N° d'ordre :

République Algérienne Démocratique Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des Mathématiques

Mémoire Présenté pour l'obtention du diplôme de

M A G I S T E R

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : **Probabilités et Statistiques**

Par

Akliouat Kamel

Premier instant de sortie dans les équations différentielles stochastiques

Soutenue publiquement le 4 Mars, salle Hassani à 13h

Mr A. Aissani	Professeur	USTHB	Président
Mr K. Boukhetala	Professeur	USTHB	Rapporteur
Mr M. Ahmed-Nacer	Professeur	USTHB	Examinateur
Mr M. Moulai	Maître de Conférence	USTHB	Examinateur
Mr R. Messaci	Chargé de Cours	USTHB	Examinateur

Dédicaces

A ma mère

A mon père

A ma femme qui m'a soutenu durant les moments les plus difficiles

A mes frères et sœurs

A mes deux adorables enfants

Meriem-Manel et Akram-Abdelfettah

Remerciements

A Mr K. Boukhatala professeur à la faculté des mathématiques USTHB, J'exprime toute ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su me guider durant les travaux de recherches. Je le remercie vivement pour son aide, son assistance et sa disponibilité

Je remercie également Mr A. Aissani Professeur à la faculté des mathématiques USTHB, qui a bien voulu me rendre honneur en acceptant de présider le jury

Mes sincères remerciements vont aussi à Mr M. Moulai, maître de conférence, Mr M. Ahmed Nacer, professeur et Mr R. Messaci, chargé de cours et Mr M. Abid, maître de conférence, d'avoir accepter d'examiner ce travail

Table des matières

INTRODUCTION

L'étude des équations différentielles stochastiques s'est beaucoup développée ces dernières années, c'est un domaine plein de perspectives et de recherche.

Les équations différentielles stochastiques ont un domaine d'applications dans les finances et les assurances. On peut les introduises notamment dans les modèles d'évolution d'actifs et des options.

Il est à noter que les solutions des équations différentielles stochastiques qu'on va étudier sont des processus markoviens à valeurs dans un espace euclidien $\mathbb{R}^n$, on se penchera sur les processus de diffusion qui constituent la plus importante classe. Comme leur nom l'indique, les processus de diffusion peuvent servir de modèles probabilistes à la diffusion.

Cependant il faut savoir que le processus du mouvement brownien est utilisé comme modèle de diffusion en milieu homogène. En reprenant une construction analogue en milieu non homogène on est conduit à la notion de processus générale de diffusion.

Les modèles de diffusions en milieu non homogène sont représentés par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} dX(t) = a(t,X(t))dt + b(t,X(t))dw(t) \\ X(0) = x \end{cases} \qquad (1)$$

ou $w(t)$ est un $\mathcal{F}_t$ –mouvement brownien standard.

Noter que l'équation (1) ne peut être interprétée de façon stricte.

Comme $w(t)$ n'a pas de dérivée, la définition usuelle de la différentielle n'a pas de sens.

C'est le mathématicien K- Itô qui a donné un sens à ces équations, et a montrer l'éxistence et l'unicité de la solution de l'équation (1) sous certaines conditions de régularité des fonctions $a(t,x)$ et $b(t,x)$, appelées respectivement coefficient de dérive et coefficient de diffusion, et cette solution s'écrit :

$$X(t) = x + \int_0^t a(t,X(t))dt + \int_0^t b(t,X(t))dw(t)$$

Et cela après avoir définit $\int_0^t b(t,X(t))dw(t)$ qu'on appelle intégrale stochastique d'Itô.

Cette thèse est divisée en deux parties. La première partie est consacrée à l'étude théorique des équations différentielles stochastiques.

⋆ Dans la deuxième section nous avons définis l'intégrale stochastique de Itô :

$$\int_a^b f(t,\omega)\ dw(t)$$

pour des fonctions aléatoires $f(t,\omega) \in \mathcal{H}_2[a,b]$.

$\mathcal{H}_2[a,b]$ étant l'espace des fonctions aléatoires mesurables pour $(t,\omega) \in [a,b] \times \Omega$ telle que:

- $f(t,\omega)$ mesurable par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$ pour tout $t \in [a,b]$
- $\int_a^b |f(t)|^2 dt \prec \infty \quad p.p.s$

Et $w(t)$ est un $\mathcal{F}_t$ – mouvement brownien standard.

Par ailleurs voici les principaux points de la $2^{iéme}$ section

• Quelques propriétés de l'intégrale stochastique de Itô

• Le processus $X(t) = \int_a^t f(s)\ dw(s)$ est une martingale continue si $f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $\int_a^b E(f(t)^2/\mathcal{F}_a)dt \prec \infty$

• La formule d'Itô qui est une formule qui permet de faire des transformations sur l'équation différentielle stochastique.

⋆ Les principaux points étudier dans la troisième section sont :

• Le théorème d'Itô d'existence et d'unicité des solutions de l'équation différentielle stochastique

• Sous les conditions du théorème d'existence et d'unicité, le processus $X_{t,x}(s)$ solution de l'équation différentielle stochastique, qui démarre du point x à l'instant t, est un processus Markovien

• Définition d'un processus de diffusion indépendamment de l'équation différentielle stochastique

• Un théorème qui permet la construction d'un processus de diffusion à partir d'une équation différentielle stochastique

• Nouvelle déduction de l'équation inverse de Kolmogorov pour processus de diffusion

⋆ Dans la quatrième section nous nous sommes intéressé aux problèmes de sortie dans les équations différentielles stochastiques. Ainsi nous avons étudié le problème pour les processus homogènes et les processus non homogènes.

Dans cette section nous avons définit l'instant de première sortie d'un processus de diffusion d'un domaine connexe D, qu'on appel τ.

• Nous avons déterminés les répartitions de τ et du lieu de sortie $X(\tau)$

• Nous avons donnés deux exemples de temps de sortie pour processus de diffusion homogènes.

1^{ére}exemple: instant de première sortie d'un mouvement brownien d'un intervalle $]\alpha,\beta[$

2^{ieme}exemple:instant de première sortie d'un mouvement brownien bidimensionnel d'un disque de rayon d.

La deuxiéme partie de cette thèse est consacrée à une application à l'électronique.

Dans la section 5 et 6 nous avons donné une petite introduction à l'électronique et nous avons défini la jonction PN.

Dans la section 7 nous avons construit un modèle mathématique régissant le potentiel $X(t)$ entre les deux pôles de la jonction PN

$$\begin{cases} dX(t) = (1-\exp X(t))\,dt + dw(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

Ensuite nous avons calculé analytiquement l'éspérance du premier instant de sortie du processus $X(t)$ de l'intervalle $]\alpha,\beta[$; $E\tau_x$, ainsi que la répartition du lieu de sortie $X(\tau_x)$.

En dernier lieu nous avons utilisé une méthode statistique basée sur des simulations pour calculer $E\tau_x$ et estimer la répartition de τ_x

Première partie: EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

1 PRELIMINAIRES

1.1 PROCESSUS MARKOVIEN

1.1.1 Définition [8]

Soient $X(t)$ un processus stochastique et $p(s,x,t,A)$ une fonction non négative définie pour $0 \leq s \prec t \prec \infty$, on dit que $p(s,x,t,A)$ est la probabilité de transition du processus markovien $X(t)$ si $p(s,x,t,A)$ désigne la probabilité de l'événement ($X(t) \in A$ sachant que $X(s) = x$), $A \in \boldsymbol{B}_n$ borelien de $\mathbb{R}^n$ et $x \in \mathbb{R}^n$ et si les conditions suivantes sont réalisées

i) $p(s,x,t,A)$ est borélienne en x pour s,t,A fixées

ii) $p(s,x,t,A)$ est une mesure de probabilité en A pour s,x,t fixées

iii) $p(s,x,t,A) = \int_{\mathbb{R}^n} p(s,x,\lambda,dy)\, p(\lambda,y,t,A), \qquad s \prec \lambda \prec t$

1.2 Mouvement brownien

1.2.1 Définition

On appelle mouvement brownien un processus stochastique $X(t)$, $t \geq 0$ à valeurs réelles, qui est un processus à accroissements indépendants et stationnaires dont les trajectoires sont continues ce qui signifie:

i) la fonction : $s \to X_s(\omega)$ est continue $p.p.s$

ii) si $s \leq t,\ X_t - X_s$ independant de la tribu $\mathcal{F}_s = \sigma(X(u), u \leq s)$

iii) si $s \leq t,$ la loi de $X_t - X_s$ est identique à celle $X_{t-s} - X_0$

1.3 Théoreme [9]

Si $X(t),\ t \geq 0$ est un mouvement brownien alors $X_t - X_s$ est une variable aléatoire gaussienne de moyenne $r(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s),\ r$ et σ étant des constantes réelles

1.4 Remarque

Un mouvement brownien est dit standard si :

a) $X(0) = 0\ \ p.p.s$

b) $E(X(0)) = 0$

c) $E(X^2(t)) = t$

1.5 Définition

On appelle $\mathcal{F}_t$ – mouvement brownien, un processus stochastique à valeurs réelles et à trajectoires continues qui vérifie

i) $\forall\ t \geq 0,\ X(t)$ est $\mathcal{F}_t$ – mesurable

ii) si $s \leq t,\ X(t) - X(s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$

iii) si $s \leq t,\ X(t) - X(s)$ a la même loi que $X(t-s) - X(0)$

1.6 Simulation d’un mouvement brownien

En utilisant le logiciel [ANSEDS] développé par [K.Boukhetala et K.Boudali], (dans le cadre de la présentation de la thèse de cette derniére), voir [4]. On peut simuler un mouvement brownien. La figure1 fait apparaître un flot de trajectoires du mouvement brownien standard sur l’intervalle de temps [0,1] pour différentes valeurs du pas Δt

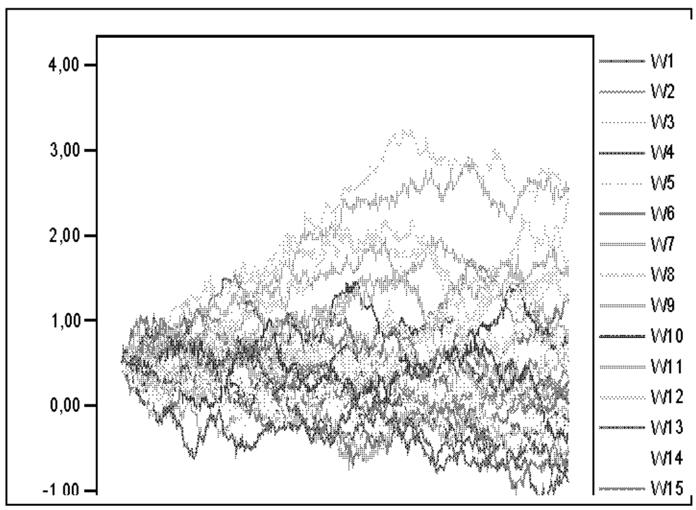


Fig 1
Flot de trajectoires d'un mouvement brownien standard

2 INTEGRALE STOCHASTIQUE DE ITO

Soit $w(t),\ t \geq 0$ un $\mathcal{F}_t$ – mouvement brownien standard sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, (\mathcal{F}_t, t \geq 0), P)$. soit $\mathcal{H}_2[a,b]$ ensemble des fonctions $f(t) = f(t,\omega)$ mesurable en (t,ω) définies pour $t \in [a,b], \omega \in \Omega$ telle que

a) $f(t)$ mesurable par rapport à $\mathcal{F}_t\ \forall t \in [a,b]$

b) l'intégrale $\int_a^b |f(t)|^2 dt \prec \infty \quad P.p.s$

Pour toutes les fonctions de $\mathcal{H}_2[a,b]$ on définit plus bas l'intégrale $\int_a^b f(t) dw(t)$

2.1 Intégrale stochastique d'Itô d'une fonction étagée

2.1.1 Définition

Une fonction aléatoire $f(t)$ est dite étagée s'il existe une partition de $[a,b]$, $a = t_0 \prec t_1 \prec \ldots \prec t_r = b$ telle que $f(t) = f(t_i)$ pour $t \in [t_i, t_{i+1}[$ $i = 0, \ldots r$

2.1.2 Définition

Soit $f(t)$ une fonction aléatoire étagée, $f(t) = f(t_i) \quad t \in [t_i, t_{i+1}[$ ou $a = t_0 \prec \ldots \prec t_r = b$ partition de $[a,b]$ on définit l'intégrale stochastique de $f(t)$:

par : $\int_a^b f(t)\ dw(t) = \sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)[w(t_{k+1}) - w(t_k)]$

Ou $w(t)$ est un mouvement brownien standard

2.1.3 Propriétés

a) Si $E(|f(t)|/\mathcal{F}_a) \prec \infty$ pour $t \in [a,b]$ alors:

$$E\left(\int_a^b f(t) dw(t)/\mathcal{F}_a\right) = 0 \qquad p.s \quad (21)$$

b) Si $E(|f(t)|^2/\mathcal{F}_a) \prec \infty$ alors:

$$E((\int_a^b f(t)\ dw(t))^2/\mathcal{F}_a) = \int_a^b E(f^2(t)/\mathcal{F}_a)\ dt \quad p.s \qquad (22)$$

Preuve:

a) $E(\int_a^b (f(t)\ dw(t))/\mathcal{F}_a) = E(\sum_{k=0}^{r-1} f(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k))/\mathcal{F}_a) =$
$E(\sum_{k=0}^{r-1} E(f(t_k)(w(t_{k+1}) - w(t_k)))/\mathcal{F}_{t_k})/\mathcal{F}_a = 0$

car w(t) mouvement brownien standard et $f(t_k)$ est $\mathcal{F}_{t_k}$ –mesurable

$$E((\int_a^b f(t)dw(t))^2/\mathcal{F}_a) =$$
$$\sum_{k=0}^{r-1} E(f(t_k)^2(w(t_{k+1}) - w(t_k))^2/\mathcal{F}_a +$$
$$2\sum_{j<k} E(f(t_j)f(t_k)(w(t_{j+1}) - w(t_j))(w(t_{k+1}) - w(t_k)))/\mathcal{F}_a$$
$$= \sum_{k=0}^{r-1} E(f(t_k)^2 E(w(t_{k+1}) - w(t_k))^2/\mathcal{F}_{t_k}/\mathcal{F}_a +$$
$$2\sum_{j<k} E(f(t_j)f(t_k)(w(t_{j+1} - w(t_j))E(w(t_{k+1}) - w(t_k)/\mathcal{F}_{t_k})/\mathcal{F}_a$$

Puisque les accroissements $w(t_k) - w(t_j)$ pour $k \neq j$ sont indépendants, alors

$$E((\int_a^b f(t)dw(t))^2/\mathcal{F}_a) = \sum_{k=0}^{r-1} E(f(t_k)^2/\mathcal{F}_a)(t_{k+1} - t_k)$$
$$= \int_a^b E(f(t)^2/\mathcal{F}_a)\ dt \bullet$$

2.1.4 Lemme [9]

Si $\varphi(t)$ fonction étagée alors:

$$P\{\left|\int_a^b \varphi(t)dw(t)\right| \succ \epsilon\} \leq \frac{N}{\epsilon^2} + P\{\int_a^b |\varphi(t)|^2 dt \succ N\} \quad \forall N \succ 0 \ \ \forall \varepsilon \succ 0 \quad (23)$$

Preuve:

$$\text{Soit } \varphi_N(t) = \left\{ \begin{array}{c} \varphi(t) \text{ si } t_k \leq t \prec t_{k+1} \text{ et } \sum_{j=0}^{k} \varphi^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) \leq N \\ 0 \text{ si } t_k \leq t \prec t_{k+1} \text{ et } \sum_{j=0}^{k} \varphi^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) \succ N \end{array} \right\}$$

ou $\varphi(t) = \varphi(t_i)$ si $t \in [t_i, t_{i+1}[\quad a = t_0 \prec t_1 \prec \ldots \prec t_r = b$

Alors $\varphi_N(t) \in L^2[a,b]$

$$\int_a^b \varphi_N^2(t)\ dt = \sum_{j=0}^{p} \varphi^2(t_j)(t_{j+1} - t_j)$$

p est choisit de telle maniére que

$$\sum_{j=0}^{p} f^2(t_j)(t_{j+1} - t_j) \leq N \ , p \leq r - 1 \quad \text{d'ou}$$

$E(\int_a^b \varphi_N^2(t)\,dt) \leq N$ de plus $\varphi(t) - \varphi_N(t) = 0\ \forall t \in [a,b]$ si $\int_a^b f^2(t)\,dt \leq N$

Par conséquent

$$P\left\{\left|\int_a^b \varphi(t)dw(t)\right| \succ \epsilon\right\} \leq P\left\{\left|\int_a^b \varphi_N(t)\,dw(t)\right| \succ \epsilon\right\} + P\left\{\int_a^b \varphi^2(t)\,dt \succ N\right\}$$
$$\leq \frac{E(\int_a^b \varphi_N(t)\,dw(t))^2}{\epsilon^2} + P\left\{\int_a^b \varphi^2(t)\,dt \succ N\right\}$$
$$\leq \frac{N}{\epsilon^2} + P\left\{\int_a^b \varphi^2(t)\,dt \succ N\right\} \cdot$$

2.2 Intégrale stochastique d'Itô pour une fonction de $\mathcal{H}_2[a,b]$

2.2.1 Lemme [8]

Soit $f \in \mathcal{H}_2[a,b]$ alors il existe une suite de fonctions étagées $f_n \in \mathcal{H}_2[a,b]$ tel que:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b |f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0 \quad p.s$$

2.2.2 Construction [9]

Soit f_n une suite de fonctions étagées telle que

$$\int_a^b [f(t) - f_n(t)]^2 dt \to 0 \quad p.s$$

La suite f_n existe d'aprés le lemme (2.2.1), et elle est de Cauchy, alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim\limits_{n,m\to\infty} P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt \succ \epsilon\right\} = 0 \\ \end{array} \right. \quad \forall \epsilon \succ 0$$

en utilisant (23) on peut ecrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim P\left\{\left|\int_a^b f_n(t)\,dw(t) - \int_a^b f_m(t)\,dw(t)\right| \succ \delta\right\} \leq \frac{\epsilon}{\delta^2} + \lim\limits_{n,m\to\infty} P\left\{\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2\,dt \succ \epsilon\right\} \\ \end{array} \right.$$

$\forall \epsilon \succ 0, \quad \forall \delta \succ 0$

puisque ϵ est arbitraire pour tout $\delta \succ 0$

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,m\to\infty} P\left\{\left|\int_a^b f_n(t)\,dw(t) - \int_a^b f_m(t)\,dw(t)\right|^2 \succ \delta\right\} = 0 \\ \end{cases}$$

donc la suite de variables aléatoires $\int_a^b f_n(t)\,dw(t)$ est de Cauchy donc elle converge stochastiquement vers une limite qui est indépendante du choix de f_n sous réserve que

$$\int_a^b |f_n(t) - f(t)|^2\,dt \to 0$$

posons:

$$\begin{cases} \lim\limits_{n,\to\infty} P\left\{\left|\int_a^b f_n(t)\,dw(t) - \int_a^b f(t)\,dw(t)\right| \succ \epsilon\right\} = 0 \\ \end{cases}$$

qu'on notera :

$$\int_a^b f(t)\,dw(t) = P - \lim \int_a^b f_n(t)\,dw(t)$$

cette limite s'appelle intégrale stochastique de itô de la fonction $f(t)$, cette intégrale est définie pour toutes les fonctions $f \in \mathcal{H}_2[a,b]$ car on peut construire une suite de fonctions étagées $f_n \in \mathcal{H}_2[a,b]$ telle que

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} \int_a^b (f_n(t) - f(t)\,dt = 0 \qquad p.s \\ \end{cases}$$

2.2.3 Propriétés

Soient $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, $f_1(t), f_2(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $a \prec c \prec b$

a) $\int_a^c f_1(t)\,dw(t) + \int_c^b f_1(t)\,dw(t) = \int_a^b f_1(t)\,dw(t)$

b) $\int_a^b (\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t))\,dw(t) = \lambda_1 \int_a^b f_1(t)\,dw(t) + \lambda_2 \int_a^b f_2(t)\,dw(t)$

c) si $\int_a^b E(|f_1(t)|^2/\mathcal{F}_a)\,dt \prec \infty \quad p.s$ alors :

$$E\left(\int_a^b f(t)\,dw(t)/\mathcal{F}_a\right) = 0 \quad \mathrm{mod}(P) \quad \text{et}$$

$$E\left(\left(\int_a^b f(t)\,dw(t)\right)^2/\mathcal{F}_a\right) = \int_a^b E(|f(t)|^2/\mathcal{F}_a)\,dt \quad \mathrm{mod}(P)$$

Preuve:

c) Soit une suite de fonctions étagées f_n telle que $E(\int_a^b |f_n(t)|^2 dt \prec \infty$

on admet qu'il existe une fonction f_1 pour laquelle

$$\begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} E\int_a^b |f_n(t) - f_1(t)|^2 dt = 0 \\ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n \to \infty} E\int_a^b f_n^2(t)\, dt = E\int_a^b f_1^2(t) dt \\ \end{cases}$$ et d'après (22) on a

$E\left|\int_a^b f_n(t)\, dw(t) - \int_a^b f_m(t)\, dw(t)\right|^2 = E\int_a^b |f_n(t) - f_m(t)|^2 dt \to 0$ quand $n, m \to \infty$

On a aussi

$$\int_a^b f_n(t)\, dw(t) \to \int_a^b f_1(t)\, dw(t) \text{ quand } n \to \infty \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Donc en particulier

$$E(\int_a^b f_n(t)\, dw(t)/\mathcal{F}_a) \to E(\int_a^b f_1(t)\, dw(t)/\mathcal{F}_a) = 0 \text{ quand } n \to \infty$$

et

$$E(\left|\int_a^b f_n(t)\, dw(t)\right|^2/\mathcal{F}_a) \to E(\left|\int_a^b f_1(t)\, dw(t)\right|^2/\mathcal{F}_a) \text{ quand } n \to \infty$$

$$E\int_a^b (f_n^2(t)/\mathcal{F}_a) dt \to E\int_a^b (f_1^2(t)/\mathcal{F}_a) dt \quad \text{quand } n \to \infty \bullet$$

2.3 Intégrale d'Itô

2.3.1 Définition

On note $X(t) = \int_a^t f(s)\, dw(s) \qquad a \prec t \prec b$

Si $f(s) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ alors $f(s)\, \mathbb{I}_{\{s<t\}} \in \mathcal{H}_2[a,b] \quad \forall t \in [a,b]$

On définit l'intégrale indéfinie de itô:

$$\int_a^t f(s)\, dw(s) = \int_a^b f(s)\, \mathbb{I}_{\{s<t\}} dw(s)$$

2.3.2 Théorème [8]

Si $f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $\int_a^b E(f^2(t)/\mathcal{F}_a)dt \prec \infty$ alors:

$$X(t) = \int_a^t f(s)\, dw(s) \qquad \text{est une martingale}$$

Preuve:

Soit $a = t_0 \prec t_1 \prec \ldots \prec t_n = b$ une partition de $[a,b]$, posons:

$$X_k = \int_a^{t_k} f(s)\, dw(s)$$

pour $k \prec l$, $E(X_l - X_k/\mathcal{F}_a) = E\int_{t_k}^{t_l} f(s)\, dw(s) = 0$

donc

$$E(X_l/\mathcal{F}_{t_k}) = E(X_k/\mathcal{F}_{t_k}) = X_k$$

car X_k est $\mathcal{F}_{t_k}$ –mesurable •

2.3.3 Propriétés

Si $\int_a^b E(|f(s)|^2/\mathcal{F}_a)\, ds \prec \infty$ alors:

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s)\right| \succ c/\mathcal{F}_a\right\} \leq \frac{1}{c^2}\int_a^b (E|f(s)|^2/\mathcal{F}_a)\, ds \quad (24)$$

Preuve:

On a montré que $X_k = \int_a^{t_k} f(s)\, dw(s)$ est une martingale donc $(X_k)^2$ est une submartingale,et d'après une propriété des martingales

$$P\{\sup_{0\leq k\leq n}|X_k| \succ c/\mathcal{F}_a\} \leq \frac{1}{c^2}E(X_k^2/\mathcal{F}_a)$$

donc

$$P\left\{\sup_{a\leq t_k\leq b}\left|\int_a^{t_k} f(s)\, dw(s)\right| \succ c/\mathcal{F}_a\right\} \leq \frac{1}{c^2}\int_a^b E((f(s))^2/\mathcal{F}_a)ds$$

d'ou l'on déduit le résultat car le processus $\int_a^t f(s)\, dw(s)$ est séparable

•

2.3.4 Théorème [8]

Le processus $\int_a^t f(s)\, dw(s)$ est continu

Preuve:

Premier cas: $f \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $\int_a^b E|f(s)|^2 ds \prec \infty$

il existe une suite de fonctions étagées $f_n(t)$ telle que

$\lim_{n\to\infty} \int_a^b E|f(t) - f_n(t)|^2 dt = 0$ d'après la propriété (24)

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s) - \int_a^t f_n(s)\, dw(s)\right| \succ \epsilon\right\} \leq \frac{1}{\epsilon^2}\int_a^b E|f(s) - f_n(s)|^2 ds$$

On peut choisir $\epsilon = \frac{1}{2^k}$ et $n = \eta_k$ tel que

$$P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s) - \int_a^t f_{\eta_k}(s)\, dw(s)\right| \succ \frac{1}{2^k}\right\} \leq \frac{1}{k^2}$$

En passant à la somme on a

$$\sum_{k=1}^{\infty} P\left\{\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s) - \int_a^t f_{\eta_k}(s)\, dw(s)\right| \succ \frac{1}{2^k}\right\} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \prec \infty$$

D'après le lemme de Borel -Cantelli à partir d'un certain rang η_k on a presque sûrement

$$\sup_{a\leq t\leq b}\left|\int_a^t f(s)\, dw(s) - \int_a^t f_{\eta_k}(s)\, dw(s)\right| \leq \frac{1}{2^k}$$

donc $\int_a^t f(s)\, dw(s)$ est presque sûrement limite uniforme d'une fonction continue, cette limite sera également continue •

Cas générale: $f \in \mathcal{H}_2[a,b]$

soit $\chi_N(z) = \begin{cases} 1 \text{ si } z \leq N \\ 0 \text{ si } z \succ N \end{cases} \quad \forall N \succ 0$

soit $f_N(t) = f(t)\ \chi_N(\int_a^b f^2(s) ds)$ alors:

$f_N(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $J_N(t) = \int_a^t f_N(s)\, dw(s)$ est un processus continu

soit $\Omega_N = \left\{\omega \text{ tel que} \int_a^b f^2(t) dt \prec N\right\}$

si $\omega \in \Omega_N$, $\quad f_N(t) = f_M(t)$ pour $a \leq t \leq b$ et $N \prec M$

par suite pour presque tout $\omega \in \Omega_N$ on a: $f_N(t) = f_M(t) \quad a \leq t \leq b$

soit $\hat{J}(t) = \lim_{m\to\infty} J_M(t)$ est continue pour $t \in [a,b]$

comme $\Omega_N \nearrow$ et $P(\Omega_N) \nearrow$ quand $N \to \infty$ donc $\hat{J}(t)$ est continu

$$P\left\{\int_a^t |f(s) - f_M(s)|^2 ds \succ 0\right\} = P\left\{\int_a^t f^2(s) ds \succ M\right\} \to 0 \text{ quand } M \to \infty$$

$$\int_a^t f(s)\, dw(s) = P - \lim_{M \to \infty} J_M(t)$$

donc $\int_a^t f(s)\, dw(s)$ est une version continue de $\hat{J}(t)$ •

2.4 Intégrale stochastique d'Itô avec bornes aléatoires

2.4.1 Définition

Soit τ un instant markovien par rapport aux tribus $\mathcal{F}_t$, $i.e$ $(\{\tau \succ t\} \in \mathcal{F}_t)$

Supposons que $\tau \in [a,b]$ presque sûrement, alors pour toute fonction $f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$, la fonction

$f(t)\mathbb{I}_{\{\tau > t\}} \in \mathcal{H}_2[a,b]$ car $\mathbb{I}_{\{\tau > t\}}$ est $\mathcal{F}_t$ –mesurable

On a par définition

$$\int_a^\tau f(t)\, dw(t) = \int_a^b f(t)\mathbb{I}_{\{\tau > t\}} dw(t)$$

2.4.2 Propriétés [9]

si $E(\int_a^b (f(t))^2 dt/\mathcal{F}_a) \prec \infty$, alors:

a) $E(\int_a^\tau f(t)\, dw(t)/\mathcal{F}_a) = 0 \quad p.s$ (25)

b) $E((\int_a^\tau f(t)\, dw(t))^2/\mathcal{F}_a) = E(\int_a^\tau (f(t))^2 dt/\mathcal{F}_a) \quad p.s$ (26)

2.4.3 Intégrale stochastique à deux bornes aléatoires

Soit $f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ si τ_1 et τ_2 sont deux instants markoviens par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$ tels que $a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b \ \ p.s$

Alors on poura définir

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\, dw(t) = \int_a^{\tau_2} f(t)\, dw(t) - \int_a^{\tau_1} f(t)\, dw(t)$$

2.4.3.1 Propriétés

Si $f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $\int_a^b E(f(t))^2 dt \prec \infty$

et soient τ_1 et τ_2 deux instants markoviens tels que $P\{a \leq \tau_1 \leq \tau_2 \leq b\} = 1$ alors:

a) $E\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\, dw(t) = 0 \quad p.s$ (27)

b) $E(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\, dw(t))^2 = E\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f(t))^2 dt \quad p.s$ (28)

Preuve:

a) Soit $\chi_i(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } t = \tau_i \\ 0 \text{ si } t \geq \tau_i \end{cases} \quad i = 1,2 \quad \chi_i(t)$ est $\mathcal{F}_t$ –mesurable

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t)\, dw(t) = \int_a^{\tau_2} f(t) dw(t) - \int_a^{\tau_2} f(t) dw(t)$$
$$= \int_a^b f(t)(\chi_2(t) - \chi_1(t)) dw(t)$$

$\chi_i(t) f(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et $\int_a^b E\chi_i^2(t)(f(t)^2 dt \leq \int_a^b E(f(t))^2 dt \prec \infty \qquad i = 1,2$

Donc

$$E\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dw(t) = E\int_a^b f(t)(\chi_2(t) - \chi_1(t)) dw(t) = 0$$

b) $E(\int_{\tau_1}^{\tau_2} f(t) dw(t))^2) = E\left\{\int_a^b f(t)(\chi_2(t) - \chi_1(t)) dw(t)\right\}^2$

$$= \int_a^b E\{(f(t))^2(\chi_2(t) - \chi_1(t))^2\} dt$$
$$= \int_a^b E\{(f(t))^2(\chi_2(t) - \chi_1(t))\} dt$$
$$= E\int_{\tau_1}^{\tau_2} (f(t))^2 dt \quad \bullet$$

2.5 Formule d'Itô

2.5.1 Processus d'Itô

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ espace probabilisé, $\mathcal{F}_t$ une filtration de $\mathcal{A}$ et $w(t)$ un $\mathcal{F}_t$ –mouvement brownien, on appelle processus d'Itô un processus $\xi(t),\ a \leq t \leq b$ à valeurs réelles tel que

$$\xi(t_2) = \xi(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a(s) ds + \int_{t_1}^{t_2} b(s)\, dw(s) \quad \forall\ a \leq t_1 \leq t_2 \leq b \quad p.p.s,$$

ou

_ $\xi(t_1)$ est $\mathcal{F}_{t_1}$ –mesurable

_ $a(t)$ et $b(t)$ sont des processus adaptés à $\mathcal{F}_t$, pour $a \leq t \leq b$

_ $\int_a^b |a(t)| dt \prec \infty \quad p.s$

_ $b(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$

On dira que $a(t)dt + b(t)dw(t)$ est *la différentielle stochastique* de $\xi(t)$ et on notera formellement

$$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$$

2.5.2 Formule d'itô [9]

Soit $\xi(t)$ un processus d'itô

$d\xi(t) = a(t)dt + b(t)dw(t)$

Soit $u(t,x)$ une fonction non aléatoire définie pour $t \in [a,b]$ et $x \in \mathbb{R}$ continue et possédant des dérivées continues

$u'_t(t,x)$, $u'_x(t,x)$ et $u''_{xx}(t,x)$

Alors le processus $\eta(t) = u(t,\xi(t))$ est un processus d'Itô et on a la formule suivante appellée *formule d'Itô*

$$d\eta(t) = \left[u'_t(t,\xi(t)) + u'_x(t,\xi(t))\, a(t) + \tfrac{1}{2} u''_{xx}(t,\xi(t))\, b^2(t) \right] dt + \left[u'_x(t,\xi(t))\, b(t) \right] dw(t)$$

2.5.3 Exemples

1- Si $\xi(t) = w(t)$ mouvement brownien standard alors on a $a(t) = 0$ et $b(t) = 1$ et $w(0) = 0$

et si $u(t,x) = f(x) = x^2$ d'aprés la formule d'Itô on a

$dw^2(t) = 2w(t)dw(t) + \frac{1}{2} 2dt$ on obtient

$$w^2(t) - t = 2\int_0^t w(s)\, dw(s)$$

Comme $E(\int_0^t w^2(s)ds) \prec \infty$, on retrouve le fait que $w^2(t) - t$ est une martingale •

2-Soit l'équation :

$$X(t) = x_0 + \int_0^t X(s)(\mu ds + \sigma dw(s))$$

qu'on écrit formellement

$$dX(t) = X(t)(\mu dt + \sigma dw(t))$$

Cela signifie que l'on cherche un processus adapté $X(t), t \geq 0$ tel que les intégrales

$\int_0^t X(s)ds$ et $\int_0^t X(s)dw(s)$ aient un sens et qui vérifient pour chaque t

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \mu X(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dw(s)$$

Faisons d'abord un calcul formel; posons $Y(t) = \log X(t)$, appliquons la formule d'Itô à la fonction $u(t,x) = f(x) = \log x$

(au moins formellement car $f(x)$ n'est pas de classe C^2)

On obtient

$$\log X(t) = \log x_0 + \int_0^t \frac{dX(s)}{X(s)} + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{X^2(s)}\sigma^2 X^2(s)ds$$

$$Y(t) = y_0 + \int_0^t (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})dt + \int_0^t \sigma dw(s)$$

$$= \log X(t) = \log x_0 + (\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})t + \sigma w(t)$$

Donc $X(t) = x_0 \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma w(t)\right\}$ est une solution de l'équation précédente

Vérifions cela rigoureusement

Posons $X(t) = u(t, w(t))$

ou $u(t,x) = x_0 \exp\left\{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma x\right\}$

La formule d'Itô donne

$$X(t) = u(t, w(t)) = u(0, w(0)) + \int_0^t u'_s(s, w(s))ds + \frac{1}{2}\int_0^t u''_{xx}(s, w(s))dw(s)$$

$$X(t) = x_{0+} \int_0^t X(s)(\mu - \tfrac{\sigma^2}{2})ds + \int_0^t X(s)\sigma dw(s) + \frac{1}{2}\int_0^t X(s)\sigma^2 ds$$

Finalement

$$X(t) = x_0 + \int_0^t X(s)(\mu ds + \sigma dw(s)) \bullet$$

Le processus $X(t)$ est appelé *processus de Black et Scholes*

2.6 Formule d'Itô multidimensionnelle

2.6.1 Définition

On appelle $\mathcal{F}_t$ –mouvement brownien p –dimensionnel un processus à valeurs dans $\mathbb{R}^p$, $w(t)$ adapté à $\mathcal{F}_t$, avec

$w(t) = (w_1(t), w_2(t), \ldots, w_p(t))$ ou les $(w_i(t))$ $t \geq 0$ sont des $\mathcal{F}_t$ –mouvements browniens standards indépendants

2.6.2 Définition

Soit $B(t)$ une fonction matricielle, $B(t) = [b_{i,j}(t)]$ $1 \leq i \leq n$ et $1 \leq j \leq p$ telle que $b_{i,j}(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$

On définit l'intégrale

$$\left(\int_a^b B(t)\, dw(t)\right)_i = \sum_{i=1}^p \int_a^b b_{i,j}(t)\, dw_j(t) \qquad i = 1, \ldots, n$$

C'est une fonction vectorielle donnée par la i^{eme} composante

2.6.3 Définition

Soit $w(t)$ un $\mathcal{F}_t$ –mouvement brownien p –dimensionnel, soit $f(t)$ une fonction vectorielle, $f(t) \in \mathbb{R}^p$

$f(t) = (f_1(t), f_2(t), \ldots, f_p(t))$ dont les composantes $f_j(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$, $1 \leq j \leq p$

pour $x \in \mathbb{R}^m$ on note, $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_m^2}$ alors on définit

$$\int_a^b \langle f(t),\, dw(t)\rangle = \sum_{k=1}^p \int_a^b f_k(t)\, dw_k(t)$$

ou $\langle\cdot\rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^p$

2.6.4 Propriétés [9]

Si $f(t) = (f_1(t), \ldots, f_p(t)) \in \mathbb{R}^p$ telle que $f_k(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ pour $k = 1, \ldots p$ et $E(\int_a^b |f(t)|^2 dt/\mathcal{F}_a) \prec \infty$ alors

a) $E(\int_a^b f(t)\ dw(t)/\mathcal{F}_a) = 0 \quad p.s$

b) $E(\left[\int_a^b f(t)\ dw(t)\right]^2/\mathcal{F}_a) = E(\int_a^b |f(t)|^2 dt/\mathcal{F}_a)\ \ p.s$ (30)

c) Si $B(t)$ fonction matricielle $B(t) = [b_{i,j}(t)]\ \ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq p$ telle que $b_{i,j}(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$ et si

$$E(\int_a^b trB(t)B^\star(t)\ dt/\mathcal{F}_a) \prec \infty$$

Alors:

$$E(\left|\int_a^b B(t)\ dw(t)\right|^2/\mathcal{F}_a) = E(\int_a^b trB(t)B^\star(t)\ dt/\mathcal{F}_a) \quad p.s$$

d) Si $A(t) = [a_{i,j}(t)]\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq p \quad a_{i,j}(t) \in \mathcal{H}_2[a,b]$

et $E(\int_a^b trA(t)A^\star(t)\ dt/\mathcal{F}_a) \prec \infty$

Alors:

$$E(\int_a^b A(t)dw(t)\int_a^b B(t)dw(t)/\mathcal{F}_a) = E(\int_a^b trA(t)B^\star(t)\ dt/\mathcal{F}_a) \quad p.s$$

2.6.5 Processus d'Itô n –dimensionnel

2.6.5.1 Définition

Soit $X(t) = (X_1(t), X_2(t), \ldots, X_n(t))$ un processus aléatoire n –dimensionnel, on dit que $X(t)$ est un processus d'Itô si:

$$X_i(t_2) = X_i(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} a_i(s)ds + \sum_{j=1}^p \int_{t_1}^{t_2} b_{i,j}(s)dw_j(s)$$

$i = 1,\ldots,n$ et $j = 1,\ldots,p,\ \ a \leq t_1 \leq t_2 \leq b$

i) $a_i(t)$ et $b_{i,j}(t)$ sont $\mathcal{F}_t$ –mesurables

ii) $\int_a^b |a_i(s)|ds \prec \infty \quad p.p.s$

iii) $\int_a^b (b_{i,j}(s))^2 ds \prec \infty \quad p.p.s \quad (i.e)\ b_{i,j}(s) \in \mathcal{H}_2[a,b]$

On notera formellement:

$$dX(t) = a(t)dt + \sum_{j=1}^p b_j(t)dw_j(t) \ \text{ ou}$$

$a(t) = (a_1(t),\ldots,a_n(t))^\star$ et $b_j(t) = (b_{1,j}, b_{2,j},\ldots,b_{n,j})^\star$

2.6.6 Formule d'Itô multidimensionnelle [9]

Soit $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t),\ldots,\xi_n(t))$ un processus d'Itô n –dimensionnel tel que

$$d\xi_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{j=1}^{p} b_{i,j}(t)dw_j(t), \quad i = 1,\ldots,n \text{ et } t \in [a,b]$$

Et soit $u(t,x_1,x_2,\ldots,x_n)$ une fonction continue et possédant des dérivées continues

$$\frac{\partial u}{\partial t}, \ \frac{\partial u}{\partial x_i}, \ i = 1,\ldots,n \text{ et } \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} \quad i,k = 1,\ldots,n$$

Alors le processus $\eta(t) = u(t,\xi(t))$ est aussi un processus d'Itô et on a

$$d\eta(t) = \left[\frac{\partial u}{\partial t}(t,\xi(t)) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\xi(t))\, a_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{p}\sum_{i,k=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k}(t,\xi(t))\, b_{i,j}b_{k,j} \right] dt$$

$$+\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\xi(t))\, b_{i,j}(t)\, dw_j(t)$$

2.6.7 Remarque

Si l'on considère l'opérateur $\mathcal{L}$ des équations aux dérivées partielles parabolique définit par

$$\mathcal{L}u = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ou $u = u(t,x_1,\ldots,x_n)$ et $\alpha_{i,k} = \sum_{j=1}^{p} b_{i,j}(t)b_{k,j}(t)$

Et si on note

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}(t,\xi(t))b_{i,j}(t)\, dw_j(t) = u'_x(t,\xi(t))B(t)\, dw(t)$$

ou $B(t) = [b_{i,j}(t)]$ $\quad 1 \le i \le n$ et $1 \le j \le p$

La formule d'Itô s'écrit alors :

$$d\eta(t) = \mathcal{L}u(t,\xi(t))\, dt + u'_x(t,\xi(t))B(t)\, dw(t)$$

2.6.8 Applications de la formule d'Itô

2.6.5.1 Théorème [8]

Soit $f(t) \in \mathcal{H}_2[0,T]$ et $\int_0^T E(f(t))^{2m}dt \prec \infty \quad m \in \mathbb{N}^*$. alors

$$E\left[\int_0^T f(t)\, dw(t)\right]^{2m} \le [m(2m-1)]^{m-1}T^{\,m-1}\int_0^T E(f(t))^{2m}\, dt \quad (31)$$

Preuve:

On applique la formule d'ito au processus $\xi(t) = \int_0^t f(s)dw(s)$ et on prend $u(t,x) = x^{2m}$

$0 \prec t \prec T$ on obtient

$$\left[\int_0^t f(s)dw(s)\right]^{2m} = 2m\int_0^t [\int_0^s f(u)dw(u)]^{2m-1} f(s)dw(s) +$$

$$+ m(2m-1)\int_0^t \left[\int_0^s f(u)dw(u)\right]^{2m-2} f^2(s)ds$$

On suppose d'abord que $f(s)$ est une fonction étagée bornée qui ne dépend pas du hasard

dans ce cas

$$\int_0^T E(\int_0^s f(u)dw(u))^{4m-2} f^2(s)ds \prec \infty$$

Ainsi

$$E\left[\int_0^T f(s)dw(s)\right]^{2m} = m(2m-1)\int_0^T E\left[\int_0^s f(u)dw(u)\right]^{2m-2} f^2(s)ds$$

D'après l'inégalité de HÖlder au terme qui est à droite

$$m(2m-1)\left\{\int_0^T E\left[\int_0^s f(u)dw(u)\right]^{2m} ds\right\}^{\frac{2m-2}{2m}} \left\{\int_0^T Ef^{2m}(s)ds\right\}^{\frac{2}{2m}}$$

La fonction

$$t \to E\left[\int_0^t f(s)dw(s)\right]^{2m}$$

est monotone croissante, donc

$$\int_0^T E\left[\int_0^s f(u)dw(u)\right]^{2m} ds \le \int_0^T E\left[\int_0^T f(u)dw(u)\right]^{2m} ds$$

On obtient alors

$$E\left[\int_0^T f(s)dw(s)\right]^{2m} \le$$

$$m(2m-1)\left\{\int_0^T E\left[\int_0^t f(u)dw(u)\right]^{2m} dt\right\}^{\frac{2m-2}{2m}} \times \left\{\int_0^T E(f(s))^{2m} ds\right\}^{\frac{2}{2m}}$$

$$\le m(2m-1)\left\{TE\left[\int_0^T f(s)dw(s)\right]^{2m}\right\}^{\frac{m-1}{m}} \left\{\int_0^T Ef^{2m}(s)ds\right\}^{\frac{1}{m}}$$

dans le cas général $f(x) \in \mathcal{H}_2[0,T]$ on peut toujours exhiber une suite de fonctions étagées bornées

telle que

$$E\int_0^T |f(t) - f_n(t)|^{2m} dt \to 0 \qquad \text{quand } n \to \infty$$

alors

$$\int_0^T f(t)dw(t) = P - \lim \int_0^T f_n(t)dw(t) \quad \bullet$$

2.6.5.2 Proposition

Soit $\xi_i(t),\ \ i = 1{,}2$ un processus d'Itô tel que

$$d\xi_i(t) = a_i(t)dt + \sum_{j=1}^p b_{i,j}(t)dw_j(t) \quad i = 1{,}2$$

ou $w_1, w_2, \ldots, w_p$ sont des mouvements browniens indépendants, alors

$$d(\xi_1\xi_2)(t) = \xi_1(t)\ d\xi_2(t) + \xi_2(t)\ d\xi_1(t) + \sum_{j=1}^p b_{1,j}(t)b_{2,j}(t)\ dt \qquad (32)$$

Cette formule s'appelle *formule d'intégration par partie*

Preuve:

On applique la formule d'itô aux processus $\xi_1(t), \xi_2(t)$ et $(\xi_1 + \xi_2)(t)$, en utilisant la même fonction $u(t,x) = x^2$

Il vient que

$$d\xi_1^2(t) = (2\xi_1(t)a_1(t) + \sum_{j=1}^p b_{1,j}^2(t))\ dt + 2\xi_1(t)(\sum_{j=1}^p b_{1,j}(t)\ dw_j(t))$$

$$d\xi_2^2(t) = (2\xi_2(t)a_2(t) + \sum_{j=1}^p b_{2,j}^2(t))\ dt + 2\xi_2(t)(\sum_{j=1}^p b_{2,j}(t)\ dw_j(t)$$

$$d(\xi_1 + \xi_2)^2(t) = \left[2(\xi_1(t) + \xi_2(t))(a_1(t) + a_2(t)) \ + \sum_{j=1}^p (b_{1,j}(t) + b_{2,j}(t))^2\right] dt$$

$$+2(\xi_1(t) + \xi_2(t)) \sum_{j=1}^p (b_{1,j}(t) + b_{2,j}(t))\ dw_j(t)$$

$$d(\xi_1 + \xi_2)^2 =$$

$$\left[2\xi_1(a_1 + a_2) + 2\xi_2(a_1 + a_2) + \sum_{j=1}^p b_{1,j}^2 + \sum_{j=1}^p b_{2,j}^2 + 2\sum_{j=1}^p b_{1,j}b_{2,j}\right]dt$$

$$+2\xi_1 \sum_{j=1}^p b_{1,j}dw_j + 2\xi_2 \sum_{j=1}^p b_{2,j}dw_j + 2\xi_1 \sum_{j=1}^p b_{2,j}dw_j + 2\xi_2 \sum_{j=1}^p b_{1,j}dw_j$$

En utilisant le fait que

$$d(\xi_1 + \xi_2)^2 = d\xi_1^2 + d\xi_2^2 + 2d\xi_1\xi_2$$

On a le résultat $\bullet$

3 EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

On considére des équations de la forme:

$$\xi(t) = Z + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t b(s,\xi(s))dw(s) \quad (34)$$

qu'on peut écrire formellement

$$\begin{cases} d\xi(t) = a(t,\xi(t))\ dt + b(t,\xi(t))\ dw(t) \\ \xi(0) = Z \end{cases} \qquad t \in [0,T]$$

On appelle ces équations des *équations différentielles stochastiques. Une solution de (34)porte le nom de diffusion..*

Nous étudierons quelques propriétés des solutions de ces équations

3.1 Théoreme d'Itô

Précisons tout d'abord, ce que l'on entend par solution de (34)

3.1.1 Définition

On se place sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ muni d'une filtration $(\mathcal{F}_t,\ t \geq 0)$ on se donne:

$a : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Z une variable aléatoire $\mathcal{F}_0$ –mesurable et $w(t),\ t \geq 0$ un $\mathcal{F}_t$ –mouvement brownien.

Trouver une solution de l'équation (34)signifie : trouver un processus stochastique $\xi(t), t \geq 0$ continu $\mathcal{F}_t$ –adapté, qui vérifie:

_ pour tout $t \geq 0$, les intégrales $\int_0^t a(s,\xi(s))ds$ et $\int_0^t b(s,\xi(s))dw(s)$ ont un sens

$$\int_0^t |a(s,\xi(s)|ds \prec \infty \quad \text{et} \quad \int_0^t |b(s,\xi(s)|^2 ds \prec \infty \quad p.\ p.s$$

_ $\xi(t)$ vérifie (34) c'est à dire:

$$\forall t \geq 0 \quad \xi(t) = Z + \int_0^t a(s,\xi(s))ds + \int_0^t b(s,\xi(s))dw(s) \quad p.p.s$$

3.1.2 Théorème d'Itô [8]

Si $a(t,x)$ et $b(t,x)$ sont des fonctions boréliénnes pour $x \in \mathbb{R}$ et $t \in [0,T]$ telles qu'il existe $K \prec \infty$ avec:

i) $|a(t,x) - a(t,y)| + |b(t,x) - b(t,y)| \leq K|x - y| \qquad \forall x, \forall y \in \mathbb{R}$

ii) $|a(t,x)|^2 + |b(t,x)|^2 \leq K^2(1 + |x|^2) \qquad \forall x \in \mathbb{R}$

iii) Z ne dépend pas de $w(t)$ et $E(Z^2) \prec \infty$

alors, pour tout $T \geq 0$ l'équation (34) admet une solution unique dans l'intervalle $[0,T]$

$\xi(t)$ continue et $\sup(\xi(t))^2_{0\leq t\leq T} \prec \infty$

Remarque:

l'unicité des solutions de (34) signifie que si $\xi_1(t)$ et $\xi_2(t)$ sont deux solutions de (34)

Alors:

$$P\{\xi_1(t) = \xi_2(t)\} = 1. \quad \forall t \in [0,T]$$

Démonstration:

Lemme [8]

Si $\alpha(t)$ est une fonction intégrable non négative définie pour $t \in [0,T]$ et vérifiant l'inégalité

$$\alpha(t) \leq L\int_0^t \alpha(s)ds + \beta(t)$$

ou L constante $L \succ 0$ et $\beta(t)$ fonction intégrable, alors:

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L\int_0^t (\exp L(t-s))\beta(s)\, ds$$

Preuve: $\alpha(t) \leq \beta(t) + L\int_0^t \alpha(s)ds \leq \beta(t) + L\int_0^t\left[\beta(t) + L\int_0^s \alpha(s_1)ds_1\right]ds$

$$\leq \beta(t) + L\int_0^t\left[\beta(s_1) + L\int_0^{s_1}\left[\beta(s_2) + L\int_0^{s_2}\alpha(s_3)ds_3\right]ds_2\right]ds_1$$

$$\leq \beta(t) + L\int_0^t \beta(s_1)ds + L^2\int_0^t\int_0^{s_1}\beta(s_2)ds_2ds_1 + \ \ldots$$

$$\ldots + L^n\int_0^t\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_{n-1}}\beta(s_n)ds_1ds_2\ldots ds_n + L^{n+1}\int_0^t\ldots\int_0^{s_n}\alpha(s_{n+1})ds_1\ldots ds_{n+1}$$

$$\int_0^t\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_n}\alpha(s_{n+1})ds_1ds_2\ldots ds_{n+1} = \int_0^t \frac{(t-s_{n+1})^n}{n!}\alpha(s_{n+1})ds_{n+1} \quad \text{et}$$

$$\lim_{n\to\infty} L^{n+1}\int_0^t\int_0^{s_1}\ldots\int_0^{s_n}\alpha(s_{n+1})ds_1\ldots ds_{n+1} = 0$$

donc

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L\int_0^t \sum_{k=0}^{\infty} L^k \frac{(t-s)^k}{k!}\beta(s)ds$$

$$\alpha(t) \leq \beta(t) + L\int_0^t e^{L(t-s)}\beta(s)ds$$

1 - Unicité:

Soient $\xi_i(t) = Z + \int_0^t a(s,\xi_i(s))ds + \int_0^t b(s,\xi_i(s))dw(s), \quad i = 1,2$ deux solutions de (34)

et soit $\chi_N(t)$ variable aléatoire telle que:

$$\chi_N(t) = \begin{cases} 1 \text{ si } |\xi_1(s)| \leq N,\ |\xi_2(s)| \leq N \\ 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases} \quad \text{pour } 0 \leq s \leq t$$

Comme $\chi_N(t)\chi_N(s) = \chi_N(t)$ pour $s \prec t$ on a

$$E\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 = E\chi_N(t)$$

$$\left[\int_0^t \chi_N(s)a(s,\xi_1(s)) - a(s,\xi_2(s))ds + \int_0^t \chi_N(s)b(s,\xi_1(s)) - b(s,\xi_2(s))dw(s)\right.$$

En utilisant le fait que $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ on a

$$E\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 \leq 2E\chi_N(t)\left[\int_0^t \chi_N(s)a(s,\xi_1(s)) - a(s,\xi_2(s))\,ds\right]^2 +$$

$$2E\chi_N(t)\left[\int_0^t \chi_N(s)b(s,\xi_1(s)) - b(s,\xi_2(s))\,dw(s)\right]^2$$

$$\leq 2T\int_0^t E\chi_N(s)[a(s,\xi_1(s)) - a(s,\xi_2(s))]^2 ds +$$

$$2\int_0^t E\chi_N(s)[b(s,\xi_1(s)) - b(s,\xi_2(s))]^2 ds$$

D'aprés la propriété i) du théorème on obtient

$$E\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 \leq$$

$$2TK^2\int_0^t E\chi_N(s)[\xi_1(s) - \xi_2(s)]^2 ds + 2K^2\int_0^t E\chi_N(s)[\xi_1(s) - \xi_2(s)]^2 ds$$

Finalement

$$E\chi_N(t)[\xi_1(t) - \xi_2(t)]^2 \leq L\int_0^t E\chi_N(s)[\xi_1(s) - \xi_2(s)]^2 ds$$

avec $L = 2(T+1)K^2$ (35)

Appliquons le lemme prècédant à la fonction

$$\alpha(t) = E\chi_N(t)|\xi_1(t) - \xi_2(t)|^2 \quad \text{et} \quad \beta(t) = 0$$

et d'après (35)

$$E\chi_N(t)|\xi_1(t)-\xi_2(t)| = 0$$

C'est à dire

$$P\{\xi_1(t) \neq \xi_2(t)\} \leq P\{\sup_s|\xi_1(s)| \succ N\} + P\{\sup_s|\xi_2(s)| \succ N\}$$

Les probabilités de droite tendent vers zéro, donc

$$P\{\xi_1(t) \neq \xi_2(t)\} = 0$$

D'ou l'unicité de la solution •

2 - Existence:

Pour démontrer l'existence nous allons utiliser un argument d'existence d'un point fixe pour une application contractante.

Soit $\mathcal{B}$ l'espace de banach des fonctions aléatoires $\mathcal{F}_t$ _mesurables pour tout t, vérifiant la relation

$$\sup_{0\leq t\leq T} E|\zeta(t)|^2 \prec \infty$$

et de norme

$$\|\zeta\| = \sqrt{\sup_{0\leq t\leq T} E|\zeta(t)|^2}$$

On définit sur $\mathcal{B}$ l'opérateur $\mathcal{S}$

$$\mathcal{S}\,\zeta(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\zeta(s))ds + \int_0^t b(s,\zeta(s))dw(s)$$

L'existence des deux intégrales est une conséquence de la relation

$$|a(s,\xi(s))|^2 + |b(s,\xi(s)|^2 \leq K^2(1+|\xi(s)|^2)$$

L'inégalité

$(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ et la condition (ii) du théoreme donnent

$$E|\mathcal{S}\zeta(t)|^2 \leq 3E|Z|^2 + 3TE\int_0^t K^2(1+|\zeta(s)|^2)ds + 3\int_0^t EK^2(1+|\zeta(s)|^2)ds$$

$$\leq 3E|Z|^2 + (3T^2K^2 + 3T + K^2)\,(1+\|\zeta\|^2)$$

donc l'opérateur $\mathcal{S}$ applique $\mathcal{B}$ dans $\mathcal{B}$ on a ensuite

$$E|\mathcal{S}\zeta_1(t) - \mathcal{S}\zeta_2(t)|^2 \leq 2T\int_0^t E[a(s,\zeta_1(s)) - a(s,\zeta_2(s))]^2 ds +$$

$$2E(\int_0^t [b(s,\zeta_1(s)) - b(s,\zeta_2(s)]dw(s))^2$$
$$\leq L\int_0^t E|\zeta_1(s) - \zeta_2(s)|^2 ds$$
$$\leq Lt\|\zeta_1 - \zeta_2\|^2$$

avec $L = 2K^2(T+1)$

Cette relation montre que l'opérateur $\mathcal{S}$ est continu sur $\mathcal{B}$. puis

$$E|\mathcal{S}^n\zeta_1(t) - \mathcal{S}^n\zeta_2(t)|^2 \leq L\int_0^t E|\mathcal{S}^{n-1}\zeta_1(u) - \mathcal{S}^{n-1}\zeta_2(u)|^2 du \leq$$
$$\leq L^n \int\ldots\int_{t_0<t_1<t_2<\ldots<t_n<t} E|\zeta_1 - \zeta_2|^2 dt_1\ldots dt_n$$
$$\leq \frac{L^n t^n}{n!}\|\zeta_1 - \zeta_2\|^2$$

Donc pour tout $\zeta(t) \in \mathcal{B}$ on a

$$\|\mathcal{S}^{n+1}\zeta - \mathcal{S}^n\zeta\|^2 \leq \frac{L^n t^n}{n!}\|\mathcal{S}\zeta - \zeta\|^2$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{S}^{n+1}\zeta - \mathcal{S}^n\zeta\|^2 \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L^n T^n}{n!}\|\mathcal{S}\zeta - \zeta\|^2$$

donc la série $\sum_{n=1}^{\infty}\|\mathcal{S}^{n+1}\zeta - \mathcal{S}^n\zeta\|$ est convergente

entraine l'existence de la limite du processus $\mathcal{S}^n\zeta(t)$ quand $n \to \infty$. on note cette limite $\xi(t)$.

$\mathcal{S}$ etant continu

$$\lim_{n\to\infty}\mathcal{S}[\mathcal{S}^n\zeta(t)] = \mathcal{S}\xi(t)$$

or

$$\mathcal{S}[\mathcal{S}^n\zeta(t)] = \mathcal{S}^{n+1}\zeta(t) \to \xi(t) \text{ quand } n \to \infty$$

donc

$$\|\mathcal{S}\xi - \xi\| = 0$$

de la définition de la norme il résulte que

$$\xi(t) = \mathcal{S}\xi(t) \quad p.s \quad \forall t \in [0,T]$$

C'est à dire que $\xi(t)$ est solution de l'équation (34) •

3.2 Propriétés des solutions des équations différentielles stochastiques

Dans cette section nous allons vérifier la propriété de Markov pour un processus $\xi(t)$ solution de (34),

cela signifie que le comportement futur de ce processus aprés t dépend uniquement de $\xi(t)$ et non de ce qui s'est passé avant t .

Ce point est essentiél dans les calcul de prix d'options. il permet de prouver que le prix d'une option sur un actif Markovien ne dépend que du prix de l'actif à l'instant t

3.2.1 Théorème [8]

Supposons que $a(t,x)$ et $b(t,x)$ vérifient les hypothéses du théorème d'Itô et que $\xi_{t,x}(s)$ processus définit pour

$s \in [t,T],\ \ t \succ 0.$ est solution de l'équation:

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u,\xi_{t,x}(u))du + \int_t^s b(u,\xi_{t,x}(u))dw(u) \quad (36)$$

Alors le processus $\xi(t)$ solution de l'équation (34) sera un processus Markovien dont les probabilités de passage sont définies par

$$P(t,x,s,A) = P\{\xi_{t,x}(s) \in A\}$$

Preuve:

$\xi_{t,x}(s)$ ne dépend pas de $\xi(t)$ et des événements de $\mathcal{F}_t$ puisque $\xi(t)$ est $\mathcal{F}_t$ –mesurable et $\xi_{t,x}(s)$ est entiérement définit par le processus $w(s) - w(t)$ pour $s \in [t,T]$ qui ne dépend pas de $\mathcal{F}_t$

Le théorème d'Itô nous dit que:

$$\xi(s) = \xi(t) + \int_t^s a(u,\xi(u))du + \int_t^s b(u,\xi(u))dw(u) \quad (37)$$

$\xi(s)$ est l'unique solution de l'équation (37) donc $\xi_{t,\xi(t)}(s)$ sera aussi solution de (37).

D'aprés l'unicité de la solution on a

$$\xi(s) = \xi_{t,\xi(t)}(s) \quad p.p.s$$

Prouvons maintenant que $P\{\xi(s) \in A/\xi(t)\} = P\{\xi(s) \in A/\mathcal{F}_t\}$

Pour cela il suffit de montrer que

$$EY\lambda(\xi(s)) \;= EYE(\lambda(\xi(s))/\xi(t))$$

ou Y variable aléatoire bornée $\mathcal{F}_t$ –mesurable et $\lambda(x)$ fonction continue et bornée. Soit

$$\varphi(x,\omega) = \lambda(\xi_{t,x}(s)),\ \text{ on a }\ \lambda(\xi(s)) \;= \varphi(\xi(t),\omega)$$

Supposons d'abord que $\varphi(x,\omega)$ est de la forme

$$\varphi(x,\omega) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(x)\ \psi_k(\omega)$$

puisque $\psi_k(\omega)$ ne dépend pas de $\mathcal{F}_t$ on aura alors

$$EY\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\xi(t))\psi_k(\omega) = \sum_{k=1}^{n} EY\varphi_k(\xi(t))\ E\psi_k(\omega)$$

$$= E\sum_{k=1}^{n} Y\varphi_k(\xi(t))\ E\psi_k(\omega)$$

$$E(\sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\xi(t))\psi_k(\omega)/\xi(t) = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k(\xi(t))E\psi_k(\omega)$$

Donc

$$E(\lambda(\xi(s)/\mathcal{F}_t) = g(\xi(t)\ \text{ ou }\ g(x) = E\lambda(\xi_{t,x}(s))$$

Pour toutes les fonctions φ la démonstration se fait par passage à la limite. par suite on a

$$P\{\xi(s) \in A/\mathcal{F}_t\} = P_{t,\xi(t)}(s,A) = P\{\xi_{t,x}(s) \in A\}\ \bullet$$

3.3 Processus de diffusion

3.3.1 Définition [8]

Un processus de Markov n –dimensionnel de probabilité de transition $P(s,x,t,A)$ est appelé processus de diffusion si et seulement si:

i) $\forall\epsilon \succ 0,\quad \forall t \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\succ\epsilon} P(t,x,t+h,dy) = 0$$

ii) il existe un vecteur $a(t,x)$ et une matrice $\sigma(t,x)$ tels que $\forall\epsilon \succ 0,\ \forall t \geq 0$ et $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\prec\epsilon} (y_i - x_i)P(t,x,t+h,dy) = a_i(t,x) \qquad i = 1,\ldots,n$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_{|y-x|\prec\epsilon} (y_i - x_i)(y_j - x_j)P(t,x,t+h,dy) = \sigma_{i,j}(t,x)$$

$i,j = 1,\ldots,n$

ou $a = (a_1,a_2,\ldots,a_n)$, $\sigma = \sigma_{i,j}$ $\quad y = (y_1,\ldots,y_n)$ et $x = (x_1,\ldots,x_n)$

le vecteur a est appelé *coefficient de dérive*

la matrice σ est appelée *matrice de diffusion*

3.3.2 Construction d'un processus de diffusion

Nous allons construire un processus de diffusion $\xi(t)$ de coefficient de dérive $a(t,x)$ et de matrice de diffusion $\sigma(t,x)$, $t \in [0,T]$

_ Soit l'équation différentielle stochastique

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,\xi(t))\, dw_j(t) \quad (38)$$

ou $w_j(t)$, $j = 1,\ldots,n$ sont des mouvements browniens indépendants

$a(t,x) = (a_1(t,x),\ldots,a_n(t,x))^\star$ et $b_j(t,x) = (b_{1,j}(t,x),\ldots,b_{n,j}(t,x))$

$i,j = 1,\ldots,n$

l'équation (38) est équivalente à l'équation :

$$\xi(t) = \xi(0) + \int_0^t a(s,\xi(s))\, ds + \sum_{j=1}^{n} \int_0^t b_j(s,\xi(s))\, dw_j(s) \quad (39)$$

Dans toute la suite on supposera que $\xi(0)$ ne dépend pas des processus $w_j(t)$ pour $j = 1,\ldots,n$ et $s \in [0,t]$

On admettra que la solution de (39) est un processus $\xi(t)$ tel qu'existent les intégrales du second membre de (39)

3.3.3 **Théoreme** [9]

Soient $a(t,x), b_1(t,x),\ldots,b_n(t,x)$ des fonctions boréliennes définies pour $t \in [0,T]$ et $x \in \mathbb{R}^n$. s'il existe $K \prec \infty$ tel que

i) $|a(t,x)|^2 + \sum_{j=1}^{n} |b_j(t,x)|^2 \leq K^2(1+|x|^2)$

ii) $|a(t,x) - a(t,y)| + \sum_{j=1}^{n} |b_j(t,x) - b_j(t,y)| \leq K|x-y|$

$\forall x \in \mathbb{R}^n, \forall y \in \mathbb{R}^n$ et $|\cdot|$ désigne la norme euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Alors l'équation (39) posséde une solution unique $\xi(t)$ qui est continue $p.s$.

Cette solution est un prcessus markovien de probabilité de passage $P(t,x,s,A) = P\{\xi_{t,x}(s) \in A\}$ ou $\xi_{t,x}(s)$ est solution de l'équation :

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u,\xi_{t,x}(u))du + \sum_{j=1}^n \int_t^s b_j(u,\xi_{t,x}(u))\, dw_j(u) \qquad t \prec s$$
(40)

_ Si de plus les fonctions $a(t,x)$ et $b_j(t,x)$ $j = 1,\ldots,n$ sont des fonctions continues. alors le processus $\xi(t)$ sera un processus de diffusion de coefficient de dérive $a(t,x)$ et de matrice de diffusion $\sigma(t,x) = B(t,x)B^\star(t,x)$ ou $B(t,x) = [b_{i,j}(t,x)]$ $i,j = 1,\ldots,n$

La démonstration de ce théorème ne différe en rien de celles des théorèmes pour les processus à une dimension

3.3.4 Remarque

Si les coefficients $a(t,x)$ et $b_j(t,x)$ de l'équation (38) ne dépendent pas de t, c'est à dire que l'équation est de la forme

$$d\xi(t) = a(\xi(t))dt + \sum_{j=1}^n b_j(\xi(t))\, dw_j(t) \quad (41)$$

et $a(x),\ b_j(x),\ j = 1,\ldots,n$ vérifient les conditions du théorème précedent, alors la solution $\xi(t)$ sera processus Markovien homogène, c'est à dire que la probabilité de passage $P(t,x,t+h,A)$ ne dépendra pas de t.

En effet, $P(t,x,t+h,A)$ est confondue avec la répartition de $\eta_{t,x}(h) = \xi_{t,x}(t+h)$;

or le théorème précedent nous dit que $\eta_{t,x}(h)$ sera solution de l'équation:

$$\begin{cases} d\eta_{t,x}(h) = a(\eta_{t,x}(h))dh + \sum_{j=1}^n b_j(\eta_{t,x}(h))\, d[w_j(t+h) - w_j(t)] \\ \eta_{t,x}(0) = x \end{cases}$$

Comme la répartition conjointe de $[w_j(t+h) - w_j(t)],\ j = 1,\ldots,n;$ ne dépend pas de $t,$ il en sera de même de la répartition de $\xi_{t,x}(t+h)$ •

3.4 Equation de Kolmogorov

Soit $\xi(t)$ solution de l'équation (39) d'aprés le théorème (3.3.3) la répartition de $\xi(s)$ pour $s \succ t$ sachant $\xi(t) = x$ est confondue avec la répartition de $\xi_{t,x}(s)$ si on note par $E_{t,x}\eta$ =espérance mathématique conditionnelle des variables aléatoires η, fonctions de la trajectoire du processus $\xi(s)$ sur $[t,T]$ sachant $\xi(t) = x$ et θ fonction de $\xi_{t,x}(s)$, alors $E_{t,x}\eta = E_{t,x}\theta$.

Le processus étant Markovien, donc pour définir les probabilités de passage il suffit de déterminer:

$$E_{t,x}\varphi(\xi(s)) \ = \int \varphi(y)P(t,x,s,dy)$$

Ou φ est deux fois dérivable

3.4.1 Théorème [9]

Soit $\xi(t)$ solution de l'équation (39) tel que $\xi_{t,x}(s)$ soit solution de (40), si $\xi(t)$ remplit les conditions siuvantes:

$a(t,x),\ b_1(t,x),\ldots,b_n(t,x)$ sont des fonctions continues pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$; possédant des dérivées partielles premières et secondes continues et bornées, et si $\varphi(x)$ est une fonction continue bornée et possédant des dérivées premières et secondes continues et bornées alors:

i) La fonction $u(t,x) = E_{t,x}\varphi(\xi(s))\ \ t \in [0,s[$ posséde des dérivées partielles premières et secondes par rapport à x_i continues et dérivables par rapport à t

ii) $\mathcal{L}u = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{i,k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_k} + \sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{\partial u}{\partial t} = 0$

ou $\alpha_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j} b_{k,j}$

iii) $\lim_{t \mapsto s} u(t,x) = \varphi(x)$

Preuve:

$$u(t,x) = E_{t,x}\varphi(\xi(s)) \ = E_{t,x}E_{t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)}(\varphi\xi(s))$$
$$= E_{t,x}u(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)$$

D'aprés la formule d'Itô:

$$u(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) \ - u(t+\Delta t,\xi(t)) \ = \int_t^{t+\Delta t}\sum_{k=1}^n \frac{\partial u}{\partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s))a_k(s,\xi(s))$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_{k,i,j=1}^n b_{i,j}(s,\xi(s))b_{k,j}(s,\xi(s) \ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s) \ ds$$
$$+\int_t^{t+\Delta t}\sum_{i,j=1}^n b_{i,j}(s,\xi(s))\frac{\partial u}{\partial x_i}(t+\Delta t,\xi(s)) \ dw_j(s)$$

Donc

$$E_{t,x}u(t+\Delta t,\xi(t+\Delta t)) \ - E_{t,x}u(t+\Delta t,\xi(t)) \ =$$
$$\int_t^{t+\Delta t}E_{t,x}[\sum_{k=1}^n a_k(s,\kappa(s))\frac{\partial u}{\partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s)) \ +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n b_{i,j}(s,\xi(s))b_{k,j}(s,\xi(s))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s))] \ dt$$

Comme

$$E_{t,x}u(t+\Delta t,\xi(t)) \ = u(t+\Delta t,x)$$

Il vient que

$$u(t,x) - u(t+\Delta t,x) = E_{t,x}[\sum_{k=1}^n a_k(s',\xi(s'))\frac{\partial u}{\partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s')) \ +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n b_{i,j}(s',\xi(s'))b_{k,j}(s',\xi(s'))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(t+\Delta t,\xi(s'))] \ \Delta t$$

ou $s' \in]t,t+\Delta t[$

Comme $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}$ sont bornées et $s' \to t$ pour $\Delta t \to 0$

Le théorème de Lebesgue nous apprend que

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{u(t,x)-u(t+\Delta t,x)}{\Delta t} = E_{t,x}[\sum_{k=1}^n a_k(t,\xi(t)\frac{\partial u}{\partial x_k}(t,\xi(t)) \ +$$
$$\frac{1}{2}\sum_{i,j,k=1}^n b_{i,j}(t,\xi(t))b_{k,j}(t,\xi(t))\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k}(t,\xi(t))]$$

Donc ii) est établi • De plus on a

$$E_{t,x}\varphi(\xi(s)) \ = E\varphi(\xi_{t,x}(s))$$
$$\lim_{t\to s}E\varphi(\xi_{t,x}(s)) \ = \varphi(x) \ \bullet$$

4 PROBLEME DE SORTIE DANS LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES STOCHASTIQUES

Soit $\xi(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique (38):

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + \sum_{j=1}^{n} b_j(t,\xi(t))\, dw_j(t)$$

Ou $t \in [0,T]$, $w_1, w_2, \ldots, w_n$ mouvements browniens indépendants, on admet que les coefficients $a(t,x), b_j(t,x)$ remplissent les conditions du théorème d'existence et d'unicité de la solution $\xi(t)$.

Soit D domaine connexe de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ et

$G = \{x \in \mathbb{R}^n$ tel que $(t,x) \in D\}$

Posons $\tau = \begin{cases} \inf\{s : s \in [0,T]; \xi(s) \notin G\} \\ T \text{ si } \forall s \in [0,T] \ \ \xi(s) \in G \end{cases}$

4.1 Proposition

τ est un instant Markovien par rapport aux tribus $\mathcal{F}_t$ engendrées par $\xi(0)$ et $w_k(s) - w_k(0)$, $k = 1, \ldots, n$, $s \in [0,t[$

Preuve:

Soit D^c le complémentaire de D dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ et $d((t,x);D^c)$ la distance du point (t,x) à D^c, on a $\tau = \sup \tau_m$, ou

$$\tau_m = \begin{cases} \inf\left\{s : d((s,\xi(s));D^c) \prec \frac{1}{m}\right\} \\ T \text{ si } \forall s \in [0,T] : \ d((s,\xi(s));D^c) \geq \frac{1}{m} \end{cases}$$

τ_m est un instant Markovien car:

$$\{\tau_m \succ t\} = \cap_k \left\{\omega : d((s_k,\xi(s_k));D^c) \geq \frac{1}{m}\right\}$$

ou $\{s_k\}$ est un ensemble partout dense, donc τ est un instant Markovien •

Le temps d'arrêt τ est appelé *instant de première sortie* du domaine D.

Le but de cette partie est de détérminer les répartitions de τ et de $\xi(\tau)$

4.2 Théorème [9]

Soit $v(t,x)$ fonction continue dans $D \cup \Gamma$, Γ étant la frontière du domaine D, si pour toute fonction $\psi(t,x)$ suffisament de fois dérivable sur Γ

On a

$$\begin{cases} \mathcal{L}v(t,x) = 0 \text{ pour } (t,x) \in D \\ v(t,x) = \psi(t,x) \text{ pour } (t,x) \in \Gamma, t \succ 0 \end{cases}$$

Alors:

$$v(t,x) = E\psi(\tau_{t,x}\ ;\ \xi_{t,x}(\tau_{t,x}))$$

ou $\tau_{t,x}$ est l'instant de première sortie de D du processus $\xi_{t,x}(s)$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$\xi_{t,x}(s) = x + \int_t^s a(u,\xi_{t,x}(u))du + \sum_{j=1}^n \int_t^s b_j(u,\xi_{t,x}(u))\ dw_j(u) \quad (40)$$

Démonstration:

Soient D_m une suite croissante de compacts simplement connexes dans $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ tels que $\cup D_m = D$

et $\tau_{t,x}^{(m)}$ instant de première sortie de D_m du processus $\xi_{t,x}(s)$

On applique la formule d'itô au processus $v(t,\xi(t))$ sur $s \in \left[t,\tau_{t,x}^{(m)}\right]$, on obtient:

$$v(\tau_{t,x}^{(m)},\xi_{t,x}(\tau_{t,x}^{(m)})) - v(t,\xi_{t,x}(t)) =$$
$$\int_t^{\tau_{t,x}^{(m)}} \mathcal{L}v(s,\xi(s))\ ds + \sum_{j=1}^n \int_t^{\tau_{t,x}^{(m)}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial v}{\partial x_k}(s,\xi_{t,x}(s))b_{k,j}(s,\xi_{t,x}(s))\ dw_j(s)$$

$\mathcal{L}v(s,\xi(s)) = 0$ pour $s \in \left[t,\tau_{t,x}^{(m)}\right]$, et en prenant l'éspérance mathématique, on obtient en vertu de la propriété (27)

$$v(t,x) = Ev(\tau_{t,x}^{(m)},\xi_{t,x}(\tau_{t,x}^{(m)}))$$

Quand $m \to \infty$, $\tau_{t,x}^{(m)} \to \tau_{t,x}$ et $v(\tau_{t,x},\ \xi_{t,x}(\tau_{t,x})) = \psi(\tau_{t,x},\ \xi_{t,x}(\tau_{t,x}))$ car le point $(\tau_{t,x},\ \xi_{t,x}(\tau_{t,x}) \in \Gamma$ •

4.3 Instant de première sortie des processus homogènes

Considèrons un processus homogène $\xi(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique:

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\ dt + \sum_{j=1}^{n} b_j(\xi(t))\ dw_j(t) \quad (41)$$

définit pour $t \in [0,\infty[$.

Et soit $\xi_x(t)$ solution de l'équation (41) vérifiant la condition initiale $\xi(0) = x$

Soient G un domaine de $\mathbb{R}^n$ et τ_x : Instant de première sortie de G du processus $\xi_x(t)$

$$\tau_x = \begin{cases} \inf\{t : \xi_x(t) \notin G\} \\ \infty \text{ si } \xi_x(t) \in G,\ \forall t \succ 0 \end{cases}$$

$\xi_x(\tau_x)$ est appelé lieu de sortie du processus $\xi_x(t)$ de Γ frontiére de G

4.3.1 Théorème [9]

Notons d'abord par $\mathcal{M}$ l'opérateur différentiel elliptique:

$$\mathcal{M}u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{n} \alpha_{i,k} \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i\ \partial x_k}$$

ou $\alpha_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} b_{i,j}(x) b_{k,j}(x)$.

Soient f une fonction continue et bornée dans $G \cup \Gamma$, $u_\lambda(x)$ une autre fonction continue et bornée dans $G \cup \Gamma$, deux fois continuement dérivable sur Γ, telle que:

$$\begin{cases} \lambda u_\lambda(x) - \mathcal{M}u_\lambda(x) = f(x),\ \lambda \succ 0 \text{ pour } x \in G \\ u_\lambda(x) = 0 \text{ pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors:

$$u_\lambda(x) = E\int_0^\infty e^{-\lambda t} f(\xi_x(t))\chi_{\{\tau_x \succ t\}} dt$$

Preuve:

On applique la formule d'ito à la fonction $e^{-\lambda t}u_\lambda(\xi_x(t))$, pour $t \prec \tau_x$, on trouve:

$$e^{-\lambda t}u_\lambda(\xi_x(t)) - u_\lambda(x) = \int_0^t [-\lambda e^{-\lambda s}u_\lambda(\xi_x(s)) + e^{-\lambda s}\mathcal{M}u_\lambda(\xi_x(s))]\, ds +$$
$$\sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}(\xi_x(s)) b_{k,j}(\xi_x(s))\, dw_j(s) \quad (42)$$

Soit $\tau_x^{(m)}$ l'instant de première sortie du compact F_m, ou $\{F_m\}$ est une suite croissante de compacts telle que $\cup_m F_m = G$

On a $\tau_x^{(m)} \wedge T \prec \tau_x$, et les quantités $\frac{\partial u_\lambda}{\partial x_k}(\xi_x(s))$ sont bornées pour $s \prec \tau_x^{(m)} \wedge T$. en remplacant t par $\tau_x^{(m)} \wedge T$ dans l'égalité (42)

On obtient:

$$Eu_\lambda(\xi_x(\tau_x^{(m)} \wedge T))\, e^{-\lambda(\tau_x^{(m)} \wedge T)} - u_\lambda(x) = -E\int_0^{\tau_x^{(m)} \wedge T} f(\xi_x(s))\, e^{-\lambda s} ds$$

Quand $n \to \infty$ $\tau_x^{(m)} \to \tau_x$ l'égalité précédante devient

$$Eu_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T))\, e^{-\lambda(\tau_x \wedge T)} - u_\lambda(x) = -E\int_0^{\tau_x \wedge T} f(\xi_x(s))\, e^{-\lambda s} ds \quad (43)$$

En remarquant que pour τ_x fini $u_\lambda(\xi_x(\tau_x)) = 0$ car $\xi_x(\tau_x) \in \Gamma$ et

$$|u_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T))|\, e^{-\lambda(\tau_x \wedge T)} \le \sup_y |u_\lambda(y)|\, e^{-\lambda T} \to 0$$

quand $T \to \infty$ pour $\tau_x = +\infty$

Donc $\lim_{T\to\infty} u_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T))\, e^{-\lambda(\tau_x \wedge T)} = 0$

Par ailleurs

$$|u_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T))|\, e^{-\lambda(\tau_x \wedge T)} \le \sup_y |u_\lambda(y)|$$

D'aprés le théorème de Lebesgue

$$\lim_{T\to\infty} Eu_\lambda(\xi_x(\tau_x \wedge T))\, e^{-\lambda(\tau_x \wedge T)} = 0$$

Un passage à la limite dans (43) achéve la démonstration •

4.3.2 Théorème [9]

Soit $v_\lambda(x)$, $\lambda \succ 0$ une fonction continue et bornée sur $G \cup \Gamma$, deux fois continuement dérivable dans G. Si pour toute fonction ψ suffisement de fois dérivable sur Γ on a:

$$\begin{cases} \lambda v_\lambda(x) - \mathcal{M}v_\lambda(x) = 0 \quad \text{pour } x \in G \\ v_\lambda(x) = \psi(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{cases} \qquad (44)$$

alors:

$$v_\lambda(x) = E\, e^{-\lambda\tau_x}\psi(\xi_x(\tau_x))$$

Preuve:

Appliquons la formule d'itô au processus $e^{-\lambda t}v_\lambda(\xi_x(t))$ pour $t \prec \tau_x$ on trouve

$$e^{-\lambda t}v_\lambda(\xi_x(t)) - v_\lambda(x) = \int_0^t [e^{-\lambda s}\mathcal{M}v_\lambda(\xi_x(s) - \lambda e^{-\lambda s}v_\lambda(\xi_x(s)]\, ds + \sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_k}(\xi_x(s)b_{k,j}(\xi_x(s))\, dw_j(s)$$

En utilisant l'hypothése du théorème on a

$$e^{-\lambda t}v_\lambda(\xi_x(t)) - v_\lambda(x) = \sum_{j=1}^n \int_0^t \sum_{k=1}^n \frac{\partial v_\lambda}{\partial x_k}(\xi_x(s)b_{k,j}(\xi_x(s))\, dw_j(s)$$

de là la suite de la preuve suit le même schéma que la démonstration du théorème précédent

on déduit l'équation

$$Ev_\lambda(\xi_x(\tau_x))\, e^{-\lambda\tau_x} = v_\lambda(x)$$

reste à noter que $v_\lambda(\xi_x(\tau_x)) = \psi(\xi_x(\tau_x))$, car $\xi_x(\tau_x) \in \Gamma$ •

4.3.3 Remarque

Si on remplace $\lambda = 0$ dans (44) on obtient la rèpartition du *lieu de sortie* $\xi_x(\tau_x)$

4.3.3.1 Proposition

Soit $v(x)$ une fonction continue et bornée dans $G \cup \Gamma$, deux fois continuement dérivable dans G

si pour toute fonction ψ suffisement de fois dérivable sur Γ. on a

$$\begin{cases} \mathcal{M}v(x) = 0 \quad \text{dans } G \\ v(x) = \psi(x) \quad \text{pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors:

$$v(x) = E\psi(\xi_x(\tau_x))$$

4.3.4 Remarque

Si on pose $\psi(x) = 1 \;\; \forall x$ dans (44) on obtient la répartition du temps de sortie τ_x

4.3.4.1 Proposition

Soit $v_\lambda(x)$ une fonction continue et bornée dans $G \cup \Gamma,$ deux fois continuement dérivable dans $G,$ qui vérifie

$$\begin{cases} \lambda v_\lambda(x) - \mathcal{M} v_\lambda(x) = 0; \text{ pour } x \in G \\ v_\lambda(x) = 1; \qquad \text{pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors:

$$v_\lambda(x) = E\, e^{-\lambda \tau_x}$$

4.3.5 Remarque

Si on dérive (44) par rapport à λ et posons $\lambda = 0,$ on obtient:

$$-\frac{\partial}{\partial \lambda} v_\lambda(x) \;\; |_{\lambda=0} \;\; = m_1(x)$$

Il vient que

$$m_1(x) = E\tau_x$$

Et puisque

$$v_0(x) = 1$$

Il résulte:

$$\begin{cases} \mathcal{M} m_1(x) = -1; \text{ pour } x \in G \\ m_1(x) = 0 \;\; \text{pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

4.3.5.1 Réciproque [9]

Soit $m_1(x)$ une fonction continue et bornée dans $G \cup \Gamma$ deux fois continuement dérivable dans G telle que:

$$\begin{cases} \mathcal{M}m_1(x) = -1; \text{ pour } x \in G \\ m_1(x) = 0; \text{ pour } x \in \Gamma \end{cases}$$

Alors:

$$E\tau_x = m_1(x)$$

Preuve:

On applique la formule d'itô au processus $m_1(\xi_x(t))$ pour $t \prec \tau_x^{(m)}$ on obtient:

$$m_1(\xi_x(\tau_x^{(m)})) - m_1(x) = \int_0^{\tau_x^{(m)}} \mathcal{M}m_1(\xi_x(s))\, ds +$$

$$\sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_x^{(m)}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_1}{\partial x_k}(\xi_x(s))b_{k,j}(\xi_x(s))\, dw_j(s)$$

Puisque $\mathcal{M}m_1(x) = -1$, il vient que

$$E(m_1(\xi_x(\tau_x^{(m)})) - m_1(x)) = -E(\tau_x^{(m)}) +$$

$$E \sum_{j=1}^n \int_0^{\tau_x^{(m)}} \sum_{k=1}^n \frac{\partial m_1}{\partial x_k}(\xi_x(s))b_{k,j}(\xi_x(s))\, dw_j(s)$$

Quand $m \to \infty$, $\tau_x^{(m)} \to \tau_x$

$$\lim_{m\to\infty} E(m_1(\xi_x(\tau_x^{(m)})) - m_1(x)) = \lim_{m\to\infty} -E(\tau_x^{(m)})$$

d'ou $m_1(x) = E(\tau_x)$

4.3.6 Exemple: Instant de première sortie d'un mouvement brownien d'un intervalle$]\alpha,\beta[$

On considère l'équation différentielle stochastique:

$$\xi_x(t) = x + \int_0^t a(\xi_x(s))\, ds + \int_0^t b(\xi_x(s))\, dw(s), \text{ pour } a = 0 \text{ et } b = 1$$

La solution de cette équation est

$$\xi_x(t) - x = \int_0^t dw(s) \Leftrightarrow \xi_x(t) = x + w(t)$$

ou $w(t)$ mouvement brownien standard, donc $\xi_x(t)$ est aussi un mouvement brownien

Soit : $\tau_x = \inf\{t : \xi_x(t) \notin\ ]\alpha,\beta[\}$

Instant de première sortie du processus $\xi_x(t)$ de l'intervalle $]\alpha,\beta[$

si on pose $v(x) = E\psi(\xi_x(\tau_x))$, Alors d'après la remarque $v(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} \mathcal{M}v(x) = 0 \text{ pour } x \in]\alpha,\beta[\\ v(\alpha) = \psi(\alpha) \;\text{ et }\; v(\beta) = \psi(\beta) \end{cases}$$

Qui donne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}v''(x) = 0 \;\text{ pour } x \in]\alpha,\beta[\\ v(\alpha) = \psi(\alpha) \text{ et } v(\beta) = \psi(\beta) \end{cases} \quad (45)$$

Donc

$$\begin{cases} v(x) = c(x-\alpha), \;\; c \text{ constante} \\ v(\alpha) = \psi(\alpha) \text{ et } v(\beta) = \psi(\beta) \end{cases}$$

Finalement

$$v(x) = \frac{\psi(\beta)}{\beta-\alpha}(x-\alpha),$$

et ceci pour toute fonction ψ.

D'après la remarque, si on pose $m_1(x) = E(\tau_x)$

Alors $m_1(x)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles:

$$\begin{cases} \mathcal{M}m_1(x) = -1, \;\; x \in]\alpha,\beta[\\ m_1(\alpha) = m_1(\beta) = 0 \end{cases}$$

Qui donne

$$\begin{cases} \frac{1}{2}m_1''(x) = -1, \; x \in]\alpha,\beta[\\ m_1(\alpha) = m_1(\beta) = 0 \end{cases} \quad (46)$$

La solution de (46) s'écrit alors:

$$m_1(x) = c_1 v(x) + 2\int_\alpha^x \frac{v(x)-v(y)}{v'(y)}dy$$

La solution de (46) qui vérifie $m_1(\alpha) = m_1(\beta) = 0$ s'écrit

$$m_1(x) = (\beta-\alpha)(x-\alpha) - (x-\alpha)^2 = E(\tau_x)$$

$E(\tau_x)$ étant fini, donc $\xi_x(\tau_x)$ prend presque sûrement la valeur α ou β. On peut trouver alors la répartition de $\xi_x(\tau_x)$:

$$v(x) = E\psi(\xi_x(\tau_x)) \;\; = \psi(\alpha)\, P\{\xi_x(\tau_x) = \alpha\} + \psi(\beta)\, P\{\xi_x(\tau_x) = \beta\}$$

Puisque $\psi(\alpha) = v(\alpha) = 0$, donc

$$v(x) = \psi(\beta)\, P\{\xi_x(\tau_x) = \beta\}$$

$$P\{\xi_x(\tau_x) = \beta\} = \frac{v(x)}{\psi(\beta)} = \frac{\psi(\beta)(x-\alpha)}{\psi(\beta)(\beta-\alpha)} = \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}$$

$$P\{\xi_x(\tau_x)=\alpha\}=1-P\{\xi_x(\tau_x)=\beta\}=\frac{\beta-x}{\beta-\alpha}$$

Répartition de τ_x :

Si on pose $v_\lambda(x)=E\,e^{-\lambda\tau_x}$, alors $v_\lambda(x)$ sera solution de l'équation

$$\begin{cases}\lambda v_\lambda(x)-\mathcal{M}v_\lambda(x)=0, \text{ pour } x\in\,]\alpha,\beta[\\ v_\lambda(\alpha)=v_\lambda(\beta)=1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{1}{2}v''_\lambda(x)-\lambda v_\lambda(x)=0\\ v_\lambda(\alpha)=v_\lambda(\beta)=1\end{cases}$$

Qui donne pour solution

$$v_\lambda(x)=\frac{\cosh\left[\sqrt{2\lambda}\,(x-\frac{\alpha+\beta}{2})\right]}{\cosh\left[\sqrt{2\lambda}\,(\frac{\beta-\alpha}{2})\right]}$$

4.3.7 Exemple: Instant de première sortie d'un mouvement brownien bidimensionnel d'un disque de rayon d

Soit l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases}d\xi_1(t)=dw_1(t)\\ d\xi_2(t)=dw_2(t)\end{cases}\quad t\geq 0,\ \xi_1(0)=x \text{ et } \xi_2(0)=y \quad (47)$$

w_1,w_2 sont deux mouvements browniens standards indépendants.

La solution de (47) sera $\begin{cases}\xi_1(t)=x+w_1(t)\\ \xi_2(t)=y+w_2(t)\end{cases}$

$\xi(t)=(\xi_1(t),\xi_2(t))$ est un mouvement brownien bidimensionnel

Soit $\tau_{(x,y)}=\inf\{t\succ 0:\xi_1^2(t)+\xi_2^2(t)=d^2$ tel que $\xi_1(0)=x;\ \xi_2(0)=y$ et $0\prec x^2+y^2\prec d^2\}$

$\tau_{(x,y)}$:est l'instant de première sortie du processus $\xi(t)$ du disque de centre l'origine et de rayon d.

pour $\lambda\succ 0$, on pose $v_\lambda(x;y)=E\,e^{-\lambda\tau_{(x,y)}}$; alors $v_\lambda(x,y)$ sera solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\begin{cases}\mathcal{M}v_\lambda(x,y)-\lambda v_\lambda(x,y)=0 \text{ pour } 0\prec x^2+y^2\prec d^2\\ v_\lambda(x,y)=1 \text{ pour } x^2+y^2=d^2\end{cases}\quad (48)$$

$$(48)\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_\lambda(x,y)}{\partial x^2} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v_\lambda(x,y)}{\partial y^2} - \lambda v_\lambda(x,y) = 0 \text{ pour } 0 \prec x^2+y^2 \prec d^2 \\ v_\lambda(x,y) = 1 \text{ pour } x^2+y^2 = d^2 \end{cases}$$

Pour résoudre l'équation (48) on peut supposer que la fonction v_λ est en fait de la forme

$$v_\lambda(x,y) = u_\lambda(z)$$

ou $z = g(x,y)$. de plus puisque le disque de centre l'origine et de rayon d est borné, on peut affirmer que la solution de (48) est unique

On pose $z = x^2+y^2$

$$(48)\Rightarrow \begin{cases} 2z\,\frac{\partial^2 u_\lambda(z)}{\partial z^2} + 2\frac{\partial u_\lambda(z)}{\partial z} - \lambda u_\lambda(z) = 0 \text{ pour } 0 \prec z \prec d^2 \\ u_\lambda(d^2) = 1 \end{cases}$$

Si on considére l'équation différentielle ordinaire suivante:

$$z^2 y''(z) + zy'(z) - (z^2+v^2)\,y(z) \quad (49)$$

et la fonction

$$\mathcal{I}_v(z) = \left(\tfrac{z}{2}\right)^v \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{2^{2n} n!\,\Gamma(v+n+1)}$$ qui est la fonction de bessel modifiée

Alors la solution générale de (49) est

$$y(z) = c_1\mathcal{I}_v(z) + c_2\mathcal{K}_v(z) \text{ ou } \mathcal{K}_v(z) = \frac{\pi}{2\sin\pi z}(\mathcal{I}_{-v}(z) - \mathcal{I}_v(z))$$

Pour $v = 0$ si on remplace z par $\sqrt{2\lambda z}$ dans l'équation (49) on obtient l'équation (48).

Donc la solution générale de (48) est:

$$u_\lambda(z) = c\mathcal{I}_0(\sqrt{2\lambda z})$$

En utilisant la condition $u_\lambda(d^2) = 1$, on trouve que

$$u_\lambda(z) = \frac{\mathcal{I}_0(\sqrt{2\lambda z})}{\mathcal{I}_0(d\sqrt{2\lambda})}$$

En conclusion la fonction génératrice des moments de τ_x est

$$v_\lambda(x,y) = E\, e^{-\lambda\tau_{(x,y)}} = \frac{\mathcal{I}_0(\sqrt{2\lambda(x^2+y^2)})}{\mathcal{I}_0(d\sqrt{2\lambda})} \quad .$$

Deuxiéme partie: APPLICATION A L'ELECTRONIQUE

5 SEMICONDUCTEURS

5.1 ATOMES

Toute matiére est constituée d'atomes. chaque atome comporte un noyau central de charge positive et un ou plusieurs électrons de charges négatives. la neutralité électrique se traduit parl'équation:

charge du noyau = $\sum$charges des électrons

un atome qui perd un électron devient un ion positif

_ **La théorie classique** ditque les électrons gravitent autour du noyau suivant des orbites stables. cette stabilité est assurée par une vitesse de déplacement telle que la force centrifuge équilibre la force électrostatique (attraction de l'électron par le noyau). chaque électron posséde ainsi une énergie E_t qui est la somme de l'énergie cinétique E_c et de l'énergie potentielle E_p soit

$$E_t = E_c + E_p = -\frac{Ze^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$$

avec Z, nombres d'électron(numéro atomique)

e, charge de l'électron(1,6.10^{-19}C)

r, rayon de l'orbite

_ **La théorie quantique** affirme que seules certaines orbites sont permises, et la valeur de leurs rayons r_i dépend directement de nombres appelés nombres quantiques. ainsi on peut définir les niveaux d'énergie. pour un atome de silicium:

la premiére couche (compléte) posséde deux électrons d'énergie E_1. la deuxiéme couche (compléte) possede 8 électrons d'énergie E_2. la troisiéme et derniére couche, appelée aussi couche de valence, posséde 4 électrons d'énergie E_3. elle est incompléte, car son maximum théorique est $2n^2 = 2.3^2 = 18$.toutefois, il existe une tendance à compléter partiellement à 8 le nombre d'électrons. il reste alors pour le silicium, 4 états d'énergie supplémentaires disponibles.

_ **La mécanique ondulatoire** représente une troisiéme phase dans l'étude de la physique du solide. elle permet de définir une fonction d'onde associée à chaque électron (statistique de Fermi-Dirac) permetant ainsi de savoir si celui-ci est dans un état lié ou dans un état libre.la loi de répartition du nombre de places libres et occupées par les électrons est fournie par la relation:

$$f_n(E) = \frac{\text{nombre de places occupées}}{\text{nombre de places disponibles}} = \frac{1}{1+\exp(\frac{E-E_f}{KT})}$$

E_f niveauu de Fermi en eV
K constante de Boltsmann
T température absolue en K

5.2 STRUCTURES CRISTALLINES

Les cristaux correspondent à un ensemble d'atomes rangés dans un certain ordre. les liaisons atomiques sont de plusieurs types. les deux principales types sont les liaisons ioniques et les liaisons covalentes

5.2.1 Liaison covalente

C'est le cas des semiconducteurs et des isolants. pour le silicium, chaque atome est au centre d'un tétraédre dont les quatres sommets sont quatre autres atomes identiques. le silicium pur est apparenté à un isolant (sa conductibilité est nulle à 0^0K soit une résistivité infinie). lorsque la température augmente, quelques électrons se déplacent créant des trous rapidement comblés.

la représentation énergitique se fait de maniére similaire à celle de l'atome. mais aucun électron ne peut posséder une énergie identique à celle d'un autre électron, ce ne sont plus des niveaux d'énergie que l'on rencontre mais des bandes d'énergie

Le semiconducteur pur ou intrinséque, avec ses huits électrons périphériques obtenus par liaison covalente est isolant à 0°k. lorsque la température augmente, le nombre d'électrons libres augmente aussi. la différence entre le matériau semiconducteur et les isolants classiques est sa plus faible largeur de gap ΔE. comme cette largeur est associée à une énergie, elle est différente d'un matériau à un autre

6 CONDUCTION DANS LES SOLIDES

Dans son état normal, un conducteur contient des électrons libres animés d'un mouvement désordonné. aucun courant ne circule pour un circuit fermé ne présentant pas de fem. lorsque l'on applique une différence de potentiel auux extrémités du conducteurs, il ya création d'un champ électrique, les électrons de charge e sont sollicités par ce champ avec une force

$$F = -eE$$

il ya déplacement d'électrons, donc création d'un courant défini comme étant de sens inverse à celui du déplacement des électrons.

En désignant par n la concentration d'électrons et par μ_n leurs mobilité, la densité du courant électrique sera de:

$$J_n = e_n \mu_n n E = \sigma_n E$$

e_n représente la charge de l'électron

6.1 MATERIAU DE TYPE N

Lorsqu'on dope uncristal de silicium avec un métal dont les atomes comportent plus de quatres électrons de valence, des ions dit ions donneurs se forment aprés libération des électrons de valence en plus des quatres nécessaires pour la liaison avec des atomes de silicium ainsi des charges négatives (électrons libres) sont données à la bande de conduction

6.2 MATERIAU DE TYPE P

Contrairement au semiconducteur de type N, le cristal de silicium est dopé avec un métal dont les atomes possédent moins de quatres électrons de valence. des ions dits ions accepteurs se forment en additionant des électrons accépteurs (un électron pour chaque liaison)

ainsi des charges positives sont données à la bande de conduction

6.3 JONCTION PN

La jonction PN est une région de faible épaisseur d'un monocristal dans laquelle la conductivité passe plus ou moins graduellement de la zone P (dont la concentration en porteur mobiles est $p \simeq N_A$) vers la zone N (dont la concentration est $n \simeq N_D$) en passant par une zone de recombinaison ou $n = p = n_i$(concentration du semiconducteur intrinseque) .

_ au niveau de la jonction des deux matériaux P et N il ya recombinaison des trous et des électrons libres par diffusion, laissant une zone neutre (appelée aussi zone de transition, zone intrinséque ou zone de déplétion) dans laquelle subsistent des ions fixes positifs ou négatifs. il ya alors présence d'un champ électrique E_i

_ En dehors de cette zone neutre, nous trouvons des charges libres majoritaires et minoritaires.

la présence du champ électrique E_i traduit:

_ un ralentissement de diffusion à cause des forces de répulsion.

_ une différence de de jonction $U(t) = E_i.x_t$ ou x_t représente la largeur de la zone de transition. cette largeur est d'autant plus faible que le dopage est important.

6.3.1 Courant de diffusion et courant de saturation

Deux courants circulent au sein du matériau semiconducteur:

_ le courant de diffusion I_D du à quelques charges mobiles majoritaires qui, par agitation thérmique, traversent la jonction malgré l'effet de répulsion du champ électrique E_i.

_ le courant de conduction naturelle appelé courant de saturation I_S du aux charges minoritaires s'approchant de la jonction, et qui sont naturellement attirées par le champ électrique E_i, indépendament de la valeur de celui-ci.

La relation $I_D = I_S$ est obtenue par l'établissement de la **barriére de potentiél** U_t permettant cet équilibre.

6.3.2 Jonction polarisée en direct

Une jonction est polarisée lorsqu'une tension est appliquée à ses bornes (i.e) lorsque $V_P - V_N$ est non nul (V_P étant le potentiél relatif à la partie P et V_N celui relatif à la partie N de la jonction.

Le langage universellement adopté est le suivant :

polarisation direct : $V_P - V_N \succ 0$

polarisation inverse : $V_P - V_N \prec 0$

Lorsqu'une jonction est polarisée en direct le champ électrique extérieur attire les électrons de la zone N vers la zone P et les trous positifs de la zone P vers la zone N. il s'ensuit une diminution de la zone de transition et une augmentation du courant de diffusion I_D

6.3.2 Jonction polarisée en inverse

Le champ électrique extérieur re pousse les électrons de lazone N et les trous positifs de la zone P. La barriére de potentiél s'élargit et le courant de diffusion I_D devient nul

6.3.3 Etude quantitative de la jonction PN

Une jonction peut etre abrupte (passage instantané d'une zone N à une zone P avec densité d'impureté constante) ou progressive (passage de la zone N à la zone P avec une densité progressive linéaire ou non linéaire). pour notre cas nous ne travaillons qu'à partir de la jonction abrupte

6.3.4 Jonction abrupte polarisée en direct

La polarisation direct $U = V_P - V_N \succ 0$ a pour effet d'abaisser la barriére de potentiél. il s'ensuit un désèquilibre des courants direct et inverse. le courant direct présente plusieurs composantes dont un courant de diffusion I_D et un courant de recombinaison I_R

L'expression de la densité J_R est alors

$$J_R = \frac{qn_i}{2\tau} x_t [\exp(\frac{q}{2KT}U) - 1]$$

avec τ, durée de vie des charges mobiles

n_i concentration intrinséque

x_t largeur de la barriére de potentiél

U tension direct aux bornes de la jonction

Pour une polarisation $U \succ 0,4V$, le courant de diffusion I_D l'emporte sur le courant de recombinaison I_R la densité de courant J_D s'écrit

$$J_D = qn_i(\frac{D_p}{L_p N_D} + \frac{D_n}{L_n N_A})[\exp(\frac{q}{KT}U) - 1$$

avec D_p, constante de diffusion des trous dans la zone N

D_n, constante de diffusion des électrons dans la zone P

L_p, longueur de diffusion des trous dans la zone N

L_n, longueur de diffusion des électrons dans la zone P

$$L_p = \sqrt{D_p \tau_p} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \tau_p, \text{ durée de vie des trous} \\ \tau_n, \text{ durée de vie des électrons} \end{array} \right.$$

$$L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$$

Si on multiplie la densité J par la section S de la jonction, on obtient le courant I. ainsi

$$I_D = I_S[\exp(\frac{q}{KT}U) - 1] \quad (50)$$

avec $I_S = qn_i^2(\frac{D_p}{L_p N_D} + \frac{D_n}{L_n N_A})S$

I_S est appelé courant de saturation

6.3.5 Jonction PN en régime dynamique

Il faut considérer

_ le régime en petits signaux ou la jonction PN est toujours polarisée en direct ou en inverse

_ le régime de commutation ou l'on passe de l'état conducteur à l'état bloqué et inversement

_ le bruit généré

Polarisation direct

En régime dynamique la jonction polarisée en direct fait intervenir trois élements

_ la capacité de transition C_T due à la zone neutre

_ la capacité de diffusion C_D due aux charges stockées Q_s apportées par le courant de diffusion

$$C_D = \frac{dQ_s}{dU} \quad (51)$$

_la résistance dynamique de la jonction

Bruit généré dans la jonction

Tout composant est générateur de bruit. les jonctions ne font pas exception. nous rencontrons alors :

_ le bruit thermique

_ le bruit de grenaille associé au déplacement des porteurs de charge (qui est un bruit blanc)

7 DESCRIPTION DU MODELE MATHEMATIQUE [3]

7.1 Installation d'une diode en série dans un circuit électrique

Notons d'abord qu'une diode est la réalisation d'une jonction PN

_notons par $X(t)$ le voltage en travers une diode installée en série dans un circuit électrique contenant un condensateur C, une source de voltage constante U_0 et une source de bruit $w(t)$

_ notons par $I(t)$ la valeur du courant traversant le circuit à l'instant t, et par $V(t)$ le voltage en travers le condensateur C à l'instant t

D'aprés (50)

$$I(t) = k(\exp(\rho X(t)) - 1) \qquad t \geq 0,\ \ k, \rho$$

sont des constantes positives

D'aprés (51)

$$C = \frac{dQ}{dV(t)} \text{ et } I(t) = \frac{dQ}{dt} \Rightarrow I(t) = C\,\frac{dV(t)}{dt}$$

donc

$$V(t) = \frac{1}{C}(Q_0 + \int_0^t I(s)\,ds), \qquad t \geq 0 \quad \text{et} \quad Q_0 \text{ étant la}$$

charge initiale

On a cependant que

$$w(t) = U_0 + X(t) + V(t)$$

car l'installation est en série

$$dw(t) = dV(t) + dX(t) = \frac{1}{C}I(t)\,dt + dX(t) = \frac{1}{C}(\exp(\rho X(t)) - 1)\,dt + dX(t)$$

Finalement

$$dX(t) = \frac{k}{C}(1 - \exp \rho X(t))\,dt + dw(t)$$

en particulier pour $k = C$ et $\rho = 1$

$$\begin{cases} dX(t) = (1 - \exp X(t))\,dt + dw(t) \\ X(0) = x \end{cases} \qquad (52)$$

Conclusion : le modèle choisit pour le voltage en travers la diode est un processus aléatoire $X(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique (52)

7.2 Instant de première sortie du processus $X(t)$ de l'intervalle $]\alpha,\beta[$

Soit $X(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique (52). On note par τ_x instant de première sortie de $X(t)$ de l'intervalle $]\alpha,\beta[$

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 : X(t) \notin\ ]\alpha,\beta[,\ X(0) = x\}$$

7.2.1 Proposition

$$\tau_x = \inf\{t \geq 0 : \xi(t) \notin\ ]\exp(-\beta),\exp(-\alpha)[,\ \xi(0) = \exp(-x) = z\} = \tau'_z.$$

avec $\xi(t)$ solution de l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\xi(t) = [1 - \frac{1}{2}\xi(t)]\, dt - \xi(t)\, dw(t) \\ \xi(0) = z \end{cases} \qquad (53)$$

Démonstration :

On pose $u(t,X(t)) = \exp(-X(t)) = \xi(t)$, et on applique la formule d'Itô à la fonction $u(t,x) = \exp(-x)$

on obtient

$$\begin{cases} d\xi(t) = [-\exp(-X(t))(1-\exp(-X(t))) + \frac{1}{2}\exp(-X(t))]\, dt - \exp(-X(t))\, dw(t) \\ \xi(0) = \exp(-x) = z \end{cases}$$

En remplaçant $\exp(-X(t))$ par $\xi(t)$ on obtient l'équation différentielle stochastique (53)

de plus

$$\alpha \prec X(t) \prec \beta \Leftrightarrow \exp(-\beta) \prec \xi(t) \prec \exp(-\alpha)$$

7.2.2 Répartition du lieu de sortie $X(\tau_x)$

Soit $v(z) = E(f(\xi(\tau'_z)))$, alors d'après la remarque 4.3.3 ; $v(z)$ est solution du systéme

$$\begin{cases} \mathcal{M}v(z) = 0 \\ v(a) = f(a) \text{ et } vb) = f(b) \end{cases} \qquad (56)$$

Pour toute fonction réguliére f. ou $a = e^{-\beta}$ et $b = e^{-\alpha}$

$\mathcal{M}$ étant l'opérateur différentiel elliptique. C'est cet opérateur qu'on utilise car d'après la remarque (3.3.2.2) le processus $\xi(t)$ est homogène

$$(56) \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}(z) + (2-z)\frac{\partial v}{\partial z}(z) = 0 \\ v(a) = f(a) \text{ et } v(b) = f(b) \end{cases}$$

Cette équation admet pour solution

$$v(z) = \int_a^z \exp\{-\int_a^y \frac{2-x}{x^2}dx\}dy$$

$$v(z) = \frac{1}{a}e^{-\frac{2}{a}}\int_a^z ye^{\frac{2}{y}}dy = -\frac{4}{a}e^{\frac{-2}{a}}\int_{\frac{2}{z}}^{\frac{2}{a}} \frac{e^t}{t^3}dt$$

$$v(z) = -\frac{4}{a}e^{\frac{-2}{a}}\left\{-\frac{1}{8}(a^2e^{\frac{2}{a}} - z^2e^{\frac{2}{z}}) - \frac{1}{4}(ae^{\frac{2}{a}} - ze^{\frac{2}{z}}) + \frac{1}{2}\int_{\frac{2}{z}}^{\frac{2}{a}} \frac{e^t}{t}dt\right\}$$

Si on considère la fonction $\Psi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^t}{t}dt,$ définie pour $x \neq 0$ qu'on appelle fonction exponentielle intégrale et qui est tabulée. Alors :

$$v(z) = -\frac{4}{a}e^{\frac{-2}{a}}\left\{(\frac{z+2}{8})ze^{\frac{2}{z}} - (\frac{a+2}{8})ae^{\frac{2}{a}} + \frac{1}{2}(\Psi(\frac{2}{a}) - \Psi(\frac{2}{z}))\right\}$$

La remarque 4.3.5 entraîne que $\tau'_z \prec \infty$ $p.s.$ donc $\xi(\tau'_z)$ prend presque sûrement la valeur a ou b. par suite

$v(z) = v(a)P\{\xi(\tau'_z) = a\} + v(b)P\{\xi(\tau'_z) = b\} = v(b)P\{\xi(\tau'_z) = b\}$ car $v(a) = 0$

$$P\{\xi(\tau'_z) = b\} = \frac{v(z)}{v(b)} \quad \text{et} \quad P\{\xi(\tau'_z) = a\} = \frac{v(b)-v(z)}{v(b)}$$

Par ailleurs

$P\{\xi(\tau'_z) = b\} = P\{\exp(-X(\tau_x) = \exp(-\alpha)\} = P\{X(\tau_x) = \alpha\}$. de même

$$P\{\xi(\tau'_z) = a\} = P\{X(\tau_x) = \beta\} \bullet$$

7.2.3 Espérance mathématique $E\tau_x$

Posons d'abord $m_1(z) = E\tau'_z$

D'après la remarque (435) $m_1(z)$ est solution du système différentiel

$$\begin{cases} \mathcal{M}m_1(z) = -1 \quad \text{pour } z \in]a,b[\\ m_1(a) = m_1(b) = 0 \end{cases}$$

qui donne

$$\begin{cases} z^2 \frac{\partial^2 m_1}{\partial z^2}(z) + (2-z)\frac{\partial m_1}{\partial z}(z) = -2 \quad \text{pour } z \in]a,b[\\ m_1(a) = m_1(b) = 0 \end{cases} \qquad (57)$$

On résout l'équation (57) par la méthode des variations des constantes en utilisant les solutions de l'équation (56). On aura alors la solution de (57) qui vérifie la condition $m_1(a) = 0$

$$cv(z) + 2\int_a^z \frac{v(z)-v(x)}{x^2v'(x)}dx$$

Comme $v(b) \neq 0$, on trouve donc

$$m_1(z) = -2\frac{v(z)}{v(b)}\int_a^b \frac{v(b)-v(z)}{z^2v'(z)}dz + 2\int_a^z \frac{v(z)-v(x)}{x^2v'(x)}dx$$

Aprés un premier calcul

$$m_1(z) = -2\frac{z(z+2)e^{\frac{2}{z}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{z})}{b(b+2)e^{\frac{2}{b}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{b})}\int_a^b \frac{z(z+2)e^{\frac{2}{z}}-4\Psi(\frac{2}{z})-b(b+2)e^{\frac{2}{b}}+4\Psi(\frac{2}{b})}{2z^2e^{\frac{2}{z}}}dz +$$
$$2\int_a^z \frac{x(x+2)e^{\frac{2}{x}}-4\Psi(\frac{2}{x})-z(z+2)e^{\frac{2}{z}}+4\Psi(\frac{2}{z})}{2x^2e^{\frac{2}{x}}}dx$$

Finalement

$$m_1(z) = -2\frac{z(z+2)e^{\frac{2}{z}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{z})}{b(b+2)e^{\frac{2}{b}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{b})} \times$$
$$\left[\frac{b-a}{2} + \log\frac{b}{a} - \int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{b}} \Psi(u)\, e^u du - \{\tfrac{1}{4}b(b+2)e^{\frac{2}{b}} - \Psi(\tfrac{2}{b})\}(e^{\frac{-2}{b}} - e^{\frac{-2}{a}})\right]$$
$$+2\left[\frac{z-a}{2} + \log\frac{z}{a} - \int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{z}} \Psi(u)\, e^u du - \{\tfrac{1}{4}z(z+2)e^{\frac{2}{z}} - \Psi(\tfrac{2}{z})\}(e^{\frac{-2}{z}} - e^{\frac{-2}{a}})\right]$$

Pour calculer $E\tau_x$ il suffit de remplacer z par e^{-x} et a par $e^{-\beta}$, ainsi que b par $e^{-\alpha}$ dans l'expression (58)•

7.2.4 Remarque

Soit $\breve{E}\tau_x$ une valeur approchée de $E\tau_x$ pour x fixé.

On écrit l'expression (58)

$$m_1(z) = -2AB + 2C$$

avec $A = \frac{z(z+2)e^{\frac{2}{z}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{z})}{b(b+2)e^{\frac{2}{b}}-a(a+2)e^{\frac{2}{a}}+4\Psi(\frac{2}{a})-4\Psi(\frac{2}{b})}$

$$B = \left[\frac{b-a}{2} + \log\frac{b}{a} - \int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{b}} \Psi(u)\, e^u du - \{\tfrac{1}{4}b(b+2)e^{\frac{2}{b}} - \Psi(\tfrac{2}{b})\}(e^{\frac{-2}{b}} - e^{\frac{-2}{a}})\right]$$
$$C = \left[\frac{z-a}{2} + \log\frac{z}{a} - \int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{z}} \Psi(u)\, e^u du - \{\tfrac{1}{4}z(z+2)e^{\frac{2}{z}} - \Psi(\tfrac{2}{z})\}(e^{\frac{-2}{z}} - e^{\frac{-2}{a}})\right]$$

pour des valeurs fixées de a, b et z on peut calculer une valeur approchées de $m_1(z)$.

Car la fonction $\Psi(u) = \int_{-\infty}^{u} \frac{e^s}{s} ds$ est tabulée

De meme on calculera $\int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{b}} \Psi(u)\, e^u du$ et $\int_{\frac{-2}{a}}^{\frac{-2}{z}} \Psi(u)\, e^u du$ par la formule des trapèzes.

Voici une table de $\Psi(u)$ pour des valeurs de u : $-2 \leq u \leq -1$

U	$\Psi(u)$
-2	-0.0489
-1.9	-0.0560
-1.8	-0.0647
-1.7	-0.0746
-1.6	-0.0863
-1.5	-0.1000
-1.4	-0.1162
-1.3	-0.1354
-1.2	-0.1584
-1.1	-0.1859
-1	-0.2193

On choisit par exemple $\alpha = -0.69$ on a alors $b = e^{-\alpha} = 2$

de même $\beta = 0$ alors $a = e^{-\beta} = 1$

x	$\breve{E}\tau_x$	$P\{X(\tau_x) = \beta\}$	$P\{X(\tau_x) = \alpha\}$
-0.22	0.29	0.72	0.28
-0.28	0.33	0.63	0.37
-0.43	0.35	0.43	0.57

7.3 Simulation du modèle

Il existe de nombreuses méthodes pour simuler la solution d'une équation différentielle stochastique. La méthode la plus élémentaire est la **méthode d'Euler aléatoire.** Le principe en est le suivant :
Considèrons une équation différentielle stochastique :

$$\begin{cases} dX(t) = b(X(t))\, dt + \sigma(X(t))\, dw(t) \\ X(0) = x \end{cases}$$

On se fixe un pas de discrétisation en temps Δt. On peut alors construire un processus à temps discrêt $(S_n)_{n\geq 0}$ approximant la solution de l'équation différentielle stochastique aux instants $n\Delta t$, en posant :

$$\begin{cases} S_{n+1} - S_n = \left\{ b(S_n)\, \Delta t + \sigma(S_n)\, [w((n+1)\, \Delta t) - w(n\, \Delta t)] \right\} \\ S_0 = x \end{cases}$$

Si $X^n(t) = S_{[\frac{t}{\Delta t}]}$, $(X^n(t))_{t\geq 0}$ approxime $X(t)$, au sens que pour tout $T \succ 0$:

$$E(\sup_{t\leq T}|X^n(t) - X(t)|^2) \leq C_T \Delta t$$

C_T étant une constante dépendant uniquement de T.

La **figure 2** montre un flot de trajectoires du processus $X(t)$, solution de l'équation (52), sur un intervalle de temps $t \in [0;1]$, pour différentes valeurs du pas Δt, avec un ordre de convergence exponentiel de l'ordre de 0.02. Nous avons utilisés pour cela l'algorithme de simulation d'Euler et le logiciél $[ANSEDS]$

7.3.1 Etude statistique

Le processus $X(t)$ démarre du point $x = -0.22$. On considère la bande délimitée par la droite $\alpha = -0.69$ et la droite $\beta = 0$. **(Fig 2)**. On construit un échantillon $(\tau_x^1, \tau_x^2, \ldots, \tau_x^m)$, des temps de sortie, on considèrant les abscisses des points d'intersection des trajectoires simulées $X_1(t), \ldots, X_n(t)$ avec les droites $\alpha = -0.69$ et $\beta = 0$, en sortant de la bande.

Flot de trajectoires simulées du processus X (t)

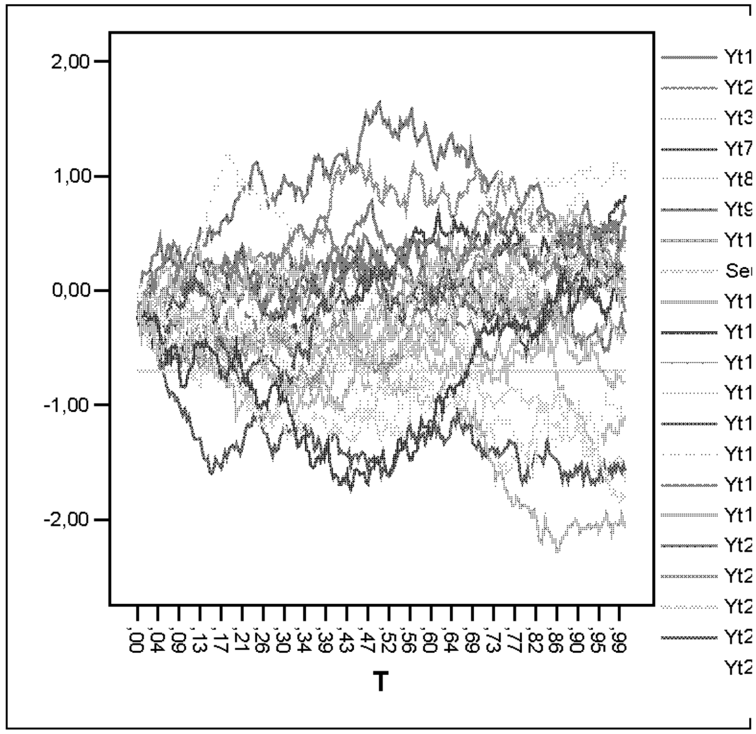


Fig 2

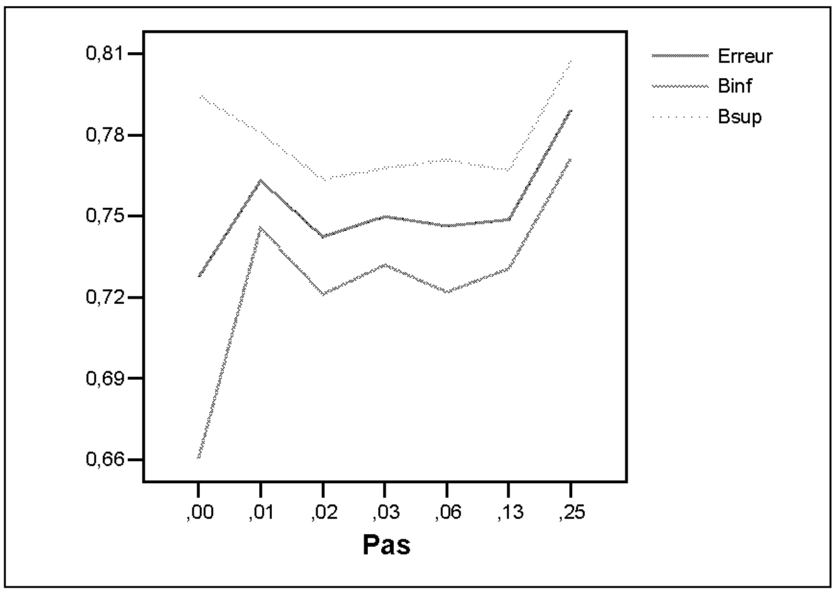
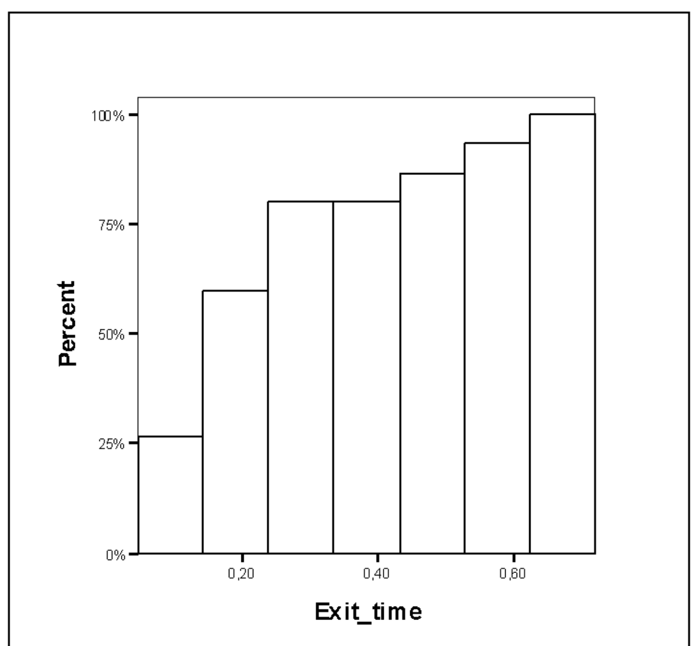


Fig 7

Courbe de l'erreur en fonction du pas de discrétisation

Courbe cumulée de l'échantillon du temps de sortie

Fig 3



7.3.1 Remarques

1) Par application de la loi des grands nombres, on peut donc approcher l'espérance de l'instant de première sortie $E\tau_x$ par l'éspérance simulée

$$E\tau_x^s = \frac{\sum_{i=1}^{m} \tau_x^i}{m}$$

Après calcul on trouve $E\tau_x^s \simeq 0.25$. Il faut remarquer cependant que cette espérance simulée est calculée par rapport à l'information apportée par la tribu $\mathcal{F}_s$, engendrée par l'échantillon simulé $(X_1(t),\ldots,X_n(t))$.

La **figure 3** montre la courbe cumulée de l'échantillon $(\tau_x^1,\ldots,\tau_x^m)$.

2) Avec le logiciél $[SPSS]$ on approxime la loi de l'échantillon $(\tau_x^1,\ldots,\tau_x^m)$ par une loi Gamma qui a pour paramétre de forme 1.62, et pour paramétre d'échelle 6.43, **(Fig 4)**.

De même on approxime la loi de $(\tau_x^1,\ldots,\tau_x^m)$ par une loi de Weibull qui a pour paramétre de forme 1.43, et pour paramétre d'échelle 0.27, **(Fig 5)**.

On constate que la loi de Weibull approche le mieux la loi de l'échantillon $(\tau_x^1,\ldots,\tau_x^m)$ **(Fig 6)**.

3) L'estimation non paramétrique de la densité de τ_x peut être utilisée

7.3.2 Conclusion :

Par souci de ne pas perdre la qualité des simulateurs de la diffusion pour la génération d'un ensemble A de la filtration $\mathcal{F}_s$, on s'est limiter à une taille d'échantillon de 25 trajectoires. Les résultats que nous présentons sont relativement liés à cette information

Approximation de la loi de l'échantillon simulé du temps de sortie par une loi Gamma

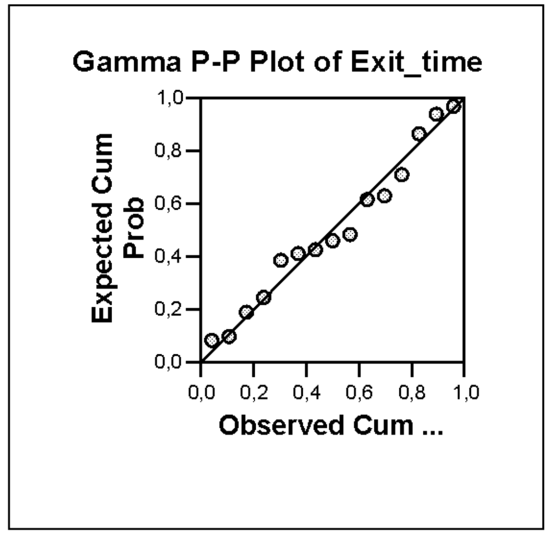


Fig 4

Approximation de la loi de l'échantillon simulé du temps de sortie par une loi de Weibull

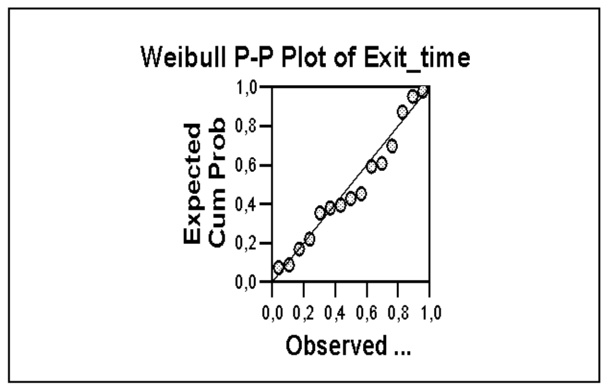


Fig 5

Déviation de la loi de l'échantillon simulé du temps de sortie par rapport à la loi de Weibull

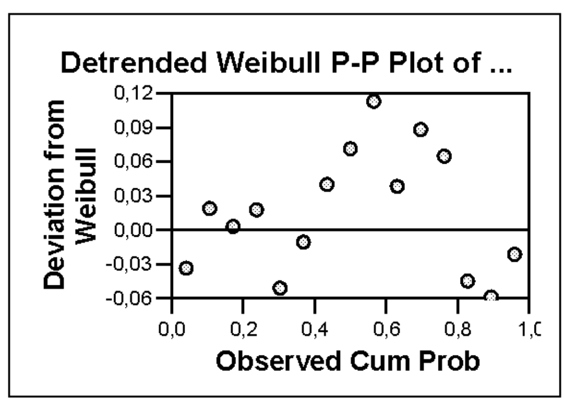


Fig 6

7.3.3 Estimation non paramétrique de la densité de τ_x par la méthode du Noyau Gaussien

Soient $X_1, X_2, \ldots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes et de même loi de densité de probabilité p par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition $F(x) = \int_{-\infty}^{x} p(t)\, dt$.
Considérons la fonction de répartition empirique $F_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i \leq x\}}$, d'après la loi forte des grands nombres $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x),\ p.s\ \forall x \in \mathbb{R}$, donc F_n est un estimateur convergent de F de plus laconvergence $p.s$ est uniforme. Comment peut-on estimer p ? Une des premières solutions intuitives a été proposée par Rosenblatt (1956), pour $h \succ 0$ assez petit $p(x) \simeq \frac{F(x+h)-F(x-h)}{2h}$ en remplaçant ici F par l'estimateur F_n on obtient $p_n^R(x) = \frac{1}{2nh}\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{x-h<X_i\leq x+h\}} = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K_0(\frac{X_i-x}{h})$, ou $K_0(u) = \frac{1}{2}\mathbb{I}_{\{-1<u\leq 1\}}$.

Parzen a suggéré une généralisation de cet estimateur :

$$p_n(x) = \frac{1}{nh}\sum_{i=1}^{n} K(\frac{X_i-x}{h}).$$

Ou $K : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction intégrable telle que $\int_{\mathbb{R}} K(u)\, du = 1$, c'est l'estimateur à noyau de la densité.

La fonction K est dite noyau, le paramétre h fenêtre. Si $K(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{u^2}{2})$ il est appelé **Noyau Gaussien.**

Dans notre cas on utilise le logiciel [$\mathbb{R}$] qui utilise la méthode du Noyau Gaussien pour estimer la densité de l'instant de première sortie τ_x voir (fig 8)

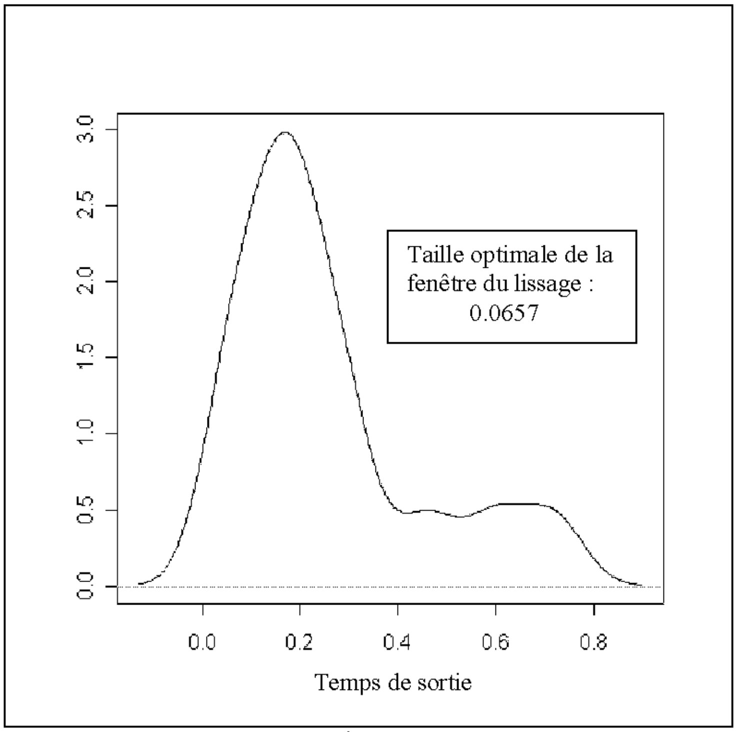


Fig 8

Estimation non paramétrique de la densité du premier instant de sortie

CONCLUSION

Ce travail a été consacré à l'étude du premier instant de sortie dans les équations différentielles stochastiques. Il est à remarquer que les théorèmes que nous avons utilisés pour trouver la répartition de l'instant de première sortie font intervenir l'opérateur parabolique des E.D.P non linéaires $\mathcal{L}$ pour les processus non homogènes, et l'opérateur elliptique des E.D.P non linéaires $\mathcal{M}$ pour les processus homogènes. Donc la résolution de ce problème revient à la résolution des E.D.P paraboliques ou elliptiques, mais dans beaucoup de cas la résolution analytique de ce problème s'avère très difficile sinon impossible. Cependant J.G.Wendel (1980) a pu résoudre un problème de ce genre, il a trouvé la répartition du premier instant de sortie d'un mouvement brownien n-dimensionnel, de la sphère unité.

Dans cette thèse nous avons pu résoudre le problème analytiquement pour un modèle qui fait intervenir une équation différentielle stochastique du 1^{er}ordre dont la solution était un processus homogène.

La méthode utilisée était de faire des transformations sur l'équation grace à la formule d'Itô afin d'aboutir à une E.D.P standard.

Nous avons aussi résolu le problème statistiquement avec la méthode de Monte-Carlo en faisant des simulations

Notations

A^* : Matrice transposée de A

$p.s$: Presque sûrement

$\mathbb{R}^n$: Espace Euclidien de dimension n

$P\{A\}$: Probabilité de l'événement A

$\mathbb{I}_A$: Fonction indicatrice de A

$a \wedge b$: Inf $\{a, b\}$

$a \vee b$: Sup $\{a, b\}$

$[x]$: Partie entiére de x

Bibliographie

[1] M.Abramowitz et I.A.Stegun,editeurs. *Handbook of Mathematical Functions.* Dover, 9th edition. 1970

[2] K.Boukhetala. *Estimation of the first passage time distribution for a simulated diffusion process.* Maghreb math. Vol 7, $N_0$1, Jun98, pp 1-25

[3] K.Boukhetala. *Estimation of the time distribution of a diffusion process, modelling a semi-conducteur system.* Edited R.Payne and P.Lane. proc in computationel statistics-1998. pp 146-148

[4] K.Boudali. *Aspect numérique et simulation des équations différentielles stochastiques.* Thèse de Magister en probabilités et statistiques. USTHB, 2004

[5] K.Boudali et K.Boukhetala. *Aspect «Computationel» et simulation dans les équations différentielles stochastiques* (EDS). Actes du colloque MOAD. 2005

[6] D.Dacunha-Castelle et Duflo. *Probabilités et statistiques, tome1, problèmes à temps fixe.* Masson, *1982.*

[7] W.Feller. *An introduction to probability theory and its applications.* New york-London-Sidney. 1968

[8] A. Friedman. *Stochastic Differential Equation and Applications.* Academic Press, 1975

[9] I.Guikhman, A.Skorokhod. *Introduction à la théorie des processus aléatoires.* Edition Mir, 1980

[10] S.Karlin et H. Taylor. *A Second Course in Stochastic Process.* Academic Press, 1981

[11] M. Parodi. *Mathématiques appliquées à l'art de l'ingénieur.* Tome 4. *Equations differentielles.* Edition d'enseignement supérieur, Paris, 1965

[12] J.G.Wendel. *Hitting spheres with Brownian motion.* Ann. Probab. 8, 1980, 164-169