrir p , est égal à :

$$nb_{sol} = \frac{n!}{p!(n-p)!}.$$

Donc, pour l'exemple précédent, on a 10 solutions réalisables.

Il existe d'autres versions du problème du p -médian, où on doit prendre en considération la demande a_i du client i , la capacité p_j du site j et/ou le coût c_j d'implantation du site j .

2.3 Modélisation mathématique

Plusieurs modélisations du PMP existent dans la littérature. On cite par exemple : la modélisation classique, développée par *Revelle et Swain* (1970)[34], qui est la plus utilisée, la modélisation par les ensembles indépendants d'arcs proposée par *Avella et Sassano* (2000)[4].

On présente dans la suite la formulation classique du problème, la formulation par les ensembles indépendants d'arcs et celle utilisée par *De Farias*.

2.3.1 Formulation classique

On considère un graphe $G = (V, E)$, où V est un ensemble de n sommets et E est l'ensemble d'arcs reliant les sommets. Le graphe G est muni d'une distance d_{ij} sur tout arc $(ij) \in E$.

Il est supposé qu'un sommet ne peut pas être à la fois client et médian, et que la demande d'un client donné est satisfaite entièrement par le médian à lequel il est affecté et aucun coût n'est considéré pour l'ouverture des médians.

On définit les variables de décisions suivantes :

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{Si le client } i \text{ est affecté au médian } j. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Et,

$$y_j = \begin{cases} 1, & \text{Si le site } j \text{ est un médian.} \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Donc, la formulation mathématique classique du PMP [34] est :

$$(IP) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j=1}^n y_j = p \quad (1.1) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.2) \\ x_{ij} \leq y_j, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1.3) \\ x_{ij}, y_j \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1.4) \end{array} \right.$$

Les contraintes (1.1) limite le nombre de médians ouverts à p , les contraintes (1.2) assurent que chaque client soit servi par un unique médian, les contraintes (1.3) s'assurent que les clients soient affectés a des médians ouverts.

Cette formulation est la plus utilisée dans la littérature.

- Les contraintes (1.3) peuvent être remplacées par les contraintes

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} + y_i = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (1.5)$$

pour s'assurer qu'un sommet ne soit pas à la fois client et médian.

- De Vries et Posner dans [38], n'ont utilisé que les variables x_{ij} pour formuler le problème. Avec $x_{ii} = 1$, si le nœud i est choisis comme médian. Les contraintes (1.1) sont remplacées par $\sum_{i=1}^n x_{ii} = p$, les contraintes (1.3) sont remplacées par $x_{ij} \leq x_{ii}$, $i, j = \overline{1, n}$, et les contraintes d'intégrité de y_j sont éliminées. La formulation devient :

$$(IPV) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i \in V} x_{ii} = p \quad (1V.1) \\ \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1, \quad i = \overline{1, n} \quad (1V.2) \\ x_{ij} \leq x_{ii}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1V.3) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j = \overline{1, n} \quad (1V.4) \end{array} \right.$$

- Dans la version du PMP prenant en considération la demande a_i du client i et la capacité p_j du médian j , seule la contrainte (1.4) est remplacées par :

$$\sum_{i=1}^n a_i x_{ij} \leq p_j y_j, \quad j = \overline{1, n} \quad (1.6)$$

- Si un coût c_j d'implantation du site j est imposé, la fonction objectif devient :

$$\min \sum_{j=1}^n c_j y_j + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n d_{ij} x_{ij}.$$

On note par $PMP(G)$ le polytope des solutions réalisables de (IP).

2.3.2 Formulation par les ensembles indépendants d'arcs

Un graphe connexe peut être transformé en un graphe orienté complet. Pour deux sommets $u, v \in V$, si $(u, v) \notin E$ et $(v, u) \notin E$, alors l'arc (u, v) est inséré avec une longueur égale à celle du plus court chemin entre u et v .

Donc, on suppose que le graphe $G = (V, E)$ est un graphe orienté complet.

La formulation par les ensembles indépendants d'arcs a été développée par *Avelle et Sassano* en 2001 [4].

Dans cette formulation, on introduit les notions suivantes :

- **Tête et queue d'un arc** : Pour tout arc $(u, v) \in E$, u et v sont appelés, respectivement, "tête" et "queue" de (u, v) .
- On note $(S : T)$ l'ensemble des arcs ayant leurs têtes dans S et leurs queues dans T , où $S, T \subseteq V$.

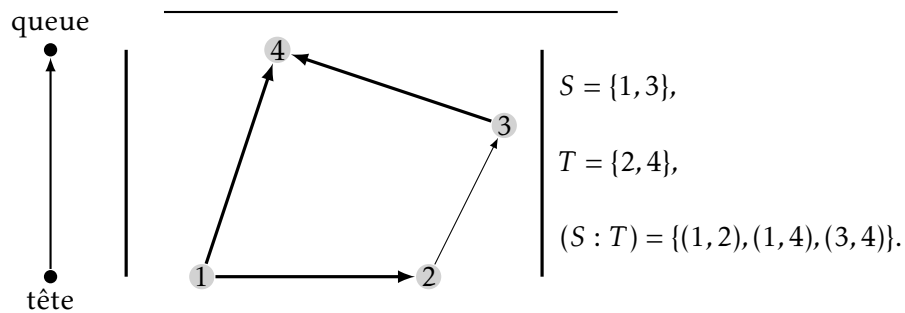


FIGURE 2.2 – Tête, queue d'un arc et l'ensemble $(S : T)$.

- On définit les ensembles : $\delta^-(S) = (V - S : S)$ et $\delta^+(S) = (S : V - S)$.
 - Pour $E' \subseteq E$, On note $x(E') = \sum_{(u,v) \in E'} x_{uv}$. Et pour $V' \subseteq V$, on note $x(V) = \sum_{i \in V'} x_{ii}$.
 - **Arcs indépendants** : Les arcs $(u, v), (w, z) \in E$ sont dits "indépendants" si et seulement si $u \neq z, v \neq w$ et $v \neq z$. En d'autres termes, $(u, v), (w, z)$ sont indépendants s'ils n'ont pas de queues communes et qu'ils ne forment pas de chemins.
- La figure 2.3 illustre un exemple d'arcs indépendants et d'arcs dépendants.

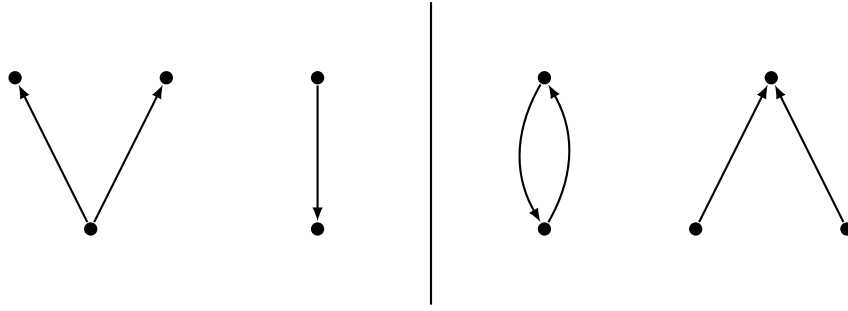


FIGURE 2.3 – Exemple d’arcs indépendants et d’arcs dépendants, respectivement.

- **Ensemble indépendant :** Soit $E' \subseteq E$, E' est dit “ensemble indépendant” si les arcs de E' sont deux à deux indépendants. C’est-à-dire, si E' contient $|E'| = k$ arcs indépendants. Alors, E' est dit “ensemble k -indépendant”.

Tout ensemble $E' \in E$, avec $|E'| = \bar{p}$, définit un ensemble $T \in V$, tel que $T = \{u \in V : \delta^-(u) \cap E' = \emptyset\}$ avec $|T| = p$. Où $E' \subseteq \delta^+(T)$ et $|\delta^-(u) \cap E'| = 1, \forall u \in V - T$.

La figure 2.4 présente un exemple d’un ensemble 6-indépendant et de l’ensemble T correspondant.

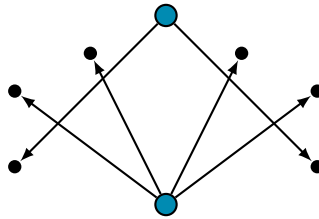


FIGURE 2.4 – Un ensemble 6-indépendant et l’ensemble de sommets T correspondant.

On remarque que la recherche d’un ensemble de p médians se ramène à la recherche d’un ensemble \bar{p} -indépendant d’arcs dans le graphe G avec la minimisation de la distance totale sur les arcs comme objectif.

Donc, le problème du p -médian peut être modélisé comme suit :

$$(IPA) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sum_{(i,j) \in E, i \neq j} d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{k \in V/j} x_{ki} + x_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in E \quad (2.1) \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \bar{p} \quad (2.2) \\ x_{ij} \in \{0,1\}, \quad i, j \in V, i \neq j \end{array} \right.$$

Où,

- $x_{ij} = 1$ si et seulement si l’arc (i, j) appartient à l’ensemble indépendant recherché.
- Les contraintes (2.1) s’assurent que les arcs choisis n’ont pas de queues communes et qu’ils ne forment pas de chemins dans G . Ces inégalités sont dites “inégalités de cliques”.
- La contrainte (2.2) limite le nombre d’arcs choisis à \bar{p} .

La solution de (IPA) est un ensemble \bar{p} -indépendant, dont l'ensemble T correspondant est l'ensemble des p médians recherchés.

Lemme 2.1. [41] (IPA) peut être dérivée de (IP).

Preuve. En utilisant les contraintes(3.1) de (IP), on obtient : $x_{jj} = 1 - \sum_{i \in V - \{j\}} x_{ij}$.

En substituant x_{jj} dans (4.1), on obtient : $\sum_{k \in V - \{j\}} x_{kj} + x_{ij} \leq 1$, i.e. (2.1).

En substituant x_{jj} dans (2.1), on obtient : $\sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \bar{p}$, i.e. (2.2).

Ainsi, (IPA) s'obtient à partir de (IP). □

On note par $M_{\bar{p}}(G)$ le polytope du p -médian défini par l'enveloppe convexe de tous les vecteurs d'incidences des ensembles \bar{p} -indépendants dans G .

2.3.3 Formulation de De Farias

Soit un graphe biparti complet $K_{m,n}$, où : $M = \{1, \dots, m\}$ est un ensemble d'entrepôts et $N = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble de clients. Le problème du p -médian considéré est de sélectionner au plus p entrepôts (médians) pour servir tous les clients avec un coût minimum. La formulation proposée par *De Farias* [15], est :

$$(IPF) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_j x_{ij} \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 \quad j \in N \quad (3.1) \\ x_{ij} \leq y_j, \quad i \in M, j \in N \quad (3.2) \\ \sum_{j=1}^n y_j \leq p, \quad (3.3) \\ x_{ij} \geq 0, \quad i \in M, j \in N \quad (3.4) \\ y_j \in \{0, 1\} \quad j \in N \quad (3.5) \end{array} \right.$$

Avec :

- $c_{ij} \geq 0$ est le coût unitaire de l'envoi du médian i au client j .
- d_j est la commande du client j .
- x_{ij} est la portion de d_j envoyé du médian i au client j .

Remarque :

La considération d'un graphe biparti complet ne cause aucune perte de généralité, puisque le PMP sur n'importe quel graphe peut être transformé en un temps polynomial en un PMP sur un graphe biparti complet lorsque tous les poids sont non-négatifs [27].

Dans le cas où on est contraint à choisir exactement p médians. Il suffit de remplacer

l'inégalité (3.1) par l'équation $\sum_{i=1}^m x_{ij} = 1, j \in N$.

On note par PS l'enveloppe convexe des solution réalisables de (IPF).

2.4 Étude de la complexité

En 1979, *Kariv* et *Hakimi* ont prouvé que la recherche des p médians dans un réseau était un problème NP-difficile, et ont proposé un algorithme pour la résolution du problème 1-médian dans un arbre, en $o(n^2p^2)$ étapes.

Pour prouver que le problème du p -médian ($p > 0$) dans un réseau est un problème NP-difficile, il suffit de prouver que ceci est vrai même lorsque le réseau est planaire, de degré maximum égal à 3, avec $d_{ij} = 1, \forall (ij) \in E$ (i.e : même lorsque le réseau a une structure très simple).

Cette preuve est basée sur le résultat de *Garey* et *Johnson* sur le problème de l'ensemble dominant défini comme suit :

“ Étant donné un graphe $G = (V, E)$ et un nombre p tel que $1 < p < n$, où $n = |V|$, existe-t-il un sous-ensemble V_p^* contenant au maximum p sommets, tel que tout sommet de G est soit dans V_p^* , soit adjacent à un sommet de V_p^* ?”

Théorème 2.1 (*Garey* et *Johnson* (1977)). *Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire de degré maximum égal à 3 et soit p un entier tel que $1 < p < n$, où $n = |V|$. Le problème de trouver s'il existe, dans G , un ensemble dominant de cardinalité p est un problème NP-complet.*

Théorème 2.2 (*Kariv* et *Hakimi* (1979)[25]). *Le problème du p -médian est NP-difficile, même dans le cas où le réseau est planaire de degré maximum égal à 3 et dont tous les arcs et les sommets sont de longueurs et de poids unitaires.*

Preuve. Soit $G = (V, E)$ un graphe planaire de degré maximum égal à 3 et dont tous les arcs et les sommets sont de longueurs et de poids unitaires, respectivement.

On a à prouver que le problème de trouver, s'il existe, un ensemble dominant de cardinal p dans G , se réduit polynomialement au problème du p -médian dans G .

Soit V_p un sous-ensemble quelconque de p sommets de V .

On définit la distance entre le sommet $v \in V$ et le sous-ensemble V_p par :

$$d(v, V_p) = \min_{u \in V_p} d(u, v).$$

Notons par $H(V_p)$ la somme de distance du sous-ensemble V_p : $H(V_p) = \sum_v d(v, V_p)$.

D'après la structure spéciale de G , on a : $H(V_p) = \sum_{v \in V} d(v, V_p) \geq n - p$.

Ainsi, s'il existe un sous-ensemble V_p^* vérifiant : $H(V_p^*) = n - p$, alors, V_p^* est un ensemble p -médian de G .

Cependant, l'équation $H(V_p^*) = n - p$ est satisfaite si et seulement si $d(v, V_p^*) = 1$, pour tous les $(n - p)$ sommets n'appartenant pas à V_p^* (i.e. si et seulement si V_p^* est un ensemble dominant de cardinalité p de G).

Et donc, il existe un ensemble dominant de cardinalité p de G , si et seulement si, $H(V_p^*)$ du p -médian V_p^* dans G est égal à $(n - p)$.

Ceci montre que le problème de trouver, s'il existe, un ensemble dominant de cardinalité

p dans G_n se réduit polynomialement au problème du p -médian dans G .

Ainsi, le problème du p -médian est NP-difficile. \square

Remarque

Considérons le problème décisionnel, dérivé du problème du p -médian, suivant :

“ Étant donné un graphe $G = (V, E)$, un entier p tel que $1 < p < n$, et $n = |V|$, et un réel positif h . Existe-t-il un sous-ensemble V_p^* de p sommets de V , tel que, $H(V_p^*) = \sum_{v \in V} d(v, V_p^*) \leq h$? ”.

Il est clair que ce problème appartient à la classe NP, et la preuve du théorème 2 implique que le problème du p -médian est NP-difficile (en posant $h = n - p$).

Il est impératif de mentionner que *Garey et Johnson* (1979)[16] ont montré que le problème du p -médian est NP-difficile pour les valeurs arbitraires de p . Et si p est fixé, alors le problème peut être résolu en un temps polynomial. Et ils ont prouvé que lorsque le graphe considéré est un arbre, et pour des valeurs arbitraires de p , le PMP est polynomial.

Aussi, *Baiou et Barahona* ont prouvé que le PMP est polynomial pour les graphes n’ayant pas comme sous graphe le graphe fourchette [8], et pour les graphes bipartis sans Y -graphe [7].

Avella et Sassano (2000)[4] ont donné une description complète du polytope du p -médian lorsque $p = n - 2$ ce qui rend le problème polynomial dans ce cas.

2.5 Approches de résolution

Depuis la définition du PMP, plusieurs méthodes ont été proposées pour sa résolution.

2.5.1 Méthodes exactes

Les méthodes exactes sont des méthodes de résolution qui donnent une garantie de trouver la solution optimale d’un problème donné.

Les méthodes exactes conçues pour le problème du p -médian sont principalement basées sur **la théorie de dualité**, **la relaxation lagrangienne** (méthode duale,), **la semi-relaxation lagrangienne** (*Beltran, Vial, Alonso*, 2010) et **l’énumération complète** (séparation-évaluation et coupes-branchements, *Järvinen et al.*(1972), *Neebe*(1978), *Ceselli*(2003)).

Ces méthodes sont efficaces pour la résolution de petites instances du PMP ou pour des cas particuliers du problème (addition de contraintes au problème original ou pour des structures spéciales du réseau).

Pour les grandes instances du problème les méthodes exactes nécessitent un temps d’exécution exponentiel, donc, l’utilisation de ces méthodes s’avère impossible et généralement on fait recours aux méthodes approchées.

2.5.2 Méthodes Heuristiques

Plusieurs heuristiques ont été proposées pour la résolution du problème du p -médian dans son cas général et parfois pour des cas particuliers du problème. Elles sont basées, principalement, sur les algorithmes suivants :

Algorithme flou (Greedy-adding algorithm) : proposé par *Kuehn et Hamburger* en 1963, démarre par un ensemble vide de médian. A chaque itération, le problème 1-médian est résolu, le médian solution est ajouté à l'ensemble des médians. Jusqu'à ce que le nombre de médian soit égal à p . Une implémentation efficace est réalisée par *Whitaker* en 1983.

Algorithme d'élimination (Stingy algorithm) : proposé par *Feldman et al* en 1966, démarre par n médians, et en élimine un par un jusqu'à ce que le nombre de médians soit réduit à p . Une implémentation est donnée par *Salhi et Ikinson* en 1995, mais qui démarre par un sous-ensemble de médians au lieu de l'ensemble entier de sommets.

Algorithme d'alternance (Alternate algorithm) : proposé par *Maranzana* en 1964. Dans la première itération, p médians sont choisis aléatoirement, les clients sont affectés au médian le plus proche, ensuite le 1-médian est résolu pour tout sous-graphe engendré par un médian et les clients qui lui sont affectés. Ceci est répété jusqu'à ce qu'il n'y est plus de changement.

Algorithme de substitution de sommets (Interchange algorithm) : proposé par *Teitz et Bart* en 1968, est utilisé fréquemment pour comparer les autres méthodes. On démarre avec un ensemble de p médians. Puis, les médians sont déplacés itérativement, un par un, vers d'autres sites à fin de réduire la valeur de la fonction objectif. Cette procédure de recherche locale s'arrête lorsqu'aucun mouvement de médian réduit la valeur de la fonction objectif. Une modification de cet algorithme générant de meilleures solutions a été proposée par *Ashayeri, Heuts, et Tammel* (2005).

Plusieurs hybridations de ces heuristiques ont été suggérées. Par exemple, dans l'heuristique G-gloutonne de *Captive* (1991), à chaque itération de l'algorithme flou, l'algorithme d'alternance est lancé. Une combinaison de l'algorithme d'alternance et celui de substitution a été proposée par *Pizzolato* (1994). *Moreno-Pérez et al* (1991), ont comparé une variante de l'algorithme d'élimination avec l'heuristique G-gloutonne et un multistart algorithme d'alternance. *Salhi* (1997) a décrit une heuristique de perturbation, où l'algorithme d'élimination et l'algorithme flou sont lancés l'une après l'autre avec un nombre fixé d'itérations. La combinaison de l'algorithme flou avec l'algorithme de substitution, où la solution construite par l'algorithme flou est la solution initiale de l'algorithme de substitution. Cette combinaison est souvent comparée avec de nouvelles méthodes.

2.5.3 Méthodes métaheuristiques

Plusieurs métaheuristiques ont été proposées pour la résolution du PMP. Elles utilisent, toutes, une ou bien une combinaison des méthodes suivantes (pour chaque métaheuris-

tique la date et les auteurs de la première utilisation sont mentionnés) :

Les heuristiques Lagrangiennes (*Cornuejols et al, 1977*).

Les algorithmes génétiques (*Hosage et Goodchild, 1986*).

La recherche Taboue (*Glover 1989, 1990*).

Optimisation par colonies de fourmis (*Colorni et al, 1991*).

La recherche locale (*Hansen et Mladenovi c, 1997*).

Algorithme de concentration (*Rosing and ReVelle, 1997*).

La recherche dispersée (*Glover et al, 2000*).

Réseaux de neurones (*Dominguez Merino et Munoz Pérez 2002*).

Plusieurs documents listent les différents algorithmes conçus pour la résolution du PMP, on cite par exemple [37].

Les métaheuristiques étant les méthodes les plus utilisées dans la littérature pour la résolution du problème du p -médian, le lecteur est appelé à consulter [33] et [31] pour plus de détails.

D'après les recherches effectuées entre 1965 et 2005, la relaxation Lagrangienne était la méthode la plus utilisée, suivie respectivement par la substitution des sommets, l'algorithme d'approximation, l'algorithme génétique, la formulation IP (*Hakimi, 1964. ReVelle et Swain, 1970*) et la théorie des graphes.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons défini le problème du p -médian, présenté les formulations classiques les plus utilisées dans la littérature, étudié son complexité et list  les principales méthodes exactes et approchées décrites et utilisées pour la résolution du problème.

Nous présentons, dans le prochain chapitre, les principales études polyédrales associées au problème du p -médian.

references

Étude polyédrale du problème p -médian

chapter.3

3.1	Introduction	25
3.2	Préliminaires de l'étude polyédrale	26
3.2.1	Polyèdres, polytopes et dimension	26
3.2.2	Faces et facettes	27
3.2.3	Rayons et rayons extrêmes	28
3.3	Propriétés du polytope du p -médian	28
3.3.1	Cas général de graphes	28
3.3.2	Cas particulier de graphes : les arbres	32
3.4	Inégalités valides et facettes	34
3.4.1	W_2 -inégalités	34
3.4.2	Inégalités de couverture	36
3.4.3	Inégalités de I^* -couverture	38
3.4.4	Inégalités de trou-pair	39
3.4.5	Inégalités de cycle	40
3.4.6	Inégalités de cycle-impair	40
3.4.7	W_q -inégalités	41
3.4.8	Inégalités de De Vries	41
3.4.9	Inégalités de De Farias	42
3.5	Conclusion	44

3.1 Introduction

L'idée principale de l'approche polyédrale est de ramener le problème d'optimisation combinatoire en question à la résolution d'un programme linéaire, par la description de l'enveloppe convexe de ses solutions par un système d'inégalités linéaires. Cette approche, qui a été introduite par les travaux d'*Edmonds* sur le problème du couplage, et a été appliquée par la suite avec succès à plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire.

L'approche polyédrale peut être considérée également dans le cadre plus général des méthodes de coupes en programmation en nombres entiers. Les algorithmes basés sur les techniques polyédrales sont généralement connus sous le nom d'algorithme de coupes et de branchements (Branch-Cut algorithms).

Une étape cruciale dans la méthode polyédrale concerne l'identification des contraintes qui définissent des hyperplans d'appui (facettes) du polyèdre des solutions ce qui ramène le problème à l'optimisation d'une fonction linéaire sur ce polyèdre. Si le problème est NP-difficile, il y a généralement très peu d'espoir d'obtenir une caractérisation complète de ces contraintes. Cependant, une description partielle du polyèdre peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polynomial, même si le nombre de contraintes de cette description partielle est exponentiel.

Effectivement, malgré le fait que le problème p -médiann soit largement étudié en Recherche Opérationnelle, les études polyédrales de ce problème sont rares dans la littérature et aucune description complète du polytope p -médiann n'est obtenue. Cependant, une description partielle de son polytope entier a été établie. Les facettes ont été développées par *de Vries et al*, *Avella et Sassano*, *De Farias*, *Zhao et Posner* (voir la section 3 de ce chapitre).

Pour le problème 2-médiann dans un arbre, *Goemans* a développé une formulation étendue entière. Puis, il a trouvé une description complète en faisant sortir les variables supplémentaires introduites pour créer la formulation étendue. Pour la même variante, *Zhao et Posner*, ont établi une classe d'inégalités valides, et proposent une approche alternative pour montrer l'intégrité de la description polyédrale.

La première section de ce chapitre on définit quelques notions de bases de l'étude polyédrale. Dans la deuxième section, on présente les propriétés basiques du polytope du p -médiann décrites par *De Farias, Avella et Sassano* pour le cas d'un graphe général et pour le cas d'arbres. Dans la troisième section on cite les inégalités valides et les facettes décrites dans la littérature.

3.2 Préliminaires de l'étude polyédrale

Dans cette section, on introduit quelques définitions et propriétés de la théorie des polyèdres. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer à Pulleyblank [32] et à Schrijver [36].

3.2.1 Polyèdres, polytopes et dimension

Définition 3.1. Soit $x \in \mathbb{R}^n$. On dit que x est une “combinaison linéaire” des points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ s'il existe k scalaires $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ tels que $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$.

Si, de plus, $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors, on dit que x est une “combinaison affine” de ces points.

De même, si $\lambda_i \geq 0, \forall i \in \{1, \dots, k\}$ avec $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, alors on dit que x est une “combinaison convexe” de ces points.

Définition 3.2. Les points $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ sont dits “linéairement indépendants” (resp. “affinement indépendants”) si le système :

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0$$

$$\left(\text{resp. } \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^k \lambda_i = 0 \right)$$

admet une solution unique, $\lambda_i = 0, \forall i = 1, \dots, k$.

Définition 3.3. Etant donné un système fini d'inégalités linéaires $Ax \leq b$, où, A est une matrice à m lignes et n colonnes, b est un vecteur à m éléments.

- On appelle “polyèdre” P l'ensemble des solutions de ce système d'inégalités. C'est-à-dire $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$. On dit que l'ensemble des inéquations $Ax \leq b$ représente ou définit le polyèdre P .
- Si le polyèdre P est borné (C'est-à-dire, $\exists l, u \in \mathbb{R}^n \mid l \leq x \leq u, \forall x \in \mathbb{R}^n$), alors P est un “polytope”.
- La “dimension” du polyèdre P , notée $\dim(P)$, est égale à k si le nombre maximum de points de P affinement indépendants est égal à $k + 1$. P est de “pleine dimension” si $\dim(P) = n$.
- Un point $x \in \mathbb{R}^n$ est un “point extrême” d'un polyèdre P s'il ne peut s'écrire comme combinaison convexe d'autres points de P .

Définition 3.4. Soit P un ensemble non vide de points de \mathbb{R}^n . “L'enveloppe convexe” des points de P , notée $\text{conv}(P)$, est l'ensemble de points de \mathbb{R}^n qui peuvent s'écrire comme combinaison convexe de points de P .

Théorème 3.1 (Minkowski-Weyl). Toute enveloppe convexe peut être décrite par un ensemble fini d'équations et d'inéquations linéaires.

3.2.2 Faces et facettes

Définition 3.5. Soit l'inégalité (I) définie par : $a^T x \leq \alpha$, où a est un vecteur à n composantes et α un scalaire.

- ▶ (I) est dite "valide" pour un polyèdre P si elle est vérifiée par tous les points de P , soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid a^T x \leq \alpha\}$.
- ▶ Etant donné un point $x^* \in P$, On dit que l'inégalité (I) est "serrée" (resp. "lâche") pour x^* si $a^T x^* = \alpha$ (resp $a^T x^* < \alpha$).
- ▶ Soit (I) une contrainte valide pour le polyèdre P . Alors le sous-ensemble $F \subseteq P$ défini par $F = \{x \in P \mid a^T x = \alpha\}$ est une "face" de P . On dit alors que la face F est définie (ou induite) par la contrainte (I).
- ▶ Si, de plus, $F \neq \emptyset$ et $F \neq P$ alors F est une "face propre". Et si de plus, que $\dim(F) = \dim(P) - 1$, alors F est une "facette".

Définition 3.6. Une inégalité est dite "redondante" dans un système $Ax \leq b$ définissant un polyèdre P , si le sous-système obtenu à partir de $Ax \leq b$ en supprimant cette inégalité définit le même polyèdre P .

Proposition 3.1. Une inégalité $a^T x \leq \alpha$ est valide pour P si et seulement si elle est valide pour $\text{conv}(P)$.

Proposition 3.2. Pour chaque facette F de P , une des inéquations représentant F est nécessaire dans la description de P .

Toute inéquation représentant une face F telle que $\dim(F) < \dim(P) - 1$ est inutile dans la description de P .

Théorème 3.2. Un polyèdre P de dimension $n - k$, avec $k > 0$, est représenté par un ensemble de k équations qui forment un ensemble maximal d'équations linéairement indépendantes de P et d'une inéquation par facette.

Il existe une infinité de représentations pour une même facette, et donc, une infinité de descriptions pour un même polyèdre. Le théorème suivant décrit la famille d'inéquations linéaires nécessaires à la représentation d'une facette.

Théorème 3.3. Soit $A^{\bar{}}x = b^{\bar{}}$ un système de p équations linéairement indépendantes décrivant un polyèdre $P \subseteq \mathbb{R}^n$ et soit $F = \{x \in P : cx = c_0\}$ une face propre de P .

Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. F est une facette de P .
2. si $fx = f_0$ pour tout x vérifiant $cx = c_0$, alors, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\lambda \in \mathbb{R}^p$ tels que $(f, f_0) = (\alpha c + \lambda A^{\bar{}}, \alpha c_0 + \lambda b^{\bar{}})$.

Corollaire 3.1. Si P est un polyèdre de pleine dimension, alors il existe un système linéaire minimal unique (à des multiplications par des scalaires positifs près) qui décrit P . De plus, toute contrainte de ce système définit une facette distincte de P .

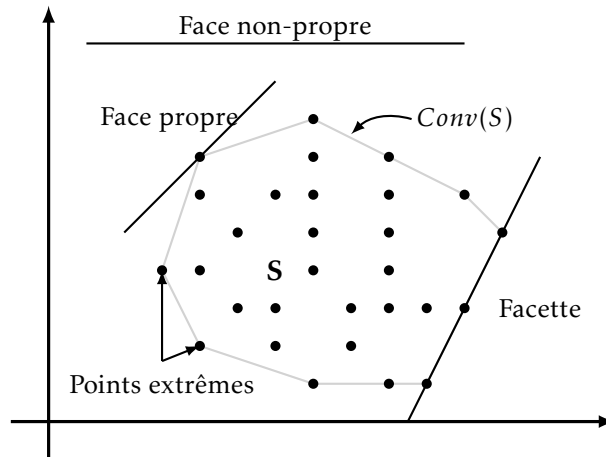


FIGURE 3.1 – Enveloppe convexe, face, facette et point extrême du polytope de solutions réalisables S .

3.2.3 Rayons et rayons extrêmes

Définition 3.7. Soit $P^0 = \{r \in \mathbb{R}^n : Ar \leq 0\}$. Les points de P^0 sont appelés “rayons” de P . Il est facile de voir qu’un point $r \in \mathbb{R}^n$ est un rayon de P si et seulement si pour tout point $x \in P$, $\{y \in \mathbb{R}^n : y = x + \lambda r, \lambda \in \mathbb{R}_+\} \subseteq P$.

Définition 3.8. Un rayon r de P est dit “rayon extrême” s’il n’existe pas deux rayons $r^1, r^2 \in P^0, r^1 \neq \lambda r^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}_+$ tels que $r = \frac{1}{2}r^1 + \frac{1}{2}r^2$.

3.3 Propriétés basiques du polytope du p -médian

On présente les caractérisations du polytope du p -médian données par Avella et Sassano dans [4] sur le modèle (IPA), et par De Fariás dans [15] sur le modèle (IPF).

3.3.1 Cas général de graphes

Nous rappelons que le polytope PS est l’enveloppe convexe des solutions réalisables de (IPF) :

$$(IPF) \left\{ \begin{array}{ll} \min \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} d_j x_{ij} & \\ \sum_{i=1}^m x_{ij} = 1 & j \in N \quad (3.1) \\ x_{ij} \leq y_j, & i \in M, j \in N \quad (3.2) \\ \sum_{j=1}^n y_j \leq p, & (3.3) \\ x_{ij} \geq 0, & i \in M, j \in N \quad (3.4) \\ y_j \in \{0, 1\} & j \in N \quad (3.5) \end{array} \right.$$

Avec :

- $M = \{1, \dots, m\}$ est un ensemble d'entrepôts et $N = \{1, \dots, n\}$ est un ensemble de clients.
- $c_{ij} \geq 0$ est le coût unitaire de l'envoi du médian i au client j .
- d_j est la commande du client j .
- x_{ij} est la portion de d_j envoyé du médian i au client j .

On note : $S = \{(x, y) : (x, y) \text{ satisfait (1)–(5)}\}$, $PS = \text{Conv}(S)$, et $LPS = \{(x, y) : (x, y) \text{ satisfait (1)–(4) et } y \in [0, 1]^m\}$.

Lorsque $p \geq m$, la contrainte (3.3) est redondante, et l'ensemble de solutions réalisables de (IPF) devient celui du "problème de localisation sans capacités", dont le polytope a reçu une attention considérable (consulter par exemple [6,7,10-12,14,23,26]).

Donc, Pour PS , on suppose que $1 \leq p \leq m - 1$.

Proposition 3.3. *PS est de dimension pleine [15].*

En conséquence, la représentation en inégalités des facettes de PS est unique, à une constante multiplicative.

De plus,

Proposition 3.4. *$(x, y) \in \{0, 1\}^{m+n}$, pour tout sommet de PS [15].*

Proposition 3.5. *Les inégalités (2)–(4) sont définissantes de facettes de PS , $\forall i \in M, j \in N$.*

Et pour $i \in M, j \in N$, les inégalités $y_i \leq 1$ et (1) sont définissantes de facettes pour PS si et seulement si, $p \geq 2$ [15].

► Ces inégalités sont des inégalités triviales.

Comme dans [6], elles donnent une description complète de PS lorsque $m \leq 2$ ou $n \leq 2$.

Dans la suite, on montre que c'est toujours le cas pour $p = 1$.

Théorème 3.4. *Lorsque $p = 1$, $PS = LPS$ [15].*

Dans la preuve du théorème 3.4, on suppose que $\sum_{i=r}^s a_i = 0$ lorsque $s < r$ et que $[l, u] = \emptyset$ lorsque $l > u$.

Preuve.

– Nous montrons qu'un point fractionnaire $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in LPS$ ne peut pas être un sommet de LPS lorsque $p = 1$, en générant une séquence de nombres non-négatifs $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ et des points de LPS , $(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1), (\tilde{x}^2, \tilde{y}^2), \dots, (\tilde{x}^k, \tilde{y}^k)$, tels que :

$$\sum_{t=1}^k \lambda_t = 1 \quad (\text{PS1})$$

$$\text{et } \sum_{t=1}^k \lambda_t (\tilde{x}^t, \tilde{y}^t) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \quad (\text{PS2})$$

– Soit $\lambda_1 = \min\{\tilde{x}_{ij} : i \in M, j \in N, \text{ et } \tilde{x}_{ij} > 0\}$. Soit $i_1 \in M$ tel que $\tilde{x}_{i_1 j} = \lambda_1$ pour un $j \in N$ (dans le cas où il existe plusieurs $i \in M$ satisfaisant $\tilde{x}_{ij} = \lambda_1$, on en choisit un arbitrairement).

► $(\tilde{x}^1, \tilde{y}^1)$ est donné par :

$$\tilde{x}_{ij}^1 = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = i_1, j \in N, \text{ et } \tilde{x}_{ij} > 0. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Et,

$$\tilde{y}_i^1 = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = i_1. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

– Pour $2 \leq r \leq s-1$, soit $\lambda_r = \min\{\tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{r-1} \tilde{x}_{ij}^t : i \in M, j \in N \text{ et } \tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{r-1} \tilde{x}_{ij}^t > 0\}$, où s est tel

que : $\tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{s-2} \tilde{x}_{ij}^t > 0$ pour un $i \in M, j \in N$ et $\tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{s-1} \tilde{x}_{ij}^t = 0, \forall i \in M, j \in N$.

Soit $i_r \in M$ tel que $\tilde{x}_{i_r j} - \sum_{t=1}^{r-1} \tilde{x}_{i_r j}^t = \lambda_r$ pour un $j \in N$. (dans le cas où il y a plusieurs $i \in M$

satisfaisant $\tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{r-1} \tilde{x}_{ij}^t = \lambda_r$, on en choisit un arbitrairement).

► Et $(\tilde{x}^r, \tilde{y}^r)$ est donné par :

$$\tilde{x}_{ij}^r = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = i_r, j \in N, \text{ et } \tilde{x}_{ij} - \sum_{t=1}^{r-1} \tilde{x}_{ij}^t > 0. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Et,

$$\tilde{y}_i^r = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = i_r. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

– Pour $s \leq v \leq k-1$, soit $\lambda_v = \min\{\tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{v-1} \lambda_t \tilde{y}_i^t : i \in M, j \in N, \text{ et } \tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t \tilde{y}_i^t = 0\}$, où k est

tel que : $\tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{k-2} \lambda_t \tilde{y}_i^t > 0$ pour un $i \in M$ et $\tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t \tilde{y}_i^t = 0, \forall i \in M$.

Soit $i_v \in M$ tel que $\tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{v-1} \lambda_t \tilde{y}_i^t = \lambda_v$. (dans le cas où il y a plusieurs $i \in M$ satisfaisant

$\tilde{y}_i - \sum_{t=1}^{v-1} \lambda_t \tilde{y}_i^t = \lambda_v$, on en choisit un arbitrairement).

► Et $(\tilde{x}^v, \tilde{y}^v)$ est donnée par :

$$\tilde{x}^v = 0$$

Et,

$$\tilde{y}_i^v = \begin{cases} 1, & \text{Si } i = i_v. \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

– Finalement, soit $\lambda_k = 1 - \sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t$, et $(\tilde{x}^k, \tilde{y}^k) = (0, 0)$. Il en résulte que $\sum_{t=1}^{k-1} \lambda_t = \sum_{i=1}^m \tilde{y}_i$.

✓ Puisque $p = 1$, (3.3) implique que $\lambda_k \geq 0$, et que (PS1) est satisfaite. Aussi, par construction, (PS2) est satisfaite. \square

Nous notons $M_p(G)$ l'enveloppe convexe des solutions réalisables de (IPA), i.e. l'enveloppe convexe de tous les vecteurs d'incidences des ensembles d'arcs \bar{p} -indépendants de G . Où :

$$(IPA) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i=1}^n \sum_{(i,j) \in E, i \neq j} d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{k \in V/j} x_{ki} + x_{ij} \leq 1 \quad (i,j) \in E \quad (2.1) \\ \sum_{(i,j) \in E} x_{ij} = \bar{p} \quad (2.2) \\ x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad i, j \in V, i \neq j \end{array} \right.$$

D'après [4], on observe que le polytope du p -médian $M_p(G)$ est une partie intégrale du polytope stable $STAB(G_n)$ associé à un graphe non-orienté $G_n(X, J)$, où tout noeud de X correspond à un arc de G , et deux noeuds de X sont adjacents dans G_n si et seulement si les arcs correspondants dans G sont dépendants.

Et donc :

$$M_p(G) = \text{Conv}(\{x \in STAB(G_n) : \sum_{i \in X} x_i = \bar{p}\} \cap \{0, 1\}^{|X|}).$$

Cette caractérisation de $M_p(G)$ est particulièrement utile puisque le polytope $STAB(G_n)$ contient $M_p(G)$, et plusieurs classes de facettes ont été décrites et efficacement utilisées dans les approches basées sur le branchement et l'évaluation. Elle a été utilisée dans plusieurs articles et travaux pour obtenir des résultats polyédraux pour le problème de localisation non-pondérée.

Théorème 3.5. *Si $p \geq 2$, la dimension de $M_p(G)$ est " $n(n-1)-1$ " [4].*

Preuve.

► On note par :

- $E_{r,s}$: la (r, s) -matrice dont tous les éléments sont égaux à 1.
- $0_{r,s}$: la (r, s) -matrice dont tous les éléments sont égaux à 0.
- $E_r = E_{r,r}$ et $0_r = 0_{r,r}$.
- I_r : la matrice d'identité d'ordre r .

– Soit $p \geq 2$. Pour montrer que $\dim(M_p(G)) = n(n-1)-1$, on doit trouver $n(n-1)$ ensembles \bar{p} -indépendants dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants.

– Soit $u \in V$ et soit $\delta^+(u) = \{e_1, e_2, \dots, e_n - 1\}$.

Puisque $p \geq 2$, on peut définir l'ensemble $J = \{e_1, \dots, e_{\bar{p}+1}\} \subseteq \delta^+(u)$. Et pour chaque $k \in \{1, 2, \dots, \bar{p} + 1\}$, l'ensemble $J - \{e_k\}$ est un ensemble \bar{p} -indépendant. On note par V_1 l'ensemble $\{J - \{e_k\} : k = 1, 2, \dots, \bar{p} + 1\}$.

– Pour chaque $h = 1, 2, \dots, p-2$, l'ensemble $J_k = J - \{e_{\bar{p}}, e_{\bar{p}+1}\} \cup \{e_{\bar{p}+1+h}\} \subset \delta^+(u)$ est un ensemble \bar{p} -indépendant. On note par V_2 l'ensemble $\{J_h : h = 1, 2, \dots, p-2\}$.

► Ainsi, on définit une famille $V_u = V_1 \cup V_2$ contenant $(n-1)$ ensembles \bar{p} -indépendants.

– Soit T_u la $(n-1, n-1)$ -matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidence des ensembles indépendants de V_u sur $\delta^+(u)$.

Si les $(\bar{p}+1)$ premières lignes de T_u sont les vecteurs d'incidence des ensembles indépendants de V_1 . Donc, la matrice T_u est :

$$T_u = \begin{bmatrix} E_{\bar{p}+1} - I_{\bar{p}+1} & 0_{\bar{p}+1, p-2} \\ H & I_{p-2} \end{bmatrix}$$

Où,

$$H = \begin{bmatrix} E_{p-2, \bar{p}-1} & 0_{p-2, 2} \end{bmatrix}.$$

► Il est facile de remarquer que T_u n'est pas singulière.

– Ainsi, pour chaque noeud $u \in v$, on peut construire une famille V_u de $(n-1)$ ensembles \bar{p} -indépendants de l'ensemble $\delta^+(u)$ et lui associer une matrice non singulière T_u dont l'ensemble de lignes est formé par les vecteurs d'incidence des ensembles indépendants de V_u .

Puisque l'ensemble E peut être partitionné en ensembles $\{\delta^+(u) : u \in V\}$, on peut construire une famille de $n(n-1)$ ensembles \bar{p} -indépendants dont les vecteurs d'incidence, sur A , définissent la matrice carrée d'ordre " $n(n-1)$ " suivante :

$$M = \begin{bmatrix} T_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & T_n \end{bmatrix}$$

✓ La matrice M est non singulière. Donc, $M_p(G)$ est de dimension égale à $n(n-1) - 1$.

□

3.3.2 Cas particulier de graphes : les arbres

Dans cette partie, on considère le problème du p -médian défini sur un arbre non orienté $G = (V, E)$.

• On note $\tau(i, j)$ le chemin reliant i à j , $i, j \in V$. Donc, la contrainte suivante s'impose :

$$x_{ij} \leq x_{rj} \quad i, j \in V \text{ et } r \in \tau(i, j).$$

• Soit $P(V)$ le polytope défini par :

$$P(V) = \begin{cases} \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, & i \in V \\ x_{ij} \leq x_{rj} & i, j \in V \text{ et } r \in \tau(i, j). \\ x \geq 0 \end{cases}$$

• Soit $Q_p = P(V) \cap \{x \mid \sum_{j \in V} x_{jj} = p\}$, le polytope des solutions réalisables de la relaxation linéaire du PMP.

- Barany et al ont montré, dans [10], que les points extrêmes de $P(V)$ sont entiers. Cependant, De Vries et Posner ont montré que Q_p a au moins un point extrême fractionnaire.

Théorème 3.6. Pour tout arbre ayant au moins 4 sommets, Q_p a un point extrême fractionnaire [10].

- Maintenant, on présente quelques propriétés décrites par Ward et al. dans [39], et De Vries et Posner dans [38].

Pour des démonstrations détaillées, le lecteur est invité à consulter les références citées.

Propriété 3.1 (Ward et al.). Soit x^0 un point extrême de Q_p . x^0 est soit un point extrême de $P(V)$ soit une combinaison convexe de deux points extrêmes adjacents x^A et x^B , de $P(V)$. Si x^0 n'est pas un point extrême de $P(V)$, alors, $|\sum_{i \in V} x_{ii}^0 - \sum_{i \in V} x_{ii}^A| > 0$ et $|\sum_{i \in V} x_{ii}^0 - \sum_{i \in V} x_{ii}^B| > 0$. De plus, si p est entier, alors, $|\sum_{i \in V} x_{ii}^B - \sum_{i \in V} x_{ii}^A| \geq 2$ [39].

Propriété 3.2. On considère un point extrême $x^0 \in Q_p$ ayant un ensemble de médians entiers I ($x_{ii} = 1, \forall i \in I$).

Soit $E' = \{(i, j) \in E \mid i, j \in \tau(i', j'), 1 > x_{i'j'}^0, i, j, i', j' \in V\}$. Donc, au plus une composante connexe de la forêt $T' = (V \setminus I, E')$ contient un médian fractionnaire ($0 < x_{ii} < 1$)[38].

- Bien que le théorème 3.6 prévoit que Q_p peut ne pas être entier, il existe deux types de graphes pour lesquels des solutions entières de LP existent.

Théorème 3.7 (De Vries et Posner [38], Kolen and Tamir [26]). Si T est un chemin, alors, Q_p est entier.

- On considère un arbre T contenant un seul sommet c , dit "sommet centrale", de degré $d \geq 3$. Tout chemin de c vers une feuille de T contient au plus m sommet. Ce graphe est dit " m -star ".

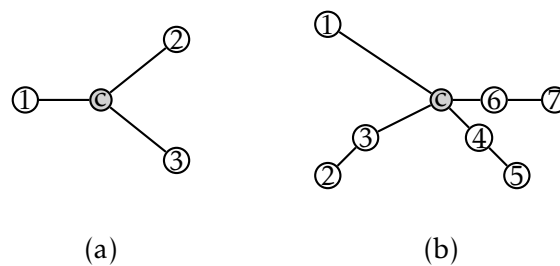


FIGURE 3.2 – exemples de graphe 1-star (a) et 2-star (b)

Théorème 3.8. Si le graphe G est un 1-star, alors, Q_p est un polytope entier[38].

- On établit dans le théorème suivant, que pour tout autre type d'arbres, toutes les solutions optimales de LP peuvent être fractionnaires.

Théorème 3.9. Les seuls arbres où Q_p est entier, sont les chemins et les 1-stars[38].

- Pour $p = 2$, Goemans [21], a établi une description complète (LP2) du polytope du p -médian :

$$(LP2) \begin{cases} \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, & i \in V & (P2,1) \\ \sum_{i \in V} (d_i - 2)x_{ij} + x_{jj} = 0, & j \in V & (P2,2) \\ x_{ij} - x_{rj} \leq 0, & i, j \in V, r \in \tau(i, j) & (P2,3) \end{cases}$$

Les contraintes de non-négativité et les contraintes de cardinalité ne font pas partie de (LP2), elles sont induites par (P2,2).

Théorème 3.10. *Toute solution réalisable de (LP2) est non-négative.*

Théorème 3.11. *Toute solution x de (LP2) satisfait $\sum_{j \in V} x_{jj} = 2$.*

Le théorème suivant témoigne que le polytope (LP2) est entier.

Théorème 3.12. *Soit x^0 une solution correspondant à un point extrême de (LP2). Alors, x^0 est entière.*

- On a que :

Théorème 3.13. *Pour un graphe de structure générale, il existe une solution optimale x^* pour (IPV) ou (LP) où $x_{il}^* = 0$ pour tout $l \in V$ tel que $d_l = 1$ et $i \neq l$.*

Le théorème précédent implique qu'on peut rajouter la contrainte suivante à (LPV) :

$$x_{il} = 0, i \in V, l \text{ feuille et } i \neq l. \quad (\mathbf{V1})$$

Soient $\hat{P}(V) = \hat{P} = P \cap \{x \mid x \text{ satisfait } (\mathbf{V1})\}$ et $\hat{Q}_p = \hat{P} \cap \{x \mid \sum_{j \in V} x_{jj} = p\}$.

On remarque que si Q_p est entier, alors, \hat{Q}_p est entier. l'inverse n'est pas toujours vrai. De plus,

Théorème 3.14. *\hat{Q}_p est entier pour toute valeur de p , si et seulement si, G est un 1-star.*

ET,

Théorème 3.15. *Si G est un 2-star (voir Figure 3.2), alors, $\hat{Q}_p \cap \{x_{cc} = 1\}$ est entier. Où, c est un sommet centrale de G .*

3.4 Inégalités valides et facettes pour le polytope du p -médian

Plusieurs études polyédrales du problème du p -médian ont été effectuées depuis son apparition. Mais aucune d'entre elles n'a abouti à une description complète de son polytope entier. Cependant, des descriptions partielles ont été proposées.

Dans cette section, on présente un ensemble d'inégalités valides et de facettes développées pour le polytope du p -médian dans son cas général.

3.4.1 W_2 -inégalités

Les W_2 -inégalités ont été décrites par Avella et Sassano dans [4], pour le polytope $M_p(G)$, où $G = (V, E)$ est un graphe complet.

- Soit $W \subseteq V$ tel que $3 \leq |W| \leq \bar{p} + 1$.
- Soit $H \subset (W : W)$ un ensemble d'arcs ayant la propriété suivante : $|H \cap \delta^+(w)| = 1, \forall w \in W$. Cet ensemble est dit "ensemble d'arcs perdus".
- Soient $U = \{w \in W \mid H \cap \delta^-(w) = \emptyset\}$, $Q = W \setminus U$, et $\bar{W} = V \setminus W$.

Théorème 3.16. Une W_2 -inégalité est une inégalité de la forme :

$$x((W : W) \setminus H \cup (U : \bar{W})) \leq |W| - 2 \quad (\text{II})$$

Et est valide pour le $M_p(G)$, si et seulement si $|U| \leq \max\{1, |W| - 3\}$ [41].

Preuve. On suppose, au contraire, que (II) n'est pas valide pour $M_p(G)$ et on considère Y un ensemble $(|W| - 1)$ -indépendant de W .

Proposition 3.6. Soient $Z \subset V$ et $J \subset (Z : Z)$ tels que $|J \cap \delta^+(z)| = 1, \forall z \in Z$. Alors, $r((Z : Z) \setminus J) \leq |Z| - 2$.

Preuve de la proposition 3.6. On suppose que la proposition est fautive et on considère X un ensemble $(|Z| - 1)$ -indépendant de l'ensemble $(Z : Z) \setminus J$.

Soit $R = \{z \in Z \mid X \cap \delta^-(z) \neq \emptyset\}$. Evidemment, on a $|R| = |Z| - 1$.

Soit $\{u\} = Z \setminus R$. On a que $|(\{u\} : R) \cap X| = |Z| - 1$, qui contredit la supposition que $|J \cap \delta^+(z)| = 1, \forall z \in Z$. ◆

Proposition 3.7. $r(\bar{W} : U) \leq |W| - 2$.

Preuve de la proposition 3.7. On remarque que $r(\bar{W} : U) = |U|$.

Puisque, $|H \cap \delta^+(w)| = 1$, pour tout $w \in W$: On a au moins deux noeuds de W , soient u et z , tels que $|H \cap \delta^-(u)| \geq 1$ et $|H \cap \delta^-(z)| \geq 1$.

Et donc, $r(\bar{W} : U) = |U| \leq |W| - 2$. ◆

- En appliquant la proposition 3.6 avec $Z = W$ et $J = H$. On conclut que $Y \not\subset (W : W) \setminus H$. De plus, d'après la proposition 3.7, on a $Y \not\subset (\bar{W} : U)$. Et donc, $Y \cap (W : W) \setminus H \neq \emptyset$ et $Y \cap (\bar{W} : U) \neq \emptyset$.
- Y peut être partitionné en deux sous-ensembles Y_1 et Y_2 , avec $Y_1 = Y \cap (W : W) \setminus H$ et $Y_2 = Y \cap (\bar{W} : U)$.
- Soit $T = \{t \in W \mid Y_2 \cap \delta^-(t) \neq \emptyset\}$. Alors, $Y_1 \subseteq (W \setminus T : W \setminus T) \setminus H$ et donc, $r((W \setminus T : W \setminus T) \setminus H) \geq |Y_1|$. De plus, puisque $|Y_2| = |T|$, on a $|Y_1| = |W| - 1 - |T| = |W \setminus T| - 1$.
- Or, par hypothèse, il est vrai que $H \cap \delta^-(t) = \emptyset, \forall t \in T$ et donc l'ensemble $H' = H \cap (W \setminus T : W \setminus T)$ vérifie la propriété que $|H' \cap \delta^+(u)| = 1$, pour tout noeud $u \in W \setminus T$.
- ✓ En posant, $Z = W \setminus T$ et $J = H'$. On a, par la proposition 3.6 que $r((W \setminus T : W \setminus T) \setminus H') \leq |W \setminus T| - 2$. Ce qui contredit l'hypothèse de départ. □

Le théorème suivant donne une condition nécessaire et suffisante pour que l'inégalité (II) définisse une facette pour $M_p(G)$.

Théorème 3.17. Soit $3 \leq |W| \leq \bar{p} + 1$. L'inégalité **(I1)** définit une facette pour $M_p(G)$ si et seulement si $|U| \leq \max(1, |W| - 3)$.

La preuve de ce théorème est bien illustré dans [4].

► Avella et Sassano dans [5], ont amélioré les W_2 -inégalités en :

$$x(((U : U) \cup (Q : U)) \setminus H) - \sum_{i \in U} y_i \leq |W| - |U| - 2 \quad \text{(II')}$$

► Si $|W| = 3$, l'ensemble des arcs perdus H peut avoir soit la forme $\{(u, v), (v, z), (z, v)\}$, soit la forme $\{(u, v), (v, z), (z, u)\}$.

- Si $H = \{(u, v), (v, z), (z, v)\}$, le support de **(I1)** est $Q_{vz} = \delta^-(u) \cup \{(u, z)\}$.
- Si $H = \{(u, v), (v, z), (z, u)\}$, le support de **(I1)** est $T = \{(v, u), (u, z), (z, v)\}$.

Il peut être prouvé qu'un ensemble $S \subseteq E$ vérifiant la propriété $r(S) = 1$ est maximal, si et seulement si, $S = Q_{vz}$ ou $S = T$.

Les inégalités $x(Q_{vz}) \leq 1$ sont dites "inégalités de clique", et les inégalités $x(T) \leq 1$ sont dite "inégalités de triangle". Une représentation de ces inégalités est donnée par la figure Figure 3.3.

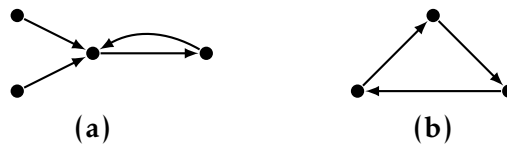


FIGURE 3.3 – Une inégalité de clique (a) et une inégalité de triangle (b).

Les W_2 -inégalités comprennent des familles d'inégalités valides bien connues pour le PMP, telles que : les inégalités de cliques, les inégalités de trou pair, les inégalités d'anti-trou pair, les inégalités de triangle , etc ...

3.4.2 Inégalités de couverture

– Etant donné un ensemble de référence A , un "désordre" (clutter) \mathcal{L} est une collection de sous ensembles de A tels que, pour toute paire de sous-ensembles distincts, L_1 et L_2 , de \mathcal{L} , on a $L_1 \not\subseteq L_2$.

8item Une "couverture" T , par rapport à \mathcal{L} , est un sous ensemble de A vérifiant $|T \cap L| \geq 1$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.

– Pour tout $S \subset E$, $r(S)$ est le rang de S .

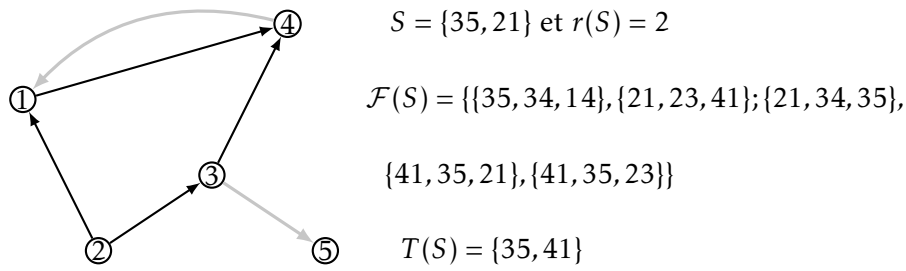
Soit $\mathcal{F}(S)$ le désordre défini par tous les sous-ensembles \bar{p} -indépendants de E contenant $r(S)$ arcs de S . Soit $T(S)$ la couverture de $\mathcal{F}(S)$.

Toute inégalité de la forme :

$$x(S) - x(T(S)) \leq r(S) - 1 \quad \text{(I2)}$$

est une inégalité de couverture.

A fin d'expliquer ces notions, un exemple est illustré dans la figure Figure 3.4 sur le graphe $G = (V, E)$ (V est l'ensemble de sommets et E est l'ensemble d'arcs).



(I2) est donc : $x_{21} - x_{41} \leq 1$

FIGURE 3.4 – Exemple d’une inégalité de couverture : l’ensemble de référence est E , $n = 5$ et $p = 2$.

Théorème 3.18. Soit $S \subseteq E$. l’inégalité

$$x(S) - x(D) \leq r(S) - 1 \quad (1)$$

est valide pour $M_p(G)$ si et seulement si $D = T(S)$.

Preuve.

- L’inégalité (1) est vérifiée par le vecteur d’incidence de n’importe quel ensemble \bar{p} -indépendant contenant au plus $r(S) - 1$ arcs de S .
- Soit J un ensemble \bar{p} -indépendant contenant $r(S)$ arcs de S . Si $D = T(S)$, par définition de $T(S)$ on a $|J(S)| \geq 1$ et le vecteur d’incidence de J satisfait (1).
- On suppose que D n’est pas une couverture. Donc, il existe un ensemble \bar{p} -indépendant J contenant $r(S)$ arcs de S et tel que $|J \cap D| \leq 0$. Ainsi, le vecteur d’incidence de J viole l’inégalité (1).

□

Si $T(S) \subseteq S$, l’inégalité de couverture se réduit à l’inégalité $x(S \setminus T(S)) \leq r(S) - 1$ dominée par l’inégalité de rang $x(S \setminus T(S)) \leq r(S \setminus T(S))$ qui est valide pour $STAB(G_n)$.

Les W_2 -inégalités sont des inégalités de rang de $STAB(G_n)$ de la forme $x(S \setminus T(S)) \leq r(S) - 1$ avec $S(W : W)$ et $T(S)H$.

Si $T(S) \not\subseteq S$, les inégalités de couverture sont propres à $M_p(G)$ puisqu’elles ne sont pas valides pour $STAB(G_n)$. En effet, elle élimine tout ensemble $r(S)$ -indépendant $I \subseteq S$ tel que $I \cap T(S) = \emptyset$.

Plusieurs classes d’inégalités de couverture (I2) peuvent être définies en spécifiant des ensembles d’arcs S appropriés. Dans [3], on a prouvé que les inégalités de couverture sont définissantes de facettes pour $M_p(G)$ si l’ensemble S est défini par tous les arcs entrant un ensemble Q et $T(S) \subseteq A \setminus S$.

Les inégalités de couverture jouent un rôle crucial dans la description du polytope p -médian, puisqu’elles, les inégalités de clique et les inégalités de triangle sont les seules facettes de $M_2(G)$.

En effet, Maurras, dans [Maur83], a décrit une description complète du polytope sur un graphe simple $L = (W, E)$. Sa description implique, directement, la description suivante de l’enveloppe convexe des vecteurs d’incidence de tous les ensembles stables I où $|I| = 2$:

$$\begin{aligned} 2x(Q)+x(\Gamma(Q)) &\leq 2, Q \subseteq W, Q \text{ induit un sous-graphe complet} \quad (2) \\ x(W) &= 2 \\ x_w &\geq 0, w \in W \end{aligned}$$

Où, pour tout $Q \subseteq W$, $\Gamma(Q) = \{w \in W \mid Q \cup \{w\} \text{ induit un sous-graphe complet}\}$.

Et puisque le problème du p -médian est équivalent au problème de stable, de cardinalité \bar{p} , de poids minimum sur le graphe complet G , le résultat de *Maurras* implique une description complète de $M_2(G)$. De plus, il est très facile de vérifier que les inégalités (2) sont dominées par les inégalités de couverture, de clique et par celles de triangle.

3.4.3 Inégalités de I^* -couverture

Les inégalités de couverture peuvent être renforcées en exploitant l'optimalité.

Soit I^* un ensemble \bar{p} -indépendant, quelconque, de E et soit $c(I^*)$ son coût. Soit $\mathcal{F}(I^*, S)$ le désordre défini par tous les sous-ensembles \bar{p} -indépendants J contenant $r(S)$ arcs de S (i.e. $|J \cap S| = r(S)$) vérifiant $c(J) < c(I^*)$. Soit $T(I^*, S)$ la couverture de $\mathcal{F}(I^*, S)$. On appelle $T(I^*, S)$ une I^* -couverture.

Les inégalités de la forme :

$$x(S) - x(T(I^*, S)) \leq r(S) - 1 \quad (\mathbf{I3})$$

sont dites " inégalités de I^* -couverture".

Les inégalités de I^* -couverture ne sont pas d'une nature standard et elles ne sont pas valides pour le $M_p(G)$. Mais, étant donné un ensemble \bar{p} -indépendant I^* , elle est valide pour n'importe quel autre ensemble \bar{p} -indépendant meilleur que I^* . C'est à dire qu'étant donné un ensemble \bar{p} -indépendant I^* de coût $c(I^*)$, et une inégalité de I^* -couverture, le vecteur d'incidence de n'importe quel autre ensemble \bar{p} -indépendant dont le coût est inférieur à $c(I^*)$ se retrouve dans le demi-espace défini par l'inégalité de I^* -couverture considéré.

Théorème 3.19. *Soit $S \subseteq E$. L'inégalité*

$$x(S) - x(D) \leq r(S) - 1 \quad (3)$$

est satisfaite par tous les vecteurs d'incidence des sous-ensembles \bar{p} -indépendants J contenant $r(S)$ arcs de S tels que $c(J) < c(I^)$, si et seulement si $D = T(I^*, S)$.*

Preuve.

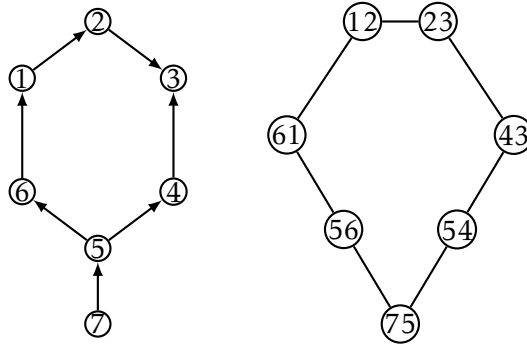
- L'inégalité (3) est satisfaite par le vecteur d'incidence de n'importe quel ensemble \bar{p} -indépendant J contenant au plus $r(S) - 1$ arcs de S .
- Soit J un ensemble \bar{p} -indépendant contenant $r(S)$ arcs de S , tel que $c(J) < c(I^*)$.
- Si $D = T(I^*, S)$, par définition de $T(I^*, S)$ on a $|J \cap T(I^*, S)| \geq 1$ et le vecteur d'incidence de J satisfait 2.
- On suppose que D n'est pas une I^* -couverture. Alors, il existe un ensemble \bar{p} -indépendant J contenant $r(S)$ arcs de S , avec $c(J) < c(I^*)$ et tel que $|J \cap D| \leq 0$. Ainsi, le vecteur d'incidence de J viole (3).

□

3.4.4 Inégalités de trou-pair

On considère le graphe $G_n(E, J)$ défini à partir du graphe $G = (V, E)$, où tout noeud de X correspond à un arc de G , et deux noeuds de X sont adjacents dans G_n si et seulement si les arcs correspondants dans G sont dépendants.

Le sous-graphe, de G , présenté dans la figure suivante correspond à un trou-pair de G_n .



L'inégalité (I4) correspondante est : $x_{12} + x_{23} + x_{43} + x_{54} + x_{75} + x_{56} + x_{61} \leq 3$

FIGURE 3.5 – Un trou-pair de G et le trou-pair correspondant dans G_n .

Soit $R \subset E$ un ensemble d'arcs correspondant à un trou pair de G_n . L'inégalité suivante réfère à une inégalité de trou-pair :

$$x(R) \leq \left\lfloor \frac{|R|}{2} \right\rfloor \quad (\text{I4})$$

Ces inégalités sont valides pour $M_p(G)$ [5]. Elles peuvent être améliorée d'après la proposition suivante :

Proposition 3.8. Soit $S \subset E$ et soit $(ij) \in S$ tel que $S \cap \delta^-(i) = \emptyset \leq r(S)$ est une inégalité valide de rang pour $M_p(G)$, alors l'inégalité $x(S \cup \delta^-(j)) \leq r(S)$ reste valide pour $M_p(G)$.

On définit $U = \{ij \mid \delta^-(i) = \emptyset\}$. D'après la proposition 3.8, les inégalités de trou-pair (I4) peuvent être améliorées en :

$$x\left(R \bigcup_{(ij) \in U} \delta^-(j)\right) \leq \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \quad (\text{I4}')$$

En posant $\delta^-(j) = 1 - y_j = t_j$. L'inégalité (I5) peut être réécrite comme :

$$x(R \setminus U) + \sum_{(ij) \in U} t_j \leq \left\lfloor \frac{|C|}{2} \right\rfloor \quad (\text{I4}'')$$

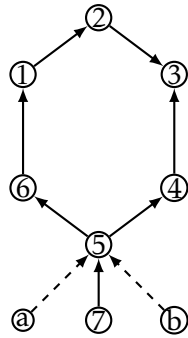


FIGURE 3.6 – Un trou-pair de G avec $U = \{a, b\}$, pour une inégalité de trou-pair liftée.

Les inégalités de trou-pair ne sont pas maximales et elles peuvent être renforcées par une amélioration séquentielle. Les coefficients d'amélioration sont calculés par l'algorithme de *Mannino et Sassano* pour le problème du stable de cardinalité maximum [2].

3.4.5 Inégalités de cycle

On considère un sous-ensemble de noeuds $W \subseteq V$ et soit \mathcal{C} un cycle bi-directionnel de $(W : W)$.

Toute inégalité de la forme :

$$x(\mathcal{C}) \leq \left\lfloor \frac{2|W|}{3} \right\rfloor \quad (\text{I5})$$

Est une inégalité de cycle [5].

Comme pour les inégalités de trou-pair, les inégalités de cycle peuvent être renforcées par une amélioration séquentielle en appliquant l'algorithme de *Maninno et Sassano* [30].

3.4.6 Inégalités de cycle-impair

On considère un cycle \mathcal{C} de G de longueur impaire : $\mathcal{C} = \{(v_i v_{i+1}) \mid i = \{1, 2, \dots, 2l\}\} \cup \{(v_{2l+1} v_1)\}$.

Une inégalité de cycle impair est de la forme :

$$x(\mathcal{C}) \leq \frac{|\mathcal{C}| - 1}{2} \quad (\text{I6})$$

Lemme 3.1. *L'inégalité (I6) est valide pour le PMP(G).*

Preuve.

– La combinaison des inégalités (1.3) et (1.5) de (IP), donne :

$$\begin{aligned} x(u_i u_{i+1}) + x(\delta^+(u_{i+1})) &\leq 1, \quad i = 1, 2, \dots, 2l, \\ x(u_{2l+1} u_1) + x(\delta^+(u_1)) &\leq 1. \end{aligned}$$

– En les additionnant aux contraintes de non-négativité, on obtient :

$$2x(\mathcal{C}) \leq 2l + 1 = |\mathcal{C}|$$

– En divisant par 2 et en arrondissant le membre droit de l'inégalité, on obtient l'inégalité (I6). □

3.4.7 W_q -inégalités

Soit $W \subseteq V$ et soit q un entier tel que : $1 \leq q \leq |W| - 1$.

On considère un ensemble d'arcs $F \subseteq (W : W)$ tel que $\forall i \in W : |F \cap \delta^+(i)| \leq q$.

Toute inégalité de la forme :

$$x(F) \leq \left\lfloor \frac{q|W|}{q+1} \right\rfloor \quad (\text{I7})$$

Est dite " W_q -inégalité".

Proposition 3.9 (Avella et Sassano [5]). *Les W_q -inégalités sont valides pour $M_p(G)$.*

Preuve.

– Pour tout noeud $i \in W$, on peut écrire q inégalités de clique de la forme :

$$x(\delta^-(i)) + x_{ij} \leq 1, \text{ Pour } (ij) \in F.$$

– Puisque tout arc $(ij) \in F$ apparaît dans $q + 1$ inégalités de clique, en sommant ces inégalités multipliées par $\frac{1}{q+1}$, pour chaque $i \in W$, on obtient :

$$x(F) \leq \frac{q|W|}{q+1}$$

✓ En arrondissant le second membre de l'inégalité, on obtient l'inégalité (I7). □

La classe des W_q -inégalités est une classe très large qui contient plusieurs autres classes d'inégalités valides et de facettes telles que : les W_2 -inégalités, les inégalités de cycle impair, les inégalités de trou-pair, les inégalités de cycle et les inégalités de triangle.

3.4.8 Inégalités de De Vries

Dans cette partie, on présente les inégalités décrites par *De Vries, Posner et Vohra* dans [38]. Elles ne sont pas contenues dans les classes de facettes définies par *Avella et Sassano* [4] [5].

Théorème 3.20. *Pour tout sous-ensemble de sommets $R \subseteq V$ avec $p \leq |R| = r$, et pour tout S tel que $\emptyset \subseteq S \subseteq V \setminus R$.*

$$(r-p+1) \left((r-p) \sum_{i \in R} y_i - \sum_{\substack{i,j \in R \\ i \neq j}} x_{ij} \right) + (r-p) \left((r-p+1) \sum_j y_j - \sum_{\substack{i \in R \\ j \in S}} x_{ij} \right) \leq (r-p+1)(r-p)(p-1) \quad (\text{I8})$$

Est une inégalité valide pour le PMP(G).

On note par $M \subseteq V$ l'ensemble des médians et par $I \subseteq M$ l'ensemble des médians intégrales ($y_j = 1$, pour le problème relaxé).

Preuve.

- Puisque seules les solutions entières sont considérées, alors $I = M$.
- On suppose que $M \not\subseteq R \cup S$. Donc, il y a au moins un médian n'appartenant pas à $R \cup S$.

Et donc, $\sum_{i \in R} y_i + \sum_{i \in S} y_i \leq p - 1$. Ce qui implique :

$$(r - p + 1)(r - p) \left(\sum_{i \in R} y_i + \sum_{i \in S} y_i \right) \leq (r - p + 1)(r - p)(p - 1).$$

Dans le membre gauche de **(I9)**, seules les variables y_k , $k \in V$ ont des coefficients positifs. Alors, **(I8)** est satisfaite lorsque $M \not\subseteq R \cup S$.

- Maintenant, on suppose que $M \subseteq R \cup S$. Donc, $\sum_{i \in R \cup S} y_i = p$. Puisque tous les médians sont contenus dans $R \cup S$, tout noeud de $R \setminus M$ est affecté à un sommet de $R \cup S$.

- Si $S \cap M = \emptyset$, alors :

$$\sum_{\substack{i, j \in R \\ i \neq j}} x_{ij} = r - p.$$

Donc, une borne supérieure du membre gauche de **(I8)** est :

$$(r - p + 1)(r - p)p - (r - p + 1)(r - p) = (r - p + 1)(r - p)(p - 1).$$

- Si $S \cap M \neq \emptyset$, alors :

$$\begin{aligned} (r - p + 1) \sum_{\substack{i, j \in R \\ i \neq j}} x_{ij} + (r - p) \sum_{\substack{i \in R \\ j \in S}} x_{ij} &\geq (r - p) \sum_{i \in R} \sum_{\substack{j \in S \cup R \\ i \neq j}} x_{ij} \\ &\geq (r - p)(r - p + 1). \end{aligned}$$

- ✓ Une borne supérieure du membre gauche de **(I8)** est :

$$(r - p)(r - p + 1)p - (r - p)(r - p + 1) = (r - p)(r - p + 1)(p - 1).$$

□

Théorème 3.21. Pour $P < r$ et $\emptyset \subset S \subset V \setminus R$, les inégalités **(I8)** induisent des facettes pour le $PMP(G)$, pour $p \geq 2$.

En divisant les deux membres de l'inégalité **(I8)** par $(r - p)$ et $(r - p + 1)$ successivement, on obtient :

$$\sum_{i \in R \cup S} x_{ii} - \frac{1}{r - p} \sum_{i \in R} \sum_{\substack{i, j \in R \\ i \neq j}} x_{ij} - \frac{1}{r - p + 1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq p - 1. \quad (I'8)$$

Les inégalités **(I'8)** sont équivalentes aux inégalités **(I'8)** et sont, par la suite, définissantes de facettes pour le polytope du p -médian.

Pour une preuve détaillée du théorème 3.21 le lecteur est invité à consulter [38].

3.4.9 Inégalités de De Farias

Dans [15], De Farias a décrit une famille de facettes pour le polytope du p -médian PS sur un graphe biparti complet $K_{m, n}$, dont la formulation est présentée dans le premier chapitre.

Théorème 3.22. Soit $N' \subseteq N$, tel que : $|N'| \geq p + 1$. Et soient $M_j, j \in N'$ des sous-ensembles non-vides et disjoints de M . Et soit $M' = M - \bigcup_{j \in N'} M_j$ qu'on suppose non-vide.

Alors, l'inégalité suivante est valide et définissante de facette pour PS :

$$\sum_{j \in N'} \sum_{i \in M_j} x_{ij} + \sum_{j \in N'} \sum_{i \in M'} x_{ij} \leq p + (|N'| - p) \sum_{i \in M'} y_i \quad (\mathbf{I9})$$

Preuve.

(a) On montre, tout d'abord, que **(I9)** est valide. Soit (\tilde{x}, \tilde{y}) un sommet de PS. Donc, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \{0, 1\}^{mn+m}$.

- On suppose que $\tilde{y}_i = 0, \forall i \in M'$. Alors : $p + (|N'| - p)_{i \in M'} \tilde{y}_i = p$.

D'après la contrainte (3.2) de (IPF), $\tilde{x}_{ij} = 0, \forall i \in M', j \in N'$.

Pour $i \in M_j$, la seule variable d'indice i présente dans **(I10)** est x_{ij} .

Puisqu'au plus p variables d'indices distincts peuvent être positifs dans un sommet de PS, on a :

$$\sum_{j \in N'} \sum_{i \in M_j} \tilde{x}_{ij} + \sum_{j \in N'} \sum_{i \in M'} \tilde{x}_{ij} = \sum_{j \in N'} \sum_{i \in M} \tilde{x}_{ij} \leq p$$

- Si $\tilde{y}_i = 1$, pour un $i \in M'$, alors, $p + (|N'| - p) \sum_{i \in M'} \tilde{y}_i \leq |N'|$.

D'après la contrainte (3.1) de (IPF), on a :

$$\sum_{j \in N'} \sum_{i \in M_j} \tilde{x}_{ij} + \sum_{j \in N'} \sum_{i \in M'} \tilde{x}_{ij} = \sum_{j \in N'} \sum_{i \in M} \tilde{x}_{ij} \leq |N'|$$

✓ Donc, pour les deux cas considérés, l'inégalité **(I9)** est valide pour PS.

(b) On montre, maintenant, que **(I9)** est définissante de facette pour PS. Pour cela, on donne $(mn + m)$ points de PS linéairement indépendants satisfaisant **(I9)** à l'égalité. Soient $x^{(r,s)} \in \mathbb{R}^{mn}, r \in M, s \in N$ et $y^{(r)} \in \mathbb{R}^m, r \in M$, tels que :

$$x_{ij}^{(r,s)} = \begin{cases} 1, & \text{Si } (i,j)=(r,s) \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

Et,

$$y_i^r = \begin{cases} 1, & \text{Si } i=r \\ 0, & \text{Sinon} \end{cases}$$

- Les points $p^1(r) = \left(\sum_{j \in N'} x^{(r,j)}, y^r \right), r \in M'$, appartiennent à PS et satisfont **(I9)** à l'égalité. Ceci reste vrai pour tous les points suivants :

- $p^2(r) = p^1(r) + (0, y^{(r)}), r \in \bigcup_{j \in N'} M_j$.

- $p^3(r, s) = p^2(r) + (x^{(r,s)}, 0), r \in \bigcup_{j \in N'} M_j, s \in NN'$.

- $p^4(r, s) = p^1(r) + (x^{(r,s)}, 0), r \in M', s \in N \setminus N'$.

- Puisque $|N'| \geq p + 1$, PS a $\left(\left(\sum_{j \in N'} |M_j| \right) \times |N'| \right)$ points linéairement indépendants

$p^5(r, s), r \in \bigcup_{j \in N'} M_j, s \in N'$ satisfaisant **(I9)** à l'égalité, avec, $x_{ij} = 0, \forall (i, j) \in (M \times (N \setminus N')) \cup$

$(M' \times N'), y_i = 0, \forall i \in M'$. La matrice carrée B formée par les composantes x_{ij} ,

$i \in \bigcup_{j \in N'} M_j, j \in N'$ est non-singulière.

- Soit $u \in \bigcup_{j \in N'} M_j$, $p^6(r, s) = p^1(r) + (x^{(u,s)} - x^{(r,s)}, y^{(u)})$, $r \in M'$ et $s \in N'$.

On considère le bloc de matrice suivant :

$$\begin{pmatrix} 0 & A & 0 & 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ B & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ D & -I & 0 & 0 & E & 0 \end{pmatrix}$$

Avec les points $p^1(r)$ sur la première ligne, suivis par les points $p^2(r) - p^1(t)$, $p^3(r, s) - p^2(r)$, $p^4(r, s) - p^1(r)$, $p^5(r, s)$, et finalement par $p^6(r, s) - p^1(r)$ sur les lignes suivantes respectivement.

- Le 1^{er} bloc de colonnes correspond aux variables : x_{ij} , $i \in \bigcup_{j \in N'} M_j$, $j \in N'$.
 - Le 2^{ème} bloc de colonnes correspond aux variables : x_{ij} , $i \in M'$, $j \in N'$.
 - Le 3^{ème} bloc de colonnes correspond aux variables : x_{ij} , $i \in \bigcup_{j \in N'} M_j$, $j \in N \setminus N'$.
 - Le 4^{ème} bloc de colonnes correspond aux variables : x_{ij} , $i \in M'$, $j \in N \setminus N'$.
 - Le 5^{ème} bloc de colonnes correspond aux variables : y_i , $i \in \bigcup_{j \in N'} M_j$.
 - Et le dernier bloc de colonnes correspond aux variables : y_i , $i \in M'$.
 - Les matrices d'identité sont obtenues après une réorganisation des colonnes.
- ✓ La matrice est non-singulière. Donc, **(I9)** est définissante de facette pour le polytope *PS*. □

On prend par exemple un graphe G tel que $m = 4$, $n = 3$ et $p = 2$. Alors :

$$x_{11} + x_{22} + x_{33} + x_{41} + x_{42} + x_{43} \leq 2 + y_4 \quad \text{(I9)}$$

(I9) définit une facette de *PS* avec $N' = N$, $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{2\}$, $M_3 = \{3\}$ et $M' = \{4\}$. Elle élimine le point fractionnaire (\tilde{x}, \tilde{y}) donné par :

$$\begin{aligned} \tilde{x}_{11} = \tilde{y}_1 = \tilde{x}_{22} = \tilde{y}_2 = \tilde{x}_{33} = \tilde{y}_3 = \tilde{x}_{41} = \tilde{x}_{42} = \tilde{x}_{43} = \tilde{y}_4 &= \frac{1}{2} \\ \text{et, } \tilde{x}_{12} = \tilde{x}_{13} = \tilde{x}_{21} = \tilde{x}_{23} = \tilde{x}_{31} = \tilde{x}_{32} &= 0. \end{aligned}$$

3.5 Conclusion

Après avoir donné les principaux résultats des études polyédrales portées sur le problème du p -médian, on introduit dans le chapitre prochain la notion de " l'étude polyédrale étendue " qui a été appliquée sur plusieurs problèmes combinatoires. Notamment pour avoir de nouvelles propriétés du polytope du p -médian.

references

Formulation étendue du problème p -médian

chapter.4	
4.1	Introduction 46
4.2	Préliminaires de la projection des polyèdres 47
4.2.1	Projection, Formulation étendue et cône de projection 47
4.2.2	Méthode de Fourier 48
4.2.3	Théorèmes de Minkowski-Weyl 50
4.2.4	Finitude du cône de projection 51
4.2.5	Pourquoi s'intéresser aux projections 51
4.3	Formulation étendue du problème du p -médian . . 52
4.4	Élimination des variables y 54
4.5	Propriétés des facettes du polytope du p -médian . 58
4.6	résultats de la formulation étendue 59
4.6.1	Généralisation des facettes de De Farias et de De Vries 59
4.6.2	Généralisation des W_2 -facettes 62
4.6.3	Généralisation des facettes de k -couverture 65
4.6.4	Description complète du polytope p -médian pour $p = n - 2$ 67
4.7	Conclusion 74

4.1 Introduction

L'approche polyédrale est l'une des plus fortes techniques disponibles pour la résolution des problèmes difficiles de l'optimisation combinatoire. L'idée principale de cette approche est de considérer une relaxation linéaire d'un problème d'optimisation combinatoire en nombres entiers, et d'essayer de renforcer, itérativement, la formulation linéaire par l'addition des inégalités violées par la solution fractionnaire courante, mais satisfaites par toutes les solutions réalisables. Ceci définit des faces de grandes dimensions, de préférences des facettes, de l'enveloppe convexe des solutions réalisables.

Si on a l'enveloppe convexe de toutes les solutions réalisables, tous les points extrêmes de la formulation sont entiers, et on peut donc résoudre le problème comme un programme linéaire ordinaire, dont la résolution est connue d'être facile.

Cependant, le nombre de contraintes de ces formulations est, généralement, exponentiel en la taille de données nécessaires pour décrire le problème.

Donc, on s'intéresse, particulièrement, aux situations où l'addition d'un nombre polynomial de nouvelles variables permet d'obtenir une formulation avec un nombre polynomial de contraintes. Ceci est équivalent à projeter la formulation du problème dans un espace plus grand afin de rendre le nombre de contraintes polynomial en le nombre de variables. Une formulation ainsi obtenue est dite "formulation étendue".

Les formulations étendues sont très importantes dans la programmation en nombres entiers puisqu'elles peuvent mener vers des relaxations serrées de l'enveloppe convexe des solutions réalisables ce qui accélère l'optimisation.

En effet, dans la plupart des cas, la description du polytope étendu Q est beaucoup plus petite que celle du polytope de base P , ce qui accélère l'optimisation sur P en optimisant sur Q .

Plusieurs formulations étendues ont été élaborées pour des problèmes connus et très fréquents tels que : le problème d'arbres couvrants, le problème de couplage, problème de stable et même dans la programmation dynamique pour les problèmes de : sac-à-dos et stable dans les graphes de distances sans-fourchettes. Pour des exemples détaillés, le lecteur est invité à consulter [29] et [24].

La projection est l'outil basique le plus utilisé pour relier les formulations étendues aux formulations dans l'espace d'origine des variables. Pour cela deux méthodes classiques sont appliquées : une basée sur la notion du cône de projection, et l'autre sur la procédure de Fourier. On introduit ces concepts dans la première section. Dans la deuxième section, on présente la formulation étendue proposée par *Zhao et Posner* pour le problème du p -médiann, ainsi que quelques propriétés de cette formulation. Dans la section 3, on élimine les variables supplémentaires γ . La section 4 est réservée à la présentation de deux propriétés tirées lors de l'élimination des variables étendues, ces propriétés

sont liées aux facettes du polytope du p -médian. Dans la section 5, on décrit les résultats fournis par la formulation étendue proposée.

4.2 Préliminaires de la projection des polyèdres

4.2.1 Projection, Formulation étendue et cône de projection

Définition 4.1. On considère un sous-ensemble S de \mathbb{R}^n et un sous-espace L de \mathbb{R}^n .

- On dit que le vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ est “orthogonal” à un sous-espace L de \mathbb{R}^n , si et seulement si : $\forall x \in L, v \cdot x = (v_1 x_1) + (v_2 x_2) + \dots + (v_n x_n) = 0$.
- La “projection orthogonale” de S dans L est l’ensemble de tous les points $u \in L$ tels qu’il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à L et $u + v \in S$.

La figure suivante illustre la notion de la projection orthogonale :

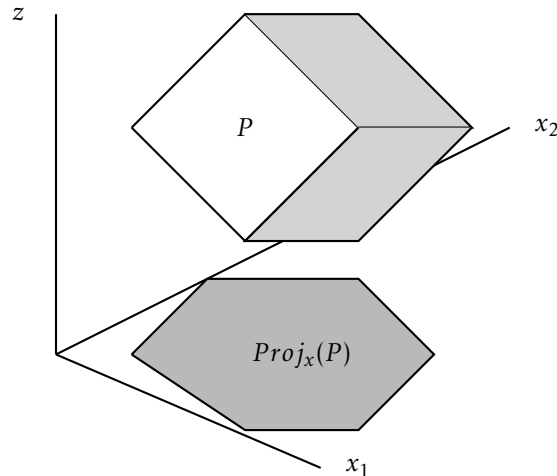


FIGURE 4.1 – Un cube tridimensionnel et sa projection dans le plan.

Dans tout ce qui suit, on s’intéresse aux projections orthogonales dans l’espace $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0, i \in N \setminus M\}$, où $N = \{1, \dots, n\}$ et $M \subseteq N$, qu’on note : $Proj_x(S) = \{x \in \mathbb{R}^M \mid \exists z \in \mathbb{R}^{N \setminus M} \text{ tel que } (x, z) \in S\}$.

Définition 4.2. Soit $X = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b', x_i \text{ entier}, i \in I \subseteq N\}$, et soit $Conv(X)$ son enveloppe convexe.

Une description externe du polyèdre $Conv(X)$ est une projection du polyèdre $Conv(X)$ dans un espace plus grand.

Ça revient à trouver, si possible, un polyèdre : $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$ tel que :

- $Proj_x(Q) = Conv(X)$. Et on dit que le système $Ax + Bz \leq b$ définissant Q fournit une “formulation étendue” de l’ensemble X .
- Le programme linéaire $\max\{hx + gz \mid Ax + Bz \leq b\}$ est facile à résoudre. Ceci est le cas, lorsque la taille du système $A'x \leq b'$ définissant X est petite (i.e. on a un nombre polynomial de contrainte) et la dimension de la matrice $(A|B|b)$ est polynomialement bornée en la taille

de la matrice $(A'|b')$. Dans ce cas, on dit que le système $Ax+Bz \leq b$ fournit une “formulation étendue compacte” de X .

Définition 4.3. Étant donné un polyèdre $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$, on considère l'inégalité $ax \leq b$ qui est valide pour Q . D'après la définition de la projection, $ax \leq b$ est aussi valide pour $\text{Proj}_x(Q)$.

Puisque pour tout vecteur u tel que $u \geq 0$ on a $uB = 0$, l'inégalité $uAx \leq ub$ est valide pour Q et donc valide pour $\text{Proj}_x(Q)$.

On définit le “cône de projection” du polyèdre $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$, comme :

$$C_Q = \{u \in \mathbb{R}^m \mid uB \geq 0, u \geq 0\}.$$

On note par $\text{ext}(C_Q)$ l'ensemble des directions extrêmes de C_Q (i.e. $\text{ext}(C_Q) = \{u \in \mathbb{R}^m \mid uB = 0, u \geq 0\}$). Deux directions u_1 et u_2 de C_Q sont dites “distinctes” si $u_1 \neq \alpha u_2, \forall \alpha > 0$.

Théorème 4.1. La projection du polyèdre $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$ dans le x -espace est $\text{Proj}_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid uAx \leq ub, \forall u \in \text{ext}(C_Q)\}$.

On suppose qu'un problème est formulé par un ensemble de contraintes d'égalité $A^-x + b^-y = b^-$, et par un ensemble d'inégalités $A^{\leq}x + b^{\leq}y = b^{\leq}$. Les contraintes d'égalité sont remplacées par les contraintes $A^-x + b^-y \leq b^-$ et $-A^-x - b^-y \leq -b^-$. Alors,

$$A = \begin{pmatrix} A^- \\ -A^- \\ A^{\leq} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B^- \\ -B^- \\ B^{\leq} \end{pmatrix}, \text{ et } b = \begin{pmatrix} b^- \\ -b^- \\ b^{\leq} \end{pmatrix}.$$

Soit m^- le nombre de lignes de $A^-x + b^-y = b^-$.

Lemme 4.1. Soit $u = (u_1, \dots, u_i, \dots, u_j, \dots, u_m) \in \text{ext}(C_Q)$, où $i \in \{1, 2, \dots, m^-\}$ et $j = i + m^-$. Si $u_i > 0$ et $u_j > 0$, alors $u_i = u_j$ et tous les autres éléments de u sont nuls. De plus, les directions extrêmes génèrent une contrainte triviale.

Lemme 4.2. Soit $u \in \text{ext}(C_Q)$, tel que $uB = 0$ et tous les éléments de u correspondants à $A^{\leq}x + B^{\leq}y \leq b^{\leq}$ sont nuls. Alors, $uAx = ub$ est une inégalité valide pour $\text{Proj}_x(Q)$.

4.2.2 Méthode de Fourier

En 1846, Fourier a décrit une procédure d'élimination pour le calcul des projections des polyèdres. Son principe est d'effectuer des opérations sur les lignes d'un système d'inégalités linéaires pour éliminer une variable à la fois.

On décrit une itération de la méthode de Fourier :

► On considère le système d'inégalités $Ax + Bz \leq b$, l'ensemble des indices est M .

On définit :

$$\begin{aligned} I^+ &= \{i \in M \mid B_i > 0\} \\ I^- &= \{i \in M \mid B_i < 0\} \\ I^0 &= \{i \in M \mid B_i = 0\} \end{aligned}$$

- En multipliant les lignes par les nombres positifs appropriés, on suppose que les valeurs de B sont $0, \pm 1$. Ainsi, le système $Ax + Bz \leq b$ peut être réécrit comme :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + z &\leq b_i, & i \in I^+ \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j - z &\leq b_i, & i \in I^- \\ \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j &\leq b_i, & i \in I^0 \end{aligned}$$

- Pour toute paire d'indices (i, k) de $I^+ \times I^-$, on construit l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j + \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j \leq b_i + b_k, \quad (2)$$

Soit $A'x \leq b'$ le système d'inégalités formé par les inégalités de I^0 et les $|I^+| \times |I^-|$ inégalités (2). Alors,

Théorème 4.2. Soit $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$ et $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b'\}$.

Alors, $P = Proj_x(Q)$.

Preuve.

- Par construction, toutes les inégalités dans le système $A'x \leq b'$ sont valides pour les deux polyèdres Q et $Proj_x(Q)$.

Donc, $Proj_x(Q) \subseteq P$.

- Pour montrer que $P \subseteq Proj_x(Q)$, on montre que si x' satisfait $A'x' \leq b'$, alors il existe $z' \in \mathbb{R}$ tel que $(x', z') \in Q$. c-à-d que le système $Bz \leq b - Ax'$ est réalisable.

On suppose toujours que les valeurs de B sont $0, \pm 1$.

Soit $u = \min_{i \in I^+} \{b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j\}$ (avec, $u = +\infty$ si $I^+ = \emptyset$). Et soit $l = \max_{i \in I^-} \{\sum_{j=1}^n a_{ij}x'_j - b_i\}$ (avec, $l = -\infty$ si $I^- = \emptyset$).

Puisque, $A'x' \leq b'$, la construction de $A'x' \leq b'$ implique $l \leq u$.

- ✓ Donc, étant donné un z' tel que $l \leq z' \leq u$, on a (x', z') .

□

Remarques

À chaque itération, la méthode de Fourier :

- Génère un nombre fini d'inégalités. Dans, algorithmiquement, la projection d'un polyèdre est un polyèdre.
 ► Élimine $|I^+| + |I^-|$ inégalités et rajoute $|I^+| \times |I^-|$ inégalités.

Donc, le nombre d'inégalités peut être élevé au carré à chaque itération. Alors, le nombre d'inégalités produites pour éliminer k variables, peut être exponentiel en k . En général, les inégalités produites par la méthodes de Fourier ne sont pas toutes nécessaires pour définir le polyèdre étendue.

Des exemples d'application de la méthode de Fourier sur des problèmes d'optimisation combinatoire sont illustrés dans [29].

4.2.3 Théorèmes de Minkowski-Weyl

- Un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$ est un “cône finement généré” si C est un cône convexe généré par un ensemble fini de vecteur $r^1, \dots, r^q \in \mathbb{R}^n$, pour $q \geq 1$. On écrit : $C = Cone(r^1, \dots, r^q)$, et on dit que r^1, \dots, r^q sont les “générateurs” de C .
- Soit R la $n \times q$ -matrice dont les colonnes sont r^1, \dots, r^q . Parfois, on écrit $Cone(R)$ au lieu de $Cone(r^1, \dots, r^q)$. On a :

$$Cone(R) = \{c \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mu \geq 0 \text{ tel que } x = R\mu\}.$$

Théorème 4.3 (Le théorème de Minkowski-Weyl pour les cônes). *Pour un ensemble $C \subseteq \mathbb{R}^n$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Il existe une matrice A telle que, $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$.*
- (2) *Il existe une matrice R telle que, $C = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists \mu \geq 0 \text{ tel que } x = R\mu\}$.*

- Soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$. Le cône généré par les éléments de S est :

$$Cone(S) = \{\mu_1 x_1 + \dots + \mu_k x_k \mid k \geq 0, x_1, \dots, x_k \in S, \mu_1, \dots, \mu_k \geq 0\}.$$

- On adopte la convention que $Cone(\emptyset) = 0$ et $Conv(\emptyset) = \emptyset$.
- On définit la “somme de Minkowski” $A+B$ des ensembles $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ par : $A+B = \{a+b \mid a \in A, b \in B\}$. Si $A = \emptyset$ ou $B = \emptyset$, alors $A+B = \emptyset$.

Le théorème suivant montre qu'un polyèdre peut être exprimé comme une somme de Minkowski d'un polytope et d'un cône (voir Figure 4.2).

Théorème 4.4 (Le théorème de Minkowski-Weyl pour les polyèdres). *Pour un sous-ensemble Q de \mathbb{R}^n , les deux conditions suivantes sont équivalentes :*

- (1) *Q est un polyèdre. i.e. il existe une matrice A et un vecteur b , tels que $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$.*
- (2) *Il existe $v^1, \dots, v^p \in \mathbb{R}^n, r^1, \dots, r^q \in \mathbb{R}^n$, tels que $Q = Conv\{v^1, \dots, v^p\} + Cone\{r^1, \dots, r^q\}$.*

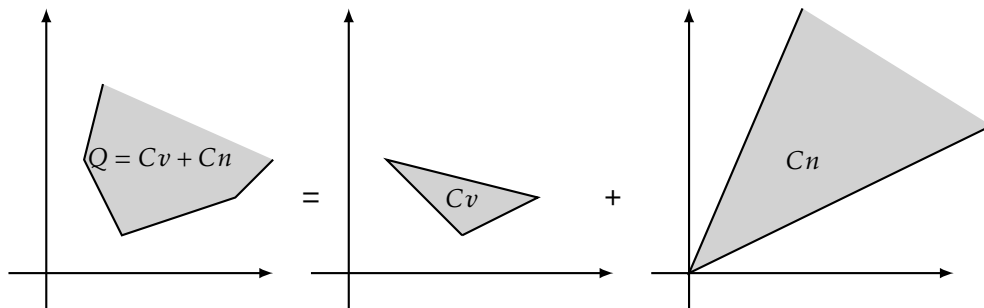


FIGURE 4.2 – Illustration du théorème de Minkowski-Weyl pour les polyèdres, $Cv = Conv\{v^1, \dots, v^p\}$ et $Cn = Cone\{r^1, \dots, r^q\}$.

- On dit que $Ax \leq b$ est une “description externe” de Q . Et que $v^1, \dots, v^p, r^1, \dots, r^q$ est une “description interne” de Q .
- On note qu’une description interne du polyèdre Q fournit une formulation étendue en les variables $(x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$:

$$Q = Proj_x \left\{ (x, \lambda, \mu) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q \mid x = \lambda_1 v^1 + \dots + \lambda_p v^p + \mu_1 r^1 + \dots + \mu_q r^q, \right. \\ \left. \lambda_1 + \dots + \lambda_p = 1, \lambda \geq 0, \mu \geq 0. \right.$$

- Le cône $\{r \in \mathbb{R}^n \mid r = \mu_1 r^1 + \dots + \mu_q r^q, \mu \geq 0\} = \{r \in \mathbb{R}^n \mid Ar \leq 0\}$ est le cône de récession de Q .

D’après la théorie des polyèdres (voir par exemple [29]), on a :

- Une description externe non redondante du polyèdre $Q = Conv(V) + Cone(R)$ a la forme $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A^-x = b^-, A^<x \leq b^<\}$ où, $A^-x = b^-$ est un système linéaire d’équations qui définissent le plus petit espace affine de \mathbb{R}^n contenant Q , et toute inégalité de $A^<x \leq b^<$ définit une facette distincte de Q .
- Si $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$ est pointu (Q est pointu si et seulement si $rang(A) = n$), alors, Q a une description interne minimale unique $Q = Conv(V) + Cone(R)$, où V est l’ensemble de sommets de Q et R est l’ensemble des rayons extrêmes.

4.2.4 Finitude du cône de projection

On considère un polyèdre $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$. Son cône de projection est $C_Q = \{u \in \mathbb{R}^m \mid uB = 0, u \geq 0\} = \{u \in \mathbb{R}^m \mid u = r^1 \mu_1 + \dots + r^q \mu_q, \mu \geq 0\}$, où $r^1; \dots, r^q$ sont les rayons extrêmes de C_Q .

Théorème 4.5. *Étant donné un polyèdre $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$. Soient $r^1; \dots, r^q$ les rayons extrêmes de C_Q . Alors, $Proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid r^t Ax \leq r^t b, 1 \leq t \leq q\}$. i.e. $Proj_x(Q)$ est définie par un nombre fini d’inégalités, et donc, $Proj_x(Q)$ est un polyèdre.*

Le théorème précédent montre que les inégalités $r^t Ax \leq r^t b, 1 \leq t \leq q$ sont suffisantes pour décrire $Proj_x(Q)$.

Remarque

Toutes les définitions, théorèmes, corollaires et propositions présentés dans cette sections ont été tirés de [29] [24] [28]. Toutes les démonstrations y sont incluses.

4.2.5 Pourquoi s’intéresser aux projections

On s’intéresse aux projections parce que les deux programmes :

$$\max\{f(x) \mid x \in Proj_x(S)\} \text{ et } \max\{f(x) + 0z \mid (x, z) \in S\}$$

ont la même solution optimale x^* , mais l'un d'entre eux est plus facile à résoudre que l'autre.

En effet, étant donné un polyèdre $P = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$, l'application de la méthode de Fourier sur le système $Ax + Bz \leq b$ pour éliminer les composantes de z , produit un système d'inégalités $A^*x \leq b^*$, tel que, $\{x \in \mathbb{R}^n \mid A^*x \leq b^*\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \exists z \in \mathbb{R}^p \text{ tel que } (x, z) \in P\}$. Par définition, ce polyèdre est $Proj_x(P)$.

Un polyèdre $Q \subset \mathbb{R}^n$, ayant un grand nombre de facettes, peut être obtenu en projetant un polyèdre P dans un espace plus grand ayant un nombre plus petit de facettes.

La description de P par un système d'inégalités linéaires est appelée "formulation étendue" de Q . En plus, lorsque ce système a un nombre de contraintes et de variables polynomial en la taille de données nécessaires pour décrire Q , la formulation étendue est dite "compacte".

Zhao et Posner dans [41], ont proposé une formulation étendue pour le problème du p -médian dans un graphe général. Ils ont pu l'utiliser pour tirer et déduire deux propriétés supplémentaires du polytope du p -médian.

4.3 Formulation étendue du problème du p -médian

Il impératif de mentionner que les travaux et les résultats qui vont être présentés dans cette section et dans la section suivante, sont dûs à *Zhao et Posner* [41].

- On définit t le "vecteur médian", tel que $t = (t_1, t_2, \dots, t_p)$, où $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ et $t_k \in V$, pour $k = 1, P$. Soit $T(t) = \{t_1, t_2, \dots, t_p\}$ l'ensemble des P sommets associés à t .
- On définit $\Lambda = \{t \mid T(t) \subseteq V\}$ l'ensemble de tous les vecteurs médians possibles. L'ensemble $\Lambda^i = \{t \in \Lambda \mid i \in T(t)\}$, est l'ensemble des vecteurs médians contenant le sommet i . Et soit $\Lambda^{ij} = \Lambda^j \setminus \Lambda^i$, pour $i, j \in V$, et $i \neq j$.
- Soit $\mathcal{A}_J = \{t \in \Lambda \mid T(t) \subseteq J \subseteq V\}$ l'ensemble de vecteurs médians dont tous les médians appartiennent à J . On note que $\mathcal{A}_J = \Lambda$ si $J = V$ et $\mathcal{A}_J = \emptyset$ si $|J| < P$.

On définit les variables suivantes :

$$v_t = \begin{cases} 1, & \text{si les } P \text{ sommets dans } T(t) \text{ sont les } P \text{ médians.} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

Et,

$$y_{tij} = \begin{cases} 1, & \text{Si } i \in V \text{ est affecté à } j \in T(t) \text{ et } T(t) \text{ est l'ensemble des } P \text{ médians.} \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases}$$

On remarque que y_{tji} n'est pas définie si $i \notin T(t)$. Et y_{tij} , pour $i \neq j$, n'est pas définie si $i \in T(t)$ ou $j \notin T(t)$.

Donc, une formulation étendue du problème du p -médian est :

$$\begin{cases}
 \max & \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \\
 x_{ii} & - \sum_{t \in \Lambda^i} y_{tii} = 0, \quad i \in V, & (FE.1) \\
 x_{ij} & - \sum_{t \in \Lambda^{ji}} y_{tij} = 0, \quad i, j \in V, i \neq j, & (FE.2) \\
 v_t & - y_{tii} = 0, \quad i \in V, t \in \Lambda^i & (FE.3) \\
 v_t & - \sum_{j \in T(t)} y_{tij} = 0, \quad i \in V, t \in \Lambda \setminus \Lambda^i & (FE.4) \\
 \sum_{t \in \Lambda} v_t & = 1, & (FE.5) \\
 & y_{tii} \geq 0, \quad i \in V, t \in \Lambda^i, \\
 & y_{tij} \geq 0, \quad i, j \in V, i \neq j, t \in \Lambda^{ji}, \\
 & v_t \geq 0, \quad t \in \Lambda, \\
 x_{ij} & \geq 0, \quad i, j \in V,
 \end{cases}$$

Dans une solution entière de (FE), exactement P sommets sont choisis comme médians. Soit $T(t^0)$ l'ensemble de ces médians.

- La contrainte (FE.5) s'assure que v_{t^0} ait la valeur 1 et que tous les autres v_t soient nuls.
- Par définition, $y_{tii} = 1$ seulement si, $t = t^0$ et $i \in T(t^0)$. Donc, la contrainte (FE.1) force x_{ii} à valoir 1 pour $i \in T(t^0)$ et à valoir 0 sinon.
- Par définition, aussi, $y_{tij} = 1$ lorsque : $t = t^0$, $i \notin T(t^0)$, $j \in T(t^0)$ et i est affecté à j . Alors, la contrainte (FE.2) s'assure que x_{ij} soit égale à 1 pour de tels i et j , et qu'elle soit nulle sinon.
- La contrainte (FE.3) requiert qu'un sommet $i(t^0)$ soit affecté à lui même. Pour un sommet $i \notin T(t^0)$, i doit être affecté à un médian j de $T(t^0)$. La contrainte (FE.4) s'assure qu'il n'existe qu'un seul sommet pareil.

Proposition 4.1 (Balas, 2005 [9]). *Si Q est un polyèdre entier, alors, $\text{Proj}_x(Q)$ est aussi un polyèdre entier.*

D'après la proposition précédente, si on arrive à montrer que le polytope associé à (FE) est entier, donc, en éliminant les variables y et v , on obtient une description complète du polytope entier.

Théorème 4.6. *Le polytope associé à (FE) est entier.*

Preuve. On suppose que (x, y, v) est un point extrême de (FE).

- S'il existe un $t \in \Lambda$, tel que $v_t = 1$, alors, (FE.3) et (FE.4) implique que les P sommets dans $T(t)$ sont des médians entiers. Et si tous les médians sont entiers, alors tout point extrême est entier.
- Donc, si (x, y, v) est un point extrême, alors, les composantes de v sont fractionnaires

$$v_{t^1} = \lambda_1, v_{t^2} = \lambda_2, \dots, v_{t^l} = \lambda_l, \text{ et } \sum_{i=1}^l \lambda_i = 1.$$

- En conséquent, $(x, y, v) = \sum_{i=1}^l \lambda_i (x^i, y^i, v^i)$, où (x^i, y^i, v^i) est un point extrême entier qui correspond à $v_{t^i} = 1$. Donc, (x, y, v) n'est pas un point extrême. Ce qui contredit l'hypothèse de départ.
- ✓ Le polytope de (FE) est entier. □

4.4 Élimination des variables y

Afin d'obtenir un cône de projection pointu, on remplace les contraintes d'égalité, de (FE) , par des contraintes d'inégalité.

Il est difficile d'éliminer les variables étendues y et v simultanément. Pour cela, on commence par l'élimination des variables y .

Balas, dans [9], déclare qu'une contrainte dans P ne contenant pas de variables étendues est une contrainte de $Proj_x(P)$. En conséquent, on ignore les contraintes de (FE) ne contenant pas les variables $y_{tqq}, t \in \Lambda^q$.

On note que (FE) ne contient pas de contraintes de a forme $A^{\leq}(x, v) + B^{\leq}y \leq d^{\leq}$.

► Soit $q \in V$, on considère la projection de y_{tqq} pour $t \in \Lambda^q$. Les contraintes contenant y_{tqq} pour $t \in \Lambda^q$, sont :

$$x_{qq} - \sum_{t \in \Lambda^q} y_{tqq} = 0, \quad (FE.6)$$

$$v_t - y_{tqq} = 0, \quad t \in \Lambda^q, \quad (FE.7)$$

$$y_{tqq} \geq 0, \quad t \in \Lambda^q, \quad (FE.8)$$

– En remplaçant les contraintes d'égalités par des contraintes d'inégalités, on obtient :

$$x_{qq} - \sum_{t \in \Lambda^q} y_{tqq} \leq 0, \quad (FE.9)$$

$$x_{qq} - \sum_{t \in \Lambda^q} y_{tqq} \geq 0, \quad (FE.10)$$

$$v_t - y_{tqq} \leq 0, \quad t \in \Lambda^q, \quad (FE.11)$$

$$v_t - y_{tqq} \geq 0, \quad t \in \Lambda^q, \quad (FE.12)$$

$$y_{tqq} \geq 0, \quad t \in \Lambda^q,$$

– Soit e, f, g_t, h_t les variables correspondantes aux contraintes $(FE.9)$, $(FE.10)$, $(FE.11)$, $(FE.12)$, respectivement. Donc, le cône de projection est :

$$C = \{(e, f, g, h) \mid -e + f - g_t + h_t \geq 0, t \in \Lambda^q, e, f \geq 0, g, h \geq 0\},$$

– L'inégalité associée au cône de projection C , est :

$$(e-f)x_{qq} + \sum_{t \in \Lambda^q} (g_t - h_t)v_t \leq 0. \quad (FE.13)$$

– Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Si $e > 0$ et $f > 0$, le lemme 4.1 implique que u génère une contrainte triviale. Donc, on s'intéresse aux cas suivants : $e > 0$ et $f = 0$, $e = 0$ et $f > 0$, et $e = 0$ et $f = 0$.

Lemme 4.3. Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$ tel que $e > 0$ et $f = 0$. Alors, la contrainte suivante :

$$x_{qq} - \sum_{t \in \Lambda^q} v_t = 0, \quad (\text{FE.14})$$

Est générée par u et fait partie de la description polyédrale.

Lemme 4.4. Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$ tel que $e = 0$ et $f > 0$. Alors, la contrainte générée par u est dominée par (FE.14).

Lemme 4.5. Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$ tel que $e = 0$ et $f = 0$. Alors, la contrainte générée par u est redondante dans la description polyédrale.

► On passe à l'élimination de la variable y_{tqj} pour un $q \in V$, $t \in \Lambda \setminus \Lambda^q$ et $j \in T(t)$. Les contraintes contenant y_{tqj} sont :

$$x_{qj} - \sum_{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q} y_{tqj} = 0, \quad j \in V \setminus \{q\}, \quad (\text{FE.15})$$

$$v_t - \sum_{j \in T(t)} y_{tqj} = 0, \quad t \in \Lambda \setminus \Lambda^q, \quad (\text{FE.16})$$

$$y_{tqj} \geq 0, \quad t \in \Lambda \setminus \Lambda^q, j \in T(t).$$

– Afin d'obtenir un cône de projection pointu, on réécrit (FE.15) et (FE.16), comme :

$$x_{qj} - \sum_{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q} y_{tqj} \leq 0, \quad j \in V \setminus \{q\}, \quad (\text{FE.17})$$

$$-x_{qj} + \sum_{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q} y_{tqj} \leq 0, \quad j \in V \setminus \{q\}, \quad (\text{FE.18})$$

$$v_t - \sum_{j \in T(t)} y_{tqj} \leq 0, \quad t \in \Lambda \setminus \Lambda^q, \quad (\text{FE.19})$$

$$-v_t + \sum_{j \in T(t)} y_{tqj} \leq 0, \quad t \in \Lambda \setminus \Lambda^q, \quad (\text{FE.20})$$

– Soient e_j et f_j , pour $j \in V \setminus \{q\}$, les variables correspondantes aux équations (FE.17) et (FE.18), respectivement. Et soient g_t et h_t , pour $t \in \Lambda \setminus \Lambda^q$, les variables correspondantes aux équations (FE.19) et (FE.20), respectivement. Alors, le cône de projection C est :

$$C = \{(e, f, g, h) \mid -e_j + f_j - g_t + h_t \geq 0, t \in \Lambda \setminus \Lambda^q, j \in T(t), e, f \geq 0, g, h \geq 0\}.$$

– L'inégalité associée au cône de projection C , est :

$$\sum_{j \in V \setminus \{q\}} (e_j - f_j)x_{qj} + \sum_{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q} (g_t - h_t)v_t \leq 0. \quad (\text{FE.21})$$

– Pour $u = (e, f, g, h) \in C$, soient :

- $E(u) = \{j \in V \setminus \{q\} \mid e_j > 0\}$,
- $F(u) = \{j \in V \setminus \{q\} \mid f_j > 0\}$,
- $G(u) = \{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q \mid g_t > 0\}$,
- $H(u) = \{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q \mid h_t > 0\}$.

On définit, aussi :

- $D(u) = \{j \in V \setminus \{q\} \mid e_j = f_j = 0\}$,
 - $L(u) = \{t \in \Lambda \setminus \Lambda^q \mid g_t = h_t = 0\}$.
- Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on remplace $E(u)$, $F(u)$, $G(u)$, $H(u)$, $D(u)$ et $L(u)$ par E , F , G , H , D et L , respectivement.
- On remarque que : $E \cup F \cup D = V \setminus \{q\}$ et $G \cup H \cup L = \Lambda \setminus \Lambda^q$.
- Afin d'explorer les propriétés des directions extrêmes de C , on développe les relations entre E , F , G et H pour $u \in \text{ext}(C)$.

Lemme 4.6. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Si $E = F = \emptyset$, alors, la contrainte générée par u est redondante.*

Lemme 4.7. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Si $G = H = \emptyset$, alors, la contrainte générée par u est redondante.*

Lemme 4.8. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Alors, soit $E = \emptyset$, soit $F = \emptyset$.*

Lemme 4.9. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Alors, soit $G = \emptyset$, soit $H = \emptyset$.*

Lemme 4.10. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Alors, soit $F = \emptyset$, soit $H = \emptyset$.*

Lemme 4.11. *Soit $u = (e, f, g, h) \in \text{ext}(C)$. Alors, soit $E = \emptyset$, soit $G = \emptyset$.*

- D'après les lemmes 4.6 - 4.11, on distingue deux ensembles de directions extrêmes ne générant pas de contraintes redondantes :

$$C_1 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) \neq \emptyset, F(u) = \emptyset, G(u) = \emptyset, \text{ et } H(u) \neq \emptyset\}.$$

$$C_2 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) = \emptyset, F(u) \neq \emptyset, G(u) \neq \emptyset, \text{ et } H(u) = \emptyset\}.$$

- Le lemme 4.12 et le lemme 4.13 montrent la relation entre E et H pour $u \in C_1$, et entre F et G pour $u \in C_2$, respectivement.

Lemme 4.12. *Si $u = (e, f, g, h) \in C_1$, alors, $H = \bigcup_{j \in E} \Lambda^{j|q}$.*

Lemme 4.13. *Si $u = (e, f, g, h) \in C_2$, alors, $|F| \geq P$ et $G \subseteq \mathcal{A}_F$.*

- D'après les deux lemmes précédents, on peut limiter C_1 et C_2 à :

$$C_1 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) \neq \emptyset, F(u) = \emptyset, G(u) = \emptyset, \text{ et } H(u) = \bigcup_{j \in E} \Lambda^{j|q}\}.$$

$$C_2 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) = \emptyset, |F(u)| \geq P, \emptyset \subset G(u) \subseteq \mathcal{A}_{F(u)}, \text{ et } H(u) = \emptyset\}.$$

- Le lemme suivant décrit les propriétés des éléments de E et H pour $u \in C_1$.

Lemme 4.14. *Si $u = (e, f, g, h) \in C_1$, alors, $e_j = h_t$, pour $j \in E$ et $t \in H$.*

- Le lemme 4.15 décrit les propriétés des éléments de F et G pour $u \in C_2$.

Lemme 4.15. *Si $u = (e, f, g, h) \in C_2$, alors, $f_j = g_t$, pour $j \in F$ et $t \in G$.*

- Selon lemmes 4.14 et 4.15, on limite C_1 et C_2 à :

$$C_1 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) \neq \emptyset, F(u) = \emptyset, G(u) = \emptyset, H(u) = \bigcup_{j \in E} \Lambda^{jlq}, \text{ et } e_j = h_t = 1,$$

pour $j \in E(u)$ et $t \in H(u)\}$.

$$C_2 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) = \emptyset, |F(u)| \geq P, \emptyset \subset G(u) \subseteq \mathcal{A}_{F(u)}, H(u) = \emptyset, \text{ et } f_j = g_t = 1,$$

pour $j \in F(u)$ et $t \in G(u)\}$.

- Le lemme 4.16 montre que les vecteurs de C vérifiant les propriétés décrites dans C_1 sont des directions extrêmes. Et le lemme 15 décrit les inégalités valides décrites pas ces directions extrêmes.

Lemme 4.16. *Soit :*

$$\mathcal{U}_1 = \{u \in C \mid E(u) \neq \emptyset, F(u) = \emptyset, G(u) = \emptyset, H(u) = \bigcup_{j \in E} \Lambda^{jlq}, \text{ et } e_j = h_t = 1,$$

pour $j \in E(u)$ et $t \in H(u)\}$.

Alors, $\mathcal{U}_1 = C_1$.

Lemme 4.17. *Les inégalités valides générées par $u = (e, f, g, h) \in C_1$, sont :*

$$\sum_{j \in V} x_{qj} = 1, \quad (\text{FE.22})$$

$$- \sum_{j \in J} x_{qj} + \sum_{t \in \mathcal{A}_J} v_t \leq 0, \quad J \subset V \setminus \{q\}, P \leq |J| \leq n-2. \quad (\text{FE.23})$$

- Alors que les directions extrêmes de C dans C_1 génèrent des inégalités faisant partie de la projection, le résultat suivant montre que ce ne est pas vrai pour les directions extrêmes de C_2 .

Lemme 4.18. *Soit*

$$\mathcal{U}_2 = \{u \in \text{ext}(C) \mid E(u) = \emptyset, |F(u)| \geq P, \emptyset \subset G(u) \subseteq \mathcal{A}_{F(u)}, H(u) = \emptyset, \text{ et } f_j = g_t = 1, \text{ pour } j \in F(u) \text{ et } t \in G(u)\}.$$

Alors, les contraintes générées par $u \in \mathcal{U}_2$ sont dominées par (EF.22) et (EF.23).

- Les contraintes valides associées à la projection de y_{tqq} , pour $t \in \Lambda^q$, et de y_{tqj} , pour $j \in V \setminus \{q\}$ et $t \in \Lambda^{jlq}$, sont (FE.14), (FE.22) et (FE.23).

- En répétant le même processus pour tout $q \in V$, on obtient la projection de (FE) où y est éliminé. La nouvelle formulation est :

$$(FV) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad i \in V, \\ x_{ii} - \sum_{t \in \Lambda^i} v_t = 0, \quad i \in V, \quad (\text{FE.28}) \\ - \sum_{j \in J} x_{ij} + \sum_{t \in \mathcal{A}_J} v_t \leq 0, \quad J \subset V, P \leq |J| \leq n-2, i \in V \setminus J \quad (\text{FE.29}) \\ \sum_{t \in \Lambda} v_t = 1, \quad (\text{FE.30}) \\ v_t \geq 0, \quad t \in \Lambda, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j \in V. \end{array} \right.$$

► On élimine, maintenant, les variables v_t , pour $t \in \Lambda$, de la formulation (FV).

- Soit $\phi = \sum_{j=P}^{n-2} \binom{n}{j}$ le nombre d'ensembles J , tels que : $J \subset V$ et $P \leq |J| \leq n-2$. Soit J_1, J_2, \dots, J_ϕ la liste de ces ensembles et soit $\Phi = \{1, 2, \dots, \phi\}$.
- Soient e_i , où $i \in V$, \bar{f}_{ij} , où $j \in \Phi$ et $i \notin J_j$, et g les variables correspondantes aux contraintes (FE.28), (FE.29) et (FE.30), respectivement.
- Puisque (FE.28) et (FE.30) sont des contraintes d'égalités, d'après Balas ([9], les variables e et g sont libres.
- Le cône de projection est :

$$C = \{(e, \bar{f}, g) \mid - \sum_{i \in T(t)} e_i + \sum_{\substack{j \in \Phi \\ J_j \supseteq T(t)}} \sum_{i \in V \setminus J_j} \bar{f}_{ij} + g \geq 0, t \in \Lambda, \bar{f} \geq 0, e, g \text{ libres}\}.$$

– L'inégalité associée à C est :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{j=1}^{\phi} \sum_{i \in V \setminus J_j} \left(\bar{f}_{ij} \sum_{r \in J_j} x_{ir} \right) \leq g, \quad (\text{FE.31})$$

(FE.31) est vérifiée à l'égalité lorsque e , \bar{f} , et g satisfont le lemme 4.2.

La structure du cône de projection C est compliquée, il est très difficile de déterminer ses générateurs. Et donc, il est impossible d'éliminer les variables v_t de la formulation (FV).

Cependant, (FV) et (FE.31) sont utiles puisqu'elles impliquent quelques propriétés basiques des facettes du polytope du p -médian.

4.5 Propriétés des facettes du polytope du p -médian

Soit $u = (e, \bar{f}, g)$ une direction extrême de C . On définit :

$$\Gamma(u) = \{j \in \Phi \mid \exists i \in V \setminus J_j \text{ tel que } \bar{f}_{ij} > 0\}, \text{ et,} \quad (\text{FE.32})$$

$$R(u) = \{i \in V \mid \bar{f}_{ij} > 0, \text{ pour } j \in \Gamma \text{ et } i \in V \setminus J_j\}. \quad (\text{FE.33})$$

Propriété 4.1. Soit $u = (e, \bar{f}, g) \in C$, une direction extrême de C . Pour un $m \in \Phi$ arbitraire, il existe au plus un $k \in V \setminus J_m$ tel que $\bar{f}_{km} > 0$.

Corollaire 4.1. Soit $u = (e, \bar{f}, g) \in C$, une direction extrême de C . Alors, $|R| \leq |\Gamma|$.

Remarque 1

Soit $u = (e, \bar{f}, g) \in C$, une direction extrême de C . On considère la fonction σ :

$$\sigma : \Gamma \rightarrow R$$

telle que, $(j) \notin J_j$, pour $j \in \Gamma$. Donc, on peut réécrire (FE.31) comme :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{j \in \Gamma} \left(\bar{f}_{\sigma(j)j} \sum_{r \in J_j} x_{\sigma(j)r} \right) \leq g, \quad (\text{FE.34})$$

Toute facette est définie par une inégalité de la forme (FE.34). Aussi, les facettes existantes peuvent être généralisées et de nouvelles facettes peuvent être obtenues en définissant, avec attention, Γ , R et σ .

Propriété 4.2. Soit $u = (e, \bar{f}, g) \in C$, une direction extrême de C . Alors, il existe une partition T_1, T_2, \dots, T_t de V , où $T_i \neq \emptyset, i = \overline{1, t}$, telle que $J_j = \bigcup_{i \in Q} T_i$, pour $j \in \Gamma$ et pour un $Q \subseteq \{1, 2, \dots, t\}$.

De plus, $P \leq |J_j| \leq n - 2$.

Remarque 2

On peut utiliser les propriétés 4.1 et 4.2 pour construire des facettes pour le polytope du p -médian de la façon suivante :

- 1) Partitionner V en ensembles non-vides T_1, T_2, \dots, T_t .
- 2) Déterminer Γ où J_j , pour $j \in \Gamma$, est l'union de quelques sous-ensembles de $V : T_1, T_2, \dots, T_t$ et $P \leq |J_j| \leq n - 2$.
- 3) Déterminer un ensemble $R \subseteq V$ tel que $|R| \leq |\Gamma|$, et une fonction $\sigma : \Gamma \rightarrow R$ où $\sigma(j) \notin J_j$, pour $j \in \Gamma$.

4.6 résultats de la formulation étendue

Malgré la difficulté rencontrée lors de la détermination de la structure du cône de projection, deux propriétés des facettes du polytope du p -médian ont été tirées. Ces propriétés ont été utilisées dans l'objectif de généraliser des classes de facettes existantes et de décrire une nouvelle classe de facettes. Ces généralisations ainsi qu'une description complète du polytope du p -médian lorsque $p = n - 2$ vont être présentées dans cette section.

4.6.1 Généralisation des facettes de De Farias et de De Vries

On rappelle les inégalités de De Vries [38] pour le polytope du p -médian (voir la section 3.4.8) :

$$\sum_{i \in R \cup S} x_{ii} - \frac{1}{r-p} \sum_{i \in R} \sum_{\substack{j \in R \\ i \neq j}} x_{ij} - \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq p - 1. \quad (\text{I'8})$$

Ces inégalités sont valides et définissantes de facettes pour le polytope du p -médian.

► Soit $T_1, T_2, \dots, T_r, S, Q$ une partition de V où $r > p$, $T_i \neq Q$ pour $i = \overline{1, r}$, et $Q \neq \emptyset$. Et soit

$$T = \bigcup_{i=1}^r T_i.$$

Soit $R \subset V$, tel que $|R| = r$, $R \subseteq T \cup Q$, et $|R \cap T_i| \leq 1, i = \overline{1, r}$.

Théorème 4.7. *L'inégalité*

$$\sum_{i \in R \cup S} x_{ii} - \frac{1}{r-p} \sum_{i \in R} \sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} - \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq p-1. \quad (IG1)$$

est valide.

Preuve.

- Puisque seules les solutions entières sont considérées, $|I| = p$.
- Si $I \not\subseteq T \cup S$, alors $\sum_{i \in T \cup S} x_{ii} \leq p-1$ ce qui établit le théorème.
- On suppose que $I \subseteq T \cup S$. Alors, $\sum_{i \in T \cup S} x_{ii} = p$ et tout sommet de $V \setminus I$ est associé à un médian de $T \cup S$.
- On remarque qu'au moins $(r-p)$ sous-ensembles de T_1, T_2, \dots, T_r ne contiennent aucun médian.

1. On suppose que $S \cap I = \emptyset$. Soit $\tilde{R} \subset R$, tel que pour tout $i \in \tilde{R}$, $T_{\delta(i)} \cap I = \emptyset$. Ce qui implique :

$$\sum_{i \in \tilde{R}} \sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} \geq r-p.$$

Et par conséquent :

$$\sum_{i \in T \cup S} x_{ii} - \frac{1}{r-p} \sum_{i \in \tilde{R}} \sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} \leq p-1.$$

2. Alternativement, on suppose que $S \cap I \neq \emptyset$. Donc, $|S \cap I| > 1$. Aussi, au moins $r - (p - |S \cap I|)$ sous-ensembles de T_1, T_2, \dots, T_r ne contiennent aucun médian.

Soit $\tilde{R} \subset R$, tel que pour tout $i \in \tilde{R}$, $T_{\delta(i)} \cap I = \emptyset$. Alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{r-p} \sum_{i \in \tilde{R}} \sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} + \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} &\geq \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in \tilde{R}} \sum_{j \in (T \setminus T_{\delta(i)}) \cup S} x_{ij} \\ &\geq \frac{r - (p - |S \cap I|)}{r-p+1} \\ &\geq 1. \end{aligned}$$

► Par conséquent,

$$\sum_{i \in R \cup S} x_{ii} - \frac{1}{r-p} \sum_{i \in R} \sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} - \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq p-1.$$

□

On montre, maintenant, que (IG1) génère une facette \mathcal{F} pour le polytope du p -médian. Pour cela, on considère 3 sous-ensembles de solutions entières réalisables qui définissent les points de \mathcal{F} .

X_1 : Les p médians sont dans T et $|T \cap T_{\delta(i)}| \leq 1$, pour $i \in R$.

Si $|T \cap T_{\delta(i)}| = 1$, alors le sommet i est affecté à un médian dans $T_{\delta(i)}$. Le reste des sommets non-médians sont affectés arbitrairement.

X_2 : Il y a $(p - 1)$ médians dans $T \cup S$ et un médian dans Q .

Un non-médian $i \in R$ est affecté à un médian dans $T_{\delta(i)} \cup Q$. Tous les autres sommets non-médians sont associés arbitrairement.

X_3 : Il y a $(p - 1)$ sommets médians dans T et un médian dans S , et $|I \cap T_{\delta(i)}| \leq 1$, pour $i \in R$.

Si $|T \cap T_{\delta(i)}| = 1$, alors le sommet i est affecté à un médian dans $T_{\delta(i)}$. L'autre non-médian de R est associé au médian de S . Les non-médians restant sont affectés arbitrairement.

– Pour $x \in X_1$, on a $\sum_{i \in T \cup S} x_{ii} = p$ car il y a $(r - p)$ éléments $i \in R$ tels que $T_{\delta(i)}$ n'a aucun médian, et $\sum_{i \in R} \sum_{j \in T_{\delta(i)}} x_{ij} = r - p$. Alors, x satisfait (IG1) à l'égalité.

– Les mêmes arguments établissent que les solutions dans X_2 et X_3 satisfont (IG1) à l'égalité.

► Alors, \mathcal{F} définit une face du polytope entier du p -médian.

Théorème 4.8. Soit $2 \leq p \leq r$. Si $|Q| = 1$ ou $|(T \cup S) \setminus R| \geq 1$, alors, l'inégalité (IG1) est induisante de facettes pour le polytope du p -médian.

Les conditions mentionnées dans le théorème 4.8 sont nécessaires pour que l'inégalité (IG1) ne soit pas triviale.

Théorème 4.9. Les inégalités (IG1) contiennent les inégalités (I'8) de De Vries.

Preuve. Supposons que $T_{\delta(i)} = \{i\}$, pour $i \in R$. Alors, $T = R$ et $S = V \setminus (T \cup Q) = V \setminus (R \cup Q)$.

► L'inégalité (IG1) est équivalente à (I'8). \square

Lorsque $\emptyset \subset S \subset V \setminus R$, De Vries et al [38] ont établi que l'inégalité (I'8) est induisante de facettes. Le théorème 4.8 permet d'établir que les inégalités (I'8) induisent des facettes sous des conditions un peu plus légères, qui sont $\emptyset \subset S \subset V \setminus R$ ou $|S| = n - r - 1$.

Théorème 4.10. Les inégalités (IG1) contiennent les inégalités (I9) de De Farias.

Preuve. – Pour $i \in R_1 \cup R_2 = R$, $\sum_{j \in T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} = 1 - \sum_{T_{\delta(i)} \cup Q \cup S} x_{ij}$.

– Alors,

$$\begin{aligned} \sum_{i \in R} \sum_{T \setminus T_{\delta(i)}} x_{ij} &= \mathbf{r} - \sum_{i \in R} \sum_{T_{\delta(i)} \cup Q \cup S} x_{ij} \\ &= \mathbf{r} - \sum_{i \in R} \sum_{j \in T_{\delta(i)}} x_{ij} - \sum_{i \in R} \sum_{j \in Q} x_{ij} - \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \quad (1) \end{aligned}$$

– De plus,

$$\sum_{i \in T \cup S} x_{ii} = p - \sum_{i \in Q} x_{ij} \quad (2)$$

– En substituant (1) et (2) dans (IG1), on obtient :

$$-\sum_{i \in Q} x_{ii} + \frac{1}{r-p} \left(\sum_{i \in R} \sum_{j \in T_{\delta(i)}} x_{ij} + \sum_{i \in R} \sum_{j \in Q} x_{ij} + \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \right) - \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq \frac{p}{r-p}.$$

– Ceci peut être réécrit comme :

$$\sum_{i \in R} \sum_{j \in T_{\delta(i)}} x_{ij} + \sum_{i \in R} \sum_{j \in Q} x_{ij} + \frac{1}{r-p+1} \sum_{i \in R} \sum_{j \in S} x_{ij} + (r-p) \sum_{i \in Q} x_{ii} \leq p. \quad (3)$$

► Lorsque $S = \emptyset$, l'inégalité (3) se réduit à l'inégalité (I9). □

Le théorème 4.8 établit que les inégalités (IG1) induisent des facettes pour le polytope du p -médian lorsque $|(T \cup S) \setminus R| = |T \setminus R| \geq 1$ ou $|Q| = n - |T| = 1$. Ces conditions avec $i \in T_{\delta(i)} \cup Q, \forall i \in R$ sont suffisantes pour que l'inégalité (I9) soit une facette pour le polytope du p -médian.

4.6.2 Généralisation des W_2 -facettes

on rappelle, tout d'abord, les W_2 -inégalités décrites par *Avella et Sassano* dans [4], pour le polytope du p -médian.

- Soit $W \subseteq V$ tel que $3 \leq |W| \leq \bar{p} + 1$.
 - Soit $H \subset (W : W)$ un ensemble d'arcs vérifiant $|H \cap \delta^+(w)| = 1, \forall w \in W$. Cet ensemble est dit "ensemble d'arcs perdus".
 - Soient $U = \{w \in W \mid H \cap \delta^-(w) = \emptyset\}$, $Q = W \setminus U$, et $\bar{W} = V \setminus W$.
- le théorème 3.16 montre qu'une W_2 -inégalité de la forme :

$$x((W : W) \setminus H \cup (U : \bar{W})) \leq |W| - 2 \quad (\mathbf{I1})$$

est valide pour le $M_p(G)$, si et seulement si $|U| \leq \max\{1, |W| - 3\}$ [41].

► Avant de donner une généralisation des W_2 -inégalités, il est nécessaire d'introduire quelques notations :

- Soit $T_1, T_2, \dots, T_t, S, W_1, W_2, \dots, W_q$ une partition de V , où $q \geq 2$ et $T_i \neq \emptyset$ pour $i = \overline{1, t}$ et $W_j \neq \emptyset$ pour $j = \overline{1, q}$. Et soient $T = \bigcup_{i=1}^t T_i$ et $W = \bigcup_{j=1}^q W_j$ avec $|W| \geq 3$.

Et :

$$t \geq \begin{cases} p-1 & , \text{ Si } S = \emptyset, \\ p & , \text{ Sinon.} \end{cases}$$

- Soit $Q_1, Q_2, \dots, Q_r, r = \binom{t}{p-1}$ sous-ensembles de T , telsque, chaque Q_i est une union de S et $(p-1)$ sous-ensemble de T_1, \dots, T_t .

– Soit $R_1 \subseteq T$ tel que $|R_1| = \begin{cases} 0 & , \text{ Si } S = \emptyset, \\ r & , \text{ Sinon.} \end{cases}$

Si $|R_1| = r$, on définit une fonction bijective δ :

$$\delta : R_1 \rightarrow \{1, 2, \dots, r\}$$

Telle que :

$$i \notin Q_{(i)} \text{ pour } i \in R_1$$

– Soit $R_2 \subseteq W$ avec $|R_2| = q$. on définit la fonction bijective γ :

$$\gamma : R_2 \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$$

Telle que :

$$i \notin W_{\gamma(i)} \text{ pour } i \in R_2$$

Soient δ^- et γ^- les fonctions inverses de δ et γ , respectivement.

Théorème 4.11. *L'inégalité :*

$$\sum_{i \in T} x_{ii} - \sum_{i \in R_1} \sum_{j \in Q_{\delta(i)}} x_{ij} - \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W_{\gamma(i)} \cup T} x_{ij} \leq p - 2 \quad (IG2)$$

est valide pour le polytope du p -médian.

Preuve. Si $\sum_{i \in T} x_{ii} \leq p - 2$, donc, (IG2) est valide. Et donc, on suppose que $\sum_{i \in T} x_{ii} = p - 1$ ou p .

Si $\sum_{i \in T} x_{ii} = p - 1$, alors un médian est soit dans S soit dans l'un des sous-ensembles W_1, W_2, \dots, W_q .

- Si le médian est dans S , alors au moins un des Q_1, Q_2, \dots, Q_r inclut tous les p médians. Supposons que ce sous-ensemble est $Q_{\delta(l)}$ pour un $l \in R_1$, donc $\sum_{j \in T_{\delta(l)}} x_{lj} = 1$

et (IG2) est satisfaite.

- Supposons que le médian est l'un des W_1, W_2, \dots, W_q . Sans perte de généralité, on suppose que cet ensemble est $W_{\gamma(k)}$, pour un $k \in R_2$.

En résultat, $\sum_{j \in W_{\gamma(k)} \cup T} x_{kj} = 1$. Donc, (IG2) est valide.

Si $\sum_{i \in T} x_{ii} = p$, puisque $|R_2| = q \geq 2$, on a $\sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W_{\gamma(i)} \cup T} x_{ij} = q \geq 2$. Et donc, (IG2) est valide. □

Théorème 4.12. *L'inégalité (I1) est un cas particulier des inégalités (IG2).*

Preuve. • Soit $S \neq \emptyset$. Alors, $T = \overline{W}$, $t \geq p - 1$ et $R_1 = \emptyset$. Donc, (IG2) est équivalente à

$$\sum_{i \in T} x_{ii} - \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W_{\gamma(i)} \cup T} x_{ij} \leq p - 2 \quad (4)$$

- Puisque

$$\begin{aligned} \sum_{i \in T} x_{ii} - \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W_{\gamma(i)} \cup T} x_{ij} &= \sum_{i \in T} x_{ii} - \sum_{i \in R_2} \left(1 - \sum_{j \in W \setminus W_{\gamma(i)}} x_{ij} \right) \\ &= p - \sum_{i \in W} x_{ii} - |R_2| + \sum_{i \in R_2} \left(1 - \sum_{j \in W \setminus W_{\gamma(i)}} x_{ij} \right) \end{aligned}$$

- (4) implique que $-\sum_{i \in W} x_{ii} - |R_2| + \sum_{i \in R_2} \left(1 - \sum_{j \in W \setminus W_{\gamma(i)}} x_{ij} \right) \leq |R_2| - 2$.
- Pour tout $i \in R_2$, $i \in W \setminus W_{\gamma(i)}$. Soit $U = W \setminus R_2$. Alors,

$$\begin{aligned} -\sum_{i \in W} x_{ii} + \sum_{i \in R_2} x_{ii} + \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W \setminus (\{i\} \cup W_{\gamma(i)})} x_{ij} &= -\sum_{i \in U} x_{ii} + \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W \setminus (\{i\} \cup W_{\gamma(i)})} x_{ij} \\ &= -\sum_{i \in U} \left(1 - \sum_{j \in V \setminus \{i\}} x_{ij} \right) + \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W \setminus (\{i\} \cup W_{\gamma(i)})} x_{ij} \\ &= -|U| + \sum_{i \in U} \sum_{j \in W \setminus \{i\}} x_{ij} + \sum_{i \in U} \sum_{j \in W \setminus (\{i\} \cup W_{\gamma(i)})} x_{ij} \\ &= -|U| + \sum_{i \in U} \sum_{j \in W \setminus \{i\}} x_{ij} + \sum_{i \in U} \sum_{j \in \bar{W}} x_{ij} \\ &\quad + \sum_{i \in R_2} \sum_{j \in W \setminus (\{i\} \cup W_{\gamma(i)})} x_{ij} \\ &= -|U| + x(U : W) + x(U : \bar{W}) + x((R_2 : W) \setminus H') \\ &\leq |R_2| - 2. \end{aligned}$$

Où, $H' = \bigcup_{i \in R_2} (\{i\} : W_{\gamma(i)})$.

- En conséquent,

$$\begin{aligned} x[(U : W) \cup (U : \bar{W}) \cup ((R_2 : W) \setminus H')] &= x[((W : W) \setminus H') \cup (U : \bar{W})] \\ &\leq |R_2| + |U| - 2 \\ &= |W| - 2. \end{aligned}$$

- Maintenant, on montre que H' satisfait la propriété $|H' \cap \delta^-(\{w\})| = 1$, pour tout $w \in W$.
 - Pour tout $w \in W$, il existe un et un seul $k \in R_2$ tel que $w \in W_{\gamma(k)}$.
 - Par définition de H' , $(k, w) \in H'$. Donc, $|H' \cap \delta^-(\{w\})| = 1$.

□

Le théorème 4.12 établit que l'inégalité (I1) est un cas particulier de (IG2) lorsque $S = \emptyset$. Dans la suite, on suppose que $S \neq \emptyset$, et donc, $R_1 \neq \emptyset$ et $t \geq p$. Le théorème suivant montre que chaque inégalité (IG2) génère une facette \mathcal{F} du polytope du p -médian.

Théorème 4.13. *Lorsque $q \geq 3$ ou $|W_l| \geq 2$ pour $1 \leq l \leq q$, toute inégalité (IG2) induit une facette pour le polytope du p -médian.*

Les démonstrations des théorèmes et des lemmes présentés dans cette section, ainsi qu'un exemple de W_2 -facettes généralisées sont illustrés dans [41].

4.6.3 Généralisation des facettes de k -couverture

Dans cette section, on introduit les inégalités de k -couverture introduites par *Avella et Sassano* [2]. (Les inégalités de couverture et les inégalités de I^* -couverture, ainsi que toutes les définitions nécessaires sont données dans la section 3.4.2).

On considère un ensemble A et un désordre \mathcal{L} sur A . Une k -couverture T (respectant L) avec $k \geq 1$, est un sous-ensemble de A tel que $|T \cap L| \geq k$ pour tout $L \in \mathcal{L}$.

Soit $S \subseteq A$ et $F(S)$ le désordre défini par tous les sous-ensembles \bar{p} -indépendants de A contenant $r(S)$ arcs de S . Et soit T_S la k -couverture de $F(S)$.

► Donc, l'inégalité de k -couverture associée à T_S est :

$$x(S) - \frac{1}{k}x(T_S) \leq r(S) - 1 \quad (\mathbf{I}'2)$$

On remarque que $k \leq \bar{p}$. Si $k = \bar{p}$, alors $x(S) = \bar{p}$ et alors $(\mathbf{I}'2)$ est triviale. Donc, on suppose dans la suite que $k < \bar{p}$.

On définit $N_S \subseteq A \setminus S$ comme étant l'ensemble des arcs n'appartenant à aucun sous-ensemble \bar{p} -indépendant contenant $r(S)$ arcs de S .

Avella et Sassano (1994)[2] ont défini une inégalité de k -couverture étoilée par une inégalité de la forme $(\mathbf{I}'2)$ avec $\emptyset \subset Y \subset V$, $|\bar{Y}| \leq \bar{p} - k$ et $S =_{y \in Y} \delta^+(\{y\})$.

Donc, $|V \setminus Y| = n - |Y| \geq p + k$. On dit, alors, que Y définit $N_S = \delta^-(Y)$.

Soient $A_S = A \setminus (S \cup N_S)$ et $T_S \subseteq A_S$. Donc, $A_S = (V \setminus Y : V \setminus Y)$ et $r(S) = |Y|$.

Théorème 4.14. *Soit $k \geq 1$ un entier. Une inégalité de k -couverture étoilée définie par un ensemble $Y \subseteq V$ de cardinalité $|Y| \leq \bar{p} - k$, est définissante de facette pour le polytope du p -médiann si $p \geq 2$ et si $x(T_S) \geq k$ est définissante de facette pour le polytope du p -médiann sur le graphe induit par $V \setminus Y$.*

En conséquent, une inégalité de k -couverture étoilée n'est pas toujours définissante de facette.

Un problème potentiel associé au théorème 4.14, est qu'il n'est pas facile de vérifier que la condition $x(T_S) \geq k$ est définissante de facette pour le PMP sur le graphe induit par $V \setminus Y$, surtout lorsque $|Y|$ est petite.

► Dans cette section, on établit une classe d'inégalités de 1-couverture, garanties à être définissantes de facettes, en appliquant les propriétés de base développées dans la section 4.5.

– Soit W_1, W_2, \dots, W_t une partition de $V \setminus Y$, où :

$$|v \setminus Y| = n - |Y| \geq n - (\bar{p} - 1) = p + 1, \text{ avec } t \geq p \text{ et } W_i \neq \emptyset, \overline{1}, t.$$

– Soit $q = \binom{t}{p} \leq n$. Et soient $Q_i \subseteq V \setminus Y$, $i = \overline{1, q}$ tels que Q_i est l'union de p sous-ensembles différents de W_1, W_2, \dots, W_t .

- Soit $R \subseteq V$ avec $|R| = q$.
- On définit la fonction bijective $\delta : R \rightarrow \{1, 2, \dots, q\}$ telle que $i \in Q_{\delta(i)}, \forall i \in R$.

Théorème 4.15. *L'inégalité*

$$\sum_{i \in V \setminus Y} x_{ii} - \sum_{i \in R} \sum_{j \in Q_{\delta(i)}} x_{ij} \leq p - 1 \quad (\text{IG3})$$

est valide.

Preuve.

1. On suppose que $I \not\subseteq V \setminus Y$. Alors, il y a au moins un médian dans Y , et donc, $\sum_{i \in V \setminus Y} x_{ii} \leq p - 1$.

L'inégalité (IG3) est établie puisque $\sum_{i \in R} \sum_{j \in Q_{\delta(i)}} x_{ij} \geq 0$.

2. On suppose que $I \subseteq V \setminus Y$. Alors, $\sum_{i \in V \setminus Y} x_{ii} = p$.

Puisque tous les médians sont dans $V \setminus Y$, il existe au moins un sommet $k \in R$ tel que $I \subseteq Q_{\delta(k)}$.

Pour ce k , on a $\sum_{j \in Q_{\delta(k)}} x_{kj} = 1$. □

Lemme 4.19. Soit $S = \bigcup_{y \in Y} \delta^+(\{y\})$ et $F(S)$ le désordre défini par les ensembles \bar{p} -indépendants de A contenant $r(S)$ arcs de S .

Soit $T_S = \bigcup_{i \in R} (\{i\} : Q_{\delta(i)})$. Donc, T_S est une 1-couverture de $F(S)$.

Preuve.

- On a : $r(S) = |Y|$.
- Par définition de $F(S)$, $r(L \cap S) = |Y|$ pour $L \in F(S)$. Alors, pour la solution réalisable entière associée à chaque $L \in F(S)$, on a $I \subseteq V \setminus Y$. Ainsi, il existe au moins un $k \in R$ tel que $I \subseteq Q_{\delta(k)}$, où k est assigné à un $l \in I \cap Q_{\delta(k)}$.
- En conséquent, $(k, l) \in L$.
- On remarque que $T_S = \bigcup_{i \in R} (\{i\} : Q_{\delta(i)})$. Et donc, $(k, l)_S$ et $|T_S \cap L| \geq 1$. □

► Depuis le lemme 4.19, $\bigcup_{i \in R} (\{i\} : Q_{\delta(i)})$ définit une classe de 1-couverture lorsque $S =$

$\bigcup_{y \in Y} \delta^+(\{y\})$. Donc, (IG3) est une classe d'inégalités de couverture.

Le théorème suivant montre que (IG3) génère des facettes du polytopes entier du PMP.

Théorème 4.16. Soient $t \geq p$ et $|Y^-| \geq 2$. Pour tout $i \in R$, on suppose que $[(V \setminus R) \setminus Q_{\delta(i)} \setminus \{i\}] \neq \emptyset$ et $Y \setminus \{i\} \neq \emptyset$. Donc, les inégalités (IG3) définissent des facettes pour le polytope du p -médian.

Corollaire 4.2. Soient $t \geq p + 2$ et $|Y^-| \geq 2$. Donc, les inégalités (IG3) définissent des facettes pour le polytope du p -médian.

4.6.4 Description complète du polytope p -médian pour $p = n - 2$

Dans cette section, on explore la formulation étendue réduite (FV) obtenue dans la section 4.4.

- Si $p = n - 2$, alors $|J_s| = p$, $\forall s \in \Phi$, et $\phi = n(n - 1)/2$.
- Pour tout $t \in \Lambda$, il existe exactement un $s \in \Phi$ tel que $J_s = T(t)$.
- Pour tout $i \in V \setminus J_s$, on a $|V \setminus \{i\} \cup J_s| = 1$.
- Soit $\{j\} = V \setminus (\{i\} \cup J_s)$ et soit $f_{ij} = \bar{f}_{ij}$.

► Donc, le cône de projection correspondant est :

$$C = \{(e, f, g) \mid - \sum_{l \neq j, j} e_l + f_{ij} + f_{ji} + g \geq 0; i, j \in V, i \neq j, f \geq 0; e, g \text{ libres}\}.$$

► L'inégalité associée à C , est :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} \left(f_{ij} \sum_{l \neq i, j} x_{il} + f_{jj} \sum_{l \neq i, j} x_{jl} \right) \leq g \quad (5.1)$$

Elle peut être réécrite comme :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} [f_{ij}(1 - x_{ii} - x_{ij}) + f_{jj}(1 - x_{jj} - x_{ji})] \leq g$$

Puisque e et g sont libres, C n'est pas un cône pointu. Alors, on cherche un ensemble de générateurs de C au lieu des directions extrêmes.

Lemme 4.20. *On suppose que (e, f, g) est un générateur de C . Alors, $f_{ij} = 0$ ou $f_{ji} = 0$ ou tous les deux, pour $i, j \in V$ et $i \neq j$.*

D'après le lemme 4.20, et dans le restant de la section, on suppose que $f_{ij} = 0$, pour $i, j \in V$ et $i > j$. Le résultat suivant établit une condition sur les éléments de C .

Lemme 4.21. *$(e, f, g) \in C$ si et seulement si, $f_{ij} \geq \max(0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g)$, $i, j \in V$ et $i > j$.*

Le lemme 4.21 établit que $f_{ij} \geq \max(0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g)$, $i, j \in V$ et $i > j$ pour chaque vecteur de C .

Le résultat suivant considère les vecteurs où $f_{rs} \geq \max(0, \sum_{l \neq r, s} e_l - g)$, $r, s \in V$.

Soit :

$$W_1 = \{(0, f, 0) \mid f_{rs} = 1, r, s \in V, r < s, f_{ij} = 0, (i, j) \neq (r, s) \text{ et } i, j \in V\}.$$

On remarque que $W_1 \subseteq C$.

Lemme 4.22. *Soit $u = (e, f, g) \in C$, où $f_{rs} \geq \max(0, \sum_{l \neq r, s} e_l - g)$, $r, s \in V$ et $r > s$. Soit $u' =$*

$(e, f', g) \in C$, où $f'_{rs} \geq \max(0, \sum_{l \neq r, s} e_l - g)$, et $f'_{ij} = f_{ij}$ pour toute $(i, j) \neq (r, s)$.

Alors, $u = u' + u^1$, où $\frac{u^1}{\delta} \in W_1$, pour un $\delta > 0$.

On définit

$$C_1 = \{(e, f, g) \in C \mid f_{ij} > \max(0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g), i, j \in V \text{ et } i < j\}. C_2 = \{(e, f, g) \in C \mid f_{ij} = \max(0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g), i, j \in V \text{ et } i < j\}.$$

► Alors, $C = C_1 \cup C_2$.

– Soit $u = (e, f, g) \in C_1$. Le lemme 4.22 implique que $u = u' + \sum_{i=1}^{|W_1|} \delta_i u^i$, où $u' = (e, f', g) \in C_2$,

$u^i \in W_1$ et $\delta_i \geq 0, i = \overline{1, |W_1|}$. Alors, C_1 peut être généré par les vecteurs de C_2 et W_1 .

– Pour cela, on commence par rechercher les générateurs de C_2 . On définit :

$$W_2 = \{(0, 0, 1), (1, 0, p), (-1, 0, -p)\},$$

où 1 est un p -vecteur dont tous les éléments sont égaux à 1.

$$W_3 = \{(e, 0, 1) \in C_2 \mid e_k = 1 \text{ pour un } k \in V \text{ et } e_i = 0, i \in V \setminus \{k\}\},$$

$$W_4 = \{(e, f, -1) \in C_2 \mid e_k = -1 \text{ pour un } k \in V \text{ et } e_i = 0, i \in V \setminus \{k\}\}.$$

– Pour simplifier les notations, on réindexe les variables telles que $e_1 \geq e_2 \geq \dots \geq e_n$. Soient s et q des entiers tels que $s + q \leq n$.

– On définit : $Q_1 = \{1, 2, \dots, s\}, Q_2 = \{s + 1, s + 2, \dots, n - q\}$ et $Q_3 = \{n - q + 1, n - q + 2, \dots, n\}$.

$$Q_1 = \emptyset, \text{ lorsque } s = 0,$$

$$Q_3 = \emptyset, \text{ lorsque } q = 0, \text{ et}$$

$$Q_2 = \emptyset, \text{ lorsque } s + q = n, \text{ et}$$

$$Q_1 \cup Q_2 \cup Q_3 = V.$$

– On définit :

$$W_5 = \{(e, f, s - 1) \in C_2 \mid 0 \leq p \leq n - 1, q = 0, e_i = 1 \text{ pour } i \in Q_1 \text{ et } e_i = 0 \text{ pour } i \in Q_2\},$$

$$W_6 = \{(e, f, s - q) \in C_2 \mid s, q \geq 1, p + q \leq n - 1, e_i = 1 \text{ pour } i \in Q_1, e_i = 0 \text{ pour } i \in Q_2 \text{ et } e_i = -1 \text{ pour } i \in Q_3\},$$

– Pour un vecteur $u = (e, f, g) \in C$, on utilise la matrice suivante, dite ef -matrice, pour désigner les éléments de e et f :

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} & 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \vdots \\ n \end{array} & \left(\begin{array}{cccccc} e_1 & f_{12} & f_{13} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & e_2 & f_{23} & \dots & f_{2n} \\ f_{31} & f_{32} & e_3 & \dots & f_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & f_{n3} & \dots & e_n \end{array} \right) \end{array}$$

Notons que les f_{ii} ne sont pas définis, et que la ef -matrice fournit une représentation visuelle de la relation entre e et f , pour $u \in W_i, i = 4, 5, 6$.

– On rappelle que $f_{ij} = 0, i, j \in V$ et $i > j$.

Pour $u = (e, f, -1) \in W_4 \subseteq C_2, f_{ij} = \max(0, \sum_{l \neq i, j} e_s + 1)$ pour $i, j \in V$ et $i > j$.

Donc, la ef -matrice de W_4 est :

Théorème 4.17. *L'ensembles de vecteurs de $\sum_{i=1}^6 W_i$ est un ensemble complet de générateur de C .*

Maintenant, on utilise les résultats obtenus pour établir une description polyédrale complète lorsque $p = n - 2$.

– Puisque $p \geq 2$, $n = p + 2 \geq 4$.

– Tout d'abord, on détermine une condition nécessaire pour qu'une contrainte ne définisse pas de facettes pour le polytope du p -médian. Pour cela, on réécrit (FE.31) comme :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h_{ij} x_{ij} \leq g, \quad (5.2)$$

Avec, $h_{ij} \geq 0$ pour $i, j \in V$ et $i \neq j$, e et g sont libres.

– Pour $p = n - 2$, (5.1) donne :

$$h_{ij} = \sum_{l \neq i, j} f_{il}, \text{ pour } i, j \in V \text{ et } i \neq j \quad (5.3)$$

– Soit X l'ensemble de toutes les solutions réalisables entières.

Théorème 4.18. *Si $h_{rs} > \max\{\sum_{i \in V} e_i x_{ii}\} - g$ pour $r, s \in V$ et $r \neq s$, alors, (5.2) n'induit aucune facette pour le polytope entier du PMP.*

Preuve.

• Soit $\delta = \max_{x \in X} \{\sum_{i \in V} e_i x_{ii}\} - g$. Si $\delta < 0$ alors (5.2) ne peut pas induire de facettes car $h_{ij} \geq 0$, $i, j \in V$ et $i \neq j$. Donc, on suppose que $\delta \geq 0$.

• Soit h' un vecteur tel que $h'_{rs} = \delta$ et $h'_{ij} = h_{ij}$ pour tout $(i, j) \neq (r, s)$.

Aussi, soit h'' un vecteur tel que $h''_{rs} = 2h_{rs} - \delta$, et $h''_{ij} = h_{ij}$ pour tout $(i, j) \neq (r, s)$.

Alors,

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h'_{ij} x_{ij} \leq g, \quad (5.4)$$

Et :

$$\sum_{i \in V} e_i x_{ii} - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h''_{ij} x_{ij} \leq g, \quad (5.5)$$

• Soit $x^0 \in X$ une solution réalisable entière, donc x^0 satisfait (5.2).

Si $x_{rs}^0 = 0$, alors, x^0 satisfait (5.4) et (5.5).

Sinon, si $x_{rs}^0 = 1$, alors, $\sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h'_{ij} x_{ij}^0 \geq h'_{rs} x_{rs}^0 = \delta$ et $\sum_{i \in V} e_i x_{ii}^0 - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h'_{ij} x_{ij}^0 - g \leq 0$.

Aussi, $\sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h''_{ij} x_{ij}^0 \geq h''_{rs} x_{rs}^0 = 2h_{rs} - \delta$.

Et donc, $\sum_{i \in V} e_i x_{ii}^0 - \sum_{\substack{i, j \in V \\ i \neq j}} h''_{ij} x_{ij}^0 - g \leq \delta - (2h_{rs} - \delta) \leq 0$.

► Donc, x^0 satisfait toujours (5.4) et (5.5). Ainsi, (5.4) et (5.5) sont des inégalités valides. Et puisque (5.2) est une combinaison de (5.4) et (5.5), (5.2) n'est pas induisante

de facettes.

En utilisant les générateurs de $\bigcup_{i=1}^6 W_i$, on construit un ensemble d'inégalités valides.

Pour $u = (e, f, g) \in C$, on ne suppose plus que $f_{ij} = 0$, pour $i, j \in V$ et $i > j$. Alors, la définition de W_1 devient :

$$W_1 = \{(0, f, 0) \mid f_{rs} = 1 \text{ pour un } r, s \in V \text{ et } f_{ij} = 0 \text{ pour } i, j \in V \text{ et } (i, j) \neq (r, s)\}.$$

Aussi, dans la définition de C_2 , $f_{ij} = \max\{0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g\}$ pour $i, j \in V$ et $i < j$, devient :

$$W_1 = \{(0, f, 0) \mid f_{rs} = 1 \text{ pour un } r, s \in V \text{ et } f_{ij} = 0 \text{ pour } i, j \in V \text{ et } (i, j) \neq (r, s)\} \quad (5.6)$$

Et si $\max\{0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g\} = 0$ alors $f_{ij} = f_{ji} = 0$. Et si $\max\{0, \sum_{l \neq i, j} e_l - g\} = \delta > 0$ alors, soit $f_{ij} = \delta$ et $f_{ji} = 0$, soit $f_{ij} = 0$ et $f_{ji} = \delta$. (Voir la ef -matrice)

Théorème 4.19. La contrainte générée par $\bigcup_{i=1}^3 W_i$ est la contrainte de cardinalité :

$$\sum_{i \in V} x_{ii} = p \quad (5.7)$$

Preuve.

- Soit $u = (e, f, g) \in W_1$, où $f_{rs} = 1$ pour certains $r, s \in V$ et $f_{ij} = 0$ pour tout $(i, j) \neq (r, s)$.

En substituant u dans (5.1), on obtient :

$$- \sum_{i \in V \setminus \{r, s\}} x_{ri} \leq 0$$

qui est redondante.

- Lorsque $u \in W_2$, $(1, 0, p)$ et $(-1, 0, -p)$ génèrent (5.7). La contrainte générée par $(0, 0, 1)$ est $0 \leq 1$ qui est triviale.
- Soit $u = (e, 0, 1) \in W_3$ où $e_k = 1$ pour un $k \in V$, et $e_i = 0$ pour $i \in V \setminus \{k\}$. La contrainte générée par u est $x_{kk} \leq 1$, qui est redondante.

□

Théorème 4.20. Les contraintes générées par $u = (e, f, -1) \in W_4$ sont :

$$\sum_{i \in V \setminus \{k, l\}} x_{ii} + \sum_{i \in V \setminus \{k, l\}} x_{ik} + x_{kl} \leq p, \quad k, l \in V, k \neq l \quad (5.8)$$

$$-x_{kk} + \sum_{i \in V \setminus \{k\}} x_{ii} + \sum_{i \in V \setminus \{k\}} x_{ik} \leq p, \quad k \in V \quad (5.9)$$

Preuve.

- Soit $u = (e, f, -1) \in W_4$ où $e_k = -1$ pour un $k \in V$ et $e_i = 0$ pour $i \in V \setminus \{k\}$.
- L'équation (5.6) implique que $f_{ik} + f_{ki} = 1$ pour $i \in V \setminus \{k\}$, et toutes les autres composantes de f sont nulles. (Voir la ef -matrice de W_4)
- Soit $\{F_1, F_2\}$ une partition de $V \setminus \{k\}$ où $f_{ik} = 1$ pour $i \in F_1$ et $f_{ki} = 1$ pour $i \in F_2$.

En substituant u dans (5.1), on obtient :

$$-x_{kk} + \sum_{i \in V \setminus \{k\}} 0 \cdot x_{ii} + \sum_{i \in F_1} \sum_{j \neq i, k} x_{ij} - \sum_{i \in F_2} \sum_{j \neq i, k} x_{kj} \leq -1 \quad (5.10)$$

- En remplaçant $\sum_{i \in F_1} \sum_{j \neq i, k} x_{ij}$ par $\sum_{i \in F_1} (1 - x_{ii} - x_{ik})$ et $\sum_{i \in F_2} \sum_{j \neq i, k} x_{kj}$ par $\sum_{i \in F_2} (1 - x_{kk} - x_{ki})$, l'inégalité (5.10) peut être réécrite comme :

$$(|F_2| - 1)x_{kk} + \sum_{i \in F_1} x_{ii} + \sum_{i \in F_1} x_{ik} - \sum_{i \in F_2} x_{ki} \leq n - 2 = p \quad (5.11)$$

- Maintenant, on considère les valeurs de $|F_2|$ qui génèrent des facettes. On suppose que $|F_2| \geq 2$.

Soient $r, s \in F_2$. Puisque $n \geq 4$, il existe un $j \in V \setminus \{k, r, s\}$. Alors, (5.3) implique que $h_{kj} \geq f_{kr} + f_{ks} = 2$.

On remarque que $\max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in V} e_i x_{ii} - g \right\} = \max_{x \in X} \{-x_{kk} - (-1)\} \leq 1$. ► Alors, $h_{kj} > \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in V} e_i x_{ii} - g \right\}$. Ainsi, le théorème 4.18 implique que (5.11) n'induit pas de facettes. Et donc, On ne considère que le cas où $|F_2| \leq 1$.

- ♦ Si $|F_2| = 1$, alors, soit $F_2 = \{l\}$ avec $l \in V \setminus k$. Alors, $F_1 = V \setminus \{k, l\}$ et (5.11) se réduit à (5.8).
- ♦ Si $|F_2| = 0$, alors, $F_1 = V \setminus k$ et (5.11) se réduit à (5.9).

□

Théorème 4.21. Les contraintes générées par $u = (e, f, y - 1) \in W_5$ sont :

$$x_{kl} - x_{ll} \leq 0, \quad k, l \in V, k \neq l \quad (5.12)$$

$$x_{kl} + x_{lm} + x_{mk} \leq 1, \quad k, l, m \in V, k \neq l \neq m \quad (5.13)$$

Preuve.

- Soit $u = (e, f, y - 1) \in W_5$. L'équation (5.6) implique que $f_{ij} + f_{ji} = 1$ pour $i, j \in Q_2$ et toutes les autres composantes de f sont nulles. (Voir la ef -matrice de W_5)
- On remarque que :

$$\begin{aligned} \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in V} e_i x_{ii} - g \right\} &= \max_{x \in X} \left\{ \sum_{i \in Q_1} x_{ii} - (y - 1) \right\} \\ &\leq y - (y - 1) \\ &= 1. \end{aligned}$$

- On suppose que $f_{ij} = f_{ik} = 1$ pour un certain $i \in Q_2$ et $j, k \in Q_2 \setminus \{i\}$, $j \neq k$. Puisque $n \geq 4$, il existe un $l \in V \setminus \{i, j, k\}$.

D'après (5.3), $h_{il} \geq f_{ij} + f_{ik} = 2$. Alors, le théorème 4.18 implique que la contrainte générée par u n'induit aucune facette. Ainsi, pour tout $i \in Q_2$, $\sum_{j \in Q_2 \setminus \{i\}} f_{ij} \leq 1$.

Donc, le nombre de composantes non-nulles de f est au plus $|Q_2|$. Et puisque $f_{ij} + f_{ji} = 1$, $\forall i, j \in Q_2$, $i \neq j$, le nombre de composantes non-nulles de f est $|Q_2|(|Q_2| - 1)/2$. Alors, $|Q_2|(|Q_2| - 1)/2 \leq |Q_2|$, i.e. $|Q_2| \leq 3$.

Donc, il y a 3 cas : $|Q_2| = 1$, $|Q_2| = 2$ et $|Q_2| = 3$.

Cas 1 : $|Q_2| = 1$ Alors, $|Q_1| = n - 1$, $g = n - 2 = p$ et $f = 0$.

En substituant u dans (5.1), on a : $\sum_{i \in Q_1} x_{ii} \leq p$ qui est dominée par (5.7).

Cas 2 : $|Q_2| = 2$ Alors, $|Q_1| = n - 1$ et $g = p - 1$.

Soit $Q_2 = \{k, l\}$. Donc, $f_{kl} + f_{lk} = 1$.

Sans perte de généralité, on suppose que $f_{kl} = 1$.

En remplaçant u dans (5.1), On obtient :

$$\sum_{i \in Q_1} x_{ii} + \sum_{i \in Q_2} 0 \cdot x_{ii} - \sum_{j \neq k, l} x_{kj} \leq p - 1, \quad k, l \in V, k \neq l \quad (5.14)$$

En remplaçant $\sum_{i \in Q_1} x_{ii}$ par $p - x_{kk} - x_{ll}$ et $\sum_{j \neq k, l} x_{kj}$ par $1 - x_{kk} - x_{kl}$, l'inégalité (5.14) peut être réécrite comme (5.12).

Ces inégalités valides sont les contraintes de capacité.

Cas 3 : $|Q_2| = 3$ Alors, $|Q_1| = n - 3 = p -$ et $g = p - 2$.

Soit $Q_2 = \{k, l, m\}$. Puisque $f_{kl} + f_{lk} = 1$ et sans perte de généralité, on suppose que $f_{kl} = 1$ et $f_{lk} = 0$.

Pour tout $i \in Q$, on établit que $\sum_{j \in Q_2 \setminus \{i\}} f_{ij} \leq 1$. Par conséquent, $f_{km} = 0$ et $f_{mk} = 1$.

Idem, $f_{ml} = 0$ et $f_{lm} = 1$.

En remplaçant u dans (5.1), on obtient :

$$\sum_{i \in Q_1} x_{ii} - \sum_{j \neq k, l} x_{kj} - \sum_{j \neq l, m} x_{lj} - \sum_{j \neq m, k} x_{mj} \leq p - 2, \quad k, l, m \in V, k \neq l \neq m \quad (5.15)$$

Comme $\sum_{i \in Q_1} x_{ii} = p - x_{kk} - x_{ll} - x_{mm}$, $\sum_{j \neq k, l} x_{kj} = 1 - x_{kk} - x_{kl}$, $\sum_{j \neq l, m} x_{lj} = 1 - x_{ll} - x_{lm}$, et $\sum_{j \neq m, k} x_{mj} = 1 - x_{mm} - x_{mk}$, l'inégalité (5.15) est équivalente à (5.13). □

Théorème 4.22. Les contraintes générées par $u = (e, f, p - q) \in W_6$ n'induisent pas de facettes pour le polytope entier du p -médian.

► Une description linéaire complète de (IP), lorsque $p = n - 2$, est :

$$(CP) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{i \in V} \sum_{j \in V} d_{ij} x_{ij} \\ \sum_{i \in V} x_{ii} = p, \\ \sum_{j \in V} x_{ij} = 1, \quad i \in V, \\ x_{kl} - x_{ll} \leq 0, \quad k, l \in V, k \neq l, \\ x_{kl} + x_{lm} + x_{mk} \leq 1, \quad k, l, m \in V, k \neq l \neq m, \\ \sum_{i \in V \setminus \{k, l\}} x_{ii} + \sum_{i \in V \setminus \{k, l\}} x_{ik} + x_{kl} \leq p, \quad k, l \in V, k \neq l, \\ -x_{kk} + \sum_{i \in V \setminus \{k\}} x_{ii} + \sum_{i \in V \setminus \{k\}} x_{ik} \leq p, \quad k \in V, \\ x_{ij} \geq 0, \quad i, j \in V. \end{array} \right.$$

Théorème 4.23. *Lorsque $n \geq 4$, $x_{kl} - x_{ll} \leq 0$ pour $k, l \in V$, $k \neq l$ est définissantes de facettes.*

Théorème 4.24. *Pour $n \geq 4$, $x_{kl} \geq 0$ pour $k, l \in V$, $k \neq l$ est définissantes de facettes.*

Le théorème suivant établit que (CP) est une description complète minimale de $PMP(G)$.

Théorème 4.25. *(CP) est une description complète minimale du polytope entier du p -médian pour $p = n - 2$.*

Les preuves détaillées et complètes de tous les résultats présentés dans cette section sont fournis dans [41].

4.7 Conclusion

Dans ce chapitre, on a présenté les principales notions de projection des polyèdres, décrit la formulation étendue proposée par *Zhao et Posner*, dans [41] et éliminé les variables supplémentaires γ de la formulation étendue. L'élimination des variables v s'avère impossible, vu que la structure du cône de projection est difficile à décrire.

Malgré la difficulté rencontrée, deux propriétés des facettes du polytope du p -médian ont été tirées. Ces propriétés ont été utilisées pour généraliser les facettes existantes, notamment : les facettes de *De Vries*, les facettes de *De Farias*, les W_2 -facettes et les facettes de k -couverture. On a, aussi, présenté une description complète minimale du polytope du p -médian lorsque $p = n - 2$.

references

Conclusion générale

Le problème du p -médián est un problème classique de localisation largement étudié et appliqué dans plusieurs domaines vitaux tels que : la santé, l'informatique, l'éducation, l'industrie et la logistique, les statistiques, etc. Pour cela de nombreuses recherches et études lui ont été consacrées.

Dans notre travail, nous avons passé en revue les travaux effectués sur le problème du p -médián. Nous avons présenté les formulations mathématiques classiques les plus utilisées, étudié la complexité du problème sur des structures générales et particulières de graphes. Nous avons aussi listé les méthodes de résolution proposées et utilisées jusqu'à présent pour la résolution rapide du problème, parfois sans garantie de l'optimalité de la solution obtenue.

L'étude polyédrale qui est une technique très efficace, sert à décrire le polytope des solutions réalisables du problème, l'étudier et l'utiliser pour résoudre le problème à l'optimum dans le cas où les points extrêmes de l'enveloppe convexe sont entiers. Sinon, des inégalités valides peuvent être définies et rajoutées à la formulation de base, dans la perspective d'éliminer les solutions fractionnaires.

Le seul inconvénient de cette approche est que les formulations obtenues en rajoutant les inégalités valides, ont souvent un nombre de contraintes exponentiel en la taille des données. Pour cela, les chercheurs ont tenté l'approche polyédrale étendue, où on additionne un nombre polynomial de variables pour rendre le nombre de contraintes polynomial.

Ces deux techniques ont été appliquées au problème du p -médián, et ont permis d'obtenir de nombreux résultats. Cependant, aucune d'entre elles n'a permis la description complète du polytope dans son cas général, à l'exception du cas où la valeur de p fixée à $n - 2$.

Ces techniques ont montré leur puissance et efficacité en les appliquant avec succès à de nombreux problèmes combinatoires.

En perspective, ces approches peuvent être utilisées dans des cas particuliers du problème où les graphes ont des structures particulières ou pour des valeurs fixes du paramètre p ou avec des contraintes supplémentaires.

D'autres formulations étendues du problème, dans son cas général ou pour des cas particuliers, peuvent être proposées et tentées pour établir de nouveaux résultats et voire même pour obtenir une description complète du polytope dans l'espace d'origine.

Bibliographie

- [1] H. Amrouche. Sur l'hybridation des métaheuristiques. Master's thesis, Université Mouloud Mammeri, Tizi-Ouzou, 2012.
- [2] P. Avella and A. Sassano. An exact algorithm for the maximum stable set problem. *Computational Optimization and Applications*, 3 (4)(243-25), 1994.
- [3] P. Avella and A. Sassano. On the p-median polytope. Technical Report 22/94, Dipartimento di Informatica e Sistemistica, Università di Roma " La Sapienza ", Italy, 1994.
- [4] P. Avella and A. Sassano. On the p-median polytope. *Springer-Verlag, Math. Program*, Ser. A 89 :(395-411), 2000.
- [5] P. Avella, A. Sassano, and I. Vasilév. computational study of large-scale p-median problems. *Springer-Verlag, Math. Program*, Ser. A 109 :(89-114), 2006.
- [6] M. Baiou, F. Barahona, and J. Correa. On the p-median polytope of fork-free graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics, Elsevier*, 36(143-149), 2010.
- [7] M. Baiou, F. Barahona, and J. Correa. On the p-median polytope and the intersection property : polyhedra and algorithms. *SIAM journal on Discrete Mathematics*, 25, No 1,pp(1-20), 2011.
- [8] E. Balas. Projection and lifting in combinatorial optimization. *Annals of Operations Research*, Volume :140(125-161), 2005.
- [9] I. Barany, J. Edmonds, and L. Wolsey. Packing and covering a tree by subtrees. *Combinatorica*, 6(221-233), 1986.
- [10] C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1973.
- [11] J.F. Hêche D. Werra, T.M. Liebling. *Recherche opérationnelle pour ingénieurs I*. Dunod, Paris, 2003.
- [12] G.B. Dantzig. Application of the simplex method to a transportation problemm, in activity analysis of production and allocation. *T.C. Koopmans (ed.)*, Vol. 2 , No. 1(359-373), 1951.
- [13] I.R. de Farias Jr. A family of facets for the uncapacitated p-median polytope. *Operations Research Letters, Elsevier*, 28(161-167), 2001.
- [14] R. Diestel. *Graph Theory*. Springer-Verlag, Heidelberg, 2010.
- [15] M. R. Garey and D. S. Johnson. *Computers and Intractibility : A guide to the theory of NP-completeness*. W. H. Freeman and Co, San Francisco, 1979.

- [16] S.I. Gass. *Linear programming : Methods and applications*. Dover publications, Inc, 2003.
- [17] S.I. Gass. *Précis de recherche opérationnelle : Méthodes et exercices d'application*. Dunod, Paris, 2014.
- [18] F. Glover. Heuristics for integer programming using surrogate constraints. *Decision Sciences*, 8, n 1(156-166), 1977.
- [19] F. Glover. Future paths for integer programming and links to artificial intelligence. *Computers Operations research*, 13(533-549), 1986.
- [20] M. Goemans. Notes on the median polytope on trees, 1992.
- [21] J.J. Grefenslette. *Incorporating problem specific knowledge into genetic algorithms, in genetic algorithms and simulated annealing*. Davis, L. D. (Ed.), 1987.
- [22] O. Kramer H. Mühlenbein, M. Gorges-Schleuter. *Evolution Algorithms in combinatorial optimization*, volume tome 7. Parallel computing, 1988.
- [23] Volker Kaibel. Extended formulations in combinatorial optimization. *arXiv*, V 1(1104.1023), 2011.
- [24] O. Kariv and S. L. Hakimi. An algorithmic approach to network location problems. ii : The p-medians. *SIAM*, 37(3), Decembre 1979.
- [25] A. Kolen and Ai. Tamir. Covering problems. in : Mirchandani, p.b., francis, r.l : (eds.) discrete location theory. *New York : Wiley-Interscience*, pp(263-304), 1990.
- [26] J. Krarup and P.M. Pruznan. Ingredients of locational analysis, in discrete location theory. *New York Wiley-Interscience, forthcoming*, 1990.
- [27] F. Barahona M. Baiou. On the p-median polytope of a special class of graphs. *Cahier n 2005-013*, 2005.
- [28] G. Zambelli M. Conforti, G. Cornuéjols. *Integer Programming*. Springer International Publishing, Switzerland, 2014.
- [29] G. Zambelli M. Conforti, G. Cornuéjols. Extended formulations in combinatorial optimization. *Annals of Operations Research*, Volume 204, Issue 1(pp 97-143), 2013.
- [30] C. Mannino and A. Sassano. An exact algorithm for the maximum stable set problem. *Computational Optimization and Applications*, 3 (4)(243-258), 1994.
- [31] N. Mladenović, J. Brimberg, P. Hansenc, and J.A. Moreno-Pérez. *The p-median problem : A survey of metaheuristic approaches*. PhD thesis, Tinity University, 2005.
- [32] W.R. Pulleyblank. *Handbooks in Operations Research and Management Science, chapter Polyhedral combinatorics*. 1989.
- [33] Josh Reese. *Methods for Solving the p-Median Problem : An Annotated Bibliography*. PhD thesis, Tinity University, 2005.
- [34] C. ReVelle and R. Swain. Central facilities location. *Geographical Analysis*, 2 :(30-42), 1970.

- [35] M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire : méthodes mathématiques et algorithmiques*. Hermann, 1984.
- [36] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. Wiley Interscience, Chichester, 1986.
- [37] M. Jalali Varnamkhasti. Overview of the algorithms for solving the p-median facility location problems. *Department of Mathematics, Islamic Azad University, Iran. Advanced Studies in Biology*, 4(49-55), 2012.
- [38] S. De Vries, M.E. Posner, and R.V. Vohra. Polyhedral properties of the k-median problem on a tree. *Springer-Verlag, Math. Program, Ser. A* 110 :(261-285), 2007.
- [39] J. Ward, R.T. Wong, P. Lemke, and A. Oudjit. Properties of the tree k-median linear programming relaxation. Technical report, Interdisciplinary Engineering Studies, Purdue University, 1987.
- [40] D.B. West. *Introduction to Graph Theory*. Pearson Education (Singapore) Pte. Ltd., 2002.
- [41] W. Zhao, B.S, and M.S. *polyhedral structure of the k-median problem*. PhD thesis, The Ohio State University, 2007.