N° d'ordre : 13/2017-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Thèse

de Doctorat en Sciences

Présentée pour l'obtention du grâde de Docteur
En : Mathématiques

Option : Recherche Opérationnelle et Génie Mathématiques

Par

SAIDI Yamina

Sujet

Quelques propriétés des polynômes de type Appell

Soutenue publiquement, le 29/06/2017 devant le jury composé de :

Isma BOUCHEMAKH	Prof.	à l'USTHB	Présidente
Miloud MIHOUBI	Prof.	à l'USTHB	Directeur de thèse
Ahmed AIT MOKHTAR	MCA	ENS-Kouba	Examinateur
Hacène BELBACHIR	Prof.	à l'USTHB	Examinateur
Sadek BOUROUBI	Prof.	à l'USTHB	Examinateur
Abdelkader BOUYAKOUB	Prof.	U. Oran 1	Examinateur
Abdellah DERBAL	Prof.	ENS-Kouba	Examinateur

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons aux liens entre une grande classe de partitions (ou de permutations) d'un ensemble fini et des polynômes de type Appell et ainsi sur quelques propriétés de ces polynômes. En se basant sur des techniques combinatoires, nous démontrons de nouvelles identités et relations récurrentes et nous déduisons quelques identités et interprétations combinatoires. Nous introduisons et étudions une nouvelle classe des nombres de Stirling de première espèce. Ces nombres sont utilisés, par la suite, pour exprimer les nombres et les polynômes hypergéométriques de Cauchy généralisés que nous définissons. Les polynômes de type Appell à arguments entiers sont exprimés en utilisant les polynômes partiels r-Bell. Nous définissons et étudions les polynômes d'Appell généralisés. Nous donnons leur connexion avec les polynômes partiels de Bell. Nous établissons une nouvelle identité sur une paire de polynômes de type Appell généralisés, qui généralise celle de Carlitz. Les expressions des dérivées successives de quelques fonctions sont données avec des applications.

Mots clés :

polynômes partiels r-Bell, polynômes de type Appell, identités combinatoires, relations récurrentes, nombres de Stirling.

Remerciements

Je remercie en premier lieu ALLAH, pour la foi, la confiance en soi et la volonté dont il m'a doté.

***E**n dehors du contexte de la recherche, cette thèse n'aurait pu être menée à bien sans le soutien de mes proches. Je remercie tout particulièrement ma mère. Je lui suis reconnaissante d'être toujours là pour moi, merci pour tout !.*

***M**a profonde gratitude va vers mon mari Hamid pour son encouragement et sa compréhension face aux difficultés de la thèse, je lui dois énormément. Un grand merci à mes enfants, Raghda, Ramzi et Rihem pour leur patience à mon égard, car c'est eux qui m'ont le plus supporté durant cette période de travail très prenante.*

***M**a considération et ma reconnaissance resteront cependant portées à mon directeur de thèse, Monsieur **Miloud MIHOUBI**, Professeur à l'U.S.T.H.B, qui a accepté d'accompagner mon travail, jusqu'à sa finalisation et ne m'a pas refusé sa confiance. Je dois beaucoup à sa patience et au temps qu'il a pu consacrer pour son encadrement rigoureux.*

***J**'exprime mes vifs remerciements à ceux qui ont accepté de consacrer une partie de leur temps afin d'examiner et de juger ce travail :*

- *Le professeur **Isma BOUCHMAKH**, de l'U.S.T.H.B, qui m'a fait l'honneur de présider mon jury.*
- *Les professeurs **Ahmed AIT MOKHTAR** et **Abdellah DERBAL** de l'E.N.S de Kouba.*
- *Les professeurs **Hacène BELBACHIR** et **Sadek BOUROUBI** de l'U.S.T.H.B.*
- *Le professeur **Abdelkader BOUYAKOUB** de l'Université d'Oran.*

***E**nfin, je tiens à remercier les équipes du Laboratoire RECITS, ainsi que les enseignants de la faculté de mathématiques de l'U.S.T.H.B.*

Dédicaces

A mes très chers parents

A mon mari Hamid et à mes enfants

Raghda, Mohammed Ramzi et Riham Aicha

A mes frères et sœurs et à tous les membres de ma famille

A ma belle mère et à mes belles soeurs

A la mémoire de mon beau père

A toutes mes amies

Un pessimiste voit la difficulté dans chaque opportunité,
un optimiste voit l'opportunité dans chaque difficulté.
Winston Churchill

Table des matières

Liste des tableaux

Introduction Générale

Les polynômes d'Appell ou de type Appell ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs, vues leurs applications vastes dans différents domaines mathématiques et physiques. Plusieurs polynômes de ce type sont munis d'une étude particulière, tels que les polynômes de Bernoulli, d'Euler, d'Hermite et leurs extentions.

L'étude proposée dans ce document est à orientations analytique et combinatoire et concerne une famille de polynômes du type Appell. Il s'agit, d'une part, de donner quelques propriétés importantes à des polynômes du type qu'on considère, et d'autre part, d'interpréter leurs valeurs aux points entiers par les polynômes partiels r-Bell, liés aux nombres de partitions colorées d'un ensemble fini.

En effet, il s'agit alors d'une étude regroupant un aspect polynômial et un aspect combinatoire. L'aspect combinatoire est basé sur la combinatoire énumérative qui consiste à compter et à étudier divers types de groupements que l'on peut faire à partir d'ensembles finis, tels que les arrangements, les permutations, les partitions d'un ensemble et les combinaisons.

Certains types de problèmes combinatoires ont attiré l'attention de plusieurs chercheurs depuis l'antiquité, dont on cite :

- Au $8^{ème}$ siècle, *Al Khalil ibn Ahmed* $(716 - 786)$, introduisait une approche combinatoire, dans ses raisonnements avec son travail lexicographie de la langue arabe.
- Au $12^{ème}$ siècle, *H. Bhaskara* $(1114 - 1185)$, connait la formule générale pour les coefficients binomiaux.
- Au $13^{ème}$ siècle, *Ibn Al- Banna* $(1256 - 1321)$, dans son livre *Rafe al-Hijab*, établissait des propositions combinatoires relatives aux permutations.
- Au $17^{ème}$ siècle, *B. Pascal* $(1623 - 1662)$ et *P. Fermat* $(1601 - 1665)$, fondaient le calcul des probabilités (Triangle de Pascal).

Au cours des dernières décennies, la combinatoire énumérative s'est développée rapidement, sous l'influence de l'informatique, le calcul des probabilités et la cryptologie. C'est une branche de la combinatoire destinée à l'énumération et au comptage des objets. Plusieurs suites connues dans la litérature font parties de la combinatoire énumérative telles que les coefficients binomiaux, les nombres de Stirling, les nombres de Lah, les nombres de Cauchy, les polynômes partiels de Bell et les polynômes de partitions. Plusieurs travaux de recherche récents et anciens ont été réalisés pour ces nombres et polynômes, voir [1, 5, 13, 21, 25, 33].

L'aspect analytique est basé sur le théorème d'inversion de Lagrange et le théorème de Carlitz [17] qui prouve une excellente identité reliant les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur des deux espèces. Au moyen du théorème d'inversion de Lagrange, on montre que le théorème de Carlitz [17] reste vrai pour une grande classe de polynômes de type Appell. Ceci nous a permi d'établir d'autres propriétés et de nouvelles identités pour les polynômes considérés.

Afin de réaliser ce travail, nous avons organisé cette thèse de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, nous rappelons les éléments nécessaires de la combinatoire énumérative utilisés dans cette thèse. Nous exposons des notations, des définitions, des exemples illustratifs et quelques propriétés des nombres de Stirling [25, 82], de nombres et polynômes de Bernoulli [80, 79, 78] et de polynômes partiels de Bell et r-Bell [8, 51, 52, 56].

Dans le deuxième chapitre, nous introduisons une nouvelle classe de nombres r-Stirling de première espèce : les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce, notés, ${n \brack k}_r^s$ et définis par la fonction génératrice :

$$\sum_{n\geqslant k} {n+r \brack k+r}_r^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(1-t)^r}\left(\sum_{i\geqslant s}\frac{t^i}{i}\right)^k .$$

En se basant sur des outils combinatoires, nous établissons des identités combinatoires et des relations récurrentes ainsi que leurs interprétations combinatoires.

Le troisième chapitre est motivé par le travail de Komatsu [38, 39], introduisant les nombres et les polynômes hypergéométriques de Cauchy $c_{N,n}$ et $c_{N,n}(x)$ par :

$$\sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}\frac{t^n}{n!} = F_N(t) \quad et \quad \sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}(x)\frac{t^n}{n!} = F_N(t)(1+t)^{-x},$$

où

$$F_N(t) = \frac{(-1)^{N-1} t^N/N}{\ln(1+t) - \sum\limits_{n=1}^{N-1}(-1)^{n-1}\dfrac{t^n}{n}}, \quad N \geq 1, \ \sum_{n=1}^{0} = 0.$$

Nous définissons les nombres et les polynômes hypergéométriques de Cauchy généralisés $c_{N,n}^{(\alpha)}$ et $c_{N,n}^{(\alpha)}(x)$, par les fonctions génératrices :

$$\sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} = F_N^{\alpha}(t) \quad et \quad \sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = F_N^{\alpha}(t)(1+t)^{-x}.$$

Au moyen des fonctions génératrices et les polynômes partiels r-Bell, on montre que

$$c_{N,n}^{(\alpha)} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^n \frac{N^j n!}{(n+Nj)!} \begin{bmatrix} n+Nj \\ j \end{bmatrix}^{N+1} (-\alpha)^{\underline{j}},$$

et

$$\begin{aligned} c_{N,n}^{(\alpha)}(r) &= \frac{(-1)^n}{N^{\alpha}} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n+Nj)!} \begin{bmatrix} n+Nj+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{N+1} (-\alpha)^{\underline{j}}, \ r \in \mathbb{N}, \\ c_{N,n}^{(-k)}(r) &= (-1)^n \frac{N^k k!}{(n+Nk)!} \begin{bmatrix} n+Nk+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^{N}, \ k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Dans le quatrième chapitre, motivé par le travail de Tempesta [78, 82] sur les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur, nous introduisons des suites $\left(P_n^{(\alpha)}(A,H)\right)_{n\geqslant 0}$, dépendant seulement du choix de deux fonctions A et H, analytiques dans un voisinage de zéro, par la fonction génératrice

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} H(t) = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(A,H) \frac{t^n}{n!}.$$

Ces nombres représentent une généralisation des polynômes de Bernoulli d'ordre superieur des deux espèces et des polynômes de Bernoulli dégénérés définis par Carlitz [17]. Notons par exemple que, pour le choix de $A(t) = \exp(t) - 1$ et $H(t) = \exp(xt)$, les nombres $P_n^{(\alpha)}(A,H)$ se reduisent aux polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$.
Pour une nouvelle application du théorème d'inversion de Lagrange, nous démontrons l'identité principale :

$$P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, H\circ\overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(A, A'H),$$

où $A\circ\overline{A} = \overline{A}\circ A = t$ et $A'(t) := \frac{dA}{dt}(t)$.
Cette identité généralise celle de Carlitz [17, Eqs. (2.11), (2.12)], reliant les polynômes de Bernoulli des deux espèces.
Nous donnons, de plus, quelques propriétés et relations récurrentes de ces polynômes, ainsi que l'expression des dérivées successives de certaines fonctions.

Le cinquième chapitre regroupe des expressions et des identités des polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$, définis par la fonction génératrice :

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha}(A'(t))^{x} = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A)\frac{t^n}{n!}, \quad A'(0) > 0.$$

On montre que, pour $A(t) = \sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\overline{A}(t) = \sum_{n\geqslant 1} \overline{a}_n \frac{t^n}{n!}$, les nombres $P_n^{(\alpha)}(A, H)$ satifont les relations de récurrence :

$$\begin{aligned} P_n^{(n+1+\alpha)}(A, A'H) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-k+1}) P_k^{(\alpha)}(A, H), \\ P_n^{(\alpha)}(A, A'H) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k+1} P_k^{(\alpha)}(A, H), \end{aligned}$$

où $B_{n,k}(a_l)$ est le (n,k)-polynôme partiel de Bell [24, 51, 52, 56].
Pour $H(t) = (A'(t))^x$, nous obtenons les polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$ et les relations précédentes deviennent :

$$\begin{aligned} P_n^{(n+1+\alpha)}(x+1 \mid A) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_{n-k+1}) P_k^{(\alpha)}(x \mid A), \\ P_n^{(\alpha)}(x+1 \mid A) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k+1} P_k^{(\alpha)}(x \mid A). \end{aligned}$$

Ensuite, nous donnons les expressions des polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$ à arguments entiers, en utilisant les polynômes partiels r-Bell. Nous démontrons les identités

$$\begin{aligned} P_n^{(k)}(s-r \mid A) &= \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\, B_{n+s,j+s}^{(s)}(a_l), \\ P_n^{(-k)}(r \mid A) &= \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}(a_l), \\ P_n^{(n+1+\alpha)}(x+1 \mid A) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\, P_k^{(\alpha)}(x+r \mid A), \end{aligned}$$

où $B_{n,k}^{(r)}(a_l)$ est le (n,k)-polynôme partiel r-Bell [8, 56].
Les deux premières identités généralisent certaines identités sur les polynômes de Bernoulli et la troisième est une nouvelle identité qui enrichit l'ensemble des identités connues sur les polynômes d'Appell.

CHAPITRE 1

Elements de la combinatoire énumérative

Introduction

Dans ce chapitre, nous présentons les définitions élémentaires nécessaires pour les chapitres qui suivent. Nous exposons de brefs rappels sur les notions combinatoires célèbres, en fixant les notations qui vont être utilisées dans la suite. Nous donnons des exemples illustratifs pour mieux comprendre ces notions. Nous présentons aussi toutes les propriétés et identités imporantes qui seront utilisés dans le reste de cette thèse. Dans la suite, on présente toutes les suites de nombres et de polynômes usuels qui seront utilisées dans les démonstrations des résultats obtenus. Nous citons par exemple, les nombres de Stirling, les nombres, les polynômes de Bernoulli et les polynômes multivariés de Bell.

1 Permutations et combinaisons

Soit $\mathbb{N}_n = \{1, 2, \ldots, n\}$. Un k-uplet ordonné $(a_1, a_2, \ldots, a_k)$, avec $a_r \in \mathbb{N}_n$, $r = 1, 2, \ldots, k$, $1 \leqslant k \leqslant n$, est appelé k-arrangement de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ ou tout simplement k-arrangement de n, $n = |\mathbb{N}_n|$.

Théorème 1. *[24] Le nombre des k-arrangements de n, $1 \leqslant k \leqslant n$, est égal à*

$$P_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Exemple 2. *Les 2-arrangements de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$, de 4 éléments sont*

$$\{1,2\};\{2,1\};\{1,3\};\{3,1\};\{1,4\};\{4,1\};$$

$$\{2,3\};\{3,2\};\{2,4\};\{4,2\};\{3,4\};\{4,3\};$$

ainsi, le nombre des 2-arrangements d'un ensemble à 4 éléments est $(4)_4^2 = 4 * 3 = 12$.

Pour le cas particulier $k = n$, on obtient une permutation de l'ensemble $\mathbb{N}_n$.
D'où la définition :

Définition 3. Une permutation de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ est une application bijective de $\mathbb{N}_n$ dans lui même. On note par S_n l'ensemble de toutes les permutations de $\mathbb{N}_n$.

Le nombre de permutations de $\mathbb{N}_n$ est égal à $n!$, $n = |\mathbb{N}_n| \geqslant 1$.
On peut représenter une permutation σ de S_n sous la forme d'une matrice à deux lignes et n colonnes en mettant les nombres de 1 à n sur la première ligne et leurs images par σ juste en dessous. Cette représentation est très commode pour faire le produit de deux permutations.

Exemple 4. *Soit σ et τ deux permutations de S_6 définies par*

$$\sigma(1) = 2, \sigma(2) = 4, \sigma(3) = 5, \sigma(4) = 6, \sigma(5) = 1 \text{ et } \sigma(6) = 3$$

$$\tau(1)=4, \tau(2)=2, \tau(3)=1, \tau(4)=6, \tau(5)=5 \textit{ et } \tau(6)=3.$$

Alors, on écrit

$$\sigma=\begin{pmatrix}123456\\245613\end{pmatrix}, \tau=\begin{pmatrix}123456\\421653\end{pmatrix} \textit{ et } \sigma\tau=\begin{pmatrix}123456\\245613\end{pmatrix}\begin{pmatrix}123456\\421653\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}123456\\642315\end{pmatrix}$$

où le produit $\sigma\tau$ représente ici l'application composée $\sigma \circ \tau$.

Définition 5. Une permutation σ de S_n est un k-cycle (cycle de longueur k) s'il existe $i_1, i_2, \ldots, i_k$ distincts de $\mathbb{N}_n$, tels que :

$$\sigma(i_1)=i_2, \sigma(i_2)=i_3, \ldots, \sigma(i_k)=i_1$$

$$\sigma(j)=j, \text{ si } j \notin \{i_1, i_2, \ldots, i_k\}.$$

On note $(i_1, i_2, \ldots, i_k)$ le k-cycle défini ci-dessus, son support est l'ensemble $\{i_1, i_2, \ldots, i_k\}$.

Définition 6. [21, p. 163] Une permutation σ de S_n, décomposée en k_i cycles à supports disjoints et de longueurs i, $i=1,2,\cdots,n$, tels que $k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$ est dite de type $[k_1, k_2, \cdots, k_n]$.

Exemple 7. *Soit la permutation σ de S_n définie par* $\sigma=\begin{pmatrix}123456\\325614\end{pmatrix}$. *Alors, σ peut être décomposée en* 3 *cycles (*1 *cycle de longueur* 1, 1 *cycle de longueur* 2 *et* 1 *cycle de longueur* 3*) comme suit*

$$\sigma=(1,3,5)(4,6)(2)=(2)(4,6)(1,3,5),$$

elle est de type $[1,1,1,0,0,0]$.

Définition 8. Une k-combinaison de l'ensemble $\mathbb{N}_n$, ou tout simplement k-bloc de n, est un sous ensemble non vide de k éléménts de $\mathbb{N}_n$, avec $1 \leqslant k \leqslant n=|\mathbb{N}_n|$.

Théorème 9. *[24] Une k-combinaison de n est une distribution de k boules indistinguables dans n urnes distinguables, contenant chacune une boule au plus.*

Exemple 10. *Le nombre des* 2*-combinaisons de* 4 *(combinaison de* 2 *éléménts parmi* 4*) est égal à* 6*. Les* 6 *combinaisons sont*

$$\{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{2,3\}, \{2,4\}, \{3,4\}.$$

2 Coefficients factoriels, binomiaux et multinomiaux

Définition 11. Soient x un nombre réel et k un entier non-négatif. La factorielle déscendante d'ordre k de x, notée $(x)^{\underline{k}}$, est donnée par

$$(x)^{\underline{k}} = \begin{cases} x(x-1)...(x-k+1), & k \geqslant 1, \\ 1, & k = 0, \end{cases}$$

et

$$(x)^{\underline{-k}} = \frac{1}{(x+k)^{\underline{k}}} = \frac{1}{(x+k)(x+k-1)\dots(x+1)}, \ k = 1, 2, \dots \text{ et } x \neq -1, -2, \dots, -k.$$

La factorielle descendante vérifie les relations de récurrence

$$\begin{array}{ll} (x)^{\underline{k}} = x\,(x-1)^{\underline{k-1}} = (x-k+1)\,(x)^{\underline{k-1}}, & x \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1, \\ (x)^{\underline{k}} = (x-1)^{\underline{k}} + k\,(x-1)^{\underline{k-1}}, & x \in \mathbb{R}, \quad k \geqslant 1, \\ (x)^{\underline{k}} = (x)^{\underline{r}}\,(x-r)^{\underline{k-r}}, & x \in \mathbb{R}, \quad k, r \geqslant 1, \end{array}$$

Définition 12. Soient x un nombre réel et k un entier non-négatif. La factorielle ascendante (montante) d'ordre k de x, notée $(x)^{\overline{k}}$ est donnée par

$$(x)^{\overline{k}} = \begin{cases} x(x+1)...(x+k-1), & k \geqslant 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Remarquons que : $(x)^{\overline{k}} = (x+k-1)^{\underline{k}}$. On peut facilement vérifier que :

$$(-x)^{\underline{k}} = (-1)^k\,(x)^{\overline{k}} = (-1)^k\,(x+k-1)^{\underline{k}} \text{ et } (-x)^{\overline{k}} = (-1)^k\,(x)^{\underline{k}}; \ k = 1, 2, \dots.$$

Définition 13. Soient x un nombre réel et k un entier non-négatif. Le coefficient binomial d'ordre k de x, noté par $\binom{x}{k}$, est donné par

$$\binom{x}{k} = \begin{cases} \dfrac{(x)^{\underline{k}}}{k!}, & k \geqslant 1, \\ 1, & k = 0. \end{cases}$$

Le coefficient binomial $\binom{x}{k}$ compte le nombre de k-combinaisons de x, lorsque x est un entier naturel.

Théorème 14 (Formule binômiale de Newton)**.** *Soient x et y deux nombres réels et n un entier non-négatif. Alors*

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Les coefficients binomiaux vérifient les relations suivantes

$$\begin{aligned}
\binom{x}{x-k} &= \binom{x}{k} = \binom{x-1}{k-1} + \binom{x-1}{k}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \geqslant 1, \\
\binom{x-1}{k} &= \binom{x}{k} - \binom{x}{k-1} + \ldots + (-1)^k \binom{x}{0}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \geqslant 1, \\
\binom{n+1}{k+1} &= \binom{k}{k} + \binom{k+1}{k} + \ldots + \binom{n}{k} = \sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k}, \; n \geqslant 0, \; k \geqslant 0, \; (1.1) \\
\binom{x}{p}\binom{p}{k} &= \binom{x}{k}\binom{x-k}{p-k} = \binom{x}{p-k}\binom{x-p+k}{k}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \geqslant 1, \\
\binom{x+k-1}{k} &= (-1)^k \binom{-x}{k}, \; x \in \mathbb{R}, \; k \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Si on remplace n par un nombre réel ou complexe z, dans la relation (1.1), on aura

$$\binom{z+1}{k+1} = \binom{z}{k} + \binom{z-1}{k} + \ldots + \binom{z-s}{k} + \binom{z-s}{k+1}, \; s \geqslant 0.$$

Le tableau suivant donne les premiers coefficients binomiaux, pour $n \in \mathbb{Z}$ et $k \in \mathbb{N}$:

$n =$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
$k = 0$	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$k = 1$	-4	-3	-2	-1		1	2	3	4
$k = 2$	10	6	3	1			1	3	6
$k = 3$	-20	-10	-4	-1				1	4
$k = 4$	35	15	5	1					1
$k = 5$	-56	-21	-6	-1					0

Tableau 1.1 – Les premières valeurs de $\binom{n}{k}$.

avec

$$\begin{aligned}
\binom{n}{0} &= 1, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; \binom{0}{k} = \delta_{0k}, \\
\binom{n}{-k} &= 0, \; n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \; k =, 1, 2, \ldots, \\
\binom{n}{n+k} &= 0, \; n = 0, 1, 2, \ldots, \; k =, 1, 2, \ldots,
\end{aligned}$$

Le coefficient multinomial est une généralisation du coefficient binômial et donné par la définition suivante

Définition 15. Soient $k_1, k_2, \ldots, k_m,\ m \geqslant 1$, des entiers naturels. Le nombre

$$\binom{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}{k_1, k_2, \ldots, k_m} = \frac{(k_1 + k_2 + \ldots + k_m)!}{k_1! k_2! \ldots k_m!}, \quad \text{où} \quad k_i \geqslant 0,\ i = 1, \ldots,\ m,$$

est appelé coefficient multinômial.

Ce coefficient apparait dans la formule multinômiale donnée par le théorème suivant

Théorème 16. *Soient $x_i,\ i = 1, \ldots,\ m$ des nombres réels et n un entier non-négatif. Alors*

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_m)^n = \sum_{k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n} \binom{k_1 + k_2 + \ldots + k_m}{k_1, k_2, \ldots, k_m} x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}.$$

3 Séries et fonctions génératrices

Les fonctions génératrices constituent un moyen très important pour un traitement unifié des problèmes combinatoires et probabilistes.

Définition 17. On appelle série formelle sur $\mathbb{C}$, en une indéterminée t, toute expression formelle f de type

$$f = f(t) = \sum_{n \geqslant 0} a_n t^n.$$

On dit que a_n est le coefficient de t^n dans f, et on écrit : $a_n = [t^n] f$.
Le coefficient $a_0 = f(0)$ est dit terme constant de la série formelle f. Si $a_0 = 0$, on dit que f est sans terme constant et on écrit

$$f = f(t) = \sum_{n \geqslant 1} a_n t^n.$$

L'ensemble des séries formelles sur $\mathbb{C}$ est noté $\mathbb{C}[[t]]$.
Une série formelle $f(t)$ est dite réversible s'il existe une série formelle notée $\overline{f}(t)$ telle que

$$f\left(\overline{f}(t)\right) = \overline{f}(f(t)) = t.$$

$\overline{f}(t)$ est appelée série inverse de f.

Proposition 18. *Une série* ***formelle*** *$f(t)$ vérifiant $a_0 = 0$, est réversible si et seulement si $a_1 \neq 0$. Dans ce cas l'inverse est unique.*

Définition 19. Une série f est dite de **Maclaurin** si elle est de la forme

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{1}{n!} \frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]_{t=0} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]_{t=0} \frac{t^n}{n!}.$$

Si on pose $a_n = \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]_{t=0}$, $n = 0, 1, \ldots$, alors

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n;$$

Si on pose $b_n = \left[\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right]_{t=0}$, $n = 0, 1, \ldots$, alors

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}.$$

Exemple 20. *1.* $f(t) = e^t : \; b_n = \left[\frac{d^n}{dt^n} e^t\right]_{t=0} = 1$, $n = 0, 1, \ldots$. *D'où le développement de la fonction exponentielle*

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}.$$

2. $f(t) = -\log(1-t) : \; a_n = \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(-\log(1-t))\right]_{t=0} = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \ldots$, *ainsi le développement*

$$-\log(1-t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} t^n.$$

3. En posant $u = -t$, *dans l'exemple précédent, on obtient le développement*

$$\log(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} t^n.$$

4. $f(t) = (1+t)^x : \; a_n = \left[\frac{1}{n!}\frac{d^n}{dt^n}(1+t)^x\right]_{t=0} = \frac{1}{n!}(x)^{\underline{n}} = \binom{x}{n}$, $n = 0, 1, \ldots$, *ainsi*

$$(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n.$$

Définition 21. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de nombres réels. La somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n,$$

est appelée fonction génératrice (ordinaire), tandis que la somme

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

est appelée fonction génératrice exponentielle, de la suite (a_n).

Exemple 22. *1. La fonction génératrice de la suite* (a_n), $a_n = \binom{x}{n}$ *est*

$$E(t) = (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x}{n} t^n.$$

2. La fonction génératrice exponentielle de la suite (a_n), $a_n = (x)^{\underline{n}}$ *est*

$$E(t) = (1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} (x)^{\underline{n}} \frac{t^n}{n!}.$$

3. La fonction génératrice de la suite $(C_n)_{n \geqslant 1}$ *des nombres Catalan,* $C_n = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$ *est donnée par*

$$C(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1-4t}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1} t^n.$$

4. La fonction génératrice de la suite $\binom{x+n-1}{n}_{n \geqslant 0}$ *est donnée par*

$$(1-t)^{-x} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{x+n-1}{n} t^n.$$

La somme et le produit de deux fonctions génératrices ordinaires ou exponentielles sont donnés par les propositions suivantes

Proposition 23. *Considérons les fonctions génératrices*

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k \ , \ B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k t^k \ \text{ et } \ C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k t^k,$$

alors

$$\begin{aligned} C(t) &= A(t) + B(t) \iff c_k = a_k + b_k, \ k = 0, 1, \ldots. \\ C(t) &= A(t)\, B(t) \iff c_k = \sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}, \ k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

Proposition 24. *Considérons les fonctions génératrices exponentielles*

$$A(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!} \ , \ B(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \frac{t^k}{k!} \ \text{ et } \ C(t) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!},$$

alors

$$\begin{aligned} C(t) &= A(t) + B(t) \iff c_k = a_k + b_k, \ k = 0, 1, \ldots. \\ C(t) &= A(t)\, B(t) \iff c_k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a_j b_{k-j}, \ k = 0, 1, \ldots. \end{aligned}$$

4 Suites de nombres et de polynômes usuels

4.1 Nombres de Stirling

La factorielle déscendante $(t)^{\underline{n}}$ peut être exprimée sous la forme d'un polynôme de t^n :

$$(t)^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} t^k, \quad n \geqslant 0. \tag{1.2}$$

Inversement, t^n peut être exprimée sous la forme d'un polynôme de factoriels de t :

$$t^n = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} (t)^{\underline{k}}, \ n \geqslant 0. \tag{1.3}$$

On a donc, la définition suivante :

Définition 25. Les coéfficients $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]$ et $\left\{ {n \atop k} \right\}$ des développements (1.2) et (1.3) sont appelés, respectivement, nombres de Stirling de première et de deuxième espèce.

De cette définition, on déduit que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{pour } 1 \leqslant n < k. \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = 1 \ \text{ et } \begin{bmatrix} 0 \\ k \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ k \end{Bmatrix} = 0, \quad \text{pour } k \geqslant 1. \end{aligned}$$

Théorème 26. *[21] Les nombres de Stirling de première espèce $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]$ et de seconde espèce $\left\{ {n \atop k} \right\}$, admettent les fonctions génératrices exponentielles :*

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant k} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left(\ln(1+t) \right)^k, \\ \sum_{n \geqslant k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!} \left(e^t - 1 \right)^k. \end{aligned}$$

Théorème 27. *[21] Les nombres de Stirling (**absolus**) de première espèce $\left[{n \atop k} \right]$, donnent la valeur absolue de $(-1)^{n-k} \left[{n \atop k} \right]$. Ils admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n \geqslant k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(-\ln(1-t) \right)^k. \tag{1.4}$$

Les nombres de Stirling de première et de seconde espèce $\left[{n \atop k} \right]$ et $\left\{ {n \atop k} \right\}$, satisfont les relations :

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}, \ k-1, n \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

$$\left\{ {n+1 \atop k} \right\} = k\left\{ {n \atop k} \right\} + \left\{ {n \atop k-1} \right\},\ k-1, n \in \mathbb{N}. \tag{1.6}$$

$$\left[{n \atop k} \right] = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n,\ k, n \in \mathbb{N}.$$

$$\sum_{j=k}^{n} \left[{n \atop k} \right] \left\{ {n \atop k} \right\} = \sum_{j=k}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \left[{n \atop k} \right] = \delta_{n,k},$$

où $\delta_{n,k}$ est le symbole de Kronecker.

Remarque 28. *Les nombres de Stirling de seconde espèce* $\left\{ {n \atop k} \right\}$ *comptent le nombre de partitions d'un ensemble à* n *éléments en* k *blocs. Les nombres de Stirling absolus de première espèce* $\left[{n \atop k} \right]$ *comptent le nombre de permutations de* n *éléments se décomposant exactement en* k *cycles à supports disjoints.*

Exemple 29. $n = 4$ *:*
Le nombre de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$ *est* $4! = 24$ *:*

– *La seule permutation de type* $[4, 0, 0, 0]$*, (*4 *cycles de longeur* 1*) :* $(1)(2)(3)(4)$

– *Les* 6 *permutations de type* $[2, 1, 0, 0]$*, (*2 *cycles de longueur* 1 *et* 1 *cycles de longueur* 2*) :*
$$(1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23),$$
$$(2)(3)(14), (2)(4)(13), (3)(4)(12),$$
– *Les* 8 *permutations de type* $[1, 0, 1, 0]$*, (*1 *cycles de longueur* 1 *et* 1 *cycles de longueur* 3*) :*
$$(1)(234), (1)(243), (2)(134), (2)(143),$$
$$(3)(124), (3)(142), (4)(123), (4)(132),$$
– *Les* 6 *permutations de type* $[0, 0, 0, 1]$*, (*1 *cycles de longueur* 4*) :*
$$(1234), (1243), (1324), (1342), (1423), (1432),$$
– *Les* 3 *permutations de type* $[0, 2, 0, 0]$*, (* 2 *cycles de longueur* 2*) :*
$$(12)(34), (13)(24), (14)(23).$$
Les nombre de Stirling (absolus) de première espèce $\left[{4 \atop k} \right]$*,* $k = 1, 2, 3, 4$ *sont les suivants :*

$$\left[{4 \atop 0} \right] = 0,\ \left[{4 \atop 1} \right] = 6,\ \left[{4 \atop 2} \right] = 11 = 8 + 3,\ \ \left[{4 \atop 3} \right] = 6 \ et \ \left[{4 \atop 4} \right] = 1.$$

Les premiers nombres de Stirling (absolus) de première et de seconde espèce sont données dans les tableaux suivants :

n/k	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=0$	1							
$n=1$	0	1						
$n=2$	0	1	1					
$n=3$	0	2	3	1				
$n=4$	0	6	11	6	1			
$n=5$	0	24	50	35	10	1		
$n=6$	0	120	274	225	85	15	1	
$n=7$	0	720	1764	1624	735	175	21	1

Tableau 1.2 – Les premières valeurs de $\left[{n \atop k}\right]$.

n/k	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=0$	1							
$n=1$	0	1						
$n=2$	0	1	1					
$n=3$	0	1	3	1				
$n=4$	0	1	7	6	1			
$n=5$	0	1	15	25	10	1		
$n=6$	0	1	31	90	65	15	1	
$n=7$	0	1	63	301	350	140	21	1

Tableau 1.3 – Les premières valeurs de $\left\{{n \atop k}\right\}$.

4.2 Nombres de Lah

Définition 30. Les coéfficients $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ du développement

$$(t)^{\overline{n}} = \sum_{k=1}^{n} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor (t)^{\underline{k}}, \tag{1.7}$$

sont appelés nombres de Lah, avec $\left\lfloor{0 \atop 0}\right\rfloor = 1$ et $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor = 0$ si $k > n$.

Théorème 31. *[21] Les nombres de Lah $\left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n\geqslant 0} \left\lfloor{n \atop k}\right\rfloor \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{t}{1-t}\right)^k, \; k \in \mathbb{N}.$$

Les nombres de Lah $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ comptent le nombre de toutes les partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs non vides, où les éléments de chaque bloc sont ordronnés.

Il s'ensuit que les nombres de Lah satisfont la relation de récurrence triangulaire suivante

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor + (n+k-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor, \qquad \forall n, k-1 \in \mathbb{N}, \tag{1.8}$$

avec

$$\left\lfloor {n \atop 1} \right\rfloor = n!, \qquad \left\lfloor {n \atop n} \right\rfloor = 1, \qquad \left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = \delta_{n,0}, \qquad \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = 0,\ n < k,$$

où $\delta_{n,0}$ représente le symbole de Kronecker.
Rappelons que pour démentrer la relation (1.8), on applique la méthode de séparation : Pour partitionner un ensemble à n éléments en k blocs ordonnés, on prosède comme suit :

(a) Si l'élément n est dans un bloc de taille égale à 1, il y a $\left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor$ possibilités de partitionner l'ensemble à $(n-1)$ éléments restants en $(k-1)$ blocs ordonnés.

(b) Si l'élément n est dans un bloc de taille $\geqslant 2$, il y a $\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor$ possibilités de partitionner l'ensemble à $(n-1)$ éléments restants en k blocs ordonnés $B_1, \cdots, B_k$. Ensuite, on peut injecter l'elément n dans l'un des k blocs avec $(n-1+k)$ possibilités, car $(n-1+k = \sum_{i=1}^{k}(|B_i|+1))$. Le nombre de façons dans ce cas est $(n+k-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor$.

En fin, le nombre de toutes les partitions est donné par $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor + (n+k-1)\left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor$.

Les nombres de Lah ont pour relation de récurrence

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{(n-1)!\,(k+1)}{n-k}\sum_{l=k}^{n-1}\frac{l}{l!}\left\lfloor {l \atop k} \right\rfloor, \quad n \geqslant k+1.$$

La formule explicite suivante fournit un moyen rapide pour déterminer les valeurs des nombres de Lah

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n!}{k!}\left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor,\ n, k-1 \in \mathbb{N}.$$

Les nombres de Lah peuvent être exprimés en valeurs de nombres de Stirling de première et second espèce via l'expression suivante

$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \sum_{j=k}^{n}\left[{n \atop j} \right]\left\{ {j \atop k} \right\}.$$

Le tableau suivant donne les premières valeurs des nombres de Lah.

n/k	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$	$k=8$
$n=1$	1							
$n=2$	2	1						
$n=3$	6	6	1					
$n=4$	24	36	12	1				
$n=5$	120	240	120	20	1			
$n=6$	720	1800	1200	300	30	1		
$n=7$	5040	15120	12600	4200	630	42	1	
$n=8$	40320	141120	141120	58800	11720	1176	56	1

Tableau 1.4 – Les premières valeurs de $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$

4.3 Nombres r-Stirling

Les nombres r-Stirling sont étudiés par Broder [13], ces nombres représentent une sous classe des nombres de Stirling.
Les nombres r-Stirling (absolus) de première espèce comptent certaines permutations restreintes et sont donnés par la définition suivante :

Définition 32. [13] Les nombres r-Stirling (absolus) de première espèce notés $\left[{n \atop k} \right]_r$ comptent le nombre de permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k cycles tels que les r premiers éléments sont dans des cycles différents.

Exemple 33. $\left[{4 \atop 3} \right]_2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1,2,3,4\}$ *en* 3 *cycles tels que les deux premiers éléments sont dans des cycles différents. On a vu dans l'exemple précédent, qu'il y a* 6 *permutations en* 3 *cycles :*

$$(1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23),$$

$$(2)(3)(14), (2)(4)(13), (3)(4)(12),$$

Parmi celles-ci on prend les 5 *premières permutations :*

$$(1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23),$$

$$(2)(3)(14), (2)(4)(13),$$

sauf la $6^{\text{ème}}$ *où les deux premiers éléments (*1 *et* 2*) sont dans le même cycle.*
D'où $\left[{4 \atop 3} \right]_2 = 5$.

Théorème 34. *[13] Les nombres r-Stirling (absolus) de première espèce, admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{\left(-\ln\left(1-t\right)\right)^k}{\left(1-t\right)^r}. \tag{1.9}$$

Les nombres r-Stirling de première espèce vérifient les propriétés et relations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= 0, \text{ si } n < r \text{ , } n < k \text{ ou } k < r; \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \text{ si } r = 0 \text{ ou } r = 1; \\
\begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix}_r &= 1 \text{ et } \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_r = (n-1)(n-2)\cdots r = r^{\overline{n-r}},\ n \geqslant r; \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r &= \frac{1}{r-1}\left(\begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{r-1} - \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r\right),\ r \geqslant 2, && (1.10) \\
\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix}_r &= n\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_r. && (1.11)
\end{aligned}$$

Proposition 35. *[13] Les nombres r-Stirling de première espèce, admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n\geqslant 0} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \frac{\left(\ln\left(1+t\right)\right)^k}{\left(1+t\right)^r}.$$

Les nombres r-Stirling de seconde espèce comptent certaines partitions restreintes. L'ensemble de ces nombres représente une sous classe des nombres de Stirling de seconde espèce et sont donnés par la définition suivante :

Définition 36. [13] Les nombres r-Stirling de seconde espèce notés $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k blocs, tels que les r premiers éléments sont dans des blocs différents.

Exemple 37. $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2$ *est le nombre de partitions de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en* 3 *blocs, tels que les premiers éléments* 1 *et* 2 *sont dans des blocs différents. Les partitions qui vérifient les conditions sont*

$$\{1\}\{2,3\}\{4\}\,;\{1\}\{3,4\}\{2\}\,;\{1\}\{2,4\}\{3\}\,;$$

$$\{2\}\{1,3\}\{4\}\,;\{2\}\{1,4\}\{3\}\ .$$

Par conséquent, $\left\{ {4 \atop 3} \right\}_2 = 5.$

Théorème 38. *[13] Les nombres r-Stirling de seconde espèce* $\left\{ {n \atop k} \right\}_r$ *admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n \geqslant 0} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(e^t - 1\right)^k e^{rt}.$$

Les nombres r-Stirling de seconde espèce vérifient les propriétés et relations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\left\{ {n \atop k} \right\}_r &= 0, \text{ si } n < \ , n < k \text{ ou } k < r; \\
\left\{ {n \atop k} \right\}_r &= \left\{ {n \atop k} \right\}, \text{ si } r = 0 \text{ ou } r = 1; \\
\left\{ {n \atop n} \right\}_r &= 1 \text{ et } \left\{ {n \atop r} \right\}_r = r^{n-r}, \ n \geqslant r, \\
\left\{ {n \atop k} \right\}_r &= \left\{ {n \atop k} \right\}_{r-1} - (r-1) \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_{r-1}, \quad r \geqslant 2, \\
\left\{ {n+1 \atop k} \right\}_r &= k \left\{ {n \atop k} \right\}_r + \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r.
\end{aligned}$$

Les premiers nombres 2-Stirling de première espèce $\left[{n \atop k} \right]_2$ sont donnés dans le tableau suivant, pour $r = 2$ et $k = 2, \ldots, 7$; $n = 2, \ldots, 7$ avec les condition initiales ; $\left\{ {n \atop k} \right\}_2 = 0$ si $k > n$, $r > k$ ou $r > n$.

n/k	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=2$	1					
$n=3$	2	1				
$n=4$	6	5	1			
$n=5$	24	26	9	1		
$n=6$	120	154	71	14	1	
$n=7$	720	1044	580	155	20	1

Tableau 1.5 – Les premières valeurs de $\left[{n \atop k} \right]_2$

Les premiers nombres 2-Stirling de seconde espèce $\left\{ {n \atop k} \right\}_2$ sont donnés dans la tableau suivant :

n/k	$k=2$	$k=3$	$k=4$	$k=5$	$k=6$	$k=7$
$n=2$	1					
$n=3$	2	1				
$n=4$	4	5	1			
$n=5$	8	19	9	1		
$n=6$	16	65	55	14	1	
$n=7$	12	211	285	125	20	1

Tableau 1.6 – Les premières valeurs de $\left\{ {n \atop k} \right\}_2$.

4.4 Nombres de Stirling s-associés

Les nombres de Stirling s-associés forment aussi une sous classe des nombres de Stirling et sont donnés par les définitions suivantes :

Définition 39. [33] Les nombres de Stirling (absolus) s-associés de première espèce notés $\left[{n \atop k} \right]^s$, comptent le nombre de permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k cycles de longueurs supérieures ou égales à s.

Définition 40. [33] Les nombres de Stirling s-associés de seconde espèce notés $\left\{ {n \atop k} \right\}^s$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k blocs de longueurs supérieures ou égales à s.

Théorème 41. *[33] Les nombres de Stirling (absolus) s-associés de première espèce $\left[{n \atop k} \right]^s$, admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n \geqslant k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i \geqslant s} \frac{t^i}{i} \right)^k = \frac{1}{k!} \left(-\ln(1-t) - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{t^i}{i} \right)^k.$$

Théorème 42. *[33] Les nombres de Stirling s-associés de seconde espèce $\left\{ {n \atop k} \right\}^s$ admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n \geqslant k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{i \geqslant s} \frac{t^i}{i!} \right)^k = \frac{1}{k!} \left(e^t - \sum_{i=1}^{s-1} \frac{t^i}{i!} \right)^k.$$

Les nombres de Stirling (absolus) s-associés de première $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s$ et de seconde espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s$ vérifient les propriétés et relations récurrentes suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s = 0;\ n < sk, \\
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}^s &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}^s = 1,\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}^s = \begin{Bmatrix} n \\ 0 \end{Bmatrix}^s = 1 \text{ si } n \neq 0, \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s &= (-1)^{n+k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \text{ et } \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix},\ \text{si } s = 0 \text{ ou } s = 1, \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s &= (n-1) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}^s + (n)^{\underline{s}} \begin{bmatrix} n-s \\ k-1 \end{bmatrix}^s, \\
\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s &= k \begin{Bmatrix} n-1 \\ k \end{Bmatrix}^s + \binom{n}{s} \begin{Bmatrix} n-s-1 \\ k-1 \end{Bmatrix}^s,\ s \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Exemple 43.

1. $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en* 3 *cycles de longueurs* $\geqslant 2$. *On a vu qu'il y a* 6 *permutations en* 3 *cycles. Toutes ces permutations contiennent un cycle de longueur* 1. *D'où* $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}^2 = 0$.
2. $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}^2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en* 2 *cycles de longueurs* $\geqslant 2$. *Parmi les* 11 *permutations en* 2 *cycles, on prend uniquement celles avec des cycles de taille* $\geqslant 2$. *Ces permutations sont* $(12)(34), (13)(24), (14)(23)$. *D'où* $\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}^2 = 3$.
3. $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}^2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *en* 3 *cycles de longueur* $\geqslant 2$. *Parmi toutes les permutations en* 3 *cycles, on prend uniquement celles avec des cycles de tailles* $\geqslant 2$. *Ces permutations sont*

$$\begin{gathered}
(12)\,(34)\,(56)\,;(12)\,(35)\,(46)\,;(12)\,(36)\,(45)\,; \\
(13)\,(24)\,(56)\,;(13)\,(25)\,(46)\,;(13)\,(26)\,(45)\,; \\
(14)\,(23)\,(56)\,;(14)\,(25)\,(36)\,;(14)\,(26)\,(35)\,; \\
(15)\,(23)\,(46)\,;(15)\,(24)\,(36)\,;(15)\,(26)\,(34)\,; \\
(16)\,(23)\,(45)\,;(16)\,(24)\,(35)\,;(16)\,(25)\,(34).
\end{gathered}$$

D'où $\begin{bmatrix} 6 \\ 3 \end{bmatrix}^2 = 15$.

Les premières valeurs des nombres de Stirling (absolus) 2-associés de première espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2$ et 2-associés de seconde espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^2$, sont donnés dans les tableaux suivants :

n/k	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=2$	1			
$n=3$	2			
$n=4$	6	3		
$n=5$	24	20		
$n=6$	120	130	15	
$n=7$	720	924	210	
$n=8$	5040	7308	2380	105
$n=9$	40320	64224	2380	2520

Tableau 1.7 – Les premières valeurs de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^2$.

n/k	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
$n=2$	1			
$n=3$	1			
$n=4$	1	3		
$n=5$	1	10		
$n=6$	1	25	15	
$n=7$	1	56	105	
$n=8$	1	119	490	105
$n=9$	1	246	1918	1260

Tableau 1.8 – Les premières valeurs de $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^2$.

4.5 Polynômes exponentiels partiels de Bell

Les polynômes exponentiels de Bell sont introduits par Bell, voir [8]. Vu que ces polynômes seront largement utilisés dans la suite de cette thèse, nous avons trouvé qu'il est nécéssaire de les décrire dans ce chapitre introductif.

Définition 44. [21] Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers. Les polynômes exponentiels partiels de Bell $B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1})$ (notés parfois $B_{n,k}(a_j)$), sont définis par la fonction génératrice :

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1})\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!}\right)^k .$$

Définition 45. [21] Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers. Les polynômes exponentiels complets de Bell $B_n(a_1,\ldots,a_n)$ (notés parfois $B_n(a_j)$), sont définits par la fonction génératrice :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(a_1,\ldots,a_n)\frac{t^n}{n!} = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!}\right),$$

ou, en d'autre terme, sont définis par

$$B_n(a_1,\cdots,a_n) = \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1}),\ n\geqslant 1,\ \text{et}\ \ B_0(a_1,\ldots) = 1.$$

Théorème 46. *[24] Les polynômes exponentiels partiels de Bell, $B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1})$, admettent l'expression exacte :*

$$B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1}) = \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1!k_2!\ldots}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2}\ldots,$$

où $\pi(n,k)$ est l'ensemble de toutes les solutions $(k_1,k_2,\ldots)$ des entiers naturels tels que

$$k_1+k_2+k_3\ldots = k \quad \textit{et} \quad k_1+2k_2+3k_3\ldots = n.$$

Théorème 47. *[24] Les polynômes partiels de Bell admettent l'expression*

$$B_{n,k}(a_1,\ldots,a_{n-k+1}) = \frac{n!}{k!}\sum_{n_1+\ldots+n_k=n-k}\frac{a_{n_1+1}\ldots a_{n_k+1}}{(n_1+1)!\ldots(n_k+1)!},\ n\geqslant k\geqslant 1.$$

Cas particuliers

Il est bien connu, que pour des choix appropriés de la suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$, les polynômes partiels de Bell, $B_{n,k}(a_j)$ se réduisent à quelques suites combinatoires particulières. Nous citons quelques cas particuliers :

1. Nombres de Stirling de première espèce :

$$B_{n,k}((-1)^{i-1}(i-1)!) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m-1}(m-1)!\frac{t^m}{m!}\right)^k \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(0!,-1!,2!,\ldots)\frac{t^n}{n!},\ k\geqslant 0.\end{aligned}$$

2. Nombres de Stirling absolus de première espèce :

$$B_{n,k}((i-1)!) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}(m-1)!\frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(0!,1!,2!,\ldots)\frac{t^n}{n!},\ k\geqslant 0.$$

3. Nombres de Stirling de deuxième espèce

$$B_{n,k}(1,1,\ldots) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{t^m}{m!}\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,k}(1,1,\ldots)\frac{t^n}{n!},\ k\geqslant 0.$$

4. Nombres de Lah :

$$B_{n,k}(i!) = \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\sum_{n\geqslant k} \left\lfloor \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\rfloor \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=1}^{\infty} t^m\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,k}(1!,2!,3!,\ldots)\frac{t^n}{n!}.$$

5. Nombres de Stirling s-asscìés de première espèce :

$$B_{n,k}\left(\overbrace{0,\cdots,0}^{s-1},(s-1)!,s!,\cdots\right) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=s}^{\infty}\frac{t^i}{i}\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,k}\left(\overbrace{0,\ldots,0}^{s-1},(s-1)!,s!,\ldots\right)\frac{t^n}{n!}.$$

6. Nombres de Stirling s-asscìés de seconde espèce :

$$B_{n,k}\left(\overbrace{0,\cdots,0}^{s-1},1,1,\ldots\right) = \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s$$

de fonction génératrice expnentielle :

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{m=s}^{\infty}\frac{t^i}{i!}\right)^k = \sum_{m=1}^{\infty} B_{n,k}\left(\overbrace{0,\cdots,0}^{s-1},1,1,\ldots\right)\frac{t^n}{n!},$$

Pour x, y réels, les polynômes exponentiels de Bell vérifient les propriétés et les relations récurrentes :

$$B_{n,k}(xya_1, xy^2a_2, xy^3a_3, \ldots) = x^k y^n B_{n,k}(a_1, a_2, a_3 \ldots),$$
$$B_n(xa_1, x^2a_2, \ldots, x^n a_n) = x^n \; B_n(a_1, a_2, \ldots, a_n). \tag{1.12}$$

Proposition 48. *[21] Pour $n \geqslant k \geqslant 1$ on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} a_j B_{n-j,k-1}(a_j) = k B_{n,k}(a_j).$$

Exemple 49.

$$\begin{aligned}
&B_{5,1}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5) = a_5,\\
&B_{5,2}(a_1, a_2, a_3, a_4) = 5a_1a_4 + 10a_2a_3,\\
&B_{5,3}(a_1, a_2, a_3) = 10a_1^2a_3 + 15a_1a_2,\\
&B_{5,4}(a_1, a_2) = 10a_1^3a_2^2,\\
&B_{5,5}(a_1) = a_1^5.
\end{aligned}$$

Interprétation combinatoire

Les polynômes partiels de Bell admettent une interprétation combinatoire liée à des ensembles de partitions coloriés. Plus précisément, si $a_n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 1$, le polynôme partiel de Bell $B_{n,k}\left(a_1, a_2, ..., a_{n-k+1}\right)$ est le nombre de colorations des partitions d'un ensemble à n éléments en k blocs, où :

$$\begin{aligned}
&\text{Les blocs de taille 1 possèdent } a_1 \text{ couleurs,}\\
&\text{Les blocs de taille 2 possèdent } a_2 \text{ couleurs,}\\
&\text{Les blocs de taille 3 possèdent } a_3 \text{ couleurs, et ainsi de suite.}
\end{aligned} \tag{1.13}$$

Exemple 50. $B_{5,2}\left(2,2,1,1\right)$ *est le nombre de colorations des partitions de l'ensemble* $\{1,2,3,4,5\}$ *en* 2 *blocs, où :*

Les blocs de taille 1 *possèdent* 2 *couleurs,* c_1^1 *et* c_1^2,
Les blocs de taille 2 *possèdent* 2 *couleurs,* c_2^1 *et* c_2^2,
Les blocs de taille 3 *possèdent* 1 *couleur* c_3,
Les blocs de taille 4 *possèdent* 1 *couleur* c_4,

L'ensemble $\{1,2,3,4,5\}$ *admet* 5 *partitions en deux blocs de tailles* 1 *et* 4; *et* 10 *partitions en deux blocs de tailles* 2 *et* 3 *:*

$$\begin{aligned}
&\{1\} \cup \{2,3,4,5\}, \{2\} \cup \{1,3,4,5\}, \{3\} \cup \{1,2,4,5\}, \{4\} \cup \{1,2,3,5\},\\
&\{5\} \cup \{1,2,3,4\}, \{1,2\} \cup \{3,4,5\}, \{1,3\} \cup \{2,4,5\}, \{1,4\} \cup \{2,3,5\},\\
&\{1,5\} \cup \{2,3,4\}, \{2,3\} \cup \{1,4,5\}, \{2,4\} \cup \{1,3,5\}, \{2,5\} \cup \{1,3,4\},\\
&\{3,4\} \cup \{1,2,5\}, \{3,5\} \cup \{1,2,4\}, \{4,5\} \cup \{1,2,3\}.
\end{aligned}$$

Avec cette coloration, on obtient les 30 partitions :

$\{1\}^{c_1^1} \cup \{2,3,4,5\}^{c_4}, \{1\}^{c_1^2} \cup \{2,3,4,5\}^{c_4}, \{2\}^{c_1^1} \cup \{1,3,4,5\}^{c_4}, \{2\}^{c_1^2} \cup \{1,3,4,5\}^{c_4},$
$\{3\}^{c_1^1} \cup \{1,2,4,5\}^{c_4}, \{3\}^{c_1^2} \cup \{1,2,4,5\}^{c_4}, \{4\}^{c_1^1} \cup \{1,2,3,5\}^{c_4}, \{4\}^{c_1^2} \cup \{1,2,3,5\}^{c_4},$
$\{5\}^{c_1^1} \cup \{1,2,3,4\}^{c_4}, \{5\}^{c_1^2} \cup \{1,2,3,4\}^{c_4}, \{1,2\}^{c_2^1} \cup \{3,4,5\}^{c_3}, \{1,2\}^{c_2^2} \cup \{3,4,5\}^{c_3},$
$\{1,3\}^{c_2^1} \cup \{2,4,5\}^{c_3}, \{1,3\}^{c_2^2} \cup \{2,4,5\}^{c_3}, \{1,4\}^{c_2^1} \cup \{2,3,5\}^{c_3}, \{1,4\}^{c_2^2} \cup \{2,3,5\}^{c_3},$
$\{1,5\}^{c_2^1} \cup \{2,3,4\}^{c_3}, \{1,5\}^{c_2^2} \cup \{2,3,4\}^{c_3}, \{2,3\}^{c_2^1} \cup \{1,4,5\}^{c_3}, \{2,3\}^{c_2^2} \cup \{1,4,5\}^{c_3},$
$\{2,4\}^{c_2^1} \cup \{1,3,5\}^{c_3}, \{2,4\}^{c_2^2} \cup \{1,3,5\}^{c_3}, \{2,5\}^{c_2^1} \cup \{1,3,4\}^{c_3}, \{2,5\}^{c_2^2} \cup \{1,3,4\}^{c_3},$
$\{3,4\}^{c_2^1} \cup \{1,2,5\}^{c_3}, \{3,4\}^{c_2^2} \cup \{1,2,5\}^{c_3}, \{3,5\}^{c_2^1} \cup \{1,2,4\}^{c_3}, \{3,5\}^{c_2^2} \cup \{1,2,4\}^{c_3},$
$\{4,5\}^{c_2^1} \cup \{1,2,3\}^{c_3}, \{4,5\}^{c_2^2} \cup \{1,2,3\}^{c_3}.$

d'où $B_{5,2}(2,2,1,1) = 30$.

Le théorème suivant donne l'interprétation combinatoire des polynômes partiels de Bell, pour des suites particulières.

Théorème 51. *[56] Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'entiers positifs. Alors, on a :*

- *$B_{n,k}(a_l)$ compte le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs tels que les blocs de longueur i sont colorés avec a_i couleurs,*
- *$B_{n,k}((l-1)!a_l)$ compte le nombre de permutations de l'ensemble $[n]$ en k cycles tels que les cycles de longueur i sont colorés avec a_i couleurs,*
- *$B_{n,k}((l)!a_l)$ compte le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$ en k blocs ordonnés tels que les blocs de longueur i sont colorés avec a_i couleurs.*

Interprétation probabiliste

Soit $(X_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de variables aléatoires discrètes de même loi de probabilité $P(X=j) = \frac{p_j}{j!}, j \geqslant 0$. Alors,

$$B_{n+k,k}(p_0, p_1, ...) = \frac{(n+k)!}{k!} P(X_1 + ... + X_k = n).$$

Si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires de moments $\mu_n = E(X)^n, n \geqslant 0$:

$$B_{n+k,k}(1, 2\mu_1, \ldots, m\mu_{m-1}, \ldots) = \binom{n+k}{k} E((X_1 + ... + X_k)^n).$$

Théorème 52. *[24] (Formule de Faà di Bruno), Soient f et g deux séries de Taylor avec $f(t) = \sum_{n\geqslant 0} f_n \frac{t^n}{n!}$ et $g(t) = \sum_{n\geqslant 1} g_n \frac{t^n}{n!}$ et soit $h = f \circ g$ définie par $h(t) = f(g(t)) = \sum_{n\geqslant 0} h_n \frac{t^n}{n!}$. Alors les coéfficients h_n sont déterminés par :*

$$\begin{cases} h_0 = f_0 \\ h_n = \sum_{k=1}^{n} f_k B_{n,k}(g_1, g_2, \ldots) \end{cases} \tag{1.14}$$

4.6 Polynômes exponentiels partiels r-Bell

Les polynômes exponentiels partiels r-Bell, introduits et étudiés dans [56], représentent une généralisation des polynômes partiels de Bell. Ces polynômes sont notés par $B_{n,k}^{(r)}(a_l; b_l)$, ou $B_{n,k}^{(r)}(a_1, a_2, \ldots; b_l, b_2, \ldots)$.

Définition 53. Soient $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et $(b_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites d'entiers positifs. Les nombres $B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l)$, comptent le nombre de partitions de l'ensemble $[n+r]$, en $(k+r)$ blocs de sorte que :

- Les r premiers éléments sont dans des blocs différents
- Tout bloc de taille i, non intersectant $[r]$, est coloré avec a_i couleurs
- Tout bloc de taille i, intersectant $[r]$, est coloré avec b_i couleurs

Théorème 54. *[56] Pour $n \geqslant k \geqslant r \geqslant 1$, les polynômes exponentiels partiels r-Bell, admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\sum_{j\geqslant 1} a_j \frac{t^j}{j!}\right)^k \left(\sum_{j\geqslant 0} b_{j+1}\frac{t^j}{j!}\right)^r. \tag{1.15}$$

Théorème 55. *[56] Les polynômes partiels r-Bell $B_{n,k}^{(r)}(a_l; b_l)$, admettent l'expression :*

$$B_{n,k}^{(r)}(a_1, a_2, \ldots; b_l, b_2, \ldots) = \frac{(n-r)!}{(k-r)!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=n+r-k}^{\infty} \frac{b_{n_1+1}\cdots b_{n_r+1}}{n_1!\cdots n_r!}\frac{a_{n_{r+1}+1}\cdots a_{n_k+1}}{(n_{r+1}+1)!\cdots(n_k+1)!}. \tag{1.16}$$

Théorème 56. *[56] Les polynômes partiels r-Bell $B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l, b_l)$, admettent l'expression :*

$$B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l) = \sum_{(k,r)}^{\infty}\left[\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots}\left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1}\left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2}\ldots\right]\times\left[\frac{r!}{r_0!r_1!\ldots}\left(\frac{b_1}{0!}\right)^{r_0}\left(\frac{b_2}{1!}\right)^{r_1}\ldots\right], \tag{1.17}$$

sous $(k,r) = \left((k_i)_{i\geqslant 1}, (r_i)_{i\geqslant 0}\right)$, vérifiant :

$$\sum_{i\geqslant 1} k_i = k,\ \sum_{i\geqslant 0} r_i = r,\ \sum_{i\geqslant 1} i(k_i + r_i) = n.$$

La proposition suivante présente quelques propriétés et relations récurrentes des polynômes partiels r-Bell.

Proposition 57. *[56] Pour $n \geqslant k \geqslant 1$ on a :*

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j} a_j B_{n+r-j,k+r-1}^{(r)}(a_l; b_l) &= k B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l),\\ \sum_{j=1}^{n}\binom{n}{j-1} b_j B_{n-j+r-1,k+r-1}^{(r-1)}(a_l; b_l) &= r B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l),\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=1}^{n} j a_j \binom{n}{j} B_{n+r-j,k+r-1}^{(r)}\left(a_l;b_l\right) + r\sum_{j=1}^{n} j b_j \binom{n}{j-1} B_{n-j+r-1,k+r-1}^{(r-1)}\left(a_l;b_l\right) \\
= \quad & (n+r)\, B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_l;b_l\right).
\end{aligned}$$

Interprétation probabiliste

Théorème 58. *[56] Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes avec $P(X=j)=\dfrac{p_j}{j!}$ et $P(Y=j)=\dfrac{q_j}{j!}, j\geqslant 0$ et soit*

$$S_{p,q} = X_1 + ... + X_p + Y_1 + ... + Y_q.$$

Alors, on a :

$$B_{n+p+q,p+q}^{(q)}\left(p_{l-1};q_{l-1}\right) = \frac{(n+p)!}{p!} P(S_{p,q}=n).$$

Théorème 59. *[56] Soient $(X_n)_{n\geqslant 1}$ et $(Y_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes de moments identiques $\mu_n = E\left(X\right)^n$ et $\nu_n = E\left(Y\right)^n$ et soit*

$$S_{p,q} = X_1 + ... + X_p + Y_1 + ... + Y_q.$$

Alors, on a :

$$B_{n+p+q,p+q}^{(q)}\left(l\mu_{l-1};\nu_{l-1}\right) = \binom{n+p}{p} E\left(S_{p,q}\right)^n.$$

Théorème 60. *[24] (Formule de Faà di Bruno généralisée). Soient f et g deux séries de Taylor avec $f(t)=\sum\limits_{n\geqslant 0} f_n \dfrac{t^n}{n!}$ et $g(t)=\sum\limits_{n\geqslant 1} g_n \dfrac{t^n}{n!}$ et soit $h=f\circ g$ définie par $h(t)=f(g(t))=\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{t^n}{n!}$. Alors, on a :*

$$\frac{d^n}{dt^n}\left(\left(\frac{d}{dt}h\left(t\right)\right)^r f(g(t))\right)\Bigg|_{x=0} = \sum_{k=0}^{n} f_k B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(g_l;h_l\right). \tag{1.18}$$

Cas particuliers

Les nombres r-Whitney de première et de deuxième espèce et les nombres r-Whitney-Lah représentent des cas particuliers des polynômes partiels r-Bell, puisque leurs fonctions génératrices s'écrivent repectivement :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} w_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\ln(1+mt)\right)^k\left((1+mt)^{-\frac{1}{m}}\right)^r, \\
\sum_{n=k}^{\infty} W_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\frac{e^{mt}-1}{m}\right)^k e^{rt}, \\
\sum_{n=k}^{\infty} L_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(t(1-mt)^{-1}\right)^k\left((1-mt)^{-\frac{2}{m}}\right)^r.
\end{aligned}$$

Donc, on peut écrire :

- $w_{m,r}(n,k) = (-1)^{n-k+r} B_{n+r,k+r}^{(r)}\left((l-1)!m^{l-1};(m+1)(2m+1)\dots((l-1)m+1)\right)$,
- $W_{m,r}(n,k) = B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(m^{l-1};1\right)$,
- $L_{m,r}(n,k) = B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(l!m^{l-1};2(m+2)\dots((l-1)m+2)\right)$.

Remarque 61. *Si $a_n = b_n, \forall n \geqslant 1$, on note*

$$B_{n,k}^{(r)}(a_l) = B_{n,k}^{(r)}(a_l;a_l).$$

Proposition 62. *Si $a_n = b_n, \forall n \geqslant 1$, alors les polynômes partiels r-Bell vérifient :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}(A(t))^k(A'(t))^r. \tag{1.19}$$

Démonstration. Soit $A(t) = \sum_{j\geqslant 1} a_j \frac{t^j}{j!}$, alors $A'(t) = \sum_{j\geqslant 0} a_{j+1}\frac{t^j}{j!}$. En utilisant la fonction génératrice des polynômes partiels r-Bell, avec $b_{j+1} = a_{j+1}$, on trouve :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=k}^{\infty} B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l)\frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j\geqslant 1} a_j\frac{t^j}{j!}\right)^k\left(\sum_{j\geqslant 0} a_{j+1}\frac{t^j}{j!}\right)^r, \\
&= \frac{1}{k!}(A(t))^k(A'(t))^r.
\end{aligned}$$

□

Pour des valeurs particulières a_n et par identification des fonctions génératrices, on montre que les polynômes partiels r-Bell généralisent aussi les nombres r-Stirling et r-Lah, et on a :

- Les nombres r-Stirling absolus de première espèce

$$a_l = (l-1)!, \forall l \geqslant 1 : \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = B_{n,k}^{(r)}((l-1)!),$$

- Les nombres r-Stirling de première espèce

$$a_l = (-1)^{l-1}(l-1)!,\ \forall l \geqslant 1 : (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = B_{n,k}^{(r)}\left((-1)^{l-1}(l-1)!\right),$$

- Les nombres r-Stirling de seconde espèce

$$a_l = 1,\ \forall l \geqslant 1 : \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r = B_{n,k}^{(r)}(1),$$

- Les nombres r-Lah

$$a_l = l!,\ \forall l \geqslant 1 : \begin{vmatrix} n \\ k \end{vmatrix}_r = B_{n,k}^{(r)}(l!).$$

4.7 Nombres et polynômes de Bell

Les nombres de Bell $\mathcal{B}_n$, étudiés par Bell [9], comptent le nombre ds partitions d'un ensemble à n éléments.

Théorème 63. *[24] Les nombres de Bell $\mathcal{B}_n$ admettent la fonction génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{n} \mathcal{B}_n \frac{t^n}{n!} = \exp\left(e^t - 1\right).$$

Théorème 64. *[24] Les nombres de Bell $\mathcal{B}_n$ vérifient :*

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}, \\
\mathcal{B}_n &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \mathcal{B}_k, \mathcal{B}_0 = 1, \\
\mathcal{B}_n &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k^n}{k!}, \\
\mathcal{B}_n &= \sum_{k=1}^{n} \frac{k^n}{k!} \sum_{j=0}^{n-k} \frac{(-1)^j}{j!}.
\end{aligned}$$

Les polynômes de Bell à une seule variable (ou polynômes de Touchard), notés $\mathcal{B}_n(x)$, sont étudiés par Touchard en 1939, voir [81]. Ces polynômes sont définis par

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix} x^k.$$

Ces polynômes representent un cas particulier des polynômes exponentiels complets de Bell $B_n(a_1, \ldots, a_n)$:

$$\mathcal{B}_n(x) = B_n(x, \ldots, x).$$

Pour $x = 1$, on retrouve les nombres de Bell $\mathcal{B}_n$:

$$\mathcal{B}_n(1) = \mathcal{B}_n.$$

Théorème 65. *[81] Les polynômes $\mathcal{B}_n(x)$ admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{B}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x\left(e^t - 1\right)\right).$$

Ces polynômes admettent la représentation donnée par la formule de Dobinski

$$\mathcal{B}_n(x) = \exp(-x) \sum_{i=0}^{\infty} \frac{i^n}{i!} x^i. \tag{1.20}$$

4.8 Nombres et polynômes de Bernoulli

Les nombres de Bernoulli sont utilisés fréquemment en théorie des nombres mais apparaissent aussi dans bien d'autres domaines des mathématiques. Ces nombres ont d'abord été étudiés en cherchant à calculer les sommes du type

$$S_m(n) = 1^m + 2^m + \cdots + n^m,$$

où m et n sont deux entiers naturels non nuls.
Les formules suivantes étaient connues des grecs, du temps d'Archimède, près de trois siècles avant J-C :

$$S_1(n) = \frac{n(n+1)}{2}, \quad S_2(n) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad S_3(n) = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Plus tard, le médecin arabe Djamchid Ben Mas'oud donna dans un manuscrit daté de 1589 la formule suivante que le mathématicien français Pierre de Fermat (1601-1665) devait retrouver après plusieurs années :

$$S_4(n) = \left(\frac{S_1(n) - 1}{5} + S_1(n)\right) S_2(n).$$

Durant la même période, le mathématicien allemand Johann Faulhaber $(1580 - 1635)$, [29] détermina des expressions pour les sommes $S_m(n)$ pour $1 \leqslant m \leqslant 17$.
Ce fut finalement le mathématicien Suisse Jacques Bernoulli $(1654 - 1705)$ qui donna une formule générale faisant intervenir une suite de nombres rationnels $(B_n)_{n\geqslant 0}$ appelée aujourd'hui en son honneur suite des nombres de Bernoulli. Cette suite est définie par récurrence par les relations

$$B_0 = 1 \textit{ et } B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k} B_k, \quad \texttt{pour } n \geqslant 1.$$

On a alors la formule générale suivante appelée de nos jours formule de Faulhaber en honneur au mathématicien Faulhaber

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} m! \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{n^{m+1-2k}}{(m+1-2k)!}.$$

En hommage au mathématicien Suisse Daniel Bernoulli $(1700-1782)$, neveu de Jacques Bernoulli, la suite de polynômes $\left(B_n\left(x\right)\right)_{n\geqslant 0}$ définie par

$$B_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} x^k,$$

est appelée suite des polynômes de Bernoulli. On montre qu'on a alors

$$S_n\left(m\right) = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}\left(n+1\right) - B_{m+1}\right).$$

On peut aussi définir les nombres de Bernoulli de première espèce B_n par la fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n\geqslant 0} B_n \frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t - 1}.$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli de première espèce B_n, sont donnés par la tableau suivant avec $B_{2k+1} = 0, k = 1, 2, \ldots$.

B_0	B_1	B_2	B_4	B_6	B_8	B_{10}
1	$\frac{-1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{-1}{30}$	$\frac{1}{42}$	$\frac{-1}{30}$	$\frac{5}{66}$

Tableau 1.9 – Les premières valeurs de B_n.

Les nombres de Bernoulli de seconde espèce b_n [18], sont les nombres rationnels déterminés par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n t^n = \frac{t}{\ln\left(1+t\right)}.$$

Les nombres $n!b_n$ sont appelés nombres de Cauchy de première espèce [24, 48], et sont définis par

$$n!b_n = \int_0^1 (t)^{\underline{n}}\, dt = n! \int_0^1 \binom{t}{n} dt.$$

Les premières valeurs des nombres de Bernoulli de seconde espèce b_n, sont donnés par la tableau ci-dessous.

Les polynômes de Bernoulli de seconde espèce $b_n\left(x\right)$ sont définis par la fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geqslant 0} b_n\left(x\right) t^n = \frac{t}{\ln\left(1+t\right)}\left(1+t\right)^x, \ \texttt{avec}\ b_n\left(0\right) = b_n.$$

b_0	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{-19}{720}$	$\frac{3}{160}$

Tableau 1.10 – Les premières valeurs de b_n.

Ces polynômes admettent la relation

$$b_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k (x)^{\underline{n-k}}.$$

Définition 66. Les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur de première et de seconde espèce, notés respectivement $B_n^{(\alpha)}$ et $b_n^{(\alpha)}$ sont définis par les fonctions génératrices

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} B_n^{(\alpha)} \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}, \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n^{(\alpha)} t^n &= \left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha}, \ \alpha \geqslant 1, \end{aligned}$$

avec $B_n^{(1)} = B_n$ et $b_n^{(1)} = b_n$.

Définition 67. Les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première et de seconde espèce, notés respectivement $B_n^{(\alpha)}(x)$ et $b_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis par les fonctions génératrices exponentielles

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt}, \\ \sum_{n\geqslant 0} b_n^{(\alpha)}(x)\, t^n &= \left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha} (1+t)^x, \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} &B_n^{(\alpha)}(0) = B_n^{(\alpha)};\ B_n^{(1)}(x) = B_n(x);\ B_n^{(1)}(0) = B_n; \\ &b_n^{(\alpha)}(0) = b_n^{(\alpha)};\ b_n^{(1)}(x) = b_n(x); b_n^{(1)}(0) = b_n. \end{aligned}$$

Définition 68. Les polynômes de Bernoulli dégénérés, notés $\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda)$ sont définis par la fonctions génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{\beta t}{(1+\lambda t)^{\beta/\lambda}-1}\right)^{\alpha} (1+\beta t)^{(\lambda/\beta-1)x} \lambda\mu = 1.$$

CHAPITRE 2

Une nouvelle classe de nombres r-Stirling de première espèce

1 Introduction

Dans ce chapitre, nous introduisons les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce. En utilisant des thechniques combinatoires, nous donnons quelques proprietés et relations récurrentes de ces nombres, ainsi que leur connexion avec les polynômes partiels r-Bell. Ces nombres seront utilisés dans le troisiéme chapitre pour expliciter une nouvelle classe de polynômes.

2 Nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce

Les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce, notés $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^s$, sont donnés par la définition suivante :

Définition 69. Soient n, k, r, s des entiers non négatifs. Les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce, notés $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^s$, comptent le nombre de permutations de l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k cycles tels que les r premiers éléments sont dans des cycles différents et n'importe quel cycle des $(k-r)$ cycles restants doit contenir au moins s éléments.

D'après la définition précédente, on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^s &= 0, \quad n < sk - r(s-1) \text{ ou } k \leqslant r, \\ \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_r^s &= \delta_{n,0}, \quad n \geqslant 0, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0^s &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s \text{ et } \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^1 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r, \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_0^1 &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^1 = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Exemple 70.

1. $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_2^2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en* 3 *cycles tels que les deux premiers éléments* $(1$ *et* $2)$ *sont dans des cycles différents et tout cycle n'intersectant pas* $\{1, 2\}$*, contient au moins* 2 *éléments.*
   On a $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}_2 = 6$ *: C'est nombre de permutations de l'ensemble* $\{1, 2, 3, 4\}$ *en* 3 *cycles tels que les deux premiers éléments* $(1$ *et* $2)$ *sont dans des cycles différents. Ces permutations sont*

$$(1)(2)(34), (1)(3)(24), (1)(4)(23),$$

$$(2)(3)(14), (2)(4)(13), (3)(4)(12).$$

On prend uniquement celles où tout cycle n'intersectant pas $\{1,2\}$ *est de longueur au moins égale à* 2. *Il n'y a que la permutation* $(1)(2)(34)$, *qui vérifie cette condition. D'où* $\left[{4 \atop 3}\right]_2^2 = 1$.

2. $\left[{5 \atop 3}\right]_2^2$ *est le nombre de permutations de l'ensemble* $\{1,2,3,4,5\}$ *en* 3 *cycles tels que les deux premiers éléments* (1 *et* 2) *sont dans des cycles différents et tout cycle n'intersectant pas* $\{1,2\}$, *contient au moins* 2 *éléments.*
On a $\left[{5 \atop 3}\right]_2 = 26$ *: C'est nombre de permutations de l'ensemble* $\{1,2,3,4,5\}$ *en* 3 *cycles tels que les deux premiers éléments* (1 *et* 2) *sont dans des cycles differents. Ces permutations sont*

$$\underline{(1)(2)(345)};\underline{(1)(2)(354)};\underline{(1)(23)(45)};\underline{(1)(24)(35)};\underline{(1)(25)(34)};$$

$$\underline{(13)(2)(45)};\underline{(14)(2)(35)};\underline{(15)(2)(34)};(13)(24)(5);(13)(25)(4);$$

$$(14)(23)(5);(14)(25)(3);(15)(23)(4);(15)(24)(3);(1)(234)(5);$$

$$(1)(243)(5);(1)(235)(4);(1)(253)(4);(1)(245)(3);(1)(254)(3);$$

$$(134)(2)(5);(143)(2)(5);(135)(2)(4);(153)(2)(4);(145)(2)(3);(154)(2)(3).$$

On prend uniquement celles où tout cycle n'intersectant pas $\{1,2\}$ *est de longueur au moins égale à* 2. *Il y a* 8 *permutations (celles qui sont soulignées) vérifiant cette condition. D'où* $\left[{5 \atop 3}\right]_2^2 = 8$.

2.1 Propriétés combinatoires

A partir de la définition des nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce, on peut établir le théorème suivant :

Théorème 71. *Soient* n,k,r,s *des entiers non négatifs. Pour* $n \geqslant sk - r(s-1)$, *les nombres* r*-Stirling quasi-*s*-associés de première espèce admettent l'expression explicite suivante :*

$$\left[{n+r \atop k+r}\right]_r^s = \frac{n!}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_k=n-sk}\frac{(n_1+s)\cdots(n_r+s)}{(n_1+s)\cdots(n_k+s)}.$$

Démonstration. D'après la définition, $\left[{n+r \atop k+r}\right]_r^s$ est le nombre de permutaions de l'ensemble $\mathbb{N}_{n+r}$ en $(k+r)$ cycles tels que les éléments de $\mathbb{N}_r$ sont dans des cycles différents et tout cycle non intersectant $\mathbb{N}_r$ contient au moins s éléments. Pour partitionner l'ensemble $\mathbb{N}_{n+r}$ en $(k+r)$ cycles $B_1,\ldots,B_r,\ldots,B_{r+k}$, on affecte d'abord les éléments de l'ensemble $\mathbb{N}_r$ dans r cycles differents $B_1,\ldots,B_r$. Il y a alors

$$\frac{1}{k!}\binom{n}{n_1,\ldots,n_{k+r}} = \frac{n!}{k!}\frac{1}{n_1!n_2!\ldots n_{k+r}!}$$

possibilités de choisir n_1 éléments, n_2 éléments, ..., n_{k+r} éléments dans l'ensemble $\mathbb{N}_{n+r} - \mathbb{N}_r$ de sorte que :

– $n_1 \geqslant 0, \ldots, n_r \geqslant 0$: $n_1, \ldots, n_r$ sont, respectivement dans $B_1, \ldots, B_r$,
– $n_{r+1} \geqslant s, \ldots, n_{r+k} \geqslant s$: $n_r, \ldots, n_{r+k}$ sont, respectivement dans $B_{r+1}, \ldots, B_{r+k}$.
Et pour former les $(k+r)$ cycles, le nombre de possibilités est égal à :

$$(|B_1|-1!)\cdots(|B_r|-1!)\,(|B_{r+1}|-1!)\cdots(|B_{r+k}|-1!) = n_1!\cdots n_r!\,(n_{r+1}-1)!\cdots(n_{r+k}-1)\,.$$

D'où, le nombre total est :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^s &= \frac{1}{k!}\sum_{\left(n_1,\ldots,n_{k+r}\right)\in C(n+r,k+r)} \binom{n}{n_1,\ldots,n_{k+r}} n_1!\cdots n_r!\,(n_{r+1}-1)!\cdots(n_{r+k}-1) \\
&= \frac{n!}{k!}\sum_{\left(n_1,\ldots,n_{k+r}\right)\in C(n+r,k+r)} \frac{1}{n_{r+1}\cdots n_{r+k}} \\
&= \frac{n!}{k!}\sum_{n_1+\cdots+n_{k+r}=n-sk} \frac{1}{(n_{r+1}+s)\cdots(n_{r+k}+s)}.
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
& C\,(n+r,k+r) \\
= \;& \{(n_1,\ldots,n_{k+r}) : n_1+\cdots+n_{k+r} = n, n_i \geqslant 0, n_{r+j} \geqslant s; 1 \leqslant i \leqslant r, 1 \leqslant j \leqslant k\}
\end{aligned}$$

□

Comme conséquence, on a le corllaire suivant :

Corollaire 72. *Soient n, k, r, s des entiers non négatifs, $n \geqslant sk - r\,(s-1)$. Les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce admettent la fonction génératrice :*

$$\sum_{n\geqslant k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^s \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\frac{1}{(1-t)^r}\left(\sum_{i\geqslant s}\frac{t^i}{i}\right)^k. \tag{2.1}$$

Démonstration. Avec les même notations de la preuve du théorème (71), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^s \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\sum_{n\geqslant k} t^n \sum_{(n_1,\ldots,n_{k+r})\in C} \frac{1}{n_{r+1}\cdots n_{r+k}} \\
&= \frac{1}{k!}\sum_{n_1\geqslant 0,\ldots,n_r\geqslant 0} t^{n_1+\cdots+n_r} \sum_{n_{r+1}\geqslant s,\ldots,n_{r+k}\geqslant s} \frac{t^{n_{r+1}+\cdots+n_{r+k}}}{n_{r+1}\cdots n_{r+k}} \\
&= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j\geqslant 0} t^j\right)^r \left(\sum_{j\geqslant s}\frac{t^j}{j}\right)^k. \\
&= \frac{1}{k!}\frac{1}{(1-t)^r}\left(\sum_{j\geqslant s}\frac{t^j}{j}\right)^k.
\end{aligned}$$

On note que

$$\sum_{j\geqslant s}\frac{t^j}{j}=\int_0^t\frac{x^{s-1}}{1-x}dx$$

et la fonction f définie par $f(x)=\frac{x^{s-1}}{1-x}$, $s\geq 2$ n'admet pas comme primitive une fonction élémentaire connue. □

2.2 Relations récurrentes

Comme conséquence du corollaire précédent, on a :

Corollaire 73. *Soient n,k,r,s des entiers non négatifs, $n\geqslant sk$ et $n>r$. On a*

$$\left[\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right]_r^s=\sum_j\binom{n}{j}r^{\bar{j}}\left[\begin{matrix}n-j\\k\end{matrix}\right]^s$$

et pour $n\geqslant sk$ et $n>r$, on a :

$$\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]_r^s=\left[\begin{matrix}n-1\\k-1\end{matrix}\right]_{r-1}^s+(n-r)\left[\begin{matrix}n-1\\k\end{matrix}\right]_r^s.$$

Démonstration. La première identité est un résultat direct du corollaire (72). Si on multiplie l'equation (2.1) par $(1-t)$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant k}\left[\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right]_r^s\frac{t^n}{n!}&=\sum_{n\geqslant k}\left[\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right]_r^s\frac{t^{n+1}}{n!}+\frac{1}{k!}\frac{1}{(1-t)^{r-1}}\left(\sum_{i\geqslant s}\frac{t^i}{i}\right)^k\\&=\sum_{n\geqslant k}(n+1)\left[\begin{matrix}n+r\\k+r\end{matrix}\right]_r^s\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\sum_{n\geqslant k}\left[\begin{matrix}n+r-1\\k+r-1\end{matrix}\right]_{r-1}^s\frac{t^n}{n!}\\&=\sum_{n\geqslant k}n\left[\begin{matrix}n+r-1\\k+r\end{matrix}\right]_r^s\frac{t^n}{n!}+\sum_{n\geqslant k}\left[\begin{matrix}n+r-1\\k+r-1\end{matrix}\right]_{r-1}^s\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on obtient la deuxième identité. □

Dans les propositions suivantes, nous présentons de nouvelles relations récurrentes pour les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce :

Proposition 74. *Pour $n\geqslant sk-r(s-1)$ et $k\geqslant 2$, on a*

$$\left[\begin{matrix}n\\k\end{matrix}\right]_r^s=\sum_{j\geqslant 0}(n-r)^{\underline{j}}\left[\begin{matrix}n-1-j\\k-1\end{matrix}\right]_{r-1}^s.$$

Démonstration. Pour partitionner l'ensemble $\mathbb{N}_n$ en k cycles tels que les éléments de $\mathbb{N}_r$ sont dans des cycles différents et tout cycle non intersectant $\mathbb{N}_r$ contient au moins s éléments, l'élément r peut être dans un cycle de longueur $j+1 \geqslant 1$ avec $j!\binom{n-r}{j}\left[{n-1-j \atop k-1}\right]_{r-1}^{s}$ possibilités :

(a) $\binom{n-r}{j}$ est le nombre de possibilités de choisir j éléments parmi $(n-1)-(r-1)$ éléments (aucun élément n'est dans $\mathbb{N}_{r-1}$) pour être dans le même cycle que l'élément r.
(b) $\left[{n-1-j \atop k-1}\right]_{r-1}^{s}$ est le nombre de façons de partitionner les $n-(j+1)=n-1-j$ éléments qui restent en $(k-1)$ cycles tels que les éléments de $\mathbb{N}_{r-1}$ sont dans des cycles différents et tout cycle non intersectant $\mathbb{N}_{r-1}$ contient au moins s éléments,.

(c) $j!$ est le nombre de permutations de ce cycle. □

Corollaire 75. *Pour $n \geqslant sk-r(s-1)$ et $k \geqslant 2$, on a :*

$$\left[{n \atop k}\right]_r^s = (n-r)\left[{n-1 \atop k}\right]_r^s + (n-r)^{\underline{s-1}}\left[{n-s \atop k-1}\right]_{r-1}^s .$$

Démonstration. Pour $s \geqslant 2$, en utilisant la proposition (74), on obtient :

$$\begin{aligned}
\left[{n \atop k}\right]_r^s &= \sum_{j\geqslant s-1}(n-r)^{\underline{j}}\left[{n-1-j \atop k-1}\right]_{r-1}^s \\
&= (n-r)\sum_{j\geqslant s-1}(n-1-r)^{\underline{j-1}}\left[{n-1-j \atop k-1}\right]_{r-1}^s \\
&= (n-r)\sum_{j\geqslant s-2}(n-1-r)^{\underline{j}}\left[{n-2-j \atop k-1}\right]_{r-1}^s \\
&= (n-r)\sum_{j\geqslant s-1}(n-1-r)^{\underline{j}}\left[{n-2-j \atop k-1}\right]_{r-1}^s \\
&\quad + (n-r)(n-1-r)^{\underline{s-2}}\left[{n-s \atop k-1}\right]_{r-1}^s \\
&= (n-r)\left[{n-1 \atop k}\right]_r^s + (n-r)^{\underline{s-1}}\left[{n-s \atop k-1}\right]_{r-1}^s ,
\end{aligned}$$

□

Remarque 76. *Les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce $\left[{n \atop k}\right]_r^s$ sont reliés avec les nombres r-Stirling s-associés de première espèce $\left[{n \atop k}\right]_r^{(s)}$, définis et étudiés par Belbachir et Bousbaa [7], par la relation suivante :*

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^s &= \frac{(n-r)!}{(n+(s-2)\,r)!} \begin{bmatrix} n+(s-1)\,r \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)}, \\
\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)} &= \frac{(n-r)!}{(n+(s-2)\,r)!} \begin{bmatrix} n-(s-1)\,r \\ k \end{bmatrix}_r^s, \quad s \geqslant 1.
\end{aligned}$$

Démonstration. D'après le théorème (71), on a

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n+(s-1)\,r \\ k \end{bmatrix}_r^{(s)} &= \frac{(n+(s-2)\,r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_{k-r}=n-r-s(k-r)} \frac{(n_1+s)\cdots(n_r+s)}{(n_1+s)\cdots(n_k+s)} \\
&= \frac{(n+(s-2)\,r)!}{(n-r)!} \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_{k-r}=n-r-s(k-r)} \frac{(n_1+s)\cdots(n_r+s)}{(n_1+s)\cdots(n_k+s)} \\
&= \frac{(n+(s-2)\,r)!}{(n-r)!} \begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}_r^s .
\end{aligned}$$

□

2.3 Cas particuliers

- Les nombres Stirling s-associés de première espèce representent une restriction des nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce en prenant $r=0$:
  – Du théorème (71), on obtient :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s = \frac{n!}{k!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-sk} \frac{1}{(n_1+s)!\cdots(n_k+s)!}.$$

  – pour $r=0$ dans corollaire (75), on obtient :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}^s = \sum_j \binom{n}{j} \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}^s .$$

- Les nombres r-Stirling de première espèce representent une restriction des nombres de r-Stirling quasi-s-associés de première espèce en prenant $s=1$:
  – Pour $s=1$ dans le théorème (71), on obtient :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = \frac{(n-r)!}{(k-r)!} \sum_{n_1+\cdots+n_k=n-k} \frac{1}{(n_{r+1}+1)\cdots(n_{r+k}+1)}.$$

  – Pour $s=1$ dans le corollaire (75), on obtient la relation récurrente connue pour les nombres r-Stirling de première espèce :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = (n-r) \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_r + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_r .$$

2.4 Connexion avec les polynômes partiels r-Bell

D'après la fonction génératrice, on déduit que les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce $\left[{n \atop k}\right]_r^s$ représentent des càs particuliers des polynômes partiels r-Bell $B_{n,k}^{(r)}(a_l; b_l)$. Dans l'expression (1.15), pour les valeurs :

$$a_l = \begin{cases} (l-1)!, & l \geqslant s, \\ 0, & l < s, \end{cases}$$

et

$$b_l = (l-1)!, \ \forall l \geqslant 1,$$

on a

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j \geqslant s} \frac{t^j}{j}\right)^k \left(\sum_{j \geqslant 0} t^j\right)^r \\ &= \frac{1}{k!}\left(\sum_{j \geqslant s} \frac{t^j}{j}\right)^k \left(\frac{1}{1-t}\right)^r \\ &= \sum_{n=k}^{\infty} \left[{n+r \atop k+r}\right]_r^s \frac{t^n}{n!}. \end{aligned}$$

D'où

$$\left[{n \atop k}\right]_r^s = B_{n,k}^{(r)}\left(\overbrace{0, \cdots, 0}^{s-1}, (s-1)!, s!, \ldots; 0!, 1!, 2!, \ldots\right). \tag{2.2}$$

Ainsi les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce $\left[{n \atop k}\right]_r^s$ comptent le nombre de permutations de $[n]$ en k cycles tels que :

- Les r premiers éléments sont dans des cycles différents.
- Les cycles de taille i, non intersectant $[r]$ sont colorés avec a_i couleurs, $a_i = (i-1)!$ pour $i \geqslant s$ et $a_i = 0$ pour $i < s$.
- Les cycles de taille i, intersectant $[r]$ sont colorés avec b_i couleurs, $b_i = (i-1)!, \ i \geqslant 1$.

2.5 Interprétation probabiliste

Les nombres r-Stirling quasi-s-associés de première espèce $\left[{n \atop k}\right]_r^s$ possèdent l'interprétation probabiliste donnée par le théorème suivant :

Théorème 77. *Soient $\{X_n\}$ et $\{Y_n\}$ deux suites indépendantes de variables aléatoires indépendantes avec*

$$\begin{aligned} P(X_n = j) &= \alpha \frac{\lambda^j}{j+s}, \ P(Y_n = j) = (1-\lambda)\lambda^j, \ j \geqslant 0, \\ \alpha &= \left(\sum_{j \geqslant 0} \frac{\lambda^j}{j+s}\right)^{-1}, \ \lambda \in \left]0, 1\right[, \end{aligned}$$

et soit :

$$S_{k,r} = X_1 + \cdots + X_k + Y_1 + \cdots + Y_r.$$

Alors, on a :

$$P\left(S_{k,r} = n\right) = \alpha^k \left(1-\lambda\right)^r \lambda^n \frac{n!}{\left(n + sk + \left(s-1\right)r\right)!} \begin{bmatrix} n + s\left(k+r\right) \\ k+r \end{bmatrix}_r^s .$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{n\geqslant 0} P\left(S_{k,r} = n\right) t^n \\
= \ & E\left(t^{S_{k,r}}\right) \\
= \ & E\left(t^{X_1+\cdots+X_k}\right) E\left(t^{Y_1+\cdots+Y_r}\right) \\
= \ & \alpha^k \left(1-\lambda\right)^r \left(\lambda t\right)^{-sk-(s-1)r} \left(\frac{\left(\lambda t\right)^{(s-1)r}}{\left(1-\lambda t\right)^r} \left(\sum_{j\geqslant s} \frac{\left(\lambda t\right)^j}{j} \right)^k \right) \\
= \ & k!\alpha^k \left(1-\lambda\right)^r \left(\lambda t\right)^{-sk-(s-1)r} \sum_{n\geqslant sk+(s-1)r} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^s \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!} \\
= \ & k!\alpha^k \left(1-\lambda\right)^r \sum_{n\geqslant 0} \frac{n!}{\left(n + sk + \left(s-1\right)r\right)!} \begin{bmatrix} n + s\left(k+r\right) \\ k+r \end{bmatrix}_r^s \frac{\left(\lambda t\right)^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

CHAPITRE 3

Sur les polynômes hypergéométriques de Cauchy

1 Introduction

En 1972, L. Comtet [24] a introduit les nombres de Cauchy de première espèce, notés c_n, par l'intégrale du factoriel descendant :

$$c_n = \int_0^1 (t)^{\underline{n}}\, dt = n! \int_0^1 \binom{t}{n} dt.$$

On remarque que $c_n = n! b_n$, où les b_n représentent les nombres de Bernoulli de seconde espèce. Comtet [24] a donné la fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{t}{\ln(1+t)} = \sum_{n\geqslant 0} c_n \frac{t^n}{n!},$$

Comtet [24] a démontré aussi que les nombres de Cauchy admenttent les expressions :

$$\begin{aligned} c_n &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ c_n &= (-1)^n \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k+1} (n)^{\underline{k}}\, c_{n-k}, \\ \lim_{n\to+\infty} \frac{c_n}{n!} &\sim \frac{(-1)^{n+1}}{n} (\ln n)^{-2}. \end{aligned}$$

Comme il a donné les premières valeurs de c_n, pour $0 \leqslant n \leqslant 7$:
Plusieurs auteurs ont étudié les nombres de Cauchy, nous citons Merlini, Sprugnoli et

n	0	1	2	3	4	5	6	7
c_n	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{-19}{30}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{-863}{84}$	$\frac{1375}{24}$

Tableau 3.1 – Les premières valeurs de c_n.

Verri [48]. En 2007, Cheon, Hwang et Lee [23], ont introduit les polynômes de Cauchy de première espèce, notés $c_n(x)$, par l'intégrale :

$$c_n(x) = n! \int_0^1 \binom{t-x}{n} dt,$$

avec $c_n(0) = c_n$. Ils ont donné la fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{t}{\ln(1+t)} \frac{1}{(1+t)^x} = \sum_{n\geqslant 0} c_n(x) \frac{t^n}{n!}.$$

Ensuite, Komatsu [40] a demontré que les polynômes de Cauchy de première espèce vérifient :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left\{{n \atop k}\right\}c_k\left(x\right) &= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\frac{\left(-x\right)^i}{n-i+1},\\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}c_k\left(x\right)c_{n-k}\left(y\right) &= -n\left(x+y+n-2\right)c_{n-1}\left(x+y\right)-\left(n-1\right)c_n\left(x+y\right),\ n\geqslant 0.\end{aligned}$$

Il a donné l'expression :

$$c_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}\left[{n \atop k}\right]\left(-1\right)^{n-m}\sum_{k=0}^{n}\binom{k}{i}\frac{\left(-x\right)^i}{k-i+1}.$$

Les nombres et les polynômes de Cauchy ont connu plusieurs généralisations, voir [36, 37, 38, 39, 40]. En 2013, Komatsu [38, 39], a introduit une nouvelle généralisation, les nombres hypergéométriques de Cauchy, notés $c_{N,n}$, par la fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{\left(-1\right)^{N-1}t^N/N}{\ln\left(1+t\right)-\sum\limits_{n=1}^{N-1}\left(-1\right)^{n-1}\frac{t^n}{n}}=\sum_{n\geqslant 0}c_{N,n}\frac{t^n}{n!},\ \ N\geqslant 1,$$

avec la convention $\sum\limits_{n=1}^{0}\left(-1\right)^{n-1}\frac{t^n}{n}=0$. Cette convention est justifiée du fait qu'on a

$$\sum_{n=1}^{N-1}\left(-1\right)^{n-1}\frac{t^n}{n}=\sum_{n=1}^{N}\left(-1\right)^{n-1}\frac{t^n}{n}-\left(-1\right)^N\frac{t^N}{N}.$$

On a alors $c_{1,n}=c_n$: les nombres de Cauchy de pemière espèce. Il a donné les expressions :

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}\frac{\left(-1\right)^i c_{N,i}}{\left(N+n-i\right)i!} &= 0,\ \ c_{N,0}=1,\\ c_{N,n} &= \sum_{i=0}^{n-1}\left(-1\right)^{n-i-1}\frac{n!}{i!}\frac{N}{N+n-i}c_{N,i},\end{aligned}$$

et a démontré que pour $N\geqslant 1$, $n\geqslant 1$, les nombres hypergéométriques de Cauchy vérifient :

$$\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}c_{N,i}c_{N,n-i} = -\frac{1}{N}\left[\left(n-N\right)c_{N,n}+n\left(n-N-1\right)c_{N,n-1}\right].$$

Le même auteur, Komatsu [38, 39], a introduit aussi les polynômes hypergéométriques de Cauchy, notés $c_{N,n}(x)$, par la fonction génératrice exponentielle :

$$\frac{(-1)^{N-1} t^N/N}{\ln(1+t) - \sum_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}} \frac{1}{(1+t)^x} = \sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}(x) \frac{t^n}{n!}$$

et a donné l'expression des polynômes hypergéométriques de Cauchy :

$$c_{N,n}(x) \quad = \quad \sum_{i=0}^{n} (-1)^{n-i} \binom{n}{i} (x+n-i-1)^{\underline{n-i}} c_{N,i}.$$

On note ici qu'on a $c_{N,n}(0) = c_{N,n}$. Voici les premières valeurs de $c_{N,n}$, pour $1 \leqslant N \leqslant 5$ et $0 \leqslant n \leqslant 3$:

N/n	0	1	2	3
$N=1$	1	$1/2$	$-1/6$	$1/4$
$N=2$	1	$2/3$	$-1/9$	$8/45$
$N=3$	1	$3/4$	$-3/40$	$21/160$
$N=4$	1	$4/5$	$-4/75$	$88/875$
$N=5$	1	$5/6$	$-5/126$	$5/63$

Tableau 3.2 – Les premières valeurs de $c_{N,n}$.

En 2010, Kurt [41] a introduit la classe des polynômes de Bernoulli généralisés de prmière espèce, $B_n^{[N-1,\alpha]}(x)$. Il a défini ces polynômes par la fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{t^N}{\exp(x) - \sum_{n=0}^{N-1} \frac{t^n}{n}} \right)^{\alpha} = \sum_{n\geqslant 0} B_n^{[N-1,\alpha]}(x) \frac{t^n}{n!}.$$

En 2014, Mihoubi et Tiachchat [62] ont établi des expressions pour ces polynômes aux points entiers, en utilisant les nombres r-stirling quasi s-associés de seconde espèce. Nous avons, donc réflichi à trouver une généralisation similaire pour les nombres de Bernoulli de seconde espèce et l'introduction des nombres et polynômes hypergéométriques de Cauchy par Komatsu [38, 39], nous a motivé pour définir une généralisation pour ces nombres et ces polynômes, puis les exprimer en utilisant les nombres r-stirling quasi s-associés de première espèce qu'on a déjà introduit dans le deuxième chapitre.

2 Nombres hypergéométriques de Cauchy généralisés

Dans la définition suivante, nous introduisons les nombres $c^{\alpha}_{N,n}$ qui représentent une généralisation des nombres hypergéométriques de Cauchy :

Définition 78. Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. Les nombres hypergéométriques de Cauchy, généralisés, notés $c^{\alpha}_{N,n}$ sont définits par la fonction génératrice exponentielle :

$$\left(\frac{(-1)^{N-1} t^N / N}{\ln(1+t) - \sum\limits_{n=1}^{N-1} (-1)^{n-1} \dfrac{t^n}{n}} \right)^{\alpha} = \sum_{n \geqslant 0} c^{(\alpha)}_{N,n} \frac{t^n}{n!}. \tag{3.1}$$

Le théorème suivant donne l'expression des $c^{(\alpha)}_{N,n}$ en utilisant les nombres de Stirling s-associés de première espèce :

Théorème 79. *Soient $\alpha \in \mathbb{R}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. Les nombres hypergéométriques de Cauchy, généralisés, $c^{(\alpha)}_{N,n}$ admettent l'expression :*

$$c^{(\alpha)}_{N,n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^n \frac{N^j n!}{(n+Nj)!} \begin{bmatrix} n+Nj \\ j \end{bmatrix}^{N+1} (-\alpha)^{\underline{j}}.$$

En particulier, pour un nombre entier non positif $\alpha = -k$, on a :

$$c^{(-k)}_{N,n} = (-1)^n \frac{N^k n! k!}{(n+Nk)!} \begin{bmatrix} n+Nk \\ k \end{bmatrix}^{N}.$$

Démonstration. On a :

$$\sum_{n \geqslant 0} c^{(\alpha)}_{N,n} \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{(-1)^{N-1} t^N / N}{\sum\limits_{n \geqslant N} (-1)^{n-1} \dfrac{t^n}{n}} \right)^{\alpha} = \left(\sum_{j \geqslant 0} (-1)^j \frac{Nj!}{j+N} \frac{t^j}{j!} \right)^{-\alpha} = \sum_{n \geqslant 0} f_n(-\alpha) \frac{t^n}{n!},$$

ce qui implique :

$$c^{(\alpha)}_{N,n} = f_n(-\alpha),$$

où $(f_n(x))$ est une suite de polynômes de type binomial définie par :

$$f_j(1) = (-1)^j \frac{Nj!}{j+N}.$$

En appliquant le théorème B donné dans [24, pp. 139], $f_n(-\alpha)$ peut être écrit :

$$f_n(-\alpha) = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(f_j(1)) (-\alpha)^{\underline{k}} = \sum_{k=0}^{n} B_{n,k} \left((-1)^j \frac{Nj!}{j+N} \right) (-\alpha)^{\underline{k}},$$

et en utilisant l'identité [3l''] donnée dans [24, pp. 136] par

$$B_{n,k}\left(\frac{a_{1+m}}{(1+m)!},...,\frac{j!a_{j+m}}{(j+m)!},...\right)=\frac{n!}{(n+mk)!}B_{n+mk,k}\left(\overline{0,\ldots,0}^{m},a_{m+1},a_{m+2},...\right).$$

Alors

$$\begin{aligned}
c_{N,n}^{(\alpha)} &= \sum_{k=0}^{n}B_{n,k}\left((-1)^{j}\,\frac{Nj!}{j+N}\right)(-\alpha)^{\underline{k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\,N^{k}B_{n,k}\left(\frac{j!}{(j+N)!}\,(j+N-1)!\right)(-\alpha)^{\underline{k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\,\frac{N^{k}n!}{(n+Nk)!}B_{n+Nk,k}\left(\overline{0,\ldots,0}^{N},N!,(N+1)!,...\right)(-\alpha)^{\underline{k}}\\
&= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n}\,\frac{N^{k}n!}{(n+Nk)!}{n+Nk\brack k}^{N+1}(-\alpha)^{\underline{k}}.
\end{aligned}$$

Et pour un entier non positif $\alpha=-k$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}c_{N,n}^{(-k)}\frac{t^{n}}{n!} &= \left(\frac{N}{t^{N}}\sum_{n\geqslant N}(-1)^{n+N}\,\frac{t^{n}}{n}\right)^{k}\\
&= N^{k}t^{-Nk}\left(\sum_{n\geqslant N}(-1)^{n+N}\,(n-1)!\frac{t^{n}}{n!}\right)^{k}\\
&= k!N^{k}t^{-Nk}\sum_{n\geqslant k}B_{n,k}\left((-1)^{N+j}\,(j-1)!\right)\frac{t^{n}}{n!}\\
&= k!N^{k}t^{-Nk}\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n-Nk}\,B_{n,k}\left((j-1)!\right)\frac{t^{n}}{n!}\\
&= k!N^{k}t^{-Nk}\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n-Nk}\,B_{n,k}\left(\overline{0,\ldots,0}^{N-1},(N-1)!,N!,...\right)\frac{t^{n}}{n!}\\
&= k!N^{k}t^{-Nk}\sum_{n\geqslant k}(-1)^{n-Nk}\,{n\brack k}^{N}\frac{t^{n}}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}(-1)^{n}\,\frac{N^{k}k!n!}{(n+Nk)!}{n+Nk\brack k}^{N}\frac{t^{n}}{n!}.
\end{aligned}$$

□

Corollaire 80. *Soient $n,N\in\mathbb{N},\ N\geqslant 1$. Les nombres hypergéométriques de Cauchy vérifient :*

$$c_{N,n}=c_{N,n}^{(1)}=(-1)^{n}\sum_{j=0}^{n}\frac{N^{k}n!j!}{(n+Nj)!}{n+Nj\brack j}^{N+1}.$$

En particulier, les nombres de Cauchy de première espèce c_n vérifient :

$$c_n = c_{1,n} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n+j}{j}^{-1} \begin{bmatrix} n+j \\ j \end{bmatrix}^2 .$$

3 Expressions explicites des polynômes hypergéométriques de Cauchy généralisés

Nous introduisons les polynômes hypergéométriques de Cauchy, généralisés par :

Définition 81. Soient $x, \alpha \in \mathbb{R}$, $n, N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant 1$. Les polynômes hypergéométriques de Cauchy généralisés, notés $c_{N,n}^{(\alpha)}(x)$, sont donnés par :

$$\left(\frac{(-1)^{N-1} t^N / N}{\ln(1+t) - \sum\limits_{n=0}^{N-1} (-1)^{n-1} \frac{t^n}{n}} \right)^{\alpha} \frac{1}{(1+t)^x} = \sum_{n \geqslant 0} c_{N,n}^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!}, \quad N \geqslant 1, \tag{3.2}$$

Remarquons que,
$c_{N,n}^{(1)}(x) = c_{N,n}(x)$: les polynômes hypergéométriques de Cauchy,
$c_{1,n}^{(1)}(x) = c_n(x)$: les polynômes de Cauchy de première espèce,
$c_{N,n}^{(\alpha)}(0) = c_{N,n}^{(\alpha)}$: les nombres hypergéométriques de Cauchy, généralisés,
$c_{N,n}^{(1)}(0) = c_{N,n}$: les nombres hypergéométriques de Cauchy,
$c_{1,n}^{(1)}(0) = c_n$: les nombres de Cauchy de première espèce.

3.1 Expression explicite par les polynômes partiels r-Bell

Dans le théorème qui suit, nous donnons l'expression de $c_{N,n}^{(\alpha)}(x)$ en terme des nombres $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r^s$, ceci pour tout entier positif r.

Théorème 82. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 1$ et $r \in \mathbb{N}$, on a*

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = \frac{(-1)^n}{N^\alpha} \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n+Nj)!} \begin{bmatrix} n+Nj+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{N+1} (-\alpha)^{\underline{j}} .$$

En particulier, pour un entier négatif $\alpha = -k$, on a

$$c_{N,n}^{(-k)}(r) = (-1)^n \frac{N^k k!}{(n+Nk)!} \begin{bmatrix} n+Nk+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^N .$$

Démonstration. D'après la définition de $c_{N,n}^{(\alpha)}(r)$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}^{(\alpha)}(r)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{(-1)^{N-1}t^N/N}{\sum\limits_{j\geqslant N}(-1)^{j-1}\frac{t^j}{j}}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{1+t}\right)^r \\
&= \left(\sum_{j\geqslant N} N(-1)^{j-N}\frac{t^{j-N}}{j}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1}{1+t}\right)^r \\
&= N^{-\alpha}\left(\sum_{j\geqslant 0}\frac{(-1)^j j!}{N+j}\frac{t^j}{j!}\right)^{-\alpha}\left(\frac{1}{1+t}\right)^r \\
&= N^{-\alpha}\left(\frac{1}{1+t}\right)^r\sum_{n\geqslant 0} f_n(-\alpha)\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = N^{-\alpha}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\binom{n-k+r-1}{n-k}f_k(-\alpha),$$

où $(f_n(x))$ est une suite binomiale, avec

$$f_n(1) = \frac{(-1)^n n!}{N+n},\ f_n(-\alpha) = \sum_{j=0}^{n} B_{n,j}\left(\frac{(-1)^n n!}{N+n}\right)(-\alpha)^{\underline{j}}$$

Ce qui nous conduit à écrire

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = N^{-\alpha}\sum_{j=0}^{n}(-\alpha)^{\underline{j}}\sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\binom{n-k+r-1}{n-k}B_{k,j}\left(\frac{(-1)^i i!}{N+i}\right),$$

et la fonction génératrice de

$$A(n,j) = \sum_{k=j}^{n}(-1)^{n-k}\frac{n!}{k!}\binom{n-k+r-1}{n-k}B_{k,j}\left(\frac{(-1)^i i!}{N+i}\right)$$

est donnée par

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant j} A(n,j)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{1}{1+t}\right)^r \sum_{k\geqslant j} B_{k,j}\left(\frac{(-1)^i\, i!}{N+i}\right)\frac{t^k}{k!}\\
&= \left(\frac{1}{1+t}\right)^r \frac{1}{j!}\left(\sum_{i\geqslant 1}\frac{(-1)^i\, i!}{N+i}\frac{t^i}{i!}\right)^j\\
&= (-t)^{-Nj}\frac{1}{j!}\left(\sum_{i\geqslant N+1}\frac{(-t)^i}{i}\right)^j\left(\frac{1}{1+t}\right)^r\\
&= (-t)^{-Nj}\sum_{n\geqslant j}\begin{bmatrix} n+r\\ j+r\end{bmatrix}_r^{N+1}\frac{(-t)^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant j}\frac{(-1)^n\, n!}{(n+Nj)!}\begin{bmatrix} n+Nj+r\\ j+r\end{bmatrix}_r^{N+1}\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $\dfrac{t^n}{n!}$, on trouve

$$A(n,j) = \frac{(-1)^n\, n!}{(n+Nj)!}\begin{bmatrix} n+Nj+r\\ j+r\end{bmatrix}_r^{N+1},$$

Et l'expression de $c_{N,n}^{(\alpha)}(r)$ est donnée par

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = \sum_{j=0}^{n} N^{-\alpha}\frac{(-1)^n\, n!}{(n+Nj)!}\begin{bmatrix} n+Nj+r\\ j+r\end{bmatrix}_r^{N+1}(-\alpha)^{\underline{j}}.$$

Pour $\alpha = -k$, k entier positif, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} c_{N,n}^{(-k)}(r)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{(-1)^{N-1}\, t^N/N}{\sum_{j\geqslant N}(-1)^{j-1}\frac{t^j}{j}}\right)^{-k}\left(\frac{1}{1+t}\right)^r\\
&= N^k(-t)^{-Nk}\left(\sum_{j\geqslant N}\frac{(-t)^j}{j}\right)^k\left(\frac{1}{1+t}\right)^r\\
&= N^k(-t)^{-Nk}\, k!\sum_{n\geqslant Nk}\begin{bmatrix} n+r\\ k+r\end{bmatrix}_r^N\frac{(-t)^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)^n\, N^k k!}{(n+Nk)!}\begin{bmatrix} n+Nk+r\\ k+r\end{bmatrix}_r^N\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

$\square$

Corollaire 83. *En particulier, pour $\alpha = 1$, l'expression des polynômes hypergéométriques de Cauchy au point entier $x = r$, est donnée par*

$$c_{N,n}(r) = c_{N,n}^{(1)}(r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{N} \frac{(-1)^n n!}{(n+Nj)!} \begin{bmatrix} n+Nj+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{N+1}.$$

Et pour $\alpha = N = 1$, l'expression des polynômes de Cauchy au point entier $x = r$, est donnée par

$$c_n(r) = c_{1,n}^{(1)}(r) = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n n!}{(n+j)!} \begin{bmatrix} n+j+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{2}.$$

Rappelons que les nombres r-Stirling quasi s-associés de première espèce sont donnés en fonction des polynômes partiels r-Bell par la relation (2.2) :

$$\begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r^{s} = B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\overbrace{0,\cdots,0}^{s-1},(s-1)!,s!,\ldots;0!,1!,2!,\ldots\right),$$

Alors, l'expression de $c_{N,n}^{(\alpha)}(r)$ en fonction des polynômes partiels r-Bell est donnée par

$$\begin{aligned} c_{N,n}^{(\alpha)}(r) &= (-1)^n N^{-\alpha} \\ &\times \sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{(n+Nj)!} B_{n+Nj+r,j+r}^{(r)}\left(\overbrace{0,\cdots,0}^{N},(N)!,(N+1)!,\ldots;0!,1!,\ldots\right)(-\alpha)^{\underline{j}}. \end{aligned}$$

3.2 Expression explicite par la formule de Melzak

Théorème 84. *Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, $N \geqslant 1$ et $r \in \mathbb{N}$, on a*

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = N^{-\alpha}\alpha\binom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{n+j}\binom{p}{j}\frac{j!}{(\alpha+j)(n+Nj)!}\begin{bmatrix} n+Nj+r \\ j+r \end{bmatrix}_r^{N}.$$

Démonstration. Pour tout polynôme f de degré $\leqslant p$, la formule de Melzak [47], est donnée par

$$f(x+\alpha) = \alpha\binom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{f(x-j)}{\alpha+j}, \tag{3.3}$$

Le théorème (82) montre que $N^{\alpha}c_{N,n}^{(\alpha)}(r)$ est un polynôme en α de degrès $\leqslant n$, Ainsi, en appliquant la formule précédente pour le polynôme

$$f(x) = N^{x}c_{N,n}^{(x)}(r),$$

on obtient

$$N^{\alpha}c_{N,n}^{(\alpha)}(r) = \alpha\binom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^{n+j}\binom{p}{j}\frac{N^{-j}c_{N,n}^{(-j)}(r)}{(\alpha+j)}.$$

La preuve est achevée, en remplaçant $c_{N,n}^{(-j)}(r)$, par la deuxième expression du théorème (82). $\square$

Si on prend $p = n$, le théorème (84) donne

$$c_{N,n}^{(\alpha)}(r) \quad = \quad N^{-\alpha}\alpha\binom{\alpha+n}{n}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\frac{j!}{(\alpha+j)(n+Nj)!}\begin{bmatrix}n+Nj+r\\j+r\end{bmatrix}_r^N.$$

Ce qui donne l'expression des polynômes hypergéométriques de Cauchy en entiers positifs

$$c_{N,n}(r) = c_{N,n}^{(1)}(r) = \frac{n+1}{N}\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\frac{j!}{(j+1)(n+Nj)!}\begin{bmatrix}n+Nj+r\\j+r\end{bmatrix}_r^N.$$

Et l'expression des polynômes de Cauchy en entiers positifs est

$$c_n(r) = c_{1,n}^{(1)}(r) = (n+1)\sum_{j=0}^{n}(-1)^{n+j}\binom{n}{j}\frac{j!}{(j+1)(n+j)!}\begin{bmatrix}n+j+r\\j+r\end{bmatrix}_r.$$

CHAPITRE 4

Relations entre une paire de polynômes de type Appell généralisés

1 Introduction

Rappelons que les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur, de première et de seconde espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ et $b_n^{(\alpha)}(x)$, sont définis, respectivement par :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt},\\ \sum_{n\geqslant 0} b_n^{(\alpha)}(x)\, t^n &= \left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha}(1+t)^x.\end{aligned}$$

Ces polynômes ont été étudiés par Carlitz en 1979, voir [17, Eqs. (2.11), (2.12)], où il a prouvé l'identité connue

$$B_n^{(n+1-\alpha)}(x) = n!\, b_n^{(\alpha)}(x-1). \tag{4.1}$$

Dans ce chapitre, motivé par le travail de Tempesta [78] et Wang [82] sur les polynômes de Bernoulli généralisés d'ordre supérieur, nous définissons une suite de polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)$, dépendant seulement du choix de deux fonctions A et H, analytiques dans un voisinage de zéro, par la fonction génératrice :

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} H(t) = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)\frac{t^n}{n!}.$$

Ces polynômes représentent une généralisation des polynômes de Bernoulli d'ordre superieur des deux espèces ainsi que les polynômes de Bernoulli dégénérés définis par L. Carlitz [17].
Nous démontrons l'identité

$$P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}, H\circ\overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(1-x \mid A, A'H),$$

avec $\left(A\circ\overline{A}\right)(t) = \left(\overline{A}\circ A\right)(t) = t$.
Cette identité généralise l'identité précédente de Carlitz [17]. Nous donnons aussi quelques propriétés et relations récurrentes de ces polynômes, ainsi que l'expression des dérivées successives d'une fonction. L'outil utilisé est le théorème d'inversion de Lagrange.

2 Théorème d'inversion de Lagrange

En mathématique, le théorème d'inversion de Lagrange démontré par Joseph-Louis Lagrange [44], fournit le développement en série de certaines fonctions définies implicitement. Ce théorème a connu plusieurs applications, nous citons par exemple celle de Abbas et Bouroubi [1], où de nouvelles identités sur les polynômes de Bell sont démentrées. Dans cette section, nous présentons le théorème d'inversion de Lagrange avec quelques exemples d'applications.

Soit la série formelle, sans terme constant

$$\phi(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n \frac{t^n}{n!}, \ \phi_1 \neq 0,$$

et son inverse de composition

$$\begin{aligned} \overline{\phi}(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\phi}_n \frac{u^n}{n!}, \\ \overline{\phi}(\phi(t)) &= \phi\left(\overline{\phi}(t)\right) = t, \end{aligned}$$

vérifiant

$$\left[\frac{d}{du}\overline{\phi}(u)\right]_{u=\phi(t)} . \left[\frac{d}{dt}\phi(t)\right]_{t=0} = 1.$$

Avec les notations précédentes, le théorème suivant donne la *version simple* du théorème d'inversion de Lagrange, appelée Formule d'inversion de Lagrange.

Théorème 85. *[21] Soient $\phi(t)$ une série formelle verifiant $\phi(0) = 0$ et $\phi_1 \neq 0$, et $\overline{\phi}(u)$ son inverse de composition. Alors, pour $k = 1, 2, \ldots, n$ et $n = 1, 2, \ldots$, on a :*

$$\left[\frac{d^n}{du^n}\left(\overline{\phi}(u)\right)^k\right]_{u=0} = k(n-1)^{\underline{k-1}} \left[\frac{d^{n-k}}{dt^{n-k}}\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)^{-n}\right]_{t=0}. \tag{4.2}$$

Avec les mêmes conditions du théorème précédent et en utilisant les polynômes partiels exponentiels de Bell et les polynômes potentiels, est démontré le corollaire suivant qui donne les coefficients de la série inverse $\overline{\phi}(u)$

Corollaire 86. *[21, p. 437] Soient $\phi(t)$ une série formelle verifiant $\phi(0) = 0$ et $\phi_1 \neq 0$, et $\phi^{-1}(u)$ son inverse de composition. Alors, le coefficient d'ordre $n, n = 1, 2, \ldots$, de la série $\overline{\phi}(u)$ est donné par*

$$\overline{\phi}_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n)^{\underline{k}}}{\phi_1^n} B_{n-1,k}\left(\frac{\phi_2}{2\phi_1}, \frac{\phi_3}{3\phi_1}, \ldots, \frac{\phi_n}{n\phi_1}\right). \tag{4.3}$$

Le théorème qui suit donne deux formes basiques du théorème d'inversion de Lagrange dite (version générale), voir [21, p. 439], pour plus de détails sur la preuve.

Théorème 87. *[21] Soient $f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \frac{t^k}{k!}$ et $u = \phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}, a_0 \neq 0$. Alors*

$$f(t) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(g^n(t)\frac{df(t)}{dt}\right)\right]_{t=0} \frac{u^n}{n!}, \tag{4.4}$$

et

$$f(t)\left(1 - u\frac{dg(t)}{dt}\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{d^n}{dt^n}\left(g^n(t) f(t)\right)\right]_{t=0} \frac{u^n}{n!}, \tag{4.5}$$

avec $u = \dfrac{t}{g(t)}$.

2.1 Quelques applications

1. Pour $\phi(t) = te^{-t}$: d'après (4.2), pour $k = 1$, On a

$$\left[\frac{d^n}{du^n}\overline{\phi}(u)\right]_{u=0} = \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(\frac{\phi(t)}{t}\right)^{-n}\right]_{t=0} = \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}e^{nt}\right]_{t=0} = n^{n-1},$$

d'où, la serie inverse de $\phi(t) = te^{-t}$ est la série formelle

$$\overline{\phi}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{n-1}\frac{u^n}{n!}.$$

2. **Formule d'Abel :** Soient $g(t) = e^{zt}$ et $f(t) = e^{xt}$. On a

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(g^n(t)\frac{df(t)}{dt}\right)\right]_{t=0} &= \left[\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}\left(xe^{(x+nz)t}\right)\right]_{t=0} \\ &= x(x+nz)^{n-1}.\end{aligned}$$

– D'après la formule (4.4), on déduit

$$\begin{aligned}e^{xt} &= \sum_{n=0}^{\infty} x(x+nz)^{n-1}\frac{u^n}{n!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(x+nz)^{n-1}}{n!}u^n,\ u = te^{-zt},\end{aligned}$$

d'où, la formule

$$e^{xt} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x(x+nz)^{n-1}}{n!}u^n = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x,z)\,u^n, \tag{4.6}$$

où $A_n(x,z) = \dfrac{x(x+nz)^{n-1}}{n!}$, $n \geqslant 0$, représentent les polynômes d'Abel.

– On a aussi

$$\begin{aligned}\left[\frac{d^n}{dt^n}\left(g^n(t)f(t)\right)\right]_{t=0} &= \left[\frac{d^n}{dt^n}\left(e^{(x+nz)t}\right)\right]_{t=0} \\ &= \left[(x+nz)^n e^{(x+nz)t}\right]_{t=0} \\ &= (x+nz)^n,\end{aligned}$$

d'après la formule (4.5), on déduit

$$\frac{e^{xt}}{1-zt} = \sum_{n=0}^{\infty}(x+nz)^n\frac{u^n}{n!},\ u = te^{-zt}. \tag{4.7}$$

3 Relations entre une paire de polynômes de type Appell généralisés

Dans la définition suivante, nous essayons de donner une forme générale englobant les polynômes d'Appell

Définition 88. Soient A et H deux fonctions analytiques dans un voisinage de zéro, avec $A(0) = 0$. Les nombres $P_n^{(\alpha)}(A, H)$ sont définis par la fonction génératrice :

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} H(t) = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(A, H)\frac{t^n}{n!}. \tag{4.8}$$

Remarquons que :

- Pour $A(t) = \exp(t) - 1,\ H(t) = \exp(xt)$, $P_n^{(\alpha)}(A, H) = B_n^{(\alpha)}(x)$: les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de première espèce.
- Pour $A(t) = \ln(1+t)$, $H(t) = (1+t)^x$, $P_n^{(\alpha)}(A, H) = b_n^{(\alpha)}(x)$: les polynômes de Bernoulli d'ordre supérieur de seconde espèce.
- pour $A(t) = \frac{(1+\lambda t)^{\beta/\lambda}-1}{\beta}$, $H(t) = (1+\beta t)^{(\lambda/\beta-1)x}$: $P_n^{(\alpha)}(A, H) = \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; \beta, \lambda)$: les polynômes dégénérés de Bernoulli, vérifiant

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\lambda\to 0}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; 1, \lambda) \\ b_n^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\beta\to 0}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x; \beta, 1) \end{aligned}$$

L'identité pricipale de ce chapitre est donnée par le théorème suivant :

Théorème 89. *Soient A et H, deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$ et $A'(0) > 0$. Alors*

$$P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, H\circ\overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(A, A'H),$$

où $\left(A\circ\overline{A}\right)(t) = \left(\overline{A}\circ A\right)(t) = t$ et $(A'H)(z) = H(z)D_zA(z)$ avec $D_z = \frac{d}{dz}$.

Démonstration. Puisque $\left(A\circ\overline{A}\right)(t) = t$, alors l'équation $t = A(z)$ donne $z = \overline{A}(t)$.
Donc l'équation $z = t\left(\frac{z}{A(z)}\right)$ admet la solution unique $z = \overline{A}(t)$.
En utilisant la formule d'inversion de Lagrange (4.4), pour toute fonction F analytique au voisinage de $z = 0$, on obtient

$$F(z) = F(0) + \sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}D_{z=0}^{n-1}\left(F'(z)\left(\frac{z}{A(z)}\right)^n\right).$$

Donc, pour le choix de $F(z) = \left(\frac{z}{A(z)}\right)^{\alpha} H(z)$ et puisque $fDg = D(fg) - gDf$, on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& F'(z)\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n} \\
= \;& D_z\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha}H(z)\right)-n\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha-1}\left(\frac{1}{A(z)}-z\frac{A'(z)}{(A(z))^2}\right)H(z) \\
= \;& D_z\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha}H(z)\right) \\
& -\frac{n}{z}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha}H(z)-\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha+1}A'(z)H(z)\right) \\
= \;& D_z\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha}H(z)\right)-n\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{P_{j+1}^{(n-\alpha)}(A,H)-P_{j+1}^{(n-\alpha+1)}(A,A'H)}{j+1}\right)\frac{z^j}{j!},
\end{aligned}$$

ainsi, en utilisant (4.8), le nombre $D_{z=0}^{n-1}\left[F'(z)\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n}\right]$ peut être écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
& D_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n}F'(z)\right) \\
= \;& D_{z=0}^{n}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n-\alpha}H(z)\right) \\
& -nD_{z=0}^{n-1}\sum_{j\geqslant 0}\left(\frac{P_{j+1}^{(n-\alpha)}(A,H)-P_{j+1}^{(n-\alpha+1)}(A,A'H)}{j+1}\right)\frac{z^j}{j!} \\
= \;& P_n^{(n-\alpha)}(A,H)-n\left(\frac{P_n^{(n-\alpha)}(A,H)-P_n^{(n-\alpha+1)}(A,A'H)}{n}\right) \\
= \;& P_n^{(n-\alpha+1)}(A,A'H).
\end{aligned}$$

Alors

$$\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{-\alpha}H(z)=\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(n-\alpha+1)}(A,A'H)\frac{t^n}{n!}. \tag{4.9}$$

D'autre part, puisque $z=\overline{A}(t)\Longrightarrow F(z)=F\left(\overline{A}(t)\right)$, on obtient aussi

$$\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{-\alpha}H(z)=\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}H\left(\overline{A}(t)\right)=\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A},H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!}. \tag{4.10}$$

D'où l'identité découle de (4.9) et (4.10). □

Pour présenter quelques applications du théorème (89), on donne la définition suivante :

Définition 90. Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0)=0$, $A'(0)>0$ et soient α, x réels. Une suite de polynômes $\left(P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)\right)$ est dite de type Appell si

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha}(A'(t))^{x} H(t)=\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)\frac{t^n}{n!}.$$

Quand on remplace $H(t)$ par $(A'(t))^x H(t)$ dans le théorème (89), on obtient le résultat suivant :

Corollaire 91. *Soient α et x deux nombres réels. Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro telles que $A'(0)>0$. Alors,*

$$P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}, H\circ\overline{A}\right)=P_n^{(n+1-\alpha)}(1-x \mid A, H), \quad n\geqslant 1.$$

avec $A\circ\overline{A}(t)=\overline{A}\circ A(t)=t$.

Démonstration. D'après le théorème (89), on a/

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(n-\alpha+1)}(A, A'H)\frac{t^n}{n!}\\
\Rightarrow &\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}\left(H\circ\overline{A}\right)(t)=\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} A'(t)H(t)\\
\Rightarrow &\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}\left(A'\left(\overline{A}(t)\right)\right)^{x}\left(H\circ\overline{A}\right)(t)=\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} A'(t)(A'(t))^{x} H(t).
\end{aligned}$$

En remplaçant $H(t)$ par $(A'(t))^x H(t)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}\left(A'\left(\overline{A}(t)\right)\right)^{x}\left(H\circ\overline{A}\right)(t) &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} A'(t)(A'(t))^{x} H(t)\\
&= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} (A'(t))^{1+x} H(t).
\end{aligned}$$

Or on a

$$\begin{aligned}
A\left(\overline{A}(t)\right)=t &\Rightarrow A'\left(\overline{A}(t)\right)\overline{A}'(t)=1\\
&\Rightarrow A'\left(\overline{A}(t)\right)=\left(\overline{A}'(t)\right)^{-1}\\
&\Rightarrow \left(A'\left(\overline{A}(t)\right)\right)^{x}=\left(\overline{A}'(t)\right)^{-x}
\end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}\left(\overline{A}'(t)\right)^{-x}\left(H\circ\overline{A}\right)(t) &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} (A'(t))^{1+x} H(t)\\
\text{et } \left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha}\left(\overline{A}'(t)\right)^{x}\left(H\circ\overline{A}\right)(t) &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} (A'(t))^{1-x} H(t)
\end{aligned}$$

et d'après la définition (90), on déduit

$$\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}, H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(n+1-\alpha)}\left(1-x \mid A, H\right)\frac{t^n}{n!},$$

ce qui achève la preuve. □

En particulier, pour $H(t)=1$ dans le corollaire (91), les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$ définis par

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha}\left(A'(t)\right)^{x} = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A)\frac{t^n}{n!}, \tag{4.11}$$

satisfont

$$P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(1-x \mid A). \tag{4.12}$$

Et pour $H(t)=\left(\frac{t}{B(t)}\right)^{\beta}\left(B'(t)\right)^{y}$ dans le corollaire (91) , avec β, y deux nombres réels et $B(0)=0$, $B'(t)>0$, les polynômes $P_n^{(\alpha,\beta)}(x,y \mid A,B)$ définis par :

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha}\left(A'(t)\right)^{x}\left(\frac{t}{B(t)}\right)^{\beta}\left(B'(t)\right)^{y} = \sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha,\beta)}(x,y \mid A,B)\frac{t^n}{n!},$$

satisfont

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x,y \mid A,B) = P_n^{(n+1-\beta,-\alpha)}(1-y,-x \mid A,B) = P_n^{(-\beta,n+1-\alpha)}(-y,1-x \mid A,B).$$

Théorème 92. *Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0)=0$, $A'(t)>0$. Alors, les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A,H)$ vérifient*

$$\begin{aligned} &\alpha P_n^{(\alpha+1)}(x+1 \mid A,H) + (n-\alpha) P_n^{(\alpha)}(x \mid A,H) \\ = \ & nD_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{\alpha} D_z\left(\left(A'(z)\right)^{x} H(z)\right)\right),\ n\geqslant 1. \end{aligned} \tag{4.13}$$

Démonstration. L'équation $z = t\left(\frac{z}{A(z)}\right)$ admet la solution unique $z=\overline{A}(t)$ avec $A\circ\overline{A}(t) = \overline{A}\circ A(t) = t$. En utilisant la formule d'inversion de Lagrange, pour toute fonction F analytique au voisinage de $z=0$, on obtient

$$F(z) = F(0) + \sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}D_{z=0}^{n-1}\left(F'(z)\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n}\right).$$

Ainsi, pour le choix $F(z)=\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{\alpha}\left(A'(z)\right)^{x}H(z)$, on peut vérifier d'une part

$$\begin{aligned}
&(n+\alpha)\,D_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n}F'(z)\right)\\
=\;& nD_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n+\alpha}D_z\left((A'(z))^{x}H(z)\right)\right)\\
&+\alpha D_{z=0}^{n}\left[\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n+\alpha}(A'(z))^{x}H(z)\right]\\
=\;& \alpha P_n^{(n+\alpha)}(x\mid A,H)+nD_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n+\alpha}D_z\left((A'(z))^{x}H(z)\right)\right).
\end{aligned}$$

Et d'autre part, l'égalité $\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{-\alpha}\left(\left(\overline{A}\right)'(t)\right)^{-x}H\left(\overline{A}(t)\right)=F(z)$ est équivalente à

$$\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(-\alpha)}\left(-x\mid\overline{A},H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!}=1+\sum_{n\geqslant 1}\frac{t^n}{n!}D_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n}F'(z)\right),$$

i.e.

$$\begin{aligned}
&nD_{z=0}^{n-1}\left(\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{n+\alpha}D_z\left((A'(z))^{x}H(t)\right)\right)+\alpha P_n^{(n+\alpha)}(x\mid A,H)\\
=\;&(n+\alpha)\,P_n^{(-\alpha)}\left(-x\mid\overline{A},H\circ\overline{A}\right),\quad n\geqslant 1.
\end{aligned}\tag{4.14}$$

La preuve sera complète en utilisant le corollaire (91), après avoir remplacer α par $\alpha-n$. □

4 Applications à quelques paires de polynômes

Dans cette section, nous appliquons les résultats précédents, relatifs à une fonction analytique $A(t)$ et sa fonction inverse $\overline{A}(t)$, à quelques paires de polynômes particuliers.

4.1 Application 1 :

$A(t)=t+\frac{t^2}{2}$ et $\overline{A}(t)=\sqrt{1+2t}-1$:

– D'après (4.11), on obtient la paire de polynômes :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(\alpha)}(x\mid A)\frac{t^n}{n!}&=\left(1+\frac{t}{2}\right)^{-\alpha}(1+t)^{x},\\
\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(\alpha)}\left(x\mid\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!}&=\left(\frac{t}{\sqrt{1+2t}-1}\right)^{\alpha}(1+2t)^{-\frac{x}{2}}.
\end{aligned}$$

pour lesquels, on peut vérifier que

$$P_n^{(\alpha)}(x \mid A) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{-\alpha}{k}\binom{x}{n-k}2^{-k}.$$

– En utilisant (4.12), on peut montrer que

$$P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(1-x \mid A) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-\alpha}{k}\binom{1-x}{n-k}2^{-k}$$

– Le théorème (92), montre que

$$\begin{aligned}
\alpha P_n^{(\alpha+1)}(x+1 \mid A) + (n-\alpha)P_n^{(\alpha)}(x \mid A) &= nxP_{n-1}^{(\alpha)}(x-1 \mid A),\ n \geqslant 1,\\
\alpha P_n^{(\alpha+1)}\left(x+1 \mid \overline{A}\right) + (n-\alpha)P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right) &= -nxP_{n-1}^{(\alpha)}\left(x+2 \mid \overline{A}\right),\ n \geqslant 1.
\end{aligned}$$

4.2 Application 2 :

$A(t) = \frac{t}{1+t^2}$ et $\overline{A}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t}$:

– D'après (4.11), on obtient les polynômes :

$$\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(\alpha+2x)}(x \mid A)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha+2x}(A'(t))^x = \left(1+t^2\right)^{\alpha}\left(1-t^2\right)^x,$$

pour lesquels, on peut vérifier que :

$$\begin{aligned}
P_{2n}^{(\alpha+2x)}(x \mid A) &= \frac{(2n)!}{n!}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\alpha)_k(x)_{n-k},\\
P_{2n+1}^{(\alpha+2x)}(x \mid A) &= 0.
\end{aligned}$$

– En utilisant (4.12), on peut montrer que :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0}P_n^{(\alpha-2x)}\left(-2x \mid \overline{A}\right)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha-2x}\left(\left(\overline{A}\right)'(t)\right)^{-2x}\\
&= \left(\frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t^2}\right)^{\alpha}\left(1-4t^2\right)^x,
\end{aligned}$$

avec

$$P_n^{(\alpha-2x)}\left(-2x \mid \overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha-2x)}(1+2x \mid A).$$

4.3 Application 3 :

$A(t) = \exp(t) - 1$ et $\overline{A}(t) = \ln(1+t)$:
D'après (4.11), on obtient les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de première et de deuxième espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ et $b_n^{(\alpha)}(-x)$:

$$\begin{aligned}\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{xt} &= \sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!},\\ \left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha}(1+t)^{-x} &= \sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} b_n^{(\alpha)}(-x)\, t^n.\end{aligned}$$

– En utilisant (4.12), on retrouve l'identité de Carlitz [17, Eqs. (2.11), (2.12)] :

$$\begin{aligned} n! b_n^{(\alpha)}(x) &= B_n^{(n+1-\alpha)}(x+1),\\ B_n^{(\alpha)}(x) &= n! b_n^{(n+1-\alpha)}(x-1).\end{aligned}$$

– En appliquant le théorème (92), on peut montrer que :

$$nxB_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha - n) B_n^{(\alpha)}(x) = \alpha n! b_n^{(n-\alpha)}(x+1), \ n \geqslant 1, \quad (4.15)$$
$$n! x b_{n-1}^{(\alpha)}(x) + (\alpha - n) n! b_n^{(\alpha)}(x+1) = \alpha B_n^{(n-a)}(x+1), \ n \geqslant 1. \quad (4.16)$$

– En combinant les deux identités (4.15) et (4.16) avec l'identité célèbre (voir [75, p. 95]), on obtient :

$$B_n^{(\alpha)}(x+1) = B_n^{(\alpha)}(x) + nB_{n-1}^{(\alpha-1)}(x), \quad (4.17)$$
$$b_n^{(\alpha)}(x+1) = b_n^{(\alpha)}(x) + b_{n-1}^{(\alpha)}(x). \quad (4.18)$$

Pour $\alpha \neq 1$ et $n \geqslant 1$:

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \left(1 - \frac{n}{\alpha-1}\right) B_n^{(\alpha-1)}(x) + n\left(\frac{x}{\alpha-1} - 1\right) B_{n-1}^{(\alpha-1)}(x), \quad (4.19)$$
$$b_n^{(\alpha)}(x) = \left(1 - \frac{n}{\alpha-1}\right) b_n^{(\alpha-1)}(x) + \left(\frac{x-n}{\alpha-1} + 1\right) b_{n-1}^{(\alpha-1)}(x). \quad (4.20)$$

On note que l'identité (4.19) est exactement l'identité (4.2.7) donnée dans [75, p. 96].

4.4 Application 4 :

$A(t) = \frac{(1+\lambda t)^{\beta/\lambda}-1}{\beta} = \sum_{n\geqslant 1} (\beta \mid \lambda)_n \frac{t^n}{n!}$ et $\overline{A}(t) = \frac{(1+\beta t)^{\lambda/\beta}-1}{\lambda}$,
où, $(\beta \mid \lambda)_n = \beta(\beta-\lambda)\cdots(\beta - \lambda(n-1))$, $n \geqslant 1$, et $(\beta \mid \lambda)_0 = 1$.

D'après (4.11) et (4.12), on obtient les polynômes dégénérés de Bernoulli :

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha)}(x \mid A) &= \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda), \\ \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda) &= \mathcal{B}_n^{(n+1-\alpha)}(1-x;\lambda,\beta), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\lambda\to 0}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;1,\lambda), \\ b_n^{(\alpha)}(x) &= \lim_{\beta\to 0}\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,1). \end{aligned}$$

En appliquant le théorème (92), on obtient :

$$\alpha\mathcal{B}_n^{(\alpha+1)}(x+1;\lambda,\beta)+(n-\alpha)\,\mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\lambda,\beta) = \tag{4.21}$$

$$= nx(\beta-\lambda)\,\mathcal{B}_{n-1}^{(\alpha)}\left(x-\frac{\lambda}{\beta-\lambda};\lambda,\beta\right),\ n\geqslant 1. \tag{4.22}$$

4.5 Application 5 :

$A(t)=\frac{t}{1-t}$ et $\overline{A}(t)=\frac{t}{1+t}$:

D'après (4.11) et (4.12), on obtient la paire de polynômes $\left(G_n^{(\alpha)}(x), g_n^{(\alpha)}(x)\right)$ définis par :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} G_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} &= (1-t)^{\alpha}(1-t)^{-2x}, \\ \sum_{n\geqslant 0} g_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} &= (1+t)^{\alpha}(1+t)^{-2x}. \end{aligned}$$

Le corollaire (91) donne :

$$G_n^{(\alpha)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha+2x}{k}, \tag{4.23}$$

$$g_n^{(\alpha)}(x) = n!\sum_{k=0}^{n}\binom{\alpha-2x}{k}. \tag{4.24}$$

5 Connexion aux dérivées successives d'une fonction

Dans cette section, nous montrons quelques connexions du théorème (89), au dérivées successives d'une fonction.

Proposition 93. *Soient B et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $B(t) > 0$ et soient α, x deux nombres réels. On a*

$$D_{t=0}^{n}\left((B(t))^{\alpha} H(xtB(t))\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left((B(t))^{k+\alpha}\right) D_{t=0}^{k}(H(t))\, x^{k}.$$

Démonstration. Soient $V(t) = tB(t)$ et U la fonction inverse de V. En utilisant le théorème (89), on peut écrire :

$$\begin{aligned}
& D_{t=0}^{n}\left((B(t))^{\alpha} H(xtB(t))\right) \\
= \; & D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{V(t)}\right)^{-\alpha} H(xV(t))\right) \\
= \; & D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{U(t)}\right)^{n+1+\alpha} U'(t)\, H(xt)\right) \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left(\left(\frac{t}{U(t)}\right)^{n+1+\alpha} U'(t)\right) D_{t=0}^{k}(H(xt)) \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left(\left(\frac{t}{U(t)}\right)^{(n-k)+1+(\alpha+k)} U'(t)\right) D_{t=0}^{k}(H(t))\, x^{k} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left(\left(\frac{t}{V(t)}\right)^{-\alpha-k}\right) D_{t=0}^{k}(H(t))\, x^{k} \\
= \; & \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left((B(t))^{k+\alpha}\right) D_{t=0}^{k}(H(t))\, x^{k},
\end{aligned}$$

ce qui achève la preuve. □

Pour différents choix de H et de B dans la proposition (93), on obtient :

Corollaire 94. *Soient B et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $B(t) > 0$, On a*

$$\begin{aligned}
D_{t=0}^{n}\left((B(t))^{\alpha}\exp(xtB(t))\right) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left((B(t))^{k+\alpha}\right) x^{k}, \\
D_{t=0}^{n}\left((B(t))^{\alpha}(1+xtB(t))\right)^{\lambda} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} D_{t=0}^{n-k}\left((B(t))^{k+\alpha}\right) (\lambda)_{k}\, x^{k}, \\
D_{t=0}^{n}\left(\frac{(B(t))^{\alpha}}{1-xtB(t)}\right) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{(n-k)!} D_{t=0}^{n-k}\left((B(t))^{k+\alpha}\right) x^{k}.
\end{aligned}$$

5.1 Applications :

Dans cette section, en appliquant les résultats précédents pour donner les dérivées successives de quelques fonctions connues.

Application 1 :

– Pour : $B(t) = \exp(t)$ et $H(t) = \exp(t)$:

Le corollaire 94 donne

$$D_{t=0}^{n}\left(\exp(\alpha t)\exp(xt\exp(t))\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+\alpha)^{n-k}x^{k}$$

– Pour : $B(t) = \exp(t)$ et $H(t) = \cos(t)$:

$$D_{t=0}^{n}\left(\exp(\alpha t)\cos(xt\exp(t))\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+\alpha)^{n-k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)x^{k},$$

– Pour : $B(t) = \exp(t)$ et $H(t) = \sin(t)$:

$$D_{t=0}^{n}\left(\exp(\alpha t)\sin(xt\exp(t))\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+\alpha)^{n-k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)x^{k}.$$

Application 2 :

– Pour : $B(t) = (1+t)^{\lambda}$ et $H(t) = \exp(t)$:
Le corollaire (94) donne

$$D_{t=0}^{n}\left((1+t)^{\lambda\alpha}\exp\left(xt(1+t)^{\lambda}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((k+\alpha)\lambda\right)_{n-k}x^{k},$$

– Pour : $B(t) = (1+t)^{\lambda}$ et $H(t) = \cos(t)$:

$$D_{t=0}^{n}\left((1+t)^{\lambda\alpha}\cos\left(xt(1+t)^{\lambda}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((k+\alpha)\lambda\right)_{n-k}\cos\left(k\frac{\pi}{2}\right)x^{k},$$

– Pour : $B(t) = (1+t)^{\lambda}$ et $H(t) = \sin(t)$:

$$D_{t=0}^{n}\left((1+t)^{\lambda\alpha}\sin\left(xt(1+t)^{\lambda}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left((k+\alpha)\lambda\right)_{n-k}\sin\left(k\frac{\pi}{2}\right)x^{k}.$$

– Pour : $B(t) = \exp(t)$ et $H(t) = (1+t)^{\lambda}$:

$$D_{t=0}^{n}\left(\exp(\alpha t)(1+xt\exp(t))\right)^{\lambda} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k+\alpha)^{n-k}(\lambda)_{k}x^{k}.$$

CHAPITRE 5

Polynômes de type Appell et polynômes partiels r-Bell

1 Introduction

Rappelons que les polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)$ sont définis par

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha}(A'(0))^{x} H(t) = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A, H)\frac{t^n}{n!}, \tag{5.1}$$

où A est une fonction analytique au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$, $A'(t) > 0$ et α, x réels. Remarquons que pour $H(t) = 1$ et $A(t) = e^t - 1$ ou $H(t) = 1$ et $A(t) = \ln(1+t)$, on obtient les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de première et de seconde espèce, respectivement.
En 2009, Cenkci [20], a donné une expression explicite pour les polynômes potentiels avec ses applications.
En 2014, Mihoubi et Tiachachat [63], ont donné les expressions explicites pour les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur, aux points entiers :

$$B_n^{(k)}(s-r) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j \binom{j+k}{k}^{-1} \begin{bmatrix} j+k+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} n+s \\ j+s \end{Bmatrix}_s, \tag{5.2}$$

et

$$b_n^{(k)}(s-r) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j} \binom{j+k}{k}^{-1} \begin{Bmatrix} j+k+r \\ k+r \end{Bmatrix}_s \begin{bmatrix} n+s \\ j+s \end{bmatrix}_r. \tag{5.3}$$

Dans ce chapitre, en nous basant sur les résultats du chapitre précédent, nous donnons quelques relations récurrentes pour les polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$, en utilisant les polynômes partiels de Bell, ainsi que des formules explicites en fonction des polynômes partiels r-Bell. Comme cas particuliers, nous retrouvons les identités (5.2) et (5.3).

Dans ce qui suit, on va utiliser les suites $(a_n,\ n \geqslant 1)$ et $(\overline{a}_n,\ n \geqslant 1)$, données par les fonctions génératrices

$$\sum_{n\geqslant 1} a_n \frac{t^n}{n!} = A(t), \quad \sum_{n\geqslant 1} \overline{a}_n \frac{t^n}{n!} = \overline{A}(t), \quad a_1\overline{a}_1 = 1,$$

vérifiants $\left(A \circ \overline{A}\right)(t) = \left(\overline{A} \circ A\right)(t) = t$.

2 Connexion avec les polynômes partiels de Bell

La relation entre les polynômes $P_n^{(\alpha)}(A, H)$ définis par (4.8) et les polynômes partiels de Bell est donnée par la proposition suivante :

Proposition 95. *Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0)=0$, $A'(0)>0$ et α réel. La suite $\left(P_k^{(\alpha)}(A,H)\right)_{n\geqslant 0}$ vérifie les relations :*

$$\begin{aligned}
P_n^{(n+1+\alpha)}(A,A'H) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{n-k+1})\,P_k^{(\alpha)}(A,H),\\
P_n^{(\alpha)}(A,A'H) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_{n-k+1} P_k^{(\alpha)}(A,H).
\end{aligned}$$

Démonstration. Avec les notations précédentes, et de l'équation (4.8) et (4.10), on a

$$\left(\frac{z}{A(z)}\right)^{\alpha} H(z)=\sum_{k\geqslant 0} P_k^{(\alpha)}(A,H)\frac{z^k}{k!}=\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(-\alpha)}\left(\overline{A},H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!} \quad \text{avec} \quad z=\overline{A}(t).$$

Alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(-\alpha)}\left(\overline{A},H\circ\overline{A}\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{k\geqslant 0} P_k^{(\alpha)}(A,H)\frac{\left(\overline{A}(t)\right)^k}{k!}\\
&= \sum_{k\geqslant 0} P_k^{(\alpha)}(A,H)\frac{1}{k!}\left(\sum_{m\geqslant 1}\overline{a}_m\frac{t^m}{m!}\right)^k\\
&= \sum_{k\geqslant 0} P_k^{(\alpha)}(A,H)\sum_{k=n}^{\infty} B_{n,k}(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{n-k+1})\frac{t^n}{n!}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{n-k+1})\,P_k^{(\alpha)}(A,H),
\end{aligned}$$

ce qui implique $P_n^{(-\alpha)}\left(\overline{A},H\circ\overline{A}\right)=\sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1,\ldots,\overline{a}_{n-k+1})\,P_k^{(\alpha)}(A,H)$. D'où, la première relation découle en utilisant le théorème (89).
En utilisant la définition de $P_n^{(\alpha)}(A,H)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(A,A'H)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} H(t)\,A'(t),\\
&= \left(\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(A,H)\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} a_{n+1}\frac{t^n}{n!}\right)\\
&= \sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} a_{n-k+1} P_k^{(\alpha)}(A,H)\frac{t^n}{n!}\right)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Et la deuxième découle en identifiant les coéfficients de $\frac{t^n}{n!}$. □

En particulier, pour $H(t) = 1$ et $A'(t) > 0$ dans (5.1), on obtient les polynômes $\left(P_n^{(\alpha)}(x \mid A)\right)$ tels que

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} (A'(t))^{x} = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A) \frac{t^n}{n!}, \tag{5.4}$$

avec les mêmes conditions de la proposition (95), le corollaire suivant donne des relations récurrentes vérifiées par les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$, en utilisant les polynômes exponentiels partiels de Bell :

Corollaire 96. *Soient A une fonction analytique au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$, $A'(0) > 0$. Soient α, x réels. La suite de polynômes $\left(P_n^{(\alpha)}(x \mid A)\right)_{n\geqslant 0}$ satisfait les relations récurrentes :*

$$\begin{aligned} P_n^{(n+1+\alpha)}(x+1 \mid A) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}(\overline{a}_1, \ldots, \overline{a}_{n-k+1}) P_k^{(\alpha)}(x \mid A), \\ P_n^{(\alpha)}(x+1 \mid A) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k+1} P_k^{(\alpha)}(x \mid A), \end{aligned}$$

où $B_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-k+1})$ est le polynôme partiel de Bell.

2.1 Applications

Application 1 :

$A(t) = t + \frac{t^2}{2}$ et $\overline{A}(t) = \sqrt{1+2t} - 1$, on obtient la paire de polynômes :

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha)}(x \mid A) &= n! \sum_{k=0}^{n} \binom{-\alpha}{k} \binom{x}{n-k} 2^{-k}, \\ P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right) &= P_n^{(n+1-\alpha)}(1-x \mid A) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1-\alpha}{k} \binom{1-x}{n-k} 2^{-k}. \end{aligned}$$

Le corollaire (96), donne

$$\begin{aligned} P_n^{(n+\alpha+1)}(x \mid A) &= \frac{n!}{k!} \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n-k} \frac{1}{4^{n-k}} P_k^{(\alpha)}(x-1 \mid A), \\ P_n^{(\alpha)}\left(x \mid \overline{A}\right) &= \frac{n(n-1)(n-2)}{6} P_{n-3}^{(\alpha)}\left(x-1 \mid \overline{A}\right) + \frac{n(n-1)}{2} P_{n-2}^{(\alpha)}\left(x-1 \mid \overline{A}\right). \end{aligned}$$

Application 2 :

$A(t) = \exp(t) - 1$ et $\overline{A}(t) = \ln(1+t)$, on obtient les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de première et de deuxième espèce $B_n^{(\alpha)}(x)$ et $b_n^{(\alpha)}(-x)$.
En appliquant le corollaire (96), on obtient

$$\begin{aligned} B_n^{(n+1+\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} B_k^{(\alpha)}(x-1), \\ B_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k^{(\alpha)}(x-1). \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} b_n^{(n+1+\alpha)}(x-1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{n!} b_k^{(\alpha)}(x), \\ b_n^{(\alpha)}(x-1) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{k!} \frac{1}{(n-k)(n-k-1)} b_k^{(\alpha)}(x). \end{aligned}$$

Application 3 :

$A(t) = \frac{(1+\lambda t)^{\beta/\lambda}-1}{\beta} = \sum_{n\geqslant 1} (\beta \mid \lambda)_n \frac{t^n}{n!}$ et $\overline{A}(t) = \frac{(1+\beta t)^{\lambda/\beta}-1}{\lambda}$,
où, $(\beta \mid \lambda)_n = \beta(\beta-\lambda)\cdots(\beta-\lambda(n-1))$, $n \geqslant 1$, et $(\beta \mid \lambda)_0 = 1$. On obtient les polynômes dégénérés de Bernoulli :

$$\begin{aligned} P_n^{(\alpha)}(x \mid A) &= \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda), \\ \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x;\beta,\lambda) &= \mathcal{B}_n^{(n+1-\alpha)}(1-x;\lambda,\beta). \end{aligned}$$

En appliquant le corollaire (96), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n^{(n+1+\alpha)}(x+1;\lambda,\beta) &= \sum_{k=0}^{n} B_{n,k}\left((\beta \mid \lambda)_j\right) \mathcal{B}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\beta), \\ \mathcal{B}_n^{(\alpha)}(x+1;\lambda,\beta) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (\beta \mid \lambda)_{n-k+1} \mathcal{B}_k^{(\alpha)}(x;\lambda,\beta). \end{aligned}$$

Application 4 :

$A(t) = \frac{t}{1-t}$ et $\overline{A}(t) = \frac{t}{1+t}$. On obtient la paire de polynômes $\left(G_n^{(\alpha)}(x), g_n^{(\alpha)}(x)\right)$ définis par :

$$G_n^{(\alpha)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha + 2x}{k}, \tag{5.5}$$

$$g_n^{(\alpha)}(x) = n! \sum_{k=0}^{n} \binom{\alpha - 2x}{k}. \tag{5.6}$$

Du corollaire (96), on obtient

$$G_n^{(n+1+\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} G_k^{(\alpha)}(x), \tag{5.7}$$

$$g_n^{(\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (n-k+1)! g_k^{(\alpha)}(x). \tag{5.8}$$

3 Expressions explicites des polynômes de type Appell en fonction des polynômes partiels r-Bell

Des expressions explicites des polynômes de type Appell sont données par les propositions suivantes :

Proposition 97. *Soit A une fonction analytique au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$, $A'(0) > 0$. Soient n, s, k, r des entiers non négatifs. Les polynômes de type Appell $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$ admettent l'expression :*

$$P_n^{(k)}(s - r \mid A) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l) B_{n+s,j+s}^{(s)}(a_l). \tag{5.9}$$

Démonstration. Il est clair que

$$A(t) = \sum_{j \geqslant 1} a_j \frac{t^j}{j!} \Longrightarrow A'(t) = \sum_{j \geqslant 0} a_{j+1} \frac{t^j}{j!},$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \overline{A}(A(t)) &= t \Longrightarrow \overline{A}'(A(t)) A'(t) = 1 \\ &\Longrightarrow A'(t) = \left(\overline{A}'(A(t))\right)^{-1}, \end{aligned}$$

d'après la définition de $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(k)}(s-r \mid A)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^k (A'(t))^{s-r}, \\
&= \left(\frac{\overline{A}(A(t))}{A(t)}\right)^k \left(\overline{A}'(A(t))\right)^r (A'(t))^s \\
&= (A(t))^{-k}(A'(t))^s \left(\overline{A}(A(t))\right)^k \left(\overline{A}'(A(t))\right)^r \\
&\overset{pro(62)}{=} (A(t))^{-k}(A'(t))^s \left(\sum_{j\geqslant 1}\overline{a}_j \frac{(A(t))^j}{j!}\right)^k \left(\sum_{j\geqslant 0}\overline{a}_{j+1}\frac{(A(t))^j}{j!}\right)^r,
\end{aligned}$$

en appliquant le théorème (54), on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(k)}(s-r \mid A)\frac{t^n}{n!} &= k!\,(A(t))^{-k}(A'(t))^s \sum_{j\geqslant k} B_{j+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\frac{(A(t))^j}{j!} \\
&= k!\,(A'(t))^s \sum_{j\geqslant k} B_{j+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\frac{(A(t))^{j-k}}{j!} \\
&= \sum_{j\geqslant 0}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\frac{(A(t))^j}{j!}(A'(t))^s \\
&= \sum_{j\geqslant 0}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\sum_{n\geqslant j} B_{n+s,j+s}^{(s)}(a_l)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(\overline{a}_l)\,B_{n+s,j+s}^{(s)}(a_l),
\end{aligned}$$

et par identification des coefficients de $\frac{t^n}{n!}$, on retrouve le résultat. □

Proposition 98. *Soient n, k, r des entiers non négatifs. Pour toute fonction A, analytique au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$, $A'(0) > 0$, les polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$ admettent l'expression :*

$$P_n^{(-k)}(r \mid A) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}(a_l). \tag{5.10}$$

Démonstration. De la définition des polynômes $P_n^{(\alpha)}(x \mid A)$, on a :

$$\sum_{n\geqslant 0} P_n^{(-k)}(r \mid A)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{-k}(A'(t))^r$$

$$\begin{aligned}
&= t^{-k}\left(A\left(t\right)\right)^{k}\left(A'\left(t\right)\right)^{r} \\
&= k!t^{-k}\sum_{n\geqslant k}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)\frac{t^{n}}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant k}k!B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)\frac{t^{n-k}}{n!} \\
&= \sum_{n\geqslant 0}\binom{n+k}{k}^{-1}B_{n+k+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)\frac{t^{n}}{n!},
\end{aligned}$$

et par identification des coefficients de $\frac{t^{n}}{n!}$, la preuve s'achève.

□

Pour démontrer les resultats obtenus, on a besoin du théorème suivant :

Théorème 99. *Soient n, s, k, r des entiers non négatifs. Soient $U\left(t\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}U_{n}\frac{t^{n}}{n!}$ et $V\left(t\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}V_{n}\frac{t^{n}}{n!}$ avec $U\left(t\right)=V\left(A\left(t\right)\right)\left(A'\left(t\right)\right)^{r}$. Alors, les relations inverses suivantes sont vérifiées*

$$\begin{aligned}
U_{n} &= \sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)V_{k}, \\
V_{n} &= \sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\overline{a}_{l}\right)U_{k}.
\end{aligned}$$

i.e.

$$\sum_{k=j}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)B_{k+r,j+r}^{(r)}\left(\overline{a}_{l}\right)=\delta_{(j=n)}.$$

Démonstration. Si $U\left(t\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}U_{n}\frac{t^{n}}{n!}$ et $V\left(t\right)=\sum\limits_{n\geqslant 0}V_{n}\frac{t^{n}}{n!}$, avec $U\left(t\right)=V\left(A\left(t\right)\right)\left(A'\left(t\right)\right)^{r}$. Alors en appliquant le théorème (54), on obtient la première identité.
En remplaçant t by $\overline{A}\left(t\right)$, on obtient $V\left(t\right)=U\left(\overline{A}\left(t\right)\right)\left(\overline{A}'\left(t\right)\right)^{r}$, et en appliquant le théorème (54), on obtient la seconde identit'e. □

Théorème 100. *Soient A une fonction analytique au voisinage de zéro avec $A\left(0\right)=0$, $A'\left(0\right)>0$. Soient α, x réels et n, k, r des entiers non n'egatifs. On a :*

$$P_{n}^{(n+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right)=\sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(\overline{a}_{l}\right)P_{k}^{(\alpha)}\left(x+r\mid A\right), \tag{5.11}$$

qui est équivalent à

$$P_{n}^{(\alpha)}\left(x+r\mid A\right)=\sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)P_{k}^{(k+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right). \tag{5.12}$$

Démonstration. On démontre que les deux membres de l'identité (5.12) admettent la même fonction génératrice. En effet,

$$\begin{aligned}
&\sum_{n\geqslant 0}\left(\sum_{k=0}^{n}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)P_{k}^{(k+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right)\right)\frac{t^{n}}{n!}\\
&= \sum_{k\geqslant 0}P_{k}^{(k+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right)\left(\sum_{n\geq k}B_{n+r,k+r}^{(r)}\left(a_{l}\right)\frac{t^{n}}{n!}\right)\\
&= \sum_{k\geqslant 0}P_{k}^{(k+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right)\frac{\left(A\left(t\right)\right)^{k}}{k!}\left(A'\left(t\right)\right)^{r}
\end{aligned}$$

et par l'identité $P_{k}^{(k+1+\alpha)}\left(x+1\mid A\right)=P_{k}^{(-\alpha)}\left(-x\mid\overline{A}\right)$, le dernier developpement devient

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geqslant 0}P_{k}^{(-\alpha)}\left(-x\mid\overline{A}\right)\frac{\left(A\left(t\right)\right)^{k}}{k!}\left(A'\left(t\right)\right)^{r} &= \left(\frac{A\left(t\right)}{\overline{A}(A\left(t\right))}\right)^{-\alpha}\left(\overline{A}'\left(A\left(t\right)\right)\right)^{-x}\left(A'\left(t\right)\right)^{r}\\
&= \left(\frac{t}{A\left(t\right))}\right)^{\alpha}\left(A'\left(t\right)\right)^{x+r}\\
&= \sum_{n\geqslant 0}P_{n}^{(\alpha)}\left(x+r\mid A\right)\frac{t^{n}}{n!}.
\end{aligned}$$

La première identité peut être obtenue à partir de la deuxième, en appliquant le théorème (99). □

Remarque 101. *Des valeurs particulères de $P_{k}^{(\alpha)}\left(x\mid A\right)$ peuvent être obtenues par la relation récurente (5.11), en prenant $\alpha=0,\ x=-r$ telles que*

$$P_{n}^{(n+1)}\left(1-r\mid A\right)=D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{A\left(t\right)}\right)^{n+1}\left(A'\left(t\right)\right)^{1-r}\right)=B_{n+r,r}^{(r)}\left(\overline{a}_{l}\right),$$

qui donne pour $r=0$

$$\begin{aligned}
P_{n}^{(n+1)}\left(1\mid A\right) &= D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{A\left(t\right)}\right)^{n+1}A'\left(t\right)\right)=1_{(n=0)},\\
P_{n}^{(n+1)}\left(0\mid A\right) &= D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{A\left(t\right)}\right)^{n+1}\right)=\overline{a}_{n}.
\end{aligned}$$

De plus, pour $0 \leqslant k \leqslant n$, on obtient

$$\begin{aligned} D_{t=0}^{n-k}\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1}A'(t)\right) &= P_{n-k}^{(n+1)}(1 \mid A) \\ &= P_{n-k}^{(-k)}\left(0 \mid \overline{A}\right) \\ &= D_{t=0}^{n-k}\left(\frac{\overline{A}(t)}{t}\right)^{k} \\ &= \binom{n}{k}^{-1} B_{n,k}(\overline{a}_l). \end{aligned}$$

En particulier

$$\begin{aligned} D_{t=0}^{n-1}\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1}A'(t)\right) &= \frac{1}{n}B_{n,1}(\overline{a}_l) = \frac{\overline{a}_n}{n}, \quad n \geqslant 1, \\ D_{t=0}^{n-2}\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1}A'(t)\right) &= \frac{1}{n(n-1)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\overline{a}_{n-k}\overline{a}_k, \quad n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Proposition 102. *Soit A une fonction analytique au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$, $A'(t) > 0$. Soient m, r, s des entiers non négatifs. Alors, on a :*

$$P_n^{(n+1-m)}(s+1 \mid A) = \sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}^{-1} B_{j+m+s+r,m+s+r}^{(s+r)}(a_l)\, B_{n+r,j+r}^{(r)}(\overline{a}_l), \;\; s \geqslant -r \tag{5.13}$$

et

$$P_n^{(n+1+m)}(-s \mid A) = \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s+1,m+s+1}^{(s+1)}(\overline{a}_l), \;\; s \geqslant -1. \tag{5.14}$$

Démonstration. En effet, l'identité

$$P_n^{(-m)}(s \mid A) = \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s,m+s}^{(r)}(a_l) \tag{5.15}$$

implique, en utilisant l'identité (5.11) :

$$\begin{aligned} P_n^{(n+1-m)}(s+1 \mid A) &= \sum_{j=0}^{n} B_{n+r,j+r}^{(s)}(\overline{a}_l)\, P_j^{(-m)}(s+r \mid A) \\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{j+m}{m}^{-1} B_{j+m+s+r,m+s+r}^{(s+r)}(a_l)\, B_{n+r,j+r}^{(r)}(\overline{a}_l), \\ P_n^{(m+n+1)}(-s \mid A) &= P_n^{(-m)}\left(s+1 \mid \overline{A}\right) \\ &= \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s+1,m+s+1}^{(s+1)}(\overline{a}_l). \end{aligned}$$

□

Remarque 103. *Si $m \geqslant n+1$, on obtient*

$$P_n^{-(m-n-1)}\left(r+1 \mid A\right) = P_n^{(n+1-m)}\left(r+1 \mid A\right),$$

ce qui implique, en utilisant (5.15) et (5.13), l'identité suivante :

$$B_{m+r,m-n+r}^{(r+1)}\left(a_l\right) = \binom{m-1}{m-n-1} \sum_{j=0}^{n} \binom{n+m}{j}^{-1} B_{n+m+r,j+r}^{(r)}\left(a_l\right) B_{n,j}\left(\overline{a}_l\right).$$

D'autres résultats sont donnés par la proposition suivante :

Proposition 104. *Soient α, x, y réels. Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0)=0$, $A'(t)>0$, $\overline{H}(0)>0$, $H(A(t))>0$, $H(t)=\sum_{n\geq 0} h_n \frac{t^n}{n!}$, $\overline{H}(t)=\sum_{n\geqslant 0} \overline{h}_n \frac{t^n}{n!}$ et*

$$\sum_{n\geqslant 0} Q_n^{(\alpha)}\left(x,y \mid A\right) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} \left(H\left(A(t)\right)\right)^x \left(\overline{H}(t)\right)^y.$$

On a

$$Q_n^{(k)}\left(r,s \mid A\right) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{n+s,j+s}^{(s)}\left(a_l, \overline{h}_l\right) B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left(\overline{a}_l, h_l\right).$$

Démonstration. En effet, par définition, on peut écrire

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geqslant 0} Q_n^{(k)}\left(r,s \mid A\right) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{k} \left(H\left(A(t)\right)\right)^r \left(\overline{H}(t)\right)^s \\
&= \left(\frac{\overline{A}\left(A(t)\right)}{A(t)}\right)^{k} \left(H\left(A(t)\right)\right)^r \left(\overline{H}(t)\right)^s \\
&= k!\left(A(t)\right)^{-k} \frac{\left(\overline{A}\left(A(t)\right)\right)^k}{k!} \left(H\left(A(t)\right)\right)^r \left(\overline{H}(t)\right)^s \\
&= k!\left(A(t)\right)^{-k} \sum_{j\geqslant k} B_{j+r,k+r}^{(r)}\left(\overline{a}_l, h_l\right) \frac{\left(A(t)\right)^j}{j!} \left(\overline{H}(t)\right)^s \\
&= \sum_{j\geqslant k} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left(\mathbf{b},\mathbf{h}\right) \frac{\left(A(t)\right)^j}{j!} \left(\overline{H}(t)\right)^s \\
&= \sum_{n\geqslant 0} \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{n+s,j+s}^{(s)}\left(a_l, \overline{h}_l\right) B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left(\overline{a}_l, h_l\right)\right) \frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 105. *Pour* $A(t) = \frac{\exp(mt)-1}{m}$, $H(t) = 1$ *et* $\overline{H}(t) = \exp(t)$, *on obtient*

$$\left(\frac{t}{A(t)}\right)^k (H(A(t)))^r \left(\overline{H}(t)\right)^s = \left(\frac{mt}{\exp(mt)-1}\right)^k \exp(st) = \sum_{n\geqslant 0} m^n B_n^{(k)}\left(\frac{s}{m}\right)\frac{t^n}{n!},$$

et

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}\left(\frac{s}{m}\right) &= m^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{n+s,j+s}^{(s)}\left(a_l,\overline{h}_l\right) B_{j+k,k}\left(\overline{a}_l\right) \\ &= m^{-n}\sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{n+s,j+s}^{(s)}\left(m^{l-1},1\right) B_{j+k,k}\left((l-1)!\,(-m)^{l-1}\right) \\ &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^{n-j}\binom{j+k}{k}^{-1} w_m(j+k,k)\, W_{m,s}(n,j), \end{aligned}$$

qui est exactement un cas particulier du théorème 1 de [63].

On constate aussi que la formule de Leibnitz donne

$$\begin{aligned} & D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha+\beta} H_1(t)\,H_2(t)\right) \\ = & \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left(D_{t=0}^{n-j}\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} H_1(t)\right) D_{t=0}^{j}\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\beta} H_2(t)\right), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent à

$$P_n^{(\alpha+\beta)}(A, H_1H_2) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} P_{n-j}^{(\alpha)}(A, H_1)\, P_j^{(\beta)}(A, H_2). \tag{5.16}$$

Si on pose $P_j^{(\alpha)}(x \mid A, H) = P_j^{(\alpha)}(A, H^x)$, on obtient

$$P_n^{(\alpha+\beta)}(x+y \mid A, H) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} P_{n-j}^{(\alpha)}(x \mid A, H)\, P_j^{(\beta)}(y \mid A, H). \tag{5.17}$$

Corollaire 106. *Soient* n, j *des entiers non négatifs et* α *réel. Soient* A *et* H *deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec* $A(0) = 0$, $A'(t) > 0$. *On a*

$$P_n^{(n+1+\alpha)}(A, H) = \sum_{j=0}^{n} B_{n+2,j+1}\left(\overline{a}_l\right) P_j^{(\alpha)}(A, H).$$

Démonstration. Pour $H_1(t) = 1$ et $H_2(t) = H(t)$ dans l'identité (5.16), on obtient

$$P_n^{(n+1+\alpha)}(A, H) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} P_{n-j}^{(n+1)}(A, \mathbf{1})\, P_j^{(\alpha)}(A, H),$$

où $P_{n-j}^{(n+1)}(A,\mathbf{1}) = P_{n-j}^{(n+1)}(A,H)$ quand $H(t) = 1$.
Or par l'identité (5.14), on a :

$$\begin{aligned} P_{n-j}^{(n+1)}(A,\mathbf{1}) &= P_{n-k}^{(n+1)}(0 \mid A) \\ &= \binom{n}{k}^{-1} B_{n+1,k+1}^{(1)}(\overline{a}_l) \\ &= \binom{n}{k}^{-1} D_{t=0}^{n+1}\left(\frac{(B(t))^j}{j!}B'(t)\right) \\ &= \binom{n}{k}^{-1} D_{t=0}^{n+2}\left(\frac{(B(t))^{j+1}}{(j+1)!}\right) \\ &= \binom{n}{k}^{-1} B_{n+2,j+1}(\overline{a}_l). \end{aligned}$$

ce qui donne $B_{n+1,j+1}^{(1)}(\overline{a}_l) = B_{n+2,j+1}(\overline{a}_l)$. □

3.1 Applications

Application 1 :

$A(t) = e^t - 1$ et $\overline{A}(t) = \ln(1+t)$:
$a_l = 1,\ \forall l \geqslant 1$ et $\overline{a}_l = (-1)^{l-1}(l-1)!;\ \forall l \geqslant 1$

$$\left(\frac{t}{e^t-1}\right)^k e^{xt} = \sum_{n\geqslant 0} P_n^{(k)}(x \mid A)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geqslant 0} B_n^{(k)}(x)\frac{t^n}{n!},$$

avec $B_n^{(k)}(x)$: Les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de première espèce.

1. La proposition (5.9) donne :

$$B_n^{(k)}(s-r) = \sum_{j=0}^{n}\binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left((-1)^{l-1}(l-1)!\right) B_{n+s,j+s}^{(s)}(1),$$

   d'où, on retrouve le résultat de l'équation (10) du corollaire (2), établi dans [63], $\forall s,k,r \geqslant 0$:

$$B_n^{(k)}(s-r) = \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{j+k}{k}^{-1}\begin{bmatrix} j+k+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \begin{Bmatrix} n+s \\ j+s \end{Bmatrix}_s.$$

2. L'equation (5.10) donne :

$$B_n^{(-k)}(r) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}(1),$$

d'où, les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de première espèce vérifient

$$B_n^{(-k)}(r) = \binom{n+k}{k}^{-1} \left\{ \begin{matrix} n+k+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r.$$

3. Le théorème (100) donne :

$$\begin{aligned} B_n^{(n+1+\alpha)}(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r B_k^{(\alpha)}(x+r), \\ B_n^{(\alpha)}(x+r) &= \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r B_k^{(k+1+\alpha)}(x+1). \end{aligned}$$

Si on dérive les deux membres de l'identité p fois, on obtient

$$B_n^{(n+p+1+\alpha)}(x+1) = \binom{n+p}{p}^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{k+p}{p} \begin{bmatrix} n+p+r \\ k+p+r \end{bmatrix}_r B_k^{(\alpha)}(x+r),$$

ce qui donne pour $\alpha = 0$:

$$B_n^{(n+p+1)}(x) = \binom{n+p}{p}^{-1} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{k+p}{p} \begin{bmatrix} n+p+r \\ k+p+r \end{bmatrix}_r (x+r-1)^k.$$

4. La proposition (102) donne :

$$\begin{aligned} B_n^{(n+1-m)}(s+1) &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{j+m}{m}^{-1} \left\{ \begin{matrix} j+m+s+r \\ m+s+r \end{matrix} \right\}_{s+r} \begin{bmatrix} n+r \\ j+r \end{bmatrix}_r, \\ B_n^{(n+1+m)}(-s) &= (-1)^n \binom{n+m}{m}^{-1} \begin{bmatrix} n+m+s+1 \\ m+s+1 \end{bmatrix}_{s+1}. \end{aligned}$$

5. Le corollaire (106) donne :

$$B_n^{(n+1+\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n+1-j} \begin{bmatrix} n+2 \\ j+1 \end{bmatrix} B_j^{(\alpha)}(x).$$

Application 2 :

$A(t) = \ln(1+t)$ et $\overline{A}(t) = e^t - 1$. Ce qui donne : $a_l = (-1)^{l-1}(l-1)!,\ \forall l \geqslant 1$, $\overline{a}_l = 1,\ \forall l \geqslant 1$ et

$$\left(\frac{t}{\ln(1+t)} \right)^{\alpha} (1+t)^{-x} = \sum_{n \geqslant 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid A) \frac{t^n}{n!} = \sum_{n \geqslant 0} b_n^{(\alpha)}(-x) \frac{t^n}{n!},$$

avec $b_n^{(k)}(x)$: Les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de seconde espèce.

1. La proposition (5.9) donne :

$$P_n^{(\alpha)}(s-r \mid A) \; = \; \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}(1)\, B_{n+s,j+s}^{(s)}\left((-1)^{l-1}(l-1)!\right)$$

   d'où, on retrouve le résultat de l'équation (11) du corollaire (2), établi dans [63], $\forall s,k,r \geqslant 0$:

$$b_n^{(k)}(s-r) = P_n^{(\alpha)}(r-s \mid A) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{j+k}{k}^{-1} \left\{ {j+k+r \atop k+r} \right\}_s \left[{n+s \atop j+s} \right]_r .$$

2. L'equation (5.10) donne :

$$b_n^{(-k)}(r) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}(-1)^{l-1}(l-1)!,$$

   d'où, les polynômes de Bernoulli d'ordre superieur de seconde espèce vérifient :

$$b_n^{(-k)}(r) = \binom{n+k}{k}^{-1} \left[{n+k+r \atop k+r} \right]_r .$$

3. Le théorème (100) donne :

$$\begin{aligned} b_n^{(n+1+\alpha)}(x+1) &= \sum_{k=0}^{n} \left[{n+r \atop k+r} \right]_r B_k^{(\alpha)}(x+r), \\ b_n^{(\alpha)}(x+r) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r B_k^{(k+1+\alpha)}(x+1). \end{aligned}$$

4. La proposition (102) donne :

$$\begin{aligned} b_n^{(n+1-m)}(-s-1) &= \frac{1}{n!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{j+m}{m}^{-1} \left[{j+m+s+r \atop m+s+r} \right]_{s+r} \left\{ {n+r \atop j+r} \right\}_r, \\ b_n^{(n+1+m)}(-s) &= \frac{m!}{(n+m)!} \left\{ {n+m+s+1 \atop m+s+1} \right\}_{s+1}. \end{aligned}$$

5. Le corollaire (106) donne :

$$b_n^{(n+1+\alpha)}(x) \; = \; \sum_{j=0}^{n} \frac{j!}{n!} \left\{ {n+2 \atop j+1} \right\} b_j^{(\alpha)}(x).$$

Application 3 :

$A(t) = \sin(t)$ et $\overline{A}(t) = \arcsin(t)$: ie $a_l = (-1)^{2l+1}$, $\forall l \geqslant 0$ et $\overline{a}_l = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}$, $\forall l \geqslant 0$. On a

$$\left(\frac{t}{\sin(t)}\right)^{\alpha} (\cos(t))^{s-r} = \sum_{n\geqslant 0} F_n^{(\alpha)}(s-r \mid A)\frac{t^n}{n!},\ \cos(t) > 0.$$

1. La proposition (5.9) donne :

$$F_n^{(\alpha)}(s-r) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}\right) B_{n+s,j+s}^{(s)}\left((-1)^{2l+1}\right).$$

2. L'equation (5.10) donne

$$F_n^{(-k)}(r)) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}\left((-1)^{2l+1}\right).$$

3. Le théorème (100) donne

$$F_n^{(\alpha)}(x+r \mid A) = \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)}\left((-1)^{2l+1}\right) F_k^{(k+1+\alpha)}(x+1). \tag{5.18}$$

4. La proposition (102) donne

$$F_n^{(n+1+m)}(-s) = \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s+1,m+s+1}^{(s+1)}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}\right),\ s \geqslant -1. \tag{5.19}$$

5. Le corollaire (106) donne

$$F_n^{(n+1+\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} B_{n+2,j+1}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}\right) F_j^{(\alpha)}(x).$$

Application 4 :

$A(t) = \arcsin(t)$ et $\overline{A}(t) = \sin(t)$: ie $a_l = \frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}$, $\forall l \geqslant 0$ et $\overline{a}_l = (-1)^{2l+1}$, $\forall l \geqslant 0$. On a

$$\left(\frac{t}{\arcsin(t)}\right)^{\alpha} \left(1-t^2\right)^{\frac{s-r}{2}} = \sum_{n\geqslant 0} f_n^{(\alpha)}(s-r \mid A)\frac{t^n}{n!}.$$

1. La proposition (5.9) donne :

$$f_n^{(\alpha)}(s-r) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} B_{j+k+r,k+r}^{(r)}\left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!}\right) B_{n+s,j+s}^{(s)}\left((-1)^{2l+1}\right).$$

2. L'equation (5.10) donne :

$$f_n^{(-k)}(r)) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)} \left(\frac{\Gamma\left(l+\frac{1}{2}\right)(2l)!}{\sqrt{\pi}l!} \right).$$

3. Le théorème (100) donne

$$f_n^{(n+1+\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} B_{n+r,k+r}^{(r)} \left((-1)^{2l+1} \right) f_k^{(\alpha)}(x+r). \tag{5.20}$$

4. La proposition (102) donne

$$f_n^{(n+1+m)}(-s) = \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s+1,m+s+1}^{(s+1)} \left((-1)^{2l+1} \right), \ s \geqslant -1. \tag{5.21}$$

5. Le corollaire (106) donne

$$f_n^{(n+1+\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} B_{n+2,j+1} \left((-1)^{2l+1} \right) f_j^{(\alpha)}(x).$$

Application 5 :

$A(t) = \dfrac{t}{1-t}$ et $\overline{A}(t) = \dfrac{t}{1+t}$:
ie $a_l = l!$, $\forall l \geqslant 1$ et $\overline{a}_l = (-1)^l l!$, $\forall l \geqslant 1$. On obtient la paire de polynômes $\left(G_n^{(\alpha)}(x), g_n^{(\alpha)}(x) \right)$ définis par :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} G_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &= (1-t)^{\alpha} (1-t)^{-2x}, \\ \sum_{n\geqslant 0} g_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} &= (1+t)^{\alpha} (1+t)^{-2x}. \end{aligned}$$

1. La proposition (5.9) donne

$$G_n^{(\alpha)}(s-r) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} \begin{bmatrix} n+s \\ j+s \end{bmatrix}_s B_{j+k+r,k+r}^{(r)} \left((-1)^l l! \right).$$

2. L'equation (5.10) donne

$$G_n^{(-k)}(r)) = \binom{n+k}{k}^{-1} \begin{bmatrix} n+k+r \\ k+r \end{bmatrix}_r.$$

3. Le théorème (100) donne

$$G_n^{(\alpha)}(x+r) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r G_k^{(k+1+\alpha)}(x+1). \tag{5.22}$$

4. La remarque 101 donne

$$G_n^{(n+1)}(1-r) = B_{n+r,k+r}^{(r)}\left((-1)^l l!\right). \tag{5.23}$$

5. La proposition (102) donne

$$G_n^{(n+1+m)}(-s) = \binom{n+m}{m}^{-1} B_{n+m+s+1,m+s+1}^{(s+1)}\left((-1)^l l!\right), \ s \geqslant -1. \tag{5.24}$$

6. Le corollaire (106) donne

$$G_n^{(n+1+\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^n \begin{bmatrix} n+2 \\ j+1 \end{bmatrix} G_j^{(\alpha)}(x).$$

Application 6 :

$A(t) = \frac{t}{1+t}$ et $\overline{A}(t) = \frac{t}{1-t}$:
ie $a_l = (-1)^l l!, \ \forall l \geqslant 1, \ \forall l \geqslant 1$ et $\overline{a}_l = l!, \ \forall l \geqslant 1.$
On a

1. La proposition (5.9) donne

$$g_n^{(\alpha)}(s-r) \quad = \quad \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} \begin{bmatrix} j+k+r \\ k+r \end{bmatrix}_s B_{n+s,j+s}^{(r)}\left((-1)^l l!\right).$$

2. L'equation (5.10) donne

$$g_n^{(-k)}(r)) = \binom{n+k}{k}^{-1} B_{n+k+r,k+r}^{(r)}\left((-1)^l l!\right).$$

3. Le théorème (100) donne

$$g_n^{(n+1+\alpha)}(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r g_k^{(\alpha)}(x+r). \tag{5.25}$$

4. La remarque 101 donne

$$g_n^{(n+1)}(1-r) = \begin{bmatrix} n+r \\ r \end{bmatrix}_r. \tag{5.26}$$

5. La proposition (102) donne

$$g_n^{(n+1+m)}(-s) = \binom{n+m}{m}^{-1} \begin{bmatrix} n+m+s+1 \\ m+s+1 \end{bmatrix}_r, \quad s \geqslant -1. \qquad (5.27)$$

6. Le corollaire (106) donne

$$g_n^{(n+1+\alpha)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \begin{bmatrix} n+2 \\ j+1 \end{bmatrix} g_j^{(\alpha)}(x).$$

4 Sur l'identité $P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, H \circ \overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(A, A'H)$

Exemple 107. *Soient n, r, s, d des entiers non négatifs. Soient A et H deux fonctions analytiques au voisinage de zéro avec $A(0) = 0$ et $A'(0) > 0$. Soient*

$$\begin{aligned} U_n(r, s; d) &= \frac{((d-1)n)!s}{rdn+s} \frac{\binom{(r+1)dn+s}{(d-1)n}}{\binom{(rd+1)n+s}{n}} B_{(rd+1)n+s, rdn+s}(\mathbf{y}), \quad n \geq 1, \quad U_0(r, s; d) = 1, \\ V_n(r, s) &= \frac{s}{rn+s} \frac{B_{(r+1)n+s,\ rn+s}(\mathbf{y})}{\binom{(r+1)n+s}{rn+s}}, \quad n \geq 1 \quad \text{and} \quad V_0(r, s) = 1. \end{aligned}$$

Des théorèmes (3) et (16), donnés dans [55], si on pose

$$\begin{aligned} A(t) &= tH_{r,s}(t), \quad H_{r,s}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} U_n(r, -s; d) \frac{t^{dn}}{n!}, \\ \overline{A}(t) &= t\overline{H}_{r,s}(t), \quad \overline{H}_{r,s}(t) = 1 + \sum_{n \geq 1} V_n(r, -s) \frac{t^{dn}}{n!}, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{t}{A(t)} &= H_{r,-s}(t), \quad \frac{A(t)}{t} = H_{r,s}(t), \quad \frac{t}{B(t)} = H_{r+s,-s}(t), \quad \frac{B(t)}{t} = H_{r+s,s}(t), \\ \frac{\overline{A}(t)}{t} &= H_{r,s}(t), \quad \frac{\overline{B}(t)}{t} = H_{r+sd,s}(t). \end{aligned}$$

Alors la suite de polynômes $\left(P_n^{(\alpha)}(x \mid r, s)\right)$ définie par

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} P_n^{(\alpha)}(x \mid r, s) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{A(t)}\right)^{\alpha} (A'(t))^x \\ &= (H_{r,s}(t))^{\alpha-2x} \left(H_{r,s}(t) - tH'_{r,s}(t)\right)^x \end{aligned}$$

vérifie

$$\begin{aligned} P_n^{(n+1-\alpha)}(x \mid r, s) &= P_n^{(\alpha)}(1-x \mid r+s, s), \\ P_n^{(\alpha)}(x \mid r, s) &= P_n^{(-\alpha)}(x \mid r, -s). \end{aligned}$$

De plus, la suite $\left(\overline{P}_n^{(\alpha)}(x \mid r, s)\right)$ *définie par*

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} \overline{P}_n^{(\alpha)}(x \mid r, s) \frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^\alpha \left(\overline{A}'(t)\right)^x \\ &= \left(\overline{H}_{r,s}(t)\right)^{\alpha-2x} \left(\overline{H}_{r,s}(t) - t\overline{H}'_{r,s}(t)\right)^x \end{aligned}$$

vérifie

$$\overline{P}_n^{(n+1-\alpha)}(x \mid r, s) = \overline{P}_n^{(\alpha)}(1-x \mid r+sd, s).$$

Pour toute foncton f, le choix de $H = f(A')$ dans l'identité

$$P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, H \circ \overline{A}\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(A, A'H)$$

donne le corollaire suivant :

Corollaire 108. *Pour toute fonction f, on a :*

$$P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, f\left(\frac{1}{\overline{A}'}\right)\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}(A, A'f(A')),$$

i.e.

$$D_{t=0}^n\left(\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^\alpha f\left(\frac{1}{\overline{A}'(t)}\right)\right) = D_{t=0}^n\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} A'(t) f(A'(t))\right).$$

Exemple 109. *Pour $A(t) = \dfrac{t}{1-t}$, on a*

$$\begin{aligned} D_{t=0}^n\left((1+t)^\alpha f\left((1+t)^2\right)\right) &= D_{t=0}^n\left((1-t)^{n-1-\alpha} f\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\right) \\ &= \sum_{j=1}^n \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} D_{t=0}^j\left(\frac{1}{(1-t)^\alpha} f\left(\frac{1}{(1-t)^2}\right)\right), \end{aligned}$$

et pour le choix $f(t) = t^k$, on obtient $(\alpha+2k)_n = \sum_{j=0}^n \left\lfloor {n \atop j} \right\rfloor (\alpha+2k)^{\overline{j}}$.

Exemple 110. *Pour $A(t) = \dfrac{t}{1+t^2}$ et $f(t) = \dfrac{1}{t}$, on obtient $\overline{A}(t) = \frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t}$*

$$\begin{aligned} & D_{t=0}^{2n}\left(\left(\frac{1-\sqrt{1-4t^2}}{2t^2}\right)^\alpha \left(\frac{(1-2t^2)\sqrt{1-4t^2}+1-4t^2}{4}\right)\right) \\ &= D_{t=0}^{2n}\left(\left(1+t^2\right)^{2n+1-\alpha}\right) \\ &= (2n)!\binom{2n+1-\alpha}{n}. \end{aligned}$$

Remarque 111. *Si* $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} g\left(x + \frac{1}{x}\right)$, *l'identité précédente peut être réduite à l'identité équivalente :*

$$P_n^{(\alpha)}\left(\overline{A}, \sqrt{\overline{A}'} g\left(\overline{A}' + \frac{1}{\overline{A}'}\right)\right) = P_n^{(n+1-\alpha)}\left(A, \sqrt{A'} g\left(A' + \frac{1}{A'}\right)\right),$$

i.e.

$$\begin{aligned} & D_{t=0}^n\left(\left(\frac{t}{\overline{A}(t)}\right)^{\alpha} \sqrt{\overline{A}'(t)} g\left(\overline{A}'(t) + \frac{1}{\overline{A}'(t)}\right)\right) \\ = \; & D_{t=0}^n\left(\left(\frac{t}{A(t)}\right)^{n+1-\alpha} \sqrt{A'(t)} g\left(A'(t) + \frac{1}{A'(t)}\right)\right). \end{aligned}$$

Conclusion et Perspectives

Cette thèse représente une contribution modeste reliant les polynômes de type Appell et les nombres de différents types de partitions d'un ensemble fini.

Nous avons abouti, d'une part, à établir certaines propriétés et identités importantes sur les polynômes de type Appell et d'autre part, nous sommes arrivés à interpréter combinatoirement les valeurs d'une classe importante de ces polynômes.

Plus précisément,

- Nous avons évalué les polynômes hypérgéométriques de Cauchy aux points entiers, en déterminant une classe convenable de nombres de Stirling.
- Nous avons exprimé les polynômes de type Appell aux points entiers à l'aide des polynômes partiels r-Bell. Ceux-ci donnent une application imporatante de ces polynômes de partitions.
- Nous avons trouvé une nouvelle application du théorème d'inversion de Lagrange. Ce théorème a des applications très vastes dans la litérature et le fait d'avoir arraché une nouvelle application renforce notre travail.

Au cours de cette thèse, nous avons constaté qu'à travers des techniques combinatoires, nous avons démontré plusieurs identités et relations récurrentes ainsi que des expressions explicites pour des suites de nombres et de polynômes.

Nous proposons les perspectives suivantes :

- La recherche d'une application du théorème d'inversion de Lagrange multidimentionnelle similaire au cas scalaire pour établir des identités analogues concernant les polynômes de type Appell à plusieurs variables.

- En utilisant l'identité trouvée sur les polynômes de type Appell, établir certaines propriétés sur des polynômes de même classe et qui sont associés aux graphes.

- La recherche des classes de polynômes multivariés liés à la partition d'un entier, analogue à la classe des polynômes partiels r-Bell.

Bibliographie

[1] M. Abbas and S. Bouroubi, On new identities for Bell's polynomials. Discrete Mathematics, 293 (2005) 5–10.

[2] E. H. Neville, The codifying of tree-structure. Proc. Cambridge Philos. Sot., 49 (1953) 381–385.

[3] A. Adelberg, Arithemetic properties of the Nörlund polynomial $B_n^{(x)}$. Discrete Math, 284 (1999) 5–13.

[4] M. Aigner, Combinatorial Theory, Springer-Verlag. Berlin, Heidelberg, New York, (1979) 99–116.

[5] H. Belbachir and M. Mihoubi, A generalized recurrence for Bell polynomials. European Journal of Combinatorics, 30 (2009) 1254–1256.

[6] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, Translated Whitney and r-Whitney numbers, A combinatorial approach. J. Integer Seq., 16 (2013), Article 13.8.6.

[7] H. Belbachir and I. E. Bousbaa, Associated Lah numbers and r-Stirling numbers. arXiv(2014). Available electronically at http ://arxiv.org/abs/1404.5573v1.

[8] E. T. Bell, Exponential polynomial. Ann. Math., 35 (1934) 258–277.

[9] E. T. Bell, Exponential numbers. Amer. Math. Monthly., 41 (1934) 411–419.

[10] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices. Discrete Math., 159 (1996) 13–33.

[11] S. Bouroubi and M. Mihoubi, Sur quelques relations relatives aux nombres de partitions d'un entier. Maghreb Math. Rev., 11, No1, June (2002) 14–19.

[12] G. Bretti, P. Natani and P. E. Ricci, Generalizations of the Bernoulli and Appell polynomials. Abstract and Applied Analysis., 7 (2004) 613–623.

[13] A. Z. Broder, The r-Stirling numbers. Discrete Math., 49 (1984) 241–259.

[14] Burak Kurt, A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the $2D$-Bernoulli polynomials $B_n^2(x, y)$, Applied Mathematical Sciences. 4 (2010) 2315–2322.

[15] L. Carlitz, Some congruences for the Bell polynomials. Pacific J. Math., 11 (1961) 1215–1222.

[16] L. Carlitz, A degenerate Staudt Clausen theorem. Arch. Math., 7 (1956) 28–33.

[17] L. Carlitz, Degenerate Stirling, Bernoulli and Eulerian numbers. Util. Math., 15 (1979) 51–88.

[18] L. Carlitz, A note on Bernoulli and Euler polynomials of the second kind, Scripta Math., 25 (1961) 323–330.

[19] L. Carlitz, Some properties of the Nörlund polynomial $B_n^{(x)}$. Math. Nachr., 33 (1967) 297–311.

[20] M. Cenkci, An explicit formula for generalized potential polynomials and its applications. Discrete Math., 309 (2009) 1498–1510.

[21] C. A. Charalambides, Enumerative Combinatorics. Chapman et Hall/CRC, 2002.

[22] C. A. Charalambides, Combinatorial Methods in Discrete distributions. John Wiley et Sons, INC, 2005.

[23] G.-S. Cheon, S.-G. Hwang and S.-G. Lee, Several polynomials associated with the harmonic numbers, Discrete Appl. Math., 155 (2007), 2573–2584.

[24] L. Comtet, Advanced Combinatorics. D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[25] L. Comtet, Analyse Combinatoire. Presses Universitaires de France, Paris, (1970).

[26] T. A. Dowling, A class of gemometric lattices bases on finite groups, J. Combin. Theory, Ser.B 14 (1973) 61–86.

[27] E. A. Enneking and J. C. Ahuja, Generalized Bell Numbers. The Fibonacci Quarterly, 14 (1976) 67–73.

[28] W. Feller. An introduction To Probability Theory and Its Applications, 3rd ed. John Willy and Sons, Inc., (1968).

[29] J. Faulhaber. Academia Algebrae, darinnen die miraculosische Inventiones, zu den höchsten Cossen weiters continuirt und protiert werden. Ulm., (1631).

[30] A. Gertsch, A. Robert, Some Congruences concerning the Bell Numbers, Bull. BeIg. math. soc., 3 (1996) 467–475.

[31] F. T. Howard, Numbers Generated by the Reciprocal of $\exp(x) - x - 1$. Mathematics of Computation, 31 (1977) 581–598.

[32] F. T. Howard, Explicit formulas for degenerate Bernoulli numbers. Discrete Math., 162 (1996) 175–185.

[33] F. T. Howard, Associated Stirling numbers. The Fibonacci Quarterly, (1980) 303–315.

[34] C. Jordan, Calculus of Finite Differences. Chelsea, New York, 1950.

[35] A. Joyal, Une theorie combinatoire des series formelles. Adv. in Math., 42 (1981) 1–82.

[36] T. Komastu, Poly-Cauchy numbers. Kyushu. J. Math., 67 (2013) 143–153.

[37] T. Komastu and F. Luca, Some relationships between poly- Cauchy numbers and poly-Bernoulli numbers. Ann. Math. Inform., 41 (2013) 99–105.

[38] T. Komastu and H. Zhu, Hypergeometric Euler numbers. arXiv :1612.06210v1 [math.NT] 19 Dec (2016).

[39] T. Komastu, Hypergeometric Cauchy numbers, Int. J. Number Theory, vol. 9, N. 3 (2013) 545–560.

[40] T. Komatsu, On poly-Cauchy numbers and polynomials, available at http ://carma.newcastle.edu.au/alfcon/pdfs/Takao_Komatsu-alfcon.pdf.

[41] B. Kurt, A further generalization of the Bernoulli polynomials and on the $2D$-Bernoulli polynomials $B_n^2(x,y)$. Appl. Math., Sci. 4 (2010) 2315–2322.

[42] D. C. Kurtz, A note on concavity properties of triangular arrays of numbers. J. Combin. Theory, Ser.A 13 (1972) 135–139.

[43] G. Labelle, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange. Adv. in Math., 42 (1981) 217–247

[44] J. L. Lagrange, Oeuvres Gauthier-Villars, Paris 1867–1892.

[45] Y. L. Luke, The special functions and their approximations. vol. I, Academic Press, New York, London, 1969.

[46] M. Merca, A note on the r-Whitney numbers of Dowling lattices. C. R. Acad. Sci. Paris Ser.I 351 (2013) 649–655.

[47] Z. A. Melzak, V. D. Gokhale and W. V. Parker, Advanced Problems and Solutions : 4458. Amer. Math. Monthly., 60 (1) 1953 53–54.

[48] D. Merlini, R. Sprugnoli and M.C. Verri, The Cauchy numbers, Discrete Math. 306 (2006) 1906–1920.

[49] I. Mező, A new formula for the Bernoulli polynomials, Results Math., 58 (2010) 329–335.

[50] I. Mező, On the maximum of r-Stirling numbers. Adv. Appl. Math., 41 (2008) 293–306.

[51] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. Discrete Math., 308 (2008) 2450–2459.

[52] M. Mihoubi, Polynômes multivariés de Bell et polynômes de type binomial, Thèse de Doctorat d'Etat en Mathématiques, USTHB, Alger (2008). N d'ordre : 09/2008-E/MT, Décembre (2008).

[53] M. Mihoubi, Bell polynomials and binomial type sequences. Les annales ROAD, Faculté de Mathématiques (2007).

[54] M. Mihoubi, The role of binomial type sequences in determination identities for Bell polynomials. Ars Combin., 111 (2013) 323–337.

[55] M. Mihoubi, R. Mahdid, The inverse power series and the partial Bell polynômials. J. Integer Seq., 15 (2012), Article 12.3.7.

[56] M. Mihoubi and M. Rahmani, The partial r-Bell polynomials. Afr. Mat (2017). Doi :10.1007/s13370-017-0510-z.

[57] M. Mihoubi and **Y. Saidi,** An identity on pairs of Appell-type polynomials. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 353 (2015) 773–778.

[58] M. Mihoubi and **Y. Saidi,** Bell polynomials and random variables. RAMA'8. Algérie, Novembre 2012.

[59] M. Mihoubi and **Y. Saidi,** Some combinatorial properties of a class of r-Stirling numbers of the first kind. JSL, RECITS, Avril 2014.

[60] M. Mihoubi and **Y. Saidi,** An identity on pairs of Appell-type polynomials. JSL, RECITS, Avril 2017.

[61] M. Mihoubi and **Y. Saidi,** Explicit expressions for Appell-type polynomials. Conference-School on Discrete Mathematics and Computer Science (DIMA-COS'2015), 15-19 novembre 2015, Sidi Bel Abbès, Algérie.

[62] M. Mihoubi and M. Tiachachat, A new classe of r-Stirling numbers and The values of the generalised Bernoulli polynomials at non negative integers, JSl, RECITS, Avril 2014.

[63] M. Mihoubi and M. Tiachachat, Some applications of the r-Whitney numbers. C.R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 352 (2014) 965–969.

[64] E. H. Neville, The codifying of tree-structure. Proc. Cambridge Philos. Sot., 49 (1953) 381–385.

[65] G. Nemes, An asymptotic expansion for the Bernoulli numbers of the second kind. J. Integer Seq., 14 (2011), Article 11.4.8.

[66] J. W. Moon, Counting Labelled Trees. Monographies Canadiennes de Mathematiques. Vol. 1, Socite Mathematique du Canada, 1970.

[67] D. Port , A Characterization of Exponential and Ordinary Generating Functions. Journal of Combinatorial Theory, Ser. A 98 (2002) 219–234.

[68] T. R. Prabhakar and Sharda Gupta, Bernoulli polynomials of the second kind and general order. Indian J. pureappl. Math., 11 (10) (1980) 1361–1368.

[69] M. Rahmani, Some results on Whitney numbers of Dowling lattices. Arab. J. Math. Sci., 20(1) (2014) 11–27.

[70] J. Riordan, Combinatorial Identities. Huntington, New York, (1979).

[71] J. Riordan, Derivatives of composite functions. Bull. Amer. Math. Soc., 52 (1946) 664–667.

[72] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis. John Wiley & Sons, New York, (1958). Princeton University Press, Princeton, NJ, (1980).

[73] J. Riordan, Combinatorial Identities. Wiley, New York, (1968).

[74] J. Riordan, An Introduction to Combinatorial Analysis. J. Wiley & Sons, Chichester, (1953).

[75] S. Roman, The umbral calculus. Dover Publ. Inc. New York, 2005.

[76] **Y. Saidi,** Polynômes de Bell et variables aléatoires. Mémoire de magister, Faculté de mathématiques, USTHB, (2012).

[77] H. M. Srivastava, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. J. Math. Anal. Appl., 130 (1988) 509–513.

[78] P. Tempesta, On Appell sequences of polynomials of Bernoulli and Euler type. J. Math. Anal. Appl., 341 (2008) 1295–1310.

[79] R. Tremblay, S. Gaboury and B. J. Fugère, A new class of generalized Apostol–Bernoulli polynomials and some analogues of the Srivastava–Pintér addition theorem. Appl. Math. Lett., 24 (2011) 1888–1893.

[80] P. G. Todorov, On the theory of the Bernoulli polynomials and numbers. J. Math. Anal. Appl., 104 (1984) 309–350.

[81] J. Touchard, Sur les cycles des substitutions. Acta. Mathematica., 70 (1939) 243–297.

[82] W. Wang, Generalized higher order Bernoulli number pairs and generalized Stirling number pairs. J. Math. Anal. Appl., 364 (2010) 255–274.