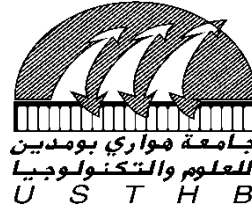


N° d'ordre : 05/2016-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée pour l'obtention du **grade de DOCTEUR EN SCIENCES**

**En : MATHEMATIQUES**

**Spécialité : Equations aux Dérivées Partielles**

**Par : BOUDJERADA Rachida**

**Sujet**

Contribution à l'étude  
des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre  
et application à la dynamique des dislocations

Soutenue publiquement, le 29 /05 / 2016 , devant le jury composé de :

Mr M. A. MOUSSAOUI	Professeur à l'ENS	Président
Mr M. S. MOULAY	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr A. EL HAJJ	Maître de Conférences HDR, à l'U. Compiègne	Co- Directeur de thèse
Mme D. HAMROUN	Professeur à l'USTHB	Examinatrice
Mr T. ALIZIANE	Professeur à l'USTHB	Examinateur
Mr H. IBRAHIM	Professeur à l'U. Haddath	Examinateur
Mr A. MOKRANE	Professeur à l'ENS	Examinateur
Mme N. AISSA	Maître de Conférences /A, à l'USTHB	Examinatrice

# Remerciements

Je remercie tout d'abord mon directeur de thèse, Monsieur Moulay Mohamed Said, qui m'a encadrée et m'a encouragé à collaborer avec d'autres chercheurs ce qui m'a permis d'avancer dans ma thèse, après un travail de longue haleine, en essayant plusieurs pistes de recherche. Je le remercie sincèrement, pour son aide et son soutien.

Je tiens à remercier vivement Monsieur Ahmad El hajj de l'université de Technologie de Compiègne et mon co-directeur de thèse, qui m'a initié à la théorie des solutions de viscosité et la dynamique des dislocations. Sans lui, ce travail ne serait pas abouti. J'ai beaucoup profité de ses compétences et sa rigueur. Je lui suis très reconnaissante pour sa disponibilité, ses conseils et ses efforts.

C'est un grand honneur pour moi que Monsieur Moussaoui Mohand de l'ENS de Kouba a accepté de présider le jury de thèse, une lourde tâche. Je l'en remercie profondément.

Je remercie aussi mes chers collègues de la Faculté de Mathématiques de l'USTHB Madame Aissa Naima, Monsieur Aliziane Tarik et Madame Hamroun Djamila, d'avoir accepté d'examiner cette thèse et l'intérêt qu'ils donnent au travail.

Un très grand merci à Monsieur Hassan Ibrahim de l'université de Hadath du Liban qui a accepté l'examen de cette thèse et l'importance qu'il porte à mon travail. C'est un réel plaisir pour moi qu'il participe au jury de soutenance et qu'il l'enrichisse par ses propositions et ses remarques.

Je remercie également Monsieur Mokrane Abdelhafid de l'ENS de Kouba d'avoir accepté de participer au jury de thèse.

Merci encore une fois à tous les membres du jury, je leur en suis profondément reconnaissante.

Je n'oublie pas de remercier chaleureusement Monsieur Régis Monneau de l'École des Ponts et Chaussées de Paris qui est à l'origine de ce sujet de recherche et de m'avoir mis en contact avec Ahmad El hajj. Je tiens à lui exprimer ma sincère gratitude.

J'exprime toute ma reconnaissance et mes vifs remerciements aux différents laboratoires qui ont contribué à la réalisation de cette thèse par leur accueil, les équipements mis à ma disposition et l'ambiance du travail. Je cite le laboratoire AMNEDP de l'USTHB dont je suis membre. Ainsi que le laboratoire LMAC de l'Université

---

de Technologie de Compiègne et le laboratoire CERMICS de l'École des Ponts et Chaussées de Paris où j'ai passé des séjours scientifiques très bénéfiques et très riches. A ma famille, mes proches et mes ami(e)s qui par leurs prières et leurs encouragements, j'ai pu surmonter tous les obstacles.

Merci à tous ceux et celles qui m'ont aidée de près ou de loin à la réalisation de ce travail, par une réflexion, un soutien, des encouragements, une aide ou autres.

---

## Résumé

Cette thèse porte sur l'analyse théorique des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, plus particulièrement, nous nous sommes intéressés à l'équation eikonale, qui décrit l'évolution de fronts avec une vitesse normale. Notre travail a été motivé par l'application à la dynamique des dislocations qui sont des défauts microscopiques linéaires qui se déplacent dans les cristaux lorsque ceux-ci sont soumis à des contraintes extérieures. D'une manière générale, la dynamique d'une ligne de dislocation est décrite par une équation eikonale non locale. Nous avons utilisé, la notion de solutions de viscosité qui est le cadre le plus adapté à ce type d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Notre travail se focalise principalement sur trois parties. Dans une première partie, pour permettre une vision globale sur les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, nous rappelons les applications reliées à ce type d'équations, les méthodes utilisées ainsi que les principaux résultats d'existence et d'unicité connus dans le cadre de la notion de solutions de viscosité. La deuxième partie de cette thèse est consacrée à l'étude de l'équation eikonale unidimensionnelle avec données discontinues. Nous rappelons d'abord l'espace des fonctions à variation bornée  $BV(\mathbb{R})$  et nous montrons des résultats d'existence globale de solutions de viscosité dans un sens assez faible avec données  $BV$ . La dernière partie est consacrée à la modélisation de la dynamique des dislocations dans un premier chapitre et dans un second, nous appliquons nos résultats obtenus à l'équation eikonale non-locale qui modélise ce problème.

## Abstract

This thesis deals with a theoretical study of Hamilton Jacobi equations of first order, in particular, we are interested to the eikonal equation, which describes the motion of interfaces with normal velocity. Our work was motivated by the application to dislocation dynamics, which are moving microscopic linear defects in crystals, under the presence of exterior stress. More generally, the dynamics of dislocation line is described by a non-local eikonal equation. We used the notion of viscosity solutions which is the most appropriate framework for this type of non-linear partial differential equations. Our work focusses essentially on three parts. In the first part, to allow a global vision on Hamilton-Jacobi equations of first order, we recall the related applications for these equations, the methods used for their resolution and the main existence and uniqueness results known in the frame work of viscosity solutions theory. The second part is devoted to the study of the eikonal equation with discontinuous data. We recall first the space of functions of bounded variation  $BV(\mathbb{R})$  and we prove, global existence results of discontinuous viscosity solutions in weak sense with  $BV$  initial data. The last part is devoted, to the modeling of dislocation dynamics in first and in second, we apply our results to the non-local eikonal equation associated to this model.

# Notations

## Notations générales

- $u^*(x)$  : enveloppe semi-continue supérieurement
- $u_*(x)$  : enveloppe semi-continue inférieurement
- $f_r$  : fonction continue à droite
- $f_l$  : fonction continue à gauche
- $\bar{u}(x, t)$  : semi-limite supérieure
- $\underline{u}(x, t)$  : semi-limite inférieure
- $\sigma$  : tenseur des contraintes
- $\varepsilon$  : tenseur des déplacements
- $eV(f)$  : variation essentielle de  $f$
- $pV(f)$  : variation ponctuelle de  $f$
- $VT(f)$  : variation totale de  $f$ .

---

## Espaces fonctionnels

- $C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$  espace des fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ .
- $BUC(\mathbb{R}^n = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ bornée et uniformément continue}\}$
- $UC(\mathbb{R}^n = \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ uniformément continue}\}$
- $BV(\mathbb{R}) = \{u \text{ fonction à variation bornée}\}$
- $SCS(E) := \{u : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ semi-continue supérieurement}\}$
- $SCI(E) := \{u : E \rightarrow \mathbb{R} \text{ semi-continue inférieurement}\}$
- $C(E) : \text{Espace des fonctions continues sur } \mathbb{R}^n \text{ restreint à } E$
- $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n) := \{u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \text{ fonctions Lipschitz continues}\}.$

# Sommaire

<b>Table des figures</b>	<b>1</b>
<b>Introduction générale</b>	<b>3</b>
1 Propagation de fronts et équation eikonale . . . . .	3
2 Un modèle non-local : Les dislocations . . . . .	5
3 Solutions de viscosité pour l'équation eikonale . . . . .	7
3.1 Introduction . . . . .	7
3.2 Définitions des solutions de viscosité . . . . .	8
3.2.1 Définitions . . . . .	8
3.3 Propriétés fondamentales des solutions de viscosité . . . . .	10
3.3.1 Stabilité . . . . .	10
3.3.2 Principe de comparaison et unicité . . . . .	11
4 Quelques résultats d'existence et d'unicité pour l'équation eikonale . .	12
4.1 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation eikonale locale	12
4.2 Quelques résultats d'existence et d'unicité pour la dynamique	
des dislocations . . . . .	13
5 Résultats obtenus . . . . .	14
5.1 Introduction . . . . .	14
5.2 Résultat d'existence globale pour l'équation eikonale avec don-	
nées $BV$ . . . . .	17
5.3 Résultat d'existence globale avec données $BV$ croissantes . . .	18
5.4 Résultats d'existence pour la dynamique des dislocations . . .	18
6 Guide de lecture de la thèse . . . . .	19

## **I Rappels sur les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre** **21**

<b>1 Quelques applications des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre</b>	<b>23</b>
1 Introduction . . . . .	24

## SOMMAIRE

---

2	Le contrôle optimal . . . . .	24
2.1	Historique . . . . .	24
2.2	Description du modèle . . . . .	25
3	Géométrie : Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi . . .	26
3.1	La méthode "level-set" . . . . .	28
3.2	La dynamique des dislocations . . . . .	30
4	Équations de Hamilton-Jacobi stationnaires et applications . . . . .	32
4.1	Introduction . . . . .	32
4.2	Traitement d'images . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Rappels sur les méthodes de résolution des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre</b>	<b>37</b>
1	Introduction . . . . .	38
2	Méthode des caractéristiques . . . . .	38
3	Méthode de viscosité évanescence . . . . .	41
4	Solutions de viscosité . . . . .	42
4.1	Introduction . . . . .	42
4.2	Solutions de viscosité obtenues par la viscosité évanescence . .	44
4.3	Solutions de viscosité continues, définitions et propriétés . . .	45
4.4	Propriétés des solutions de viscosité continues . . . . .	47
4.4.1	Consistence avec les solutions classiques . . . . .	47
4.4.2	Stabilité continue . . . . .	47
4.4.3	Principe de comparaison et unicité . . . . .	49
4.4.4	Expression explicite de la solution de viscosité Hopf-Lax formula . . . . .	52
4.5	Propagation à vitesse finie . . . . .	54
4.6	Solutions de viscosité discontinues . . . . .	55
4.6.1	Motivations et définitions . . . . .	55
4.7	Propriétés des solutions de viscosité discontinues . . . . .	57
4.7.1	Stabilité discontinue . . . . .	57
4.7.2	Principe de comparaison . . . . .	60
4.8	Existence de solutions de viscosité par la méthode de Perron .	61
4.9	Régularité des solutions de viscosité . . . . .	62
5	Équations de Hamilton-Jacobi et lois de conservation scalaires . . . .	62
5.1	Lois de conservation scalaires et solutions entropiques . . . . .	62
5.2	Solutions entropiques et solutions de viscosité . . . . .	63

<b>II</b>	<b>Étude de l'équation eikonale unidimensionnelle avec données discontinues</b>	<b>65</b>
<b>3</b>	<b>Espace des fonctions à variation bornée dans <math>\mathbb{R}</math></b>	<b>67</b>
1	Introduction . . . . .	68
2	Définitions de l'espace des fonctions à variation bornée . . . . .	68
2.1	Variation totale . . . . .	68
2.2	Espace $BV(\mathbb{R})$ . . . . .	68
2.3	Dérivée au sens des distributions d'une fonction à variation bornée . . . . .	70
2.4	Variation ponctuelle et variation totale . . . . .	71
2.5	Compacité et convergence dans l'espace $BV(\mathbb{R})$ . . . . .	73
3	Propriétés des fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$ . . . . .	73
3.1	Fonctions $BV$ et fonctions croissantes . . . . .	74
3.2	Ensemble des points de discontinuité d'une fonction $BV$ . . . . .	75
3.3	Limite à droite, limite à gauche d'une fonction $BV$ . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Résultats d'existence globale pour l'équation eikonale avec données <math>BV</math></b>	<b>77</b>
1	Introduction and main results . . . . .	79
1.1	Setting of the problem . . . . .	79
1.2	Main results . . . . .	81
1.3	Organization of the chapter . . . . .	83
2	Global solution for parabolic regularized equation . . . . .	83
3	<i>A priori</i> uniform estimates on the solution of (2.17) . . . . .	85
4	Global continuous solution for regularized eikonal equation . . . . .	90
4.1	Passage to the limit when the parameter $\eta$ tends to 0 . . . . .	90
4.2	Proof of Theorem 1.1 (i) . . . . .	93
5	Existence of sub and super discontinuous viscosity solutions . . . . .	94
5.1	Some useful results for viscosity solutions . . . . .	94
5.2	Proof of Theorem 1.1 (ii) . . . . .	97
6	Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions . . . . .	98
6.1	Preliminary results . . . . .	99
6.2	Proof of Theorem 1.2 . . . . .	101
6.3	Proof of Theorem 1.1 (iii) . . . . .	104
<b>III</b>	<b>Application à la dynamique des dislocations</b>	<b>109</b>
<b>5</b>	<b>Introduction et modélisation de la dynamique des dislocations</b>	<b>111</b>
1	Introduction . . . . .	112
2	Élasticité linéaire . . . . .	112

## SOMMAIRE

---

2.1	Tenseur des déformations . . . . .	112
2.2	Tenseur des contraintes . . . . .	113
2.3	Loi de Hooke . . . . .	114
2.4	Équilibre élastique . . . . .	115
3	Déformations plastiques . . . . .	116
3.1	Vecteurs de Burgers . . . . .	118
3.2	Déplacement des dislocations . . . . .	120
3.3	Mouvement de dislocations et déformation plastique . . . . .	122
4	Les dislocations et leurs propriétés . . . . .	123
4.1	Dislocation coin . . . . .	125
4.2	Dislocation vis . . . . .	125
5	Modélisation de la dynamique des dislocations . . . . .	126
<b>6</b>	<b>Résultats d'existence globale de solution pour l'équation eikonale non-locale modélisant la dynamique de dislocations avec données <math>BV</math></b>	<b>131</b>
1	Introduction and main result . . . . .	132
2	Existence, uniqueness and <i>a priori</i> estimates of the regularized problem	135
3	Passage to the limit and proof of Theorem 1.1 . . . . .	137
3.1	Discontinuous viscosity solutions to non-local equations . . . . .	137
3.2	Passage to the limit and proof of Theorem 1.1 . . . . .	138
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>141</b>
	Bibliographie . . . . .	141

# Table des figures

1	Mouvement d'un front $\Gamma_t$ selon la normale. . . . .	4
2	Dislocations dans le matériau Al-Mg. . . . .	6
1.1	Observation de dislocations au micro électronique. . . . .	31
1.2	Forme d'une surface. . . . .	33
1.3	Éclairage d'une surface. . . . .	34
2.1	Solutions au sens Lipschitz. . . . .	43
5.1	Déplacement de deux points dans un corps déformable . . . . .	113
5.2	Tenseur des contraintes . . . . .	114
5.3	Courbe de déformation d'un matériau . . . . .	117
5.4	Lignes de glissement dans un échantillon d'aluminium . . . . .	118
5.5	Dislocations vues au microscope électronique en transmission. . . . .	118
5.6	Dislocation coin, dislocation vis . . . . .	119
5.7	Dislocation mixte . . . . .	119
5.8	Circuit de Burgers autour de la dislocation, circuit reproduit dans un cristal parfait . . . . .	120
5.9	Déplacement d'une dislocation coin dans un cristal . . . . .	120
5.10	Montée d'une dislocation coin, c=cran . . . . .	121
5.11	Glissement et montée d'une dislocation . . . . .	121
5.12	Déplacement d'une dislocation coin . . . . .	122
5.13	Déplacement d'un tapis lourd . . . . .	123
5.14	Circuit de Burgers . . . . .	124
5.15	Circulation du gradient de déplacement et loi des noeuds . . . . .	124
5.16	Déplacement des dislocations coin et vis . . . . .	125
5.17	Géométrie d'une dislocation coin . . . . .	126
5.18	Géométrie d'une dislocation vis . . . . .	126
5.19	Ligne de dislocation . . . . .	128

## TABLE DES FIGURES

---

# Introduction générale

*Cette thèse porte sur l'analyse théorique des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Nous nous sommes intéressés particulièrement à l'analyse mathématique de l'équation eikonale, qui décrit la propagation de fronts avec une vitesse normale. Une application des résultats obtenus est faite sur un modèle de la dynamique des dislocations.*

Cette introduction est composée de six sections. La première section concerne l'évolution de fronts avec une vitesse normale prescrite. Pour étudier ce genre de problèmes, une première approche dite par lignes de niveaux, consiste à représenter le front comme une ligne de niveau 0 d'une fonction auxiliaire  $u$ . Cette approche, ramène l'étude d'un problème d'évolution géométrique à un problème d'EDP puisque  $u$  vérifie une équation de Hamilton-Jacobi. Dans le cas où la vitesse ne dépend que de la position du front et du temps, cette approche conduit à une équation eikonale dite locale. Dans la seconde section, nous présentons un modèle non-local de la propagation de fronts, il s'agit de la dynamique des dislocations qui est la motivation principale de notre travail. Nous montrons que l'analyse mathématique de cette dynamique conduit à une équation eikonale non-locale. Dans la troisième section, nous évoquons les difficultés reliées à la définition d'une bonne solution pour ce type d'EDP, particulièrement l'équation eikonale et nous donnons le cadre fonctionnel adapté à l'étude de ces équations, qui est la notion de solutions de viscosité dont nous rappelons les définitions principales et quelques propriétés fondamentales. Dans la section quatre, nous présentons les différents résultats d'existence et d'unicité connus pour l'équation eikonale, ainsi que pour la dynamique des dislocations. La cinquième section est consacrée à la présentation de notre problème ainsi que notre contribution et les résultats obtenus à l'issue de nos travaux. Dans la dernière section, nous présentons l'organisation du manuscrit, un guide de lecture de thèse.

## 1 Propagation de fronts et équation eikonale

Un front ou une hypersurface est le bord  $\Gamma$  d'un domaine ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^n$ , nous parlons de propagation lorsque ce front dépend du temps et nous notons  $\Gamma_t = \partial\Omega_t$ , le front au temps  $t$ ,  $t \in [0, T]$ , où  $T > 0$ . La figure suivante représente la propagation du front  $\Gamma_t$  selon la vitesse normale  $\vec{n}$ .

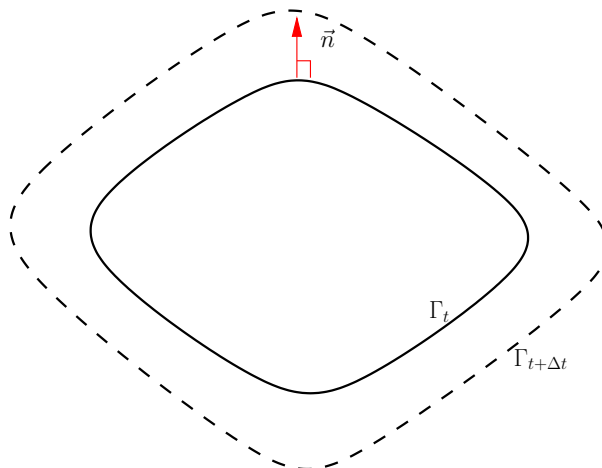


FIGURE 1 – Mouvement d'un front  $\Gamma_t$  selon la normale.

Nous supposons que le front  $\Gamma_t$  évolue avec une vitesse normale  $V_{x,t} = \mathcal{V}_{\Omega_t}(x)\vec{n}_{\Omega_t}(x)$  où  $\vec{n}_{\Omega_t}$  est la normale unitaire sortante de  $\Gamma_t$  au point  $x$  ( $\Gamma_t$  est "orienté" par son "intérieur"  $\Omega_t$ ). L'équation de l'évolution s'écrit alors

$$\frac{d\Gamma_t}{dt} = V_{x,t} = \mathcal{V}_{\Omega_t}(x)\vec{n}_{\Omega_t}(x) \quad (1.1)$$

L'équation géométrique (1.1) est difficile à manipuler, vue que nous pouvons avoir l'apparition de singularités au cours de la propagation du front ou changement de topologies par rapport au front initial. La méthode "level-set" ou "surfaces de niveaux" de Stanley Osher et James Sethian [79] permet d'adopter un point de vue bien plus fructueux sur ces problèmes. L'idée consiste à considérer que le front  $\Gamma_t$  que nous supposons régulier est la surface de niveau 0 d'une certaine fonction auxiliaire  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , régulière telle que, Pour tout  $t \geq 0$ ,

$$u(\cdot, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_t, \quad u(\cdot, t) > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t \quad \text{et} \quad u(\cdot, t) < 0, \quad \text{ailleurs}$$

et telle que le gradient de  $u$  en espace vérifie  $Du(x, t) \neq 0$ , si  $x \in \Gamma_t$ .

Sachant que

$$\vec{n}_{\Omega_t}(x) = -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|}.$$

En prenant la dérivée totale par rapport au temps dans  $u(\Gamma_t, t) = 0$ , avec (1.1), nous obtenons

$$\mathcal{V}_{\Omega_t}(x) = \frac{\frac{\partial u}{\partial t}(x, t)}{|Du(x, t)|}, \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma_t.$$

(Les signes viennent de l'orientation  $\Gamma_t$  qui est traduite par le choix du signe de  $u$  dans  $\Omega_t$ ). Nous déduisons à travers l'équation géométrique (1.1), l'EDP suivante

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \mathcal{V}_{\{u(\cdot, t) > 0\}} |Du(x, t)|, \quad \text{pour tout } x \in \Gamma_t. \quad (1.2)$$

Nous remarquons que l'EDP trouvée est posée *a priori* sur  $\Gamma_t$  mais, nous pouvons l'étendre sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  où  $T$  est un temps final. Cette équation est complétée par une donnée initiale au temps  $t = 0$  qui représente le front initial  $\Gamma_0 = \partial\Omega_0$ . L'équation (1.1) peut prendre plusieurs formes selon les vitesses considérées. Le cas le plus simple est celui où la vitesse ne dépend que du point  $x$  et du temps  $t$ , i.e  $\mathcal{V}_{\{u(\cdot, t) > 0\}} = c(x, t)$  où  $c : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée. Dans ce cas l'équation (1.2) se réduit à une équation dite eikonale

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x, t) |Du(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T], \quad (1.3)$$

qui est l'équation "level-set" associée au mouvement du front  $\Gamma_t$  avec une vitesse normale  $c$ . Malgré sa simplicité, l'équation eikonale est au centre de nombreux développements. En particulier, des études plus fines sur cette équation ont été menées pour avancer dans la compréhension de la dynamique des dislocations citée ci-dessous. Nous renvoyons au Chapitre 1, Section 3, pour plus de détails.

Nous nous sommes intéressés particulièrement à une vitesse non-locale, c'est le cas de la dynamique des dislocations, que nous allons présenter brièvement dans la section suivante.

## 2 Un modèle non-local : Les dislocations

En science des matériaux, une dislocation est un défaut linéaire correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Ces lignes de défauts se déplacent dans des plans définis sous l'effet de contraintes extérieures et sont la principale explication microscopique des déformations plastiques observées dans les cristaux à l'échelle macroscopique. La figure suivante représente des lignes de dislocations observées par microscope électronique dans l'aluminate de magnésium AlMg.

Une idéalisation d'une ligne de dislocation consiste à considérer que l'épaisseur de la ligne est nulle et qu'elle se déplace dans le plan. La dislocation peut être alors représentée comme le bord (front) d'un ouvert  $\Omega_t$  de  $\mathbb{R}^2$  qui se propage au cours du temps avec une vitesse normale  $c(\Gamma)$ . La vitesse normale  $c$  dépend du champ élastique généré par la ligne de dislocation, elle est proportionnelle à la force de Peach-Koeller résolue calculée à partir du champ élastique. Dans le cas d'une seule ligne de dislocation, Alvarez, Hoch, Le Bouar et Monneau ont montré dans [6] que

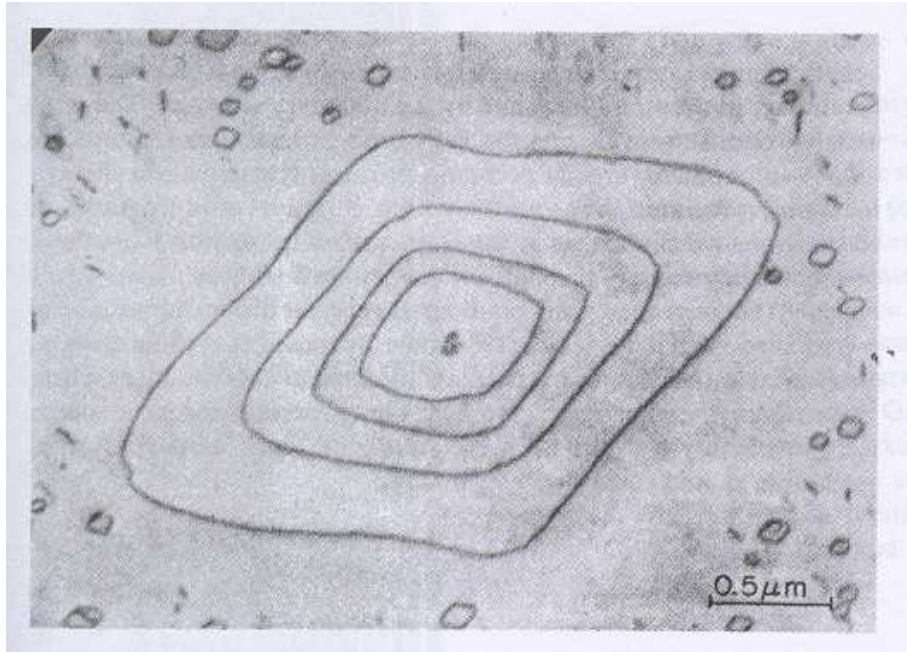


FIGURE 2 – Dislocations dans le matériau Al-Mg.

la vitesse  $c$  est non-locale et s'écrit sous la forme

$$c(x, t) = (c_0 \star \rho(\cdot, t))(x) + c_1(x, t), \quad (2.4)$$

où  $c_0(x)$  est un noyau donné, dépendant des propriétés élastiques du matériau et  $\rho$  est la fonction caractéristique de l'ouvert  $\Omega_t$

$$\rho(x, t) = 1_{\overline{\Omega}_t}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \overline{\Omega}_t \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_t, \end{cases}$$

Ici, la convolution a lieu en espace.  $c_0 \star \rho$  représente la force créée par le champ élastique généré par la ligne de dislocation et  $c_1$  représente les contraintes extérieures. Nous obtenons ainsi l'équation eikonale non-locale suivante qui décrit la dynamique des dislocations

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} = (c_0 \star \rho + c_1) |D\rho| & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, T) \\ \rho(\cdot, 0) = \rho_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^2. \end{cases} \quad (2.5)$$

Nous avons consacré le chapitre 5 du manuscrit à la modélisation de la dynamique des dislocations et le principe de la déformation plastique dans les matériaux ainsi que les propriétés fondamentales de ces défauts.

## 3 Solutions de viscosité pour l'équation eikonale

### 3.1 Introduction

Pour mieux voir les difficultés reliées à la notion d'une bonne solution pour les équations eikonales sous la forme locale (1.3) et non-locale (2.5), nous citons l'exemple simple suivant

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons d'abord que nous ne pouvons pas avoir une solution classique (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) car sinon par le Théorème de Rolle, il existe un  $c \in ]0, 1[$  telque  $u'(c) = 0$ , ce qui est impossible par l'équation.

La présence de la valeur absolue dans l'équation, ne permet pas de définir des solutions au sens des distributions.

Essayons les solutions généralisées, c'est-à-dire, des fonctions localement Lipschitziennes et qui vérifient donc l'équation presque partout, nous pouvons construire une infinité de solutions, une première solution généralisée est donnée par

$$u_1(x) = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - x \right|$$

Pour construire d'autres solutions généralisées, il suffit d'alterner pentes 1 et  $-1$  (voir Figure 2.1). Nous renvoyons au Chapitre 2, Section 4, pour plus de détails sur cet exemple.

Cet exemple montre bien que la notion de solutions généralisées, est en fait inadaptée à ce type de problèmes; une non-unicité est incompatible avec une utilisation raisonnable de ces solutions dans les applications.

Une autre méthode, est d'utiliser la viscosité évanescence, i.e, ajouter le terme de viscosité  $-\epsilon u''_\epsilon$  à l'équation (3.6), de la manière suivante :

$$\begin{cases} -\epsilon u''_\epsilon + |u'_\epsilon| = 1 & \text{dans } ]0, 1[ \\ u_\epsilon(0) = u_\epsilon(1) = 0 \end{cases} \quad (3.7)$$

Les estimations Lipschitz obtenues sur la solution approchée  $u_\epsilon$  ne sont pas suffisantes pour passer à la limite et obtenir une solution de (3.6).

Pour pallier ces difficultés et résoudre ces problèmes, M. G. Crandall et P. L. Lions ont introduit dans les années 80 une notion faible de solutions appelée solutions de viscosité. Pour des présentations complètes, on pourra consulter les ouvrages [15] et [11] et [34]. Nous allons donner dans cette introduction les définitions de solutions de viscosité ainsi les principales propriétés pour l'équation eikonale et nous allons présenter au chapitre 2 cette théorie, pour le cas des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre plus générales et ce pour permettre une vision globale de la notion.

## 3.2 Définitions des solutions de viscosité

### 3.2.1 Définitions

Pour  $T > 0$ , considérons l'équation eikonale :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x, t)|Du(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.8)$$

avec  $c, u_0$  données et  $Du$  représente le gradient de  $u$ .

Avant d'énoncer la définition de solution de viscosité discontinue, nous introduisons la définition des enveloppes semi-continues.

#### Définition 3.1 (Enveloppe scs et sci)

Soit  $u$  une fonction localement bornée sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ , nous définissons l'enveloppe semi-continue supérieurement (scs), (resp. semi-continue inférieurement (sci)), par

$$\begin{aligned} u^*(x, t) &= \limsup_{(y, s) \rightarrow (x, t)} u(y, s), \\ (\text{resp. } u_*(x, t) &= \liminf_{(y, s) \rightarrow (x, t)} u(y, s)). \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pour les propriétés de ces enveloppes, voir la Proposition 4.24, Chapitre 2.

Nous énonçons maintenant la définition des solutions de viscosité discontinues, pour l'équation eikonale dans  $\mathbb{R}^n$ .

#### Définition 3.2 (Sous-solution, sur-solution et solution)

Nous supposons que  $c$  est localement bornée sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  et  $u_0$  est localement bornée sur  $\mathbb{R}^n$ .

##### (1) (Sous-solution de viscosité discontinue)

Une fonction  $v$  semi-continue supérieurement sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T)$  est une sous-solution de viscosité de (3.8), si elle satisfait

- (i)  $v(x, 0) \leq (u_0)^*(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .
- (ii) Pour tout point  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ , tangente au-dessus de  $v$  au point  $(x_0, t_0)$ , nous avons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - c^*(x_0, t_0)|D\phi(x_0, t_0)| \leq 0, \quad (3.10)$$

où  $c^*$  est l'enveloppe scs de  $c$ .

##### (2) (Sur-solution de viscosité discontinue)

Une fonction semi-continue inférieurement  $v$  sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T)$  est une sur-solution de viscosité discontinue de (3.8), si elle satisfait

### 3. Solutions de viscosité pour l'équation eikonale

---

(i)  $v(x, 0) \geq (u_0)_*(x)$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .

(ii) Pour tout point  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$  et pour toute fonction test  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ , tangente en-dessous de  $v$  au point  $(x_0, t_0)$ , nous avons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - c_*(x_0, t_0) |D\phi(x_0, t_0)| \geq 0, \quad (3.11)$$

où  $c_*$  est l'enveloppe sci de  $c$ .

#### (3) (Solution de viscosité)

Finalemnt, une fonction localement bornée  $v$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T)$  est une solution de viscosité discontinue de (3.8) si son enveloppe semi-continue supérieurement  $v^*$  (resp. son enveloppe semi-continue inférieurement  $v_*$ ) est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de (3.8).

#### Remarque 3.3

- L'équation eikonale (3.8), est une équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre qui s'écrit sous sa forme générale :

$$\partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T), \quad (3.12)$$

où  $H : \mathbb{R}^n \times (0, T) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est dit hamiltonien, est donné par

$$H(x, t, p) = -c(x, t) |p|.$$

Nous avons présenté ici dans cette introduction, les définitions des solutions de viscosité pour l'équation eikonale car nos résultats obtenus sont sur cette équation. Mais comme, ces résultats peuvent se généraliser aux équations de Hamilton-Jacobi de forme (3.12), nous avons présenté dans la première partie de cette thèse, Chapitre 2, la notion de solutions de viscosité sur les équations de Hamilton-Jacobi de forme plus générale (3.12).

- Remarquons aussi, que pour la définition des solutions de viscosité continues, pour l'équation eikonale (3.8), il suffit d'utiliser la Définition 3.2, en prenant  $c$ ,  $u_0$ ,  $u$  et  $v$  des fonctions continues, nous renvoyons au Chapitre 2, Définition 4.3.

La notion de solutions de viscosité permet de résoudre les difficultés posées dans l'exemple précédent, nous allons donc le voir à travers quelques propriétés de base de ces solutions.

### 3.3 Propriétés fondamentales des solutions de viscosité

#### 3.3.1 Stabilité

La notion de solutions de viscosité est très souple vis-à-vis du passage à la limite, plus précisément aux "semi-limites relaxées", une notion introduite par Barles et Perthame [20, 21]. Soit  $(u_\epsilon)_\epsilon$  une suite localement majorée (resp. minorée) d'applications définies de  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . Nous appelons semi-limite relaxée supérieure (resp. inférieure) de  $(u_\epsilon)_\epsilon$ , l'application  $\limsup^*(u_\epsilon)$  (resp.  $\liminf_*(u_\epsilon)$ ) définie, par :

$$\bar{u}(x, t) = \limsup^* u_\epsilon(x, t) = \limsup_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_\epsilon(y, s) \quad (3.13)$$

(resp.

$$\underline{u}(x, t) = \liminf_* u_\epsilon(x, t) = \liminf_{\substack{(y,s) \rightarrow (x,t) \\ \epsilon \rightarrow 0}} u_\epsilon(y, s)). \quad (3.14)$$

Plus précisément, nous avons

$$\bar{u}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sup\{u_\epsilon(y, s), \epsilon \leq \alpha, |y - x| \leq \alpha, |s - t| \leq \alpha\}).$$

De même

$$\underline{u}(x, t) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} (\inf\{u_\epsilon(y, s), \epsilon \leq \alpha, |y - x| \leq \alpha, |s - t| \leq \alpha\}).$$

Nous avons alors, le résultat de stabilité suivant

**Théorème 3.4 (*Stabilité discontinue, [15, Th 4.1]*)**

*Supposons que, pour  $\epsilon > 0$ ,  $u_\epsilon$  est une sous-solution de viscosité scs (resp. une sur-solution de viscosité sci) de*

$$\partial_t u_\epsilon(x, t) = c_\epsilon(x, t) |Du_\epsilon(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T),$$

*où  $(c_\epsilon)_\epsilon$  est une suite de fonctions localement uniformément bornées sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ . Supposons que les fonctions  $u_\epsilon$  sont localement uniformément bornées sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ . Alors,  $\bar{u}$  définie par (3.13) (resp.  $\underline{u}$  définie par (3.14)) est sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de l'équation*

$$\partial_t u = \bar{c}(x, t) |Du(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

*où  $\bar{c}(x, t) = \limsup^* c_\epsilon(x, t)$  (resp. de l'équation*

$$\partial_t u = \underline{c}(x, t) |Du(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T)$$

*où  $\underline{c}(x, t) = \liminf_* c_\epsilon(x, t)$ ).*

Nous allons voir au Chapitre 2, la version similaire de ce théorème pour le cas des équations de Hamilton-Jacobi (3.12). Les preuves figurent aussi dans ces références. L'intérêt de ce théorème est fondamental, car il permet le passage à la limite ou plus exactement aux deux semi-limites avec une non-linéarité forte, en sachant seulement que la suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$  est localement uniformément bornée.

#### 3.3.2 Principe de comparaison et unicité

Pour conclure un passage à la limite, nous avons besoin d'un résultat d'unicité, appelé aussi principe de comparaison.

##### **Définition 3.5** (*Principe de comparaison*)

*On dit que l'équation  $\partial_t u = c(x, t)|Du(x, t)|$  satisfait un principe de comparaison, si pour toute sous-solution  $u^*$  de cette équation et pour toute sur-solution  $v_*$  de la même équation, nous avons*

$$u^*(x, 0) \leq v_*(x, 0), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \Rightarrow u^*(x, t) \leq v_*(x, t), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

##### **Remarque 3.6**

*Si nous prenons  $u$  semi-continue supérieurement et  $v$  semi-continue inférieurement, alors, la Définition 3.5 donne  $u \leq v$ . Un résultat similaire de ce théorème est donné au Chapitre 2, Théorème 4.29.*

L'unicité est une conséquence directe du principe de comparaison, en effet Soient  $u_1$  et  $u_2$  avec  $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ , deux solutions de viscosité discontinues de l'équation eikonale  $\partial_t u = c(x, t)|Du(x, t)|$ , que nous supposons qu'elle satisfait le principe de comparaison.

Donc  $u_1^* \leq (u_2)_*$  sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$  et de même  $u_2^* \leq (u_1)_*$ . Par définitions des enveloppes semi-continues, nous avons aussi  $(u_1)_* \leq u_1^*$  et  $(u_2)_* \leq u_2^*$ . Ce qui implique l'égalité des enveloppes scs et des enveloppes sci des deux solutions et c'est le sens de l'unicité pour les solutions de viscosité discontinues.

Une définition similaire du principe de comparaison pour les solutions de viscosité continues, est donnée au Chapitre 2, Définition 4.11, ainsi que les conditions que doit vérifier l'équation de Hamilton-Jacobi pour avoir un résultat d'unicité (Théorème 4.12). Géométriquement, le principe de comparaison pour le cas non-local correspond au principe d'inclusion pour les ensembles  $K(t) = \{u(\cdot, t) \geq 0\}$  et  $K'(t) = \{v(\cdot, t) \geq 0\}$ , ce qui revient aussi à dire que l'évolution géométrique est monotone

$$K(0) \subseteq K'(0) \Rightarrow K(t) \subseteq K'(t), \quad \text{pour tout } t \in [0, T].$$

Ce principe n'est pas toujours vérifié pour les équations non-locales, ce qui pose de grosses difficultés d'obtenir des résultats d'unicité pour ce type d'équations et

particulièrement pour la dynamique des dislocations.

### Remarque 3.7

Nous avons mentionné au début de cette introduction, que la motivation principale de notre travail, était l'application à la dynamique des dislocations qui est modélisée par une équation eikonale non-locale. Ici, nous présentons les définitions et les propriétés pour l'équation eikonale locale, qui est fondamentale, car elle apparaît naturellement en "gelant" la vitesse non-locale dans les arguments de type point fixe (voir Chapitre 6).

## 4 Quelques résultats d'existence et d'unicité pour l'équation eikonale

### 4.1 Résultats d'existence et d'unicité pour l'équation eikonale locale

Avant d'énoncer le résultat d'existence et d'unicité des solutions de viscosité, considérons les hypothèses sur la vitesse  $c$ .

(H1)  $c \in C(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ .

(H2) Il existe une constante  $M > 0$  telle que  $|c(x, t)| \leq M$  pour tout  $(x, t) \in \mathbb{R}^n \times (0, T)$ .

(H3) Il existe une constante  $L > 0$  telle que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$  et tout  $t \in (0, T)$ , on a :

$$|c(x, t) - c(y, t)| \leq L|x - y|$$

Nous définissons aussi l'espace  $BUC(\mathbb{R}^n)$ , comme étant l'espace des fonctions définies sur  $\mathbb{R}^n$ , bornées et uniformément continues.

#### **Théorème 4.1 (Existence, unicité et régularité)**

*Sous les hypothèses ((H1)-(H3)), nous avons les résultats suivants*

- **(Principe de comparaison)**. Soient  $u$  et  $v$  deux sous- et sur-solutions respectivement de l'équation

$$\partial_t u = c(x, t)|Du|, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

Alors

$$u^*(x, 0) \leq v_*(x, 0) \Rightarrow u^*(x, t) \leq v_*(x, t), \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

## 4. Quelques résultats d'existence et d'unicité pour l'équation eikonale

---

- **(Existence)**. Si  $u_0$  est bornée, alors, il existe une solution de viscosité discontinue de (3.8).
- **(Régularité BUC)**. Si  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n)$ , alors, il existe une unique solution de viscosité de (3.8) dans  $BUC(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ .
- **(Régularité Lipschitz)**. Si  $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ , alors, la solution de viscosité est Lipschitz continue et satisfait les estimations suivantes

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, T))} &\leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \\ \|Du(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} e^{Lt}, \quad \text{pour tout } t \in [0, T), \\ \|u_t(\cdot, t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} &\leq M \|Du_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} e^{Lt}, \end{aligned}$$

où  $L$  et  $M$  sont définis dans (H3) et (H2) respectivement.

Le premier point du Théorème montre que si la vitesse est continue, bornée et Lipschitz en espace, alors l'équation eikonale vérifie un principe de comparaison. Pour la preuve (voir, par exemple [15, Th2.10]).

L'existence d'une solution de viscosité discontinue est prouvée par la méthode de Perron (voir Chapitre 2, Sous-section 4.8), car comme  $u_0$  est bornée, nous vérifions que  $- \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  et  $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  sont respectivement sous- et sur-solutions de (3.8). L'existence et l'unicité d'une solution de viscosité dans  $BUC$  est due au résultat de Crandall Lions [35]. La première estimation vient du principe de comparaison et le fait que  $\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  et  $-\|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}$  sont respectivement sur- et sous-solutions de (3.8), tandis que la deuxième estimation est une estimation de base sur le gradient (voir, par exemple Ley [69]). La dernière estimation vient du fait que l'équation est vérifiée presque partout. Ce résultat a été amélioré par Crandall, Ishii et Lions [34] pour des données non bornées (uniformément continues en espace).

### 4.2 Quelques résultats d'existence et d'unicité pour la dynamique des dislocations

Dans la cas de la dynamique de dislocations donnée par l'équation eikonale (2.5), il existe peu de résultats d'existence et d'unicité jusqu'à maintenant. Mentionnant que dans le cas où  $c_0 \geq 0$ , le principe d'inclusion est vérifié, ce qui donne des résultats d'existence et d'unicité. Malheureusement, pour la dynamique des dislocations, le noyau  $c_0$  s'annule et change de signe, ce qui rend le résultat d'existence et d'unicité de solutions assez difficile, néanmoins, il existe quelques résultats sous des hypothèses appropriées sur  $c_0$ ,  $c_1$  et la donnée initiale. Dans le cas de vitesses signées, nous mentionnons le travail d'Alvarez, Cardaliaguet et Monneau [5], il s'agit d'un résultat d'existence et d'unicité en temps long d'une solution de viscosité discontinue avec vitesse  $c[\rho] = (c_0 \star \rho(\cdot, t))(x) + c_1(x, t)$  non-négative, plus précisément, en prenant

$c_1(x, t) \geq \|c_0(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$ , ce qui n'implique pas que  $c_0 \geq 0$  et ceci pour toute fonction indicatrice  $\rho = 1_{K(t)}$ . Dans ce travail, les auteurs ont pris les fonctions  $c_0$  et  $c_1$  assez régulières plus fortes que les hypothèses (H1) et (H2). Ensuite, vient le résultat d'existence globale et d'unicité de solution de viscosité continue de Barles et Ley [19], pour des vitesses positives et qui se généralise aussi pour des vitesses négatives, avec les hypothèses (H1) et (H2) et une borne inférieure sur le gradient de la donnée initiale. Les arguments utilisés dans [19] sont différents de ceux utilisés dans [5]. Pour des vitesses quelconques, le premier résultat d'existence et d'unicité en temps court d'une solution de viscosité discontinue de (2.5) en supposant que la donnée initiale  $\rho_0 = \rho_{f_0}$  est le graphe d'une certaine fonction Lipschitzienne  $f_0$ , a été prouvé par Alvarez, Le Bouar, Hoch et Monneau [6, Th1.1]. Dans le cadre de la théorie de viscosité  $L^1$ , Barles, Cardaliaguet, Ley et Monneau, ont obtenu, des résultats d'existence globale de solutions dans un sens faible. Le résultat d'unicité a été discuté dans plusieurs situations dans le cas monotone (principe d'inclusion vérifié) et non-monotone.

## 5 Résultats obtenus

### 5.1 Introduction

Notre travail se focalise principalement sur l'équation eikonale en dimension un, donnée par

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = c(x, t)|\partial_x u(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.15)$$

où nous avons choisi la vitesse  $c$  et la donnée initiale  $u_0$ , vérifiant les hypothèses suivantes

$$c \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})) \quad (5.16)$$

et

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}), \quad (5.17)$$

où  $BV(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions à variation bornée, défini par

$$BV(\mathbb{R}) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid TV(f) < +\infty\},$$

avec  $TV(f)$  la variation totale de  $f$  définie par

$$TV(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx; \quad \phi \in C^1_c(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}. \quad (5.18)$$

L'espace  $BV(\mathbb{R})$  est muni de la semi-norme  $|f|_{BV(\mathbb{R})} = TV(f)$  (voir Chapitre 3, pour les définitions et les propriétés de cet espace).

Nous verrons pourquoi nous avons choisi de travailler en une seule dimension d'espace, malgré que la dynamique des dislocations était définie en deux dimensions et comment peut-on généraliser nos résultats en dimensions supérieures. Le deuxième point à clarifier, pourquoi le choix de données  $BV$  ?

Le choix de données  $BV$  relève du fait que dans la propagation des fronts et la méthode level-set, les équations associées utilisent comme données initiales et comme solutions des fonctions caractéristiques des domaines incluant ces fronts. Et les fonctions caractéristiques sont à la base des fonctions  $BV$ . Par rapport aux hypothèses dans le rappel des résultats d'existence et d'unicité connus, nous avons choisi des données assez faibles (hypothèses (5.16) et (5.17)) sans aucune autre régularité.

L'idée principale pour résoudre notre problème, était de régulariser l'équation et la donnée initiale du problème (5.15), en considérant, pour tout  $\epsilon > 0$ , le problème approché suivant,

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon(x, t) = c_\epsilon(x, t) |\partial_x u_\epsilon(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_{0,\epsilon}(x) & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.19)$$

où  $c_\epsilon$  et  $u_{0,\epsilon}$ , sont définies par

$$\begin{aligned} u_{0,\epsilon}(x) &= u_0 \star \rho_\epsilon^1(x), \quad \text{pour } x \in \mathbb{R} \\ c_\epsilon(x, t) &= \hat{c} \star \rho_\epsilon^2(x, t), \quad \text{pour } (x, t) \in \mathbb{R}^2, \end{aligned}$$

où la fonction  $\hat{c}$  est une extension dans  $\mathbb{R}^2$  de la fonction  $c$  par 0 et  $\rho_\epsilon^1, \rho_\epsilon^2$  des suites régularisantes (mollifiers) (voir Chapitre 4). En utilisant les propriétés des mollifiers et les hypothèses (5.16) et (5.17), nous déduisons par le Théorème 4.1, que le problème (5.19) admet une unique solution de viscosité Lipschitz continue vérifiant l'estimation uniforme suivante

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (5.20)$$

De plus, la solution  $u_\epsilon$  satisfait une propriété de propagation à vitesse finie, que l'on démontrera au Chapitre 4, Lemme 5.4.

$$\inf_{|y-x| \leq t \|c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_\epsilon(y, h) \leq u_\epsilon(x, t+h) \leq \sup_{|y-x| \leq t \|c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_\epsilon(y, h), \quad (5.21)$$

pour tout,  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T-h]$ .

Ensuite, nous déduisons par le résultat de stabilité Théorème 3.4 que  $\bar{u}$  définie par (3.13) est une sous-solution de viscosité discontinue de

$$\partial_t u = \bar{c}(x, t) |\partial_x u(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T)$$

et  $\underline{u}$ , définie par (3.14) est une sur-solution de viscosité discontinue de

$$\partial_t u = \underline{c}(x, t) |\partial_x u(x, t)| \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T).$$

Remarquons que c'est un résultat de stabilité par rapport à l'équation seulement, il va falloir donc, vérifier les conditions sur les données initiales pour compléter la définition d'une sous- et sur-solution de viscosité discontinue.

En utilisant la propagation à vitesse finie (5.21) et les propriétés des mollifiers, nous montrons que

$$\bar{u}(x, 0) \leq u_0^*(x) \quad \text{et} \quad \underline{u}(x, 0) \geq u_{0*}(x), \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

$$\bar{c}(x, t) \leq c^*(x, t) \quad \text{et} \quad \underline{c}(x, t) \geq c_*(x, t), \quad \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T).$$

Ce qui implique que  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont respectivement sous- et sur-solution de viscosité de (5.15) selon la Définition 3.2.

Par ailleurs, nous montrons que la solution  $u_\varepsilon$  de (5.19), satisfait l'estimation uniforme dans  $BV(\mathbb{R})$ , suivante

$$\|\partial_x u_\varepsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})}, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \quad (5.22)$$

Étant donnée que  $u_\varepsilon$  est Lipschitz, la norme  $L^1$  de sa dérivée en espace, représente exactement la semi-norme dans  $BV$ , c'est-à-dire, la variation totale de  $u_\varepsilon$  et ceci est vraie, pour toute fonction Lipschitzienne (voir Chapitre 3). Notons que cette estimation est fondamentale dans notre preuve, elle permet de construire une limite forte  $u$  dans  $C([0, T]; L^1_{Loc}(\mathbb{R}))$ , d'une sous-suite de  $(u_\varepsilon)_\varepsilon$  en utilisant un critère de compacité  $BV_{Loc}(\mathbb{R})$  dans  $L^1_{Loc}(\mathbb{R})$  (voir Chapitre 3, Théorème 2.14).

Nous avons pris une vitesse  $c$  seulement bornée et à variation bornée de signe quelconque, ce qui implique que nous n'avons pas un principe de comparaison, ce qui a posé des difficultés pour comparer les sous- et sur-solutions  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$ , respectivement, obtenues et donner un sens à la solution de viscosité discontinue et aussi prouver un résultat d'unicité dans ce cadre. Néanmoins, le choix de données  $BV$ , nous a permis d'identifier  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  presque partout en espace uniformément en temps. C'est un résultat qui a demandé des propriétés des fonctions à variation bornée définies sur  $\mathbb{R}$  que nous avons énoncées au Chapitre 3, Section 3. C'est ce type de propriétés que nous avons utilisé pour arriver à notre résultat principal et qui ne sont pas valables en dimension supérieure. Voilà une des raisons pour laquelle, nous nous sommes intéressées pour une première étude, à l'équation eikonale (5.15), unidimensionnelle seulement, avec données  $BV$ .

La généralisation de ce résultat en dimension  $n$ , nécessite d'autres propriétés des fonctions à variation bornée définies dans  $\mathbb{R}^n$  (voir le livre d'Ambrosio [8] et celui d'Evans [41]) et plus de régularité sur la vitesse  $c$ . Le résultat d'unicité reste un problème ouvert.

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer les résultats principaux obtenus.

## 5.2 Résultat d'existence globale pour l'équation eikonale avec données $BV$

### Théorème 5.1 (Existence globale pour le problème 5.15)

Soit  $T > 0$ , sous les hypothèses (5.16) et (5.17), nous avons

*i) Existence et unicité pour le problème régularisé*

Il existe une unique solution de viscosité Lipschitz continue  $u_\epsilon$  du problème (5.19), satisfaisant les estimations suivantes

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (5.23)$$

$$\|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (5.24)$$

$$\|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}. \quad (5.25)$$

*ii) Sous- et sur-solutions du problème limite*

Soit  $u_\epsilon$ , la solution construite dans *i)*, alors, les semi-limites relaxées  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont, respectivement, sous- et sur-solutions de viscosité discontinues du problème (5.15).

*iii) Convergence et existence de la solution faible*

Supposons que  $u_\epsilon$  satisfait les estimations (5.23), (5.24) et (5.25). Alors, quitte à extraire une sous-suite, la fonction  $u_\epsilon$  converge, quand  $\epsilon$  tend vers 0, vers une fonction

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})) \cap C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R})) \quad (5.26)$$

fortement dans  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  et vérifiant, les estimations

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (5.27)$$

$$\|u\|_{L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (5.28)$$

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}) |t - s|, \quad \text{pour tout } s, t \in [0, T] \quad (5.29)$$

et l'égalité suivante

$$u(\cdot, t) = \bar{u}(\cdot, t) = \underline{u}(\cdot, t) \quad \text{sauf sur un ensemble dénombrable de } \mathbb{R}, \quad \text{pour tout } t \in [0, T]. \quad (5.30)$$

Ici,  $|\cdot|_{BV(\mathbb{R})}$  désigne la semi-norme associée à la variation totale. Nous verrons au Chapitre 4, la preuve détaillée de ce résultat.

### 5.3 Résultat d'existence globale avec données $BV$ croissantes

Dans le cas où la donnée initiale  $u_0$  est une fonction croissante et vérifiant l'hypothèse (5.16), nous avons le résultat suivant

**Théorème 5.2** (*Résultat d'existence globale pour les solutions croissantes*)  
*Soit  $T > 0$ , sous les hypothèses (5.16) et (5.17) et nous supposons de plus que  $u_0$  est croissante. Alors, le problème (5.15) admet une solution de viscosité discontinue classique satisfaisant (5.26) et les estimations (5.27), (5.28) et (5.29).*

Dans la cas de données initiales croissantes, l'équation (5.15), devient une équation de transport et nous montrons que la limite forte  $u$  dans  $C([0, T]; L^1_{Loc}(\mathbb{R}))$ , d'une sous-suite de  $(u_\varepsilon)_\varepsilon$  est une solution de viscosité discontinue selon la Définition 3.2. La preuve de ce théorème est donnée au Chapitre 4.

### 5.4 Résultats d'existence pour la dynamique des dislocations

Les résultats obtenus sur l'équation eikonale locale unidimensionnelle sont appliqués à un modèle de la dynamique des dislocations que nous allons l'expliquer au Chapitre 6. Il s'agit d'étudier le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star u(\cdot, t)(x)) |\partial_x u(x, t)| & \text{dans } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (5.31)$$

où la fonction  $c_0$  est un noyau associé aux équations de l'élasticité linéaires et  $\star$  est la convolution en espace.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, il y a peu de résultats d'existence et d'unicité de solutions de viscosité, selon la positivité du noyau et sa régularité. Énonçons maintenant notre résultat principal

**Théorème 5.3** (*Existence globale pour le problème de la dislocation*)  
*Supposons que  $u_0$  satisfait (5.17) et  $c_0 \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{R} \times (0, T))$ . Alors, nous avons*

*i) Résultat d'existence d'une solution de viscosité faible :*  
*Il existe une solution de viscosité de (5.31) au sens du Théorème 5.1, satisfaisant les estimations (5.26), (5.27), (5.28), (5.29) et (5.30).*

*ii) Existence globale pour des solutions croissantes :*  
*Supposons de plus que  $u_0$  est une fonction croissante. Alors, l'équation (5.31) admet une solution de viscosité discontinue  $u$  satisfaisant les estimations (5.26), (5.27), (5.28) and (5.29).*

La preuve de ce Théorème est une conséquence des Théorèmes 5.1 et 5.2, via un argument du point fixe, elle sera donnée en détail au Chapitre 6.

## 6 Guide de lecture de la thèse

Notre travail est partagé en trois parties, chacune d'elle est composée de deux chapitres. Dans le Chapitre 1 de la première partie, nous présentons quelques applications des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Le Chapitre 2 est un rappel des méthodes utilisées pour la résolution des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, ainsi que la théorie des solutions de viscosité, dont nous avons rappelé, les définitions et les propriétés fondamentales dans les cas continu et discontinu. Aussi quelques résultats d'existence et d'unicité sont présentés, ce qui finit la première partie de cette thèse. La deuxième partie est partagée en deux chapitres, dans le Chapitre 3, nous avons rappelé l'espace des fonctions à variation bornée avec ses propriétés. Le Chapitre 4 est consacré à la preuve du résultat d'existence globale d'une solution de viscosité discontinue dans un sens faible, pour l'équation eikonale unidimensionnelle, avec données fonctions à variation bornée. Dans le cas de données croissantes, nous montrons que la solution trouvée est une solution de viscosité discontinue au sens classique. La dernière partie de la thèse est aussi partagée en deux chapitres. Dans le Chapitre 5, nous présentons une introduction aux dislocations et le principe des déformations plastiques ainsi que la modélisation de la dynamique de ces dislocations. Dans le Chapitre 6, nous montrons un résultat d'existence globale pour le problème de la dynamique des dislocations, comme applications aux résultats du Chapitre 4. Nous terminerons cette thèse par une conclusion et quelques perspectives.



## Première partie

### Rappels sur les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre



# Chapitre 1

## Quelques applications des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

Dans ce chapitre, nous rappelons les différentes applications des équations de Hamilton Jacobi du premier ordre. Nous citerons en particulier, le contrôle optimal, les évolutions géométriques, la dynamique des dislocations. Nous donnerons à la fin un bref aperçu sur les équations de Hamilton-Jacobi stationnaires intervenant dans le traitement d'images.

## 1 Introduction

Nous nous intéressons aux équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre de la forme

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $H$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$  dans  $\mathbb{R}$ , appelée hamiltonien et  $u: \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction scalaire inconnue.  $Du$  est le gradient en espace de  $u$  et  $\partial_t u$  est la dérivée en temps.

Ce type d'équations aux dérivées partielles non-linéaires intervient dans beaucoup de domaines, particulièrement dans la théorie du contrôle optimal, en géométrie (propagation de fronts ou d'hyper-surfaces) et en dynamique des dislocations. Nous allons présenter dans la suite un aperçu général sur ces domaines. Nous donnerons à la fin de ce chapitre, quelques applications pour les équations de Hamilton-Jacobi stationnaires.

## 2 Le contrôle optimal

Nous allons donner dans cette section un aperçu global sur le lien figurant entre la théorie du contrôle optimal et les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Pour plus de détails, sur la théorie du contrôle, nous renvoyons aux références de bases ([43], [11], [15]).

### 2.1 Historique

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman résultant de la méthode de la programmation dynamique a été initiée par Richard Bellman dans les années 50 pour résoudre des problèmes d'optimisation, c'est-à-dire des problèmes où l'on doit prendre les meilleures décisions possibles à chaque date pour un critère de performance donné. L'équation de la programmation dynamique généralise les travaux antérieurs en mécanique classique de William Hamilton et Carl Gustav Jacobi et est usuellement appelée équation d'HJB en reconnaissance de la contribution de de ces trois grandes personnalités scientifiques.

Historiquement appliquée en ingénierie puis dans d'autres domaines des Mathématiques appliquées, l'équation d'HJB est devenue un outil important dans les problèmes de décision intervenant en économie et en finance.

## 2.2 Description du modèle

Nous allons décrire formellement le problème basique du contrôle optimal. Soit l'EDO suivante

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad t \geq 0$$

où  $f$  est une fonction donnée,  $x(t)$  est une inconnue représentant l'évolution dynamique de l'état d'un système. Supposons maintenant que la fonction  $f$  dépend du paramètre de "contrôle" à valeurs dans un ensemble  $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$ . En choisissant une valeur  $a \in \mathcal{A}$ , nous obtenons la dynamique

$$\dot{x}(t) = f(x(t), a), \quad t \geq 0,$$

qui représente l'évolution du système quand le paramètre est fixé et égal à  $a$ .

L'étape suivante consiste à faire varier le paramètre au fur et à mesure que le système évolue. Nous appelons ainsi un "contrôle" une fonction mesurable  $\alpha: [0, +\infty) \rightarrow \mathcal{A}$ . Pour chaque contrôle  $\alpha$ , considérons l'EDO

$$\dot{x}(t) = f(x(t), \alpha(t)), \quad t \geq 0, \tag{2.2}$$

avec une condition initiale  $x(0) = x_0$  dans  $\mathbb{R}^n$ . La solution de cette EDO dépend du contrôle  $\alpha$  et de la donnée initiale  $x_0$ . L'objectif est de déterminer le "meilleur" contrôle pour ce système, pour cela nous définissons une fonction de gain (ou de coût) prenant en compte toute la trajectoire du système jusqu'à l'horizon  $T$  et un coût terminal. La fonction valeur est donnée par

$$J(\alpha) = \int_0^T L(x(t), \alpha(t)) dt + g(x(T)). \tag{2.3}$$

Les fonctions  $L$  et  $g$  sont données et appelées respectivement fonction de gains courant et de gain terminal.

Le problème se ramène donc à trouver le contrôle  $\alpha^*$  qui maximise la fonctionnelle  $J$ .  $\alpha^*$  est dit alors contrôle optimal. Donnons un exemple de finance simple

Soit un gérant d'une entreprise avec un bien de production de montant noté  $x(t)$  à la date  $t$ . Nous supposons que le gérant peut consommer une partie du bien de production et réinvestir le reste. En notant la proportion du bien investi à la date  $t$  par  $\alpha(t)$ , la dynamique de  $x(t)$  est

$$\dot{x}(t) = k\alpha(t)x(t)$$

où  $k > 0$  est le taux de croissance du réinvestissement. Nous supposons de plus que le gérant cherche à maximiser la consommation totale du bien jusqu'à l'horizon  $T$ . La fonctionnelle du gain est de la forme

$$j(\alpha) = \int_0^T (1 - \alpha(t))x(t)dt$$

La dérivation de l'équation de Bellman pour un problème de contrôle optimal s'effectue selon les étapes suivantes :

Nous définissons la fonction valeur associée i.e la valeur de la fonction objectif lorsque le système se trouve à l'état  $x$  et à la date  $t$  et qu'une stratégie optimale est suivie depuis cette période. Nous appliquons ensuite le principe de la programmation dynamique qui consiste à dire que si un contrôle est optimal entre  $t$  et  $T$  pour la condition initiale  $x(t)$ , alors il est aussi optimal entre  $t + h$  et  $T$  pour la condition initiale  $x(t + h)$  avec  $t + h > t$ . Nous obtenons la relation de la fonction valeur entre  $t$  et  $t + h$

$$v(x(t), t) = \max_{\alpha} \int_t^{t+h} L(x(s), \alpha(s))ds + v(x(t + h), t + h). \quad (2.4)$$

En faisant tendre  $h$  vers 0, nous obtenons l'équation d'HJB

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \max_{\alpha \in \mathcal{A}} (f(x, \alpha) \cdot \nabla v + L(x, \alpha)) = 0, \quad (2.5)$$

avec une condition terminale  $v(x, T) = g(x)$ , qui stipule l'horizon du problème, le meilleur profit possible est donné par le gain terminal.

Dans le cadre décrit ci-dessus, l'état du système est complètement déterminé par la dynamique  $f$  et le contrôle  $\alpha$ . Nous parlons dans ce cas du contrôle déterministe, (voir [2] et [15]).

### 3 Géométrie : Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi

Ce paragraphe est inspiré en grande partie de l'habilitation HDR de Olivier Ley. En géométrie différentielle, un front ou une hyper-surface est une généralisation en dimension supérieure des courbes en dimension deux et des surfaces en dimension trois. Il y a au moins trois manières de représenter (localement) une hypersurface plongée dans l'espace  $\mathbb{R}^n$ , soit en utilisant les coordonnées locales, soit en la représentant par le graphe d'une certaine fonction donnée. Soit finalement, en considérant que cette hyper-surface comme la ligne de niveau zéro d'une certaine fonction auxiliaire. C'est ce qu'on appelle la méthode "approche par lignes de niveaux" ou "level-set

### 3. Géométrie : Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi

method". Pour fixer les idées, soit  $\Omega_t$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  du bord (front)  $\Gamma_t$  qui évolue avec une vitesse normale  $V_{x,t}$  (voir Introduction, Figure 1). La loi de l'évolution du front est donnée par

$$V_{x,t} = h(x, t, n_{x,t}, A_{x,t}) \quad (3.6)$$

où  $h$  est une fonction continue de  $\mathbb{R}^n \times [0, T] \times S^{n-1} \times \text{Sym}_n(\mathbb{R}^n)$  et avec

- $x$  un point de  $\Gamma_t$ ,  $t \in [0, T]$ ,
- $n_{x,t}$  est la normale unitaire sortante de  $\Gamma_t$  au point  $x$  ( $\Gamma_t$  est orienté par son intérieur  $\Omega_t$ ),
- $A_{x,t} = \left(-\frac{\partial n_i}{\partial x_j}(x, t)\right)_{1 \leq i, j, n}$  est la matrice courbure de  $\Omega_t$  au point  $x$  et au temps  $t$ .

Précisons la notion de vitesse normale au point  $x$  de  $\Gamma_t$ , soit  $\gamma]t - \delta, t + \delta[ \rightarrow \mathbb{R}^n$  une application de classe  $C^1$  telle que, pour tout  $s \in ]t - \delta, t + \delta[$ , nous avons  $\gamma(s) \in \Gamma_s$  et  $\gamma(t) = x$ . Alors par définition, la vitesse normale au point  $x$  et au temps  $t$  est donnée par

$$\nu_{\Omega_t} = V_{x,t} = \langle n_{x,t}, \dot{\gamma}(t) \rangle .$$

Pour une introduction aux problèmes de propagation de fronts et ses applications, nous renvoyons aux monographies de Giga [52] et de Sethian [89] ainsi que Barles, Soner et Souganidis [22].

Les problèmes d'évolution de fronts ci-dessus, peuvent être rangés dans deux classes suivant que l'évolution est monotone ou pas. Les évolutions monotones sont celles où le principe d'inclusion est vérifié. Cela signifie que si l'on démarre de deux ensembles  $\Omega_0^1$  et  $\Omega_0^2$  et qu'on les fait évoluer indépendamment avec la même vitesse, on a

$$\Omega_0^1 \subseteq \Omega_0^2 \quad \Rightarrow \quad \Omega_t^1 \subseteq \Omega_t^2 \quad (3.7)$$

au moins formellement, le principe d'inclusion est vrai pour des vitesses vérifiant la propriété

$$\Omega \subseteq \Omega' \quad \text{et} \quad x \in \partial\Omega \cap \partial\Omega' \quad \Rightarrow \quad \nu_{\Omega}(x) \leq \nu_{\Omega'}(x).$$

Mentionnant en fin, qu'il y a peu d'espoir d'obtenir des solutions régulières sauf pour des données très régulières et des temps petits, même dans le cas le plus simple ( $h = 1$ ). Ces évolutions développent en temps fini des singularités, la topologie du front peut changer (apparition ou disparition de composantes connexes). D'autres part, ces évolutions sont fortement non-linéaires et parfois non-locales. Ces difficultés rendent délicate, l'étude de l'équation (3.6) à l'aide des outils de la géométrie classique. Il est donc nécessaire d'introduire des notions de solutions faibles. La plus célèbre est sans doute l'approche par lignes de niveaux, qui remplace le problème géométrique par une EDP. L'équation géométrique associée au mouvement est résolue à l'aide des solutions de viscosité. Lorsqu'il est impossible d'écrire cette EDP, Cardaliaguet ([27] et [28]) a introduit la notion de solution de viscosité géométrique qui permet un va-et-vient entre la géométrie et l'analyse. Il existe aussi des notions de mouvements minimisant permettant le lien entre les solutions variationnelles et les solutions de viscosité géométriques (voir par exemple Ambrosio [7]).

### 3.1 La méthode "level-set"

La méthode "level-set" ou "surfaces de niveau" a été introduite pour des calculs numériques dans les années 1980 par les mathématiciens Stanley Osher et James Sethian puis développée de façon rigoureuse par Evans et Spruck [42] et Chen, Giga et Goto [32]. Elle s'est répandue dans de nombreuses disciplines, comme les effets spéciaux numériques, le traitement d'images, l'infographie, la géométrie algorithmique, l'optimisation et la mécanique des fluides numériques. Nous allons donner dans ce paragraphe, le lien entre le mouvement de fronts et les équations de Hamilton-Jacobi, un lien qui apparait naturellement, en utilisant la méthode "approche par lignes de niveaux". Nous supposons que les ensembles mis en jeu sont au moins  $C^2$ . L'idée est alors d'introduire une fonction auxiliaire  $u : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$ , dans le but de représenter  $\Gamma_t$  via l'ensemble de niveau 0 de  $u$ . Ce qui conduit à définir  $u$  comme suit, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$u(\cdot, t) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_t, \quad u(\cdot, t) > 0 \quad \text{dans} \quad \Omega_t, \quad u(\cdot, t) < 0 \quad \text{ailleurs}$$

Supposons que le gradient de  $u$  en espace  $Du(x, t) \neq 0$ , si  $x \in \Gamma_t$ . On sait que

$$n_{x,t} = -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|}.$$

Tandis que

$$A_{x,t} = \frac{1}{|Du(x, t)|} \left( I - \frac{Du(x, t)Du(x, t)^T}{|Du(x, t)|^2} \right) D^2u(x, t).$$

En utilisant la définition de l'application  $\gamma$  et de  $u$ , nous obtenons

$$u(\gamma(s), s) = 0.$$

En dérivant par rapport à  $s$ , nous obtenons en prenant  $s = t$

$$\langle Du(x, t), \gamma'(t) \rangle + u_t(x, t) = 0.$$

C'est-à-dire

$$u_t(x, t) = -\langle Du(x, t), \gamma'(t) \rangle = |Du(x, t)| \langle n_{x,t}, \gamma'(t) \rangle = V_{x,t} |Du(x, t)| \quad (3.8)$$

Donc  $u$  vérifie l'équation suivante appelée "équation level-set" associée à (3.6)

$$\begin{aligned} V(x, t) &= h(x, t, -\frac{Du(x, t)}{|Du(x, t)|}, \frac{1}{|Du(x, t)|} \left( I - \frac{Du(x, t)Du(x, t)^T}{|Du(x, t)|^2} \right) D^2u(x, t)) \\ &= H(x, t, Du(x, t), D^2u(x, t)). \end{aligned}$$

### 3. Géométrie : Évolution de fronts et équations de Hamilton-Jacobi

C'est une équation de Hamilton-Jacobi du second ordre.

Selon les vitesses considérées, l'équation (3.8), peut prendre diverses formes. Le cas le plus simple est celui où la vitesse  $\nu_{\Omega_t} = V_{x,t}$  dépend que du point  $x$  et du temps  $t$ , nous avons alors

$$\nu_{\Omega_t} = \nu_{\{u(\cdot,t)>0\}} = c(x,t),$$

où  $c : \mathbb{R}^n \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée. L'équation (3.8) prend la plus simple forme des équations de Hamilton-Jacobi, qui est l'équation eikonale, donnée par

$$u_t(x,t) = c(x,t)|Du(x,t)|. \quad (3.9)$$

Le second cas que nous évoquons seulement ici, pour plus de détails, nous citons le HDR de O. Ley [68] et la thèse de A. Montheillet [73]. C'est le cas de l'évolution d'hyper-surfaces par courbure moyenne, si  $\nu_{\Omega_t}$  est la moyenne des courbures principales de  $\Gamma_t$  au point  $x$ , l'équation (3.8) devient une équation parabolique dégénérée singulière du second ordre, équation de la courbure moyenne

$$u_t(x,t) = \Delta u(x,t) - \frac{\langle D^2u(x,t)Du(x,t), Du(x,t) \rangle}{|Du(x,t)|^2}.$$

La deuxième forme de vitesse gouvernant le mouvement de front est le cas où la fonction  $h$  est non-locale, i.e, prenant la forme suivante

$$\nu_{\Omega_t}(x) = \alpha (k \star 1_{\overline{\Omega}_t}(x,t)) + c_1(x,t), \quad (3.10)$$

où  $c_1$  est une vitesse de type de celle apparaissant dans (3.9),  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction donnée et  $\star$  désigne la convolution entre le noyau  $k$  et la fonction caractéristique de l'ensemble  $\overline{\Omega}_t$ . Notons que cette vitesse est non-locale dans le sens où elle ne dépend pas seulement des propriétés locales (normale, courbure, ect...) mais aussi de la convolution qui prend en compte tout l'ensemble  $\Omega_t$  en entier. Nous citons deux exemples modèles où la vitesse s'écrit sous la forme (3.10).

Le premier problème modèle est la dynamique des dislocations que nous détaillerons dans le prochain paragraphe. Donnons maintenant juste un aperçu bref. Dans la dynamique des dislocations, la vitesse prend la forme

$$\nu_{\Omega_t}(x) = c_0 \star 1_{\overline{\Omega}_t}(x) + c_1(x,t), \quad (3.11)$$

où  $c_0 \in L^1(\mathbb{R}^n)$  et la convolution a lieu en espace, i.e

$$c_0 \star 1_{\overline{\Omega}_t}(x) = \int_{\mathbb{R}^n} c_0(x-y)1_{\overline{\Omega}_t}(y)dy.$$

L'équation "level-set" associée est alors une équation non-locale donnée par

$$\partial_t u(x,t) = c[1_{\{u \geq 0\}}](x,t)|Du(x,t)|, \quad (3.12)$$

où  $c[1_{\{u \geq 0\}}](x, t) = c_0 \star 1_{\overline{\Omega}_t}(x) + c_1(x, t)$ .

Le second problème modélise l'asymptotique d'un système de FitzHugh-Nagumo, où la vitesse prend la forme

$$1_{\overline{\Omega}_t}(x) = \alpha(v(x, t)),$$

avec  $\alpha$  est une fonction réelle lipschitzienne et  $v$  est solution d'une équation de type

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \Delta v = 1_{\overline{\Omega}_t}, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

En utilisant la formule de représentation de l'équation de la chaleur avec le noyau de Green  $G$ , nous déduisons que

$$v(x, t) = G \star 1_{\overline{\Omega}_t}(x, t)$$

(ici la donnée initiale est supposée nulle). Ainsi, nous obtenons la vitesse non-locale suivante

$$c[1_{\{u \geq 0\}}](x, t)(x, t) = \alpha(G \star 1_{\{u \geq 0\}})(x, t).$$

Ce type d'équations apparaît dans la propagation des ondes progressives des milieux comme le tissu cardiaque ou les fibres nerveuses. Nous renvoyons aux travaux de Chen [56]) et Hastings ([31]) pour plus de détails sur le modèle ainsi qu'aux travaux de Giga, Goto, Ishii [53] et Soravia et Souganidis [93] pour les résultats d'existence et d'unicité.

## 3.2 La dynamique des dislocations

Comme nous l'avons déjà mentionné, une dislocation est une ligne de défaut linéaire correspondant à une discontinuité dans l'organisation de la structure cristalline. Par exemple, dans la Figure 1.1, les lignes noires observées sont les dislocations présentes dans un alliage Aluminium du Nickel(Ni3Al), pris en microscopie électronique

Une dislocation est caractérisée par

- ✓ la direction de la ligne,
- ✓ un vecteur appelé "vecteur de Burgers" dont la norme représente l'amplitude de la déformation qu'elle engendre (voir [57], [50] et [45]).

Le mouvement des dislocations se fait dans un plan cristallographique, appelé "plan de glissement". A l'échelle microscopique, la présence des dislocations dans un matériau est la principale explication physique de la déformation plastique de celui-ci. La dynamique des dislocations consiste à simuler par le calcul informatique l'évolution d'un ensemble des dislocations au cours du temps. Cette simulation permet de

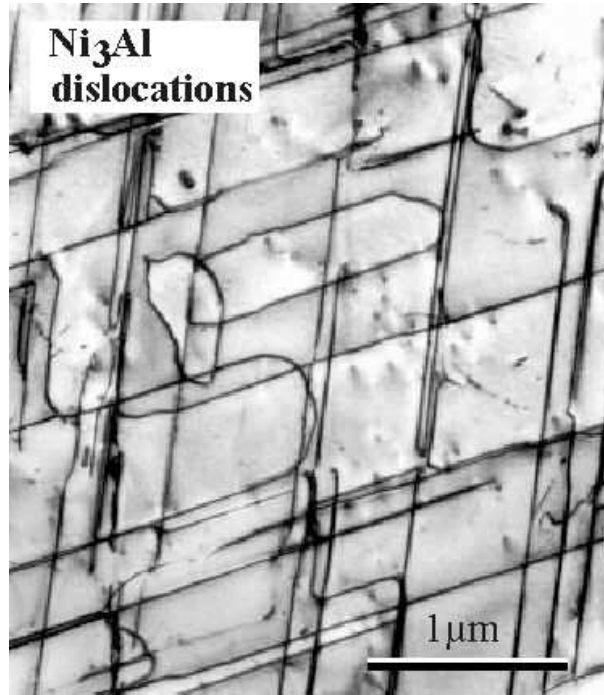


FIGURE 1.1 – Observation de dislocations au micro électronique.

modéliser la déformation plastique des matériaux cristallins à une échelle micrométrique. Ces simulations ont connues un grand progrès dans les dernières décennies grâce à la puissance des ordinateurs qui permet de simuler un grand nombre de dislocations dans un domaine  $3D$ . D'un point de vue mathématique, une ligne de dislocation est une ligne de défaut qui se déplace dans un plan cristallographique, nous pouvons donc la considérée comme le mouvement d'un front de co-dimension 1 et en utilisant la méthode "level-set", nous déduisons que la dynamique est donnée par une vitesse normale proportionnelle à la force de Peach-Koehler. Cette force a deux contributions la première est une force propre de la dislocation crée par le champ électrique qu'elle génère (c'est cette force qui induit le terme non-local), la seconde est une force extérieure locale provenant par exemple des contraintes exercées sur le matériau, nous avons donné les détails de la modélisation au Chapitre 5, Section 5. En résumé, la vitesse est donnée par (3.11) et le problème correspondant s'écrit

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = c[1_{\{u \geq 0\}}](x, t) |Du(x, t)| & \text{sur } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $u_0$  est une donnée initiale et représente la position de la ligne de dislocation à l'état initial. Notons que l'équation du problème (3.13) est définie a priori dans  $\mathbb{R}^2 \times [0, T]$ , mais nous nous plaçons en dimension  $n$ .

L'étude de l'existence de solutions du problème (3.13) a été entreprise par Régis Monneau et ses collaborateurs qui ont contribué à des résultats d'existence globale en temps de solution (faible) de ce problème en utilisant la notion de solution de viscosité et sous certaines conditions sur le noyau ([5], [6], [19], ect...).

## 4 Équations de Hamilton-Jacobi stationnaires et applications

### 4.1 Introduction

Les équations de Hamilton Jacobi stationnaires du premier ordre sont de la forme

$$\begin{cases} H(x, u, Du) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = \phi & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ,  $u$  est une fonction inconnue,  $Du$  représente son gradient,  $H$  est une fonction de  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\phi$  est une fonction donnée définie sur le bord de  $\Omega$ . Nous retrouvons beaucoup d'applications de ces équations en optique géométrique, en optimisation de formes, en économie et autres. Nous parlerons ici seulement du traitement d'images.

### 4.2 Traitement d'images

Le traitement d'images est une discipline de l'informatique et des mathématiques appliquées qui étudie les images numériques et leurs transformations, dans le but d'améliorer leur qualité ou d'en extraire de l'information (voir [3]).

Donnons quelques exemples.

#### Exemple 1 : Détermination de la forme d'une surface

Une des applications les plus connues en traitement d'images, c'est lors de l'étude d'une surface, pour déterminer sa forme. On éclaire la surface en question et on mesure la quantité de lumière reçue puis réémise par unité de surface afin d'en déterminer sa forme (voir Figure 1.2).

Cette quantité est donnée par la formule suivante

$$I(x)ds = I_0 dx,$$

où  $ds$  représente l'abscisse curviligne. En effet, nous considérons l'intensité reçue et mesurée après la traversée de l'obstacle définie par  $y = u(x)$  sur la longueur  $ds$  et

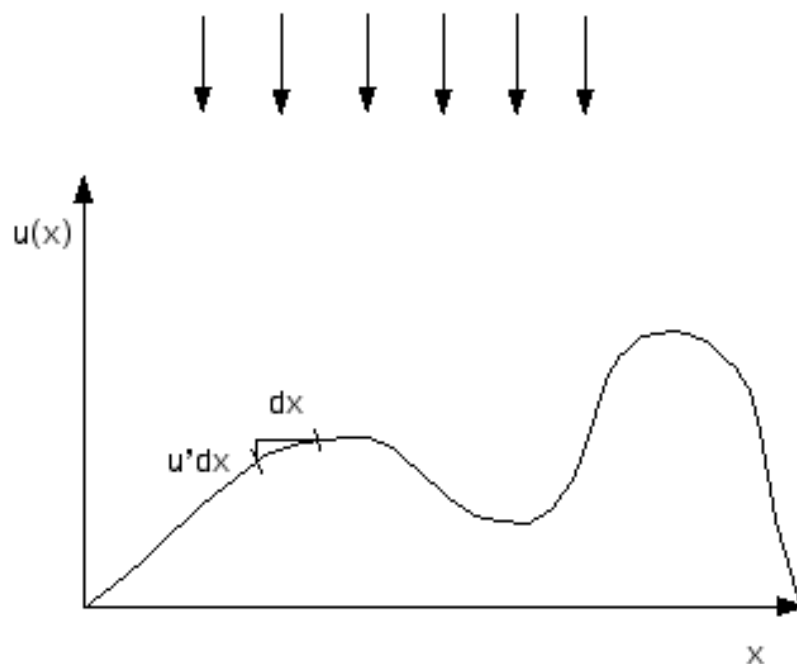


FIGURE 1.2 – Forme d'une surface.

donc

$$\frac{I(x)}{dx} = \frac{I_0}{\sqrt{dx^2 + dy^2}}.$$

Nous obtenons ainsi

$$1 + (u')^2 = \left( \frac{I_0}{I(x)} \right)^2 = g(x).$$

Nous voyons donc apparaître une équation de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

### Exemple : 2 Shape from shading

Il s'agit de déterminer la forme à partir de l'ombre de relief. Nous donnons quelques axiomes

- (i) La brillance ne dépend pas de l'angle de vue,
- (ii) brillance maximale = 1,
- (iii) brillance minimale = 0.

Notons par  $I$  la brillance,  $L$  le vecteur lumière et  $n$  le vecteur normale à la surface. Supposons aussi que la surface est Lambertienne, c'est-à-dire, elle suit la loi de

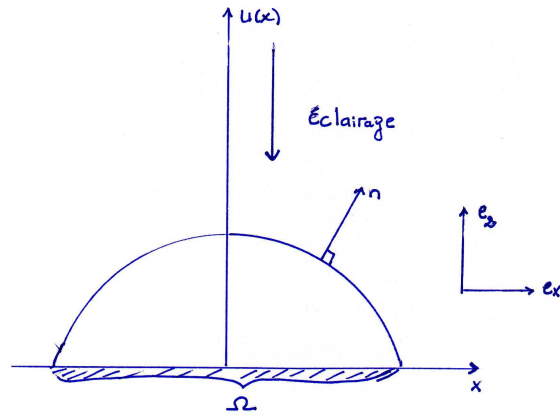


FIGURE 1.3 – Éclairage d'une surface.

Lambert (voir Figure 1.3). Nous avons

$$I(x) = \cos(\widehat{n, e_z}) \quad \text{avec} \quad n = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}} \begin{pmatrix} -\nabla u \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_z = (0, 0, 1).$$

Ce qui donne

$$I(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla u|^2}}$$

Nous obtenons

$$|\nabla u(x)| = a(x) \quad \text{où} \quad a(x) = \sqrt{\frac{1}{I^2(x)} - 1}.$$

Le modèle shape from shading (SFS), revient donc à résoudre l'équation eikonale , donnée par le problème suivant

$$\begin{cases} |\nabla u(x)| = a(x) & \text{pour } x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2 \\ u(x) = 0 & \text{pour } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Pour tous les détails de ces techniques, nous renvoyons aux références ([83], [58] et [71]).

#### Remarque 4.1

*Il existe d'autres domaines du traitement d'images, comme la segmentation qui est*

## 4. Équations de Hamilton-Jacobi stationnaires et applications

---

*une opération du traitement d'images qui a pour but de rassembler des pixels entre eux suivant des critères pré-définis. Nous distinguons plusieurs méthodes, la segmentation basée sur les régions, la segmentation basée sur les contours en utilisant la méthode level-set ( [78], [77], [90], [63], et [10]) et la segmentation basée sur la classification des pixels. Nous citons aussi, la détection de contours qui a pour but de repérer les points d'une image numérique qui correspondent à un changement brutal de l'intensité lumineuse ( [30], [95]) .*

### **Remarque 4.2**

*Le champ d'applications des équations de Hamilton-Jacobi est encore large. Nous citons l'optique géométrique où l'équation eikonale représente l'équation fondamentale régissant le trajet de la lumière dans un milieu (voir [84]).*



## Chapitre 2

# Rappels sur les méthodes de résolution des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre

Dans ce chapitre, nous rappelons les différentes méthodes utilisées pour la résolution des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre.

## 1 Introduction

Il s'agit d'étudier l'existence et l'unicité de solutions pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, formulées par le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $u$  est une fonction définie de  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $Du$  désigne son gradient en espace,  $H$  est une fonction définie dans  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$  appelée hamiltonien et  $u_0$  est une fonction donnée. Il est connu qu'en général nous n'espérons pas avoir des solutions classiques (au moins de classe  $C^1$ ) de ce type de problèmes (voir détails, Exemple 3.6). Le cadre donc le plus adapté pour ce type de problèmes est la notion des solutions généralisées, i.e, des fonctions supposées localement Lipschitziennes en espace et en temps et continues sur  $\overline{Q}$ . Par le Théorème de Rademacher, ces solutions sont différentiables presque partout et vérifient donc les équations de Hamilton-Jacobi presque partout (voir [72]).

### Exemple 1.1

*Considérons le problème*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \left| \frac{\partial u}{\partial x} \right| = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = |x| & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (1.2)$$

Les fonctions  $u_1(x, t) = |x| - t$  et  $u_2(x, t) = (|x| - t)^+$  sont solutions généralisées de (1.2).

Dans ce chapitre, nous allons rappeler quelques résultats connus et méthodes concernant les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre données par le problème (1.1). Nous citerons particulièrement, la méthode des caractéristiques, la viscosité évanescence et la notion des solutions de viscosité.

## 2 Méthode des caractéristiques

La méthode des caractéristiques est une approche classique pour construire localement des solutions d'équations aux dérivées partielles, en particulier les équations

de Hamilton-Jacobi du premier ordre. Elle consiste à réduire l'EDP à un système d'équations différentielles ordinaires. Nous allons donner une brève description de cette méthode. Rappelons un exemple simple de l'équation de transport dans  $\mathbb{R}^n$  donnée par

$$\partial_t u + c \cdot \nabla u = 0, \text{ dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \quad u(x, 0) = u_0(x), \text{ dans } \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Il est bien connu que la solution du problème est donnée par

$$u(x, t) = u_0(x - ct).$$

Supposons que l'hamiltonien  $H$  et la donnée initiale sont de classe  $\mathcal{C}^2$ , l'idée de cette méthode est de trouver des courbes dites "courbes caractéristiques"  $X(s)$  pour un certain paramètre  $s$  dans un intervalle de  $\mathbb{R}$  et vérifiant  $X(0) = x^0$ , le long desquelles on peut calculer la solution  $u$  du problème.

Considérons une solution régulière  $u$  du problème (1.1) et posons  $X(s) = (x_1(s), \dots, x_n(s))$ ,  $Z(s) = u(X(s), s)$ ,  $x_{n+1} = t$ ,  $P(s) = \nabla_x u(X(s), s)$  et  $P_{n+1} = \partial_t u = \partial_{x_{n+1}} u$ , le problème (1.1) devient

$$\begin{cases} G(X, x_{n+1}, P, P_{n+1}) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (2.4)$$

où  $G(X, x_{n+1}, P, P_{n+1}) = P_{n+1} + H(X, x_{n+1}, P)$ .

Nous supposons que  $G \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R})$  et  $u_0 \in C^2(\mathbb{R}^n)$ . En imposant à

$$x_i(s) = \frac{\partial H}{\partial P_i}(X, s, P),$$

nous déduisons le système d'EDO des équations caractéristiques de l'EDP (2.4)

$$\begin{cases} (a) & X'(s) = \frac{\partial H}{\partial P}(X, s, P), \quad X(0) = x^0 \\ (b) & P'(s) = -\frac{\partial H}{\partial X}(X, s, P), \quad P(0) = \nabla u_0(x^0) \\ (c) & Z'(s) = \frac{\partial H}{\partial P}(X, s, P)P + P_{n+1}, \quad Z(0) = u_0(x^0) \\ (d) & P_{n+1}'(s) = -\frac{\partial H}{\partial x_{n+1}}(X, s, P), \quad P_{n+1}(0) = -H(x^0, 0, \nabla u_0(x^0)) \end{cases} \quad (2.5)$$

et  $x_{n+1}(s) = 1$ , ce qui permet d'identifier le temps  $t$  et le paramètre  $s$ .

Les équations (2.5a) et (2.5b) sont appelées les équations de Hamilton, elles interviennent en mécanique analytique (voir [9]).

Le quadruplet des données initiales  $(X(0), 0, Z(0), \overline{P}(0))$  avec  $\overline{P}(0) = (P(0), P_{n+1}(0))$  ainsi choisit est dit admissible (voir P L Lions [72, Chap 1], pour plus de détails). Nous voulons résoudre le système d'EDO pour des données  $(y, u_0(y), q(y))$  pour chaque  $y = (y', 0)$  voisin du point  $(x^0, 0)$ . Nous avons le résultat

**Lemme 2.1 (Conditions non caractéristiques), [40, Lemma1, chap 3]**

Soit  $((X(0), 0, Z(0), \overline{P}(0))$  telque  $G(X(0), 0, \overline{P}(0)) = 0$  et  $\overline{P}(0) = (P(0), P_{n+1}(0))$ . Nous supposons que  $G_{P_{n+1}}(X(0), 0, \overline{P}(0)) \neq 0$ . Alors, il existe une fonction régulière  $q$  définie au voisinage de  $(X(0), 0)$  telle que pour tout  $y$  proche de  $(X(0), 0)$ , le triplet  $(y, u_0(y), q(y))$  soit admissible.

La preuve de ce résultat est basée sur le Théorème des fonctions implicites appliqué à la fonction  $F$  définie par

$$\begin{cases} F_i(y, \overline{P}) = P_i - \partial_{x_i} u_0(y) & \text{pour } 1 \leq i \leq n \\ F_{n+1}(y, \overline{P}) = H(y, P) + P_{n+1}. \end{cases}$$

(voir [40, Lemma1, Chapitre 2]). D'après le Théorème de Cauchy Lipschitz, nous pouvons résoudre le système d'EDO au voisinage de  $(x^0, 0)$  avec comme données initiales  $(y, u_0(y), q(y))$ . Nous obtenons ainsi les fonctions  $P(y, s)$ ,  $Z(y, s)$  et  $X(y, s)$ . Et nous avons le Lemme suivant qui permet de retrouver la solution cherchée  $u(x, t)$ .

**Lemme 2.2 (Inversion locale), [40, Lemma2, chap 3]**

Sous les hypothèses du Lemme 2.1, l'application  $(y, s) \rightarrow X(y, s)$  est inversible au voisinage de  $(x^0, 0)$  il existe un intervalle ouvert  $I$  contenant 0, un voisinage ouvert  $W$  de  $(x^0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^n$  et un voisinage ouvert  $V$  de  $(x^0, 0)$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}$  vérifiant pour tout  $(x, t)$  dans  $V$ , il existe  $(y, s)$  dans  $W \times I$  telque  $(x, t) = X(y, s)$ ; de plus les applications  $(x, t) \rightarrow s$  et  $(x, t) \rightarrow y$  sont régulières.

La preuve est basée sur le théorème d'inversion locale.

Par ce Lemme, nous pouvons construire la solution  $u$  en posant

$$u(x, t) = Z(y(x, t), s(x, t)) = Z(X^{-1}(x, t)). \quad (2.6)$$

Nous donnons ainsi le théorème d'existence de solution de l'équation de Hamilton-Jacobi localement au voisinage de  $t = 0$ .

**Théorème 2.3 (Existence locale)**

Sous les hypothèses des Lemmes 2.1 et 2.2, les fonctions  $P(y, s)$ ,  $Z(y, s)$  et  $X(y, s)$  sont solutions des équations caractéristiques (2.5) avec les conditions initiales  $\overline{P}(y, 0) = q(y)$ ,  $Z(y, 0) = u_0(y)$  et  $X(y, 0) = y$ . La fonction  $u$  définie par (2.6) vérifie le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) = 0 & \text{sur } V \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{sur } \partial V. \end{cases} \quad (2.7)$$

La construction précédente donne une solution régulière de l'équation de Hamilton-Jacobi au voisinage de 0, donc sur un intervalle de temps court  $[0, T^*)$ . Nous ne pouvons pas prolonger cette solution à tout  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$ . Plus précisément, les singularités se produisent lorsque les caractéristiques issues des points  $x$  se croisent et nous obtenons alors deux valeurs pour le gradient de  $u$  (voir PL Lions, [72]).

Nous donnons les deux exemples qui illustrent ce fait.

Soit le problème de Dirichlet suivant

**Exemple 2.4**

$$\begin{cases} |\nabla u|^2 = 1 & \text{dans } B(0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \\ u = 0 & \text{sur } C(0, 1) \end{cases} \quad (2.8)$$

où  $B(0, 1)$ , la boule de centre l'origine et de rayon 1 et  $C(0, 1)$ , le cercle de centre l'origine et de rayon 1. Ici,  $H(X, P) = |P|^2 - 1$ . Pour chaque  $x_0 \in C(0, 1)$ , nous avons

$$P = -x_0, \quad X = -2tx_0 + x_0 \quad \text{et} \quad Z = 2t.$$

Donc les caractéristiques sont les rayons orientés vers l'origine et  $u = 1 - |x|$ . On voit que  $\nabla u$  a une singularité à l'origine.

Soit le problème de Cauchy

**Exemple 2.5**

$$\begin{cases} u_t + |\nabla_x u|^2 = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^2 \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = \frac{1}{1+|x|^2} & \text{sur } \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.9)$$

On a  $H(x, P, P_3) = P^2 + P_3$ , pour chaque  $x_0 \in \mathbb{R}^2$ , nous déduisons par les équations des caractéristiques que  $P = P(0) = P_0 = \frac{-2x_0}{(1+x_0)^2}$ ,  $Z(0) = Z_0 + tP_0^2$  et  $x = x_0 + 2tP_0$ . Ainsi les caractéristiques se croisent en un temps fini, d'où une discontinuité de  $\nabla u$ .

### 3 Méthode de viscosité évanescence

Nous venons de voir dans la section précédente que la méthode des caractéristiques fournit des solutions définies en temps court, nous ne pouvons pas prolonger ce type de solutions pour tout temps. Une méthode standard pour démontrer l'existence de solutions des équations de Hamilton-Jacobi, est la méthode de viscosité évanescence qui consiste à l'ajout d'un terme du second ordre avec un paramètre positif donné et faire le passage à la limite quand ce paramètre de régularisation tend vers 0, d'où l'appellation de "viscosité évanescence" qui vient d'une célèbre

méthode en physique dans la mécanique des fluides B. Després ([38]). Considérons pour tout paramètre positif  $\epsilon$ , le problème régularisé de (1.1)

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon(x, t) - \epsilon \Delta u_\epsilon + H(x, t, Du_\epsilon(x, t)) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_{0,\epsilon}(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (3.10)$$

avec une donnée initiale  $u_{0,\epsilon}$  suffisamment régulière obtenue en général par une régularisation de  $u_0$ . Nous obtenons ainsi une équation parabolique quasi-linéaire, où ce type d'équations a été largement étudiées dont nous disposons de beaucoup de résultats d'existence et d'unicité (voir par exemple P.L. Lions [72], O. A. Ladyženskaja [66], M. G. Lieberman [70], L. C. Evans [40]). Pour des données régulières de  $u_{0,\epsilon}$  et  $H$ , nous espérons avoir l'existence d'une solution  $u_\epsilon$  dans  $C^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, +\infty)) \cap C(\mathbb{R} \times (0, +\infty))$ . La situation la plus courante est d'obtenir par le principe du maximum, des estimations Lipschitz uniformes de la solution approchée  $u_\epsilon$ . Plus précisément, on a pour tout compact  $K$ , il existe une constante  $C > 0$ , telle que

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(K)}, \quad \|\nabla_x u_\epsilon\|_{L^\infty(K)}, \quad \|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty(K)} \leq C,$$

pour tout  $\epsilon$  assez petit. Donc la suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$  est localement bornée et équicontinue, par le Théorème d'Ascoli et un procédé d'extraction diagonale, il existe une sous-suite extraite  $(u^{\epsilon_j})_{\epsilon_j}$  telle que

$$u^{\epsilon_j} \longrightarrow u, \quad \text{localement uniformément dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \quad (3.11)$$

vers une certaine fonction

$$u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)).$$

La difficulté majeure ici, c'est le passage à la limite dans l'hamiltonien  $H$  qui est le terme non-linéaire du problème approché. Les estimations Lipschitz ne sont pas suffisantes pour obtenir une convergence presque partout du gradient et obtenir une solution généralisée du problème (1.1). Et là le problème majeur de cette méthode, il faudra donc une notion faible de solution qui permettra le passage à la limite dans (3.10), seulement avec la convergence locale uniforme de la suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$ .

## 4 Solutions de viscosité

### 4.1 Introduction

Nous avons vu qu'il est naturel d'utiliser la méthode de viscosité évanescence pour construire une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi (1.1), mais cette méthode présente des problèmes de passage à la limite à cause de la non-linéarité

du l'hamiltonien. Aussi la notion de solutions généralisées (ou solutions presque partout) pose problème à cause de la non-unicité des solutions construites, comme nous l'illustrons dans l'exemple de l'équation eikonale dans  $\mathbb{R}$

**Exemple 4.1**

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

Notons d'abord que nous ne pouvons pas avoir une solution classique (de classe  $\mathcal{C}^1$ ) car sinon par le Théorème de Rolle, il existe un  $c \in ]0, 1[$  telque  $u'(c) = 0$ , ce qui impossible par l'équation.

Une première solution généralisée est donnée par

$$u_1(x) = \frac{1}{2} - \left| \frac{1}{2} - x \right|.$$

Pour construire une suite de solutions généralisées, il suffit d'alterner pentes 1 et pentes  $-1$  en particulier, on peut construire  $(u_n)_n$  de la manière suivante, en posant  $u_n(0) = 0$

Pour  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$  et  $k \in \{0, \dots, 2^{n-1} - 1\}$

$$\begin{cases} u_n(x) = x - \frac{2k}{2^n} & \text{si } \frac{2k}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+1}{2^n} \\ u_n(x) = \frac{2k+2}{2^n} - x & \text{si } \frac{2k+1}{2^n} \leq x \leq \frac{2k+2}{2^n}. \end{cases} \quad (4.12)$$

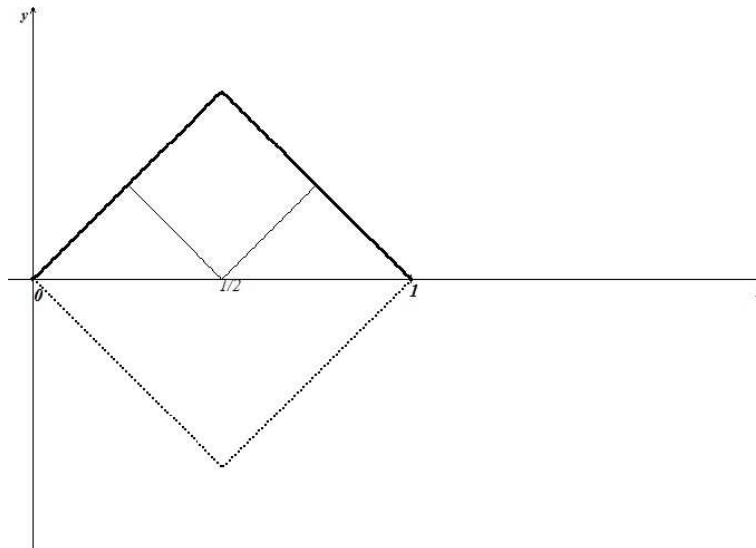


FIGURE 2.1 – Solutions au sens Lipschitz.

Nous avons immédiatement,  $0 \leq u_n(x) \leq \frac{1}{2^n}$  sur  $[0, 1]$ . Ce qui implique la convergence uniforme de  $(u_n)_n$  vers 0 mais 0 n'est pas solution, ce qui pose un problème de stabilité. Finalement, nous remarquons que le passage à la limite dans l'équation  $|u'| = 1$  en terme de solutions généralisées requiert la convergence presque partout du gradient ce n'est pas le cas pour la suite  $(u_n)_n$  car la suite  $(u'_n)_n$  converge vers 0 faible- $\star$  mais ne converge dans aucun  $L^p$  puisque  $\|u'_n\|_{L^p} = 1$ .

Pour résoudre ces problèmes et définir un cadre adéquat et compatible de solutions, M. G. Crandall et P. L. Lions ont introduit dans les années 80 une notion faible de solution appelé **solution de viscosité**. Cette appellation vient de la technique de viscosité évanescence.

En effet l'idée est de fixer une fonction test régulière  $\phi$  pour passer du problème (3.10) à (1.1) quand  $\epsilon$  tend vers 0, en mettant les dérivées sur la fonction test  $\phi$ . Comme les équations de Hamilton-Jacobi sont fortement non-linéaires en particulier ne sont pas de forme divergentielles, nous ne pouvons pas intégrer par parties et emporter les dérivées sur  $\phi$  et donc nous exploitons le principe du maximum pour  $u - \phi$  au moins en un point pour accomplir cette transition. ([40, Chap 10]).

## 4.2 Solutions de viscosité obtenues par la viscosité évanescence

Supposons pour l'instant que l'hamiltonien  $H$  et la donnée initiale  $u_0$  sont continus et considérons une fonction test régulière  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[)$  telle que  $u - \phi$  a un maximum local strict en un point  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$ . Ce qui signifie que

$$(u - \phi)(x, t) < (u - \phi)(x_0, t_0),$$

pour tout point  $(x, t)$  suffisamment proche de  $(x_0, t_0)$ , avec  $(x, t) \neq (x_0, t_0)$ .

Nous montrons (voir [40, chap 10]) que, pour  $\epsilon_j$  assez petit, il existe  $(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \in \mathbb{R}^n \times ]0, +\infty[$  tel que

$$u^{\epsilon_j} - \phi \quad \text{a un maximum local en} \quad (x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})$$

et

$$(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \longrightarrow (x_0, t_0)$$

Ce qui implique que

$$\partial_t u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) = \partial_t \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}), \quad \nabla u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) = \nabla \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})$$

et l'inégalité

$$\Delta u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \leq \Delta \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})$$

Nous déduisons donc que

$$\partial_t \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) + H(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}, \nabla \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j})) = \epsilon_j \Delta u^{\epsilon_j}(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}) \leq \epsilon_j \Delta \phi(x_{\epsilon_j}, t_{\epsilon_j}).$$

Comme  $\phi$  est régulière et  $H$  est continue, en faisant tendre  $\epsilon_j$  vers 0, nous obtenons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, \nabla \phi(x_0, t_0)) \leq 0. \quad (4.13)$$

Dans le cas général où  $u - \phi$  a un maximum local en  $(x_0, t_0)$ , nous prenons comme fonction test  $\tilde{\phi}(x, t) = \phi(x, t) + |x - x_0|^2 + (t - t_0)^2$  de sorte que  $u - \tilde{\phi}$  ait un maximum local strict en  $(x_0, t_0)$  et nous obtenons l'inégalité (4.13) pour  $\tilde{\phi}$ .

Nous obtenons l'inégalité inverse de (4.13), si nous supposons que  $u - \phi$  a un minimum local strict en  $(x_0, t_0)$ . Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer la définition d'une solution de viscosité. Nous commencerons d'abord par la notion des solutions de viscosité continues et ensuite par le cas discontinu.

### 4.3 Solutions de viscosité continues, définitions et propriétés

#### Définition 4.2 (*Solution de viscosité continue*)

Une fonction  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  est dite solution de viscosité continue du problème (1.1) si elle vérifie

(i)  $u(x, 0) = u_0(x)$  dans  $\mathbb{R}^n$

et

(ii) pour toute fonction test  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \phi \text{ a un maximum local en } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \text{ alors} \\ \partial_t \phi(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, D\phi(x_0, t_0)) \leq 0 \end{array} \right. \quad (4.14)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{si } u - \phi \text{ a un minimum local en } (x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \text{ alors} \\ \partial_t \phi(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, D\phi(x_0, t_0)) \geq 0. \end{array} \right. \quad (4.15)$$

#### Définition 4.3 (*Sous- et sur-solutions de viscosité continues*)

(i) Une fonction  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  qui vérifie  $u(x, 0) \leq u_0(x)$  et (4.14) est dite sous-solution de viscosité continue de (1.1).

(ii) Une fonction  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  qui vérifie  $u(x, 0) \geq u_0(x)$  et (4.15) est dite sur-solution de viscosité continue de (1.1).

(iii) Une fonction  $u \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  est une solution de viscosité continue de (1.1), si elle est sous et sur solution.

Dans l'exemple 4.1, nous vérifions par la définition que la fonction  $u(x) = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - x|$  représentée par la courbe tracée en gras dans la Figure 2.1 est l'unique solution de viscosité continue pour l'équation  $|u'| - 1 = 0$ , sur  $]0, 1[$ . En effet

si  $x_0 \neq \frac{1}{2}$ ,  $u$  est dérivable et nous avons pour toute fonction test  $\phi$ ,  $|\phi'| = |u'| = 1$  et donc les inégalités (4.14) et (4.15) de sous- et sur-solutions sont vérifiées. Pour  $x_0 = \frac{1}{2}$  et pour toute fonction test  $\phi$  telle que  $u - \phi$  atteint un point maximum (ou  $\phi$  tangente au-dessus de  $u$  au point  $(x_0, t_0)$ ), nous avons  $|\phi'(x_0)| \leq 1$  et donc l'inégalité (4.14) est vérifiée, par ailleurs,  $x_0 = \frac{1}{2}$  ne peut pas être un point minimum pour  $u - \phi$  avec  $\phi \in C^1(]0, 1[)$ .

Pour les autres solutions au sens Lipschitz, elles ne sont pas solutions de viscosité, en effet, aux points  $x_0$  de la non-dérivabilité des solutions Lipschitz  $u$ , dérivés vers le bas (de pente à gauche  $-1$  et à droite  $1$ , Figure 2.1), pour toute fonction test  $\phi$  de pente égale à  $0$  et telle que  $u - \phi$  atteint un point minimum, nous avons  $|\phi'(x_0)| = 0$  qui n'est pas supérieur à  $1$  et donc la propriété de sur-solution (4.15) n'est pas vérifiée, donc  $u$  n'est pas une solution de viscosité.

#### Remarque 4.4

*Il est curieux aussi de remarquer que si l'on change le signe de l'hamiltonien, les solutions de viscosité changent. Ainsi la fonction  $v(x) = \frac{1}{2} - |\frac{1}{2} - x|$  n'est pas solution de viscosité de l'équation  $1 = |u'|$  sur  $]0, 1[$ , ici l'hamiltonien est donné par  $H(x, p) = 1 - |p|$  et dans le premier cas  $H(x, p) = |p| - 1$ . Ceci vient du fait que la solution de  $|u'| = 1$  obtenue par viscosité évanescence vient de l'approximation  $-\epsilon\Delta u + H = 0$  et l'autre vient de  $\epsilon\Delta u + H = 0$ . Voir aussi l'exemple dans [11, chap II].*

#### Remarque 4.5

*Notons qu'une solution de viscosité est une solution généralisée de l'équation de Hamilton-Jacobi (1.1), c'est-à-dire une fonction localement lipschitzienne et qui vérifie l'équation presque partout (voir [11, Prop 1.9]).*

*La réciproque est fautive, la fonction  $u(x) = |x|$  est solution généralisée de  $|u'| - 1 = 0$  sur  $] -1, 1[$ , mais n'est pas une solution de viscosité car la condition de sur-solution (4.15), n'est pas vérifiée en  $x = 0$  pour un choix de fonction test  $\phi(x) = -x^2$  ( $x = 0$  est un minimum local pour  $|x| - (-x^2)$ , mais  $|\phi'(0)| - 1$  n'est pas supérieur à  $0$ ).*

#### Remarque 4.6

*Il existe une autre définition équivalente des solutions de viscosité utilisant la notion des **sur- et sous-différentiels** d'une fonction continue. L'intérêt de cette définition équivalente est très limité pour les équations du premier ordre mais elle joue un rôle fondamental pour les équations du second ordre. Comme l'objectif de cette thèse est l'étude des équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, nous n'allons pas présenter cette définition et nous renvoyons aux livres de G. Barles [15], P. L. Lions [72] et M. Bardi [11].*

## 4.4 Propriétés des solutions de viscosité continues

Nous allons donner quelques propriétés des solutions de viscosité continues et qui donnent les solutions aux problèmes énoncés au début de ce chapitre qui montrent l'insuffisance des méthodes classiques pour définir un cadre même faible de solutions, pour les équations de Hamilton-Jacobi.

### 4.4.1 Consistence avec les solutions classiques

Nous remarquons d'abord que toute solution classique (c'est-à-dire une fonction  $u$  de classe  $C^1(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty))$  qui vérifie le problème (1.1)) et si de plus  $u$  est bornée et uniformément continue, alors  $u$  est une solution de viscosité continue. Réciproquement, nous avons le théorème suivant

**Théorème 4.7** [40, Th1, Chap 10.1]

*Soit  $u$  une solution de viscosité continue du problème (1.1), nous supposons de plus que  $u$  est différentiable en un point  $(x_0, t_0)$  de  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ . Alors, nous avons*

$$\partial_t u(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, Du(x_0, t_0)) = 0.$$

Pour la preuve voir [40].

### 4.4.2 Stabilité continue

Le passage à la limite dans les équations paraboliques ou elliptiques non-linéaires seulement avec des convergences faibles est un problème fondamental de l'analyse non linéaire. Nous appelons résultat de stabilité un résultat qui permet de tels passages à la limite en utilisant la notion de solutions de viscosité. Nous présentons ici dans ce chapitre un premier résultat de stabilité, d'autres résultats seront donnés dans les chapitres qui suivent.

**Théorème 4.8 (Résultat de stabilité, [15, Th 2.3])**

*Supposons que l'hamiltonien  $H \in C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$  et que pour tout  $\epsilon$ ,  $u_\epsilon \in C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  est une sous-solution (resp. sur-solution) de*

$$\partial_t u_\epsilon + H_\epsilon(x, t, Du_\epsilon) - \epsilon \Delta u_\epsilon = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \quad (4.16)$$

*où  $H_\epsilon$  est une suite de fonctions continues. Si  $u_\epsilon \rightarrow u$  localement dans  $C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  et  $H_\epsilon \rightarrow H$  localement dans  $C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$ , alors  $u$  est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de*

$$\partial_t u + H(x, t, Du) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Notons que la convergence locale dans l'espace des fonctions continues, est la convergence uniforme sur les compacts.

Ce théorème est d'un intérêt fondamental car il permet le passage à la limite dans une équation avec une non-linéarité du gardient connaissant seulement une convergence locale uniforme de la suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$ . Avec ce résultat le problème du passage à la limite évoqué pour les solutions généralisées est résolu (voir Exemple 4.1).

**Remarque 4.9**

*Remarquons que ce passage à la limite ce fait seulement dans l'équation. Pour les conditions initiales ou les conditions aux bords (si l'équation de Hamilton-Jacobi est définie sur un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ ), ce passage à la limite se fait à part en utilisant les propriétés du problème en question. Voir Chapitre 4, Sous-section 5.2.*

**Preuve du Théorème 4.8**

Nous montrons le cas de sous-solution.

Soit  $\phi \in C^2(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ , une fonction test (on prend la classe  $C^2$ , car l'hamiltonien dans le problème (4.16) est du second ordre avec l'ajout de  $\Delta u_\epsilon$ ). Soit aussi  $(x_0, t_0)$  un point de maximum local de  $u - \phi$ , quitte à retrancher à  $u - \phi$  un terme de la forme  $\chi(x, t) = |x - x_0|^4 + |t - t_0|^4$ , nous pouvons supposer que  $(x_0, t_0)$  est un point de maximum local strict. Le but est de montrer l'inégalité de sous-solution (4.14) de la limite  $u$ . Nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.10** [15, Lemme 2.2]

*Soit  $(v_\epsilon)_\epsilon$ , une suite de fonctions continues sur  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ , qui converge dans  $C(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  vers  $v$ . Si  $(x_0, t_0)$  est un point de maximum local strict de  $v$ , alors, il existe une suite de points  $(x_\epsilon, t_\epsilon)_\epsilon$  de maximum local de  $v_\epsilon$ , qui converge vers  $(x_0, t_0)$ .*

La preuve du lemme figure dans [15, Lemme 2.2].

Nous utilisons le Lemme 4.10, avec  $v_\epsilon = u_\epsilon - (\phi + \chi)$  et  $v = u - (\phi + \chi)$ . Comme  $u_\epsilon$  est une sous-solution de (4.16) et comme  $(x_\epsilon, t_\epsilon)$  est un point de maximum de  $u_\epsilon - (\phi + \chi)$ , nous avons par définition

$$\partial_t \phi(x_\epsilon, t_\epsilon) + \partial_t \chi(x_\epsilon, t_\epsilon) + H_\epsilon(x_\epsilon, t_\epsilon, D\phi(x_\epsilon, t_\epsilon) + D\chi(x_\epsilon, t_\epsilon)) - \epsilon(\Delta \phi(x_\epsilon, t_\epsilon) + \Delta \chi(x_\epsilon, t_\epsilon)) \leq 0.$$

Comme  $(x_\epsilon, t_\epsilon) \rightarrow (x_0, t_0)$ , par la régularité des fonctions test  $\phi$  et  $\chi$  et la continuité de l'hamiltonien  $H_\epsilon$  et sa convergence locale uniforme vers  $H$ , nous obtenons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H(x_0, t_0, D\phi(x_0, t_0)) \leq 0.$$

Ce qui implique que  $u$  est une sous-solution de

$$\partial_t u + H(x, t, Du) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Le cas de sur-solution est prouvé de la même manière, en utilisant l'inégalité (4.15).

### 4.4.3 Principe de comparaison et unicité

Les résultats d'unicité sont fondamentaux pour conclure un passage à la limite en utilisant la stabilité. Ces résultats sont basés principalement sur un principe de comparaison. Nous allons énoncer le théorème d'unicité pour un cas plus général que le problème (1.1). Pour  $T > 0$  fixé, considérons le problème

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times [0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.17)$$

Notons que la définition des solutions de viscosité se prolonge de manière naturelle aux points du bord  $\mathbb{R}^n \times \{T\}$  (voir [15, Lemme 2.8]).

L'équation de Hamilton-Jacobi du problème (4.17) vérifie un principe de comparaison si elle satisfait la définition suivante

**Définition 4.11** (*Principe de comparaison*)

On dit que l'équation  $\partial_t u + H(x, t, Du) = 0$  satisfait un principe de comparaison si pour toute sous-solution  $u$  et toute sur-solution  $v$  de viscosité continues, nous avons

$$u(x, 0) \leq v(x, 0) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \Rightarrow u(x, t) \leq v(x, t) \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T]. \quad (4.18)$$

Remarquons que ce principe de comparaison conduit à l'unicité de la solution de viscosité continue, en effet

Si  $u_1$  et  $u_2$  sont deux solutions de viscosité continues de (4.17) vérifiant la même donnée initiale  $u_1(x, 0) = u_2(x, 0) = u_0(x)$ , d'après le résultat énoncé,  $u_1$  est sous-solution et  $u_2$  est sur-solution donc,  $u_1 \leq u_2$  sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ . Et nous intervertissons le rôle de  $u_1$  et  $u_2$ , nous aurons l'autre inégalité ce qui conduit à l'unicité.

Nous supposons maintenant que l'hamiltonien  $H$  satisfait les hypothèses suivantes

**(H1)** L'hamiltonien  $H$  est uniformément continu sur  $\mathbb{R}^n \times [0, T] \times \overline{B}_r$ , pour tout  $r > 0$  et où  $B_r$  désigne la boule de centre 0 et de rayon  $r$ .

**(H2)** Il existe un modulus  $m : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$  tel que, pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , pour tout  $t \in (0, T)$  et tout  $p \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq m(|x - y|(1 + |p|)). \quad (4.19)$$

Nous rappelons qu'un modulus est une fonction croissante, positive, définie sur  $[0, +\infty)$ , telle que  $m(r) \rightarrow 0$  quand  $r \rightarrow 0$ .

Voici un premier résultat d'unicité pour le problème (4.17) dans l'espace  $BUC(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  l'espace des fonctions bornées et uniformément continues.

**Théorème 4.12** (*Résultat d'unicité , [1, Th 5.2]*)

Sous les hypothèses **(H1)**, **(H2)** et  $u_0 \in BUC(\mathbb{R}^n)$ . Alors, pour tout  $T > 0$ , le problème (4.17) admet une unique solution de viscosité bornée et uniformément continue dans  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ .

Nous allons reproduire la preuve de ce Théorème qui existe dans la référence citée pour clarifier les notions de base des solutions de viscosité ainsi que leurs preuves.

**Preuve du Théorème 4.12**

La preuve de l'existence est basée sur la méthode de Perron, que nous définirons ultérieurement dans la sous-section 4.8 et nous renvoyons au [1, Th 7.1], pour le détail des calculs.

Nous montrons ici l'unicité, pour ce faire, il suffit d'établir un principe de comparaison.

Soient donc  $u$  et  $v$  respectivement une sous- et sur-solutions de viscosité continues dans  $BUC(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  du problème (4.17). Posons

$$M = \sup_{\mathbb{R}^n \times (0, T)} (u - v).$$

Nous allons montrer que  $M \leq 0$ , nous raisonnons par l'absurde, nous supposons donc que  $M > 0$ , pour ce faire nous utilisons la technique de dédoublement de variables. Faisons d'abord ce changement de fonction  $u_\eta(x, t) = u(x, t) - \eta t$ , pour tout paramètre  $\eta > 0$ , assez petit. Sans perte de généralité, nous supposons que  $u$  est une sous-solution stricte de (4.17), si  $u_\eta$  et une sous-solution de

$$(u_\eta)_t + H(x, t, Du_\eta) \leq -\eta < 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, T).$$

Pour compléter la preuve, il est suffisant de montrer que  $u_\eta \leq v$ . Nous utilisons dans la suite la notation  $u$ , au lieu de  $u_\eta$ , pour but de simplification.

Pour tous paramètres  $0 < \epsilon, \alpha, \beta \ll 1$ , nous introduisons la "fonction-test"

$$\psi_{\epsilon, \alpha}^\beta(x, t, y, s) = u(x, t) - v(y, s) - \frac{|x - y|^2}{\epsilon^2} - \frac{|t - s|^2}{\alpha^2} - \beta (|x|^2 + |y|^2).$$

La fonction  $\psi_{\epsilon, \alpha}^\beta$  étant continue, son maximum est atteint en un point  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$ , nous posons donc  $\bar{M} = \psi_{\epsilon, \alpha}^\beta(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$ . A cause des termes de pénalisation  $\frac{|x-y|^2}{\epsilon^2}$  et  $\frac{|t-s|^2}{\alpha^2}$  qui imposent aux points maximum  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$  de vérifier  $(\bar{x}, \bar{t}) \sim (\bar{y}, \bar{s})$ , pour  $\epsilon, \alpha$  assez petits, nous pouvons penser que le maximum de  $\psi_{\epsilon, \alpha}^\beta$ , noté  $M_{\epsilon, \alpha}^\beta$ , ressemble au maximum de  $u - v$ , cette idée est justifiée par le lemme suivant

**Lemme 4.13 ( [1, Lemme 5.2] )**

Les propriétés suivantes ont lieu

1.  $M_{\epsilon, \alpha}^\beta \rightarrow M$  quand  $(\epsilon, \alpha, \beta) \rightarrow 0$ .
2. Si  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$  est un point maximum de  $\psi_{\epsilon, \alpha}^\beta$ , nous avons

$$\left\{ \begin{array}{ll} u(\bar{x}, \bar{t}) - v(\bar{y}, \bar{s}) \rightarrow M & \text{quand } (\epsilon, \alpha, \beta) \rightarrow 0, \\ \frac{|\bar{x} - \bar{y}|^2}{\epsilon^2} \rightarrow 0, \quad \frac{|\bar{t} - \bar{s}|^2}{\alpha^2} \rightarrow 0 & \text{quand } (\epsilon, \alpha, \beta) \rightarrow 0, \\ \beta (|\bar{x}|^2 + |\bar{y}|^2) \rightarrow 0 & \text{quand } (\epsilon, \alpha, \beta) \rightarrow 0. \end{array} \right.$$

Pour la preuve du lemme, nous renvoyons aux livres [15, Lemme 2.9] et [1, Lemme 5.2].

Revenons à la preuve du Théorème, nous supposons  $\epsilon$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  assez petits, pour que les résultats du Lemme précédent restent vrais. Comme  $(\bar{x}, \bar{t}, \bar{y}, \bar{s})$  est un point maximum de  $\psi_{\epsilon, \alpha}^\beta$ , alors  $(\bar{x}, \bar{t})$  est un point maximum de

$$(x, t) \mapsto u(x, t) - \phi^1(x, t),$$

où  $\phi^1$  est définie par

$$\phi^1(x, t) = v(\bar{y}, \bar{s}) + \frac{|x - \bar{y}|^2}{\epsilon^2} + \frac{|t - \bar{s}|^2}{\alpha^2} + \beta (|x|^2 + |\bar{y}|^2).$$

Comme  $u$  est sous-solution de  $\partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) \leq -\eta < 0$ , nous avons alors

$$\partial_t \phi^1(\bar{x}, \bar{t}) + H(\bar{x}, \bar{t}, D\phi^1(\bar{x}, \bar{t})) = \frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha^2} + H(\bar{x}, \bar{t}, \frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{x}) \leq -\eta.$$

De même,  $(\bar{y}, \bar{s})$  est un point maximum de

$$(x, t) \mapsto -v(y, s) + \phi^2(y, s),$$

où  $\phi^2$  est définie par

$$\phi^2(y, s) = u(\bar{x}, \bar{t}) - \frac{|\bar{x} - y|^2}{\epsilon^2} - \frac{|\bar{t} - s|^2}{\alpha^2} - \beta (|\bar{x}|^2 + |y|^2).$$

Comme  $v$  est sur-solution de  $\partial_t v(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) \leq -\eta < 0$  et  $(\bar{y}, \bar{s})$  est un minimum de  $v - \phi^2$ , nous avons alors

$$\partial_t \phi^2(\bar{y}, \bar{s}) + H(\bar{y}, \bar{s}, D\phi^2(\bar{y}, \bar{s})) = \frac{2(\bar{t} - \bar{s})}{\alpha^2} + H(\bar{y}, \bar{s}, \frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{y}) \geq 0.$$

En retranchant les deux inégalités de viscosité, nous obtenons

$$H(\bar{x}, \bar{t}, \frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{x}) - H(\bar{y}, \bar{s}, \frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{y}) \leq -\eta.$$

En posant  $\bar{p} = (\frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{x})$  et  $\bar{q} = (\frac{2(\bar{x} - \bar{y})}{\epsilon^2}, 2\beta\bar{y})$  et en retranchant et ajoutant les termes  $H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{p})$  et  $H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{q})$ , nous obtenons

$$(H(\bar{x}, \bar{t}, \bar{p}) - H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{p})) - (H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{q}) - H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{p})) + ((H(\bar{x}, \bar{s}, \bar{q}) - H(\bar{y}, \bar{s}, \bar{q}))) \leq -\eta \quad (4.20)$$

Pour les termes en  $\beta$ , nous avons

$$\beta (|x|^2 + |\bar{y}|^2) \leq R = \max(\|u\|_\infty, \|v\|_\infty),$$

donc

$$|2\beta x| = 2\beta^{\frac{1}{2}} (\beta|x|^2)^{\frac{1}{2}} \leq 2\beta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}.$$

De même

$$|2\beta y| \leq 2\beta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}.$$

Pour  $\epsilon$  et  $\beta$  fixés, par le Lemme 4.13,  $\bar{p}$  et  $\bar{q}$  restent bornés par au plus une certaine constante  $\bar{K} = K/\epsilon + 2\beta^{\frac{1}{2}} R^{\frac{1}{2}}$  et  $K$  une constante positive. Notons  $m_H^{\epsilon, \beta}$ , le modulus de continuité de  $H$  sur  $\mathbb{R}^n \times (0, T) \times \overline{B(0, \bar{K})}$ .

Dans le membre de gauche de l'inégalité de viscosité (4.20), le premier et le deuxième termes sont reliés à la régularité de  $H$  qui l'hypothèse (H1) et le dernier terme est relié à l'hypothèse (H2), nous obtenons donc

$$-m_H^{\epsilon, \beta} (|\bar{t} - \bar{s}|) + m_H^{\epsilon, \beta} (|\bar{p} - \bar{q}|) - m (|\bar{x} - \bar{y}|(1 + |\bar{q}|)) \leq -\eta.$$

Nous fixons  $\epsilon, \beta$  et nous faisons tendre  $\alpha$  vers 0, par le Lemme 4.13, le premier terme de l'inégalité ci-dessus tend vers 0. En suite on fait tendre  $\epsilon, \beta$  vers 0, ce qui conduit à  $0 \leq -\eta$ , contradiction. Donc  $M \leq 0$ . Ce qui termine la preuve du Théorème 4.12.

#### Remarque 4.14

*Il existe d'autres résultats d'unicité pour les solutions non bornées dans  $UC(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ , espace des fonctions uniformément continues (voir Crandall et Lions [37] et Ishi [59]), puis avec des conditions de croissance à l'infini (voir Crandall et Lions [36]). Nous trouverons aussi d'autres résultats d'unicité plus élaborés dans [15], [72] et livre de Bardi, Crandall, Evans, Soner et Souganidis [12].*

#### 4.4.4 Expression explicite de la solution de viscosité Hopf-Lax formula

Dans le cas d'un hamiltonien convexe et ne dépend que du gradient, nous pouvons déduire l'expression explicite de l'unique solution de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi associée. Ce type de formules intervient beaucoup en théorie du contrôle optimal et la programmation dynamique comme nous l'avons mentionné au Chapitre 1 (voir aussi [40, Chap 10.3]).

Pour  $T > 0$ , considérons le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = H(Du(x, t)) & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, T] \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.21)$$

Supposons que l'hamiltonien et  $u_0$  vérifient les conditions suivantes

- (a) La fonction  $p \mapsto H(p)$  est convexe

(b)  $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{H(p)}{p} = \infty$

(c)  $u_0$  est une fonction Lipschitz continue.

**Définition 4.15 (Transformée de Legendre)**

Soit  $H$  un hamiltonien vérifiant les hypothèses précédentes ((a)-(c)). On appelle transformée de Legendre, la fonction  $L$  définie par

$$L(q) = \sup_{p \in \mathbb{R}^n} [p \cdot q - H(p)].$$

$L$  est appelé Lagrangien.

Notons que la transformée de Legendre  $L$  ou notée parfois  $H^*$  vérifie les mêmes propriétés que l'hamiltonien  $H$ , à savoir

$$p \mapsto L(p) \text{ est convexe, } \lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{L(p)}{p} = \infty \text{ et } H^{**} = H.$$

**Exemple 4.16**

Nous prenons l'exemple où

$$H(p) = \frac{1}{\alpha} |p|^\alpha, \quad \alpha > 1.$$

Dans ce cas la transformée de Legendre est

$$L(p) = \frac{1}{\beta} |p|^\beta, \quad \text{avec } \beta = \frac{\alpha}{\alpha - 1} > 1.$$

**Théorème 4.17 (Solution de viscosité sous la formule Hopf-Lax)** [40, Th3, Chap 10.3]

Supposons qu'en plus des conditions précédentes ((a) – (c)),  $u_0$  est bornée. Alors, l'unique solution de viscosité du problème (4.21) est donnée par

$$u(x, t) = \min_{y \in \mathbb{R}^n} [tL\left(\frac{x - y}{t}\right) + u_0(y)], \quad t \neq 0.$$

Pour la preuve voir [40].

**Exemple 4.18**

Considérons le problème

$$(\mathcal{P}) \begin{cases} \partial_t u(x, t) + \frac{1}{\alpha} |Du|^\alpha = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = g(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases}$$

Pour  $\alpha > 1$ , nous supposons que  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , est bornée et uniformément continue. Alors, l'unique solution de viscosité continue du problème (P) est donnée par

$$u(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left[ g(y) + \frac{|x - y|^\beta}{\beta t^{\beta-1}} \right].$$

Pour le cas  $\alpha = 2$ , on trouve  $\beta = 2$  et  $L = H$ , la solution devient

$$u(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left[ g(y) + \frac{|x - y|^2}{2t} \right]. \quad (4.22)$$

La formule (4.22), est connue par l'inf-convolution de la fonction  $g$ . Nous renvoyons aux [11, Chapitre 1] et [26], pour les détails de ces approximations ainsi que l'utilisation dans la théorie du contrôle optimal.

#### Remarque 4.19

La Formule de Hopf-Lax a été généralisée pour le cas de données initiales convexes, le cas d'hamiltonien quasi-convexes (voir [13]), des hamiltoniens dépendant de  $u$  ainsi avec des données initiales semi-continues (voir [4]) et ([55]) pour l'équation eikonale.

## 4.5 Propagation à vitesse finie

Une propriété importante des équations de Hamilton-Jacobi dépendantes du temps est "la propagation à vitesse finie". Ce type de résultat peut être formulé de la manière suivante.

Si  $u, v \in C(\mathbb{R}^n \times [0, T])$ , sont respectivement sous et sur-solutions du problème (4.17) dans  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$

Il existe  $c > 0$ , telle que si  $u(x, 0) \leq v(x, 0)$  dans  $B(0, R)$ , pour un certain  $R > 0$ , alors  $u(x, t) \leq v(x, t)$ , pour tout  $x \in B(0, R - ct)$  avec  $ct \leq R$ . La constante  $c$  est "la vitesse de propagation" et où  $B(0, R)$  représente la boule de centre l'origine et de rayon  $R$  et peut être remplacée par toute boule  $B(z, R)$ , de centre un point  $z$  et de rayon  $R$ .

L'hypothèse clés pour avoir ce résultat est la suivante

**(H3)** Pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in [0, T]$  et  $p, q \in \mathbb{R}^n$ ,

$$|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq C|p - q|.$$

#### **Théorème 4.20** [1, Th 5.3]

Supposons les hypothèses **(H2)** et **(H3)**, nous avons un résultat de type propagation à vitesse finie pour le problème (4.17) dans  $\mathbb{R}^n \times [0, T]$ , avec une vitesse égale à  $C$ .

Pour la preuve, nous renvoyons à [1].

Pour plus de détails sur les résultats de type "propagation à vitesse finie", nous renvoyons au papier de Crandall et Lions [35] et au livre de Lions [72]. Un résultat similaire pour l'équation eikonale est prouvé dans le Chapitre 4, Lemme 5.4.

## 4.6 Solutions de viscosité discontinues

### 4.6.1 Motivations et définitions

La notion de solutions de viscosité discontinues est due à H. Ishii ([60]) en considérant un hamiltonien non continu ou bien des données initiales discontinues. Il donna une adaptation à ce contexte de la méthode de Perron pour obtenir des résultats d'existence assez généraux [59].

Cette notion présente deux motivations, la première est que dans la théorie du contrôle optimal, la plus part du temps la fonction valeur qui est l'unique solution de viscosité de l'équation de Hamilton Jacobi Bellman est discontinue. La deuxième motivation est plus technique, est le passage à la limite quand les conditions aux bords ne sont pas continues, citons l'exemple suivant

#### Exemple 4.21

$$\begin{cases} |u'| = 1 & \text{dans } ]0, 1[ \\ u(0) = 0, \quad u(1) = 2. \end{cases}$$

Une question intéressante est de savoir ce qui se passe quand nous appliquons une régularisation elliptique, i.e. si nous considérons le problème approché suivant

#### Exemple 4.22

$$\begin{cases} -\epsilon u''_\epsilon + |u'_\epsilon| = 1 & \text{dans } ]0, 1[ \\ u_\epsilon(0) = 0, \quad u_\epsilon(1) = 2 \end{cases}$$

et de voir le comportement de la solution approchée quand  $\epsilon$  tend vers 0. Notons que ce problème approché admet une unique solution explicite donnée par

$$u_\epsilon(x) = x + \frac{\exp(\frac{x-1}{\epsilon}) - \exp(-\frac{1}{\epsilon})}{1 - \exp(-\frac{1}{\epsilon})}.$$

Sur tout compact de  $]0, 1[$ , la suite  $u_\epsilon$  converge uniformément vers la fonction  $u(x) = x$  mais on ne peut pas appliquer le résultat de stabilité cité dans la section précédente car au bord du domaine et précisément au point  $x = 1$ , le comportement de la solution  $u_\epsilon$  est moins agréable, nous avons apparition d'une discontinuité lors du passage à la limite au bord; la suite  $u_\epsilon$  n'est pas compacte sur  $C([0, 1])$ . Pour passer à la limite, il faut prendre en compte les discontinuités.

Avant de donner la définition des solutions de viscosité discontinues de Ishii, nous donnons les définitions des fonctions semi-continues définies sur un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$  ainsi que certaines propriétés.

**Définition 4.23 (Fonctions semi-continues supérieurement inférieurement)**

Une fonction  $u : E \rightarrow \mathbb{R}$  est semi-continue supérieurement (s.c.s) (resp. inférieurement (s.c.i)), si pour tout  $x \in E$  et tout  $\epsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que  $f(y) < f(x) + \epsilon$  (resp.  $f(y) > f(x) - \epsilon$ ), pour tout  $y \in E \cap B(x, \delta)$ .

Nous rappelons aussi la définition des enveloppes semi-continues supérieurement et inférieurement d'une fonction  $u$  localement bornée définie sur un sous-ensemble  $E$  de  $\mathbb{R}^n$ . Nous notons  $u^*$  l'enveloppe semi-continue supérieurement de  $u$  définie par

$$u^*(x) = \limsup_{y \rightarrow x} u(y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \sup\{u(y) \mid y \in E, |y - x| \leq r\},$$

et  $u_*$  l'enveloppe semi-continue inférieurement de  $u$  définie par

$$u_*(x) = \liminf_{y \rightarrow x} u(y) = \lim_{r \rightarrow 0^+} \inf\{u(y) \mid y \in E, |y - x| \leq r\}.$$

La proposition suivante résume quelques propriétés des enveloppes s.c.s et s.c.i

**Proposition 4.24 (Propriétés des enveloppes s.c.s et s.c.i)**

[11, Prop 2.1 ch V]

1. Nous avons  $u_* \leq u \leq u^*$  ;
2.  $u_* = -(-u)^*$  ;  
si  $u$  est localement bornée, alors  $u^*$  et  $u_*$  satisfont
3.
 
$$\begin{cases} u^*(x) = \inf\{v(x), & v \in C(E), & v \geq u\} \\ u_*(x) = \sup\{v(x), & v \in C(E), & v \leq u\} \end{cases}$$
4.
 
$$\begin{cases} u^*(x) = \min\{v(x), & v \in SCS(E), & v \geq u\} \\ u_*(x) = \max\{v(x), & v \in SCI(E), & v \leq u\}; \end{cases}$$
5.  $u$  est s.c.s en  $x_0$  si et seulement si  $u(x_0) = u^*(x_0)$  ;  $u$  est s.c.i en  $x_0$  si et seulement si  $u(x_0) = u_*(x_0)$ ,

où  $C(E)$  est l'espace des fonctions continues dans  $\mathbb{R}^n$  restreint à  $E$ .

Pour la preuve, nous renvoyons au livre de Bardi [11].

Nous énonçons maintenant la définition d'une solution de viscosité discontinue selon H. Ishii pour l'équation de Hamilton-Jacobi (1.1).

**Définition 4.25** (*sous-solution, sur-solution et solution de viscosité discontinues*)

Nous supposons que l'hamiltonien  $H$  et la donnée initiale  $u_0$  sont localement bornés.

(1)– Une fonction  $u$  localement bornée dans  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  est une sous-solution de viscosité discontinue de (1.1) si et seulement si elle satisfait

(i)  $u^*(\cdot, 0) \leq u_0^*(\cdot),$

(ii) pour tout point  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  et toute fonction test  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  qui est tangente au-dessus de  $u^*$  au point  $(x_0, t_0)$  (i.e. satisfaisant  $u^* \leq \phi$  et  $u^*(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ ), nous avons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H_*((x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \leq 0.$$

(2)– Une fonction  $v$  localement bornée dans  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  est une sur-solution de viscosité discontinue de (1.1) si et seulement si elle satisfait

(i)  $v_*(\cdot, 0) \geq (u_0)_*(\cdot),$

(ii) pour tout point  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  et toute fonction test  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  qui est tangente en-dessous de  $v_*$  au point  $(x_0, t_0)$  (i.e.  $v_* \geq \phi$  et  $v_*(x_0, t_0) = \phi(x_0, t_0)$ ), nous avons

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + H^*((x_0, t_0), D\phi(x_0, t_0)) \geq 0.$$

(3)– Une fonction  $u$  définie sur  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  localement bornée est une solution de viscosité discontinue de (1.1) si son enveloppe s.c.s  $u^*$  (resp. son enveloppe s.c.i  $u_*$ ) est une sous-solution (resp. une sur-solution) de viscosité de (1.1).

Nous renvoyons aussi à l'article et livre de G. Barles [15] et [14] pour plus de détails. Voir aussi le papier de Giga [51] pour la notion de solution de viscosité avec chocs.

## 4.7 Propriétés des solutions de viscosité discontinues

### 4.7.1 Stabilité discontinue

Pour résoudre le problème du passage à la limite dans le cas de discontinuités comme évoqué dans l'Exemple 4.22, nous donnerons le résultat de stabilité discontinu. Pour formuler ce résultat, nous utiliserons la notion des semi-limites relaxées comme déjà évoquées dans l'introduction générale de cette thèse et qui sont définies pour toute suite de fonctions uniformément localement bornées  $(u_\epsilon)_\epsilon$  par

$$\bar{u}(x, t) = \limsup^* u_\epsilon(x, t) = \limsup_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (y, s) \rightarrow (x, t)}} u_\epsilon(y, s) \tag{4.23}$$

et

$$\underline{u}(x, t) = \liminf_* u_\epsilon(x, t) = \liminf_{\substack{\epsilon \rightarrow 0 \\ (y, s) \rightarrow (x, t)}} u_\epsilon(y, s) \tag{4.24}$$

**Théorème 4.26 (Résultat de stabilité, [15, Th 4.1])**

Supposons que pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $u_\epsilon$  est une sous-solution s.c.s (resp. une sur-solution s.c.i) de viscosité de

$$\partial_t u_\epsilon + H_\epsilon(x, t, Du_\epsilon) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

où  $H_\epsilon$  est une suite de fonctions uniformément localement bornées dans  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ . Nous supposons que les fonctions  $u_\epsilon$  sont localement uniformément bornées dans  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ . Alors,  $\bar{u}$  définie par (4.23) (resp.  $\underline{u}$ ) définie par (4.24) est une sous-solution (resp. sur-solution) de viscosité de

$$\partial_t u + \underline{H}(x, t, Du) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty),$$

où  $\underline{H} = \liminf_\star H_\epsilon$   
(resp.

$$\partial_t u + \bar{H}(x, t, Du) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)),$$

où  $\bar{H} = \limsup^\star H_\epsilon$ .

**Preuve du Théorème 4.26**

Nous montrons le cas de sous-solution, le cas de sur-solution est traité de la même manière en changeant les inégalités. Nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 4.27**

Soit  $(v_\epsilon)_\epsilon$  une suite de fonctions s.c.s uniformément localement bornées sur  $\mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$ . Nous posons  $\bar{v} = \limsup^\star v_\epsilon$ . Si  $(x_0, t_0)$  est un point de maximum local strict de  $\bar{v}$ . Alors, il existe une sous-suite  $(v_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  de la suite  $(v_\epsilon)_\epsilon$  et une suite de points  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  telles que pour tout  $\epsilon'$ ,  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})$  est un point de maximum local de  $v_{\epsilon'}$ , la suite  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  converge vers  $(x_0, t_0)$  et  $v_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \rightarrow \bar{v}(x_0, t_0)$ .

Pour la preuve du lemme, nous renvoyons [15, lemme 4.2].

Soient  $\phi \in C^1(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  et  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty)$  un point de maximum local strict de  $\bar{u} - \phi$ . Appliquons le Lemme 4.27 à  $v_\epsilon = u_\epsilon - \phi$  et  $\bar{v} = \bar{u} - \phi = \limsup^\star (u_\epsilon - \phi)$ . Il existe donc une sous-suite  $(u_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  et une suite de points  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  telles que, pour tout  $\epsilon'$ ,  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})$  est un point de maximum local de  $u_{\epsilon'} - \phi$ . Comme  $u_{\epsilon'}$  est une sous-solution de viscosité de

$$\partial_t u_{\epsilon'} + H_{\epsilon'}(x, t, Du_{\epsilon'}) = 0.$$

Nous avons

$$\partial_t \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) + H_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}, D\phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})) \leq 0.$$

Puisque  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \rightarrow (x_0, t_0)$ , la régularité de la fonction test  $\phi$  nous permet d'affirmer que  $D\phi_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \rightarrow D\phi(x_0, t_0)$  et  $\partial_t \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \rightarrow \partial_t \phi(x_0, t_0)$ .

Nous obtenons par la définition de  $\underline{H}$

$$\underline{H}(x_0, t_0, D\phi(x_0, t_0)) \leq \liminf H_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}, D\phi_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})).$$

Il en résulte immédiatement

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) + \underline{H}(x_0, t_0, D\phi(x_0, t_0)) \leq 0,$$

donc  $\bar{u}$  est une sous-solution de viscosité de

$$\partial_t u + \underline{H}(x, t, Du) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty).$$

Ce qui termine la preuve.

Ce théorème est d'intérêt fondamental, car il permet le passage aux deux limites dans une équation non-linéaire en sachant seulement que la suite des solutions  $u_\epsilon$  est uniformément localement bornée.

Mais ce passage aux deux semi-limites n'est pas suffisant pour obtenir une solution du problème limite, il va falloir identifier ces deux objets obtenus ( $\bar{u}$  et  $\underline{u}$ ). Plusieurs situations se présentent

- $\bar{u} = \underline{u} = u$ , on obtient donc une solution de viscosité continue,
- $\bar{u} = (\underline{u})^*$ , dans ce cas  $\underline{u}$  est une solution de viscosité discontinue selon la Définition 4.25,
- $\underline{u} = (\bar{u})_*$ , dans ce cas  $\bar{u}$  est une solution de viscosité discontinue selon la Définition 4.25.

Notons que dans le cas de la première situation l'inégalité  $\underline{u} \leq \bar{u}$  est évidente obtenue par définition, l'autre inégalité i.e.  $\bar{u} \leq \underline{u}$  nécessite un résultat de comparaison des solutions de viscosité discontinues, que nous allons présenter dans le paragraphe suivant.

### Exemple 4.28

Pour l'exemple 4.22, le calcul des semi-limites relaxées donne

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} x & \text{dans } [0, 1) \\ 2 & \text{si } x = 1 \end{cases} \quad \underline{u}(x) = \begin{cases} x & \text{dans } [0, 1) \\ 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Notons que dans cet exemple l'hamiltonien est donné par  $H(x, p) = |p| - 1$  est une fonction continue, ce qui implique  $\bar{H} = \underline{H} = H$ .

Par le Théorème 4.26, nous déduisons que  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  sont respectivement sous-solution et sur-solution de

$$\begin{cases} |u'| - 1 = 0 & \text{dans } (0, 1) \\ \min(|u'| - 1, u) \leq 0 & \text{si } x = 0, \\ \max(|u'| - 1, u - 2) \geq 0 & \text{si } x = 1 \end{cases}$$

Nous renvoyons au livre de Barles [15, paragraphe 4.4.4], pour le sens des conditions aux limites de Dirichlet.

Le problème des semi-limites trouvées et au point  $x = 1$ , où  $\bar{u}$  vaut 2, alors que  $\underline{u}$  vaut 0, ceci est une conséquence de la couche limite proche de 1. L'avantage du Théorème 4.26, est que nous pouvons passer à la limite en dépit de cette couche limite, mais le prix à payer est que  $\bar{u}(1)$  est différente de  $\underline{u}(1)$ . Pour récupérer le bon résultat et appliquer le principe de comparaison comme mentionné au-dessus est d'effacer cette mauvaise valeur et comparer  $\bar{u}$  et  $\underline{u}$  seulement dans  $(0, 1)$  où  $[0, 1)$ .

#### 4.7.2 Principe de comparaison

Nous avons vu que le principe de comparaison ou résultat d'unicité est important pour conclure un passage à la limite ou aux deux semi-limites précisément. Nous avons le principe de comparaison suivant

##### **Théorème 4.29 (Principe de comparaison, [6, Proposition 3.3])**

Considérons un hamiltonien  $H \in C(\mathbb{R}^n \times [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n)$  avec les hypothèses suivantes

- Bornes locales il existe une constante  $C_1 > 0$  tel que  $|H(x, t, 0)| \leq C_1$ , pour tout  $x, t$ .
- Lipschitz régularité en espace il existe deux fonctions non-négatives  $C_2$  et  $C_3$  dans  $L_{Loc}^\infty([0, T])$  tel que

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq C_2(t)|p||x - y| + C_3(t)|x - y| \quad (4.25)$$

pour tout  $(x, y, t, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$ .

- Lipschitz régularité en gradient il existe une constante  $C_4$ , telque

$$|H(x, t, p) - H(x, t, q)| \leq C_4|p - q| \quad (4.26)$$

pour tout  $(x, t, p, q) \in \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ .

Soient  $u$  et  $v$  respectivement sous- et sur-solutions de viscosité discontinues de

$$\partial_t u(x, t) + H(x, t, \nabla_x u) = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}^n \times [0, T].$$

Si  $u^*(\cdot, 0) \leq v_*(\cdot, 0)$ , alors  $u^* \leq v_*$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, T)$ .

Pour la preuve, nous renvoyons au papier [6, Proposition 3.3].

## 4.8 Existence de solutions de viscosité par la méthode de Perron

La méthode de Perron a été introduite initialement pour les équations elliptiques du second ordre par O. Perron [81] et utilisée par H. Ishii en 1987 [61] pour prouver l'existence de solutions des équations de Hamilton-Jacobi. Ces solutions ne sont pas en général continues, par ailleurs, il y a des cas où la continuité est prouvée, comme nous le verrons dans la suite de ce paragraphe.

La méthode de Perron est donc résumée dans le Théorème suivant

### **Théorème 4.30 (Méthode de Perron, [61])**

Soit  $H : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ , un hamiltonien localement borné. Soient  $f, g : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant  $f \leq g$  dans  $\mathbb{R}^n \times [0, +\infty)$  et tel que  $f$  est une sous-solution (resp.  $g$  sur-solution) de viscosité de

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, Du(x, t)) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n. \end{cases} \quad (4.27)$$

Nous définissons une fonction  $u : \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , par

$$u(x, t) = \sup\{v(x, t), v \leq g \text{ et } v \text{ est sous-solution de (4.27)}\}. \quad (4.28)$$

Alors,  $u$  est une solution de viscosité de (4.27) satisfaisant

$$f \leq u \leq g.$$

Pour la preuve nous renvoyons au papier de [61, Th 3.1] et [61, Exemple 3].

### **Exemple 4.31**

Nous considérons le problème de Dirichlet suivant

$$\begin{cases} |u'(x)| - f(x) = 0 & \text{sur } x \in (0, 1) \\ u(0) = u(1) = 0, \end{cases} \quad (4.29)$$

où  $f$  est continue sur  $[0, 1]$  et  $f \geq 0$ . Remarquons que les fonctions  $u_1(x) = 0$  est une sous-solution de viscosité et  $u_2(x) = -M|x - \frac{1}{2}| + \frac{1}{2}M$ , où  $M = \max_{x \in [0, 1]} f(x)$  est une sur-solution de viscosité. Par la méthode de Perron, il existe une fonction  $v$  définie par (4.28), solution de viscosité du problème de Dirichlet (4.29).

### **Remarque 4.32**

Nous remarquons que si nous arrivons à construire une sous-solution  $f$  et une sur-solution  $g$  tel que  $f \leq g$ , nous prouvons l'existence d'une solution de viscosité. Sous

quelles condition a-t-on  $f \leq g$  ?

D'après ce que nous avons vu précédemment, soit nous arrivons à construire une sous- et une sur-solutions telles que la sous-solution est inférieure à la sur-solution, soit il suffit que l'équation de Hamilton-Jacobi satisfait un principe de comparaison, ce qui requiert plus de régularité. Nous allons énoncer le résultat principal d'existence de solution de viscosité du problème (4.27) sous l'hypothèse d'avoir un principe de comparaison.

## 4.9 Régularité des solutions de viscosité

Le but de cette sous-section est de donner un résultat de régularité des solutions de viscosité de l'équation de Hamilton-Jacobi (4.17), construite dans le Théorème 4.12. Pour ce faire, nous améliorons l'hypothèse (H1), comme suite

(H1.1) Il existe  $L_1, L_2 > 0$ , tel que pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in (0, T)$  et  $p \in \mathbb{R}^n$ , nous avons

$$|H(x, t, p) - H(y, t, p)| \leq L_1|x - y||p| + L_2|x - y|.$$

Le résultat principal est donné par le théorème suivant

### **Théorème 4.33 (Régularité Lipschitz) [1, Th 8.1]**

Sous les hypothèses (H1.1) et (H1) et si  $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^n)$ . Alors, la solution  $u$  du problème (4.17) obtenue par le Théorème 4.12 est Lipschitz continue en  $x$  pour tout  $t \in [0, T]$  et satisfait

$$\|Du(\cdot, t)\|_\infty \leq \exp(L_1 t) \|u_0\|_\infty + \frac{L_2}{L_1} (\exp(L_1 t) - 1).$$

Pour la preuve, nous renvoyons à [1, Th 8.1]. Il existe d'autres résultats de régularité pour des hamiltoniens particuliers.

## 5 Équations de Hamilton-Jacobi et lois de conservation scalaires

### 5.1 Lois de conservation scalaires et solutions entropiques

Une loi de conservation scalaire est donnée par le problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \operatorname{div}_x(f(u))(x, t) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R}^n \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (5.30)$$

où  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une fonction prenant ses valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ , appelée flux. En physique, une loi de conservation exprime qu'une propriété particulière mesurable

$u$  d'un système physique reste constante au cours de l'évolution de ce système. Ce sont des équations qui interviennent dans la dynamique des gaz, l'électromagnétisme, nous référons au livre D. Serre [87, 88], pour une description complète des modèles reliés à ce type de problèmes. La notion de solutions entropiques pour les lois de conservation scalaires a été introduite par S. N. Kruzhkov [65], comme étant l'unique solution physique admissible parmi toutes les solutions faibles (au sens des distributions) des équations de lois de conservation scalaires. Ces solutions faibles ne satisfont pas en général l'unicité dû à la présence de chocs, nous renvoyons au livre de P. D. Lax [67], pour les détails. Nous donnons maintenant la définition des solutions entropiques.

**Définition 5.1 (Solution entropique)**

Soit  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , une fonction  $u$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  est appelée solution entropique faible de (5.30), si pour  $\phi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$  positive et pour tout  $\eta$  convexe régulière et tout  $\Phi$ , telle que  $\Phi' = \eta' f'$ , nous avons

$$\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u)\phi_t + \Phi(u) \cdot \nabla \phi) dxdt + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0)\phi(0)dx \geq 0.$$

Un couple  $(\eta, \Phi)$  tel que  $\eta$  est convexe est appelé couple "entropie-flux".

Notons qu'une solution classique est une solution entropique. Nous énonçons maintenant le résultat fondamental d'existence et d'unicité de solution entropique dû à Kruzhkov.

**Théorème 5.2 (Théorème d'existence de Kruzkov, [64])**

Supposons que  $f$  est localement lipschitzienne, alors, pour toute donnée initiale  $u_0$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ , il existe une unique solution entropique  $u$  de (5.30) dans  $L^\infty(\mathbb{R}^n \times (0, +\infty))$ . De plus,  $u$  est continue en temps à valeurs dans  $L^1_{Loc}(\mathbb{R}^n)$ .

**5.2 Solutions entropiques et solutions de viscosité**

Considérons l'équation de Hamilton-Jacobi du premier en ordre en dimension 1, donnée par

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + H(x, t, \partial_x u) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R} \end{cases} \quad (5.31)$$

et la loi de conservation scalaire en dimension 1, donnée par

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + (f(u))_x(x, t) = 0 & \text{sur } Q = \mathbb{R} \times (0, +\infty) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{dans } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (5.32)$$

Nous remarquons que si on dérive formellement par rapport à l'espace l'équation du problème (5.31) et en posant  $u_x = v$ , l'équation de Hamilton-Jacobi (5.31) est équivalente à l'équation de la loi de conservation scalaire (5.32) avec  $v_0 = u_x^0$ . Cette équivalence a été exploitée dans le but de translater les méthodes numériques pour les lois de conservations hyperboliques aux méthodes concernant les équations de Hamilton-Jacobi. De plus, plusieurs preuves ont été données dans le cas unidimensionnel [33, 62, 72]. Nous énonçons maintenant les résultats exprimant cette équivalence.

**Théorème 5.3** (*[33, Th2.2]*)

Si  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ ,  $u_0 \in W^{1,\infty}(\mathbb{R})$ . Si  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, T))$  est l'unique solution de viscosité de (5.31), alors  $v = u_x$  est l'unique solution entropique de (5.32).

Réciproquement

**Théorème 5.4** (*[33, Th2.4]*)

Si  $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  et  $u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap L^1(\mathbb{R})$ . Supposons que  $u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^1(\mathbb{R}))$  est l'unique solution entropique de (5.32). Alors, la fonction  $v$  définie par

$$v(x, t) = \int_{-\infty}^x u(\xi, t) d\xi,$$

est l'unique solution de viscosité de (5.31) satisfaisant  $v_0(x) = \int_{-\infty}^x u_0(\xi) d\xi$ .

**Remarque 5.5**

Dans le cas multidimensionnel, en prenant formellement les dérivées partielles en espace de l'équation de Hamilton-Jacobi (5.31) (prise en dimension  $n$ ) et en posant  $v = \nabla u$ , nous obtenons un système hyperbolique de lois de conservation (voir [65]).

## Deuxième partie

# Étude de l'équation eikonale unidimensionnelle avec données discontinues



# Chapitre 3

## Espace des fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$

Ce chapitre est une présentation générale de l'espace des fonctions à variation bornée en une dimension avec quelques propriétés importantes, que nous utiliserons dans la suite de cette thèse.

## 1 Introduction

Les fonctions à variation bornée ont été introduites par Camille Jordan en 1881, elles se sont imposées comme un outil très puissant pour modéliser de nombreux phénomènes et affronter quantité de problèmes mathématiques. C'est surtout à partir des années 50, avec les travaux de De Giorgi, qu'elles ont pris une place centrale dans le calcul des variations. Outre le problème des surfaces minimales, les fonctions à variation bornée ont permis d'étudier de nombreux phénomènes tels que les transitions de phases, les fractures, la segmentation ou d'autres applications en traitement d'images, des problèmes de discontinuités libres tels que certaines questions de plasticité ou de la théorie des cristaux liquides. C'est également un bon cadre pour étudier des questions de nature géométrique telles que les diverses variantes du problème isopérimétrique.

Ce chapitre est partagé en plusieurs sections, nous donnerons la définition de l'espace  $BV$  et ses principales caractérisations. Nous étudions les propriétés de cet espace, les injections compactes et la convergence faible  $\star$ .

## 2 Définitions de l'espace des fonctions à variation bornée

### 2.1 Variation totale

#### Définition 2.1 (*Variation totale*)

Soit  $u$  une fonction dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , nous appelons variation totale de  $u$ , la quantité  $TV(u)$  définie par :

$$TV(u) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} u(x) \phi'(x) dx, \quad \phi \in C_c^1(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad \|\phi\|_{L^\infty} \leq 1 \right\} \quad (2.1)$$

### 2.2 Espace $BV(\mathbb{R})$

Nous définissons ainsi l'espace des fonctions à variation bornée par

#### Définition 2.2 (*Espace $BV$* )

Une fonction  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  est dite à variation bornée si sa variation totale  $TV(u)$  est

## 2. Définitions de l'espace des fonctions à variation bornée

finie. L'espace  $BV(\mathbb{R})$ , est l'ensemble des fonctions  $u$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  dont la variation totale  $TV(u)$  est finie.

### Exemple 2.3

1. La fonction de Heaviside définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x \geq 0, \end{cases}$$

est une fonction à variation bornée.

2. La fonction caractéristique  $\chi_E$  où  $E$  est intervalle de  $\mathbb{R}$  est une fonction à variation bornée.

### Proposition 2.4 (Propriétés de la variation totale)

- L'application  $u \mapsto TV(u) \in [0, +\infty)$  est semi-continue inférieurement dans la topologie de  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . Autrement dit, pour toute suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$  dans  $BV(\mathbb{R})$ , convergente vers  $u$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , nous avons

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} TV(u_\epsilon) \geq TV(u).$$

- Une simple intégration par parties montre que si  $u$  est continument dérivable, alors  $TV(u) = \int_{\mathbb{R}} |u'| dx$ .

### Remarque 2.5 (Espace $BV$ )

- L'espace  $L^1(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$  est un espace de Banach muni de la norme

$$\|u\|_{BV(\mathbb{R})} = \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} + TV(u).$$

- Dans les applications, nous utilisons l'espace  $BV(\mathbb{R})$ , induit de la semi-norme

$$|u|_{BV(\mathbb{R})} = TV(u).$$

- L'espace de Sobolev  $W^{1,1}(\mathbb{R})$  est contenu dans  $BV(\mathbb{R})$ , l'inclusion étant stricte, en effet la fonction de Heaviside est à variation bornée mais sa dérivée au sens des distributions est la mesure de Dirac  $\delta_0$ .

### 2.3 Dérivée au sens des distributions d'une fonction à variation bornée

Nous avons le résultat suivant

**Proposition 2.6** (*Dérivée au sens des distributions d'une fonction BV*)  
 Soit  $u \in L^1(\mathbb{R})$ , alors  $u \in BV(\mathbb{R})$  si et seulement si sa dérivée au sens des distributions  $Du$  est une mesure de Radon finie. De plus sa variation totale  $TV(u)$  est égale  $\int_{\mathbb{R}} |Du|$ . On notera parfois  $|Du|(\mathbb{R}) = \int_{\mathbb{R}} |Du|$ .

**Preuve**

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R})$  et supposons que  $u \in BV(\mathbb{R})$ , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} u\phi' dx \leq TV(u)\|\phi\|_{\infty}, \quad \forall \phi \in C_c^1(\mathbb{R}).$$

Par la densité de  $C_c^1(\mathbb{R})$  dans  $C_0(\mathbb{R}) = \overline{C_c(\mathbb{R})}$ , où  $C_c(\mathbb{R})$  est l'espace des fonctions continues à supports compacts dans  $\mathbb{R}$ , nous pouvons trouver une forme linéaire continue  $L$  définie sur  $C_0(\mathbb{R})$  et qui coïncide avec

$$L(\phi) = \int_{\mathbb{R}} u\phi' dx$$

pour tout  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$  et satisfaisant :

$$\|L\| \leq TV(u).$$

Par le Théorème de représentation de Riesz ([41, Théorème 1, parag 1.8]), il existe une unique mesure de Radon finie  $\mu$  telle que

$$\|L\| = |\mu|(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad L(\phi) = \int_{\mathbb{R}} \phi d\mu = - \int_{\mathbb{R}} \phi Du, \quad \forall \phi \in C_0(\mathbb{R}),$$

nous obtenons que  $Du = -\mu$  et

$$|Du|(\mathbb{R}) = |\mu|(\mathbb{R}) = \|L\| \leq TV(u).$$

L'autre inégalité  $TV(u) \leq \|L\|$ , vient directement de la définition de la variation totale.

Inversement supposons  $u$  dans  $L^1(\mathbb{R})$  telle que sa dérivée au sens des distribution  $Du$  est une mesure de Radon finie, montrons que  $u$  est dans  $BV(\mathbb{R})$ , autrement dit sa variation totale  $TV(u)$  est finie. Soit  $\phi$  dans  $C_c^1(\mathbb{R})$ , nous avons

$$\int_{\mathbb{R}} u\phi' dx = - \int_{\mathbb{R}} \phi Du \leq \|\phi\|_{L^\infty} \int_{\mathbb{R}} Du$$

En prenant le sup sur les  $\phi \in C_c^1(\mathbb{R})$ , nous obtenons

$$TV(u) \leq |Du|(\mathbb{R}) < \infty.$$

Donc  $u$  est dans  $BV(\mathbb{R})$ .

## 2.4 Variation ponctuelle et variation totale

### Définition 2.7 (Variation ponctuelle)

Soient  $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$  avec  $a < b$  et  $I = (a, b)$ . Pour toute fonction  $u$  définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ , la variation ponctuelle  $pV(u, I)$  de  $u$  dans  $I$  est définie par :

$$pV(u, I) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : n \geq 2, \sigma = \{a < x_1 < \dots < x_n < b\} \right\}. \quad (2.2)$$

Le sup est pris sur toutes les subdivisions  $\sigma$  de  $(a, b)$ .

### Exemple 2.8

1. Toute fonction monotone  $u$  dans  $I = [a, b]$ , est de variation ponctuelle finie

$$pV(u, I) = |u(b_-) - u(a_+)|.$$

2. Toute fonction Lipschitzienne  $u$  définie sur  $[a, b]$  de constante de Lipschitz  $k > 0$ , est à variation bornée et nous avons

$$pV(u, [a, b]) = k(b - a).$$

3. Toute fonction absolument continue est à variation bornée.

4. La fonction  $f$  définie par

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \in (0, 1] \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases}$$

n'est pas à variation bornée sur  $[0, 1]$ , il suffit de choisir la subdivision  $x_k = \frac{1}{\pi(k + \frac{1}{2})}$ .

### Remarque 2.9 (Quelques propriétés)

- Toute fonction à variation ponctuelle finie est bornée. En effet : pour tout  $x, x_0 \in I$  tels que  $x_0 < x$ , nous avons

$$|u(x)| \leq |u(x_0)| + |u(x) - u(x_0)| \leq |u(x_0)| + pV(u, (x_0, x)) \leq |u(x_0)| + pV(u, I) < \infty$$

- Si  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}$ , en particulier  $\mathbb{R}$  en entier, la variation ponctuelle est donnée par  $pV(u, \Omega) = \sum_I pV(u, I)$ , où la somme est prise le long de toutes les composantes connexes de  $\Omega$ .

La variation ponctuelle est très sensible aux modifications des valeurs de  $u$  même en un seul point, c'est pour cela que nous définissons la notion de variation essentielle.

**Définition 2.10 (Variation essentielle)**

Nous appelons variation essentielle d'une fonction  $u$  sur un ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}$  notée  $eV(u, \Omega)$ , l'infimum de toutes les variations ponctuelles des fonctions  $v$  égales presque partout à  $u$  dans  $\Omega$ , autrement dit

$$eV(u, \Omega) = \inf \{pV(v, \Omega) : v = u \text{ presque partout dans } \Omega\} \quad (2.3)$$

Nous avons le résultat suivant

**Théorème 2.11** [8, Théorème 3. 27]

Pour toute fonction  $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ , l'infimum dans (2.3) est atteint et la variation totale  $V(u, \Omega)$  coïncide avec la variation essentielle  $eV(u, \Omega)$ .

La preuve du théorème figure dans la référence citée avec.

**Remarque 2.12**

- Ainsi, nous concluons que l'espace des fonctions à variation bornée définies sur  $[a, b]$  est donné par

$$BV([a, b]) = \{u : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ telles que } pV(u, [a, b]) < \infty.\}$$

- De même, l'espace des fonctions à variation bornée définie sur  $\mathbb{R}$  est l'ensemble des fonctions définies de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ , telles que la variation totale  $TV(u) < \infty$ , où

$$TV(u) := \sup_{x \in \mathbb{R}} T_u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} T_u(x), \quad (2.4)$$

avec,

$$T_u(x) := \sup \left\{ \sum_{k=1}^{n-1} |u(x_{k+1}) - u(x_k)| : n \geq 2, \quad -\infty < x_1 < \dots < x_n = x \right\} \quad (2.5)$$

ou tout simplement  $T_u(x) = TV_{]-\infty, x]}(u)$  et  $TV(u)$  est la variation totale sur tout  $\mathbb{R}$ .

**Remarque 2.13**

Si  $u \in BV(\mathbb{R})$ , nous savons par la Proposition 2.6, que  $TV(u) = |Du|(\mathbb{R}) < \infty$ , dès que  $TV(u) = eV(u)$ , il existe  $\tilde{u}$  dans la classe d'équivalence de  $u$ , telle que

$$pV(\tilde{u}) = eV(u) = TV(u).$$

La fonction  $\tilde{u}$  est dite une bonne représentativité de  $u$  (voir le livre [8]).

## 2.5 Compacité et convergence dans l'espace $BV(\mathbb{R})$

Nous énonçons dans ce paragraphe un critère de compacité dans l'espace  $BV(\mathbb{R})$  et nous donnons la notions de la convergence faible  $\star$  dans cet espace.

**Théorème 2.14 (Théorème de compacité de Helly)** [8, Th3. 23]

*L'image dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  de tout ensemble borné de  $BV(\mathbb{R})$  est relativement compacte, c'est-à-dire que : pour toute suite  $(u_\epsilon)_\epsilon$  bornée dans  $BV(\mathbb{R})$ , il existe une sous-suite  $(u_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  et  $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$  tels que*

$$\lim_{\epsilon' \rightarrow 0} \|u_{\epsilon'} - u\|_{L^1(I)}, \quad \text{pour tout intervalle borné } I.$$

*Autrement dit,*

$$u_{\epsilon'} \longrightarrow u, \quad \text{fortement dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Nous donnons maintenant la définition de la convergence faible  $\star$  dans l'espace  $BV(\mathbb{R})$ .

**Définition 2.15 (Convergence faible  $\star$ )**

*Soient  $(u_\epsilon)_\epsilon$  et  $u$  dans  $BV(\mathbb{R})$ . Nous disons que  $(u_\epsilon)_\epsilon$  converge faiblement  $\star$  dans  $BV(\mathbb{R})$ , si  $(u_\epsilon)_\epsilon$  converge vers  $u$  dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  et si  $(Du_\epsilon)_\epsilon$  converge faiblement  $\star$  vers  $Du$ , i.e :*

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \phi Du_\epsilon = \int_{\mathbb{R}} \phi Du, \quad \text{pour tout } \phi \in C_0(\mathbb{R}),$$

où  $C_0(\mathbb{R})$ , représente la fermeture de l'espace des fonctions continues à supports compacts, par rapport à la norme du sup.

Nous donnons la caractérisation de cette convergence dans cette Proposition.

**Proposition 2.16** [8, prop 3. 13]

*Soit  $(u_\epsilon)_\epsilon$  dans  $BV(\mathbb{R})$ . Alors,  $(u_\epsilon)_\epsilon$  converge vers  $u$  faiblement  $\star$  dans  $BV(\mathbb{R})$  si et seulement si  $(u_\epsilon)_\epsilon$  est bornée dans  $BV(\mathbb{R})$  et  $(u_\epsilon)_\epsilon$  converge vers  $u$  fortement dans  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$*

## 3 Propriétés des fonctions à variation bornée dans $\mathbb{R}$

Nous énonçons dans ce paragraphe des propriétés fines fondamentales des fonctions à variation bornée en une dimension d'espace et que nous utiliserons dans la suite de la thèse pour obtenir nos résultats sur l'équation eikonale avec données  $BV$ .

### 3.1 Fonctions $BV$ et fonctions croissantes

**Théorème 3.1** (*Fonctions à variation bornée comme différence de deux fonctions croissantes*)

Soit  $u$  une fonction bornée et est dans  $BV(\mathbb{R})$ . Alors, Il existe deux fonctions croissantes et bornées  $u_1$  et  $u_2$  telle que

$$u = u_1 - u_2.$$

**Preuve**

Soit  $u$  dans  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ , posons

$$u_1(x) = TV_{]-\infty, x]}(u) + u(x) \quad \text{et} \quad u_2(x) = TV_{]-\infty, x]}(u). \quad (3.6)$$

Remarquons d'abord, que comme  $u \in BV(\mathbb{R})$ , sa variation totale  $TV(u)$  est finie, ce qui implique  $u_1$  et  $u_2$  sont bornées (car  $u$  est bornée et  $TV_{]-\infty, x]}(u) \leq TV(u) < \infty$ ). Nous traitons seulement le cas où  $u$  est définie sur  $\mathbb{R}$  et nous utilisons la définition de la variation totale avec la variation ponctuelle ((2.4), (2.5)). Nous avons besoin du Lemme suivant

**Lemme 3.2**

Si  $u \in BV(\mathbb{R})$ , alors pour tout  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , nous avons

$$x < y \Rightarrow |u(x) - u(y)| \leq T_u(y) - T_u(x).$$

**Preuve du Lemme 3.2**

Soit  $\epsilon > 0$ , par (2.5), il existe  $x_0 < x_1 < \dots < x_n = x$  tels que

$$\sum_{j=1}^n |u(x_{j+1}) - u(x_j)| \geq T_u(x) - \epsilon$$

et l'on a

$$T_u(y) \geq |u(x) - u(y)| + \sum_{j=1}^n |u(x_{j+1}) - u(x_j)|,$$

d'où  $T_u(y) \geq |u(x) - u(y)| + T_u(x) - \epsilon$ ,  $\forall \epsilon > 0$ .

Nous terminons la preuve du Théorème 3.1, en utilisant le Lemme 3.2, nous déduisons, en prenant  $TV_{]-\infty, x]}(u) = T_u(x)$ , que si  $x < y$ , alors  $u_1(x) < u_1(y)$ . De même, pour  $u_2$ .

Pour le cas général, c'est-à-dire que  $u \in L^1_{loc}$ , donc définie presque partout sur  $\mathbb{R}$ , nous utilisons la même preuve en prenant  $(x_j)_j$ , les points de continuité approximatives de  $u$ , nous renvoyons aux livres de Evans [41, paragraphe 5.10.1] et de Guisti [54], pour les définitions correspondantes.

#### 3.2 Ensemble des points de discontinuité d'une fonction $BV$

##### **Théorème 3.3** (*Points de discontinuité*)

*L'ensemble des points de discontinuité d'une fonction à variation bornée est dénombrable. Autrement dit, si  $u \in BV(\mathbb{R})$ , elle est continue sur  $\mathbb{R}$ , sauf sur un ensemble dénombrable.*

#### 3.3 Limite à droite, limite à gauche d'une fonction $BV$

##### **Théorème 3.4** (*Continuité à droite, à gauche*)

*Si  $u$  est dans  $BV(\mathbb{R})$ , les limites à droite et à gauche définie par :*

$$u(x^+) = \lim_{\substack{y \rightarrow x, \\ y > x}} u(y), \quad u(x^-) = \lim_{\substack{y \rightarrow x, \\ y < x}} u(y),$$

*existent en tout point  $x \in \mathbb{R}$ . De plus, il existe une unique fonction  $u_r$  continue à droite (resp.  $u_l$  continue à gauche) et qui coïncide avec  $u$  sauf sur un ensemble dénombrable.*

Pour les preuves, nous renvoyons aux références [44, Th 3.23], [44, Th 3.27] [8, Th 3.28].



## Chapitre 4

# Résultats d'existence globale pour l'équation eikonale avec données $BV$

Ce chapitre est une partie d'un article en collaboration avec Ahmad El Hajj paru dans NoDEA [24] et dans la note de Cras [25].

Dans ce chapitre, nous étudions l'équation eikonale unidimensionnelle locale, décrivant le mouvement d'interfaces avec une vitesse non-signée. Pour ce type d'équations, l'existence et l'unicité de solutions de viscosité Lipschitz continues sont valables seulement dans des cas particuliers. Nous nous sommes intéressés à l'étude de l'existence globale en temps pour cette équation, en considérant des données fonctions à variation bornée. Basée sur une estimation  $BV$  fondamentale et une propagation à vitesse finie de cette équation, nous montrons, dans un contexte particulier, des résultats d'existence globale de solutions de viscosité discontinues dans un sens faible pour ce problème.

# Global existence results for the eikonal equation with $BV$ initial data

R. Boudjerada \*, A. El Hajj\*<sup>†</sup>

\* *USTHB, Faculté de Maths, Labo AMNEDP  
BP 32 El Alia, Bab Ezzouar  
Alger, Algérie*

<sup>†</sup> *Université de Technologie de Compiègne, LMAC  
60205, Compiègne  
Cedex, France*

## Abstract

In this work, we study a local eikonal equation in one dimensional space describing the evolution of interfaces moving with non-signed velocity. For these equations, the global existence and uniqueness are available only of Lipschitz continuous viscosity solutions in some particular cases. In the present paper, we are interested in the study of the global in time existence of these equations, considering  $BV$  initial data. Based on a fundamental uniform  $BV$  estimate and the finite speed propagation property of these equations, we show, in a particular setting, global existence results of discontinuous viscosity solutions of this problem. In chapter 6, we show an interesting application of these results in the case of dislocation dynamics.

**AMS Classification :** 35A01, 74G25, 35F20, 35F21, 70H20, 35Q74.

**Key words :** Hamilton-Jacobi equation, non-local eikonal equation, non-local transport equation,  $BV$  estimate, discontinuous viscosity solution, dislocation dynamics.

# 1 Introduction and main results

## 1.1 Setting of the problem

In this chapter, we are interested in the local eikonal equation in one dimensional space given by

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = c(x, t)|\partial_x u(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

where  $T > 0$ , the solution  $u$  is a real-valued function,  $\partial_t u$  and  $\partial_x u$  stand, respectively, for its time and space derivatives. Here, the velocity  $c$  is assumed to satisfy, for all  $T > 0$ , the following regularity assumption :

$$c \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})). \quad (1.2)$$

The goal of this work is to establish the global existence of discontinuous viscosity solutions of (1.1) assuming (1.3) and the following regularity on the initial data

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}), \quad (1.3)$$

where  $BV(\mathbb{R})$  is the space of functions of bounded variations given by

$$BV(\mathbb{R}) = \{f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}) \mid TV(f) < +\infty\}$$

with  $TV(f)$  the total variation of  $f$  defined as

$$TV(f) = \sup \left\{ \int_{\mathbb{R}} f(x)\phi'(x)dx; \quad \phi \in C^1_c(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \|\phi\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq 1 \right\}. \quad (1.4)$$

In the following, we take the space  $BV(\mathbb{R})$  endowed with the semi-norm  $|f|_{BV(\mathbb{R})} = TV(f)$ . It is noted that  $BV$  functions are functions whose distributional derivative is a finite Radon measure, we refer to Chapter 3 for a global presentation of this space and some fundamental properties.

We remark that equation (1.1) can be seen as the “level-set approach” equation associated to the motion of the front  $\Gamma_t := \{x : u(x, t) = 0\}$  with a normal velocity  $c(x, t)$  as we have presented in the general introduction (section 1), we can also see for instance Barles *et al.* [22].

Our work is motivated by the applications to dynamics of defects in crystal, called dislocations, where the velocity of these defects is non-local and can change sign. We refer to Chapter 6, for an overview of some existence and uniqueness results.

From the numerical point of view, a new fast-marching algorithm for the eikonal equation in the case where the velocity can change sign, was proposed by Forcadel in [46], where the author proved the convergence and the comparison principle of the algorithm. Interesting applications of this algorithm, for dislocation dynamics computation and image segmentation, were also shown in [29] and [47] respectively.

In this chapter, we present a global existence result for the eikonal equation (1.1) with  $BV$  initial data and without sign restrictions on the velocity. More precisely, we consider the case when the initial data and the velocity satisfy only the assumptions (1.3) and (1.2) without any better regularity. In its full generality, the fundamental issue of uniqueness for global solution remains open.

Let us return to the key steps followed to prove our existence results. First, we regularize by classical convolution the velocity  $c(x, t)$  and the initial conditions in (1.1). This approximation brings us back to the study, for every  $0 < \varepsilon < 1$ , of the following equation

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x, t) = c_\varepsilon(x, t) |\partial_x u_\varepsilon(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u_\varepsilon(x, 0) = u_{0,\varepsilon}(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.5)$$

where

$$u_{0,\varepsilon}(x) = u_0 \star \rho_\varepsilon^1(x) \quad \text{and} \quad c_\varepsilon(x, t) = \hat{c} \star \rho_\varepsilon^2(x, t) \quad \forall x \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}, \quad (1.6)$$

with the function  $\hat{c}$  is an extension in  $\mathbb{R}^2$  of the function  $c$  by 0 and  $\rho_\varepsilon^1, \rho_\varepsilon^2$  are the standard mollifiers defined as follows :

$$\rho_\varepsilon^1(\cdot) = \frac{1}{\varepsilon} \rho^1\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \quad \text{such that } \rho^1 \in C_c^\infty(\mathbb{R}), \text{supp}\{\rho^1\} \subseteq B(0, 1), \rho^1 \geq 0, \text{ and } \int_{\mathbb{R}} \rho^1 = 1$$

$$\rho_\varepsilon^2(\cdot, \cdot) = \frac{1}{\varepsilon^2} \rho^2\left(\frac{\cdot}{\varepsilon}, \frac{\cdot}{\varepsilon}\right), \quad \text{such that } \rho^2 \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2), \text{supp}\{\rho^2\} \subseteq B(0, 1), \rho^2 \geq 0, \text{ and } \int_{\mathbb{R}^2} \rho^2 = 1.$$

Then, using the result of Ley [69], we prove that this regularized problem has a unique Lipschitz continuous viscosity solution.

Afterwards, thanks to the  $L^\infty$  uniform estimate on  $u_\varepsilon$  inherited from the maximum principle, we show that the relaxed semi-limits of Barles and Perthame [20, 21]

$$\bar{u}(x, t) = \limsup^* u_\varepsilon(x, t) = \limsup_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y,s) \rightarrow (x,t)}} u_\varepsilon(y, s) \quad (1.7)$$

and

$$\underline{u}(x, t) = \liminf_* u_\varepsilon(x, t) = \liminf_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ (y,s) \rightarrow (x,t)}} u_\varepsilon(y, s) \quad (1.8)$$

are, respectively, discontinuous viscosity sub- and super-solutions of (1.1). Finally, reaching some  $\varepsilon$ -independent *a priori* estimates, we will be able to prove that  $\bar{u}(\cdot, t) = \underline{u}(\cdot, t)$ , except at most on a countable set in  $\mathbb{R}$ , for all  $t > 0$ . The latter proves that there exists a function  $u$ , defined as a strong limit of  $u_\varepsilon$  in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ , that is almost everywhere discontinuous viscosity solution of (1.1). This turns out to be possible thanks to the uniform *BV* bound, obtained on  $u_\varepsilon$ , and the finite speed propagation property of the equation.

Related to our analysis, we obtain, as a consequence, the global existence of discontinuous viscosity solution of (1.1) for non-decreasing initial data.

## 1.2 Main results

In this subsection, we, first, present (see Theorem 1.1) a global existence result, in some weak sense, for discontinuous viscosity solution of (1.1). As consequence of this result, we show in Theorem 1.2 that this solution is a classical discontinuous viscosity solution of (1.1) in the case of non-decreasing functions. An application of these results to dislocation dynamics is then presented in Chapter 6. We refer to Definition 5.1 for a precise definition of discontinuous viscosity solutions. We can now announce our first main result.

### **Theorem 1.1** (*Global existence result for local problem, in weak sense*)

Suppose that the assumptions (1.3) and (1.2) are satisfied. Then, we have

#### *i) Existence and uniqueness of approximated problem :*

There exists a unique Lipschitz continuous viscosity solution  $u_\varepsilon$  of (1.5) satisfying, for all  $T > 0$ , the following uniform *a priori* estimates :

$$\|u_\varepsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (1.9)$$

$$\|\partial_x u_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (1.10)$$

$$\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}. \quad (1.11)$$

#### *ii) Sub- and super-solutions of the limit problem :*

Let  $u_\varepsilon$  be the solution of (1.5), constructed in (i), then the relaxed semi-limits  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$ , defined by (1.7)-(1.8), are respectively discontinuous viscosity sub- and super-solutions of (1.1).

#### *iii) Convergence and existence of weak solution :*

Assume that  $u_\varepsilon$  satisfies (1.9), (1.10) and (1.11). Then, up to extract a subsequence, the function  $u_\varepsilon$  converges, as  $\varepsilon$  goes to zero, to a function

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})) \cap C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R})) \quad (1.12)$$

strongly in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ . Moreover,  $u$  satisfies, for all  $T > 0$ , the following estimates

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (1.13)$$

$$\|u\|_{L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (1.14)$$

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}) |t - s|, \quad \text{for all } s, t \in [0, T] \quad (1.15)$$

and the following equality

$$u(\cdot, t) = \bar{u}(\cdot, t) = \underline{u}(\cdot, t) \quad \text{except at most on a countable set in } \mathbb{R}, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \quad (1.16)$$

The key point to establish this theorem is the uniform  $BV$  estimate on  $u_\epsilon$  (1.10). We first consider the parabolic regularization of (1.1) and we show that the smooth solution admits the  $L^\infty$  bound (1.9) and the fundamental  $BV$  estimate (1.10). These estimates will allow us to pass to the limit when the regularization vanishes, which will be provided from the stability properties of viscosity solutions (see Barles [15, Th 4.1]) and then show that the relaxed semi-limits  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$  are, respectively, sub- and super-solutions of (1.1). These estimates also imply that the set of the discontinuity points, with respect to  $x$ , of the solution  $u$  is at most countable. Taking into account the finite speed propagation property of (1.1) and the time continuous estimate (1.11), it is then possible to show this property uniformly in time, which proves in particular (1.16).

We note that, the solution constructed in previous theorem, can be seen as a discontinuous viscosity solution but in some weak sense, since it verifies only an almost everywhere equality in space between  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$ , which is reflected by (1.16). In the following, such a solution will be called a weak discontinuity viscosity solution of (1.1).

Recall that in the framework of non-decreasing solutions, the eikonal equation (1.1) becomes a classical transport equation. Related to our analysis in Theorem 1.1, it is then possible to get the following theorem as a by-product.

**Theorem 1.2 (Global existence result for non-decreasing solutions)**

Assume that we have (1.3), (1.2) and that the initial data  $u_0$  is non-decreasing. Then, equation (1.1) admits a discontinuous viscosity solution  $u$ , satisfying (1.12), (1.13), (1.14) and (1.15).

It is worth pointing that our results can be easily extended to the generalized first order Hamilton-Jacobi equations with suitable assumptions on the hamiltonian, that ensure the  $BV$  estimate and the maximum principle. In this paper, we have considered the eikonal equation in order to simplify the presentation.

An application of these results is presented in Chapter 6.

### 1.3 Organization of the chapter

This chapter is organized as follows : in Section 2, we regularize the approximated problem (1.5) by adding the viscosity term  $\eta \partial_{xx}^2 u_{\varepsilon, \eta}$ . Then, we show that this equation admits a global in time regular solution  $u_{\varepsilon, \eta}$ , which verifies some  $\eta$ -uniform Lipschitz estimates. In Section 3, we prove the  $(\eta, \varepsilon)$ -uniform  $BV$  estimate (1.10) and some other  $(\eta, \varepsilon)$ -uniform a priori estimates. In Section 4, we prove, thanks to the stability result for continuous viscosity solutions and by passing to the limit, as  $\eta$  goes to 0, the global existence result of Lipschitz continuous viscosity solution of the approximated problem (1.5) (announced in Theorem 1.1 (i)). In Section 5, by passing to the limit, as  $\varepsilon$  goes to 0, we prove Theorem 1.1 (ii), using the stability result for discontinuous viscosity solutions and the finite speed propagation property of the equation. In Section 6, we prove the main results Theorem 1.1 (iii) and Theorem 1.2. This will be achieved by using our  $(\eta, \varepsilon)$ -uniform a priori estimates, in particular the  $BV$  estimate, and also the finite speed propagation property of the equation.

## 2 Global solution for parabolic regularized equation

In this section, we recall some preliminary global existence and uniqueness results for a parabolic equation obtained by regularization of problem (1.1) with smoothed data  $v_0$  and smoothed velocity  $\tilde{c}$ . More precisely, we consider, for  $0 < \eta \leq 1$ , the following equation :

$$\begin{cases} \partial_t v_\eta(x, t) - \eta \partial_{xx}^2 v_\eta(x, t) = \tilde{c}(x, t) |\partial_x v_\eta(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ v_\eta(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (2.17)$$

where

$$v_0 \in W^{1, \infty}(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \tilde{c} \in W^{1, \infty}(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)). \quad (2.18)$$

We also regularize the non-linear term  $|\partial_x v_\eta|$  replacing it by a smooth function  $\beta_\delta(\partial_x v_\eta)$ , where  $\beta_\delta$  is defined as follows :

$$\beta_\delta(x) = \sqrt{x^2 + \delta^2} \quad \text{for all } 0 < \delta \leq 1. \quad (2.19)$$

Note that  $\beta_\delta(\cdot) \longrightarrow |\cdot|$ , uniformly on  $\mathbb{R}$ .

This brings us, finally, to consider the following parabolic equation :

$$\begin{cases} \partial_t v_\eta^\delta(x, t) - \eta \partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t) = \tilde{c}(x, t) \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ v_\eta^\delta(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.20)$$

For the regularized equation (2.20), we have the following result.

**Theorem 2.1** (*Existence and uniqueness of Lipschitz continuous solution of (2.17)*)

Assume that (2.18) holds. Then, for all  $T > 0$ , we have

*i) (Existence and uniqueness of (2.20)) :*

Equation (2.20) admits a unique solution  $v_\eta^\delta \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R} \times (0, T))$  satisfying the following estimates :

$$\|v_\eta^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq T\delta \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (2.21)$$

$$\|\partial_x v_\eta^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq (\|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \delta) e^{T\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}}. \quad (2.22)$$

*ii) (Convergence) :*

Up to extract a subsequence, the function  $v_\eta^\delta$  converges, as  $\delta$  goes to 0, to a function  $v_\eta$  locally and strongly in  $C([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$ . Moreover,  $v_\eta$  is the unique solution of (2.17) (in the distributional sense) belonging to the space  $C([0, T]; W^{1,\infty}(\mathbb{R}))$  and satisfies, for all  $0 < \eta \leq 1$ , the following  $\eta$ -uniform estimates :

$$\|v_\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (2.23)$$

$$\|\partial_x v_\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{T\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}}. \quad (2.24)$$

The lines of the proof of this theorem are very standard (see for instance El Hajj [39] for a similar technics). For this reason, we skip the details of the proof. We just point out that, in the first point (i), the existence result comes from a fixed point argument, while estimates (2.21)-(2.22) derive directly by applying the Maximum Principle Theorem for parabolic equations (see Lieberman [70, Th 2.10]). The regularity of the solution in (i) follows from a bootstrap argument.

To prove (ii), we use the following compactness lemma.

**Lemma 2.2** (*Simon's Lemma [91, Corollary 4.]*)

Let  $X, B, Y$  three Banach spaces, where  $X \hookrightarrow B$  with compact embedding and  $B \hookrightarrow Y$  with continuous embedding. If  $(\theta_n)_n$  is a sequence uniformly bounded in  $L^\infty((0, T); X)$  and  $(\partial_t \theta_n)_n$  is uniformly bounded in  $L^r((0, T); Y)$  where  $r > 1$ , then,  $(\theta_n)_n$  is relatively compact in  $C((0, T); B)$ .

### 3. *A priori* uniform estimates on the solution of (2.17)

---

By parabolic regularity, we have  $v_\eta^\delta \in W_p^{2,1}(\mathbb{R} \times (0, T))$ , for all  $1 < p < \infty$  and satisfying the following estimate

$$\|v_\eta^\delta\|_{L^p((0,T);W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}))} + \|\partial_t v_\eta^\delta\|_{L^p((0,T);L_{loc}^p(\mathbb{R}))} \leq C, \quad (2.25)$$

where  $C$  is a constant independent on  $\delta$  (see [70, Chapter VII]).

Moreover,  $W_{loc}^{2,p}(\mathbb{R}) \hookrightarrow W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , with compact embedding.

Let  $K$  be a compact subset in  $\mathbb{R}$ . By estimates (2.21), (2.22) and (2.25), we can see that  $(v_\eta^\delta)_\delta$  is uniformly bounded in  $L^\infty((0, T); W^{2,p}(K))$  and  $(\partial_t v_\eta^\delta)_\delta$  is uniformly bounded in  $L^p((0, T); L^p(K))$ . Using Lemma 2.2, in particular case where  $X = W^{2,p}(K)$ ,  $B = W^{1,\infty}(K)$  and  $Y = L^p(K)$ , we can show that  $(v_\eta^\delta)_\delta$  is relatively compact in  $C([0, T], W^{1,\infty}(K))$ . Then, we can extract a subsequence  $(v_\eta^{\delta,K})_{\delta,K}$  that converges strongly when  $\delta$  goes to 0, to  $v_\eta$  in  $C([0, T]; W^{1,\infty}(K))$ . By standard diagonalization procedure, we can extract a subsequence  $(v_\eta^\delta)_\delta$  (independent on  $K$ ) that converges to  $v_\eta$  in  $C([0, T]; W^{1,\infty}(\tilde{K}))$ , for all compact  $\tilde{K} \subset \mathbb{R}$ .

The last estimates (2.23)-(2.24) come directly from (2.21)-(2.22) by passing to the limit as  $\delta$  goes to 0. The uniqueness of the solution is an independent result valid for Lipschitz in space solutions.

### 3 *A priori* uniform estimates on the solution of (2.17)

In this section, we show two  $\eta$ -uniform estimates on the solution of equation (2.17) obtained in Theorem 2.1 (ii).

The first one concerns the *BV* estimate of the equation and is a key result.

**Lemma 3.1** (*BV estimate*)

Assume that (2.18) holds and that  $v_0$  and  $\tilde{c}$  satisfy the following assumptions :

$$\partial_x v_0 \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \partial_x \tilde{c} \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R})). \quad (3.26)$$

Then, for all  $0 < \eta \leq 1$ , the solution  $v_\eta$  of (2.17), given by Theorem 2.1 (ii), satisfies (2.23), (2.24) and the following estimate :

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_\eta(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_0(x)| dx, \quad \text{for all } t \geq 0. \quad (3.27)$$

**Proof of Lemma 3.1 :**

First, we prove the above estimate on  $v_\eta^\delta$  the solution of (2.20), constructed in Theorem 2.1 (i), and then, thanks to the uniqueness of solution, we deduce the announced result by passing to the limit as  $\delta$  goes to 0. Indeed, differentiating the first equation in (2.20) with respect to  $x$  and then multiplying by  $\beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta)$ , where  $\beta_\delta$  is defined in (2.19), we obtain

$$\partial_t (\beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta)) = \eta \partial_{xx}^2 (\partial_x v_\eta^\delta) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta) + \partial_x (\tilde{c}(x, t) \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta)) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta). \quad (3.28)$$

Let  $\phi \in C^\infty(\mathbb{R})$  be a cut-off function taking values in  $[0, 1]$ , supported on the interval  $[-2, 2]$  and  $\phi(x) \equiv 1$  on  $[-1, 1]$ . Multiplying (3.28) by  $\phi_R(\cdot) = \phi(\frac{\cdot}{R})$ , for  $R > 0$ , and integrating over the spatial variable, we get

$$\begin{aligned} \partial_t \left[ \int_{-2R}^{2R} \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) dx \right] &= \eta \underbrace{\int_{-2R}^{2R} \partial_x (\partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t)) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) dx}_{I_1} \\ &+ \underbrace{\int_{-2R}^{2R} \partial_x (\tilde{c}(x, t) \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t))) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) dx}_{I_2}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

We note that these computations are justified because  $v_\eta^\delta \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ . In what follows, we will show that the terms  $I_1$  and  $I_2$  are bounded uniformly in  $\eta$  and in  $\delta$ .

**Step 1** (Estimate of  $I_1$ ) : From integration by parts, we have

$$I_1 = -\eta \left[ \int_{-2R}^{2R} (\partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t))^2 \beta''_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) dx + \frac{1}{R} \int_{-2R}^{2R} \partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx \right].$$

Thanks to the convexity of  $\beta_\delta$  and the positivity of  $\phi_R$ , we know that

$$(\partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t))^2 \beta''_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) \geq 0.$$

This implies that  $I_1$  satisfies the following inequality

$$\begin{aligned} I_1 &\leq -\frac{\eta}{R} \int_{-2R}^{2R} \partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, t) \beta'_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx \\ &\leq -\frac{\eta}{R} \int_{-2R}^{2R} \partial_x (\beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t))) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx. \end{aligned}$$

Integrating again by parts the right hand side of the above inequality, we obtain

$$I_1 \leq \frac{\eta}{R^2} \int_{-2R}^{2R} \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi'' \left( \frac{x}{R} \right) dx.$$

Using (2.22) with  $M_\delta := (\|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \delta) e^{T\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}}$ , we finally get that

### 3. *A priori* uniform estimates on the solution of (2.17)

---

$$I_1 \leq \frac{4\eta}{R} \beta_\delta(M_\delta) \|\phi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})}. \quad (3.30)$$

**Step 2** (Estimate of  $I_2$ ) : To estimate  $I_2$ , we integrate by parts to get

$$\begin{aligned} I_2 = & - \underbrace{\int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \beta_\delta''(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \partial_{xx}^2 v_\eta^\delta(x, s) \phi_R(x) dx}_{J_1} \\ & - \frac{1}{R} \underbrace{\int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \beta_\delta'(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx}_{J_2}. \end{aligned}$$

Furthermore, by the property of the function  $\beta_\delta$  defined in (2.19), we can see that

$$\partial_{xx}^2 v_\eta^\delta \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta) \beta_\delta''(\partial_x v_\eta^\delta) = \delta \partial_x \left( \arctan \left[ \frac{\partial_x v_\eta^\delta}{\delta} \right] \right),$$

which shows that

$$J_1 = -\delta \int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) \phi_R(x) \partial_x \left( \arctan \left[ \frac{\partial_x v_\eta^\delta}{\delta}(x, t) \right] \right) dx.$$

Integrating by parts the above equality, we obtain

$$\begin{aligned} J_1 = & \delta \int_{-2R}^{2R} \partial_x \tilde{c}(x, t) \phi_R(x) \arctan \left( \frac{\partial_x v_\eta^\delta}{\delta}(x, t) \right) dx \\ & + \frac{\delta}{R} \int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) \arctan \left( \frac{\partial_x v_\eta^\delta}{\delta}(x, t) \right) dx. \end{aligned}$$

Thereafter, using Hölder's inequality, we deduce that

$$J_1 \leq \delta \frac{\pi}{2} \|\tilde{c}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0,T))} (R \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\phi'\|_{L^1(\mathbb{R})}). \quad (3.31)$$

However, since  $\beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta) \beta_\delta'(\partial_x v_\eta^\delta) = \partial_x v_\eta^\delta$ , we can rewrite  $J_2$  as

$$J_2 = -\frac{1}{R} \int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) \partial_x v_\eta^\delta(x, t) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx.$$

Integrating by parts, we get

$$J_2 = \frac{1}{R} \int_{-2R}^{2R} \partial_x \tilde{c}(x, t) v_\eta^\delta(x, t) \phi' \left( \frac{x}{R} \right) dx + \frac{1}{R^2} \int_{-2R}^{2R} \tilde{c}(x, t) v_\eta^\delta(x, t) \phi'' \left( \frac{x}{R} \right) dx,$$

which gives, by Hölder's inequality, the following estimate

$$\begin{aligned} J_2 &\leq \frac{1}{R} \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))} \|v_\eta^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ &\quad + \frac{1}{R} \|\phi''\|_{L^1(\mathbb{R})} \|v_\eta^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}. \end{aligned}$$

From estimate (2.21), we deduce that

$$J_2 \leq \frac{\overline{M}_\delta}{R} \left( \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))} \|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\phi''\|_{L^1(\mathbb{R})} \right), \quad (3.32)$$

where  $\overline{M}_\delta = \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \delta T \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}$ . Combining (3.31) and (3.32), one gets

$$\begin{aligned} I_2 &\leq \delta \frac{\pi}{2} \|\tilde{c}\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0,T))} \left( R \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R})} + \|\phi'\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) \\ &\quad + \frac{\overline{M}_\delta}{R} \left( \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))} \|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\phi''\|_{L^1(\mathbb{R})} \right). \end{aligned} \quad (3.33)$$

**Step 3** (Passage to the limit) : Integrating (3.29) in time on  $(0, t)$ , for  $0 < t < T$ , we get

$$\int_{-2R}^{2R} \beta_\delta(\partial_x v_\eta^\delta(x, t)) \phi_R(x) dx \leq \int_{-2R}^{2R} \beta_\delta(\partial_x v_0(x)) \phi_R(x) dx + T(I_1 + I_2).$$

Passing to the limit in the previous estimate, as  $\delta$  goes to 0, and using the fact that  $\partial_x v_\eta^\delta$  converges locally uniformly, as  $\delta$  goes to 0, toward  $\partial_x v_\eta$  ( by Simon Lemma [91, Corollary4] and regularity of parabolic solutions ), we obtain

$$\begin{aligned} \int_{-2R}^{2R} |\partial_x v_\eta(x, t)| \phi_R(x) dx &\leq \int_{-2R}^{2R} |\partial_x v_0(x)| \phi_R(x) dx + \frac{4\eta T}{R} \|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \|\phi''\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{T\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}} \\ &\quad + \frac{T}{R} \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \left( \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty((0,T);L^1(\mathbb{R}))} \|\phi'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\phi''\|_{L^1(\mathbb{R})} \right) \end{aligned}$$

where we have used estimate (3.30) in the first line and (3.33) in second line. According to (2.24), (3.26) and the monotone convergence theorem, we get, by passing to the limit  $R \rightarrow +\infty$  in the previous inequality

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_\eta(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_0(x)| dx,$$

### 3. *A priori* uniform estimates on the solution of (2.17)

which leads to the desired result. ■

The following estimate will provide the compactness in time of the solution  $v_\eta$ , given in Theorem 2.1 (ii), uniformly with respect to  $\eta$ .

**Lemma 3.2 (Estimate on the time derivative of the solution)**

Assume that (2.18) holds and let  $W^{-1,\infty}(\mathbb{R})$  be the dual space of  $W^{1,1}(\mathbb{R})$ . Then, for all  $0 < \eta \leq 1$  and for all  $T > 0$ , the solution  $v_\eta$  of (2.17), given by Theorem 2.1 (ii), satisfies the following estimate :

$$\|\partial_t v_\eta\|_{L^\infty((0,T);W^{-1,\infty}(\mathbb{R}))} \leq \widetilde{M}, \quad (3.34)$$

where  $\widetilde{M}$  depends only on  $T$ ,  $\|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}$ ,  $\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}$  and  $\|v_0\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{R})}$ .

**Proof of Lemma 3.2 :**

The idea is somehow to bound  $\partial_t v_\eta^\delta$  using the available bounds on the right hand side of the equation (2.20) and then passing to the limit  $\delta \rightarrow 0$  to bound  $\partial_t v_\eta$ . The proof is given by duality. Multiplying the equation (2.20) by  $\phi \in L^1((0, T); W^{1,1}(\mathbb{R}))$  and integrating on  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , we get

$$\int_{\mathbb{R} \times (0,T)} \phi \partial_t v_\eta^\delta dx dt = \overbrace{\eta \int_{\mathbb{R} \times (0,T)} \phi \partial_{xx}^2 v_\eta^\delta dx dt}^{I_1} + \overbrace{\int_{\mathbb{R} \times (0,T)} \phi \tilde{c} \beta_\delta (\partial_x v_\eta^\delta) dx dt}^{I_2}.$$

Integrating by parts in  $I_1$ , for all  $0 < \eta \leq 1$ , we obtain

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \left| \int_{\mathbb{R} \times (0,T)} \partial_x \phi \cdot \partial_x v_\eta^\delta dx dt \right| \leq \|\partial_x \phi\|_{L^1(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\partial_x v_\eta^\delta\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}, \\ &\leq \|\phi\|_{L^1((0,T);W^{1,1}(\mathbb{R}))} M_\delta, \end{aligned} \quad (3.35)$$

where we have used inequality (2.22) in the second line, noting

$$M_\delta := (\|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + \delta) e^{T\|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}}.$$

Similarly, for the term  $I_2$ , we have

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \|\phi\|_{L^1(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \|\beta_\delta (\partial_x v_\eta^\delta)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))}, \\ &\leq \|\phi\|_{L^1((0,T);W^{1,1}(\mathbb{R}))} \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} \beta_\delta(M_\delta). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Collecting (3.35) and (3.36), we get that

$$\int_{\mathbb{R} \times (0,T)} \phi \partial_t v_\eta^\delta dx dt \leq C_\delta \|\phi\|_{L^1((0,T);W^{1,1}(\mathbb{R}))}.$$

where  $C_\delta := M_\delta + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \beta_\delta(M_\delta)$ . Then, by duality, we deduce that

$$\|\partial_t v_\eta^\delta\|_{L^\infty((0, T); W^{-1, \infty}(\mathbb{R}))} \leq C_\delta.$$

Finally, passing to the limit in the previous inequality, as  $\delta$  goes to 0, and using the weakly- $\star$  convergence in  $L^\infty((0, T); W^{-1, \infty}(\mathbb{R}))$ , we get

$$\|\partial_t v_\eta\|_{L^\infty((0, T); W^{-1, \infty}(\mathbb{R}))} \leq \liminf_{\delta \rightarrow 0} \|\partial_t v_\eta^\delta\|_{L^\infty((0, T); W^{-1, \infty}(\mathbb{R}))} \leq \widetilde{M}$$

with

$$\widetilde{M} = \lim_{\delta \rightarrow 0} C_\delta = (1 + \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}) \|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{T \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}},$$

which gives the stated result. ■

## 4 Global continuous solution for regularized eikonal equation

This section is devoted to the proof of Theorem 1.1 (i). For the sake of a clear presentation, we divide it into two subsections. In the first subsection, we prove the global existence of Lipschitz continuous viscosity solution of the eikonal equation (4.37), passing to the limit  $\eta \rightarrow 0$  in equation (2.17). Using this result, we prove Theorem 1.1 (i) in the next subsection.

### 4.1 Passage to the limit when the parameter $\eta$ tends to 0

In this subsection, we state a global in time existence and uniqueness result for the following equation :

$$\begin{cases} \partial_t v(x, t) = \tilde{c}(x, t) |\partial_x v(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (4.37)$$

We prove that this equation admits a unique Lipschitz continuous viscosity solution  $v$ , when the initial data and the velocity are Lipschitz continuous functions. Moreover, we show that  $v$  is the limit of  $v_\eta$  when  $\eta \rightarrow 0$ , where  $v_\eta$  is the solution of (2.17) given by Theorem 2.1 (ii). We also show that  $v$  satisfies Lipschitz estimates (2.23)-(2.24) if (2.18) holds and the BV estimate (3.27) if (3.26) holds.

Before showing the main theorem of this subsection, let us recall the definition of the continuous viscosity solution for (2.17) with  $0 \leq \eta \leq 1$ .

**Definition 4.1 (Continuous viscosity sub-solution, super-solution and solution)**

A function  $v \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$  is a viscosity sub-solution of (2.17) if and only if  $v(x, 0) \leq v_0(x)$  and for every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T))$ , that is tangent from above to  $v$  at  $(x_0, t_0)$ , the following holds :

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - \tilde{c}(x_0, t_0) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| - \eta \partial_{xx}^2 \phi(x_0, t_0) \leq 0.$$

A function  $v \in C(\mathbb{R} \times [0, T])$  is a viscosity super-solution of (2.17) if and only if  $v(x, 0) \geq v_0(x)$  and for every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^2(\mathbb{R} \times (0, T))$ , that is tangent from below to  $v$  at  $(x_0, t_0)$ , the following holds :

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - \tilde{c}(x_0, t_0) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| - \eta \partial_{xx}^2 \phi(x_0, t_0) \geq 0.$$

A continuous function  $v$  is a viscosity solution of (2.17) if and only if it is a sub- and a super-solution of (2.17).

We have the following existence and uniqueness result for the local equation (4.37).

**Theorem 4.2 (Existence and uniqueness of Lipschitz continuous viscosity solution)**

Assume that (2.18) holds, then, for all  $T > 0$ , we have :

i) The problem (4.37) admits a unique Lipschitz continuous viscosity solution on  $\mathbb{R} \times (0, T)$ , satisfying the following estimates :

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \tag{4.38}$$

$$\|\partial_x v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|\partial_x v_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{T \|\partial_x \tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}}. \tag{4.39}$$

ii) Assume, moreover, that (3.26) holds, then  $v$  satisfies the following BV estimate :

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_x v(x, t)| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_0(x)| dx, \quad \text{for all } t \in [0, T] \tag{4.40}$$

and also the following :

$$\int_{\mathbb{R}} |\partial_t v(x, t)| dx \leq \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \|\partial_x v_0\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \tag{4.41}$$

To prove this theorem, we need the following stability lemma.

**Lemma 4.3 (Stability of continuous viscosity solutions, Barles [15, Th 2.3])**

Let  $v_\eta$  be the solution of (2.17) constructed in Theorem 2.1 (ii) as the limit of  $v_\eta^\delta$  when  $\delta \rightarrow 0$ . Then, we have :

i) The function  $v_\eta$  is also a continuous viscosity solution of (2.17).

ii) If  $v_\eta$  converges locally uniformly, as  $\eta$  goes to 0, to a function  $v$ , then  $v$  is a Lipschitz continuous viscosity solution of (4.37).

To prove this lemma, it is sufficient to apply the stability result for continuous viscosity solution (see Barles [15, Th 2.3]) and the fact that all  $C^2$  solutions of (2.20) are continuous viscosity solutions of (2.20).

**Proof of Theorem 4.2 :**

**Proof of i)** : Let  $v_\eta$  be the solution of (2.17), constructed in Theorem 2.1 (ii). First, by Lemma 4.3 (i), we know that  $v_\eta$  is a continuous viscosity solution of (2.17).

Let  $K$  be a compact subset in  $\mathbb{R}$ . Using estimates (2.23), (2.24), (3.34) and applying Lemma 2.2 in the particular case where  $X = W^{1,\infty}(K)$ ,  $B = L^\infty(K)$  and  $Y = W^{-1,\infty}(K) = (W^{1,1}(K))'$ , we can show that  $v_\eta$  is relatively compact in  $L^\infty(K \times (0, T))$ . Hence, as  $\eta$  goes to zero, we can extract a subsequence, still denoted by  $v_\eta$ , that converges locally uniformly to some limit  $v$ . Then, by Lemma 4.3 (ii), we can see that  $v$  is a Lipschitz continuous viscosity solution of (4.37). This proves the existence of a Lipschitz continuous viscosity solution of (4.37). However, the uniqueness of the solution is an independent result valid for Lipschitz continuous viscosity solutions of (4.37) with Lipschitz velocity (see Chapter 2, Theorem 4.33). Finally, we pass to the limit in the estimates (2.23) and (2.24), using the lower semi-continuity on  $L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))$ , we get (4.38) and (4.39).

**Proof of ii)** : From the estimate (3.27), we deduce that  $(v_\eta(\cdot, t))_\eta$  is uniformly bounded in  $BV(\mathbb{R})$  and then thanks to the lower semi-continuity of the total variation (Proposition 2.4, Chapter 3), we get

$$TV(v(\cdot, t)) \leq \liminf_{\eta \rightarrow 0} TV(v_\eta(\cdot, t)) \leq \int_{\mathbb{R}} |\partial_x v_0(x)| dx \quad \text{for all } t \geq 0.$$

Moreover, since  $v$  is Lipschitz continuous, we know that the  $L^1$ -norm of  $\partial_x v$  coincides with the total variation of  $v$  (Proposition 2.4, Chapter 3), which proves (4.40).

The last estimate (4.41) comes directly from estimate (4.40), using the Hölder's inequality and the fact that the Lipschitz continuous viscosity solution  $v$  satisfies the equation (4.37) almost everywhere. ■

**Remark 4.4 ( $L^1$ -Continuity in time)**

Under assumptions (2.18), (3.26), from estimate (4.41), we can remark that the solution  $v$  of (4.37), given by Theorem 4.2 (i), satisfies the following  $L^1$ -Lipschitz estimate in time :

$$\|v(\cdot, t) - v(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \|\partial_x v_0\|_{L^1(\mathbb{R})} |t - s| \quad \text{for all } t, s \geq 0.$$

## 4.2 Proof of Theorem 1.1 (i)

In this subsection, we prove the global existence and uniqueness of a Lipschitz continuous viscosity solution of equation (1.1) after the regularization of the velocity  $c$  and the initial data  $u_0$ , which was announced in Theorem 1.1 (i). This approximation brings us to consider, for every  $\epsilon > 0$ , the following equation :

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon(x, t) = c_\epsilon(x, t) |\partial_x u_\epsilon(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_{0,\epsilon}(x) & \text{in } \mathbb{R} \end{cases} \quad (4.42)$$

where  $c_\epsilon$  and  $u_{0,\epsilon}$  are the regularization of the functions  $c$  and  $u_0$  respectively defined by (1.6).

By assumptions (1.3), (1.2) and by classical properties of the mollifiers  $\rho_\epsilon^1, \rho_\epsilon^2$ , we can see that, for all  $\epsilon > 0$ , the functions  $u_{0,\epsilon}$  and  $c_\epsilon$  satisfy assumptions (2.18) and (3.26), namely

$$u_{0,\epsilon} \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}) \cap C^\infty(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad c_\epsilon \in W^{1,\infty}(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap C^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)).$$

and

$$\partial_x u_{0,\epsilon} \in L^1(\mathbb{R}) \quad \text{and} \quad \partial_x c_\epsilon \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R})).$$

Thus, we can apply Theorem 4.2, with  $\tilde{c} = c_\epsilon$  and  $v_0 = u_{0,\epsilon}$  and prove that equation (4.42) admits a unique Lipschitz continuous viscosity solution  $u_\epsilon$  satisfying the following estimates :

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_{0,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (4.43)$$

$$\|\partial_x u_\epsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|\partial_x u_{0,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \text{for all } t \in [0, T] \quad (4.44)$$

$$\|\partial_t u_\epsilon(\cdot, t)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq \|c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \|\partial_x u_{0,\epsilon}\|_{L^1(\mathbb{R})}, \quad \text{for all } t \in [0, T] \quad (4.45)$$

and also the following estimate (depending on  $\epsilon$ )

$$\|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|\partial_x u_{0,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{T \|\partial_x c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}}. \quad (4.46)$$

Moreover, by classical properties of the mollifiers, we get

$$\|u_{0,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\|c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}.$$

On the other hand, as  $u_0 \in BV(\mathbb{R})$ , its derivative  $\partial_x u_0$  is a Radon measure, then using [8, Th 2.2 (b)], we obtain

$$\|\partial_x u_{0,\epsilon}(x)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq TV(u_0) = |u_0|_{BV(\mathbb{R})}$$

which joint to (4.43), (4.44) and (4.45) imply (1.9), (1.10) and (1.11). ■

## 5 Existence of sub and super discontinuous viscosity solutions

This section is devoted to the proof of Theorem 1.1 (ii). In order to present it, we start by passing to the limit  $\varepsilon \rightarrow 0$  in equation (4.42), using estimate (1.9) and the stability result of discontinuous viscosity solutions. This is based on the technical method of relaxed semi-limits introduced by Barles and Perthame ([20, 21]). This section will be divided in two subsections. First, in Subsection 5.1, we recall some useful results for viscosity solutions and then in Subsection 5.2, we give the proof of Theorem 1.1 (ii).

### 5.1 Some useful results for viscosity solutions

In the following, we denote by  $f^*$  and  $f_*$  the respective upper and lower semi-continuous envelopes of a locally bounded function  $f$  defined on an open domain in  $\mathbb{R}^n$  and given by

$$f^*(X) = \limsup_{Y \rightarrow X} f(Y) \quad \text{and} \quad f_*(X) = \liminf_{Y \rightarrow X} f(Y). \quad (5.47)$$

See Chapter 2, Proposition 4.24, for some properties of these envelopes.

First, let us recall the definition of discontinuous viscosity solutions of the eikonal equation (1.1), that we have already presented in the general introduction, Section 3.

**Definition 5.1** (*Discontinuous viscosity sub-solution, super-solution and solution*)

Assume that  $c$  is locally bounded on  $\mathbb{R} \times (0, T)$  and  $u_0$  is locally bounded on  $\mathbb{R}$ .

**(1) (Discontinuous viscosity sub-solution)**

An upper semi-continuous function  $v$  on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity sub-solution of (1.1) if it satisfies :

- (i)  $v(x, 0) \leq (u_0)^*(x)$ , for all  $x \in \mathbb{R}$ .
- (ii) For every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ , tangent from above to  $v$  at the point  $(x_0, t_0)$ , we have :

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - c^*(x_0, t_0) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| \leq 0. \quad (5.48)$$

**(2) (Discontinuous viscosity super-solution)**

A lower semi-continuous function  $v$  on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity super-solution of (1.1) if it satisfies :

- (i)  $v(x, 0) \geq (u_0)_*(x)$ , for all  $x \in \mathbb{R}$ .

## 5. Existence of sub and super discontinuous viscosity solutions

---

(ii) For every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ , tangent from below to  $v$  at the point  $(x_0, t_0)$ , we have :

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - c_*(x_0, t_0) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| \geq 0. \quad (5.49)$$

### (3) (Discontinuous viscosity solution)

Finally, we say that a locally bounded function  $v$  defined on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity solution of (1.1) if its upper semi-continuous (respectively lower semi-continuous) envelope is a viscosity sub-solution (respectively super-solution).

We also need to recall the following stability result of discontinuous viscosity solutions.

### Theorem 5.2 (Stability discontinuous result, [15, Th 4.1])

Assume that, for  $\epsilon > 0$ ,  $u_\epsilon$  is an upper semi-continuous viscosity sub-solution (resp. a lower semi-continuous viscosity super-solution) of

$$\partial_t u_\epsilon = c_\epsilon(x, t) |\partial_x u_\epsilon| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T),$$

where  $(c_\epsilon)_\epsilon$  is a sequence of uniformly locally bounded functions on  $\mathbb{R} \times (0, T)$ . Assume that the functions  $u_\epsilon$  are uniformly locally bounded on  $\mathbb{R} \times (0, T)$ . Then,  $\bar{u}$  defined by (1.7) (resp.  $\underline{u}$  defined by (1.8)) is a viscosity sub-solution (resp. super-solution) of the equation

$$\partial_t u = \bar{c}(x, t) |\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T),$$

where  $\bar{c}(x, t) = \limsup^* c_\epsilon(x, t)$  (resp. of the equation

$$\partial_t u = \underline{c}(x, t) |\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T),$$

where  $\underline{c}(x, t) = \liminf_* c_\epsilon(x, t)$ ).

### Remark 5.3

The previous stability result allows us to pass to the limit in the non-linear term, in viscosity sense, by disposing only  $L^\infty$  uniform bounds on the solution and on the velocity. Note that, in the case where  $c$  is continuous with respect to  $x$  and  $L^1$  in time, it is possible to get a better stability result using the  $L^1$ -viscosity solutions theory introduced by Ishii [60], see Barles [16].

We end this subsection by showing the following finite speed propagation property, valid on the continuous viscosity solutions of equation (4.37) and that have presented in Chapter 2, Section 4, Sous-section 4.5.

### Lemma 5.4 (Finite speed propagation property)

Under the assumption (2.18), if  $v$  is the unique continuous viscosity solution of

(4.37), given by Theorem 4.2 (i), then,  $v$  satisfies, for all  $h \geq 0$ , the following estimate :

$$\inf_{|y-x| \leq t \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} v(y, h) \leq v(x, t+h) \leq \sup_{|y-x| \leq t \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} v(y, h), \quad (5.50)$$

for all  $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T-h]$ .

**Proof of Lemma 5.4 :**

Let us start by proving the right hand side of (5.50), in viscosity sense, namely

$$v(x, t+h) \leq \sup_{|y-x| \leq t \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} v(y, h). \quad (5.51)$$

Let  $v^h(x, t) = v(x, t+h)$ . Then, we can see that

$$v_t^h(x, t) = \partial_t v(x, t+h) = \tilde{c}(x, t+h) |\partial_x v(x, t+h)| = c^h(x, t) |v_x^h(x, t)|.$$

Thus,  $v^h$  is a viscosity solution of

$$\partial_t w = c^h |\partial_x w|, \quad w(x, 0) = v(x, h).$$

Since  $c^h(x, t) \leq \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}$ , we can deduce using the Definition 4.1 of continuous viscosity sub-solution, that  $v^h$  is viscosity sub-solution of the following equation :

$$\partial_t w = C_1 |\partial_x w|, \quad w(x, 0) = v(x, h), \quad \text{with } C_1 = \|\tilde{c}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}. \quad (5.52)$$

Furthermore, if we note

$$\alpha(x, t) = \sup_{|y-x| \leq C_1 t} v(y, h),$$

then, by Lax-Oleinik formula (See [15, Lemma 2.1] and Chapter 2 Theorem 4.17), we know that  $\alpha$  is the unique viscosity continuous solution of (5.52). Using the comparison principle (see [22, Th 1.1] and Chapter 2, Theorem 4.12), we deduce that

$$v(x, t+h) \leq \alpha(x, t), \quad \text{on } \mathbb{R} \times (0, T),$$

which implies (5.51). The same proof is done for the inequality

$$\inf_{|y-x| \leq C_1 t} v(y, h) \leq v(x, t+h),$$

by considering the following equation  $\partial_t w = -C_1 |\partial_x w|$ . ■

## 5.2 Proof of Theorem 1.1 (ii)

We only prove the result for the sub-solution case, the super-solution case is proved analogously. Let  $u_\epsilon$  be the solution of (4.42), constructed in Theorem 1.1 (i). We have to prove that the relaxed semi-limit  $\bar{u}$  defined in (1.7) is a discontinuous viscosity sub-solution of (1.1), in the sense of Definition 5.1. We do this in two steps.

**Step 1 (Meaning of the initial data)** : It is sufficient to prove the following inequality

$$\bar{u}(x, 0) \leq (u_0)^*(x) \quad \text{for all } x \in \mathbb{R}. \quad (5.53)$$

From the definition of  $\bar{u}$ , we know that there exists a sequence  $(\epsilon_n, x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) \rightarrow (0, x, 0)$ , when  $n \rightarrow +\infty$  such that

$$\bar{u}(x, 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}).$$

Using Lemma (5.4) with  $h = 0$  and  $t = t_{\epsilon_n}$ , we get

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_n}| \leq t_{\epsilon_n} \|c_{\epsilon_n}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_{\epsilon_n}(y, 0) \\ &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_n}| \leq t_{\epsilon_n} \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} \left( \int_{\mathbb{R}} u_0(z) \rho_{\epsilon_n}^1(y-z) dz \right) \\ &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_n}| \leq t_{\epsilon_n} \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} \left( \sup_{|z-y| \leq \epsilon_n} u_0(z) \right), \end{aligned}$$

where we have used in the second and the third lines the definition of the functions  $u_{0, \epsilon_n}$ ,  $c_{\epsilon_n}$  in (1.6) and also the classical properties of the mollifiers. Furthermore, the convergence, as  $n \rightarrow +\infty$ , of  $(\epsilon_n, x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n})_n$  to  $(0, x, 0)$ , implies that for all  $\alpha > 0$ , there exists  $n_\alpha > 0$ , such that, for all  $n \geq n_\alpha$ , we have :

$$\epsilon_n \leq \alpha, \quad |x_{\epsilon_n} - x| \leq \alpha \quad \text{and} \quad t_{\epsilon_n} \leq \alpha.$$

Thus, for every  $\alpha > 0$  and  $n \geq n_\alpha$ , we have

$$u_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) \leq \sup_{|z-x| \leq \alpha(2+\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))})} u_0(z). \quad (5.54)$$

First, we pass to the limit,  $n \rightarrow +\infty$ , in the previous inequality to obtain

$$\bar{u}(x, 0) \leq \sup_{|z-x| \leq \alpha(2+\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))})} u_0(z).$$

Then, we pass to the limit,  $\alpha \rightarrow 0$ , to complete the proof of (5.53).

**Step 2** (Meaning of the equation) : We will show that  $\bar{u}$  is a discontinuous viscosity sub-solution of the following equation

$$\partial_t u = c^*(x, t)|\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T). \quad (5.55)$$

Indeed, using the definition of  $c_\epsilon$  in (1.6) and the classical properties of the mollifiers, we know that

$$\|c_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}.$$

This proves, according to estimate (1.9) and the stability result of discontinuous viscosity solution, announced in Theorem 5.2, that  $\bar{u}$  is a discontinuous viscosity sub-solution of the equation

$$\partial_t u = \bar{c}(x, t)|\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T),$$

where  $\bar{c}(x, t) = \limsup^* c_\epsilon(x, t)$ . Moreover, we also know that there exists a sequence  $(\epsilon_n, x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) \rightarrow (0, x, t)$ , as  $n$  goes to  $+\infty$ , such that

$$\bar{c}(x, t) = \lim_{n \rightarrow +\infty} c_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}).$$

From (1.6), we can see that

$$\begin{aligned} c_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) &= \int_{\mathbb{R} \times (0, T)} c(y, \tau) \rho_{\epsilon_n}^2(x_{\epsilon_n} - y, t_{\epsilon_n} - \tau) dy d\tau \\ &\leq \sup_{\substack{|y - x_{\epsilon_n}| \leq \epsilon_n \\ |\tau - t_{\epsilon_n}| \leq \epsilon_n}} c(y, \tau), \end{aligned}$$

using the fact that  $\rho_{\epsilon_n}^2 \geq 0$  and  $\int_{\mathbb{R}^2} \rho_{\epsilon_n}^2 = 1$ . Thanks to the convergence, as  $n \rightarrow +\infty$ , of  $(\epsilon_n, x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n})_n$  to  $(0, x, t)$ , we can deduce, as in (5.54), that for every  $\alpha > 0$  there exists  $n_\alpha > 0$ , such that, for all  $n \geq n_\alpha$ , we have

$$c_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}) \leq \sup_{\substack{|y - x| \leq 2\alpha \\ |\tau - t| \leq 2\alpha}} c(y, \tau).$$

Now, we pass to the limit,  $n \rightarrow +\infty$ , firstly and then  $\alpha \rightarrow 0$  we get  $\bar{c}(x, t) \leq c^*(x, t)$ . This proves that  $\bar{u}$  is a discontinuous viscosity sub-solution of (5.55). ■

## 6 Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

In this section, we will prove Theorem 1.1 (iii) and Theorem 1.2. First, we show, in Subsection 6.1, some preliminary results that we need in Subsection 6.2 to complete the proof of Theorem 1.2. Finally, in Subsection 6.3, we complete the proof of Theorem 1.1 (iii).

## 6. Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

### 6.1 Preliminary results

First of all, let us recall some properties valid on bounded  $BV(\mathbb{R})$ -functions, that we have presented in Chapter 3 (Theorems 3.1, 3.3 and 3.4).

**Lemma 6.1 (Properties of BV-functions)**

Let  $f$  be a bounded  $BV(\mathbb{R})$ -function. Then, the following hold :

- i)  $f$  is continuous except at most on a countable set.
- ii) The right and left limits

$$f(x^+) = \lim_{\substack{y \rightarrow x, \\ y > x}} f(y), \quad f(x^-) = \lim_{\substack{y \rightarrow x, \\ y < x}} f(y)$$

exist at every point  $x \in \mathbb{R}$ . Moreover, there exists a unique right-continuous function  $f_r$  (resp. left-continuous function  $f_l$ ) coinciding with  $f$  except on a countable set.

- iii) There exists a pair of non-decreasing functions  $f^1, f^2 \in L^\infty(\mathbb{R})$  such that  $f = f^1 - f^2$ .

The following lemma shows a local estimate valid on sequences of non-decreasing functions converging locally and strongly in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Lemma 6.2 (Sequences of non-decreasing functions)**

- i) Sequences of non-decreasing functions strongly convergent in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$  :

Let  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  be a sequence of non-decreasing defined functions on  $\mathbb{R}$  such that  $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$  strongly in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , as  $\epsilon \rightarrow 0$ , with  $\phi$  is a non-decreasing defined function on  $\mathbb{R}$ . Then, for all  $a > 0$  and  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $\epsilon_a^\delta > 0$ , such that, for every  $0 < \epsilon \leq \epsilon_a^\delta$ , the following estimate holds :

$$-\delta + \phi(x - \delta) \leq \phi_\epsilon(x) \leq \delta + \phi(x + \delta), \quad \forall x \in [-a, a]. \quad (6.56)$$

- ii) Sequences of non-decreasing functions strongly convergent in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  :

Let  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  be a sequence of defined functions on  $\mathbb{R} \times [0, T]$  such that, for all  $t \in [0, T]$ , the function  $\phi_\epsilon(\cdot, t)$  is non-decreasing on  $\mathbb{R}$ . Assume, moreover, that  $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$  strongly in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$ , as  $\epsilon \rightarrow 0$ , with, for all  $t \in [0, T]$ , the function  $\phi(\cdot, t)$  is defined and non-decreasing on  $\mathbb{R}$ . Then, for all  $a > 0$  and  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $\epsilon_{a,T}^\delta > 0$ , such that, for every  $0 < \epsilon \leq \epsilon_{a,T}^\delta$ , the following estimate holds :

$$-\delta + \phi(x - \delta, t) \leq \phi_\epsilon(x, t) \leq \delta + \phi(x + \delta, t), \quad \forall x \in [-a, a], \forall t \in [0, T]. \quad (6.57)$$

**Proof of Lemma 6.2 :**

**Proof of i) :** We will just prove the right hand side of estimate (6.56). Let  $a > 0$ , since  $\phi_\epsilon \rightarrow \phi$  strongly in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , then for all  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $\epsilon_a^\delta > 0$ , such that, for all  $0 < \epsilon \leq \epsilon_a^\delta$ , we have

$$\|\phi_\epsilon - \phi\|_{L^1(-2a, 2a)} \leq \delta^2. \quad (6.58)$$

Furthermore, for all  $x \in [-a, a]$ ,  $\delta \in (0, \frac{a}{2}]$  and  $y \in (x, x + \delta)$ , as  $\phi_\epsilon$  and  $\phi$  are non-decreasing functions, we can see that

$$\phi_\epsilon(x) - \phi(x + \delta) \leq \phi_\epsilon(y) - \phi(y).$$

Integrating with respect to  $y$  over the interval  $(x, x + \delta)$ , we get

$$\phi_\epsilon(x) - \phi(x + \delta) \leq \frac{1}{\delta} \|\phi_\epsilon - \phi\|_{L^1(-2a, 2a)}.$$

From (6.58), the above estimate implies that, for all  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$  and  $0 < \epsilon \leq \epsilon_a^\delta$

$$\phi_\epsilon(x) \leq \delta + \phi(x + \delta), \quad \text{for all } x \in [-a, a].$$

The left hand side of (6.56) is proved in the same way.

**Proof of ii)** : To prove (6.57), we repeat the same procedures as in the proof of (i), using the strong convergence in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  of  $\phi_\epsilon$ . ■

Finally, in the following lemma we show a local estimate valid on sequences of bounded and  $BV$  functions converging locally and strongly in  $L^1(\mathbb{R})$ .

**Lemma 6.3 (Sequence of  $BV(\mathbb{R})$  functions)**

Let  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  be a sequence of functions, defined on  $\mathbb{R}$ , uniformly bounded in  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$  and strongly convergent to  $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$  in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , with  $\phi$  a right-continuous function. Then, there exists a subsequence  $(\phi_{\epsilon'})_{\epsilon'}$  such that, for all  $a > 0$  and for all  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $\epsilon_a^\delta > 0$ , such that, for all  $0 < \epsilon' \leq \epsilon_a^\delta$ , the following estimate holds :

$$-2\delta + \phi^1(x - \delta) - \phi^2(x + \delta) \leq \phi_{\epsilon'}(x) \leq 2\delta + \phi^1(x + \delta) - \phi^2(x - \delta), \quad \forall x \in [-a, a] \quad (6.59)$$

where  $\phi^1$  and  $\phi^2$  are two bounded, right-continuous and non-decreasing functions on  $\mathbb{R}$  satisfying  $\phi = \phi^1 - \phi^2$ .

**Proof of Lemma 6.3 :**

The proof of this lemma follows from Lemma 6.2 (i) and the properties (ii) and (iii) of Lemma 6.1. As done before, we will just show the right hand side of (6.59). Indeed, let  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  be a sequence of functions uniformly bounded in  $BV(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$ , then, there exist two bounded and non-decreasing functions  $\phi_\epsilon^1$  and  $\phi_\epsilon^2$  satisfying

$$\phi_\epsilon = \phi_\epsilon^1 - \phi_\epsilon^2 \quad (6.60)$$

and defined as

$$\phi_\epsilon^1(x) = TV_{(-\infty, x]}(\phi_\epsilon) + \phi_\epsilon(x), \quad \phi_\epsilon^2(x) = TV_{(-\infty, x]}(\phi_\epsilon), \quad (6.61)$$

## 6. Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

where  $TV_{(-\infty, x]}(\phi_\epsilon)$  is the total variation of  $\phi_\epsilon$  on  $(-\infty, x]$ . Furthermore, since the sequence  $(\phi_\epsilon^1)_\epsilon$  is uniformly bounded in  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ , then, by Helly's compactness Theorem (see Chapter 3, section 2.5, Théorème 2.14) and using the weak- $\star$  convergence in  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ , we can extract a subsequence  $(\phi_{\epsilon'}^1)_{\epsilon'}$  such that

$$\phi_{\epsilon'}^1 \longrightarrow \phi^1, \quad \text{strongly in } L_{loc}^1(\mathbb{R}),$$

with  $\phi_1 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ . According to the property (ii) of Lemma 6.1, we know that  $\phi_1$  coincides with a right-continuous function almost everywhere in  $\mathbb{R}$ . Since the two functions are equal in  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , we can choose  $\phi_1$  as a right-continuous function. Therefore, the function  $\phi_1$  will be a defined and non-decreasing function on  $\mathbb{R}$ .

Moreover, using the equality (6.60) and the strong convergence of  $(\phi_\epsilon)_\epsilon$  in  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , we also get

$$\phi_{\epsilon'}^2 \longrightarrow \phi^2, \quad \text{strongly in } L_{loc}^1(\mathbb{R}),$$

where  $\phi^2$  is a right-continuous and non-decreasing function on  $\mathbb{R}$  satisfying  $\phi^2 = \phi^1 - \phi$ . Thus, by Lemma 6.2 (i), we deduce that, for every  $a > 0$  and for all  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $\epsilon_{a,1}^\delta$  and  $\epsilon_{a,2}^\delta$  such that the following hold :

$$\text{for all } 0 < \epsilon' \leq \epsilon_{a,1}^\delta, \quad \phi_{\epsilon'}^1(x) \leq \delta + \phi^1(x + \delta), \quad \forall x \in [-a, a]$$

and

$$\text{for all } 0 < \epsilon' \leq \epsilon_{a,2}^\delta, \quad -\delta + \phi^2(x - \delta) \leq \phi_{\epsilon'}^2(x), \quad \forall x \in [-a, a].$$

Collecting the two previous estimates with equality (6.60), we obtain that, for all  $0 < \delta \leq \frac{a}{2}$  and  $0 < \epsilon' \leq \epsilon_a^\delta = \inf(\epsilon_{a,1}^\delta, \epsilon_{a,2}^\delta)$

$$\phi_{\epsilon'}(x) \leq 2\delta + \phi^1(x + \delta) - \phi^2(x - \delta), \quad \forall x \in [-a, a].$$

The left hand side of (6.59) is obtained similarly. ■

### Remark 6.4

*In the previous lemma, we decided to choose, for a uniformly bounded sequence in  $BV(\mathbb{R})$ , a right-continuous limit among the strong  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$  limits. We can also replace it by a left-continuous limit, which isn't an issue since, it is only necessary to construct a limit in  $L_{loc}^1(\mathbb{R})$ , that is defined and non-decreasing everywhere in  $\mathbb{R}$ .*

## 6.2 Proof of Theorem 1.2

Let  $u_\epsilon$  be the solution of (4.42), constructed in Theorem 1.1 (i). From estimates (1.9), (1.10) and (1.11), we can say that, for all compact  $K_0 \subset \mathbb{R}$ ,  $(u_\epsilon)_\epsilon$  is uniformly bounded in  $L^\infty((0, T); BV(K_0)) \cap L^\infty(K_0 \times (0, T))$  and  $(\partial_t u_\epsilon)_\epsilon$  is uniformly

bounded in  $L^\infty((0, T); L^1(K_0))$ . Using Simon's lemma (see Lemma 2.2), in the particular case  $X = BV(K_0)$ ,  $B = Y = L^1(K_0)$  and the following compact embedding  $BV(K_0) \hookrightarrow L^1(K_0)$ , we can extract a subsequence, denoted by  $(u_{\epsilon_n, K_0})_{\epsilon_n, K_0}$ , that converges strongly in  $L^\infty((0, T); L^1(K_0))$  to some limit  $u$ , as  $n \rightarrow +\infty$ . By a standard diagonalization procedure, we can extract a subsequence  $(u_{\epsilon_n})_{\epsilon_n}$  (independent on  $K$ ) that converges to the limit  $u$  strongly in  $C([0, T]; L^1(K))$  for all compact  $K \subset \mathbb{R}$ . Now, thanks to estimate (1.9), we can extract a subsequence, still denoted by  $(u_{\epsilon_n})_{\epsilon_n}$ , satisfying the following convergences :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{\epsilon_n} \longrightarrow u, \quad \text{strongly in } C([0, T]; L^1(K)), \quad \text{for all compact } K \subset \mathbb{R}, \\ u_{\epsilon_n} \longrightarrow u, \quad \text{weakly-} \star \quad \text{in } L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)), \\ u_{\epsilon_n} \longrightarrow u, \quad \text{weakly-} \star \quad \text{in } L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})). \end{array} \right. \quad (6.62)$$

Taking the  $\liminf$  in estimates (1.9), (1.10) and using the lower semi-continuity of  $\|\cdot\|_{L^\infty(\mathbb{R})}$  and  $|\cdot|_{BV(\mathbb{R})}$ , we can prove that  $u$  satisfies (1.12), (1.13) and (1.14). Moreover, using estimate (1.11), Remark 4.4 and the strong convergence in  $C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R}))$  of  $u_{\epsilon_n}$ , we can check that  $u$  satisfies also the  $L^1$ -Lipschitz estimate in time (1.15). Since, for all  $t \in [0, T)$ , the function  $u(\cdot, t) \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ , then, by property (ii) of Lemma 6.1, we know that this function coincides with a right-continuous function almost everywhere in  $\mathbb{R}$  and consequently in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ . This allows us to consider, in the following, a right-continuous limit with respect to the space variable.

Now, we will prove that  $u$  is a discontinuous viscosity solution of (1.1). Since we have proved in Theorem 1.1 (ii) that  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$  are respectively discontinuous viscosity sub- and super-solutions, then it is sufficient to show that

$$\bar{u}(x, t) = u^*(x, t) \quad \text{and} \quad \underline{u}(x, t) = u_*(x, t) \quad \text{for all } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]. \quad (6.63)$$

We only show the proof of the first equality, the second is proved similarly.

**Step 1.** We will prove the following inequality

$$\bar{u}(x, t) \leq u^*(x, t). \quad (6.64)$$

Let  $a > 0$ ,  $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  and  $t \in [0, T)$ . In fact, by the definition of  $\bar{u}$ , we know that there exists a sequence  $(\epsilon_m, x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) \rightarrow (0, x, t)$ , when  $m \rightarrow +\infty$ , such that

$$\bar{u}(x, t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}).$$

## 6. Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

For all  $\alpha > 0$ , we can state that, there exists  $m_\alpha > 0$ , such that, for all  $m \geq m_\alpha$ , we have

$$|x_{\epsilon_m} - x| \leq \alpha \quad \text{and} \quad |t_{\epsilon_m} - t| \leq \alpha.$$

Using Lemma 5.4, with

$$h_\alpha = \begin{cases} t - \alpha & \text{if } t > 0, \\ 0 & \text{if } t = 0, \end{cases}$$

we deduce that, for all  $m \geq m_\alpha$  and  $\alpha > 0$  such that  $h_\alpha \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_m}| \leq (t_{\epsilon_m} - h_\alpha) \|c_{\epsilon_m}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_{\epsilon_m}(y, h_\alpha) \\ &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_m}| \leq 2\alpha \|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_{\epsilon_m}(y, h_\alpha) \\ &\leq \sup_{|y-x| \leq \alpha(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)} u_{\epsilon_m}(y, h_\alpha), \end{aligned}$$

where we have used in the second line the definition of the function  $c_{\epsilon_m}$  in (1.6) and the classical properties of the mollifiers. Moreover, from the maximum principle of the eikonal equation (4.42) and since the initial data is non-decreasing, we know that  $u_{\epsilon_m}$  is non-decreasing (with respect to  $x$ ) and therefore, for all  $m \geq m_\alpha$ ,

$$u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) \leq u_{\epsilon_m}(x + \alpha(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1), h_\alpha).$$

Now, using the fact that  $u_{\epsilon_m}$  is non-decreasing (with respect to  $x$ ) and satisfies estimates (1.9), (1.10), (1.11), we can extract a subsequence, still denoted by  $(u_{\epsilon_m})_{\epsilon_m}$ , that converges in the sense of (6.62) to a function  $u$ , where, for all  $t \in [0, T]$ , the function  $u(\cdot, t)$  is defined and non-decreasing on  $\mathbb{R}$ . By the previous inequality and Lemma 6.2 (ii), we obtain that, for all  $0 < \alpha \leq \alpha_a$ , where

$$\alpha_a(\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}, t) = \begin{cases} \min\left(\frac{a}{2(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)}, \frac{t}{2}\right) & \text{if } t > 0, \\ \frac{a}{2(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)}, & \text{if } t = 0, \end{cases}$$

there exists  $m_{a,T}^\alpha > 0$ , such that, for every  $m \geq m_{a,T}^\alpha$ , we have

$$u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) \leq u(x + 2\alpha(\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1), h_\alpha) + \alpha.$$

Passing to the limit  $m \rightarrow +\infty$  and then  $\alpha \rightarrow 0$ , we obtain (6.64).

**Step 2.** It remains to show that

$$u^*(x, t) \leq \bar{u}(x, t). \quad (6.65)$$

Consider  $a > 0$ ,  $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  and  $t \in [0, T]$ . In fact, from the definition of  $u^*$  we know that there exists a sequence  $(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) \rightarrow (x, t)$ , when  $m \rightarrow +\infty$ , such that

$$u^*(x, t) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}).$$

Similarly, as in Step 1, we can state that, for all  $\alpha > 0$ , there exists  $m_\alpha > 0$ , such that, for all  $m \geq m_\alpha$ , we have

$$|x_{\epsilon_m} - x| \leq \alpha \quad \text{and} \quad |t_{\epsilon_m} - t| \leq \alpha.$$

However, using Lemma 6.2 (ii), we know that, for all  $0 < \alpha \leq \frac{a}{2}$ , there exists  $k_{a,T}^\alpha > 0$  and a subsequence  $0 < \alpha_k \leq \alpha$  such that, for every  $k \geq k_{a,T}^\alpha$ ,

$$u(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}) \leq u_{\alpha_k}(x_{\epsilon_m} + \alpha, t_{\epsilon_m}) + \alpha \leq \sup_{\substack{\alpha_k \leq \alpha, |s-t| \leq 2\alpha \\ |y-x| \leq 2\alpha}} u_{\alpha_k}(y, s) + \alpha.$$

Passing to the limit  $m \rightarrow +\infty$  and then  $\alpha \rightarrow 0$ , we obtain (6.65). ■

### 6.3 Proof of Theorem 1.1 (iii)

Let  $u_\epsilon$  be the solution of (4.42), constructed in Theorem 1.1 (i). As explained at the beginning of the proof of Theorem 1.2, we can extract a subsequence  $u_{\epsilon_n}$  satisfying (6.62) with a limit  $u$  that verifies (1.12), (1.13), (1.14) and (1.15). Moreover, for all  $t \in [0, T]$ ,  $u(\cdot, t)$  is a right-continuous function on  $\mathbb{R}$ . It remains to show equality (1.16). For better presentation, we'll perform this in three steps.

**Step 1** (Regularity in time estimate) :

Let  $T > 0$ ,  $a > 0$  and set  $\gamma_c = 2(\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)$ .

First, we will show that there are two bounded and non-decreasing functions  $u^1, u^2$  satisfying  $u = u^1 - u^2$  and the following inequalities

$$\begin{aligned} -2h + u^1(x - h\gamma_c, t) - u^2(x + h\gamma_c, t) &\leq \underline{u}(x, t + h) \\ &\leq \bar{u}(x, t + h) \leq 2h + u^1(x + h\gamma_c, t) - u^2(x - h\gamma_c, t) \end{aligned} \quad (6.66)$$

for all  $x \in [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ ,  $t \in [0, T]$  and for all  $h > 0$  verifying

$$h \leq \frac{a}{2(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)} \quad \text{and} \quad t + h < T. \quad (6.67)$$

## 6. Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

We begin with the proof of the right inequality in (6.66), namely,

$$\bar{u}(x, t + h) \leq 2h + u^1(x + h\gamma_c, t) - u^2(x - h\gamma_c, t). \quad (6.68)$$

Indeed, consider  $h > 0$  satisfying (6.67), by the definition of  $\bar{u}$ , we know that there exists a sequence  $(\epsilon_m, x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}^h) \rightarrow (0, x, t + h)$ , when  $m \rightarrow +\infty$ , such that,

$$\bar{u}(x, t + h) = \lim_{m \rightarrow +\infty} u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}^h).$$

Now, since  $(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}^h) \rightarrow (x, t + h)$  when  $m \rightarrow +\infty$ , we can see that there exists  $m_h > 0$ , such that, for all  $m \geq m_h$ , we have :

$$|x_{\epsilon_m} - x| < h \quad \text{and} \quad |t_{\epsilon_m}^h - t - h| < h.$$

Using Lemma 5.4, we deduce that, for all  $m \geq m_h$ ,

$$\begin{aligned} u_{\epsilon_m}(x_{\epsilon_m}, t_{\epsilon_m}^h) &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_m}| \leq (t_{\epsilon_m}^h - t)\|c_{\epsilon_m}\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_{\epsilon_m}(y, t) \\ &\leq \sup_{|y-x_{\epsilon_m}| \leq 2h\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}} u_{\epsilon_m}(y, t) \\ &\leq \sup_{|y-x| \leq h(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} + 1)} u_{\epsilon_m}(y, t), \end{aligned} \quad (6.69)$$

where we have used in the second line the definition of the function  $c_{\epsilon_m}$  in (1.6) and the classical properties of the mollifiers. Since, for all  $t \in [0, T)$ , the sequence  $u_{\epsilon_m}(\cdot, t)$  is uniformly bounded in  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$  and converges strongly in  $L^1_{loc}(\mathbb{R})$ , we can deduce, from Lemma 6.3, that there exists a subsequence  $u_{\epsilon_n}(\cdot, t)$  and a positive constant  $n_{a,t}^h$ , such that, for all  $n \geq n_{a,t}^h$ , we have

$$u_{\epsilon_n}(y, t) \leq 2h + u^1(y + h, t) - u^2(y - h, t), \quad \forall y \in [-a, a], \quad (6.70)$$

where  $u^1$  and  $u^2$  are two bounded, right-continuous and non-decreasing functions (with respect to  $x$ ) satisfying  $u = u^1 - u^2$ . Collecting (6.69) and (6.70), we obtain that, for all  $h > 0$  satisfying (6.67) and for all  $n \geq n_{a,t}^h$ ,

$$u_{\epsilon_n}(x_{\epsilon_n}, t_{\epsilon_n}^h) \leq 2h + u^1(x + h\gamma_c, t) - u^2(x - h\gamma_c, t).$$

We pass to the limit  $n \rightarrow +\infty$  to get (6.68). Similarly, using the finite speed propagation property, specifically the left inequality in (5.50), and the fact that  $u_{\epsilon_m}(\cdot, t)$  is uniformly bounded in  $L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R})$ , we can prove the left inequality in (6.66), namely,

$$-2h + u^1(x - h\gamma_c, t) - u^2(x + h\gamma_c, t) \leq \underline{u}(x, t + h). \quad (6.71)$$

**Step 2** (Right and left continuity) :

Let  $T > 0$  and  $t \in [0, T)$ .

Since  $u^1(\cdot, t)$ ,  $u^2(\cdot, t)$  are bounded and non-decreasing functions on  $\mathbb{R}$ , then, from property (ii) of Lemma 6.1, we know that, the right and left limits of these functions exist at every point  $x \in \mathbb{R}$ . This implies that, for all  $\alpha > 0$  and  $x \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ , there exists  $h_{a,t}^\alpha > 0$ , such that, for all  $0 < z \leq h_{a,t}^\alpha$ , we have

$$\left| \begin{array}{l} u^1(x+z, t) \leq \frac{\alpha}{4} + u_r^1(x, t) \\ u^2(x+z, t) \leq \frac{\alpha}{4} + u_r^2(x, t) \end{array} \right. \quad \text{and} \quad \left| \begin{array}{l} -u^1(x-z, t) \leq \frac{\alpha}{4} - u_l^1(x, t) \\ -u^2(x-z, t) \leq \frac{\alpha}{4} - u_l^2(x, t) \end{array} \right. \quad (6.72)$$

where  $u_r^1(\cdot, t)$ ,  $u_r^2(\cdot, t)$ , are right-continuous functions on  $\mathbb{R}$  and  $u_l^1(\cdot, t)$ ,  $u_l^2(\cdot, t)$  are left-continuous functions on  $\mathbb{R}$ . Note that, in here, the choice of the constant  $h_{a,t}^\alpha$  does not depend on  $x$ , that is a consequence of Heine-Cantor Theorem.

Now, let  $T > 0$ ,  $t \in [0, T)$  and  $\alpha > 0$ , we can observe that, if we denote

$$\bar{h}_{a,t,T}^\alpha = \min \left( \frac{h_{a,t}^\alpha}{\gamma_c}, \frac{a}{2(2\|c\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0,T))} + 1)}, \frac{\alpha}{4}, \frac{T-t}{2} \right),$$

then, for all  $0 < h \leq \bar{h}_{a,t,T}^\alpha$  the assumption (6.67) holds. Therefore, we obtain

$$\bar{u}(x, t+h) \leq 2h + u^1(x+h\gamma_c, t) - u^2(x-h\gamma_c, t) \leq \alpha + u_r^1(x, t) - u_l^2(x, t), \quad (6.73)$$

where we have used (6.68) in the first inequality and (6.72) in the second one. Similarly, using (6.71) and (6.72), we can prove that, for all  $x \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ ,  $t \in [0, T)$ ,  $\alpha > 0$  and  $0 < h \leq \bar{h}_{a,t,T}^\alpha$ , we have

$$-\alpha + u_l^1(x, t) - u_r^2(x, t) \leq \underline{u}(x, t+h). \quad (6.74)$$

**Step 3** (Link between  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$ ) :

Let  $T > 0$ ,  $x \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ ,  $t \in [0, T)$  and  $\alpha > 0$ .

In Step 2, we proved that, there exists a positive constant  $\bar{h}_{a,t,T}^\alpha$ , such that, for all  $0 < h \leq \bar{h}_{a,t,T}^\alpha$ , we have

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, t+h) &\leq \alpha + u_r^1(x, t) - u_l^2(x, t) \\ -\underline{u}(x, t+h) &\leq \alpha - u_l^1(x, t) + u_r^2(x, t). \end{aligned} \quad (6.75)$$

Since  $\bigcup_{t \in [0, T)} [t, t + \bar{h}_{a,t,T}^\alpha]$  is a cover of  $[0, \frac{T}{2}]$ , then there is a finite number  $N_a^\alpha$  of ordered intervals, satisfying

$$\bigcup_{0 \leq i \leq N_a^\alpha} [\tau_{a,i}^\alpha, \tau_{a,i}^\alpha + \bar{h}_{a,\tau_{a,i}^\alpha, T}^\alpha] \supset \left[ 0, \frac{T}{2} \right] \quad \text{with} \quad \tau_{a,0}^\alpha = 0 \quad \text{and} \quad \tau_{a,i+1}^\alpha = \tau_{a,i}^\alpha + \bar{h}_{a,\tau_{a,i}^\alpha, T}^\alpha \quad \text{for} \quad i = 1, \dots, N_a^\alpha - 1.$$

## 6. Link between the sub and the super discontinuous viscosity solutions

This expression joint to (6.75) and the fact that  $\mathbb{R} = \bigcup_{a \in \mathbb{Q}} [-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$  shows that, for all  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\tau \in [0, \frac{T}{2}]$  and for all positive constant  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , there exist two indices  $a_0 \in \mathbb{Q}$  and  $0 \leq j \leq N_{a_0}^\alpha$ , such that,

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, \tau) &\leq \alpha + u_r^1(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) - u_l^2(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) \\ -\underline{u}(x, \tau) &\leq \alpha - u_l^1(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) + u_r^2(x, \tau_{a_0, j}^\alpha). \end{aligned} \tag{6.76}$$

Moreover, from property (ii) of Lemma 6.1, we know that, for all positive constants  $\alpha, a \in \mathbb{Q}$  and  $0 \leq i \leq N_a^\alpha$ , the functions  $u_r^1(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$ ,  $u_l^1(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$  (resp.  $u_r^2(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$ ,  $u_l^2(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$ ) coincide with  $u^1(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$  (resp.  $u^2(\cdot, \tau_{a, i}^\alpha)$ ) except on a countable set on  $\mathbb{R}$ , denoted  $D_{a, i}^\alpha$ . Now, we define the following countable set

$$D = \bigcup_{a, \alpha \in \mathbb{Q}} \bigcup_{0 \leq i \leq N_a^\alpha} D_{a, i}^\alpha.$$

Thanks to (6.76), we can see that, for all  $x \notin D$ ,  $\tau \in [0, \frac{T}{2}]$  and for all positive constant  $\alpha \in \mathbb{Q}$ , there exist two indices  $a_0 \in \mathbb{Q}$  and  $0 \leq j \leq N_{a_0}^\alpha$ , such that

$$\begin{aligned} \bar{u}(x, \tau) &\leq \alpha + u^1(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) - u^2(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) \leq \alpha + u(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) \\ -\underline{u}(x, \tau) &\leq \alpha - u^1(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) + u^2(x, \tau_{a_0, j}^\alpha) \leq \alpha - u(x, \tau_{a_0, j}^\alpha). \end{aligned} \tag{6.77}$$

Adding the previous inequalities, we deduce that, for all rational number  $\alpha > 0$ ,  $x \notin D$  and  $\tau \in [0, \frac{T}{2}]$ ,

$$0 \leq \bar{u}(x, \tau) - \underline{u}(x, \tau) \leq 2\alpha.$$

Passing to the limit  $\alpha \rightarrow 0$  and replacing  $T$  by  $2T$ , we get

$$\bar{u}(\cdot, \tau) = \underline{u}(\cdot, \tau) \quad \text{except at most on a countable set in } \mathbb{R}, \quad \text{for all } \tau \in [0, T]. \tag{6.78}$$

This equality allows us to link the sub-solution  $\bar{u}$  and the super-solution  $\underline{u}$ . It remains to show that

$$u(\cdot, \tau) = \bar{u}(\cdot, \tau) \quad \text{except at most on a countable set in } \mathbb{R}, \quad \text{for all } \tau \in [0, T].$$

To do this, it is sufficient to use, the right continuity of the functions  $u(\cdot, \tau)$ ,  $u^1(\cdot, \tau)$  and Lemma 6.2 (i). Indeed, let  $\alpha > 0$ , the right continuity of the functions  $u(\cdot, \tau)$ ,  $u^1(\cdot, \tau)$ , implies that, for all  $x \in [-\frac{\alpha}{2}, \frac{\alpha}{2}]$ , there exists  $\alpha_{a, \tau}^1 > 0$ , such that, for all  $0 < \delta \leq \alpha_{a, \tau}^1$ , we have

$$\begin{aligned} u(x, \tau) &\leq \alpha + u(x + \delta, \tau) \\ &= \alpha + u^1(x + \delta, \tau) - u^2(x + \delta, \tau) \\ &\leq 2\alpha + u^1(x, \tau) - u^2(x + \delta, \tau) \end{aligned} \tag{6.79}$$

where  $u^1, u^2$  are the right-continuous non-decreasing functions, given in (6.70). However, using Lemma 6.2 (i), we know that, for all  $0 < \delta \leq \frac{\alpha}{2}$ , there exists  $k_{\alpha, \tau}^\alpha > 0$  and a subsequence  $0 < \epsilon_k \leq \delta$  such that for every  $k \geq k_{\alpha, \tau}^\alpha$ ,

$$\begin{cases} u^1(x, \tau) \leq \frac{\delta}{2} + u_{\epsilon_k}^1(x + \frac{\delta}{2}, \tau) \\ -u^2(x + \delta, \tau) \leq \frac{\delta}{2} - u_{\epsilon_k}^2(x + \frac{\delta}{2}, \tau) \end{cases} \quad (6.80)$$

where the sequences  $u_{\epsilon_k}^1$  and  $u_{\epsilon_k}^2$  satisfy the following equality  $u_{\epsilon_k} = u_{\epsilon_k}^1 - u_{\epsilon_k}^2$  and are constructed as in (6.61). Finally, bringing together the two inequalities (6.79) and (6.80), we see that, for all  $0 < \delta \leq \min(\frac{\alpha}{2}, \alpha_{\alpha, \tau}^1)$  and  $k \geq k_{\alpha, \tau}^\alpha$ , we have

$$u(x, \tau) \leq 2\alpha + \delta + u_{\epsilon_k}(x + \frac{\delta}{2}, \tau) \leq 2\alpha + \delta + \sup_{\substack{\epsilon_k \leq \delta, |s-\tau| \leq \delta \\ |y-x| \leq 2\delta}} u_{\epsilon_k}(y, s).$$

To complete the proof, we pass to the limit  $\delta \rightarrow 0$  and then  $\alpha \rightarrow 0$ , to get  $u(x, \tau) \leq \bar{u}(x, \tau)$ . Similarly, we can show that  $\underline{u}(x, \tau) \leq u(x, \tau)$ , which joint to (6.78) proves the desired result. ■

Note that, equality (1.16) implies that the functions  $\bar{u}, \underline{u}$  also satisfy estimates (1.13), (1.14) and (1.15).

## Acknowledgements

The authors would like to thank R. Monneau for the fruitful discussions that contributed in the preparation of this paper.

## Troisième partie

### Application à la dynamique des dislocations



# Chapitre 5

## Introduction et modélisation de la dynamique des dislocations

Ce chapitre est une introduction physique de la théorie d'élasticité linéaire et la loi du comportement physique d'un matériau, nous présentons aussi une introduction à la théorie de plasticité et le mécanisme des déformations plastiques. Nous terminons par un rappel sur les dislocations et une modélisation de la dynamique des dislocations. Ce chapitre est inspiré des thèses de A. Ghorbel [50] et N. Forcadel [45] et ainsi du papier de Alvarez, Hoch, Lebouar et Monneau [6].

## 1 Introduction

Ce chapitre est une présentation générale de la théorie des dislocations. Dans une première section, nous présentons un rappel heuristique sur la théorie de l'élasticité linéaire et plus précisément la loi constitutionnelle d'un matériau. Dans une seconde section, nous donnerons une introduction à la théorie de plasticité et le mécanisme des déformations plastiques. La troisième section rappelle ce que sont les dislocations et leurs propriétés. Dans la dernière section, nous présentons une modélisation succincte de la dynamique de dislocations et l'équation aux dérivées partielles qui en résulte.

## 2 Élasticité linéaire

En physique, l'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées. Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiales quand ces forces ne s'exercent plus. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Cette section a pour but de déterminer la relation entre les déformations et les contraintes exprimées par des tenseurs et aussi la loi reliant ces tenseurs.

### 2.1 Tenseur des déformations

Sous l'action de forces, un corps non rigide se déforme d'une certaine manière. Soit  $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ , le vecteur exprimant la position de chaque point à l'intérieur de ce corps. Après déformation, la position du point devient  $x' = (x'_1, x'_2, x'_3)$ . Nous appelons **déplacement** de ce point le vecteur  $u$  défini par

$$u = x' - x \quad (2.1)$$

Nous considérons deux points  $A$  et  $B$  séparés avant déformation par un vecteur  $dx$  (voir figure 5.1), ce vecteur après déformation, devient  $dx' = dx + du$ . Notons  $dl$  et  $dl'$ , les normes respectives des vecteurs  $dx$  et  $dx'$ . Nous avons

$$dl'^2 = \sum_{i=1}^3 dx_i'^2 = \sum_{i=1}^3 (dx_i + du_i)^2 = dl^2 + \sum_{i=1}^3 dx_i du_i + \sum_{i=1}^3 du_i^2 \quad (2.2)$$

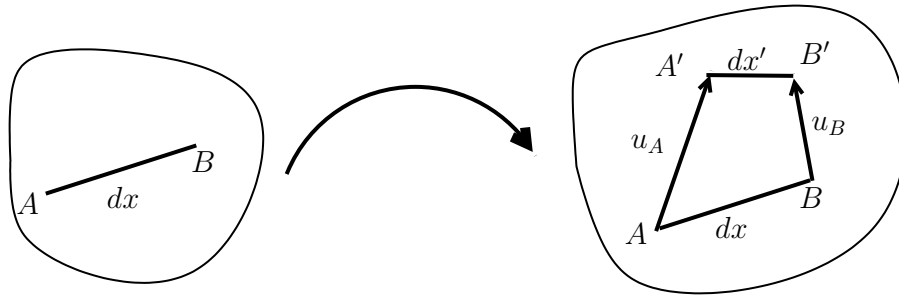


FIGURE 5.1 – Déplacement de deux points dans un corps déformable

Puis en substituant  $du_i$  par son expression en différentielle totale

$$dl'^2 = dl^2 + \sum_{i,j=1}^3 \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i dx_j + \sum_{i,j,k=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_j dx_k. \quad (2.3)$$

Dans la théorie de l'élasticité linéaire, nous considérons que des faibles déformations et donc les termes du second ordre sont négligés. L'équation (2.3), devient :

$$dl'^2 = dl^2 + 2 \sum_{i,j=1}^3 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j, \quad (2.4)$$

où  $\varepsilon_{ij}$  est le **tenseur des déformations**, défini par

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.5)$$

Notons que le tenseur des déformations est symétrique, c'est-à-dire,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ .

## 2.2 Tenseur des contraintes

Le tenseur des contraintes est utilisé en mécanique des milieux continus pour représenter l'état de contrainte, c'est-à-dire, les forces surfaciques mises en jeu au sein d'une portion déformée du milieu. Le tenseur est défini localement, en chaque point du solide. Nous considérons un élément de volume (cube) infinitésimal autour d'un point  $M$ . Soit  $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  une base orthonormée de  $\mathbb{R}^3$  et  $dS$  la surface de chaque facette de cube (voir figure 5.2). Sur chaque face  $j$  du cube s'exerce une force  $\vec{f}_j = (f_{ij})$ ,  $i = 1, 2, 3$ . L'état de contrainte au point  $M$  est défini par un tenseur d'ordre 2, appelé **tenseur des contraintes**, défini par

$$T(M) = (\sigma_{ij})_{1 \leq i, j \leq 3} \quad \text{avec} \quad \sigma_{ij} = \frac{f_j}{dS}. \quad (2.6)$$

Le tenseur des contrainte est aussi symétrique  $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ .

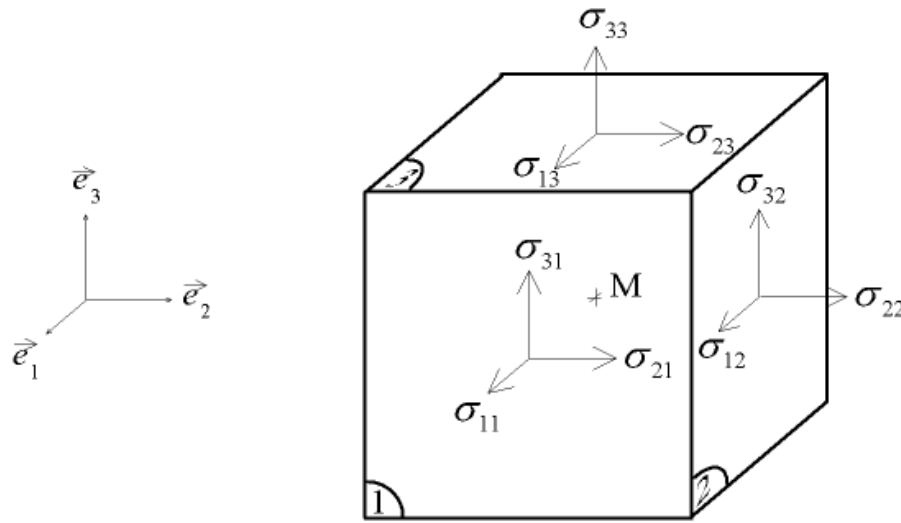


FIGURE 5.2 – Tenseur des contraintes

### 2.3 Loi de Hooke

Dans un matériau déformable, l'action d'un certain nombre de forces conduit à un certain nombre de déformations. Si l'on connaît la relation entre le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$  et le tenseur des contraintes  $\sigma_{ij}$ , on est capable de prévoir et de caractériser le comportement mécanique du matériau. Cette relation est appelée la loi constitutive du matériau. Le cas le plus simple, correspond à un grand nombre de matériaux réels pour de faibles déformations, consiste à faire l'hypothèse que cette relation est élastique et linéaire. Élastique indique que l'état de déformations ne dépend que de l'état présent des contraintes. Un matériau élastique qui a été déformé sous l'action de certaines forces regagne son état initial une fois ces forces ont disparu et il peut restituer toute l'énergie qu'il a absorbé, sa forme ne dépend pas de l'historique de ses déformations. Linéaire indique que la relation entre contraintes et déformations est du premier ordre.

Dans le cas d'un matériau anisotrope, nous définissons la contrainte et la déformation par des tenseurs d'ordre deux. Le comportement élastique du matériau est alors modélisé par un tenseur  $\Lambda_{ijkl}$  d'ordre 4 contenant 81 coefficients élastiques, satisfaisant la symétrie suivante

$$\Lambda_{ijkl} = \Lambda_{jikl} = \Lambda_{ijlk} = \Lambda_{klij}. \quad (2.7)$$

Le nombre des coefficients indépendants est 21 du fait de la symétrie des tenseurs des contraintes  $\sigma_{ij}$  et le tenseur des déformations  $\varepsilon_{ij}$  et de la stabilité énergétique du tenseur. **La loi de Hooke** s'écrit alors

$$\sigma_{ij} = (\Lambda\varepsilon)_{ij} = \sum_{kl} \Lambda_{ijkl} \varepsilon_{kl}. \quad (2.8)$$

Dans le cas d'un matériau isotrope (ses propriétés sont les mêmes dans toutes les directions), le nombre des coefficients d'élasticité est réduit à 2 paramètres seulement ([57]). Ces deux paramètres sont appelés **coefficients de Lamé** et sont notés par  $\lambda$  et  $\mu$ . la relation obtenue prend alors la forme

$$\sigma_{ij} = \lambda \text{tr}(\varepsilon) \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (2.9)$$

où  $\text{tr}(\varepsilon)$  désigne la trace de  $\varepsilon = (\varepsilon_{ij})$  et  $\delta_{ij}$  désigne le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La relation (2.9) est une écriture possible de la loi de Hooke dans le cas isotrope. Une autre écriture est aussi obtenue en écrivant la relation inverse, ce qui revient à exprimer  $\varepsilon_{ij}$  en fonction de  $\sigma_{ij}$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\nu}{E} \text{tr}(\sigma) \delta_{ij} + \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij}, \quad (2.10)$$

où  $E$  est le **module de Young** et  $\nu$  est son **coefficient de Poisson**. Ils sont définis respectivement par

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\mu + \lambda} \quad \text{et} \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)}. \quad (2.11)$$

Il est tout à fait équivalent de caractériser un matériau élastique linéaire isotrope par ses deux coefficients de Lamé ou par son module de Young et son coefficient de Poisson.

## 2.4 Équilibre élastique

L'équation d'équilibre élastique s'écrit

$$\iiint_V \rho \vec{g} dV + \iint_{\partial V} \vec{n} \vec{\sigma} dS = \vec{0}, \quad (2.12)$$

où  $\rho$  est une densité volumique de la matière et  $\vec{g}$  le vecteur de la pesanteur. Comme la masse volumique est conservée au cours d'une déformation plastique, la masse à l'état final  $\rho dV$  est égale à celle à l'état de référence  $\rho_0 dV_0$ . Comme

$$\iint_{\partial V} n_j \sigma_{ij} dS = \iiint_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV,$$

alors

$$\rho_0 g_i + \sum_j \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} = 0. \quad (2.13)$$

L'équation d'élasticité (2.13) est équivalente à

$$\text{div} \sigma = -\rho_0 g.$$

### 3 Déformations plastiques

Quand un cristal est soumis à une contrainte extérieure suffisamment forte, il peut subir des déformations plastiques. Cette déformation résulte du déplacement de défauts linéaires mésoscopiques appelés dislocations, dont l'ordre de longueur typique dans les matériaux est  $10^{-6} m$  et l'épaisseur  $10^{-9} m$ .

Volterra en 1907, a été le premier à étudier théoriquement les défauts linéaires qu'il a appelés "distorsion". Orowan [76], Polanyi [82] et Taylor [94], ont portés un grand progrès dans les années 1930 dans la compréhension du rôle des dislocations dans la physique du solide.

Le développement de la microscopie électronique dans les années 1950, a permis l'observation des dislocations par Bollman [23], Hirsch, Horne et Whelan [80]. Ces observations ont permis de tester un certain nombre de prédictions théoriques, telles que la taille de ces défauts qui n'excède pas le micromètre. Le rôle joué par les dislocations est fondamental dans les propriétés mécaniques des matériaux cristallins. Nous renvoyons aux ouvrages classiques achevés dès la fin des années 1960 Hirth et Lothe [57] et Nabarro [75].

L'étude théorique des dislocations ainsi que les moyens d'investigation comme la microscopie électronique ont permis de mieux comprendre les mécanismes élémentaires à l'origine des déformations plastiques des matériaux cristallins. Cependant, compte tenu de la complexité des phénomènes physiques mis en jeu, la relation entre les propriétés microscopiques des dislocations et le comportement plastique des matériaux est encore à mieux comprendre.

Depuis le début des années 1990, la recherche dans le domaine des dislocations est en plein essor, notamment grâce à la puissance des ordinateurs qui a permis de simuler un grand nombre de dislocations dans un domaine  $3D$ , en particulier les simulations mésoscopiques. La finalité des études utilisant ces modèles est presque toujours la même, il s'agit de construire le lien entre un phénomène élémentaire à l'échelle microscopique, ici la mobilité d'une dislocation et l'influence globale d'une assemblée de dislocations sur les propriétés du matériau massif. Ce lien, comblant le fossé énorme existant entre modèles microscopiques et macroscopiques, est assuré pour l'essentiel par les techniques de simulations mésoscopiques (aux échelles se situant entre le nanomètre et le micron). Plus récemment, une nouvelle approche a été introduite, "modèle champs de phase pour les dislocations" (voir par exemple [85]). Un des avantages de cette méthode, est qu'elle permet de gérer de manière automatique les changements de topologie durant le déplacement. Dans ce modèle, la ligne de dislocation se déplace dans un plan de glissement avec une vitesse normale qui est proportionnelle à la force de Peach-Koeller résolue s'exerçant sur la ligne (calculée avec le vecteur de Burgers et le tenseur des contraintes).

Dans [6], Alvarez, Hoch, Le bouar et Monneau ont proposé de réécrire ce modèle comme une équation de Hamilton-Jacobi. Cette équation est simplement l'équation

eikonale où la vitesse est non-locale et dépend de l'ensemble de la ligne de dislocation. Nous rappelons cette équation dans une section de ce chapitre sur la modélisation de la dynamique des dislocations. Notons aussi qu'il existe d'autres modèles permettant l'étude de la dynamique des dislocations autre que le modèle de champs de phase de Rodney, nous citons d'abord, le modèle de type Frenkel et Kontorova qui proposent un modèle unidimensionnel contenant l'essentiel de la physique de la dislocation, c'est-à-dire l'élasticité du milieu et la périodicité. Le modèle de Frenkel-Kontorova s'attache à étudier le comportement d'une chaîne de masses reliées entre elles par des ressorts évoluant dans un paysage énergétique périodique du réseau cristallin (voir [48] et [49]). Le deuxième modèle est celui Peierls-Nabarro [75] et [74].

Tout objet soumis à un effort se déforme au niveau atomique, ce qui entraîne un déplacement des atomes hors de leur position d'équilibre. Quand nous analysons la réponse mécanique du matériau, nous distinguons le domaine d'élasticité et le domaine de plasticité (figure 5.3). La transition entre ces deux domaines s'appelle "limite d'élasticité". Si l'on effectue une décharge dans le domaine élastique, le comportement est réversible et recouvre sa forme initiale. À l'inverse, au-delà de la limite d'élasticité, la déformation plastique est irréversible.

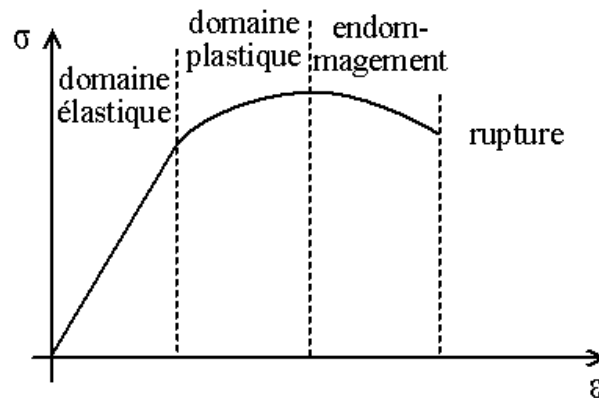


FIGURE 5.3 – Courbe de déformation d'un matériau

Les déformations plastiques ont pour origine des mécanismes de glissement. Dans les cubiques à face centrée (CFC), il existe 12 plans de glissement équivalents.

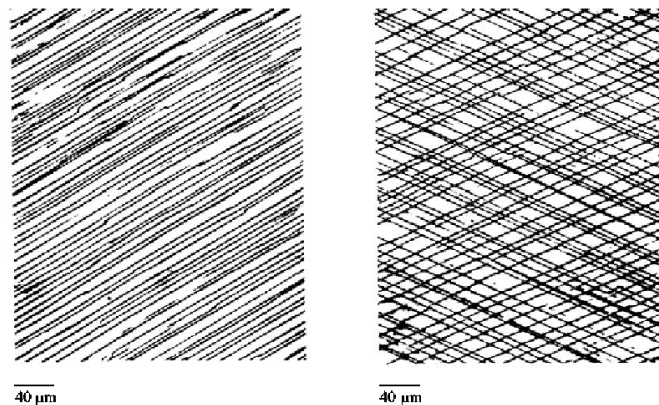


FIGURE 5.4 – Lignes de glissement dans un échantillon d'aluminium



FIGURE 5.5 – Dislocations vues au microscope électronique en transmission.

Chaque système est caractérisé par un plan de glissement et une direction de glissement dans ce plan. Un autre exemple est celui d'un échantillon d'aluminium préparé de manière à avoir une surface polie. Lorsqu'on déforme avec un certain effort, des lignes parallèles apparaissent sur la surface et qui sont espacées de quelques dizaines de nanomètres (figure 5.4)

### 3.1 Vecteurs de Burgers

Dans un solide continu nous réalisons une coupure selon une surface  $S$  s'appuyant sur une ligne  $l$ . Nous translatons ensuite les lèvres ainsi formées l'une par rapport à l'autre selon un vecteur  $\vec{b}$  appelé **vecteur de Burgers** de la dislocation. Cette ligne de dislocation  $l$  est caractérisée par son vecteur de Burgers  $\vec{b}$  et son vecteur tangent  $\vec{t}$  définissant le sens de parcours de la ligne. Nous parlons de

- dislocation coin, si  $\vec{b}$  et  $\vec{t}$  sont perpendiculaires (Figure 5.6 à gauche). Elle correspond à l'insertion d'un demi-plan supplémentaire d'atomes,

- dislocation vis, si  $\vec{b}$  et  $\vec{t}$  sont parallèles (Figure 5.6 à droite),
- dislocation mixte, dans les autres cas, la ligne de dislocation forme un angle arbitraire avec le vecteur de Burgers (Figure 5.7).

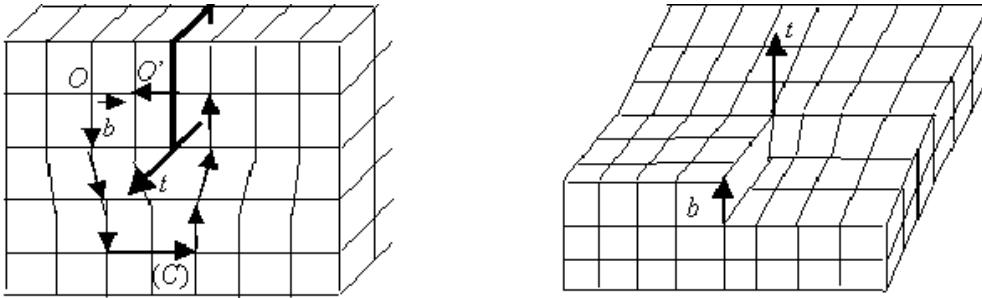


FIGURE 5.6 – Dislocation coin, dislocation vis

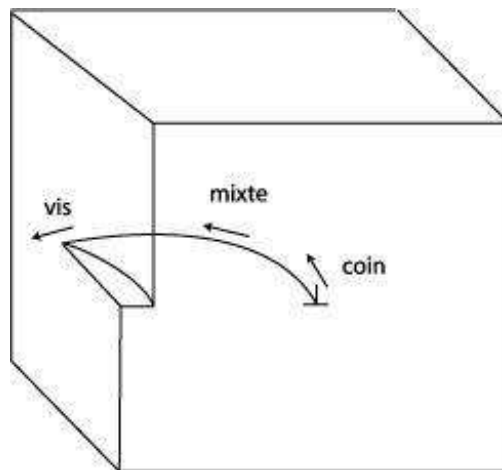


FIGURE 5.7 – Dislocation mixte

La façon la plus utilisée pour déterminer le vecteur de Burgers est la convention FS/RH (Finish Start, Right Hand) (figure 5.8).

1. On choisit arbitrairement le sens de la ligne  $\vec{t}$  (figure 5.8).
2. On réalise un circuit fermé (appelé circuit de Burgers) en tournant positivement autour de la dislocation (le pouce de la main droite orienté dans le sens de  $\vec{t}$ , les doigts montrent le sens positif du circuit, d'où "right hand").

3. On reconstruit dans le cristal parfait, à partir d'un point  $S$  ("start") le même circuit qu'en 2. Ce circuit présente un défaut de fermeture, le point  $F$  ("finish") est différent de  $S$ . Le vecteur  $\overrightarrow{FS}$  est le vecteur de Burgers  $\vec{b}$  (figure 5.8). Le sens de  $\vec{b}$  dépend du choix de  $\vec{t}$ .

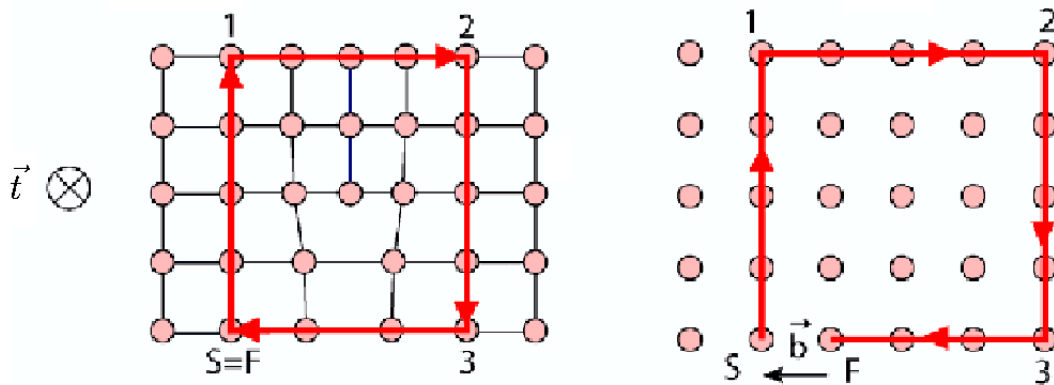


FIGURE 5.8 – Circuit de Burgers autour de la dislocation, circuit reproduit dans un cristal parfait

### 3.2 Déplacement des dislocations

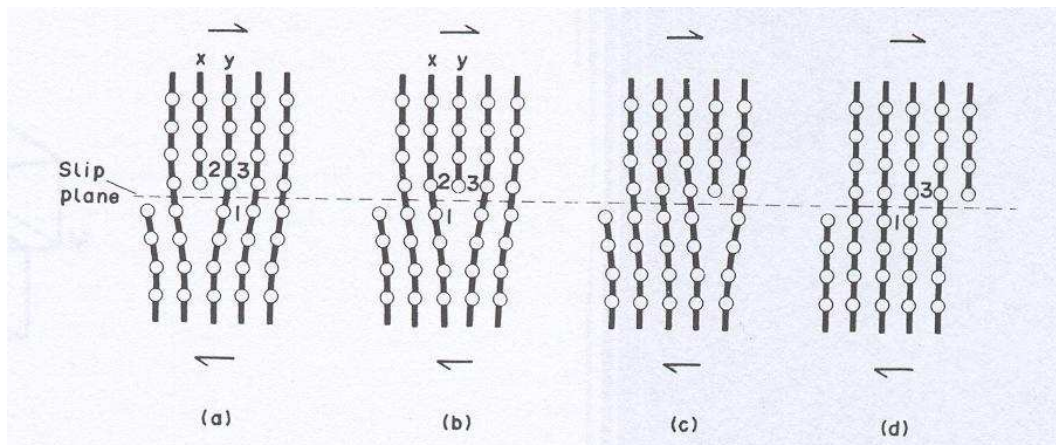


FIGURE 5.9 – Déplacement d'une dislocation coin dans un cristal

Nous distinguons deux types de déplacement pour les dislocations, le glissement et la montée.

Le glissement : le déplacement d'une dislocation coin se fait parallèlement au sens de la contrainte appliquée (figure 5.9). Lorsqu'une dislocation coin traverse un cristal, elle engendre un déplacement irréversible de vecteur de translation égale au vecteur de Burgers  $\vec{b}$ . Ce mécanisme de déplacement n'exige la rupture de liaisons qu'au voisinage de la ligne de dislocation et successivement d'un atome à un autre.

Un glissement qui commence dans un plan et se termine dans un autre s'appelle un glissement dévié.

La montée (figure 5.10) correspond au déplacement d'une dislocation en dehors de

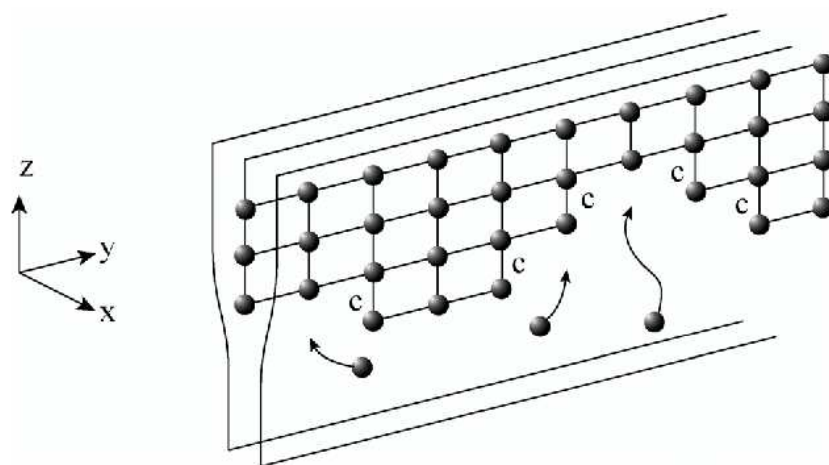


FIGURE 5.10 – Montée d'une dislocation coin, c=cran

son plan de glissement et se produit par diffusion de la matière (sous l'effet de la température, les atomes diffusent dans le cristal). Le mouvement d'une dislocation coin est perpendiculaire à son plan de glissement.

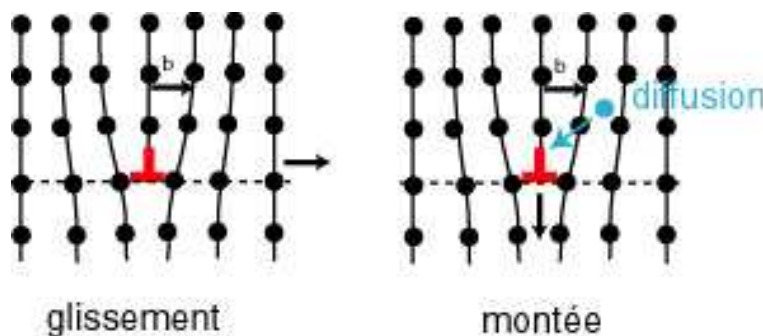


FIGURE 5.11 – Glissement et montée d'une dislocation

### 3.3 Mouvement de dislocations et déformation plastique

Nous allons expliquer comment le mouvement de dislocations peut entraîner des déformations plastiques d'un cristal.

Quand un cristal est soumis à une contrainte extérieure suffisamment forte, il peut subir des déformations plastiques. Néanmoins, la contrainte critique dans un matériau réel est beaucoup moins élevée que la contrainte théorique pour cisailer un cristal parfait.

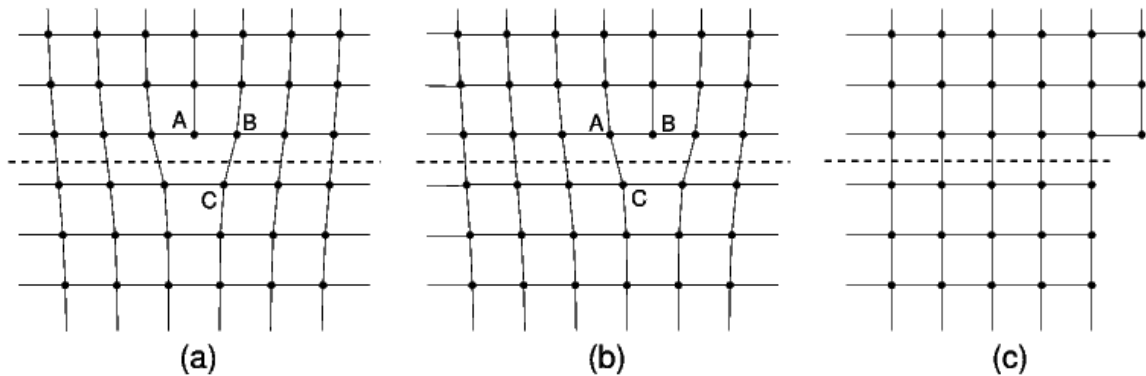


FIGURE 5.12 – Déplacement d'une dislocation coin

Pour comprendre ce fait, il suffit de regarder de près le mouvement d'une dislocation coin dans un cristal parfait, comme indiqué dans la Figure 5.12. Dans ce cas, la dislocation coin est perpendiculaire au papier et la distribution des atomes est uniforme dans cette direction. Loin de la dislocation, la distribution des atomes est celle d'un cristal parfait et près de la dislocation, la structure atomique est fortement perturbée. Le déplacement de la dislocation se fait alors de la manière suivante, la liaison atomique entre les points *B* et *C* va se briser alors qu'une liaison va se créer entre *A* et *C* (voir Figure 5.12 (a) – (b)). La dislocation s'est déplacée alors vers la droite d'une distance atomique. Sous l'application d'une contrainte, ce processus va se répéter et la dislocation va continuer de se déplacer. Quand elle aura atteint le bord du cristal, celui-ci aura subi une déformation plastique permanente (voir Figure 5.12 (c)). En effet, la contrainte de cisaillement nécessaire pour ce processus est beaucoup plus faible que celle pour cisailer un cristal parfait. La déformation plastique se fait donc par glissement de plans cristallins. Mais ce glissement ne peut pas se faire d'un seul coup : il faudrait que tous les atomes concernés par le plan

de glissement (soit environs  $10^{14}$  par  $mm^2$ , soit 100000 milliards!) se soulèvent en même temps. L'énergie, la force qu'il faudrait est bien supérieure à ce qui a été mesuré.

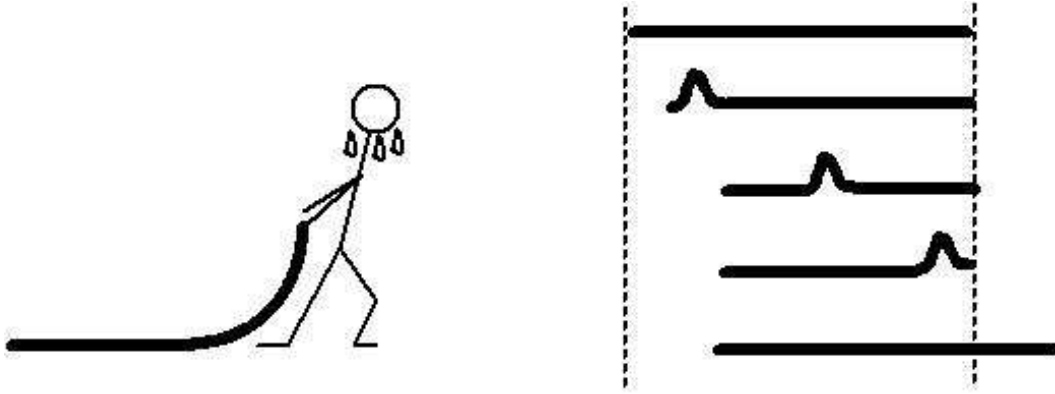


FIGURE 5.13 – Déplacement d'un tapis lourd

Considérons un problème analogue : nous voulons déplacer un grand tapis de quelques centimètres, mais si l'on tire dessus, le frottement rend très difficile le mouvement. Une solution pour le déplacer consiste à former une bosse à l'une des extrémités, puis à faire avancer cette bosse jusqu'au bout, et là, miracle, nous avons fait avancer le tapis presque sans effort (voir Figure 5.13). C'est ainsi que ce fait le mouvement cristallin, petit bout par petit bout. L'endroit où se produit la déformation est une perturbation de petite taille, comparé au plan cristallin total : une seule rangée atomique bouge à la fois. Cette perturbation est appelée dislocation ; c'est un glissement localisé.

## 4 Les dislocations et leurs propriétés

Dans le cristal parfait, un circuit fermé est obtenu en se déplaçant par sauts successifs égaux à une distance interatomique. Notons par  $d\vec{u}$  le déplacement de chaque atome par rapport à sa position initiale (figure 5.14). Dans un cristal fauté, le même circuit ( c'est-à-dire le même nombre de "sauts" dans chaque direction) ne se ferme pas (Figure 5.14). Le vecteur manquant, qui est une translation du réseau, est appelé vecteur de Burgers.

En terme plus mathématique, il traduit l'intégrale du déplacement autour d'un circuit fermé  $C$  autour de la ligne de dislocation

$$\vec{b} = \oint_C d\vec{u}.$$

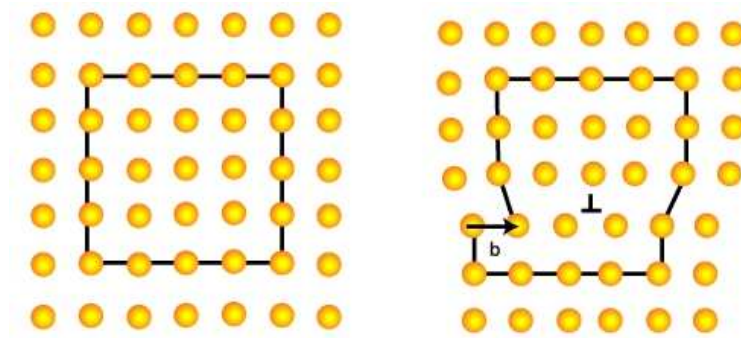


FIGURE 5.14 – Circuit de Burgers

La ligne de dislocation est analogue à un conducteur parcouru par un courant électrique (circulation du champ magnétique). Une dislocation est une singularité élastique, ne peut se terminer dans le cristal parfait, il en résulte que la ligne de dislocation  $l$  est

- soit une boucle fermée
- soit une ligne débouchant à la surface du corps
- soit une ligne rencontrant une autre dislocation et formant un noeud qui vérifie l'équation d'équilibre (la loi des noeuds)  $\vec{b}_1 + \vec{b}_2 + \vec{b}_3 = 0$ .

En présence de dislocations le réseau n'est pas au repos mais soumis à un système de contraintes responsables de la distortion par rapport au réseau idéal. Parlons

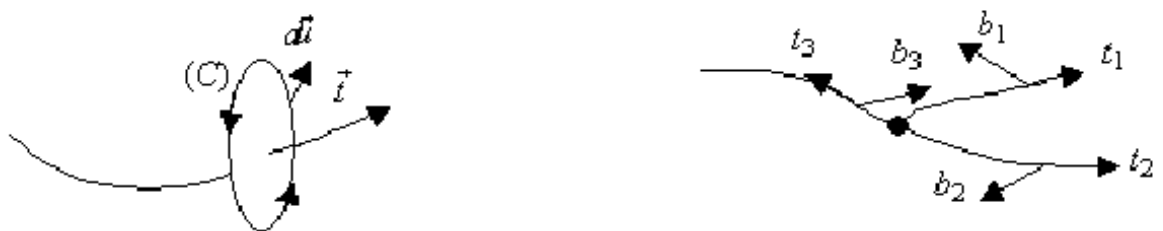


FIGURE 5.15 – Circulation du gradient de déplacement et loi des noeuds

maintenant de deux types de dislocations élémentaires, la dislocation coin et la dislocation vis. Pour se faire, nous utilisons la construction de Volterra. Considérons un solide homogène que nous découpons selon une surface quelconque  $\Sigma$ . On crée

alors deux lèvres de coupure. On peut déplacer les deux lèvres l'une par rapport à l'autre d'une quantité égale au vecteur de Burgers  $\vec{b}$ , ajoutant ou retirant de la matière si nécessaire. En recollant les deux lèvres, on obtient de nouveau un solide homogène, mais cette fois on a créé une ligne de singularité élastique appelée dislocation.

Si nous supposons que la surface de coupure  $\Sigma$  soit un plan délimité par une ligne de dislocation rectiligne de vecteur  $\vec{u}$ . Lorsque  $\Sigma$  est déplacée selon la direction  $\vec{b}_1$  parallèlement à  $\vec{u}$ , on obtient une dislocation vis. Une dislocation coin est obtenue si  $\vec{b}_2$  est perpendiculaire à  $\vec{u}$  (Figure 5.16).

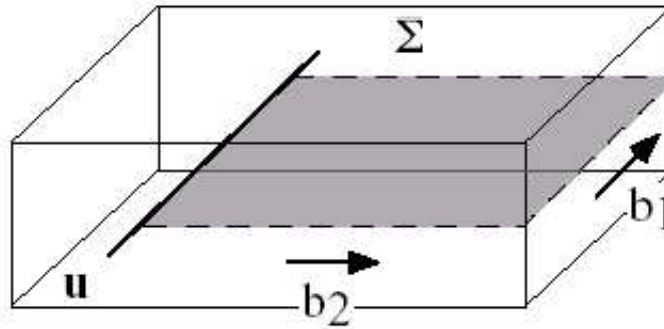


FIGURE 5.16 – Déplacement des dislocations coin et vis

#### 4.1 Dislocation coin

Nous considérons une dislocation coin de vecteur de Burgers  $\vec{b} = (b, 0, 0)$ . par invariance par translation le long de l'axe des  $z$  de la dislocation, le champ de déplacement  $\vec{u}$  appartient au plan  $(xy)$ . Il a pour composantes cartésiennes ([57])

$$u_x = \frac{b}{2\pi} \left( \arctan \frac{y}{x} + \frac{xy}{2(1-\nu)(x^2+y^2)} \right),$$

$$u_y = -\frac{b}{2\pi} \left( \frac{1-2\nu}{4(1-\nu)} \ln(x^2+y^2) + \frac{x^2-y^2}{4(1-\nu)(x^2+y^2)} \right).$$

#### 4.2 Dislocation vis

Dans le cas d'une dislocation vis, le vecteur de Burgers et le vecteur tangent  $\vec{t}$  sont colinéaires. Par invariance et par raison de symétrie, le champ de déplacement  $\vec{u}$  est à divergence nulle

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^3 / \{x = y = 0\}.$$

La composante de  $\vec{u}$  suivant  $z$  s'écrit

$$u_z = \frac{b}{2\pi} \arctan \frac{y}{x}.$$

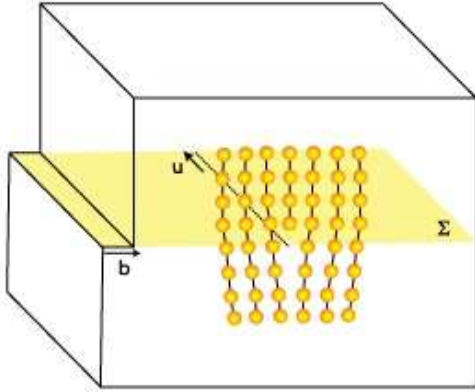


FIGURE 5.17 – Géométrie d'une dislocation coin

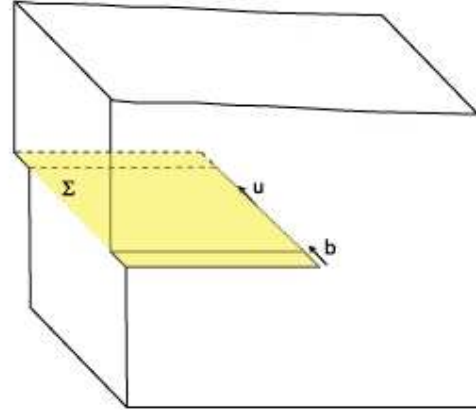


FIGURE 5.18 – Géométrie d'une dislocation vis

## 5 Modélisation de la dynamique des dislocations

Nous allons présenter dans cette section, la modélisation de la dynamique d'une ligne de dislocation dans le cas où les contraintes extérieures sont nulles.

Soit  $(e_1, e_2, e_3)$ , une base de l'espace  $\mathbb{R}^3$ . Une idéalisation pour une ligne de dislocation consiste à supposer que l'épaisseur de la ligne est nulle et qu'elle est représentée par le bord d'un domaine  $\Omega_t$  contenu dans le plan  $(x_1, x_2)$  et  $\Gamma_t$  est le bord du domaine  $\Omega_t$  (c'est-à-dire la ligne de dislocation). De plus, au moins à faible température, les dislocations se déplacent dans des plans bien définis car c'est très coûteux énergétiquement pour une dislocation de changer de plan cristallin. Nous supposons alors que la dislocation se déplace dans le plan horizontal et nous notons  $n = e_3$ , le vecteur normal à ce plan. Nous définissons aussi la matrice de cisaillement

$$e^0 = \frac{1}{2} (b \otimes n + n \otimes b), \quad (5.14)$$

où  $b$  est le vecteur de Burgers de la dislocation et  $\otimes$  représente le produit tensoriel.

$$e^0 = (e_{ij}^0)_{1 \leq i, j \leq 3}, \quad \text{où } e_{ij}^0 = \frac{1}{2} (b_i n_j + n_i b_j).$$

## 5. Modélisation de la dynamique des dislocations

---

La dynamique d'une ligne dislocation la plus simple pour une courbe  $t \mapsto \Gamma_t$  est de supposer que la vitesse normale à la courbe est proportionnelle à la force de Peach-Koeller résolue  $c$

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \frac{1}{B}c(\Gamma)n_\Gamma, \quad (5.15)$$

où  $n_\Gamma$  est la normale extérieure au domaine  $\Omega_t$  et  $B$  est une constante, appelée "viscous drag coefficient" (voir Hirth et Lothe [57, page 208]). Cette constante dépend des propriétés physiques du matériau mais, quitte à rescaler l'équation en temps, nous pouvons supposer que  $B = 1$ . Nous allons définir l'énergie élastique associée à la ligne de dislocation. Pour cela nous considérons un matériau représenté par l'espace tout entier, soumis à l'élasticité linéaire et dont les coefficients d'élasticité satisfont l'hypothèse de coercivité pour  $m > 0$

$$\sum_{i,j,k,l=1}^3 \Lambda_{ijkl}e_{ij}e_{kl} \geq m \sum_{i,j=1}^3 (e_{ij})^2,$$

pour toutes les matrices constantes  $e = (e_{ij}) \in \mathbb{R}_{sym}^{3 \times 3}$  qui définissent le tenseur des déformations et  $\Lambda$  est un tenseur d'ordre 4 définissant les coefficients élastiques du matériau (voir la section 2). L'énergie élastique est alors définie par

$$\mathcal{E}^{el}(e^{el}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{2} \Lambda e^{el} e^{el},$$

où  $e(u) = e^{el} + e^{pl}$  avec  $u$  le déplacement (voir section 2),  $e^{el}$  est la déformation élastique et  $e^{pl}$  est la déformation plastique donnée par

$$e^{pl} = e^0 \delta_\Omega = e^0 \rho \delta_0(x_3),$$

où  $e^0$  est la matrice de cisaillement définie par (5.14).

$\rho(x_1, x_2)$  est la fonction caractéristique de  $\Omega$ , définie par

$$\rho(x') = \rho(x_1, x_2) = \begin{cases} 1 & \text{si } x' \in \Omega \\ 0 & \text{si } x' \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega. \end{cases}$$

Et  $\delta_0(x_3)$  est la masse de Dirac seulement dans la composante  $x_3$  (Figure 5.19). Si  $\sigma$  est le tenseur des contraintes, d'après la section 2, la loi de Hooke, donne

$$\sigma_{ij} = \sum_{kl} \Lambda_{ijkl} e_{kl}^{el}.$$

Le tenseur des contraintes satisfait l'équation d'élasticité linéaire (en absence de forces extérieures), appelée aussi équation d'Euler-Lagrange, obtenue par minimisation de l'énergie

$$\operatorname{div}(\sigma) = 0.$$

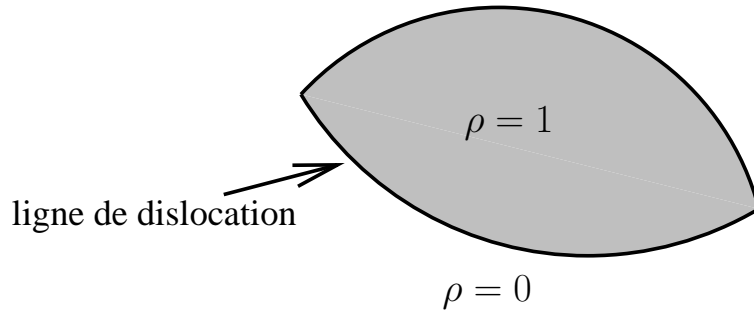


FIGURE 5.19 – Ligne de dislocation

Nous allons calculer formellement la force de Peach-Koeller résolue en calculant la première variation de l'énergie. Nous notons par  $s$  l'abscisse curviligne de  $\Gamma$  et  $\Gamma(s)$  un point courant de  $\Gamma$ . Soit  $n_\Gamma(s)$ , le vecteur normal extérieur au domaine ouvert  $\Omega$  dans le plan  $(e_1, e_2)$ . Pour une fonction donnée  $h(s)$ , on définit la perturbation planaire  $\Gamma_\delta$  de  $\Gamma$  par

$$\Gamma_\delta(s) = \Gamma(s) + \delta h(s)n_\Gamma(s).$$

Un calcul montre que

$$-\frac{d}{d\delta}\mathcal{E}(\Gamma_\delta)|_{\delta=0} = \int_\Gamma dsh(s)c(\Gamma(s)),$$

où  $\mathcal{E}(\Gamma) = \mathcal{E}^{el}(e^{el}(\Gamma))$  et la fonction  $c$  est la force de Peach-Koeller résolue. De manière formelle, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}(\Gamma_\delta)}{d\delta} &= \int_{\mathbb{R}^3} \sigma \left( e \left( \frac{du_{\Gamma_\delta}}{d\delta} \right) - e^0 \frac{d}{d\delta} \delta_{\Omega_{\Gamma_\delta}} \right) \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} (\sigma e^0) \frac{d}{d\delta} \delta_{\Omega_{\Gamma_\delta}} \\ &= \int_\Gamma -(\sigma e^0)h, \end{aligned}$$

où, nous avons utilisé le fait que  $\text{div}(\sigma) = 0$  pour la deuxième ligne. La force de Peach-Koeller est donc donnée par

$$c = \sigma e^0 = (\sigma b) \cdot n,$$

où  $\sigma = \Lambda e(u) - \Lambda e^0 \rho \delta_0(x_3)$  avec

$$\begin{cases} \text{div}(\Lambda e(u)) = \text{div}(\Lambda e^0 \rho \delta_0(x_3)) \\ e(u) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x_j} u_i + \frac{\partial}{\partial x_i} u_j \right). \end{cases}$$

## 5. Modélisation de la dynamique des dislocations

---

En utilisant la transformée de Fourier et un calcul explicite de la fonction de Green pour l'élasticité linéaire, on peut voir qu'il existe un tenseur  $R$  d'ordre quatre tel que

$$\sigma = (\Lambda R e^0) \star \rho \delta_0(x_3).$$

Nous pouvons réécrire la force de Peach-Koeller  $c$  de la manière suivante

$$c = c_0 \star \rho,$$

avec  $c_0(x_1, x_2) = C_0(x_1, x_2, 0)$  où  $C_0$  dépend de  $\Lambda$ ,  $R$  et  $e^0$ . Nous renvoyons à Alvarez et al [6, section 2.6], pour plus de détails sur le calcul du noyau  $C_0$  et sur ses propriétés.

Dans le cas de présence de forces extérieures la force  $c$  devient

$$c = c_0 \star \rho + c_1.$$

Nous renvoyons à Alvarez et al [6, section 2.6], pour les détails du calcul du terme  $c_1$ . L'équation (5.15) avec  $B = 1$ , veut dire que  $\rho$  satisfait formellement l'équation eikonale non-locale suivante

$$\partial_t \rho = (c_0 \star \rho + c_1) |\nabla \rho|.$$

### Remarque 5.1

*Les calculs présentés dans ce paragraphe sont très formels. En réalité au coeur de la dislocation l'énergie élastique n'a pas de sens et est même infinie car la contrainte élastique se comporte comme  $\frac{1}{r}$  où  $r$  est la distance à la dislocation. Bien sûr, cela n'a pas de sens physique mais vient du fait que la théorie de l'élasticité linéaire n'est plus valide proche de la dislocation.*

*Pour contourner cette difficulté, il faut régulariser les contraintes en utilisant un tenseur régularisant. Pour plus de détails, nous renvoyons au papier de Alvarez et al. [6].*



## Chapitre 6

# Résultats d'existence globale pour l'équation eikonale non-locale modélisant la dynamique de dislocations avec données $BV$

Ce chapitre est la deuxième partie d'un article en collaboration avec Ahmad El Hajj paru dans NoDEA [24]. Une application des résultats obtenus au Chapitre 4 sur un modèle de la dynamique des dislocations.

# Global existence results for non-local eikonal equation with $BV$ initial data

## 1 Introduction and main result

We study a simple model for dislocation dynamics. A perfect crystal, for small deformations, is well described by the equations of linear elasticity. The real crystals contain in particular some line defects called dislocations (we refer to Hirth et al. [57] for a physical presentation of dislocations). The dislocation dynamics is one of the main explanation of the plastic deformation of metals. When we apply an exterior stress, these dislocations lines can move in a slip plane of the crystal. The typical length of such a dislocation line is of the order of  $10^{-6} m$ . The dislocation dynamics is given by a normal velocity proportional to the Peach-Koehler force, calculated from the equations of linear elasticity (see Chapter 5, Section 5). Here, we are interested in the study of a one-dimensional sub-model of the particular model introduced by Rodney, Le Bouar and Finel [86], initially proposed in the two-dimensional case. More precisely, we consider a simple geometry where the dislocations are parallel lines moving in a same plane  $(xy)$ . This plane is embedded in a three-dimensional elastic crystal. The particular geometry of this problem leads to study a one-dimensional model given by the following non-local eikonal equation.

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star u(\cdot, t)(x)) |\partial_x u(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases} \quad (1.1)$$

where the function  $c_0$  is a kernel associated to the equations of linearized elasticity (see Chapter 5, Section 5, for the details of modeling). In the special case of application to dislocations, the kernel  $c_0$  does not depend on time, but to keep a general setting we allow here a dependence on the time variable.

Here  $\star$  denotes the convolution in space, namely

$$c_0(\cdot, t) \star u(\cdot, t)(x) = \int_{\mathbb{R}} c_0(x - y, t) u(y, t) dy$$

and this term appears to be the Peach-Koehler self-force created by the dislocation itself. In our model, we assume the absence of external forces created by everything exterior to the dislocation line, like the exterior stress applied on the material, or the force created by other defects. Although this model of dislocation dynamics seems very simple, there are only few existence and uniqueness known results, as we have mentioned in the general introduction. We point out that, in the case of nonnegative velocities, the global existence and uniqueness were first obtained by Alvarez *et al.* [5] and then by Barles *et al.* [19] using different arguments. These uniqueness results were recently extended by Barles *et al.* in [18], using a new approach allowing to relax the assumptions of [5, 19]. Moreover, the proof proposed in [18] is simpler than that of [5, 19] and requires a mild regularity on the velocity.

In the general case, with unsigned velocity, this problem has first been investigated by Alvarez *et al.* in [6] where a short time existence and uniqueness result is proved under the assumption that the initial position of the dislocation is a Lipschitz graph. Recently, in a general setting, using a new stability result of Barles [16] in the framework of  $L^1$ -viscosity solutions, global existence results of weak solutions were obtained by Barles *et al.* in [17]. Moreover, two cases in which uniqueness can be obtained are presented in [17] which contains, as well, an interesting counter-example on the uniqueness of weak solutions. We also refer to Barles [14] for another counter-example on the uniqueness of discontinuous viscosity solution. Let us mention that the assumptions used in [17] were relaxed in [18].

In this chapter, applying Theorems 1.1 and 1.2 of Chapter 4, we prove a global existence result of (1.1), without any positivity condition on the velocity and considering a  $BV(\mathbb{R})$  initial data.

Before stating the main result, giving the assumptions related to problem 1.1. we assume that  $u_0$  satisfies the assumption

$$u_0 \in L^\infty(\mathbb{R}) \cap BV(\mathbb{R}). \tag{1.2}$$

And  $c_0$  satisfies the assumption

$$c_0 \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{R} \times (0, T)). \tag{1.3}$$

Now, we give our main results.

**Theorem 1.1** (*Global existence results of dislocation equation*)

*Assume that  $u_0$  satisfies (1.2) and  $c_0$  satisfies (1.3). Then, we have*

*i) Global existence of weak viscosity solution :*

There exists a weak discontinuous viscosity solution of (1.1) in the sense of Theorem 1.1( Chapter 4), satisfying

$$u \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})) \cap C([0, T]; L^1_{loc}(\mathbb{R})). \quad (1.4)$$

Moreover,  $u$  satisfies, for all  $T > 0$ , the following estimates

$$\|u\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (1.5)$$

$$\|u\|_{L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (1.6)$$

$$\|u(\cdot, t) - u(\cdot, s)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq (\|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}) |t - s|, \quad \text{for all } s, t \in [0, T] \quad (1.7)$$

and the following equality

$$u(\cdot, t) = \bar{u}(\cdot, t) = \underline{u}(\cdot, t) \quad \text{except at most on a countable set in } \mathbb{R}, \quad \text{for all } t \in [0, T]. \quad (1.8)$$

*ii) Global existence of viscosity non-decreasing solution :*

Assume that  $u_0$  is non-decreasing. Then, equation (1.1) has a discontinuous viscosity solution  $u$  satisfying (1.4), (1.5), (1.6) and (1.7).

Where the semi-limits  $\bar{u}$  and  $\underline{u}$  are defined in Chapter 4, by (1.7) and (1.8).

**Remark 1.2**

Note that, in previous theorem the meaning of discontinuous viscosity solution of (1.1) is defined through Definition 3.1. Note also that, in this theorem, the kernel  $c_0$  may dispose of the continuity condition if we use the framework of  $L^1$ -viscosity solutions (see [16, 60]) instead of standard discontinuous viscosity solutions.

The proof of Theorem 1.1 is an application of Theorems 1.1 and 1.2 of Chapter 4. We refer the reader to Chapter 4, Section 6 for the proof. Let us mention that, as recalled in the introduction, equation (1.1) is not only non-local but it is also non-monotone which means that the comparison principle does not hold and then we cannot apply directly the viscosity solutions theory. Nevertheless, in the special case where the kernel  $c_0 \geq 0$ , a comparison principle is expected (cf. Slepčev [92]), unfortunately, for dislocation dynamics, the kernel  $c_0$  has a zero mean, which implies in particular that it changes sign. Remark that, in Theorem 1.1, we only assume that  $c_0 \in L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})) \cap C(\mathbb{R} \times (0, T))$  and then we prove global existence of solutions of (1.1) with non-signed kernel.

We divide this chapter into two sections. In the first one, after regularizing the initial data, we prove existence and uniqueness of Lipschitz continuous viscosity solution of the regularized problem and uniform estimates, using a point fixe argument. In section two, we recall first the definition of discontinuous viscosity solution for non-local eikonal equations, for these equations. Then, we pass to the limit using a stability result for non-local eikonal equation and prove our results.

## 2 Existence, uniqueness and *a priori* estimates of the regularized problem

In this section we consider, for  $\epsilon > 0$ , the following regularized problem of (1.1)

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star u_\epsilon(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_{0,\epsilon}(x), & \text{in } \mathbb{R} \end{cases} \quad (2.9)$$

where  $u_{0,\epsilon}$  is the regularization of  $u_0$  defined in (1.6) (see Chapter 4), namely

$$u_{0,\epsilon}(x) = u_0 \star \rho_\epsilon^1(x) \quad \text{and} \quad \rho_\epsilon^1(\cdot) = \frac{1}{\epsilon} \rho^1\left(\frac{\cdot}{\epsilon}\right).$$

We have the following result

**Proposition 2.1** (*Existence and uniqueness of the regularized problem*)

*There exists a unique Lipschitz continuous viscosity solution  $u_\epsilon$  of (2.9) satisfying, for all  $T > 0$ , the following uniform a priori estimates*

$$\|u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \quad (2.10)$$

$$\|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \quad (2.11)$$

$$\|\partial_t u_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}. \quad (2.12)$$

**Proof of Proposition 2.1**

For the proof we use a point fixe argument.

First, we define, for all  $\epsilon > 0$  and  $T > 0$ , the set

$$X_T^\epsilon = \left\{ v_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)), \text{ s.t } \begin{cases} \|v_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \\ \|\partial_x v_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq L_\epsilon(T) \\ \|\partial_x v_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq |u_0|_{BV(\mathbb{R})} \\ \|\partial_t v_\epsilon\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \leq K \end{cases} \right\}$$

with

$$L_\epsilon(T) = \|\partial_x u_{0,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})} T} \quad \text{and} \quad K = \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} \|u_0\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u_0|_{BV(\mathbb{R})}.$$

## Chapitre 6 : Résultats d'existence globale pour l'équation eikonale non-locale

Let  $G$ , the application defined by

$$\begin{aligned} G : X_T^\epsilon &\longrightarrow X_T^\epsilon \\ v_\epsilon &\longmapsto u_\epsilon = G(v_\epsilon). \end{aligned}$$

where  $u_\epsilon$  is the unique Lipschitz continuous viscosity solution of the following local problem

$$\begin{cases} \partial_t u_\epsilon(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star v_\epsilon(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u_\epsilon(x, 0) = u_{0,\epsilon}(x) & \text{in } \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.13)$$

We will show that  $G : X_T^\epsilon \longrightarrow X_T^\epsilon$  is a strict contraction for  $T$  small enough. First, we will prove that  $G$  is well defined. We can see, using Young's inequality, that, if  $v_\epsilon \in X_T^\epsilon$ , then, the velocity  $c_0 \star v_\epsilon$  satisfies (1.3), namely

$$c_\epsilon = c_0 \star v_\epsilon \in L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T)) \cap L^\infty((0, T); BV(\mathbb{R})),$$

which implies by Theorem 1.1 (i) given in Chapter 4, that equation (2.13) admits a unique Lipschitz continuous viscosity solution  $u_\epsilon$  that satisfies estimates (2.10), (2.11), (2.12) and also the following estimate

$$\|\partial_x u_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq \|\partial_x u_{0,\epsilon}\|_{L^\infty(\mathbb{R})} e^{\|c_0\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} |u_0|_{BV(\mathbb{R})} T}.$$

This shows, by Young's inequality, that  $u_\epsilon \in X_T^\epsilon$ .

It, thus, remains to show that  $G$  is a contraction.

Let  $u_\epsilon^i = G(v_\epsilon^i)$ ,  $i = 1, 2$ , with the same initial data and set  $K = \|v_\epsilon^1 - v_\epsilon^2\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}$ . We remark that  $u_\epsilon^2$  is a viscosity sub-solution of

$$\partial_t u_\epsilon(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star v_\epsilon^1(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon(x, t)| + \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) K. \quad (2.14)$$

Indeed, we know that  $u_\epsilon^2$  is a viscosity solution of

$$\partial_t u_\epsilon^2(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star v_\epsilon^2(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon^2(x, t)|.$$

Then

$$\partial_t u_\epsilon^2(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star v_\epsilon^1(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon^2(x, t)| + (c_0(\cdot, t) \star (v_\epsilon^2(\cdot, t)(x) - v_\epsilon^1(\cdot, t)(x))) |\partial_x u_\epsilon^2(x, t)|.$$

Using the fact that

$$(c_0(\cdot, t) \star (v_\epsilon^2(\cdot, t)(x) - v_\epsilon^1(\cdot, t)(x))) |\partial_x u_\epsilon^2(x, t)| \leq \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) K.$$

### 3. Passage to the limit and proof of Theorem 1.1

---

Then

$$\partial_t u_\epsilon^2(x, t) \leq (c_0(\cdot, t) \star v_\epsilon^1(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon^2(x, t)| + \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) K.$$

Moreover,  $u_\epsilon^1 + \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) K t$  is a viscosity solution of equation (2.14). Since we have  $u_\epsilon^1(x, 0) = u_\epsilon^2(x, 0) = u_{0, \epsilon}(x)$  and the using a comparison principle (see Theorem 4.12, Chapter 2), we deduce,

$$u_\epsilon^2 \leq u_\epsilon^1 + \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) K t, \quad \text{in } \mathbb{R} \times [0, T].$$

Consequently

$$\|G(v_\epsilon^1) - G(v_\epsilon^2)\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} = \|u_\epsilon^1 - u_\epsilon^2\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))} \leq T \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) \|v_\epsilon^1 - v_\epsilon^2\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times (0, T))}.$$

This shows that, for  $T$  small enough,  $G$  is a contraction on  $X_T^\epsilon$  which is a closed set. So, by fixed point theorem, there exists a unique Lipschitz continuous viscosity solution of (1.1) in  $X_T^\epsilon$ , for all  $T > 0$ , such that  $T \|c_0\|_{L^\infty((0, T); L^1(\mathbb{R}))} L_\epsilon(T) \leq \frac{1}{2}$ . By iterating this process, we can construct a solution for all  $T > 0$ .

## 3 Passage to the limit and proof of Theorem 1.1

First, we recall some preliminaries on non-local eikonal equations.

### 3.1 Discontinuous viscosity solutions to non-local equations

We give in this sub-section the definition of viscosity solution of the non-local problem

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) = (c_0(\cdot, t) \star u(\cdot, t)(x)) |\partial_x u(x, t)| & \text{in } \mathbb{R} \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{in } \mathbb{R}, \end{cases}$$

**Definition 3.1** (*Discontinuous viscosity solution to non-local equations*)

Assume that  $c_0$  is continuous on  $\mathbb{R} \times (0, T)$  and  $u_0$  is locally bounded on  $\mathbb{R}$ .

**(1) (Discontinuous viscosity sub-solution)**

An upper semi-continuous function  $v$  on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity sub-solution of (1.1) if it satisfies

(i)  $v(x, 0) \leq (u_0)^\star(x)$ , for all  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) For every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ , tangent from above to  $v$  at the point  $(x_0, t_0)$ , we have

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - (c_0(\cdot, t_0) \star v(\cdot, t_0)(x_0)) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| \leq 0. \quad (3.15)$$

**(2) (Discontinuous viscosity super-solution)**

A lower semi-continuous function  $v$  on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity super-solution of (1.1) if it satisfies

(i)  $v(x, 0) \geq (u_0)_*(x)$ , for all  $x \in \mathbb{R}$ .

(ii) For every  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  and for every test function  $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$ , tangent from below to  $v$  at the point  $(x_0, t_0)$ , we have :

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) - (c_0(\cdot, t_0) \star v(\cdot, t_0)(x_0)) |\partial_x \phi(x_0, t_0)| \geq 0. \quad (3.16)$$

**(3) (Discontinuous viscosity solution)**

Finally, we say that a locally bounded function  $v$  defined on  $\mathbb{R} \times [0, T)$  is a discontinuous viscosity solution of (1.1) if its upper semi-continuous (respectively lower semi-continuous) envelope is a viscosity sub-solution (respectively super-solution).

**3.2 Passage to the limit and proof of Theorem 1.1**

Using estimates (2.10), (2.11) and (2.12) on  $u_\epsilon$ , solution of (2.9), Theorem 1.1 (i), is a direct consequence of Theorem 1.1 of Chapter 4. It remains to prove the following stability discontinuous result corresponding to non-local eikonal equation 1.1.

**Lemma 3.2 (Stability discontinuous result to non-local equation)**

Assume that,  $c_0$  satisfies (1.3) and for  $\epsilon > 0$ ,  $u_\epsilon$  is an upper semi-continuous viscosity sub-solution (resp. a lower semi-continuous viscosity super-solution) of

$$\partial_t u_\epsilon = (c_0(\cdot, t) \star u_\epsilon(\cdot, t)(x)) |\partial_x u_\epsilon| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T), \quad (3.17)$$

Assume that the functions  $u_\epsilon$  are uniformly locally bounded on  $\mathbb{R} \times (0, T)$ . Then,  $\bar{u} = \limsup^* u_\epsilon$  (resp.  $\underline{u} = \liminf_* u_\epsilon$ ) is a viscosity sub-solution (resp. super-solution) of the equation

$$\partial_t u = (c_0(\cdot, t) \star \bar{u}(\cdot, t)(x)) |\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T),$$

(resp. of the equation

$$\partial_t u = (c_0(\cdot, t) \star \underline{u}(\cdot, t)(x)) |\partial_x u| \quad \text{in } \mathbb{R} \times (0, T)).$$

**Proof of Lemma 3.2**

We prove the case of sub-solution, the other one (super-solution) is showing in the same manner.

Let  $\phi \in C^1(\mathbb{R} \times (0, T))$  and  $(x_0, t_0) \in \mathbb{R} \times (0, T)$  such that  $v_\epsilon = u_\epsilon - \phi$  has a local maximum point at  $(x_0, t_0)$ . Using Lemma 4.27 (see Chapter 2, Sub-section 4.6), we

### 3. Passage to the limit and proof of Theorem 1.1

---

deduce the existence of sub-sequences  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})$  and  $v_{\epsilon'} = u_{\epsilon'} - \phi$ , such that, for all  $\epsilon'$ ,  $(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})$  is a local maximum point of  $v_{\epsilon'}$  and  $((x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}))_{\epsilon'}$  and  $(v_{\epsilon'}(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}))_{\epsilon'}$ , converge respectively to  $(x_0, t_0)$  and  $\bar{v}(x_0, t_0) = \bar{u}(x_0, t_0) - \phi(x_0, t_0)$ .

Using the fact that  $u_{\epsilon'}$  is a sub-solution of (3.17), we have

$$\partial_t \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \leq (c_0(\cdot, t_{\epsilon'}) \star u_{\epsilon'}(\cdot, t_{\epsilon'})(x_{\epsilon'})) |\partial_x \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})|. \quad (3.18)$$

Then, we write

$$c_0 = c_0^+ - c_0^-,$$

where  $c_0^+$  and  $c_0^-$  are, respectively, the positive and the negative parts of  $c_0$ , defined as

$$c_0^+ = \frac{|c_0| + c_0}{2} \quad \text{and} \quad c_0^- = \frac{|c_0| - c_0}{2}.$$

Thereafter, using the positive and negative parts of  $c_0$ , inequality (3.18), becomes

$$\partial_t \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'}) \leq ((c_0^+(\cdot, t_{\epsilon'}) \star u_{\epsilon'}(\cdot, t_{\epsilon'})(x_{\epsilon'}) - (c_0^-(\cdot, t_{\epsilon'}) \star u_{\epsilon'}(\cdot, t_{\epsilon'})(x_{\epsilon'}))) |\partial_x \phi(x_{\epsilon'}, t_{\epsilon'})|. \quad (3.19)$$

Passing to the limit when  $\epsilon'$  goes to 0 and using the continuity of  $c_0$  and  $\phi$  and the positivity of  $c_0^+$  and  $c_0^-$ , we get

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) \leq ((c_0^+(\cdot, t_0) \star \bar{u}(\cdot, t_0)(x_0)) - (c_0^-(\cdot, t_0) \star \underline{u}(\cdot, t_0)(x_0))) |\partial_x \phi(x_0, t_0)|. \quad (3.20)$$

However, from equality (1.8), we know that

$$c_0^+(\cdot, t) \star \bar{u}(\cdot, t)(x) - c_0^-(\cdot, t) \star \underline{u}(\cdot, t)(x) = (c_0^+(\cdot, t) - c_0^-(\cdot, t)) \star \bar{u}(\cdot, t) = c_0(\cdot, t) \star \bar{u}(\cdot, t)(x)$$

Then, inequality (3.20), becomes

$$\partial_t \phi(x_0, t_0) \leq c_0(\cdot, t) \star \bar{u}(\cdot, t)(x) |\partial_x \phi(x_0, t_0)|,$$

which implies that the relaxed semi-limit  $\bar{u}$  is a discontinuous viscosity sub-solution of (1.1), in sense of Definition 3.1.

Similarly, using the stability discontinuous result and equality (1.8) and the fact that

$$c_0^+(\cdot, t) \star \underline{u}(\cdot, t)(x) - c_0^-(\cdot, t) \star \bar{u}(\cdot, t)(x) = (c_0^+(\cdot, t) - c_0^-(\cdot, t)) \star \underline{u}(\cdot, t) = c_0(\cdot, t) \star \underline{u}(\cdot, t)(x).$$

We obtain that  $\underline{u}$  is a viscosity super-solution of (1.1), in sense of Definition 3.1.

To prove Theorem 1.1 (ii), we repeat the same thing using equality

$$\bar{u}(x, t) = u^*(x, t) \quad \text{and} \quad \underline{u}(x, t) = u_*(x, t) \quad \text{for all } (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T),$$

instead of (1.8), which is only valid in the case of non-decreasing solutions.



# Conclusion et perspectives

Nous avons obtenu des résultats d'existence globale en temps de solutions de viscosité discontinues dans un sens faible pour l'équation eikonale unidimensionnelle dans le cas local et non-local avec des hypothèses faibles sur la vitesse  $c$  et la donnée initiale (plus précisément bornées et dans l'espace  $BV$  et de signe quelconque). Nous pensons que ce résultat est optimal dans le sens qu'avec ces données seulement ces résultats ne sont plus valables en dimension supérieure, une régularité plus forte de la vitesse est exigée. L'unicité reste un problème ouvert, étant donné qu'avec un signe quelconque de la vitesse, l'équation eikonale est non-montone, le principe de comparaison qui conduit à l'unicité n'est pas vérifié. Une généralisation de nos résultats obtenus est prévue pour les équations de Hamilton-Jacobi du premier ordre, avec des applications de ces équations au traitement d'images et aux problèmes du contrôle optimal. Le cas de l'équation eikonale en dimension supérieure et avec des données  $BV$  est aussi intéressant à voir, puisque la dynamique de lignes de dislocations est posée en deux dimensions.

D'un point de vue numérique, il est intéressant d'écrire des schémas numériques qui conservent l'estimation  $BV$ , pour le problème de la dynamique des dislocations.

## Bibliographie

- [1] Y. ACHDOU, G. BARLES, H. ISHII, AND G. L. LITVINOV, Hamilton-Jacobi equations : approximations, numerical analysis and applications, *vol. 2074 of Lecture Notes in Mathematics, Springer, Heidelberg ; Fondazione C.I.M.E., Florence, 2013. Lecture Notes from the CIME Summer School held in Cetraro, August 29–September 3, 2011, Edited by Paola Loreti and Nicoletta Anna Tchou, Fondazione CIME/CIME Foundation Subseries.*
  
- [2] R. A. ADAMS AND J. J. F. FOURNIER, Sobolev spaces, *vol. 140 of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam), Elsevier/Academic Press, Amsterdam, second ed., 2003.*

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [3] L. ALVAREZ, F. GUICHARD, P.-L. LIONS, AND J.-M. MOREL, Axioms and fundamental equations of image processing., *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 123 (1993), pp. 199–257.
- [4] O. ALVAREZ, E. BARRON, AND H. ISHII, Hopf-Lax formulas for semicontinuous data., *Indiana Univ. Math. J.*, 48 (1999), pp. 993–1035.
- [5] O. ALVAREZ, P. CARDALIAGUET, AND R. MONNEAU, Existence and uniqueness for dislocation dynamics with nonnegative velocity, *Interfaces Free Bound.*, 7 (2005), pp. 415–434.
- [6] O. ALVAREZ, P. HOCH, Y. LE BOUAR, AND R. MONNEAU, Dislocation dynamics : short-time existence and uniqueness of the solution, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 181 (2006), pp. 449–504.
- [7] L. AMBROSIO, Minimizing movements, *Rend. Accad. Naz. Sci. XL Mem. Mat. Appl. (5)*, 19 (1995), pp. 191–246.
- [8] L. AMBROSIO, N. FUSCO, AND D. PALLARA, Functions of bounded variation and free discontinuity problems, *Oxford Mathematical Monographs, The Clarendon Press Oxford University Press, New York, 2000.*
- [9] V. ARNOLD, Les méthodes mathématiques de la mécanique classique, *Éditions Mir, Moscow, 1976. Traduit du russe par Djilali Embarek.*
- [10] G. AUBERT, M. BARLAUD, O. FAUGERAS, AND S. JEHAN-BESSON, Image segmentation using active contours : calculus of variations or shape gradients?, *SIAM J. Appl. Math.*, 63 (2003), pp. 2128–2154.
- [11] M. BARDI AND I. CAPUZZO-DOLCETTA, Optimal control and viscosity solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman equations, *Systems & Control : Foundations & Applications, Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, 1997. With appendices by Maurizio Falcone and Pierpaolo Soravia.*
- [12] M. BARDI, M. G. CRANDALL, L. C. EVANS, H. M. SONER, AND P. E. SOUGANIDIS, Viscosity solutions and applications, vol. 1660 of *Lecture Notes in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 1997. Lectures given at the 2nd C.I.M.E. Session held in Montecatini Terme, June 12–20, 1995, Edited by I. Capuzzo Dolcetta and P. L. Lions, Fondazione C.I.M.E.. [C.I.M.E. Foundation].*
- [13] M. BARDI AND L. EVANS, On Hopf’s formulas for solutions of Hamilton-Jacobi equations., *Nonlinear Anal., Theory Methods Appl.*, 8 (1984), pp. 1373–1381.
- [14] G. BARLES, Discontinuous viscosity solutions of first-order Hamilton-Jacobi equations : a guided visit, *Nonlinear Anal.*, 20 (1993), pp. 1123–1134.

- 
- [15] ———, Solutions de viscosité des équations de Hamilton-Jacobi, *vol. 17 of Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*, Springer-Verlag, Paris, 1994.
- [16] ———, A new stability result for viscosity solutions of nonlinear parabolic equations with weak convergence in time, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 343 (2006), pp. 173–178.
- [17] G. BARLES, P. CARDALIAGUET, O. LEY, AND R. MONNEAU, Global existence results and uniqueness for dislocation equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 40 (2008), pp. 44–69.
- [18] G. BARLES, P. CARDALIAGUET, O. LEY, AND A. MONTEILLET, Uniqueness results for nonlocal Hamilton-Jacobi equations, *J. Funct. Anal.*, 257 (2009), pp. 1261–1287.
- [19] G. BARLES AND O. LEY, Nonlocal first-order Hamilton-Jacobi equations modelling dislocations dynamics, *Comm. Partial Differential Equations*, 31 (2006), pp. 1191–1208.
- [20] G. BARLES AND B. PERTHAME, Exit time problems in optimal control and vanishing viscosity method, *SIAM J. Control Optim.*, 26 (1988), pp. 1133–1148.
- [21] ———, Comparison principle for Dirichlet-type Hamilton-Jacobi equations and singular perturbations of degenerated elliptic equations, *Appl. Math. Optim.*, 21 (1990), pp. 21–44.
- [22] G. BARLES, H. M. SONER, AND P. E. SOUGANIDIS, Front propagation and phase field theory, *SIAM J. Control Optim.*, 31 (1993), pp. 439–469.
- [23] W. BOLLMANN, *103 (1956)*, pp. 1588–1589.
- [24] R. BOUDJERADA AND A. EL HAJJ, Global existence results for eikonal equation with BV initial data, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 22 (2015), pp. 947–978.
- [25] R. BOUDJERADA, A. EL HAJJ, AND M. S. MOULAY, Existence result for a one-dimensional eikonal equation, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 353 (2015), pp. 133–137.
- [26] P. CANNARSA AND C. SINISTRARI, Semiconcave functions, Hamilton-Jacobi equations, and optimal control, *Boston, MA : Birkhäuser*, 2004.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [27] P. CARDALIAGUET, On front propagation problems with nonlocal terms, *Adv. Differential Equations*, 5 (2000), pp. 213–268.
- [28] ———, Front propagation problems with nonlocal terms. II, *J. Math. Anal. Appl.*, 260 (2001), pp. 572–601.
- [29] E. CARLINI, N. FORCADEL, AND R. MONNEAU, A generalized fast marching method for dislocation dynamics, *SIAM J. Numer. Anal.*, 49 (2011), pp. 2470–2500.
- [30] V. CASELLES, R. KIMMEL, AND G. SAPIRO, Geodesic active contours, *International Journal of Computer Vision*, 22, pp. 61–79.
- [31] X.-Y. CHEN, Dynamics of interfaces in reaction diffusion systems, *Hiroshima Math. J.*, 21 (1991), pp. 47–83.
- [32] Y. G. CHEN, Y. GIGA, AND S. GOTO, Uniqueness and existence of viscosity solutions of generalized mean curvature flow equations, *J. Differential Geom.*, 33 (1991), pp. 749–786.
- [33] L. CORRIAS, M. FALCONE, AND R. NATALINI, Numerical schemes for conservation laws via Hamilton-Jacobi equations, *Math. Comp.*, 64 (1995), pp. 555–580, S13–S18.
- [34] M. G. CRANDALL, H. ISHII, AND P.-L. LIONS, User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*, 27 (1992), pp. 1–67.
- [35] M. G. CRANDALL AND P.-L. LIONS, Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 277 (1983), pp. 1–42.
- [36] ———, Solutions de viscosité pour les équations de Hamilton-Jacobi dans des espaces de Banach, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 300 (1985), pp. 67–70.
- [37] ———, On existence and uniqueness of solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Nonlinear Anal.*, 10 (1986), pp. 353–370.
- [38] B. DESPRÉS, Lois de conservations eulériennes, lagrangiennes et méthodes numériques, vol. 68 of *Mathématiques & Applications (Berlin) [Mathematics & Applications]*, Springer-Verlag, Berlin, 2010.
- [39] A. EL HAJJ, Well-posedness theory for a nonconservative Burgers-type system arising in dislocation dynamics, *SIAM J. Math. Anal.*, 39 (2007), pp. 965–986.

- 
- [40] L. C. EVANS, Partial differential equations, *vol. 19 of Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.*
- [41] L. C. EVANS AND R. F. GARIEPY, Measure theory and fine properties of functions, *Studies in Advanced Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.*
- [42] L. C. EVANS AND J. SPRUCK, Motion of level-sets by mean curvature. I, *J. Differential Geom.*, 33 (1991), pp. 635–681.
- [43] W. H. FLEMING AND H. M. SONER, Controlled Markov processes and viscosity solutions, *vol. 25 of Applications of Mathematics (New York), Springer-Verlag, New York, 1993.*
- [44] G. B. FOLLAND, Real analysis, *Pure and Applied Mathematics (New York), John Wiley & Sons, Inc., New York, second ed., 1999. Modern techniques and their applications, A Wiley-Interscience Publication.*
- [45] N. FORCADEL, Contribution à l’analyse d’équations aux dérivées partielles décrivant le mouvement de fronts avec application à la dynamique des dislocations, *PhD thesis, École des Ponts et Chaussées, juillet.*
- [46] N. FORCADEL, Comparison principle for a generalized fast marching method, *SIAM J. Numer. Anal.*, 47 (2009), pp. 1923–1951.
- [47] N. FORCADEL, C. LE GUYADER, AND C. GOUT, Generalized fast marching method : applications to image segmentation, *Numer. Algorithms*, 48 (2008), pp. 189–211.
- [48] Y. FRENKEL AND KONTOROVA, On the theory of plastic deformation and twinning, *J. phys.*, 1 (1939), pp. 137–149.
- [49] P. A. GESLIN, Contribution à la modélisation champ de phase des dislocations, *PhD thesis, Université Paris VI, Pierre et Marie Curie., décembre.*
- [50] M. A. GHORBEL, Analyse numérique de la dynamique des dislocations et applications à l’homogénéisation, *PhD thesis, École des Ponts et Chaussées, janvier.*
- [51] Y. GIGA, Viscosity solutions with shocks, *Comm. Pure Appl. Math.*, 55 (2002), pp. 431–480.
- [52] ———, Surface evolution equations, *vol. 99 of Monographs in Mathematics, Birkhäuser Verlag, Basel, 2006. A level-set approach.*
- [53] Y. GIGA, S. GOTO, AND H. ISHII, Global existence of weak solutions for interface equations coupled with diffusion equations, *SIAM J. Math. Anal.*, 23 (1992), pp. 821–835.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [54] E. GIUSTI, Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation, *Monographs in Mathematics*, 1984.
- [55] Y. GUO AND H. WEN, A note on representation formulae for solutions of Eikonal type equations., *Acta Anal. Funct. Appl.*, 16 (2014), pp. 146–149.
- [56] S. P. HASTINGS, Some mathematical problems from neurobiology, *Amer. Math. Monthly*, 82 (1975), pp. 881–895.
- [57] J. P. HIRTH AND J. LOTHE, Theory of dislocations, Second edition, *Krieger, Malabar, Florida*, 1992.
- [58] B. K. HORN AND M. J. BROOKS, Shape From shading, *The MIT Press*, 1989.
- [59] H. ISHII, Remarks on existence of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations, *Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ.*, 26 (1983), pp. 5–24.
- [60] ———, Hamilton-Jacobi equations with discontinuous Hamiltonians on arbitrary open sets, *Bull. Fac. Sci. Engrg. Chuo Univ.*, 28 (1985), pp. 33–77.
- [61] ———, Perron’s method for Hamilton-Jacobi equations, *Duke Math. J.*, 55 (1987), pp. 369–384.
- [62] K. H. KARLSEN AND N. H. RISEBRO, A note on front tracking and equivalence between viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations and entropy solutions of scalar conservation laws, *Nonlinear Anal.*, 50 (2002), pp. 455–469.
- [63] M. KASS, A. WITKIN, AND D. TERZOPOULOS, Snakes : Active contour models, *International Journal of Computer Vision*, 1, pp. 321–331.
- [64] S. N. KRUŽKOV, Generalized solutions of the Cauchy problem in the large for first order nonlinear equations, *Dokl. Akad. Nauk. SSSR*, 187 (1969), pp. 29–32.
- [65] ———, First order quasilinear equations with several independent variables., *Mat. Sb. (N.S.)*, 81 (123) (1970), pp. 228–255.
- [66] O. A. LADYŽENSKAJA, V. A. SOLONNIKOV, AND N. N. URAL’CEVA, Linear and quasilinear equations of parabolic type, *Translated from the Russian by S. Smith. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, American Mathematical Society, Providence, R.I.*, 1967.
- [67] P. D. LAX, Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves, *Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Pa.*, 1973. *Conference Board of the Mathematical Sciences Regional Conference Series in Applied Mathematics, No. 11.*

- 
- [68] O. LEY, Évolution de fronts avec vitesse non-locale et équations de Hamilton-Jacobi, *habilitation à diriger des recherches en mathématiques appliquées, Université François Rabelais, Tours*.
- [69] —, Lower-bound gradient estimates for first-order Hamilton-Jacobi equations and applications to the regularity of propagating fronts, *Adv. Differential Equations*, 6 (2001), pp. 547–576.
- [70] G. M. LIEBERMAN, Second order parabolic differential equations, *World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 1996*.
- [71] P. LIONS, E. ROUY, AND A. TOURIN, Shape-from-shading, viscosity solutions and edges., *Numer. Math.*, 64 (1993), pp. 323–353.
- [72] P.-L. LIONS, Generalized solutions of Hamilton-Jacobi equations, *vol. 69 of Research Notes in Mathematics, Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, Mass., 1982*.
- [73] A. MONTEILLET, Contribution à l'étude d'équations de propagations de fronts locales et non-locales, *PhD thesis, Université de Bretagne Occidentale, novembre*.
- [74] F. NABARRO, Dislocation in a simple lattice, , 59 (1947), p. 256.
- [75] F. NABARRO, Theory of cristal dislocations, *Clarendon Press, The Clarendon Press Oxford University Press, England, 1967*.
- [76] E. OROWAN, *Z. Phys*, 89 (1934), pp. 605, 614–634.
- [77] S. OSHER AND R. FEDKIW, Level set methods and dynamic implicit surfaces, *vol. 153 of Applied Mathematical Sciences, Springer-Verlag, New York, 2003*.
- [78] S. OSHER AND N. PARAGIOS, Geometric level set methods in imaging, vision, and graphics., *New York, NY : Springer, 2003*.
- [79] S. OSHER AND J. A. SETHIAN, Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.*, 79 (1988), pp. 12–49.
- [80] R. H. P. HIRSCH AND M. WHELAN, 8(1) (1956), pp. 677–684.
- [81] O. PERRON, Eine neue Behandlung der ersten Randwertaufgabe für  $\Delta u = 0$ , *Math. Z.*, 18 (1923), pp. 42–54.
- [82] M. POLANYI, *Z. Phys*, 89 (1934), p. 660.

## BIBLIOGRAPHIE

---

- [83] E. PRADOS, F. CAMILLI, AND O. FAUGERAS, A viscosity solution method for shape-from-shading without image boundary data., *ESAIM, Math. Model. Numer. Anal.*, 40 (2006), pp. 393–412.
- [84] J. P. PÉREZ, *Optique. Fondements et applications, 5e édition, Masson, Paris, 1996.*
- [85] D. RODNEY, Y. LE BOUAR, AND A. FINEL, Phase field methods and dislocations, *Acta materialia*, 51 (2003), pp. 17–30.
- [86] D. RODNEY, Y. LE BOUAR, AND A. FINEL, Phase field methods and dislocations, *Acta Mater*, 51 (2003), pp. 17–30.
- [87] D. SERRE, Systèmes de lois de conservation. I, *Fondations. [Foundations]*, Diderot Editeur, Paris, 1996. *Hyperbolicité, entropies, ondes de choc. [Hyperbolicity, entropies, shock waves]*.
- [88] ———, Systèmes de lois de conservation. II, *Fondations. [Foundations]*, Diderot Editeur, Paris, 1996. *Structures géométriques, oscillation et problèmes mixtes. [Geometric structures, oscillation and mixed problems]*.
- [89] J. A. SETHIAN, level-set methods, *vol. 3 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, 1996. *Evolving interfaces in geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.*
- [90] ———, Level set methods and fast marching methods, *vol. 3 of Cambridge Monographs on Applied and Computational Mathematics*, Cambridge University Press, Cambridge, second ed., 1999. *Evolving interfaces in computational geometry, fluid mechanics, computer vision, and materials science.*
- [91] J. SIMON, Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ , *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 146 (1987), pp. 65–96.
- [92] D. SLEPČEV, Approximation schemes for propagation of fronts with nonlocal velocities and Neumann boundary conditions, *Nonlinear Anal.*, 52 (2003), pp. 79–115.
- [93] P. SORAVIA AND P. E. SOUGANIDIS, Phase-field theory for FitzHugh-Nagumo-type systems, *SIAM J. Math. Anal.*, 27 (1996), pp. 1341–1359.
- [94] G. TAYLOR, *Proc. R. Soc. A*, 145 (1934), p. 632.
- [95] Y. YUAN AND C. HE, Adaptive active contours without edges, *Math. Comput. Modelling*, 55 (2012), pp. 1705–1721.