

N° d'ordre : 15/2016-M/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : MATHEMATIQUES

Spécialité: STATISTIQUE MATHEMATIQUE ET PROBABILITE

Par : SAADI Sihem

SUJET

**Modélisation Aléatoire du Processus
d'Occurrence de Séisme et Application**

Soutenu publiquement, le 17/04/2016, devant le jury composé de:

Mme. Djaballah Khadidja	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Présidente
Mr. Hamdache Mohamed	Directeur de Recherche	CRAAG	Directeur de Mémoire
Mme. Saggou Hafida	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examinatrice
Mr. Messaci Rabah	Maître de Conférences/A	à l'USTHB	Examineur

Table des matières

Table des matières	1
Introduction générale	1
1 Généralités sur les processus aléatoires	4
1.1 Introduction aux processus aléatoires	5
1.2 Notion sur l'espérance conditionnelle	5
1.2.1 Espérance conditionnelle sachant une tribu	5
1.2.2 Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire	14
1.3 Notion de filtration	15
1.4 Notion de temps d'arrêt	15
1.5 Notions sur les processus aléatoires	18
1.6 Processus ponctuels	19
1.6.1 Processus ponctuel	20
1.6.2 Processus de Poisson	25
1.7 Intensité conditionnelle d'un processus ponctuel	33
1.8 Exemples de processus ponctuels	36
1.8.1 Modèle d'Omori modifiée	36
1.8.2 Modèle "ETAS" (Epidemic Type Aftershok Sequence)	36
1.8.3 Modélisation hiérarchique	38
2 Procédures d'identification d'événements dépendants dans un processus ponctuel	41
2.1 Introduction	42

2.2	Procédures déterministes	44
2.2.1	Exemple des procédures utilisées	51
2.3	Procédures aléatoires	53
2.3.1	La procédure stochastique pour les modèles MISD	55
2.3.2	Les étapes de l'Algorithme "Estimation -Maximisation" (EM)	56
2.4	Conclusion	58
3	Analyse du caractère Poissonien	60
3.1	Introduction	61
3.2	Préliminaires	61
3.3	Tests temporels	62
3.3.1	Test du Chi-deux Multinomial	63
3.3.2	Test du Chi-deux Conditionnel	64
3.3.3	Test de Kolmogorov-Smirnov	64
3.3.4	Test de Brown et Zhao	65
3.4	Test spatio-temporel	68
3.4.1	Les étapes de test de permutation	70
3.4.2	Algorithme du test	72
3.5	Partie d'application pour le test de permutation	75
3.5.1	Préliminaires	75
3.5.2	Procédure du test de permutation	75
	Conclusion générale	82
	Annexes	83
	Bibliographie	94

Introduction générale

Ce mémoire est lié à l'utilisation des processus ponctuels dans un domaine de l'environnement, de façon particulière nous abordons l'utilisation et l'application des processus aléatoires ponctuels en sismologie.

Il est établi que la théorie des processus aléatoires fait l'objet d'une grande utilisation et trouve un large champ d'application dans divers domaines. Ainsi, souvent ils sont utilisés en biologie dans des études d'évolution génétique, ou encore de médecine en épidémiologie par exemple.

Dans ce travail, nous représenterons un processus d'occurrence des séismes par un processus ponctuel général $\{(t_i, (x_i, y_i), m_i), i = 1, \dots\}$, caractérisé par son intensité conditionnelle $\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t)$, qui est la probabilité infinitésimale d'avoir un évènement sur un intervalle de longueur Δt .

Tout au long de ce travail, nous considérons la classe des processus ponctuels dont l'intensité conditionnelle s'écrit sous la forme la plus générale:

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \mu(x, y) + \int_s h(t, x, y, \tau, \acute{x}, \acute{y}, \acute{m}) N(d\tau, d\acute{x}, d\acute{y}, d\acute{m})$$

avec

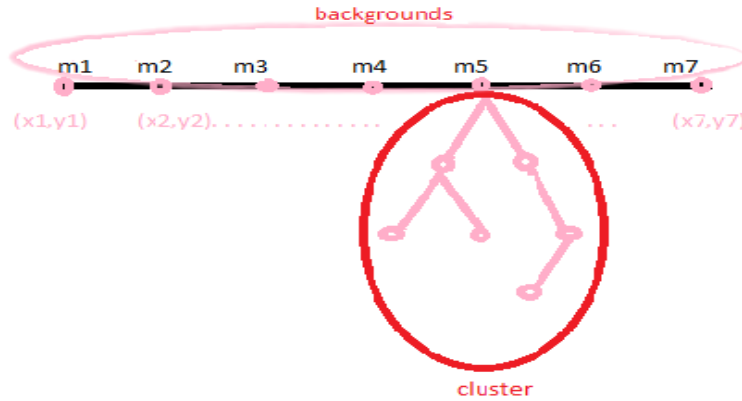
\mathcal{F}_t : l'histoire du processus ponctuel à l'instant t ,

$N(d\tau, d\acute{x}, d\acute{y}, d\acute{m})$: le processus de comptage associé au processus ponctuel,

$\mu(x, y)$: l'intensité du processus « *background* » que nous supposons homogène dans le temps,

$h(t, x, y, \tau, \acute{x}, \acute{y}, \acute{m})$: la fonction réponse de l'évènement à l'instant $t, t > \tau$, permettant de générer la composante "cluster", et $S = [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$.

Ce qui signifie que la classe du processus ponctuels qui sont au centre de ce travail sont constitués de deux composantes. L'une dite "*background*" regroupant les événements indépendants entre eux d'intensité $\mu(x, y)$ et la seconde dite "*Trigger*" constituée d'événements "liés" entre eux, formée par des événements "regroupés en grappes" dans le temps et dans l'espace, cette composante est dite "*cluster*".



L'un des aspects importants de notre travail consiste dans un premier temps de développer différentes procédures pour identifier les événements dépendants ou encore liés entre eux et les éliminer du processus ponctuel global, et nous préserverons que la composante «*background*» qui regroupe les événements indépendants entre, Puis dans un second temps nous développerons un test statistique performant qui est l'axe de ce travail est le test de *permutation*, défini sur la base d'une distance *spatio-temporelle*, dans le but d'analyser le caractère du processus ponctuel restant du processus global amputé de ses événements dépendants, lequel l'on supposera qu'il est Poissonien, devrait nous permettre d'envisager des applications sur des données réelles.

La question qui se pose: le nouveau processus obtenu est il Poissonien ou non?.

Pour répondre à cette question nous suivons les démarches suivantes:

Le premier chapitre est consacré à des rappels sur la théorie des processus aléatoires de façon générale et à la théorie des processus ponctuels en particulier.

Nous rappelons la notion d'espérance conditionnelle ainsi que ses principales propriétés.

Puis, nous donnerons des exemples de processus ponctuels définis à partir de l'intensité conditionnelle. Ces processus définis jouent un rôle important dans la modélisation en sismologie, le plus connu étant le processus de Poisson.

Le second chapitre traite en détail les procédures d'identification d'événements dépendants dans un processus ponctuel qui permettent d'identifier et d'éliminer, à partir d'un échantillon donné $\{t_i, (x_i, y_i), m_i, i = 1, \dots, N\}$, les événements dépendants «*trigger*» du processus global. Pour obtenir un nouveau processus supposons qu'il est du caractère Poissonien de la forme suivante:

$$\lambda(t, x, y \mid \mathcal{F}_t) = \tilde{\mu}(x, y)$$

On termine ce chapitre par une conclusion qui ramène ce chapitre.

Dans le troisième chapitre, nous voudrions tester le processus obtenu après le declustering est Poissonien.

Pour ce faire, il existe différents tests statistiques permettant de tester l'hypothèse que le processus "background" est Poissonien.

Parmi ces tests; on cite le test de Kolmogorov-Smirnov, test de Chi-deux Multinomial, test de Chi-deux Conditionnel, test de Kolmogorov-Smirnov, test de Brown-Zhao, et le nouveau test de *permutation* qui fait l'objet de ce travail avec un exemple d'application.

Nous terminerons avec une conclusion générale, qui résume ce modeste travail.

Chapitre 1

Généralités sur les processus aléatoires

Sommaire

1.1	Introduction aux processus aléatoires.....	5
1.2	Notion sur l'espérance conditionnelle.....	5
1.3	Notion de filtration.....	15
1.4	Notion de temps d'arrêt.....	16
1.5	Notions sur les processus aléatoires.....	19
1.6	Processus ponctuels.....	21
1.7	Intensité conditionnelle d'un processus ponctuel.....	34
1.8	Exemples de processus ponctuels.....	37

1.1 Introduction aux processus aléatoires

Un processus ponctuel (*Daley et Vere-Jones, 2003; Van Lieshout, 2000*) est un mécanisme statistique qui modélise un échantillon de données dans un espace donné.

Une répartition de points dans l'espace ou dans le temps peut-être considérée comme la réalisation d'un processus ponctuel (*Vaillant, 1991; Vaillant, 1992; Celini et Vaillant, 1999*). Elle se présente sous la forme d'un ensemble de coordonnées ou de dates d'occurrences. En générale, pour faire de l'inférence statistique sur un processus, on ne dispose que d'une réalisation de ce processus (*Vaillant et al., 1997*).

Ce chapitre est consacré à des rappels sur la notion des processus aléatoires. Les différentes sections constituant ce chapitre sont liées aux notions de filtration, temps d'arrêt et aux espérances conditionnelles. Une attention particulière est accordée aux rappels sur les processus aléatoires de façon générale et aux processus ponctuels en particulier.

Pour les détails, on pourra consulter, *Brémaud, (1981)* ou encore *P.A.Meyer et C.Dellacherie (1974)*.

1.2 Notion sur l'espérance conditionnelle

Dans ce paragraphe on se propose d'introduire la notion d'espérance conditionnelle ainsi que quelques propriétés caractéristiques.

Nous commençons par poser la définition de cet outil. Cette notion à été abordé par de nombreux auteurs et joue un rôle fondamental en théorie des martingales (*Neveu, 1970*), (*Meyer, 1969*). Dans ce qui suit, nous nous sommes basés sur les travaux de *Baladi et al., (1998)* ou encore *Rao (1993)*.

1.2.1 Espérance conditionnelle sachant une tribu

Définition 1.2.1 *On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire réelle positive (ou intégrable).*

On se donne une sous-tribu \mathfrak{B} de \mathcal{F} .

On appelle espérance conditionnelle de X relativement a la sous-tribu \mathfrak{B} si elle existe.

Toute variable aléatoire Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ vérifiant les propriétés

1)- Y est \mathfrak{B} – mesurable.

$$2)- (\forall B \in \mathfrak{B}), \int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

On notera, $Y = E(X | \mathfrak{B})$.

Remarque

1). Si X est une variable aléatoire positive ($X \geq 0$) alors la variable aléatoire $E(X | \mathfrak{B})$ est positive,

2). Si X est une variable aléatoire intégrable alors Y est une variable aléatoire intégrable.

On peut démontrer la première remarque: c'est-à-dire: partant de la formule suivante

$$\frac{1}{P(B)} \int_B X d\mathbf{P} = E(X | B)$$

On remarque que:

si $X \geq 0$ alors $\frac{1}{P(B)} \int_B X d\mathbf{P} > \mathbf{0}$, ce qui implique que $E(X | B)$ est aussi une variable aléatoire positive.

Pour la deuxième remarque,

si X est intégrable c'est-à-dire: $E(|X|) \leq +\infty$, on a

$$E(|X|) = \int_B |X| d\mathbf{P} \leq +\infty,$$

et

$$\frac{1}{P(B)} \int_B |X| d\mathbf{P} = E(|X| | B),$$

alors

$$E(|X| | B) \leq +\infty$$

$E(|X| | B)$ est une variable aléatoire intégrable.

Dans le théorème suivant, nous montrons l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle.

Théorème 1.2.1 On considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et \mathfrak{B} est une sous-tribu de \mathcal{F} .

On se donne X une variable aléatoire réelle positive (ou intégrable), définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$.

Alors,

Il existe une et une seule variable aléatoire Y vérifiant,

1) Y est \mathfrak{B} – mesurable

$$2) (\forall B \in \mathfrak{B}), \int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

Démonstration : Pour démontrer ce théorème, nous suivons Bladi et al.,(1998) pp 3.

1) Pour montrer l'existence de la variable aléatoire Y , nous utilisons le procédé standard,

a) On commence par montrer dans le cas ou X est une fonction élémentaire, i.e $X = 1_A$,

avec $A \in \mathcal{F}$, $(\forall B \in \mathfrak{B})$

Soit $B \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B 1_A d\mathbf{P} = \mathbf{P}(A \cap B) = \int_{B \cap A} 1_\Omega d\mathbf{P} \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \frac{1}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}(B) \mathbf{P}(A \cap B) \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \mathbf{P}(B) \cdot \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \end{aligned}$$

On sait que $\mathbf{P}(A | B)$ est la probabilité conditionnelle \mathfrak{B}

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(A | B) &= \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)} \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B \left(\frac{1}{\mathbf{P}(B)} \mathbf{P}(A \cap B) \right) d\mathbf{P} \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B (\mathbf{P}(A | B)) d\mathbf{P} \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B \left(\int_A \frac{1}{\mathbf{P}(B)} 1_B d\mathbf{P} \right) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

Nous avons trouvé la variable aléatoire Y que

$$Y = \int_A \frac{1}{\mathbf{P}(B)} 1_B d\mathbf{P}$$

Telle que

$$(\forall B \in \mathfrak{B}) : \int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

Y est \mathfrak{B} – mesurable

b) Dans le cas où X est une fonction étagée c'est-à-dire

Soit

$$X = \sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k} \quad ; A_k \in \mathfrak{B}, k = 1, \dots, n$$

Soit $B \in \mathfrak{B}$;

$$\int_B X d\mathbf{P} = \int_B \left(\sum_{k=1}^n a_k 1_{A_k} \right) d\mathbf{P}$$

En tenant compte de la linéarité de l'intégrale, il vient.

$$\int_B X d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^n a_k \int_B 1_{A_k} d\mathbf{P}$$

Comme la propriété 2/ est vérifiée pour les indicatrices, on en déduit

$$\int_B X d\mathbf{P} = \sum_{k=1}^n a_k \int_B 1_{B_k} d\mathbf{P}$$

En utilisant une nouvelle fois la linéarité de l'intégrale il vient

$$\int_B X d\mathbf{P} = \int_B \left(\sum_{k=1}^n a_k 1_{B_k} \right) d\mathbf{P}$$

Finalement, nous avons trouvé une variable aléatoire

$$Y = \sum_{k=1}^n a_k 1_{B_k}, B_k \in \mathfrak{B}$$

Telle que

$$(\forall B \in \mathfrak{B}), \int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

et Y est \mathfrak{B} – mesurable.

c) Dans le cas où X est une variable aléatoire positive on sait qu'on peut toujours trouver $(X_n, n \in \mathbb{N})$ suite croissante de variable aléatoire réelle étagées telle que $\lim_n \uparrow X_n = X$ étagées et Y est \mathfrak{B} – mesurable.

Ainsi, soit $B \in \mathfrak{B}$,

$$\int_B X d\mathbf{P} = \int_B \lim_n \uparrow X_n d\mathbf{P}$$

Notons

$$X = \lim_n \uparrow X_n$$

On applique le théorème de la convergence monotone (Rao, 1993 pp 34), ce qui nous donne

$$\int_B X d\mathbf{P} = \lim_n \uparrow \int_B X_n d\mathbf{P}$$

Comme la propriété 2) est vraie pour les fonctions étagées

$$\int_B X_n d\mathbf{P} = \int_B Y_n d\mathbf{P}$$

Y_n est \mathfrak{B} – mesurable, ce qui nous donne,

$$\int_B X d\mathbf{P} = \lim_n \uparrow \int_B Y_n d\mathbf{P}$$

D'après le théorème de la convergence monotone (Rao, 1993 pp 34),

on obtient,

$$\int_B X d\mathbf{P} = \lim_n \uparrow \int_B Y_n d\mathbf{P} = \int_B (\lim_n \uparrow Y_n) d\mathbf{P}$$

Notons,

$$Y = \lim_n \uparrow Y_n$$

Comme Y_n , \mathfrak{B} – mesurable alors

$$(\forall B \in \mathfrak{B}); \int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

et Y est \mathfrak{B} – mesurable,

e) dans le cas ou X de signe quelconque et $E(|X|) < +\infty$,

On remarque

$$X = X^+ - X^-$$

Avec $X^+ = X1_{\{X \geq 0\}}$ et $X^- = -X1_{\{X < 0\}}$,

les variables aléatoires X^+ et X^- sont toutes deux: intégrables et positives, elles admettent donc, toutes les deux, des espérances conditionnelles par rapport à \mathfrak{B} , il existe $Y^+ \in E(X^+ | \mathfrak{B})$ et $Y^- \in E(X^- | \mathfrak{B})$, avec $Y = Y^+ - Y^-$,

on posera donc:

Soit $B \in \mathfrak{B}$, alors

$$\begin{aligned} \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B X^+ d\mathbf{P} - \int_B X^- d\mathbf{P} = \int_B Y^+ d\mathbf{P} - \int_B Y^- d\mathbf{P} \\ \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B (Y^+ - Y^-) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

Ce qui permet de conclure que ($\forall B \in \mathfrak{B}$)

$$\int_B X d\mathbf{P} = \int_B Y d\mathbf{P}$$

Et Y est \mathfrak{B} -mesurable.

2) Montrons l'unicité: c'est-à-dire, supposons qu'ils existent deux variables aléatoires réelles Y_1 et Y_2 qui vérifient les propriétés 1) et 2)

On en déduit que

$$(\forall B \in \mathfrak{B}); \int_B Y_1 d\mathbf{P} = \int_B Y_2 d\mathbf{P}$$

ainsi, $Y_1 = Y_2$ \mathbf{P} -p.s. ■

Une fois l'existence et l'unicité de l'espérance conditionnelle établie, nous établissons quelques propriétés caractéristiques de l'espérance conditionnelle (*Neveu, 1970*) page 116.

Propriétés

On se donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace probabilisé et \mathfrak{B} une sous-tribu de \mathcal{F} .

1) Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ positive (ou intégrable)

Alors

$$E(E(X | \mathfrak{B})) = E(X)$$

2) ($\forall a, b \in \mathbb{R}$)

Si X et Y sont deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ positives (ou intégrables)

$$E(aX + bY | \mathfrak{B}) = a(E(X | \mathfrak{B})) + b(E(Y | \mathfrak{B})) \quad \mathbf{P} - p.s$$

- 3) Soit X et Y deux variables aléatoires réelles sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ positives (ou intégrables),
Si $X \leq Y$, alors

$$E(X | \mathfrak{B}) \leq E(Y | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

- 4) X étant une variable aléatoire réelle positive (ou intégrable),
Si \mathfrak{J} est une sous-tribu de \mathcal{F}

$$\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B},$$

alors

$$E(X | \mathfrak{J}) = E[E(X | \mathfrak{B}) | \mathfrak{J}] \quad \mathbf{P} - p.s.$$

Démonstration : Dans ce qui suit, nous démontrons point par point les propriétés énoncées,

- 1) On commence par établir la propriété (1):

$$E(E(X | \mathfrak{B})) = E(X)$$

Puisque $(\forall B \in \mathfrak{B})$, On a

$$\begin{aligned} \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B E(X | B) d\mathbf{P} \quad \text{on prend } \mathfrak{B} = \Omega \\ E(E(X | \mathfrak{B})) &= \int_{\Omega} E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} = \int_{\Omega} X d\mathbf{P} = E(X) \end{aligned}$$

- 2) On établit la deuxième propriété:

Soient $a, b \in \mathbb{R}$, et X, Y deux variables aléatoires réelles positive (ou intégrables) sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$,

$$E(aX + bY | \mathfrak{B}) = aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s.$$

Il suffit de montrer que

$$(\forall B \in \mathfrak{B}) : \int_B E(aX + bY | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} = \int_B [aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B})] d\mathbf{P}$$

Soit $B \in \mathfrak{B}$, quelconque,

$$\begin{aligned} \int_B [aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B})] d\mathbf{P} &= a \int_B E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} + b \int_B E(Y | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} \\ \int_B [aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B})] d\mathbf{P} &= a \int_B X d\mathbf{P} + b \int_B Y d\mathbf{P} \\ \int_B [aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B})] d\mathbf{P} &= \int_B (aX + bY) d\mathbf{P} \\ \int_B [aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B})] d\mathbf{P} &= \int_B E(aX + bY | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

Donc

$$E(aX + bY | \mathfrak{B}) = aE(X | \mathfrak{B}) + bE(Y | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

3) Pour la 3^{ième} propriété:

On se propose d'établir que,

$$\text{Si } X \leq Y \quad \mathbf{P} - p.s \text{ alors } E(X | \mathfrak{B}) \leq E(Y | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

Soit $X \leq Y$, d'après la définition (1.2.1) on a ($\forall B \in \mathfrak{B}$)

$$\begin{aligned} \int_B X d\mathbf{P} &= \int_B E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} \\ \int_B Y d\mathbf{P} &= \int_B E(Y | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} \end{aligned}$$

Soit

$$X \leq Y \quad \mathbf{P} - p.s$$

alors ($\forall B \in \mathfrak{B}$);

$$\int_B X d\mathbf{P} \leq \int_B Y d\mathbf{P}$$

Et tenant compte des égalités précédentes il vient que

$$\int_B E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} \leq \int_B E(Y | \mathfrak{B}) d\mathbf{P}$$

En déduit que;

$$E(X | \mathfrak{B}) \leq E(Y | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s.$$

4) On établit la 4^{ième} propriété: On montre que ;

Soit $B \in \mathfrak{J}$

$$\int_B E[E(X | \mathfrak{B}) | \mathfrak{J}] d\mathbf{P} = \int_B E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P}$$

Or $B \in \mathfrak{J}$ et $\mathfrak{J} \subset \mathfrak{B}$, alors,

$$\int_B E(X | \mathfrak{B}) d\mathbf{P} = \int_B X d\mathbf{P}$$

Et comme $B \in \mathfrak{J}$, on obtient

$$\int_B X d\mathbf{P} = \int_B E(X | \mathfrak{J}) d\mathbf{P}$$

Ainsi;

$$(\forall B \in \mathfrak{J}); \int_B E[E(X | \mathfrak{B}) | \mathfrak{J}] d\mathbf{P} = \int_B E(X | \mathfrak{J}) d\mathbf{P}$$

Ce qui nous permet de dire que

$$E[E(X | \mathfrak{B}) | \mathfrak{J}] = E(X | \mathfrak{J}) \quad \mathbf{P} - p.s.$$

■

Nous donnons dans la proposition suivante quelques propriétés liées aux théorèmes de convergence d'une suite de variables aléatoires (convergence monotone, Fatou, convergence dominée).

Proposition 1.2.1 *On donne $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité complet.*

X une variable aléatoire et $(X_n, n \in \mathbb{N})$ une suite de variables aléatoires

On a alors

1) *Si $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite croissante et $\lim_n \uparrow X_n = X$ \mathbf{P} -p.s.*

alors; $(E(X_n | \mathfrak{B}), n \in \mathbb{N})$ est une suite croissante et ,

$$\lim_n \uparrow E(X_n | \mathfrak{B}) = E(X | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

2) *Si $(X_n, n \in \mathbb{N})$ est une suite de variable aléatoire positives alors*

$$E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathfrak{B}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

3) On suppose que $\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X$ \mathbf{P} -p.s.

Si il existe une variable aléatoire Z , $Z \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$

Telle que;

$$(n \in \mathbb{N}); |X_n| \leq Z$$

Alors:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathfrak{B}) = E(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n | \mathfrak{B})$$

On obtient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E(X_n | \mathfrak{B}) = E(X | \mathfrak{B}) \quad \mathbf{P} - p.s$$

Le paragraphe suivant est basé sur le travail de Rao (1993)pp83.

1.2.2 Espérance conditionnelle sachant une variable aléatoire

Soient T une variable aléatoire à valeurs (E, ξ) et $\sigma(T)$ la plus petite tribu sur Ω rendant mesurable T . On rappelle qu'une variable aléatoire réelle $Z = 1_A$ est $\sigma(T)$ - mesurable si est seulement s'il existe une fonction numérique mesurable h sur (E, ξ) telle que $Z = h(T)$. Donc, si $\mathfrak{B} = \sigma(T)$, il existe une fonction numérique h dans \mathbb{R} , mesurable sur (E, ξ) , telle que $E(X | \mathfrak{B}) = h(T)$ p.s. Dans ce cas, le calcul de l'espérance conditionnelle ce ramène à celui de la fonction h . On écrit aussi $E(X | T)$ au lieu de $E(X | \sigma(T))$ et de façon suggestive,

$$h(t) = E(X | T = t)$$

Donc, Soit X variable aléatoire positive (resp. intégrable) on a $h(T) = E(X | T)$ p.s. si est seulement, pour toute fonction mesurable positive (resp. bornée) g ,

$$E(h(T)g(T)) = E(Xg(T))$$

L'espérance conditionnelle $E(X | T)$ est caractérisée par:

- 1) $E(X | T)$ c'est une variable $\sigma(T)$ mesurable.
- 2) $\int_{T \in B} E(X | T) d\mathbf{P} = \int_{T \in B} X d\mathbf{P} \quad , \forall B \in \sigma(T)$.

Le paragraphe suivant est dédié à la notion de filtration et de temps d'arrêt.

On définit tout d'abord la notion de filtration.

1.3 Notion de filtration

La notion de filtration permet de décrire l'évolution temporelle du phénomène considéré. Suivant *Dellacherie, (1974)* ou *Bremaud, (1981)* nous posons la définition.

Définition 1.3.1 Soit (Ω, \mathcal{B}) un espace mesurable.

Une filtration sur (Ω, \mathcal{B}) est une famille croissante $\{\mathcal{F}_t; t \geq 0\}$ de sous tribu de \mathcal{B} , telle que :

$$(\forall (s, t \in \mathbb{R}_+); s \leq t) \text{ alors } \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

En d'autres termes, la famille $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une famille croissante de sous-tribus de \mathcal{B} .

Notons, $\mathcal{F}_\infty = \sigma(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ la tribu engendrée par les sous-tribus \mathcal{F}_t .

Dans le cas où l'espace (Ω, \mathcal{B}) est doté d'une probabilité, la définition suivante est beaucoup plus utilisée.

Définition 1.3.2 - Si, pour $t \geq 0$, $\mathcal{F}_t = \bigcap_{h>0} \mathcal{F}_{t+h}$ On dit alors que la filtration \mathcal{F} est continue à droite.

Dans le paragraphe suivant, nous introduisons la notion de *temps d'arrêt* relativement à une filtration donnée.

1.4 Notion de temps d'arrêt

Nous rappelons dans cette section la notion de temps d'arrêt ainsi que quelques propriétés caractéristiques. Cette notion nous sera d'une grande utilité dans la définition d'un processus ponctuel via son processus de comptage.

Définition 1.4.1 Soit $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ une filtration sur $\{\Omega, \mathcal{B}\}$ et $T : (\Omega, \mathcal{B}) \rightarrow (\overline{\mathbb{R}}_+, \mathfrak{F}(\overline{\mathbb{R}}_+))$, avec $\overline{\mathbb{R}}_+ = \mathbb{R}_+ \cup \{\infty\}$, on dira que T est un temps d'arrêt relativement à la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$, Si, $(\forall t \geq 0)$;

$$\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Examinons quelques conséquences immédiates découlant de la définition précédente.

Conséquence

- 1). Si T est \mathcal{F}_t - temps d'arrêt, nécessairement $\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$. En effet,
pour $n \geq 1$;

$$\left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_{t - \frac{1}{n}} \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

Ce qui donne,

$$\bigcup_{n \geq 1} \left\{T \leq t - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t$$

C'est-à-dire,

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t$$

- 2). La réciproque de l'assertion 1/ n'est pas vraie en générale, tout ce que nous pouvons dire est:

Si

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t, (\forall t \geq 0); \text{ alors } \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$$

En effet,

$$\{T \leq t\} = \bigcap_{n \geq 1} \left\{T < t + \frac{1}{n}\right\} \in \bigcap_{n \geq 1} \mathcal{F}_{t + \frac{1}{n}} = \mathcal{F}_{t+}$$

- 3). Si la filtration $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ est continue à droite, c'est-à-dire $\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t$, nous avons alors l'équivalence;

$$\{T < t\} \in \mathcal{F}_t \Leftrightarrow \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

Nous présentons quelques propriétés élémentaires sur les temps d'arrêts.

Propriétés

- 1). $(\forall a \in \mathbb{R})$, " a " est un temps d'arrêt relativement à n'importe quelle filtration.
2). Si T est un \mathcal{F}_t - temps d'arrêt et a une constante, alors $T + a$ est un \mathcal{F}_t - temps d'arrêt

en effet; soit t fixé.

2.1) Si $a > t$, $\{T + a \leq t\} = \phi \Rightarrow \{T + a < t\} \in \mathcal{F}_t$

2.2) Si $a < t$, $\{T + a \leq t\} = \{T < t - a\} \in \mathcal{F}_{t-a} \subseteq \mathcal{F}_t$

- 3). Soient S et T deux \mathcal{F}_t - temps d'arrêts alors, $(S \wedge T)$ et $(S \vee T)$ sont des \mathcal{F}_t - temps d'arrêts.

4). Si T est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt et $a \in [0, +\infty[$ alors $T \wedge a$ est un \mathcal{F}_a -temps d'arrêt

5). Si $\{T_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ une suite de \mathcal{F}_t -temps d'arrêts alors $\inf_n T_n$ et $\sup_n T_n$ sont des \mathcal{F}_t -temps d'arrêts.

Démonstration : La démonstration de ces propriétés est donnée dans Brémaud (1981) page 289;

On démontre la troisième remarque rappelons que: $a \vee b = \max(a, b)$ et $a \wedge b = \min(a, b)$

Soient S et T deux temps-d'arrêt.

Montrons que: $\min(S, T)$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt

Posons:

$$U = \min(S, T)$$

On a

$$\begin{aligned} \{U \leq t\} &= \{\min(S, T) \leq t\} \\ \{U \leq t\} &= \Omega - \{\min(S, T) > t\} \\ \{U \leq t\} &= \Omega - \{S > t, T > t\} \\ \{U \leq t\} &= \overline{\{S > t\} \cap \{T > t\}} \\ \{U \leq t\} &= \overline{\{S > t\}} \cup \overline{\{T > t\}} \end{aligned}$$

Donc

$$\{U \leq t\} = \{S \leq t\} \cup \{T \leq t\}$$

D'autre part, comme, S et T sont des \mathcal{F}_t -temps d'arrêt; ce qui signifie que

$$\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ et } \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

D'où le résultat: $\min(S, T)$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt.

- Montrons que: $\max(S, T)$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt.

Soit

$$V = \max(S, T)$$

On a

$$\begin{aligned} \{V \leq t\} &= \{\max(S, T) \leq t\} \\ \{V \leq t\} &= \{(S \leq t, T \leq t)\} \end{aligned}$$

Donc

$$\{V \leq t\} = \{S \leq t\} \cap \{T \leq t\}$$

Comme

$$\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ et } \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

D'où le résultat: $\max(S, T)$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt.

- On montre la 5^{ième} propriété:

Soit $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ une suite de \mathcal{F}_t -temps d'arrêt; montrons que $\sup T_n$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt.

On a;

$$\sup\{T_n > t\} = \sup\{\forall n \in \mathbb{N}, T_n \geq t\}$$

$$\sup\{T_n > t\} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_n \geq t\}$$

$$\sup\{T_n > t\} = \overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{T_n \leq t\}}$$

On sait que;

$$\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \text{ est une suite de } \mathcal{F}_t \text{ - temps d'arrêt,}$$

C'est-à-dire que;

$$\{T_n; n \in \mathbb{N}\} \in \mathcal{F}_t$$

Par définition, \mathcal{F}_t est stable par passage au complémentaire, c'est-à-dire

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T_n \geq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ alors } \{T_n > t\} \in \mathcal{F}_t$$

Donc;

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{T_n > t\} \in \mathcal{F}_t$$

D'où: $\sup T_n$ est un \mathcal{F}_t -temps d'arrêt. ■

1.5 Notions sur les processus aléatoires

Dans ce paragraphe nous abordons la notion de processus aléatoire. On se propose de rappeler les notions fondamentales qui nous serviront tout au long de ce travail.

On se donne un processus aléatoire $X = (X_t; t \geq 0)$ sur (Ω, \mathcal{B}) à valeurs dans un espace E .

On définit:

Pour tout $t \geq 0$; $\mathcal{F}_t^X = \sigma(X_s; s \leq t)$ est la tribu engendrée par les $X_s; s \leq t$; c'est à dire la plus petite tribu les rendant mesurables. La famille $\mathcal{F}^X = \{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ ainsi formée est une filtration sur l'espace (Ω, \mathcal{B}) . Elle est dite filtration naturelle du processus aléatoire X .

On se donne $(\Omega, \mathcal{B}, (\mathcal{F}_t; t \geq 0))$ un espace filtré, c'est-à-dire un espace mesurable muni d'une filtration, et $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus aléatoire sur (Ω, \mathcal{B}) à valeurs dans, $(\mathbb{E}, \mathcal{J})$.

Le processus aléatoire X est dite \mathcal{F}_t -adapté si;

Pour $t \geq 0$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable.

Pour $\omega \in \Omega$, l'application $X(\omega) : \mathbb{R}_+ \rightarrow E$ est dite trajectoire du processus X en ω .

On se donne \mathbf{P} une probabilité sur (Ω, \mathcal{B}) et on suppose que l'ensemble \mathbb{E} est \mathbb{R} .

Le processus aléatoire $X = (X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est dit continu (respectivement, continu à droite; continu à droite et pourvu de limites à gauche)

si et seulement si;

$(\forall \omega \in \Omega)$; l'application $t \rightarrow X_t(\omega)$ est continue (respectivement, continue à droite; continue à droite et pourvue de limites à gauche)

Définition 1.5.1 Un processus aléatoire $X = (X_t, t > 0)$ sur (Ω, \mathcal{B}) à valeurs dans $(\mathbb{E}, \mathcal{G})$ est dite mesurable si; l'application $\mathbb{R}_+ \times \Omega, (t, \omega) \rightarrow X_t(\omega)$ est mesurable relativement aux tribus \mathcal{G} et $\mathfrak{S}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathcal{B}$.

ou, $\mathfrak{S}(\mathbb{R}_+)$ est la tribu des boréliens de \mathbb{R}_+ , engendrée par exemple par les ouverts de \mathbb{R}_+ .

$\mathfrak{S}(\mathbb{R}_+) \oplus \mathcal{B}$ est la tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ engendrée par les ensembles de la forme $A \times B$, avec $A \in \mathfrak{S}(\mathbb{R}_+)$ et $B \in \mathcal{B}$.

1.6 Processus ponctuels

Cette section a pour but de présenter quelques notions de la théorie des processus ponctuels. On pourra consulter les travaux de (Neveu, 1970) et (Daley et Vere-Jones, 1988) d'où sont tirés les éléments essentiels, qui suivent.

Nous abordons dans ce qui suit, la notion de processus ponctuels.

1.6.1 Processus ponctuel

Les processus ponctuels en tant qu'outil mathématiques ont fait l'objet de beaucoup de travaux. Autant leur théorie que leur application, ils ont été largement développés par *Neveu (1973)* ou encore *Daley et Vere-Jones (2003)*.

Définition 1.6.1 *Un processus ponctuel sur \mathbb{R}_+ , se décrit par la donnée d'une suite (T_n) telle que, la suite $(T_n, n \in \mathbb{N})$ est croissante,*

1. $T_0 = 0$
2. $T_0 < T_1 < T_2 < \dots < T_n < \dots$, la suite est strictement croissante, ce qui suppose qu'il n'y a pas deux évènements simultanés,
3. $\lim_n T_n = +\infty$, ce qui suppose qu'il n'y a pas d'accumulation vers un point particulier du temps.

On suppose que les T_n sont considérés comme variables aléatoires définies sur un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$. Introduisons les variables aléatoires,

on pose;

$$S_1 = T_1, S_2 = T_2 - T_1, \dots, S_k = T_k - T_{k-1}, \dots$$

Remarque

Les variables aléatoires T_k sont les instants où se produisent un évènement, les S_k sont les inter-occurrences ou les temps d'attente entre deux évènements successifs.

Dans la définition suivante nous introduisons la notion de processus de comptage associé à un processus ponctuel.

Définition 1.6.2 *Soit un processus ponctuel $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$ défini sur un espace probabilisé $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P}\}$, on définit le processus de comptage $\{N_t, t \geq 0\}$ du processus ponctuel $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$, de la façon suivante:*

$$\begin{aligned} N_t &= \sup\{n, T_n \leq t\} \\ N_t &= \sum_{k \geq 1} 1\{T_k \leq t\}, \dots t \geq 0 \end{aligned}$$

N_t : représente le nombre d'événements qui se produisent avant l'instant "t".

avec

$$1_{\{T_j \leq t\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } T_j \leq t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

N_t : est une variable aléatoire d'espérance:

$$E(N_t) = E \left[\sum_{j \geq 1} 1_{\{T_j \leq t\}} \right]$$

Notons que;

a) $N_0 = 0$, puisque $T_1 > 0$ et pour tout $t > 0$, $N_t < \infty$, puisque T_n tend en croissant vers l'infini.

b) $N_t - N_s$: est le nombre d'événements qui se sont produits dans l'intervalle de temps $]s, t]$, pour $0 < s < t$.

Dans la figure 1.1, suivante et à titre indicatif nous donnons une trajectoire du processus aléatoire $N = \{N_t, t \geq 0\}$.

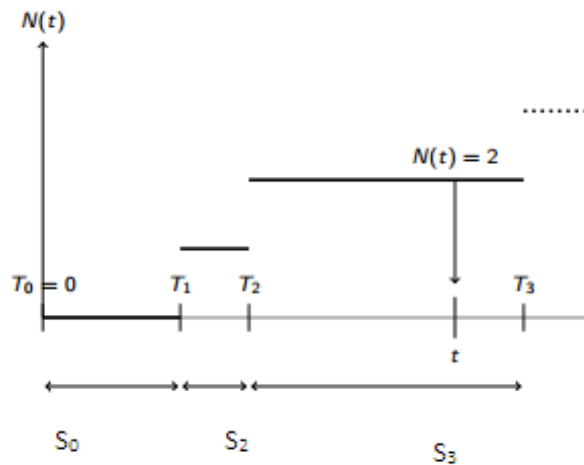


Figure 1.1: trajectoire d'un processus ponctuel.

Remarque

1)- Le processus $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est à trajectoires continues à droite.

2)- La donnée du processus $N = \{N_t, t \geq 0\}$ est équivalente à la donnée du processus $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

Dans la proposition suivante nous établissons quelques propriétés.

Proposition 1.6.1 *On a alors les relations suivantes:*

- a) $\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$
- b) $\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$
- c) $\{N_s < n \leq N_t\} = \{s < T_n < t\}$

Démonstration : Pour démontrer ces trois relations nous suivons *Bremaud, (1981)*.

a) Pour montrer la première relation :

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

On montre d'abord l'inclusion suivante:

$$\{N_t \geq n\} \subset \{T_n \leq t\}$$

Soit $\omega \in \{N_t \geq n\}$ alors $N_t(\omega) \geq n$.

Ce qui signifie que le nombre d'occurrences avant l'instant t est supérieur à n .

D'autre part, si

$$N_t(\omega) \geq n$$

On obtient que;

$$\sum_{n \geq 1} 1_{\{T_n(\omega) \leq t\}} \geq n$$

Ce qui nous permet de déduire que;

$$T_n(\omega) \leq t$$

Donc

$$\{N_t \geq n\} \subset \{T_n \leq t\}$$

Montrons maintenant l'inclusion dans le sens inverse:

$$\{N_t \geq n\} \supset \{T_n \leq t\}$$

Soit $\omega \in \{T_n \leq t\}$ alors $\{T_n(\omega) \leq t\}$; c'est-à-dire que le $n^{\text{ième}}$ instant d'événement a eut lieu avant l'instant t , ce qui signifie qu'au moins " n " instants d'évènements ont eut lieu avant t , ce que nous illustrons par le schéma suivant

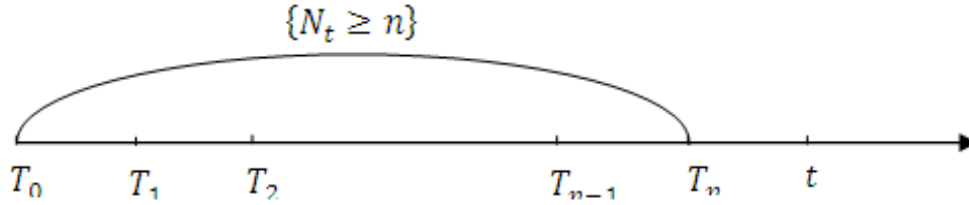


Figure 1.2

Explicitement nous avons alors la situation

$$T_0 < t, \dots, T_{n-1} < t, T_n < t$$

Avec:

$$N_t = T_0 + T_1 + \dots + T_{n-1} + T_n, n \in \mathbb{N},$$

Donc

$$\{T_n \leq t\} \subset \{N_t \geq n\}$$

D'où

$$\{N_t \geq n\} = \{T_n \leq t\}$$

b) Pour montrer la deuxième relation

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

On montre l'inclusion suivante:

$$\{N_t = n\} \subset \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

Soit

$$\begin{aligned} \omega \in \{N_t = n\} & \text{ alors } \{N_t(\omega) = n\} \\ N_t(\omega) & = \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{T_n(\omega) \leq t\}} = n \end{aligned}$$

Cela veut dire que, le nombre d'événements ayant eut lieu avant t est égale à n .

Donc;

$$\forall n \in \mathbb{N}, \{T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\}$$

D'où

$$\{N_t = n\} \subset \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

Montrons l'inclusion dans le sens inverse:

$$\{N_t = n\} \supset \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

Soit

$$\omega \in \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

Alors

$$\{T_n(\omega) \leq t < T_{n+1}(\omega)\}$$

Donc

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{T_n(\omega) \leq t\}} = n$$

Alors

$$N_t(\omega) = n$$

D'où

$$\{N_t = n\} \supset \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

Ce qui nous permet de déduire que:

$$\{N_t = n\} = \{T_n \leq t < T_{n+1}\}$$

c) Pour montrer la troisième relation $\{N_s < n \leq N_t\} = \{s < T_n \leq t\}$

On montre d'abord :

$$\{N_s < n \leq N_t\} \subset \{s < T_n \leq t\}$$

Soit

$$\omega \in \{N_s < n \leq N_t\} \quad \text{alors} \quad \{N_s(\omega) < n \leq N_t(\omega)\}$$

Equivalent à ;

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{T_n(\omega) \leq s\}} < n \leq \sum_{n \in \mathbb{N}} 1_{\{T_n(\omega) \leq t\}}$$

C'est à dire qu'il y a "n" instants d'évènements, qui ont eut lieu dans $]s, t]$.

Donc ;

$$N_s < n \leq N_t$$

D'où

$$\{N_s < n \leq N_t\} \subset \{s < T_n \leq t\}$$

- Montrons maintenant dans le sens inverse :

$$\{N_s < n \leq N_t\} \supset \{s < T_n \leq t\}$$

Soit

$$\omega \in \{s < T_n \leq t\} \text{ alors } \omega \in \{s < T_n(\omega) \leq t\}$$

C'est-à-dire que le $n^{\text{ième}}$ instant d'évènement a eut lieu dans l'intervalle de temps $]s, t]$.

Donc;

$$N_s < n \leq N_t$$

D'où;

$$\{N_s < n \leq N_t\} \supset \{s < T_n \leq t\}$$

Conclusion;

$$\{N_s < n \leq N_t\} = \{s < T_n \leq t\}$$

■

Nous introduisons dans le paragraphe suivant le processus de Poisson $(N_t)_{t \geq 0}$.

1.6.2 Processus de Poisson

Dans ce paragraphe nous introduisons la notion de processus de Poisson, qui est un cas particulier de processus ponctuel, sont largement développés dans (*Daley et Vere-Jones, 2003*), ainsi que sur celui de (*Neveu, 1973*). nous tacherons aussi de préciser quelques caractéristiques.

Posons la définition suivante.

Définition 1.6.3 On se donne $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ un processus ponctuel défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$, et on note $N = \{N_t; t \geq 0\}$ le processus de comptage associe.

On dit qu'un processus ponctuel $\{T_n; n \in \mathbb{N}\}$ où le processus de comptage associé $N = \{N_t; t \geq 0\}$ est un processus de Poisson si $N = \{N_t; t \geq 0\}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Ce qui signifie que :

a) Quels que soient $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ dans \mathbb{R}_+ les accroissements $\{N_{t_j} - N_{t_{j-1}}; 1 \leq j \leq n\}$ sont des variables aléatoires indépendantes;

b) Pour $0 \leq s \leq t$, la loi de $N_t - N_s$ ne dépend que de "s" et "t" que par la différence $t - s$.

Remarque

La propriété b) signifie la stationnarité des accroissements du processus de comptage $N = \{N_t; t \geq 0\}$.

La dénomination de Poisson vient du théorème suivant, qu'est tirée d'un ouvrage de (Neveu, 1973).

Théorème 1.6.1 Pour un processus ponctuel de Poisson, pour tous $s < t$, la variable $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda(t - s)$, soit

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} [\lambda(t-s)]^k / k! \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

où $\lambda > 0$ est une constante réelle (indépendante de s, t). Ce paramètre λ s'appelle l'intensité du processus ponctuel de Poisson, comme

$$\mathbb{E}[N_t - N_s] = \lambda(t - s)$$

La démonstration de ce théorème est tirée dans le même ouvrage de (Neveu, 1973).

Démonstration : On se donne "s" et "t" des réels positifs tels que $0 \leq s < t$.

Soit $f(t - s)$ la fonction génératrice de la variable $N_t - N_s$; il est connu que dans ce cas ;

$$f(t - s) : [0, 1] \rightarrow [0, 1],$$

Telle que :

$$f_{t-s}(u) = E[u^{N_t - N_s}] = \sum_{k \geq 0} P(N_t - N_s = k) u^k \quad , \quad s < t$$

En utilisant la propriété a) de la définition il vient ;

$$f_t(u) = f_s(u)f_{t-s}(u), 0 < s < t, u \in [0, 1]$$

On déduit facilement de cette propriété multiplicative que pour tout u fixé, la fonction $t \rightarrow f_t(u)$ est une exponentielle, soit

$$f_t(u) = e^{-ta(u)}, t > 0$$

Pour une constante $a(u)$ telle que $0 \leq a(u) < \infty$.

En effet, on montre d'abord que:

$$f_t(u) = [f_1(u)]^t$$

Pour tout t rationnel, on étend ensuite cette égalité à tout $t > 0$ réel en remarquant que la fonction $t \rightarrow f_t(u)$ est décroissante puisqu'elle est multiplicative et prend ses valeurs dans $[0, 1]$. Enfin, $f_1(u)$ ne peut être nul car $f_t(u)$ le serait alors pour tout $t > 0$ en contradiction avec

$$f_t(u) \geq P(N_t = 0) = \lim_t \downarrow P(T_1 > t) = 1$$

Puisque la fonction génératrice d'une loi de Poisson de paramètre θ vaut $\exp[-\theta(1-u)]$, pour démontrer le théorème il reste à établir que la fonction $a(\cdot)$ ci-dessus est telle que

$$a(u) = a(0)(1-u), 0 \leq u \leq 1$$

Car les fonctions génératrices $f_{t-s}(u) = \exp[-(t-s)a(u)]$ seront celles des lois de Poisson de paramètre $\lambda(t-s)$ à condition de poser $\lambda = a(0)$.

Or, pour tout $u \in [0, 1]$, la définition de $a(u)$ entraîne que,

$$\begin{aligned} a(u) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-ha(u)}) \\ a(u) &= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k \geq 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h = k) (1 - u^k), \end{aligned}$$

et nous allons montrer d'autre part que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h \geq 2) = 0$$

Comme pour tout $u \in [0, 1]$

$$0 \leq \sum_{k \geq 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h = k)(1 - u^k) \leq \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h \geq 2)$$

Pour $k = 1$, le resultat découle de la relation suivante:

$$a(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \left[\frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h = 1) \right] (1 - u).$$

Le théorème est ainsi démontré en posant

$$\lambda = a(0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h = 1).$$

On notera que $a(0) = 0$ est exclu car cela entraînerait que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $N_t = 0$ presque-sûrement, i.e. $T_1 = \infty$, ce qui est absurde. Nous avons établi en outre que

$$P(N_h = 1) = \lambda h + o(h), \quad h \downarrow 0$$

Pourvu que l'on ait la relation suivante satisfaite,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \mathbf{P}(N_h \geq 2) = 0$$

Mais, pour $h > 0$,

$$\sum_{n \geq 0} \{N_{nh} = 0, N_{(n+1)h} \geq 2\} \subset \{T_2 < T_1 + h\},$$

et calculons la probabilité de l'évènement du premier membre : comme

$$P(N_t = 0) = f_t(0) = \exp[-ta(0)]$$

Cette probabilité vaut par les propriétés de la définition du processus de Poisson

$$\sum_{n \geq 0} e^{-nha(0)} \mathbf{P}(N_h \geq 2) = [1 - e^{-ha(0)}]^{-1} \mathbf{P}(N_h \geq 2)$$

Mais, lorsque

$$\lim_{h \rightarrow 0} P(T_2 < T_1 + h) = P(T_2 \leq T_1) = 0,$$

et pour h suffisamment petit, nous obtenons

$$(a(0)t)^{-1} < [1 - \exp\{-a(0)t\}]^{-1} < 2(a(0)t)^{-1}$$

■

De cette démonstration, nous déduisons quelques remarques importantes pour l'utilisation du processus de Poisson.

Remarques

(Neveu, 1973) résulte, de la démonstration précédente (ou aussi de l'expression de la loi de Poisson) des propriétés importantes d'un processus de Poisson homogène sous forme d'une proposition:

$$a). \quad P[N_{t+h} - N_t = 0] = 1 - \lambda h + o(h)$$

$$b). \quad P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h)$$

$$c). \quad P[N_{t+h} - N_t \geq 2] = o(h)$$

Donc à des probabilités infiniment petites devant h près, $N_{t+h} - N_t$ est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre λh . En exprimant, pour $s < t$, $N_t - N_s$ comme une somme de petits accroissements, cette propriété donne un nouvel éclairage sur le fait que $N_t - N_s$ ne peut suivre qu'une loi de Poisson.

Démonstration : De la proposition (1.6.2) nous déduisons que $0 \leq s < t$, on a

$$P(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}$$

a) Montrons que :

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

Pour $k = 0$, on obtient:

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = e^{-\lambda h}$$

Pour h très petit, en faisant un développement limité au voisinage de h , au premier ordre de la fonction exponentielle permet d'écrire:

$$P(N_{t+h} - N_t = 0) = 1 - \lambda h + o(h)$$

b) Montrons que

$$P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h)$$

Pour $k = 1$, on obtient:

$$P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h e^{-\lambda h}$$

pour h très petit, en faisant un développement limité au voisinage de h , pour la fonction exponentielle qui permet d'écrire:

$$P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h \frac{e^{-\lambda h}}{1!} = \lambda h (1 - \lambda h + o(h)) = \lambda h - \lambda^2 h^2 + o(h)$$

Tel que

$$\lambda^2 h^2 \sim o(h)$$

D'où finalement

$$P[N_{t+h} - N_t = 1] = \lambda h + o(h)$$

c) Montrons que

$$P[N_{t+h} - N_t \geq 2] = o(h)$$

pour $k \geq 0$;

$$P[N_{t+h} - N_t \geq 2] = 1 - (\lambda h + o(h)) - (1 - \lambda h + o(h))$$

Donc

$$P[N_{t+h} - N_t \geq 2] = o(h)$$

Ce qui nous permet de déduire pour h petit, la variable aléatoire $(N_{t+h} - N_t)$ est une variable de Bernoulli prenant 0 avec la probabilité $1 - \lambda h$, et la valeur 1 avec la probabilité λh . En combinant cette propriété à l'indépendance des accroissements et à la relation suivante

$$N_{t+h} - N_t = \sum_{j=1}^n [N_{t+jh} - N_{t+(j-1)h}]; \text{ avec } h = \frac{s}{n}$$

On déduit que $(N_{t+h} - N_t)$ suit approximativement une loi binomiale de paramètre $\left(n, \frac{\lambda s}{n}\right)$. Or, quand $n \rightarrow \infty$, cette loi converge vers la loi de Poisson de paramètre λs . ■

Propriétés du processus de Poisson

Grâce à l'égalité $\{T_1 > t\} = \{N_t = 0\}$ pour $t > 0$, le théorème (1.6.1), implique que

$$\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, t > 0$$

Par conséquent, T_1 suit une loi exponentielle.

Plus généralement, pour tout s fixé, les points T_n du Processus ponctuel qui encadrent s à gauche et à droite respectivement, sont ceux d'indices (aléatoires) N_s et $N_s + 1$ respectivement, i.e.

$$T_{N_s} \leq s < T_{N_s+1}$$

(toutefois T_0 n'est pas défini si $N_s = 0$). La différence $T_{N_s+1} - s$ est donc une variable aléatoire strictement positive donnant la distance à s du premier point du PP à sa droite. Or, pour tout $t > 0$,

$$\{T_{N_s+1} - s > t\} = \{N_{s+t} - N_s = 0\}$$

exprimant tous le fait que le PP ne charge pas l'intervalle $]s, s+t]$. Par conséquent, d'après le Théorème 1.6.1,

$$\mathbf{P}(T_{N_s+1} - s > t) = e^{-\lambda t}, t > 0,$$

pour tout $t > 0$.

Ainsi, on termine cette section par la proposition suivante

Proposition 1.6.2 *Le premier point T_1 strictement à droite de 0 d'un processus de Poisson d'intensité λ suit une loi exponentielle de paramètre λ . Il en est de même plus généralement pour tout $s > 0$ fixé, de la distance $T_{N_s+1} - s$ à s du premier point strictement à droite de s du processus de Poisson.*

Démonstration : Pour démontrer cette proposition il suffit juste de remarquer que

$$\mathbf{P}(T_1 > t) = \mathbf{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, t > 0$$

de même

$$\mathbf{P}(T_{N_s+1} - s > t) = \mathbf{P}(N_{s+t} - N_s = 0) = \mathbf{P}(N_t = 0) = e^{-\lambda t}, t > 0.$$

■

Processus de Poisson non homogènes

Il existe des formes plus complexes de processus de Poisson. Il s'agit des processus de Poisson *non homogènes*, et dont le paramètre peut varier au cours du temps. Ces processus sont également espris en modélisation puis qu'ils permettent de modéliser le fait qu'un phénomène peut évoluer au cours du temps, tout en gardant les deux propriétés fondamentales que sont l'indépendance des réalisations des évènements sur deux intervalles de temps disjoints, et la propriété des évènements rares.

Définition 1.6.4 Soit $t \rightarrow \lambda(t)$ une fonction positive de t .

Le processus ponctuel $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ est un processus de Poisson (non homogène) d'intensité $\lambda(t)$ si le processus de comptage $N = \{N_t; t \geq 0\}$ associé vérifie:

- 1) $N(0) = 0$.
- 2) N est accroissement indépendants,
- 3) $\mathbf{P}[N(t+h) - N(t) = 1] = \lambda(t)h + o(h)$.
- 4) $\mathbf{P}[N(t+h) - N(t) \geq 2] = o(h)$.

Proposition 1.6.3 Le processus ponctuel $\{T_n, n = 1, 2, \dots\}$ est un processus de Poisson (non homogène) d'intensité $\lambda(t)$ si et seulement si le processus de comptage associé

$N = \{N_t; t \geq 0\}$ vérifie:

- 1) $N(0) = 0$. presque-sûrement;
- 2) N est accroissement indépendants,
- 3) Pour tout $t \geq 0$ et $s \geq 0$, la loi de la variable aléatoire $[N(t+s) - N(t)]$ est une loi de Poisson de paramètre $\Lambda(t+s) - \Lambda(t)$,

avec;

$$\Lambda(t) = \int_0^t \lambda(s) ds, t \geq 0$$

La démonstration de cette condition nécessaire et suffisante, similaire à celle dans le cas de processus homogènes.

1.7 Intensité conditionnelle d'un processus ponctuel

Nous introduisons dans cette section la notion de l'intensité conditionnelle $(\lambda(\cdot))$, qui caractérise le processus ponctuel. Comme nous le verrons cette notion est à la base de la modélisation probabiliste du processus ponctuel. Le travail de cette section est basé sur le travail de *Daley et Vere-Jones, (2003)*.

Posons les définitions suivantes:

Soit un espace de probabilité complet (Ω, \mathcal{F}, P) muni d'une filtration $\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t, t \in \mathbb{R}_+\}$.

A partir d'un échantillon de données de la forme de $\{t_k, (x_k, y_k), m_k\}$, $k = 1, \dots, N$.

On remarque que cette donnée fait intervenir les instants d'occurrence des événements t_k .

Nous commençons dans une première étape à étudier le cas temporel, puisque ces propriétés peuvent se généraliser au cas *spatio-temporel*.

Dans ce cas, on considère une séquence temporelle, formée par les instants des événements.

Notons $\{t_k, k = 1, \dots, N\}$ une réalisation du processus ponctuel temporel.

On note : $N = \{N_t, t \in \mathbb{R}_+\}$ le processus de comptage associé.

La filtration naturelle associée au processus ponctuels est notée $\mathcal{H} = \{\mathcal{H}_t; t \in \mathbb{R}_+\}$, dans un cadre plus général on peut supposer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$; $\mathcal{H}_t \subseteq \mathcal{F}_t$.

Par la commodité de notations, nous supposons pour tout $t \in \mathbb{R}_+$; $\mathcal{H}_t = \mathcal{F}_t$ est complète.

D'autre part, on note; $N_t = N(0, t)$ le nombre d'événements avant "t" durant l'intervalle $[0, t]$, de la même manière on note $N(s, t)$ le nombre d'événements sur l'intervalle $[s, t]$.

Ce qui nous permet de poser la définition suivante:

Définition 1.7.1 *L'intensité conditionnelle d'un processus ponctuel $N = \{N_t; t \in \mathbb{R}_+\}$ est le processus $\lambda(t | \mathcal{F}_t)$ vérifiant la propriété:*

$$P[N(t, t + \delta) = 1 | \mathcal{F}_t] = \lambda(t | \mathcal{F}_t)\delta + o(\delta)$$

Avec;

$P[N(t, t + \delta) = 1 | \mathcal{F}_t]$: la probabilité conditionnelle relativement à la tribu \mathcal{F}_t .

De façon équivalente, on peut définir l'intensité conditionnelle de la manière suivante, pourvu que la limite existe.

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} P\{N(t, t + \delta) > 0 | \mathcal{F}_t\}$$

Nous pouvons aussi la définir à partir de l'espérance conditionnelle, sous la forme

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} E[N(t, t + \delta) | \mathcal{F}_t]$$

Il faut aussi remarquer que ce processus caractérise complètement le processus ponctuel (*Liptzer et Shiryaev, 1978*).

Il s'ensuit la remarque suivante.

Remarque

- 1). L'intensité $\lambda(t | \mathcal{F}_t)$ dépend de tout le passé du processus à l'instant t .
- 2). Dans le cas où l'intensité conditionnelle ne dépend que de l'instant t et non pas de tous le passé à l'instant t :

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lambda(t)$$

Dans ce cas le processus ponctuel correspondant est un processus ponctuel de Poisson non homogène.

Et dans le cas où l'intensité conditionnelle est indépendante du temps:

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \lambda$$

Le processus correspondant est un processus de Poisson homogène, le paramètre λ représente le taux d'activité moyen par unité de temps. λ est le taux moyen par unité de temps.

Nous indiquons brièvement, l'extension au cas *spatio-temporel*. Dans ce cas nous considérons le processus ponctuel de la forme $\{(t_k, (x_k, y_k)), k = 1, \dots, N\}$.

On lui associe le processus de comptage suivant:

Pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$, on note

$$N((0, t) \times A) = \sum_{i, t_i < t} 1_{[0, t] \times A}$$

.Dans ce cas l'intensité conditionnelle de processus ponctuel *spatio-temporel* est définie de la manière suivante:

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \lim_{\delta, dx, dy \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{1}{dx} \frac{1}{dy} \mathbf{P}[N(t, t + \delta), (x, x + dx), (y, y + dy) > 0 | \mathcal{F}_t]$$

où;

\mathcal{F}_t :l'histoire d'un processus ponctuel à l'instant t

$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t)$:représente l'intensité stochastique (*Andersan et al., 1993; Daley et Vere-Jones, 2003*).

$P[N(t, t + \delta), (x, x + dx), (y, y + dy) > 0 | \mathcal{F}_t]$:la probabilité conditionnelle d'un processus ponctuel relativement à la tribu \mathcal{F}_t entre $(t, t + \delta)$;avec des coordonnées $(x, x + dx), (y, y + dy)$.

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \lim_{\delta, dx, dy \rightarrow 0} \frac{1}{\delta} \frac{1}{dx} \frac{1}{dy} E[N(t, t + \delta), (x, x + dx), (y, y + dy) | \mathcal{F}_t]$$

Conclusion 1.7.1 *Ainsi la notion d'intensité conditionnelle joue un rôle essentiel dans la définition d'un processus ponctuel, du fait même qu'elle le caractérise.*

La donnée d'une forme de l'intensité conditionnelle définit un modèle ponctuel.

Nous explicitons quelques exemples de processus ponctuel.

1.8 Exemples de processus ponctuels

Dans cette section nous donnons quelques exemples de processus ponctuels qui sont complètement caractérisés par son intensité conditionnelle ($\lambda(\cdot)$).

On propose les deux premiers exemples dans le cas sismiques, tel que le paramètre "t" est défini sur un espace paramétrique T , quand le paramètre t représente le temps, il est défini sur l'échelle des réels non négatifs. un processus ponctuel temporel est un processus stochastique dont la réalisation est un ensemble de points, chaque e_j ayant une position t_j bien définie dans le temps tel qu'illustré par *Abi-Zaid et Bobée, (1999)*.

1.8.1 Modèle d'Omori modifiée

Dans le cadre de la modélisation d'une séquence de réplique générée par l'occurrence d'un événement important, la loi d'Omori modifiée permet d'étudier et analyser la décroissance du nombre d'événements après le choc principale; elle est définie par;

$$n(t) = \frac{K}{(t + c)^P}$$

Avec:

$n(t)$: est le nombre de répliques à l'instant t , et K, p et c sont les paramètres du modèle.

Ainsi, on peut considérer de façon globale la séquence des répliques comme étant un processus de Poisson non homogène d'intensité conditionnelle définie par

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \frac{K}{(t + c)^P}$$

1.8.2 Modèle "ETAS" (Epidemic Type Aftershok Sequence)

Dans le cadre temporel un modèle très populaire en sismologie est le modèle "ETAS" (Epidemic Type Aftershok Séquence), c'est un modèle qui généralise le précédent et qui permet de modéliser le processus ponctuel contenant les événements secondaires, c'est à dire incluant des chocs majeurs pouvant générer des répliques et que parmi les répliques certaines, dite secondaires, peuvent en générer d'autres à leur tour. Ainsi si on note par, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_N$ les instants d'occurrence des événements secondaires, dans sa forme la plus simple le modèle

"ETAS Temporel " est un processus ponctuel dont l'intensité conditionnelle s'écrit sous la forme (Ogata, 1988).

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \mu + K_0 \sum_{\tau_j < t} \frac{\exp\{a(m - m_0)\}}{(t - \tau_j + c)^2}$$

Il faut noter que ce dernier modèle a une extension au cas *spatio-temporel*. (Musmeci et Vere-Jones, 1992), donne une version *spatio-temporelle* du modèle "ETAS", avec une intensité conditionnelle de la forme

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \mu(x, y) + \sum_{i, t_i < t} g_\phi(t - t_i, x - x_i, y - y_i, m_i)$$

Avec,

$$g_\phi(t, x, y, m) = A \frac{e^{\alpha m} e^{-ct}}{2\Pi\sigma_x\sigma_y t} \exp\left\{-\frac{1}{2t} \left(\frac{x^2}{\sigma_x^2} + \frac{y^2}{\sigma_y^2}\right)\right\}$$

Ou encore

$$g_\phi(t, x, y, m) = \frac{Ae^{\alpha m} e^{-ct} t^2 c_x c_y}{\Pi^2(x^2 + t^2 c_x^2)(y^2 + t^2 c_y^2)}$$

Avec: $A, \alpha, \sigma_x, \sigma_y, c_x$ et c_y des constantes.

Finalement le processus ponctuel dans le cas sismique peut être modélisé par un processus ponctuel, constitué par deux composantes, l'une dite "*background*", formée par les évènements indépendants dans le temps et une composante "*cluster*" constituée par tous les évènements dépendants dans l'intensité conditionnelle peut s'écrire sous la forme suivante;

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \mu(x, y) + \int_s h(t, x, y, \tau, \acute{x}, \acute{y}, \acute{m}) N(d\tau, d\acute{x}, d\acute{y}, d\acute{m})$$

Où;

\mathcal{F}_t : L'histoire d'un processus ponctuel à l'instant t

$N(\cdot)$: le processus de comptage du processus ponctuel.

$\mu(\cdot)$: l'intensité du processus « *background* » est homogène dans le temps.

$h(\cdot)$: la fonction réponse de l'évènement à l'instant $t, t > \tau$, permettant de générer la composante "*cluster*", avec $S = (0, +\infty) \times \mathbb{R}^2 \times (0, \infty)$.

Dans cette version, la composane "*background*" est homogène dans le temps et non homogène dans l'espace. Il arrive parfois, que la composante soit considérée homogène dans le temps et dans l'espace, ce qui permet alors d'écrire l'intensité conditionnelle sous la forme

$$\lambda(t, x, y \mid \mathcal{F}_t) = \mu + \int_s h(t, x, y, \tau, \acute{x}, \acute{y}, \acute{m}) N(d\tau, d\acute{x}, d\acute{y}, d\acute{m})$$

Un autre exemple dans le domaine l'épidémiologie est développée dans le paragraphe suivant:

1.8.3 Modélisation hiérarchique

Exemple pour la maladie de la feuille jaune de la canne à sucre

Introduction

La canne à sucre désigne un ensemble d'espèces de la famille des Poaceae et du genre Saccharum. Elles sont cultivées pour leurs tiges, dont on extrait du sucre.

Chaque réalisation du processus ponctuel représente une plante infectée. Nous disposons de la position exacte de chaque plante infectée sur la parcelle et par conséquent, la position de chaque nouvelle infection. Si nous considérons x la position spatiale d'une plante quelconque de la zone étudiée X et $y_{x,t}$ son état sanitaire à la date t , la loi des observations $(y_{x,t})_{x \in X}$ doit prendre en compte la nature binaire des $y_{x,t}$ et le fait que X soit au plus dénombrable.

Ainsi, $y_{x,t}$ suit une loi de *Bernoulli* de paramètre noté $p_{x,t}$ qui n'est autre que la probabilité d'être infecté à la date t de la position x . Cette probabilité peut-être fixe pour une approche classique, cependant il arrive souvent que les conditions environnementales varient de façon conséquente. Il paraît naturel d'adopter une approche bayésienne qui peut-être présentée comme une généralisation de l'approche classique: le paramètre $p_{x,t}$ n'est plus une valeur fixe inconnue mais une variable aléatoire dont il faut spécifier la loi dite *a priori* au moment de la modélisation.

Deux phases ont été distinguées par *Jacquet, (2008)* et *Edon.J, (2008)*, dans la contamination de la parcelle saine. Une première phase où les contaminations semblent se faire selon une répartition complètement aléatoire et une seconde phase où on observe une agrégation des plantes infectées. Ceci est confirmé par différents tests statistiques basés sur la dispersion spatiale, l'autocorrélation *spatiale* et *spatio-temporelle*.

La première phase correspondrait à l'arrivée des premiers ailés sur la parcelle tandis que la seconde phase coïncide à la fermeture de la parcelle c'est-à-dire à un stade phénologique des plantes

pour les quelles les feuilles de cannes voisines se touchent. Cette dernière situation permet le déplacement des pucerons aptères d'une plante à l'autre favorisant ainsi la contamination de proche en proche à partir des infections primaires.

Compte tenu de ces informations, *Jacquet, (2008)* et *Edon.J, (2008)*, formalisent un modèle et distinguent les deux étapes décrites ci-dessus.

Ils utilisent les notations suivantes:

\mathcal{F}_t : l'histoire d'un processus ponctuel à l'instant t ,

$u(t)$: l'intensité du processus «*background*» à la date t ,

τ : la date de changement de phase,

θ : le paramètre d'interaction,

f_θ : la fonction de contact qui dépend de la distance " $x - y$ " entre deux individus.

$$\lambda(x, t | \mathcal{F}_t) = \begin{cases} u(t) \times 1_{[y, t^- = 0]} & \text{si } t \leq \tau \\ \left(u(t) + \sum_{y \in I_t^-} f_\theta(x, y) \right) \times 1_{[y, t^- = 0]} & \text{si } t > \tau \end{cases}$$

Ce modèle est une généralisation de celui proposé par *Jacquet et al. (2009)* car l'intensité de processus "*background*" plan varie au cours du temps. D'autre part, la variabilité stochastique des paramètres du modèle est prise en compte et est introduite par le biais de lois *a priori* sur ces paramètres. Nous choisissons comme loi *a priori* pour le processus $u(t)$ un processus de *Dirichlet*.

Nous pouvons reformuler le problème d'estimation de densité selon le modèle hiérarchique suivant :

$$\begin{aligned} y_{x,t} & \mid p_{x,t} \sim \text{Bernouillé}(p_{x,t}) \\ u(t) & \sim DP(\alpha, G_0) \end{aligned}$$

Où

$$p_{x,t} = 1 - e^{-\int \lambda(x,z) dz}$$

Un processus de *Dirichlet* comme *a priori* sur le processus temporel d'intensité $u(t)$ signifie que l'on ne se restreint pas à une unique loi (de processus temporel) pour caractériser l'information *a priori* disponible mais à une famille de lois de processus temporel. Cette approche est dite non paramétrique ou parfois semi paramétrique.

En occurrence, il paraît naturel que cette famille soit centrée sur un processus *log normal* à incréments indépendants (*Moller et al.1998*).

Conclusion 1.8.1 *Nous avons proposé dans cette section plusieurs modèles à deux phases, caractérisés par des fonctions d'intensité conditionnelles. Nous avons disposé les outils de traitement statistiques à partir de la théorie des processus ponctuels.*

Chapitre 2

Procédures d'identification d'événements dépendants dans un processus ponctuel

Sommaire

2.1	Introduction.....	44
2.2	Procédures déterministes.....	45
2.3	Procédures aléatoires.....	54
2.4	Conclusion.....	60

2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous abordons l'étude de quelques procédures d'identification des évènements dépendants dans un processus ponctuel, permettant d'analyser les liens de dépendances entre deux évènements. Ce qui permet d'identifier les évènements dépendants entre eux et donc d'analyser le caractère "*cluster*". Ces procédés, qui s'inscrivent dans le cadre des procédures d'identification d'évènements dépendant dans un processus ponctuel, nous permettent de mieux comprendre les liens de dépendance entre les évènements. Toutes ces méthodes sont basées sur la notion de *distance spatio-temporelle* entre deux évènements.

Dans tout ce chapitre, on considère un processus ponctuel $\{(t_i, (x_i, y_i), m_i), i = 1, \dots\}$ défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$.

On suppose que ce processus ponctuel est constitué de deux composantes, l'une dite "*background*" constituée d'évènements indépendants et la deuxième constituée d'évènements "*clusters*".

L'intensité conditionnelle caractérisent un tel processus s'écrit sous la forme

$$\lambda(t, x, y | \mathcal{F}_t) = \mu(x, y) + \int_S h(t, x, y, \tau, x', y', m') N(d\tau, dx', dy', dm').$$

Avec

\mathcal{F}_t : l'histoire du processus ponctuel à l'instant t ,

$N(\cdot)$: le processus de comptage associé au processus ponctuel,

$\mu(\cdot)$: l'intensité du processus « *background* » que nous supposons homogène dans le temps,

$h(\cdot)$: la fonction réponse de l'évènement à l'instant $t, t > \tau$, permettant de générer la composante "*cluster*", $S = [0, +\infty[\times \mathbb{R}^2 \times [0, +\infty[$.

Le travail du présent chapitre se base sur la lecture de plusieurs publications en sismologie, couvrant les aspects de "statistic seismologie" (*Gardner et Knopoff, 1974*), (*Resenberg, 1985*), (*Marsan et Lenglin, 2008*) dans lequel des procédures dites de *declustering*, permettant l'identification des évènements dépendants sont utilisées.

On se propose alors dans ce chapitre de mettre en évidence les outils mathématiques intervenant dans le développement de ces procédures.

Globalement, on distingue deux classes de procédures. La première classe constituée par les procédures faisant intervenir une distance *spatio-temporelle*. Ces méthodes sont aussi dites procédures du windowing, et peuvent être considérées comme des méthodes déterministes.

La seconde classe de procédures est constituée par des méthodes probabilistes dont certaines font appel à l'algorithme "*EM*".

Ainsi, le premier paragraphe est consacré aux méthodes dites "*déterministes*".

Le second paragraphe est dédié aux procédures probabilistes.

En conclusion, nous tenterons de donner quelques perspectives de travail.

2.2 Procédures déterministes

Ces procédures ont été introduites pour la première fois par *Gardner et Knopoff, (1974)*. Elles sont essentiellement basées sur l'introduction d'une distance définie à partir d'une fenêtre spatiale et temporelle. Ces fenêtres sont définies sous forme d'intervalles dans le temps et dans l'espace.

Dans ce qui suit, nous rappelons quelques notions préliminaires dont nous aurons besoin dans cette section.

Préliminaires

Soit, un processus ponctuel défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, P, (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}^+})$, et on se donne un échantillon d'événements $\{t_k, (x_k, y_k), m_k\}, k = 1 \dots N$, où m_k représente une grandeur réelle positive lié au k *ième* événement, t_k représente l'instant d'observation de cet événement $t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k \leq \dots$; $k \in \mathbb{N}$, et $(x_k, y_k) \in \mathbb{R}^2$ représente ses coordonnées spatiales.

On note e_i événement $(t_i, (x_i, y_i), m_i)$.

Soit e_i un évènement qui génère d'autre évènement e_h , c'est-à-dire: $e_i \rightarrow e_h$, On veut développer une procédure qui permettre d'identifier les évènements dépendants. Pour se faire on se base sur les critères suivants:

- Soit $m_h < m_i$

Si e_i est proche de e_h :

1) du point de vue temporel: $|t_i - t_h|$ "petit"

2) du point de vue spatial $d((x_i, y_i), (x_h, y_h))$ "petit": (x_i, y_i) "proche de" (x_h, y_h) .

Donc, pour les évènements dépendants, la grandeur " $m < m_i$ ", définit une distance *spatio-temporelle*.

Ce formalisme permet dans le cas du processus d'occurrence des séismes d'identifier les évènements dépendants. En effet dans le cas du processus ponctuel des séismes, " m_i " est la magnitude et (x_i, y_i) les coordonnées de l'épicentre de façon intuitive.

Principe de base

Cette procédure est basée essentiellement sur l'introduction d'une distance définie à partir d'une fenêtre temporelle et spatiale. Cette fenêtre est définie sous forme d'intervalles dans le temps et dans l'espace.

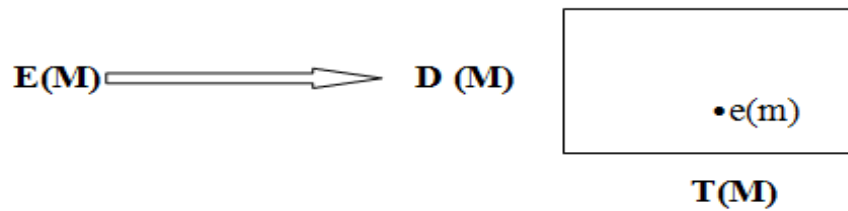
On veut développer une procédure qui permette d'identifier les événements dépendants, en se basant sur les critères suivants:

Soit $M > m$,

Pour chaque événement $E(M)$ de grandeur M , on associe deux paramètres: $T(M)$ est la durée temporelle d'une séquence et $D(M)$ est la distance maximale.

Pour qu'un événement $e(m)$ quelconque associé à deux paramètres $t(m)$ et $d(m)$, soit dépendant de $E(M)$, doit avoir un temps d'occurrence inférieur à $T(M)$ et être localisé à une distance inférieure à $D(M)$.

Les schémas suivants résument le principe de cette méthode.



Les paramètres $T(M)$ et $D(M)$ sont définis à partir d'une relation de la forme:

$$\begin{cases} \log_{10} D(M) = a + bM \\ \log_{10} T(M) = \alpha + \beta M \end{cases}$$

On cherche un ajustement moyen

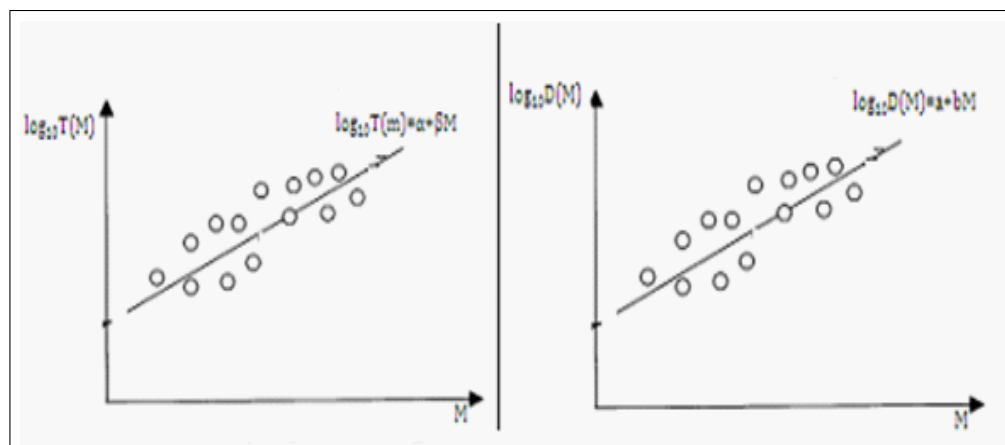


Figure (2.2)

La figure (2.2): présente les paramètres $T(M)$ et $D(M)$ en fonction des magnitudes M .

Nous explicitons parmi les plus utilisées quelques fenêtres temporelles et spatiales
Ces fenêtres sont données dans les paragraphes qui suivent.

Méthode de Gardner et Knopoff (1974).

La méthode de *Gardner et Knopoff* a été introduite par *Gardner et Knopoff (1972)*.

De façon précise, la fenêtre *spatio-temporelle* est définie pour chaque évènement de magnitude M , on associe les paramètres à partir des relations suivantes:

$$\log_{10} D(M) = 0.1238M + 2.7389 \quad (km)$$

$$\log_{10} T(M) = \begin{cases} 0.0320M + 0.983 & \text{si } M \geq 6.5 \text{ (jours)} \\ 0.5409M - 0.574 & \text{si } M < 6.5 \text{ (jours)} \end{cases}$$

$D(M)$ et $T(M)$ sont donnés respectivement en *km* et en *jours*.

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples des paramètres spatiaux et temporels utilisées pour l'élimination des répliques pour différentes magnitudes.

<i>Magnitude</i>	$D(M)$ en <i>km</i>	$T(M)$ en <i>jours</i>
2.5	19.611	6
3.5	26.080	22
4.5	38.121	83
5.5	46.121	290
6.5	61.334	790
7.5	81.564	960
8.0	94.059	985

Tableau 2.1: Paramètres des deux équations pour différentes magnitudes

Méthode de Gardner et Knopoff adaptée pour le Maghreb

Cette méthode a été utilisée un peu partout à travers le monde au *Maghreb*: Elle a été adaptée pour l'Algérie par *Hamdache et al., (2007)* et *Hamdache et al., (2010)*.

Considérons qu'un évènement de magnitude 8.0 affecte une région de 100km pendant 900 *jours* et un évènement de magnitude 3.0 affecte une région de 20km pendant 10 *jours*, Ce que nous résumons en écrivant,

$$M = 8.0 \rightarrow T(8.0) = 900 \text{ jours} \quad \text{et} \quad D(8.0) = 100 \text{ km}$$

$$M = 3.0 \rightarrow T(3.0) = 10 \text{ jours} \quad \text{et} \quad D(3.0) = 20 \text{ km}$$

Ainsi, à partir de ces considérations et de la relation liant la magnitude au paramètre $D(M)$ d'une part et au paramètre $T(M)$ d'autre part, nous obtenons les relations suivantes,

$$\log_{10} D(M) = 0.1398M + 0.8816$$

$$\log_{10} T(M) = 0.3908M + 0.1725$$

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples $D(M)$ et $T(M)$ pour différents magnitudes.

Magnitude	$D(M)$ en km	$T(M)$ en jours
2.5	17.026	6
3.5	23.491	16
4.5	32.412	38
5.5	44.719	95
6.5	61.702	233
7.5	85.133	573
8.0	100	900

Tableau 2.2: représentation des différentes valeurs des paramètres $D(M)$ et $T(M)$ pour différents magnitudes données, en utilisant la méthode de *Gardner et Knopoff adaptée au Maghreb*.

Méthode de Urhammer

Cette méthode a été introduite par Urhammer (*Urhammer, 1986*), les paramètres définissant la fenêtre *spatio-temporelle* sont donnés par:

$$\log_{10} D(M) = 0.3491M - 0.4447$$

$$\log_{10} T(M) = 0.5363M - 1.2464$$

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples concrets pour différentes magnitudes.

<i>Magnitude</i>	$D(M)$	$T(M)$
2.5	2.68	1.18
3.5	5.989	4.27
4.5	13.383	15
5.5	29.904	51
6.5	66.820	174
7.5	149.305	600
8.0	223.185	1108

Tableau 2.3: Différentes valeurs des paramètres $D(M)$ et $T(M)$ pour différents magnitudes données, en utilisant la méthode d'*Urhammer*.

Méthode de Gruental

En 1985, *Gruental*, propose des fenêtres sous la forme:

$$\begin{cases} \log_{10} D(M) = 0.1060 M + 1.0982 \\ \log_{10} T(M) = 0.5055 M - 0.1329 \end{cases}$$

Dans le tableau suivant nous donnons des exemples de paramètres $D(M)$ et $T(M)$ pour différents magnitudes.

<i>Magnitude</i>	$D(M)$	$T(M)$
2.5	23.078	14
3.5	29.458	43
4.5	37.601	137
5.5	47.995	444
6.5	61.2632	1422
7.5	78.199	4553
8.0	99.816	8148

Tableau 2.4: Différentes valeurs des paramètres $D(M)$ et $T(M)$ pour différents magnitudes données, en utilisant la méthode de *Gruental*.

2.2.1 Exemple des procédures utilisées

Nous avons utilisées les quatre procédures décrites dans le paragraphe précédent.

Nous avons utilisé la méthode de *Gardner et Knopoff, (1974)*, que nous noterons M_1 , celle de *Urhammer, (1986)*, notée M_2 . La méthode de *Gruental, (1985)* quant à elle , sera notée M_3 et enfin la méthode de *Gardner and Knopoff* adaptée pour le *Maghreb* sera notée M_4 .

Ces quatre procédures agissent de façon différenciée sur des données concrètes, ainsi et afin de mieux cerner ce comportement, nous avons représenté graphiquement les variations des paramètres en fonction de la magnitude M , que nous avons porte sur le même graphe.

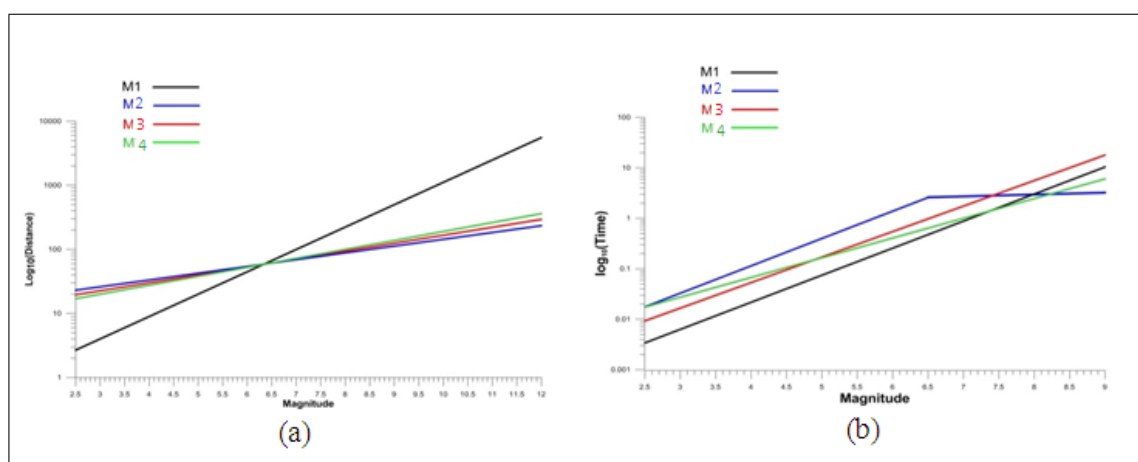


Figure (2.3)

Figure (2.3): représente la variation des paramètres définissant la fenêtre *spatio-temporelle* en fonction de la magnitude **(a)**: $\log_{10} D(M)$ en fonction de la magnitude, **(b)**: $\log_{10} T(M)$ en fonction de la magnitude.

Interprétation

Pour la fenêtre *distance*, nous remarquons que pour les magnitudes $M \leq 6.3$ les méthodes M_2 , M_3 , et M_4 sont les plus conservatrices car elles contiennent plus d'événements contrairement à la méthode M_1 .

Tandis que pour les magnitudes $M > 6.3$, la méthode M_1 est la plus conservatrice par rapport aux autres méthodes M_2 , M_3 , et M_4 .

En ce qui concerne la fenêtre *temporelle*, pour les magnitudes $M \leq 6.5$, la méthode M_3 est la plus conservatrice, contrairement aux autres méthodes M_1 , M_2 et M_4 ,

mais pour les magnitudes $M \leq 6.5$ on obtient le processus inverse, c'est-à-dire, les méthodes citées précédemment sont les plus conservatrices.

2.3 Procédures aléatoires

Il est fréquent de trouver dans la littérature le qualificatif de subjectif aux précédentes méthodes pour identifier les évènements dépendants dans un processus ponctuel. Ce qualificatif est essentiellement dû aux difficultés de déterminer les paramètres $T(M)$ et $D(M)$ associés à une magnitude M . Souvent du à l'absence ou à l'insuffisance d'évènements forts permettant de déterminer de façon rationnelle ces paramètres, dans une telle situation il est fait appel à une appréciation "subjective" pour déterminer ces paramètres.

Pour palier à cet état de fait certains auteurs ont introduit des procédures dites stochastiques que nous présentons dans le paragraphe suivant.

Introduction

Cette approche qui a été introduite par *Zhuang et al., (2002)* propose une approche probabiliste associant à chaque évènement une probabilité d'être un évènement *background* ou un évènement généré par un autre.

L'idée fondamentale de la procédure stochastique est basée sur l'estimation de l'intensité de la composante "*background*", supposée en fonction de l'espace et non pas du temps, et des paramètres liés au modèle de la dépendance des évènements constituant la composante "*cluster*".

Cette approche est basée sur les modèles *ETAS*. On se donne un modèle *spatio-temporel*, dont l'intensité conditionnelle d'un processus ponctuel donnée par;

$$\lambda(x, y, t | \mathcal{F}_t) = \mu(x, y) + \sum_{k, t_k < t} K(m_k)g(t - t_k)f(x - x_k, y - y_k | m_k) \quad (2.1)$$

Où;

$\mu(x, y)$: intensité conditionnelle de la composante "*background*", qui est indépendante de temps.

$g(t)$ et $f(x - x_k, y - y_k | m_k)$: sont respectivement des fonctions réponses normalisées du taux d'évènement, et de localisation des évènements à partir d'une magnitude m_k , ce qui signifie que ces deux fonctions déterminent le procédé par lequel à partir d'un évènement $(t_k, (x_k, y_k), m_k)$ on génère un autre évènement à l'instant t et localisé au point (x, y) .

Du fait que le $k^{\text{ième}}$ évènement génère un processus de Poisson non stationnaire d'intensité,

$$K(m_k)g(t - t_k)f(x - x_k, y - y_k | m_k)$$

$K(m_k)$: peut être considéré comme le nombre d'évènements pouvant être générés à partir de la magnitude m_k .

Supposons que ces évènements sont numérotés de 1 à N . Dans l'équation (2.1), la probabilité qu'un évènement j soit généré par un évènement i peut être estimée comme suite:

$$\rho_{ij} = \frac{K(m_k)g(t - t_k)f(x - x_k, y - y_k | m_k)}{\lambda(x_j, y_j, t_j | \mathcal{F}_{t_j})} \quad (2.2)$$

La probabilité que cet évènement soit un évènement "background" faisant partie de la composante "background" du processus d'occurrence, ou un évènement "trigger" faisant partie de la composante "cluster", est donnée respectivement par:

$$\varphi_j = \frac{\mu(x_j, y_j)}{\lambda(x_j, y_j, t_j)} \quad , j = 1, 2, \dots, N \quad (2.3)$$

$$\rho_j = 1 - \varphi_j = 1 - \sum_{i=1}^{j-1} \rho_{ij}, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.4)$$

Autrement dit, la sélection de chaque évènement j avec une probabilité ρ_{ij} , φ_j ou ρ_j , on peut réaliser un sous-processus généré par l'évènement i , un sous processus "background" ou un sous-processus "trigger".

Ce qui va permettre de définir l'algorithme suivant:

Algorithme 2.3.1 Calculer φ_j et ρ_{ij} en utilisant les équations (2.3) et (2.4) avec $i, j = 1 \dots N$.

- Pour chaque évènement j , $j = 1 \dots N$; générer des variables aléatoires μ_j de loi uniforme sur $[0, 1]$ pour chaque j notons:

$$I_j = \min \left\{ k - 1, \text{ tel que } \varphi_j + \sum_{i=1}^k \rho_{ij} \geq \mu_j \text{ avec } 1 \leq k < j \right\}$$

• Si $I_j = 0$: j est considéré comme évènement de la composante "background" ou un évènement initiateur générant d'autres.

Dans le cas contraire, c'est-à-dire:

• Si $I_j \neq 0$: le $j^{\text{ième}}$ évènement est considéré comme directement créé par le $I_j^{\text{ième}}$ évènement.

Cet algorithme va nous permettre de décomposer tout le processus en différentes branches ou clusters, à ce moment on peut déterminer pour chaque famille l'événement générateur (initiateur) comme un représentant du processus de la composante «*background*».

Dans cette démarche, on prend pour chaque *cluster* la magnitude la plus forte, ce qui justifie que cet algorithme n'est pas unique.

En général, on peut générer plusieurs échantillons déclusterés et on utilise un test d'hypothèse associée à la composante "*background*" ou la composante "*cluster*", qu'on accepte ou on rejette de façon alternative. Les probabilités φ_j et ρ_{ij} sont utilisées pour tester cette hypothèse.

Cet algorithme est aussi appelé algorithme de *reconstruction aléatoire*, il a été introduit et développé par *Zhuang et al., (2004)*, *Zhuang, (2006)*.

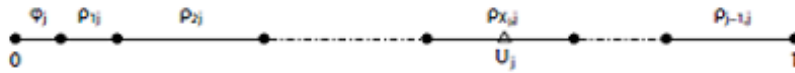


Figure (2.4)

Figure (2.4): exemple d'algorithme de *reconstruction aléatoire*.

On termine ce paragraphe, en introduisant le modèle dit "*declustering stochastic indépendant*" ou "*MISD*" que nous expliquons dans ce qui suit.

2.3.1 La procédure stochastique pour les modèles MISD

Introduction

La procédure stochastique pour le modèle "*MISD*", "*Model indépendant stochastic declustering*" de *Zhuang et al., (2002)*, qui a été décrite ci-dessus, peut être étendue à d'autres types de modèles "*ETAS*". En effet, la généralisation de *Marsan et Lengline, (2008)*, n'a pas de modèle particulier dépendant, et peut accepter n'importe quel modèle de la sismicité, d'où le nom de *declustering stochastic indépendant* ou "*MISD*".

Ce qui permet d'écrire l'intensité conditionnelle sous la forme suivante:

$$\lambda_a(x, y, t) = \sum_j \sum_k \lambda_{ijk} \mathbf{1}_{(t \in [t_j, t_{j+1}])} \mathbf{1}_{(r_a(x, y) \in [r_k, r_{k+1}])}$$

Un événement "a" de magnitude $m_a \in [m_i, m_{i+1}]$ et de temps de trigger t_a , est localisé au point (x, y) , avec $t > t_a$,

$[t_j, t_{j+1}]$ et $[r_k, r_{k+1}]$ sont les intervalles de temps et la distance.

$r_a(x, y)$: représente la distance de déclenchement de l'évènement "a" au point (x, y) .

le modèle "MISD" nécessite de définir les intervalles de magnitude, du temps et la distance, et revient à trouver l'intensité λ_{ijk} .

Ce modèle liée à l'algorithme "Estimation-Maximisation" ou "EM", pour trouver ces inconnues, il est basé sur le calcul itératif des probabilités w_{ab} (b évènement qui est généré par l'évènement a) et w_{0b} la probabilité que b est un évènement issu du processus de "background".

Alors l'algorithme "EM" est utilisé dans ce modèle pour inverser les paramètres de modèle "ETAS".

2.3.2 Les étapes de l'Algorithme "Estimation -Maximisation" (EM)

Étape d'estimation (Étape-E):

Soit λ_{ijk} et μ des intensités a priori, on calcule les probabilités w_{ab} et w_{0b} (w_{ab} et w_{0b} correspondants à ρ_{ij} et ϕ_j dans la section précédente de declustering stochastique).

Ces probabilités sont définies comme:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{ij} = w_{ab} = \frac{\lambda_a(x_b, y_b, t_{bj})}{\mu + \sum_{c < b} \lambda_b(x_b, y_b, t_k)} \\ \phi_j = w_{0b} = \frac{\mu}{\mu + \sum_{c < b} \lambda_b(x_b, y_b, t_k)} \end{array} \right.$$

avec:

$$w_{ab} + w_{0b} = 1$$

Étape de maximisation (Étape-M):

Cette étape correspond à trouver l'estimateur de maximum de vraisemblance (*MLE*). La fonction *log-vraisemblance* est :

$$l = - \int_v d(x) \int_T dt \lambda(x, y, t) + \sum_i \ln \lambda_i(x_i, y_i, t_i)$$

On fait introduire les "*w*" qu'on a déjà calculé dans l'étape *E*, on obtient la formule suivante:

$$l(\omega) = - \sum_{ijk} n_i \lambda_{ijk} \delta V_k - \mu TV + \sum_{ijk} n_{ijk} \ln \lambda_{ijk} + n_0 \ln \mu$$

où:

n_i : représente le nombre d'évènement entre $[m_i, m_{i+1}]$,

n_{ijk} : présente le nombre d'évènements paires (a, b) de telle sorte que la magnitude de $a \in [m_i, m_{i+1}]$, et séparés par $t_b - t_a \in [t_j, t_{j+1}]$ et $r_{ab} \in [r_k, r_{k+1}]$, avec une de probabilité w_{ab} .

$$n_{ijk} = \sum_{a \in [m_i, m_{i+1}]} \sum_{b < a} w_{ab} \mathbf{1}_{(t_b - t_a \in [t_j, t_{j+1}])} \mathbf{1}_{(r_{ab} \in [r_k, r_{k+1}])}$$

n_0 : présente le nombre d'évènements indépendants (exemple dans le cas sismique) du processus "*background*":

$$n_0 = \sum_b w_{0b}$$

$\delta t_j = t_{j+1} - t_j$: présente la durée de l'intervalle de temps pour "*j*".

δV_k : représente le volume de shell en (km^3) lié à l'intervalle de distance $r \in [r_k, r_{k+1}]$, qui calcul comme suit:

$$\delta V_k = \frac{4}{3} \Pi (r_{k+1}^3 - r_k^3) \quad (km^3)$$

Le *MLE* est donnée par:

$$\partial_{\lambda_{ijk}} l(w) = 0 \Rightarrow -n_i \delta t_j \delta V_k + \frac{n_{ijk}}{\lambda_{ijk}} = 0 \Rightarrow \lambda_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{n_i (t_{j+1} - t_j) \delta V_k}$$

$$\partial_{\mu} l(w) = 0 \Rightarrow -TV + \frac{n_0}{TV} = 0 \Rightarrow \mu = \frac{n_0}{TV}$$

Avec

T : la durée totale des données.

V : le volume total.

On obtient

$$\begin{cases} \hat{\lambda}_{ijk} = \frac{n_{ijk}}{n_i(t_{j+1} - t_j)\delta V i_k} \\ \hat{\mu} = \frac{n_0}{TV} \end{cases}$$

Ces deux étapes sont réitérées jusqu'à la convergence de λ_{ijk} et μ est stable.

La puissance de cet algorithme est que la solution finale ne dépend pas du choix initial.

Enfin, le processus obtenu peut être obtenu à partir de w_{0b} avec b est un évènement indépendant, issu de processus de *background*.

2.4 Conclusion

L'objet de ce chapitre était de modéliser le processus ponctuel et plus précisément les processus temporels afin d'entamer les procédures d'identification d'évènements dépendants dans ce processus.

Ces procédures (déterministes et stochastiques) consistent à identifier la composante «*trigger*» qui contient les évènements dépendants afin d'obtenir un processus de Poisson.

La procédure stochastique utilisé dans ce chapitre intéressante est celle présentée par *Zhuang et al., (2002)*, consistant à inverser les paramètres d'un processus ponctuel par exemple dans le cas sismique le modèle "*ETAS*", à l'aide d'un algorithme de type "*Estimation-Maximisation*".

L'inconvénient de cette dernière est que les résultats trouvés restent toujours conditionnés par le choix du modèle.

Le chapitre suivant sera consacré à vérifier que le processus obtenu est Poissonien homogène.

Pour ce faire, il existe différents tests permettant de tester l'hypothèse suivante, H_0 : "Le processus amputé des événements dépendants est de type Pionssonien homogène".

Parmi ces tests, on peut citer les tests du *Chi-deux multinomial*, du *Chi-deux conditionnel*, de *Kolmogorov-Smirnov* et le test de *Brown et Zhao*. Enfin nous introduisons un nouveau test dit test de *permutation*.

Chapitre 3

Analyse du caractère Poissonien

Sommaire

3.1	Introduction.....	63
3.2	Préliminaires.....	63
3.3	Tests temporels.....	64
3.4	Test spatio-temporel.....	70
3.5	Partie d'application pour le test de permutation.....	78

3.1 Introduction

L'objet de ce chapitre est consacré à une étape fondamentale, il consiste à analyser le caractère Poissonien du processus ponctuel initial amputé des évènements dépendants, nous examinerons ce caractère par des tests statistiques.

Ainsi, dans ce chapitre nous consacrons le premier paragraphe à des préliminaires.

Le second paragraphe introduit les tests statistiques dans le cas temporel et dans le cas spatio-temporel.

Enfin le troisième paragraphe est consacré à un exemple d'application d'un nouveau test dit permutation qui sera appliqué dans ce chapitre sur des données sismiques.

3.2 Préliminaires

On a établi précédemment qu'un processus de Poisson est un cas particulier de processus ponctuel.

$\lambda(t | \mathcal{F}_t)$ est l'intensité conditionnelle du processus ponctuel amputé $\{T_n, n \in \mathbb{N}\}$.

- Dans le cas où le processus ponctuel de Poisson est non homogène dans le temps, l'intensité conditionnelle s'écrit comme suit;

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \tilde{\lambda}(t)$$

- Dans le cas où le processus ponctuel de Poisson est homogène dans le temps, l'intensité conditionnelle s'écrit comme suit;

$$\lambda(t | \mathcal{F}_t) = \tilde{\lambda}$$

Le paramètre $\tilde{\lambda}$ représente le nombre moyen par unité de temps.

On donne un exemple du processus ponctuel dans le cas sismique, $\tilde{\lambda}$ correspond au nombre d'évènements par unité de temps.

Dans le cas particulier où l'unité est une année, on parle alors de taux annuel moyen d'évènements.

Ainsi, pour vérifier que le processus ponctuel obtenu est du caractère Poissonien homogène ou non, on examine si le taux d'évènements annuel moyen est constant.

Pour résoudre ce problème, nous proposons des tests pour vérifier le taux l'homogénéité dans le cas temporel et on peut citer: tests conditionnels d'uniformité multivarié, tel que le test de *Kolmogorov-Smirnov*, tests du *Chi-deux multinomial* et *conditionnel*, ainsi, que le test de *Brown Zhao* proposé par *Anscamb,(1948)*.

Dans le travail de ce présent chapitre, nous proposerons un nouveau test qui est l'axe de ce travail c'est le test de *permutation* qui se traite dans le cas *spatio-temporel*, suivra un exemple d'application avec des données en sismologie.

Nos hypothèses, \mathcal{H}_0 et \mathcal{H}_a peuvent être formulées de la façon suivante:

Soit X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes non négatives avec $P(X = x) = f(x)$.

(\mathcal{H}_0) : *Processus ponctuel initial amputé des évènements dépendants est de caractère Poissonien homogène.*

(\mathcal{H}_a) : *Processus ponctuel initial amputé des évènements dépendants est de caractère Poissonien hétérogène.*

C'est -à-dire

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_0) : X_i \sim Poiss(\lambda_i), \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n \\ (\mathcal{H}_a) : X_i \sim Poiss(\lambda_i), \sum_{i=1}^n (\lambda_i - \bar{\lambda})^2 > 0 \end{cases}$$

3.3 Tests temporels

Dans cette section nous sommes intéressés à des tests de distribution Poissonien au cours du temps, soit $\{(x_i, y_i, t_i), i = 1, 2, \dots, n\}$ un nouveau échantillon d'un processus ponctuel amputé des évènements dépendants dans $(S \times [0, T])$ avec: S espace d'étude et de période $[0, T]$ permettant de tester l'hypothèse d'homogénéité temporelle.

Nous considérons que S est indépendant de $[0, T]$. Dans cette partie de travail nous ignorons l'espace d'étude et on travaille seulement sur $[0, T]$

Pour cela, on présente une variété de tests statistiques qui se traitent dans le cas temporel: test du *chi-deux multinomial* , test du *chi-deux conditionnel*, test de *Kolmogorov-Smirnov*, et le test de *Brown et Zhao*.

3.3.1 Test du Chi-deux Multinomial

Dans ce paragraphe, nous abordons le test de *Chi-deux multinomial*, qu'on note " T_m ". Il est utilisé par *Barani et al.,(2007)*, comme test d'hypothèse que le processus obtenu est Poissonnien homogène.

Le détail de test se déroule comme suit:

On dispose une séquence temporelle $\{t_i, i = 1, \dots, n\}$ avec la période d'étude est $[0, T]$,

où:

T :présente la période d'étude total.

n : le nombre total d'évènements durant la période $[0, T]$.

C :le nombre de catégories ou classes.

(i)- Soit $K \geq 1$, avec K est le nombre d'intervalles total. On partitionne la période d'étude en K intervalles temporels, la longueur d'étude est $\frac{T}{K}$.

On calcule le nombre d'évènements dans chaque intervalle:

$$N_k = \sum_{i=1}^n 1\left(\left(k-1\right)\frac{T}{K} \leq t_i < k\frac{T}{K}\right), \quad k \in \{1, 2, \dots, K\}$$

(ii)- On calcul le taux théorique d'évènements dans chaque intervalle $\hat{\lambda}$, *Barani et al. (2007)* proposent l'estimation suivante:

$$\hat{\lambda} = n/K$$

(iii)- Soit $C \geq 2$,

pour $k \in \{1, \dots, K\}$; si le nombre d'intervalles contiens c évènements c'est-à-dire $N_k = c$, alors la probabilité de $N_k = c$ est calculée comme suite:

$$\mathbf{P}(N_k = c) = e^{-\hat{\lambda}} \frac{\hat{\lambda}^c}{c!}, \quad c = 0, 1, \dots, C-1.$$

Donc on peut calculer le nombre moyen d'intervalles ayant c évènements

$$E_c = \begin{cases} Ke^{-\hat{\lambda}} \cdot \frac{\hat{\lambda}^c}{c!}, & c = 0, 1, \dots, C-2 \\ K - \sum_{j=0}^{C-2} E_j, & c = C-1 \end{cases}$$

On note O_c , est le nombre d'intervalles observés contiens c .événements $\{O_c, c = 1, \dots, C-1\}$, donc

$$O_c = \sum_{k=1}^K 1(N_k = c)$$

Où

$$O_{C-1} = \sum_{k=1}^K 1(N_k \geq C - 1).$$

La statistique du *chi-deux multinomial* est calculée comme suite :

$$T_{cm} \equiv \sum_{c=0}^{C-1} \frac{(O_c - E_c)^2}{E_c},$$

on calcul la P - *value* du test ;

$$P = \mathbf{P}[X \geq T_{cm}] \quad \text{avec} \quad X \rightsquigarrow \mathcal{X}_{(d,1-\alpha)}^2 \quad \text{pour} \quad \alpha = 0.05 \text{ et } d = C - 2$$

$$P = 1 - \frac{\gamma(d/2; T_{cm}/2)}{\Gamma(d/2)}$$

3.3.2 Test du Chi-deux Conditionnel

Soit l'hypothèse nulle de la distribution conditionnel N_1, \dots, N_k avec $\sum N_k = n$, est une multinomial $(n, 1/K, \dots, 1/K)$.

$$N_1, \dots, N_k \rightsquigarrow \mathcal{M}(n, 1/K, \dots, 1/K)$$

On le note T_{CC} .

La statistique du test est,

$$T_{CC} = \sum_{k=1}^K \frac{(N_k - \hat{\lambda})^2}{\hat{\lambda}}$$

Nous rejetons l'hypothèse nulle (\mathcal{H}_0): si $T_{CC} > \chi_{d,1-\alpha}^2$.avec $d = K - 1$.et $\alpha = 0.05$

3.3.3 Test de Kolmogorov-Smirnov

Dans ce paragraphe, nous abordons le test de *Kolmogorov-Smirnov* non paramétrique, que nous notons T_{KS} ,il est connu par *Kolmogorov.,(1936)* qu'on peut l'utiliser comme test d'hypothèse, aves un échantillon temporel $\{t_i, i = 1, \dots, n\}$.

Ce test est souvent introduit en complément aux tests de *chi-deux*. Ce test tient compte des différences, non pas entre les fréquences observées et attendus, mais entre les fréquences relatives cumulées et la fonction de répartition de la distribution dont on veut vérifier la validité (*Dagnelie, 1968*) et (*Dumas, 1977*).

Ce test nécessite moins de calculs que les deux tests précédents.

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_0) : \text{''Processus obtenu est de caractère Poissonnien homogène dans le temps''} \\ (\mathcal{H}_a) : \text{''Processus obtenu est de caractère Poissonnien hétérogène dans le temps''} \end{cases}$$

Ce test repose sur les propriétés des fonctions de répartition empiriques, compare la fonction de répartition empirique de temps $\hat{F}_n(x)$ avec $F(x)$, (*Lehmann, 2005*). La distance de Kolmogorov-Smirnov est:

$$D_n \equiv \sup_x \left| \hat{F}_n(x) - F(x) \right| \geq c(n, \alpha)$$

Il existe des constantes universelles $c(n, \alpha)$ de sorte que pour chaque distribution F ,

$$P\left\{ \left\| \hat{F}_n - F \right\|_{KS} \geq c(n, \alpha) \right\} = \alpha$$

$c(n, \alpha)$: est une valeur critique qu'on peut lire dans la table de *Kolmogorov-Smirnov*, ou estimé d'une manière numérique selon l'égalité de Massart (*Massart, 1990*), si l'on prend

$$c(n, \alpha) \leq \sqrt{\frac{\ln(2/\alpha)}{2n}}$$

Dans ce chapitre, le test *KS* a été utilisé pour évaluer l'homogénéité d'événements de distribution temporelles $\{t_i, i = 1, \dots, n\}$ pour le processus ponctuel obtenu (*Matthews et Reasenber, 1988*).

Si le test est généré par un processus de Poisson homogène, les temps $\{t_i, i = 1, \dots, n\}$ sont indépendants, identiquement distribués, et uniformes sur $[0, T]$. Leur fonction de répartition est $F(x) = t/T$.

$$D_n = \sup_t \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(t_i \leq t) - \frac{t}{T} \right|$$

3.3.4 Test de Brown et Zhao

Nous allons concentrer notre attention sur les propriétés de ce test par rapport aux autres en rappelant qu'il est basé sur la transformation d'*Anscombe*.

Au cours de ce paragraphe, nous donnerons un bref rappel de cette transformation avant d'énoncer le test de *Brown et Zhao, (2002)*.

Nous citerons quelques articles: *Hinkley et Runger, (1984)*, et *Hoyle, (1973)*.

Cette transformation permet de stabiliser les variances d'ordre deux chaque fois qu'il y a proportionnalité entre les moyennes et les variances, et non plus entre les moyennes et les écarts-types, c'est-à-dire quand:

$$VAR(X) = kE(X)$$

À ce titre, cette transformation peut être utilisée notamment dans le cas des distributions Poissonniennes, dont les moyennes et les variances sont toujours égales. Cette transformation est parfois utile aussi pour certaines autres distributions discontinues, apparentées aux distributions de Poisson.

Quand les valeurs observées sont relativement faibles, il est préférable d'employer la transformation:

$$Y = \sqrt{X + \frac{3}{8}}$$

Cette adaptation de la transformation est basée essentiellement sur des études empiriques.

D'autres possibilités, de type $\sqrt{X + c}$, sont examinées notamment par *Kihlberg et al., (1972)*.

Brown et Zhao, (2002) utilisent cette transformation comme approximation d'une distribution de test de *Chi-deux Pearson*.

Definition

Nous considérons le problème de vérifier si un échantillon d'observations provenant d'une distribution de Poisson est homogène dans le temps.

Brown et Zhao (2002), introduisant un test fondé sur la transformation *d'Anscombe*, basée sur la dérivé de la variance d'ordre deux jusqu'à sa stabilisation.

Anscombe, (1948) a démontré que,

$$VAR \left(\sqrt{N_k + 3/8} \right) = 1/4 + o(1/\lambda),$$

avec

$$Y_k = \sqrt{N_k + 3/8}$$

N_k suit une loi de Poisson, $N_k \rightsquigarrow Poiss(\lambda_k)$

$$E_{\lambda_k}(Y_k) = E_{\lambda_k} \left(\sqrt{N_k + 3/8} \right), k = 1, 2, \dots, K$$

Alors *Brown et Zhao, (2001)*, proposent une transformation pour la dérivé de la variance d'ordre deux.

La transformation est la suivante:

$$\sqrt{N_k + 1/4} \text{ au lieu de } \sqrt{N_k + 3/8}$$

Avec

$$E_{\lambda} \left(\sqrt{N_k + 1/4} \right) = \sqrt{\lambda} + o(1/\lambda)$$

On pose:

$$\dot{Y}_k = \sqrt{N_k + 1/4}$$

Sous $H_o : \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_K$

La statistique de test de *Brown et Zhao* est donnée comme suit:

$$T_{BZ} = 4 \sum_{k=1}^K \left(\dot{Y}_k - \bar{\dot{Y}} \right)^2 \text{ avec } \bar{\dot{Y}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \dot{Y}_k$$

On rejette l'hypothèse nulle si $(T_{BZ} > \chi_{(K-1, 1-\alpha)}^2)$ au seuil $\alpha = 0.05$.

Le test de *Brown et Zhao* exige le choix du nombre d'intervalles K .

Les tests précédents ne spécifient pas les périodes ou le processus est Poissonien homogène, de ce fait il à été préférable de proposer un autre test tenant compte des coordonnées spatiales. Il est présenté dans le paragraphe suivant.

La section suivante est basé sur le travail de *Romano, (1988, 1989)*.

3.4 Test spatio-temporel

Dans cette section, nous présentons un nouveau test non paramétrique performant par rapport aux tests de distributions temporelles qui sont cités précédemment, ce test est défini sur la base d'une distance *spatio-temporelle*. Il est connu sous le nom de test de *permutation*.

Introduction

Les tests d'hypothèses non paramétriques offrent une alternative importante puisqu'ils nécessitent moins de suppositions. Une classe importante de tels tests sont les tests de permutation que l'on décrit dans cette section. On présente leur définition et conditions d'application et leur propriétés statistiques. Afin d'illustrer la méthodologie, on introduit un exemple d'application dans le cas sismique.

Test de permutation

Le test de permutation est apparu en 1935, sous l'initiative de Fisher, (1935), a été largement étudié depuis. Le principe de ce test est de travailler conditionnellement aux données observées, de façon à éviter de formuler des hypothèses sur la distribution de la variable observée. Étant donnée une statistique de test, on la calcule sur les données observées. Ensuite on permute ces dernières aléatoirement de façon à obtenir un nouvel échantillon sur lequel on recalcule la statistique de test. On confronte ensuite la statistique calculée sur les données observées à la distribution empirique des statistiques calculées sur les permutations. La validité de cette méthode vient du fait que sous l'hypothèse nulle, toute permutation des données observées est "également probable". Cette méthode sera plus détaillée dans la suite.

Principe et propriétés de test de permutation

L'importance des tests de permutation réside dans leur flexibilité et leur robustesse lorsque les hypothèses statistiques des tests paramétriques habituels ne sont pas valides. Ils permettent le choix complet de la statistique du test appropriée au problème en main, et cette liberté de choix permet des milliers d'applications pratiques.

Le principe général de permutation est intuitif. Il revient à sous l'hypothèse nulle appropriée, toute permutation des observations de l'échantillon a la même probabilité d'être "tirée". En d'autres termes, les différentes permutations possibles de l'échantillon observé sont équiprobables. La propriété d'équiprobabilité est déjà utilisée dans la statistique non paramétrique pour la construction des tests libres de loi (basés sur les rangs). Cette propriété

résulte du fait que sous l'hypothèse nulle appropriée, les observations de l'échantillon sont des réalisations de variables aléatoires échangeables. Pour appliquer les tests de permutation, il faut que la condition nécessaire et suffisante sous l'hypothèse nulle, l'échangeabilité des observations, soit vérifiée. Sinon, leur utilisation devient inappropriée et erronée.

Considérons le test de *permutation* introduit par *Romano*, (1988).

Définition 3.4.1 - Soit un échantillon des données spatio-temporelles: $\{(x_i, y_i, t_i), i = 1, \dots, n\}$, où (x_i, y_i) présente les coordonnées spatiales.

(a)- Soit Π l'ensemble des permutations des entiers $(1, \dots, n)$. Un ensemble de variables aléatoires qui présente les temps T_1, \dots, T_n est échangeable, si pour toute permutation

$\pi = (\pi_1, \dots, \pi_n) \in \Pi$ l'ensemble de toutes les $n!$ permutations possibles on a:

$$\{T_1, \dots, T_n\} \stackrel{d}{=} \{T_{\pi_1}, \dots, T_{\pi_n}\} \text{ avec } \pi \in \Pi$$

L'échantillon d'observations est transformé comme suit,

$$((x_i, y_i), t_i) \rightarrow ((x_i, y_i), t_{\Pi(i)})$$

Où

$$\hat{P}_n \rightarrow \hat{P}_{\pi_n}$$

Où $\stackrel{d}{=}$ indique que les deux vecteurs ont la même distribution de probabilité (égalité en loi).

(b)- On dit que la fonction de densité conjointe du vecteur $t = (t_1, \dots, t_n)$ est invariante par rapport aux permutations des éléments du vecteur t si:

$$f(t) = f(t_1, \dots, t_n) = f(t_{\pi_1}, \dots, t_{\pi_n})$$

L'exemple le plus simple de variables échangeables est le cas où T_1, \dots, T_n sont des variables indépendantes et identiquement distribuées. Dans ce cas, les variables sont échangeables car:

$$f(t) = f(t_1, \dots, t_n) = \prod_{i=1}^n f(t_i) = f(t_{\pi_1}, \dots, t_{\pi_n})$$

L'hypothèse nulle de temps non échangeable, étant donné les coordonnées spatiales (x_i, y_i) et les temps $\{t_i\}$. pour n observations est,

$$\begin{cases} (\mathcal{H}_0) : \{T_1, \dots, T_n\} \stackrel{d}{\neq} \{T_{\pi_1}, \dots, T_{\pi_n}\} \\ (\mathcal{H}_a) : \{T_1, \dots, T_n\} \stackrel{d}{=} \{T_{\pi_1}, \dots, T_{\pi_n}\} \end{cases}$$

Romano, (1988) a décrit les étapes d'une procédure de construction d'un test de permutation qui est défini comme suit:

3.4.1 Les étapes de test de permutation

Romano, (1988) a utilisé la théorie de processus empirique pour élaborer une méthodologie pour les tests de bootstrap des hypothèses "non paramétriques" telles que l'indépendance, la symétrie et l'interchangeabilité.

Soit V définit un model *spatio-temporel* c'est-à-dire: $V = S \times [0, T]$, avec S représentant la région géographique d'étude identifiée par ces coordonnées (x, y) et $[0, T]$ représente la période d'étude.

Alors $V = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3\}$

Où $V(j, i, k) \in \{(x_j, y_i, t_k) : i, j, k \in \{1, \dots, n\}\}$.

\mathbf{V} est une classe de *Vapnik-Chervonenkis*, alors $\mathbf{V} \in \{(-\infty, x] \times (-\infty, y] \times (-\infty, t]\}$, pour le triplet (x, y, t)

L'échantillon testé appartient à la classe de *Vapnik-Chervonenkis*.

Donc $V \in \mathbf{V}$

On note:

\hat{P}_n :est une mesure empirique associée au poids $\frac{1}{n}$, pour l'échantillon $((x_i, y_i), t_i)$ de n observations, (longitude, la latitude, le temps).

$\tau \hat{P}_n$:est la transformation de mesure empirique \hat{P}_n pour $n!$ permutation de l'échantillon $\{(x_i, y_i, t_j) \text{ pour } 1 \leq i, j \leq n\}$, associée au poids $\frac{1}{n^2}$ pour chaque observation.

Soit $P_0 \in \Omega_0 \subset \Omega$, nous avons la transformation invariante suivante;

$$\tau : \Omega \rightarrow \Omega_0$$

$$\tau(P_0) = P_0$$

La mesure empirique de $\hat{P}_n(V)$ de (x, y, t) est ,

$$\hat{P}_n(V) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(x_i \leq x, y_i \leq y, t_i \leq t)$$

La mesure empirique nulle de $\tau(\hat{P}_n)(V)$ de (x, y, t) est,

$$\begin{aligned}\tau(\hat{P}_n)(V) &= \frac{1}{n!} \sum_{\pi_j \in \Pi} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(y_i \leq y, x_i \leq x, t_{\pi_j(i)} \leq t) \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(y_i \leq y, x_i \leq x) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1(t_k \leq t)\end{aligned}$$

Considérons la statistique de test ϕ suivant la distance entre \hat{P}_n et $\tau\hat{P}_n$ est,

$$\phi(\hat{P}_n) = \sup_{V \in \mathbf{V}} \left| \hat{P}_n(V) - \tau\hat{P}_n(V) \right|$$

Ceci est une généralisation de test de Kolmogorov-Smirnov.

On calcule

$$\phi(\hat{P}_{\pi n}) = \sup_{V \in \mathbf{V}} \left| \hat{P}_{\pi n}(V) - \tau\hat{P}_{\pi n}(V) \right|$$

- Si $\phi(\hat{P}_{\pi n}) \geq \phi(\hat{P}_n) \Rightarrow$ alors la *p-value* de l'hypothèse nulle est P .

Pour trouver la distance maximale, il suffit de trouver la distance maximale d'un ensemble d'échantillon (x_i, y_i, t_k) pour $1 \geq i, j, k \geq n$.

Nous classons chaque séquence comme l'un des deux catégories en fonction de son emplacement (x', y', t') , qui présente la première séquence minimum dans le catalogue.

Pour trouver la seconde séquence, on a $x' \geq \min\{x_i\}$, $y' \geq \min\{y_j\}$ et $t' \geq \min\{t_k\}$.

supposons que: $I(x') = \sum 1(x_i \leq x')$; c'est-à-dire tous les coordonnées de x sont inférieure ou égale à x' . De même pour $J(y') = \sum 1(y_i \leq y')$ et $K(t') = \sum 1(t_i \leq t')$.

On calcule la mesure empirique pour l'échantillon (x', y', t') :

$$\begin{aligned}\hat{P}_n(V') &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(x_i \leq x', y_i \leq y', t_i \leq t') \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(x_i \leq x_{(I(x'))}, y_i \leq y_{(J(y'))}, t_i \leq t_{(K(t'))})\end{aligned}$$

On calcule la transformation de la mesure empirique pour l'échantillon (x', y', t') :

$$\tau(\hat{P}_n)(V') = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(x_i \leq x_{(I(x'))}, y_i \leq y_{(J(y'))}) \cdot \frac{1}{n} \sum_{k=i}^n 1(t_i \leq t_{(K(t'))})$$

Pour trouver la borne supérieure de la différence absolue entre ces deux mesures, il faut trouver l'ordre (ou les rangs) de x, y et t .

Nous concentrons dans le paragraphe suivant, les étapes de test de permutation pour les temps échangeables.

Romano, (1988) a décrit les étapes d'une procédure de construction d'un test de permutation qui est défini comme suit:

3.4.2 Algorithme du test

La méthode du test de permutation proposée par *Romano, (1988)* adopte une procédure différente pour tester l'hypothèse nulle.

Nous décrivons le principe sous forme d'algorithme:

(1°) Soit un échantillon d'événements *spatio-temporels* ordonnés (x, y, t) représentant les longitudes, les latitudes et le temps respectivement.

- On trie le catalogue de longitudes, latitudes et des temps dans l'ordre temporel (x_i, y_i, t_i) pour $i = 1, \dots, n$, pour faciliter l'étape 3:

- On calcul les rangs de chaque évènement (x, y) ,

Le rang du i^{eme} évènement x est égale à,

$$I(x_i) = \sum_{j=1}^n 1(x_j \leq x_i)$$

(2°) On calcule la mesure spatiale empirique dans \mathbb{R}^2 avec:

$$(y_i, x_j); 1 \leq i, j \leq n$$

Cette distribution spatiale est préservée dans la matrice $X_{.j}$ ordonnée par (i, j) ;

$$X_{.j} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1(y_j \leq y, x_j \leq x)$$

Présente le nombre d'événements dans le catalogue avec une latitude inférieure à la latitude d' i^{eme} évènement et longitude moins de longitude du j^{ieme} évènement.

(3°) On calcule la différence absolue entre la mesure empirique et la mesure empirique nulle pour chaque évènement : $\{(x_j, y_i, t_k) : i, j, k \in \{1, \dots, n\}\}$

On trouve la valeur maximale de toutes ces différences; est la statistique de test ϕ

On définit la statistique de test:

$$\phi = \max_k \left[\max_{j,i} \left| \hat{P}(V(j, i, k)) - (\tau \hat{P})(V(j, i, k)) \right| \right]$$

(4°) On commence les permutations pour $h = 1$, jusqu'à $h = N = 1000$.

(5°) Créer une permutation aléatoire de $\{1, \dots, n\}$, appliquer cette *permutation* sur les coordonnées spatiales, avec le temps échangeable (mais il faudrait de retrier chaque échantillon ordonné temporellement après chaque permutation).

(6°) On calcul les différences absolue entre la mesure empirique permuté et la mesure empirique nulle permuté .

- La matrice de permutation ϕ_h contient toutes les valeurs maximales pour les distances

$$\phi_h = \max_{hk} \left[\max_{j,i} \left| \hat{P}(V(j, i, hk)) - (\tau \hat{P})(V(j, i, hk)) \right| \right]$$

(7°) Si $H = N$, aller à l'étape suivante.

(8°) On calcul \hat{P} est;

$$\hat{P} = \sum_{h=1}^N \frac{1}{N} 1(\phi_h \geq \phi)$$

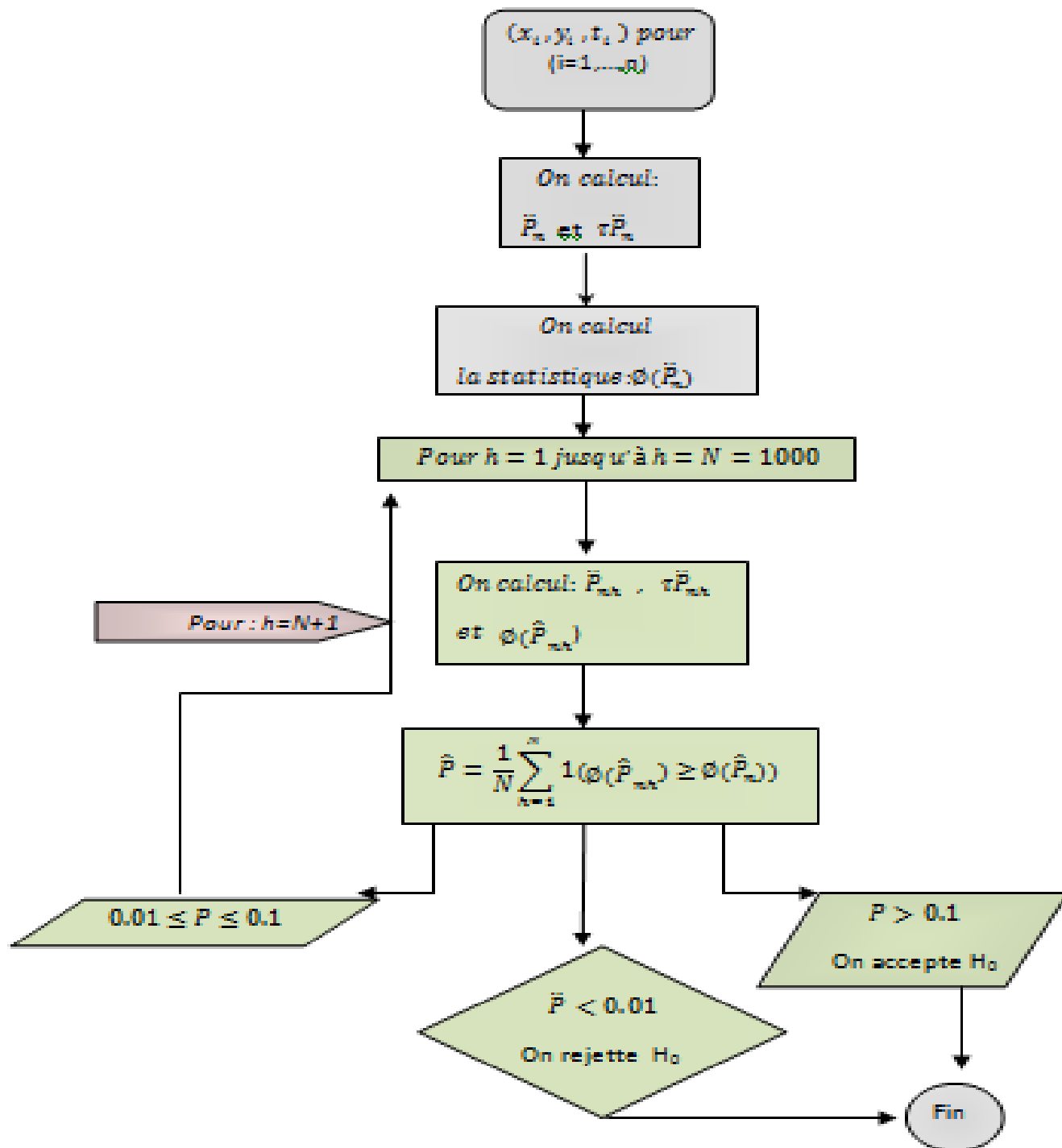
- Si $\hat{P} < 0.01$, on rejette hypothèse nulle, donc le temps est échangeable et arrêter.

- Si $\hat{P} > 0.1$, on accepte l'hypothèse nulle que le temps est non échangeable et arrêter

l'algorithme

- Si $0.01 \leq \hat{P} \leq 0.1$, on fixe $H = N + 1$ et aller à l'étape (5°).

Présentons les étapes de test de permutation sous forme d'un organigramme:



3.5 Partie d'application pour le test de permutation

Dans cette section on se propose de donner une application pour le test de permutation abordé dans le paragraphe précédent.

Fichier de données

Le fichier qui est présenté a été élaboré par le C.R.A.A.G, (Hamdache et al., 2010) est donné en annexe H. Il est constitué par des événements (séismes), ayant lieu durant la période 1960-2005 dans la région d'Alger. Ce fichier est représenté en colonnes, contenant: la longitude, la latitude, la magnitude, année, le mois, le jour.

3.5.1 Préliminaires

Pour vérifier que le processus obtenu après les procédures d'identification d'événements dépendants d'un processus ponctuel est Poissonien homogène, on examine si le taux d'événements annuel moyen est constant à l'aide du test de permutation, nous confirme que le temps n'est pas échangeable, donc en accepte l'hypothèse nulle le processus obtenu est non homogène.

3.5.2 Procédure du test de permutation

La procédure utilisée est constituée par les étapes suivantes:

- a)-On calcule les distributions empiriques des positions spatiales.
- b)-On calcule la statistique: ϕ .
- c)-On calcule la matrice de permutation: ϕ_h .
- d)-On ce donne la valeur de *P-value* au seuil 0.05.

On se propose de faire une application.

Application

- a)- Les tableaux ci-dessus présents les rangs pour les coordonnées: x et y :

3.5. Partie d'application pour le test de permutation

The figure shows two screenshots of the R Console. The top screenshot displays the output of the command `> x.rank`, showing a list of 277 data points with their corresponding ranks in brackets. The bottom screenshot displays the output of the command `> y.rank`, showing a list of 277 data points with their corresponding ranks in brackets. The data points are numerical values, and the ranks are integers from 1 to 277.

```

R Console
> x.rank
 [1] 515.0 152.5 334.0 425.0 535.5 360.0 84.0 152.5 76.0 600.5 447.5 152.5
[13] 613.5 515.0 564.5 14.5 564.5 317.5 98.0 401.0 477.0 515.0 515.0 16.0
[25] 74.5 618.0 498.0 372.0 453.0 391.0 323.0 27.0 415.0 398.5 39.0 430.0
[37] 226.0 131.0 525.0 592.0 169.0 1.0 398.5 302.0 438.5 395.0 334.0 334.0
[49] 330.0 247.0 307.0 592.0 592.0 535.5 468.0 254.0 308.0 613.5 490.5 477.0
[61] 525.0 539.5 364.5 364.5 604.0 4.0 119.0 237.0 290.0 187.0 525.0 570.5
[73] 363.0 193.0 440.0 204.0 74.5 7.0 632.5 78.0 44.0 8.0 490.5 455.0
[85] 515.0 472.5 302.0 530.5 13.0 302.0 410.5 63.0 447.5 410.5 558.0 542.5
[97] 42.0 542.5 73.0 290.0 290.0 110.0 459.5 523.0 580.5 459.5 494.0 290.0
[109] 302.0 115.5 133.5 508.0 290.0 110.0 477.0 115.5 626.5 625.0 37.0 600.5
[121] 110.0 479.0 530.5 486.5 374.0 223.0 472.5 508.0 508.0 127.0 241.0 290.0
[133] 152.5 312.0 90.0 553.5 143.0 12.0 20.0 489.0 461.0 45.0 467.0 488.0
[145] 324.5 351.0 419.0 370.0 290.0 10.5 632.5 310.0 282.0 310.0 508.0 378.0
[157] 321.0 392.0 527.5 542.5 384.0 326.0 396.5 290.0 546.5 122.0 290.0 357.0
[169] 14.5 508.0 546.5 354.0 511.0 616.5 49.0 180.0 140.0 542.5 115.5 277.0
[181] 147.0 202.5 404.0 527.5 267.0 546.5 417.0 86.0 495.5 302.0 328.0 181.5
[193] 108.0 36.0 185.5 94.0 205.0 181.5 162.5 377.0 339.0 418.0 157.0 337.5
[205] 555.0 381.0 236.0 58.0 361.0 251.0 393.0 356.0 341.0 115.5 210.0 321.0
[217] 240.0 156.0 197.0 607.0 343.0 276.0 343.0 178.0 189.0 53.0 159.0 626.5
[229] 175.0 452.0 112.0 185.5 214.0 634.0 135.0 120.0 168.0 350.0 40.0 19.0
[241] 200.0 529.0 218.0 272.0 17.0 314.0 221.0 424.0 389.0 252.5 412.0 538.0
[253] 375.0 275.0 211.0 177.0 88.0 106.0 23.0 408.0 208.5 103.0 56.0 324.5
[265] 220.0 9.0 278.0 566.0 249.0 227.0 283.5 319.0 355.0 161.0 471.0 68.0
[277] 416.0 264.5 77.0 406.0 437.0 582.0 30.0 243.0 97.0 394.0 264.5 480.0

R Console
[289] 228.0 270.0 216.0 281.0 165.0 579.0 603.0 239.0 407.0 512.0 421.0 183.5
[301] 118.0 129.0 141.5 443.0 369.0 336.0 458.0 255.0 316.0 583.0 60.0 551.0
[313] 141.5 366.5 51.0 337.5 449.0 596.0 550.0 148.5 5.0 499.0 191.5 271.0
[325] 518.5 198.0 504.0 95.0 414.0 70.5 188.0 145.0 474.0 574.5 340.0 358.0
[337] 561.0 162.5 105.0 622.5 10.5 569.0 580.5 631.0 589.0 331.0 366.5 353.0
[349] 133.5 605.0 261.0 244.0 65.0 373.0 222.0 501.0 518.5 597.5 379.5 216.0
[361] 578.0 546.5 18.0 3.0 362.0 21.0 422.5 427.5 432.0 413.0 396.5 2.0
[373] 505.0 152.5 608.0 83.0 212.0 101.0 81.0 521.0 495.5 599.0 559.0 368.0
[385] 429.0 532.0 87.0 61.0 457.0 207.0 630.0 493.0 503.0 262.0 426.0 481.5
[397] 371.0 194.0 216.0 602.0 379.5 446.0 136.5 606.0 595.0 556.0 246.0 576.0
[409] 130.0 321.0 383.0 385.0 624.0 438.5 609.0 621.0 433.5 456.0 346.0 54.0
[421] 296.0 166.0 475.0 463.0 402.0 611.0 315.0 628.0 99.0 454.0 570.5 587.5
[433] 152.5 269.0 107.0 574.5 113.0 390.0 26.0 310.0 349.0 435.0 148.5 167.0
[445] 635.0 125.5 332.0 466.0 584.0 613.5 125.5 594.0 586.0 34.0 433.5 486.5
[457] 481.5 590.0 231.0 552.0 136.5 352.0 343.0 587.5 24.0 67.0 252.5 560.0
[469] 613.5 35.0 431.0 553.5 485.0 347.0 539.5 616.5 422.5 450.0 47.0 470.0
[481] 242.0 388.0 405.0 520.0 230.0 138.5 232.0 250.0 176.0 92.0 537.0 234.0
[493] 146.0 522.0 206.0 6.0 238.0 38.0 171.0 445.0 436.0 462.0 386.0 465.0
[505] 32.0 387.0 329.0 229.0 268.0 100.0 382.0 442.0 285.0 89.0 80.0 636.0
[517] 484.0 469.0 160.0 400.0 403.0 573.0 258.0 50.0 202.5 48.0 33.0 72.0
[529] 263.0 57.0 451.0 199.0 121.0 245.0 274.0 420.0 52.0 279.0 93.0 132.0
[541] 41.0 64.0 345.0 69.0 174.0 317.5 225.0 266.0 62.0 172.0 70.5 610.0
[553] 31.0 102.0 444.0 248.0 179.0 104.0 273.0 313.0 213.0 66.0 46.0 348.0
[565] 79.0 299.0 297.0 170.0 224.0 138.5 305.0 22.0 256.0 124.0 259.5 492.0
[577] 85.0 158.0 55.0 191.5 29.0 295.0 128.0 464.0 597.5 257.0 502.0 306.0
[589] 28.0 164.0 572.0 622.5 298.0 483.0 144.0 534.0 82.0 91.0 59.0 233.0
[601] 25.0 327.0 183.5 441.0 280.0 497.0 173.0 43.0 620.0 533.0 585.0 201.0
[613] 563.0 196.0 629.0 195.0 123.0 219.0 557.0 259.5 235.0 376.0 96.0 208.5
[625] 500.0 568.0 427.5 409.0 190.0 567.0 359.0 549.0 577.0 619.0 562.0 283.5

```

Figure 3.1: Présente les sorties du logiciel "R" respectivement la longitude et la latitude.

3.5. Partie d'application pour le test de permutation

- La matrice de distribution empirique pour les rangs spatiaux:

R Editeur de données										
	col1	col2	col3	col4	col5	col6	col7	col8	col9	col10
1	367	120	249	296	378	260	57	120	52	429
2	99	55	69	79	100	71	35	55	32	115
3	149	77	105	120	151	108	45	77	41	170
4	41	24	32	33	41	32	17	24	15	49
5	184	86	127	151	189	130	50	86	45	218
6	466	134	301	375	485	322	64	134	57	550
7	397	125	267	315	415	278	59	125	53	472
8	99	55	69	79	100	71	35	55	32	115
9	184	86	127	151	189	130	50	86	45	218
10	437	127	284	350	456	302	60	127	54	520
11	299	105	211	248	306	219	52	105	47	352
12	208	88	142	170	214	146	50	88	45	245
13	299	105	211	248	306	219	52	105	47	352
14	367	120	249	296	378	260	57	120	52	429
15	66	40	48	51	66	48	27	40	24	78
16	507	147	326	415	526	351	76	147	68	591
17	99	55	69	79	100	71	35	55	32	115
18	299	105	211	248	306	219	52	105	47	352
19	299	105	211	248	306	219	52	105	47	352

	col1631	col1632	col1633	col1634	col1635	col1636
618	262	405	428	462	416	208
619	149	225	240	260	231	124
620	196	285	301	325	291	159
621	54	74	80	90	74	52
622	91	131	141	153	133	84
623	273	419	442	478	430	216
624	77	109	118	130	110	73
625	245	358	379	410	368	195
626	279	429	455	492	441	221
627	261	396	418	451	407	207
628	328	510	538	580	523	256
629	96	136	146	158	138	88
630	132	196	210	230	201	116
631	238	348	369	399	358	188
632	154	233	249	270	239	128
633	220	318	338	367	327	175
634	126	186	199	218	191	112
635	212	306	324	350	314	171
636	168	248	264	287	254	138

3.5. Partie d'application pour le test de permutation

-La matrice de distance:

R Editeur de données										
	col1	col2	col3	col4	col5	col6	col7	col8	col9	col10
1	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
2	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
3	3	1	2	3	3	2	0	1	0	3
4	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
5	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
6	5	1	2	4	6	3	0	1	0	6
7	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
8	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
9	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
10	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
11	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
12	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
13	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
14	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
15	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
16	5	1	2	4	6	3	0	1	0	6
17	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
18	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
19	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4

	col631	col632	col633	col634	col635	col636
1	2	5	5	5	5	1
2	1	2	2	2	2	1
3	2	3	3	3	3	1
4	0	1	1	1	1	0
5	2	4	4	4	4	1
6	2	6	6	6	6	1
7	2	5	5	5	5	1
8	1	2	2	2	2	1
9	2	4	4	4	4	1
10	2	5	5	5	5	1
11	2	4	4	4	4	1
12	2	4	4	4	4	1
13	2	4	4	4	4	1
14	2	5	5	5	5	1
15	0	1	1	1	1	0
16	2	6	6	6	6	1
17	1	2	2	2	2	1
18	2	4	4	4	4	1
19	2	4	4	4	4	1

...

	col1	col2	col3	col4	col5	col6	col7	col8	col9	col10
618	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
619	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
620	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
621	1	0	0	1	1	0	0	0	0	1
622	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
623	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
624	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
625	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
626	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
627	4	1	2	3	5	2	0	1	0	5
628	5	1	2	4	6	3	0	1	0	6
629	2	1	1	2	2	1	0	1	0	2
630	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
631	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
632	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
633	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
634	3	1	2	3	3	2	0	1	0	3
635	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4
636	3	1	2	3	4	2	0	1	0	4

	col631	col632	col633	col634	col635	col636
618	2	5	5	5	5	1
619	2	4	4	4	4	1
620	2	4	4	4	4	1
621	0	1	1	1	1	0
622	1	2	2	2	2	1
623	2	5	5	5	5	1
624	1	2	2	2	2	1
625	2	4	4	4	4	1
626	2	5	5	5	5	1
627	2	5	5	5	5	1
628	2	6	6	6	6	1
629	1	2	2	2	2	1
630	2	4	4	4	4	1
631	2	4	4	4	4	1
632	2	4	4	4	4	1
633	2	4	4	4	4	1
634	2	3	3	3	3	1
635	2	4	4	4	4	1
636	2	4	4	4	4	1

...

3.5. Partie d'application pour le test de permutation

2) Le test statistique ϕ est: 0.044876.

3) la matrice de permutation de ϕ_h est:

	col1	col2	col3	col4	col5	col6	col7	col8	col9	col10
1	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
2	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
3	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
4	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
5	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
12	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
13	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
14	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
15	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0
16	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
17	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
18	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0
19	1	2	2	0	0	0	0	0	2	0

	col631	col632	col633	col634	col635	col636
1	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0
4	0	1	0	0	0	0
5	0	2	0	0	0	1
6	0	0	0	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0
8	0	0	0	0	0	0
9	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	0	0	0
13	0	2	0	0	0	1
14	0	1	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0
17	0	0	0	0	0	0
18	0	1	0	0	0	0
19	0	0	0	0	0	0

⋮

⋮

	col1	col2	col3	col4	col5	col6	col7	col8	col9	col10
618	3	4	5	2	2	1	2	0	5	1
619	3	4	4	2	2	1	2	0	4	1
620	2	2	2	1	1	1	1	0	2	1
621	4	5	6	3	2	1	2	0	6	1
622	3	4	5	2	2	1	2	0	5	1
623	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
624	3	4	4	2	2	1	2	0	4	1
625	2	2	2	1	1	1	1	0	2	1
626	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1
627	4	5	6	3	2	1	2	0	6	1
628	4	5	6	3	2	1	2	0	6	1
629	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
630	3	3	3	2	2	1	2	0	3	1
631	4	5	6	3	2	1	2	0	6	1
632	3	4	5	2	2	1	2	0	5	1
633	2	2	2	1	1	1	1	0	2	1
634	3	4	5	2	2	1	2	0	5	1
635	3	3	3	2	2	1	2	0	3	1
636	3	4	5	2	2	1	2	0	5	1

	col631	col632	col633	col634	col635	col636
618	2	2	0	1	0	2
619	2	2	0	1	0	2
620	1	1	0	1	0	1
621	2	3	0	1	0	2
622	2	2	0	1	0	2
623	1	1	0	1	0	1
624	2	2	0	1	0	2
625	1	1	0	1	0	1
626	1	1	0	1	0	1
627	2	3	0	1	0	2
628	2	3	0	1	0	2
629	0	0	0	0	0	0
630	2	2	0	1	0	2
631	2	3	0	1	0	2
632	2	2	0	1	0	2
633	1	1	0	1	0	1
634	2	2	0	1	0	2
635	2	2	0	1	0	2
636	2	2	0	1	0	2

```

> # P-value
>      (permustat>=teststat)
[1] 0.6648037210 0.0844324634 0.5217204636 0.1704176187 0.7882348758
[6] 0.7425057716 0.9246775676 0.7734059903 0.9734731736 0.3929092148
[11] 0.9299752146 0.0715305321 0.2238981780 0.1521905356 0.9485084091
[16] 0.1868341998 0.1174084435 0.9354015603 0.3291256172 0.6084434544
[21] 0.0391025271 0.8666369542 0.8768477542 0.2078800038 0.9350987407
[26] 0.8111157578 0.3078535141 0.6065450017 0.1060683685 0.9434870803
[31] 0.6513982073 0.7862402340 0.2303636805 0.4793730681 0.5357517370
[36] 0.7199222143 0.2105526952 0.4092772440 0.6952029781 0.7983005042
[41] 0.6242065968 0.1895541819 0.1356468673 0.9841581350 0.5429426620
[46] 0.1635615239 0.0476730929 0.1383514011 0.6400030882 0.0060178388
[51] 0.9381983504 0.1401829021 0.1648338265 0.0840424243 0.0631452557
[56] 0.2662530998 0.3200037668 0.3699945114 0.5232948782 0.4095620164
[61] 0.8079586471 0.5053218130 0.9633191843 0.6441867065 0.7687225027
[66] 0.3815756848 0.1913816223 0.7531372006 0.5650084966 0.2733607672
[71] 0.5302971245 0.3396500312 0.5203520816 0.3901677022 0.3800778398
[76] 0.5589712854 0.5280295301 0.5386950166 0.8322581737 0.8366203567
[81] 0.0947915150 0.5115023069 0.7805840631 0.8956678952 0.8124156529
[86] 0.2780854718 0.5391023064 0.5031717254 0.8969159764 0.0471982097
[91] 0.3124069734 0.6910725492 0.5925628333 0.0387283750 0.8618079452
[96] 0.5924693649 0.9320972830 0.6838686725 0.8292937365 0.9307574439
[101] 0.1613671384 0.8499540056 0.3652083867 0.8024001936 0.2935918048
[106] 0.0902444068 0.1043837199 0.8559076535 0.3095195321 0.6209670042
[111] 0.5162295634 0.4502534047 0.6304457644 0.6679785766 0.9672723473

      :

[876] 0.1618699702 0.4896038081 0.2649222324 0.1851057161 0.5530214799
[881] 0.6881747292 0.2801533318 0.4784943843 0.2378748131 0.4737669358
[886] 0.6840060274 0.7394339943 0.3004817164 0.3663751741 0.6153490138
[891] 0.9462558299 0.2088877745 0.4619274158 0.5380848965 0.3746962456
[896] 0.0154279158 0.6374705515 0.0021293957 0.2375241858 0.4297115158
[901] 0.0915999673 0.8383727551 0.2853414989 0.6521598618 0.1110025123
[906] 0.8256524596 0.1385574385 0.9503346090 0.4612418914 0.9159672349
[911] 0.7277463283 0.0024014388 0.7249651267 0.2570033006 0.5060472088
[916] 0.3705386610 0.2041409626 0.2525154569 0.5345037093 0.7985587018
[921] 0.2942938318 0.3853185857 0.9649422725 0.5118448369 0.9221546580
[926] 0.1646427163 0.8840796039 0.7063961851 0.2174586526 0.6816039647
[931] 0.0001437955 0.2060209338 0.9015453544 0.5614139261 0.2109502740
[936] 0.1701521957 0.7098929556 0.5563130379 0.9214826727 0.7329236546
[941] 0.7432711853 0.0754515675 0.0725188318 0.3406591576 0.4821655073
[946] 0.5808247651 0.3170609609 0.3490359078 0.0200103654 0.8827969048
[951] 0.7896555630 0.7520767639 0.1467658677 0.4657392909 0.6451295556
[956] 0.9492182499 0.2692897469 0.6776806721 0.1224380613 0.8353817801
[961] 0.3137328066 0.7069165264 0.7545100593 0.3774599649 0.6408589873
[966] 0.9769684430 0.3471573384 0.0257045855 0.2473341171 0.2435231903
[971] 0.6275649259 0.5797835330 0.8443807152 0.1863616284 0.6612753002
[976] 0.8486911145 0.9785151528 0.8774625419 0.0705553100 0.2561767804
[981] 0.4434826504 0.4616027956 0.3688600615 0.5303267906 0.4540261088
[986] 0.0418932643 0.5235224979 0.9879034220 0.0455042422 0.8122634825
[991] 0.5029987900 0.8007280226 0.2509033503 0.5455532738 0.1023546411
[996] 0.3189462153 0.1783627348 0.7706012896 0.1430880341 0.1054460593

```

3) La P -value égale à 0.51115.

Conclusion

La $P - value$ égale à 0.51115 est supérieure à 0.1 donc l'hypothèse que le processus est de temps est non échangeable est accepté au seuil $\alpha = 0.05$.

Alors, le temps n'est pas échangeable pour (x_i, y_j, t_k) , donc le processus de Poisson n'est pas homogène.

Conclusion générale

Nous avons choisi délibérément, tout au long de ce manuscrit, de rédiger une conclusion spécifique à chacun des chapitres présentés.

Ce travail, a consisté dans un premier temps à modéliser un processus d'occurrence d'événements par un processus ponctuel, en explicitant clairement les formalismes et les outils permettant de réaliser cette modélisation.

Ensuite, nous avons présenté les procédures d'identification d'événements dépendants dans un processus ponctuel, nous avons proposé les procédures déterministes, basées sur la définition d'une fenêtre spatio-temporelle, ainsi, que les procédures stochastiques, dans le but d'obtenir un processus amputé des événements dépendants.

Puis, nous avons présenté un test statistique, non paramétrique, le test de permutation, défini sur la base d'une distance spatio-temporelle, nous permettant de déterminer

si le processus restant du processus ponctuel initial amputé des événements dépendants, est Poissonnien.

Comme perspectives nous proposons de:

- Améliorer les procédures stochastiques pour identifier les événements dépendants.
- Développer des tests statistiques pour analyser le processus amputé des événements dépendants, afin de déterminer si le modèle est effectivement adéquat aux données, en plus de la question choix du meilleur modèle proposé.

Espérons que nous avons modélisé un processus d'occurrence à partir d'un processus aléatoire ponctuel qui répond aux besoins pratiques des sismologues.

Nous espérons que ce modeste travail pourrait servir à des études plus approfondies dans ce domaine.

Annexes

Annexe A: Le calcul d'une distance entre deux coordonnées géographiques

Nous rappelons que:

La trigonométrie sphérique est un ensemble de relations analogues à celles de la trigonométrie euclidienne mais portant sur les angles et distances repérés sur une sphère.

La formule des cosinus permet notamment de calculer la distance entre deux points A et B sur la terre en fonction de latitudes et longitudes. Pour cela, on place C au pôle nord, de sorte que a est le complémentaire de latitude ϕ_A de A , b le complémentaire de celle ϕ_B de B , et γ la différence de longitude: $\Delta\lambda = \lambda_B - \lambda_A$.

On obtient directement

$$d_{AB} = R \times C = R \arccos(\sin \phi_A \sin \phi_B + \cos \phi_A \cos \phi_B \cos \Delta\lambda,$$

(où $R = 6371km$ est le rayon terrestre).

Pour calculer la distance entre deux coordonnées géographiques, utilisant la formule développée par *Thaddeus Vincenty en 1975 (Vincenty,1975)*, un modèle ellipsoïdal de la terre.

Les calculs sur un modèle sphérique sont précis à 0,3%. La formule de *Vincenty* est précise à 0.5 mm, or 0.000015", sur l'ellipsoïde utilisée.

la formule est la suivante:

$$d = R \times C = R \arccos(\sin(lat1) * \sin(lat2) + \cos(lat1) * \cos(lat2) * \cos(lon2 - lon1))$$

On note: $R = 6371 Km$, $d = distance$ en Km .

Exemple 3.1 *On donne un exemple pratique pour le calcul de la distance entre deux coordonnées géographiques, utilisant la formule Vincenty:*

Soit (x_1, y_1) et (x_2, y_2) les coordonnées géographiques en radians,

Avec;

x_1 et x_2 présentent latitude on les notes "Lat 1" et "Lat 2" respectivement.

y_1 et y_2 présentent longitude, on les notes "Long 1" et "Long 2" respectivement.

Lat 1: 53.0902 N, Long 1: 001.5040 W

Lat 2: 52.1219 N, Long 2 : 000.0833 W

On applique la formule précédente de distance, on trouve $d = 155927.727$ m

Annexe B: Rappel sur la régression au sens des moindres carrés

Nous rappelons dans ce paragraphe les notions essentielles qui seront utilisées dans le chapitre deux, on peut consulter le livre de *Dagnelie, (2006). Page 93.*

La régression consiste à rechercher une relation pouvant éventuellement exister entre les x et les y , par exemple de la forme $y = f(x)$. Lorsque la relation recherchée est affine, c'est-à-dire de la forme $y = ax + b$, on parle de régression linéaire. Mais même si une telle relation est effectivement présente, les données mesurées ne vérifient pas en général cette relation exactement. Pour tenir compte dans le modèle mathématique des erreurs observées, on considère les données $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ comme autant de réalisations d'une variable aléatoire Y et parfois aussi les données $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ comme autant de réalisations d'une variable aléatoire X . On dit que la variable Y est la variable dépendante ou variable expliquée et que la variable X est la variable explicative.

La droite des moindres carrés

Les données $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, n\}$ peuvent être représentées par un nuage de n points dans le plan (x, y) . Le centre de gravité de ce nuage peut se calculer comme suit:

$$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i \right).$$

Chercher une relation affine entre les variables X et Y revient à rechercher une droite qui s'ajuste le mieux possible à ce nuage de points. Parmi toutes les droites possibles, on

retient celle qui jouit d'une propriété remarquable: c'est celle qui rend minimale la somme des carrés des écarts des valeurs observées y_i à la droite). C'est celle qui rend minimale la somme des carrés des écarts des valeurs observées y_i à la droite $\hat{y}_i = ax_i + b$. Si ε_i représente cet écart, appelé aussi résidu, le principe des moindres carrés ordinaires consiste à choisir les valeurs de a et de b qui minimisent

$$E = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - (ax_i + b))^2$$

Un calcul montre que ces valeurs, notées \hat{a} et \hat{b} , sont égales à:

$$\begin{cases} \hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \\ \hat{b} = \bar{y} - \hat{a}\bar{x} \end{cases}$$

L'idée d'une décroissance exponentielle, telle que, en base 10 est:

$$z = 10^{a+bx} \quad \text{ou} \quad \log_{10} z = a + bx,$$

La valeur du coefficient b étant négative

Après avoir brièvement rappelé le principe de la régression au sens des moindres carrées, par la suite on détaille l'algorithme *Estimation-Maximisation*.

Annexe C: La théorie de l'algorithme *Estimation-Maximisation*

L'algorithme *Espérance-Maximisation* (en anglais Expectation-maximisation algorithm, souvent abrégé par *EM*), proposé par *Dempster et al. (1977)*, est une classe d'algorithmes qui permettent de trouver le maximum de vraisemblance des paramètres de modèles probabilistes lorsque le modèle dépend de variables latentes non observables.

On utilise souvent l'algorithme "*EM*" pour la classification de données, l'apprentissage automatique, ou la vision artificielle.

L'algorithme d'*espérance-maximisation* comporte:

Une étape d'évaluation de l'espérance (*E*), où l'on calcule l'espérance de la vraisemblance en tenant compte des dernières variables observées,

Une étape de maximisation (*M*), où l'on estime le maximum de vraisemblance des paramètres en maximisant la vraisemblance trouvée à l'étape *E*.

On utilise ensuite les paramètres trouvés en M comme point de départ d'une nouvelle phase d'évaluation de l'espérance, et l'on itère ainsi.

Principe de fonctionnement:

En considérant un échantillon $X = (x_1, \dots, x_n)$ d'observations suivant une loi $f(x_i, \theta)$ paramétrée par θ , on cherche à déterminer le paramètre θ maximisant la *log-vraisemblance* donnée par;

$$L(X, \theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i, \theta)$$

Cet algorithme est particulièrement utile lorsque la maximisation de $L(X, \theta)$ est très complexe mais que, sous réserve de connaître certaines données judicieusement choisies, on peut très simplement déterminer θ .

Dans ce cas, on s'appuie sur des données complétées par un vecteur $\mathbf{Z} = \{z_1, \dots, z_n\}$ inconnu.

En notons $f(z_i | x_i, \theta)$ la probabilité de z_i sachant x_i et le paramètre θ , on peut définir la *log-vraisemblance complétée* comme la quantité:

$$L((X, Z), \theta) = \sum_{i=1}^n (\log f((z_i | x_i), \theta)) + \log f(x_i, \theta),$$

et donc

$$L(X, \theta) = L((X, Z), \theta) - \sum_{i=1}^n (\log f((z_i | x_i), \theta))$$

L'algorithme "EM" est une procédure itérative basée sur l'espérance des données complétées conditionnellement au paramètre courant. En notant $\theta^{(c)}$ ce paramètre, on peut écrire

$$E \left[L(X, \theta) | \theta^{(c)} \right] = E \left[L((X, Z), \theta) | \theta^{(c)} \right] - E \left[\sum_{i=1}^n \log f(z_i | x_i, \theta) | \theta^{(c)} \right],$$

où l'espérance est prise sur Z ,

ou encore

$$L(X, \theta) = Q(\theta, \theta^{(c)}) - H(\theta, \theta^{(c)})$$

car $L(X, \theta)$ ne dépend pas de Z , avec;

$$Q(\theta, \theta^{(c)}) = E \left[L((X, Z), \theta) \mid \theta^{(c)} \right],$$

et

$$H(\theta, \theta^{(c)}) = E \left[\sum_{i=1}^n \log f(z_i \mid x_i, \theta) \mid \theta^{(c)} \right]$$

on montre que la suite définie par;

$$\theta^{(c+1)} = \arg \max_{\theta} (Q(\theta, \theta^{(c)})),$$

fait tendre $L(X, \theta^{(c+1)})$ vers un maximum local.

On peut donc définir l'algorithme "EM" de la manière suivante:

Algorithme "EM":

- Initialisation des paramètres au hasard θ
 - $C = 0$,
 - Tant que l'algorithme n'a pas convergé, faire
 - Etape d'estimation (étape E):

$$Q(\theta, \theta^{(c)}) = E \left[L((X, Z), \theta) \mid \theta^{(c)} \right],$$
 - Etape de maximisation : $\theta^{(c+1)} = \arg \max_{\theta} (Q(\theta, \theta^{(c)}))$,
 - $C = C + 1$,
 - Fin.

En pratique, pour s'affranchir du caractère local du maximum atteint, on fait tourner l'algorithme "EM" un grand nombre de fois à partir de valeurs initiales différentes de manière à avoir de plus grandes chances d'atteindre le maximum global de vraisemblance.

Annexe D: Rappel sur les tests d'hypothèse

Ce rappel est basé sur l'ouvrage de *Dodge, (2007)*.

Soit X un caractère quantitatif ou qualitatif d'une certaine population Ω dont une au moins des valeurs des paramètres décrivant X est inconnue.

On formule une hypothèse sur la valeur de ce paramètre. On s'interroge sur la pertinence de cette hypothèse en la confrontant aux résultats obtenus sur un échantillon.

Introduisons les définitions suivantes:

Définition 3.5.1 - *Un test d'hypothèse est une procédure basée sur l'observation d'un ou plusieurs échantillons permettant de faire un choix entre deux hypothèses formulées.*

- *L'hypothèse mise en avant dans le cadre d'un test d'hypothèse est notée (H_0), appelée hypothèse nulle. Toute autre hypothèse à laquelle on peut la confronter s'appelle hypothèse alternative, notée (H_a), c'est l'hypothèse (H_0) qui est soumise au test et que l'on suppose comme vraie.*

- *La décision d'accepter ou rejeter le test repose sur la confrontation aux valeurs observées sur un échantillon. L'information contenue dans cet échantillon étant incomplète, toute décision est associée à prise de risque.*

- *La probabilité d'erreur de première espèce est définie par la probabilité:*

$$P[H_0 \text{ rejeter} \mid H_0 \text{ vraie}] = \alpha$$

On choisit souvent en pratique les seuils $\alpha = 0,05$ ou $\alpha = 0,01$.

- *La probabilité d'erreur de seconde espèce l'erreur est définie par la probabilité:*

$$P[H_0 \text{ accepter} \mid H_0 \text{ fausse}] = \beta$$

- *La probabilité $1 - \beta$ représente la puissance du test.*

La puissance du test correspond à la probabilité de rejeter l'hypothèse (H_0) sachant que cette dernière est fausse. Plus β est petit et plus le test sera puissant.

- *La p - valeur d'un test Δ_α est définie à partir des observations X par:*

$$\hat{\alpha} = \sup\{\alpha / \Delta_\alpha(X) = 0\}$$

C'est la plus grande valeur de α pour laquelle au vue de nos observations, on accepte l'hypothèse nulle (H_0).

Annexe E: Rappel sur la fonction de répartition empirique

Définition 3.5.2 *Ayant un échantillon $(X_k)_{1 \leq k \leq n}$ i.i.d, de la loi μ , on définit la fonction de répartition empirique par*

$$F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n 1_{\{X_k \leq x\}}.$$

Théorème 3.5.1 (*Glivenko-Cantelli*)

Soit X_1, \dots, X_n n variables aléatoires i.i.d de fonction de répartition F .

Notons: $F_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{X_i \leq x\}}$ la fonction de répartition empirique associée alors:

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |F_n(x) - F(x)| \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} 0$$

Annexe F: Les classes de Vapnik-Chervonenkis

La théorie de Vapnik-Chervonenkis (également connue sous le nom de théorie VC) est une théorie mathématique développée dans les années 1960-1990 par Vladimir Vapnik et Alexey Chervonenkis. C'est une forme de théorie d'apprentissage automatique, qui tente d'expliquer l'apprentissage d'un point de vue statistique.

Définition 3.5.3 *Soit \mathcal{X} un espace des ensembles, D est un ensemble de données, avec $D \subset \mathcal{X}$; et V est un sous ensemble, on peut écrire, $d = V \cap D$, pour certains $V \in \mathbf{V}$, et $d \leq 2^n$.*

Pour toute n , soit \mathbf{V} est une classe de VC de dimension infinie alors,

$$\mathbf{V} \in \{(-\infty, t_1) \times \dots \times (-\infty, t_n) : t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}\}$$

Annexe G: Échangeabilité

La recherche de conditions suffisantes garantissant l'exactitude d'un test de permutation a fait l'objet de nombreuses publications (Lehman, (1998)). Le cadre généralement retenu repose sur la notion d'échangeabilité.

Définition 3.5.4 Soit (X_1, X_2, \dots, X_n) un vecteur aléatoire de taille n et de loi conjointe $f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n)$ donnée.

Les X_i sont dites échangeable si la densité conjointe des observation est invariante par permutation des indices c'est-à-dire si

$$f_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = f_{X_1^\pi, X_2^\pi, \dots, X_n^\pi}(x_1^\pi, x_2^\pi, \dots, x_n^\pi) \quad \forall \pi \in \Pi$$

Une condition suffisante garantissant l'exactitude d'un test de permutation est l'échangeabilité des observations formant l'échantillon, (Lehman, 1998).

Annexe H: Extrait de fichier de données

LAT	LON	YEAR/MONTH/DAY	MAG					
36.600	5.300	1960 1 14	3.4	36.200	6.100	1963 3 14	5.2	
36.000	1.500	1960 2 9	4.6	36.000	5.200	1963 9 4	6.8	
36.167	3.000	1960 2 20	5.9	37.000	3.333	1964 1 9	3.4	
35.652	4.250	1960 2 21	5.7	35.450	4.570	1964 2 12	5.7	
36.250	5.383	1960 2 26	4.6	36.000	3.600	1964 4 21	3.8	
36.933	3.183	1960 3 13	4.0	36.133	2.917	1964 5 18	2.8	
36.700	1.100	1960 5 7	4.6	35.500	.200	1964 7 15	3.4	
36.000	1.500	1960 6 3	4.0	36.800	3.900	1964 7 28	3.2	
36.250	.917	1960 6 9	4.6	36.200	3.700	1964 8 4	2.9	
36.800	5.800	1960 6 19	4.8	35.373	.322	1964 10 2	3.0	
36.500	4.500	1960 6 25	4.8	36.307	4.317	1964 10 21	4.3	
36.300	1.500	1960 7 27	3.4	36.833	2.000	1965 3 8	4.0	
36.500	6.000	1960 12 1	5.2	36.200	1.400	1965 4 8	3.4	
36.600	5.300	1960 12 5	3.4	36.600	5.333	1965 4 14	4.0	
35.833	5.500	1960 12 7	2.8	36.500	5.667	1965 4 24	5.2	
37.710	-.090	1961 4 9	2.6	36.400	1.600	1965 5 29	6.2	
36.000	5.500	1961 8 7	4.0	36.892	-.135	1965 7 5	3.0	
36.500	2.900	1961 9 11	5.2	36.400	3.700	1965 7 6	4.2	
36.500	1.200	1961 10 6	4.4	36.400	2.800	1965 10 25	3.7	
36.200	3.750	1962 1 11	5.2	36.600	4.600	1965 11 15	4.0	
36.833	5.000	1962 5 26	3.4	36.250	3.667	1965 11 23	3.4	
36.600	5.300	1962 5 27	2.8	36.500	3.000	1966 1 2	3.8	
36.500	5.300	1962 8 14	2.8	36.250	3.000	1966 3 3	3.7	
37.168	-.105	1962 8 25	3.6	36.340	2.980	1966 4 3	4.2	
36.600	.900	1962 8 27	4.0	37.085	2.350	1966 8 19	3.3	

:

36.519	5.254	2005 3 19	4.0	36.502	1.793	2005 10 5	2.7	
36.446	2.809	2005 4 1	3.7	36.322	5.499	2005 10 19	2.0	
35.351	.204	2005 4 7	3.4	36.304	1.741	2005 10 22	2.3	
36.233	1.579	2005 5 14	3.8	36.610	6.209	2005 10 22	2.8	
35.984	5.539	2005 5 24	3.3	36.467	1.730	2005 10 26	3.2	
36.515	6.150	2005 5 29	2.8	36.392	1.370	2005 10 26	3.4	
36.228	2.787	2005 5 31	4.3	36.634	1.946	2005 10 28	4.0	
36.628	5.033	2005 6 9	3.3	36.309	5.468	2005 10 31	2.3	
36.613	1.458	2005 6 21	3.4	36.445	2.444	2005 11 5	3.5	
36.550	5.381	2005 6 24	2.9	35.857	2.212	2005 11 5	3.7	
35.608	1.029	2005 6 26	2.8	36.130	3.427	2005 11 7	2.6	
35.796	1.152	2005 7 14	3.6	36.678	1.175	2005 11 9	2.3	
36.971	.659	2005 7 20	4.8	36.045	1.840	2005 11 19	2.8	
36.728	2.157	2005 7 21	3.4	36.567	5.228	2005 11 19	3.7	
35.528	.173	2005 7 31	4.2	36.703	5.517	2005 11 21	2.2	
36.220	2.945	2005 8 3	2.4	36.616	4.297	2005 11 22	3.5	
36.375	1.677	2005 8 10	2.0	37.025	3.792	2005 11 23	3.7	
36.265	4.411	2005 8 31	2.3	36.149	1.707	2005 12 6	2.8	
36.395	2.677	2005 9 6	3.8	36.259	5.504	2005 12 10	2.3	
36.643	5.180	2005 9 6	4.4	36.544	3.182	2005 12 12	4.1	
36.770	1.630	2005 9 7	2.3	36.340	5.423	2005 12 17	2.0	
36.160	.391	2005 9 19	3.1	36.503	5.574	2005 12 17	2.0	
36.498	6.108	2005 9 28	2.8	36.237	6.102	2005 12 18	2.4	
35.861	5.379	2005 9 28	2.0	36.491	5.494	2005 12 27	2.4	
36.712	5.621	2005 9 30	2.3	36.372	2.710	2005 12 31	2.3	

Annexe I: Extrait du programme en langage R

```

# Input catalog with columns "longitude"; "latitude"; "times"
      :
# Extract ranks (assume no ties)
R>x.rank = rank(catalog$longitude)
R>y.rank = rank(catalog$latitude)
# Find empirical distribution of spatial ranks
R>xy.upper = matrix(NA,n,n)
R>for(I in 1:n){
R>for(J in 1:n){
R>xy.upper[I,J] = sum((y.rank<=y.rank[I])*(x.rank<=x.rank[J]))
}
# xy.upper[I,J] is the number of points
# with y <= y[i], x <= x[j]
# y is row, x is column
### Distance function
R>distfind <- function(x.rank,y.rank,xy.upper){
R>n = length(x.rank)
# Set some stuff to zero
R>teststat = 0
R>xyz.temp = matrix(0,n,n)
# xyz.temp is the number of points
# with y <= y[i], x <= x[j], z <= Z
# i.e. empirical distribution at time Z
# Now go through search space chronologically
# update xyz.temp
# find the max; check the min isn't close; if it is, look around
R>for(Z in 1:n){
R>xyz.temp = xyz.temp + (y.rank>=y.rank[Z])%*%t(x.rank>=x.rank[Z])
R>dist.matrix = xyz.temp/n-xy.upper/n*Z/n

```

```
R>teststat = max(teststat,abs(dist.matrix))
R>}
R>return(teststat)
}
R>teststat = distfind(x.rank,y.rank,xy.upper)
# Number of perms
N = 1000
R>permustat = rep(NA,N)
### It's permuting time
R>for(permu in 1:N){
R>print(permu)
R>o=sample(n)
R>x.perm = x.rank[o]
R>y.perm = y.rank[o]
R>xy.perm = xy.upper[o,o]
R>permustat[permu] = distfind(x.perm,y.perm,xy.perm)
  write.table(permustat,"permustat.txt") # change filename
}
# P-value
R>mean(permustat>=teststat)
```

Bibliographie

- [1] **Anscombe, F.J. (1948).**The transformation of the Poisson, binomial and negative binomial data, *Biometrika*, 35, pp 246-254.
- [2] **Bremaud, P. (1981).** *Point process and queues, martingales dynamics*. Springer Verlag series in statistics.
- [3] **Bradley, J.T., and H.J,Wilson. (2005).** Iterative convergence of passage-time densities in semi-markov performance models. *Performance evaluation* 60, pp 237–254.
- [4] **Bradley, J.T., Dingle, N.J., Harrison, P.G., and Knottenbelt, W.J. (2006).** Distributed computation of transient state distributions and passage time quantiles in large semi-Markov models. *Future Generation Computer Systems* 22, pp 828–837.
- [5] **Barani, S., Ferretti, G., Massa, M., and Spallarossa,.D. (2007).** The wave form similarity approach to identify dependent events in instrumental seismic catalogues. *Geophys. J. Intl.*, 168, pp. 100-108.
- [6] **Brown, L.D., and Zhao, L. (2002).** A Test for the Poisson distribution, *The India Journal of Statistical*, 64, pp, 611-625.
- [7] **Cotea, M.J., and Stein, W.E. (2006).** A stochastic model for a visit to the doctor’s office. *Mathematical and computer modeling*, 45, pp, 309–323.
- [8] **Cornell, C.A., and Winterstein, S. (1988).** Temporal and magnitude dependence in earthquake recurrence models. *Bull. seism. soc. Am.*, Vol. 78, No. 4, pp. 1522-1537.

-
- [9] **Célini, L., and J. Vaillant. (1999).** Répartition spatio-temporelle des présences d'ailés d'*Aphis gossypii* (Glover) (Hemiptera:aphididae) en culture cotonnière (Malvaceae), *Canadian Entomologist*, 131, pp 813-824.
- [10] **Dempster, A.N.,Laird and D.Rubin. (1977).** Maximum likelihood from incomplete data via the EM algorithm. *Journal of the Royal Statistical Society. Series B (Methodological)*, vol. 39, no 1, pp,1-38 (JSTOR 2984875).
- [11] **Doob, J. L. (1942).** What is a stochastic process ?. *The American Mathematical Monthly*, 49, pp. 648-653.
- [12] **Dodge, Y. (2007).** Statistique dictionnaire encyclopédique, *Springer-Verlag Paris Suisse*.pp 413-414.
- [13] **Dellacherie, C. (1974).** Un ensemble progressivement mesurable. (Volume VIII, , 22-24).
- [14] **Daley, D., and V. Dere-Jones. (1988).** An Introduction to the Theory of Point Processes, *Springer-verlag. New York, Berlin Heidelberg*. pp, 414-427.
- [15] **Draper, N. R., et Smith, H. (1998).** Applied Regression Analysis. *New York, John Wiley and Sons (Third Edition)*.
- [16] **Edon-Jock, C. (2008).** Le virus de la feuille jaune de la canne à sucre : spécificités de la dissémination en guadeloupe et en martinique, Thèse de doctorat, Université des antilles et de la guyane.
- [17] **Fisher, R.A. (1935).** The Design of Experiment.Oxford,England: Oliver et Boyd.
- [18] **Frohlich, C., and S. S. Davis. (1990).** Single-link cluster analysis as a method to evaluate spatial and temporal properties of earthquake catalogues, *Geophys. J. Int.*, 100, pp. 19-32.
- [19] **Gardner, J., and L. Knopoff. (1974).** Is the sequence of earthquakes in Southern California, with aftershocks removed, Poissonian?, *Bull. Seis. Soc. Am.*, 64, pp. 1363-1367.

-
- [20] **Galambos, J. (1986)**. Exchangeability. *Encyclopedia of Statistical Sciences*, NY :Wily 7. pp.573–577.
- [21] **Good, P. (2000)**. *Permutation tests*. Springer.
- [22] **Howard, R. A. (1971)**. *Dynamic probabilistic systems*,1, 2: John Wiley and Sons, New York.
- [23] **Hamdache, M , J.A. Peláez, A. Talbi, and C. López Casado. (2010)**. A Unified Catalog of Main Earthquakes for Northern Algeria from A.D. 856 to 2008. *Seismological Research Letters* Vol 81, N° 5 Sept/Oct 2010.
- [24] **Jacquet, O. (2008)**. *Analyse statistique des processus ponctuels spatio-temporels de propagation sur une grille*. Thèse de doctorat. Université des Antilles et de la Guyane.
- [25] **Jacquet, O.,Vaillant,.J., Edon-Jock, C., and J.H.Daugrois. (2009)**. Statistical analysis of partially observed two-phase point processes, *Computational Statistics and Data Analysis*, soumis.
- [26] **Justel, A., Peña, D., and R. Zamar. (1997)**. A multivariate Kolmogorov-Smirnov test of goodness of fit. *Statistics and Probability letters*, pp 251-259.
- [27] **Knopoff, L., and J. Gardner. (1972)**. Higher Seismic Activity During Local Night on the Raw Worldwide Earthquake Catalogue, *Geophys. J. R. astr. Soc.*, 28, pp, 311-313.
- [28] **Kagan, Y.Y., and L. Knopoff. (1987)**. Random stress and earthquake statistics-time-dependence, *Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society*, 88 pp, 723-731.
- [29] **Kulkarni, V.G. (1995)**. *Modeling and analysis of stochastic systems*. Chapman and Hall, London.
- [30] **Kutoyants, Y. A. (1998)**. *Statistical inference for spatial Poisson processes* , Springer-verlag, New York.

-
- [31] **Levy, P. (1942)**. Processus semi-markoviens, Proc. Int. Cong. Math. (Amsterdam), 3, pp. 416-426.
- [32] **Lang, G. (2009)**. Outil pour la modélisation stochastique, processus ponctuel, pp 2-8.
- [33] **Lehmann, E.L. (2005)**. Testing Statistical Hypotheses. Springer, New York, 3rd edition, .
- [34] **Lehmann, E.L. (1998)**. Testing Statistical Hypotheses. *John Wiley and Sons*.
- [35] **Marsan, D., and O. Lengline. (2008)**. Extending earthquakes reach through cascading, science, 319(5866), pp, 1076-1079, doi:10.1126/science.1148783.
- [36] **Musmeci, F., and D. Vere-Jones. (1992)**. A space- time clustering model for historical earthquakes. Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 44, pp1-11.
- [37] **Matthews, M.V., and P.A. Reasenberg. (1988)**. Statistical methods for investigating quiescence and other temporal seismicity patterns. *Pure Appl. Geoph.*, 126, pp 357-372.
- [38] **Mclachlan, G.J., and T. Krishnan. (1997)**. The EM algorithm and extensions. A wiley interscience publication. Wiley Series in Probability and Statistics ,applied probability and statistics. New York, John Wiley and Sons In.
- [39] **Massart, P. (1990)**. The tight constant in the dvoretzky-kiefer-wolfowitz inequality. Ann. Prob., 18, pp, 1269-1283.
- [40] **Minh, D.L. (2001)**. Applied probability models. Duxbury, thomson learning press, california, pp 225–246.
- [41] **Nava, F.A., Herrera, C., Frez, J , and E, Glowacka. (2005)**. Seismic hazard evaluation using markov chains: application to the Japan area. Pure and Applied Geophysics 162, pp.1347–1366.
- [42] **Neveu, J. (1970)**. Bases mathématiques du calcul des probabilités. Masson et Cie 2 édition, pp 114-138.

-
- [43] **Ogata, Y. (1988)**. Statistical models for earthquake occurrences and residual analysis for point processes. *Journal of American Statistical Association*, 83, pp, 9-27.
- [44] **Pierre.Dagnélié. (2006)**. Statistique théorique et application. 2ième édition Paris, ISBN13 978-2-804 1-5229-1, 737.p.
- [45] **Rao, M.M. (1993)**. Conditional Measures and Applications. Marcel Dekker, Inc.,New York, Basel, Hong Kong, ISBN 978-0-8247-88-1, 417 p.
- [46] **Romano, Joseph. (1988)**. Bootstrap Revival of Some Nonparamétrique Distance Tests *Journal of the American Statistical Association*, Vol 83, No. 403, pp, 698-708.
- [47] **Romano, Joseph. (1989)**. Bootstrap and randomization tests of some nonparametric hypotheses, *Ann. Stat.*, 17, 141–159.
- [48] **Randles, R. H., and Wolfe, D. A. (1979)**. Introduction to the Theory of Non parametric Statistics. *New York. John Wiley et Sons.*
- [49] **Uhrhammer, R. (1986)**. Characteristics of northern and central california seismicity, earthquake Notes, 57, pp 21.
- [50] **Vaillant, J. (1991)**. Negative binomial distributions of individuals and spatio-temporal cox processes. *Scandinavian journal of statistics*, 18, pp 235-248.
- [51] **Vaillant, J. (1992)**. Echantillonnage et étude statistique de populations en milieu hétérogène, *Statistique appliquée*, pp 15-26.
- [52] **Vaillant, J.,Argenté, G., and C.Boulard. (1997)**. Hypodermose bovine: une procédure quasi séquentielle d'observation des cheptels pour la surveillance de la recrudescence en zone éradiquée, *Veterinary Research*, PP, 461-471.
- [53] **Vapnik, V.N., and Chervonenkis, A.Y.A. (1971)**. On the uniform convergence of relative frequencies of events to their probabilities. *Theory of Probability and Its Applications*, pp, 264–280.

- [54] **Zhuang, J., Y. Ogata., and D. Vere-Jones. (2002).** Stochastic declustering of space-time earthquake occurrences, *Journal of American Statistical Association*, 97, pp 369-380.
- [55] **Zhuang, J., Y. Ogata., and D. Vere-Jones. (2004).** Analyzing earthquake clustering features by using stochastic reconstruction. *J. Geophys. Res.*,109, B5: B05301, 10.1029/2003JB002879.
- [56] **Zhuang, J. (2006).** Multi-dimensional second-order residual analysis of space-time point processes and its applications in modelling earthquake data, *J. Royal Stat. Soc.*,68, pp 635-653.