

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE De L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En : PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par : BENALIA Radia

Sujet

Propriétés Thermodynamiques d'un Système Fortement Couplé en
Présence d'un Confinement Electrostatique

Soutenu publiquement le 26 /09 / 2012, devant le jury composé de :

Mr. Abdelhafid KELLOU Professeur à l'U.S.T.H.B. Président

Mr. Mourad DJEBLI Professeur à l'U.S.T.H.B. Directeur de MEMOIRE

Mr. Djamel BRADAI Professeur à l'U.S.T.H.B. Examineur

Mr. Abdellah SMIDA Professeur à l'U.S.T.H.B. Examineur

Mr. Salem KESSAL Professeur à l'U.S.T.H.B. Examineur

*Avec de bons yeux, de bons microscopes et un peu de curiosité,
le moindre atome, un grain de poussière, un brin d'herbe
peuvent devenir des sources intarissables de merveilles.*

Charles BONNET

Dédicace

*Je dédie ce présent mémoire à toute ma famille, à toutes
mes amies et en particulier à mes parents.*

Remerciements

Le travail présenté dans cette thèse a été entièrement réalisé au sein de l'équipe de Physique des Plasmas du Laboratoire de Physique Théorique de la Faculté de Physique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne (USTHB) d'Alger.

Je tiens tout d'abord à remercier sincèrement le Professeur MOURAD DJEBLI, mon directeur de thèse, avec qui j'ai pris grand plaisir à travailler, dans la rigueur et la bonne humeur. Outre la confiance qu'il m'a témoignée, il a constamment suivi la progression de mon travail pour le mener à bien et à terme. Qu'il trouve ici à travers ces quelques lignes l'expression de mon profond respect et de ma très haute considération.

Je tiens également à remercier le professeur ABDELHAFID KELLOU du laboratoire de Physique Théorique, qui nous a honorés en acceptant de présider le jury de la présente thèse.

Je remercie vivement le professeur FLORENT CALVO du laboratoire de Physique Quantique, IRSAMC, Université Paul Sabatier, Toulouse, France ; pour ses précieuses remarques qui nous ont été très utiles dans ce présent travail.

Mes remerciements les plus vifs vont également au professeur DJAMEL BRADAI du laboratoire de Physique des Matériaux, ainsi qu'au professeur ABDELLAH SMIDA du laboratoire de Physique Théorique, et au professeur SALEM KESSAL du laboratoire de Sciences Nucléaires, pour l'intérêt qu'ils ont manifesté et porté à ce travail en acceptant de prendre part au jury de la présente thèse.

Mes vifs remerciements vont également à tous les membres du Laboratoire de Physique Théorique.

Finalement, je tiens à exprimer ma profonde reconnaissance à mon père, ma mère, ma sœur, mes frères leur inestimable affection, leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés. A tous ces derniers, j'exprime ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

Sommaire

Liste des figures	6
Liste des tableaux	8
Introduction	1
I. Généralités sur les systèmes fortement couplés	4
I.1. Définition d'un plasma	4
I.2. Les cristaux de plasmas poussiéreux	5
I.3. Le réacteur PKE-Nefedov (Plasma Kristall Experiment)	6
I.4. Forces agissant sur les poudres	8
I.5. Processus de charge des grains de poussière	10
I.6. Ecrantage de Debye	12
I.7. La thermodynamique des clusters	Erreur ! Signet non défini.
II. Description du model	15
II.1. Potentiel d'interaction	15
II.2. Potentiel de confinement	16
II.3. Hamiltonien du système	17
II.4. Fluctuation de la charge	19
III. Technique de simulation	21
III.1. Méthode de Monte Carlo	21
III.2. Algorithme de Metropolis	22
III.3. Pas de déplacement	24
III.4. Simulation dans l'ensemble canonique	24
III.5. Approche numérique	26
IV. Résultats	27
IV.1. Les états métastables dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge	27
IV.2. Configuration électronique des atomes artificiels	39
IV.3. Fusion des cristaux de Coulomb	41
IV.3.1. Extraction de la valeur de la température critique	42
IV.3.2. Effet du confinement	46
IV.3.3. Effet de l'écrantage	51
IV.3.4. Effet du nombre de particules	Erreur ! Signet non défini.
IV.3.5. Le temps de calcul	65
Conclusion	68
Bibliographie	70

Liste des figures

Figure. I.1 : image microscopique des particules poussiéreuses.

Figure. I.2 : image des cristaux de plasma formés dans le laboratoire. Les grains de poussière sont injectés dans un plasma d'Argon on remarque clairement la structure régulière.

Figure. I.3 : Schéma du dispositif expérimental.

Figure. I.4 : dispositif expérimental pour observer les cristaux de Coulomb.

Figure. I.5 : Ecrantage des grains de poussière chargés négativement dans un plasma complexe de laboratoire.

Figure III.1 : Organigramme de la méthode de Monte-Carlo.

Figure IV.1 : Le rayon de la couche externe de l'état le plus stable en fonction du nombre de grains.

Figure IV.2 : Nombre des états métastables en fonction de nombre de particules $N=1, \dots, 20$ pour les potentiels Coulombien et Yukawa sans fluctuation de la charge.

Figure IV.3 : Nombre des états métastables en fonction de nombre de particules $N=1, \dots, 20$ pour les potentiels Coulombien et Yukawa avec fluctuation de la charge.

Figure IV.4 : Nombre d'occupation des couches l'état le plus stable dans le cas du potentiel Coulombien sans fluctuation de la charge.

Figure IV.5 : Nombre d'occupation des couches du premier métastable dans le cas du potentiel Coulombien sans fluctuation de la charge.

Figure IV.6 : Configurations des trois états parmi les 99 métastables du système avec fluctuation de la charge pour $N=15$. (a) potentiel Coulombien - (b) potentiel Yukawa .

Figure IV.7 : Mouvement des grains poussières autour de leur position d'équilibre.

Figure IV.8 : les trajectoires des grains dans le cas $N=5$, $a=1$ et $k=0$ avec la température $T=3,75 \cdot 10^{-5} T_0$.

Figure IV.9 : les trajectoires des grains dans le cas $N=15$, $a=1$ et $k=0$ avec la température

$$T=4,5.10^{-5} T_0.$$

Figure IV.10 : la capacité calorifique volumique en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$ et $k=1,5$ sans fluctuation de la charge

Figure IV.11 : L'énergie interne en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$ et $k=1,5$ sans fluctuation de la charge.

Figure. IV.12 : Etats fondamentaux des grains de poussiéreux pour $N = 20$, en fonction du paramètre de l'excentricité ($a=1, 0.7, 0.4, 0.2$)

Figure IV.13 : L'énergie interne en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ et $k=0$.

Figure IV.14: La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=15$ pour $k=3$, sans fluctuation de la charge.

Figure IV.15: La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=15$ pour $k=3$, avec fluctuation de la charge.

Figure IV.16 : La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ pour $k=0$.

Figure IV.17 : La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ pour $k=0, 3$, (a)- sans fluctuation de la charge, (b)-avec fluctuation de la charge.

Figure IV.18 : Etapes de la construction d'un diagramme de Voronoï

Figure IV.19. : Diagramme de Voronoï pour des vrais grains.

Figure IV.20 : Diagramme de Voronoï pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

Figure IV.21 : L'énergie interne en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=60$ pour $a=1$.

Figure IV.22 : L'énergie interne en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

Figure IV.23: La température de fusion en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=15$ pour $a=1$, sans fluctuation de la charge.

Figure IV.24: La température de fusion en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=15$ pour $a=1$, avec fluctuation de la charge.

Figure IV.25: La température de fusion en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=60$ pour $a=1$.

Figure IV.26: L'énergie interne en fonction du nombre de grains, $k=3$, $a=1$.

Figure IV.27 : La température de fusion en fonction du nombre de grains, $k=3$, $a=1$.

Figure IV.28 : La température de fusion en fonction du nombre de grains.

Figure IV.39 : caractéristiques des machines de calcul.

Figure IV.30 : Le temps de calcul en fonction du nombre de grains

Figure IV.31: Le temps de calcul en fonction du nombre de grains pour trois différentes machines sans fluctuation de la charge.

Liste des tableaux

Tableau IV.1 : N nombre de particules, M nombre des états métastables, E énergie de chaque état, ΔE différence en énergie, **config** configuration de chaque état, R rayon de chaque couche, L largeur de chaque couche, N_s nombre de particules dans chaque couche, dans le cas du potentiel Coulomb.

Tableau IV.2. : N nombre de particules, M nombre des états métastables, E énergie de chaque état, ΔE différence en énergie, **config** configuration de chaque état, R rayon de chaque couche, L largeur de chaque couche, N_s nombre de particules dans chaque couche, dans le cas du potentiel Yukawa.

Tableau IV.3 : Les configurations des états métastables dans le cas avec fluctuation de la charge.

Tableau IV.4 : Configuration électronique des atomes artificiels pour les potentiels de Yukawa et de Coulomb dans le cas sans fluctuation de la charge.

Introduction

La physique des plasmas [1] est l'étude des états ionisés de la matière. Les plasmas se produisent quand la matière est chauffée à une température plus grande que 10^4 degrés Celsius. On dit souvent que 99% de la matière visible de l'univers est à l'état plasma, c'est-à-dire, sous la forme d'un gaz électrisé où les atomes sont dissociés en ions positifs et en électrons. On rencontre les plasmas dans les étoiles, les ceintures de Van Allen, le vent solaire et dans l'atmosphère où le plasma se manifeste par la lueur des aurores boréales. D'autre part, dans notre vie quotidienne, les plasmas sont rencontrés sous la forme d'un gaz conducteur à l'intérieur des tubes fluorescents ou dans les néons. Une définition correcte de l'état plasma peut s'énoncer comme suit: un plasma est un gaz quasi- neutre, composé de particules chargées et de particules neutres qui exhibent un comportement collectif.

En 1934, Wigner a présenté une théorie décrivant le comportement des électrons dans les métaux à basse température [2]. Il a montré que ces électrons formaient un réseau régulier dû seulement à l'interaction coulombienne. L'observation expérimentale d'un tel comportement dans les solides a été rendue possible au début des années 90 [6].

Les cristaux de Wigner (on les nomme aussi clusters quand le nombre N de particules est petit ; $N < 1000$) ont été aussi observés dans les plasmas poussiéreux. De tels plasmas sont composés en plus des ions, des électrons et des particules neutres, de particules massives ayant des charges considérables. Ces dernières sont connues sous le nom de grains de poussière ou *dust*. Depuis les premières observations expérimentales des grains de poussière [3], un intérêt particulier a été porté sur la proposition des modèles physiques pour les plasmas poussiéreux (*dusty plasmas*).

La présence des grains de poussière dans le plasma modifie considérablement ses caractéristiques et donne lieu à des effets et phénomènes qui n'existaient pas dans les plasmas classiques dans lesquels les effets collectifs des grains de poussière sont faibles. [4].

Le plasma cristallin a été prédit comme un nouvel état dans les plasmas complexes de laboratoire en 1986 [5] et trouvé expérimentalement à l'institut de Max Planck " Institute for Extraterrestrial Physics " en 1994 [6,7]. L'étude d'un tel système présente de nombreux

avantages, surtout expérimentaux. La taille macroscopique des grains de poussière qui portent de grandes charges, a comme conséquence une très forte interaction entre les grains [8]. La grande masse des particules ralentit leur mouvement et rend ces systèmes très intéressants à étudier.

En raison des grandes charges portées par les grains de poussière, l'énergie électrostatique de l'interaction entre elles devient importante. Pour cette raison, les plasmas poussiéreux sont fortement couplés et peuvent être réalisés ou manipulés beaucoup plus facilement que ceux d'ions et d'électron, malgré leur concentration qui est très inférieure à celle des électrons et des ions.

Les propriétés des plasmas poussiéreux sont beaucoup plus diverses que celles des plasmas composés d'électrons et d'ions. En outre, la charge des particules de poussière n'est pas fixe. Elle se détermine par les paramètres environnants et peut changer dans l'espace et dans le temps. D'ailleurs, les fluctuations de la charge sont présentes même pour des paramètres constants vu la nature stochastique du processus de charge.

Plusieurs applications technologiques ont stimulé le développement de la physique des plasmas : les radiocommunications qui utilisent la réflexion des ondes sur l'ionosphère, les traitements de surface par plasma en micro-électronique (gravure et dépôt de films minces), les lasers à gaz, le découpage des métaux par chalumeau à plasma, la rentrée des objets spatiaux dans l'atmosphère. L'application la plus importante est la réalisation de réacteurs à fusion thermonucléaire, produisant des plasmas de Deutérium ou de mélange Deutérium-Tritium. En effet, la présence de poussières dans les réacteurs radiofréquences (RF) utilisés pour la micro-électronique est responsable de multiples défauts sur les surfaces traitées [9,10]. De nombreux travaux ont débuté pour comprendre la formation et la croissance de ces poussières [11-12], leur dynamique au sein du plasma et les modifications qu'elles entraînent sur celui-ci [13,14], ainsi que leur thermodynamique [15].

Le travail réalisé dans ce mémoire est organisé comme suit:

Le premier chapitre comprend des généralités sur les structures fortement couplées et des notions de base de la physique des plasmas poussiéreux ainsi que les principales caractéristiques des grains sont résumées.

Le deuxième chapitre est consacrée à la description du modèle physique utilisé dans ce travail, en définissant les différents potentiels qui gouvernent le système, aussi la fluctuation de la charge des grains est décrite.

Dans le troisième chapitre on introduit la technique numérique par laquelle nous avons eu nos résultats. Ces derniers sont détaillés dans le quatrième chapitre. On termine ce mémoire par une brève conclusion où est résumé l'essentiel de notre travail.

I. Généralités sur les systèmes fortement couplés

I.1. Définition d'un plasma

Un plasma est un gaz dilué ionisé, formé de particules chargées (ions et électrons) et éventuellement de particules neutres. La terminologie est due au chimiste et physicien Langmuir en 1928, qui a observé des oscillations dans un gaz où survenait une décharge électrique et a choisi le nom par analogie visuelle avec le plasma sanguin. La principale caractéristique d'un plasma est la suivante : contrairement à un gaz, dans lequel les particules sont neutres, les particules sont chargées.

Il apparaît qu'un gaz chauffé suffisamment passe à l'état de plasma : pour cette raison, l'état plasma est souvent considéré comme le quatrième état de la matière. Les plasmas peuvent être trouvés à l'état naturel dans l'univers, citons les étoiles, l'espace interstellaire, la foudre... En fait, remarquablement, il se trouve que près de 99% de la matière visible dans l'univers est faite de plasma. Ces dernières décennies, de nombreux plasmas ont été créés en laboratoire, avec souvent des objectifs industriels. On pensera par exemple aux écrans "plasma", ou aux réacteurs à fusion nucléaire.

- Les plasmas poussiéreux :

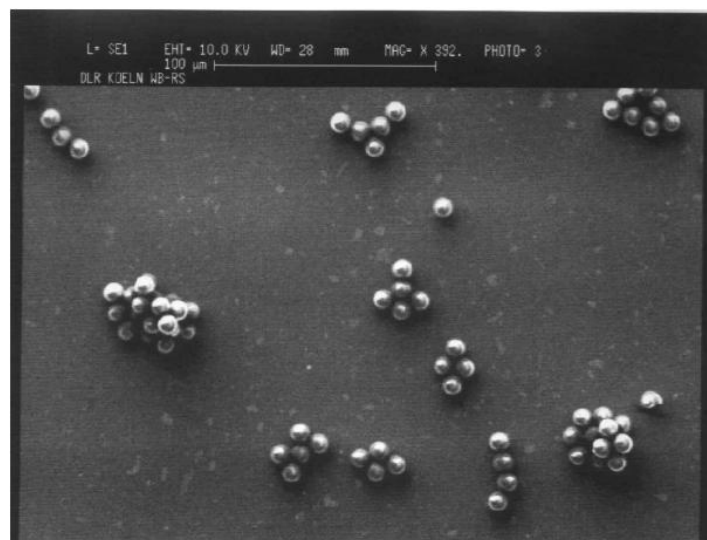


Figure I.1 : image microscopique des particules poussiéreuses 1

¹ Max Planck Institute for Extraterrestrial Physics.

Ces plasmas contiennent trois espèces de particule : des électrons, des ions et des poussières dont le rapport entre la masse et la charge est très différent de celui des électrons ou des ions, ce rapport est en lui même une variable dynamique. Ces poussières acquièrent une charge électrique de plusieurs façons. Le bombardement par les électrons est le mécanisme le plus usuel dans les plasmas de laboratoire mais la photo ionisation ou la désintégration nucléaire peuvent jouer un rôle dans les plasmas dans l'espace ou en astrophysique. La photo ionisation rend le grain de poussière positif parce que ce procédé extrait des électrons de la matière. La désintégration nucléaire engendre par contre une charge du signe opposé à celle de la particule qui est émise lors de la désintégration. Par exemple, l'émission d'une particule alpha engendre une charge négative.

I.2. Les cristaux de plasmas poussiéreux

Les cristaux de plasmas sont formés sous certaines conditions dans les plasmas poussiéreux. Les grains de poussière se regroupent dans un assemblage comme un cristal. Ceci permet l'investigation des propriétés de la matière condensée au niveau cinétique, c'est-à-dire les processus de base comme la fusion.

Ces cristaux ont été découverts en 1994 [6] et font l'objet de plusieurs études théoriques ainsi qu'expérimentales.

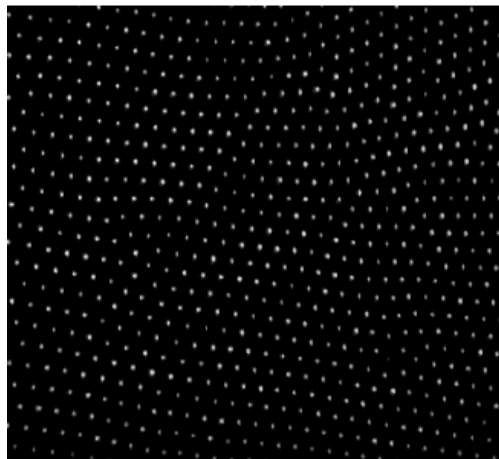


Figure I.2 : Formation d'un cristal par les grains de poussière dans le plasma [52].

La force répulsive entre deux grains de poussière chargés négativement est très élevée pour des grains fortement chargés. À l'extrême, le potentiel électrostatique entre les grains pourrait dépasser leur énergie cinétique de telle sorte que les grains auraient tendance à former un réseau ordonné, un état cristallisé. Cette possibilité a été suggérée pour la première fois par Ikezi, H [38] et a été observé expérimentalement par Chu, J.H., I, L [39] et par Melzer, et al. [40].

-Applications des cristaux de plasmas poussiéreux :

Dans la technologie leur étude sert dans la compréhension des contaminations par la poussière dans la production des microsystèmes, la stabilisation des cellules solaires, les poussières dans les tokamaks.

I.3. Le réacteur PKE-Nefedov (Plasma Kristall Experiment)

Ce réacteur a été conçu à l'origine pour des expériences en microgravité [28]. C'est une décharge radiofréquences (RF) excitée en mode push-pull. Elle est constituée de deux électrodes parallèles de 4 cm de diamètre séparées de 3 cm. La puissance injectée varie entre 0 W et 4 W. Les poudres sont formées dans un plasma d'argon (0,2 – 2 mbar) par pulvérisation d'une couche de polymère déposée sur les électrodes et composée de poussières injectées précédemment (3, 4 μ m, mélamine formaldéhyde).

Une description plus détaillée ainsi que quelques travaux en lien sont donnés dans les références [28,29, 22].

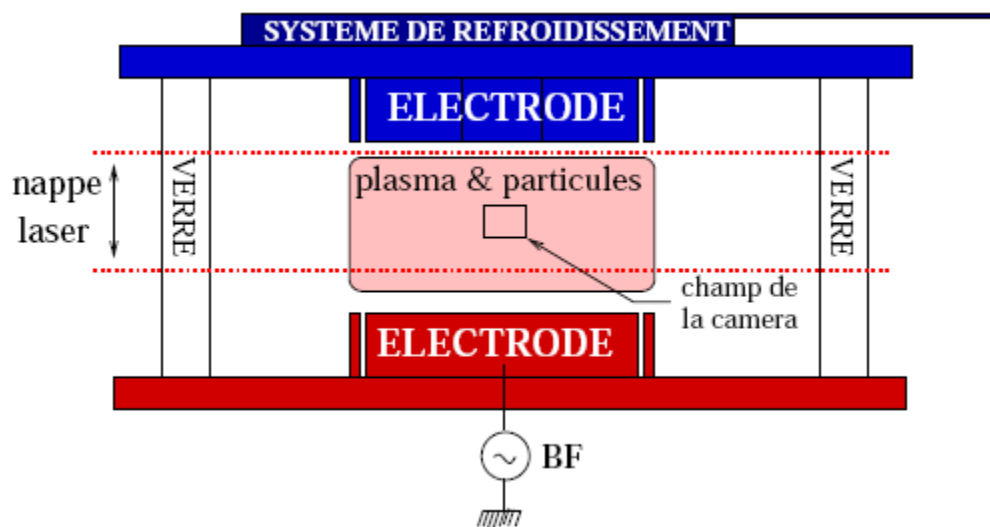


Figure. I.3 : Schéma d'un dispositif expérimental [27]

L'électrode supérieure est refroidie (Figure. I.3) créant ainsi une force de thermophorèse compensant la gravité [27] quand le plasma est éteint. Pour mesurer la charge des poudres, une tension sinusoïdale, créée par un générateur de fonctions, d'amplitude ± 30 V et de fréquence 1 Hz est appliquée à l'électrode inférieure. Le champ électrique sinusoïdal basse fréquence induit $E(r, t)$ entraîne l'oscillation des poudres si celles-ci gardent une charge électrique.

Une nappe laser de faible épaisseur éclaire le nuage de poudres et la lumière diffusée est enregistrée à 90° par des caméras CCD (coupled channel device) à 25 images par seconde. Les signaux vidéo sont transférés sur un ordinateur grâce à une carte d'acquisition sur une échelle de gris de 8 bits de profondeur et une résolution de 560×700 pixels. Afin d'éviter les effets de bord, le domaine analysé pour la mesure des charges est restreint à une région de $8.53 \times 5.50 \text{ mm}^2$ centrée au milieu de l'espace inter-électrode. Les trajectoires des poudres peuvent être obtenues par superposition des images vidéo. Les coordonnées des grains sont relevées toutes les 3 images et l'amplitude des oscillations est obtenue grâce à ces mesures.

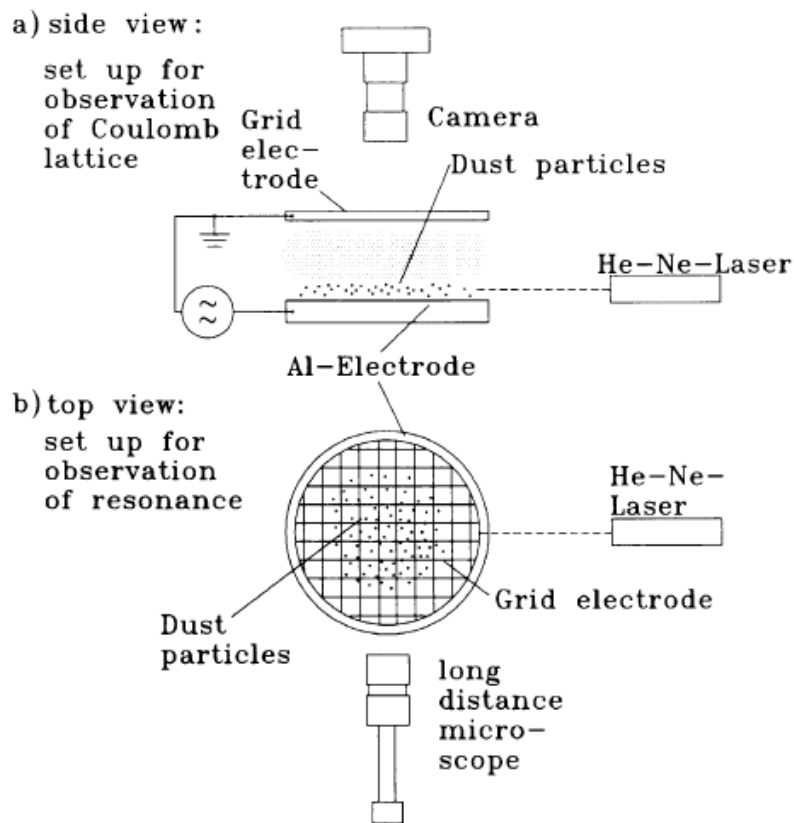


Figure I.4 : dispositif expérimental pour observer les cristaux de Coulomb [49]

I.4. Forces agissant sur les poudres

Les poudres immergées dans un plasma sont soumises à plusieurs forces qui, soit les confinent dans ce plasma soit les éjectent (vers les parois ou les ports de pompage) [18] . Parmi ces forces on cite: les forces électrostatiques, la gravité, la force de thermophorèse, la force de friction des ions et la force de friction des neutres.

Lorsque la décharge est éteinte, les forces qui continuent d'agir sur les poudres sont le poids F_g , la force de thermophorèse F_T et la friction avec les neutres F_{dn} . Afin de vérifier si les poussières gardent une charge électrique à l'extinction du plasma, un champ électrique sinusoïdal basse fréquence est créé par la polarisation de l'électrode inférieure engendrant le cas échéant une force électrique F_E sur les poudres. Le poids est compensé par la force de thermophorèse et les frottements des particules neutres amortissent les oscillations induites par la force électrique.

Le poids de la particule est donné par:

$$F_g = (4/3)\pi r_d^3 \cdot \rho g \quad (1.1)$$

Où g est l'accélération gravitationnelle, r_d le rayon de la poudre, et ρ sa masse volumique.

La force de friction due aux neutres est donnée par [19]:

$$F_{dn} = -(8/3)\sqrt{2}\pi r_d^2 m_n n_n v_{Tn} \left(1 + \alpha_{ac} \frac{\pi}{8}\right) (V_d - V_n) \quad (1.2)$$

Où m_n est la masse des atomes neutres du gaz, n_n leur densité, v_{Tn} leur vitesse thermique avec $T_n = T$ la température du gaz neutre, k_B la constante de Boltzmann, α_{ac} le coefficient d'accommodation, V_d la vitesse des poudres et V_n la vitesse moyenne des atomes du gaz neutre.

La force électrique s'écrit:

$$F_E(r, t) = Q_d E(r, t) \quad (1.3)$$

Où Q_d est la charge électrique de la poudre et $E(r, t)$ le champ électrique entre les électrodes après l'extinction du plasma. Durant la phase post-décharge, la densité du « plasma » devient rapidement très faible et $E(r, t)$ peut être approximée par le champ au dessus d'un disque chargé. En prenant en compte la taille de la zone étudiée, celle des électrodes et le fait que l'on étudie une région proche du centre du réacteur, seule la composante verticale du champ électrique intervient.

L'expression de la force de thermophorèse doit quant à elle être choisie soigneusement. En effet, elle dépend fortement du nombre de Knudsen $K_n = l/r_d$ [20] où l est le libre parcours moyen des espèces du gaz.

Les mesures expérimentales ont permis d'estimer la taille moyenne des grains, de forme sphérique, à environ 200 nm et 800 nm [22]. Cela donne, en utilisant les résultats de Varney [21] pour la section efficace atome-atome, un nombre de Knudsen $250 < K_n < 1000$.

Par conséquent, nous sommes en régime moléculaire où une poudre peut être considérée comme une très grosse molécule. Beaucoup de théories ont été développées [23,20] et utilisées [27, 24,20] pour la thermophorèse en régime moléculaire. L'équation la plus souvent employée est la suivante et qui a été vérifiée expérimentalement [25,26]:

$$F_T = -\left(\frac{32}{15}\right)r_d^2 (k_{tr}/v_{Tn})\nabla T \quad (1.4)$$

Où ∇T est le gradient de température dans le gaz et k_{tr} la partie transrationnelle de la conductivité thermique. Un autre effet important qui doit être pris en compte pour estimer la force de thermophorèse est l'influence du volume fini de gaz. Si la pression est suffisamment basse, le libre parcours moyen du gaz peut être comparable aux longueurs caractéristiques du dispositif expérimental et le gaz ne peut plus être considéré comme un milieu continu. Sous de telles conditions, un nombre de Knudsen supplémentaire doit être ajouté [20]

$K_{nL} = l/L$ où L est la longueur caractéristique du réacteur. Si l'espacement entre les électrodes est de $L = 3$ cm donnant $K_{nL} \sim 5 \cdot 10^{-3}$ indiquant que l'on peut bien considérer notre gaz comme un milieu continu.

I.5. Processus de charge des grains de poussière

On sait depuis longtemps que les particules poussiéreuses immergées dans un plasma acquièrent une charge positive ou négative.

Beaucoup de méthodes par lesquelles les grains de poussière acquièrent une charge, selon l'environnement et la taille des grains poussiéreux, existent. La plupart des plasmas astrophysiques et de laboratoire comprennent des courants primaires (collection d'électrons et d'ions), l'émission photo-ionique ou l'émission secondaire d'électrons.

- Emission d'électron secondaire

Lorsqu'une particule (ion ou molécule) du plasma est suffisamment énergétique, elle entre en collision avec un grain. Ce dernier peut céder un électron à l'ion ou à la molécule, comme il peut directement libérer des ions ou des électrons. L'ionisation par impact peut ainsi mener au chargement d'un grain. Cet effet augmente avec la densité ou la vitesse des molécules du gaz les électrons très énergétiques qui entrent en collision avec un grain peuvent causer l'émission des électrons secondaires. En fonction de la distance parcourue sur le grain, l'énergie initiale de l'électron est progressivement perdue au profit de la production d'électrons secondaires. Ceux-ci diffusent vers la surface et s'échappent du grain, s'ils ne sont pas absorbés entre le lieu d'émission et la surface. Le nombre d'électrons secondaires produits par un électron primaire incident s'exprime par un coefficient d'émission secondaire, dépendant de l'énergie de l'électron incident et du rayon du grain [19,47].

- Collection des particules

Dans un plasma en équilibre thermodynamique les électrons et les ions ont presque la même température et des énergies cinétiques semblables. Les ions étant beaucoup plus massifs que les électrons, ces derniers ont généralement des vitesses beaucoup plus élevées. Pour cette raison, plus d'électrons heurteront les grains de poussière et les particules tendront à acquérir une charge négative. Les grains de poussière ont une masse beaucoup plus élevée que les ions et les électrons, leur vitesse thermique est négligeable par rapport à la vitesse des particules de plasma. Ainsi, les courants de chargement dépendront des vitesses des électrons et des ions et de la section efficace de diffusion des grains de la poussière. Si les grains de poussière ont une vitesse significative, ceci doit être pris en considération. Pour simplifier, ce mémoire étudiera seulement le cas où la vitesse du grain de poussière est négligeable.

- Emission photo-ionique

Lorsque un grain chargé négativement est illuminé par un flux de photons avec une énergie ($h\nu$) individuelle supérieure à une énergie de seuil (W), il peut émettre des électrons. La photo-émission dépend de la longueur d'onde des photons incidents, de la surface et de la nature des grains. Pour des grains de nature métallique, la valeur de l'énergie de seuil est

inférieure à 5 eV. Pour libérer un électron d'un grain qui est devenu positivement chargé, le photon incident doit approximativement avoir une énergie $h\nu > W$. Il est utile de mentionner que le travail d'extraction des électrons de la surface des grains, est inférieur à celui des atomes pris individuellement [48].

I.6. Ecrantage de Debye

Dans les plasmas complexes de laboratoire à basse température, le grain se charge négativement par la collection des électrons grâce à leur grande mobilité. Un potentiel électrique, au niveau de la surface se crée et attire autour du grain les ions positifs qui vont écranter son potentiel. La sphère d'ions qui se forme autour du grain est appelée sphère de Debye et son rayon est appelé longueur de Debye (voir Figure. I.5). Une telle mixture de plasma et de grains de poussière possède trois échelles de longueur caractéristiques. Ce sont le rayon du grain r_d , la longueur de Debye, et la distance moyenne inter-grains a . Au-delà de la distance λ_D , l'influence du champ électrique exercé par le grain n'est plus ressentie par les autres espèces présentes dans le plasma.

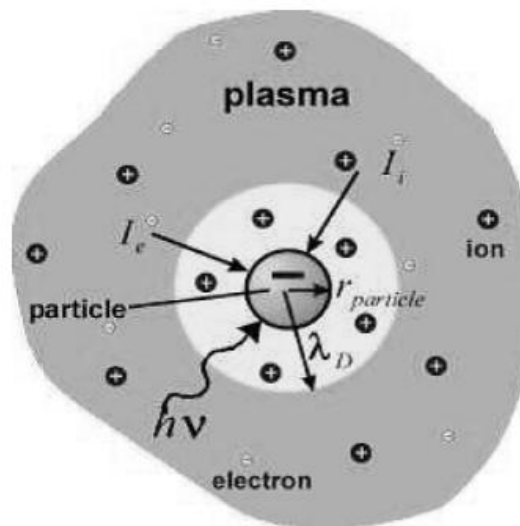


Figure. I.5 : Ecrantage des grains de poussière chargés négativement dans un plasma complexe de laboratoire.

A l'état d'équilibre thermodynamique, l'expression de la longueur de Debye déterminée à partir de l'équation de Poisson s'écrit [20] :

$$\lambda_D = \frac{\lambda_{De} \lambda_{Di}}{\sqrt{\lambda_{De}^2 + \lambda_{Di}^2}} \quad (1.5)$$

Où $\lambda_{De,i} = (T_{e,i}/4\pi n_{e,i} e^2)^{1/2}$ représente le rayon de Debye électronique (ionique), $T_{e(i)}$ la température électronique (ionique) exprimée en unité d'énergie, $n_{e(i)}$ la densité électronique (ionique) à l'équilibre et e la charge élémentaire. Dans le cas où $T_e \gg T_i$ et $n_{i0} > n_{e0}$, λ_D est de l'ordre de λ_{Di} ($\lambda_D \sim \lambda_{Di} \gg \lambda_{De}$). Dans un plasma poussiéreux typique, le rayon r_d est généralement petit devant la longueur λ_D . Lorsque $r_d \ll \lambda_D \ll a$, les grains de poussière sont considérés comme isolés dans le plasma complexe. Par contre, dans le cas où $r_d \ll a < \lambda_D$, les effets collectifs entre les grains deviennent importants. Les grains de poussière sont assimilés à des particules ponctuelles massives semblables à des ions à charge multiple. La charge totale portée par les grains peut modifier sensiblement l'équilibre des densités d'ions et d'électrons. En se rappelant qu'en l'absence de perturbations extérieures, un plasma poussiéreux est globalement neutre.

Dans le plasma, une grande densité de grains chargés négativement implique une densité d'électrons faible, une température électronique plus élevée et un écrantage traduit par les ions de plasma.

La longueur "de Debye" λ_D est une échelle spatiale typique et d'importance fondamentale en physique des plasmas. Elle peut être interprétée physiquement de la manière suivante : supposons que la longueur caractéristique d'observation L_0 soit grande devant λ_D ; alors à cette échelle d'observation, il n'y a pas de séparation de charge, ce qui signifie qu'en tout point la densité des électrons semble égale à celle des ions. Autrement dit, le plasma n'est considéré comme non localement neutre que sur des longueurs d'observation inférieures à λ_D .

I.7. La thermodynamique des clusters

Les propriétés thermodynamiques sont en générale des propriétés macroscopiques, qui interprètent le comportement microscopique du système, c-à-dire pour étudier une propriété

macroscopique on doit préciser l'ensemble qu'on a entrain d'étudier. Dans notre cas l'ensemble est dit canonique, il est caractérisé par des grandeurs considérées constantes : N le nombre de particules, T la température et V le volume du système pour trois dimensions et S surface pour deux dimensions. Analytiquement l'étude d'un ensemble canonique compose des particules en interaction semble difficile et il est soumis à des conditions qui peuvent être loin de la réalité ; pour cela la simulation est la clef pour résoudre beaucoup de problèmes.

Parmi les propriétés thermodynamiques on s'intéresse à l'énergie interne E , la chaleur spécifique à volume constant C_v et une autre grandeur importante qui désigne bien le comportement microscopique c'est la température T qu'après la théorie cinétique définit l'énergie cinétique microscopique du système.

II. Description du modèle

Un plasma complexe contient différentes espèces chargées, des électrons, des ions ainsi que des grains de poussière qui sont chargés positivement ou négativement selon les processus de charge ayant lieu [34, 35, 36]. Vu la taille qui est assez grande par rapport aux autres espèces du plasma, les grains sont hautement chargés [34, 37].

II.1. Potentiel d'interaction

Modéliser l'interaction entre particules qui sont d'une part massives et d'autre part porteuses de charge considérable, est un problème qui reste ouvert. Dans ce travail, on étudiera deux potentiels d'interaction, en considérant dans tout ce qui suit, des grandeurs isotropes, c'est-à-dire dépendant uniquement de la distance r entre deux particules, considérées de forme sphériques.

- Potentiel Coulombien

Entre deux particules de charge Z_1 et Z_2 , il existe des forces de répulsion électrostatique dites coulombiennes:

$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon r} \quad (\text{II.1})$$

Où ϵ est la constante diélectrique et r la distance entre les particules de charge respectivement Z_1 et Z_2 . Cette interaction de longue portée, implique un très grand nombre de particules dans l'interaction. En général, vu la présence d'un plasma de base (ions et électrons) dans les plasmas complexes, elle n'est pas souvent utilisée. On fait appel à l'interaction coulombienne pour pouvoir comparer et voir l'influence des particules légères (ions, électrons).

- Potentiel de Yukawa

La présence de grain de poussière, va attirer les électrons ou les ions. La concentration de ces particules autour d'un grain agit comme un écran, faisant en sorte que le potentiel d'une charge quelconque du plasma n'est plus ressenti au-delà d'une distance de l'ordre de λ_D , longueur de Debye. Il a été montré, par la résolution de l'équation de Poisson que, le potentiel électrostatique d'un grain dans un plasma à une distance r est donné par :

$$U(r) = \frac{Z_1 Z_2}{4\pi\epsilon r} \exp\left(-\frac{r}{\lambda_D}\right) \quad (\text{II.2})$$

Où le terme exponentiel manifeste cet effet d'écran qui réduit fortement la portée qu'aurait eu le potentiel de grain.

II.2. Potentiel de confinement

Le confinement dans un plasma astrophysique est, soit gravitationnel (la plupart des étoiles sont des plasmas confinés par la gravité) ou bien magnétique (ceintures de radiations dans la magnétosphère terrestre) [43]. Dans un plasma de laboratoire, différentes configurations électriques et magnétiques sont utilisées. Par exemple, les pièges de Paul, les potentiels électrostatiques dans les décharges radiofréquence (RF) et courant-continu (DC). Les grains de cristaux coulombiens sont suspendus (confinés latéralement) au-dessus de l'électrode inférieure dans une région où la somme des différentes forces électrique et gravitationnelle appliquées à chaque grain se compensent [44].

Le potentiel de confinement elliptique (2D) est défini par l'expression suivante :

$$V_c = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} m (\omega_{0x}^2 x_i^2 + \omega_{0y}^2 y_i^2) \quad (\text{II.3})$$

Où x_i, y_i sont les coordonnées cartésiennes du grain dans le plan horizontal. ω_{0x}, ω_{0y} sont les fréquences de résonance, le rapport entre ces deux fréquences définit le paramètre d'anisotropie $\mathbf{a}$. Lorsque $\mathbf{a} = 1$, un confinement isotropique (parabolique) se présente.

Dans les conditions du couplage fort, le comportement des grains de poussière dans un plasma de laboratoire est décrit essentiellement par deux potentiels électrostatiques : le potentiel d'interaction entre les grains et le potentiel de confinement appliqué [41- 42]. Dans le cas d'un plasma complexe fortement couplé, les grains interagissent fortement entre eux par le biais du potentiel de Yukawa à cause de la présence d'un plasma de base qui assure la quasi-neutralité. Le couplage entre les grains est quantifié par un paramètre Γ . Lorsque ce dernier dépasse une valeur critique, Γ_c , les grains de poussière s'organisent en formant une phase liquide ou solide dans le plasma. Sachant que Γ_c dépend du potentiel de confinement, ce dernier contribue d'une façon considérable à la détermination des propriétés de ces phases ordonnées. Outre cette distribution, la présence d'un confinement électrostatique est primordiale pour la cohésion d'un système de nombre fini de particules.

II.3. Hamiltonien du système

Le modèle considéré s'appuie essentiellement sur l'interaction entre les particules, qui régit le comportement des grains. Cette interaction en principe est Coulombienne. Cependant la présence de particules chargées autour de chaque particules produit un effet d'écran. Ce dernier est représenté par un potentiel du type Debye-Hückel ou Yukawa. Il est important de noter que la contribution de l'effet d'écran dépend de plusieurs paramètres, comme les densités des différentes espèces, les températures...Donc on doit toujours se référer au potentiel coulombien. Ce dernier peut représenter, dans beaucoup de situations, l'interaction entre les grains dans les plasmas cristallins. L'énergie du système peut être décrite par l'Hamiltonien:

_ Energie du système dans le cas du potentiel de Coulomb :

$$H = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} m (\omega_{0x}^2 x_i^2 + \omega_{0y}^2 y_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} \quad (II.4)$$

_ Energie du système dans le cas du potentiel de Yukawa :

$$H = \sum_{i=0}^N \frac{1}{2} m (\omega_{0x}^2 x_i^2 + \omega_{0y}^2 y_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon r_{ij}} \exp\left(-\frac{r_{ij}}{\lambda_D}\right) \quad (II.5)$$

L'énergie normalisée du système est donnée par :

_ Energie normalisée dans le cas du potentiel de Coulomb, après le changement de variables suivant : $H = E_0 \tilde{H}$ et $r = r_0 \tilde{r}$ expression du potentiel de Coulomb devient :

$$\tilde{H} = \frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon E_0 r_0} \left[\sum_{i=0}^N \frac{m \omega_{0y}^2}{2(Ze)^2} (\alpha x_i^2 + y_i^2) r_0^3 + \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|} \right] \quad (II.6)$$

Avec : $\alpha = \frac{\omega_{0x}^2}{\omega_{0y}^2}$ qui est un paramètre d'excentricité (ou dit paramètre d'anisotropie).

On pose : $\gamma = \frac{m \omega_{0y}^2}{2}$

On obtient les conditions suivantes: $r_0 = \left(\frac{(Ze)^2}{4\pi\epsilon \gamma} \right)^{\frac{1}{3}}$

et $E_0 = \gamma r_0^2$ représente l'énergie d'une seule particule.

Ainsi l'hamiltonien normalisé s'écrit:

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^N (\alpha \tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \frac{1}{|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|} \quad (II.7)$$

L'énergie normalisée dans le cas du potentiel de Yukawa, On suivra les mêmes procédures de normalisation, on obtiendra :

$$\tilde{H} = \sum_{i=0}^N (\alpha \tilde{x}_i^2 + \tilde{y}_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \frac{\exp(-k|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|)}{|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|} \quad (II.8)$$

Avec : $k = \frac{r_0}{\lambda_D}$ la constante d'écrantage, le fait d'écrire $K=0$ cela veut dire que la longueur de Debye est très grande, donc pas d'effet d'écran.

Ces énergies ont été minimisées par la méthode de Monte-Carlo, en partant d'un large ensemble de conditions initiales différentes afin de trouver tous les minimas locaux, puis le minimum global.

II.4. Fluctuation de la charge

En fait les fluctuations aléatoires de la charge sont toujours présentes dans les plasmas poussiéreux, dues à la nature discrète des courants chargeant les grains poussiéreux.

Si on considère un plasma de laboratoire typique faiblement ionisé dans lequel les grains de poussière sont chargés par le bombardement électronique. Une charge négative s'accumule sur la poussière parce que les électrons sont plus légers que les ions et généralement plus chauds et ont donc une vitesse plus élevée que les ions. Conséquemment, quand un grain de poussière est introduit dans le plasma, il est assujéti à un flux d'électrons beaucoup plus élevé que le flux d'ions et se charge donc négativement. La charge négative devient éventuellement suffisamment grande pour atténuer le flux d'électrons vers le grain. De plus, cette charge négative accélère les ions vers le grain, et augmente donc le flux d'ions vers le grain. La charge du grain de poussière atteint un équilibre lorsque les flux d'électrons et d'ions deviennent égaux. Cet équilibre est dynamique parce qu'il est engendré par des flux continus de plasma vers le grain de poussière. Une source externe est donc requise pour régénérer les charges dans le plasma, sinon toutes les charges du plasma s'accumuleraient sur le grain de poussière. Ce processus de charge du grain de poussière est tout à fait similaire au développement du potentiel flottant d'une sonde isolée plongée dans le plasma.

La charge des grains poussiéreux n'est pas uniforme, à cause de la variation de leurs tailles. Chaque grain possède sa propre charge à l'équilibre. Même la nature des courants de charge n'est pas stable, ce qui mène toujours à des fluctuations de la charge. Pendant plusieurs années, on supposait que les fluctuations de charge obéissaient à la statistique de Poisson, la charge varie selon la racine carrée de la charge moyenne [30]. En 1994 Cui et Goree ont développé un modèle illustrant la variation de la charge [31].

Les courants responsables du chargement des grains de poussière sont dus en réalité à des opérations d'absorption d'électrons et d'ions ou d'émission, ce qui implique la variation de la charge autour de sa valeur moyenne, et qui est donnée par [46] :

$$Z_i^l = \langle Z_0 \rangle + \Delta Z_i^l$$

Où Z_i^l est la charge de la ième particule à l'instant l, $\langle Z_0 \rangle$ est la charge moyenne du grain (charge à l'équilibre), et ΔZ_i^l est l'amplitude de la fluctuation de la charge, tel que $|\langle Z_0 \rangle| \gg \Delta Z_i^l$.

Afin d'inclure la fluctuation de charge des particules de poussière dans l'Hamiltonien, ce dernier doit être modifiée comme suit:

_ Energie normalisée dans le cas du potentiel de Coulomb :

$$H = \sum_{i=0}^N (\alpha x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \left(1 + \frac{\Delta Z_i^l}{Z_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta Z_j^l}{Z_0}\right) \frac{1}{|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|} \quad (II.9)$$

Energie normalisée dans le cas du potentiel de Yukawa :

$$H = \sum_{i=0}^N (\alpha x_i^2 + y_i^2) + \sum_{i \neq j}^N \left(1 + \frac{\Delta Z_i^l}{Z_0}\right) \left(1 + \frac{\Delta Z_j^l}{Z_0}\right) \frac{\exp(-k|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|)}{|\tilde{r}_i - \tilde{r}_j|} \quad (II.10)$$

III. Technique de simulation

Suivre le mouvement des particules dans le cas de systèmes composés de plusieurs particules en interaction est quasiment impossible par les équations de Newton. Non pas parce que résoudre un système d'équations de mouvement couplées est une tâche extrêmement rude, plutôt ceci est dû à la self-consistance du problème. Chaque particule subit l'effet du champ électrostatique produit par les autres particules. Ce champ se trouve modifié quand la position de la particule change. Alors, on fait appel aux techniques de simulation qui ne sont autre que de l'expérimentation réalisée par des machines de calcul. Ces techniques dépendent essentiellement de la méthode de simulation et de la puissance des machines de calcul (en terme de rapidité et de mémoire disponible).

III.1. Méthode de Monte Carlo

La méthode Monte Carlo originale a été introduite au début des années 40. Elle doit son nom à l'utilisation des nombres aléatoires, en référence aux casinos situés à Monte Carlo. Elle offre des solutions approximatives à des problèmes mathématiques divers, la méthode s'applique à des problèmes déterministes ainsi qu'à ceux possédant des structures probabilistes, dans lesquelles des nombres aléatoires sont utilisés pour trouver une solution qui peut ne pas être aléatoire. En physique elle s'applique pour des systèmes en équilibre thermodynamique. Lorsque le système se trouve dans son état d'équilibre thermodynamique, son énergie libre est minimale. L'approche Monte Carlo permet de trouver la ou les configurations des particules, qui correspondent à ce minimum. Cette procédure de Monte Carlo est une méthode stochastique qui consiste à générer un enchaînement des propriétés thermodynamiques et structurales obtenues par moyennage. Une distribution de Boltzmann du type $\exp(-E_i/k_B T)$ permet ce moyennage.

La méthode de Monte Carlo a été implémentée par plusieurs algorithmes pour contourner ses lacunes, i.e., temps de calcul très grand. Nous utilisons la méthode stochastique de Monte Carlo enrichie par l'algorithme de Metropolis pour l'augmentation de la température.

III.2. Algorithme de Metropolis

Dans un premier temps, on passe aléatoirement de l'actuel point X_i vers le nouveau point X .

En pratique l'algorithme Monte Carlo de Metropolis est le suivant :

1. On produit aléatoirement un déplacement qui mène à la configuration X à partir d'une configuration aléatoire X_i ;
2. On calcule la différence d'énergie $\Delta E = E(X) - E(X_i)$ entre ces deux conformations ;
3. – si $\Delta E = 0$, alors le mouvement est accepté ;
– si $\Delta E > 0$, on lui attribue la probabilité $p = \exp(-\Delta E/K_B T)$. Le mouvement est accepté si p est supérieur à un nombre aléatoire tiré entre 0 et 1, sinon il est rejeté ;
4. – si le mouvement est accepté, alors X devient la nouvelle configuration X_{i+1} ;
– si le mouvement est rejeté, alors X_i reste la configuration actuelle et est recopiée dans X_{i+1} .

Enfin, il faut remarquer que l'accumulation de données statistiques doit se faire lorsque le mouvement est accepté comme rejeté, le rejet étant tout aussi important que l'acceptation d'une nouvelle configuration caractérisée par des positions spécifiques de toutes les particules.

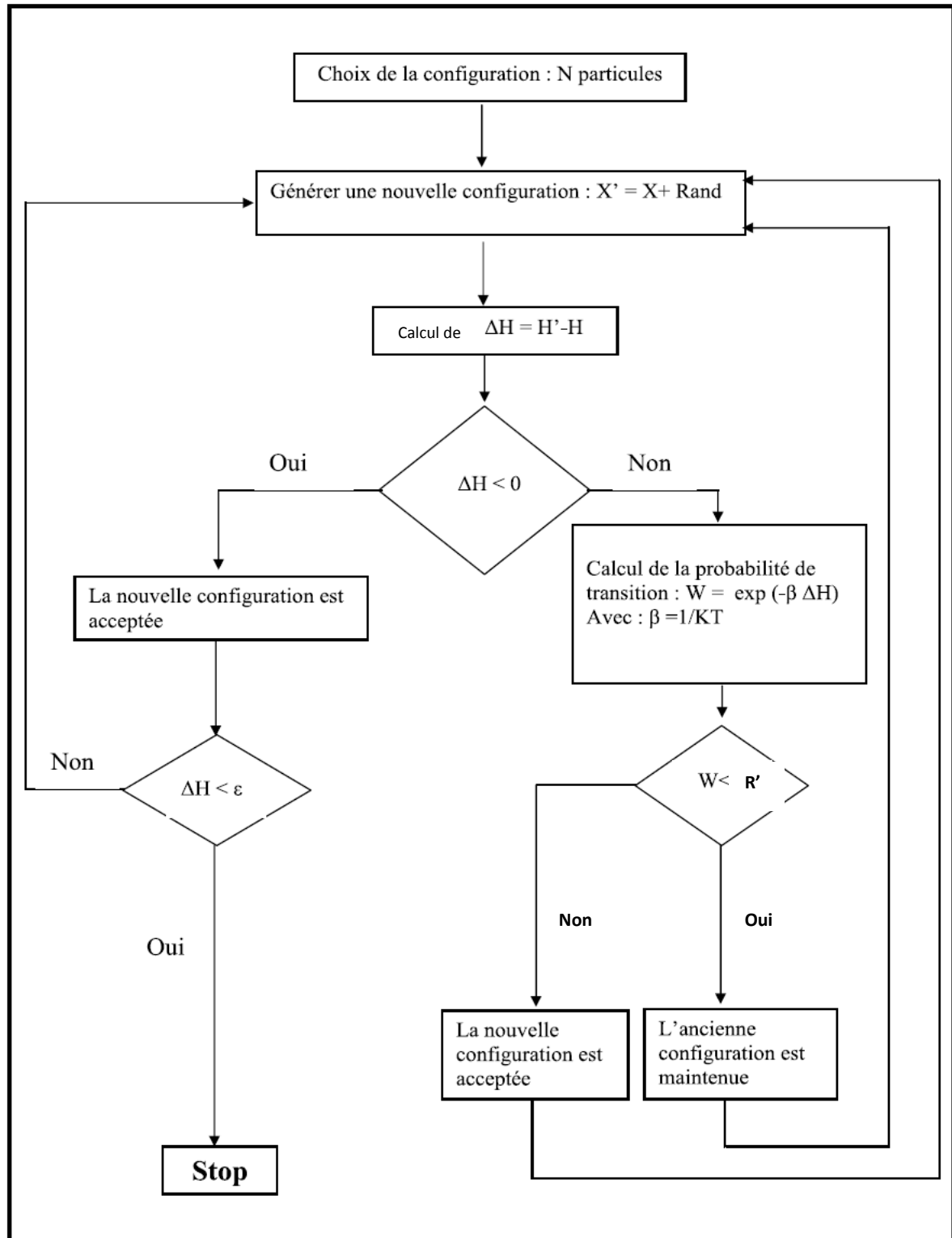


Figure III.1 : Organigramme de la méthode de Monte-Carlo, H est l'énergie du système.

III.3. Pas de déplacement

La nouvelle configuration X est créée à partir de l'ancienne configuration X_i en la modifiant aléatoirement, par exemple en déplaçant une particules n de coordonnées initiales (x_n, y_n) :

$$x_n(X) = x_n(X_i) + \Delta(\text{rand} - 1/2),$$

$$y_n(X) = y_n(X_i) + \Delta(\text{rand} - 1/2),$$

Où rand représente un nombre aléatoire dans l'intervalle $[0,1[$ et Δ est le pas de déplacement qui doit être ajusté suivant la température de simulation. En effet, un pas de déplacement trop petit entraîne de faibles modifications de structure et donc de faibles variations d'énergie. La plupart des mouvements seront acceptés et l'espace conformationnel faiblement exploré. Au contraire, un pas de déplacement trop grand conduit à des modifications importantes de structure et donc à des mouvements presque tous refusés. La convergence sera l'a encore très lente. Pour qu'elle soit optimale, il faut que le nombre de mouvements acceptés soit comparable au nombre de mouvements rejetés, d'où la nécessité d'ajuster Δ pour atteindre cet équilibre. Cette adaptation peut se faire régulièrement au cours de la simulation. On définit le taux d'acceptation comme le rapport entre le nombre de mouvements acceptés sur le nombre de mouvements tentés. En pratique, le pas de déplacement Δ doit être adapté de façon à ce que le taux d'acceptation reste dans l'intervalle 30–70 % [32, 33].

III.4. Simulation dans l'ensemble canonique

Considérons un système composé de N particules dans l'ensemble canonique à la température T . Chaque état X du système est pondéré par le facteur de Boltzmann

$$W_B(X, T) = \frac{e^{-\beta E(X)}}{Z(T)} \quad (\text{III.1})$$

La probabilité de distribution canonique $P_B(E, T)$ de l'énergie potentielle s'écrit alors comme le produit de la densité d'états micro-canonique du système $\Omega(E)$ par le facteur de Boltzmann $W_B(X, T)$:

$$P_B(E, T) \propto \Omega(E)W_B(X, T) \quad (\text{III.2})$$

Lorsque l'énergie E augmente, $\Omega(E)$ croît rapidement et W_B décroît exponentiellement, ce qui produit une distribution de l'ensemble canonique avec un maximum autour de l'énergie moyenne à la température T .

La densité d'états $\Omega(E_0)$ représente le nombre d'états X ayant une énergie E_0 . Elle est définie comme

$$\Omega(E_0) = \int \delta[E(X) - E_0] dX \quad (\text{III.3})$$

La connaissance de la densité d'états suffit en principe pour connaître la fonction de partition par

$$Z(T) = \int e^{-\beta E} dX = \int \Omega(E) e^{-\beta E} dE \quad (\text{III.4})$$

Par suite, la moyenne canonique d'une observable A dépendant uniquement de E est donnée par

$$\langle A \rangle_T = \frac{\int A(E) P_B(E, T) dE}{Z(T)} = \frac{\int A(E) \Omega(E) e^{-\beta E} dE}{\int \Omega(E) e^{-\beta E} dE} \quad (\text{III.5})$$

Avec $A(E)$ l'histogramme de A en fonction de E .

On peut également déterminer l'ensemble des propriétés thermodynamiques comme :

L'énergie interne,

$$U(T) = \langle E \rangle_T = \frac{\int E \Omega(E) e^{-\beta E} dE}{Z(T)} = \frac{\int E \Omega(E) e^{-\beta E} dE}{\int \Omega(E) e^{-\beta E} dE} \quad (\text{III.6})$$

La température est en unité de T_0 qui est définie comme suit : $T_0 = \frac{E_0}{k_B}$ avec E_0 est définie précédemment.

III.5. Approche numérique

La méthode de Monte Carlo (MC), basée sur l'algorithme de Metropolis, est utilisée pour déterminer les configurations de l'état fondamental du cristal coulombien. Le nombre d'itérations de la simulation MC est de l'ordre de 10^5 – 10^6 . L'augmentation du nombre de grains dans le plasma rend le système plus complexe, ceci signifie qu'il n'est pas toujours évident d'obtenir par la méthode MC des énergies minimales globales. Dans ce cas là, la technique MC calcule des énergies locales qui correspondent à des états métastables. L'énergie au minimum local peut être très grande par rapport à celle du minimum global. En effet, une méthode d'optimisation de Newton est combinée avec la méthode MC afin d'assurer une convergence rapide et obtenir les états stables à partir des états métastables [45]. Un développement de Taylor du second ordre de l'Hamiltonien du système, au voisinage d'une configuration $(r_{\alpha,i}^n, \alpha = x, y; i = 1, \dots, N)$ nous permet d'obtenir la forme quadratique suivante [17] :

$$H = H(r_{\alpha,i}^n) - \sum_i \sum_{\alpha} H_{\alpha,i} (r_{\alpha,i} - r_{\alpha,i}^n) + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sum_{\alpha,\beta} H_{\alpha\beta,ij} (r_{\alpha,i} - r_{\alpha,i}^n)(r_{\beta,j} - r_{\beta,j}^n) \quad (\text{III.8})$$

Ou $H_{\alpha,i}$ est une force et $H_{\alpha\beta,ij}$ est la matrice dynamique. Ces grandeurs sont définies par [17] :

$$H_{\alpha,i} = -\partial H / \partial r_{\alpha,i}$$

$$H_{\alpha\beta,ij} = \frac{\partial^2 H}{\partial r_{\alpha,i} \partial r_{\beta,j}}$$

Le terme $r_{\alpha,i}^n$ représente les positions des grains de poussière dans le cluster à l'itération n de la simulation.

IV. Résultats

IV.1. Les états métastables dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge

N'importe quel système physique cherche à s'adapter avec son environnement ; le long de cette recherche, le système peut se trouver dans un état métastable; dont il est défini comme un état plus énergétique que l'état le plus stable; dans cet état les composantes du système sont en équilibre mais le tout ne l'est pas. On dit que c'est un équilibre local.

Les calculs qu'on a effectué, sont faits pour des systèmes composés d'un nombre allant de 1 jusqu'à 20 particules chargées confinées par un potentiel électrostatique. On s'est limité à ce nombre vu le temps de calcul très important qui augmente d'avantage en présence de la fluctuation de la charge .

Tableau IV.1 :N nombre de particules, M nombre des états métastables, E énergie de chaque état, ΔE différence en énergie, config configuration de chaque état, R rayon de chaque couche, L largeur de chaque couche, Ns nombre de particules dans chaque couche, dans le cas du potentiel Coulomb.

N	M	E	ΔE	config	R	L	Ns
5	1	0.23385	-	5	0.88288	0	5
		0.23656	0.02711	1.4	0		1
					0.99280	0	4
6	1	2.80456	-	1.5	0		1
					1.05916	0	5
		2.82476	0.0202	6	0.9696	0.07205	6
7	0	3.23897	-	1.6	0		1
					1.12232	0	6
8	0	3.66890	-	1.7	0		1
					1.18223	0	7

9	1	4.08812	-	2.7	0.43211	0.02724	2
					1.30184	0.16201	7
		4.09426	0.00614	1.8	0		1
10	1				1.23909	0	8
		4.48494	-	2.8	0.42649	0	2
					1.34994	0.17677	8
11	0	4.48816	0.00322	3.7	0.56774	0.05311	3
					1.41293	0.14064	7
		4.86467	-	3.8	0.56042	0.00270	3
12	1				1.45220	0.14305	8
		5.23894	-	3.9	0.55937	0	3
					1.48975	0.14650	9
13	0	5.24204	0.00310	4.8	0.66623	0	4
					1.54800	0.10544	8
		5.60114	-	4.9	0.66200	0.00176	4
14	1				1.48939	0.97312	9
		5.95898	-	4.10	0.65950	0.01385	4
					1.61368	0.13137	10
15	2	5.96268	0.00371	5.9	0.75410	0.00947	5
					1.49969	0.94827	9
		6.30758	-	5.10	0.75105	0	5
16	2				1.69402	0.09016	10
		6.30832	0.00074	5.10	0.74868	0	5
					1.69526	0	10
17	2	6.31554	0.00796	1.5.9	0.02923		1
					0.91617	0.04167	5
					1.74361	0.11835	9

16	2	6.64990	-	1.5.10	0		1		
					0.91100	0	5		
					1.76830	0.14050	10		
		6.65235	0.00250	5.11	0.74717	0.00441	5		
					1.72320	0.12766	11		
					6.65619	0.00630	1.6.9	0	
		0.9788	0.0620	6					
		1.8179	0.0372	9					
		17	1	6.98290	-	1.6.10	0		1
0.96956	0.00552						6		
1.84176	0.07609						10		
6.98433	0.00143			1.5.11	0.00536		1		
					0.90549	0.00656	5		
					1.794810	0.16168	11		
18	1			7.30814	-	1.6.11	0.00300		1
							0.96447	0.00653	6
							1.86476	0.10514	11
		7.31522	0.00708	1.7.10	0.00009		1		
					1.02998	0.06694	7		
					1.90946	0.02564	10		
19	1	7.63193	-	1.6.12	0		1		
					0.96261	0	6		
					1.88679	0.13692	12		
		7.63280	0.00087	1.7.11	0.00013		1		
					1.02315	0.00328	7		
					1.93083	0.05476	11		
20	1	7.94961	-	1.7.12	1.5E-6		1		
					1.01819	0.00620	7		

					1.95219	0.07245	12
		7.95623	0.00615	1.6.13	0.0104		1
					0.95822	0.00777	6
					1.91011	0.21495	13

Tableau IV.2. :N nombre de particules, M nombre des états métastables, E énergie de chaque état, ΔE différence en énergie, config configuration de chaque état, R rayon de chaque couche, L largeur de chaque couche, Ns nombre de particules dans chaque couche, dans le cas du potentiel Yukawa.

N	M	E	ΔE	config	R	L	Ns
5	1	0.55882	-	5	0.58863	0	5
		0.57360	0.01478	1.4	0		1
					0.66576	0	4
6	1	0.65140	-	1.5	0		1
					0.69822	0	5
		0.67398	0.02259	6	0.63159	0.26221	6
7	0	0.73850	-	1.6	0		1
					0.73303	0	6
8	0	0.83407	-	1.7	0		1
					0.76869	0	7
9	0	0.92300	-	2.7	0.28221	0.01657	2
					0.84112	0.15611	7
10	1	1.00513	-	3.7	0.35860	0.00860	3
					0.91059	0.12352	7
		1.00621	0.00108	2.8	0.28336	0	2
11	0	1.07708	-	3.8	0.86582	0.20406	8
					0.35543	1.5E-4	3
					0.92959	0.14686	8

12	1	1.15313	-	4.8	0.41878	0	4
					0.98785	0.09291	8
		1.15390	0.00072	3.9	0.35782	0	3
					0.94837	0.15799	9
13	0	1.22315	-	4.9	0.41511	0.01039	4
					1.00446	0.10608	9
14	1	1.29730	-	4.10	0.41476	0.04113	4
					1.02069	0.13753	10
		1.29824	0.00094	5.9	0.47050	0.13736	5
					1.05502	0.10740	9
15	1	1.36496	-	5.10	0.46964	0	5
					1.06888	0.08874	10
		1.36798	0.00301	1.5.9	0.00472		1
					0.56792	0.02320	5
					1.10253	0.12083	9
16	4	1.42882	-	1.5.10	0		1
					0.56484	0	5
					1.11250	0.12368	10
		1.43235	0.00353	1.5.10	0		1
					0.55977	0	5
					1.11603		10
		1.43288	0.00407	1.6.9	0		1
					0.60233	0.01268	6
					1.47679	0.04267	9
		1.43308	0.00426	1.6.9	0		1
					0.60165	0	6
					1.14797	0.04610	9
		1.43766	0.00885	5.11	0.46787	0.09401	5

					1.1018	0.14939	11
17	1	1.49165	-	1.6.10	0		1
					0.59643	0.00301	6
					1.15682	0.06946	6
		1.49641	0.00476	1.5.11	0.00627		1
					0.46868	0.55952	5
					1.12557	0.14610	11
18	2	1.55360	-	1.6.11	0.00277		1
					0.59369	0.00693	6
					1.16656	0.10735	11
		1.55858	0.00498	1.7.10	0.00007		1
					0.63215	0.00349	7
					1.19734	0.03943	10
		1.55897	0.00537	1.7.10	0.01340		1
					0.63510	0.15408	7
					1.19555	0.05847	10
19	1	1.61696	-	1.7.11	0.00086		1
					0.62775	0.03024	7
					1.20571	0.05864	11
		1.61761	0.00065	1.6.12	0		1
					0.59294	0	6
					1.17609	0.14096	12
20	2	1.67898	-	1.7.12	0.00002		1
					0.62474	0.01113	7
					1.21539	0.07608	12
		1.68176	0.00278	4.5.11	0.42082	0.35086	4
					0.73346	0.09665	5
					1.24105	0.12663	11

		1.68176	0.00301	2.7.11	0.25361	0.17819	2
					0.70083	0.32852	7
					1.23639	0.12283	11

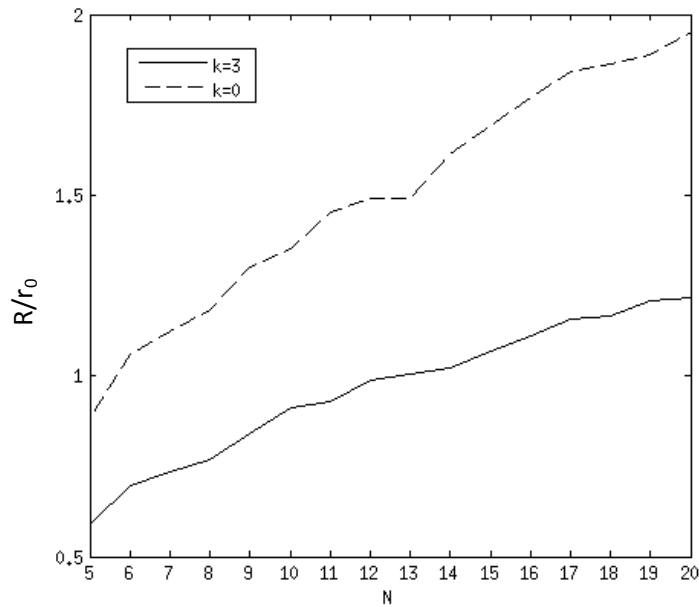


Figure IV.1 : Le rayon de la couche externe de l'état le plus stable en fonction du nombre de grains

La figure (IV.1) montre la variation du rayon de la couche externe de l'état le plus stable en fonction du nombre de particules ; Lorsque celui-ci augmente le rayon croît, ce dernier est supérieur dans le cas où l'interaction est à longue portée $k=0$. On peut déduire de ça que le paramètre d'écrantage a un effet sur la taille du système.

Un rayon faible veut dire une densité plus élevée et par conséquent une interaction plus forte. Avec un effet d'écran plus important l'interaction entre les particules s'affaiblit et même l'efficacité du potentiel de confinement prévient l'explosion coulombienne. Ainsi les particules s'arrangent dans un état d'équilibre avec une inter-distance plus importante ce qui explique l'accroissement de la taille (rayon) du système.

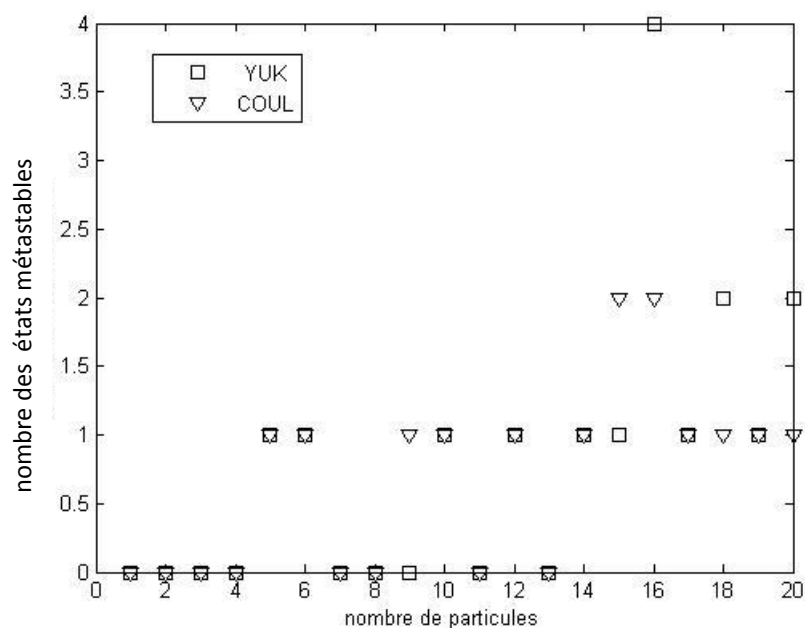


Figure IV.2 : Nombre d' états métastables en fonction de nombre de particules $N=1,...,20$ pour les potentiels Coulombien et Yukawa sans fluctuation de la charge.

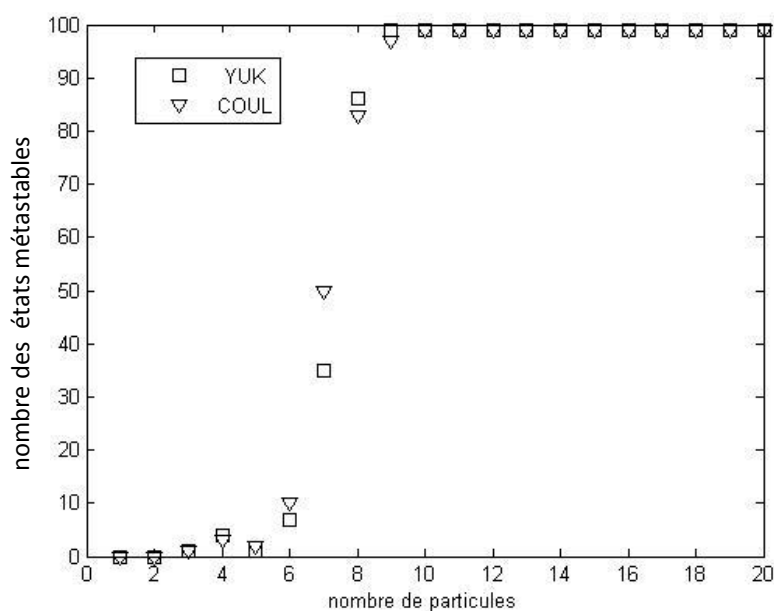


Figure IV.3 : Nombre d' états métastables en fonction de nombre de particules $N=1,...,20$ pour les potentiels Coulombien et Yukawa avec fluctuation de la charge.

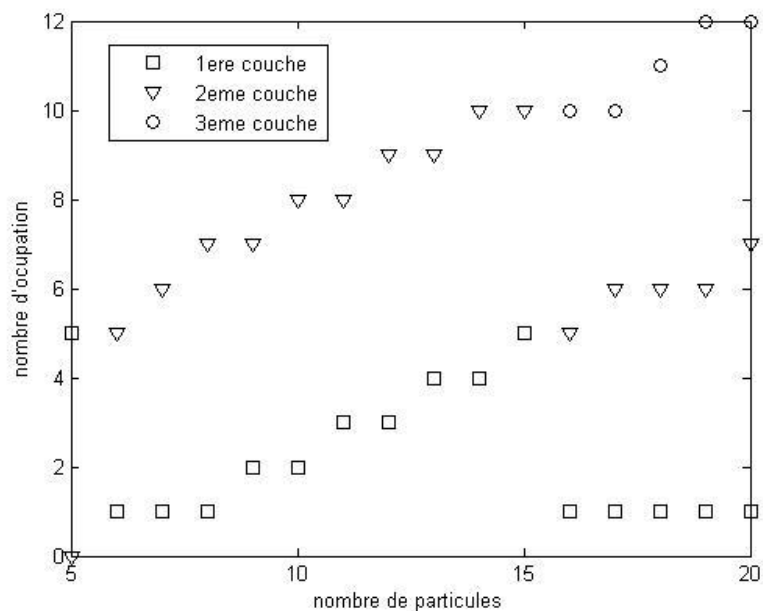


Figure IV.4 : Nombre d'occupation des couches de l'état le plus stable dans le cas du potentiel Coulombien sans fluctuation de la charge.

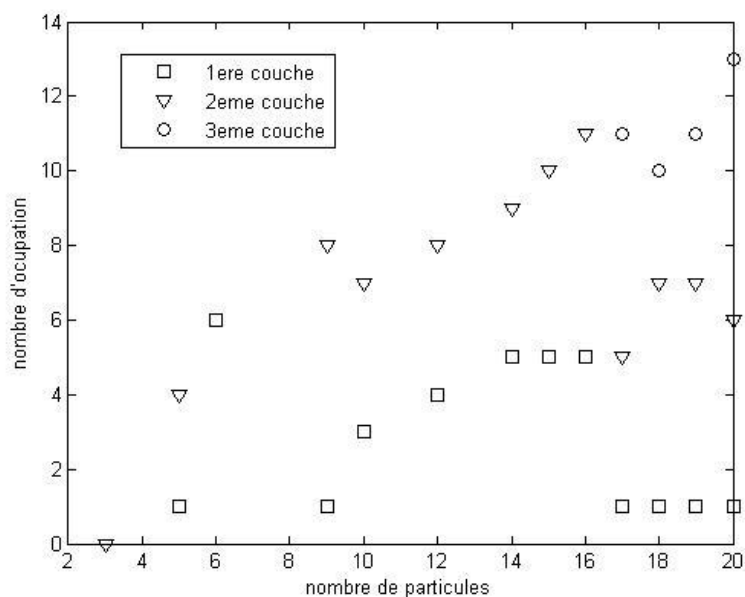


Figure IV.5 : Nombre d'occupation des couches du premier état métastable dans le cas du potentiel Coulombien sans fluctuation de la charge.

Tableau IV.3 :Les configurations des états métastables dans le cas avec fluctuation de la charge.

Yukawa		Coulomb	
N	config	N	config
5	1.4	5	1.4
6	1.5	6	1.5
7	1.6	7	1.6
8	1.7	8	1.7
9	2.7 1.8*	9	1.8
10	2.8 3.7 4.6*	10	2.8 3.7 1.9*
11	3.8 4.7* 2.9* 1.10*	11	3.8 2.9* 4.7*
12	4.8 3.9	12	4.8 3.9
13	4.9 5.8* 3.10* 1.6.6*	13	4.9 3.10* 5.8*
14	5.9	14	5.9

	4.10 1.6.7* 2.5.7* 1.5.8*		4.10 1.4.9*
15	5.10 1.5.9 2.5.8* 1.6.8*	15	5.10 1.5.9 1.4.10*
16	1.6.9 1.5.10	16	1.6.9 1.5.10 5.11
17	1.6.10 1.5.11	17	1.6.10 1.5.11
18	1.6.11 1.7.10	18	1.6.11 1.7.10
19	1.7.11 1.6.12	19	1.6.12 1.7.11
20	1.7.12 2.7.11 1.8.11* 4.5.11	20	1.7.12 1.6.13 2.7.11* 1.8.11*

A partir du tableau (IV.3) qui montre les configurations des cristaux du Coulomb dans le cas avec fluctuation de la charge pour les deux potentiel de Coulomb et de Yukawa. On constate l'apparition

de nouvelles configurations (en astérisques) qui ne se trouvaient pas dans le cas d'un système sans fluctuation de la charge.

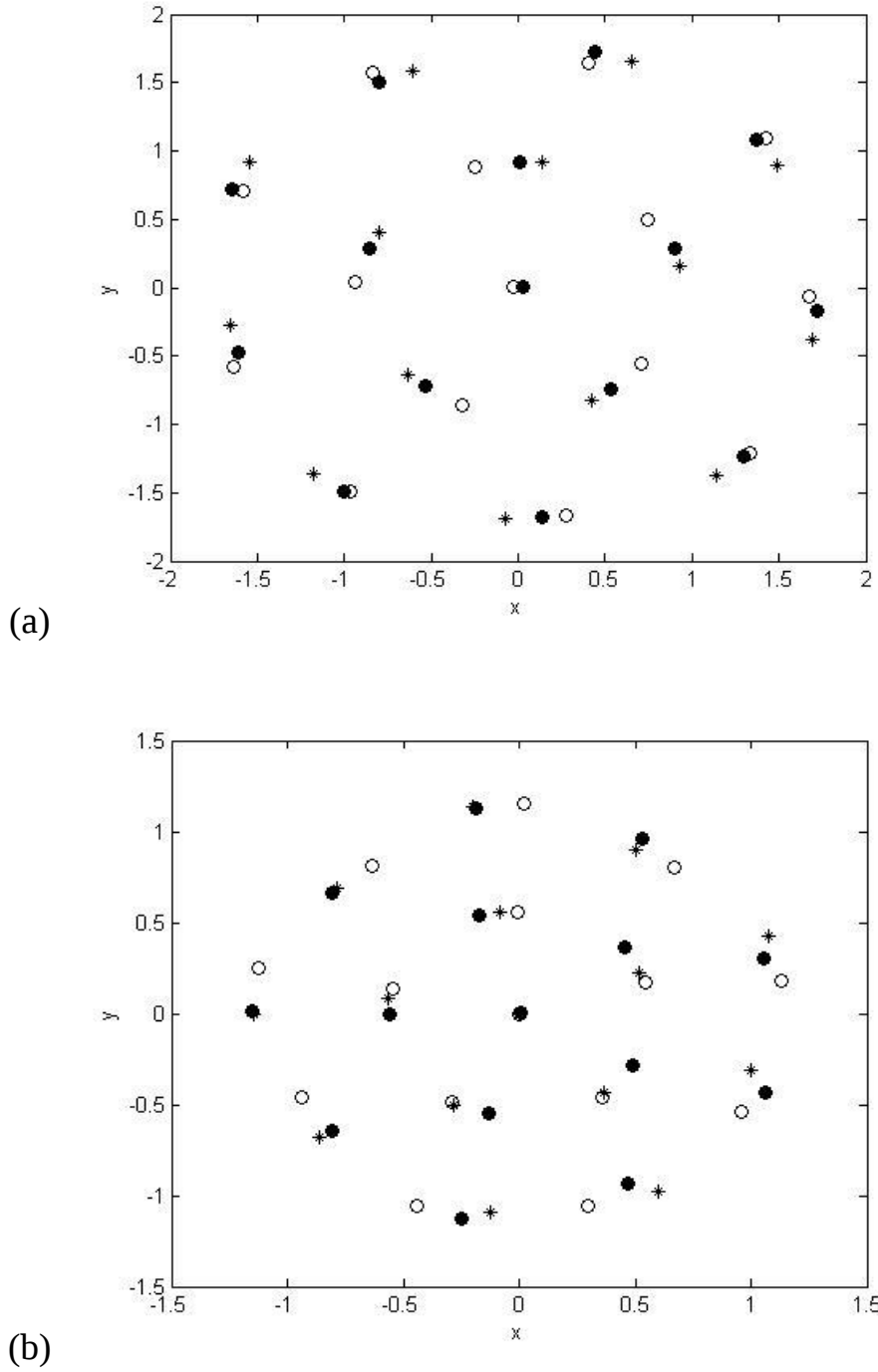


Figure IV.6 : Configurations des trois états parmi les 99 états métastables du système avec fluctuation de la charge pour $N=15$. (a) potentiel Coulombien - (b) potentiel Yukawa .

Les résultats obtenus dans le Tableau (IV.1) sont proches à ceux des références [16,17].

Le nombre M des états métastables, dans le cas du potentiel Coulombien et Yukawa sans fluctuation de la charge, ne dépasse pas les 5 états .Mais dans le cas avec fluctuation de la charge, une augmentation rapide de M qui atteint 99 états à partir de $N=6$. La valeur 99 dépend du nombre de teste du programme (code) utilisé ; c'est pour ça on s'est pas intéressé au nombre des états métastables dans le cas avec fluctuation de la charge, mais aux configurations correspondants à chaque état; on remarque l'apparition des nouvelles configurations dans le cas des deux potentiels Coulombien et Yukawa, de plus on constate une sorte de rotation des configurations pour les deux potentiels avec fluctuation de la charge.

Le nombre d'occupation des couches dans les cas des deux potentiels Coulombien et Yukawa sans et avec fluctuation de la charge, varie de 1 à 6 particules dans la première couche ; de 4 à 11 particules dans la deuxième couche et de 9 à 13 dans la troisième couche, l'occupation des couches ne respecte pas le remplissage complet de la couche (i) pour passer à la couche ($i+1$).

On constate que l'épaisseur des couches ne dépend pas du nombre d'occupation mais du nombre de particules du système , car pour la même valeur de N_s l'épaisseur varie, par exemple le cas de $N_s=5$ on trouve :

$L = 0.00947, 0.04167, 0.00441, 0.00656$; donc il affecte les vibrations des particules ; dont ils sont affectés par l'interaction inter-particules.

IV.2. Configuration électronique des atomes artificiels

On a introduit l'idée du tableau périodique typique [16] ; les **atomes artificiels** sont des atomes typiques composés d'un système fortement couplé. Ce dernier peut être composé des ions ou des grains de poussière comme dans ce présent travail. Les configurations peuvent être représentées par des couches K, M, L . Le tableau (IV.4) montre cette représentation, on remarque que le nombre de couches pour $N=1, \dots, 20$ particules ne dépasse pas les trois couches : K qui peut être remplie par un nombre de particules jusqu'à $N=6$, M cette couche peut être remplie par un nombre de particules à partir de $N=4$ jusqu'à $N=11$, L est la dernière couche, elle peut être remplie par un nombre de particules à partir de $N=9$ jusqu'à $N=13$.

De plus dans les couches ordinaires, la règle est l'obligation du remplissage de la couche (i) pour passer à la couche (i+1) ; mais on constate que cette règle n'est pas respectée dans les atomes artificiels.

Tableau IV.4 : Configuration électronique des atomes artificiels pour les potentiels Yukawa et Coulomb dans le cas sans fluctuation de la charge.

coulomb	Yukawa
01: $(k)^1$	01: $(k)^1$
02: $(k)^2$	02: $(k)^2$
03: $(k)^3$	03: $(k)^3$
04: $(k)^4$	04: $(k)^4$
05: $(k)^5$	05: $(k)^5$
05*: $(k)^1 (M)^4$	05*: $(k)^1 (M)^4$
06: $(k)^1 (M)^5$	06: $(k)^1 (M)^5$
06*: $(k)^6$	06*: $(k)^6$
07: $(k)^1 (M)^6$	07: $(k)^1 (M)^6$
08: $(k)^1 (M)^7$	08: $(k)^1 (M)^7$
09 : $(k)^2 (M)^7$	09 : $(k)^2 (M)^7$
09*: $(k)^1 (M)^8$	-
10: $(k)^2 (M)^8$	10: $(k)^3 (M)^7$
10* : $(k)^3 (M)^7$	10*: $(k)^2 (M)^8$
11 : $(k)^3 (M)^8$	11 : $(k)^3 (M)^8$
12 : $(k)^3 (M)^9$	12: $(k)^4 (M)^8$
12*: $(k)^4 (M)^8$	12* : $(k)^3 (M)^9$
13 : $(k)^4 (M)^9$	13 : $(k)^4 (M)^9$
14 : $(k)^4 (M)^{10}$	14 : $(k)^4 (M)^{10}$
14* : $(k)^5 (M)^9$	14* : $(k)^5 (M)^9$

15: $(k)^5 (M)^{10}$	15: $(k)^5 (M)^{10}$
15*: $(k)^1 (M)^5 (L)^9$	15*: $(k)^1 (M)^5 (L)^9$
16: $(k)^1 (M)^5 (L)^{10}$	16: $(k)^1 (M)^5 (L)^{10}$
16*: $(k)^5 (M)^{11}$	16*: $(k)^1 (M)^6 (L)^9$
16*: $(k)^1 (M)^6 (L)^9$	16*: $(k)^5 (M)^{11}$
17: $(k)^1 (M)^6 (L)^{10}$	17: $(k)^1 (M)^6 (L)^{10}$
17*: $(k)^1 (M)^5 (L)^{11}$	17*: $(k)^1 (M)^5 (L)^{11}$
18: $(k)^1 (M)^6 (L)^{11}$	18: $(k)^1 (M)^6 (L)^{11}$
18*: $(k)^1 (M)^7 (L)^{10}$	18*: $(k)^1 (M)^7 (L)^{10}$
19: $(k)^1 (M)^6 (L)^{12}$	19: $(k)^1 (M)^7 (L)^{11}$
19*: $(k)^1 (M)^7 (L)^{11}$	19*: $(k)^1 (M)^6 (L)^{12}$
20: $(k)^1 (M)^7 (L)^{12}$	20: $(k)^1 (M)^7 (L)^{12}$
20*: $(k)^1 (M)^6 (L)^{13}$	-
-	20*: $(k)^4 (M)^5 (L)^{11}$
-	20*: $(k)^2 (M)^7 (L)^{11}$

Dans le tableau ci-dessus qui montre la configuration électronique des **atomes artificiels** pour les potentiels Yukawa et Coulomb dans le cas sans fluctuation de la charge, les nombre en astérisque désignent les états métastables. On constate qu'il y a une différence entre les deux cas du potentiel que se soit dans la configuration ou dans le nombre des états métastables. Cette différence est dû clairement à l'effet de l'écrantage.

IV.3. Fusion des cristaux de Coulomb

Les cristaux de Coulomb sont considérés en phase solide lorsqu'ils ont une structure ordonnée. On appelle cette phase solid-like, le terme 'like' est juste pour dire que c'est de la simulation car les interactions entre les particules ne sont que des interactions électrostatiques.

La température de fusion d'un corps représente la température à une pression donnée, à laquelle un élément pur ou un composé chimique passe de l'état solide à l'état liquide. Il est possible de déterminer la nature d'une substance (identification) par la mesure de sa température de fusion. Là, la température reste constante tant que le corps n'est pas passé entièrement sous phase liquide. La différence d'énergie pour causer la fusion complète n'est donc pas seulement celle qu'on doit ajouter pour atteindre la température critique mais également la chaleur latente (L_f) pour passer à l'état liquide.

On va étudier l'effet des deux paramètres importants dans la dynamique des cristaux de Coulomb. Le premier est le paramètre d'écrantage k qui désigne le porté de l'interaction Coulombienne, et le deuxième est le paramètre d'excentricité a qui contrôle le confinement du système.

Pour étudier la transition de phase du système, on s'intéresse aux valeurs de la température de fusion T_c .

IV.3.1. Extraction de la valeur de la température de fusion

Il y a différentes techniques pour extraire la valeur critique de la température de fusion.

On cite par exemple celle basée sur l'investigation des trajectoires des particules, dans cette technique on prend des images pour le système lors de sa recherche du son équilibre, ceci est fait par un pas du temps donné à une température fixe ; quand ces trajectoires sont entrecroisées on dit que la température correspondante est une température de fusion car au-delà de cette dernière le système sera dans une autre phase.



Figure IV.7 : Mouvement des poussières autour de leur position d'équilibre [50].

La figure (IV.7) montre les trajectoires des grains de poussière pour un nombre des images égale à 50 obtenue expérimentalement.

Dans la simulation on suit la même procédure pour avoir la température de fusion, qui correspond au désordre du système.

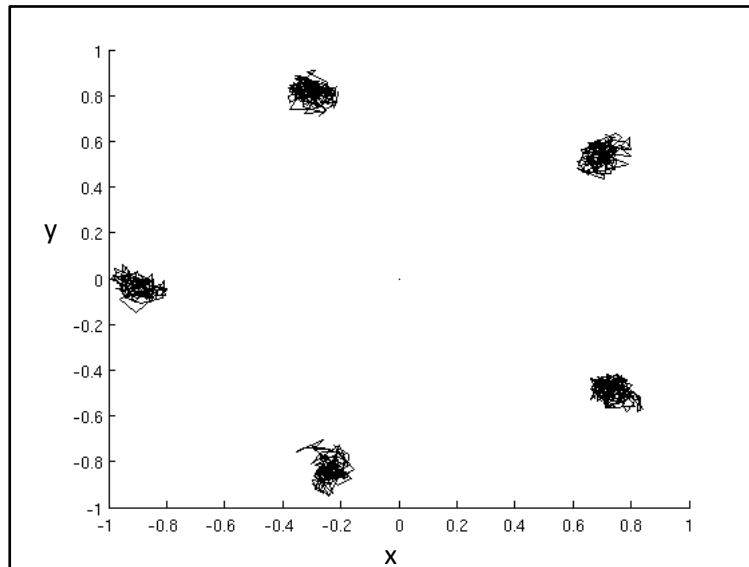
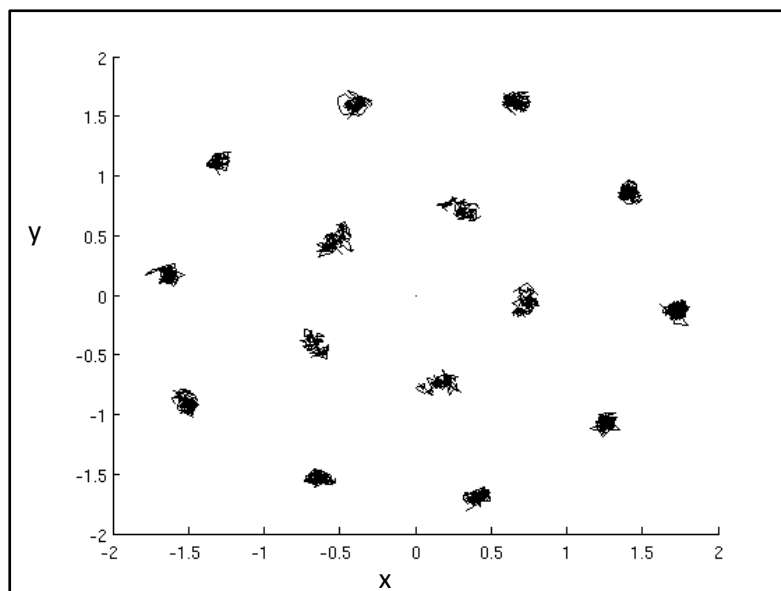


Figure IV.8 : les trajectoires des grains dans le cas $N=5$, $a=1$ et $k=0$ avec la température $T=3,75 \cdot 10^{-5} T_0$.



**Figure IV.9 : les trajectoires des grains dans le cas $N=15$, $a=1$ et $k=0$
avec la température $T=4,5.10^{-5} T_0$.**

Les deux figures (IV.8) et (IV.9) montrent les trajectoires des composantes du cristal du Coulomb respectivement dans le cas du potentiel du Coulomb sans fluctuation de la charge, pour deux valeurs du nombre de particules $N=5$ avec une température $T=3,75.10^{-5} T_0$ et $N=15$ avec une température $T=4,5.10^{-5} T_0$ respectivement. Tant qu'il n'y a pas intersection des trajectoires on peut toujours parler d'une structure ordonnée. Chaque particule, sous l'effet de l'agitation thermique, oscille autour de sa position d'équilibre ; il est à noter l'élargissement du rayon de confinement.

L'extraction des valeurs critiques peut être aussi faite à partir de la courbe de la capacité calorifique volumique C_v , la figure (IV.10) montre l'évolution de la capacité calorifique à volume constant en fonction de la température du système cette dernière est donnée à l'échelle logarithmique, la valeur maximale de la capacité calorifique $C_{v_{\max}}$ correspond à la valeur critique de la température T_c qui représente la température de fusion du système. Au fur et à mesure que la température du système augmente on constate une faible augmentation de C_v jusqu'à une valeur maximale puis une diminution ; ce constat est fait dans le travail de E. Yurtsever, F. Calvo et D. J. Wales [49] mais la courbe n'a pas la même allure. Pour avoir cette courbe on a utilisé la méthode de Monte Carlo enrichie par l'algorithme de Metropolis, avec un nombre d'itérations $MC=10^5$ et un facteur d'augmentation de la température $b=1.025$. Ce choix est pris pour avoir une lente augmentation de la température pour une cristallisation parfaite comme il'est fait dans la métallurgie lors du réchauffement d'un matériau afin qu'il se cristallise parfaitement, puisque le réchauffement rapide ne permet pas au système de passer par le plus grand nombre des états possibles.

La figure (IV.11) montre l'énergie interne E en fonction de la température T pour la valeur du nombre des grains $N=15$, dans le cas où $a=1$ (confinement parabolique) pour la valeur 1,5 du paramètre de l'écrantage k . La discontinuité dans la courbe correspond à la transition de phase du cristal. Nous constatons qu'il y a apparition d'un nombre d'états métastables avant la transition de phase chaque état domine pour plusieurs valeurs de la température dans cette figure on observe trois état. Puis il y a une discontinuité dans la courbe le long d'un intervalle de la température

$\Delta T = [10^{-3} - 10^{-2}] T_0$, c'est dans cet intervalle qu'on trouve le pic de la capacité calorifique volumique C_v . Notre résultat en ce qui concerne les valeurs de la température de fusion est en bon accord avec celui trouvé dans la littérature [15]. Après cet intervalle on constate que l'énergie interne du système devient presque constante. Ceci est expliqué par le fait que le système se trouve dans une autre phase, la phase liquide-like.

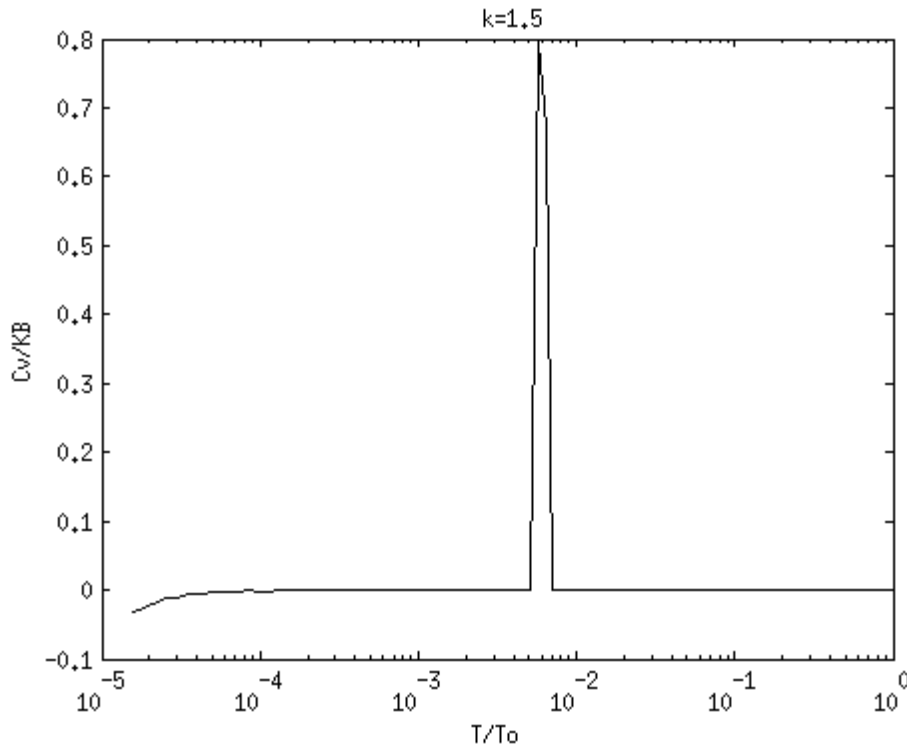


Figure IV.10 : la capacité calorifique volumique en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$ et $k=1,5$ sans fluctuation de la charge.

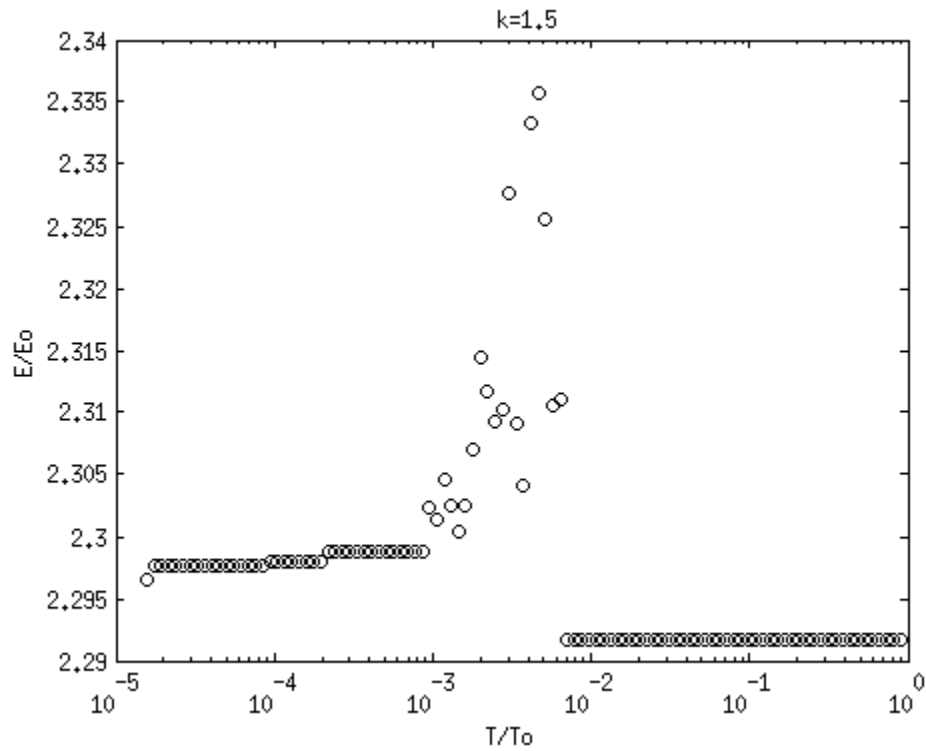


Figure IV.11 : L'énergie interne en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$ et $k=1,5$ sans fluctuation de la charge.

IV.3.2. Effet du confinement

A partir de la figure(IV.12) on remarque clairement le grand effet du paramètre d'excentricité a sur la taille et même sur la structure du cristal de Coulomb.

On constate que la diminution de la valeur de ce paramètre conduit à une structure linéaire, cela a un effet sur le nombre des couches qui diminue jusqu'à avoir une seule couche linéaire à 1 dimension.

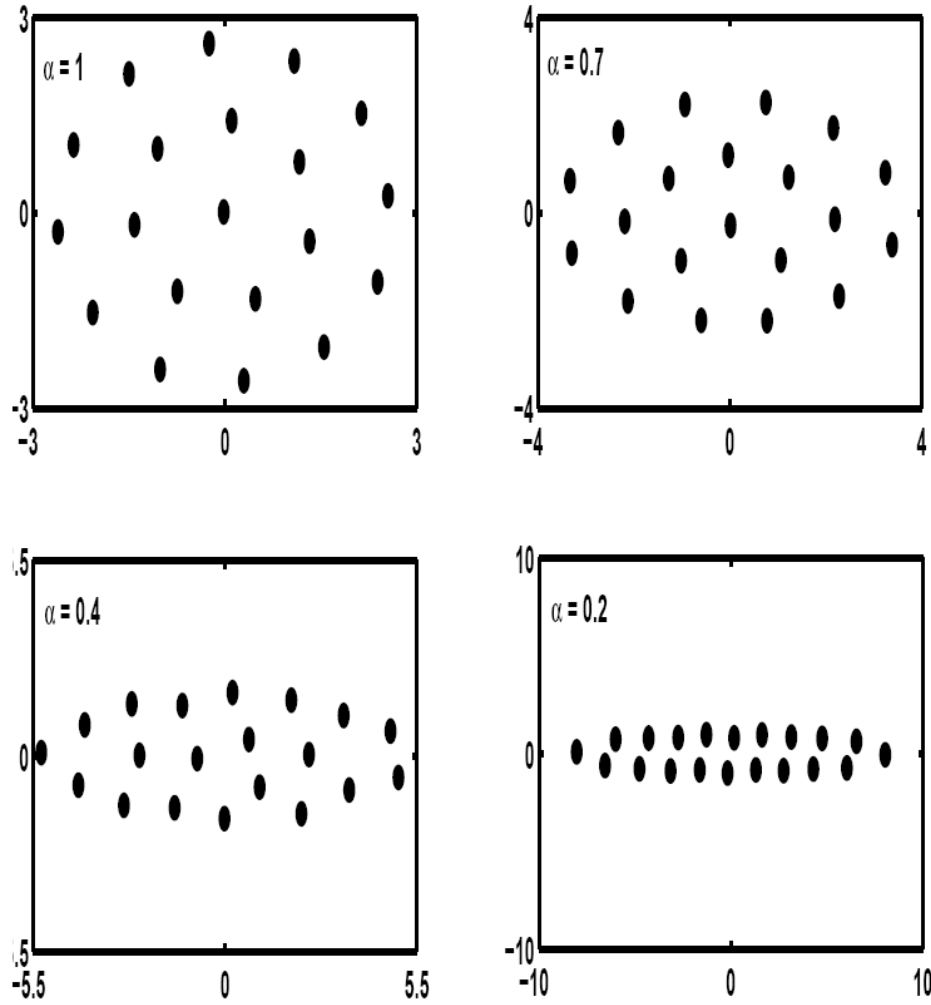


Figure. IV.12 : Etats fondamentaux des grains poussiéreux pour $N = 20$, en fonction du paramètre de l'excentricité ($\alpha=1, 0.7, 0.4, 0.2$)

On considère un système composés d'un nombre de particules $N=60$ qui sont chargées négativement et confinées par un potentiel électrostatique (ce choix de $N=60$ est fait pour voir l'effet dans système composé d'un nombre de particules assez grand) on fait varier les valeurs du paramètre d'anisotropie α , dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge et on trace l'énergie interne minimale E_{min} en fonction de ce paramètre.

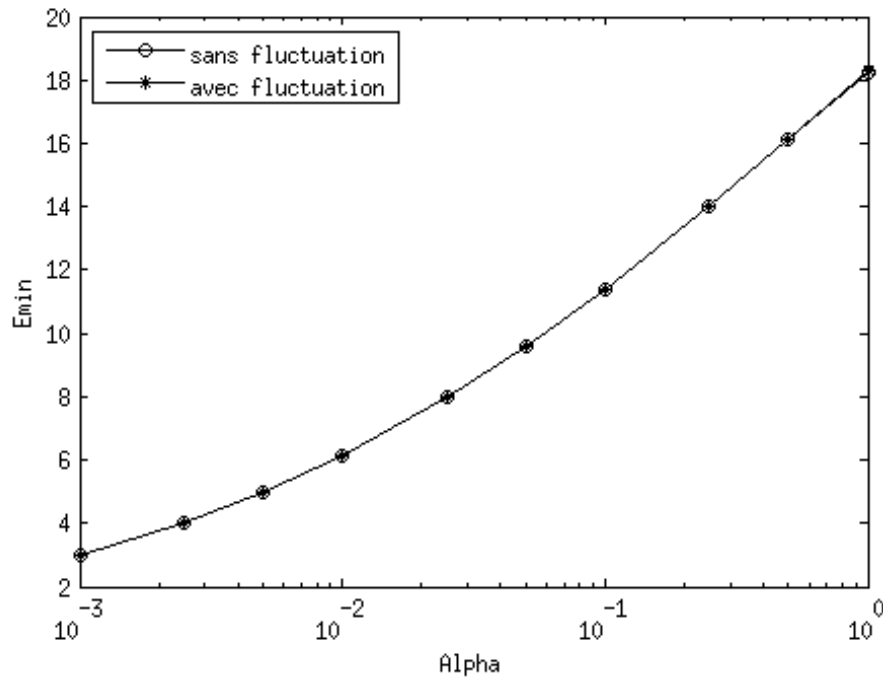


Figure IV.13 : L'énergie interne en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ et $k=0$.

Quand la température est très basse ($T \approx 0$) l'énergie interne minimale E_{min} augmente avec l'augmentation du paramètre d'excentricité a . On remarque que l'énergie diminue en allant vers la structure linéaire.

Cette énergie interne a des valeurs très proches dans le cas sans et avec fluctuation de la charge. On remarque qu'il n'y a pas une différence entre les deux cas en augmentant la valeur du paramètre du confinement.

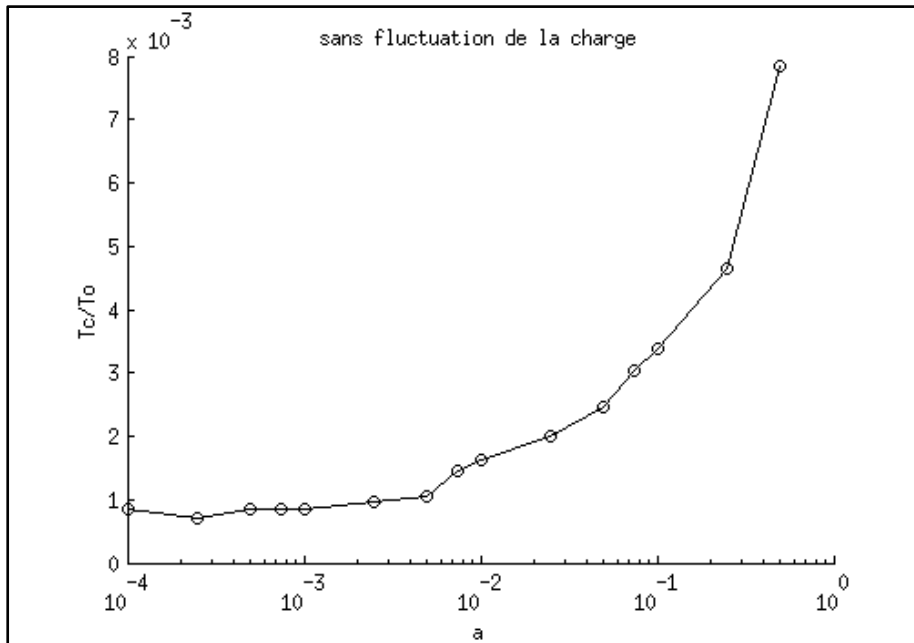


Figure IV.14: La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=15$ pour $k=3$, sans fluctuation de la charge.

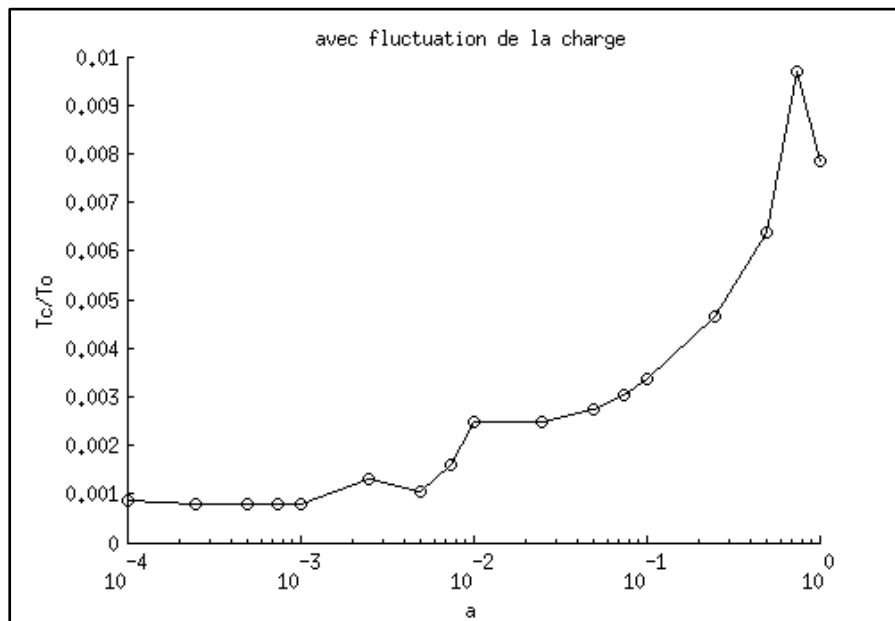


Figure IV.15: La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=15$ pour $k=3$, avec fluctuation de la charge.

Les deux courbes des figures (IV.14) et (IV.15) montrent l'évolution de la température critique de fusion T_c est tracée en fonction du paramètre de l'excentricité a pour un nombre de particules $N=15$ dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge respectivement. On constate d'abord

l'augmentation de la température T_c suivant l'augmentation de la valeur du paramètre de l'excentricité ceci en allant de la structure à 1D vers la structure à 2D , aussi on observe qu'il n'y a pas une grande différence entre les valeurs de la température de fusion entre les deux cas sans et avec fluctuation de la charge.

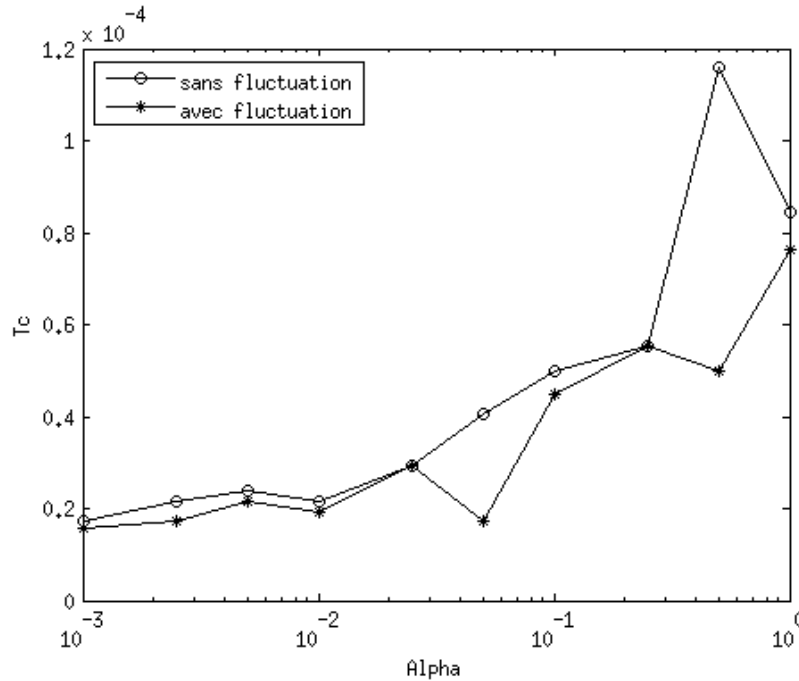


Figure IV.16 : La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ pour $k=0$.

La température critique T_c (température de fusion) du cristal de Coulomb est tracée en fonction du paramètre d'excentricité pour un système grand (composé d'un nombre de grains $N=60$ assez grand par rapport à $N=15$). On constate que la température critique augmente avec l'augmentation de la valeur de α , en même temps il est clair que les températures de fusion dans le cas du grand système avec fluctuation de la charge sont inférieures à celles dans le cas sans fluctuation de la charge.

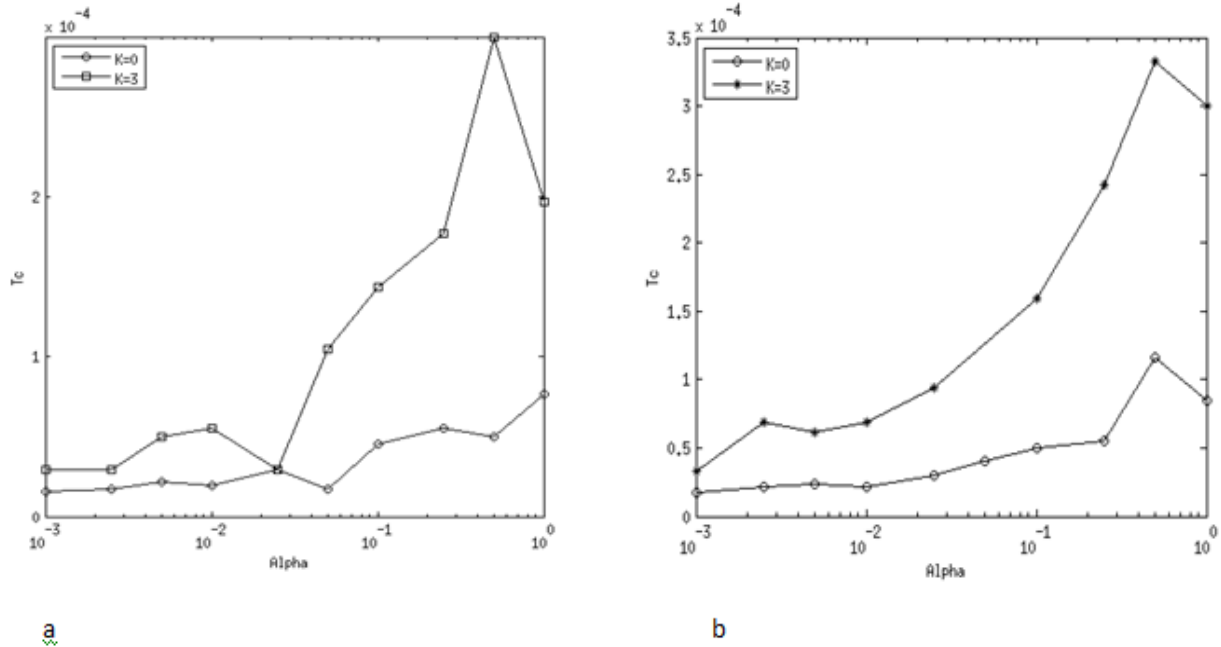


Figure IV.17 : La température de fusion en fonction du paramètre d'anisotropie pour $N=60$ pour $k=0, 3$, (a)- sans fluctuation de la charge, (b)-avec fluctuation de la charge.

La température de fusion T_c du cluster est tracée en fonction du paramètre d'anisotropie α . Pour deux valeurs du paramètre d'écrantage $k=0$ (qui correspond au potentiel de Coulomb à longue portée) et $k=3$ (correspondant au potentiel Yukawa). On constate bien que les températures critiques sont supérieures dans le cas du potentiel Yukawa $k=3$ à celle dans le cas du potentiel de Coulomb $k=0$, cette remarque est faite que se soit dans le cas sans ou avec fluctuation de la charge des particules.

IV.3.3. Effet de l'écrantage

L'écrantage est dû principalement aux effets de la charge du grain, au-delà d'une distance définie à partir du grain, la longueur de Debye, l'effet électrique de la charge du grain n'est plus ressentie par les autres particules. Le paramètre d'écrantage k est l'inverse de cette longueur.

- **Diagramme de Voronoï (Triangulation de Dolaunoy)**

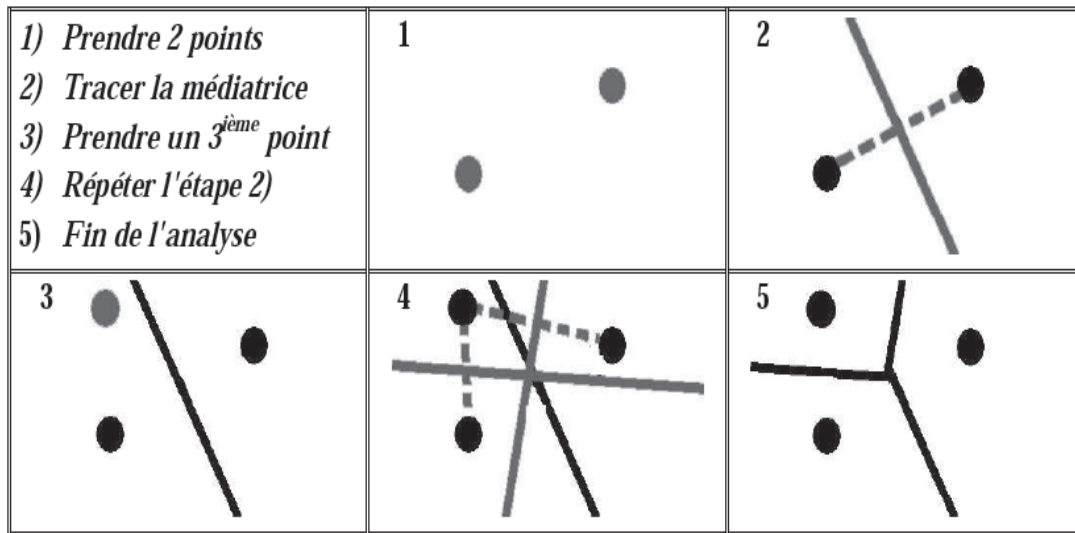


Figure IV.18 : Etapes de la construction d'un diagramme de Voronoï

Le diagramme de Voronoï est utilisé depuis très longtemps et dans des domaines très variés comme la cristallographie ou la géographie. Les principales étapes qui mènent à la construction de ce diagramme sont : premièrement, on prend deux points adjacents et on trace la médiatrice de ces deux points. Deuxième étape on prend un troisième point et on répète la première étape.

La figure (IV.18) montre l'analyse d'une structure organisée par le diagramme de Voronoï. D'une manière générale, l'objectif de cette analyse est de caractériser l'organisation spatiale d'un ensemble de points.

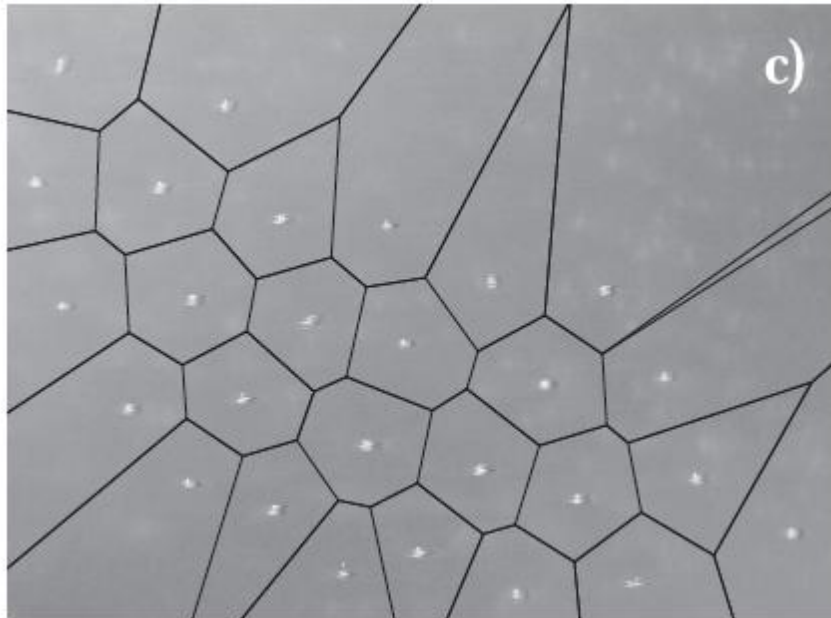


Figure IV.19. : Diagramme de Voronoï pour des vrais grains [50].

La figure (IV.19) montre le diagramme de Voronoï pour un ensemble de grains de poussière en phase organisée, on observe quelques défauts dans la structure ordonnée.

Dans la simulation ce diagramme est comme le montre l'ensemble des figures (IV.20). Le diagramme de Voronoï est tracé pour des système composés d'un nombre de grains $N=15$ dans le cas sans fluctuation de la charge pour différentes valeurs du paramètre de l'écrantage k .

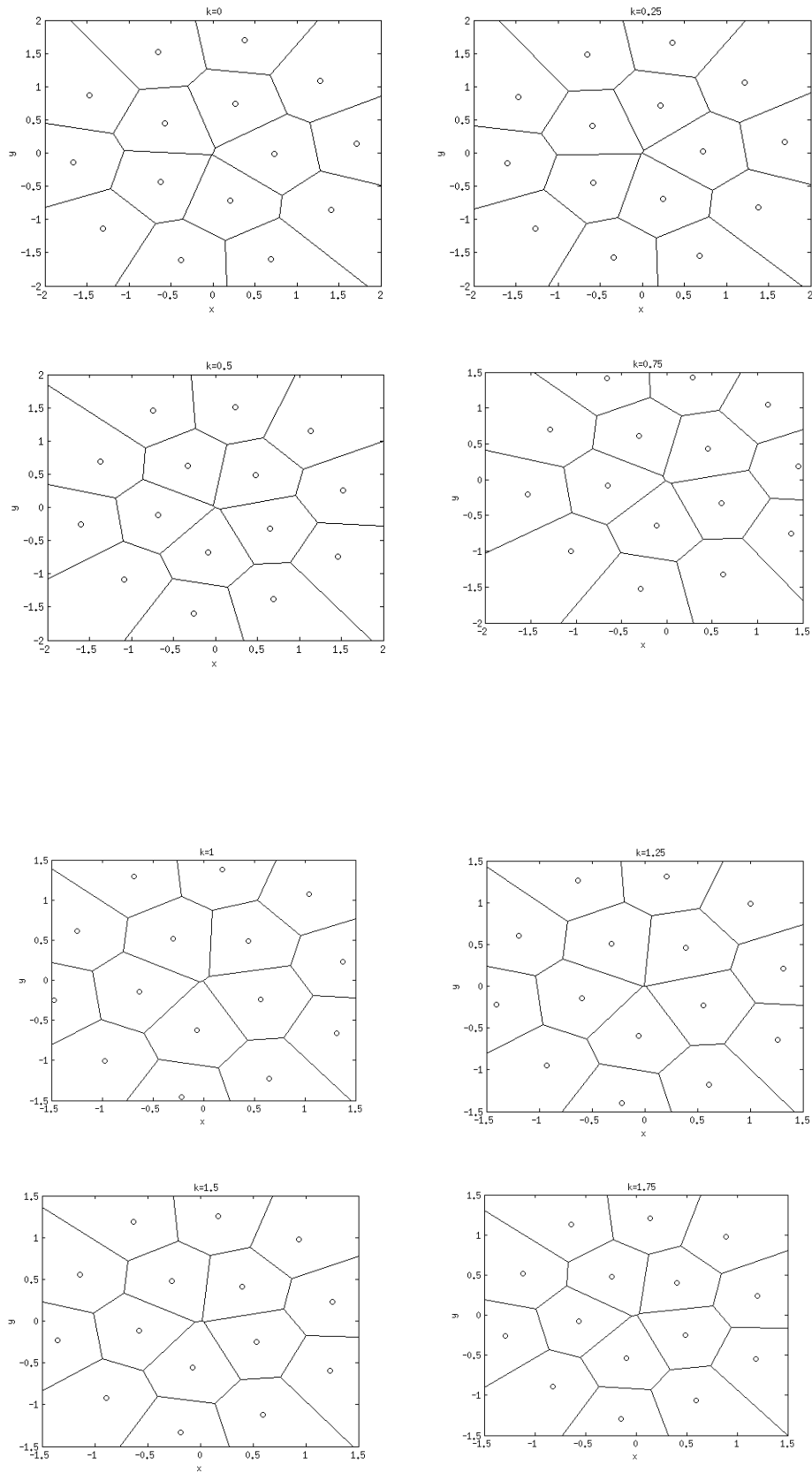


Figure IV.20-a : Diagramme de Voronoï pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

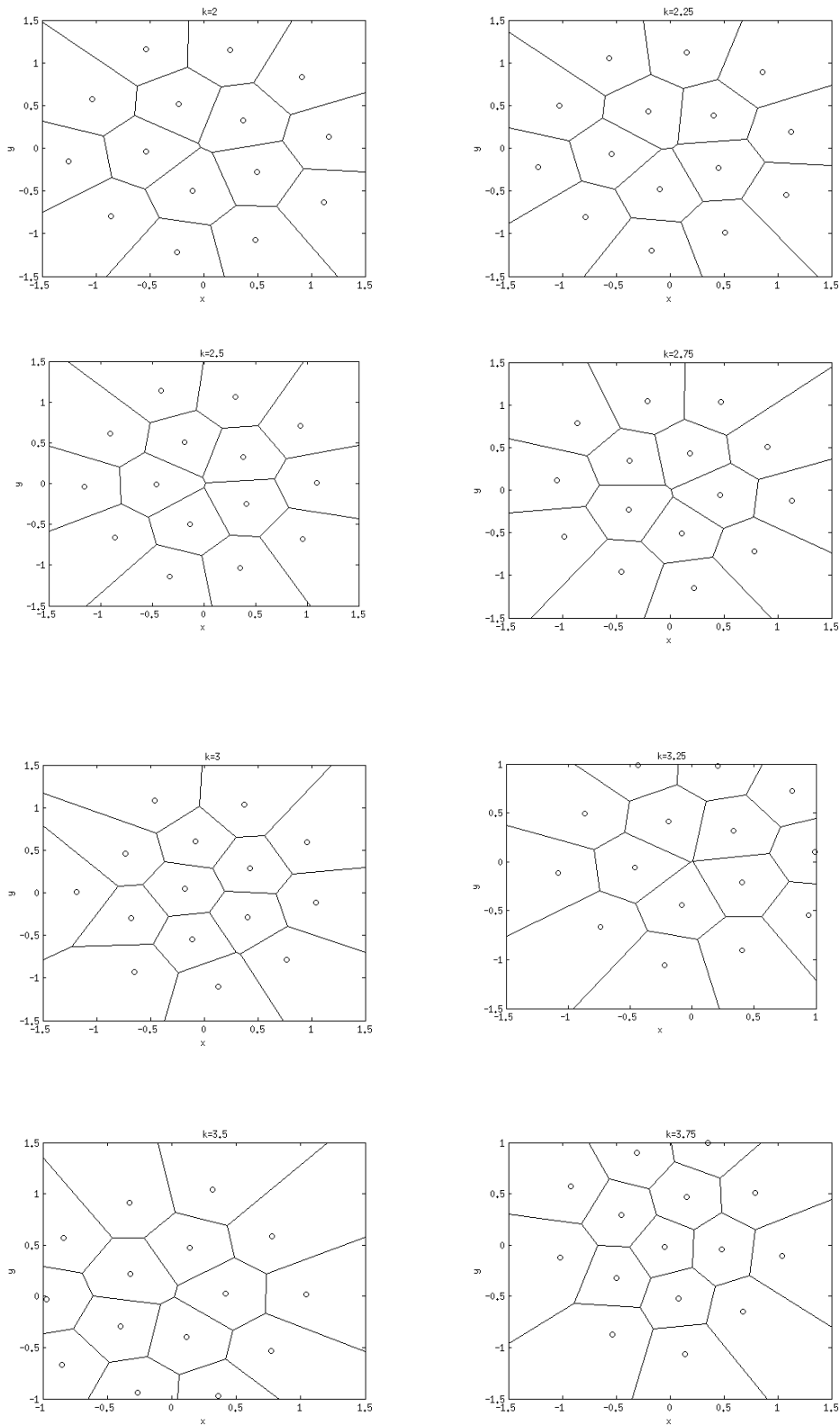


Figure IV.20-b : Diagramme de Voronoï pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

Les diagrammes de Voronoï représentés dans la figure(IV.20) montrent que le paramètre d'écrantage k ne modifie pas beaucoup la structure du système quand le nombre des couches est petit, il égale à deux pour le nombre de grains $N=15$ dans ce cas. Or on constate qu'il y a quelque une anomalie de la structure pour certaines valeurs du paramètre d'écrantage comme le cas où $k=3$ et $k=3,75$.

On considère un système composés d'un nombre de particules $N=60$ qui sont chargées négativement et confinées par un potentiel électrostatique, on fait varier les valeurs du paramètre d'écrantage k , dans les deux cas (sans et avec fluctuation de la charge).

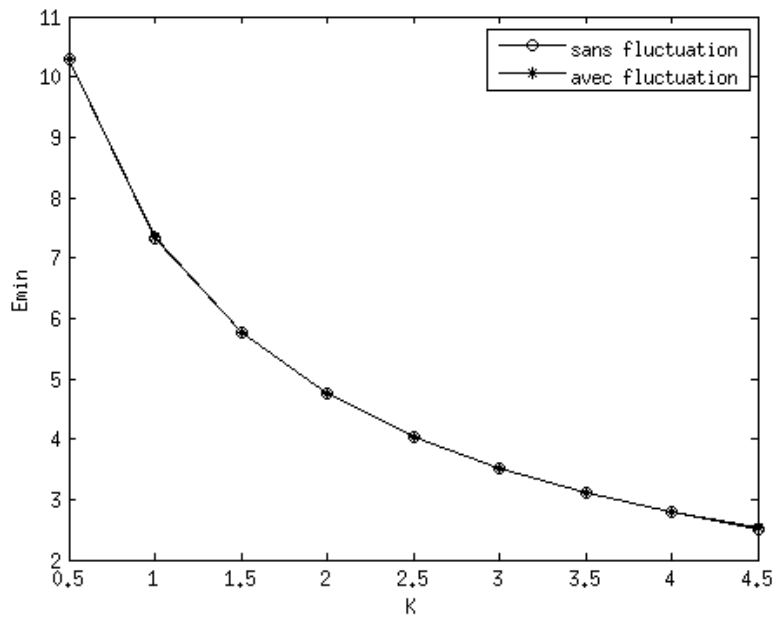


Figure IV.21 : L'énergie interne en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=60$ pour $a=1$.

L'énergie interne minimale E_{min} à $T \approx 0$ est tracée en fonction du paramètre d'écrantage k pour un nombre de particules $N=60$, on remarque la diminution de l'énergie interne du système quand la valeur de k augmente, aussi on observe que les différences entre les valeurs de l'énergie minimale dans le cas avec fluctuation de la charge et celles dans le cas sans fluctuation de la charge sont de l'ordre de 10^{-3} . Cette courbe nous ne permet pas de déceler la température de fusion.

On préfère tracer l'énergie normalisée du système en fonction de la température figure (IV.22).

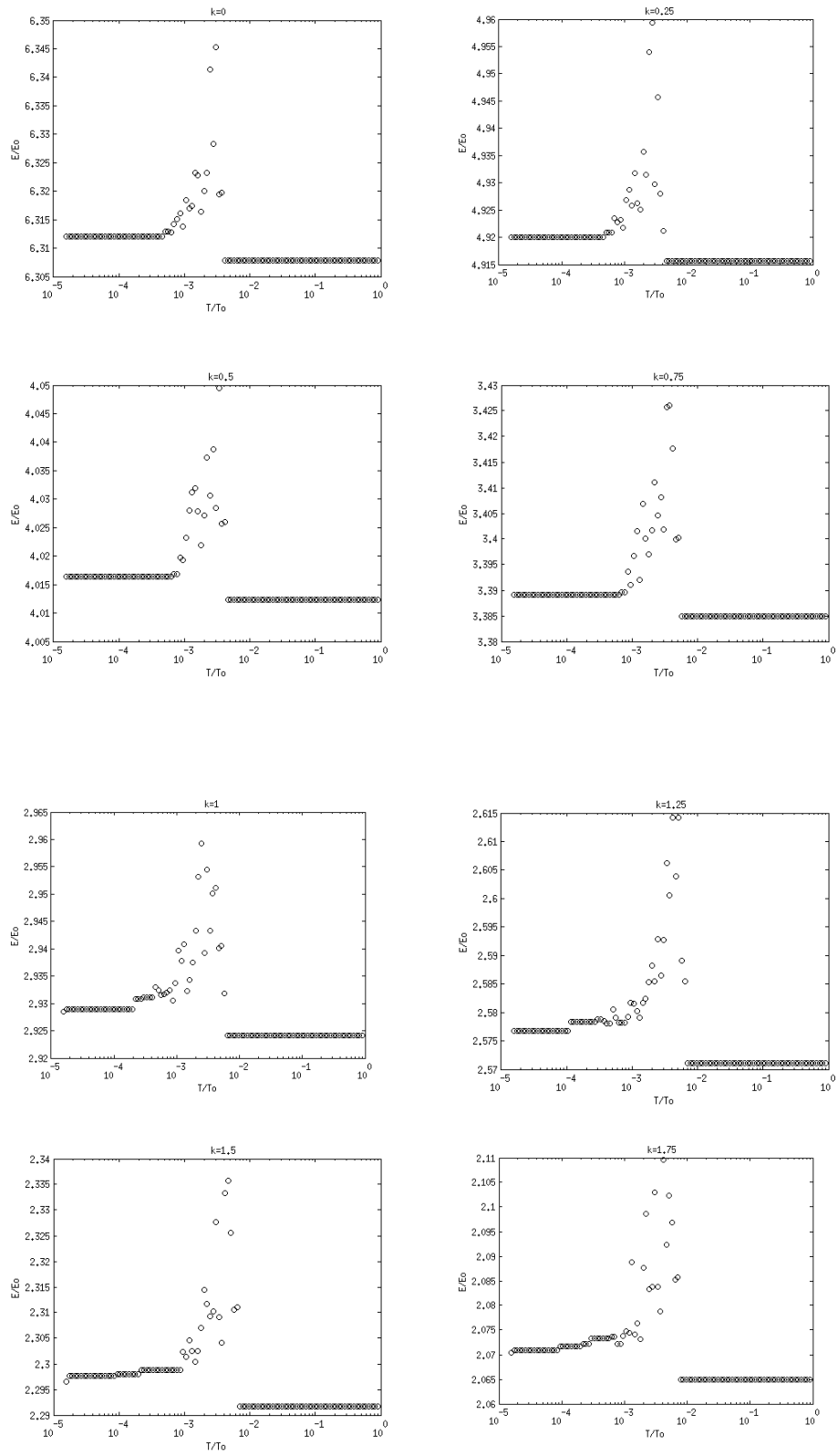


Figure IV.22-a : L'énergie interne en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

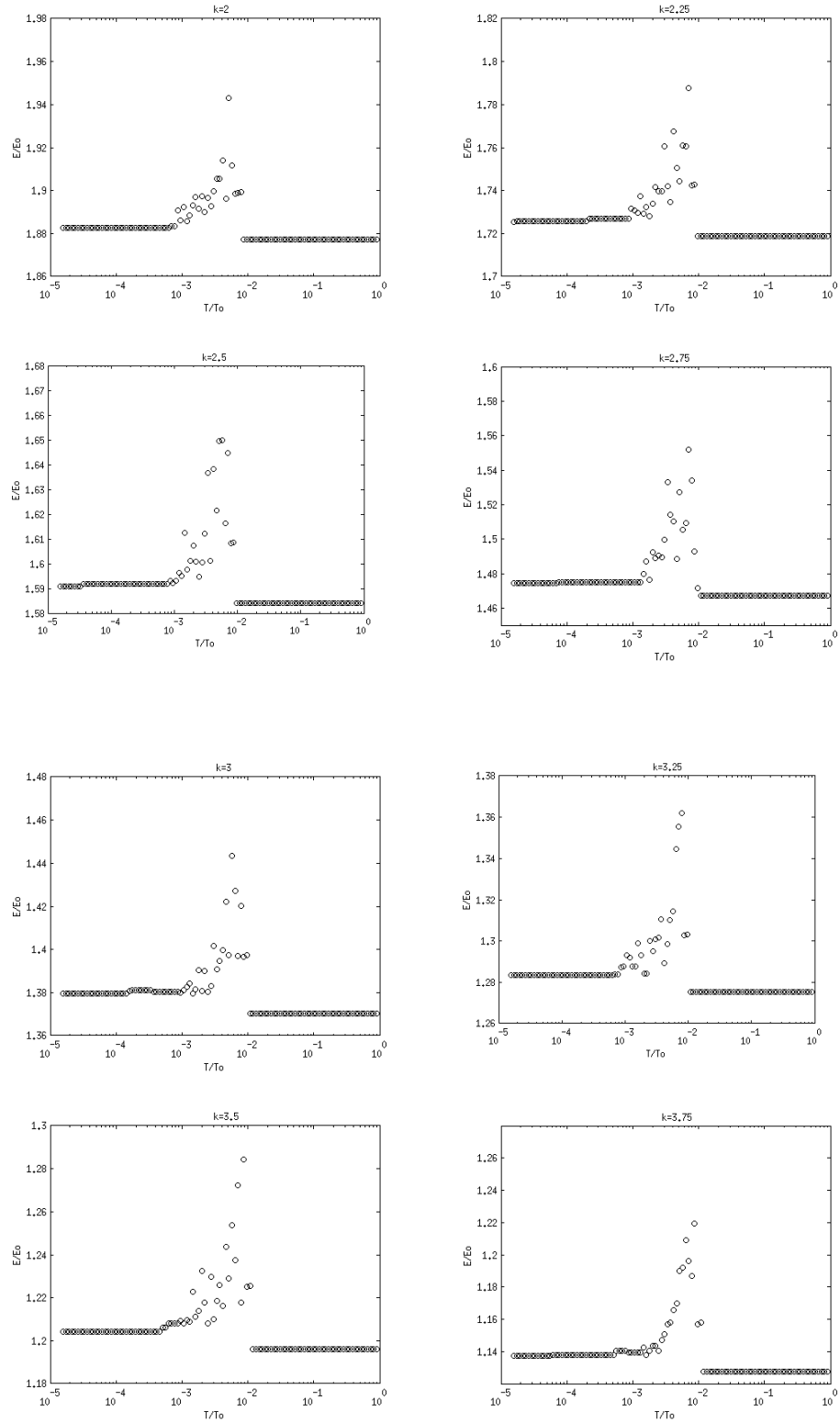


Figure IV.22-b : L'énergie interne en fonction de la température pour $N=15$, $a=1$, sans fluctuation de la charge.

L'ensemble des figures (IV.22) ci-dessus montre l'énergie interne E en fonction de la température T pour la valeur du nombre des grains $N=15$, dans le cas où $a=1$ (confinement parabolique) pour différentes valeurs du paramètre de l'écrantage k . La discontinuité dans la courbe correspond à la transition de phase du cristal. L'ensemble des courbes (IV.22) pour différentes valeurs de k confirment ce qui a été dit précédemment. Un écrantage important réduit le couplage fort entre les grains et permet d'avoir des températures de fusion plus faibles. En présence de la fluctuation de la charge, la température de fusion se trouve réduite d'écrantage. C'est un résultat qui confirme ce qui a été trouvé par l'expérience [51]. La fluctuation de la charge représente une source supplémentaire qui chauffe les grains de poussière.

Nous constatons que le nombre des états métastables qui apparaissent avant la transition de phase varie en variant la valeur du paramètre de l'écrantage.

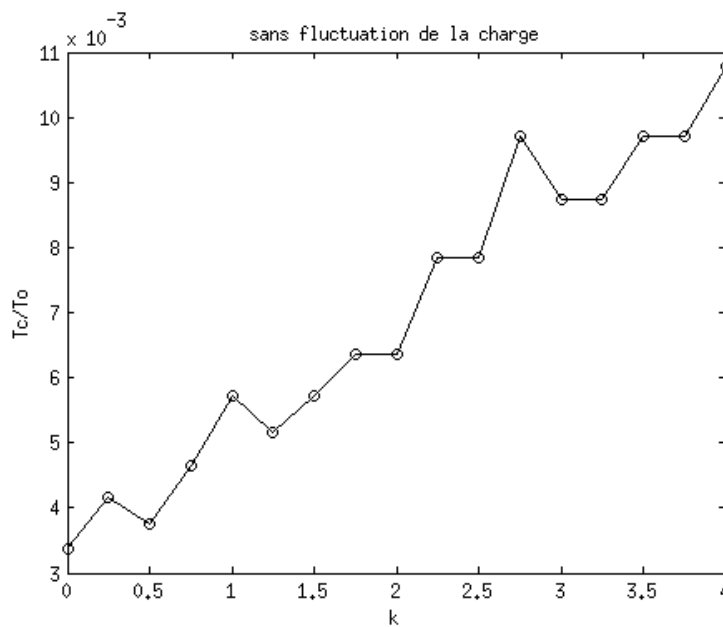


Figure IV.23: La température de fusion en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=15$ pour $a=1$, sans fluctuation de la charge.

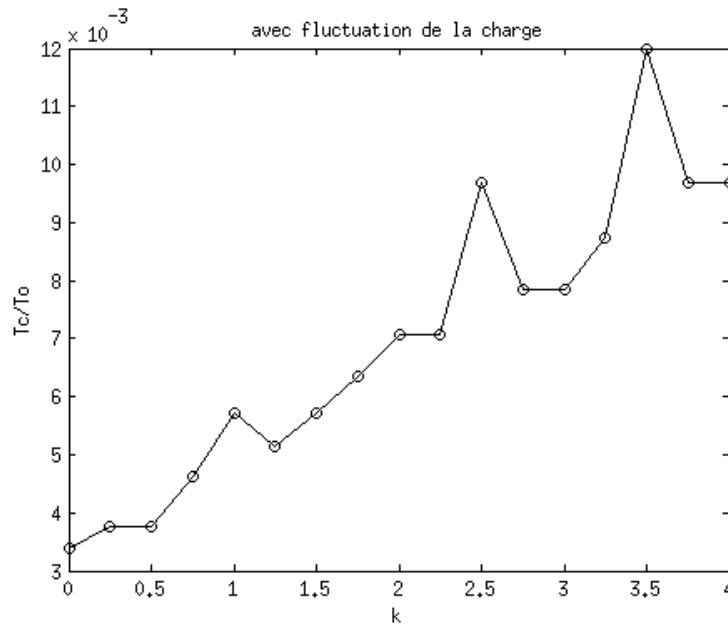


Figure IV.24: La température de fusion en fonction du paramètre d'écrantage pour $N=15$ pour $a=1$, avec fluctuation de la charge.

Les deux figures (IV.23) et (IV.24) montrent l'évolution de la température de fusion T_c en fonction de paramètre d'écrantage k pour un nombre de particules $N=15$ les deux cas sans et avec fluctuation de la charge respectivement. Dans de tel système qui peut être considéré petit on constate d'abord l'augmentation de la température T_c suivant l'augmentation de la valeur du paramètre de l'écrantage k , aussi on observe qu'il n'y a pas une grande différence entre les valeurs de la température de fusion entre les deux cas sans et avec fluctuation de la charge surtout pour des petites valeurs du paramètre d'écrantage inférieures à $k=1,5$ au-delà de cette valeur apparaît l'effet de la fluctuation de la charge.

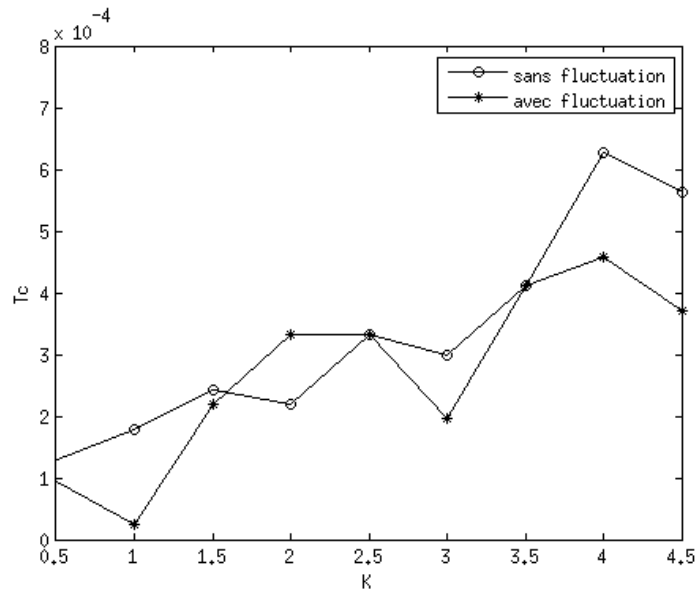


Figure IV.25: La température critique de fusion en fonction du paramètre de l'écrantage pour $N=60$ pour $a=1$.

La température de fusion T_c est tracée en fonction du paramètre d'écrantage k pour un nombre de particules $N=60$. Ce système peut être considéré grand par rapport au système constitué d'un nombre $N=15$. On constate l'augmentation de la température T_c suivant l'augmentation de la valeur de k , aussi la même observation que celle dans le cas $N=15$; il n'y a pas une grande différence entre les valeurs de la température de fusion entre les deux cas sans et avec fluctuation de la charge.

On peut conclure que l'interaction à longue portée réduit l'effet de la fluctuation de la charge.

IV.3.4. Effet du nombre de particules

On considère des systèmes composés d'un nombre de particules $N=5,6,7,8,9,10,15,20,25,30,35,40,45,50,55,60,70,80,90,100$ qui sont chargées négativement et confinées par un potentiel électrostatique, dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge pour un paramètre d'excentricité $a=1$ et d'écrantage $k=3$.

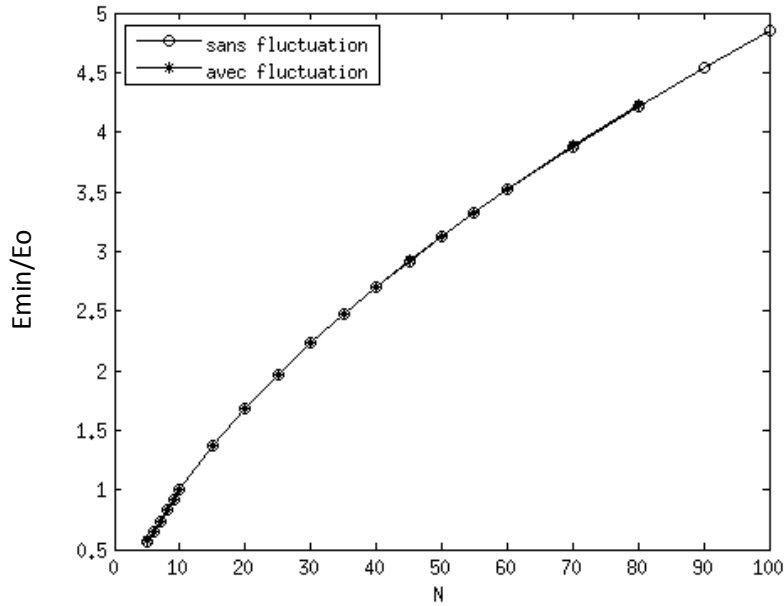


Figure IV.26: L'énergie interne en fonction du nombre de grains, $k=3$, $a=1$.

L'énergie interne minimale E_{min} à très basse température $T=0$ en fonction du nombre des grains augmente uniformément en augmentant le nombre N dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge c'est l'effet de la taille du système; mais on remarque que la différence en énergie minimale entre les deux cas sans et avec fluctuation de la charge est presque nulle.

Il est important de noter que E_{min} est donnée en valeur absolue (c'est une énergie de liaison). Un système avec un nombre plus important de particules est plus lié (couplé). Cependant la figure (IV.27) suggère l'existence de certains nombres magiques, quelques systèmes avec un nombre réduit sont plus stables que d'autres ayant un nombre de particules plus important.

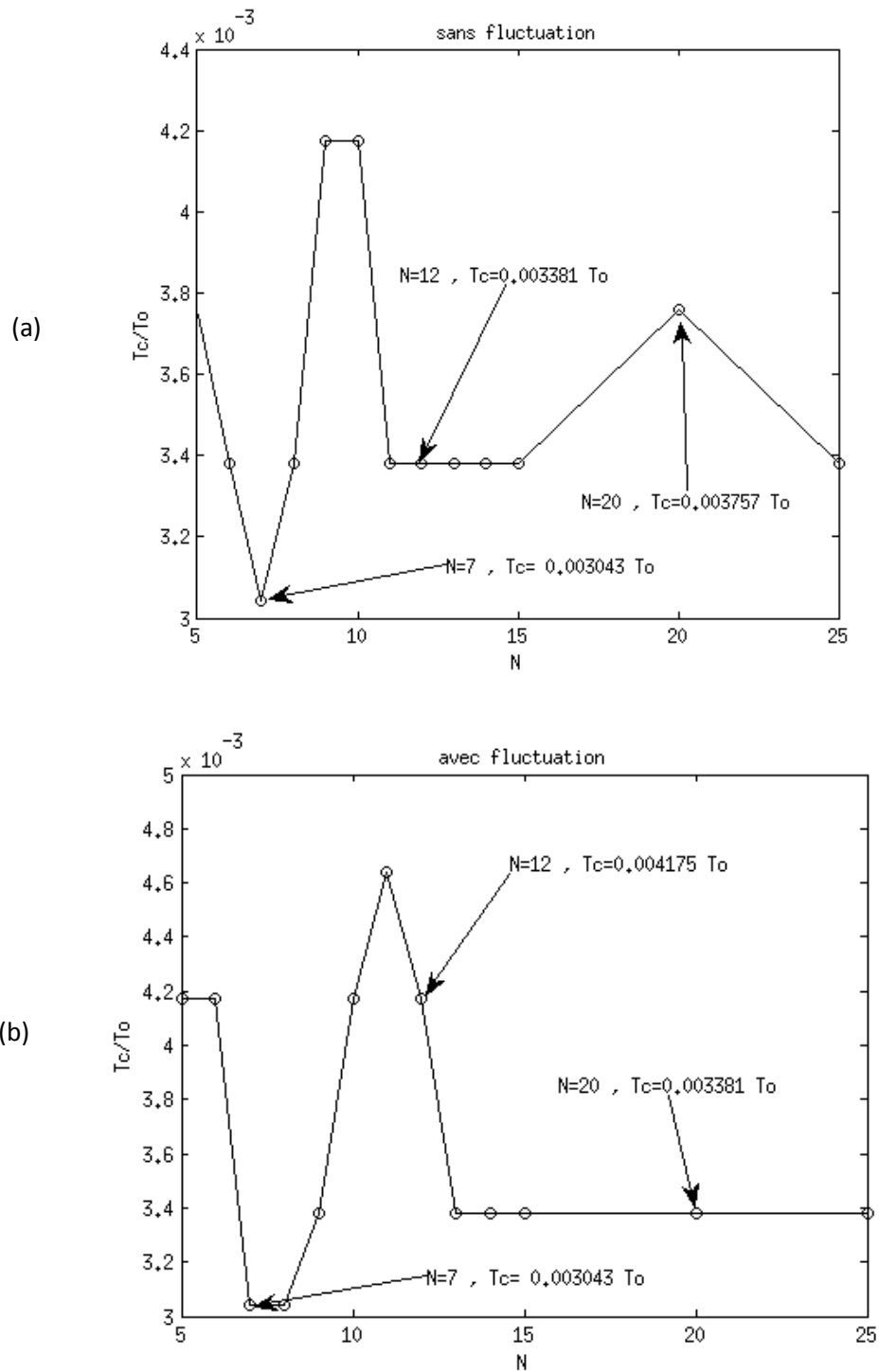


Figure IV.27 : La température de fusion en fonction du nombre de grains de poussière

(a) sans fluctuation de la charge –(b) avec fluctuation de la charge, $k=0$, $a=1$.

Vu l'allure des deux courbes de la température de fusion en fonction du nombre des grains dans les deux cas sans et avec fluctuation de la charge figure (IV.27), on constate que la variation de T_c n'est pas uniforme en augmentant le nombre N ceci est observé même dans la littérature comme le

montre la figure (IV.28). Aussi on constate que les valeurs de la température de fusion pour un nombre fixe de particules dans le cas sans fluctuation de la charge est parfois inférieur à celle dans le cas avec fluctuation de la charge comme le cas du $N=12$ et d'autres fois elle est supérieure comme le cas où $N=20$ et même des fois les deux sont égales par exemple quand $N=7$.

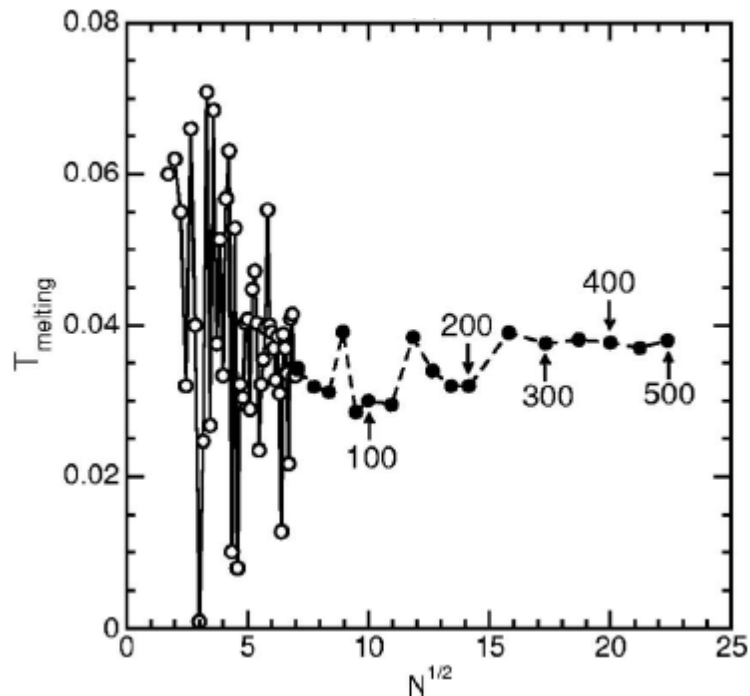


Figure IV.28 : La température de fusion en fonction du nombre de grains [15].

On peut conclure que les valeurs critiques de la température obtenues ne traduisent pas les températures de fusion des cristaux, on n'observe pas une augmentation uniforme de T_c en fonction du nombre de composantes du système, ceci peut être dû au fait que la fusion dépend de la forme du cristal (la structure), en d'autres termes elle dépend du nombre des couches et leurs nombres d'occupation et aussi des états métastables ; ceci dit, qu'il y a différentes températures de fusion, celles qui dépendent des couches c'est à dire de la rotation d'une couche par rapport aux autres, et il y en a celles qui dépendent des vibrations des composantes du système et de leurs translations c'est à dire des sauts de particule d'une couche à une autre.

IV.3.5. Le temps de calcul

Machine 1 : System : Ubuntu Release 10.04(Lucid) Kernel Linux 2.6.32-39-generic GNOME 2.30.2 Hardware : Memory : 15.7 GiB Processor 0: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 1: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 2: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 3: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 4: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 5: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 6: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz Processor 7: Intel (R) Xenon (R) CPU E5520 @ 2.27 GHz System Status : Available disk space : 2538.8 GiB
Machine 2 : System : Ubuntu Release 11.04(raty) Kernel Linux 2.6.38-13-generic GNOME 2.32.1 Hardware : Memory : 2.0 GiB Processor 0: Intel (R) Pentium (R)Dual CPU E2160 @ 1.80 GHz Processor 1: Intel (R) Pentium (R)Dual CPU E2160 @ 1.80 GHz System Status : Available disk space : 126.8 GiB
Machine3 : System : Ubuntu Release 12.04(precise) Kernel Linux 3.2.0-24-generic GNOME 3.4.1 Hardware : Memory : 23.4 GiB Processor : Intel (R) Xenon (R) CPU L5640 @ 2.27 GHz x 24 System Status : Available disk space : 3 TiB

Figure IV.29 : caractéristiques des machines de calcul.

Dans la simulation numérique le temps de calcul a une grande importance dans n'importe code de calcul ; dans le laboratoire de notre équipe on possède trois différentes machines de calcul dont les caractéristiques sont données dans la figure (IV.29). On constate bien que la plus remarquable différence entre ces trois machines est dans le volume de mémoire de chaque machine, on constate que les machines 1 et 3 ont des mémoires d'une capacité 15.7 GiB et 23.4 GiB respectivement tant que la deuxième machine possède une mémoire d'une capacité 2.0 GiB seulement, c'est une machine simple.

Pour voir l'avantage de posséder de tels machines comme la première et la troisième, on trace le temps de calcul en fonction du nombre de grains.

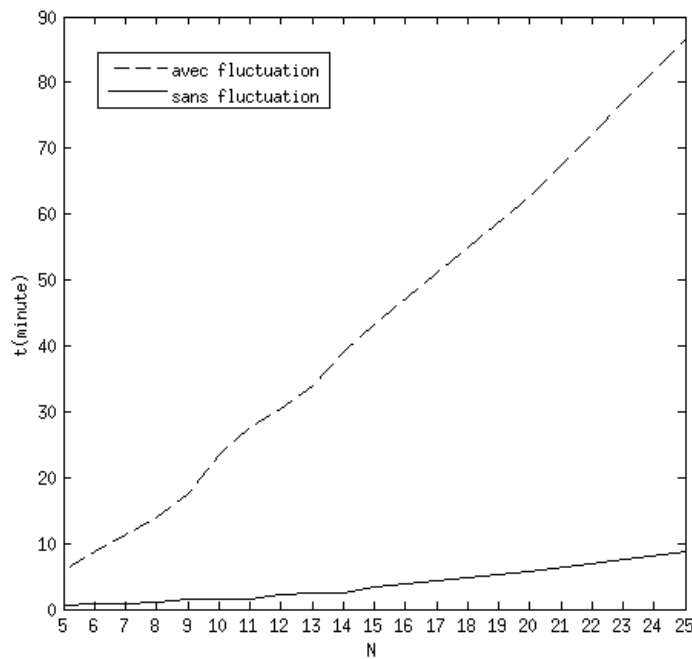


Figure IV.30 : Le temps de calcul en fonction du nombre de grains

La figure (IV.30) montre l'évolution du temps de calcul donné en minutes en fonction du nombre de particules N dans les deux cas sans et avec fluctuation de charge, pour une seule machine, le temps augmente au fur et à mesure que la valeur de N croît on constate que la fluctuation de la charge a un grand effet sur le temps du calcul, elle le rend très long par rapport à celui dans le cas sans fluctuation de la charge, de même la vitesse d'augmentation est supérieure dans ce dernier cas.

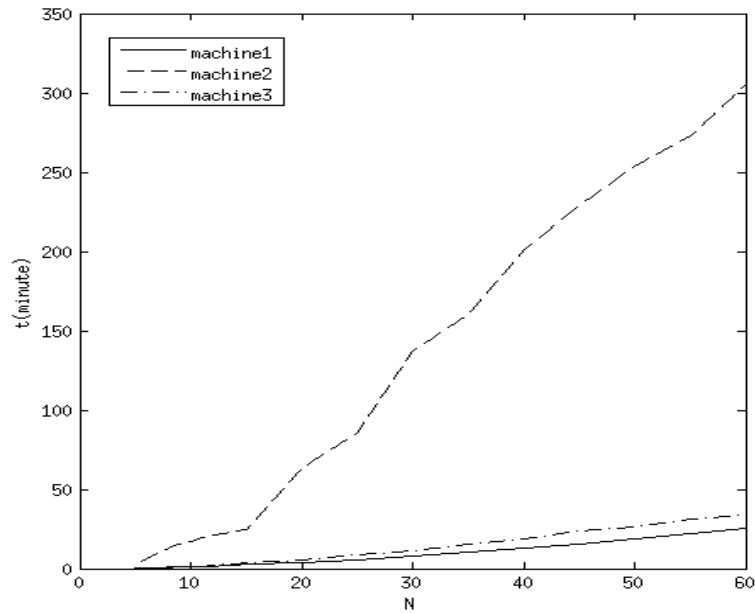


Figure IV.31: Le temps de calcul en fonction du nombre de grains pour trois différentes machines sans fluctuation de la charge.

Dans la figure (IV.31) on montre l'évolution du temps de calcul donné en minutes en fonction du nombre de particules N dans le cas sans fluctuation de charge, pour les trois machines, le temps augmente au fur et à mesure que la valeur de N croît. On observe clairement la différence entre les deux machine 1 et 3 d'une part et la machine simple 2 d'autre part tous ces résultats sont dans le cas du système d'exploitation UBUNTU. Or ce temps de calcul qui ne dépasse pas les 350 minutes, peut atteindre quelques jours dans le cas du système d'exploitation WINDOWS.

Conclusion

A travers cette étude nous avons vérifié quelques propriétés thermodynamiques d'un système composé des grains de poussière dans un plasma à basse température. Un tel système constitue ce qu'on appelle une structure fortement couplée avec des particules de dimensions qui peuvent atteindre le micromètre. L'importance de ce système réside dans la visualisation directe, ce qui permet d'étudier beaucoup de propriétés des cristaux et qui ne sont pas possibles avec les cristaux classiques (d'atomes).

Parmi ces propriétés nous avons tiré l'accent sur les transitions de phase.

Le modèle que nous avons utilisé considère un ensemble de particules en interaction dont l'Hamiltonien dépend du type d'interaction. Selon le plasma de base et les processus de charge des grains de poussière nous avons fait une étude comparative entre deux types de potentiels : un potentiel coulombien et un potentiel écranté de type Yukawa. Le paramètre d'écrantage permet de voir l'influence du plasma de base sur l'interaction.

Une autre caractéristique des grains de poussière est fluctuation de la charge non seulement elle modifie la charge de chaque grains d'une façon aléatoire, l'interaction est aussi affectée. Il est à noter que nous avons aussi dans l'Hamiltonien du système pris en compte la nécessité d'appliquer un potentiel de confinement pour prévenir l'explosion coulombienne un paramètre d'excentricité du ce potentiel affecte les dimensions de la structure du système.

Comme le système est composé de plusieurs particules avec un grand nombre de degrés de liberté nous avons fait appel à la simulation par la méthode de Monte Carlo. Cette dernière a été appliquée avec la variante de Metropolis qui permet de trouver l'énergie minimale d'un système en équilibre thermodynamique, pour réduire le temps de calcul nous avons utilisé la méthode de Newton.

Notre code de calcul nous a permis de décrire les états stables (minimum global) et les états métastables (minimum local). Dans tous les cas de figures le système s'arrange suivant des structures dont le nombre de couches et le nombre de particules dans chaque couche dépendent du nombre de particules, de l'interaction et du paramètre d'écrantage.

La fluctuation de la charge s'est révélée une source additionnelle d'énergie thermique qui permet d'avoir des transitions de phase même à très basse température. Nous avons constaté deux types de transition de phase : une structurale qui préserve la géométrie et une autre elle détruit totalement l'ordre. La température de fusion dépend essentiellement du paramètre d'écrantage et du paramètre d'excentricité du potentiel du confinement.

Tout au long de ce travail nous n'avons pas pris en compte le transfert du moment entre les grains d'une part et les ions et les électrons d'autre part. Ceci dû qu'on travail à très basse température si on augmente la température le transfert du moment devient important.

Dans ces conditions le système devient non Hamiltonien et l'approche qui a été suivie dans ce mémoire ne sera plus valable. Comme perspective on prévoit de prendre en considération cet effet en faisant appel à la description cinétique pour les systèmes non Hamiltoniens.

Bibliographie

- [1] F. F. Chen, *Introduction to Plasma Physics* (Plenum Press, New York, 1974).
- [2] E. Wigner, Phys. Rev. 46 (1934).
- [3] A. Simon and W. B. Thompson, editors, *Advances in Plasma Physics*, volume 4, (1971).
- [4] P. Pavlov, editor, 25th EPS Conference on contr. Fusion and Plasmas Phys. Praha, volume 22C, (1998).
- [5] H. Ikezi. Phys. Fluids, 29:1764, (1986).
- [6] H. Thomas, G. E. Morfill, V. Demmel, J. Goree, B. Feuerbacher, and D. Möhlmann. Phys. Rev. Lett, 73:652, (1994).
- [7] G. E. Morfill, H. M. Thomas, U. Konopka, and M. Zuzic. Phys. Plasmas, 6:1769, (1999).
- [8] J. H. Chu et L. I. Physica, 205:183,(1994).
- [9] G.S. Selwyn, J. Singh, R.S. Bennett, J. Vac. Sci. Technol. A 7, 2758-2765 (1989)
- [10] G.S. Selwyn, J.E. Heidenreich, K.L. Haller, Appl. Phys. Lett. 57, 1876-1878 (1990)
- [11] H.M. Anderson, R. Jairath, J.L. Mock, J. Appl. Phys. 67, 3999-4011 (1990).
- [12] J.-L. Dorier, Ch. Hollenstein, A.A. Howling, J. Vac. Sci. Technol. A 13, 918-926 (1995)
- [13] A. Bouchoule, L. Boufendi, Plasma Sources Sci. Technol. 3, 292-301 (1994)
- [14] J.P. Boeuf, Ph. Belenguer, T. Hbid, Plasma Sources Sci. Technol. 3, 407-417 (1994)
- [15] E. Yurtsever, F. Calvo, D. J. Wales, Phys. Rev. E 72, 026110 (2005).
- [16] F.M.Peeters. Phys. Rev. E .65.046602 . (2002).
- [17] M.Issaad. *Etude de structures fortement couplées*, thèse du magister (2008). USTHB. Algerie.
- [18] A. Bouchoule, Dusty Plasmas: Physics, *Chemistry and Technological impacts in Plasma Processing*, Wiley, New York,(1999).
- [19] P. K. Shukla, A. A. Mamun, *Introduction to dusty plasma*, IOP Publishing, (2002).
- [20] F. Zheng, Adv. Colloid & Interface Sci. (97) 255–278 (2002).
- [21] R. N. Varney, Phys. Rev. 88 (2) 362–364. (1952)
- [22] M. Mikikian, L. Boufendi, A. Bouchoule, H. M. Thomas, G. E.Morfill, A. P.Nefedov, V. E. Fortov, the PKE–Nefedov team, New J. Phys. 5 .19 (2003).

- [23] I. Goldhirsch, D. Ronis, Phys.Rev. A 27 (3) 1635 (1983).
- [24] K. D. Bleecker, A. Bogaerts, Phys.Rev. E 71 066405 (2005).
- [25] W. Li, E. J. Davis, J. Aerosol Sci.26 1063–1083 (1995).
- [26] W. Li, E. J. Davis, J. Aerosol Sci. 26 1085–1099 (1995).
- [27] H. Rothermel, T. Hagl, G. E. Morfill, M. H. Thoma, H. Thomas, Phys. Rev. Lett. 89175001 (2002).
- [28] A. P. Nefedov, G. E. Morfill, V. E. Fortov, H. M. Thomas, et al, New J. Phys. (5) 33 (2003).
- [29] M. Mikikian, L. Boufendi, Phys. Plasmas 11 (8) 3733 (2004).
- [30] G. Morfill, E. Griin, and T. Johnson. Planet. Space Science, 28:1087,(1980).
- [31] C. Cui and J. Goree. IEEE Transactions of Plasma Science, 22:151,(1994).
- [32] D. Frenkel and B. Smit. *Understanding Molecular Simulation: From Algorithms to Applications*. Academic Press, San Diego, California, USA, 2nd edition, (2002).
- [33] A. R. Leach. *Molecular modelling: principles and applications*. Pearson Education, Harlow, 2nd edition, (2001).
- [34] J. Goree, Plasma Sources Sci. Technol. 3, 400 (1994).
- [35] A. Homann, A. Melzer, and A. Piel, Phys. Rev. E 59, R3835 (1999).
- [36] T. Trottenberg, A. Melzer, and A. Piel, Plasma Sources Sci. Technol. 4, 450 (1995).
- [37] M. Shiratani, H. Kawasaki, T. Fukuzawa, H. Tsuruoka, T. Yoshioka, and Y. Watanabe, Appl. Phys. Lett. 65, 1900 (1994).
- [38] Ikezi, H. Phys. Fluids, 29, 1764 (1986).
- [39] Chu, J.H, I, L. Phys. Rev. Lett., 72, 4009 (1994).
- [40] Melzer, A, Trottenberg, T, and Piel, A., Phys. Lett. A, 191, 301 (1994).
- [41] J. H. Chu and Lin I, Phys. Rev. Lett. 72, 4009 (1994).
- [42] Y. Hayashi and K. Tachibana, Jpn. J. Appl. Phys. 33, L804 (1994).
- [43] V.N. Tsytovich, G.E. Morfill, and H. Thomas, Plasma Phys. Reports 28, 623 (2002).
- [44] T. Trottenberg, A. Melzer, and A. Piel, Plasma Sources Sci. Technol. 4, 450 (1995).
- [45] V. A. Schweigert and F. M. Peeters, Phys. Rev. B 51, 7700 (1995).
- [46] L. Rouaiguia, M. Djebli, and F. Peeters. Phys. Lett. A, 372:4487,(2008).
- [47] V.W. Chow, D. A. Mendis, and M. Rosenberg, IEEE Transactions on Plasma Science 22, 179 (1994).
- [48] M. Rosenberg and D. A. Mendis, *in The Physics of Dusty Plasma*, P. K. Shukla, D. A. Mendis and V. W. Chow, World Scientific (Singapore) p. 223 (1996).

- [49] A. Melzer et al. Phys. Lett. A 191, 301-308 (1994).
- [50] Maxime Mikikian. Piégeage de poussières dans la gaine d'un plasma de décharge continue , thèse du doctorat (1999).
- [51] O. S. Vaulina, S. A. Khrapak, A. P. Nefedov, et O. F. Petrov. Phys. Rev. E, volume 60, number(5) (1999).
- [52] H. Thomas, G.E. Morfill, V.Demmel, J. Goree, B. Feuerbacher, D. Mohlmann, Phys. Rev. Lett. 73, 652 (1994).