

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE  
SCIENTIFIQUE**

**L'UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE**

**FACULTE DE PHYSIQUE**

**Thèse présentée Pour obtenir le grade de Magister en physique**

**Spécialité : Energétique et Mécanique des fluides**

**Par : BACHIRI Mohamed**

**SUJET**

**ETUDE DU PHENOMENE DE CONVECTION  
NATURELLE SUR PAROI PLANE VERTICALE.  
APPLICATION A LA POLAROGRAPHIE**

**Soutenue le : 15 / 10 / 2003, devant le jury d'examen :**

<b>M. BOUHADEF</b>	<b>Professeur USTHB</b>	<b>Président</b>
<b>A. BOUABDALLAH</b>	<b>Professeur USTHB</b>	<b>Directeur de thèse</b>
<b>K. SI AHMED</b>	<b>Professeur USTHB</b>	<b>Examineur</b>
<b>S. LEBAILI</b>	<b>Professeur USTHB</b>	<b>Examineur</b>
<b>S. HANCHI</b>	<b>Maître de conférences EMP</b>	<b>Examineur</b>
<b>M. SAIGHI</b>	<b>Maître de conférences USTHB</b>	<b>Examineur</b>

# SOMMAIRE

*INTRODUCTION GENERALE*.....1

## **CHAPITRE I :**

### **ETUDE DE LA COUCHE LIMITE THERMOCONVECTIVE**

I.	1. Formulations générales et hypothèses.....	4
1-1.	conservation de la masse .....	4
1-2.	Conservation de quantité de mouvement.....	6
1-3.	L'équation de l'énergie.....	9
I.	2. Phénomènes de thermoconvection.....	14
I.	3. Equations de la couche limite.....	17
I.	4. Conclusion.....	21

## **CHAPITRE II :**

### **ANALYSE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR PLAQUE PLANE VERTICALE**

II.	1. Description du processus de transfert de la chaleur par convection naturelle.....	22
II.	2. Les équations de la couche limite en convection naturelle.....	23
II.	3. Résolution de la couche limite stationnaire.....	26
3-1.	Travaux théoriques de Lorenz (1881).....	27
3-2.	Travaux de Schmidt, Beckmann et Ostrach (1928-1952)...	28
3-3.	Travaux d'Eckert et Soehngen (1950).....	31
3-4.	Travaux de Bejan (1994).....	34
3-4.1.	analyse d'échelles .....	34
3-4.2.	étude symptomatique en fonction du nombre de Prandtl.....	35
3-4.3.	Résolution par la méthode de similitude.....	39
II.	4. Comparaisons.....	41

III.	5. Conclusion.....	43
------	--------------------	----

### **CHAPITRE III**

#### **MODELISATION ANALYTIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR PLAQUE PLANE VERTICALE PAR LA SIMILITUDE**

IV.	1. Présentation de la modélisation.....	44
1. a.	loi du profil de vitesse moyenne.....	45
1. a. 1.	Détermination des constantes.....	46
1. b.	Détermination du profil de température.....	50
1. b. 1.	Première méthode.....	50
1. b. 2.	Deuxième méthode.....	50
III.	2. Corrélacion généralisant la modélisation.....	52
III.	3. Résolution analytique approchée ( $Pr = 0.25$ ).....	53
III.	4. Calcul du coefficient de transfert de chaleur.....	54
III.	5. Calcul du coefficient de frottement pariétal.....	58
III.	6. Conclusion.....	68

### **CHAPITRE IV**

#### **METHODE INTEGRALE**

IV.	1. Solution intégrale.....	69
IV.	1.1. Paroi verticale à température uniforme.....	69
IV.	1.2. Paroi verticale à flux thermique uniforme.....	73
IV.	1.2.a). détermination du nombre de Nusselt.....	75
IV.	2. Conclusion.....	79

### **CHAPITRE V**

#### **EVALUATION DU COURANT LIMITE DE DIFFUSION POLAROGRAPHIQUE EN REGIME DE CONVECTION NATURELLE**

V.	1. Equations générales de la diffusion convective.....	80
V.	2. Couche limite de diffusion convective.....	82
V.	3. La diffusion dans les liquides.....	84
V.	4. Electrode verticale.....	86
4. 1.	Résolution en régime permanent.....	87

a). cas de $D = D_0 = \text{constant}$ .....	88
a. 1. Evaluation de diffusion ( $J_0$ ).....	90
a. 2. Evaluation du courant limite de diffusion ( $I_0$ ).....	90
a. 3. Evaluation du coefficient de transfert de matière ( $k_0$ ).....	90
b). cas de $D = D(T)$ ( $D$ variable).....	91
b. 1. Evaluation de diffusion ( $J$ ).....	95
b. 2. Evaluation du courant limite de diffusion ( $I$ ).....	95
b. 3. Evaluation du coefficient de transfert de matière ( $k$ ).....	95
V. 4. RESULTATS ET DISCUSSION.....	99
V. 5. CONCLUSION.....	101
<b>CONCLUSION GENERALE</b> .....	102



# INTRODUCTION

Ce travail est consacré à l'étude du phénomène de thermoconvection et particulièrement à la convection naturelle dont l'ampleur thématique aux plans fondamental et technologique est considérable. On rencontre ce genre de phénomène dans les processus mettant en jeu le transfert de chaleur à partir d'un radiateur à vapeur et des murs d'un bâtiment. Récemment, la convection naturelle est envisagée dans le domaine des échangeurs pour refroidir la surface des ailettes.

Plus généralement, l'intérêt de ce type de phénomène est bien connu dans de nombreux domaines pratiques aussi importants qu'intéressants notamment au niveau des applications industrielles (Techniques de séchage, Conservation agro-alimentaire, Métallurgie, Croissance cristalline, Tirage des cheminées, Composants micro-électroniques, etc...). On rencontre également ce type de problème en Agronomie (serres agricoles), l'étude des microclimats en Météorologie et dans le Génie atomique autour des crayons combustibles d'un réacteur nucléaire, etc...

Par opposition à un écoulement en convection forcée soumis à des causes extérieures, l'écoulement de convection naturelle ou écoulement libre est dominé essentiellement par l'influence naturelle d'une stratification de densité qui résulte elle-même d'une différence de température au sein du fluide.

Paradoxalement, on observe l'existence de nombreuses études traitant la convection forcée alors que les travaux s'intéressant à la convection naturelle sont rares parce que son approche demeure difficile.

Au stade actuel et d'un point de vue fondamental, ce type de phénomène, assez complexe, ne peut être abordé que dans la théorie de la double couche limite vitesse-température employant la méthode de variable de similitude ou variable affine.

A cet effet, il est recommandé d'utiliser ce que l'on appelle le scaling ou analyse des échelles, appliqué aux équations de bilan en vue d'obtenir le maximum d'informations physiques sur le phénomène considéré. En particulier, il s'agit de dégager les principes de base gouvernant les processus de transferts (en convection naturelle, convection forcée ou convection mixte, etc...) afin de caractériser spécifiquement les grandeurs d'intérêt ou grandeurs sensibles.

Dans le but d'appliquer efficacement l'analyse d'échelles, il est convenu de prendre en considération les règles suivantes :

- 1) On considère que toute équation peut constituer une relation d'équivalence entre des échelles d'origines différentes qui ne sont pas toutes de même importance. D'où l'art de sélectionner l'échelle dominante, à partir de plusieurs variables en s'appuyant sur les règles qui obéissent à la théorie des groupes de similitude.

- 2) On donne une importance particulière à la variable sélectionnée -grandeur d'intérêt- variable physiquement significative en raison de l'importance de son ordre de grandeur et par le fait qu'on lui associe une extension spatiale (ou temporelle) caractéristique de la région dans laquelle on réalise le scaling : zone dynamique coïncidant avec la définition de la ou des couches limites examinées.

Partant de ces propriétés pour étudier les phénomènes de convection, il est très important d'insister sur l'importance d'une analyse correcte d'échelles comme méthode très puissante de résolution qui est particulièrement adaptée à la technique de la double couche limite.

A ce sujet, il est établi dans la littérature que l'écoulement stationnaire lié à la convection naturelle autour d'obstacles en régime laminaire a fait essentiellement l'objet de nombreux travaux depuis plus d'un siècle. On se limitera à citer : l'étude classique de **LORENZ (1881)** qui a été le premier à entamer ce problème pour  $Pr = 0.73$  en faisant une approche théorique basée sur le fait que les distributions de vitesse et de température du gaz dépendent uniquement de la position associée à la direction normale de la paroi verticale. Il apparaît que cette approximation est en bonne concordance avec les données expérimentales.

Plus particulièrement l'étude de la convection naturelle autour d'une plaque plane verticale a attiré l'attention de nombreux chercheurs. **SCHMIDT** et **BECKMANN (1928)** sont les premiers auteurs à mener cette expérience ; ils ont pu mesurer les distributions de la vitesse et de la température des particules de l'air au voisinage immédiat de la paroi et pour différents points de la surface de la paroi verticale. Leurs résultats ont montré le caractère bidimensionnel de la couche limite thermique infirmant particulièrement l'hypothèse de **LORENZ** qui suppose que les profils de vitesse et de température dépendent uniquement de la distance à la paroi. Ainsi, parmi les travaux expérimentaux remarquables, on note les travaux d'**ECKERT** et **SOEHNGEN (1950)** qui ont obtenu des résultats tout à fait cohérents avec ceux de **SCHMIDT** et **BECKMANN** lorsqu'on compare les corrélations du coefficient de transfert de chaleur: le nombre de **NUSSLETT**  $Nu$  en fonction du nombre de Rayleigh  $Ra$ .

En recensant les propriétés remarquables de similitude attachées aux profils de vitesse et de température, **POLHAUSEN (1932)** a été le premier à résoudre le problème théoriquement en reformulant les équations de conservations de quantité de mouvement et de l'énergie par la méthode de similitude avec un choix arbitraire de la variable affine. Par la suite, en employant la même variable, **OSTRACH (1952)** a résolu numériquement le système d'équations addimensionnelles ce qui lui a permis de tracer l'évolution des profils de vitesse et de température dans une large gamme de valeurs de  $Pr$ . En outre, **CHURCHILL (1971)** a pu établir une corrélation expérimentale donnant la variation du nombre de Nusselt ( $Nu$ ) en fonction de Raleigh ( $Ra$ ) et le nombre de Prandtl ( $Pr$ ), résultat qui demeure jusqu'à présent la seule corrélation de référence pour ces chercheurs..

Plus récemment (**1994**), **A. BEJAN** a proposé une nouvelle formulation, tout à fait différente, en s'appuyant sur une analyse d'échelles plus adaptées pour décrire simultanément les deux couches limites thermique et dynamique, et dont la solution a été obtenue numériquement.

Tenant compte de ces considérations, il apparaît, à notre connaissance, que jusqu'à présent il n'existe pas une méthode analytique permettant de déterminer explicitement les profils de vitesse et de température en raison de la difficulté du système d'équations non-linéaires couplées.

C'est dans cet esprit que s'inscrit notre tentative qui a pour objet d'établir une approche théorique en régime de convection naturelle autour d'une plaque plane verticale baignant dans un fluide à propriétés physiques constantes. Le but étant la détermination explicite de l'évolution bidimensionnelle des profils de vitesse ( $u$ ,  $v$ ) et de température  $T$  en s'inspirant de la modélisation de **BEJAN** s'appuyant sur une analyse d'échelles bien appropriée dans la région de la couche limite laminaire. Enfin, il est intéressant de trouver une application à ce genre de phénomène dans le domaine expérimental notamment, en Polarographie, pour lequel on ne dispose pas de données permettant de valider les mesures effectuées en régime de convection naturelle. C'est pourquoi nous avons étendu nos calculs pour étudier l'influence de la température sur la diffusion moléculaire au voisinage immédiat d'une sonde polarographique verticale, portée à une température uniforme plus élevée que celle du liquide dans lequel elle baigne. On se place dans un cadre d'étude très général qui prend en compte les effets développés par la triple couche limite dynamique, thermique et massique. Le but étant l'évaluation du coefficient de transfert de matière pour en déduire le gradient de vitesse pariétal recherché.

Le mémoire est organisé comme suit :

Au chapitre I, on passe en revue l'ensemble des travaux consacrés au transfert de chaleur par convection dans le but de mettre en lumière les mécanismes et propriétés attachées à l'évolution des profils de vitesse et de température au voisinage immédiat de la paroi, puis très loin d'elle.

Au chapitre II, on donne un aperçu global sur la convection naturelle autour d'une plaque plane verticale en régime laminaire stationnaire en évoquant les différents travaux théoriques et expérimentaux les plus marquants dans le domaine. Concernant les études théoriques, on s'intéresse essentiellement à l'analyse d'échelles de **BEJAN** qui constitue, pour notre étude, une base de référence parmi les résultats théoriques actuellement disponibles.

L'objectif du chapitre III est de tenter de résoudre explicitement le système d'équations non-linéaires couplées, formulé selon une similitude de type **BEJAN**. En effet, par un choix judicieux du profil de vitesse, on détermine le profil de température et l'on vérifie simultanément les équations de quantité de mouvement et d'énergie.

En liaison avec ce qui précède, au chapitre IV, on s'efforce de retrouver ces résultats par la méthode intégrale et, par la même, on évalue le coefficient d'échange de chaleur, à savoir, les nombres de Nusselt local et global dans deux cas intéressants : paroi portée à température uniforme puis soumise à un flux uniforme. L'ensemble de ces résultats est comparé aux travaux théoriques et expérimentaux disponibles.

Au chapitre V, on propose une application de notre modélisation ayant pour objectif l'étude de l'influence de la température sur la diffusion moléculaire et, par voie de conséquence, de déterminer l'évolution du profil de concentration. En particulier, il s'agit d'évaluer le courant limite de diffusion valable en régime de convection naturelle et de proposer une loi d'étalonnage pour la technique polarographique liant le coefficient de transfert de matière mesuré au gradient de vitesse à déterminer.

Enfin, on termine par une conclusion générale récapitulant les principaux résultats obtenus tout en circonscrivant leur qualité du point de vue méthode et précision. Une perspective est proposée pour étendre cette modélisation qui laisse entrevoir de nombreuses possibilités de calculs et d'applications.

## CHAPITRE I

### ETUDES DE LA COUCHE LIMITE THERMOCONVECTIVE

Le transfert de chaleur par convection ou phénomène de thermoconvection concerne plus particulièrement l'étude du processus d'interaction du gradient de température soumis à l'influence du champ de vitesse produit par l'écoulement du fluide. C'est un processus que l'on tend à maîtriser de plus en plus et, actuellement l'on est capable de prévoir le point sur lequel un flux de fluide agira comme « convoyeur » d'énergie et de matière. Plus généralement, la thermoconvection est un phénomène complexe qui intègre l'apport des moyens techniques et pratiques de deux champs disciplinaires : transfert thermique et la dynamique des fluides. Pour cette raison l'étude d'un processus thermoconvectif doit reposer sur une bonne connaissance des principes de base à appliquer que l'on doit adapter convenablement au problème considéré.

Avant de passer en revue sur une base méthodologique le processus de transfert de chaleur par convection, nous allons décrire les propriétés et mécanismes liant le transfert thermique à la dynamique du fluide considéré au niveau de « l'interface » que l'on appelle convection. A cet effet, on met l'accent sur les hypothèses de travail adoptées et les conditions de validité des équations décrivant les processus de transferts (masse, vitesse et énergie) compatibles avec les échelles spatiale et dynamique liées au phénomène de thermoconvection étudié.

#### I.1- FORMULATION GENERALE ET HYPOTHESES

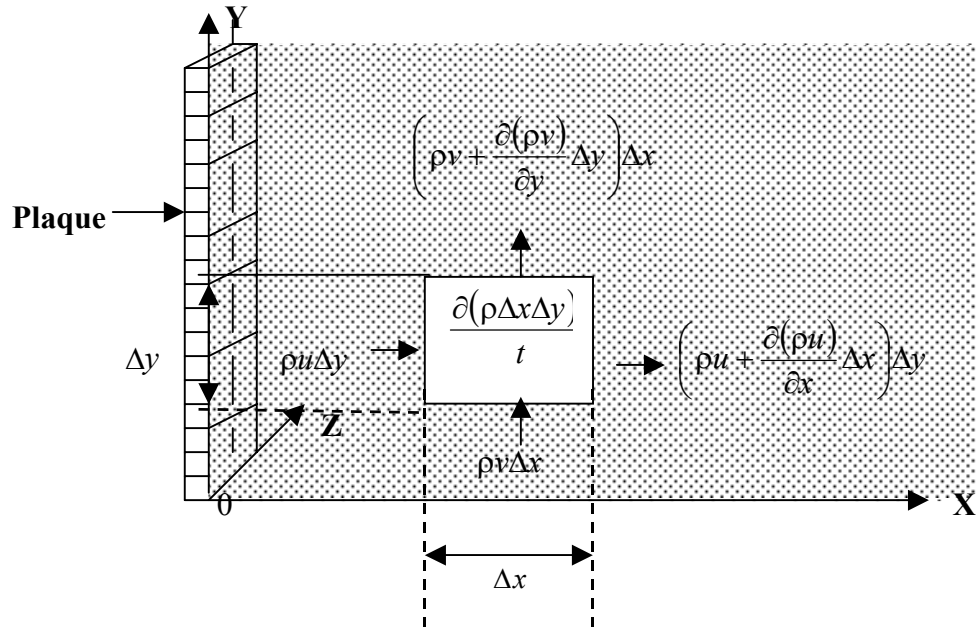
##### I.1-1- CONSERVATION DE LA MASSE

En partant des résultats établis [1], on rappelle brièvement l'énoncé de la conservation de la masse qui s'écrit ;

$$\frac{\partial M_v}{\partial t} = \sum_{\text{Porte d'entrée}} \dot{m} - \sum_{\text{Porte de sortie}} \dot{m} \quad (\text{I-1})$$

où  $M_v$  est la masse instantanée contenue à l'intérieur d'un volume de contrôle donné  $[v]$ , alors que les  $\dot{m}$  sont les débits massiques liés à l'écoulement à l'entrée et à la sortie de  $[v]$ . En thermoconvection, on est habituellement intéressé aux distributions de vitesse et de température décrivant l'évolution de l'écoulement au voisinage d'une paroi solide.

En effet, le volume de contrôle à considérer est la quantité  $(\Delta x \Delta y \Delta z)$  infinitésimale esquissée autour d'un point fixe  $(x, y)$  dans un champ d'écoulement.



**Figure (I-1) : La conservation de la masse dans un écoulement bidimensionnel [coordonnées cartésiennes].**

Sur la figure (I-1), on a admis que le champ d'écoulement est bidimensionnel tel que  $z$  ne joue aucun rôle (Processus identique selon  $z$ ). Dans le cas d'un écoulement tridimensionnel, le volume de contrôle serait  $\Delta x \Delta y \Delta z$ . Prenant  $u$  et  $v$  comme composantes locales de vitesses au point  $(x, y)$  respectivement, la traduction de l'équation (I-1) s'écrit :

$$\frac{\partial(\rho\Delta x\Delta y)}{\partial t} = \rho u \Delta y + \rho v \Delta x - \left[ \rho u + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y - \left[ \rho v + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \quad (I-2)$$

En divisant cette équation par la grandeur constante du volume de contrôle  $(\Delta x \Delta y)$  avec  $\Delta z$  égale à l'unité, on obtient l'équation de conservation de matière :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (I-3)$$

ou plus généralement 
$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{v} = 0 \quad (I-4)$$

En particulier, dans le traitement du problème de la convection satisfaisant à une large classe d'écoulements, on néglige souvent les variations temporelle et spatiale en  $z$

de la densité. Dans ce cas, la conservation de la masse pour les fluides incompressibles s'écrit ;

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-5})$$

En fait, on montre que l'équation (I-5) peut s'appliquer à l'écoulement (non au fluide) où les variations de la densité est négligeable devant le terme de divergence  $\rho \nabla \cdot V$  [équation (I-4)]. En outre, dans la plupart des écoulements de gaz rencontrés qui échangent de la chaleur avec une enceinte chauffée obéissent à la représentation donnée par l'équation (I-5) valable pour un écoulement bidimensionnel.

### I.1-2- CONSERVATION DE QUANTITE DE MOUVEMENT

L'étude du mouvement d'un fluide est basée sur le bilan de forces effectué dans un volume de contrôle qui s'écrit à partir de l'équation fondamentale de la dynamique. On rappelle que la force instantanée s'exerçant sur un volume de contrôle est donné par le bilan suivant [2] :

$$\frac{\partial(MV_n)_v}{\partial t} = \sum F_n + \sum_{\text{Porte d'entrée}} \dot{m}V_n - \sum_{\text{Porte de sortie}} \dot{m}V_n \quad (\text{I-6})$$

où n est la direction choisie pour l'analyse telle que  $(V_n, F_n)$  sont les projections de la vitesse du fluide et des forces dans la direction normale n. Dans le cas de l'écoulement bidimensionnel [figure (I-2)], nous pouvons écrire deux équations d'équilibre des forces (I-9), l'une suivant la direction X et l'autre suivant la direction Y.

Considérons l'équation de conservation de la masse (I-1) appliquée à un domaine de contrôle de petites dimensions  $(\Delta x \Delta y)$  autour des point  $(x, y)$ , figure (I-2). Les forces appliquées sur l'élément de fluide contenu dans le volume de contrôle sont : la tension normale  $(\sigma_x)$ , la tension tangentielle  $(\tau_{xy})$  et la force du poids par unité du volume  $F_x$ . Dès lors, le bilan de forces met en évidence le résultat ci-après :

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial(\rho u \Delta x \Delta y)}{\partial t} + \rho u^2 \Delta y - \left[ \rho u^2 + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y + \rho uv \Delta x - \left[ \rho uv + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x \\ & + \sigma_x \Delta y - \left[ \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \Delta x \right] \Delta y - \tau_{xy} \Delta x + \left[ \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \Delta y \right] \Delta x + F_x \Delta x \Delta y = 0 \end{aligned} \quad (\text{I-7})$$

En divisant l'équation (I-7) par  $(\Delta x \Delta y)$ , on a :

$$\rho \frac{Du}{Dt} + u \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x \quad (\text{I-8})$$

Tenant compte de l'équation de conservation de la masse (I-4), on obtient :

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + F_x \quad (\text{I-9})$$

On rapporte les tensions  $\sigma_x$  et  $\tau_{xy}$  au champ d'écoulement local à l'aide des relations constitutives [3] suivantes :

$$\sigma_x = P - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (\text{I-10})$$

et,

$$\tau_{xy} = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \quad (\text{I-11})$$

Fluide  
Newtonien

En réalité, ces relations sont d'origine empirique : elles récapitulent les observations expérimentales que le fluide n'offre aucune résistance à un changement de forme, néanmoins résiste long temps à celui-ci. Les équations (I-10) et (I-11) mettent en évidence essentiellement la contribution des effets visqueux à l'aide du coefficient de viscosité  $\mu$ . La combinaison des équations (I-9, 10, 11) fournit les équations de NAVIER STOKES ;

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + F_x \quad (\text{I-12})$$

En particulier, dans le cas où l'écoulement est incompressible et la viscosité  $\mu$  peut être considérée comme constante, l'équation de conservation de la quantité de mouvement se réduit à :

$$\rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] + F_x \quad (\text{I-13})$$

Pour un écoulement tridimensionnel, décrit dans un système de coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$ , les trois équations du mouvement sont respectivement:

$$: \quad \rho \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] + F_x$$

$$: \quad \rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \left[ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] + F_y$$

$$: \quad \rho \left[ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right] = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] + F_z$$

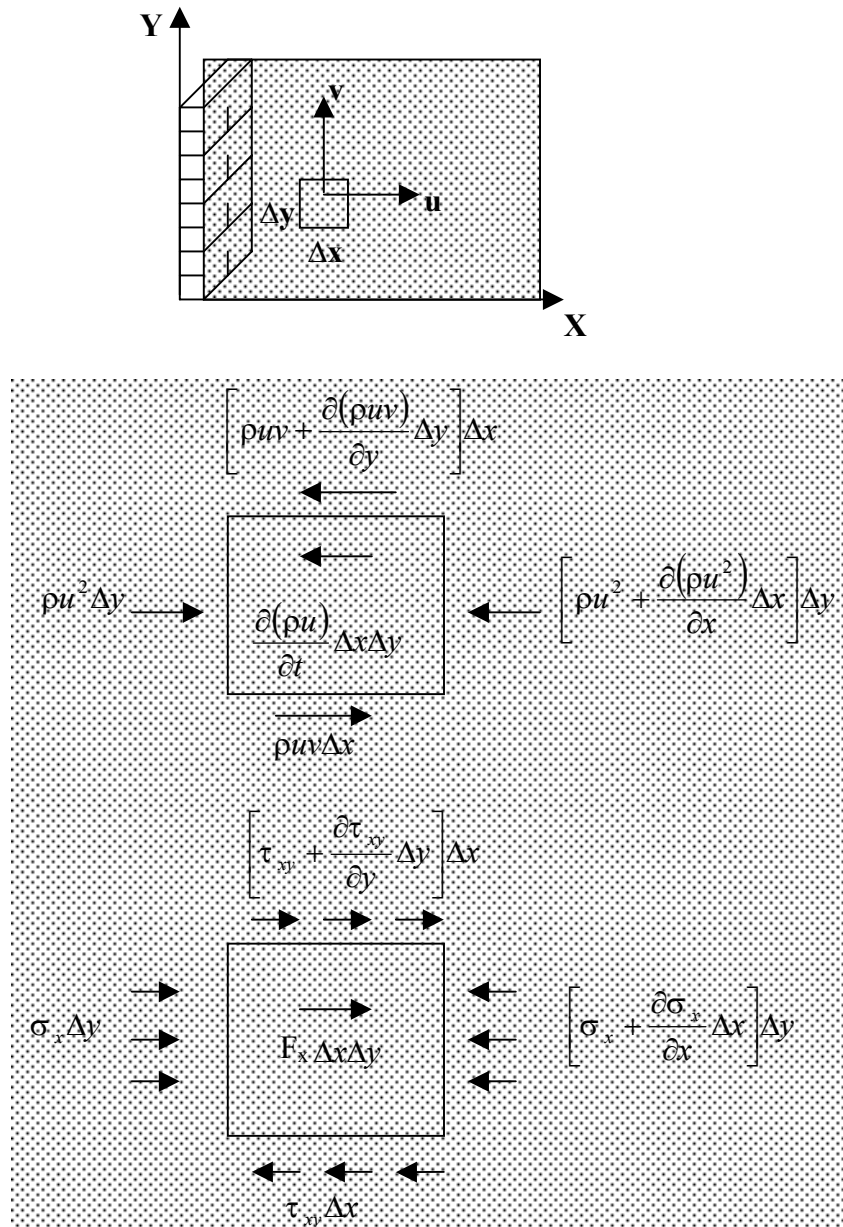


Figure (I-2) : Bilan des forces suivant la direction X dans un volume de contrôle dans le cas d'un écoulement bidimensionnel.

En utilisant les notations vectorielles, on obtient [4] :

$$\rho \frac{DV}{Dt} = -\nabla P + \mu \nabla^2 V + F \quad (I-14)$$

où F est le vecteur caractérisant l'action des forces par unité de volume ( $F_x, F_y, F_z$ ).

### I-1-3- EQUATION DE L'ENERGIE

Les équations de conservations de la masse et de la quantité de mouvement sont dans bien des cas suffisantes pour résoudre le problème du transfert de chaleur par convection. Notons dans les conditions actuelles la disponibilité de quatre équations

(conservation de la masse et les trois équations de quantité de mouvement) pour déterminer quatre inconnues : trois composantes de la vitesse et la pression. Du bilan de matière et de quantité de mouvement il faut tenir compte de la température T, d'où la nécessité d'adjoindre une équation supplémentaire : l'équation de l'énergie. A ce stade, il s'agit d'établir un bilan énergétique à partir du Premier Principe de la Thermodynamique ou l'équation de conservation de l'énergie.

En effet, en raisonnant sur l'élément du volume de contrôle de grandeurs finies  $\Delta x \Delta y$  [voir figure (I-3)], le Premier Principe de la Thermodynamique exige que :

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{c} \text{Taux d'énergie} \\ \text{accumulée dans le} \\ \text{volume de contrôle} \end{array} \right)_1 &= \left( \begin{array}{c} \text{Transfert d'énergie} \\ \text{dû à l'écoulement} \\ \text{du fluide} \end{array} \right)_2 + \left( \begin{array}{c} \text{Transfert net} \\ \text{de l'énergie par} \\ \text{conduction} \end{array} \right)_3 + \\
 &\left( \begin{array}{c} \text{Taux d'énergie} \\ \text{généré à l'intérieur} \\ \text{du volume de contrôle} \end{array} \right)_4 - \left( \begin{array}{c} \text{Transfert net de travail} \\ \text{du volume de contrôle} \\ \text{vers son environnement} \end{array} \right)_5
 \end{aligned}
 \tag{I-15}$$

Selon le diagramme des flux d'écoulement esquissé dans la figure (I-3), les groupes des termes donnés précédemment sont :

$$\begin{aligned}
 \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)_1 &= (\Delta x \Delta y) \frac{\partial(\rho e)}{\partial t} \\
 \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)_2 &= (\Delta x \Delta y) \left[ \frac{\partial(\rho u e)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v e)}{\partial y} \right] \\
 \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)_3 &= (\Delta x \Delta y) \left[ \frac{\partial q_x''}{\partial x} + \frac{\partial q_y''}{\partial y} \right] \\
 \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)_4 &= (\Delta x \Delta y) q''' \\
 \left( \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \right)_5 &= (\Delta x \Delta y) \left[ \sigma_x \frac{\partial u}{\partial x} - \tau_{xy} \frac{\partial u}{\partial y} + \sigma_y \frac{\partial v}{\partial y} - \tau_{yx} \frac{\partial v}{\partial x} \right] + \\
 &(\Delta x \Delta y) \left[ u \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - u \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + v \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - v \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} \right]
 \end{aligned}
 \tag{I-16}$$

(I-16)\*

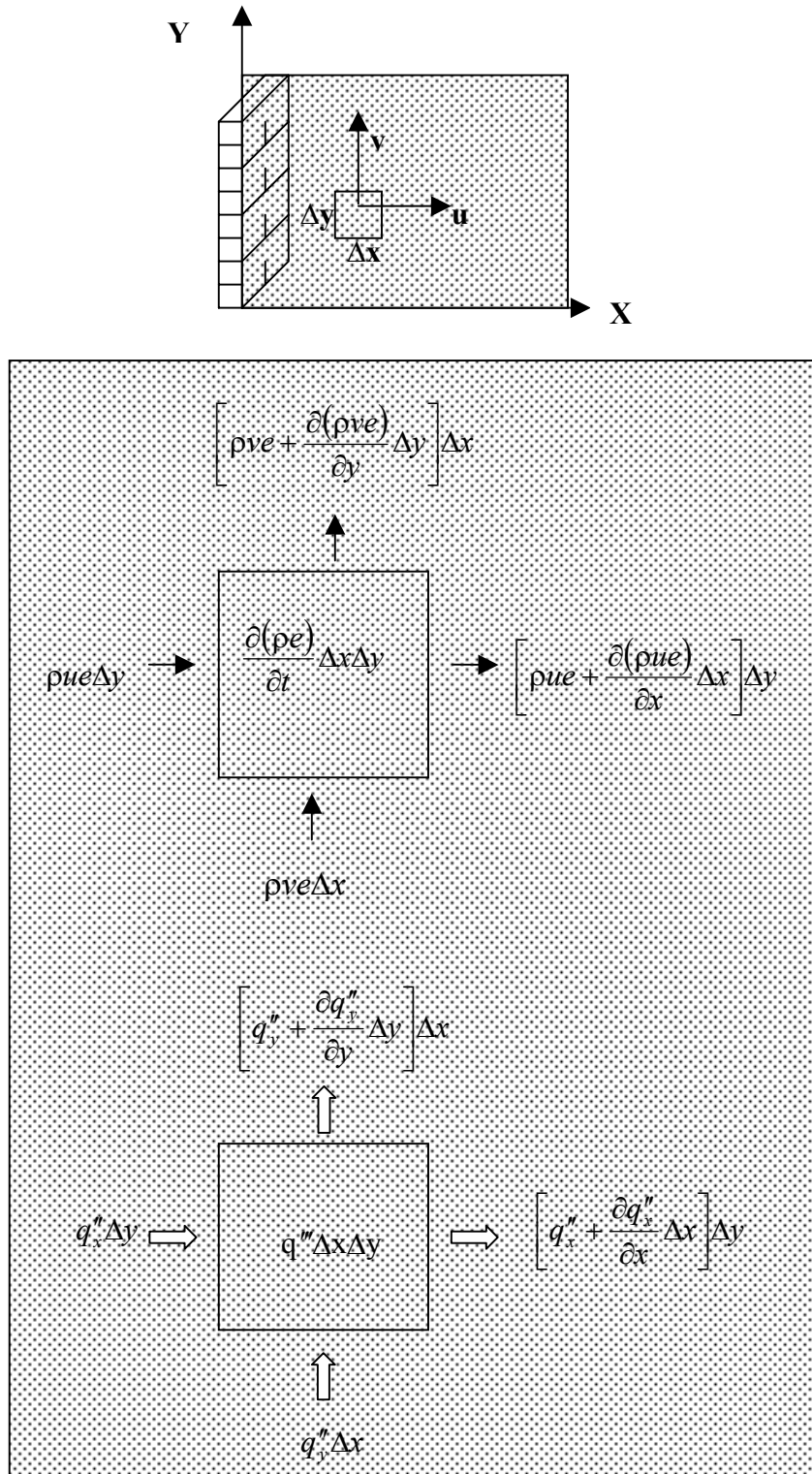


Figure (I-3) : Bilan d'énergie appliqué à un volume de contrôle dans un écoulement bidimensionnel.

Où  $e$ ,  $q_x''$ ,  $q_y''$  et  $q'''$  sont respectivement l'énergie interne spécifique, le flux de chaleur dans la direction X, le flux de chaleur dans la direction Y et le taux de dissipation ou le faux de génération interne de l'énergie. L'origine du terme de dissipation  $\square \square^5$  est dû au transfert du travail effectué par les tensions normale et tangentielle, figure (I-2). Par exemple ; le travail effectué par unité de temps par la tension  $\sigma_x$  à gauche de l'écoulement  $\Delta x \Delta y$  est négatif et égal au produit de la force agissant sur la couche  $(\sigma_x \Delta y)$  par le déplacement de la couche par unité de temps ( $u$ ), soit  $-u \sigma_x \Delta y$ . De même, le taux de transfert de travail associé aux tensions s'exerçant à droite de l'écoulement  $(\Delta x \Delta y)$  est positif et égale à  $\left[ \sigma_x + \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) \Delta x \right] \left[ u + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Delta x \right] \Delta y$ .

Le transfert du travail net dû à ces deux contributions est ;

$$\left[ \sigma_x \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) + u \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} \right) \right] (\Delta x \Delta y), \text{ comme le montre le terme } \square \square^5$$

Les trois autres taux de transfert de travail peuvent être calculés, de la même manière, en examinant l'effet des trois tensions restantes,  $\tau_{xy}$  dans la direction X et  $\sigma_y$  et  $\tau_{yx}$  dans la direction Y. Dans l'expression  $\square \square^5$  les huit termes ont été séparés en deux groupes. Le deuxième groupe de l'expression  $\square \square^5$  peut être réduit à

$$-\rho \left[ \frac{D}{Dt} \left( \frac{u^2 + v^2}{2} \right) \right] \text{ qui représente les variations d'énergie cinétique associées au fluide.}$$

Dans notre cas ce changement est considéré négligeable relativement à la variation d'énergie interne  $\frac{\partial(\rho e)}{\partial t}$  qui apparaît dans le terme  $\square \square^1$ .

En injectant les expressions (I-16) dans l'équation de conservation de l'énergie, et en utilisant les relations constitutives (I-10) et (I-11), on obtient :

$$\rho \frac{De}{Dt} + e \left[ \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V \right] = -\nabla \cdot q'' + q''' - P \nabla \cdot V + \mu \Phi \quad (\text{I-17})$$

où  $q''$  est le vecteur du flux de chaleur  $(q_x'', q_y'')$  et  $\Phi$  la fonction de dissipation visqueuse qui est égale à :

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{2}{3} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right]^2$$

En tenant compte de l'équation de continuité et en admettant que le fluide est incompressible et dans le cas d'un écoulement bidimensionnel, la fonction de dissipation visqueuse se réduit à :

$$\Phi = 2 \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] + \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \quad (\text{I-18})$$

Dans le but d'exprimer l'équation (I-20) en terme d'enthalpie h, on se sert de la définition employée en Thermodynamique :

$$h = e + \left( \frac{1}{\rho} \right) P$$

d'où, l'on a:

$$\frac{Dh}{Dt} = \frac{De}{Dt} + \frac{1}{\rho} \frac{DP}{Dt} - \frac{P}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} \quad (\text{I-19})$$

Par ailleurs, on peut exprimer le flux de chaleur directionnel  $q''$  en terme de gradient de température, à l'aide de la loi de FOURIER

$$q'' = -k \nabla T \quad (\text{I-20})$$

Ensuite, en combinant les équations (I-18, 19, 20) de manière adéquate, on obtient :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi - \frac{P}{\rho} \left( \frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot V \right) \quad (\text{I-21})$$

Enfin, à partir de l'équation de conservation de la masse, on remarque que le dernier terme de l'équation (I-21) est nul (équation de continuité). Dans ces conditions, l'équation découlant de l'application du premier principe de la Thermodynamique se simplifie :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (\text{I-22})$$

Dans le but d'exprimer l'équation du bilan enthalpique (I-22) à l'aide de la température, il est nécessaire de remplacer l'enthalpie par sa valeur. Ceci est valable pour tout système dont l'équation d'état est de type  $f(P, V, T) = 0$ . En général, la variation d'enthalpie spécifique est donnée par la relation canonique [5] suivante :

$$dh = T ds + \frac{1}{\rho} dP \quad (\text{I-23})$$

où T est la température absolue et ds le changement d'entropie spécifique,

$$ds = \left( \frac{\partial s}{\partial T} \right)_P dT + \left( \frac{\partial s}{\partial P} \right)_T dP \quad (\text{I-24})$$

## Chapitre I Etudes de la couche limite thermoconvective

---

Si l'on fait appel à la deuxième relation de MAXWELL, on établit facilement les relations suivantes :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial P}\right)_T = - \left[ \frac{\partial \left(\frac{1}{\rho}\right)}{\partial T} \right]_P = \frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P = -\frac{\beta}{\rho} \quad (\text{I-25})$$

avec  $\beta$  le coefficient d'expansion thermique :

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T}\right)_P \quad (\text{I-26})$$

et en faisant apparaître la chaleur massique à pression constante  $C_p$ :

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_P = \frac{c_p}{T} \quad (\text{I-27})$$

on a d'après les équations (I-23) et (I-24) :

$$dh = c_p dT + \frac{1}{\rho} (1 - \beta T) dP \quad (\text{I-28})$$

Le terme  $\rho \frac{Dh}{Dt}$  de l'équation de l'énergie (I-20) est alors égal à :

$$\rho \frac{Dh}{Dt} = \rho c_p \frac{DT}{Dt} + (1 - \beta T) \frac{DP}{Dt} \quad (\text{I-29})$$

La formulation de l'équation de l'énergie, ou Premier Principe de la thermodynamique, peut s'exprimer directement à l'aide de la température  $T$  :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \beta T \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (\text{I-30})$$

Celle-ci peut se simplifier dans les cas particuliers suivants :

- Gaz idéal ( $\beta = 1/T$ )

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \frac{DP}{Dt} + \mu \Phi \quad (\text{I-31})$$

- liquide incompressible ( $\beta = 0$ )

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (k \nabla T) + q''' + \mu \Phi \quad (\text{I-35})$$

## Chapitre I Etudes de la couche limite thermoconvective

Dans la majorité des cas, le problème de thermoconvection est abordé de manière simplifiée, à savoir, fluide de conductivité thermique  $k$  constante ( $k=\text{cte}$ ), génération d'énergie interne nulle ( $q''' = 0$ ) et l'effet de compressibilité  $\beta T \frac{DP}{Dt}$  supposé négligeable. Dans ces conditions l'équation de l'énergie se simplifie considérablement :

$$\rho c_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (\text{I-33})$$

Dans système de coordonnées cartésiennes (X, Y, Z) elle s'écrit :

$$\rho c_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \quad (\text{I-34})$$

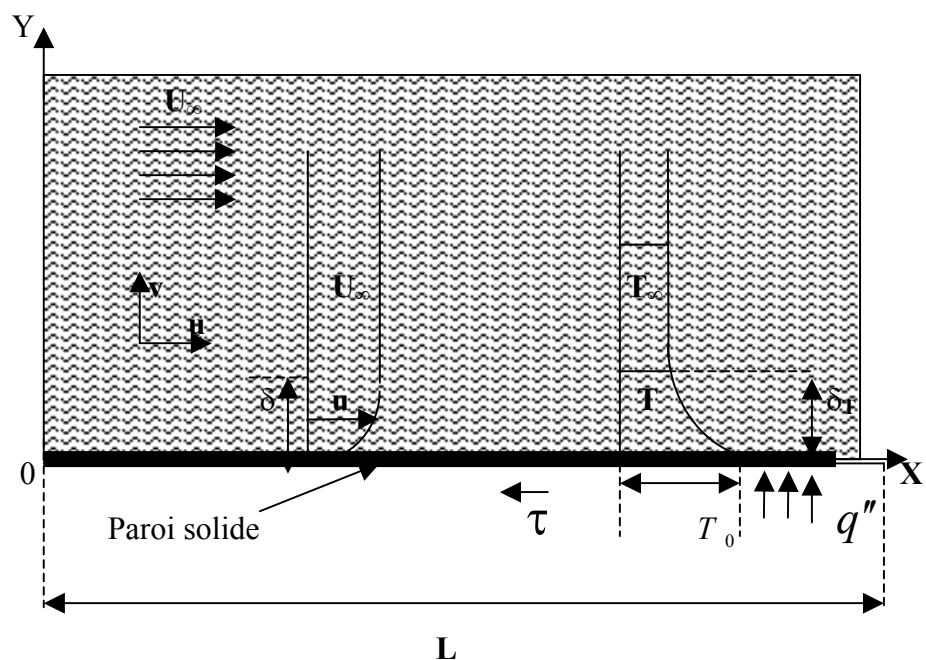
auquel on doit associer les conditions aux limites du problème considéré.

### I.2-LE PHENOMENE DE THERMOCONVECTION

Le problème fondamental de la thermoconvection apparaît lorsque on analyse le processus de transfert de chaleur d'un objet solide balayé par un courant de fluide en écoulement externe. Dans ces conditions, on considère une plaque plane chauffée à la température  $T_0$  suspendue dans un courant uniforme de vitesse  $U_\infty$  et de température  $T_\infty$ , comme il est montré sur la figure (I-4). On suppose que cette plaque plane représente une surface d'ailette qui échange de la chaleur avec le courant dans lequel elle baigne.

Dans ce contexte, il est utile de connaître les mécanismes suivants :

1. La force réelle exercée par le courant de fluide sur la plaque
2. la résistance du transfert de la chaleur de la plaque qui s'oppose au courant.



**Figure (I-4): Couches limites de vitesse (u, v) et de température T le long d'une plaque plane parallèle à un courant uniforme.**

De ce bilan de forces, il découle la nécessité d'évaluer avec précision la force totale d'entraînement exercée par le courant à la surface d'échange de chaleur ainsi que le taux de transfert de chaleur entre le fluide et la paroi solide. En fait, cette question fondamentale liée au transfert de chaleur correspond à une préoccupation centrale de la mécanique des fluides que l'on retrouve à l'occasion du phénomène de couplage entre processus de transfert de quantité de mouvement et de chaleur.

Le point de vue quantitatif s'intéresse (figure (I-4)) à l'évaluation des forces et, principalement la force totale F :

$$F = \int_0^L \tau H dx \quad (I-35)$$

Le transfert de chaleur globale q :

$$q = \int_0^L q'' H dx \quad (I-36)$$

Les symboles  $\tau$  ,  $q''$  et H représentent respectivement :

- la contrainte liée au frottement pariétal :  $\tau = \mu \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} = \text{cte}$  (I-37)

- le flux de chaleur à la paroi :  $q'' = h^* (T_0 - T_\infty) = \text{cte}$  (I-38)

et H la largeur de la plaque plane dans la direction perpendiculaire à celle-ci (voir figure(I-4)). Dans les relations (I-37) et (I-38) on remarque, au passage, que l'on utilise les paramètres tels que la viscosité  $\mu$  et le coefficient du transfert de chaleur h qui jouent un rôle important par la suite.

Dans les considérations suivantes, on suppose empiriquement, comme en observation physique naturelle, la situation de la couche limite à  $y = 0^+$  est en fait collée à la paroi solide. Celle-ci est connue sous le nom d'hypothèse de non glissement (no slip condition) dans laquelle est cantonnée la plus grosse partie du transfert de chaleur par convection. On admet aussi que, le fluide mouille la surface solide lorsqu'il se met à son contact. La condition de non-glissement montre aussi que à  $0^+ > y > 0$  la couche fluide est immobile ici, le transfert de chaleur de la paroi vers le fluide s'opère purement par conduction. Par conséquent, on peut écrire l'effet de conduction pure à travers la couche fluide au voisinage de la paroi sous la forme :

$$q'' = -k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (I-39)$$

Notons que le flux de chaleur  $q''$  est défini comme positif quand la paroi dégage l'énergie vers le courant fluide. Combinant les équations (I-38) et (I-39), on peut faire une estimation du coefficient de transfert de chaleur à l'aide du rapport suivant :

$$h^* = \frac{-k \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0}}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{I-40})$$

paramètre très important qui désigne le nombre de Nusselt Nu sur lequel on reviendra au ch III et ch IV.

Afin de calculer le force totale F et le transfert de chaleur global q, on doit déterminer les profils de vitesse et de température au voisinage de la paroi solide. Donc, il est nécessaire de résoudre le problème mathématique en évaluant les composantes de vitesse (u, v) et la température (T) dans l'hypothèse d'une couche limite bidimensionnelle.

Notre modélisation est basée sur un écoulement supposé incompressible et à propriétés physiques (densité  $\rho$ , viscosité  $\nu$ , etc...) constantes.

Ceci se traduit par les quatre équations fondamentales suivantes :

- Equation de continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{I-41})$$

- Equation de conservation de quantité de mouvement :

$$\text{Composante longitudinale} \quad u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} + \nu \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-42})$$

$$\text{Composante transversale :} \quad u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dy} + \nu \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-43})$$

- Equation de l'énergie

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (\text{I-44})$$

avec  $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$  qui exprime le coefficient de diffusivité thermique.

On est conduit à résoudre quatre équations aux dérivés partielles à quatre inconnues (u, v, P, T). A ces équations sont associées les conditions aux limites suivantes :

- a) Conditions à la paroi :

- condition de non glissement	$u = 0$	
- condition d'imperméabilité	$v = 0$	(I-45)
- condition de température imposée à la paroi	$T = T_0$	

b) Conditions d'écoulement loin de la paroi :

$$\begin{aligned}
 & \text{- Ecoulement uniforme selon la direction } x : & u &= U_{\infty} \\
 & \text{- Pas d'écoulement uniforme selon la direction } y : & v &= 0 \\
 & \text{- Température uniforme :} & T &= T_{\infty}
 \end{aligned} \tag{I-46}$$

### I.3- EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE

Le problème des équations aux dérivées partielles telles que formulées par les relations (I-41,-46) demeurerait la préoccupation centrale des recherches mathématiques durant le siècle écoulé. Malheureusement, malgré de nombreux efforts et différents résultats obtenus, le problème n'est pas encore résolu dans toute sa généralité. Au stade actuel seule la méthode basée sur la théorie de la couche limite permet d'apporter une approche efficace à un problème non solvable lorsque il est abordé dans toute sa complexité.

En se référant à nouveau à la figure (I-4) et à l'ensemble des équations (I-44,-47), il est permis d'estimer que la vitesse change de  $u = 0$  à  $u = U_{\infty}$  et la température change de  $T = T_0$  à  $T = T_{\infty}$ . Cela se produit dans un espace situé relativement assez proche de la paroi solide. Ce sont ces considérations qui permettent de dire qu'il y a des calculs adaptés à l'étude dynamique au voisinage de la paroi et que l'on examinera plus loin.

La question essentielle liée à la représentation du champ de vitesses réside dans le modèle imaginé par Prandtl qui a introduit le concept très important de couche limite en considérant la zone proche de la paroi comme une région distincte du reste de domaine de l'écoulement. Cette hypothèse fondamentale permet de simplifier considérablement la difficulté mathématique du problème [eqs (I-41)-(I-46)]. L'idée de Prandtl consiste à décomposer le champ d'écoulement en deux régions. La première, qui est proche de la paroi a été formulée dans la section précédente et la deuxième région qui se trouve en dehors de la couche limite correspond à un courant libre, non affecté par l'obstacle et l'effet thermique de la paroi. Dans ces conditions, l'écoulement libre est caractérisé par le champ uniforme suivant :

$$u = U_{\infty}, v = 0, P = P_{\infty}, T = T_{\infty} \tag{I-47}$$

qui est valable loin de la paroi

Posons  $\delta$ , distance qui exprime l'ordre de grandeur pour laquelle la vitesse  $u$  varie et pouvant évoluer de 0 (paroi) jusqu'à  $U_{\infty}$  (courant libre). Dès lors, on peut identifier les échelles suivantes :

- **Espace :**  $x \sim L, y \sim \delta$ ,
- **Vitesse :**  $u \sim U_{\infty}$
- **Domaine couche limite :**  $\delta \times L$

**Application :** Considérons l'équation longitudinale (I-45) qui exprime une compétition entre trois types de forces de nature différente :

$$\left( U_{\infty} \frac{U_{\infty}}{L}, v \frac{U_{\infty}}{\delta} \right) \approx \left( \frac{P}{\rho L} + v \frac{U_{\infty}}{L^2}, v \frac{U_{\infty}}{\delta^2} \right) \tag{I-48}$$

## Chapitre I Etudes de la couche limite thermoconvective

---

Dans l'expression ci-dessus, chaque terme représente l'échelle associée qui apparaît dans l'équation (I-42). Par exemple, l'équation de continuité exige l'égalité :

$$\frac{U_{\infty}}{L} \approx \frac{v}{\delta} \quad (\text{I-49})$$

Dés lors, on peut montrer aisément que les termes d'inertie dans l'équation (I-48) sont d'ordre  $\frac{U_{\infty}^2}{L}$ . Par conséquent, on ne peut négliger les deux termes correspondants. Pour ce qui concerne la région de la couche limite, d'expansion  $\delta \times L$ , on suppose qu'elle est infiniment mince et l'on a :

$$\delta \ll L$$

Enfin, la dernière contribution relative à la relation d'équilibre (I-48) permet d'évaluer l'échelle représentative correspondant aux forces de frottement agissant dans cette région. Eu égard à ce qui précède, on peut négliger le terme longitudinal  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

devant le terme  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$  dans (I-47), celle-ci devient alors :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I-50})$$

En utilisant la même procédure d'évaluation, on obtient :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + v \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (\text{I-51})$$

En général, la pression  $P$  en n'importe quel point du fluide [figure (I-4)] est une fonction de  $x$  et de  $y$  en régime stationnaire. Dans ces conditions la différentielle de  $P$  s'écrit :

$$dP = \frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy \quad (\text{I-52})$$

de sorte que l'on a :

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial P}{\partial y} \frac{dy}{dx} \quad (\text{I-53})$$

L'ordre de grandeur des deux gradients de pression peut être déduit à partir des équations (I-50) et (I-51) et en tenant compte de l'équilibre entre les forces de pression et de frottement ou d'inertie (eq (I-48)).

Autrement dit, en écrivant que des forces de pression et de frottement s'équilibrent, on obtient le résultat suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial x} \sim \mu \frac{U_\infty}{\delta^2} \quad (\text{I-54})$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} \sim \mu \frac{V}{\delta^2} \quad (\text{I-55})$$

Maintenant si l'on s'intéresse au terme qui se situe au second membre de l'équation (I-52), et en le divisant par  $\frac{\partial P}{\partial x}$  on montre facilement la propriété suivante:

$$\frac{\left(\frac{\partial P}{\partial Y}\right)\left(\frac{\partial Y}{\partial X}\right)}{\left(\frac{\partial P}{\partial x}\right)} \sim \frac{v\delta}{U_\infty L} \sim \left(\frac{\delta}{L}\right)^2 \ll 1 \quad (\text{I-56})$$

En faisant remarquer que le rapport différentiel  $\frac{dy}{dx}$  peut être approximé à :  $\frac{dy}{dx} \sim \frac{\delta}{L}$ , on en déduit le résultat suivant :

$$\frac{\partial P}{\partial y} \ll \frac{\partial P}{\partial x}$$

Cela signifie que dans la couche limite, la pression varie essentiellement dans la direction longitudinale. Ce qui justifie ainsi intuitivement les considérations évoquées plus haut. On admet donc le résultat suivant:

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x}$$

Pour x fixé, la pression est pratiquement la même en deux points voisins, situés à l'intérieur et à l'extérieur de la couche limite :

$$\frac{dP_\infty}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} \quad (\text{I-57})$$

En injectant le résultat (I-57) dans l'équation (I-50), on établit finalement

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{I-58})$$

Dans le cas où les effets de température ne sont pas négligeables, notamment en régime de convection naturelle l'écoulement serait soumis à la force de poussée d'Archimède  $F_x$ , l'équation de quantité de mouvement devient alors :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\infty}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F_x \quad (\text{I-60})$$

avec  $F_x = \rho g$  et  $\rho = \rho(T)$

Pour ce qui est de l'équation de la couche limite thermique ou de l'énergie qui résulte de l'équation (I-47), on peut négliger le terme correspondant à la diffusion longitudinale par rapport à la diffusion transversale  $[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \ll \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}]$  de sorte que l'on a :

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (I-61)$$

C'est la combinaison de l'équation (I-60) et cette dernière (I-61) qui est retenue pour mener notre étude de convection naturelle à laquelle on leur associe les conditions aux limites (I-45) et (I-46).

### I. 4- CONCLUSION :

Précédemment on a rappelé brièvement l'ensemble des travaux sur le phénomène général de thermoconvection en mettant l'accent sur le mode de raisonnement adopté au niveau de la zone d'écoulement décrivant les équations de bilans (masse, quantité de mouvement et énergie) contribuant ainsi à actualiser la formulation du problème de thermoconvection dans toute sa généralité.

. En particulier, à partir d'une analyse d'échelles, développée dans la région de la couche limite on peut introduire des simplifications considérables aux équations de bilan de transferts de quantité de mouvement et de chaleur.

Dés lors, en se basant sur des analyses phénoménologiques récentes, on va se pencher sur l'écoulement dû à la seule variation de la masse volumique du fluide du fait de la variation de température entre la paroi et le fluide lui même.

## **CHAPITRE II**

# **ANALYSE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR PLAQUE PLANE VERTICALE**

On s'intéresse ici à une classe de problèmes régie par le phénomène du transfert de chaleur par convection naturelle présentant des caractéristiques particulières comparées aux autres processus thermoconvectifs (convection forcée, convection mixte...). Cette différence tient à des propriétés thermodynamique et mathématique spécifiques au phénomène étudié. Thermodynamiquement, les écoulements que nous allons étudier ne sont pas forcés, cependant ils se produisent naturellement. Ces écoulements sont dominés par l'effet de la poussée d'ARCHIMEDE due à l'accélération gravitationnelle induite par la variation de la densité d'une couche fluide à l'autre. Mathématiquement, le champ de vitesse est intimement couplé au champ de température du fait que les variations de la température dans le fluide proviennent des variations de densité entraînant un transport sous forme de poussée ou de flottabilité.

C'est donc à cet ensemble de propriétés particulières théorique et phénoménologique qui contribuent à définir la spécificité de la convection naturelle que l'on est conduit à effectuer une analyse des échelles dans le cadre des processus d'échanges entre fluide et paroi plane verticale.

### **II.1- DESCRIPTION DU MECANISME DE TRANSFERT DE CHALEUR PAR CONVECTION NATURELLE**

On schématise simplement le mécanisme de transfert de chaleur par convection naturelle sur la figure (II-1). On se base sur l'étude d'un corps chauffé, plaque verticale infinie conductrice de température uniforme,  $T_0$  et de longueur  $H$  immergée dans un fluide de température  $T_\infty$  correspondant à un réservoir de fluide froid. Dès lors, le fluide est en expansion (car celui-ci devient plus léger et moins dense) en étant chauffé : la couche près de la paroi a tendance à se développer et à s'élever vers le haut. Simultanément le fluide froid du réservoir se déplace en masse vers le bas. Dans ces conditions, il apparaît que l'écart de température est à l'origine de la convection naturelle telle qu'elle vient d'être esquissée.

On sait qu'en convection forcée le fluide est mis en mouvement grâce à un phénomène de transfert provenant de l'échange de la chaleur avec la paroi, celle-ci étant peu influencée par les différences de température. Dans ces différentes conditions quel est le processus d'évolution relativement régulier qui intervient dans la convection naturelle ?

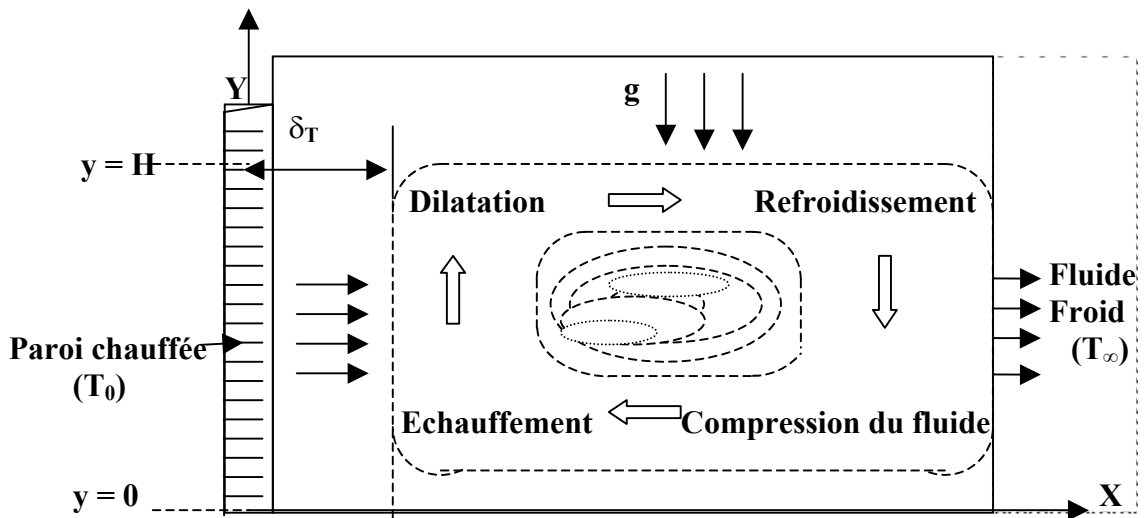
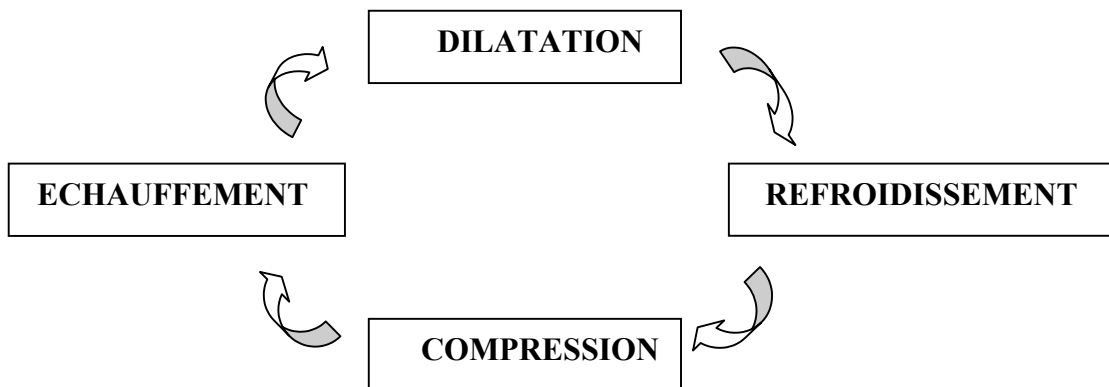


Figure (II-1) : convection naturelle au long d'une paroi verticale

Pour répondre à cette question, on propose de suivre l'évolution d'une masse de fluide à travers un conduit imaginaire fermé qui contient un « écoulement cellulaire ». A partir de la paroi chauffée, la masse de fluide tend à s'élever vers une région de basse pression dans le champ de pression hydrostatique maintenu par le réservoir. Ensuite, le long de la partie d'écoulement descendant du cycle, la masse de fluide est refroidie par le réservoir qui tend à être compressée lorsque elle passe vers le fond du réservoir. En suivant l'évolution tourbillonnaire pour chaque masse de fluide, il apparaît que l'écoulement cellulaire est régi par une succession de quatre processus fondamentaux que l'on peut résumer de manière synoptique selon le schéma suivant :



Dans ce qui suit, on concentre principalement notre analyse sur l'interaction entre la plaque chauffée et le milieu ambiant assimilé à un fluide froid (réservoir Thermique).

## II.2- LES EQUATIONS DE LA COUCHE LIMITE EN CONVECTION NATURELLE

D'après la figure (II-1), nous pouvons dire que le problème principal du transfert de chaleur est de prévoir le taux du transfert de chaleur  $Q$ . autrement dit, le coefficient

## Chapitre II Analyse de la convection naturelle sur plaque plane verticale

de transfert de chaleur moyen  $\bar{h}$  lorsque la différence de température entre paroi et réservoir est connue,

$$Q = \bar{h} (HW) (T_0 - T_\infty) \quad (\text{II-1})$$

où, H désigne la longueur de la plaque ( considéré comme une longueur de référence) et W l'épaisseur de la paroi dans la direction perpendiculaire au plan X-Y. Dans toute la suite de notre étude, on néglige l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta_T$  devant H tout en se fixant dans la région de la couche limite, et en tenant l'échelle de  $\bar{h} = \frac{k}{\delta_T}$  où k est la conductivité thermique et  $\delta_T$  l'épaisseur de la couche limite thermique.

Tenant compte de ce qui précède, on établit les équations régissant le mouvement dans l'hypothèse d'un écoulement bidimensionnel :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (\text{II-2})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu \nabla^2 v - \rho g \quad (\text{II-3})$$

$$\rho \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \nabla^2 u \quad (\text{II-4})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \nabla^2 T \quad (\text{II-5})$$

En adaptant ces équations à la région dite de couche limite ( $x \sim \delta_T$ ,  $y \sim H$ ,  $\delta_T \ll H$ ), les relations (II-2)-(II-5) se réduisent à une forme assez simple. Ainsi, on a déjà justifié que seul le terme  $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$  n'est pas négligeable dans l'opérateur  $\nabla^2$ . Egalement, on a montré précédemment que la pression est une fonction de la position longitudinale y, de sorte que l'on a :

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{dP}{dy} = \frac{dP_\infty}{dy} \quad (\text{II-6})$$

Dans ces conditions, on aboutit aux équations de la couche limite dynamique et thermique qui sont données sous la forme suivante :

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = -\frac{dP_\infty}{dy} + \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \rho g \quad (\text{II-7})$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{II-8})$$

## Chapitre II Analyse de la convection naturelle sur plaque plane verticale

Signalons au passage le terme  $\frac{dP_\infty}{dy}$  correspond au gradient de pression hydrostatique  $P_\infty$  lié à l'existence d'une masse ou fluide de densité  $\rho_\infty$ , et telle que :

$$\frac{dP_\infty}{dy} = -\rho_\infty g$$

A partir de ces dernières données, l'équation du mouvement devient :

$$\rho \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\rho_\infty - \rho)g \quad (\text{II-9})$$

D'une façon générale, la solution liée aux équations (II-2), (II-8) et (II-9) permet de déterminer  $u$ ,  $v$  et  $T$  dans la couche limite. De l'équation (II-9), on remarque l'existence du terme de « poids »  $(\rho_\infty - \rho)g$  qui est actionné par le champ de densité  $\rho(x, y)$  généré par le champ de température  $T(x, y)$ .

### • Hypothèse de Boussinesq

On considère que le fluide se comporte comme un gaz parfait [6] de telle sorte que l'on idéalise explicitement le couplage entre les équations (II-8) et (II-9) ; l'équation d'état du fluide est définie par :

$$P = \rho RT \quad (\text{II-10})$$

A une hauteur  $y$  fixée on a les propriétés suivantes :

$$\rho = \frac{P_\infty / R}{T} \quad \text{et} \quad \rho_\infty = \frac{P_\infty / R}{T_\infty} \quad (\text{II-11})$$

D'où l'on tire :

$$\frac{\rho - \rho_\infty}{\rho} = 1 - \frac{T}{T_\infty} \quad (\text{II-12})$$

Le passage à la limite telle que  $(T - T_\infty) \ll T_\infty$ , fournit l'approximation suivante :

$$\rho \approx \rho_\infty \left[ 1 - \frac{1}{T_\infty} (T - T_\infty) + \dots \right] \quad (\text{II-13})$$

Ce résultat, montre bien que la densité  $\rho_\infty$  diminue légèrement vers le bas lorsque la température locale augmente faiblement au-dessus de la température du réservoir  $T_\infty$ . L'expression (II-14) devient alors :

$$\rho \approx \rho_\infty [1 - \beta(T - T_\infty) + \dots]$$

Avec  $\beta(T - T_\infty) \ll 1$

où  $\beta$  est le coefficient d'expansion volumique à pression constante [6].

$$\beta = -\frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho}{\partial T} \right)_p \quad (\text{II-16})$$

Cette approche est à la base de ce qu'on appelle l'hypothèse de Boussinesq. En utilisant l'approximation de Boussinesq de l'équation de la couche limite ce qui revient à faire la substitution de l'équation (II-15) dans l'équation (II-8) et (II-9) et dans chaque cas nous retenons le terme dominant. Ainsi dans l'équation du mouvement (II-9),  $\rho$  apparaît dans le terme d'inertie comme étant la force désignant le poids du fluide. En employant l'approximation de Boussinesq (II-15), le terme d'inertie sera affecté par le terme dominant  $\rho_\infty = cte$  qui devient  $\rho_\infty \beta g(T - T_\infty)$ . Sur cette base, on obtient l'équation du mouvement qui s'écrit comme suit ;

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{II-17})$$

où  $g, \beta, T_\infty$  et  $\nu = \frac{\mu}{\rho_\infty}$  (viscosité cinématique) désignent des constantes de même que

$\alpha = \frac{k}{\rho_\infty c_p}$  qui représente la diffusivité thermique.

A partir de ces considérations, on a pu mettre en relief le couplage entre champ de vitesse et champ de température.

Dans le cas particulier où le fluide est considéré isotherme ( $T=T_\infty$ ), la force de poussée est égale à zéro partout, donc, il n'y aura pas d'écoulement et la solution correspondant aux équations (II-2) et (II-17) devient triviale :  $u = v = 0$ . Dans le cas général, on doit résoudre numériquement ou analytiquement ce problème en s'imposant les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{array}{ll} (1) & x = 0 \quad \left. \begin{array}{l} u = v = 0 \\ T = T_0 \end{array} \right\} \text{Paroi isotherme} \\ (2) & x \rightarrow \infty \quad \left. \begin{array}{l} u = 0 \\ T = T_\infty \end{array} \right\} \text{Réservoir infini et isotherme} \end{array}$$

### II. 3. ETUDE DE LA COUCHE LIMITE STATIONNAIRE

Les différentes études théoriques et expérimentales du problème, notamment, la convection naturelle au long d'une plaque plane verticale a été abordées depuis plus d'un siècle par de nombreux physiciens et mathématiciens dont on se bornera à citer principalement : L. LORENZ (1881), E. SCHMIDT et W. BECKMANN (1930),

POLHAUSEN (1932), E. R. G. ECKERT et T. W. SOEHNGHEN (1950), S. OSTRACH (1952), SQUIRE (1965), SPARROW (1970) et plus récemment A. BEJAN (1994-1995). Ainsi, et afin d'avoir une vision générale sur l'étude de la convection naturelle, on va s'efforcer de donner un aperçu global sur les travaux de ces auteurs.

**II. 3. 1. TRAVAUX DE LORENZ :**

Le processus de la convection naturelle a été abordé dans le cadre de l'étude d'un fluide au voisinage immédiat d'une paroi verticale où d'un cylindre de diamètre très grand ; la première solution théorique a été obtenue par Lorenz [7]. Cet auteur a considéré une paroi soumise à une température uniforme et, il a supposé que les distributions de vitesse et de température du gaz sont uniquement fonction de la direction normale à la paroi verticale, figure (II-1). En tenant compte de ces hypothèses, le système d'équations de mouvement et de l'énergie [(II-5) et (II-9)] peut se réduire à une forme relativement simple :

$$0 = \mu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + (\rho_\infty - \rho)g \tag{II-18}$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{k}{\rho_\infty c_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \tag{II-19}$$

Ces deux équations sont valables pour un gaz évoluant près de la paroi verticale avec les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} x = 0, & V=0, & T = T_0 \\ x = 0, & V = 0, & T = T_\infty \end{cases}$$

C'est dans ces conditions que Lorenz est parvenu à établir l'expression du nombre de Nusselt Nu en fonction de l'écart de température  $\Delta T = T_0 - T_\infty$  :

$$Nu = \frac{hH}{k} = 0.548 \left[ \frac{H^3 \rho^2 g \beta c_p (T_0 - T_\infty)}{\mu k} \right]^{1/4} \tag{II-20}$$

Il est alors facile d'évaluer le flux de chaleur  $q''$  entre la paroi et le fluide :

$$q'' = h(T_0 - T_\infty) = 0.548 \left[ \frac{\rho^2 g \beta c_p k^3}{\mu H} \right]^{1/4} (T_0 - T_\infty)^{5/4} \tag{II-21}$$

La relation (II-20), proposée par Lorenz constitue une bonne approximation malgré des hypothèses très simplificatrices. En outre, cette solution a le mérite de prendre en compte toutes les variables significatives de la convection naturelle. On note également que les corrélations impliquant l'influence du nombre de Rayleigh Ra et Prandtl Pr n'apparaissent pas directement dans la relation (II.20). En fait ce n'est que plus tard que les chercheurs ont introduit les effets de Ra et Pr permettant d'écrire [30] :

$$\text{Nu}_m = 0.548\text{Ra}_H^{1/4} = 0.548(\text{Gr}_H \text{Pr})^{1/4} \quad (\text{II-22})$$

Comme on le verra, par la suite, cette dernière relation a été prédite, assez tardivement, presque un siècle plus tard [8].

### II. 3. 2. TRAVAUX DE SCHMIDT, BECKMANN ET OSTRACH :

Au plan expérimental, les travaux de Beckmann et Schmidt [8] ont consisté à déterminer la distribution de la vitesse et de la température près de la plaque plane chauffée à une température uniforme baignant dans l'air. En effet, la température a été mesurée par un thermocouple et la vitesse de l'air par un fil de Quartz de diamètre 0.02mm et de longueur 20mm.

La figures (II-2 a et b) représente les variations significatives des deux quantités (vitesse et température) pour plusieurs positions le long de la plaque verticale (hauteur 12.5 cm et de température uniforme égale à 65 °c et de température 15 °c dans l'air ) et pour différentes positions parallèles à la plaque verticale. A partir de ces observations, il a été retenu que les profils de vitesse et de température dépendent de  $x$  et  $y$ , résultats qui sont en contradiction avec l'hypothèse de Lorenz. Sur la figure (II-2), et d'après une propriété remarquable de similitude des profils de vitesse et de température il semble que l'on peut utiliser une méthode théorique pour résoudre les équations différentielles spécifiques à la théorie de la couche limite. Polhausen a suggéré à Schmidt et Beckmann d'employer la variable de similitude  $c \frac{y}{\sqrt[4]{x}}$  dans le but de résoudre analytiquement les équations (II-8) et (II-17). Ainsi, en employant la variable de similitude  $\eta = c \frac{x}{\sqrt[4]{x}} = \left(\frac{\text{Gr}_y}{4}\right)^{1/4} \frac{x}{y}$  et la fonction de courant  $\psi = 4\nu c y^{3/4} F(\eta)$

avec :  $c = \left[ \frac{g\beta(T_0 - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4}$

tels que :

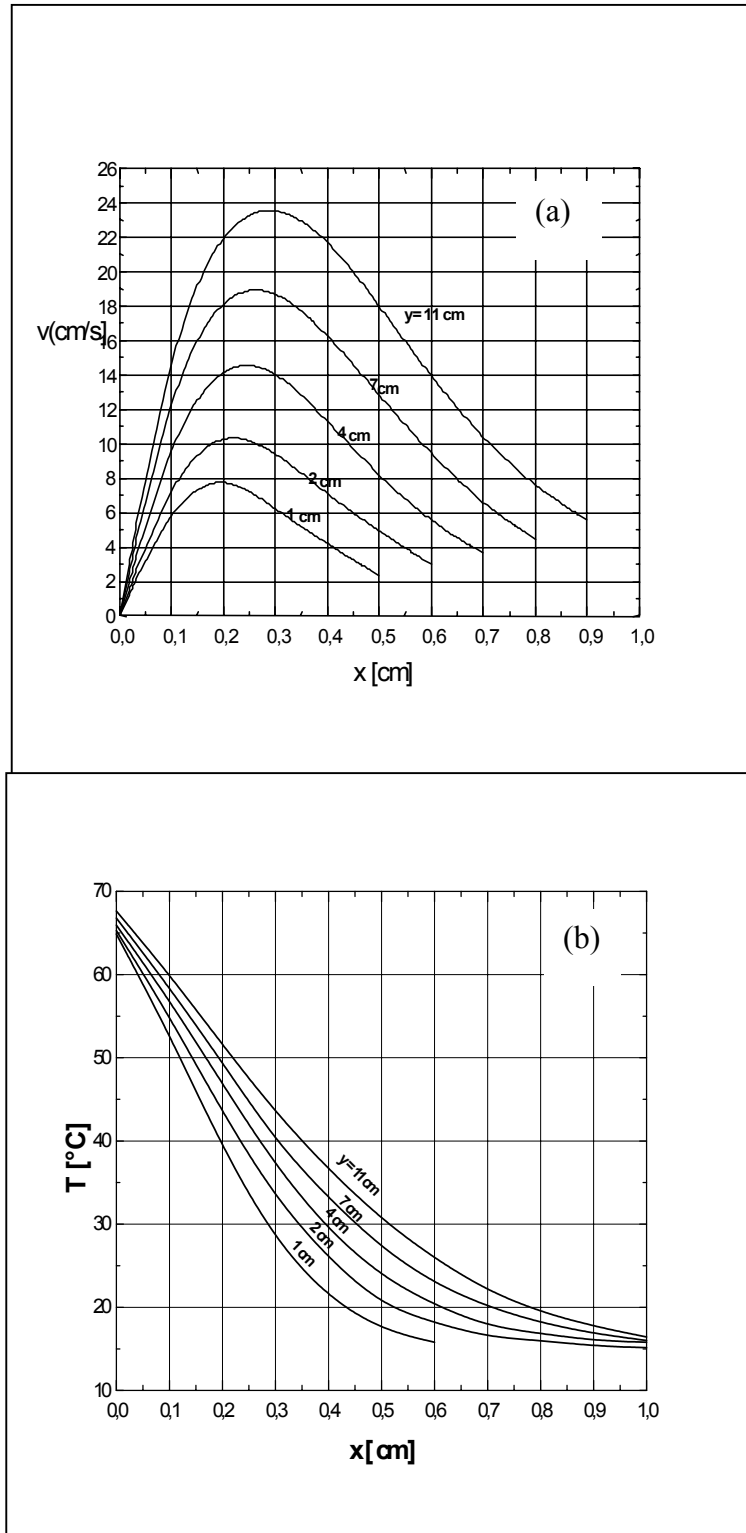
$$\psi = 4\nu \left(\frac{\text{Gr}_y}{4}\right) F(\eta) \quad \text{et} \quad \theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$$

que l'on injecte dans les équations (II-8) et (II-17), on obtient les relations suivantes qui dépendent de la variable unique  $\eta$  :

$$\frac{d^3 F}{d\eta^3} + 3F \frac{d^2 F}{d\eta^2} - 2 \left( \frac{dF}{d\eta} \right)^2 + \theta = 0 \quad (\text{II-18})$$

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} + 3\text{Pr} F \frac{d\theta}{d\eta} = 0 \quad (\text{II-19})$$

Le système d'équations couplées en  $F$  et  $\theta$  possède un caractère fortement Non-linéaire qu'il est très difficile de résoudre directement. Aux équations précédentes, on associe les conditions aux limites suivantes :



**Figure (II.2) : Convection naturelle le long d'une plaque plane verticale baignant dans l'air : Distribution des profils de vitesse verticale (a) et Distribution du profils de température (b).**

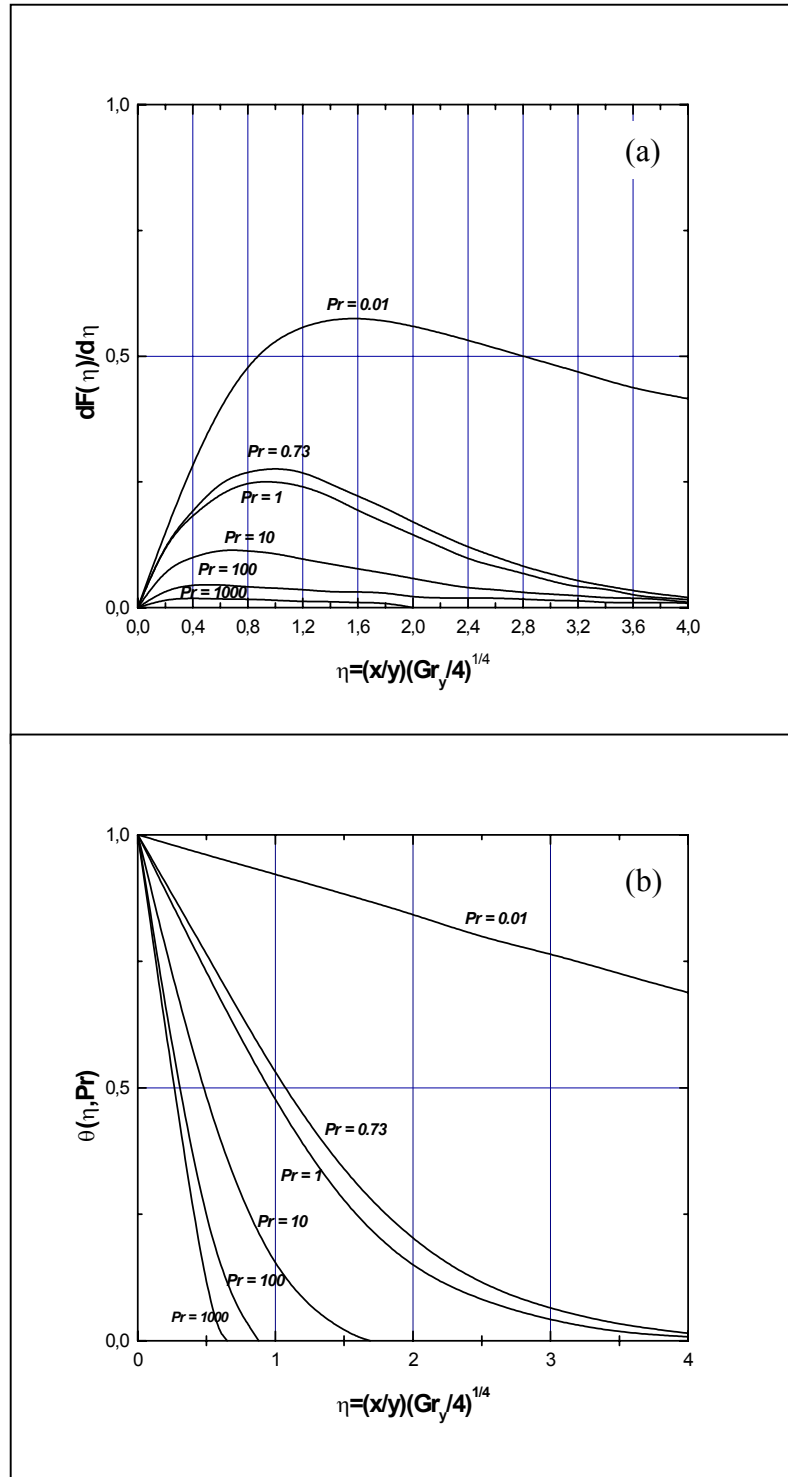


Figure (II.3) : Représentation des : Profils de vitesses (a) et Profils de températures (b), en convection naturelle (plaque plane verticale), travaux d'Ostrach (1952).

$$\begin{aligned} \eta = 0, \quad \frac{dF}{d\eta} = 0, \quad \theta = 1 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad \frac{dF}{d\eta} = 0, \quad \theta = 0 \end{aligned}$$

A l'aide de la méthode théorique de Pohlhausen basée sur la similitude, présentée précédemment, Schmidt et Beckmann ont résolu numériquement le système d'équations différentielles non linéaire dans le cas de l'air ( $Pr = 0.73$ ). Cette approche a permis d'établir l'expression de Nusselt  $Nu$  :

$$Nu = 0.508 \left[ \frac{gH^3(T_0 - T_\infty)}{4\nu^2} \right]^{1/4}$$

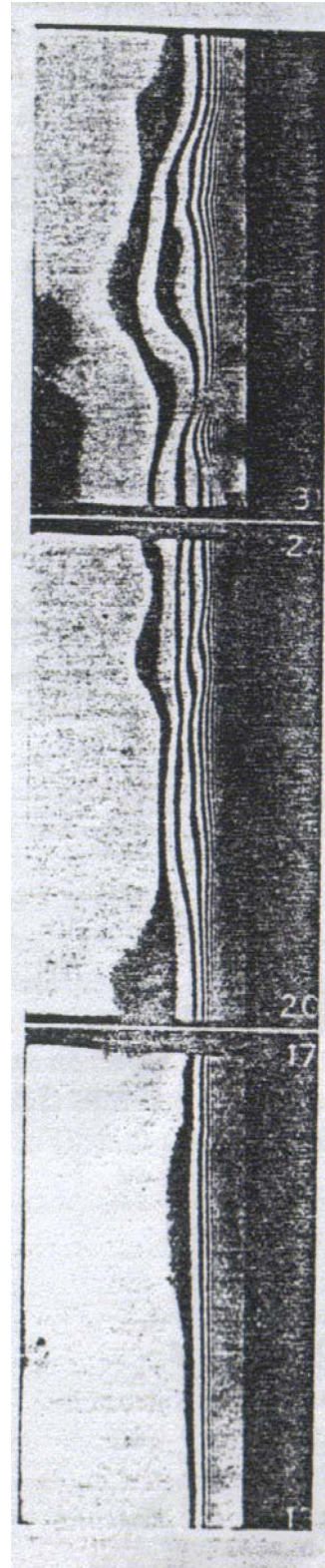
$$Nu = 0.359Gr_y^{1/4}$$

En 1952, Ostrach [9] a employé la même variable  $\eta$  et la fonction  $\psi$ . Il a pu donner une solution numérique du problème dans une large gamme des valeurs de  $Pr$  ( $0.008 \leq Pr \leq 1000$ ) et dont les distributions de vitesse et de température sont représentées sur la figure (II-3). Enfin, l'évaluation du nombre de Nusselt  $Nu$  par la même méthode sera examinée au chapitre suivant.

### II. 3. 3. TRAVAUX D'ECKERT ET SOEHNGHEN :

Parmi les études expérimentales remarquables, on peut citer celles de Eckert et Soehngnen [10, 11,12] qui ont pu obtenir une visualisation illustrant concrètement le phénomène de la convection naturelle. Ils ont observé ce processus dans l'air, à partir des plaques planes, des cylindres, au moyen d'un *interféromètre optique de Mach-Zehnder*. Cet instrument produit des franges d'interférence qui sont enregistrées par une camera. Les franges sont introduites par les variations liées aux gradients de température dans l'air. La distance entre les franges permet de mesurer directement la distribution de densité qui est reliée aux variations de température. On montre sur la figure (II-4), une photographie de franges observées près d'une plaque verticale chauffée dans l'air. Cette-ci a environ 1m de haut et 0.5m de large soumise à un écoulement laminaire au premier niveau 50cm à partir du bas de la plaque. On note que la transition entre régime laminaire et turbulent débute à 52cm, correspondant à un nombre critique de Grashof à peu près égal à  $4.10^8$  tel que : au sommet de la plaque le mouvement amorce le régime turbulent.

La figure (II-5) représente les profils de température pour un écoulement laminaire à différentes distances du bord inférieur de la plaque où l'écart de température entre la plaque et l'air ambiant est égal à  $32^\circ C$ . On observe que les gradients de température sont plus élevés près du bord d'attaque et diminuent lorsque l'air monte le long de la plaque. En effet, ces résultats sont en bon accord avec la relation suivante :



**Figure(II.4) :Phénomène d'interférences illustrant l'écoulement laminaire et pré-turbulent en convection naturelle de l'air le long d'une plaque plane verticale.**

**Figure (II.5) : profils des températures à différentes distances du bord d'attaque pour une plaque plane verticale en convection naturelle.**

$$\text{Nu} = 0.360\text{Gr}_y^{1/4}$$

qui est proche de la formule établie par Schmidt et Beckmann pour l'air à ( $\text{Pr} = 0.75$ ) mettant en évidence le fait que le coefficient local d'échange de chaleur par convection diminue lorsque  $y$  croît. En d'autres termes, on a :

$$h_c \propto y^{-1/4}$$

On reviendra plus loin sur ce dernier résultat pour le comparer à celui obtenu par Eckert [12] utilisant la méthode intégrale.

### II. 3. 2. TRAVAUX DE BEJAN :

L'étude détaillée des échelles intervenant dans les équations de l'énergie et du mouvement, combinée à une analyse qualitative tenant compte de l'influence des propriétés du fluide sur l'équilibre des forces figurant dans l'équation du mouvement, a permis à Bejan [13] de parvenir à une nouvelle formulation qui est totalement différente de celle trouvée par plusieurs chercheurs depuis 1930. Ainsi à partir de simples observations et une brève analyse (analyse d'échelles), un mode de raisonnement apparemment peu cité dans la recherche actuelle de la convection naturelle, il aboutit à une modélisation cohérente et réaliste.

Au vu de l'importance de l'analyse des échelles dans l'approche de ce phénomène, il est nécessaire de faire une présentation détaillée afin de mettre en lumière le processus de mise en œuvre en vue de reformuler le problème de la thermoconvection naturelle.

#### II. 3. 2. 1. ANALYSE DES ECHELLES :

Pour effectuer cette analyse, on se limite volontairement à la région de la couche limite thermique ( $x \sim \delta_T$ ,  $y \sim H$ ) où l'effet du chauffage reste prépondérant. A partir des propriétés de conservation de l'énergie, l'équilibre entre la convection et la conduction conduit à établir la relation suivante :

$$u \frac{\Delta T}{\delta_T}, v \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \quad (\text{II-22})$$

Où l'écart de température :  $\Delta T = T_0 - T_\infty$  représente l'échelle de référence correspondant à l'évolution de la température.

Au niveau de la même couche limite, l'équation de la conservation de la masse nous fournit la relation approchée :

$$\frac{u}{\delta_T} \sim \frac{v}{H} \quad (\text{II-23})$$

La conservation d'énergie impose donc,

$$v \frac{\Delta T}{H} \sim \alpha \frac{\Delta T}{\delta_T^2} \quad (\text{II-24})$$

De laquelle on en déduit l'ordre de grandeur associé à la vitesse  $v$  :

$$v \sim \alpha \frac{H}{\delta_T^2} \quad (\text{II-25})$$

Maintenant, examinons l'équation du mouvement (II-17), permettant d'identifier les interactions liées aux trois forces, à savoir :

$$\left( u \frac{v}{H}, v \frac{v}{H} \right) \sim \left( v \frac{v}{\delta_T^2} + g\beta\Delta T \right) \quad (\text{II-26})$$

**Inertie**
**Frottement**      **Poussée d'Archimede (Flottabilité)**

En tenant compte de l'équation (II-23) et en divisant l'équation (II-26) par  $g\beta\Delta T$ , on obtient les expressions adimensionnelles suivantes :

$$\left( \frac{H}{\delta_T} \right)^4 (Ra_H Pr)^{-1} \sim \left( \frac{H}{\delta_T} \right)^4 Ra_H^{-1} + 1 \quad (\text{II-27})$$

**Inertie**
**Frottement**      **la poussée (Flottabilité)**

Ces considérations nous permettent de dégager un paramètre fondamental régissant la thermoconvection :  $Ra_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu}$ , Ra désigne le nombre de Rayleigh.

En se referant à l'équation (II-27), la compétition entre force d'inertie et force de frottement est bien décrite par les propriétés physiques du fluide ( Nombre de Prandtl Pr) permettant d'en déduire l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta_T$ .  
 En définitive le processus décrivant le mécanisme de convection naturelle fait intervenir Ra et Pr ou la combinaison des deux paramètres, à savoir, le nombre de Grashoff  $Gr = Ra / Pr$ .

### II.3-2-2- ETUDE ASYMPTOTIQUE EN FONCTION DU NOMBRE DE PRANDTL

On distingue deux cas principaux :

**1<sup>o</sup> Cas :** cas des grands nombres de Prandtl  $Pr \gg 1$  :

Au delà de  $Pr \gg 1$ , l'équilibre se produit entre frottement et poussée. De l'équation (II-27) on évalue l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta_T$  :

$$\delta_T \sim H (Ra_H)^{-1/4} \quad (\text{II-28})$$

Apartir de l'équation (II-25) on tire l'expression de la vitesse  $v$  :

$$v \sim \alpha \frac{(Ra_H)^{1/2}}{H} \quad (\text{II-29})$$

L'évaluation du nombre de Nusselt s'effectue d'après la définition de Nu et en combinant les résultats précédents, on trouve alors :

$$Nu = \frac{hH}{k} \sim (Ra_H)^{1/4} \quad (\text{II-30})$$

Des considérations physiques complémentaires montrent que dans la couche  $\delta_T$  le fluide se déplace vers le haut avec une vitesse donnée par l'équation (II-29). De même, on peut mettre en évidence que le mouvement du fluide n'est pas limité à la couche d'épaisseur  $\delta_T$  mais que celle-ci se superpose au mouvement lié à la couche dynamique qui a pour épaisseur  $\delta$  telle que  $\delta \gg \delta_T$ .

En vue de faire l'estimation de l'épaisseur de la couche limite dynamique  $\delta$ , on représente qualitativement les échelles de grandeurs de la couche limite sur la figure (II-6). On s'intéresse au mouvement du fluide à l'extérieur de la couche thermique  $\delta_T$  où le fluide est isotherme et où l'effet de la poussée d'Archimède est absente. En effet l'équation (II-17) traduit l'équilibre entre l'inertie et le frottement au sein de la couche d'épaisseur  $\delta$ , autrement dit, dans cette zone le fluide est actionné par  $\delta_T$  et est freiné par sa propre inertie

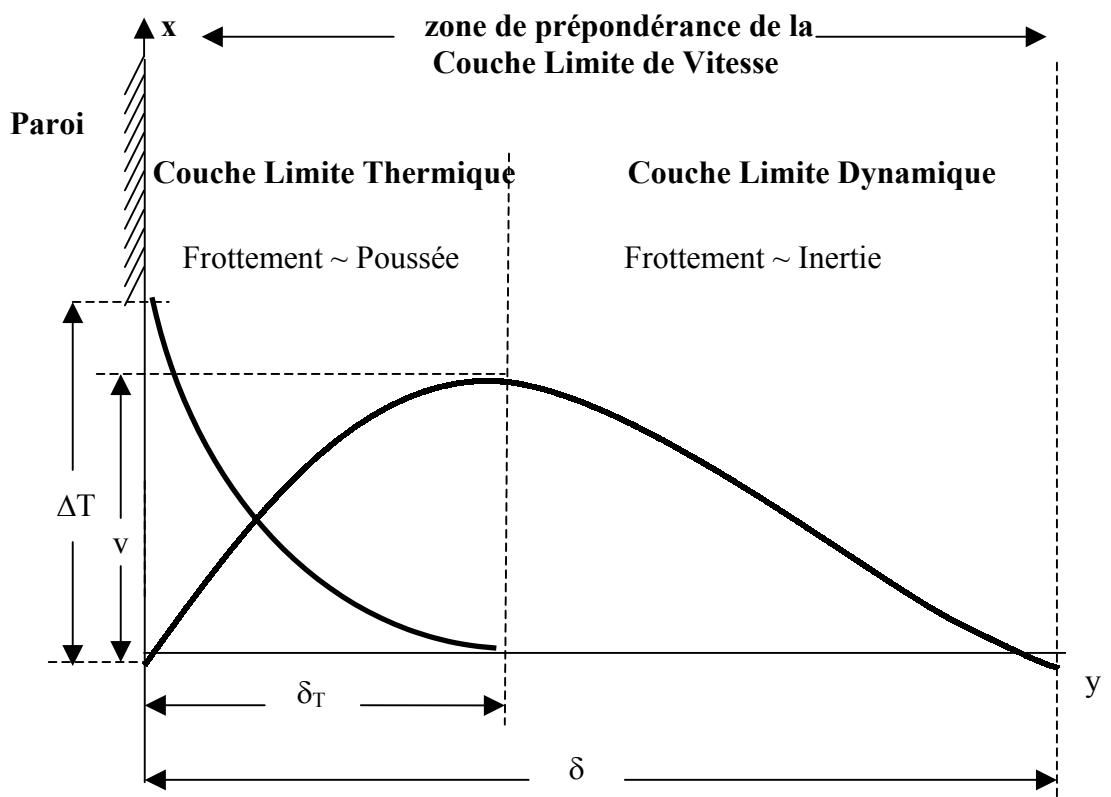


Figure (II.6) : Evolution comparée des échelles de grandeurs de la couche limite le long d'une plaque plane verticale pour  $Pr \gg 1$ .

A partir de l'équation (II-17), l'équilibre prépondérant est formulé par la relation approchée suivante :

$$v \frac{v}{H} \sim v \frac{v}{\delta^2} \quad (\text{II-31})$$

L'équivalence approximative

$$\text{Inertie} \sim \text{Frottement}$$

permettant de tirer :  $\delta \sim H (\text{Ra}_H \text{Pr})^{1/2} \quad (\text{II-32})$

et d'où l'on a :  $\frac{\delta}{\delta_T} \sim \text{Pr}^{1/2} > 1 \quad (\text{II-33})$

**2<sup>0</sup> Cas :** pour les faibles nombres de Prandtl  $\text{Pr} \ll 1$  :

L'équation (II-27) montre que l'équilibre entre la force d'inertie et la poussée d'Archimède se produit à l'intérieur de la couche limite thermique d'épaisseur  $\delta_T$ . De la même manière que précédemment, on établit facilement les caractéristiques suivantes :

- **Épaisseur de la couche limite thermique :**  $\delta_T \sim H(\text{Ra}_H \text{Pr})^{-1/4} \sim H \text{Bo}_H^{-1/4} \quad (\text{II-34})$

- **Vitesse :**  $v \sim \frac{\alpha}{H} (\text{Ra}_H \text{Pr})^{1/2} \sim \frac{\alpha}{H} \text{Bo}_H^{1/2} \quad (\text{II-35})$

- **Nombre de Nusselt**  $\text{Nu} \sim (\text{Ra}_H \text{Pr})^{1/4} \sim \text{Bo}_H^{1/4} \quad (\text{II-36})$

- **Nombre de Boussinesq :**  $\text{Bo}_H = \text{Ra}_H \text{Pr}$

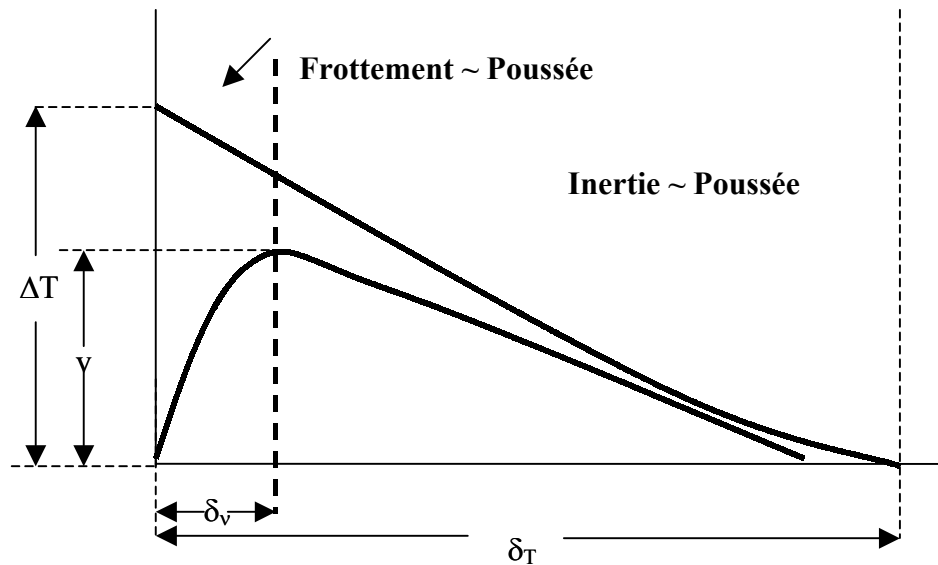
$$\text{Bo} = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha^2} \quad (\text{II-37})$$

Les équations (II-34) et (II-35) montrent qu'à l'intérieur de la couche limite thermique  $\delta_T$  le fluide s'élève vers le haut car il est soumis aux effets combinés de la poussée et d'inertie. Par contre, à l'extérieur de  $\delta_T$ , le fluide est isotherme et donc l'effet de la poussée tend à disparaître : le fluide est alors immobile. Pour plus de détail, on peut se reporter à la figure (II-5) qui montre l'emplacement du pic de la vitesse, paramètre important, que l'on utilisera ultérieurement pour fournir la deuxième échelle de description du mouvement. Au voisinage de la paroi et dans une mince couche d'épaisseur  $\delta_v$ , le fluide est dominé par la poussée et est freiné (visqueusement) au voisinage de la paroi. Dans ces conditions, l'équilibre entre frottement et poussée dans la couche d'épaisseur  $\delta_v$  permet d'écrire l'égalité suivante : :

$$v \frac{v}{\delta_v^2} \sim g\beta\Delta T \quad (\text{II-38})$$

En combinant (II-38) avec (II-34) et (II-35), on trouve :

$$\delta_v = HGr_H^{-1/4} \quad (II-39)$$



Où le paramètre Gr désigne le nombre de Grashof défini par :

$$Gr_H = \frac{g\beta\Delta TH^3}{\nu^2}$$

ou encore

$$Gr_H = Ra_H/Pr$$

L'ensemble des relations précédentes permet d'évaluer le rapport d'épaisseur de couche limite visqueuse à la couche limite thermique :

$$\frac{\delta_v}{\delta_T} \sim Pr^{1/2} < 1$$

Ce résultat était prévisible à partir des considérations qualitatives tirées de la figure (II-5). A ce stade, on peut tirer quelques conséquences de cette analyse à partir de l'évaluation des échelles présentées précédemment qui montre bien l'échec de plusieurs analyses correspondant aux travaux effectués depuis 1930. A titre d'exemple, on peut citer GEBHART [14] qui trouve pour  $Pr > 1$ , le résultat suivant :

$$\delta_T \sim HRa_H^{-1/4}Pr^{-1/4} \quad \text{et} \quad \delta \sim Gr_H^{-1/4}$$

Ces évaluations contredisent celles qui sont proposées par BEJAN (eqs. (II-28) et (II-32)). De même GEBHART a supposé que  $Nu \sim (Ra_HPr)^{1/4}$  pour  $Pr > 1$ , alors que BEJAN a donné  $Nu \sim Ra_H^{1/4}$ . En effet, l'analyse d'échelles de GEBHART n'est pas vérifiée expérimentalement d'après les mesures [15]. En revanche le résultat  $Nu \sim Ra_H^{1/4}$  fourni par BEJAN pour  $Pr > 1$  est confirmé par plusieurs essais effectués par plusieurs auteurs [15] et [9], aussi bien pour le nombre de Nusselt que l'épaisseur  $\delta_T$  et la vitesse  $v$  qui semblent correctes.

Dans ces conditions, il est important d'assigner une définition précise aux nombres sans dimensions Ra, Gr et Bo qui doivent être basés sur un choix d'échelle physiquement significatif.

En ce qui concerne le nombre de Grashof (Gr), il peut être interprété comme le paramètre décrivant le rapport de la poussée d'Archimède à la force visqueuse dans la couche limite de convection naturelle. En sachant l'erreur dans cette interprétation, on considère le cas de la convection naturelle de l'air le long d'une paroi froide verticale dans une chambre où  $Gr_H \sim 10^{10}$ . D'après les interprétations données plus haut, les forces visqueuses peuvent être négligeables comparées à la force de gravité du fait que le nombre de Gr est grand vis-à-vis de l'unité. Ceci est à l'origine de certaines erreurs puisque dans le cas de l'air  $Pr \sim 1$ , donc il existe toujours un équilibre entre le frottement et la poussée (ou bien entre l'inertie et la poussée) car sans l'équilibre des forces il n'y a pas de mouvement à l'état d'équilibre.

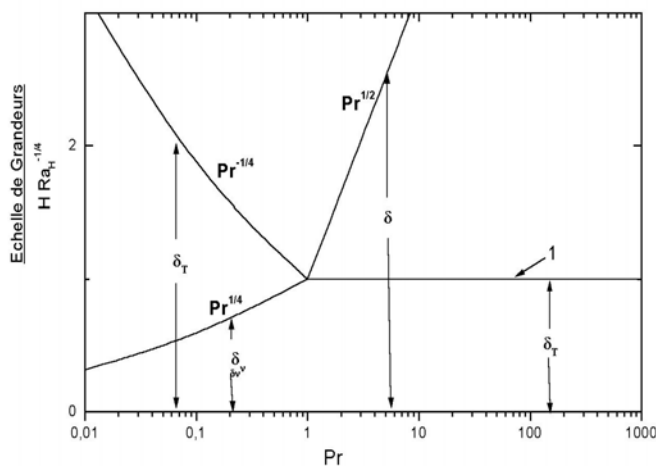
Par ailleurs, les nombres adimensionnels tels que :  $Ra_H$ ,  $Bo_H$  et  $Gr_H$  n'ont pas d'influence, mais la loi de puissance 1/4 de ces nombres qui a une signification purement Géométrique : les valeurs numériques liées à la minceur de la région de la couche limite qui développe une force de poussée, considérablement entraînant l'existence d'un écoulement.

### II.3-3-3- RESOLUTION PAR LA METHODE DE SIMILITUDE :

On a établi précédemment que la plupart des grandeurs présentent la propriété fondamentale des échelles de couche limite proportionnelles à  $y^{1/4}$ . Ainsi afin de construire la variable de similitude  $\eta$ , on montre dans la figure (II-8) l'ordre de grandeur relatif des échelles utilisées précédemment en fonction de Pr en employant  $HRa_H^{-1/4}$  comme grandeur unique pour l'ordonnée.

L'examen de la figure (II-8) révèle que la forme géométrique de la couche limite thermique pour les fluides à  $Pr < 1$  est différente de celle pour les fluides à  $Pr > 1$ . Par conséquent, on choisit une épaisseur de couche limite thermique pour les fluides à  $Pr > 1$  comme échelle de grandeur la plus appropriée et l'on propose une variable de similitude  $\eta(x, y) = x/\delta_T$  qui est le rapport de x à cette épaisseur, soit :

$$\eta = \frac{x}{y} Ra_y^{1/4} \quad (II-40)$$



**Figure (II.8) : Ordre de grandeur relatif de l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta_T$  en fonction du nombre de Pr.**

Sur cette base, on introduit la fonction de courant  $\psi(x, y)$  telle que l'on ait :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad , \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$$

$u$  et  $v$  désignent les composantes de vitesse dans la couche limite bidimensionnelle. Dans ces conditions les équations de la couche limite (II-8) et (II-9) deviennent :

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial T}{\partial y} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (\text{II-41})$$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} = -v \frac{\partial^3 \psi}{\partial x^3} + g\beta(T - T_\infty) \quad (\text{II-42})$$

le profil de température adimensionnel est défini par le rapport :

$$\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \quad (\text{II-43})$$

Tel que  $\theta = \theta(\eta, \text{Pr})$  sera recherché comme une fonction de  $\eta$  et de  $\text{Pr}$ . Par ailleurs le profil de la vitesse verticale  $v$ , s'exprime à l'aide de la combinaison d'expression suivante :

$$v = \frac{\alpha}{y} Ra_y^{1/2} G \quad (\text{II-44})$$

où  $\frac{\alpha}{y} Ra_y^{1/2}$  indique l'échelle de vitesse ( $\text{Pr} \gg 1$ ) et  $G = G(\eta, \text{Pr})$  désigne le profil adimensionnel de la vitesse qui est fonction de  $\eta$  et  $\text{Pr}$ .

De la relation plus haut donnant l'expression de la vitesse :  $v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}$

on tire la relation liée à la fonction de courant :  $\psi = \alpha Ra_y^{1/4} F$  (II-45)

tels que :  $F = F(\eta, \text{Pr})$  et  $\psi = \psi(\eta, \text{Pr})$

avec :  $G = -\frac{\partial F}{\partial \eta}$ .

En substituant les relations (II-43) et (II-45) dans l'équation de la couche limite d'énergie et du mouvement, on obtient le système d'équations adimensionnelles ci-après :

$$\frac{d^2 \theta}{d\eta^2} = \frac{3}{4} F \frac{d\theta}{d\eta} \quad (\text{II-46})$$

$$-\frac{d^3 F}{d\eta^3} + \theta = \frac{1}{\text{Pr}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{dF}{d\eta} \right)^2 - \frac{3}{4} F \frac{d^2 F}{d\eta^2} \right] \quad (\text{II-47})$$

L'examen rapide de l'équation d'énergie permet de vérifier certaines propriétés remarquables, notamment, l'équilibre entre la convection et conduction, alors que l'équation du mouvement met en évidence l'équilibre entre frottement et la poussée d'Archimède lorsque  $Pr$  varie. Les équations (II-46) et (II-47) sont soumises aux conditions aux limites du problème considéré, à savoir :

$$\begin{aligned}
 \text{(i) } x = 0 (\eta = 0): \quad & v = u = 0 \quad , \quad F = 0, \frac{dF}{d\eta} = 0 \\
 & T = T_0 \quad , \quad \theta = 1 \\
 \text{(ii) } x \rightarrow \infty (\eta \rightarrow \infty): \quad & v = 0 \quad , \quad \frac{dF}{d\eta} = 0 \\
 & T = T_\infty \quad , \quad \theta = 0
 \end{aligned}
 \tag{II-48}$$

La résolution numérique des équations (II-46) et (II-47) conduit à faire leur tracés représentés sur les figures (II-9a) et (II-9b) qui montrent l'évolution détaillée des profils de vitesse et de température dans la région de la couche limite thermique ( $\eta$  est d'ordre 1).

En comparant les évolutions des profils de vitesse et de température avec l'analyse précédente et les prévisions numériques, celle-ci suggère une parfaite concordance entre l'étude quantitative et l'étude qualitative de telle sorte que sur la figure (II-7a), quand  $Pr \rightarrow \infty$ , les profils de vitesses tendent vers une courbe unique. De même sur la figure (II-7b) et dans la même limite la portion  $\eta \sim 1$  les profils de vitesses tendent également vers une courbe unique. Cependant le pic maximum associé à la vitesse adimensionnelle est constamment d'ordre 1 (le pic maximum de la vitesse à tendance à déterminer dans la région dominée par la couche limite thermique). A cet effet, il est légitime de dire que ces observations confirment fortement l'analyse d'échelle proposée par BEJAN.

### II.3-3-4- COMPARAISON :

La résolution numérique proposée par BEJAN [5] du problème de la convection naturelle d'une plaque plane verticale par la méthode de similitude en modifiant les résultats déjà publiés par OSTRACH [9] demeure adaptable à la réalité comme on peut le montrer ci-après. Concentrons notre attention sur les résultats liés aux courbes des profils de vitesse et de température déterminés par OSTRACH ; figure (II-3), il est instructif de comparer les figures (II-3) et (II-7) entre elles pour identifier les échelles utilisées au niveau des résultats numériques. En premier lieu, notons que pour l'échelle de grandeur de la couche limite, OSTRACH a adopté la variable  $yGr_y^{-1/4}$  (déjà utilisée par Schmidt et Beckmann [8]) alors que cette échelle ne correspond à aucune réalité physique. En fait les passages à la limite de  $Pr$  ( $Pr \rightarrow 0$ ,  $Pr \rightarrow \infty$ ) : entraînent que les profils de température et de vitesse de la figure (II-3) se modifient lorsque  $Pr$  change.

En second lieu, l'échelle de la vitesse verticale  $\frac{v}{y} Gr_y^{1/2}$  utilisée par

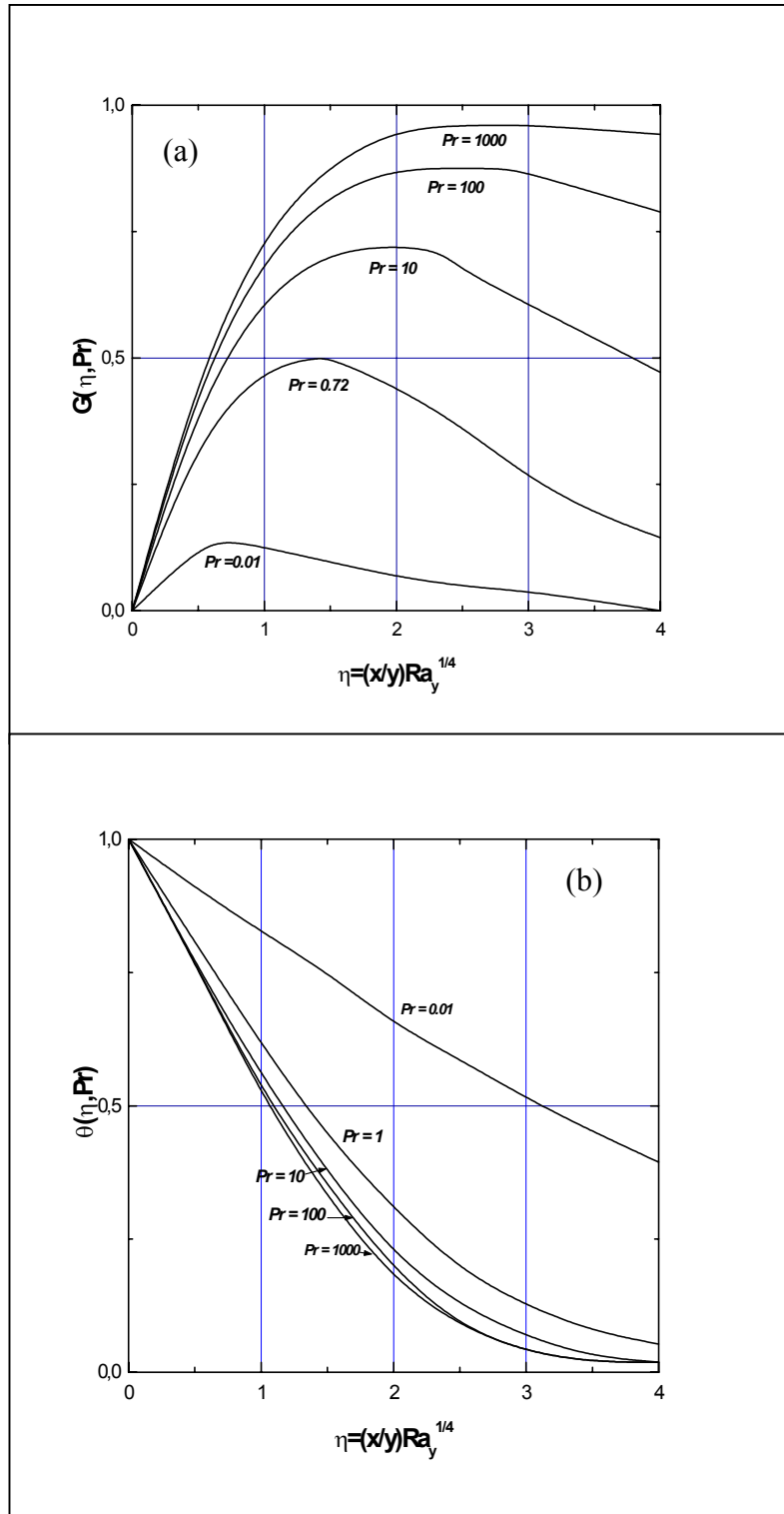


Figure (II.9) : Représentation des : Profils de vitesses (a) et Profils de températures (b), en convection naturelle (plaque plane verticale), travaux de Bejan ( 1994).

OSTRACH est aussi inadaptée du fait que celle-ci n'est pas correcte ni pour  $Pr \rightarrow 0$  ni pour  $Pr \rightarrow \infty$ , puisque la vitesse adimensionnelle continue à se modifier si  $Pr$  change, et dès lors, le maximum de vitesse n'est plus d'ordre 1.

### II.3-3-5 CONCLUSION :

Les résultats trouvés précédemment qui traitent le problème de la convection naturelle d'une plaque plane verticale, utilisant la similitude comme méthode de résolution, ont révélé l'importance de la puissance d'analyse des échelles de similitude qui semble bien adaptée à l'étude de la thermoconvection en général. Il apparaît ainsi que l'analyse des échelles proposées récemment par BEJAN a modifié la problématique par rapport aux travaux qui ont été publiés durant les six dernières décennies avant 1995, notamment en comparaison avec ceux d'OSTRACH [9].

En effet, d'après les résultats de BEJAN, on peut tirer les conséquences suivantes :

- la littérature ancienne de la convection naturelle nous apprend que  $\delta$  est l'épaisseur de la couche limite dynamique [16], mais ce type de concept nie la différence fondamentale entre les propriétés spécifiques de la couche limite de la convection naturelle et la couche limite de la convection forcée. On constate ainsi que le profil de la vitesse est décrit par deux échelles de grandeur ( $\delta$  et  $\delta_T$ ) et non par la seule grandeur  $\delta$  comme en convection forcée.
- Le nombre adimensionnel  $Gr_H$  est un rapport d'évaluation de la tension de cisaillement le long de la paroi verticale fluide-paroi, mais il ne semble pas être une caractéristique du problème.
- Enfin, du point de vue du transfert thermique, l'importance des grandeurs régissant la convection naturelle externe découle de l'influence du nombre de Rayleigh  $Ra$  pour les fluides définis par  $Pr > 1$  et le nombre de Boussinesq ( $Bo$ ) pour les fluides obéissant à  $Pr < 1$ .

## CHAPITRE III

# MODELISATION ANALYTIQUE DE LA CONVECTION NATURELLE SUR PLAQUE PLANE VERTICALE PAR LA SIMILITUDE

Récemment Bejan (1994) a présenté par la méthode de similitude une formulation tout à fait différente de celle proposée auparavant en se basant sur une analyse d'échelles plus adaptée au type de couche limite en convection naturelle.

Partant de ces considérations, on estime que jusqu'à présent, il n'existe pas, à notre connaissance, une solution théorique permettant de déterminer analytiquement les profils de vitesse et de température en raison du caractère non linéaire du système d'équations couplées. En effet, cette question constitue l'objet de ce travail et dans lequel on propose une modélisation permettant d'établir les lois de comportements des profils de vitesse et de température tout en s'inspirant des résultats numériques de Bejan.

### III.1- CONTEXTE D'ETUDE ET MODELISATION :

L'étude de la convection et plus particulièrement, la convection naturelle le long d'une plaque plane verticale a fait l'objet de nombreux travaux depuis plus d'un siècle. Comme on l'a montré précédemment, Schmidt et Beckmann, dans les années 1928-1930, ont été les premiers à avoir présenté l'évolution des profils de vitesse et de température dans la couche limite thermique pour différents points le long de la plaque verticale. Ensuite et, à partir d'une propriété remarquable, concernant la similitude des profils de vitesse et de température d'un point à l'autre, Pohlhausen, en 1932, a été le premier à avoir pensé à proposer une solution théorique du problème dans le cas de l'air ( $Pr = 0.72$ ) en utilisant la propriété de similitude comme méthode de résolution. Plus tard, en employant la même variable de similitude, Ostrach en 1952 a donné une résolution numérique de ce type d'écoulement pour divers fluides dans la gamme ( $0.008 \leq Pr \leq 1000$ ).

Dans ce qui suit, on se base sur les résultats numériques de A. BEJAN qui donne l'évolution des profils de vitesse et de température pour différentes valeurs de Prandtl ( $Pr$ ) figure (II-7). Ces résultats constituent la référence de nos travaux pour construire la modélisation proposée. A cet effet, on concentre notre attention sur le système d'équations différentielles non-linéaires (II-46) et (II-47), où à partir desquelles on propose une expression analytique du profil de vitesse dans le but de satisfaire simultanément, l'équation du mouvement et l'équation de l'énergie. Cette condition



### Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude

- ◆ 4. En tenant compte du couplage entre les profils de vitesse et de température, il faut vérifier qu'on obtient le même profil de température après avoir remplacé la loi proposée de G dans les équations (III-1) et (III-2).

Il est à signaler qu'on a établi plusieurs expressions du profil de vitesse, mais en vain du fait qu'elles n'ont pas abouti à satisfaire, en même temps, les quatre conditions précédentes. De ce point de vue, le choix de l'expression analytique G ( $\eta$ , Pr) est fondamental et doit obéir aux conditions exigées précédemment. Ceci étant, à partir de l'analogie des lois de comportement du profil de vitesse déduit des résultats numériques, figure (II-7), on propose la formulation suivante :

$$G(\eta, Pr) = G(\eta, a, b, c) = a\eta \exp(-b\eta^2) + \frac{1}{2c} \eta \exp(-c\eta) \quad (\text{III-4})$$

qui est l'expression du profil adimensionnel de la vitesse moyenne verticale ou ascendante.

La variable  $\eta = \frac{x}{y} Ra_y^{1/4}$  indique une grandeur de similitude adimensionnelle qui dépend du nombre de Rayleigh local. Enfin les constantes a, b et c désignent des paramètres d'ajustement du profil à déterminer.

#### III.1-a-1- DETERMINATION DES CONSTANTES :

La détermination des constantes a, b, et c peut se faire en se référant à l'existence d'un point maximal caractéristique du profil de vitesse. Cette propriété remarquable mérite d'être explicitée afin d'évaluer la dérivée de G ( $\eta$ , Pr) à  $\eta = \eta_{\max}$ . De manière explicite, on a :

$$\left. \frac{dG(\eta, Pr)}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_{\max}} = 0 \quad (\text{III-5})$$

qui se traduit par :

$$\frac{dG(\eta, Pr)}{d\eta} = a(1 - 2b\eta^2) \exp(-b\eta^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} - \eta \right) \exp(-c\eta) \quad (\text{III-6})$$

en appliquant ceci à  $\eta = \eta_{\max}$ , on trouve :

$$a(1 - 2b\eta_{\max}^2) \exp(-b\eta_{\max}^2) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} - \eta_{\max} \right) \exp(-c\eta_{\max}) = 0 \quad (\text{III-7})$$

A partir de la relation (III-7), on obtient le système d'équations algébriques :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - 2b\eta_{\max}^2 = 0 \\ \end{array} \right.$$

### Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude

---

$$\frac{1}{c} - \eta_{\max} = 0$$

conditions permettant de déterminer b et c :

$$\left\{ \begin{array}{l} b = \frac{1}{2\eta_{\max}^2} \\ c = \frac{1}{\eta_{\max}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III-8)} \\ \text{(III-9)} \end{array}$$

L'expression du profil de vitesse au point  $\eta = \eta_{\max}$  s'écrit :

$$G(\eta_{\max}, a, b, c) = a\eta_{\max} \exp(-b\eta_{\max}^2) + \frac{1}{2c} \eta_{\max} \exp(-c\eta_{\max})$$

En remplaçant b et c par leurs valeurs, on arrive au résultat suivant :

$$G(\eta_{\max}, a, b, c) = \frac{a\eta_{\max}}{\sqrt{e}} + \frac{\eta_{\max}^2}{2e}$$

D'où l'on déduit la constante a :

$$a = \frac{G(\eta_{\max}, a, b, c) - \frac{\eta_{\max}^2}{2e}}{\frac{\eta_{\max}}{\sqrt{e}}} \quad \text{(III-10)}$$

avec  $e = 2.78$

D'après les résultats numériques établis sur une large gamme de Pr, le maximum du profil de vitesse et le  $\eta_{\max}$  correspondant varient avec Pr. Ceci permet de vérifier que les constantes a, b et c dépendent du nombre de Pr (constante caractérisant les propriétés physiques des fluides).

En vue de vérifier la validité de l'expression de la loi proposée, il faut que celle-ci satisfasse les quatre conditions que nous allons étudier en détail ci-après :

#### - Première condition

On applique les conditions aux limites que doit vérifier le profil de vitesse  $G(\eta, a, b, c)$  exprimé par la relation(III-4). Ceci se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta = 0, \quad G(0, a, b, c) = 0 \\ \eta \rightarrow \infty, \quad G(\eta, a, b, c) = 0 \end{array} \right. \quad \text{(III-11)}$$

En comparant (III-11) avec (III-3), on trouve les mêmes résultats.

### Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude

- **Deuxième condition :**

Le tableau (III-1) donne les valeurs exactes des constantes a, b et c en utilisant les formules (III-8, 9, 10). Les points de  $G(\eta_{\max}, Pr)$  et  $\eta_{\max}$  sont tirés à partir des résultats numériques, figure (II-7).

En terme de comparaison, on représente sur la figure (III-4) les courbes montrant l'évolution du profil de vitesse  $G(\eta, a, b, c)$  en fonction de la variable de similitude  $\eta$  pour différentes valeurs de  $Pr$  et, les courbes du même profil de vitesse calculé numériquement par BEJAN, figure (II-7). Par conséquent, il apparaît d'après la figure (III-4) une concordance assez satisfaisante entre les résultats numériques et la loi analytique du même profil de vitesse.

Pr	$\eta_{\max}$	$G(\eta_{\max}, Pr)$	a	b	c
0.01	0.73	0.1348	0.083	0.938	1.369
1	1.34	0.5	0.2088	0.2784	0.7462
10	1.83	0.725	0.0982	0.1493	0.5464
100	2.33	0.87	-0.09	0.092	0.429
1000	2.80	0.96	-0.2326	0.0685	0.3703

**Tableau (III-1) : Valeurs numériques des constantes a, b et c liées au profil de Vitesse G (n. a. b. c).**

- **Troisième condition :**

Dans le même but, en vue de confirmer la validité de la loi proposée, on tente de vérifier celle-ci à travers les deux l'équilibre des deux équations différentielles (III-1) et (III-2) au voisinage de  $\eta \rightarrow 0$  et  $\eta \rightarrow \infty$ .

- Etude locale,  $\eta \rightarrow 0$  ; la paroi est à une température constante. De l'équation (III-1), on impose :

$$\left. \frac{d\theta(\eta, Pr)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = \text{cte}, \text{ ceci signifie que très près de la paroi le flux de chaleur}$$

se transmet par conduction.

De même,

$$\left. \frac{d^2\theta(\eta, Pr)}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = 0, \text{ ce qui implique que ; } \int_0^{\eta} G(\eta, Pr) d\eta \Big|_{\eta=0} = 0$$

qui vérifie bien les conditions aux limites (III-1) dont l'application permet d'évaluer l'intégrale  $\int_0^{\eta} G(\eta, Pr) d\eta$  comme suit :

**Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude**

---

$$\int_0^\eta G(\eta, Pr) d\eta = \int_0^\eta (a\eta \exp(-b\eta^2) + \frac{1}{2c} \eta \exp(-c\eta)) d\eta$$

$$= -\frac{a}{2b} \exp(b\eta^2) - \frac{1}{2c^2} (\eta + \frac{1}{c}) \exp(-c\eta) + cte$$

On a :  $\int_0^\eta G(\eta, a, b, c) d\eta \Big|_{\eta=0} = 0$  où l'on a posé :  $cte = \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right)$

On en déduit la fonction de courant adimensionnelle

$$\psi = \int_0^\eta G(\eta, a, b, c) d\eta = -\frac{a}{2b} \exp(-b\eta^2) - \frac{1}{2c} (\eta + \frac{1}{c}) \exp(-c\eta) + \frac{1}{2} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right) \quad (III-12)$$

dont la représentation graphique pour différentes valeurs de Pr est représentée sur la figure (III-1)

En ce qui concerne l'équation du mouvement, on vérifie celle-ci à l'aide de l'expression G :

$$\theta(0, Pr) + \frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{Pr} \left[ \frac{1}{2} G^2(0, a, b, c) - \frac{3}{4} \frac{dG(\eta, a, b, c)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \int_0^\eta G(\eta, a, b, c) d\eta \Big|_{\eta=0} \right]$$

A la paroi le terme d'inertie est égale à zéro et  $\theta(0, Pr) = 1$ . Donc, le terme droit égale

au terme gauche si  $\frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = -1$

Calculons maintenant  $\frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2}$ , de l'équation (III-6), on a :

$$\frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} + \frac{d}{d\eta} \left[ a(1 - 2b\eta^2) \exp(-b\eta^2) \right] + \frac{d}{d\eta} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{c} - \eta \right) \exp(-c\eta) \right]$$

$$\frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} = 2ab\eta(2b\eta^2 - 3) \exp(-b\eta^2) + \left( \frac{1}{2} c\eta - 1 \right) \exp(-c\eta) \quad (III-13)$$

à  $\eta = 0$  ,  $\frac{d^2 G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} \Big|_{\eta=0} = -1$  (III-14)

### Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude

Ce résultat est valable quelque soit la valeur de Pr, [voir la figure (III-3)], il permet de vérifier l'équation à résoudre et de contrôler la validité de la loi proposée G ( $\eta$ , a, b, c).

- Etude asymptotique,  $\eta \rightarrow \infty$  : pour cette valeur, le fluide est isotherme, ce qui permet de vérifier qu'il n'y a pas de variation de température.

A partir de l'équation de l'énergie (III-1), on établit :

$$\theta(\eta, Pr) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{d\theta(\eta, Pr)}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{d^2\theta(\eta, Pr)}{d\eta^2} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

$$\text{donc, } \int_{\eta \rightarrow \infty}^{\eta} G(\eta, a, b, c) d\eta \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = \text{cte dépendant de Pr, figure(III-2).}$$

Alors que pour l'équation du mouvement, on vérifie également que :

$$G(\eta, a, b, c) \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{dG(\eta, a, b, c)}{d\eta} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = \frac{d^2G(\eta, a, b, c)}{d\eta^2} \Big|_{\eta \rightarrow \infty} = 0$$

relation que l'on contrôle via les courbes représentées sur les figures (III-1, 2, 3).

A partir de cela, on constate que les équations (III-1) et (III-2) sont bien vérifiées ainsi que les conditions aux limites associées et légitime que l'expression proposée de la loi analytique du G qui semble très performante. Enfin, pour ce qui est de la dernière condition, elle sera étudiée ensuite afin de déterminer analytiquement l'expression du profil de température  $\theta(\eta, Pr)$ .

#### III.1-b- DETERMINATION DU PROFIL DE TEMPERATURE :

La détermination du profil de température  $\theta(\eta, Pr)$  est possible à partir de la connaissance du profil de vitesse G ( $\eta$ , a, b, c) proposée. Et réciproquement comme précédemment, on tente d'évaluer  $\theta(\eta, Pr)$  par deux voies différentes :

##### 1-b-1- PREMIERE METHODE :

On cherche à calculer  $\theta(\eta, Pr)$  donnant l'évolution du profil de température moyenne pour différentes valeurs de Pr, à partir de l'équation du mouvement (III-2) connaissant la loi du profil de vitesse moyenne(III-4).

Dans ces conditions, l'équation du mouvement (III-2) fournit :

$$\theta(\eta, Pr) = -\frac{d^2G(\eta, Pr)}{d\eta^2} + \frac{1}{Pr} \left[ \frac{1}{2} G^2(\eta, Pr) - \frac{3}{4} \frac{dG(\eta, Pr)}{d\eta} \int_{\eta \rightarrow \infty}^{\eta} G(\eta, Pr) d\eta \right] \quad (\text{III-15})$$

En remplaçant les termes (III-4, 6, 12, 13) dans l'équation (III-15), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \theta(\eta, Pr) = & \left[ -4ab^2\eta^3 + \frac{6ab}{8Pr} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right) \eta^2 + 6ab\eta - \frac{3a}{8Pr} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right) \right] \exp(-b\eta^2) \\
 & + \left[ \left( -\frac{c}{2} + \frac{3}{16Pr} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right) \right) \eta - \left( \frac{3}{16cPr} \left( \frac{a}{b} + \frac{1}{c^3} \right) - 1 \right) \right] \exp(-c\eta) \\
 & + \left[ \left( \frac{a^2}{2Pr} - \frac{3a^2}{4Pr} \right) \eta^2 + \frac{3a^2}{8bPr} \right] \exp(-2b\eta^2) + \left[ \frac{1}{8c^2Pr} \eta^2 + \frac{3}{16cPr} \eta + \frac{3}{16c^2Pr} \right] \exp(-2c\eta) \\
 & + \left[ \left( \frac{a}{2cPr} - \frac{6ab}{8cPr} \right) \eta^2 - \frac{3a}{16bPr} \eta + \frac{3a}{8cPr} \left( 1 - \frac{1}{2b} \right) \right] \exp(-b\eta^2 + c\eta)
 \end{aligned}$$

(III-16)

### 1-b-2- DEUXIEME METHODE :

Le deuxième procédé utilisé pour calculer le profil de température est basé sur l'équation d'énergie :

$$\frac{d^2\theta(\eta, Pr)}{d\eta^2} + \frac{3}{4} \frac{d\theta(\eta, Pr)}{d\eta} \int_0^\eta G(\eta, a, b, c) d\eta = 0 \quad (III-17)$$

qui permet d'établir  $\theta(\eta, Pr)$  :

$$\theta(\eta, Pr) = \theta_0 \int_0^\eta \exp\left[-\frac{3}{4} \int_0^\eta \left( \int_0^\eta G(\eta', a, b, c) d\eta' \right) d\eta''\right] d\eta''' + \theta_1 \quad (III-18)$$

où les constantes  $\theta_0$  et  $\theta_1$  sont déterminées par les conditions aux limites suivantes :

- $\eta = 0, \quad \theta(0, Pr) = 1$
- $\eta \rightarrow \infty, \quad \theta(\infty, Pr) = 0$

de l'équation (III-12), on en déduit après intégrations successives:

$$\theta(\eta, Pr) = \theta_0 \int_0^\eta \exp\left[ \frac{3}{4b^{5/2}c^4} (abc^4 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\eta) - 2cb^{5/2} \exp(-c\eta) - (2ab^{3/2}c^4 \eta + 2ab^{5/2}) \eta + 4b^{5/2}) \right] d\eta + \theta_1 \quad (III-19)$$

On peut maintenant évaluer  $\theta_0$  et  $\theta_1$ , en simplifiant l'expression précédente de manière formelle comme suit :

$$\theta(\eta, Pr) = \theta_0 \int_0^\eta \exp(g(\eta)) d\eta + \theta_1$$

### Chapitre III Modélisation analytique de la convection naturelle sur plaque plane verticale par la similitude

---

avec,

$$g(\eta) = \frac{3}{4b^{5/2}c^4} [abc^4 \sqrt{\pi} \operatorname{erf}(\sqrt{b}\eta) - 2b^{5/2}c \exp(-c\eta) - (2ab^{3/2}c^4 + 2ab^{5/2})\eta + 4b^{5/2}]$$

L'application des conditions aux limites fournit la valeur de  $\theta_1$ :

$$\text{Si } \eta = 0, \quad \theta(0, \text{Pr}) = \theta_0 \int_0^0 \exp(g(\eta)) d\eta + \theta_1 = 1$$

d'où ;  $\theta_1 = 1$

La deuxième condition aux limites permet de déterminer la constante d'intégration  $\theta_0$ . On sait qu'en réalité l'infini n'existe pas physiquement dans les couche limites dynamique ou thermique. Ainsi d'après la plupart des courbes d'évolutions de la température étudiées numériquement, on remarque que les valeurs associées à la température ne sont plus significatives lorsque  $\eta$  tend à l'infini puisque  $\theta(\eta, \text{Pr}) \leq 0.1\%$ .

En effet si  $\eta \rightarrow \infty$  on a :

$$\theta(\eta_\infty, \text{Pr}) = \theta_0 \int_0^{\eta_\infty} \exp(g(\eta)) d\eta + 1 = 0$$

on tire :

$$\theta_0 = -\frac{1}{\int_0^{\eta_\infty} \exp(g(\eta)) d\eta} \quad (\text{III-20})$$

tel que l'intégrale  $\int_0^{\eta_\infty} \exp(g(\eta)) d\eta$  désigne une constante dépendant de Pr. Par

conséquent  $\theta_0$  dépend de Pr.

Dans ces conditions l'intégrale précédente (III-18), permet d'établir analytiquement le profil de température moyenne de façon normalisée

$$\theta(\eta, \text{Pr}) = 1 - \frac{\int_0^\eta \exp(g(\eta)) d\eta}{\int_0^\infty \exp(g(\eta)) d\eta}$$

## CHAPITRE IV

### METHODE INTEGRALE

Il est admis que la méthode intégrale peut contribuer à résoudre avec une efficacité relative les équations gouvernant les processus thermoconvectifs dans le but de déterminer la variation en fonction  $y$ , des grandeurs physiques telles que : le flux de chaleur local ( $q''$ ), le coefficient du transfert thermique local ( nombre de Nusselt) et le profil de vitesse ( $V$ ) ainsi que les épaisseurs de couches limites associées.

En effet, à la suite de notre analyse de la convection naturelle évoluant autour d'une plaque plane verticale menée à l'aide de la méthode de similitude, on se propose de résoudre alternativement ce problème par la méthode intégrale en employant la même forme du profil de vitesse adopté précédemment afin de vérifier la validité d'une telle loi de comportement de l'écoulement et d'estimer la précision de nos calculs..

#### IV. 1 : PRINCIPE DE LA METHODE :

Par opposition à la méthode de similitude qui cherche à trouver une solution à l'équation différentielle ayant donc un caractère local, la méthode intégrale procède, comme son nom l'indique, à l'intégration directe des champ de vitesse et de température au sein de la couche limite.

Dans le contexte de notre travail, c'est donc une méthode globale qui est basée sur l'intégration analytique des équations du mouvement et de l'énergie suivants :

$$\frac{d}{dy} \int_0^{\infty} v^2 dx = -v \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)_{x=0} + g\beta \int_0^{\infty} (T - T_{\infty}) dx \quad (\text{IV-1})$$

$$\frac{d}{dy} \int_0^{\infty} v(T_{\infty} - T) dx = \alpha \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (\text{IV-2})$$

Partant des propriétés tirées de l'analyse d'échelles évoquée au chapitre II, on travaille dans les conditions suivantes :

- 1- La forme du profil de vitesse est gouvernée par deux échelles de grandeurs, l'une ( $Pr < 1$ ) par les épaisseurs de la couche de cisaillement de la paroi ( $\delta_v$ ) et de la couche thermique ( $\delta_T$ ), l'autre ( $Pr > 1$ ) par les épaisseurs de la couche dynamique ( $\delta$ ) et de la couche thermique ( $\delta_T$ ).

2- la géométrie de la couche limite thermoconvective pour les fluides tels que  $Pr > 1$  diffère totalement de celle pour les fluides à  $Pr < 1$ .

**IV. 2. MISE EN ŒUVRE ET SOLUTION :**

Deux cas ont été considérés :

**IV. 2. 1. Paroi verticale à température uniforme :**

Tenant compte de ces dernières constatations, on essaye de résoudre les équations intégrales (IV-1) et (IV-2) en s'appuyant sur les hypothèses suivantes :

- 1- La forme du profil de vitesse choisi sera la même que celle que l'on a proposé selon la méthode de similitude
- 2- Préalablement on réalise un teste au voisinage du cas limite  $Pr \approx 1$ , pour lequel les épaisseurs  $\delta$  et  $\delta_T$  sont égales. Ceci, a pour objectif de lever toute sorte d'ambiguïté sur les difficultés à relier une forme du profil de vitesse dépendant, en même temps, aux deux épaisseurs ( $\delta_v$  ou  $\delta$  et  $\delta_T$ ).
- 3- Les difficultés liées au bon choix des profils de vitesse et de température valables pour  $Pr \approx 1$ , conduisent à se référer qualitativement aux résultats de la méthode de similitude puisque on note (pour  $Pr \approx 1$ ) que la moitié du profil de température coïncide pratiquement avec le maximum de celui de vitesse.

En effet, tenant compte de ces trois dernières restrictions, les profils de vitesse et de température sont proposées conformément aux expressions suivantes :

• Température : 
$$T - T_\infty = \Delta T \operatorname{Erfc} \left( -A \frac{x}{\delta_T} \right) \tag{IV-3}$$

• Vitesse : 
$$v = V \left( \frac{x}{\delta} \right) \left( \exp \left( - \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 \right) + \frac{1}{2} \exp \left( -B \frac{x}{\delta} \right) \right) \tag{IV-4}$$

Les constantes A et B ont pour valeurs respectives :  $A = \frac{3}{2\sqrt{\pi}}$  et  $B = 4$

$\delta_T$ ,  $\delta$  et V désignent respectivement, l'épaisseur de la couche limite thermique, dynamique et le profil de vitesse sachant que :  $\delta_T = \delta = y^{1/4}$  et  $V = y^{1/2}$ .

En remplaçant les profils (IV-3) et (IV-4) dans le système d'équations intégrales (IV-1) et (IV-2), on arrive aux résultats suivants :

$$g\beta\Delta T = \frac{2}{3} \left[ 0.22 + \frac{3}{2} \nu \right] \tag{IV-5}$$

avec  $\alpha = 0.1526$  (VI-6)

Par définition le nombre de Nusselt est évalué par l'expression suivante :

$$Nu = \frac{q''}{T_0 - T_\infty} \frac{y}{k} = \left[ \frac{\alpha \nu}{g \beta \Delta T} \right]^{1/4} Ra_y^{1/4} \quad (VI-7)$$

En injectant les relations (VI-5) et (VI-6) dans (VI-7), on obtient la valeur de Nu qui est la fonction des paramètres d'influences  $Ra_y$  et Pr :

$$Nu = 0.510 \left[ \frac{Pr}{0.96 + Pr} \right]^{1/4} Ra_y^{1/4} \quad (VI-8)$$

Ce résultat permet d'en déduire le nombre de Nusselt moyen  $\overline{Nu}$  comme suit :

$$\overline{Nu} = \frac{4}{3} Nu_y^*$$

soit explicitement :

$$\overline{Nu} = 0.68 \left[ \frac{Pr}{0.96 + Pr} \right]^{1/4} Ra_H^{1/4} \quad (VI-9)$$

qui dépend également de  $Ra_H$  et Pr.

Il est à noter que plusieurs chercheurs ont travaillé dans le cadre de la méthode intégrale en se donnant une loi empirique des profils de vitesse et de température [voir Tableau (IV.1)]leur ayant permis d'obtenir l'expression du coefficient du transfert de chaleur (nombre de Nusselt Nu) en fonction de Pr et Ra.

Il apparaît d'après leur calcul que le nombre de Nusselt Nu dépend très fortement du choix des expressions analytiques des profils de vitesse et température. Ce choix est toujours dicté par la donnée d'une forme raisonnable des profils (expression simple) mènent avec les moindres complications analytiques.

Pour ce qui nous concerne, la figure (IV-2) montre les courbes obtenues à partir des différentes expressions théoriques du nombre de Nusselt en fonction de Pr et Ra dans une large gamme des valeurs de Pr que nous allons comparer à la corrélation expérimentale de Churchill [18]. Ces expressions sont établis d'après les mêmes équations intégrales [ eqs (VI-1) et (VI-2)], mais avec une différence qui est spécifique au choix des profils de vitesse et de température proposés. On relève que nos résultats apparaissent complètement confondus avec ceux de Squire [21] et Eckert[10,11,12], et sont également très proche des données expérimentales. Sur la figure (IV-2), on montre les prévisions du nombre de Nusselt données

par Eckert et Squire ayant utilisé la solution intégrale. Ces auteurs ont supposé que les profils de vitesse et de température sont de forme polynomiale, en admettant cependant que  $\delta_T = \delta$ , ce qui est justifié uniquement pour les fluides évoluant au voisinage de  $Pr \approx 1$ . L'analyse de Squire et Eckert semble particulièrement réaliste s'agissant de l'allure de  $Nu$  qui est valable dans une large gamme de valeurs de  $Pr$ .

On peut conclure que l'on note une légère différence entre la relation (VI-8) que nous avons obtenue et les données expérimentales [ Tableau (VI-1)], confirmant ainsi, la puissance de la forme de la loi du profil de vitesse employée aussi bien dans la méthode intégrale que celle en similitude. Par contre, d'après la figure (IV-2), l'expression établie par BEJAN semble relativement éloignée des données expérimentales de fait que l'écart peut atteindre 20 %. En dépit de cette différence, il semble que le raisonnement de BEJAN reste valable, du point de vue mécanisme physique puisque celui-ci est basé sur l'idée que la dynamique de la couche limite thermoconvective pour les  $Pr > 1$  est différente de celle pour  $Pr < 1$ . En effet, BEJAN a proposé des profils de vitesse qui dépendent non seulement de l'épaisseur dynamique (ce qui est d'ailleurs le cas des profils utilisés par ECKERT et SQUIRE) mais des deux épaisseurs  $\delta$  ( $Pr > 1$ ) ou  $\delta_v$  ( $Pr < 1$ ) et  $\delta_T$ , voir Tableau (VI-1). On peut s'expliquer ce désaccord relatif par le fait que le choix des profils de vitesse et de température sont considérés assez approximatif mais ne sont pas assez précis pour conduire à une prévision très performante de la théorie d'une double couche limite.

AUTEURS	NATURE DE L'ETUDE	NOMBRE DE NUSSOLT $Nu = Nu(Ra, Pr)$
<b>CHURCHILL (1971)</b>	EXPERIMENTALE	$Nu = 0.5025 \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{0.492}{Pr}\right)^{9/16}\right]^{4/9}} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>0 &lt; Pr &lt; \infty</math></b></p>
<b>ECKERT (1955)</b>	THEORIQUE (méthode intégrale)	$Nu = 0.508 \left[\frac{Pr}{Pr + 0.952}\right]^{1/4} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>0 &lt; Pr &lt; \infty</math></b></p>
<b>SQUIRE (1965)</b>	THEORIQUE (méthode intégrale)	$Nu = 0.508 \left[\frac{Pr}{Pr + 0.952}\right]^{1/4} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>0 &lt; Pr &lt; \infty</math></b></p>
<b>BEJAN (1995)</b>	THEORIQUE (méthode intégrale)	$Nu = 0.783 \left[\frac{Pr^{3/2}}{Pr^{3/2} + 2.22 Pr + 2.43 Pr^{1/2}}\right]^{1/4} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>Pr \gg 1</math></b></p> $Nu = 0.554 \left[\frac{Pr^{1/2}}{Pr^{1/2} + 0.646}\right]^{1/2} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>Pr \ll 1</math></b></p>
<b>PRESENT TRAVAIL</b>	THEORIQUE (méthode intégrale)	$Nu = 0.510 \left[\frac{Pr}{Pr + 0.96}\right]^{1/4} Ra_y^{1/4}$ <p style="text-align: right;"><b><math>0 &lt; Pr &lt; \infty</math></b></p>

Tableau (IV-1) : Expressions théorique et expérimentale du nombre de Nusselt Nu en fonction de Pr et Ra en convection naturelle d'une paroi verticale à température uniforme.

**VI. 2. 2. Paroi verticale à flux thermique uniforme :**

Les études présentées précédemment sont basées sur la supposition que la paroi verticale est maintenue à température constante (condition isotherme). Celle-ci constitue une bonne approximation dans le cas où celle-ci est considérée bonne conductrice dans la direction selon x.

En examinant les modèles utilisés en pratique, la majorité des cas étudiés travail dans un cadre à flux de chaleur ( $q''$ ) constant. On rencontre cette situation dans plusieurs applications, notamment, dans la technologie des composants micro-électroniques où l'effet de chaleur provient ou résulte de la résistance chauffante. En effet, l'étude du transfert de chaleur, dans ce cas, consiste à déterminer la différence de température  $[T_0(y) - T_\infty]$  entre la paroi et le milieu ambiant lorsque la condition de paroi à flux de chaleur uniforme est maintenu.

En vue de voir comment varient les grandeurs  $\Delta T = T_0(y) - T_\infty$  et  $\delta_T$  désignant respectivement, la variation de température paroi-milieu ambiant et l'épaisseur de la couche limite thermique, on va reprendre la même analyse d'échelles utilisée précédemment mais avec de nouvelles grandeurs.

Par définition le flux de chaleur à la paroi est

$$q'' = k \frac{\Delta T}{\delta_T} \quad (IV-10)$$

Ainsi pour les fluides à  $Pr \gg 1$ , avec une paroi isotherme on a [13] :

$$\delta_T \approx H \left( \frac{g\beta\Delta TH^3}{\alpha\nu} \right)^{1/4} \quad (IV-11)$$

Dans ce qui suit on a posé l'écart :  $\Delta T = T_0(y) - T_\infty$  comme inconnu alors que  $q''$  est supposé donné. A partir de la relation précédente on fait apparaître le nombre de Rayleigh global  $Ra_H$ , d'où :

$$\delta_T \approx H Ra_H^*{}^{1/5} \quad (IV-12)$$

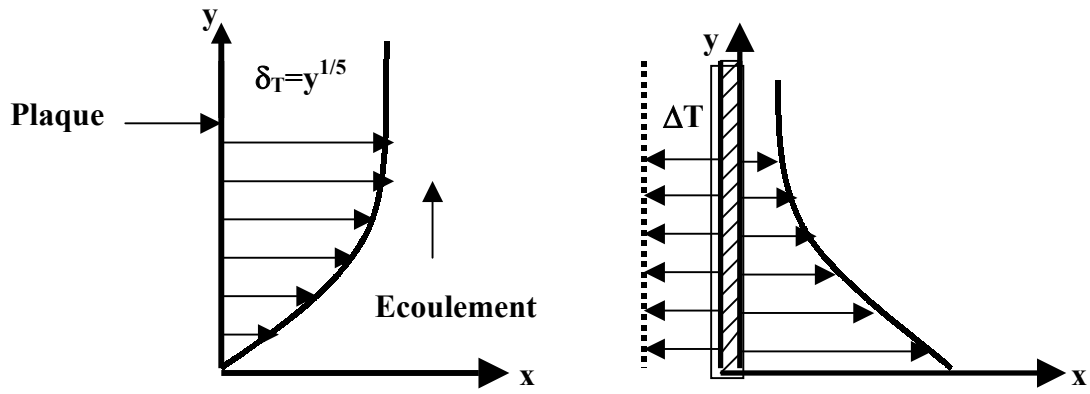
tel que celui-ci est donné par :

$$Ra_H = \left( \frac{g\beta q'' H^4}{\alpha\nu k} \right) \quad (IV-13)$$

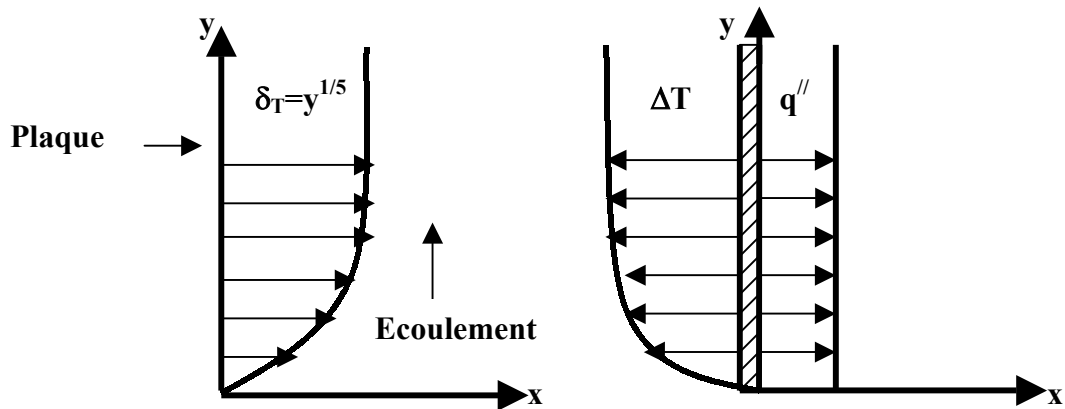
Dans ces conditions, la relation (IV-10) permet d'évaluer l'écart de température  $\Delta T$ , si  $Pr \gg 1$ , qui s'exprime comme suit :

$$\Delta T = \frac{q''}{k} H Ra_H^*{}^{1/5} \quad (IV-14)$$

Les relations établis (IV-12, 13, 14) fournissent des estimations des grandeurs locales  $\delta_T$  et  $\Delta T$  qui sont proportionnelles à  $y^{1/5}$ . La variation de ces deux grandeurs pour une paroi isotherme dans les conditions de chauffage à flux uniforme sont schématisées sur le figure (IV-1a et b).



(a) Paroi isotherme



(b) Paroi à flux de chaleur uniforme

Figure(IV-1) : Les effets des conditions aux limites thermique sur la convection naturelle au long d'une paroi verticale.

Le nombre de Nusselt local pour une paroi à flux constant peut être défini d'après la relation :

$$Nu = \frac{q'' y}{\Delta T k} \quad (IV-15)$$

qui met en évidence l'influence directe des paramètres  $q''$ ,  $\Delta T$  et  $y$

On évalue ainsi pour les fluides tels que  $Pr \gg 1$ , un nombre de Nusselt valant :

$$Nu \approx \frac{H}{\delta_T} \approx Ra_y^{*1/5} \quad (IV-16)$$

Et pour les fluides tels que  $Pr \ll 1$ , on obtient les relations suivantes :

- Ecart de température : 
$$\Delta T = \frac{q''}{k} H (Pr Ra)^{-1/5} \quad (IV-17)$$

- Epaisseur de la couche limite thermique : 
$$\delta_T \approx H (Pr Ra^* y)^{1/5} \quad (IV-18)$$

- Nombre de Nusselt : 
$$Nu \approx (Ra^* H Pr)^{1/5} \quad (IV-19)$$

#### IV. 2. 2. a). Détermination du nombre de Nusselt local ( $Nu_y$ ) :

La méthode intégrale permet de calculer le coefficient de transfert de chaleur local d'une couche limite laminaire en convection naturelle d'une paroi verticale soumise à un flux de chaleur uniforme ( $q'' = \text{constant}$ ) en tenant compte des profils de vitesse et de température. D'après la relation (IV-3 et IV-4) où est conduit à l'identification des paramètres suivants :

$$\begin{cases} g\beta \frac{q''}{k} = 0.37 + \frac{9}{4} \nu \\ \alpha = 0.1628 \end{cases} \quad (IV-20)$$

Partant des équations (IV-10) et (IV-15), on tire l'expression de Nusselt local  $Nu_y$  qui peut s'exprimer comme suit :

$$Nu_y = 0.591 \left[ \frac{Pr}{Pr+1} \right]^{1/5} Ra^* y^{1/5} \quad (IV-21)$$

relation faisant apparaître l'influence des paramètres sensible  $Pr$  et  $Ra^*_y$ .

Dés lors, on peut déterminer l'écart de température paroi- milieu ambiant selon la relation suivante :

$$T_0(y) - T_\infty = 1.692 \frac{q''}{k} \left[ \frac{Pr}{Pr+1} \right]^{-1/5} Ra^* y^{-1/5} y \quad (IV-22)$$

Tenant compte des limites asymptotiques liées à  $Pr$ , on évalue le nombre de Nusselt local  $Nu_y$  correspondant à deux situations physiques intéressantes :

- Loi des nombre de Prandtl faibles :  $Pr \rightarrow 0$  
$$Nu_y = 0.591 (Pr Ra^* y)^{1/5}$$

- Loi des grandes nombre de Prandtl :  $Pr \rightarrow \infty$  
$$Nu_y = 0.591 Ra^* y^{1/5}$$

De la même façon, le nombre de Nusselt global ou moyen, au long de la plaque verticale, dépend de l'évolution asymptotique de Pr et vaut dans ces conditions :

- Loi des nombres de Prandtl faibles :  $Pr \rightarrow 0$   $\bar{Nu} = 0.738(PrRa^*_H)^{1/5}$
- Loi des grandes nombres de Prandtl :  $Pr \rightarrow \infty$   $\bar{Nu} = 0.738Ra^*_H^{1/5}$

Ces relations apparaissent assez proches des résultats obtenus par BEJAN, [relation (IV-16) et (VI-19)]. Cette dernière est confirmée par Sparrow [22] qui a utilisé des profils de vitesse et de température semblable à ceux du Squire. Par conséquent, Sparrow est parvenu à une relation intéressante du nombre de Nusselt :

$$Nu_y = 0.616 \left[ \frac{Pr}{Pr+0.8} \right]^{1/5} (Ra^*_y)^{1/5} \quad (IV-23)$$

dont les comportements asymptotiques en fonction de Pr sont :

- Si  $Pr \rightarrow 0$   $Nu = 0.644(PrRa^*_H)^{1/5}$
- Si  $Pr \rightarrow \infty$   $Nu = 0.616(Ra^*_H)^{1/5}$

Sparrow et Gregg [23], en résolvant ce problème par la méthode de similitude, ont montré que la relation (IV-23) constitue une assez bonne prévision des valeurs de Nusselt sur une large gamme de valeurs de Pr, tel que :  $0.01 < Pr < 100$ .

La figure (IV-3) représente la variation du coefficient de transfert thermique local  $Nu_y$  en fonction de Pr dans une large étendue de valeurs de celui-ci. L'évolution du nombre de Nusselt obtenue d'après nos calculs théoriques concorde avec celle de Sparrow. Finalement, dans un but comparatif on a récapitulé l'ensemble des données bibliographiques recensées pour quatre valeurs significatives de nombre de Prandtl Pr.

Pr	$\bar{Nu}$ (Sparrow)	$\bar{Nu}$ (présent travail)	Données expérimentales De $\bar{Nu}$	Précision
0.41	0.6201	0.5804	0.4210	37.76%
1	0.6846	0.6457	0.5730	12.68%
10	0.7582	0.7253	0.6550	10.73%
100	0.7687	0.7373	0.6900	06.85%

**Tableau (IV-2) : Comparaison des valeurs de Nusselt obtenues théoriquement avec les données expérimentales pour quatre valeurs de Pr.**

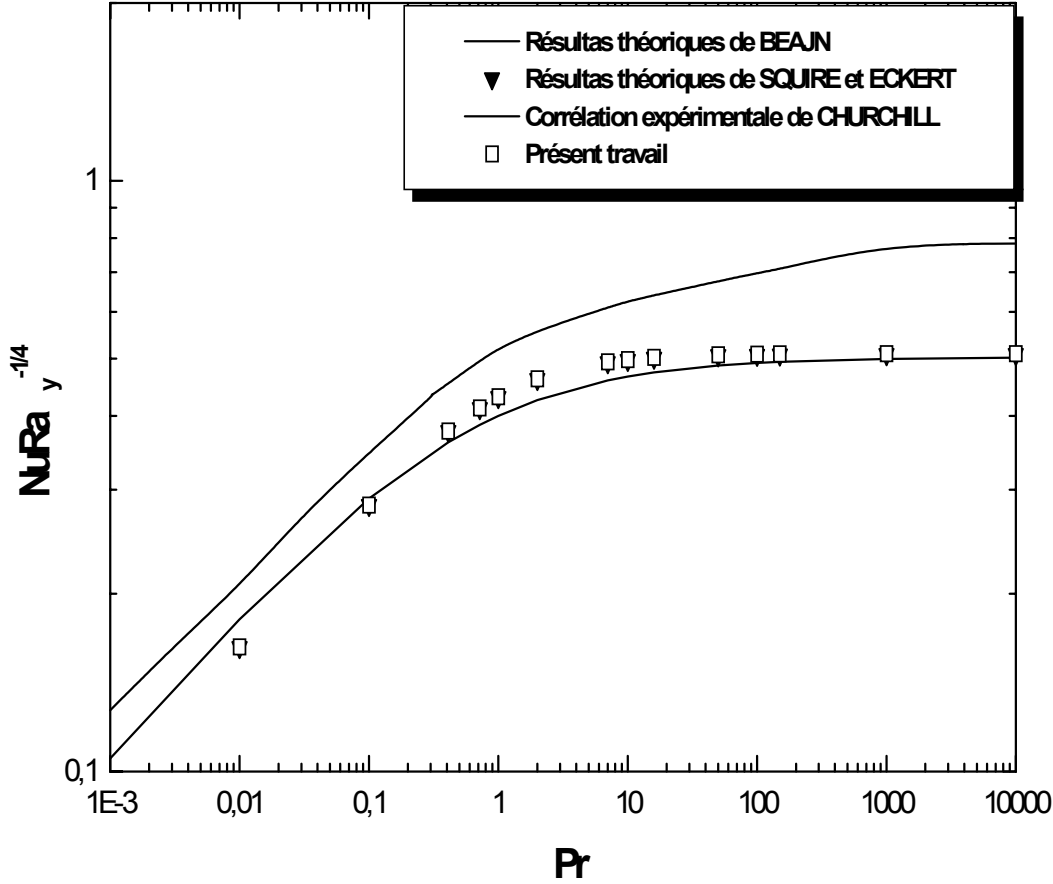


Figure (IV-2) : Nombre de nusselt local  $Nu_y$  d'une plaque plane verticale en convection naturelle(méthode intégrales).

**Figure (IV-3) : Nombre de Nusselt local relatif à une paroi verticale à flux de chaleur uniforme en convection naturelle (méthode intégrale).**

Globalement il apparaît tendance à une bonne convergence de l'évolution de  $Nu$  lorsque  $Pr$  augmente. Dans ces conditions, on peut estimer l'écart entre valeurs théoriques et données expérimentales qui est d'environ 16.5% par rapport à nos travaux et il est de 23.5% pour ce qui est des résultats obtenus par Sparrow. Il semble donc que l'expression de  $Nu$  que nous avons établi apparaît relativement réaliste par rapport aux données expérimentales.

### IV. 3. CONCLUSION :

On a pu évaluer le coefficient de transfert de chaleur ou nombre de Nusselt  $Nu$  en se basant simplement sur une expression analytique du profil des vitesses vérifiant les lois du mouvement. L'application directe de cette loi avec le profil de température correspondant tout en tenant compte du cas frontière ( $Pr = 1$ ). Ceci a permis de résoudre le système d'équation intégrales afin de généraliser l'expression du coefficient du transfert ( $Nu$ ) pour toutes les valeurs de  $Pr$ , et cela pour les deux conditions liées à la paroi : Paroi portée à une température constante et à flux uniforme.

Dans ces conditions, les résultats qui en découlent apparaissent très satisfaisants lorsqu'on les compare avec l'expérience et la théorie. Par conséquent, on peut conclure que la forme analytique du profil de vitesse choisi répond aux exigences phénoménologiques imposées par le mécanisme de convection naturelle agissant sur une plaque plane verticale en régime laminaire stationnaire.

## CHAPITRE V

### POLAROGRAPHIE EN REGIME DE CONVECTION NATURELLE

Il s'agit d'établir et de résoudre l'équation différentielle aux dérivés partielles régissant la distribution du profil de concentration  $C$  en régime de convection naturelle dans le cas où le coefficient de diffusion varie en fonction de la température. On considère que la sonde polarographique est assimilée à une sonde de mesure affleurant la paroi verticale chauffée soumise à l'influence d'un écoulement liquide bidimensionnel, laminaire et incompressible. La variation de concentration d'un point à l'autre détruit l'équilibre, ce qui crée un déplacement moléculaire par diffusion au sein de la solution (formation de la couche limite du champ de concentration). Dans ces conditions, la donnée de  $C$  permet d'accéder au transfert de matière  $K$  et d'en déduire le gradient de vitesse  $S$ .

#### IV. 1. LES EQUATIONS GENERALES DE LA DIFFUSION CONVECTIVE

L'écoulement du fluide est déterminé par les forces de volume et de pression comme il a été décrit précédemment par les équations du mouvement et de continuité

Le transport des corps dissouts dans un écoulement de fluide est gouverné entièrement par deux mécanismes différents. Premièrement, par la diffusion moléculaire comme résultat d'un gradient de concentration. Deuxièmement, les particules de la solution sont entraînées par le mouvement du fluide et sont transportées par lui. La combinaison de ces deux processus est appelée diffusion convective de la solution dans le liquide.

Si le gradient de concentration dans les liquides est très petit, on peut considérer que le gradient du potentiel chimique  $\tilde{\mu}$  est également faible. A cet effet, la densité du de matière  $j_D$  flux (nombre de particules passant entièrement à travers une surface unité dans la solution en 1 sec) peut s'écrire :

$$j_D = -\alpha_c \text{grad} \tilde{\mu} \quad (\text{V-1})$$

où  $\alpha$  désigne une constante de proportionnalité considérée positive. La diffusion moléculaire est le mécanisme de transport des particules entraînant l'apparition d'un flux de matière dans le liquide. En exprimant le gradient du potentiel chimique en fonction de la concentration  $C$ , on obtient :

$$j_D = -\alpha_c \left( \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial C} \right)_{T,P} \text{grad} C \quad (\text{V-2})$$

soit encore :

$$j_D = -D \text{grad} C \quad (\text{V-3})$$

où l'on a posé  $D = \alpha \left( \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial c} \right)_{T,P}$  qui désigne le coefficient de diffusion variable en

fonction de la concentration  $C$  et la température  $T$  de la solution.

Si la concentration de la solution est faible, on peut considérer que  $D$  dépend uniquement de la température, ce qui est d'ailleurs le cas dans le problème abordé ici.

Lorsque le corps dissout est dans un fluide en mouvement, il est alors entraîné par l'écoulement. Ceci nous permet d'ajouter au flux diffusif  $j_D$  un flux convectif associé au volume du liquide traversant la surface considérée et dont le vecteur densité de courant est donné par la relation :

$$J_D = C.v \quad (\text{V-4})$$

où  $V$  est la vitesse du fluide

Dans ces conditions, la densité totale du flux de masse est la somme des flux convectif et diffusif. Elle est exprimée par le vecteur

$$j = Cv - D \text{grad} C \quad (\text{V-5})$$

Considérons un volume de contrôle arbitraire  $V_\tau$  délimité par une surface  $S$ . Soit  $q$  le nombre de particules sortant du volume  $V_\tau$  à travers la surface en une seconde qui est égal à :

$$q = - \iint_S j ds$$

Ainsi la variation du nombre de particules par unité de temps dans l'élément de volume  $V_\tau$  est égal à  $\int \frac{\partial C}{\partial t} dV_\tau$ . En égalisant cette dernière expression avec le nombre de particules entrant dans le volume, on obtient :

$$\iiint_{V_\tau} \frac{\partial C}{\partial t} dV_\tau = - \iint_S j ds \quad (\text{V-6})$$

D'après la théorème de Gauss-Ostrogradsky, on a :

$$\iint_S j ds = \iiint_{V_\tau} \text{div} j dV_\tau$$

et de l'équation (V-6) on a :

$$\iiint_{V_\tau} \frac{\partial C}{\partial t} dV_\tau = - \iiint_{V_\tau} \text{div} j dV_\tau$$

et par suite, on obtient :

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \text{div}(D\text{grad}C) - \text{div}CV \quad (\text{V-7})$$

De plus, si l'on admet que le fluide est incompressible, on a  $\text{div}V=0$ , et l'équation (V-7) peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + (V\text{grad})C = \text{div}(D\text{grad}C) \quad (\text{V-8})$$

qui est l'équation générale de diffusion convective dont la formulation explicitée en coordonnées cartésiennes bidimensionnelle est :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial c}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (\text{V-10})$$

où  $(u, v)$  désignent les composantes du profil de vitesse  $V$ ,  $C$  le profil de concentration et  $D$  le coefficient de diffusion éventuellement variable et qui sera précisé ultérieurement :  $D = D(T) = D(x, y)$ .

#### **IV. 2. COUCHE LIMITE DE DIFFUSION CONVECTIVE**

Le domaine phénoménologique de la diffusion peut être divisé en deux régions :

- la première, est une région de concentration constante loin de la paroi.
- la deuxième est une région où la concentration varie rapidement au voisinage immédiat de la paroi.

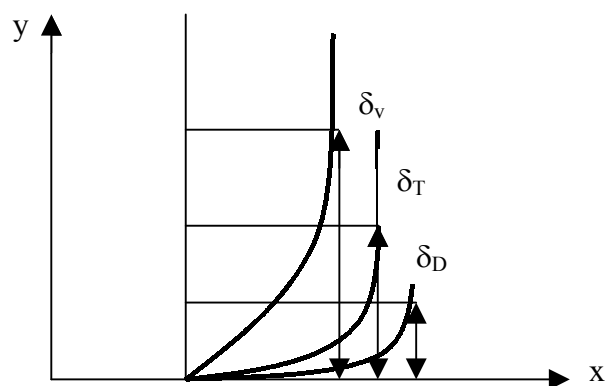
Cette dernière représente une couche liquide très mince, laquelle est analogue à la couche limite de Prandtl. Dans cette dernière ou la couche limite dynamique, l'effet de viscosité est significatif, alors que la diffusion moléculaire ne peut être prise en compte que dans une zone extrêmement très proche de la paroi qu'on appelle couche limite de diffusion.

Dans le but d'évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite de diffusion  $\delta_D$ , on rappelle que l'épaisseur de la couche limite dynamique est proportionnelle à la racine carré de la viscosité, le coefficient de diffusion  $D$  joue un rôle analogue à la viscosité cinématique malgré la faiblesse du rapport  $\frac{D}{\nu} \approx 10^{-3}$

[24]. Par conséquent, l'épaisseur de la couche limite de diffusion  $\delta_D$  devrait être plus petite que celle de la couche limite dynamique  $\delta_v$ :  $\delta_D < \delta_v$ . Si on étend ce raisonnement à la couche limite thermique on trouve que celle ci est telle que :

$$\delta_D < \delta_T < \delta_v \quad (\text{V.11})$$

où  $\delta_T$  est l'épaisseur de la couche limite thermique que l'on a schématisée sur la figure. (V. 1).



**Figure (V.1) : Epaisseurs des couches limites dynamique, thermique et massique.**

En se basant sur le principe d'analyse des échelles, on cherche à évaluer l'ordre de grandeurs des termes associés à l'équation (V-10). En écoulement bidimensionnel, à l'intérieur de la couche limite massique on a :

$$y = \delta_D, x = L \text{ et } \frac{\delta_D}{L} \ll 1$$

où L désigne la longueur de l'électrode. A partir de l'équation du bilan de matière, on établit les approximations suivantes:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( D \frac{\partial C}{\partial x} \right) = \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} + D \frac{\partial^2 C}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial C}{\partial y} \right) = \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} + D \frac{\partial^2 C}{\partial y^2}$$

De celles-ci on tire les propriétés et conséquences suivantes :

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial c}{\partial y} \approx \frac{c}{\delta_D} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} \approx \frac{DC}{\delta_D^2} \\ \frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{c}{\delta_D} \quad \text{soit} \quad \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial c}{\partial x} \approx \frac{DC}{L^2} \end{array} \right\} \frac{\partial D}{\partial x} \frac{\partial C}{\partial x} \ll \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial C}{\partial y} \quad (V.12)$$

et également :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} &\approx \frac{c}{L^2} \\ \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} &\approx \frac{c}{\delta_D^2} \end{aligned} \right\} \text{d'où : } \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 c}{\partial x^2} \quad (\text{V.13})$$

Des résultats précédents (V.12) et (V.13) on déduit donc que la diffusion tangentielle est alors négligeable devant la diffusion normale. Dans ce cas, l'équation de diffusion se réduit à :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (\text{V-14})$$

c'est cette équation que l'on prend en compte pour étudier la diffusion polarographique en régime de convection naturelle.

### IV. 3. ETUDE DE LA DIFFUSION POLAROGRAPHIQUE :

**1. Problématique :** La diffusion est engendrée par le mouvement de migration des ions qui travaillent sous l'effet d'un champ de vitesse transversal. En particulier au voisinage immédiat de la paroi cette vitesse est directement proportionnelle au gradient de vitesse et la distance à la paroi (domaine de la sous couche visqueuse). En particulier c'est cette propriété que l'on utilise pour accéder à la mesure du gradient de vitesse moyenne pariétal  $\bar{S} = \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{y=0}$ .

Cette situation physique intéressante correspond à la pratique courante adoptée en polarographie lorsque la mesure s'effectue à température  $T = \text{cte}$  (écoulement isotherme).

Que devient cette pratique expérimentale lorsque la température de l'écoulement se modifie d'une région à l'autre. c'est le cas du régime de convection naturelle où l'on assiste à des variations importantes de la température  $T$  entraînant nécessairement un coefficient de diffusion  $D$  variable en fonction de  $T$ .

Cette condition expérimentale n'a pu être abordée jusqu'ici en raison de l'indisponibilité de courbe d'étalonnage liant le coefficient de transfert de matière  $\bar{K}$  au gradient pariétal de la vitesse  $\bar{S}$ . Par conséquent, pour atteindre cette objectif, il est nécessaire de résoudre préalablement l'équation de diffusion relative au transfert de matière  $C$  dans les conditions où  $D$  est variable.

**2. Evaluation du coefficient de diffusion  $D$  :** Le coefficient de diffusion est évalué à partir de mesures expérimentales sachant qu'il n'existe pas jusqu'à présent une méthode universelle permettant sa détermination exacte.

Tenant compte des hypothèses précédentes, A. Einstein [25,26] a proposé une relation entre le coefficient de diffusion  $D$  qui est fonction de la température  $T$  et de la viscosité dynamique  $\mu$  :

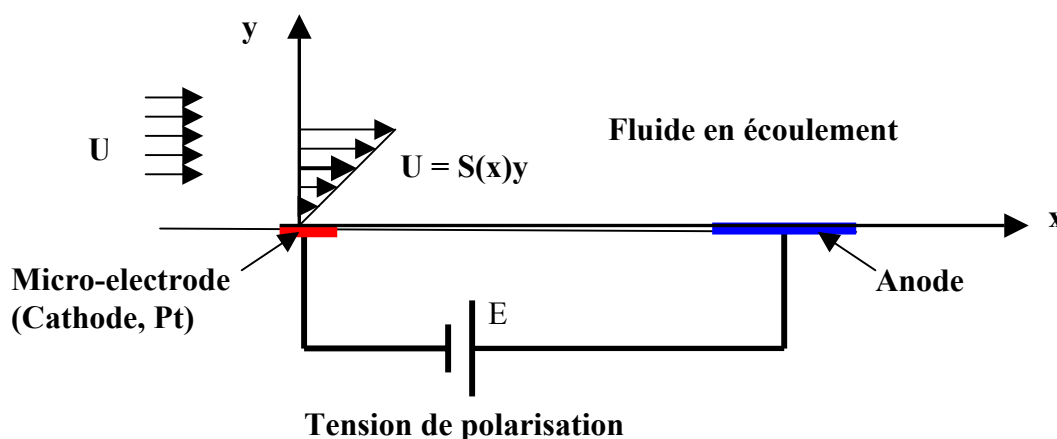
$$D = \frac{R}{6\pi\eta N} \frac{T}{\mu} \quad (\text{V.15})$$

tel que  $u = \frac{1}{6\pi r_i}$  désignent la mobilité de la particule ( $r_i$  est le rayon ionique),  $R$  la constante des gaz parfaits et  $N$  le nombre d'Avogadro. En remplaçant par leurs valeurs respectivement, on peut simplement écrire :

$$D = cte \frac{T}{\mu} \quad (V.16)$$

Formule valable dans les conditions d'exigence expérimentales à réaliser.

**3. Technique de mesure polarographique :** En fait, la relation (V.16) peut être employée valablement dans les conditions d'essais utilisant une solution aqueuse de Ferrocyanure-Ferricyanure correspondant à l'équilibre oxydo-reducteur :



Figure(V. 2) : Schéma de principe de la polarographie.

On explique cette technique de mesure comme suit : une microélectrode en platine (Pt) portée à un potentiel de mesure (micro cathode de mesure) est implantée dans la paroi limitant le liquide en écoulement contenant la solution de concentration  $C$ . Les ions diffusent de l'Anode (Platine ou Nickel) vers la micro-électrode où a lieu une réaction d'oxydo-réduction entraînant un courant de diffusion  $I$  dans le circuit. La mesure de  $I$  permet d'accéder au gradient de vitesse  $S$ .

Cette technique a l'avantage de ne pas perturber l'écoulement. Le couple d'oxydo-reducteur est choisi pour ses propriétés voisines du cas idéal traité théoriquement et qui exclut les réactions qui s'accompagnent d'un dépôt à l'électrode. En partant de ces données, on utilise dans notre étude théorique la réduction du Ferricyanure en vue de déterminer l'influence de la température au sein de la solution sur le coefficient du transfert de masse. Pour cela, on utilise l'expression empirique donnée par **EISENBERG**, **TOBIAS** et **WILKE** [27,28] :

$$D = 2.510^{-10} \frac{T}{\mu} \quad (V.17)$$

Figure (V.2) : Variation de la viscosité dynamique  $\mu$  en fonction de la température T.

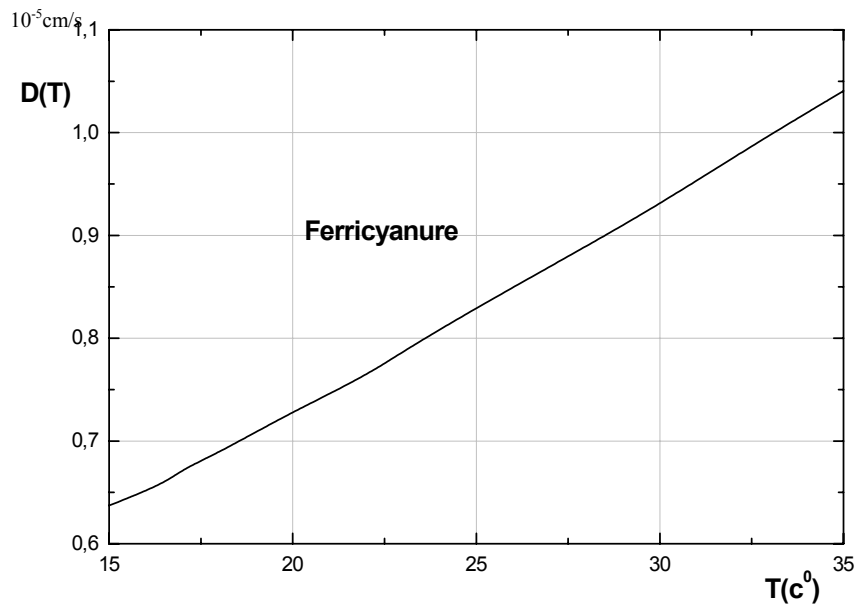


Figure (V.3) : Variation du coefficient de diffusion D en fonction de la température T.

où la viscosité dynamique  $\mu$  dépend de la température  $T$  [29] que l'on représente sur la figure (V.2). De même, à partir de la relation (V-12), on trace sur la figure (V.3) la courbe donnant l'évolution du coefficient de diffusion  $D$  en fonction de la température  $T$  de la solution.

Ces résultats seront exploités pour déterminer l'influence du coefficient de diffusion sur la couche limite de diffusion lorsque la température  $T$  varie.

#### IV. 3. ELECTRODE EN PAROI VERTICALE SOUMISE A LA CONVECTION NATURELLE

On assimile la sonde polarographique à une plaque plane verticale de petites dimensions (de l'ordre du mm) et, on travaille dans un repère cartésien où  $X$  est dans le plan de l'électrode et  $Y$  est normale à l'électrode, dans lequel l'équation du bilan de matière s'écrit :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (V.18)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

où  $u$  et  $v$  sont respectivement, les composantes tangentielle et normale du profil de vitesse,  $C$  désigne la concentration du réactif polarographique et  $D$  le coefficient de diffusion qui dépend de la température régnant dans la solution.

Dans le présent travail, on s'intéresse au processus de convection naturelle d'origine thermique autour d'une micro électrode verticale portée à une température constante  $T_0$ , baignant dans un liquide [eau + solution aqueuse ( $\text{Fe}(\text{CN})_6^{-3}$  et  $\text{Fe}(\text{CN})_6^{-4}$ )] de température  $T_\infty$  tel que  $T_0 > T_\infty$  figure (V.4).

La modélisation de la couche limite thermoconvective qui nous a permis de déterminer analytiquement les profils de vitesse et de température va nous servir (en utilisant l'expression (V-17)), à établir une expression analytique du coefficient de diffusion en fonction des coordonnées  $(x, y)$ .

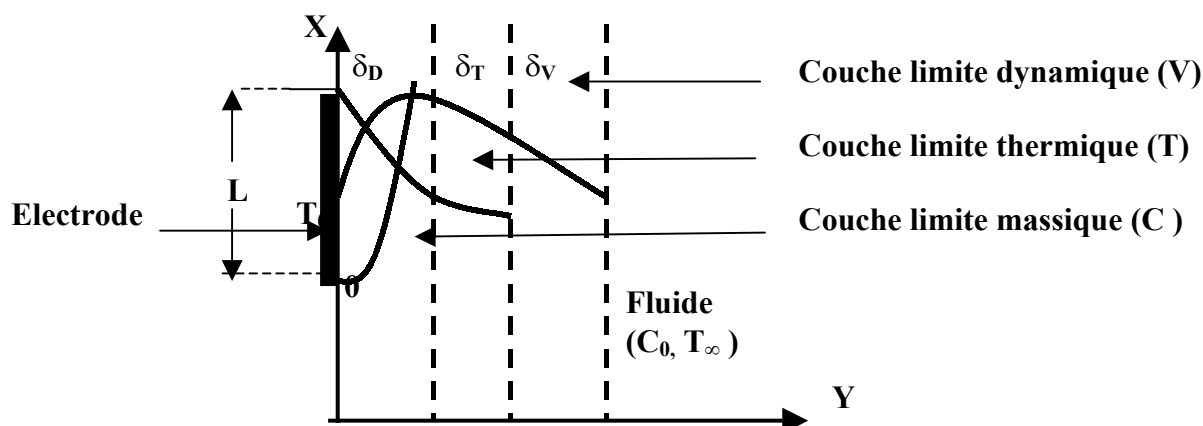


Figure (V.4): Electrode verticale a une température constante ( $T_0$ ) dans un liquide froid portée à la température ( $T_\infty$ ).

V. 3. 1. RESOLUTION EN REGIME STATIONNAIRE

En régime stationnaire, l'équation du bilan de matière (V-18) ou diffusion du champ de concentration est donnée par :

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( D \frac{\partial c}{\partial y} \right) \quad (V-19)$$

On considère que dans la couche limite de diffusion l'évolution du profil de vitesse varie linéairement en fonction du gradient pariétal de vitesse  $S(x)$  sachant que l'épaisseur de la couche limite de diffusion est très petite devant celle de la couche limite dynamique. Ceci nous permet d'établir à partir de l'équation de continuité les expressions des composantes de la vitesse  $u$  et  $v$  en fonction du gradient de vitesse moyenne  $\bar{S}$ , soit :

$$u = \bar{S}(x)y \quad \text{et} \quad v = -\frac{1}{2} \frac{d\bar{S}(x)}{dx} y^2 \quad (V-20)$$

on notera que ce gradient dépend uniquement que de  $x$  ( Composante longitudinale, parallèle à la sonde).

En remplaçant celles-ci dans l'équation (V-19), on obtient :

$$\bar{S}(x)y \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{S}(x)}{dx} y^2 \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial D}{\partial y} \frac{\partial c}{\partial y} + D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (V-21)$$

Cette dernière équation différentielle sera étudiée dans deux cas particuliers importants :

**1. Cas d'un coefficient de diffusion constant :**

Lorsque le coefficient de diffusion  $D$  est constant ( $D = D_0$ ), l'équation (V-21) se réduit à :

$$\bar{S}(x)y \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{2} \frac{d\bar{S}(x)}{dx} y^2 \frac{\partial c}{\partial y} = D_0 \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (V-22)$$

La résolution de cette équation peut se faire à l'aide de la méthode de similitude en utilisant la variable  $\eta$  proposée par A. BEJAN, dans le chapitre précédent. En employant la variable  $\eta = \frac{y}{x} Ra_x^{1/4}$ , on aboutit à l'équation :

$$-\left[ \frac{x^2}{4D_0 Ra_x^{3/4}} \bar{S}(x) + \frac{1}{2D_0} \frac{x^3}{Ra_x^{3/4}} \frac{d\bar{S}(x)}{dx} \right] \eta^2 \frac{dc}{d\eta} = \frac{d^2c}{d\eta^2} \quad (V-23)$$

Partant des résultats de la convection naturelle (plaque plane) obtenus précédemment par la méthode de similitude, on peut déduire le gradient de vitesse pariétal qui défini par :

$$\bar{s}(x) = \left. \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (V-24)$$

En outre, sachant que  $u = \frac{\alpha Ra_x^{1/2}}{x} G(\eta, Pr)$  et,

$G(\eta, Pr) = a\eta \exp(-b\eta^2) + \frac{1}{2c} \eta \exp(-c\eta)$  , le gradient de vitesse vaut :

$$s(x) = \frac{\alpha Ra_x^{1/2}}{x} \left. \frac{\partial G(\eta, Pr)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} \frac{\partial \eta}{\partial y} \quad (V-25)$$

on a :

$$\frac{dG(\eta, Pr)}{d\eta} = a \exp(-b\eta^2) - 2ab\eta^2 \exp(-b\eta^2) + \frac{1}{2c} \exp(-c\eta) - \frac{1}{2} \eta \exp(-c\eta)$$

donc

$$\left. \frac{dG(\eta, Pr)}{d\eta} \right|_{\eta=0} = a + \frac{1}{2c} = C_1 \quad (V-26)$$

où  $C_1$  désigne une constante qui dépend de  $Pr$  et dont la valeur est à préciser.

Remplaçons dans la relation (V-26) et comme :  $\frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{Ra_x^{1/4}}{x}$  , on obtient d'après la relation (V-25) la valeur de  $\bar{S}$  :

$$\bar{s}(x) = \frac{\alpha C_1 Ra_x^{3/4}}{x^2} \quad (V-27)$$

où  $\alpha$  représente la diffusivité thermique. A partir de cette dernière équation, on tire :

$$\frac{d\bar{s}(x)}{dx} = \frac{\alpha C_1 Ra_x^{3/4}}{4 x^3} \quad (V-28)$$

De ces deux dernières relations, l'équation (V-19) peut s'écrire comme suit :

$$-\frac{3C_1\alpha}{8D_0} \eta^2 \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \quad (V-29)$$

où l'on a posé :  $Le = \frac{\alpha}{D_0}$  qui désigne le nombre de LEWIS caractérisant simultanément les transferts thermique et massique.

A l'équation précédente on associe les conditions aux limites suivantes :

$$\begin{aligned} y = 0 \ (\eta = 0) & : \quad C = 0 \quad (\text{à la surface de l'électrode}) \\ y \rightarrow \infty \ (\eta \rightarrow \infty) & : \quad C = C_0 \quad (\text{à l'infini de la couche de diffusion } \delta_D) \end{aligned} \quad (\text{V-30})$$

La solution de l'équation est obtenue après double intégration, on a alors :

$$C(\eta) = A_1 \int_0^\eta \exp\left[-\frac{3C_1}{8} Le \int_0^\eta \eta^2 d\eta\right] d\eta + B_1$$

où  $A_1$  et  $B_1$  sont deux constantes que l'on détermine par les conditions aux limites (V-30) qui fournissent :

$$\left\{ \begin{aligned} A_1 &= \frac{C_0}{\int_0^{\eta_\infty} \exp\left(-\frac{C_1}{8} Le \eta^3\right) d\eta} \\ B_1 &= 0 \end{aligned} \right. \quad (\text{V-31})$$

$$(\text{V-32})$$

D'où l'expression analytique du profil de concentration  $C(\eta)$  :

$$C(\eta) = C_0 \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{C_1}{8} Le \eta^3\right) d\eta}{\int_0^{\eta_\infty} \exp\left(-\frac{C_1}{8} Le \eta^3\right) d\eta} \quad (\text{V-33})$$

En vue d'exploiter ces résultats afin de déterminer les valeurs de la constante  $C_1$  et le nombre du Lewis, on se place dans le cas d'un liquide très proche de l'eau ( $Pr = 7$ ).

Dans ces condition, on représente sur la figure (V-7) l'évolution du profil de concentration du réactif réducteur (ferricyanure) en fonction de la variable de similitude  $\eta$  en convection naturelle.

### 1. Evaluation du flux de diffusion en convection naturelle ( $D = D_0$ ) :

Le flux de diffusion à l'électrode est donné par la loi de FICK :

$$J_0 = D_0 \left. \frac{\partial C}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (\text{V-34})$$

en explicitant, on a :

$$J_0 = D_0 \left. \frac{dC}{d\eta} \right|_{\eta=0} \frac{d\eta}{dy}$$

d'où

$$J_0 = \frac{D_0 C_0}{M_0} \frac{Ra_x^{1/4}}{x}$$

avec

$$M_0 = \int_0^\infty \exp\left(-\frac{L}{8} Le \eta^3\right) d\eta$$

On évalue  $M_0 = 0.3194$  et finalement, on obtient :

$$J_0 = 3.13 D_0 C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{(x)^{1/4}} \quad (V-35)$$

La densité de flux de matière varie légèrement avec la position  $x$  de l'électrode sur la paroi. Elle est aussi une fonction de la concentration de la solution  $C_0$ , de la viscosité cinématique  $\nu$ , de la diffusivité thermique  $\alpha$ , du coefficient de diffusion moléculaire  $D_0$  et du terme moteur générateur de mouvement  $g\beta\Delta T$  lié à la convection naturelle.

### 1. Evaluation du coefficient de transfert de matière $\bar{K}_0$ :

Pour calculer le coefficient de transfert de matière  $\bar{K}_0$ , on suppose que l'électrode a une surface de longueur  $L$  et de largeur unité. En intégrant l'expression (V.35) sur toute la surface de l'électrode, on obtient le flux total ou courant de matière ( $\tilde{b} = \iint j ds$ ) qui s'évalue comme suit :

$$\tilde{b} = \frac{D_0 C_0}{0.3194} \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \int_0^L (x)^{-1/4} dx$$

soit :

$$\tilde{b} = 4.17 D_0 C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} (L)^{3/4} \quad (V-36)$$

a partir de cette dernière relation, le courant limite de diffusion égale à :

$$\bar{i}_0 = nF\tilde{b} = 4.17 D_0 C_0 nF \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} (L)^{3/4} \quad (V-37)$$

Or le courant limite de diffusion est donné par la loi de Faraday :

$$\bar{i}_0 = nFC_0 A \bar{K}_0$$

qui permet d'en déduire le coefficient de transfert moyen

$$\bar{K}_0 = \frac{\bar{b}}{nFC_0A} \quad (V-38)$$

où n désigne le nombre d'électrons mis en jeu dans la réaction d'oxydoréduction n = 1, F le nombre de Faraday F = 96500, l'aire de l'électrode A=L×l= L (mm<sup>2</sup>).. Plus explicitement, le coefficient de transfert de matière est donné comme suit :

$$\bar{K}_0 = 4.17D_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{L^{1/4}} \quad (V-39)$$

A partir de la relation (V-35), on peut évaluer l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite diffusive  $\delta_{D0}$  est

$$\delta_{D0} = \frac{0.3194}{\left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4}} (x)^{1/4} \quad (V-40)$$

## 2. Cas d'un coefficient de diffusion variable:

On se penche ici sur le problème de l'influence de la variation du coefficient de diffusion en fonction de la température D = D(T) sur le processus de diffusion dans la solution. A cet effet, on porte notre attention sur l'équation (V-21) auquel on remarque l'addition d'un terme supplémentaire, ce qui revient à une nouvelle vitesse qui s'ajoute au premier membre de l'équation (V-21) que l'on réécrit comme suit :

$$\bar{s}(x)y \frac{\partial c}{\partial x} - \left( \frac{\partial D}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{d\bar{s}(x)}{dx} y^2 \right) \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (V-41)$$

Ici  $\frac{\partial D}{\partial y}$  désigne la contribution qu'apporte la variation du coefficient de diffusion en fonction la température qui dépend des coordonnées x et y.

Du fait que D dépend de la température T et que celle-ci varie avec x et y, on peut donc, exprimer directement D en fonction de x et y de sorte que l'on a :

$$D = D_0 \Delta(x, y) \quad (V-42)$$

En employant cette dernière relation dans l'équation (V-40), celle-ci se transforme en :

$$\frac{1}{D_0 \Delta(x, y)} \bar{s}(x) y \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{1}{\Delta(x, y)} \left( \frac{\partial \Delta(x, y)}{\partial y} + \frac{1}{2D_0} \frac{d\bar{s}(x)}{dx} y^2 \right) \frac{\partial c}{\partial y} = \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} \quad (V-43)$$

Dans cette relation on fait apparaître le coefficient de diffusion constant  $D_0$ .

En employant la même variable de similitude  $\eta$ , cette dernière équation se réduit à :

$$- \left[ \left( \frac{x^2}{4D_0(Ra_x)^{3/4}} \bar{s}(x) + \frac{x^3}{2D_0(Ra_x)^{3/4}} \frac{d\bar{s}(x)}{dx} \right) \frac{\eta^2}{\Delta(\eta)} + \frac{1}{\Delta(\eta)} \frac{\partial \Delta(\eta)}{\partial \eta} \right] \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \quad (V-44)$$

En injectant les relations (V-27) et (V-28) dans (V-43), on arrive à une équation dépendant d'une seule variable :

$$- \left[ \frac{3C_1}{8} Le \frac{\eta^2}{\Delta(\eta)} + \frac{1}{\Delta(\eta)} \frac{\partial \Delta(\eta)}{\partial \eta} \right] \frac{\partial c}{\partial \eta} = \frac{\partial^2 c}{\partial \eta^2} \quad (V-45)$$

Equation devant satisfaire les conditions aux limites (V-44).

L'intégration de l'équation (V-39) nous conduit au résultat suivant :

$$C(\eta) = A_2 \int_0^\eta \frac{\exp\left(-\frac{3l}{8} Le \int_0^{\eta''} \frac{\eta'^2}{\Delta(\eta')} d\eta'\right)}{\Delta(\eta'')} d\eta'' + B_2 \quad (V-46)$$

La vérification des conditions aux limites conduit à la détermination des constantes  $A_2$  et  $B_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} A_2 = \frac{C_0}{\int_0^{\eta_\infty} \frac{\exp\left(-\frac{3l}{8} Le \int_0^{\eta''} \frac{\eta'^2}{\Delta(\eta')} d\eta'\right)}{\Delta(\eta'')} d\eta''} \\ B_2 = 0 \end{array} \right. \quad (V-47)$$

En remplaçant les constantes  $A_2$  et  $B_2$  par leurs valeurs dans la relation (V-46), on obtient l'évolution du profil de concentration au voisinage de l'électrode verticale valable en régime de convection naturelle dans le cas d'un coefficient de diffusion variable  $D = D(T)$ , soit:

$$C(\eta) = \frac{C_0 \int_0^\eta \frac{\exp\left(-\frac{3l}{8}Le \int_0^{\eta'} \frac{\eta'^2}{\Delta(\eta')} d\eta'\right)}{\Delta(\eta'')} d\eta''}{\int_0^{\eta_\infty} \frac{\exp\left(-\frac{3l}{8}Le \int_0^{\eta''} \frac{\eta''^2}{\Delta(\eta'')} d\eta''\right)}{\Delta(\eta'')} d\eta''} \quad (V-49)$$

Dans le cas particulier où  $D = D_0$ , donc  $\Delta(\eta) = 1$ , on retrouve la loi (V-33) :

$$C(\eta) = C_0 \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{l}{8}Le\eta'^3\right) d\eta'}{\int_0^{\eta_\infty} \exp\left(-\frac{l}{8}Le\eta'^3\right) d\eta'}$$

Ce dernier résultat permet de contrôler, au passage, la validité de nos calculs.

Pour pouvoir intégrer la relation (V-48), il est utile de donner l'expression analytique du coefficient de diffusion en fonction de la variable de similitude  $\eta$ . Ceci, peut se faire, à partir de la relation d'**EISENBERG, TOBIAS** et **WILKE**. Dès lors, on a établi l'expression de  $D$  [équation (V-17)] où l'on fait apparaître les expressions de la diffusion et de la viscosité en écoulement isotherme ( $T = T_0$ ) :

$$D = 2.5(10)^{-10} \frac{T_0}{\mu(T_0)} \frac{\overline{T_0}}{\mu(T)} = D_0 \frac{\mu(T_0)}{T_0} \frac{T}{\mu(T)} \quad (V-50)$$

On a :  $D_0 = 2.5(10)^{-10} \frac{T_0}{\mu_0}$  telle que  $D_0 = 0.83 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^2/\text{sec}$  pour la solution de ferricyanure. Si  $T = 25^\circ\text{C}$

et 
$$\Delta(T) = \frac{\mu(T_0)}{\mu(T)} \frac{T}{T_0} \quad (V-51)$$

A partir des données expérimentales de  $\mu(T)$ , on déduit la loi de comportement de  $\Delta$  avec la température :

$$\Delta(T) = A_1 T + B_1 \quad (V-52)$$

où  $A$  et  $B$  sont des constantes à préciser.

Dans cette application, on s'appuie sur les données expérimentales donnant la variation de viscosité en fonction de la température [29] tout en considérant que l'électrode est chauffée jusqu'à une température constante  $T_0 = 35^\circ\text{C}$  plongée dans un milieu plus froid de température  $T_\infty = 15^\circ\text{C}$ . En outre, on prend le nombre de Prandtl

(Pr=7) qui correspond à l'eau. A cet effet, on calcule  $\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty}$  tout en remplaçant

les valeurs expérimentales de T, T<sub>0</sub> et T<sub>∞</sub> afin de représenter le coefficient de diffusion D en fonction du profil adimensionnel de température θ, figure(V.5). Comme il est montré sur la figure(V.5) et après l'ajustement des points expérimentale du coefficient de diffusion en fonction des points du profil adimensionnel de température, on trouve :

$$\Delta(\theta) = A_2\theta + B_2 \quad (V-53)$$

A<sub>2</sub>, B<sub>2</sub> sont des constantes connues, déterminées à partir de la courbe d'évolution de D(θ) (figure (V.5)).

Remplaçant θ par son expression en fonction de la variable affine η déterminée dans le chapitre précédent (Pr = 7), on en déduit analytiquement l'évolution du coefficient de diffusion en fonction de la variable affine η et qui s'écrit sous la forme :

$$\Delta(\eta) = A \exp(-B \eta) + \Delta_0 \quad (V-54)$$

où A, B et Δ<sub>0</sub> sont des constantes parfaitement déterminées (A = 1.65, B=0.425 et Δ<sub>0</sub>=0.02).

La représentation graphique donnée sur la figure (V-6) de D = D(η).. D'après celle-ci on constate que le coefficient de diffusion varie de la même façon que la température en fonction de la variable affine η.

Partant de ces considérations, l'intégration de (V-44) se fera comme suit ;

Posons :  $F(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta'^2}{\Delta(\eta')} d\eta'$ , qui nous donne

$$F(\eta) = \int_0^\eta \frac{\eta'^2}{\Delta(\eta')} d\eta' = \frac{1}{A} \int_0^\eta \frac{\eta'^2 \exp(B\eta')}{1 + \frac{\Delta_0}{A} \exp(B\eta')} d\eta'$$

$$F(\eta) = \frac{\eta^2 \ln(1 + d \exp(B\eta))}{Bd} + \frac{2\eta \text{poly log}(2, -d \exp(B\eta))}{B^2d} - \frac{2 \text{poly log}(3, -d \exp(B\eta))}{B^3d}$$

avec d = Δ<sub>0</sub>/A,  
d'où l'on obtient :

$$C(\eta) = \frac{C_0}{\int_0^{\eta_\infty} \frac{\exp(-\frac{3L}{8} \text{LeF}(\eta'))}{\Delta(\eta')} d\eta'} \int_0^\eta \frac{\exp(-\frac{3L}{8} \text{LeF}(\eta'))}{\Delta(\eta')} d\eta' \quad (V-55)$$

On représente sur la figure (V.8) l'évolution du profil de concentration en fonction de la variable de similitude  $\eta$  dans la couche de diffusion à coefficient de diffusion variable comparé directement avec celui à coefficient constant. On note sur la figure(V.8) qu'il y a un faible écart estimé à 5% entre les deux profils de concentrations, ce qui nous permet d'affirmer, a priori, qu'en convection naturelle la température de la solution influe assez peu sur le mécanisme de diffusion. Suivant le même calcul que précédemment, on établit les résultats dans les cas suivants

**1. Evaluation du flux de diffusion en convection naturelle:**

$$J = D_0 \Delta(x,0) \left. \frac{\partial C(x,y)}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$J = \frac{D_0 \Delta(0) C_0}{M_1 \Delta(0)} \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{(x)^{1/4}}$$

où  $M_1 = \int_0^\infty \frac{\exp\left(-\frac{3\eta}{8} \text{LeF}(\eta)\right)}{\Delta(\eta)} d\eta$  désigne une constante et, qui égale à  $M_1 = 0.363$ .

Ceci, permet d'établir :

$$J = 2.755 D_0 C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{(x)^{1/4}} \quad (V-56)$$

**2. Evaluation des grandeurs physiques polarographiques en régime de convection naturelle**

Dans ces conditions, on évalue facilement les grandeurs recherchées

a) **Courant limite de diffusion  $\bar{I}$**

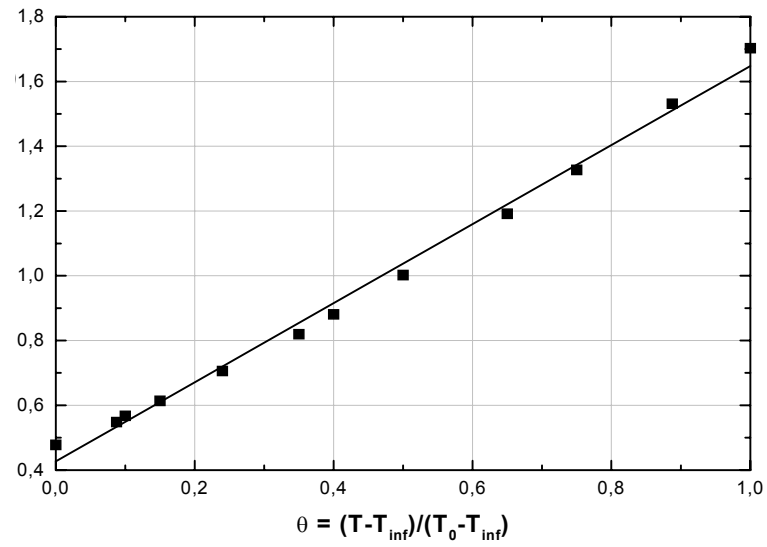
$$\bar{I} = 3.673 n F D_0 C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} L^{3/4} \quad (V-57)$$

b) **Coefficient de transfert de matière  $\bar{K}$  :**

$$\bar{K} = 3.673 D_0 \left( \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right)^{1/4} \frac{1}{L^{1/4}} \quad (V-58)$$

c) **l'ordre de grandeur de l'épaisseur de la couche limite diffusive  $\delta_D$  :**

$$\delta_D = \frac{0.363}{\left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4}} (x)^{1/4} \quad (V-59)$$



Figure(V.5) : Variation du coefficient de diffusion  $D$  en fonction du profil de température adimensionnel  $\theta$ .

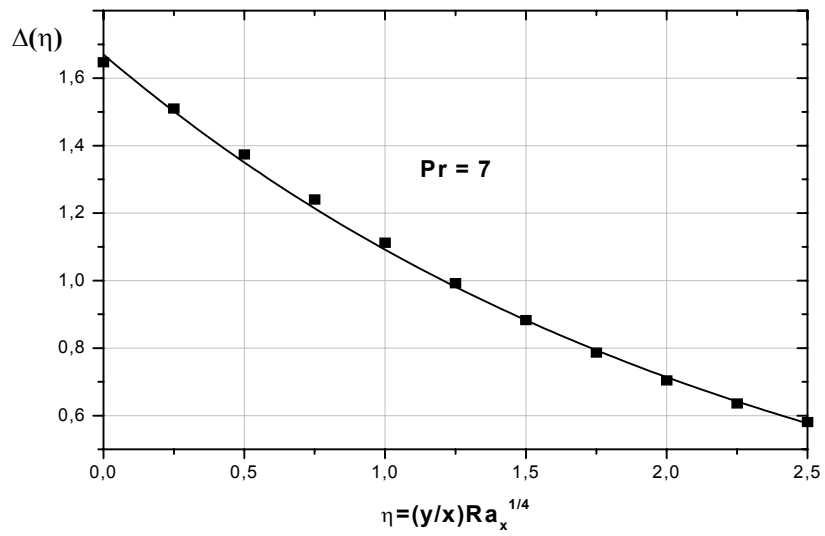


Figure (V.6) : Evolution du coefficient de diffusion  $D$  au long de l'électrode en fonction de la variable affine  $\eta$ .

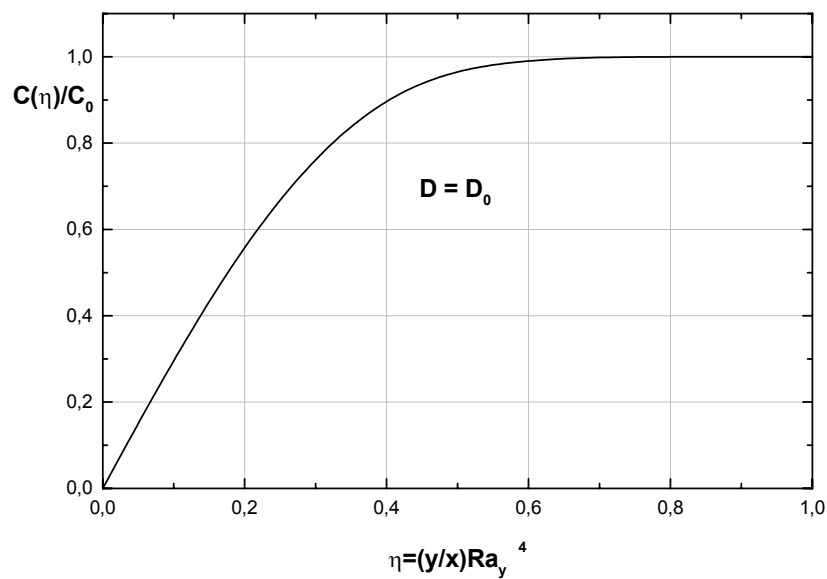


Figure (V.7) : Distribution du profil de concentration  $C$  en fonction de  $\eta$  au voisinage de l'électrode à coefficient de diffusion constant ( $D = D_0$ ).

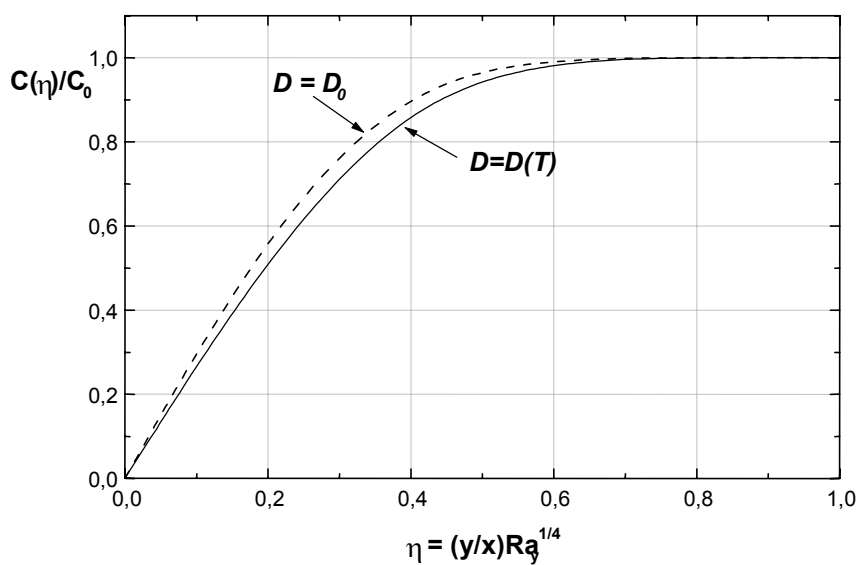


Figure ( V.8) : Distribution du profil de concentration  $C$  comparé pour un coefficient de diffusion constant  $D_0$  et variable  $D(T)$ .

V. 4. RESULTATS ET DISCUSSION :

L'ensemble des résultats obtenus ont été résumés au niveau du tableau (V-9), dans lequel on a représenté d'une manière comparative tous les résultats liés aux variations du profil de concentration au voisinage de la surface de l'électrode, ainsi que toutes les grandeurs physiques liées à la diffusion moléculaire telles que : le flux de diffusion J, l'épaisseur de la couche limite de diffusion  $\delta_D$ , courant limite de diffusion I et le coefficient de transfert de matière K.

Grandeurs physiques	Convection naturelle coefficient de diffusion constant $D = D_0 = cte$	Convection naturelle coefficient de diffusion variable $D = D(T)$
Flux de diffusion J	$3.13D_0C_0 \left[ \frac{g\beta_T\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{(x)^{1/4}}$	$2.755D_0C_0 \left[ \frac{g\beta_T\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{(x)^{1/4}}$
Epaisseur de la couche limite de diffusion $\delta_D$	$0.3194 \frac{(x)^{1/4}}{\left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4}}$	$0.363 \frac{(x)^{1/4}}{\left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4}}$
Courant limite de diffusion $\bar{I}$	$4.17nFD_0C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} (L)^{3/4}$	$3.673nFD_0C_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} (L)^{3/4}$
Coefficient de transfert de matière $\bar{K}$	$4.17D_0 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{1/4} \frac{1}{L^{1/4}}$	$3.673D_0 \left( \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right)^{1/4} \frac{1}{L^{1/4}}$

Figure (V.9) : Expressions des grandeurs de diffusion comparées

On cherche la relation entre le coefficient de transfert de matière et le gradient pariétal moyen de vitesse au niveau de l'électrode

- **Gradient de vitesse moyen  $\bar{S}$  :**

Partant de l'équation (V-27), le gradient de vitesse moyen se calcule comme suit :

$$\bar{S} = \frac{1}{L} \int_0^L S(x) dx = \frac{4}{5} \alpha C_1 \left[ \frac{g\beta\Delta T}{\alpha\nu} \right]^{3/4} L^{1/4} \quad (V-60)$$

permettant de tirer quelques conséquences physiques intéressantes :

- **Coefficient de diffusion constant :  $D = D_0$ :**

De la relation (V-33) et cette dernière, on trouve :

$$\bar{K}_0 = 4.17 \left( \frac{5D_0}{4\alpha C_1} \right)^{1/3} \left( \frac{D_0^2 \bar{S}}{L} \right)^{1/3} \quad (V-61)$$

d'où l'on tire le courant limite de diffusion qui égale à :

$$\bar{i}_0 = 4.17 n F C_0 A \Lambda^* \left( \frac{D_0^2 \bar{S}}{L} \right)^{1/3} \quad (V-62)$$

où  $\Lambda^* = \left( \frac{5D_0}{4\alpha C_1} \right)^{1/3}$  est une constante qui dépend des paramètres physiques.

On sait que  $\bar{K}_0^+ = \frac{\bar{K}_0 L}{D_0}$ , ce qui permet d'en déduire l'expression suivante :

$$\bar{K}_0^+ = 4.17 \Lambda \bar{S}^{+1/3} \quad (V-63)$$

avec  $\Lambda = \left( \frac{5D_0}{4\alpha C_1} \right)^{1/3}$  qui désigne une constante à préciser dans les conditions expérimentales. La loi (V-62) est une loi d'étalonnage classique telle que  $4.17\Lambda = 0.806$ , donc,

$$\bar{K}^+ = 0.806 \bar{S}^{+1/3} \quad (V-64)$$

- **Coefficient de diffusion variable  $D = D(T)$ :**

A partir des équations (V-57) et (V-59), on obtient :

$$\bar{K} = \left( \frac{3.673}{nF} \right) \left( \frac{5D_0}{4\alpha C_1} \right)^{1/3} \left( \frac{D_0^2 \bar{S}}{L} \right)^{1/3} \quad (V-65)$$

$$\bar{K} = 0.709 \left( \frac{D_0^2 \bar{S}}{L} \right)^{1/3} \quad (V-66)$$

et

$$\bar{i} = 0.709nFC_0A \left( \frac{D_0^2 \bar{S}}{L} \right)^{1/3} \quad (V-66)$$

on a  $K^+ = \frac{\bar{K}L}{D(T(x,0))}$ , et en sachant que  $D(T(x,0)) = D_0\Delta(x,0)$ , le coefficient de transfert de matière adimensionnel moyen égale à:

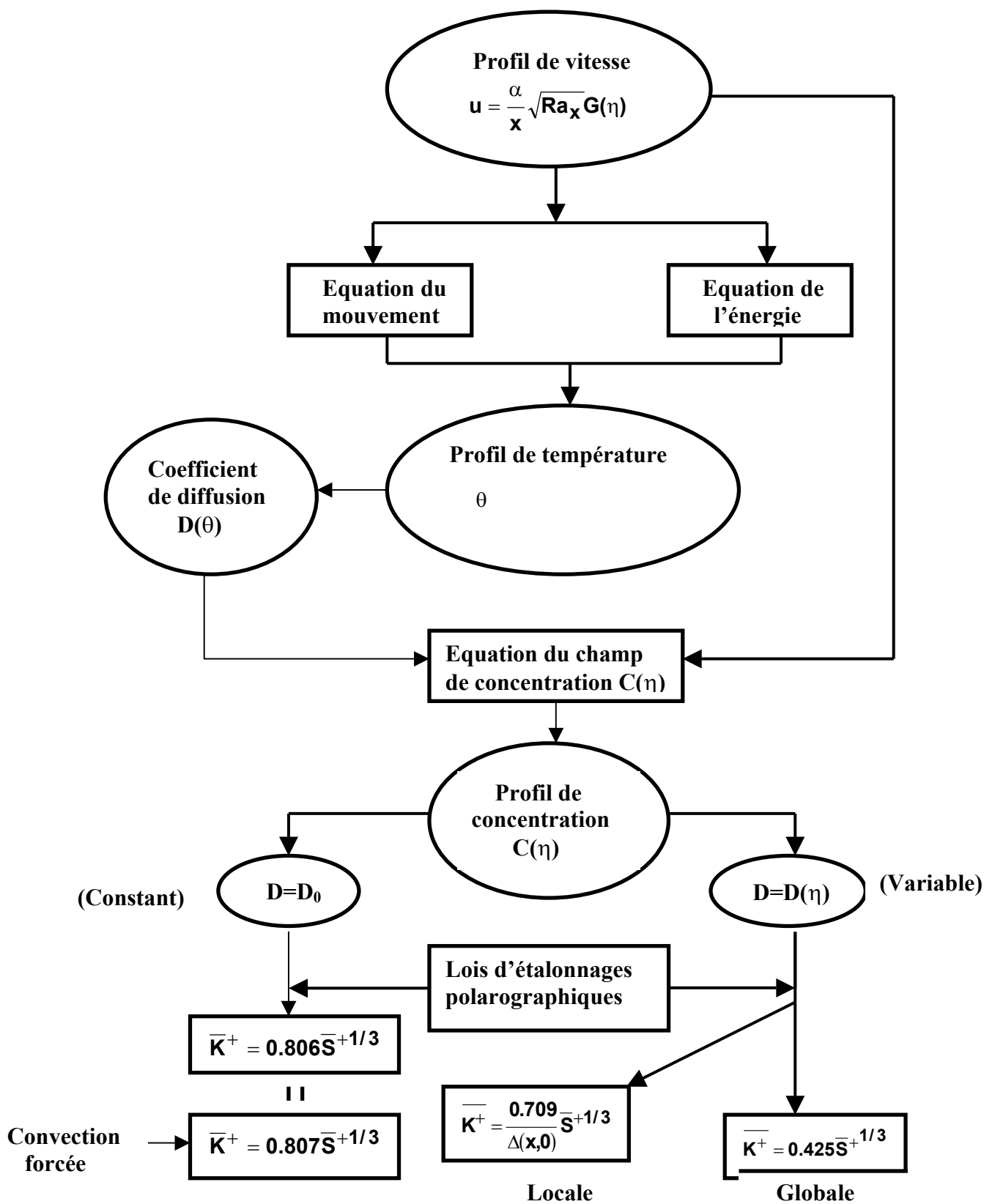
$$\bar{K}^+ = 0.425\bar{S}^{+1/3} \quad (V-67)$$

qui est une loi d'étalonnage globale à coefficient de diffusion variable  $D = D(T)$ .

A partir du schéma synoptique qui récapitule l'ensemble de nos travaux et la figure (V-10), il apparaît les propriétés suivantes :

- 1- lorsque le coefficient de diffusion  $D$  est constant, on retrouve la loi d'étalonnage valable en régime de convection forcée. On peut s'expliquer ce résultat par le fait que les lois de comportement des champs de vitesse, de température et de concentration sont linéaires au voisinage de la paroi. Ce résultat n'est pas évident en raison de l'existence d'une différence notable régissant la phénoménologie de convection naturelle.
- 2- Il est remarquable de noter que la loi d'étalonnage globale en convection naturelle à coefficient de diffusion variable présente la même forme qu'en convection forcée ( loi de puissance 1/3). Cependant, on constate que le coefficient de proportionnalité 0.425 est assez proche de la moitié de celui affectant le gradient en régime de convection forcée.
- 3- La loi d'étalonnage locale trouvée en régime de convection naturelle met en évidence l'influence locale du coefficient de diffusion  $D$  à travers l'expression adimensionnelle  $\Delta(x,0)$  découlant de la connaissance de  $D$ . Cette propriété peut être exploitée avantageusement dans le cadre de l'élaboration des électrodes différentielles ou scindées.

**SCHEMA SYNOPTIQUE D'EVALUATION DES LOIS D'ETALONNAGES POLAROGRAPHIQUES EN REGIME DE CONVECTION NATURELLE A COEFFICIENT DE DIFFUSION CONSTANT ET VARIABLE.**



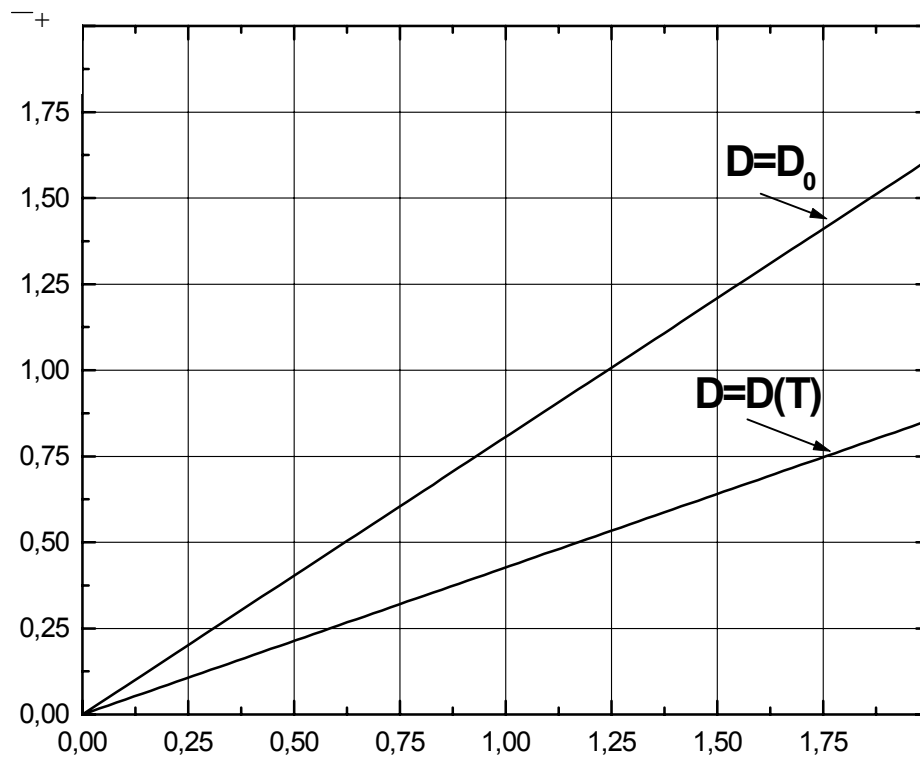


Figure (V.10) : Variation du coefficient de matière en fonction du gradient de vitesse moyen à diffusivité massique constante et variable.

### V. 5. CONCLUSION :

On a tenté d'évaluer l'impact de la variation de la température au sein de la solution sur le processus de diffusion. Ceci se traduit par un écart entre les grandeurs physiques à mesurer ayant pour conséquences :

1. l'épaisseur de la couche limite de diffusion augmente de 13.8% lorsque  $D$  dépend de la température.
2. La loi de croissance en puissance  $1/3$  du coefficient de transfert de matière en fonction du gradient de vitesse n'est pas modifiée par l'effet de la température : seul le coefficient de proportionnalité change.
3. Plus particulièrement, la variation du courant limite  $\bar{I}$  de diffusion en fonction du gradient de vitesse  $\bar{S}$  décroît de 10% lorsque  $D$  dépend de  $T$ , soit une correction d'environ 30 % qu'il faut apporter à  $\bar{S}$ .
4. Cependant, la variation des paramètres adimensionnels tels que le coefficient de transfert de masse  $K^+$  en fonction du gradient de vitesse  $\bar{S}^+$  décroît de 47% lorsque  $D$  varie avec  $T$ .

Dés lors, on en conclut que la température agissant sur l'électrode qui diffuse dans la solution influe appréciablement sur le processus de diffusion.

Il y a donc nécessité à corriger systématiquement la réponse des sondes polarographiques en régime de convection naturelle.

# CONCLUSION GENERALE

L'étude de la thermoconvection, particulièrement la convection naturelle évoluant autour d'une plaque plane verticale soumise à une température et flux uniformes est menée à l'aide de deux méthodes permettant de calculer et de procéder aux vérifications nécessaires. Il s'agit des méthodes de similitude et méthode intégrale qui ont permis d'aboutir à des résultats aussi intéressants qu'instructifs. En effet, notre démarche procède de quelques considérations phénoménologiques qui s'appuient sur les travaux de **A. BEJAN**, lesquels sont basés sur un choix d'échelles appropriées liées aux couches limites thermique et dynamique. Les différentes modélisations ont conduit aux résultats principaux suivants :

Premièrement, tenant compte de l'analyse d'échelles comme support de la méthode de similitude, on a pu modéliser le phénomène de transfert de chaleur par convection naturelle d'une plaque plane verticale en régime laminaire stationnaire dans le but d'établir l'existence d'une corrélation entre les propriétés dynamiques **Ra** liées au profil de vitesse et le paramètre caractérisant les propriétés thermiques **Pr**. Dans ces conditions, on a déterminé d'une manière approchée l'expression analytique des profils de vitesse et de température pour tous les fluides tels que **Pr**  $\geq$  **0.25**. Ceci nous a permis d'établir directement le coefficient de transfert de chaleur **Nu** dont la comparaison avec les données expérimentales semble être très satisfaisante. En outre, on a proposé la possibilité d'utiliser une procédure directe de calculs pour déterminer analytiquement les profils de vitesse et de température ainsi que l'évaluation du nombre de Nusselt **Nu** local et global caractérisant la convection naturelle liée à la plaque.

Deuxièmement, à partir de la forme analytique du profil de vitesse proposée précédemment (méthode de similitude), la résolution du problème par la méthode intégrale en prenant pour référence le cas limite **Pr** = **1**, a donné des résultats remarquables, en particulier, l'expression du nombre de **Nu** en fonction de **Pr** et **Ra** qui concorde de manière satisfaisante avec les données expérimentales dans les deux cas suivants :

- Une température uniforme d'écart inférieur à 5%
- Un flux uniforme d'écart de 16.5% d'après les données récentes disponibles correspondant à quatre valeurs de **Pr**.

En vue d'exploiter efficacement ces déterminations, on a étendu nos calculs à l'étude de l'influence de la température sur le processus de diffusion moléculaire régissant le fonctionnement d'une sonde polarographique de petites dimensions (de l'ordre du mm) insérée dans une plaque plane verticale.

Les résultats qui en découlent semblent très intéressants puisque ils montrent que la variation de la température de la solution influe d'une manière importante sur le phénomène de diffusion autour de l'électrode verticale en convection naturelle. Par conséquent, les grandeurs physiques telles que : flux de diffusion (**J**), courant limite de diffusion (**I**) et le coefficient de transfert de matière (**K**) à coefficient de diffusion variable dépendent de la température. Ceci a pour conséquence de montrer que le courant limite de diffusion peut

## Conclusion générale

---

diminuer de 10% (par rapport aux conditions de mesure effectuée à coefficient de diffusion constant) entraînant ainsi une correction nécessaire de l'ordre de 30% sur le gradient de vitesse moyenne  $\bar{S}$ .

Cependant, l'originalité de l'ensemble de ce travail demande à être vérifié par l'expérience tout en laissant entrevoir des potentialités de calculs dans les trois directions suivantes :

- Outre l'amélioration de l'approche analytique proposée, on pense à un prolongement de l'étude en régime de convection instationnaire. On vise principalement une application de grande importance qui consiste en l'analyse du processus de croissance cristalline de type Brigman pour mieux contrôler les échanges de masse et d'énergie [53].

- L'examen des effets de géométrie et notamment la courbure de la paroi avec un jeu de conditions aux limites adaptées (de type Cauchy, Fourier ou Neumann) simulant les données de la pratique industrielle.

- La détermination de la fonction de transfert en régime de fluctuations (convection naturelle et mixte) afin de corriger la réponse fréquentielle des sondes polarographiques.

Toutefois, il y a lieu d'insérer et de compléter cette modélisation par la méthode des groupes de similitude de type Williams et Rhyne [54] dans la cadre de la théorie générale de la double couche limite instationnaire déjà abordée par notre laboratoire [55].

## **BIBLIOGRAPHIE**

- [1] : **W. C. REYNOLDS** and **H. C. PERKINS**, Engineering Thermodynamics 2<sup>nd</sup> ed., Mc Graw-Hill, New York, 1977, pp.348
- [2] : **E. G. CRAVALHO** and **J. L. SMITH, Jr.**, Engineering Thermodynamics, Pitman, Boston, MA, 1981, pp. 347-350.
- [3] : **W. M. ROHSENOW** and **H. Y. CHOI**, Heat, Mass and Momentum Transfer, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1961, pp.48.
- [4] : **S. W. YUAN**, Foundations of Fluid Mechanics, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1967
- [5] : **A. BEJAN**, Advance Engineering Thermodynamics, Wiley, New York, 1988, p. 187
- [6] : **B. GEBHART**, heat Transfer, 2<sup>nd</sup> ed., Mc Graw-Hill, New York 1971, pp. 327-330
- [7] : **L. LORENZ**, Wiedemann Ann. d. Phys., 13, 582 (1881)
- [8] : **E. SCHMIDT** and **W. BECMANN**, Tech. Mech. U. Thermodynamik, 1, 341 and 391 (1930)
- [9] : **S. OSTRACH**, An analysis of laminar free convection flow and heat transfer about a flat plate parallel to the direction of the generating body force, NACA TN 2635, 1952
- [10] : **E. R. G. ECKERT**, Introduction to the transfer of Heat and Mass, Mc Graw. Hill Book Company, New York, 1951
- [11] : **F. KREICH** : Transmission de la chaleur et thermodynamique, chapitre 7, Masson, 1967.
- [12] : **E. R. G. ECKERT** and **R. M. DRAKE, Jr.** Analysis of heat and mass transfer, Intenational Student Edition, 1972
- [13] : **A. BEJAN**, External natural convection, pp. 156. Advanced in Heat and Mass Transfer, 2 nd. J. wiley, New York, 1994
- [14] : **H. H. LORENZ**, Die Warmeubertragung Von einer eben, senkrechten platte an Ol bei naturlicher Konvektion, Z. Tech. Phys., Vol 15, NO. 9, 1934, pp. 362-366
- [15] : **Y. JALURIA**, Natural Convection Heat and Mass Transfer Pergamon, Oxford, 1980, p.25

- [16] : **E. M. SPARROW**, Laminar Free-Convection on a vertical plate with prescribed non-uniform wall heat flux or prescribed nonuniform wall Temperature, NACA TN 3508, July 1955.
- [17] : **E. J. LEFEVRE**, Laminar free convection from a vertical plane surface, in Ninth International congress of Applied Mechanics, Brussels, 1956, paper 1-168.
- [18] : **CHURCHILL, S. W.** and **H. OZOE**, A correlation for laminar free-Convection from a vertical plate, J. Heat Transfer, Trans. ASME, 95c, 78 1973b.
- [19] : **P. L. VIOLLET**, Mécanique des fluides à masse volumique variable, CHAPTER III, Paroi verticale Chauffée ou Refroidie, 1997
- [20] : **CHURCHILL, S. W.** and **H. OZOE**, Correlations for laminar Forced Convection in Flow over an isothermal flat plate and in developing and Fully Developed Flow in an isothermal Tube, J. Heat Transfer, Trans. ASME, 95c, 78 1973a
- [21] : **H. B. SQUIRE**, integral solution published in S. Goldstein, ed., Modern Developments in Fluid Dynamics, Vol. II, Dover, New York, 1965, pp. 641-643.
- [22] : **E. M. SPARROW** and **J. L. GREGG**, Laminar Free Convection from a Vertical Plate with Uniform Surface Heat Flux, Trans. ASME, Vol.78, 1956, pp. 435-440
- [23] : **J. S. LIM**, **A. BEJAN** and **J. H. KIM**, The optimal thickness of a wall with convection on one side, Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 35, 1992, pp. 1673-1679.
- [24] : **LEVICH, V.**, Physicochemical Hydrodynamics. New Jersey : Prentice-Hall. 1962
- [25] : **D. L. FOSTER** and **E. L. CUSSLER**, Diffusion in liquids, Encyclopedie Fluid Mechanics, Gulf publishing Comp. Houston (1988).
- [26] : **REID, R. C. SHERWOOD, T. K.**, and **PRAUSNITZ, J. M.** Properties of Gases and liquids, third ed., New York : Mc Graw Hill, 1977.
- [27] : **CUSSLER, E. L.** , Diffusion, Mass Transfer in Liquid Systems. New York Cambridge university Press, 1984.
- [28] : **M. LÉBOUCHE**, Contribution à l'étude des Mouvements turbulents des liquides par la méthode polarographique, Thèse : Docteur ès Sciences, Chapitre II. 28 Octobre 1968.
- [29] : **A. BOUABDALLAH**, Instabilités et turbulence dans l'écoulement de TAYLOR-COUETTE, Thèse ès Sciences, chapitre II. 18 juin 1980.
- [30] : **H. SHLISTING** : Boundary layer theory. Mac Graw Hill New York 1955
- [31] : **J. R. WELLY, R. E. WILSON** and **C. E. WICKS** : Fundamentals of Momentum Heat and Mass Transfer, Chapter 20, 2<sup>nd</sup>.

- [32] : **C. S. WANG, M. M. YOVANOVICH and J. R. CULHAM** :General Model for Natural Convection : Application to Annular-Fin Heat Sinks, HTD. Vol. 343, Natural Heat Transfer Conference, Volume 5, ASME 1997.
- [33] : **M. YOVANOVICH**, General Expression for Laminar Forced and Natural Convection Heat Transfer from Isothermal Flates for all Prandtl Numbers, AIAA 28<sup>th</sup> Thermophysics Conference, July 6-9, 1993 / ORLANDO, Fl
- [34] : **A. BEJAN**, Convection Heat Transfer, John Wiley and Sons, New York, 1984
- [35] : **J. S. TURNER**, buoyancy Effets in Fluids, CAMBRIDGE, Monographs on Mechanics and Applied Mathematics.
- [36] : **CHURCHILL, S. W. and H. OZOE**, Correlations for laminar Forced Convection in Flow over an isothermal flat plate and in developing and Fully Developed Flow in an isothermal Tude, J. Heat Trasfer, Trans. ASME, 95c, 78 1973a
- [37] : **H. D. BHEHR and K. STEPHAN**, Heat and Mass Transfer, chapter III, Heat transfer in laminar flow on a vertical wall, 1998.
- [38] : **A. BEJAN and J. L. LAGE**, The Prandtl Number Effect. On the transition in natural convection along a vertical surface, Int. Journal of Heat Transfer, August 1990, Vol. 112 / 787.
- [39] : **Y. ASAKO, H. NAKAMURA and M. FAGHRI**, Natural convection in vertical heated tube attached to a Thermally Insulated Chimney of a different diamater.
- [40] : **S. TIEZEN, A. Ooi, P. DURBIN and BEHNIA**, Modeling of natural convection heat transfer. Center for Turbulence Research, Proceedings of the Summer Program 1998.
- [41] : **H. K. KUIKEN**, Free convection at low Prandtl Numbers, J. Fluid Mech. (1969), Vol. 37, part 4, pp. 785-798
- [42] : **M. RAHMAN and I. MULOLANI**, Convective-diffusion transport with chemical Reaction in natural convection flows, Theoret. Comput. Fluid Dynamics (2000) 13, pp. 291-304
- [43] : **A. H. P. SKELLAND**, Diffusional Mass Transfer, Chapter v, New York. London-Sydney. Toronto.
- [44] : **H. DIETER and K. STEPHAN**, Heat and mass transfer, 1998
- [45] : **B. EYGLUNENT**, Manuel de thermique, théorie et pratique, 2<sup>e</sup> édition revue 2000
- [46] : **M. JAKOB**, heat transfer, John Wiley and Sons, Inc. New York. London.Sydney, volume II, 1965

- [47] : **T. F. IRVINE, Jr. J. P. HARTNETT**, volume I, Academic Press.  
New York. London, 1964
- [48] : **J. R. WEITY**, Engineering heat transfer, John, Wiley and Sons, New York.  
London. Sydney. Toronto
- [49] : **W. M. ROHSENOW and HARRY CHOI**, heat, mass and Momentum  
transfer, trentice-Hall, Inc., United Kingdon and Eire prentice-Hall of Canada, LTD.  
Canada, 1961
- [50] : **V. P. ISACHENKO, V.A. OSIPOVA and A. S. SUKOMEL**, heat transfer, Mir  
Publishers Moscow, 1977
- [51] : **D. Q. KERN**, process heat transfer, International Student Edition, 1950
- [52] : **B. GEBHART**, heat transfer, TMH Edition, reprinted in India by  
arrangement with Mc Graw-Hill, Inc., New York, 1971
- [53] : **BRIDGMAN-STOCKBARGER**, Buoyancy-Driven flows in Crystal-Growth melts,  
IBM research laboratory, San Jose, California 95193, JFM 1985.
- [54] : **J. C. WILLIAMS, T. B. RHYNE**: Boundary layer development on awedg impulsively  
set into motion. SIAM J1 Appl Math Vol 83n 2 p215-224, 1980.
- [55] : **A. KAFI, A. BOUABDALLAH**, Théorie des groupes de similitude: application à  
l'étude de la thermoconvection de l'écoulement plan. Thèse de magister, L.I.S.E /  
USTHB 1991.