

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques



THESE

Présentée en vue de l'obtention du diplôme de **DOCTORAT**

En : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Recherche Opérationnelle : Mathématiques de Gestion**

Par

Nawel KAHOUL

Thème

Régularité Cyclique de Graphes Généralisant les Hypercubes

Soutenue le Mardi 09/06/2009, devant le jury composé de :

Mr. Hacène AIT HADDADENE,	Professeur, USTHB,	Président
Mr. Abdelhafid BERRACHEDI,	Professeur, USTHB,	Directeur de thèse
Mr. Méziane AÏDER,	Professeur, USTHB,	Examinateur
Mr. Michel MOLLARD,	Chargé de Recherche, CNRS, Grenoble	Examinateur
Mr. Bachir SADI,	Maître de Conférences, UMMTO,	Examinateur
Mr. Ahmed SEMRI,	Maître de Conférences, USTHB,	Examinateur

*A la mémoire de l'être qui est
la raison de mon existence
la clé de ma réussite
le coeur de mon âme
la source de mon énergie
A ma mère*

Remerciements

Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma gratitude à mon directeur de thèse Mr. BERRACHEDI Abdelhafid, qui m'a accompagné et soutenu, lors de l'élaboration de mes recherches pour la réalisation de cette thèse.

Je remercie également les membres du jury :

Mr. AIT HADDADENE Hacène, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur de présider ce jury ;

Mr. AIDER Méziane, professeur à l'USTHB, qui a bien voulu examiner mon travail et être membre de ce jury ;

Mr. MOLLARD Michel, Directeur de Recherche au CNRS, qui a bien voulu examiner mon travail et être membre de ce jury ;

Mr. SADI Bachir, Maître de Conférences à l'UMMTO, qui a bien voulu examiner mon travail et être membre de ce Jury ;

Mr. SEMRI Ahmed, Maître de Conférences à l'USTHB, qui a bien voulu examiner mon travail et être membre de ce jury.

Mes expressions de reconnaissance ne cesseront de s'adresser au Professeur BERRACHEDI Abdelhafid, qui a cru en moi. Je le remercie pour tous les conseils et appui qu'il m'a apporté tout au long de ma formation.

Table des matières

Introduction	6
1 Éléments de Théorie des Graphes	10
1.1 Graphes	10
1.1.1 Définitions Générales	10
1.1.2 Sous-Structures	12
1.1.3 Chaîne et Cycle	12
1.1.4 Connexité dans les Graphes et Distance	13
1.1.5 Graphes Particuliers	14
1.2 Opérations Classiques	18
1.3 Décomposition en Niveaux	23
1.4 Intervalles et Convexité	25
2 Graphes Type Hypercube	30
2.1 Le graphe de l'Hypercube	30
2.1.1 Quelques Propriétés Élémentaires de l'Hypercube	30
2.2 Les $(0,\lambda)$ -Graphes	31
2.3 Les Graphes Impairs	36
2.4 Les Graphes Impairs Étendus	36
2.5 Les Graphes L_n^k	37
2.6 Quelques Caractérisations de l'Hypercube	39
3 Graphes Cycles Réguliers	42
3.1 Définitions	43

3.2	Notions de Base	43
3.3	Les Graphes [3,1,6]-Cycle Régulier	45
3.4	Opérations Sur les Graphes [3,1,6]-Cycle Réguliers	58
4	Graphes [3,1,6]-Cycle-Induit Réguliers	62
4.1	Preliminaires	62
4.2	Résultats de Base	64
4.3	Opération sur les Graphes [3,1,6]-Cycle-Induit Réguliers	78
Conclusion		83
Bibliographie		85

Introduction Générale

Introduction

Une des parties de la science est la Recherche Opérationnelle, une discipline carrefour où se rencontrent l'économie, les mathématiques et l'informatique. En pratique, elle représente la démarche suivie pour élaborer rationnellement de bonnes décisions, sous l'impulsion d'un certain nombre de contraintes.

Bien que la plupart des méthodes de la Recherche Opérationnelle aient été découvertes entre le *XVII^e* siècle et les années 30 du *XX^e*, elle ne s'est développée qu'à partir du moment où les ordinateurs furent publics. Elle s'est appuyée sur des connaissances mathématiques importantes et variées, telles que les *structures algébriques*, l'*algèbre linéaire*, la *théorie des graphes*, . . .

Cette dernière donne l'occasion de modéliser des situations réelles sous la forme de graphes topologiques valués, comme les *diagrammes de Hasse*, les *Hypercubes*, les *arborescences*, qui en favorisent la compréhension.

Dans l'avant propos de son livre «Graphes », C.Berge [1] note que la théorie des graphes a eu un développement bien étrange, d'abord apparue dans le magazine des curiosités mathématiques (problème des « *ponts de Königsberg* » (« *Kaliningrad* » aujourd'hui)), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (*Kirchoff*). Elle a été utilisée par la chimie, la psychologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'*algèbre moderne*, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes mathématiques de nature combinatoire. Elle n'a pu prendre sa forme actuelle que grâce aux efforts de certains spécialistes de la Recherche Opérationnelle et sous l'impulsion de préoccupations pratiques.

Ainsi la représentation graphique d'une situation réelle, consiste en la représentation des éléments essentiels par des points ou petits cercles où une paire est reliée par une arête ou arc, selon le cas, dès qu'une relation, relative à la situation, surgit.

Parmi les graphes qui ont incité plusieurs études, nous trouvons le n -cube ou l'*hypercube de dimension n* , noté Q_n . C'est le graphe, à 2^n sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens sur $\{0, 1\}^n$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent en une seule composante. Ou encore, comme un graphe dont l'ensemble des sommets est l'ensemble de toutes les parties de l'ensemble $\{1, \dots, n\}$, où deux sommets sont reliés tant que leurs ensembles correspondants diffèrent en exactement un seul élément. Une décomposition en niveaux de Q_n est une partition de l'ensemble des sommets de Q_n en n ensembles appelés *niveaux* et notés N_0, N_1, \dots, N_n , où le $i^{\text{ème}}$ niveau N_i est l'ensemble des sommets dont les ensembles correspondants possèdent i éléments. Soit L_n^k un sous-graphe de l'hypercube engendré par $N_{k-1} \cup N_k$.

Lors de l'étude des problèmes de plongement de graphes dans l'hypercube, Ivan Havel a examiné les sous-graphes L_n^k . Il a été amené à donner la célèbre conjecture des *niveaux centraux*, à savoir L_{2k+1}^k , noté aussi H_k , est hamiltonien. Malgré plusieurs études menées cette conjecture reste ouverte, à nos jours.

Une des particularités de L_n^k est que *toute chaîne de longueur trois appartient à un unique cycle de longueur six*. Les graphes vérifiant cette propriété sont dits des *graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers*. Ils sont un cas particulier de la classe des graphes *cycles réguliers* [34], qui compte parmi eux les *graphes $[2, \lambda - 1, 4]$ -cycle réguliers*, connus en littérature sous l'appellation les $(0, \lambda)$ -*graphes* (Mulder [37]), où *toute paire de sommets possède soit exactement λ voisins communs ou aucun*. Les *Graphes Cycles Réguliers* (Mollard [34]), appelés aussi les *graphes $[\mu, \eta, \nu]$ -cycle réguliers*, sont des graphes de maille au moins μ ($\mu \geq 2$), pour lesquels *chaque chaîne de longueur μ appartient à exactement η ($\eta \geq 1$) cycles élémentaires de longueur ν* . Nous avons focalisé notre travail sur la famille de graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers.

Tous les rappels, à propos des graphes, nécessaires à la lecture de ce manuscrit sont présentés dans le premier chapitre.

Le deuxième chapitre intitulé *Graphes Type Hypercube* est consacré à un survey sur l'hypercube et quelques unes de ses généralisations, telles que les $(0,\lambda)$ -graphes (Mulder [37]).

Les *Graphes Cycles Réguliers* (Mollard [34]), appelés aussi les *graphes $[\mu, \eta, \nu]$ -cycle réguliers*, et plus particulièrement les graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers, font l'objet du troisième chapitre. En introduisant et étudiant cette famille de graphes, Mollard [34] a montré que le sous-graphe H_k est maximal, pour son ordre par rapport à son degré, pour les graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Nous montrons par un travail similaire au sien [33, 34], que H_k est maximal, pour son diamètre par rapport à son degré, parmi les graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Pour ces derniers, nous étudions le voisinage commun pour chaque paire de sommets, nous suggérons des propriétés de reconnaissance de certains graphes particuliers et bien d'autres propriétés.

Lors du chapitre quatre, nous introduisons la classe des *Graphes $[3, 1, 6]$ -Cycle-Induit Réguliers*. Ce sont des graphes pour lesquels *chaque chaîne induite de longueur trois, à extrémités distinctes, appartient à un unique cycle induit de longueur six*. En fait ces graphes généralisent les graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Plusieurs résultats à propos de ces graphes sont établis, y compris la caractérisation de H_k .

CHAPITRE 1

Éléments de Théorie des Graphes

Chapitre 1

Éléments de Théorie des Graphes

1.1 Graphes

On consacre cette section aux définitions nécessaires à la lecture de ce manuscrit et quelques propriétés fondamentales. Elles ont été adoptées aux ouvrages de Bondy et Murty [11]. Pour plus de détails, le lecteur peut se référer aux ouvrages de Berge [1] et Biggs [10].

1.1.1 Définitions Générales

Un *graphe* \mathbf{G} consiste en un ensemble fini non vide V dit *ensemble de sommets* et un ensemble E de paires de sommets distincts appelées *arêtes*. C'est ce que nous appelons *graphes simples, finis et non orientés* et ce que nous considérons sauf spécification contraire, tout au long de ce manuscrit. Le nombre de sommets est appelé l'*ordre* de \mathbf{G} . Si on utilise la lettre \mathbf{G} pour désigner un graphe, alors les lettres V et E désigneront respectivement l'ensemble de ses sommets et l'ensemble de ses arêtes (lorsqu'il y a un risque de confusion, on les notera $V(\mathbf{G})$ et $E(\mathbf{G})$).

Un graphe est représenté dans le plan par une figure géométrique, où les sommets sont représentés par des points (ou petits cercles) et une arête xy est représentée par une ligne joignant le point représentant le sommet x à celui qui représente le sommet y .

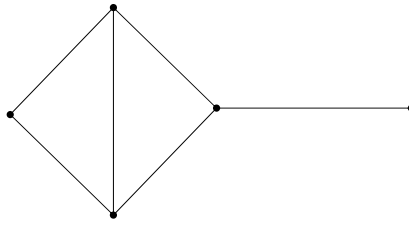


Figure 1.1 – Exemple de Graphe

Adjacence et Incidence

Deux sommets sont dits *adjacents* s'ils sont *extrémités* d'une même arête. On dit aussi qu'ils sont incidents avec elle. Deux arêtes ayant une extrémité commune x sont dites *adjacentes* en x . Dans un graphe \mathbf{G} , les *voisins* d'un sommet x , dont l'ensemble est noté $N(x)$, sont les sommets y de \mathbf{G} tels que xy soit une arête de \mathbf{G} . Autrement dit :

$$N(x) = \{y \in V : xy \in E\}$$

Degré

Le *degré* d'un sommet x de \mathbf{G} , noté $d(x)$ (ou encore $d_{\mathbf{G}}(x)$), est le nombre de voisins de x . Un sommet de degré 0 (sommet sans voisin) est dit *isolé*, un sommet de degré 1 (un sommet ayant un seul voisin) est un sommet *pendant*. Si tous les sommets de \mathbf{G} ont même degré, disons une valeur d , alors \mathbf{G} est régulier de degré d , on dira qu'il est *d -régulier*. Noter que, pour tout graphe \mathbf{G} ,

- 1) $\sum_{x \in V(\mathbf{G})} d_{\mathbf{G}}(x) = 2|E|$;
- 2) le nombre de sommets de degré impair est pair.

La valeur minimale des degrés, notée $\delta(\mathbf{G})$, est appelée le *degré minimum* de \mathbf{G} . Tandis que la valeur maximale, notée $\Delta(\mathbf{G})$, est appelée le *degré maximum* de \mathbf{G} . Autrement dit,

$$\delta(\mathbf{G}) = \min_{x \in V(\mathbf{G})} d_{\mathbf{G}}(x) \text{ et } \Delta(\mathbf{G}) = \max_{x \in V(\mathbf{G})} d_{\mathbf{G}}(x).$$

Dans un graphe \mathbf{G} , notons $m(x, W)$ (ou encore $m_{\mathbf{G}}(x, W)$) le nombre d'arêtes qui relie un sommet x à un ensemble de sommets W .

1.1.2 Sous-Structures

Un *sous-graphe* de \mathbf{G} est un graphe \mathbf{G}' , où l'ensemble de ses sommets V' est un sous-ensemble de V et celui de ses arêtes E' est un sous-ensemble de E , tel que toute arête de E' joint deux sommets de V' . Si toutes les arêtes de \mathbf{G} , qui relient des sommets de V' , sont dans E' , on dira que \mathbf{G}' est *induit par* V' et il est noté $\mathbf{G}_{V'}$. Dans le cas où $V' = V$, on dira que \mathbf{G}' est un *graphe partiel* de \mathbf{G} .

Le *graphe complémentaire* du graphe \mathbf{G} , noté $\overline{\mathbf{G}}$, possède V comme ensemble de sommets, deux sommets sont adjacents dans $\overline{\mathbf{G}}$ si et seulement si ils ne le sont pas dans \mathbf{G} .

Une *clique* (resp. un *stable*) de \mathbf{G} est un sous-ensemble de sommets de \mathbf{G} deux à deux adjacents (resp. non adjacents).

On appelle *couplage* un ensemble M d'arêtes tels que les arêtes de M sont deux à deux non adjacentes. Un sommet x est *saturé* par un couplage M s'il existe une arête de M , avec laquelle x est incidente. Un couplage qui sature tous les sommets du graphe est appelé *couplage parfait*.

1.1.3 Chaîne et Cycle

Dans un graphe \mathbf{G} , une séquence de sommets x_0, x_1, \dots, x_k où deux sommets consécutifs sont adjacents est appelée une *chaîne* reliant les deux sommets x_0 et x_k . Elle est parfois appelée (x_0, x_k) -*chaîne*. Pour $k \geq 2$, les sommets x_1, \dots, x_{k-1} sont les *sommets internes* de (x_0, x_k) -chaîne et x_0, x_k sont ses *extrémités*. Sa *longueur* est le nombre de ses arêtes qui la constituent.

Une chaîne est dite *induite* si aucune paire de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents. On peut la définir aussi comme étant une chaîne dont l'ensemble des sommets engendre un sous-graphe qui est une chaîne. Une chaîne qui n'utilise pas deux fois le même sommet est dite *élémentaire*, une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite *simple*. Une chaîne élémentaire est donc une chaîne simple. On note P_n une chaîne élémentaire à n sommets, donc de longueur $n - 1$. Deux chaînes reliant deux sommets sont *sommets disjointes* si leurs sommets internes respectifs sont distincts.

On appelle *cycle* dans un graphe \mathbf{G} , une chaîne simple à extrémités confondues. Autrement dit, un cycle est une séquence de sommets x_1, \dots, x_n, x_1 , où toute paire de sommets consécutifs sont adjacents. Un cycle *élémentaire* de \mathbf{G} et de longueur n , appelé *n-cycle* aussi, est une chaîne simple et élémentaire sur n sommets x_1, \dots, x_n . Un cycle est *hamiltonien* s'il passe par chaque sommet du graphe une et une seule fois. La *maille* de \mathbf{G} est la longueur du plus petit cycle dans \mathbf{G} .

Une arête joignant deux sommets non consécutifs d'un cycle est appelé *corde*. Dans le cas où le cycle est sans corde, alors il est un *sous-graphe induit* de \mathbf{G} . Il est noté C_n .

Dans la suite, sans spécification contraire, on ne considérera que des chaîne et des cycle élémentaires.

1.1.4 Connexité dans les Graphes et Distance

Un graphe \mathbf{G} est *connexe* si pour toute paire de sommets x et y , il existe une (x,y) -chaîne. Un graphe \mathbf{G} *non connexe* consiste en une union disjointe de graphes connexes appelés *composantes connexes* de \mathbf{G} .

Sauf spécification contraire, les graphes utilisés sont supposés connexes.

Étant donnés deux sommets x et y d'un graphe $\mathbf{G} = (V, E)$. On appelle *distance* entre x et y et on note $d(x, y)$ (ou encore $d_{\mathbf{G}}(x, y)$), la longueur d'une plus courte (x,y) -chaîne. Cette dernière s'appelle (x,y) -*géodésique* aussi.

L'*excentricité* d'un sommet x , notée $e(x)$ (ou $e_{\mathbf{G}}(x)$), est la longueur de la plus grande géodésique issue de x , i.e

$$e(x) = e_{\mathbf{G}}(x) = \max_{y \in V(\mathbf{G})} d_{\mathbf{G}}(x, y)$$

Le *diamètre* de \mathbf{G} , noté $\text{diam}(\mathbf{G})$, est la plus grande excentricité dans \mathbf{G} , i.e

$$\text{diam}(\mathbf{G}) = \max_{x, y \in V(\mathbf{G})} d_{\mathbf{G}}(x, y) = \max_{x \in V(\mathbf{G})} e_{\mathbf{G}}(x)$$

Le *rayon*, noté $R(\mathbf{G})$, est la plus petite excentricité dans \mathbf{G} , i.e

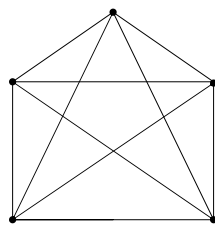
$$R(\mathbf{G}) = \min_{x \in V(\mathbf{G})} e_{\mathbf{G}}(x)$$

Un sommet x est un *centre* de \mathbf{G} , si $e_{\mathbf{G}}(x) = R(\mathbf{G})$. Un sommet y est un *antipodique* du sommet x si $d(x, y) = e_{\mathbf{G}}(x)$. Il lui est *diamétral*, si $d(x, y) = \text{diam}(\mathbf{G})$. Le nombre de sommets diamétraux d'un sommet x donné peut varier de zéro à $n - 1$, si n est l'ordre de \mathbf{G} . Un graphe \mathbf{G} est *antipodique* (resp. *diamétral*), si tout sommet admet un unique antipodique (resp. diamétral).

1.1.5 Graphes Particuliers

Graphes Complets

Un graphe \mathbf{G} d'ordre n , qui vérifie $\delta(\mathbf{G}) = \Delta(\mathbf{G}) = n - 1$, est dit *complet* à n sommets, noté K_n . On l'appelle aussi une *n-clique*.



Le graphe complet K_5

Figure 1.2 – Exemple de Graphe Complet

Le graphe complet à n sommets est un graphe qui contient $\frac{n(n-1)}{2}$ arêtes.

Graphe Biparti

Un graphe $\mathbf{G} = (V, E)$ est dit *biparti* s'il existe une partition de V en deux ensembles V_1 et V_2 , tels que toute arête de E a une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 . Donc V_1 et V_2 sont deux stables.

Comme conséquence, on a :

Proposition 1.1. *Un graphe \mathbf{G} est biparti si et seulement si il n'admet pas de cycle de longueur impaire.*

Nous avons aussi la formule suivante :

$$\sum_{x \in V_1} d_{\mathbf{G}}(x) = |E| = \sum_{x \in V_2} d_{\mathbf{G}}(x),$$

ou encore

$$r |V_1| \leq s |V_2|,$$

où $r = \min_{x \in V_1} d(x)$ et $s = \max_{x \in V_2} d(x)$.

Un graphe biparti est dit **semi-régulier**, si tous les sommets d'un stable de la même bipartition ont le même degré.

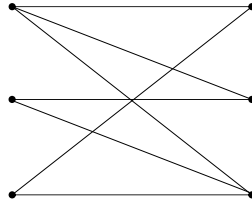
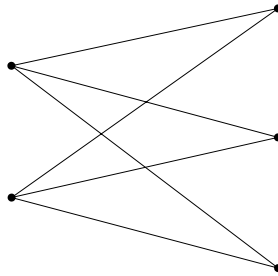


Figure 1.3 – Exemple de Graphe Biparti

Graphe Biparti Complet

Un graphe biparti \mathbf{G} est complet si tout sommet de V_1 est adjacent à tout sommet de V_2 . Si $p = |V_1|$ et $q = |V_2|$, un tel graphe est noté $K_{p,q}$.



Le Graphe Biparti Complet $K_{2,3}$

Figure 1.4 – Exemple de Graphe Biparti Complet

Le graphe $K_{p,q}$ possède $p + q$ sommets et pq arêtes, le degré d'un sommet de V_1 est q et le degré d'un sommet de V_2 est p .

Graphe de l'Hypercube

L'*hypercube* de degré n , noté Q_n , est le graphe à 2^n sommets qui peuvent être considérés comme étant tous les vecteurs booléens sur $\{0, 1\}^n$, et où deux sommets sont adjacents si et seulement si les vecteurs associés à ces sommets diffèrent en une seule composante.

L'*hypercube* Q_n représente les vecteurs de l'espace vectoriel fini à n dimensions sur le corps $\{0, 1\}$; soit $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\{0, 1\}^n$, deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si il existe un vecteur e_i tel que $x + y \equiv e_i \pmod{2}$.

Cette représentation de Q_n est dite *vectorielle*. Une autre représentation, dite *ensembliste*, consiste en ce qui suit :

L'*hypercube* de degré n , Q_n , est le graphe ayant comme sommets les éléments de l'ensemble des parties $P(S)$ d'un ensemble à n éléments S , et deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en un seul élément.

Le passage d'une représentation ensembliste à une représentation vectorielle se fait en étiquetant chaque partie A de S par sa fonction caractéristique.

Rappelons qu'un *ensemble fini partiellement ordonné* (poset), $P = (V, \leq)$ consiste en un ensemble fini V muni d'une relation reflexive, transitive et anti-symétrique " \leq ".

Si $u \leq v$ et $u \neq v$, alors on écrit $u < v$. Soient u et v deux éléments de V , alors v *couvre* u dans P , si $u < v$ et il n'y a pas de w dans V tel que $u < w < v$.

En utilisant la relation de couverture, on peut obtenir une représentation graphique de P , appelée le *diagramme de Hasse* de P , comme suit : représenter chaque élément de P par un petit cercle, en plaçant v au-dessus de u , tant que $u < v$. Dresser une arête reliant u et v , si v couvre u .

La *plus grande borne inférieure* de deux éléments u et v de P est un élément x , tel que $x \leq u$ et $x \leq v$ et pour tout y dans V avec $y \leq u$ et $y \leq v$, on a $y \leq x$. Si une telle plus grande borne inférieure de u et v existe, alors elle est unique, puisque \leq est anti-symétrique et on la note par $u \wedge v$. De même, la *plus petite borne supérieure* de u et v est un élément x , tel que $u \leq x$ et $v \leq x$ et pour tout y dans V , avec $u \leq y$ et $v \leq y$, on a $x \leq y$. Si une telle plus petite borne supérieure existe, alors on la note par $u \vee v$.

Une *borne inférieure universelle* de P est un élément 0 dans V , avec $0 \leq u$, pour tout u dans V . De même, une *borne supérieure universelle* de P est un élément 1 dans V , tel que $u \leq 1$, pour tout u dans V .

Un *treillis fini* est un poset fini P , pour lequel chaque deux éléments possèdent une plus grande borne inférieure et une plus petite borne supérieure. Ainsi, un treillis fini possède une borne inférieure universelle et une borne supérieure universelle. Notons qu'un poset fini possédant une borne supérieure universelle, dans lequel chaque deux éléments possèdent une plus grande borne inférieure est un treillis.

Le treillis booléen sur 2^n éléments est le poset $(P(V), \subseteq)$, où V est un ensemble à n éléments. Il s'ensuit que Q_n est le graphe de couverture de ce treillis booléen.

Notons que les premiers hypercubes sont $Q_0 = K_1$ et $Q_1 = K_2$.

La figure suivante montre des hypercubes de petits ordres.

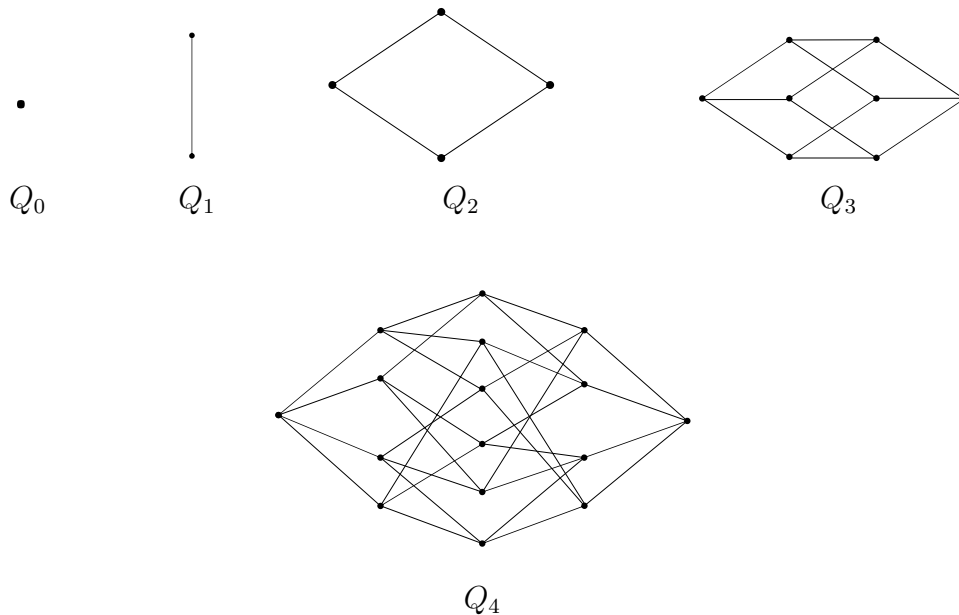


Figure 1.5 – Exemples d'Hypercubes

1.2 Opérations Classiques

Identification de Sommets

Soit A un sous-ensemble de sommets de \mathbf{G} . L'*identification des sommets de A* consiste à remplacer tous les sommets de A par un sommet a , qu'on relie à tous les voisins de A . Le graphe obtenu est noté \mathbf{G}/A .

Le graphe de la Figure 1.6 (b) est obtenu après identification des sommets x, y et z de la Figure 1.6 (a).

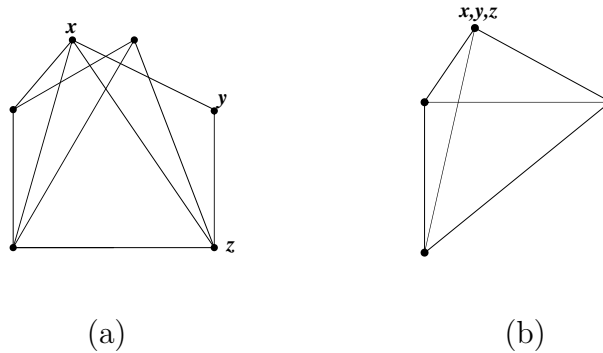


Figure 1.6 – Exemple d'Identification de Sommets

Contraction d'une Chaîne

Soit I une chaîne de \mathbf{G} , où tous les sommets internes sont de degré 2. La *contraction de la chaîne I* consiste à supprimer tous ses sommets internes et relier ses extrémités par une arête. La chaîne I est dite *contractante*.

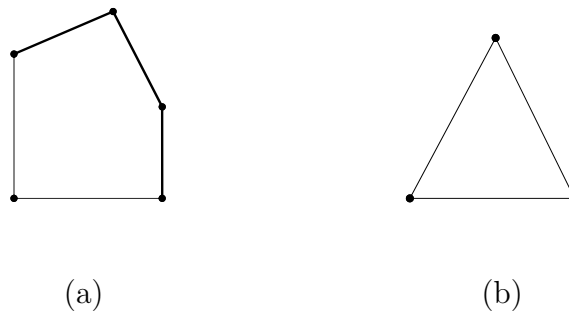


Figure 1.7 – Exemple de Contraction de Chaînes

Ajout d'une Arête

Si x et y sont deux sommets de \mathbf{G} non adjacents. L'ajout de l'arête xy consiste à considérer le graphe \mathbf{G}' , où $V(\mathbf{G}') = V(\mathbf{G})$ et $E(\mathbf{G}') = E(\mathbf{G}) \cup \{xy\}$.

Un *sur-graphe* de \mathbf{G} est un graphe obtenu à partir de \mathbf{G} par ajout d'arêtes.

Subdivision d'un Graphe

Une *subdivision élémentaire* d'un graphe \mathbf{G} est un graphe obtenu par insertion d'un sommet de degré deux sur une arête de \mathbf{G} .

Une *subdivision* de \mathbf{G} est un graphe obtenu à partir de \mathbf{G} par une succession de subdivisions élémentaires. Une *p-subdivision* de \mathbf{G} est un graphe obtenu par insertion de p sommets sur chaque arête.

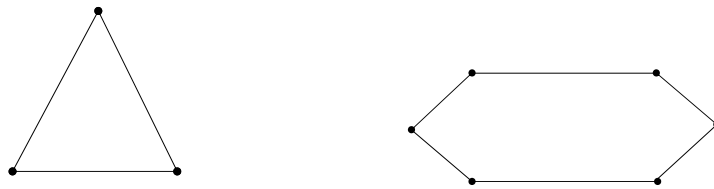


Figure 1.8 – Exemple de Subdivision d'un Graphe

Produit Cartésien de Deux Graphes

Le *produit cartésien* (ou *produit carré*) de deux graphes \mathbf{G} et \mathbf{H} est le graphe, noté $\mathbf{G} \square \mathbf{H}$, dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(\mathbf{G}) \times V(\mathbf{H})$ et où le sommet (u, u') est adjacent à (v, v') si et seulement si $(u = v$ et $u'v' \in E(\mathbf{H})$) ou $(uv \in E(\mathbf{G})$ et $u' = v')$.

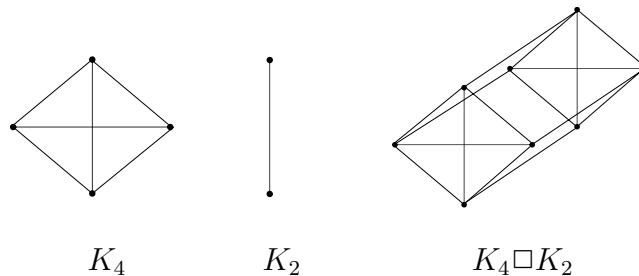


Figure 1.9 – Exemple de Produit Cartésien

Le nombre des sommets dans $\mathbf{G} \square \mathbf{H}$ est $|V(\mathbf{G})| \cdot |V(\mathbf{H})|$ et le nombre de ses arêtes est $|V(\mathbf{G})| \cdot |E(\mathbf{H})| + |V(\mathbf{H})| \cdot |E(\mathbf{G})|$.

L'hypercube Q_n peut être défini récursivement en utilisant le produit cartésien, par l'expression $Q_{n+1} = Q_n \square K_2$, avec $Q_1 = K_2$. Il est donc clair que Q_n ($n \geq 1$) est isomorphe à (1.1) et donc que $Q_{n+d} = Q_n \square Q_d$.

$$\underbrace{K_2 \square K_2 \square \dots \square K_2}_{n \text{ fois}} \tag{1.1}$$

Il est démontré que :

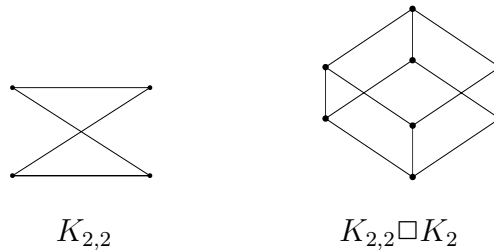


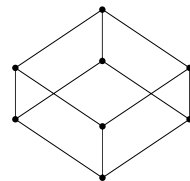
Figure 1.10 –

Proposition 1.2. *Le diamètre du produit cartésien de deux graphes \mathbf{G} et \mathbf{G}' est la somme des diamètres de ces graphes.*

En utilisant la relation (1.1) et Proposition 1.2, on voit bien que le diamètre de l'hypercube Q_n est égal à n .

Produit Catégoriel de Deux Graphes

Le *produit catégoriel* (ou *produit croisé*) des graphes \mathbf{G} et \mathbf{H} est le graphe, noté $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$, dont l'ensemble des sommets est $V(\mathbf{G}) \times V(\mathbf{H})$ et où (u, v) est adjacent à (u', v') si et seulement si $(uu' \in E(\mathbf{G}) \text{ et } vv' \in E(\mathbf{H}))$.



$$K_4 \times K_2 = Q_3$$

Figure 1.11 – Exemple de Produit Cartégoriel

Homomorphismes, Isomorphismes, Homéomorphismes

Un graphe \mathbf{G} peut symboliser la structure algébrique définie par l'ensemble V muni de la relation d'adjacence. Ainsi, les notions algébriques classiques de morphismes restent identiques.

Définition 1.1. *Le graphe \mathbf{G} est homomorphe au graphe \mathbf{H} , s'il existe un homomorphisme entre la structure définie par \mathbf{G} et celle définie par \mathbf{H} . Autrement dit, une application de $V(\mathbf{G})$ dans $V(\mathbf{H})$ qui conserve l'adjacence.*

Cette définition peut s'interpréter différemment suivant que les relations considérées soient réflexives ou non. Pour éviter toute ambiguïté, on adoptera la définition suivante :

Définition 1.2. *Le graphe \mathbf{G} est homomorphe à \mathbf{H} s'il existe une application f de $V(\mathbf{G})$ dans $V(\mathbf{H})$ telle que :*

$$xy \in E(\mathbf{G}) \text{ alors } f(x)f(y) \in E(\mathbf{H}) \text{ ou } f(x) = f(y).$$

Une autre définition consiste en ce qui suit :

Définition 1.3. *\mathbf{G} est homomorphe à \mathbf{H} , s'il existe une application f de $V(\mathbf{G})$ dans $V(\mathbf{H})$ telle que si W ($W \subset V(\mathbf{H})$) induit un sous-graphe connexe de \mathbf{H} , alors $f^{-1}(W)$ induit un sous-graphe connexe de \mathbf{G} .*

Les graphes de la Figure 1.12 sont homomorphes au sens de Définition 1.1, mais ne le sont pas au sens des autres définitions.

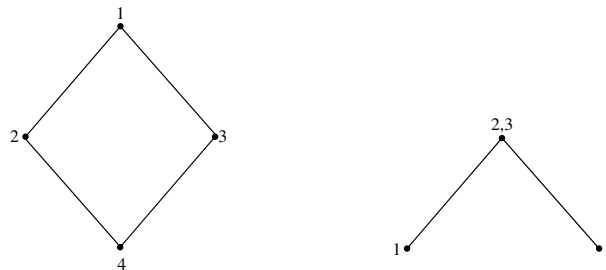


Figure 1.12 –

Les graphes de la Figure 1.13 sont homomorphes au sens de Définition 1.2, mais ne le sont pas au sens des autres définitions.

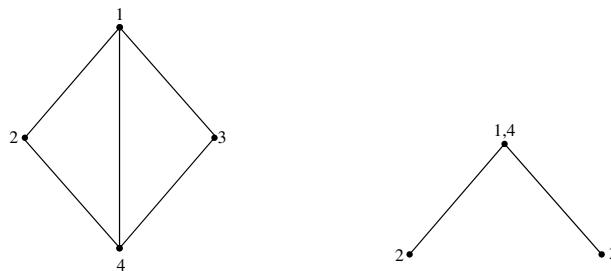


Figure 1.13 –

Les graphes de la Figure 1.14 sont homomorphes au sens de Définition 1.3, mais ne le sont pas au sens des autres définitions.

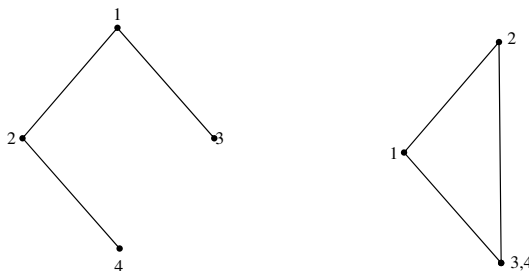


Figure 1.14 –

Un *homéomorphisme* de \mathbf{G} dans \mathbf{H} est un homomorphisme f de \mathbf{G} dans \mathbf{H} tel que pour toute arête xy , $f^{-1}(xy)$ induit une chaîne dans \mathbf{G} . On dira que \mathbf{G} est une subdivision de \mathbf{H} .

L'application f de \mathbf{G} dans \mathbf{H} des graphes de la Figure 1.15 est un homomorphisme bijectif, tandis que f^{-1} n'est pas un homomorphisme.

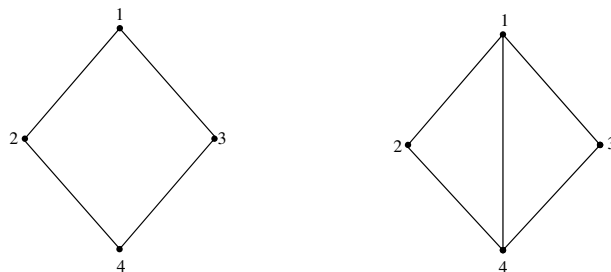


Figure 1.15 –

On dira qu'une bijection f de \mathbf{G} dans \mathbf{H} est un isomorphisme si f et f^{-1} sont des homomorphismes. Usuellement, on ne fait pas de distinction entre des graphes isomorphes. Un automorphisme de \mathbf{G} est un isomorphisme de \mathbf{G} dans lui-même.

On dira que :

(a) \mathbf{G} est *sommet-transitif* si pour chaque paire de sommets x et y , il existe un automorphisme f de \mathbf{G} tel que $y = f(x)$.

(b) \mathbf{G} est un graphe *distance-transitif* si pour tout x, y, u et v tels que $d(x, y) = d(u, v)$, il existe un automorphisme f de \mathbf{G} tel que $f(x) = u$ et $f(y) = v$.

1.3 Décomposition en Niveaux

Pour un sommet x de \mathbf{G} , $N_i(x)$ est l'ensemble des sommets de V à distance i de x . L'ensemble des voisins de x , $N(x)$ est $N_1(x)$.

Une *décomposition en niveaux* (ou *en couches*) relative au sommet x de \mathbf{G} est une partition des sommets N_0, N_1, \dots, N_p , où $p = e_{\mathbf{G}}(x)$ et $N_i = N_i(x)$ est appelé le $i^{\text{ème}}$ niveau de \mathbf{G} , $i = 1, \dots, p$.

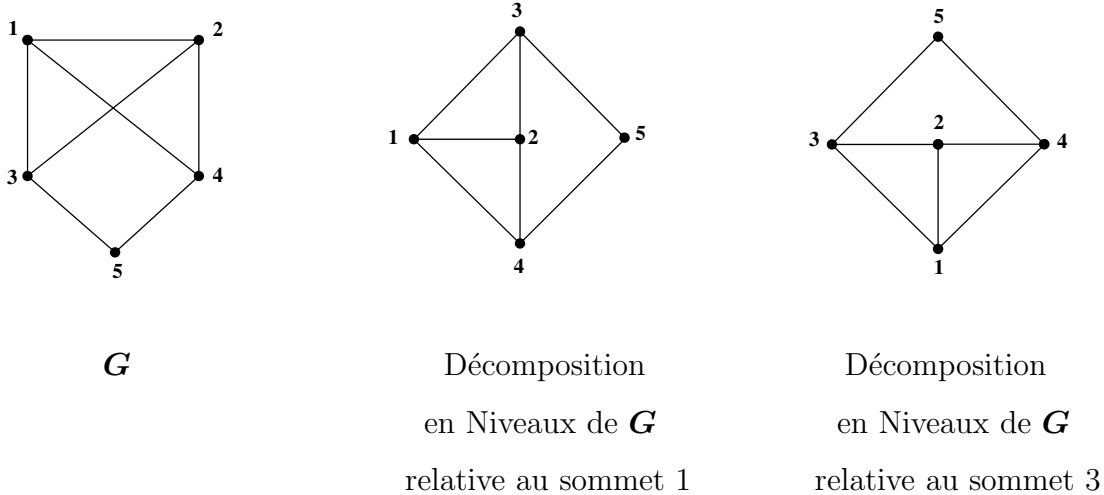


Figure 1.16 – Exemples de Décomposition en niveaux

Dans une décomposition en niveaux d'un graphe \mathbf{G} , il existe deux types d'arêtes : les arêtes qui relient deux niveaux consécutifs (arêtes inter-niveaux) et celles qui figurent dans un même niveau. Pour le cas de graphes bipartis, il n'existe que le premier type d'arêtes, i.e chaque niveau est un stable.

Soit $\{\{x\}, N_1(x), N_2(x), \dots, N_n(x)\}$ une décomposition en niveaux à partir d'un sommet x quelconque de Q_n . On a les propriétés suivantes :

Propriété 1.1. (a) *Pour tout sommet y de $N_i(x)$, il existe exactement i arêtes reliant y à des sommets de $N_{i-1}(x)$,*

(b) $|N_i(x)| = \binom{n}{i}$.

En considérant l'hypercube Q_n comme étant le graphe biparti $(X \cup Y, E)$, où $|X| = |Y| = 2^{n-1}$, il est facile de voir que le nombre de sommets qui sont à distance impaire d'un sommet quelconque x de Q_n est égal à 2^{n-1} , et que le nombre de sommets qui sont à distance paire de x est égale à $2^{n-1} - 1$.

La figure 1.17 montre une décomposition en niveaux de Q_4 , à partir du sommet 0000.

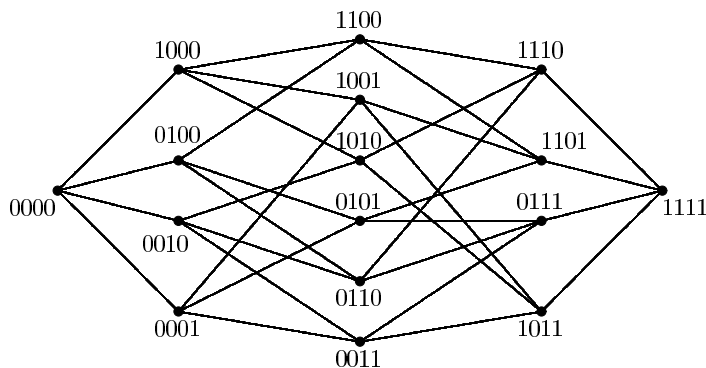


Figure 1.17 – Décomposition en Niveaux de Q_4

On peut facilement vérifier les conditions (a) et (b) de Propriété 1.1 sur cette figure. On peut aussi remarquer qu'il n'y a pas d'arêtes entre deux sommets quelconques dans un même niveau (l'hypercube est un graphe biparti).

1.4 Intervalles et Convexité

Soient x et y deux sommets de \mathbf{G} , l'intervalle $I(x, y)$ (noté aussi $I_{\mathbf{G}}(x, y)$) est l'ensemble des sommets de \mathbf{G} appartenant aux plus courtes (x, y) -chaînes, i.e :

$$I(x, y) = \{z \in V : z \text{ est sur une } (x, y) - \text{géodésique}\}$$

Évidemment, un sommet $z \in I(x, y)$ si et seulement si $d(x, z) + d(z, y) = d(x, y)$.

Dans un arbre (un graphe connexe sans cycle), l'intervalle $I(x, y)$ est l'ensemble des sommets de l'unique (x, y) -chaîne. Pour l'hypercube Q_n , dans sa représentation vectorielle, si $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$ sont deux sommets, $I(x, y)$ est l'ensemble des sommets $z = (z_1, \dots, z_n)$, tels que pour chaque indice i pour lequel $x_i \neq y_i$, on prend $z_i = x_i$.

Pour $i = 0, 1, \dots, d(x, y)$, on définit la décomposition en niveaux de $I(x, y)$ en $N_i(x, y) = N_i(x) \cap I(x, y)$. Cet ensemble est appelé le $i^{\text{ème}}$ niveau de $I(x, y)$. De la définition de $I(x, y)$, il s'ensuit que :

$$N_i(x, y) = N_{d(x, y) - i}(x, y)$$

Les types d'arêtes retrouvés dans une décomposition en niveaux d'un graphe quelconque, sont retrouvés dans la décomposition en niveaux d'un intervalle.

Par abus de langage, pour toute paire de sommets x et y , on désignera par intervalle aussi bien l'ensemble $I(x, y)$ que le sous-graphe engendré par $I(x, y)$.

Le lecteur pourra se référer à Mulder [37] pour une étude détaillée de la notion d'intervalle. Toutefois, nous citons les propositions de base suivantes :

Proposition 1.3 (Mulder [37]). *Soient u et v deux sommets d'un graphe \mathbf{G} , alors :*

- (a) $u, v \in I(u, v)$,
- (b) $I(u, v) = I(v, u)$,
- (c) si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \subseteq I(u, v)$,
- (d) si $w \in I(u, v)$, alors $I(u, w) \cap I(w, v) = \{w\}$,
- (e) si $w \in I(u, v)$ et $z \in I(u, w)$, alors $w \in I(z, v)$.

Proposition 1.4 (Mulder [37]). *Pour tout triplet u, v et w d'un graphe \mathbf{G} , il existe un sommet z dans $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que :*

$$I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}.$$

Proposition 1.5 (Mulder [37]). *Soient u, v, w et z quatre sommets de \mathbf{G} . z est l'unique sommet de $I(u, w) \cap I(u, v)$ tel que $I(z, w) \cap I(z, v) = \{z\}$ si et seulement si*

$$I(u, w) \cap I(u, v) = I(u, z).$$

Le graphe de la Figure 1.18 (b) représente $I(x, y)$ du graphe de la Figure 1.18 (a).

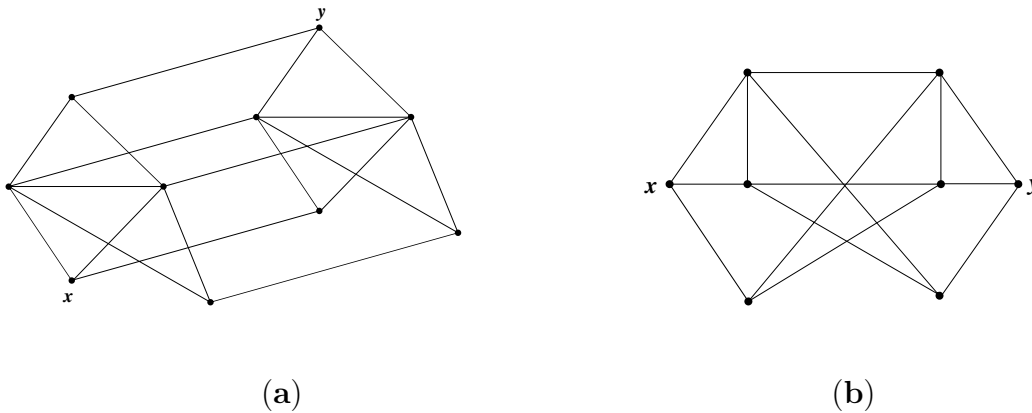


Figure 1.18 – Exemple d'Intervalle

Définition 1.4. *Soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe et soit $S \subseteq V$ un ensemble de sommets. Le sous-graphe engendré par S est dit convexe si pour toute paire de sommets distincts x et y de S , $I(x, y) \subseteq S$.*

Un convexe S de \mathbf{G} désigne l'ensemble des sommets de S aussi bien que le sous-graphe de \mathbf{G} induit par S .

Une classe importante de graphes est celle des graphes dits *intervalle-monotones*. Ils sont des graphes où tout intervalle est convexe.

Proposition 1.6 (Mulder [37]). *Si \mathbf{G} est sans sous-graphe induit homomorphe à $K_{2,3}$ ou au graphe de la figure 1.19 alors \mathbf{G} est intervalle-monotone.*

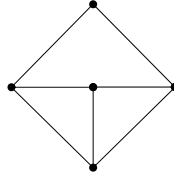


Figure 1.19 –

Proposition 1.7 (Mulder [37]). *Si \mathbf{G} est sans sous-graphe homéomorphe à $K_{2,3}$ alors \mathbf{G} est intervalle-monotone.*

Une autre classe de graphes est celle des graphes dits *intervalle-réguliers*.

Définition 1.5. \mathbf{G} est *intervalle-régulier* si, pour toute paire de sommets u et v , on a :

$$|I(u, v) \cap N(u)| = d(u, v) \text{ ou } |I(u, v) \cap N(v)| = d(u, v).$$

Mulder [37] a montré que :

Proposition 1.8 (Mulder [37]). \mathbf{G} est *intervalle régulier* si et seulement, pour chaque paire de sommets u et v de \mathbf{G} , le sous-graphe induit par l'ensemble des arêtes inter-niveaux de $I(u, v)$ est $Q_{d(u,v)}$.

Il se trouve que dans Q_n , tout sommet x admet un unique sommet diamétral \bar{x} et que le nombre de (x, \bar{x}) -géodésiques est $d(x, \bar{x})! = n!$. Comme Q_n est biparti, tout intervalle est biparti (il n'existe pas d'arêtes dans un même niveau). Ceci a permis à Mulder [37] de donner la caractérisation de Q_n suivante :

Proposition 1.9 (Mulder [37]). \mathbf{G} est Q_n si et seulement \mathbf{G} est *intervalle régulier biparti*.

Or ce résultat est équivalent au résultat dû à Foldes [17] :

Proposition 1.10 (Foldes [17]). *Un graphe connexe $G = (V, E)$ est un hypercube si et seulement si G satisfait les conditions suivantes :*

- (a) *G est biparti,*
- (b) *Pour toute paire de sommets x, y de G , le nombre de géodésiques entre x et y est $d(x, y)!$.*

Ce qui est à noter est que *tout intervalle d'un hypercube est un hypercube*. Plusieurs classes de graphes ont cette propriété, mais on ne sait caractériser Q_n dans ces familles.

Jusqu'à une certaine période, tous les graphes intervalle-réguliers connus étaient intervalle-monotones. H.M.Mulder [36], [38] a conjecturé *les graphes intervalle-réguliers d'être des graphes intervalle-monotones*. Il se trouve que Berrachedi [5] et Mollard [32], ont montré que cette conjecture est fautive.

CHAPITRE 2

Graphes Type Hypercube

Chapitre 2

Graphes Type Hypercube

Introduction

Que ce soit dû à un regain actuel d'utilisation pratique (réseaux, architectures parallèles, codage, . . .), à son utilisation pour modéliser des problèmes ou tout simplement à l'intérêt de sa structure, l'hypercube est un objet de la théorie des graphes, ayant une étude particulièrement très intéressante en informatique et en combinatoire. Ce chapitre a pour objectif, de citer quelques propriétés de l'hypercube qui sont utilisés dans la suite. Des présentations générales de l'hypercube et de graphes dits *types hypercubes* seront données. Elles sont des classes généralisatrices de l'hypercube.

2.1 Le graphe de l'Hypercube

2.1.1 Quelques Propriétés Élémentaires de l'Hypercube

L'hypercube de dimension n est un graphe n -régulier, avec 2^n sommets et donc $n \cdot 2^{n-1}$ arêtes. Il est sommet-transitif.

De plus, entre chaque paire de sommets x et y il existe $d(x, y)!$ géodésiques.

Lors de son étude du problème de plongement de graphes dans l'hypercube, Kobeissi [26] a suggéré une étude détaillée sur l'hypercube. On peut montrer, par induction, qu'entre deux sommets quelconques de l'hypercube, il existe n chaînes deux à deux sommets disjointes, ce qui prouve que sa sommet-connexité (et donc

son arête connexité) est égale à n . Rappelons ici que, la *sommet-connexité* (resp. *arête-connexité*) d'un graphe connexe \mathbf{G} est le nombre de sommets (resp. arêtes) qu'il faut supprimer pour que \mathbf{G} ne soit plus connexe.

La proposition suivante est une proposition plus forte :

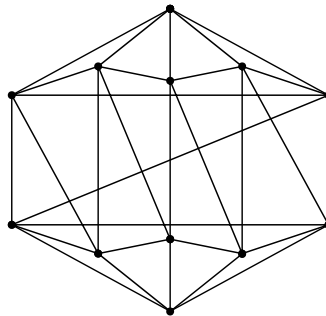
Proposition 2.1 (Kobeissi [26]). *Il existe $n - 1$ chaînes de longueur inférieure ou égale à n et une chaîne de longueur inférieure ou égal à $n + 1$, deux à deux sommets disjointes, entre toute paire de sommets distincts de l'hypercube de dimension n .*

Proposition 2.2 (Kobeissi [26]). *L'hypercube est hamiltonien, de plus par tout arête passe un cycle hamiltonien*

2.2 Les $(0, \lambda)$ -Graphes

Définition 2.1. *Soit λ un entier, avec $\lambda \geq 2$. Un graphe G est un $(0, \lambda)$ -graphe si toute paire de sommets distincts de \mathbf{G} ont λ voisins communs ou aucun.*

Le cas exclu $\lambda = 1$, engendre la classe des graphes sans 4-cycle. Parmi les $(0, \lambda)$ -graphes, qui sont définis par H.M.Mulder [37], on peut trouver K_1 , K_2 , $K_{\lambda+2}$, $K_{\lambda, \lambda}$ et $K_{\lambda+2, \lambda+2}$ moins un couplage parfait.



L'Icosaèdre

Figure 2.1 – Exemple de $(0, \lambda)$ -Graphes

Pour $\lambda \geq 2$, plusieurs résultats sont établis.

Proposition 2.3 (Mulder [36, 37]). *Un $(0, \lambda)$ -graphe est régulier.*

Proposition 2.4 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe. Alors*

$$|I(u, v) \cap N(u)| \geq d(u, v) + \lambda - 2,$$

pour toute paire de sommets u et v telle que $d(u, v) \geq 2$.

Proposition 2.5 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n .*

Si $\text{diam}(G) \geq 4$, alors $n \geq \text{diam}(G) + 2\lambda - 4$.

Pour un degré n donné, l'ordre d'un $(0, \lambda)$ -graphe est borné comme le montre le résultat suivant :

Proposition 2.6 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe de degré n . Alors*

$$1 + \frac{n(n-1)}{\lambda} \leq |V(\mathbf{G})| \leq 1 + n + \frac{(\lambda-1)!(n-\lambda)!}{(n-2)!} \sum_{i \geq 0} \binom{n}{\lambda+i}$$

Pour un $(0, \lambda)$ -graphe biparti de degré n , la borne inférieure de son ordre est autre que celle donnée dans la proposition précédente. On a :

Proposition 2.7 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0, \lambda)$ -graphe biparti de degré n . Alors*

$$2 + 2 \frac{n(n-1)}{\lambda} \leq |V(\mathbf{G})| \leq 1 + n + \frac{(\lambda-1)!(n-\lambda)!}{(n-2)!} \sum_{i \geq 0} \binom{n}{\lambda+i}$$

En fait, il est montré que la borne supérieure est atteinte uniquement, pour le cas où $\lambda = 2$ et précisément par un seul graphe qui est l'hypercube Q_n . L'accent est surtout mis sur la classe importante des $(0, 2)$ -graphes. Nous pouvons citer comme exemple, outre l'hypercube, le graphe de la Figure 2.1, connu sous le nom de l'*Icosaèdre*. La définition 2.1 peut se formuler comme suit (voir Mollard [33]) :

Définition 2.2. *Un graphe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si toute paire d'arêtes adjacentes de G appartient à exactement un cycle de longueur 4.*

La définition des $(0, 2)$ -graphes peut se formuler encore une fois de manière équivalente en termes de sommets et de chaînes, comme suit :

Définition 2.3 (Mollard [33]). *Nous dirons qu'un graphe G est un $(0, 2)$ -graphe si et seulement si pour toute paire de sommets u et v distincts de G , il existe soit exactement deux chaînes de longueur deux reliant u et v , soit aucune chaîne de longueur deux les reliant.*

Pour cette classe de graphes, les deux dernières propositions deviennent :

Proposition 2.8 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0,2)$ -graphe de degré n . Alors*

$$1 + \frac{n(n-1)}{2} \leq |V(G)| \leq 2^n$$

Pour un degré n donné, les $(0,2)$ -graphes qui atteignent leurs bornes inférieures sont au nombre de trois :

Pour $n = 3$ nous obtenons K_4

Pour $n = 6$ il existe deux, c'est $K_4 \square K_4$ et le graphes de Shrikhande (en identifiant les sommets de même étiquette du graphe de la Figure 2.2 (b), on obtient le graphe de Shirkhande de la Figure 2.2 (a)).

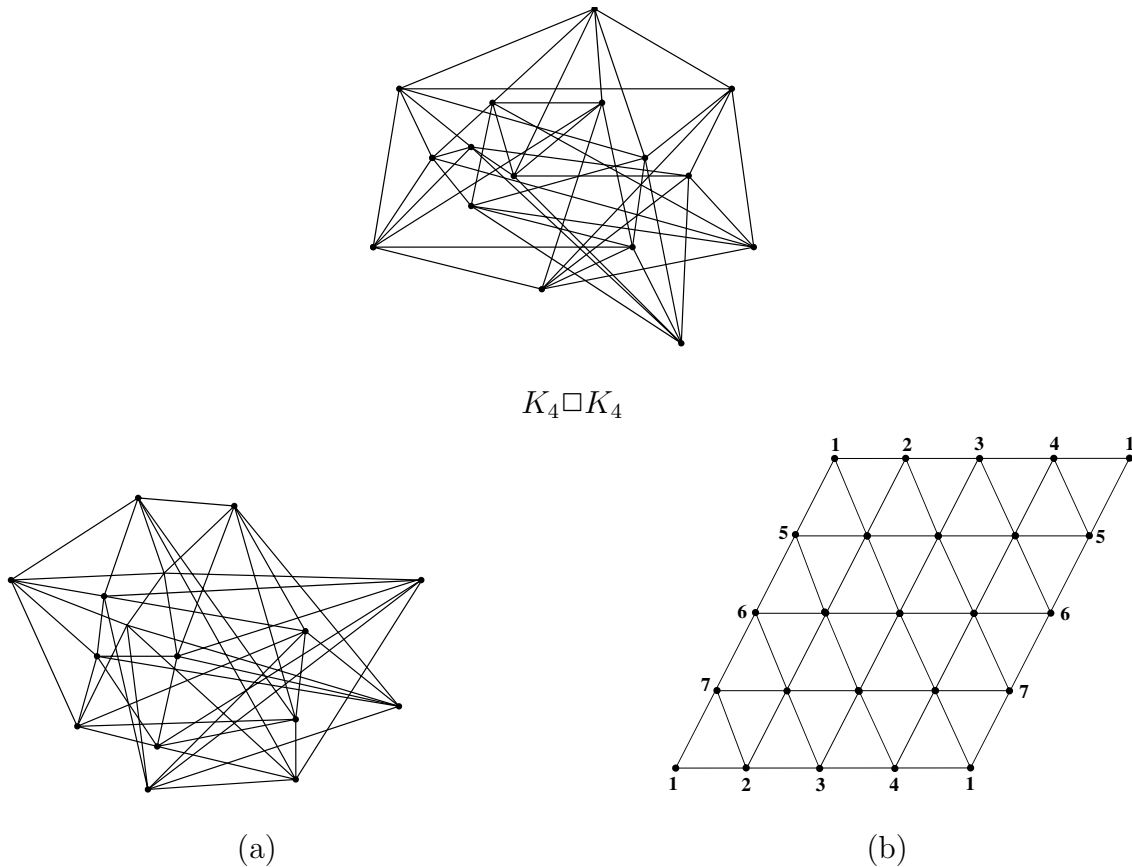


Figure 2.2 –

Proposition 2.9 (Mulder [36, 37]). *Soit G un $(0,2)$ -graphe biparti de degré n . Alors*

$$2 + n(n - 1) \leq |V(\mathbf{G})| \leq 2^n$$

Pour un degré n donné, on connaît un nombre fini de $(0,2)$ -graphes bipartis, appelés *biplans*, atteignant la borne inférieure de leurs ordres [32].

Pour $n = 1$ il existe un seul, c'est Q_1 .

Pour $n = 2$ nous obtenons Q_4 .

Pour $n = 3$ nous obtenons Q_3 .

Pour $n = 4$ nous obtenons le seul biplan à 14 sommets (Figure 2.3).

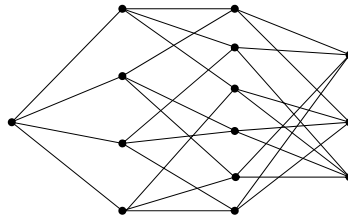


Figure 2.3 –

Pour $n = 5$ on montre également l'existence d'un graphe unique sur 22 sommets (Figure 2.4).

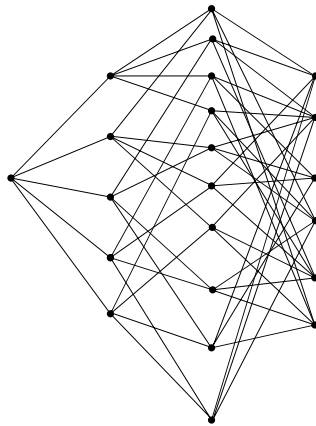


Figure 2.4 –

- Pour $n = 6$ il existe 3 biplans non isomorphes d'ordre 32.
 Pour $n = 9$ Ils sont exactement 4 biplans.
 Pour $n = 11$ on connait 4 biplans.
 pour $n = 13$ on en connait 2 autres.
 Pour $n = 7, 8, 10, 12, 14, 15$ il n'en existe pas, en vertu du théorème suivant :

Théorème 2.1 (Bruck-Ryser-Chowla). *Une condition nécessaire d'existence de biplans pour n est que :*

Si $n \equiv 2[4]$ ou $n \equiv 3[4]$ alors $n = u^2 + 2$, pour un certain entier u .

Si $n \equiv 0[4]$ ou $n \equiv 1[4]$ alors l'équation

$$x^2 = (n - 2)y^2 + (-1)^{\frac{n(n-1)}{4}} 2z^2$$

admet une solution entière (x, y, z) autre que $(0, 0, 0)$.

Pour $n \geq 16$ le problème reste ouvert.

Différentes conjectures sont relatives à l'étude des $(0,2)$ -graphes :

Berrachedi et Mollard ([5],[6]) ont donné une construction de $(0,2)$ -graphes non sommet-transitifs, dont l'existence a été conjecturée, moyennant une certaine opération. De plus, dans la proposition qui suit, Mollard et Berrachedi ont donné un élément de réponse à la conjecture, à savoir "existence de $(0,2)$ -graphes d'ordre impair".

Proposition 2.10. *Soit G un $(0,2)$ -graphe, n -régulier et d'ordre impair, alors*

$$n \equiv 0[\text{mod}8].$$

D'autre part, nous avons :

Conjecture 2.1. *Hamiltonicité des $(0,2)$ -graphes.*

D'autres problèmes relatifs aux $(0,2)$ -graphes restent posés à nos jours. Par exemple celui de l'existence d'un $(0,2)$ -graphe d'ordre donné (Madani [29]). Mollard [35] a pu lister tous les $(0,2)$ -graphes d'ordres inférieurs ou égaux à 32.

2.3 Les Graphes Impairs

Définition 2.4. Soit k un entier avec $k \geq 2$. Le graphe impair O_k possède les $(k-1)$ -sous-ensembles de $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$ comme sommets et deux de ces sommets sont adjacents si leurs sous-ensembles correspondants sont disjoints.

Le graphe O_k ($k \geq 2$) est distance-transitif et k -régulier. Les deux premiers graphes impairs O_2 et O_3 sont le triangle K_3 et le graphe de Petersen, respectivement (voir Figure 2.5). Les mailles de O_2 et O_3 sont 3 et 5 respectivement, tandis que celle de O_k , pour $k \geq 4$, est égale à 6. Le plus petit cycle impair d'un graphe impair O_k est $2k-1$.

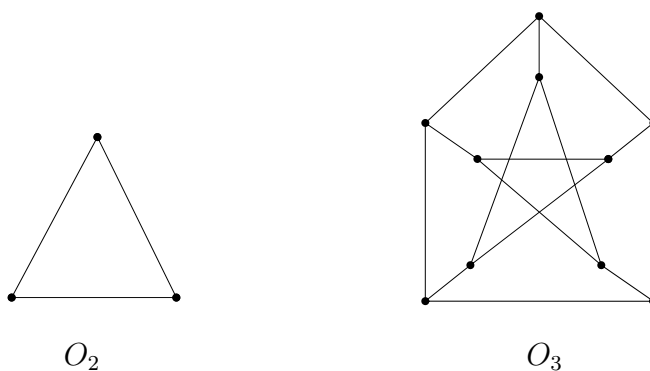


Figure 2.5 – Exemples de Graphes Impairs

2.4 Les Graphes Impairs Étendus

Définition 2.5. Le graphe impair étendu E_k ($k \geq 2$), a pour ensemble de sommets l'ensemble $\{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k-1\} : |A| \leq k-1\}$, deux sommets sont adjacents si et seulement si la différence symétrique des parties correspondantes consiste en 1 ou $2k-2$ éléments.

Ces graphes impairs étendus (Mulder [37]) sont appelés *graphe de Laborde-Mulder* aussi (Madani [30]),

E_k peut être obtenu de deux manières différentes :

- Identifier dans Q_{2k-1} toute paire de sommets diamétraux.
- Relier dans Q_{2k-2} toute paire de sommets diamétraux.

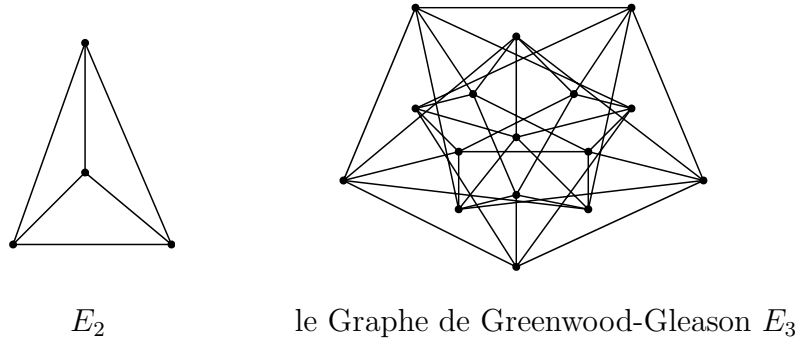


Figure 2.6 – Exemples de Graphes Impairs Etendus

Le graphe E_k est régulier de degré $2k - 1$. Il consiste en le demi-inférieur de Q_{2k-1} avec le graphe impair O_k sur le $(k - 1)^{ème}$ niveau.

Proposition 2.11 (Mulder [37]). *Le graphe E_k est distance-transitif.*

Proposition 2.12 (Mulder [37]). *Pour chaque paire de sommets A et B de E_k , le sous-graphe induit par $I(A, B)$ est l'hypercube $Q_{d(A,B)}$, de dimension $d(A, B)$.*

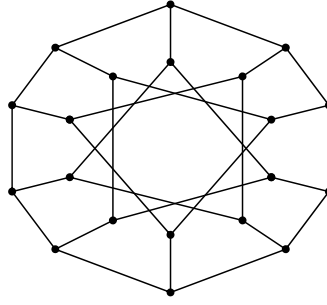
Proposition 2.13 (Mulder [37]). *Le plus petit cycle impair dans E_k est de longueur $2k - 1$.*

2.5 Les Graphes L_n^k

Définition 2.6. L_n^k est le sous-graphe de Q_n induit par deux niveaux consécutifs N_{k-1} et N_k .

L_n^k est semi-régulier de degrés $n - k + 1$ et k , d'ordre $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

Un cas particulier intéressant est celui de L_{2k-1}^k , noté aussi H_k , le sous-graphe induit par les deux niveaux centraux N_{k-1} et N_k de l'hypercube Q_{2k-1} . Ces graphes sont réguliers de degré k . Remarquons que H_k est isomorphe à $O_k \times K_2$. Pour $k = 3$, par exemple, on obtient le graphe de Desargues H_3 (figure 2.7), qui n'est autre que le produit catégoriel $O_3 \times K_2$.

Le Graphe de Desargues H_3 Figure 2.7 – Exemple de Graphes L_n^k

La mise en œuvre d’algorithmes parallèles sur des architectures multiprocesseurs à mémoire distribuée a conduit au développement de la notion de *plongement* d’un graphe \mathbf{G} dans un graphe \mathbf{H} .

Un plongement d’un graphe \mathbf{G} dans un graphe \mathbf{H} est défini par la donnée d’une application injective ϕ de $V(\mathbf{G})$ l’ensemble des sommets de \mathbf{G} dans $V(\mathbf{H})$ l’ensemble des sommets de \mathbf{H} , et d’une application P_ϕ de $E(\mathbf{G})$ l’ensemble des arêtes de \mathbf{G} dans $E(\mathbf{H})$ l’ensemble des arêtes de \mathbf{H} , qui associe à chaque arête xy de \mathbf{G} , une chaîne reliant $\phi(x)$ et $\phi(y)$ dans \mathbf{H} .

Le problème de plongement dans l’hypercube a été traité par plusieurs auteurs. Ainsi, Havel [19, 20], Harary [18] et plusieurs auteurs ont donné des familles de graphes qui sont plongeable dans l’hypercube.

Au cours de ses études des problèmes de plongements, Havel [19] a proposé la conjecture suivante :

Conjecture 2.2. *Dans L_n^k , il existe une chaîne saturante.*

Il a montré que cette conjecture est équivalente à :

Conjecture 2.3. *H_k est hamiltonien.*

Comme H_k est sommet-transitif, la conjecture 2.3 est en fait un cas particulier de celle due à Lovasz[28].

Conjecture 2.4. *Tout graphe sommet-transitif admet une chaîne hamiltonienne.*

2.6 Quelques Caractérisations de l'Hypercube

En plus des caractérisations proposées par Mulder [37] et Foldes [17], il existe plusieurs caractérisations de l'hypercube dans la littérature. On donne les caractérisations suivantes de l'hypercube, en tant qu'un (0,2)-graphe.

Il se trouve que pour un degré n donné, l'hypercube Q_n est le seul (0,2)-graphe, n -régulier d'ordre 2^n . Ce résultat a été établi indépendamment par Mulder [36, 37] et par Laborde et Rao Hebbare [27].

Proposition 2.14 (Laborde et Rao Hebbare[27], Mulder[37]). *Soit G un (0,2)-graphe. On a :*

- (a) G est régulier (notons n son degré),
- (b) $|V(G)| \leq 2^n$,
- (c) $|V(G)| = 2^n$ si et seulement si G est Q_n .

Une autre caractérisation de l'hypercube en tant que (0,2)-graphe est :

Proposition 2.15 (Mollard [33]). *Soit G un (0,2)-graphe. On a :*

- (a) $\text{diam}(G) \leq n$,
- (b) $\text{diam}(G) = n$ si et seulement si G est Q_n .

La proposition suivante donne une autre caractérisation de l'hypercube en tant que (0,2)-graphe.

Proposition 2.16 (Berrachedi [3]). *Soit G un (0,2)-graphe tel qu'il existe une décomposition en niveaux où tout 4-cycle rencontre 3 niveaux, alors G est un hypercube.*

Une autre caractérisation de l'hypercube (en utilisant les sous-graphes convexes) a été donné par Van den Cruyce [39] :

Proposition 2.17. *Un graphe G est un hypercube de dimension n si et seulement si l'ensemble de sous graphes convexes de G est $\{Q_0, Q_1, \dots, Q_n\}$.*

où la *dimension* de G est son degré.

La caractérisation suivante de l'hypercube en termes d'intervalle est due à Mulder [36]

Proposition 2.18. *Si G est un hypercube, alors on a :*

- (a) *tout intervalle dans G engendre un hypercube,*
- (b) *tout intervalle dans G engendre un $(0,2)$ -graphe,*
- (c) *tout intervalle $I(u, v)$ dans G contient exactement $2^{d(u,v)}$ sommets,*
- (d) *tout intervalle $I(u, v)$ dans G engendre un graphe avec exactement $d(u, v) \cdot 2^{d(u,v)-1}$ arêtes,*

Ces conditions ne sont pas suffisantes, pour que G soit un hypercube. On ne sait pas caractériser les classes de graphes vérifiant (a) (ou (b), ou (c) ou (d)). Elles contiennent toutes l'hypercube.

CHAPITRE 3

Graphes Cycles Réguliers

Chapitre 3

Graphes Cycles Réguliers

Introduction

Dans un $(0,\lambda)$ -graphe, *chaque chaîne de longueur deux appartient à $\lambda-1$ cycles de longueur quatre*. Cette remarque a permis à M.Mollard [34], de définir la classe des graphes $[\mu, \eta]$ -*cycle réguliers* où toute chaîne de longueur μ ($\mu \geq 2$) appartient à η ($\eta \geq 1$) cycles élémentaires. En particulier, lorsque la longueur des cycles est fixée, on obtient la sous-classe de graphes pour lesquels toute chaîne de longueur μ appartient à ν cycles de cette longueur γ ($\gamma \geq 2\mu$). C'est les *graphes $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycles réguliers*.

Ainsi les $(0,\lambda)$ -graphes sont des graphes $[2,\lambda-1,4]$ -cycle réguliers. H.M.Mulder [37] a montré que les $(0,2)$ -graphes, ou encore les graphes $[2,1,4]$ -cycle réguliers, selon M.Mollard [33], ont l'hypercube comme graphe maximum (pour son ordre par rapport à son degré) (Laborde et Rao Hebbare[27])

D'autre part, M.Mollard [33] a montré que les graphes d'ordre maximum dans la classe des graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers sont aussi en relation avec les hypercubes. Ce sont les sous-graphes induits par les deux niveaux centraux des hypercubes de degré impair. Pour des degrés donnés, on montre, de notre part, que ces sous-graphes sont aussi de diamètre maximum, dans la classe des graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers.

De plus, nous nous sommes intéressés à quelques propriétés topologiques des graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers, tel que le voisinage commun d'une paire de sommets quelconque.

3.1 Définitions

Définition 3.1. *Nous dirons qu'une chaîne u_0, u_1, \dots, u_μ appartient à un cycle élémentaire v_1, v_2, \dots, v_ν , si $\{u_0, u_1, \dots, u_\mu\} \subset \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$ et si la chaîne est un sous-graphe partiel du cycle.*

Définition 3.2 (Mollard [34]). *Soient μ et η deux entiers avec $\mu \geq 2$, $\eta \geq 1$ et \mathbf{G} un graphe de maille au moins μ .*

\mathbf{G} est un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier s'il existe un sous-ensemble non vide de cycles élémentaires C tels que toute chaîne de \mathbf{G} de longueur μ appartient à exactement η cycles de C .

Dans le cas particulier où il existe ν cycles élémentaires parmi les μ cycles de C , ayant une même longueur γ ($\gamma \geq 2\mu$); nous dirons que \mathbf{G} est $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycle régulier (ou encore graphe cycle régulier).

En constatant que les $(0, \lambda)$ -graphes sont des graphes $[2, \lambda-1, 4]$ -cycles réguliers. Mollard [34] a défini les graphes cycles réguliers comme étant une généralisation des $(0, \lambda)$ graphes. On peut remarquer que le graphe impair O_k est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, pour $k \geq 3$. D'autre part, pour $k \geq 4$, E_k est un graphe $[3, 3, 6]$ -cycle régulier. Le graphe biparti complet $K_{3,3}$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier. De plus, le graphe L_n^k est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.

3.2 Notions de Base

Lemme 3.1 (Mollard [34]). *Soient u_1, u_2, \dots, u_μ une chaîne de longueur $\mu - 1$ d'un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier \mathbf{G} . Alors*

$$d(u_1) = d(u_\mu)$$

En fait, tout graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier est sans sommet pendant ($\forall x : d(x) \geq 2$), comme le montre le résultat suivant :

Lemme 3.2 (Mollard [34]). *Chaque sommet d'un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier appartient à au moins un cycle de C .*

Comme les graphes $[\mu, \eta]$ -cycle réguliers sont une généralisation des $(0, \lambda)$ -graphes qui sont réguliers, Mollard [34] a montré que ces graphes $[\mu, \eta]$ -cycle réguliers possèdent aussi les propriétés de régularité.

Théorème 3.1 (Mollard [34]). *Si \mathbf{G} est un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec $\delta(\mathbf{G}) \geq 3$, alors \mathbf{G} est régulier ou semi-régulier.*

Définition 3.3. *Soient \mathbf{G} un graphe et $P = x_0, \dots, x_p$ une (x_0, x_p) -chaîne de longueur p . La séquence de degrés des sommets de P est une suite d_0, d_1, \dots, d_p où $d_i = d(x_i)$, notée $D_{x_0}(P)$.*

Proposition 3.1 (Mollard [34]). *Soit \mathbf{G} un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier, de degré minimum $\delta(\mathbf{G}) = 2$. P et P' deux chaînes de même longueur p , $p < \mu$, de \mathbf{G} ayant une extrémité commune x , tel que $d(x) \geq 3$. Alors :*

$$D_x(P) = D_x(P').$$

Proposition 3.2 (Mollard [34]). *Soit \mathbf{G} un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier, où $\delta(\mathbf{G}) = 2$. Alors chaque paire de sommets de degrés supérieurs à 2, ne peuvent être adjacents.*

Soit \mathbf{G} un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier, avec $\delta(\mathbf{G}) = 2$. Si \mathbf{G} n'est pas un cycle, il existe une chaîne contractante (une chaîne dont tous les sommets internes sont de degré 2) reliant deux sommets de degrés supérieurs à 2. La longueur d'une telle chaîne est au plus $\mu - 1$ (Lemme 3.1).

D'après la Proposition 3.1, deux chaînes contractantes P et P' , ayant une extrémité commune, ont la même séquence de degrés et alors la même longueur. Comme \mathbf{G} est connexe, toutes les chaînes contractantes sont de même longueur.

Cette remarque, nous permet d'obtenir un graphe cycle régulier semi-régulier ou régulier, à partir d'un autre graphe cycle régulier quelconque, par contraction des chaînes contractantes.

Proposition 3.3 (Mollard [34]). *Soient \mathbf{G} , un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec $\delta(\mathbf{G}) = 2$ et p la longueur commune de toutes ses chaînes contractantes. Soit \mathbf{G}' le graphe contracté obtenu après contraction de toutes les chaînes contractantes. Supposons que $p \neq \mu - 1$ ou $\eta \neq 1$. Alors \mathbf{G}' est de degré minimum $\delta(\mathbf{G}') \geq 3$ et est un graphe $\left[\left\lceil \frac{\mu}{p} \right\rceil, \eta\right]$ -cycle régulier (où $\lceil x \rceil$ désigne la partie entière supérieure).*

Nous rappelons ici que la p -subdivision d'un graphe \mathbf{G} est obtenue par insertion de p sommets de degrés 2 sur chacune de ses arête.

Nous pouvons encore une fois obtenir un nouveau graphe cycle régulier semi-régulier ou régulier à partir d'un autre cycle régulier quelconque, par subdivision, selon ce qui suit :

Proposition 3.4 (Mollard [34]). *Si \mathbf{G} est un graphe $[\mu, \eta]$ -cycle régulier où $\delta(\mathbf{G}) = 2$, alors il existe un entier p , avec $2 \leq p \leq \mu - 1$, tel que \mathbf{G} soit une $(p-1)$ -subdivision d'un graphe $\left[\left\lceil \frac{\mu}{p} \right\rceil, \eta\right]$ -cycle régulier de degré minimum $\delta(\mathbf{G}) \geq 3$.*

3.3 Les Graphes [3,1,6]-Cycle Régulier

On considère dans cette section le cas particulier des graphes [3,1,6]-cycle réguliers. Rappelons que :

Définition 3.4. *Un graphe est [3,1,6]-cycle régulier si toute chaîne de longueur trois appartient à exactement un cycle élémentaire de longueur six.*

Pour les graphes [3,1,6]-cycle réguliers, toutes les chaînes de longueur trois doivent être à extrémités disjointes. Ainsi, une première conséquence triviale est :

Lemme 3.3 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Tout graphe [3,1,6]-cycle régulier est sans triangle.*

Démonstration. Comme le triangle est une chaîne de longueur trois à extrémités confondues, alors il n'appartiendrait à aucun 6-cycle élémentaire (degré maximum strictement supérieur à 2). \square

Comme conséquence directe, on peut dire tout simplement que, pour chaque sommet u , l'ensemble $N(u)$ est stable.

En considérant cette classe de graphe, Mollard [34] a proposé une borne supérieure pour l'ordre de tout graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier.

Proposition 3.5 (Mollard [34]). *Soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n . Alors :*

- 1) $|V(\mathbf{G})| \leq \binom{2n}{n}$;
- 2) $|V(\mathbf{G})| = \binom{2n}{n}$ si et seulement si \mathbf{G} est H_n .

Pour pouvoir établir la preuve de cette proposition, Mollard [34] a utilisé les deux résultats suivants. Le premier est relatif au nombre de voisins de tout sommet sur un niveau quelconque, pour une décomposition en niveaux arbitraire d'un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier.

Proposition 3.6 (Mollard [34]). *Soit \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et pour une décomposition en niveaux arbitraire N_0, N_1, \dots, N_p , soit u un sommet de N_i , alors :*

$$m(u, N_{i-1}) = |N(u) \cap N_{i-1}| \geq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil.$$

Le second est relatif au cardinal de chaque niveau dans une décomposition en niveaux arbitraire d'un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier. Il est conséquence de Proposition 3.6.

Proposition 3.7 (Mollard [34]). *Soit \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de \mathbf{G} . Alors pour $k = 0, \dots, n - 2$*

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2 \text{ et } |N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2$$

Nous suggérons de notre part, une borne supérieure pour le diamètre d'un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier.

Théorème 3.2 (Kahoul et Berrachedi [23, 24]). *Soit \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n . Alors :*

- 1) $\text{diam}(\mathbf{G}) \leq 2n - 1$,
- 2) $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2n - 1$ si et seulement si \mathbf{G} est le sous-graphe H_n .

Démonstration. 1) Le premier point est établi par Mollard [34, 31]. Soit N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux relative à un sommet diamétral.

$$\forall u \in N_p : n \geq m(u, N_{p-1}) \geq \left\lceil \frac{P}{2} \right\rceil,$$

alors $p \leq 2n$.

Si $p = 2n$, en dénombrant les éventuelles arêtes existantes entre N_{2n-1} et N_{2n} .

On obtient :

$$|N_{2n}| \left\lceil \frac{2n}{n} \right\rceil \leq \left(n - \left\lceil \frac{2n-1}{2} \right\rceil \right) |N_{2n-1}|$$

Alors, $N_{2n} = \emptyset$. Donc, $p \leq 2n - 1$.

2) Le graphe [3,1,6]-cycle régulier H_n , est un graphe de degré n et de diamètre $2n - 1$. Maintenant, soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe [3,1,6]-cycle régulier de degré maximum n , de diamètre $2n - 1$ et non isomorphe à H_n . D'après Proposition 3.5,

$$|V(\mathbf{G})| < \binom{2n}{n} \quad (1)$$

Sans perte de généralité, considérons une décomposition en niveaux de \mathbf{G} relative à un sommet u qui possède un sommet diamétral, i.e un sommet v , où $d(u, v) = 2n - 1$. Il est évident que $|N_{2n-1}| \geq 1$. En utilisant la Proposition 3.7, on déduit que $|N_{2n-1}| \leq 1$, donc $|N_{2n-1}| = 1$. Alors $|N_{2n-2}|$ est le degré de l'unique sommet de N_{2n-1} . Donc $|N_{2n-2}| \leq n$. Toujours d'après la Proposition 3.7 et l'inégalité (1), il y a un indice k , $0 \leq k \leq n - 2$, tel que :

$$|N_{2k+1}| < \frac{n}{k+1} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2 \quad (2)$$

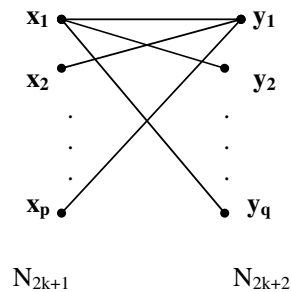
ou

$$|N_{2k+2}| < \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left(\binom{n-1}{k-1} \right)^2. \quad (3)$$

Supposons que (2) est valide. La Proposition 3.6 donne lieu au fait que :

$$d^-(u) \geq k + 1, \text{ pour tout } u \in N_{2k+2}.$$

En dénombrant les arêtes existant entre N_{2k+1} et N_{2k+2} :



On obtient

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n - k - 1}{k + 1} |N_{2k+1}|.$$

Après utilisation de l'expression (2), on a :

$$|N_{2k+2}| < \frac{n(n - k - 1)}{(k + 1)^2} \left(\binom{n - 1}{k} \right)^2.$$

Par induction, on obtient $\forall h \geq k$:

$$|N_{2h+1}| < \frac{n}{h + 1} \left(\binom{n - 1}{h} \right)^2 \text{ et } |N_{2h+2}| < \frac{n(n - h - 1)}{(h + 1)^2} \left(\binom{n - 1}{h} \right)^2.$$

D'une part, pour $u \in N_{2n-1}$: $m(u, N_{2n-2}) \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil = n$. D'autre part, $|N_{2n-2}| < n$, contradiction. \square

Mollard [34] a défini les graphes cycles réguliers comme étant une généralisation des $(0, \lambda)$ -graphes. Sur ce, nous avons étudié de plus près le voisinage commun de chaque paire de sommets pour un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.

Proposition 3.8 (Kahoul et Berrachedi [23, 24]). *Soient G un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et u, v deux sommets tels que :*

$$|N(u) \cap N(v)| \geq 2.$$

Alors u, v et tous les sommets de $N(u) \cap N(v)$ sont sur le même 6-cycle.

Démonstration. Soient u et v deux sommets d'un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier ayant au moins deux voisins communs, notés a et b (figure 3.1). Comme \mathbf{G} est un

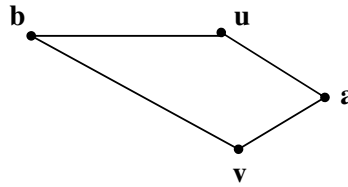


Figure 3.1 –

graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier, la chaîne v, a, u, b appartient à l'unique 6-cycle, $\beta = v, a, u, b, c, d, v$.

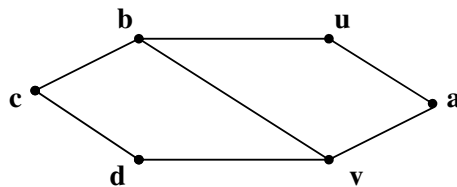


Figure 3.2 –

S'il existait un sommet $e \in N(u) \cap N(v)$ n'appartenant pas au 6-cycle β .

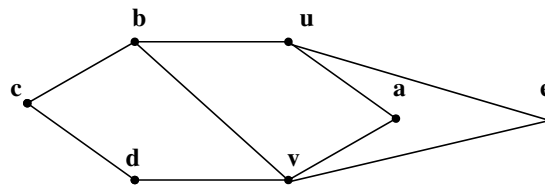


Figure 3.3 –

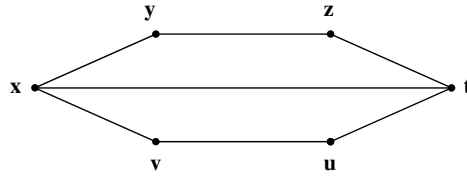
La chaîne d, c, b, u appartiendrait à au moins deux 6-cycles : d, c, b, u, a, v, d et d, c, b, u, e, v, d , absurde. □

Proposition 3.9 (Kahoul et Berrachedi [23, 24]). *Soient \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et $\beta = x, y, z, t, u, v, x$ un 6-cycle de \mathbf{G} dont l'ensemble des sommets est A , tel que :*

$$d(x, t) = 1.$$

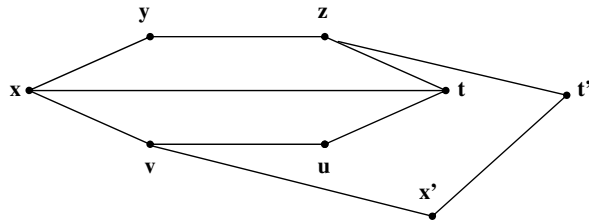
Alors le sous-graphe induit par A , \mathbf{G}_A , est isomorphe à $K_{3,3}$.

Démonstration. Soit \mathbf{G} un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier. Considérons l'ensemble de sommets $A = \{x, y, z, t, u, v\}$ d'un 6-cycle $\beta = x, y, z, t, u, v, x$, tel que : $d(x, t) = 1$.



La chaîne z, t, x, v appartient à un unique 6-cycle z, t, x, v, x', t', z .

Si $x' \notin A$ et $t' \notin A$



la chaîne z, y, x, v appartient à au moins deux 6-cycles, dans \mathbf{G} , z, y, x, v, x', t', z et β , absurde.

Les cas symétriques ($x' = u$ et $t' \notin A$) et ($x' \notin A$ et $t' = y$)(Figure 3.4)

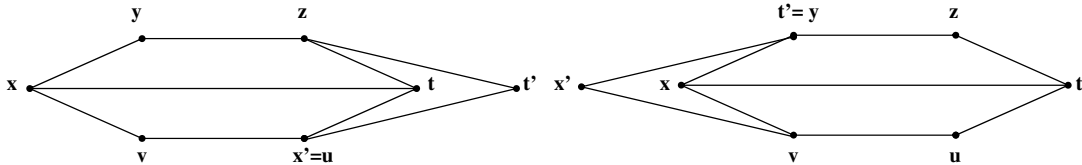


Figure 3.4 –

n'ont pas lieu. Car sinon, la chaîne z, y, x, v (resp. z, t, u, v) appartiendrait à au moins deux 6-cycles : β et z, y, x, v, u, t', z (resp. z, t, u, v, x', y, z), absurde.

Alors, $x' = u$ et $t' = y$. Par symétrie, on peut conclure que $zv \in E(\mathbf{G})$. □

Rappelons que deux chaînes à extrémités communes sont *sommets disjointes*, lorsque tous leurs sommets internes sont distincts. A partir de ces dernières propositions, nous pouvons constater qu'en fait :

Proposition 3.10 (Kahoul et Berrachedi [25]). *Pour toute paire de sommets u et v , d'un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier \mathbf{G} , une des trois situations a lieu :*

- *Il n'existe aucune chaîne P_4 reliant u et v ;*
- *il existe exactement deux chaînes P_4 sommets disjointes reliant u et v ;*
- *il existe quatre chaînes P_4 , dont deux exactement sont sommets disjointes.*

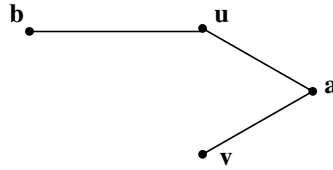
Démonstration. Soit \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier et u, v deux sommets de \mathbf{G} . Quatre situations ont lieu :

- Si $d(u, v) \geq 4$, il n'y a aucune chaîne P_4 reliant u et v ;
- Si $d(u, v) = 3$, il existe une chaîne P_4 ayant u et v comme extrémités. Alors, il existe une unique seconde chaîne P_4 ayant u, v comme extrémités et n'ayant aucun sommet au commun avec la première chaîne.
- Si $d(u, v) = 2$ et s'il existe une chaîne P_4 reliant u et v . Donc, il existe une seconde chaîne P_4 entre u et v , sommet disjointe à la première. Puisque \mathbf{G} est sans triangle, il n'y a aucune autre chaîne P_4 reliant u et v .
- Si $d(u, v) = 1$ et il existe une chaîne P_4 les reliant. Il existe une seconde chaîne P_4 entre u and v , sommet disjointe à la première chaîne P_4 . D'après Proposition 3.9, ces deux chaînes induisent $K_{3,3}$. Donc il existe quatre chaînes P_4 reliant u et v , parmi lesquels exactement deux chaînes P_4 sont sommet-disjointes. \square

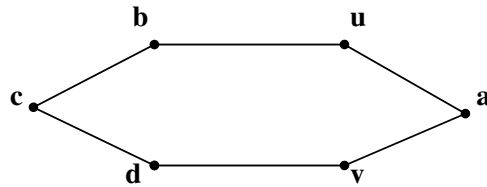
Théorème 3.3 (Kahoul et Berrachedi [23, 24]). *Si \mathbf{G} un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, alors*

$$\forall u, v \in V(\mathbf{G}) : |N(u) \cap N(v)| \in \{0, 1, 3\}.$$

Démonstration. Soient u et v deux sommets de \mathbf{G} ayant au moins un voisin commun, noté a . Comme $\delta(\mathbf{G}) \geq 2$, il existe $b \in N(u)$; distinct de v . De la [3,1,6]-cycle régulier



larité de \mathbf{G} , la chaîne v, a, u, b appartient à un unique 6-cycle : $\beta = v, a, u, b, c, d, v$.



Si u et v avaient un deuxième voisin commun, il serait sur le cycle β , d'après la Proposition 3.8 . Ainsi, si le deuxième voisin commun existait, il serait b ou d . Sans perte de généralité, supposons que $b \in (N(u) \cap N(v)) \setminus \{a\}$. D'après Proposition 3.9, d sera le troisième voisin commun de u et v . S'il existait un autre voisin commun autre que a, b et d ; il ne serait pas sur β , impossible d'après la Proposition 3.8 . D'où le résultat. \square

A la lumière des propositions présentées ci-dessus, nous avons proposé une borne inférieure à l'ordre de \mathbf{G} , un graphe [3,1,6]-cycle régulier de degrés n et n' ($n \geq n'$).

Proposition 3.11 (Kahoul et Berrachedi [22]). *Soit \mathbf{G} un graphe [3, 1, 6]-cycle régulier de degrés n et n'*

($n \geq n'$). Alors :

$$1 + n \frac{n' + 2}{3} \leq |V(\mathbf{G})| \leq \binom{2n}{n}$$

Démonstration. Soit \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle régulier de degrés n et n' , avec $n \geq n'$. Sans perte de généralité, considérons la décomposition en niveaux relative à un sommet de degré n . Donc $|N_1| = n$.

Or d'après Propositions 3.3 et 3.6, on a :

$$\forall x \in N_2 : 1 \leq m(x, N_1) \leq 3.$$

Ainsi, en dénombrant les arêtes existantes entre N_1 et N_2 , on peut déduire que :

$$(n' - 1)|N_1| \leq 3|N_2| \leq 3(n' - 1)|N_1|$$

donc

$$\frac{n' - 1}{3}|N_1| \leq |N_2| \leq (n' - 1)|N_1|.$$

Ainsi

$$|V(\mathbf{G})| \geq |N_0| + |N_1| + |N_2| \geq 1 + n \frac{n' + 2}{3}.$$

Et la Proposition 3.5 donne le résultat. \square

Théorème 3.4 (Kahoul et Berrachedi [23, 24]). *\mathbf{G} est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n , pour lequel chaque paire de sommets, non-adjacents ont exactement trois voisins communs, si et seulement si \mathbf{G} est $K_{3,3}$.*

Démonstration. Soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier de degré maximum n . Si chaque paire de sommets non adjacents de V ont exactement trois voisins communs ou aucun, alors chaque paire de sommets de \mathbf{G} sont à distance une ou deux. Ainsi, $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2$.

Donc \mathbf{G} est 3-régulier. Car sinon, sans perte de généralité, par considération de la décomposition en niveaux de \mathbf{G} par rapport à un sommet u de degré maximum, comme $d(u)$ et tout sommet de N_2 ont le même degré, alors, $n = 3$.

Ainsi, le nombre de voisins de tout sommet u dans N_2 est au plus 2.

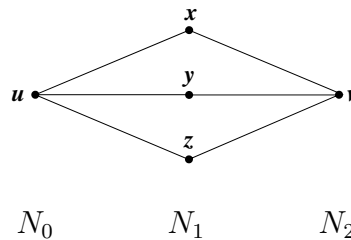


Figure 3.5 –

La chaîne x, v, y, u appartient à l'unique 6-cycle x, v, y, u, z, w, x , où $w \in N_2$. D'après la Proposition 3.9, $w \in N(x)$. Alors, \mathbf{G} n'est autre que le graphe biparti $K_{3,3}$. La réciproque est évidente à établir. \square

Théorème 3.5 (Kahoul et Berrachedi [24]). *Soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle-régulier biparti de degré maximum n , $n > 3$. Alors \mathbf{G} est régulier si et seulement si \mathbf{G} est H_n .*

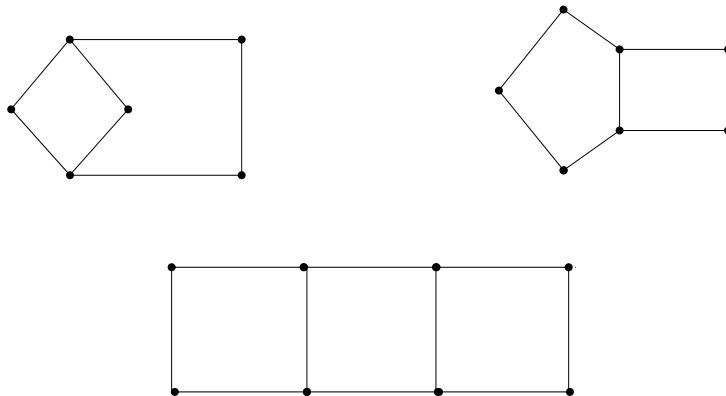
Démonstration. Il est évident que H_n est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle-régulier biparti régulier de degré n .

Soit $\mathbf{G} = (V, E)$ un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle-régulier biparti et régulier, de degré $n > 3$ et non isomorphe à H_n . D'après Proposition 3.5 et Théorème 3.2, $|V(\mathbf{G})| < \binom{2n}{n}$ et $\text{diam}(\mathbf{G}) < 2n - 1$. Donc, pour une décomposition en niveaux N_0, \dots, N_p ($p < 2n - 1$), relatif à un sommet admettant un sommet diamétral de \mathbf{G} , il existe $k \in \{0, 1, \dots, p\}$ tel que

$$|N_{2h+1}| < \frac{n}{h+1} \left(\binom{n-1}{h} \right)^2 \quad \text{et} \quad |N_{2h+2}| < \frac{n(n-h-1)}{(h+1)^2} \left(\binom{n-1}{h} \right)^2, \quad \forall h \geq k.$$

D'une part, pour tout $u \in N_p : m(u, N_{p-1}) = n \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil$. D'autre part, $|N_{p-1}| < n$, absurde. □

Proposition 3.12 (Kahoul et Berrachedi, 2009). *Si \mathbf{G} est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier alors \mathbf{G} est sans les graphes suivants :*



Démonstration. Soit G un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier.

1^{er} cas Si G admet le graphe de la Figure 3.6 comme sous-graphe :

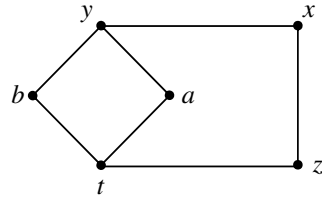


Figure 3.6 –

Considérons la chaîne x, y, a, t , qui appartient à un unique 6-cycle x, y, a, t, c, d, x (avec $c \neq z \neq d$).

* Si $c = b$, (Figure 3.7)

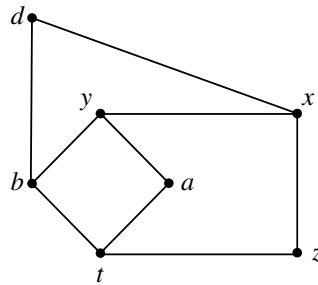


Figure 3.7 –

Alors $x \in N(t)$, d'après Proposition 3.9, absurde.

* Sinon (Figure 3.8)

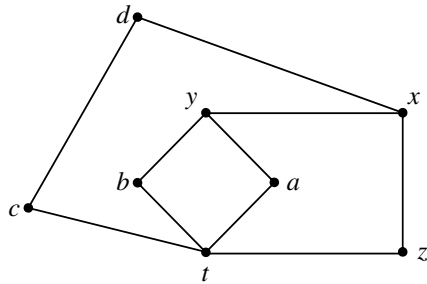


Figure 3.8 –

La chaîne x, d, c, t appartient à au moins deux 6-cycles x, d, c, t, b, y, x et x, d, c, t, a, y, x , absurde.

2^{ème} cas Si G admet le graphe de la Figure 3.9 comme sous-graphe :

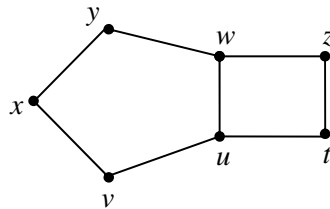


Figure 3.9 –

$z \notin N(x) \cup N(v)$; car sinon on aurait la figure interdite 3.6 (Figure 3.10)

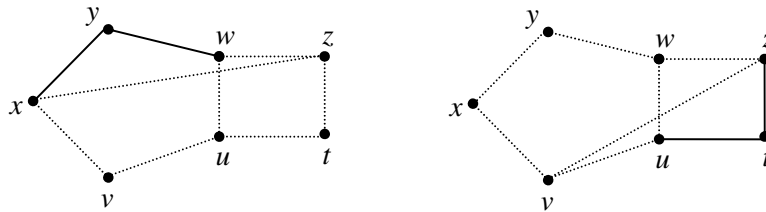


Figure 3.10 –

Par symétrie, $t \notin N(x) \cup N(y)$.

En fait, $d(z, x) = 3$ (resp. $d(z, v) = 3$), car sinon : $\exists e \in N(z) \cap N(x)$ (resp. $e \in N(z) \cap N(v)$). De la sorte que, la chaîne e, x, v, u , appartient à au moins deux 6-cycles e, x, v, u, w, z, e et e, x, v, u, t, z, e (resp. on aurait la configuration interdite du 1^{er} cas), absurde.

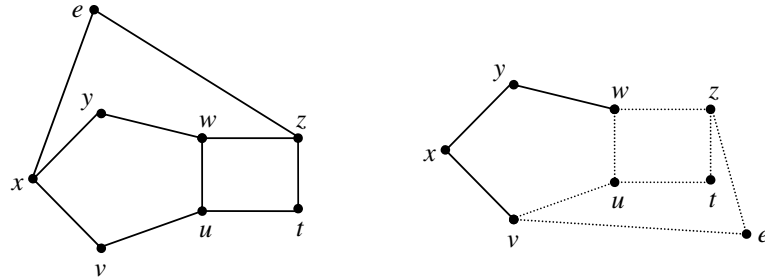


Figure 3.11 –

Par symétrie, $d(t, y) = d(t, x) = 3$.

Considérons la chaîne y, w, z, t . Elle appartient à un unique 6-cycle y, w, z, t, a, a', y .

On a $a \neq u$, sinon $d(y, t) = 1$ (Proposition 3.9).

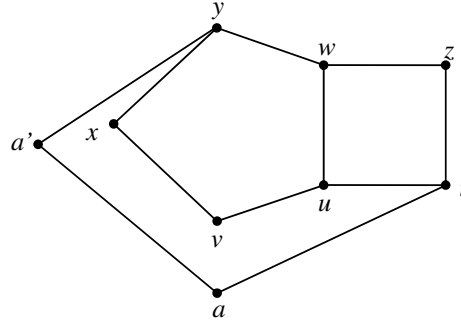


Figure 3.12 –

D'où la chaîne y, a', a, t appartient à au moins deux 6-cycles y, a', a, t, z, w, y et y, a', a, t, y, w, y , absurde.

3^{ème} cas Si G admet le graphe de la Figure 3.13 comme sous-graphe :

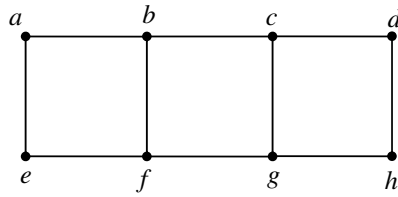


Figure 3.13 –

D’après Proposition 3.9, on obtient la configuration suivante :

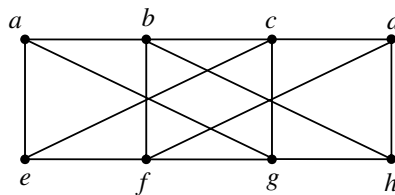


Figure 3.14 –

La chaîne a, e, f, g appartient à au moins deux 6-cycles a, e, f, g, c, b, a et a, e, f, g, h, b, a , absurde. □

3.4 Opérations Sur les Graphes [3,1,6]-Cycle Réguliers

Nous avons étudié la stabilité de la classe des graphes [3,1,6]-cycle réguliers par produit cartésien et produit catégoriel. Pour le produit cartésien, le graphe $C_6 \oplus C_6$ n’est pas un graphe [3,1,6]-cycle régulier comme le montre la Figure 3.15, qui est un sous-graphe induit de $C_6 \square C_6$ où nous trouvons la configuration interdite 3.13

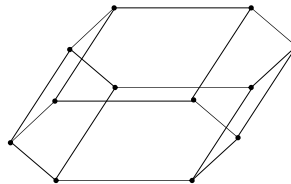


Figure 3.15 –

Quand au produit catégoriel, on peut dire que :

Proposition 3.13 (Kahoul et Berrachedi [24]). *\mathbf{G} et \mathbf{H} sont deux graphes $[3, 1, 6]$ -cycle réguliers si et seulement si le graphe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est un graphe $[3, 1, 6]$ -cycle régulier.*

Démonstration. Soient \mathbf{G} et \mathbf{H} deux graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. On a $V(\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = V' \times V''$ où $V' = V(\mathbf{G})$ et $V'' = V(\mathbf{H})$.

Considérons une chaîne de longueur trois $I = x, y, z, t$ dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ avec : $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$, $z = (z', z'')$ et $t = (t', t'')$. Par construction de $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$, $x'y'$, $y'z'$ et $z't'$ (resp. $x''y''$, $y''z''$ et $z''t''$) sont toutes dans $E(\mathbf{G})$ (resp. $E(\mathbf{H})$).

Comme \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) est un graphe $[3,1,6]$ -cycle régulier, il existe u', v' (resp. u'', v'') dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) tels que :

$x'u', u'v', v't'$ (resp. $x''u'', u''v''$ et $v''t''$) soient toutes dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) formant le 6-cycle $\beta' = x', y', z', t', u', v', x'$ (resp. $\beta'' = x'', y'', z'', t'', u'', v'', x''$).

Donc il existe dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ un 6-cycle $\beta = x, y, z, t, u, v, x$, où $u = (u', u'')$ et $v = (v', v'')$ qui contient la chaîne I .

β est l'unique 6-cycle dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ qui contient I . Car sinon, il existe deux sommets $a = (a', a'')$, $b = (b', b'')$ dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$, tels que : xb, ba et at soient toutes dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ (a (resp. b) peut être éventuellement u (resp. v) mais pas $a = u$ et $b = v$ simultanément).

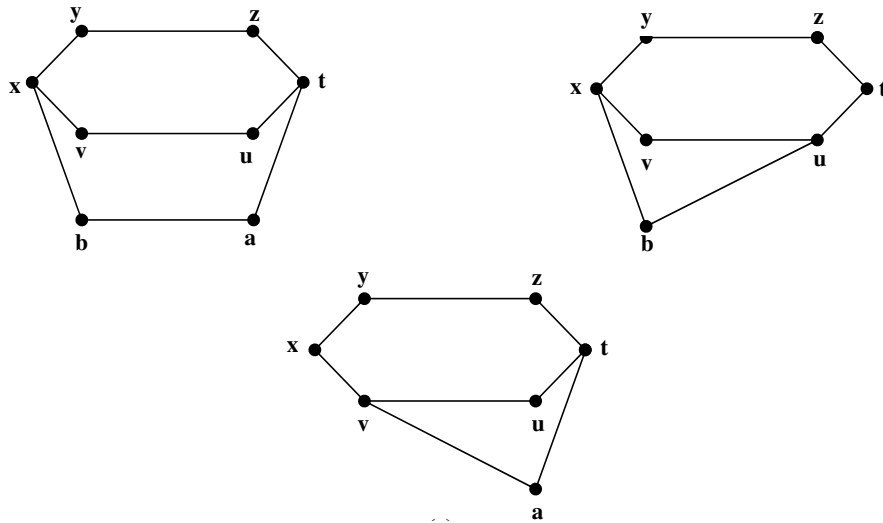


Figure 3.16 –

Ainsi il existe dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) un deuxième 6-cycle $\rho' = x', y', z', t', a', b', x'$ (resp. $\rho'' = x'', y'', z'', t'', a'', b'', x''$) distinct de β' (resp. β''), absurde.

Inversement, soit $I = x, y, z, t$ une chaîne de longueur trois appartenant à l'unique 6-cycle $\beta = x, y, z, t, u, v, x$, avec $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$, $z = (z', z'')$, $t = (t', t'')$, $u = (u', u'')$ et $v = (v', v'')$, dans le graphe $G \times H$; un graphe [3,1,6]-cycle régulier.

Ainsi, la chaîne $I' = x', y', z', t'$ (resp. $I'' = x'', y'', z'', t''$) appartient au 6-cycle $\beta' = x', y', z', t', u', v', x'$ (resp. $\beta'' = x'', y'', z'', t'', u'', v'', x''$) dans G (resp. H). En fait, β' (resp. β'') est l'unique 6-cycle qui contient I' (resp. I'') dans G (resp. H), par construction de $G \times H$. Sinon, une des configurations de la figure 3.16 a lieu. \square

Proposition 3.14 (Kahoul et Berrachedi [24]). $\mathbf{G} \times K_2$ est un graphe [3, 1, 6]-cycle régulier si et seulement si \mathbf{G} est un graphe [3, 1, 6]-cycle régulier.

Démonstration. Condition nécessaire vérifiée.

Inversement, posons $V(K_2) = \{0, 1\}$ et supposons que $\mathbf{G} \times K_2$ est un graphe [3,1,6]-cycle régulier. Alors toute chaîne de longueur trois appartient à un unique 6-cycle. Par construction de $\mathbf{G} \times K_2$, il existerait dans \mathbf{G} un 6-cycle semblable à celui de $\mathbf{G} \times K_2$.

Si dans \mathbf{G} , le 6-cycle contenant cette chaîne de longueur trois n'était pas unique, alors ceci reviendrait à la présence de sous-graphes de \mathbf{G} isomorphes à au moins l'un des graphes présentes dans la figure 3.16 et alors dans $\mathbf{G} \times K_2$ aussi. Absurde. \square

CHAPITRE 4

Graphes $[3,1,6]$ -Cycle-Induit Réguliers

Chapitre 4

Graphes $[3,1,6]$ -Cycle-Induit

Réguliers

Introduction

Par considération du graphe de l'hypercube, il est évident que chaque chaîne induite de longueur trois, à extrémités distinctes, appartient à trois cycles de longueur six, dont un seul est induit. D'autres graphes vérifient cette propriété, tels que les graphes impairs étendus, les sous-graphes induits par les niveaux centraux de l'hypercube de degré impair et plus généralement les graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Sur ce, nous considérons, la famille de graphes comprenant ces graphes et n'étant, en réalité qu'une généralisation de la classe des graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Elle est baptisée la classe des graphes $[3, 1, 6]$ -*cycle-induit régulier*.

4.1 Préliminaires

Définition 4.1. *Un graphe G est dit $[3, 1, 6]$ -cycle-induit régulier, si toute chaîne induite de longueur 3, à extrémités distinctes, appartient à un unique 6-cycle induit.*

En fait, les graphes $[3,1,6]$ -cycle-induit réguliers sont des graphes qui peuvent posséder le triangle K_3 comme sous-graphe, puisqu'il n'y a pas de restriction à propos des extrémités d'une chaîne de longueur trois quelconque.

Proposition 4.1 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle régulier alors \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier.*

Démonstration. Soient \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle régulier et x, y, z, t une chaîne induite de longueur trois reliant les deux sommets distincts x et t . Alors il existe un unique 6-cycle x, y, z, t, u, v, x contenant la chaîne x, y, z, t .

Si ce 6-cycle n'était pas induit (i.e, il possède une corde), il existerait alors au moins une des arêtes zv, yu, vt ou xu dans \mathbf{G} . Ainsi, si au moins une des deux premières arêtes figuraient, alors x et t seraient adjacents d'après la Proposition 3.9, absurde. Quand aux deux arêtes vt et xu , elles n'ont pas lieu, puisque \mathbf{G} est sans triangle. \square

La réciproque n'est pas toujours vraie, puisque l'hypercube Q_n , pour $n \geq 2$, est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans être un graphe [3,1,6]-cycle régulier. Néanmoins, la réciproque est garantie pour une sous-classe de graphes [3,1,6]-cycle-induit régulier.

Proposition 4.2 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle et sans 4-cycle, alors \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle régulier.*

Démonstration. Soit x, y, z, t une chaîne de longueur trois reliant deux sommets dans un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier. Comme \mathbf{G} n'admet ni le triangle, ni le 4-cycle comme sous-graphes, x, y, z, t est induite, avec $x \neq t$. La chaîne x, y, z, t appartient à un 6-cycle induit $\beta = x, y, z, t, u, v, x$.

β est l'unique 6-cycle qui contient la chaîne x, y, z, t . Car sinon, il existerait une autre chaîne induite de longueur trois, t, u', v', x , avec $u' \neq u$ ou $v' \neq v$, formant le 6-cycle non induit $\beta' = x, y, z, t, u', v', x$, puisque \mathbf{G} est [3,1,6]-cycle-induit régulier. Or, ceci n'a pas lieu d'après les hypothèses, d'où le résultat. \square

4.2 Résultats de Base

Lemme 4.1 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Soit $\beta = x, y, z, t, u, v, x$ un 6-cycle induit, dans un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier \mathbf{G} , sans triangle. Si $|N(y) \cap N(v)| > 1$, alors tout sommet α de $N(y) \cap N(v) \setminus \{x\}$ n'est pas sur β . De plus, $\alpha \in N(t)$.*

Démonstration. Soit $\beta = x, y, z, t, u, v, x$ un 6-cycle induit. On a $x \in N(y) \cap N(v)$.

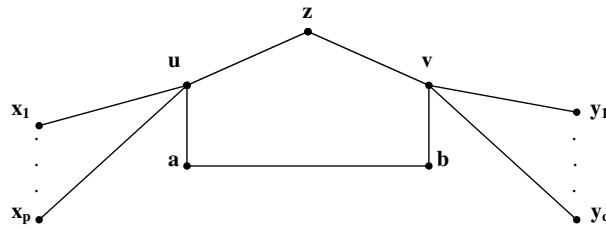
Si $\alpha \in (N(y) \cap N(v)) \setminus \{x\}$, comme β est induit, α n'est pas sur β .

Comme \mathbf{G} est sans triangle, $\alpha \notin N(z) \cup N(u)$. D'une autre part, α et t sont adjacents. Car sinon, la chaîne induite y, z, t, u appartient à au moins deux 6-cycles induits β et y, z, t, u, v, α, y , Absurde. \square

Proposition 4.3 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Soit \mathbf{G} un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier, sans triangle. Alors pour toute paire de sommets u et v à distance 2 :*

$$d(u) = d(v).$$

Démonstration. Soient u et v deux sommets à distance 2 dans un graphe \mathbf{G} , [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle.



Posons : $N(u) = (N(u) \cap N(v)) \cup A \cup X$, avec :

$$A = \{a \in N(u) / \exists b \in N(v) : d(a, b) = 1\} \text{ et } X = N(u) \setminus (N(v) \cup A)$$

$$N(v) = (N(v) \cap N(u)) \cup B \cup Y, \text{ avec :}$$

$$B = \{b \in N(v) / \exists a \in N(u) : d(a, b) = 1\} \text{ et } Y = N(v) \setminus (N(u) \cup B).$$

Comme \mathbf{G} est sans triangle, $N(u) \cap N(v)$, $A \cup X$, $B \cup Y$ sont stables.

D'autre part, comme \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, pour tout $x \in X$ (resp. $a \in A$), la chaîne x, u, z, v (resp. a, u, z, v), qui est induite de longueur trois, appartient à un unique 6-cycle induit. Donc la chaîne u, z, v appartient à $(|X| + |A|)$ 6-cycles induits.

De même, en raisonnant sur chaque sommet $y \in Y$ (resp. $b \in B$), on peut déduire que la chaîne u, z, v appartient à $(|Y| + |B|)$ 6-cycles induits.

Ainsi, $|X| + |A| = |Y| + |B|$.

Alors :

$$d(u) = |N(u) \cap N(v)| + |A| + |X| = |N(u) \cap N(v)| + |B| + |Y| = d(v). \quad \square$$

Proposition 4.4 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle, de degré minimum au moins 2, alors \mathbf{G} est régulier ou semi-régulier.*

Démonstration. Soit \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle. Deux cas de figures se présentent :

• Si \mathbf{G} est biparti :

Soient u et v deux sommets dans la même bipartition. Comme \mathbf{G} est connexe, il existe une chaîne dont les extrémités sont u et v . Considérons la (u, v) -géodésique, $u, u_1, \dots, u_{p-1}, v$ de longueur p . Puisque \mathbf{G} est biparti, p est pair. Donc d'après, Proposition 4.3, $d(u) = d(v)$. Alors \mathbf{G} est semi-régulier ou régulier.

• Si \mathbf{G} n'est pas biparti :

Dans ce cas, il existe un cycle de longueur impair, au moins égale à 5, puisque \mathbf{G} est sans triangle.

Soit $C = a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k+1}, a_0$ un plus petit cycle impair de longueur $2k + 1$.

Pour tout i , considérons la chaîne a_{i-1}, a_i, a_{i+1} .

* Si i est pair, on a $d(a_i) = d(a_0) = d(a_{i+1}) = d(a_{i-1})$. Alors $\forall i$, on a $d(a_i) = d(a_{i+1}) = d(a_{i-1})$.

* Si i est impair, $d(a_i) = d(a_0) = d(a_{i-1}) = d(a_{i+1})$. Donc $\forall i$, on a $d(a_i) = d(a_{i+1}) = d(a_{i-1})$.

Ainsi, tous les sommets de C ont le même degré.

Si C est hamiltonien, \mathbf{G} est régulier. Sinon, pour tout sommet u n'appartenant pas à C , de la connexité de \mathbf{G} , il existe une plus courte chaîne de longueur p ayant une extrémité v dans C est l'autre u . Si p est pair, terminé.

Sinon, le voisin de v dans C a le même degré que u . Donc \mathbf{G} est régulier. \square

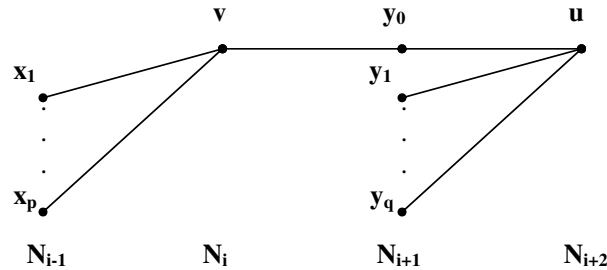
Pour une décomposition en niveaux arbitraire d'un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle, on propose un nombre minimum d'arêtes existant entre un sommet d'un niveau quelconque et le sous-graphe induit par le premier niveau qui lui est antérieur.

Lemme 4.2 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux arbitraire de \mathbf{G} et u un sommet de N_i . Alors*

$$d^-(u) = m(u, N_{i-1}) \geq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$$

Démonstration. Ceci est vrai pour $i = 0, 1$ et 2. Supposons que la propriété est vraie pour tous les sommets de N_i et soient u de N_{i+2} et v de N_i sur une chaîne de longueur 2 : u, y_0, v .

Soient x_1, \dots, x_p les voisins de v dans N_{i-1} ($p \geq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$) et y_1, \dots, y_q les voisins de u (distincts de y_0) dans N_{i+1} .



Soient $N_{i,j}$ ($i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q$) le nombre de 6-cycles induits utilisant la chaîne x_i, v, y_0, u, y_j . Par le fait que \mathbf{G} soit un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle, en utilisant les deux chaînes de longueurs trois : x_i, v, y_0, u (une chaîne induite) et v, y_0, u, y_j (induite si v et y_j ne sont pas adjacents), on obtient :

$$\forall i : \sum_j N_{i,j} = 1 \text{ et } \forall j : \sum_i N_{i,j} \leq 1.$$

Alors, $\sum_i \sum_j N_{i,j}$ est égale à p et au plus q . Mais $d^-(u) = q + 1$ et $d^-(v) = p$. Alors le résultat est obtenu grâce à l'hypothèse de récurrence. \square

En utilisant Lemme 4.2, on peut déduire le lemme suivant :

Lemme 4.3 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Soit \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle de degré maximum n et N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition en niveaux relative à un sommet de degré n . Alors, pour $k = 0, \dots, n - 2$*

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2 \text{ et } |N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2.$$

Démonstration. Ceci est vrai pour $i = 0$. On a aussi : $|N_1| = n$ et $|N_2| \leq n(n-1)$. Supposons que $|N_{2k}| \leq \frac{n(n-k)}{(k-1)^2} \left(\binom{n-1}{k-1} \right)^2$.

Soit n' le degré des sommets dans les niveaux impairs.

En dénombrant les arêtes entre N_{2k} et N_{2k+1} , on obtient d'après Lemme 4.2 que ce nombre est au moins $|N_{2k+1}| \lceil \frac{2k+1}{2} \rceil$ et au plus $|N_{2k}|(n - \lceil \frac{2k}{2} \rceil)$.

Ainsi, nous obtenons :

$$|N_{2k+1}| \leq |N_{2k}| \frac{(n-k)}{k+1} \leq \frac{n(n-k)^2}{k^2(k+1)} \left(\binom{n-1}{k-1} \right)^2 = \frac{n}{k+1} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2.$$

De même, en dénombrant les arêtes entre N_{2k+1} et N_{2k+2} , on obtient :

$$|N_{2k+2}| \leq |N_{2k+1}| \frac{n' - k - 1}{k+1} \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2.$$

□

Théorème 4.1 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Tout graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle de degré maximum n , est d'ordre au plus $\binom{2n}{n}$.*

Démonstration. Soit \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle et de degrés n et n' , avec $n \geq n'$. Sans perte de généralité, considérons N_0, N_1, \dots, N_p une décomposition de \mathbf{G} en niveaux relative à un sommet de degré n .

D'après Lemme 4.2, pour chaque sommet u de N_p , on a $m(u, N_{p-1}) = \lceil \frac{p}{2} \rceil \leq n$. Alors $p \leq 2n$. Mais après dénombrement des arêtes existantes entre N_{2n-1} et N_{2n} , on peut déduire que $N_{2n} = \emptyset$.

Ainsi, \mathbf{G} est de diamètre au plus $2n-1$. Toujours par le même procédé, l'inégalité $|N_{2n-1}| \leq 1$ a lieu.

A partir de cette dernière remarque, on peut borner supérieurement l'ordre de \mathbf{G} , comme suit :

$$\begin{aligned}
 |V(\mathbf{G})| &\leq |N_0| + |N_1| + \dots + |N_{2n-1}| \\
 &\leq 2 + \sum_{i=0}^{n-2} \left(\binom{n-1}{i} \right)^2 \left(\frac{n}{i+1} + \frac{n(n-i-1)}{(i+1)^2} \right) \\
 &\leq \sum_{i=0}^n \left(\binom{n}{i} \right)^2 \leq \binom{2n}{n}. \quad \square
 \end{aligned}$$

Supposons que \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier sans triangle, de degré maximum n et d'ordre $\binom{2n}{n}$. Alors, on a pour $k = 0, \dots, n-1$

$$|N_{2k+1}| = \frac{n}{k+1} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2 \text{ et } |N_{2k+2}| = \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left(\binom{n-1}{k} \right)^2.$$

Alors \mathbf{G} est régulier et il est évident qu'en utilisant ces égalités dans la preuve du Lemme 4.2, on obtient pour tout u dans N_i ($i = 0, \dots, 2n-1$)

$$d^-(u) = m(u, N_{i-1}) = \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil \text{ et } d^+(u) = m(u, N_{i+1}) = n - \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil.$$

A partir de ces dernières hypothèses, on a le lemme suivant :

Lemme 4.4 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier sans triangle de degré maximum n et d'ordre $\binom{2n}{n}$, alors \mathbf{G} est sans 4-cycle.*

Démonstration. Supposons que \mathbf{G} admet un 4-cycle comme sous-graphe. Comme \mathbf{G} est sans triangle, $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2n - 1 \geq 3$. Par hypothèse, N_1 est stable et pour tout u dans N_2 , $m(u, N_1) = 1$. Ainsi, on ne retrouve aucun 4-cycle rencontrant les deux premiers niveaux N_0 et N_1 , ni les trois premiers niveaux N_0 , N_1 et N_2 de \mathbf{G} .

1^{er} cas :

Si ce 4-cycle, noté u, v, x, w rencontre trois niveaux consécutifs N_{i-2} , N_{i-1} et N_i , tels que x sur N_{i-2} , v et w sur N_{i-1} et u sur N_i . Comme $i \geq 3$, il existe y dans $N(x) \cap N_{i-3}$.

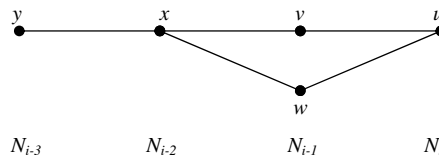


Figure 4.1 –

La chaîne induite y, x, v, u appartient à un unique 6-cycle induit y, x, v, u, t', y .

On a $t' \in N(w) \cap N_{i-2}$, d'après Lemme 4.1.

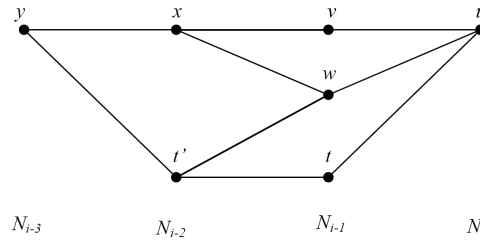


Figure 4.2 –

Comme le 4-cycle y, x, w, t' rencontre les trois niveaux N_{i-3}, N_{i-2} et N_{i-1} , il existe $z \in N(y) \cap N_{i-4}$. La chaîne induite z, y, x, v appartient à un unique 6-cycle induit z, y, x, w, s, s', z , avec $z' \in N(t')$. Un raisonnement récurrent, nous mènerait à un 4-cycle qui rencontrerait les trois premiers niveaux N_0, N_1 et N_2 , absurde.

2^{ème} cas : Si u, v, x, w rencontre deux niveaux consécutifs N_i et N_{i-1} ($i \geq 2$). Quatres cas de figures se présentent.

1) Si v et w sont sur N_{i-1} et u et x sont sur N_i :(Figure 4.3)

Comme $i \geq 2$, il existe y dans $N(v) \cap N_{i-2}$.

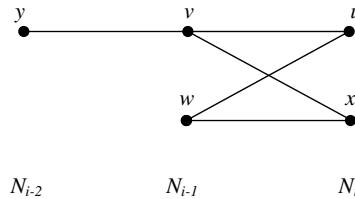


Figure 4.3 –

La chaîne induite y, v, u, w ($y \notin N(w) \cap N_{i-2}$ (1^{er} cas)) appartient à un unique 6-cycle induit y, v, u, w, t, t', y .

A) Si $(t \in N_{i-2}$ et $t' \in N_{i-3})$ ou $(t$ et t' sont sur $N_{i-2})$ (Figure 4.4)

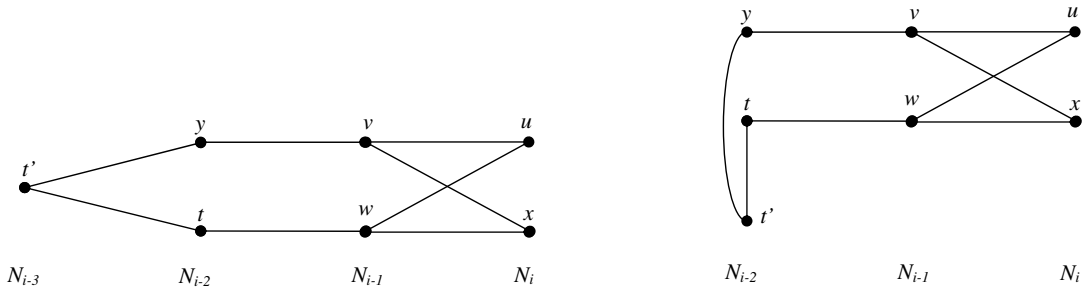


Figure 4.4 –

La chaîne induite t, t', y, v appartient à au moins deux 6-cycles induits t, t', y, v, u, w, t et t, t', y, v, x, w, t , absurde.

B) Si $(t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_{i-2})$ ou $(t \in N_{i-2}$ et $t' \in N_{i-1})$ ou $(t$ et t' sont sur $N_{i-2})$ ou $(t \in N_i$ et $t' \in N_{i-1})$ (Figure 4.5)

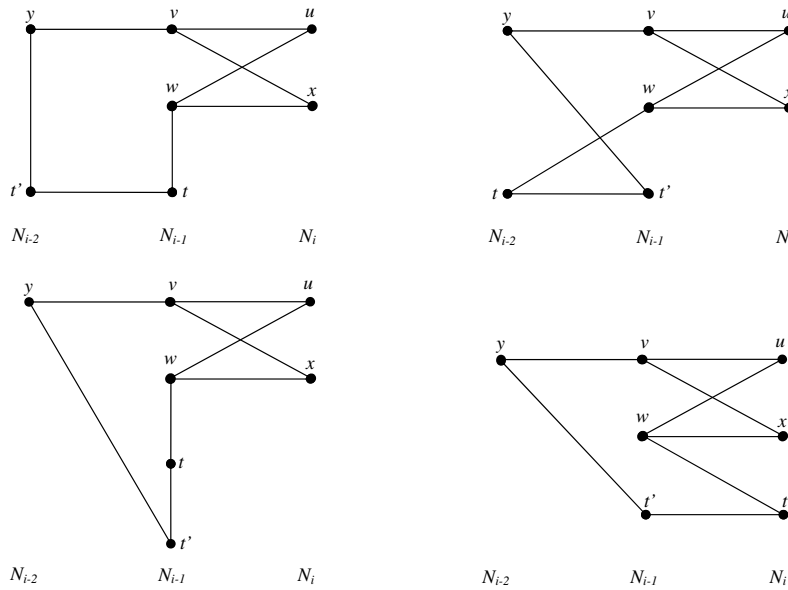


Figure 4.5 –

Puisque \mathbf{G} est sans triangle et d'après le 1^{er} cas, ni t ni t' ne sont dans $N(x)$. Alors, la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, v, u, w et w, t, t', y, v, x, w , absurde.

2) Si u, w et x sont sur $N_i, v \in N_{i-1}$: (Figure 4.6)

Comme $i \geq 2$, il existe $y \in N(v) \cap N_{i-2}$.

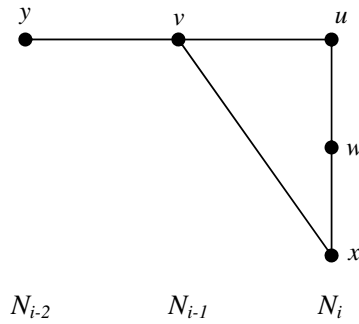


Figure 4.6 –

La chaîne induite y, v, u, w appartient à un unique 6-cycle induit y, v, u, w, t, t', y .

A) Si $t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_{i-2}$.

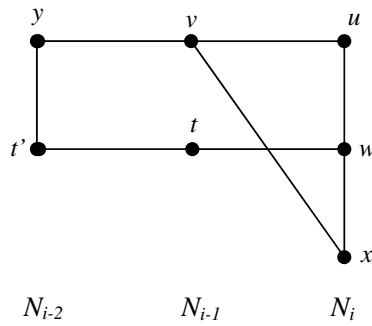


Figure 4.7 –

Comme \mathbf{G} est sans triangle, $t \notin N(x)$. La chaîne induite t, t', y, v appartient à au moins deux 6-cycles induits t, t', y, v, u, w, t et t, t', y, v, x, w, t , absurde.

B) Si $(t \text{ et } t' \text{ sont sur } N_{i-1})$ ou $(t \in N_i \text{ et } t' \in N_{i-1})$

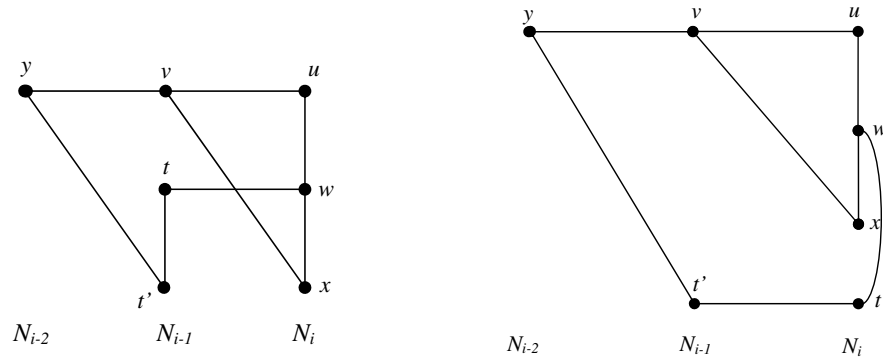


Figure 4.8 –

Puisque G est sans triangle et d'après le 1^{er} cas, $t \notin N(x)$. Alors, la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, v, u, w et w, t, t', y, v, x, w , absurde.

3) Si u et w sont sur N_i , v et x sont sur N_{i-1} :

Il existe $y \in N(v) \cap N_{i-2}$.

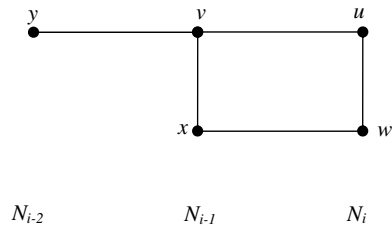


Figure 4.9 –

La chaîne induite y, v, u, w appartient à un unique 6-cycle induit y, v, u, w, t, t', y .

A) Si $(t \in N_i \text{ et } t' \in N_{i-1})$ ou $(t \text{ et } t' \text{ sont sur } N_{i-1})$ (Figure 4.10)

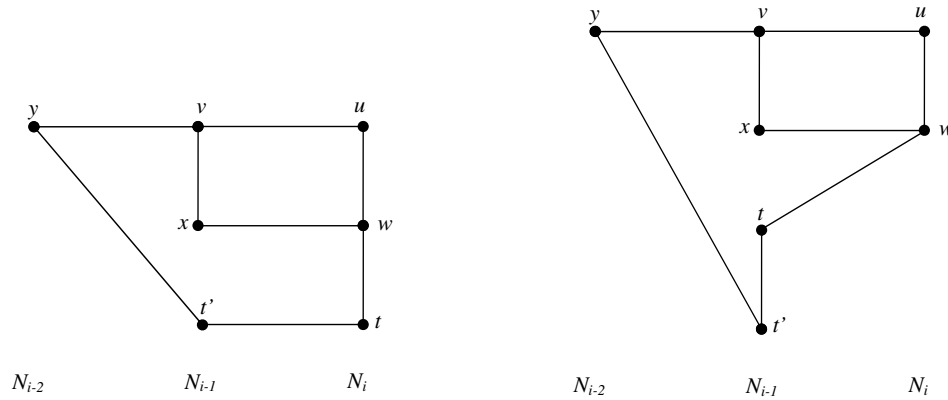


Figure 4.10 –

Puisque \mathbf{G} est sans triangle, $t \in N(x)$. De plus, x et t' ne sont pas adjacents, d'après le point **2**). La chaîne induite t, t', y, v appartient à au moins deux 6-cycles induits t, t', y, v, u, w, t et t, t', y, v, x, w, t , absurde.

B) Si $t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_{i-2}$

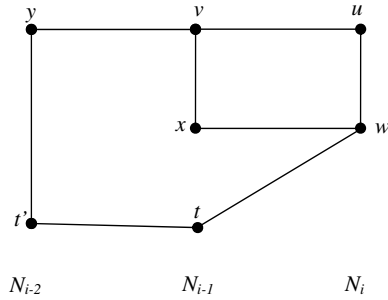


Figure 4.11 –

Puisque \mathbf{G} est sans triangle, $t \notin N(x)$. De plus d'après le **1^{er}** cas, $t' \notin N(x)$. Alors, la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, u, w, t et w, t, t', y, v, x, w , absurde.

4) Si v, w et x sont sur N_{i-1} , $u \in N_i$ ($i \geq 2$) :

Il existe $y \in N(v) \cap N_{i-2}$.

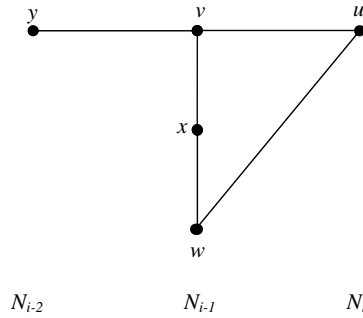


Figure 4.12 –

La chaîne induite y, v, u, w appartient à un unique 6-cycle induit y, v, u, w, t, t', y .

A) Si $t \in N_{i-2}$ et $t' \in N_{i-3}$

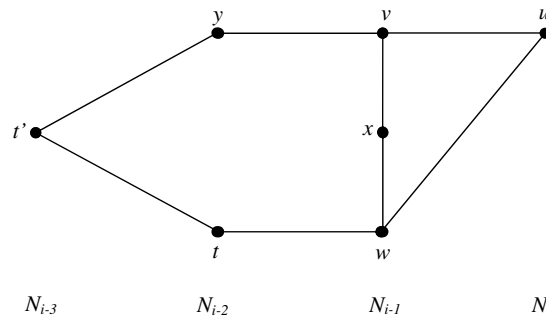


Figure 4.13 –

Comme \mathbf{G} est sans triangle, $t \notin N(x)$. La chaîne induite t, t', y, v appartient à au moins deux 6-cycles induits t, t', y, v, u, w, t et t, t', y, v, x, w, t , absurde.

B) Si t et t' sont tous les deux sur N_{i-2} ou N_{i-1}

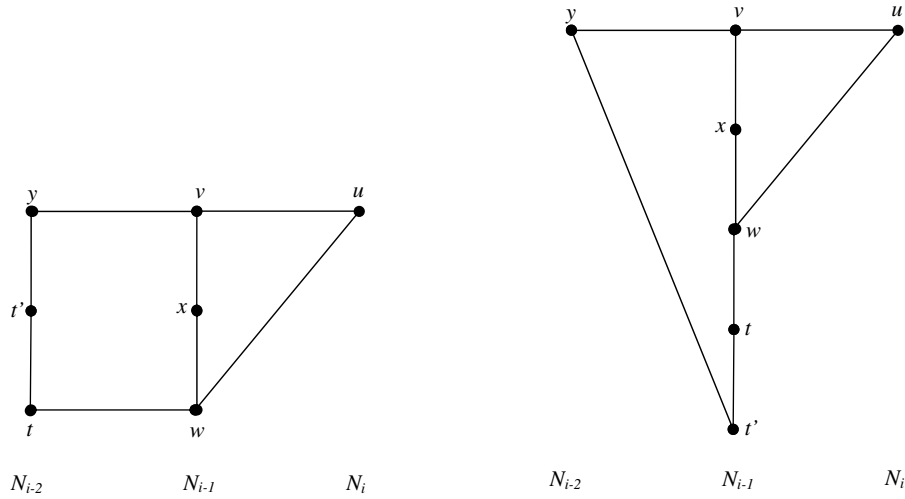


Figure 4.14 –

Comme G est sans triangle, $t \notin N(x)$. De plus d'après le point **3**), $t' \notin N(x)$. Alors la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, v, u, w et w, t, t', y, v, x, w , absurde.

C) (Si $t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_{i-2}$) ou ($t \in N_{i-2}$ et $t' \in N_{i-1}$) ou ($t' \in N_{i-1}$ et $t \in N_i$)

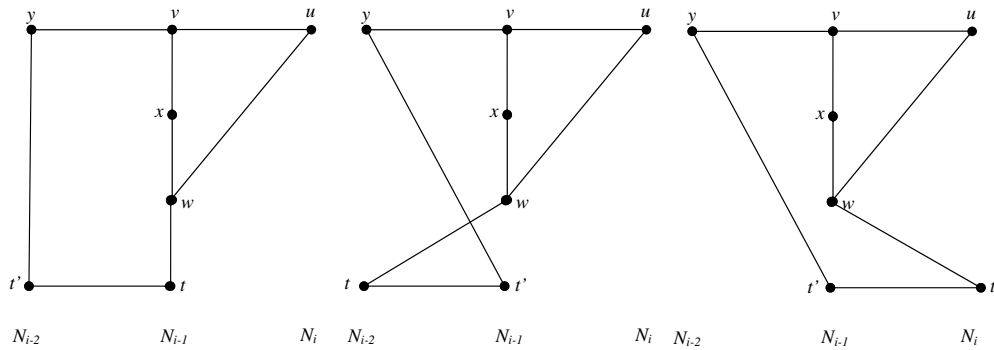


Figure 4.15 –

Puisque G est sans triangle et d'après le **1^{er}** cas, $t \notin N(x)$ et $t' \notin N(x)$. Alors, la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, v, u, w et w, t, t', y, v, x, w , absurde.

3^{ème} cas : Si u, v, x, w est dans N_i ($i \geq 2$).

Il existe $y \in N(v) \cap N_{i-1}$. $y \notin N(x)$, du fait que \mathbf{G} est sans triangle.

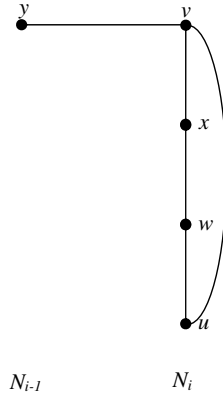


Figure 4.16 –

La chaîne induite y, v, u, w (elle est induite puisque \mathbf{G} est sans triangle) appartient à un unique 6-cycle induit y, v, u, w, t, t', y . Plusieurs cas de figures se présentent.

1) (Si t et t' sont sur N_{i-1}) ou ($t \in N_i$ et $t' \in N_{i-1}$) ou ($t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_i$)

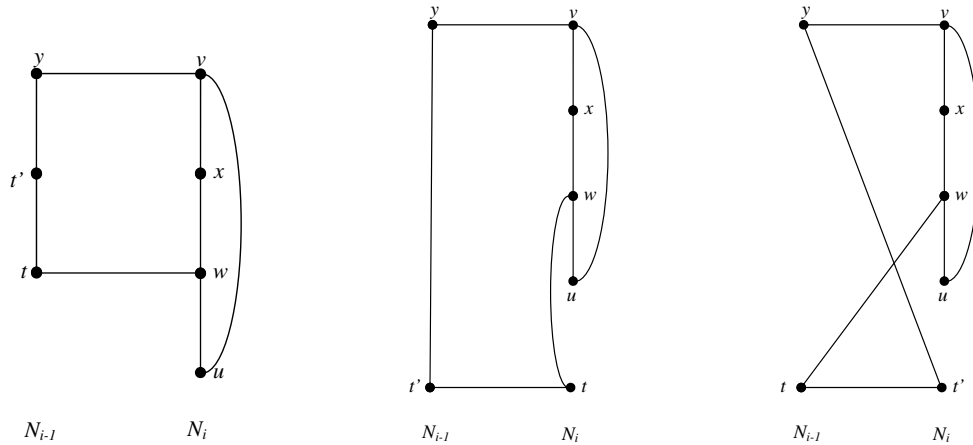


Figure 4.17 –

Comme \mathbf{G} est sans triangle $t \notin N(x)$ et d'après le **2^{ème}** cas, $t' \notin N(x)$. Ainsi, la chaîne induite t, t', y, v appartient à au moins deux 6-cycles induits t, t', y, v, u, w, t et t, t', y, v, x, w, t , absurde.

2) Si $t \in N_{i-1}$ et $t' \in N_{i-2}$

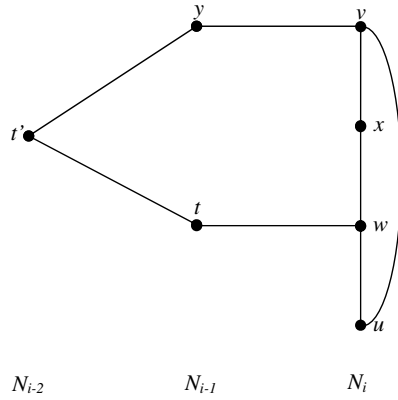


Figure 4.18 –

Puisque \mathbf{G} est sans triangle, $t \notin N(x)$. Alors, la chaîne induite w, t, t', y appartient à au moins deux 6-cycles induits w, t, t', y, v, u, w et w, t, t', y, v, x, w , absurde. \square

Théorème 4.2 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier sans triangle, de degré maximum n . Alors :*

- 1) $|V(\mathbf{G})| \leq \binom{2n}{n}$
- 2) $|V(\mathbf{G})| = \binom{2n}{n}$ si et seulement si \mathbf{G} est H_n .

Démonstration. 1) Voir Théorème 4.1.

2) H_n est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier de degré n et d'ordre $\binom{2n}{n}$. Soit \mathbf{G} un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier de degré maximum n et d'ordre $\binom{2n}{n}$. D'après Lemme 4.4, \mathbf{G} est sans 4-cycle. Ainsi, l'équivalence s'en déduit des Propositions 4.2 et 3.5. \square

Théorème 4.3 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier, sans triangle et de degré maximum n . Alors :*

- 1) $\text{diam}(\mathbf{G}) \leq 2n - 1$
- 2) $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2n - 1$ si et seulement si \mathbf{G} est H_n

- Démonstration.* 1. Considérons une décomposition en niveaux N_0, \dots, N_p d'un graphe \mathbf{G} , [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle et de degré maximum n , à partir d'un sommet admettant un sommet diamétral. Lemme 4.2, nous permet de déduire que, $\lceil \frac{p}{2} \rceil \leq n$. Ainsi, $p \leq 2n$. Or, après dénombrement des arêtes existantes entre les deux derniers niveaux éventuels, N_{2n-1} et N_{2n} , on constate que $N_{2n} = \emptyset$. D'où, \mathbf{G} est de diamètre au plus $2n-1$.
2. H_n est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle, régulier de degré n et de diamètre $2n - 1$. Supposons maintenant que \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, sans triangle, de degré maximum n , où $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2n - 1$ et non isomorphe à H_n . Alors $|V(\mathbf{G})| < \binom{2n}{n}$, d'après Théorème 4.2. Le résultat est déduit par analogie à la démonstration relative au Théorème 3.2.

□

4.3 Opération sur les Graphes [3,1,6]-Cycle-Induit Réguliers

Nous avons étudié la stabilité de la classe des graphes [3,1,6]-cycle-induit réguliers par produit catégoriel. Nous avons commencé par ce cas particulier :

Proposition 4.5 (Kahoul et Berrachedi [23]). *\mathbf{G} est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier, si et seulement si $\mathbf{G} \times K_2$ est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier.*

Démonstration. Posons $V(K_2) = \{0, 1\}$. Soit x, y, z, t une chaîne induite de longueur trois, reliant deux sommets distincts x et t dans $\mathbf{G} \times K_2$. Sans perte de généralité, il existe dans \mathbf{G} quatre sommets x', y', z' et t' , tels que $x = (x', 1)$, $y = (y', 0)$, $z = (z', 1)$ et $t = (t', 0)$ où x', y', z', t' est une chaîne induite de longueur trois dans \mathbf{G} . Comme \mathbf{G} est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, la chaîne x', y', z', t' appartient à un unique 6-cycle induit $\beta' = x', y', z', t', u', v', x'$. Ainsi, il existe deux sommets $u = (u', 1)$ et $v = (v', 0)$ dans $\mathbf{G} \times K_2$, formant le 6-cycle induit $\beta = x, y, z, t, u, v, x$.

β est l'unique 6-cycle induit dans $\mathbf{G} \times K_2$, car sinon il existerait au moins une deuxième chaîne induite ayant tous ses sommets internes non adjacents à ceux de la chaîne x, y, z, t selon une des configurations suivantes :

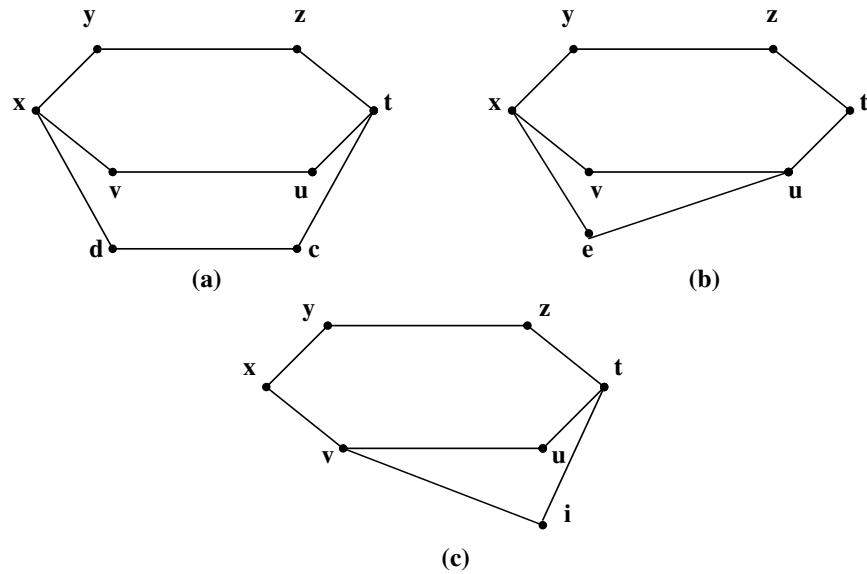


Figure 4.19 –

Alors il y aurait dans \mathbf{G} un deuxième 6-cycle induit contenant x, y, z, t , absurde.

Inversement, supposons que $\mathbf{G} \times K_2$ est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier. Alors toute chaîne induite de longueur trois reliant deux sommets distincts appartient à un unique 6-cycle induit. Par construction de $\mathbf{G} \times K_2$, il existe dans \mathbf{G} un 6-cycle induit isomorphe à celui de $\mathbf{G} \times K_2$.

Si dans \mathbf{G} , le 6-cycle induit qui contient cette chaîne de longueur trois n'est pas unique, ceci revient à l'existence de sous-graphes, dans \mathbf{G} , isomorphes à au moins une des configurations indiquées dans la figure 4.19 et donc dans $\mathbf{G} \times K_2$ aussi, absurde. □

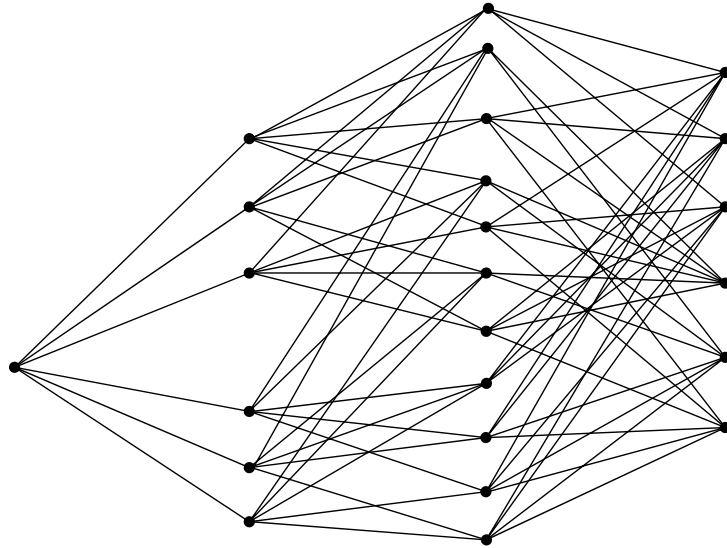


Figure 4.20 –

Le graphe de la Figure 4.20, qui est le graphe $K_3 \times Q_3$, n'est pas un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier. Cependant, nous avons :

Proposition 4.6 (Kahoul et Berrachedi [23]). *Si \mathbf{G} et \mathbf{H} sont deux graphes [3, 1, 6]-cycle-induit régulier, sans triangle, alors le graphe $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ est un graphe [3, 1, 6]-cycle-induit régulier.*

Démonstration. Soient \mathbf{G} et \mathbf{H} deux graphes [3,1,6]-cycle-induit réguliers et sans triangle. On a $V(\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = V' \times V''$ avec $V' = V(\mathbf{G})$ et $V'' = V(\mathbf{H})$.

Soit $I = x, y, z, t$ une chaîne induite de longueur trois reliant deux sommets distincts x et t dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ où $x = (x', x'')$, $y = (y', y'')$, $z = (z', z'')$ et $t = (t', t'')$. Par construction de $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ et du fait que \mathbf{G} et \mathbf{H} soient sans triangle ($x' \neq t'$ et $x'' \neq t''$), on trouve dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) la chaîne induite de longueur trois $I' = x', y', z', t'$ (resp. $I'' = x'', y'', z'', t''$) avec des extrémités distinctes (cité plus haut).

Comme \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) est un graphe [3,1,6]-cycle-induit régulier, il existe u', v' (resp. u'', v'') dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) tels qu'il existe un unique 6-cycle induit dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) $\beta' = x', y', z', t', u', v', x'$ (resp. $\beta'' = x'', y'', z'', t'', u'', v'', x''$) contenant la chaîne I' (resp. I'').

Donc il existe dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ un 6-cycle induit $\beta = x, y, z, t, u, v, x$, qui contient la chaîne I , où $u = (u', u'')$ et $v = (v', v'')$. β est l'unique 6-cycle induit dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$ qui

contient I . Car sinon, il existe deux sommets $a = (a', a'')$ et $b = (b', b'')$ dans $\mathbf{G} \times \mathbf{H}$, tels que : xb, ba, at soient dans $E(\mathbf{G} \times \mathbf{H})$ (a (resp. b) peut être éventuellement u (resp. v) mais pas $a = u$ et $b = v$ simultanément). Ainsi il existe dans \mathbf{G} (resp. \mathbf{H}) un deuxième 6-cycle induit $\rho' = x', y', z', t', a', b', x'$ (resp. $\rho'' = x'', y'', z'', t'', a'', b'', x''$) distinct de ρ' (resp. ρ''), absurde. \square

CONCLUSION

Conclusion

Lors de l'élaboration de ce manuscrit, nous avons commencé par la donnée des rappels de définitions d'éléments de la théorie de graphes, nécessaires à la compréhension des notions utilisées.

Par la suite, nous avons proposé un essentiel à propos de graphes généralisant l'hypercube, dits *type hypercube*. Nous avons présenté quelques propriétés et caractérisations connues sur l'hypercube dans ces classes de graphes.

Parmi ces dernières, nous trouvons le graphe induit par les deux niveaux centraux de l'hypercube de degré impair Q_{2k+1} , noté H_k , qui est conjecturé par Havel d'être hamiltonien. Conjecture ouverte à ce-jour. En examinant de plus près ce graphe et plus généralement le graphe induit par deux niveaux consécutifs d'un hypercube, on se rend compte qu'il figure parmi la classe des graphes dits *cycles réguliers*, introduite par Mollard [34] et plus précisément les graphes [3,1,6]-cycle réguliers.

Les travaux de Mollard [34] sur cette dernière, lui ont permis de caractériser H_k comme étant le plus grand graphes [3,1,6]-cycle régulier en ordre, pour un degré donné. De notre part, nous montrons que H_k est le plus grand graphe [3,1,6]-cycle régulier en diamètre, pour un degré donné.

Par ailleurs, la classe de graphes cycles réguliers n'est autre qu'une généralisation des $(0,\lambda)$ -graphes, définis par Mulder [37]. Sur ce, nous avons étudié le voisinage commun d'une paire quelconque de sommets d'un graphe [3,1,6]-cycle régulier et nous avons montré que chaque paire de ses sommets possède trois ou un unique ou aucun voisin en commun.

D'autres caractérisations de graphes particuliers tels que le graphe biparti complet $K_{3,3}$, sont proposées. De plus, nous avons pu interdire certaine configuration dans les graphes [3,1,6]-cycles réguliers.

Au dernier chapitre, nous exposons des travaux relatifs à une classe que nous définissons à titre généralisatrice de la classe des graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Elle est appelée la classe des *graphes $[3,1,6]$ -cycle-induit réguliers*. Elle compte l'hypercube parmi ses graphes, en outre le sous-graphes induit par deux niveaux consécutifs de l'hypercube. ces derniers, pour le cas particulier H_k sont caractérisés dans cette nouvelle famille comme étant les plus grand en ordre et diamètre, pour un degré donné.

Nous avons, de plus, étudié la stabilité des deux classes de graphes $[3,1,6]$ -cycles réguliers et $[3,1,6]$ -cycle-induit réguliers par rapport au produit catégoriel.

Comme perspectives, nous suggérons l'étude des graphes, à appeler $\{0,1,3\}$ -*graphes*, où chaque paire de sommets ont trois ou un unique ou aucun voisins commun. Cette classe de graphe contient strictement les arbres (graphes connexes sans cycle).

Est-ce en imposant certaines conditions (en moindres nombres), les graphes $[3,1,6]$ -cycle-induit réguliers auront la propriété de la constance du cardinal du voisinage commun ?

Nous proposons en plus la recherche, si elles existent, des conditions nécessaires pour la stabilité des classes de graphes $[3,1,6]$ -cycle réguliers et $[3,1,6]$ -cycle-induit régulier, par rapport au produit cartésien.

Bibliographie

- [1] C. Berge. *Graphs*. Dunod, Paris, 1982.
- [2] A. Berrachedi. *Etude d'une classe de graphes bipartis*. Thèse de Magistère, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 1985.
- [3] A. Berrachedi. *Sur quelques propriétés métriques de graphes de type hypercube*. thèse d'Etat, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 1997.
- [4] A. Berrachedi, I. Havel and H. M. Mulder. *Spherical and clockwise spherical graphs*. Czechoslovak Mathematical Journal, 53 (128), 295-309, 2003.
- [5] A. Berrachedi. *Une nouvelle caractérisation de l'hypercube*. 3^{ème} colloque Franco-Algérien de Recherche Opérationnelle, Alger mai 92.
- [6] A. Berrachedi and M. Mollard. *On tow problems about $(0,2)$ -graphs and interval regular graphs*. Revue ARS Combinatoria, 49 (1998), 303–309.
- [7] A. Berrachedi and N. Kahoul. *Graphs with Special Induced 6-Cycle*. Actes du colloque sur l'optimisation et les systèmes d'information COSI'04, Tizi-ouzou, Algérie, 226-235, Juin 2004.
- [8] A. Berrachedi and N. Kahoul. *Special cyclic construction in some particular graphs*. Acte de Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information COSI'06, Alger-Algérie, juin 2006.
- [9] A. Berrachedi and N. Kahoul. *An other characterization of an induced subgraph of an hypercube*. Colloque International sur l'Optimisation et les Systèmes d'Information COSI'07, Oran-Algérie, juin 2007.
- [10] N. Biggs. *Algebraic graph theory*. Cambridge University Press, Londres, 1974.

-
- [11] A. J. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with applications*. Springer, 1973.
- [12] G. Burosch, I. Havel, J-M. Laborde. *Distance Monotone Graphs and a New Characterization of Hypercubes*. Discrete Mathematics, 110, 9–16, 1992.
- [13] I.J. Dejter, J. Quintana. *On an Extension of a Conjecture of I. Havel*. Partially supported by Experimental Program to Stimulate Competitive Research (EPSCOR-NSF) of Puerto Rico, Computational Mathematics Component and by the University of Puerto Rico.
- [14] I.J Dejter, J. Cordova, J.A. Quintana. *Two Hamilton Cycles in Bipartite Reflective Kneser Graphs*. Discrete Mathematics, 72, 63–70, 1988.
- [15] R. J. Douglas. *Bounds on the Numbre of Hamiltonian Circuits in the n -Cube*. Discrete Mathematics, 17 (1977), 143–146.
- [16] D. Duffus, B. Sands, R. Woodrow. *Lexicographic Matchings Cannot Form Hamiltonian Cycles*. Kluwer Academic Publishers, 5, 149–161, 1988.
- [17] S. Foldes. *A characterization of hypercubes*. Discrete Mathematics (17), 155-159, 1977.
- [18] F. Harary, J.P. Hayes, H-J. Wu. *A Survey of the Theory of Hypercube Graphs*. Comput. Math. Applic. (15) No. 4, 277–289, 1998.
- [19] I. Havel. *Semipaths in directed cubes*. Graphs and Other Combinatorial Topics, B. 59 (Teubner zum Mathematik, Teubner, Leipzig) (3^o Symposium Tchecoslovaque de Th. Graphes, Nov 1982).
- [20] I. Havel. *On Hamiltonian Circuits and Spanning Trees of Hypercubes*. Casopis pro pestovani matematiky, roc.109, Praha, 1984.
- [21] P. Horak, L. Stacho. *A Lower bound on the Number of Hamiltonian Cycles*. Discrete Mathematics, 222, 275–280, 2000.
- [22] N. Kahoul. *Sur une propriété de régularité cyclique dans les graphes*. Thèse de Magistère, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, 2002.
- [23] N.Kahoul and A.Berrachedi. *Cycle Regularity and Hypercubes*. Soumission à Discrete Mathematics 2005 (Special Issue of the 20th British Combinatorial conference).

- [24] N.Kahoul and A.Berrachedi. *Cycle-Regular Graphs of $(0,\lambda)$ -Graph Type*. Sous-press pour Discrete Mathematics 2008. (Visible sur <http://dx.doi.org/10.1016/j.disc.2008.09.022>).
- [25] N. Kahoul and A. Berrachedi. *A Study of $(0,\lambda)$ -Graph Type*. Colloque International sur l'Optimisation et les Systmes d'Information COSI'09, Annaba-Algérie, 25-27 mai 2009.
- [26] M. Kobeissi. *Plongement de graphes dans l'hypercube*. PhD thesis, Université Grenoble I, 2001.
- [27] J. M. Laborde and S. P. Rao Hebbare. *Another Characterization of Hypercubes*. Discrete Mathematics (39), 161-166, 1982.
- [28] L.Lovasz. British combinatorial conference, Southampton, Juillet 1983.
- [29] R.M.Madani. *Sur l'existence de $0,2$ -graphes d'ordre 18*, Rapport de Recherche RR 887-I-, Institut Imag, Grenoble, Avril 1992.
- [30] M.Madani. *Characterization of Laborde-Mulder graphs (Extended odd graphs)*. Discrete Mathematics (150), 293-301, 1996.
- [31] M. Mollard. *Cycle-regular graphs*. Discrete Mathematics (89), 29-41, 1991.
- [32] M. Mollard. *Interval-regularity does not lead to interval monotonicity*. Discrete Mathematics. 118, 233-237, 1993.
- [33] M. Mollard. *Les invariants du n -cube*. Doctorat de troisième cycle, Université Scientifique et Médicale de Grenoble et l'Institut National Polytechnique de Université Joseph Fourier, 1981.
- [34] M. Mollard. *Quelques problèmes combinatoires sur l'hypercube et les graphes de Hamming*. Thèse d'Etat , Université Joseph Fourier, 1989.
- [35] M.Mollard. *Table of $0,2$ -graphs of order less than 32*, Rapport de Reherche RR 939-M-, Institut Imag, Grenoble, Juin 1994.
- [36] H. M. Mulder. *$(0, \lambda)$ -graphs and n -cubes*. Discrete Mathematics (28), 179-188, 1979.
- [37] H. M. Mulder. *The interval function of a graph*. Mathematical Centrum, Amsterdam, 1980.

- [38] H.M.Mulder. *Interval-regular graphs*. Discrete Mathematics (41), 253-269, 1982.
- [39] P. Van den Cruyce. A characterization of the n-cube by convex subgraphs. Discrete Mthematics (41), 109-110, 1982.