

N° d'ordre : 17/2012-M/PH

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

UNIVERSITE DES SCINCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI

BOUMEDIENNE



INSTITUT DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté

pour obtenir le grade de

Magister en Physique théorique de la Matière et des Hautes

Energies

Par

BELAID KHALED

Sujet :

DYNAMIQUE DU CHAMP D'INFLATION DANS L'APPROXIMATION DU

CHAMP MOYEN : OPTIMISATION DE L'ETAT INITIAL

Soutenu publiquement le 03 octobre 2012 devant le jury composé de :

M. Mouloud Tribeche	Prof	USTHB /FPH	Président
M. Mohamed Benarous	Prof	F.Sc.UHB.Chlef	Directeur de mémoire
M. Omar Cherbal	MCA	USTHB/FPH	Examineur
M. Mohamed Moakafi	MCB	F.Sc.UHB.Chlef	Invité

REMERCIEMENTS

Mes premiers remerciements vont naturellement à *Benarous Mohamed* pour avoir dirigé ma thèse, pour ses conseils constants et avisés, pour son soutien permanent et son intérêt dans mon travail, j'ai pu apprendre beaucoup grâce à lui.

Je tiens également à remercier Pr. *Mouloud Tribeche* qui a accepté de présider le jury de cette thèse malgré ces nombreuses obligations.

Mes remerciements vont aussi à Dr. *Omar Cherbal* et Dr. *Mohamed Moakafi* pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail.

Ma dernière pensée va à ma famille qui a toujours cru en moi et m'a toujours soutenu, et à tous les autres.

Table des matières

Introduction générale	3-6
Chapitre I : Principe variationnel dépendant du temps pour opérateurs densité et observables	7-11
1. Introduction	
2. Le principe variationnel de Balian-Vénéroni	
Chapitre II : Champs moyen dépendant du temps (TDHFB)	12-17
1. Introduction	
2. Ansatz et forme réduite de l'action BV	
3. Les équations du mouvement pour $\mathcal{D}(t)$	
4. Equation de mouvement de l'observable	
Chapitre III : Approche variationnelle pour les fonctions de corrélation à deux temps	18-34
1. Introduction	
2. Définition de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation	
3. Evaluation variationnels de la fonctionnelle génératrice	
4. Choix des espaces variationnels	
5. Les équations dynamiques	
6. Développement dans les sources	
7. Les fonctions de corrélation à deux temps	
Chapitre IV : Optimisation de l'état initial	35-47
1. Introduction	
2. Les espaces variationnels	
3. Les équations dynamiques	
4. Développement dans les sources	
5. L'approximation de la fonction de corrélation à deux points	
6. La fonction de corrélation de quatre points	
Chapitre V : Application : Dynamique de l'inflation dans une métrique de DE Sitter	48-53
1. Introduction	
2. Les équations TDHFB	
3. Renormalisabilité des équations TDHFB	
Chapitre VI : CMBR et les paramètres cosmologiques	54-69
1. Introduction	
2. Les paramètres cosmologiques	
3. Le scénario d'inflation	
4. Les fluctuations quantiques dans l'univers inflationnaire	
5. Les perturbations cosmologiques	
6. CMBR et les paramètres cosmologiques	
7. L'application de principe variationnel de Balian-Vénéroni sur les photons CMBR	

Conclusion et perspectives	70-71
Appendice A :	72-76
Représentation fonctionnelle de Schrödinger	
a- Introduction	
b-Théorie des champs bosoniques	
Appendice B :	77-79
1 -Les caractéristiques de l'état gaussien	
2- L'expression de l'entropie de Von- Neumann pour les bosons dans l'approximation de Hartree-Bogoliubov	
Appendice C :	80-86
1-Les relations pour les valeurs α_b , α_c , Ξ_b et Ξ_c	
2- Les équations d'évaluation pour n_d , α_d , Ξ_d , n_a , α_a , Ξ_a .	
3-Exponentielles de formes quadratiques d'opérateurs de bosons :	
3-1 Espace de Fock	
3-2 Opérateurs exponentiels quadratiques	
3-3 Transformation de Bogoliubov	
Références	87-88

INTRODUCTION :

La description de l'évolution des systèmes dans le temps avec les conditions initiales qui sont hors – équilibre est l'un des principaux défis en théorie quantique des champs à température finie. Ce problème apparaît dans les différents contextes et particulièrement dans la cosmologie, le cas des modèles inflationnaires pour décrire l'évolution du champ scalaire d'inflation, dit inflaton afin d'être capable de prévoir la durée de la phase inflationnaire .Un autre problème important est la prévision des fluctuations de densité et sa relation avec la distribution des galaxies. Dans un monde quantique, rien n'est parfaitement uniforme du fait de l'agitation inhérente au principe d'incertitude. Or, dans un monde quantique soumis à l'expansion inflationnaire, une telle non-uniformité peut avoir été portée du monde microscopique aux plus grandes distances, produisant ainsi les semences pour la formation ultérieure de vastes corps astrophysiques comme les galaxies.

Les modèles inflationnaires prédisent des données de la température du rayonnement fossile (cosmic microwave background) à $T=2,7^{\circ}\text{K}$. Des preuves flagrantes en faveur de ces idées proviennent des observations par satellite de la température du rayonnement de fond cosmique. Cela veut dire que la température de ce fond de micro-ondes dans une partie du ciel correspondait à sa température dans une autre région du ciel, avec une très bonne précision. Mais ce que je dois vous dire, c'est qu'à partir de la quatrième décimale les températures sont bel et bien différentes selon les endroits. En 1992, le satellite COBE (pour l'anglais Cosmic Background Explorer) et, plus récemment, le WMAP (pour l'anglais Wilkinson Microwave Anisotropy Probe) ont déterminé grâce à des mesures de haute précision que, si la température peut valoir $2,7249^{\circ}\text{K}$ en un point de l'espace, elle peut varier entre $2,7250^{\circ}$ et $2,7251^{\circ}$ Kelvins en d'autres points.

Ces variations de températures extraordinairement faibles tracent dans le ciel un schéma que l'on peut expliquer en les attribuant au même mécanisme que celui que l'on a proposé pour expliquer la distribution des galaxies : des fluctuations quantiques élargies par l'inflation[1].

Il est donc nécessaire, si l'on veut étudier la dynamique de l'inflation, d'utiliser un formalisme adapté aux systèmes hors de l'équilibre thermique dont l'évolution exacte serait gouvernée par une équation du type Liouville-Von-Neumann.

Dans ce travail de thèse nous proposons une méthode variationnelle de Balian-Vénéroni, dans le principe est d'optimiser la valeur moyenne d'une observable mesurée. Utilisant le formalisme de la matrice densité, il s'attache plus particulièrement à l'étude de problèmes statistiques[2] .

Les méthodes variationnelles ont prouvé leur grande capacité à traiter simultanément, des problèmes difficiles réunissant les équations qui régissent le système, les conditions aux limites, et aussi des conditions de contrainte. Dans les théories modernes, les méthodes variationnelles sont utilisées, à titre de méthodes d'approximations, dans des domaines aussi vastes de la physique. Après les travaux de Feynman et Schwinger, le champ d'application de ces méthodes s'est élargi à la théorie quantique des champs.

Il existe dans la construction des principes variationnels deux traitements. Le premier consiste à minimiser une quantité physique donnée (généralement l'énergie, l'énergie libre). Dans le second cas, il s'agit d'extrémiser une fonctionnelle qui n'a pas forcément une signification physique, bien

qu'elle soit construite sur la base des équations exactes. La quantité sensée être optimale fournit alors un critère permettant de juger de la pertinence d'un sous-espace variationnel. Dans ce cadre, on peut placer les principes Lippman-Schwinger et de Blaizot-Ripka qui se proposent d'optimiser les processus de collision. Le principe variationnel de Balian-Vénéroni[2], quant à lui a pour but d'optimiser la prédiction de la valeur moyenne d'une observable à partir de la connaissance, même partielle de l'état initial du système.

Le plan de ce mémoire sera donc le suivant.

Tout d'abord, le principe variationnel est présenté dans le chapitre premier, il fait jouer un rôle dual à un opérateur densité et à un observable, qui sont de ce point de vue, analogues aux bras et kets de la mécanique quantique ordinaire, ou aux coordonnées et à leurs moments conjugués de la mécanique classique. L'application du principe variationnel BV en théorie quantique des champs ne fut possible que grâce à l'introduction de la représentation fonctionnelle de Schrödinger par Jackiw et Floréanini [3]. Ce furent d'ailleurs Jackiw, Eboli et So-Young [4] puis Eboli, So-Young et Samiullah[5] en espace temps courbe qui en firent la première application.

Dans le deuxième chapitre, le problème se réduit à un type conventionnel, c'est-à-dire à un problème aux conditions initiales. En effet, en utilisant un ansatz gaussien pour le noyau de l'opérateur densité ainsi qu'un noyau quadratique dans le champ pour l'observable, nous obtenons grâce au principe BV les équations du champ moyen dépendant du temps, aussi appelée, approximation de Hartree-Fock ou d'équations de Hartree-Fock-Bogoliubov. Rappelons que l'esprit d'une méthode d'approximation revient souvent à étudier les déviations autour d'un cas connu. L'approximation du champ moyen est différente. Comme le cas du problème à N corps interagissant d'une façon complexe, l'idée de l'approximation du champ moyen revient à trouver une façon de réécrire le potentiel complexe à N corps qui influence une particule comme un potentiel à un corps (le potentiel moyen ou champ moyen).

L'approximation du champ moyen peut être présentée d'une façon beaucoup plus générale dans le contexte du formalisme des fonctions de Green. Elle consiste à dire que les corrélations à deux particules s'expriment comme des produits de corrélations à une particule.

Dans le troisième chapitre, nous considérons que l'état initial est caractérisé par un opérateur densité $\mathcal{D}(t_0)$ qui correspond à une matrice densité gaussienne. On minimise l'action fonctionnelle et ensuite en limitant l'espace variationnel aux opérateurs qui sont des exponentielles de formes quadratique dans les opérateurs champs $\Phi(x)$ et $\Pi(x)$. Avec une paramétrisation adéquate des objets variationnels, on peut écrire les équations dynamiques couplées sous une forme qui permet le développement dans les sources et ainsi obtenir trouver les fonctions de Green à deux temps, avec deux, trois ou quatre opérateurs de champ.

Tout d'abord, on résout les équations du champ moyen TDHFB, puis on calcule le noyau qui correspond à des petits écarts autour de la solution statique qui est analogue à l'approximation RPA, et enfin on résout l'équation dynamique backward qui implique le noyau calculé pour la solution du champ moyen. Ces résultats ont été obtenus pour la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélations.

Nous donnons aussi les expressions correspondantes aux fonctions de Green retardées qui apparaissent lorsqu'on étudie la réponse du système qui est exposé à de petites perturbations externes.

Dans le chapitre quatre, nous avons supposé que l'état initial $\mathcal{D}(t_0)$ est connu. En pratique, seules les valeurs de quelques observables sont connues. Nous optimisons l'état initial, les approximations obtenues de cette façon pour les fonctions de corrélations à deux temps comprennent non seulement les corrélations entre les particules provenant de la dynamique, mais aussi celles qui sont présentes dans l'état initial. On introduit à nouveau $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ deux objets variationnelles qui évoluent dans le temps imaginaire.

En théorie quantique des champs la méthode du temps imaginaire, est une des méthodes couramment utilisées pour trouver la valeur la plus optimale d'un opérateur. Dans le cas de la cosmologie, le temps imaginaire est un temps avant le Big Bang, selon la théorie des frères Bagdanoff, inspiré par Max Planck : le passé, le présent et le futur forment un seul et même temps. Un temps fixe dont l'univers est seulement composé d'informations, sans énergie et sans matière, un temps imaginaire, cela signifie aussi qu'il a les deux faces de l'univers : la face réelle, celle qui est faite de matière et énergie-celle que l'on connaît encore une fois, et la face imaginaire, soit l'information pure.

Le point zéro et l'échelle de Planck sont séparés par la transition de phase, propre à l'état KMS (Kubo-Martin-Schwinger), où l'information du début se transforme en énergie, avec le temps ordinaire, qui commence. Cette énergie devient rapidement explosive, puis qu'elle est très accumulée dans une toute petite région de l'espace et à ce moment là, elle se déploie évidemment avec force.

Dans ce chapitre on étudie aussi la phase symétrique, on prend en considération l'étude de la fonction de corrélation à deux temps avec deux opérateurs du champ et aussi avec quatre opérateurs du champ Φ . Nous allons le relier avec la fonction de polarisation Π_R .

Dans le cas d'équilibre, on est toujours dans la phase symétrique, on voit bien que la fonction de corrélation avec deux opérateurs du champ est spéciale car les approximations obtenues avec ou sans l'optimisation se coïncident par rapport à l'état initial.

Dans le chapitre cinq, nous étudions les équations TDHFB pour un champ $O(1)$ en self-interaction dans une métrique de De Sitter et nous établissons la renormalisabilité de ces équations couplées à la gravitation.

Dans le chapitre six on passe en revue les origines possibles des paramètres cosmologiques et l'on étudie comment les extraire. Ces paramètres sont obtenus à partir des données d'expériences d'observation du CMBR. On base ici sur le modèle d'inflation qui explique l'histoire de l'Univers où celui-ci a été en expansion accélérée. Il permet de résoudre plusieurs problèmes cosmologiques, il permet la génération de fluctuations de densité qui ont donné lieu aux grandes structures.

Dans ce chapitre on calcule les fonctions de corrélations par deux méthodes, l'une par la méthode de l'analogie entre un trou noir et l'espace de De Sitter et la deuxième par la suite du chapitre cinq qui donne la solution des équations TDHFB dans l'espace de De Sitter. On aboutit au même résultat, confirmant ainsi le fait que la technique développée dans ce travail est fort utile.

Il est important de dire que l'objectif final soit d'étudier l'univers primordial.

Le premier appendice contient la représentation fonctionnelle de Schrödinger. Le deuxième appendice regroupe les caractéristiques de l'état gaussien et l'expression de l'entropie de Von Neumann pour les bosons dans l'approximation de Hartree-Bogoliubov. Dans le troisième on donne quelques formules utiles pour les opérateurs exponentiels de formes quadratiques.

Chapitre I

Principe variationnel dépendant du temps pour opérateurs densité et observables

1-Introduction

En mécanique quantique, un état complètement préparé ou micro état, est caractérisé par son ket. L'état d'un système incomplètement préparé ou macro état, est moins bien connu et correspond à la donnée d'une loi de probabilité sur l'ensemble de tous les kets possibles. La synthèse de ce caractère probabiliste avec celui qui est associé à la mécanique quantique des kets va être effectuée à l'aide d'un opérateur densité D_0 . [6]

En pratique après la préparation de l'état, on laisse le système évoluer pendant un certain temps, on mesure une quantité d'intérêt (énergie, moment angulaire, etc.). Le problème qui se pose alors est de prédire théoriquement le résultat d'une mesure. Ce problème peut être énoncé de la façon suivante. À l'instant t_0 , le système quantique est dans l'état initial décrit par un opérateur densité D_0 et l'évolution est gouvernée par le Hamiltonien H . On cherche la valeur moyenne d'une observable donnée A à un instant t_1 .

En principe, il faut résoudre l'équation de Liouville-Von-Neumann,

$$i \frac{dD(t)}{dt} = [H, D(t)] \quad (1-1)$$

Où l'on posera désormais $\hbar = 1$

avec la condition $D(t_0) = D_0$ à l'instant initial t_0 . La solution formelle de cette équation est :

$$D(t) = U^\dagger(t_0, t) D_0 U(t_0, t) \quad (1-2)$$

Où $U(t, t_0) = U^\dagger(t_0, t)$ est l'opérateur d'évolution $U(t_0, t) = e^{-iH(t-t_0)}$. Le résultat s'écrit :

$$\langle A \rangle_{t_1} = \text{Tr} A D(t_1) = \text{Tr} A U(t, t_0) D_0 U(t_0, t_1) \quad (1-3)$$

Du point de vue de Heisenberg, on a :

$$\langle A \rangle_{t_1} = \text{Tr} U(t_0, t_1) A U(t_1, t_0) D(t_0) = \text{Tr} A(t_1, t_0) D(t_0) \quad (1-4)$$

Il faut dans ce cas résoudre l'équation de Heisenberg pour l'observable $A(t_1, t)$.

$$i \frac{d}{dt} A(t_1, t) = -[A(t_1, t), H] \quad (1-5)$$

avec la condition finale $A(t_1, t_1) = A$ à l'instant final t_1 . L'observable A étant connue au temps final t_1 . L'équation de Heisenberg (1-5) doit être résolue en remontant le temps.

Les équations d'évolution (1-1) et (1-5) sont complexes à résoudre. L'évaluation exacte de la valeur moyenne (1-3) et (1-4) est alors en pratique impossible.

La difficulté est due à ce que pour la majorité des systèmes, le nombre de degrés de liberté est très grand et leurs couplages sont des plus inextricables. En outre, le nombre de degrés de liberté fait que l'état initial D_0 lui même peut avoir une forme si complexe que sa manipulation sera impossible. Le recours à des méthodes d'approximation est alors inévitable. Il y a deux objectifs pour ces méthodes : elles visent à réduire le nombre de degrés de liberté par l'introduction d'hypothèses simplificatrices plausibles (gaz idéal, modèles à particules indépendantes, interactions limitées aux

proches voisins, etc.) et simplifier les coulages. On cherche donc à introduire une description qui conduit à des équations de complexité moindre que celles des équations exactes.

Il est parfois souhaitable de ne tenir compte que des degrés de liberté les plus pertinents, et ce pour des raisons aussi bien expérimentales que théoriques. Le choix difficile de la nature et de nombre de ces degrés de liberté dépend du problème posé.

2- Le principe variationnel de Balian-Vénéroni

Balian et Vénéroni (BV) ont proposé un principe variationnel dépendant du temps[7] . Ils proposent de considérer l'évolution du système à la fois dans la représentation de Schrödinger et Heisenberg. La formule variationnelle introduite par Balian et Vénéroni est la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ suivante [8] :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}(t), \mathcal{D}(t)) = \text{Tr}(\mathcal{A}(t_0)\mathcal{D}(t_0)) + \mathcal{Z}_{dyn}$$

$$\text{avec} \quad \mathcal{Z}_{dyn} = \text{Tr} \int_{t_0}^{\infty} dt \mathcal{D}(t) \left\{ \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} - i[\mathcal{A}(t), H] + i\mathcal{A}(t) \sum_j J_j(t) Q_j \right\} \quad (1-6a)$$

qui peut aussi l'écrire sous la forme suivante :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}(t), \mathcal{D}(t)) = \text{Tr}(\mathcal{A}(\infty)\mathcal{D}(\infty)) - \text{Tr} \int_{t_0}^{\infty} dt \mathcal{A}(t) \left\{ \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} + i[H, \mathcal{D}(t)] - i \sum_j J_j(t) Q_j \mathcal{D}(t) \right\} \quad (1-6b)$$

Dans (1-6) $\mathcal{Z}$ est une fonctionnelle des ansätze $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{D}(t)$. Le symbole Tr dénotera une trace sur tous les états de l'espace de Fock approprié au système à N corps considéré. L'opérateur $\mathcal{A}(t)$ est un multiplicateur de Lagrange associé à l'équation (1-1) de Liouville-Von-Neumann. L'opérateur $\mathcal{D}(t)$ peut alors être considéré comme un multiplicateur de Lagrange associé à l'équation de Heisenberg (1-5). Les quantités $J_j(t)$ représentent les sources couplées aux opérateurs Q_j dont on veut calculer les corrélations. Les crochets indiquent un commutateur et H est l'Hamiltonien (exact) du système.

Lorsqu'on n'introduit aucune restriction sur les espaces variationnels, ce principe reproduit la réponse formelle exacte de la mesure. Par contre, en pratique il faut utiliser des espaces variationnels restreints qui puissent fournir une évaluation optimale de la valeur moyenne de l'observable considérée.

Les données de la mesure, c'est-à-dire l'opérateur densité $\mathcal{D}_0$ connu à l'instant initial t_0 , et l'observable A mesurée au temps final t_1 , sont exprimées par les conditions aux limites :

$$\mathcal{D}(t_0) = \mathcal{D}_0 \quad (1-7a)$$

$$\mathcal{A}(t_1) = A \quad (1-7b)$$

$$\mathcal{A}(\infty) = A(\infty) = I \quad (1-7c)$$

Les quantités $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{D}(t)$ qui rendent $\mathcal{Z}$ stationnaire, sont celles qui fournissent la prédiction optimale de $\text{Tr} \mathcal{A} \mathcal{D}$.

Les variations de $\mathcal{Z}$ par rapport à $\mathcal{A}(t)$ donnent :

$$Tr\delta\mathcal{A}(t) \left[\frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} + i[H, \mathcal{D}(t)] - i \sum_j J_j(t) Q_j \mathcal{D}(t) \right] = 0 \quad (1-8)$$

Tandis que celles par rapport à $\mathcal{D}(t)$ $t > t_0$ donnent :

$$Tr\delta\mathcal{D}(t) \left[\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} - i[\mathcal{A}(t), H] + i\mathcal{A}(t) \sum_j J_j(t) Q_j \right] = 0 \quad (1-9)$$

Quand les variations $\delta\mathcal{A}(t)$ et $\delta\mathcal{D}(t)$ ne sont soumises à aucune restriction, (ce qui veut dire que les espaces variationnels sont les plus généraux possibles), on déduit de (1-8) et (1-9) les équations d'évolution de $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$:

$$i \frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} = [H, \mathcal{D}(t)] - \sum_j J_j(t) Q_j \mathcal{D}(t) \quad (1-10)$$

$$i \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = -[\mathcal{A}(t), H] + \mathcal{A}(t) \sum_j J_j(t) Q_j \quad (1-11)$$

Avec $t=t_0$ on a :

$$Tr\delta\mathcal{A}(t_0)[\mathcal{D}(t_0) - \mathcal{D}(t_0)] = 0 \quad (1-12)$$

On reconnaît dans l'équation (1-10) sans les sources, compte tenu de la condition initiale (1-7a), l'équation exacte de Liouville-Von-Neumann, pour l'opérateur de densité.

Donc l'équation (1-9) pour l'observable $\mathcal{A}(t)$ avec la condition finale (1-7b) sans les sources n'est autre que l'équation exacte de Heisenberg (1-5) remontant le temps.

Comme nous l'avons dit auparavant, ces équations ne sont pas solubles en pratique. Il faut sélectionner des espaces variationnels restreints pour les opérateurs $\mathcal{D}(t)$ de t_0 à t et $\mathcal{A}(t)$, de t_1 à t_0 qui évolueront selon le système (1-8)-(1-9). Il est important que les espaces variationnels de $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{D}(t)$ aient le même nombre de paramètres variationnels, pour que les équations (1-8)-(1-9) conduisent à un système fermé. L'opérateur densité du système ne dépend pas en réalité de l'observable $\mathbf{A}$ que l'on mesure. La solution $\mathcal{D}(t)$ de (1-8) dépend en général de l'observable $\mathbf{A}$ et du temps t_1 . Dans ce cas, $\mathcal{D}(t)$ ne peut pas être interprétée comme une approximation de l'opérateur densité exact. Ce n'est qu'un outil pour calculer la valeur moyenne (1-3) ou (1-4).

Par conséquent, $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{D}$ n'auront de signification physique que pour $t=t_0$ pour $\mathcal{D}$ et de $t=t_1$ pour $\mathcal{A}$, où ils se confondent respectivement avec $\mathbf{D}_0$ et $\mathbf{A}[9]$.

Si les espaces variationnels sont non- linéaires, ceci introduit un couplage entre $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$. Ainsi, $\mathcal{D}(t)$ dépendra en général de $\mathcal{A}(t)$, ce qui introduit une difficulté technique liée aux conditions aux limites en deux temps distincts. Par contre, si l'espace variationnel de $\mathcal{A}$ est linéaire dans ses paramètres, c'est à dire de la forme $\mathcal{A}(t) = \sum \lambda_i(t) \omega^i$, où $\lambda_i(t)$ sont les paramètres variationnels et les ω^i constituent une base d'opérateurs, l'équation (1-8) devient :

$$Tr\delta\omega^i \left[\frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} + i[H, \mathcal{D}(t)] - i \sum_j J_j(t) Q_j \mathcal{D}(t) \right] = 0 \quad (1-13)$$

On constate que l'évolution de $\mathcal{D}$ se découple de celle de $\mathcal{A}$, cela veut dire que la solution de $\mathcal{D}(t)$ ne dépend ni de l'observable mesurée $\mathcal{A}$, ni du temps de mesure t_1 .

Parmi les opérateurs ω^i , se trouve l'opérateur identité $\mathbf{I}$. Dans ce cas, la variation $\delta\mathcal{A} \propto \mathbf{I}$ est permise et si $J_i(\infty)=0$, l'équation ci-dessus fournit alors $\frac{d}{dt}Tr\mathcal{D} = 0$. La fonction de partition $Tr\mathcal{D}$ est donc une constante de mouvement. Ceci est un exemple de loi de conservation que l'on peut prévoir par des considérations générales sur les espaces variationnels. On peut de même prédire la conservation de l'énergie et de l'entropie si certaines restrictions sont imposées sur les ansätze.

.

Chapitre II

Champ moyen dépendant du temps(TDHFB)

1-Introduction

Parmi les applications du principe variationnel BV, l'on s'intéresse à prédire les valeurs moyennes d'observables du type,

$$A = \sum_i \lambda_i \omega^i , \quad (2-1)$$

qui sont des fonctions linéaires d'un ensemble d'opérateurs ω^i sélectionnés pour leur pertinence pour un problème donné. Dans la définition (1-1), les λ_i sont des C-nombres. Afin de pouvoir utiliser facilement la condition $\mathcal{A}(t_i) = A$. L'espace variationnel de l'opérateur $\mathcal{A}(t)$ doit contenir la forme (1-1). Aussi, est-il naturel de faire le choix suivant :

$$\mathcal{A}(t) = \sum_i \lambda_i(t) \omega^i , \quad (2-2)$$

où les $\lambda_i(t)$ deviennent des paramètres variationnels du problème. Pour le choix variationnel de $\mathcal{D}(t)$, nous pouvons nous laisser guider par le principe d'entropie maximale, selon lequel, l'opérateur densité qui satisfait à un ensemble de contrainte de la forme :

$$\langle \omega^i \rangle = Tr \omega^i \mathcal{D}, \quad (2-3)$$

et qui contient le minimum d'information, est de la forme canonique généralisée :

$$\mathcal{D} = \exp(-\sum_i \phi_i \omega^i), \quad (2-4)$$

où interviennent les C- nombres ϕ_i . Nous allons de plus supposer que l'état initial $\mathcal{D}_0$ du système peut aussi être décrit par une expression de ce type. Les paramètres ϕ_i sont alors les multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes (1-3). L'opérateur $\mathcal{D}(t)$ doit être du même type.

$$\mathcal{D}(t) = \exp(-\sum_i \phi_i(t) \omega^i) . \quad (2-5)$$

Où les $\phi_i(t)$ seront cette fois les paramètres variationnels [10].

Pour un problème donné, la sélection de l'ensemble des opérateurs pertinents ω^i est une question difficile.

Nous pouvons citer quelques exemples simples extraits du problème à N-corps quantique [11,10]. On choisit un système de n bosons en interaction, et pour opérateurs ω^i l'ensemble $\{a, a^+, aa^+, a^+a, a^+a^+\}$, où a^+ et a sont les opérateurs de créations et d'annihilation de bosons, obéissant aux relations de commutations usuelles,

$$[a_i^+, a_j] = \delta_{ij} ; [a_i^+, a_j^+] = [a_i, a_j] = 0 . \quad (2-6)$$

En théorie quantique des champs la généralisation est immédiate, en utilisant l'analogie :

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^+) \rightarrow \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Omega_R^{-1/2}(x, y) [\mathbb{A}(y) + \mathbb{A}^+(y)] dy ,$$

$$\mathbf{p} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\mathbf{a}^+ - \mathbf{a}) \rightarrow \Pi(\mathbf{x}) = \frac{i}{\sqrt{2}} \int \Omega_R^{-1/2}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) [\mathbb{A}^+(\mathbf{y}) - \mathbb{A}(\mathbf{y})] d\mathbf{y} \quad , \quad (2-7)$$

Nous choisissons pour ω^i l'ensemble :

$$\Phi_i(\mathbf{x}), \Pi_i(\mathbf{x}), \Phi_i(\mathbf{x})\Phi_j(\mathbf{y}), \Pi_i(\mathbf{x})\Pi_j(\mathbf{y}), \Phi_i(\mathbf{x})\Pi_j(\mathbf{y}) + \Pi_j(\mathbf{y})\Phi_i(\mathbf{x}) \quad , \quad (2-8)$$

où $\Phi_i(\mathbf{x})$ et $\Pi_i(\mathbf{x})$ obéissent aux relations de commutations des champs bosoniques (à N composantes).

$$[\Phi_i(\mathbf{x}), \Pi_i(\mathbf{x})] = i\delta_{ij}(\mathbf{x} - \mathbf{y}),$$

$$[\Phi_i(\mathbf{x}), \Phi_j(\mathbf{y})] = [\Pi_i(\mathbf{x}), \Pi_j(\mathbf{y})] = 0 \quad , \quad i, j=1, 2, \dots, N \quad (2-9)$$

Selon (2-2) et (2-5), le choix (2-7) conduit à une observable $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ au plus quadratique dans les champs et à un opérateur densité gaussien. Cela nous fera aboutir, grâce au principe BV aux équations du champ moyen dépendant du temps .

2-Ansätze et forme réduite de l'action BV

On choisit pour le noyau de l'opérateur $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ une fonctionnelle gaussienne :

$$\langle \Phi_1 | \mathcal{D}(\mathbf{t}) | \Phi_2 \rangle = e^{-r} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\Phi_1 \left[\frac{G^{-1}}{2} - 2i\Sigma \right] \Phi_1 + \Phi_2 \left[\frac{G^{-1}}{2} - 2i\Sigma \right] \Phi_2 - \Phi_1 G^{-\frac{1}{2}} \xi G^{-\frac{1}{2}} \Phi_2 \right] \right\}, \quad (2-10)$$

L'opérateur $\mathcal{D}(\mathbf{t})$ est décrit par les paramètres $\mathbf{G}, \Sigma$ et ξ qui sont des matrices (N×N) dépendant des variables d'espaces et du temps.

$$\langle \bar{\Phi}_i(\mathbf{x}) \bar{\Pi}_j(\mathbf{y}) \rangle = \frac{i}{2} \delta_{ij} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) + 2 \left(\mathbf{G}_\xi^{1/2} (\mathbf{1} - \xi)^{-1} \mathbf{G}_\xi^{1/2} \Sigma_\xi \right)_{ij} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}). \quad (2-11)$$

En introduisant les opérateurs centrés $\bar{\Phi} = \Phi - \langle \Phi \rangle$ et $\bar{\Pi} = \Pi - \langle \Pi \rangle$, on aura

$$\langle \Phi_i(\mathbf{x}) \rangle = \varphi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (2-12a)$$

$$\langle \Pi_i(\mathbf{x}) \rangle = \pi_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (2-12b)$$

$$\langle \bar{\Phi}_i(\mathbf{x}) \bar{\Phi}_j(\mathbf{y}) \rangle = \left(\mathbf{G}_\xi^{1/2} (\mathbf{1} - \xi)^{-1} \mathbf{G}_\xi^{1/2} \right)_{ij} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \equiv \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), \quad (2-13a)$$

$$\begin{aligned} \langle \bar{\Pi}_i(\mathbf{x}) \bar{\Pi}_j(\mathbf{y}) \rangle &= \frac{1}{4} \left(\mathbf{G}_\xi^{1/2} (\mathbf{1} - \xi)^{-1} \mathbf{G}_\xi^{1/2} \right)_{ij} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) + 4 \left(\Sigma_\xi \mathbf{G}_\xi^{1/2} (\mathbf{1} - \xi)^{-1} \mathbf{G}_\xi^{1/2} \Sigma_\xi \right)_{ij} (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) \\ &\equiv \mathbf{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), \end{aligned} \quad (2-13b)$$

$$\langle \bar{\Phi}_i(\mathbf{x}) \bar{\Pi}_j(\mathbf{y}) + \bar{\Pi}_j(\mathbf{y}) \bar{\Phi}_i(\mathbf{x}) \rangle \equiv \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), \quad (2-13c)$$

Les expressions (2-13a, b, c) seront dénotées par $\mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}), \mathbf{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$ et $\mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})$ [4]. Voir l'appendice B pour plus de détails.

En raison de leur signification physique évidente, nous allons prendre pour paramètres variationnels associés à $\mathcal{D}(t)$ les quantités $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\pi}, \boldsymbol{S}, \boldsymbol{G}$ et $\mathbf{T}$. Leur équations d'évolution se déduisent par variation de l'action $\mathbf{BV}$ par rapport aux paramètres variationnels de $\mathcal{A}(t)$.

Nous proposons le choix suivant pour $\mathcal{A}(t)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t) = & A^1 \mathbb{I} + A_i^\Phi \Phi_i(x) + A_i^\Pi \Pi_i(y) + A_{ij}^{\Pi\Pi} \Pi_i(x) \Pi_j(y) - A_{ij}^{\Phi\Pi} \left(\Phi_i(x) \Pi_j(y) + \Pi_j(y) \Phi_i(x) \right) + \\ & A_{ij}^{\Phi\Phi} \Phi_i(x) \Phi_j(y) \quad , \end{aligned} \quad (2-14)$$

Le noyau correspondant s'écrira alors :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 | \mathcal{A}(t) | \Phi_2 \rangle = & A^1 \delta(\Phi_1 - \Phi_2) + A_i^\Phi \Phi_1^i \delta(\Phi_1 - \Phi_2) - A_i^\Pi \frac{\partial}{\partial \Phi_1^i} \delta(\Phi_1 - \Phi_2) - A_{ij}^{\Pi\Pi} \frac{\partial}{\partial \Pi_1^i} \frac{\partial}{\partial \Pi_1^j} \delta(\Phi_1 - \Phi_2) \\ & + A_{ij}^{\Phi\Pi} i(\Phi_1^i + \Phi_2^i) \frac{\partial}{\partial \Phi_1^j} \delta(\Phi_1 - \Phi_2) \\ & + A_{ij}^{\Phi\Phi} \Phi_1^i \Phi_1^j \delta(\Phi_1 - \Phi_2) \quad , \end{aligned} \quad (2-15)$$

Pour calculer l'action $\mathbf{BV}$, nous commençons par le calcul de $\mathbf{Tr} \mathcal{A} \frac{d\mathcal{D}}{dt}$. Il est plus simple d'évaluer d'abord $\mathbf{Tr} \mathcal{AD}$ puis de dériver cette expression par rapport au temps, en gardant constants les paramètres de $\mathbf{A}$, on a :

$$\begin{aligned} \mathbf{Tr} \mathcal{AD} \equiv \mathcal{Z} \langle \mathcal{A} \rangle = & \mathcal{Z} \left\{ A^1 + A^\Phi \boldsymbol{\varphi} + A^\Pi \boldsymbol{\pi} + \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [A^{\Phi\Phi} \langle \Phi\Phi \rangle] + \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [A^{\Pi\Pi} \langle \Pi\Pi \rangle] \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [A^{\Phi\Pi} \langle \Phi\Pi + \Pi\Phi \rangle] \right\}, \end{aligned} \quad (2-16)$$

Et on introduisant les nouveaux paramètres :

$$\begin{aligned} A_1 &= A_i^\Phi + \sum_j A_{ij}^{\Phi\Phi} \varphi_j(y, t) + \sum_j A_{ij}^{\Phi\Pi} \pi_j(y, t) \quad , \\ A_2 &= A_i^\Pi + \sum_j A_{ij}^{\Pi\Pi} \pi_j(y, t) + \sum_j A_{ij}^{\Phi\Pi} \varphi_j(y, t) \quad , \end{aligned} \quad (2-17)$$

On déduit $\mathbf{Tr} \mathcal{A} \frac{d\mathcal{D}}{dt}$

$$\mathbf{Tr} \mathcal{A} \frac{d\mathcal{D}}{dt} = \frac{\dot{\mathcal{Z}}}{\mathcal{Z}} \mathbf{Tr} \mathcal{AD} + \mathcal{Z} \left\{ A_1 \dot{\boldsymbol{\varphi}} + A_2 \dot{\boldsymbol{\pi}} + \frac{1}{2} \mathbf{Tr} [A^{\Phi\Phi} \dot{\mathbf{G}} + A^{\Pi\Pi} \dot{\mathbf{S}} + A^{\Phi\Pi} \dot{\mathbf{T}}] \right\}. \quad (2-18)$$

Le symbole "Tr" dans (2-18) dénote une trace matricielle sur les indices discrets et continus et le point indique une dérive par rapport au temps.

Donc on a un nouvel ensemble de paramètres variationnels associés à $\mathcal{A}(t)$, les paramètres $A_1, A_2, A^{\Phi\Phi}, A^{\Pi\Pi}$ et $A^{\Phi\Pi}$.

On calcule l'expression $\mathbf{Tr} [\mathcal{A}, \mathbf{H}] \mathcal{D}$, de la deuxième partie de l'intégrant de l'action $\mathbf{BV}$ sans spécifier une forme particulière de $\mathbf{H}$. Nous notons que l'expression de $\mathcal{D}$ est l'exponentielle d'un opérateur polynomial du second ordre en Φ et Π , $\delta\mathcal{D}$ et $\mathcal{AD}$ ont la même structure. De ce fait, $\mathbf{Tr} \delta\mathcal{D} \mathbf{H}$ et $\mathbf{Tr} \mathcal{A} [\mathbf{H}, \mathcal{D}]$ s'écrivent sous la même forme avec des changements mineurs dans ces expressions. On obtient ainsi [10],

$$\begin{aligned} \text{Tr}[\mathcal{A}, \mathbf{H}] \mathcal{D} = \mathcal{Z} \left\{ i\mathbf{A}_1 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \pi} - i\mathbf{A}_2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi} + i \text{tr} \mathbf{A}^{\Phi\Phi} \left(2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \mathbf{G} + \mathbf{T} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \right)_{\text{SY}} \right. \\ \left. - \text{tr} \mathbf{A}^{\Pi\Pi} \left(2\mathbf{S} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} \right)_{\text{SY}} - i \text{tr} \mathbf{A}^{\Phi\Pi} \left(\left[\mathbf{T}, \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \right] + 2\mathbf{G} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} - 2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \mathbf{S} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2-19)$$

L'indice "sy" dénote la partie symétrique des matrices et $\mathcal{E} \equiv \langle \mathbf{H} \rangle$ est l'énergie du système. Finalement en rassemblant les expressions (2-18) et (2-19), l'action réduite s'écrit :

$$\begin{aligned} \zeta = \text{Tr} \mathcal{A} \mathcal{D} \Big|_{t_1} - \int_{t_0}^{t_1} dt \left\{ \frac{\dot{\mathcal{Z}}}{\mathcal{Z}} \text{Tr} \mathcal{A} \mathcal{D} + \mathcal{Z} \mathbf{A}_1 \left(\dot{\boldsymbol{\varphi}} - \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \pi} \right) + \mathcal{Z} \mathbf{A}_2 \left(\dot{\boldsymbol{\pi}} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{Z}}{2} \text{tr} \mathbf{A}^{\Phi\Phi} \left(\dot{\mathbf{G}} - \left(4 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \mathbf{G} + 2 \mathbf{T} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \right)_{\text{SY}} \right) + \frac{\mathcal{Z}}{2} \text{tr} \mathbf{A}^{\Pi\Pi} \left(\dot{\mathbf{S}} + 2 \left(2\mathbf{S} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} \right)_{\text{SY}} \right) \right. \\ \left. + \frac{\mathcal{Z}}{2} \text{tr} \mathbf{A}^{\Phi\Pi} \left(\dot{\mathbf{T}} + 2 \left[\mathbf{T}, \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \right] + 4\mathbf{G} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} - 4 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \mathbf{S} \right) \right\} \end{aligned} \quad (2-20)$$

3- Les équations du mouvement pour $\mathcal{D}(t)$

Pour établir les équations du mouvement de $\mathcal{D}(t)$, on varie l'action réduite (2-20) par rapport à $\mathbf{A}^1, \mathbf{A}_1$ et $\mathbf{A}_2, \mathbf{A}^{\Phi\Phi}, \mathbf{A}^{\Pi\Pi}$ et $\mathbf{A}^{\Phi\Pi}$. Comme $\text{Tr} \mathcal{A} \mathcal{D}$ est linéaire en $\mathbf{A}^i$, la variation de (2-20) par rapport à $\mathbf{A}^1$ est égale à $\dot{\mathcal{Z}}$. La première équation du mouvement est donc

$$\dot{\mathcal{Z}} = 0 \quad (2-21)$$

On trouve que la fonction de partition est conservée. Cette conservation était attendue puisque l'espace variationnel de l'observable contient l'opérateur identité. La stationnarité de l'action par rapport à aux autres paramètres conduit au système d'équations de mouvement :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \pi_i(\mathbf{x}, t)}, \quad (2-22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}_i(\mathbf{x}, t) = \frac{-\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi_i(\mathbf{x}, t)},$$

$$\dot{\mathbf{G}}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = 2 \left[\left(2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \mathbf{G} + \mathbf{T} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \right)_{\text{S}} \right]_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (2-23)$$

$$\dot{\mathbf{S}}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -2 \left[\left(2\mathbf{S} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} \mathbf{T} \right)_{\text{S}} \right]_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t),$$

$$\dot{\mathbf{T}}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -2 \left[\mathbf{T}, \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{T}} \right]_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) - 4 \left(\mathbf{G} \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{G}} - \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \mathbf{S}} \mathbf{S} \right)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t).$$

Le système (2-21, 2-22, 2-23) constitue les **équations** du champ moyen dépendant du temps. Nous les désignerons par l'acronyme **TDHFB** pour (Times-Dependant Hartree-Fock-Bogoliubov).

Les équations (2-22) et (2-23) ne dépendent ni de l'observable $\mathbf{A}$, ni du temps de mesure t_1 . La résolution de ces équations suffit donc au calcul de $\text{Tr} \mathcal{A} \mathcal{D}(t_1)$ qui est donc ramené à un problème aux valeurs initiales. Celles-ci consistent à préciser les quantités $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, \mathbf{0}), \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$, $\mathbf{S}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$ et $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{0})$.

Compte tenu de l'équation $\dot{\mathbf{Z}} = \mathbf{0}$, ceci conduit en particulier à la conservation de l'entropie de Von-Neumann[9] :

$$S = -\mathbf{Z} \left\{ \ln \mathbf{Z} - \frac{1}{2} \text{tr} \left(\mathbf{D} \ln \frac{1+\mathbf{D}}{\mathbf{D}} + \ln \sigma_1 \mathbf{D} \right) \right\}. \quad (2-24)$$

Cette loi de conservation de l'entropie montre que si l'état initial est un état pur, c'est-à-dire que $\mathbf{Z}$ et $\mathbf{D}$ satisfont à $(\mathbf{D}^2 = \mathbf{D} \text{ et } \mathbf{Z} = \mathbf{1})$, il sera ainsi durant l'évolution ultérieure. On notera que si l'hamiltonien est quadratique, les équations CMDT (**TDHFB**) sont exactes puisqu'elles coïncident avec les équations d'Ehrenfest. En effet, on sait que la structure d'opérateur densité gaussien est préservée par l'évolution exacte régie par un Hamiltonien d'oscillateur harmonique.

4-Equation de mouvement de l'observable

Nous verrons plus loin que la connaissance de l'évolution de $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ permet aussi de calculer les fluctuations et les corrélations d'opérateurs de classe de $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ [10]. Nous allons donc écrire les équations qui régissent l'évolution des paramètres de $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ en variant (2-20) par rapport à $\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\pi}, \mathbf{G}, \mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$. En utilisant un hamiltonien général du type $\mathbf{H} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Pi}^2 + \mathbf{V}(\boldsymbol{\Phi})$, correspondant à l'énergie $\mathcal{E} = \frac{1}{2} (\boldsymbol{\Pi}^2 + \text{tr} \mathbf{S}) + \langle \mathbf{V} \rangle(\boldsymbol{\varphi}, \mathbf{G})$

$$\dot{\mathbf{A}}_{1i}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = \left(\mathbf{A}_2 \frac{\delta^2 \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \boldsymbol{\varphi}^2} \right)_i(\mathbf{x}, \mathbf{t}) + \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t})} \text{tr} \left[\mathbf{A}^{\Pi\Pi} \left(\frac{\delta \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G}} \mathbf{T} \right)_s \right] + 2 \frac{\delta}{\delta \boldsymbol{\varphi}_i(\mathbf{x}, \mathbf{t})} \text{tr} \left[\mathbf{A}^{\varphi\Pi} \left(\mathbf{G} \frac{\delta \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G}} \right) \right], \quad (2-25a)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{2i}(\mathbf{x}, \mathbf{t}) = -\mathbf{A}_{1i}(\mathbf{x}, \mathbf{t}), \quad (2-25b)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{A}}_{ij}^{\varphi\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = & 2\mathbf{A}_2 \left(\frac{\delta^2 \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G} \delta \boldsymbol{\varphi}} \right)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) + 2 \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})} \text{tr} \left[\mathbf{A}^{\Pi\Pi} \left(\frac{\delta \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G}} \mathbf{T} \right)_s \right] + \\ & 4 \frac{\delta}{\delta \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})} \text{tr} \left[\mathbf{A}^{\varphi\Pi} \mathbf{G} \frac{\delta \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G}} \right] \end{aligned} \quad (2-26a)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{ij}^{\Pi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = -2 \frac{\delta}{\delta \mathbf{S}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})} \text{tr}(\mathbf{A}^{\varphi\Pi} \mathbf{S}) \quad (2-26b)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_{ij}^{\varphi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}) = - \frac{\delta}{\delta \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})} \text{tr}(\mathbf{A}^{\varphi\Pi} \mathbf{T}) + 2 \frac{\delta}{\delta \mathbf{T}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t})} \text{tr} \left[\mathbf{A}^{\Pi\Pi} \left(\frac{\delta \langle \mathbf{V} \rangle}{\delta \mathbf{G}} \mathbf{T} \right)_s \right] \quad (2-26c)$$

Ces équations possèdent la même structure que les équations **TDHFB** linéarisées. Comme l'observable est duale de l'opérateur densité, on dira que les équations (2-25 et 2-26) possèdent une structure **R.P.A** duale. De plus, l'observable $\mathbf{A}$ étant connue au temps final $\mathbf{t}_1$, on doit résoudre ce système en remontant le temps. La connaissance de $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ n'est pas nécessaire pour déterminer l'évolution de $\mathbf{D}(\mathbf{t})$, et donc pour calculer $\text{Tr} \mathbf{A} \mathbf{D}(\mathbf{t}_1)$. Cette connaissance devient utile quand on veut évaluer les fluctuations d'observable à un corps ayant la même structure $\mathcal{A}(\mathbf{t})$ [10].

CHAPITRE III

APPROCHE VARIATIONNELLE POUR LES FONCTIONS DE CORRELATION A DEUX TEMPS

1-INTRODUCTION

Dans les chapitres précédents, notre intérêt s'est porté sur la prédiction des valeurs moyennes d'observables linéaires, c'est-à-dire de la forme $\sum_i \lambda_i \omega^i$, où les opérateurs ω^i sont supposés être les plus appropriés quant à la description du système étudié. A partir de considérations basées sur le principe d'entropie maximum, nous avons sélectionné une forme exponentielle pour l'opérateur densité.

Nous considérons dans ce chapitre, que l'état initial est caractérisé par un opérateur densité $\mathcal{D}(t_0)$ correspondant à une matrice densité gaussienne. Nous allons minimiser la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ en choisissant un espace variationnel pour les opérateurs $\mathcal{A}(J, t)$ correspondant aux exponentielles de formes quadratiques.

2-Définition de la fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélation

Nous définissons l'opérateur $\mathcal{A}(J, t)$ comme une fonctionnelle des sources J et du temps t . Il s'écrit sous la forme suivante [12] :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(J, t) = T[\exp i \int_t^\infty dt' \{ \int d^3x J^\Phi(x, t') \Phi^H(x, t', t) + J^H(x, t') \Pi^H(x, t', t) \\ + \int d^3x d^3y J^{\Phi\Pi}(x, y, t') (\Phi^H(x, t', t) \Pi^H(y, t', t) + \Pi^H(y, t', t) \Phi^H(x, t', t)) \\ + J^{\Phi\Phi}(x, y, t') \Phi^H(x, t', t) \Phi^H(y, t', t) + J^{\Pi\Pi}(x, y, t') \Pi^H(x, t', t) \Pi^H(y, t', t) \}] \quad (3-1) \end{aligned}$$

T Indique le produit chronologique des opérateurs $\Phi^H(x, t', t)$ et $\Pi^H(x, t', t)$ qui sont respectivement l'opérateur champ et l'opérateur moment dans la représentation de Heisenberg et qui satisfont aux conditions aux limites :

$$\Phi^H(x, t, t) = \Phi(x) \text{ et } \Pi^H(x, t, t) = \Pi(x)$$

$\Phi(x)$ et $\Pi(x)$ sont les opérateurs en représentation de Schrödinger.

On peut écrire l'opérateur (3-1) sous la forme compacte suivante :

$$\mathcal{A}(J, t) = T[\exp i \int_t^\infty dt' J_j(t') Q_j(t', t)] \quad (3-2)$$

où $J_j(t)$ sont des sources, elles sont allumées entre $t' = t$ et $t' = \infty$ et la fonctionnelle $\mathcal{A}(J, t)$ obéit à une équation dynamique "simple" :

$$\frac{d\mathcal{A}(J, t)}{dt} = i[\mathcal{A}(J, t), H] - i\mathcal{A}(J, t) \sum_j J_j(t) Q_j \quad (3-3)$$

Cette équation n'est autre que l'équation de Heisenberg (1-11) avec la condition aux limites $\mathcal{A}(t = \infty) = \mathbb{I}$.

On définit la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green causales par :

$$Z(J, t_0) = e^{iW(J, t_0)} = \text{Tr} \mathcal{D}(t_0) A(J, t_0) \quad (3-4)$$

Où $\mathcal{D}(t_0)$ est un projecteur sur un état pur initial. Pour l'instant, on se limite à un problème de température nulle et à une métrique de Minkowski.

On peut écrire la fonctionnelle génératrice des fonctions de Green causales connexes[13] sous la forme suivante :

$$W(J, t_0) = -i \ln Z(J, t_0) \quad (3-5)$$

Les fonctions de Green connexes sont calculées de manière simple en dérivant $W(J, t_0)$ par rapport aux sources :

$$\mathcal{G}_\mu^H(x, t_0) = \left. \frac{\delta W(J, t_0)}{\delta J_\mu(x, t_0)} \right|_{J=0} \quad (3-6)$$

On développe la fonctionnelle génératrice $W(J, t)$ en puissance des sources :

$$\begin{aligned} W(J, t_0) = & -i \ln(n_0) + \int_{t_0}^{\infty} dt' \left\{ \int d^3x J_\Phi(x, t') \varphi(x, t') + \int d^3x d^3y J_{\Phi\Phi}(x, y, t') G(x, y, t') + \dots \right\} \\ & + \frac{i}{2} \iint_{t_0}^{\infty} dt' dt'' \left\{ d^3x_1 d^3x_2 J_\Phi(x_1, t') J_\Phi(x_2, t'') C_{\Phi\Phi}^2(x_1, x_2, t', t'') + \dots \right\} + \dots \quad (3-7) \end{aligned}$$

On a $n_0 = \text{Tr} \mathcal{D}(t_0)$

On définit les quantités qui se trouvent dans l'équation (3-7) :

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{n_0} \text{Tr} \left(\Phi^H(x, t, t_0) \mathcal{D}(t_0) \right) \quad (3-8)$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{n_0} \text{Tr} \left(\Phi^H(x, t, t_0) \Phi^H(y, t, t_0) \mathcal{D}(t_0) \right) - \varphi(x, t) \varphi(y, t) \quad (3-9)$$

Les fonctions de corrélation causales à deux temps pour un produit deux opérateurs champs

$\Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0)$ s'écrivent :

$$C_{\Phi\Phi}^2(x, y, t', t'') = \frac{1}{n_0} \text{Tr} \left(T \Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0) \mathcal{D}(t_0) \right) - \varphi(x, t') \varphi(y, t'') \quad (3-10)$$

et à partir du développement de l'équation (3-6) on a :

$$C_{\Phi\Phi}^2(x, y, t', t'') = \left. \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\Phi(x, t') \delta J_\Phi(y, t'')} \right|_{J=0} \quad (3-11)$$

De la même façon, on peut exprimer les fonctions de corrélations du type $C_{\Phi\Pi}^2$ et $C_{\Pi\Pi}^2$:

$$C_{\Phi\Pi}^2(x, y, t', t'') = \left. \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_\Phi(x, t') \delta J_\Pi(y, t'')} \right|_{J=0} \quad (3-12)$$

et
$$C_{\Pi\P}^2(x, y, t', t'') = \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_{\Pi}(x, t') \delta J_{\Pi}(y, t'')} \Big|_{J=0} \quad (3-13)$$

On peut aussi écrire les fonctions de corrélations à deux temps et à trois C^3 et quatre C^4 points :

$$C^3(x, y, z, t', t'') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_{\Phi}(x, t') \delta J_{\Phi}(y, z, t'')} \Big|_{J=0} + \varphi(y, t'') (C^2(x, z, t', t'') + \varphi(x, t') \varphi(z, t'')) + \varphi(z, t'') (C^2(x, y, t', t'') + \varphi(x, t') \varphi(y, t'')) \quad (3-14)$$

$$C^4(x, y, z, u, t', t'') \equiv \frac{1}{i} \frac{\delta^2 W}{\delta J_{\Phi\Phi}(x, y, t') \delta J_{\Phi\Phi}(z, u, t'')} \Big|_{J=0} + (C^2(x, z, t', t'') + \varphi(x, t') \varphi(z, t'')) (C^2(y, u, t', t'') + \varphi(y, t') \varphi(u, t'')) + (C^2(x, u, t', t'') + \varphi(x, t') \varphi(u, t'')) (C^2(y, z, t', t'') + \varphi(y, t') \varphi(z, t'')) \quad (3-15)$$

On voit sur (3-14) et (3-15) que C^3 et C^4 contiennent les contributions du champ moyen. De ce fait, les fonctions de réponse, fonctions de Green connexes sont obtenues directement par dérivation de l'expression W (premier termes dans 13-14-15).

3-Evaluation variationnelle de la fonctionnelle génératrice

Nous utilisons le principe variationnel dépendant de temps du Balian et Vénéroni[7], afin d'obtenir une approximation pour notre quantité $Tr(\mathcal{D}(t_0)A(J, t_0))$. Pour ce faire, on considère l'équation (3-3) qui définit $A(J, t_0)$ comme une contrainte et l'on introduit l'opérateur $\mathcal{D}(t_0)$ comme multiplicateur de Lagrange associé à cette contrainte.

Nous définissons la fonctionnelle :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}(t), \mathcal{D}(t)) = Tr(\mathcal{A}(t_0)\mathcal{D}(t_0)) + \mathcal{Z}_{dyn} \quad (3-16)$$

$$\mathcal{Z}_{dyn} = Tr \int_0^\infty dt \mathcal{D}(t) \left\{ \frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} - i[\mathcal{A}(t), H] + i\mathcal{A}(t) \sum_j J_j(t) Q_j \right\}$$

Nous avons écrit les sources J_j sous forme compacte :

$$\begin{aligned} \sum_j J_j(t) Q_j &= \int d^3x (J^\Phi(x, t) \Phi(x) + J^\Pi(x, t) \Pi(x)) \\ &+ \int d^3x d^3y J^{\Phi\Pi}(x, y, t) (\Phi(x) \Pi(y) + \Pi(y) \Phi(x)) \\ &+ \int d^3x d^3y (J^{\Phi\Phi}(x, y, t) \Phi(x) \Phi(y) + J^{\Pi\Pi}(x, y, t) \Pi(x) \Pi(y)) \end{aligned} \quad (3-17)$$

Nous recherchons la stationnarité de $\mathcal{Z}$ par rapport à $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{D}(t)$ avec les conditions aux limites.

$$\mathcal{A}(t = \infty) = \mathcal{A}(t = 0) = \mathbb{I}. \quad (3-18)$$

$$\text{Et} \quad \mathcal{D}(t_0) = \mathcal{D}(t_0)$$

$\mathcal{D}(t_0)$ est supposé gaussien.

La valeur optimale de la fonctionnelle génératrice W correspond à la solution stationnaire $\mathcal{Z}_{st}$ correspondre à

$$W(J, t_0) = -i \ln \mathcal{Z}_{st} \quad (3-19)$$

Afin d'appliquer cette méthode, nous choisissons le cas d'un champ scalaire en self –interaction quartique dans une métrique de Minkowski :

$$H = \int d^3x \mathcal{H}(x)$$

$$\text{Avec} \quad \mathcal{H}(x) = \frac{1}{2} \Pi^2(x) + \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \Phi(x)]^2 + \frac{m_0^2}{2} \Phi^2(x) + \frac{b}{4!} \Phi^4(x) \quad (3-20)$$

4-Choix des espaces variationnels

Nous choisissons pour les opérateurs d'essai $\mathcal{A}(t)$ et $\mathcal{D}(t)$ des exponentielles de formes quadratiques dans les opérateurs $\Phi(x)$ et $\Pi(x)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(t) &= \mathcal{N}_d \exp(\lambda_d \tau \alpha) \exp\left(\frac{1}{2} \alpha \tau S_d \alpha\right), \\ \mathcal{A}(t) &= \mathcal{N}_a \exp(\lambda_a \tau \alpha) \exp\left(\frac{1}{2} \alpha \tau S_a \alpha\right). \end{aligned} \quad (3-21)$$

$\mathcal{N}_d$ et $\mathcal{N}_a$ sont des C- nombres , λ_d et λ_a sont des vecteurs à $2N$ composantes, et S_d et S_a sont des matrices $(2N \times 2N)$, on ne doit considérer que des matrices et τS_d et τS_a symétriques[8] .Voir l'appendice C.

Un operateur Gaussien est complètement caractérisé par le vecteur $\alpha(x, t)$ et la matrice $\Xi(x, y, t)$ donnés par :

$$\alpha(x, t) = \begin{pmatrix} \varphi(x, t) \\ -i\pi(x, t) \end{pmatrix} \quad (3-22)$$

$$\Xi(x, y, t) = \begin{pmatrix} 2G(x, y, t) & -iT(x, y, t) \\ -iT(y, x, t) & -2S(x, y, t) \end{pmatrix} \quad (3-23)$$

Introduisons les valeurs moyennes suivantes :

$$n(t) = \text{Tr} \zeta(t) = \text{Tr}(\mathcal{A} \mathcal{D}) = \text{Tr}(\mathcal{D} \mathcal{A}) \quad (3-24)$$

$$\varphi(x, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta \Phi(x)) \quad (3-25)$$

$$\pi(x, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta \Pi(x)) \quad (3-26)$$

$$G(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta \bar{\Phi}(x) \bar{\Phi}(y)) \quad (3-27)$$

$$S(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta \bar{\Pi}(x) \bar{\Pi}(y)) \quad (3-28)$$

$$T(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta (\bar{\Phi}(x) \bar{\Pi}(y) + \bar{\Pi}(y) \bar{\Phi}(x))) \quad (3-29)$$

Où l'on a défini les opérateurs centrés $\bar{\mathbf{O}} = \mathbf{O} - \text{Tr} (\zeta \mathbf{O})$. Pour un opérateur ζ hermitien, les matrices $\mathbf{G}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$ sont réelles, $\mathbf{G}$ et $\mathbf{S}$ étant en plus symétriques.

Une quantité intéressante à définir par analogie avec la mécanique quantique est l'invariant de Heisenberg donné par :

$$I(x, y) = \int d^3 z (4 \langle \bar{\Phi}(x) \bar{\Phi}(z) \rangle \langle \bar{\Pi}(z) \bar{\Pi}(y) \rangle - \langle \bar{\Phi}(x) \bar{\Pi}(z) + \bar{\Pi}(z) \bar{\Phi}(x) \rangle \langle \bar{\Phi}(z) \bar{\Pi}(y) + \bar{\Pi}(y) \bar{\Phi}(z) \rangle) \quad (3-30)$$

Dans le cas d'un opérateur gaussien, il s'écrit :

$$I(x, y) = \int d^3 z (-\Xi_{11}(x, z) \Xi_{22}(z, y) + \Xi_{12}(x, z) \Xi_{12}(z, y)) \quad (3-31)$$

Cette quantité s'écrit dans le cas d'un projecteur sur les états purs $\mathcal{D}^2 = \mathcal{D}$,

$$I(x, y) = \delta^3(x, y) \quad (3-32)$$

Il est utile d'introduire les opérateurs $\zeta_b = \mathcal{A}(t) \mathcal{D}(t)$ et $\zeta_c = \mathcal{D}(t) \mathcal{A}(t)$ qui sont aussi des opérateurs gaussiens. On définit alors les quantités suivantes :

$$n(t) = \text{Tr} \zeta_b = \text{Tr} \zeta_c \quad (3-33)$$

$$\varphi_{b,c}(x, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta_{b,c} \Phi(x)) \quad (3-34)$$

$$\pi_{b,c}(x, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta_{b,c} \Pi(x)) \quad (3-35)$$

$$G_{b,c}(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta_{b,c} \bar{\Phi}(x) \bar{\Phi}(y)) \quad (3-36)$$

$$S_{b,c}(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta_{b,c} \bar{\Pi}(x) \bar{\Pi}(y)) \quad (3-37)$$

$$T_{b,c}(x, y, t) = \frac{1}{n(t)} \text{Tr} (\zeta_{b,c} (\bar{\Phi}(x) \bar{\Pi}(y) + \bar{\Pi}(y) \bar{\Phi}(x))) \quad (3-38)$$

Avec $\bar{\Phi}(x) = \Phi(x) - \varphi_b(x, t)$ et $\bar{\Pi}(x) = \Pi(x) - \pi_b(x, t)$.

Grace à ce choix pour les espaces variationnels, le théorème de Wick nous permet d'exprimer la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{Z} = n(t_0) + \int_{t_0}^{+\infty} dt \frac{dn}{dt} \Big|_{\mathcal{D}(t)=cte} - in(t) \int d^3x (\mathcal{E}_c(x, t) - \mathcal{E}_b(x, t)) + in(t) \int d^3x_1 d^3x_2 K_c(x_1, x_2, t) \quad (3-39)$$

Où la densité d'énergie est donnée par : $\mathcal{E}_d(x, t) \equiv \text{Tr}(\mathbf{D}(t)\mathcal{H}(x, t))$. Ainsi $\mathcal{E}_c(x, t) \equiv \text{Tr}(\zeta_c \mathcal{H}(x, t))$ et $\mathcal{E}_b(x, t) \equiv \text{Tr}(\zeta_b \mathcal{H}(x, t))$

$$\mathcal{E}(x, t) = \frac{1}{2} \pi^2(x, t) + \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \varphi(x, t))^2 + \frac{m_0^2}{2} \varphi^2(x, t) + \frac{b}{24} \varphi^4(x, t) + \frac{1}{2} S(x, x, t) - \frac{1}{2} \Delta G(x, t) \Big|_{x=y} + \frac{m_0^2}{2} G(x, x, t) + \frac{b}{8} G^2(x, x, t) + \frac{b}{4} \varphi^2(x, t) G(x, x, t) \quad (3-40)$$

$$\text{Et } \text{Ln}(n(t)) = \text{Ln}(n_a) + \text{Ln}(n_d) - \frac{1}{2} \tilde{\alpha}_{b-c} \tau_{a-d} \alpha_{a-d} + \frac{1}{2} \text{Ln}[\det(\sigma_1(1 + \tau)(\Xi_a + \Xi_b)^{-1}(1 + \tau))] \quad (3-41)$$

Avec $\alpha_{b-c} = \alpha_b - \alpha_c$, τ et σ_1 sont des matrice 2×2 :

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le dernier terme de (3-39) est une fonctionnelle des sources J ,

$$K_c = \text{Tr}(\mathbf{I}_c \sum_j J_j(t) Q_j) = \int d^3x_1 d^3x_2 K_c(x_1, x_2, t)$$

Les conditions aux limites (3-18) donnent :

$$n_d(t_0) = n_0, \quad \alpha_d(t_0) = \alpha_0 \quad \text{et} \quad \Xi_d(t_0) = \Xi_0 \quad (3-42)$$

n_0 , α_0 et Ξ_0 caractérisent l'état initial $\mathbf{D}(t_0)$ et

$$n_a(t = +\infty) = \mathbb{I}, \quad \Xi_a^{-1}(t = +\infty) = \mathbf{0}, \quad \frac{1}{\Xi_a} \alpha_a(t = +\infty) = \mathbf{0}. \quad (3-43)$$

Écrivons maintenant les conditions pour que la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ soit stationnaire par rapport aux variations de n_d , α_d , Ξ_d et n_a , α_a , Ξ_a .

5- Les équations dynamiques

Les équations d'évolution de $\mathbf{n}_d$, α_d , Ξ_d et $\mathbf{n}_a$, α_a et Ξ_a sont couplées et dépendent des sources $\mathbf{J}$. Par contre, les équations dynamiques pour les quantités α_b , Ξ_b et α_c , Ξ_c peuvent écrire sous forme formellement indépendante :

$$i\dot{\alpha}_b = \tau \omega_b, \quad (3-44)$$

$$i\dot{\Xi}_b = 2(\Xi_b \mathcal{H}_b \tau - \tau \mathcal{H}_b \Xi_b) \quad (3-45)$$

$$i\dot{\alpha}_c = \tau(\omega_c - \omega_K^c), \quad (3-46)$$

$$i\dot{\Xi}_c = 2(\Xi_c(\mathcal{H}_c - I_K^c)\tau - \tau(\mathcal{H}_c - I_K^c)\Xi_c). \quad (3-47)$$

Le vecteur ω_b et la matrice $\mathcal{H}_b$ sont définis par :

$$\omega_b = \frac{\delta \langle \mathcal{H} \rangle_b}{\delta \alpha_b}, \quad \mathcal{H}_b = -2 \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta \Xi_b} \quad (3-48)$$

Bien que les équations (3-44)-(3-47) apparaissent découplées, elles sont en fait couplées à cause des conditions aux limites. Nous verrons néanmoins que le développement dans les sources permettra de simplifier énormément le problème.

6-Développement dans les sources

6-1-Les équations TDHFB pour les valeurs α_b , Ξ_b et α_c , Ξ_c

Nous utilisons l'exposant (0) pour les solutions des équations dynamiques quand les sources sont inexistantes.

$$\alpha_b = (\Xi_a - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d + (\Xi_d + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_a, \quad (3-49)$$

$$\alpha_c = (\Xi_d - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_a + (\Xi_a + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d, \quad (3-50)$$

$$\alpha_b - \alpha_c = 2\tau \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} (\alpha_a + \alpha_d), \quad (3-51)$$

$$\text{Nous obtenons à la limite de source nulle : } \Xi_a^{-1} = 0, \quad \frac{1}{\Xi_a} \alpha_a = 0 \quad (3-52)$$

Nous avons également : $\omega_b^{(0)} = \omega_c^{(0)} = \omega^{(0)}$ et $\mathcal{H}_b^{(0)} = \mathcal{H}_c^{(0)} = \mathcal{H}^{(0)}$ dans cette limites, les équations dynamiques (C.9) et (C.10) pour α_d et Ξ_d (nous supprimons l'indice d), deviennent :

$$i\dot{\alpha}^{(0)} = \tau \omega^{(0)}, \quad (3-53)$$

$$i\dot{\Xi}^{(0)} = -[(\Xi^{(0)} + \tau)\mathcal{H}^{(0)}(\Xi^{(0)} - \tau) - (\Xi^{(0)} - \tau)\mathcal{H}^{(0)}(\Xi^{(0)} + \tau)] \quad (3-54)$$

Ces équations sont analogues aux équations du Hartree-Fock-Bogoliubov dépendant du temps (TDHFB) non relativiste. La solution statique de TDHFB est caractérisée par $\omega_0 = 0$ dans le cas uniforme :

$$\left(m_0^2 + \frac{b}{6}\varphi_0 + \frac{b}{2}G_0(x, x)\right)\varphi_0 = 0 \quad (3-55)$$

On a écrit les équations TDHFB sous forme explicite dans le chapitre 2, (2-22) et (2-23) :

$$\dot{\varphi}_i(x, t) = \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta \pi_i(x, t)} \quad (3-56)$$

$$\dot{\pi}_i(x, t) = \frac{-\delta \mathcal{E}}{\delta \varphi_i(x, t)}$$

$$\dot{G}_{ij}(x, y, t) = 2 \left[\left(2 \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta T} G + T \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta S} \right)_{s, ij} \right] (x, y, t) \quad (3-57)$$

$$\dot{S}_{ij}(x, y, t) = -2 \left[\left(2 S \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta T} + \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta G} T \right)_{s, ij} \right] (x, y, t),$$

$$\dot{T}_{ij}(x, y, t) = -2 \left[T, \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta T} \right]_{ij} (x, y, t) - 4 \left(G \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta G} - \frac{\delta \mathcal{E}}{\delta S} S \right)_{ij} (x, y, t).$$

7-Les fonctions de corrélation à deux temps :

Les premières dérivations de $W(J, t_0) = -i \ln \mathcal{Z}_{st}$ par rapport aux sources sont égales aux valeurs moyennes. En effet la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ dépend des sources explicitement et implicitement, parce que les solutions approximatives pour $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ dépendent des sources. Cependant la dépendance explicite contribue aux premières dérivations uniquement au point de stationnarité :

$$\frac{dZ}{dJ_j(t)} = \frac{\delta Z}{\delta J_j(t)} = i \text{Tr}(\mathcal{D}(t) \mathcal{A}(t) Q_j) \quad (3-58)$$

Ce qui donne par exemple : $\frac{\delta W}{\delta J_\Phi(x, t)} = \varphi_c(x, t) \quad (3-58')$

Les expressions pour les deuxièmes dérivées de W sont beaucoup plus compliquées. L'introduction des sources couplées à l'ensemble qui compose les opérateurs $\Phi(x)\Phi(y)$, $\Phi(x)\Pi(y)$ et $\Pi(x)\Pi(y)$ en même temps avec l'équation (3-58'), nous permet d'obtenir des équations dynamiques pour les fonctions de corrélations à deux temps avec trois ou quatre opérateurs de champ sont tous simplement des expansions pour des quantités α_c et Ξ_c au premier ordre de développements dans les sources.

Pour le premier ordre des corrections $\alpha_c - \alpha^0$ et $\Xi_c - \Xi^0$, nous définissons les fonctions de corrélations β et Σ (β représente un vecteur et Σ représente une matrice) :

$$\begin{aligned} \alpha_c(x, t) - \alpha^0(x, t) \simeq & i \int_{t_0}^{\infty} dt'' \{ \int d^3 y \beta^\Phi(x, y, t, t'') J^\Phi(y, t'') + \beta^\Pi J^\Pi \\ & + \int d^3 x_1 d^3 x_2 \beta^{\Phi\Phi}(x, x_1, x_2, t, t'') J^{\Phi\Phi}(x_1, x_2, t'') + \beta^{\Phi\Pi} J^{\Phi\Pi} + \beta^{\Pi\Pi} J^{\Pi\Pi} \} , \end{aligned}$$

(3-59)

$$\begin{aligned} \Xi_c(x, y, t) - \Xi^0(x, y, t) \simeq i \int_{t_0}^{\infty} dt'' \left\{ \int d^3x_1 \Sigma^{\Phi}(x, y, x_1, t, t'') J^{\Phi}(x_1, t'') + \Sigma^{\Pi} J^{\Pi} \right. \\ \left. + \int d^3x_1 d^3x_2 \Sigma^{\Phi\Phi}(x, y, x_1, x_2, t, t'') J^{\Phi\Phi}(x_1, x_2, t'') + \Sigma^{\Phi\Pi} J^{\Phi\Pi} + \Sigma^{\Pi\Pi} J^{\Pi\Pi} \right\}. \end{aligned} \quad (3-60)$$

Et nous avons :

$$\beta_1^{\Phi\Phi}(x, y, z, t, t'') = \frac{1}{2} \Sigma_{11}^{\Phi}(x, y, z, t, t'') .$$

Les fonctions β et Σ fournissent des approximations pour les fonctions de corrélations à deux temps C^2 , C^3 et C^4 sont définis par les équations (3-10)-(3-15) :

$$C_{\Phi\Phi}^2(x, y, t, t'') \simeq \beta_1^{\Phi}(x, y, t, t'') , \quad (3-61)$$

$$\begin{aligned} C^3(x, y, z, t, t'') \simeq \beta_1^{\Phi\Phi}(x, y, z, t, t'') \\ - \varphi^{(0)}(y, t'') \left(\beta_1^{\Phi}(x, z, t, t'') + \varphi^{(0)}(x, t) \varphi^{(0)}(z, t'') \right) \\ - \varphi^{(0)}(z, t'') \left(\beta_1^{\Phi}(x, y, t, t'') + \varphi^{(0)}(x, t) \varphi^{(0)}(y, t'') \right), \end{aligned} \quad (3-62)$$

$$\begin{aligned} C^4(x, y, z, u, t, t'') \simeq \frac{1}{2} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(x, y, z, u, t, t'') \\ - \left(\beta_1^{\Phi}(x, z, t, t'') + \varphi^{(0)}(x, t) \varphi^{(0)}(z, t'') \right) \left(\beta_1^{\Phi}(y, u, t, t'') + \varphi^{(0)}(y, t) \varphi^{(0)}(u, t'') \right) \\ - \left(\beta_1^{\Phi}(x, u, t, t'') + \varphi^{(0)}(x, t) \varphi^{(0)}(u, t'') \right) \left(\beta_1^{\Phi}(y, z, t, t'') + \varphi^{(0)}(y, t) \varphi^{(0)}(z, t'') \right), \end{aligned} \quad (3-63)$$

Le développement dans les sources des équations dynamiques (3-45)-(3-47) pour α_c et Ξ_c donne les équations :

$$i\delta\dot{\alpha}_c = \tau(\delta\omega_c - \delta\omega_k^c), \quad (3-64)$$

$$i\delta\dot{\Xi}_c = 2[\delta\Xi_c \mathcal{H}^0 \tau - \tau \mathcal{H}^0 \delta\Xi_c + \Xi^{(0)}(\delta\mathcal{H}_c - \delta\mathcal{T}_k^c) \tau - \tau(\delta\mathcal{H}_c - \delta\mathcal{T}_k^c) \Xi^0]. \quad (3-65)$$

Dans ces équations la matrice $\mathcal{H}$ doit être évaluée pour les solutions $\alpha^{(0)}$ et $\Xi^{(0)}$ de TDHFB des équations (3-54)-(3-55). Dans l'annexe C, on trouve les expressions de ω_k^c (C.25)-(C.26), et aussi les expressions de $\mathcal{T}_k^c(x, y, t)$ (C.27)-(C.29).

Pour les variations $\delta\omega^c$ et $\delta\mathcal{H}^c$ nous définissons les matrices $t_{ij}, T_{ijk}, r_{ij,k}, R_{ij,kl}$, qui sont analogues à la matrice RPA [7] :

$$\delta\omega_i^c = \int d^3y t_{ij}(x, y, t) \delta\alpha_j^c(y, t) - \frac{1}{2} \int d^3y d^3z T_{ijk}(x, y, z, t) \delta\Xi_{kj}^c(z, y, t), \quad (3-66)$$

$$\delta\mathcal{H}_{ij}^c(x, y, t) = \int d^3z r_{ij,k}(x, y, z, t) \delta\alpha_k^c(z, t) - \frac{1}{2} \int d^3z d^3u R_{ij,kl}(x, y, z, u, t) \delta\Xi_{lk}^c(u, z, t). \quad (3-67)$$

Ces matrices dépendent des solutions $\alpha^{(0)}$ et $\Xi^{(0)}$ de TDHFB. Dans le cas de la théorie $\lambda\Phi^4$ voir l'annexe C.

Avec ces notations, les équations dynamiques pour les fonctions de corrélations à deux-temps et deux points β^Φ et Σ^Φ s'écrivent :

$$i \frac{d}{dt} \beta^\Phi(x, y, t, t'') = \tau[t(x, z, t) \beta^\Phi(z, y, t, t'') - \frac{1}{2} T_{,jk}(x, z, u, t) \Sigma_{kj}^\Phi(u, z, y, t, t'') + i \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(x, y) \delta(t - t'')] \quad (3-68)$$

$$i \frac{d}{dt} \sum_{ij}^\Phi(x, y, x_1, t, t'') = 2[\Sigma^\Phi \mathcal{H}^{(0)} \tau - \tau \mathcal{H}^{(0)} \Sigma^\Phi + \Xi^{(0)} r_{,k} \beta_k^\Phi \tau - \tau r_{,k} \beta_k^\Phi \Xi^{(0)} - \frac{1}{2} \Xi^{(0)} R_{,kl} \Sigma_{lk}^\Phi \tau + \frac{1}{2} \tau R_{,kl} \Sigma_{lk}^\Phi \Xi^{(0)}]_{ij} \quad (3-69)$$

Nous obtenons les équations semblables pour les fonctions $\beta^{\Phi\Phi}, \beta^{\Phi\Pi}, \beta^{\Pi\Pi}$ et aussi pour les fonctions de quatre points $\Sigma^{\Phi\Phi}, \Sigma^{\Phi\Pi}$ et $\Sigma^{\Pi\Pi}$.

Ces équations dynamiques ne sont pas suffisantes à cause des conditions aux limites sont :

$$\Xi_a^{-1}(t = +\infty) = 0, \frac{1}{\Xi_a} \alpha_a(t = +\infty) = 0 \text{ et } \alpha_d(x, t_0) = \alpha_0(x), \Xi_d(x, y, t_0) = \Xi_0(x, y).$$

Mais à cette étape, nous avons employé le développement seulement pour une moitié de nos paramètres variationnels. Nous utilisons également les équations dynamiques pour les fonctions à deux temps m et l définis dans le développement dans les sources pour $\Xi_a^{-1} \alpha_a$ et pour α_a au premier ordre :

$$\frac{1}{\Xi_a} \alpha_a(t) \cong i \int_{t_0}^{+\infty} dt'' m^k(t'', t) J_k(t''), \quad (3-70)$$

$$\Xi_a^{-1}(t) \cong i \int_{t_0}^{+\infty} dt'' l^k(t'', t) J_k(t''), \quad (3-71)$$

Nous utilisons les relations de l'annexe C, nous serons capable d'obtenir une relations entre les fonctions $\Sigma^k(t_0, t'')$ et $l^k(t'', t_0)$ et aussi les fonctions $\beta^k(t_0, t'')$ avec $m^k(t'', t_0) - l^k(t'', t_0) \alpha_0$. Toujours dans le premier ordre du développement.

Au temps initial, $\delta\Xi_d = 0, \delta\alpha_d = 0$ nous avons les relations entre les fonctions à deux temps :

$$\Sigma^k(t_0, t'') = -(\Xi_0 - \tau) l^k(t'', t_0) (\Xi_0 + \tau), \quad (3-72)$$

$$\beta^k(t_0, t'') = (\Xi_0 - \tau) (m^k(t'', t_0) - l^k(t'', t_0) \alpha_0), \quad (3-73)$$

En employant l'équation dynamique de Ξ_a^{-1} au premier ordre

$$i \frac{d}{dt} (\Xi_a^{-1}) = -\mathcal{H}_c + \mathcal{H}_b + \mathcal{T}_k^c + 2\Xi_a^{-1} \tau \mathcal{H}^{(0)} - 2\mathcal{H}^{(0)} \tau \Xi_a^{-1}, \quad (3-74)$$

Et les variations $\delta\omega_c - \delta\omega_b$ et $\delta\mathcal{H}_c - \delta\mathcal{H}_b$, nous obtenons l'équation dynamique backward pour $l^k(t'', t)$:

$$i \frac{d}{dt} l^k(t'', t)_{ij} = 2r_{ij,k} \tau_{kl} (m^k - l^k \alpha^{(0)})_l - R_{ij,kl} (\Xi^{(0)} l \tau - \tau l \Xi^{(0)})_{lk} \\ + [2l^k \tau \mathcal{H}^{(0)} - 2\mathcal{H}^{(0)} \tau l^k - i \frac{\delta \mathcal{T}_k^c}{\delta J_k} \delta(t - t'')]_{ij}, \quad (3-75)$$

De la même façon pour l'équation $\Xi_a^{-1} \alpha_a$ au premier ordre, nous obtenons l'équation dynamique backward pour $m^k(t'', t)$. Il est réellement plus commode de considérer la fonction $m^k(t'', t) - l^k(t'', t) \alpha^{(0)}(t)$ Comme une solution de l'équation suivante :

$$i \frac{d}{dt} (m^k(t'', t) - l^k(t'', t) \alpha^{(0)}(t)) = \tau \tau (m^k(t'', t) - l^k(t'', t) \alpha^{(0)}(t)) \\ - \frac{1}{2} T_{ij} (\Xi^{(0)} l^k \tau - \tau l^k \Xi^{(0)})_{kj} + \frac{i \delta \omega_k^c}{2 \delta J_k} \delta(t - t'') \quad (3-76)$$

La raison d'employer cette fonction apparaîtra avec l'introduction de la fonction $F(t' - t'')$.

Les conditions aux limites pour ces deux équations (3-75) et (3-76) sont :

$$l(t'', t) = 0, m(t'', t) = 0 \text{ pour } t > t'' \quad (3-76)$$

$$l^\Phi(t'', t'') = 0, l^\Pi(t'', t'') = 0 \quad (3-78)$$

Les matrices t, T, r, R viennent du développement de $\langle H \rangle$ au seconde ordre. Les équations (3-68) et (3-69) apparaissent comme des extensions de TDHFB, pour β et Σ et aussi pour m et l dans les équations (3-75) et (3-76) ce conduit à considérer la quantité suivante :

$$F^k(t', t'') = 2 \left(\tilde{m}^k(t', t) - \tilde{\alpha}^{(0)}(t) l^k(t', t) \right) \beta^k(t, t'') - \frac{1}{2} tr(l^k(t', t) \Sigma^k(t, t'')) \quad (3-79)$$

Où $\tilde{m}$ est le vecteur transposé de m . De façon plus explicite en réintroduisant les coordonnées spatiales, on écrit $F^\Phi(t', t'')$ dans le cas des fonctions, $m^\Phi, l^\Phi, \beta^\Phi$ et Σ^Φ :

$$F^\Phi(t', t'') = 2 \int d^3 x \left(\tilde{m}^\Phi(x, x_1, t', t) - \int d^3 u \tilde{\alpha}^{(0)}(u, t) l^\Phi(u, x, x_1, t', t) \right) \beta^\Phi(x_1, x_2, t, t'') \\ - \frac{1}{2} \int d^3 x d^3 z tr(l^\Phi(x, z, x_1, t', t) \Sigma^\Phi(z, x, x_1, t, t'')) \quad (3-80)$$

La quantité F^Φ est indépendante du temps : à partir des équations dynamiques (3-68), (3-69) et (3-75), (3-76), on montre que la dérivation de F^Φ par rapport à t , est égale à une somme de fonctions $\delta(t - t')$ et $\delta(t - t'')$:

$$i \frac{d}{dt} F^k = i \tilde{\beta}^{(k)}(t, t'') \frac{\delta \omega_k^c}{\delta J_k} \delta(t - t') + i 2 \left(\tilde{m}^k(t', t) - \tilde{\alpha}^{(0)}(t) l^k(t', t) \right) \tau \frac{\delta \omega^c}{\delta J_k} \delta(t - t') \\ - \frac{1}{2} tr \left\{ i \frac{\delta \mathcal{T}_K}{\delta J_k} \Sigma(t, t'') \delta(t - t') + i l^k(t', t) \Xi^{(0)}(t) \frac{\delta \mathcal{T}_K}{\delta J_k} \tau \delta(t - t'') - \right. \\ \left. i l^k(t', t) \tau \frac{\delta \mathcal{T}_K}{\delta J_k} \Xi^{(0)}(t) \delta(t - t'') \right\} \quad (3-81)$$

Le fait que F^k ne dépende pas du temps t , nous permettra de résoudre une équation dynamique. En tenant compte des sources locales $J^\Phi(x, t)$ et en intégrant l'équation (3-81) de $t = +\infty$ à $t = t_0$, nous obtenons une approximation pour la fonction à deux-temps et à deux-points pour $t'' > t'$:

$$\beta_1^\Phi(t', t'') = 2[\tilde{m}^\Phi(t', t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(t', t_0)]\beta^\Phi(t_0, t'') - \frac{1}{2} \text{tr}[l^\Phi(t', t_0)\Sigma^\Phi(t_0, t'')] \quad (3-82)$$

On obtient par exemple

$$\beta_1^\Phi(p, t', t'') = 2[\tilde{m}^\Phi(-p, t', t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(0, p, -p, t', t_0)]\beta^\Phi(p, t_0, t'') - \frac{1}{2} \int d^3 k \text{tr}[l^\Phi(p + k, -k, -p, t', t_0)\Sigma^\Phi(k, -p - k, p, t_0, t'')] \quad (3-83)$$

Nos conventions pour les transformations de Fourier sont définies dans l'annexe C.

Ces deux dernières expressions seront encore valables lorsque nous optimiserons l'état initial dans le chapitre suivant. Au contraire l'expression suivante ne sera plus valide dans le chapitre suivant. À l'aide des équations (3-72) et (3-73), nous obtenons :

$$\beta_1^\Phi(t', t'') = 2[\tilde{m}^\Phi(t', t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(t', t_0)](\Xi_0 - \tau)(m^\Phi(t'', t_0) - l^\Phi(t'', t_0)\alpha_0) + \frac{1}{2} \text{tr}[l^\Phi(t', t_0)(\Xi_0 - \tau)l^\Phi(t'', t_0)(\Xi_0 + \tau)] \quad (3-84)$$

Pour $t' > t''$, on fait changement des opérateurs $\Phi^H(t', t_0)$ et $\Phi^H(t'', t_0)$ en utilisant l'expression des fonctions de Green retardées et nous obtenons :

$$\beta_1^\Phi(t', t'') = 2[\tilde{m}^\Phi(t'', t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(t'', t_0)](\Xi_0 - \tau)(m^\Phi(t', t_0) - l^\Phi(t', t_0)\alpha_0) + \frac{1}{2} \text{tr}[l^\Phi(t'', t_0)(\Xi_0 - \tau)l^\Phi(t', t_0)(\Xi_0 + \tau)] \quad (3-85)$$

Pour les fonctions de corrélations $-T$, il suffit de remplacer dans la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ (1-6)

Le terme source K_c par analogue K_b , ce qui équivaut à changer les matrices $\Xi_0 - \tau$ et $\Xi_0 + \tau$ de la formule précédente (et t' et t'').

À partir de la fonction $F^k(t', t'')$ et avec la considération des sources $J^{\Phi\Phi}(x, y, t)$, nous obtenons une expression qui relie les approximations de la fonction à deux-temps et à trois-points $\beta_1^\Phi(t', t'')$ et aussi la fonction $\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(t', t'')$ à deux-temps et quatre-points pour $t'' > t'$:

$$\begin{aligned} & \beta_1^{\Phi\Phi}(x_1, x'_1, x'_2, t', t'')\varphi^{(0)}(x_2, t') + \beta_1^{\Phi\Phi}(x_2, x'_1, x'_2, t', t'')\varphi^{(0)}(x_1, t') \\ & - \frac{1}{4}(\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(x_1, x_2, x'_1, x'_2, t', t'') + \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(x_2, x_1, x'_1, x'_2, t', t'')) = \\ & -2 \int d^3 x \left(\tilde{m}^{\Phi\Phi}(x, x_1, x_2, t', t_0) - \int d^3 u \tilde{\alpha}_0(u) l^{\Phi\Phi}(u, x, x_1, x_2, t', t_0) \right) \beta^{\Phi\Phi}(x, x'_1, x'_2, t_0, t'') \\ & + \frac{1}{2} \int d^3 x d^3 z \text{tr}[l^{\Phi\Phi}(x, z, x_1, x_2, t', t_0)\Sigma^{\Phi\Phi}(z, x, x'_1, x'_2, t_0, t'')] \end{aligned} \quad (3-86)$$

Dans le cas uniforme, nous avons par exemple là aussi

$$\begin{aligned}
& [\beta_1^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}, -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{q}), \mathbf{t}', \mathbf{t}'') \delta^3(\mathbf{p}_2) + \beta_1^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -(\mathbf{p}_2 + \mathbf{q}), \mathbf{t}', \mathbf{t}'') \delta^3(\mathbf{p}_1)] \varphi^{(0)}(\mathbf{t}') \\
& - \frac{1}{4} [\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}), \mathbf{t}', \mathbf{t}'') + \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{q}, -(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \mathbf{q}), \mathbf{t}', \mathbf{t}'')] = \\
& -2[\tilde{m}^{\Phi\Phi}(-\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0) - \tilde{\alpha}_0 l^{\Phi\Phi}(\mathbf{0}, -\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0)] \\
& \times \beta^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}'') \\
& + \frac{1}{2} \int d^3 k \text{tr} [l^{\Phi\Phi}(\mathbf{k} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0) \Sigma^{\Phi\Phi}(\mathbf{k}, -\mathbf{k} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{q}, -\mathbf{q} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}'')]] \\
& \quad (3-87)
\end{aligned}$$

Rappelons-nous que la fonction Σ_{11}^{Φ} est liée à $\beta_1^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'')$ par $\beta_1^{\Phi\Phi} = \frac{1}{2} \Sigma_{11}^{\Phi}$. En comparant les équations dynamiques $\beta_i^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'')$ et $\Sigma_{ii}^{\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'')$, on obtient $\beta_2^{\Phi\Phi} = \Sigma_{12}^{\Phi} + \Sigma_{21}^{\Phi}$ et une expression de Σ_{22}^{Φ} en termes de $\beta_1^{\Phi\Phi}$ et deux intégrales sur les moments qui impliquent Σ_{11}^{Φ} et $\Sigma_{11}^{\Phi} = 2\beta_1^{\Phi\Phi}$.

7-1 Phase symétrique

Les équations (3-84) et (3-85) se simplifient si la condition aux limites $l^{\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') = \mathbf{0}$ et l'équation du mouvement (3-75) pour l . On peut déduire que $l^{\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}) = \mathbf{0}$ pour $\mathbf{t} \leq \mathbf{t}'$.

De même pour $\mathbf{t} \leq \mathbf{t}'$ on a $m^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}) - l^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}', \mathbf{t}) \alpha^{(0)}(\mathbf{t}) = \mathbf{0}$

Pour cela on a dans la phase symétrique pour $\mathbf{t}'' > \mathbf{t}'$:

$$\beta_1^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = 2\tilde{m}^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(\mathbf{p}) - \tau)m^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}'', \mathbf{t}_0) \quad (3-88)$$

Et pour la fonction à quatre points :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = & - \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr} [l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0) \\
& \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}_0, \mathbf{t}'')]] , \quad (3-89)
\end{aligned}$$

À l'aide de l'équation (3-72) on a :

$$\begin{aligned}
\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = & \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr} [l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(\mathbf{p}) - \tau) \\
& l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}'', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \tau)] , \quad (3-90)
\end{aligned}$$

Il faut noter que Ξ_0 est la solution statique de **TDHFB**, à ne pas confondre avec Ξ^0 .

Pour $\mathbf{t}' > \mathbf{t}''$, nous sommes encore dans la phase symétrique

$$\beta_1^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = 2\tilde{m}^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(\mathbf{p}) + \tau)m^{\Phi}(\mathbf{p}, \mathbf{t}'', \mathbf{t}_0) \quad (3-91)$$

$$\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr} [l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{t}', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(\mathbf{p}) - \tau)$$

$$l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, \mathbf{t}'', \mathbf{t}_0)(\Xi_0(-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \tau)] , \quad (3-92)$$

Pour conclure, afin d'obtenir des approximations des fonctions de corrélations causales $\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3$ et $\mathbf{C}^4$, nous devons d'abord résoudre les équations TDHFB (3-53) et (3-54) pour $\alpha^0(t)$ et $\Xi^0(t)$ et évaluer les matrices r, R, t et T pour les solutions TDHFB. Nous avons ensuite résolu les équations (3-75) et (3-76) pour $l^\Phi(t'', t)$ et $m^\Phi(t', t) - l^\Phi(t'', t)\alpha^{(0)}(t)$, $t'' > t \geq t_0$ backward de t'' à t_0 . Les expressions que nous obtenons de cette manière pour les fonctions trois-points et quatre points ne sont pas entièrement satisfaisantes. En effet, dans le cas statique $\alpha^0(t) = \alpha_0$ et $\Xi^0(t) = \Xi_0$ sont indépendants du temps, les fonctions de corrélations approximatives ne dépendent pas seulement de la différence de temps $t' - t''$ comme il se doit. Pour cela on doit optimiser l'état initial.

7-2 Les fonctions de Green retardées

La fonction β_1^Φ est une approximation de la fonction de Green

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{\Phi\Phi}^2(x, y, t, t'') &= \text{Tr}(\mathbf{T}\Phi^H(x, t', t_0)\Phi^H(y, t'', t_0)\mathcal{D}(t_0)) \\ &\quad - \text{Tr}(\Phi^H(x, t', t'')\mathcal{D}(t_0))\text{Tr}(\Phi^H(y, t'', t_0)\mathcal{D}(t_0)), \end{aligned} \quad (3-93)$$

Pour obtenir les approximations des fonctions à deux-temps, il suffit de remplacer dans la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ (3-39) le terme $\mathbf{K}_c$ par le terme $\mathbf{K}_b$.

La fonction de Green retardée est définie par :

$$\chi_{\Phi\Phi}(x, y, t', t'') = -i\Theta(t' - t'')\text{Tr}([\Phi^H(x, t', t_0), \Phi^H(y, t'', t_0)]\mathcal{D}(t_0)), \quad (3-94)$$

Il est intéressant d'obtenir une approximation de la fonction de Green retardée. Cette fonction apparaît dans l'étude de la réponse du système à de petites perturbations. La condition **KMS** (the fluctuation-dissipation theorem) permet de relier les différentes composantes de la fonction de Green. Dans le formalisme réel de la théorie quantique des champs à température finie, la partie réelle de la fonction de Green $\mathbf{C}^2$ coïncide avec la fonction de Green retardée χ . Elles décrivent des phénomènes comme le Debye screening, dans un plasma pour une particule chargée dans un champ électromagnétique extérieur. La partie imaginaire de la fonction de Green retardée décrit les phénomènes d'amortissement (damping).

L'optimisation de l'état initial permet d'obtenir des approximations des fonctions de Green, qui satisfont à la condition (KMS). De l'équation (3-85) et les analogues à la fonction de corrélation avec le produit (anti-chronologique), on obtient une approximation de la fonction de Green retardée :

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi\Phi}(x, y, t', t'') &= -i\Theta(t' - t'') \left[-4 \left(\tilde{m}^\Phi(t'', t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(t'', t_0) \right) \tau(m^\Phi(t', t_0) - l^\Phi(t', t_0)\alpha_0) \right. \\ &\quad \left. + \text{tr}(l^\Phi(t'', t_0)\Xi_0 l^\Phi(t', t_0)\tau) - \text{tr}(l^\Phi(t'', t_0)\tau l^\Phi(t', t_0)\Xi_0) \right], \end{aligned} \quad (3-95)$$

Dans la phase symétrique :

$$\chi_{\Phi\Phi}(x, y, t', t'') = i\Theta(t' - t'') 4\tilde{m}^\Phi(t'' - t_0)\tau m^\Phi(t', t_0). \quad (3-96)$$

L'expression exacte (3-93) reste identique si on fait une translation de t_0 à t tel que $t'' > t > t_0$. En remplaçant $R(t', t'')$ par l'expression qui se trouve entre crochets dans l'équation (3-95) de t_0 à t avec $t_0 \leq t \leq t''$ nous avons pour $t' > t''$:

$$\frac{dR}{dt} = 2 \left(\tilde{m}^\Phi(t', t) - \tilde{\alpha}^0(t) \right) l^\Phi(t', t) \tau \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \delta(t - t'') \quad , \quad (3-97)$$

On déduit que $\frac{dR}{dt} = 0$ pour $t < t''$. Nous avons donc :

$$\chi_{\Phi\Phi}(x, y, t', t'') = -i\Theta(t' - t'')R(t', t'') , \quad (3-98)$$

Lorsque le temps t tend vers t'' la formule exacte de l'équation (3-94) coïncide avec le commutateur de deux champs $\Phi^H(t', t_0)$ au moment de l'égalité on a l'expression approché $\chi_{\Phi\Phi}(t', t') = 0$, pour $m_1^\Phi(t'', t'') = -\frac{1}{2}$ et $l^\Phi(t'', t'') = 0$.

De la même façon, nous pouvons obtenir des approximations de la fonction de Green retardée de deux opérateurs de champs $\Phi\Phi$ définis en fonction de :

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(x, y, z, u, t', t'') = \\ -i\Theta(t' - t'')Tr([\Phi^H(x, t', t_0)\Phi^H(y, t', t_0), \Phi^H(z, t'', t_0)\Phi^H(u, t'', t_0)]\mathcal{D}(t_0)), \end{aligned} \quad (3-99)$$

Dans la phase symétrique, l'équation (3-92) et l'équation analogue de la fonction de corrélation avec le produit (anti-chronologique), on déduit une approximation de la fonction de Green retardée à deux opérateurs champs :

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t', t'') \\ = -i\Theta(t' - t'') \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr}[l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t'', t_0)\Xi_0(\mathbf{p}) \times \\ l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t', t_0)\tau] - \text{tr}[l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t'', t_0)\tau \times \\ l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t', t_0)\Xi_0(-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2)] , \end{aligned} \quad (3-100)$$

Encore une fois, la partie droite de l'équation (3-100) ne dépend pas du temps t_0 , on remplace la partie droite par $S(t', t'')$ de t_0 par t , avec $t_0 \leq t \leq t''$ et nous avons pour $t' > t''$:

$$\frac{dS}{dt} = -2tr \left[l^{\Phi\Phi}(t', t)\Xi_0 \frac{\delta\mathcal{T}_K}{\delta J^{\Phi\Phi}} \tau - l^{\Phi\Phi}(t', t)\tau \frac{\delta\mathcal{T}_K}{\delta J^{\Phi\Phi}} \Xi_0 \right] \delta(t - t''), \quad (3-101)$$

On a $\frac{dS}{dt} = 0$ pour $t < t''$. Nous avons donc :

$$\chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t', t'') = -i\Theta(t' - t'')S(t', t''), \quad (3-102)$$

Lorsque $t' = t'' \rightarrow t + 0$ l'expression de la fonction à deux -points (3-84) devient :

$$\begin{aligned} \beta_1^\Phi(t, t) = 2[\tilde{m}^\Phi(t, t_0) - \tilde{\alpha}_0 l^\Phi(t, t_0)](\Xi_0 - \tau)(m^\Phi(t, t_0) - l^\Phi(t, t_0)\alpha_0) \\ + \frac{1}{2}tr[l^\Phi(t, t_0)(\Xi_0 - \tau)l^\Phi(t, t_0)(\Xi_0 + \tau)] \end{aligned} \quad (3-103)$$

Au temps, initial $t = t_0$, nous obtenons $\beta_1^\Phi(t_0, t_0) = G_0$ (le même résultat que TDHFB) .

En effet $m_1^\Phi(t_0, t_0) = -\frac{1}{2}$ et $l^\Phi(t_0, t_0) = 0$ et $\frac{1}{2}\Xi^0(t) = G^0(t)$. Pour $t > t_0$ ces expressions en général diffèrent des résultats obtenus à partir des équations TDHFB.

A L'équilibre nous avons :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t = 0) = G_0(\mathbf{p}) , \quad (3-104)$$

Examinons la fonction à quatre points lors les deux temps coïncident, Dans la phase symétrique à la limite $t' = t'' - 0 = t + 0$, l'expression de la fonction à quatre points (3-90) est donnée par :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t, t) &= \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \text{tr}[l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2, -\mathbf{p}, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t, t_0)(\Xi_0(\mathbf{p}) - \tau) \\ &\quad l^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, -\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t_0, t)(\Xi_0(-\mathbf{p} + \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2) + \tau)] , \end{aligned} \quad (3-105)$$

On écrit aussi la fonction $l^{\Phi\Phi}$ dans les conditions aux limites :

$$l_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t, t) = -\frac{1}{2}[\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)] , \quad (3-106)$$

Les autres éléments de la matrice $l^{\Phi\Phi}$ sont nuls, et nous avons au temps initial :

$$\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t_0, t_0) = \frac{1}{2}\Sigma_{11}^0(-\mathbf{p}_1)\Sigma_{11}^0(\mathbf{p}_2)[\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)] . \quad (3-107)$$

L'approximation du champ moyen pour $C^4 = 0$ correspond à (voir l'équation 3-63) :

$$\begin{aligned} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(x, y, z, u, t, t) &= 2\beta_1^\Phi(x, z, t, t)\beta_1^\Phi(y, u, t, t) + 2\beta_1^\Phi(x, u, t, t)\beta_1^\Phi(y, z, t, t) \\ &= 2G^0(x, z, t)G^0(y, u, t) + 2G^0(x, u, t)G^0(y, z, t) , \end{aligned} \quad (3-108)$$

L'équation correspondante à (3-108) dans l'espace des impulsions :

$$\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma\mathbf{p}_i, t, t) = 2\beta_1^\Phi(-\mathbf{p}_1, t, t)\beta_1^\Phi(\mathbf{p}_2, t, t)[\delta(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) + \delta(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)] \quad (3-109)$$

Au temps initial, on retrouve le résultat du théorème de Wick donné par l'expression (3-106) dans l'espace des impulsions .Pour $t > t_0$ et en raison des corrélations, nous avons pris en compte dans la dynamique les approximations pour la fonction de la corrélation à quatre points qui est différent du résultat du théorème de Wick.

Dans de nombreux problèmes pour des particules non relativiste, le champ moyen calculée par TDHFB prédit correctement les valeurs moyennes, mais sous-estimer les fluctuations.

Balian et Vénéroni ont montré que l'avantage d'utiliser le principe variationnel est de calculer les fluctuations, tout en restant dans le cadre du champ moyen.

Pour l'état pur dans le cas des ions-lourds, on obtient de cette façon un meilleur accord avec l'expérience (la largeur de la distribution de masse) [34]. L'exemple de l'oscillateur quartique à une dimension montre aussi l'utilité de la méthode développé par Balian et Vénéroni pour calculer les fluctuations des opérateurs x^2 , $\langle x^2 \rangle - \langle x^2 \rangle^2$, toujours dans une approximation de champ moyen[10].

Chapitre IV

OPTIMISATION DE L'ETAT INITIAL

1-INTRODUCTION

Dans des situations physiques, l'état initial n'est pas complètement connu. Seules les valeurs moyennes de quelques observables sont connues, par exemple :

$$\langle \Phi(x) \rangle_{t_0} , \langle \Phi(x)\Phi(y) \rangle_{t_0} \text{ et } \langle \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z) \rangle_{t_0} , \langle \Phi(x)\Phi(y)\Phi(z)\Phi(u) \rangle_{t_0} \quad (4-1)$$

L'état exact $\mathcal{D}(t_0)$ peut être écrit comme $\exp(-\beta \bar{H})$. L'opérateur $\bar{H}$ est le Hamiltonien du système à l'équilibre thermique mais peut aussi correspondre à d'autres quantités conservées comme l'opérateur de charge, pour un champ scalaire complexe. Pour une situation hors-équilibre, l'opérateur $\bar{H}$ est différent du Hamiltonien H . Nous considérons $e^{-\beta \bar{H}}$ comme une solution de l'équation de Bloch :

$$\frac{d}{du} e^{-u \bar{H}} = -\bar{H} e^{-u \bar{H}} , \quad 0 < u < \beta \quad (4-2)$$

Selon la méthode générale de [7] pour l'évolution d'une quantité donnée, nous introduisons l'opérateur d'ansätze $\mathcal{D}(t)$ et nous considérons l'équation (4-2) comme une contrainte, pour un temps complexe $t = t_0 + i(\beta - u)$ et avec une condition aux limites $\mathcal{D}(t_0 + i\beta) = \mathbf{1}$, et nous introduisons également un multiplicateur de Lagrange $\mathcal{A}(t)$ associé à cette contrainte.

La fonctionnelle $\mathcal{Z}$ s'écrit :

$$\mathcal{Z}(\mathcal{A}(t), \mathcal{D}(t)) = \text{Tr}(\mathcal{A}(t_0 + i0) \mathcal{D}(t_0 + i0)) - \text{Tr} \int_{t_0}^{t_0 + i\beta} dt \mathcal{A}(t) \left(\frac{d\mathcal{D}(t)}{dt} + i\bar{H}\mathcal{D}(t) \right) + \mathcal{Z}_{dyn} \quad (4-3)$$

Où $\mathcal{Z}_{dyn}$ est donné par l'expression $\mathcal{Z}$ doit être rendu stationnaire.

Ansätze $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ et avec les conditions aux limites $\mathcal{A}(\infty) = \mathbf{1}$, $\mathcal{D}(t_0 + i\beta) = \mathbf{1}$ pour une valeur complexe de t l'opérateur $\mathcal{A}(t)$ ne s'approche pas de la valeur $\mathbf{1}$, dans la limite des sources (disparition des sources). La condition de stationnarité de $\mathcal{Z}$ doit respecter les variations arbitraires de $\mathcal{D}(t)$:

$$\frac{d\mathcal{A}(t)}{dt} = -i\mathcal{A}(t)\bar{H} = 0 \quad (4-4)$$

La solution de cette équation pour $t = t_0 + i(\beta - u)$ vaut à :

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{A}(t_0) \exp(-(\beta - u)\bar{H}).$$

2-Les espaces variationnels

Pour les espaces variationnels de $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ nous choisissons des opérateurs gaussiens caractérisés par les contractions $\alpha_d(x, t)$, $\Xi_d(x, y, t)$ et $\alpha_a(x, t)$, $\Xi_a(x, y, t)$, avec le temps t qui appartient à l'intervalle $[t_0 + i\beta, t_0]$ et $[t_0, +\infty[$ dans le plan complexe avec les conditions aux limites $\mathcal{D}(t_0 + i\beta) = 1$ on écrit :

$$\Xi_d^{-1}(t_0 + i\beta) = 0, \quad \frac{1}{\Xi_d} \alpha_d(t_0 + i\beta) = 0 \quad (4-5)$$

Et nous écrivons la fonctionnelle $\mathcal{Z}$ avec les contractions élémentaires s'écrit :

$$\mathcal{Z}(n_a, \alpha_a, \Xi_a; n_d, \alpha_d, \Xi_d) = n(t_0) - \int_{t_0+i\beta}^{t_0} dt \left[\frac{dn(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{A}(t)=cte} + in(t) \int d^3 x \bar{\mathcal{E}}_c(x, t) \right] + \mathcal{Z}_{dyn}, \quad (4-6)$$

Par intégration par parties :

$$\mathcal{Z}(n_a, \alpha_a, \Xi_a; n_d, \alpha_d, \Xi_d) = n(t_0 + i\beta) + \int_{t_0+i\beta}^{t_0} dt \left[\frac{dn(t)}{dt} \Big|_{\mathcal{D}(t)=cte} - in(t) \int d^3 x \bar{\mathcal{E}}_c(x, t) \right] + \mathcal{Z}_{dyn}, \quad (4-7)$$

Nous avons employé la notation :

$$\int d^3 x \bar{\mathcal{E}}_c(x, t) = Tr(\mathcal{D}(t)\mathcal{A}(t)\bar{H}) = \langle \bar{H} \rangle_c. \quad (4-8)$$

3-Les équations dynamiques

Pour des valeurs complexes du temps $t_0 + i\beta < t < t_0$, les équations dynamiques pour les contractions α_d, Ξ_d et α_a, Ξ_a s'écrivent sous la forme suivante :

$$2i\dot{\alpha}_d = -(\Xi_d + \tau)\bar{\mathcal{H}}_c(\Xi_d - \tau)\tau\alpha_{b-c} + (\Xi_d + \tau)\bar{\omega}_c, \quad (4-9)$$

$$i\dot{\Xi}_d = -(\Xi_d + \tau)\bar{\mathcal{H}}_c(\Xi_d - \tau), \quad (4-10)$$

$$2i\dot{\alpha}_a = (\Xi_a - \tau)\bar{\mathcal{H}}_c(\Xi_a + \tau)\tau\alpha_{c-b} - (\Xi_a - \tau)\bar{\omega}_c, \quad (4-11)$$

$$i\dot{\Xi}_a = (\Xi_a - \tau)\bar{\mathcal{H}}_c(\Xi_a + \tau). \quad (4-12)$$

Ces équations dynamiques sont couplées par les conditions aux limites,

$$\mathcal{D}(t_0 + i\beta) = 1, \quad \mathcal{A}(t = \infty) = 1$$

Cela donne :

$$\Xi_d^{-1}(t_0 + i\beta) = 0, \quad \frac{1}{\Xi_d} \alpha_d(t_0 + i\beta) = 0, \quad (4-13)$$

$$\Xi_a^{-1}(t = +\infty) = 0, \quad \frac{1}{\Xi_a} \alpha_a(t = +\infty) = 0, \quad (4-14)$$

Pour les contractions α_b, Ξ_b et α_c, Ξ_c on peut écrire les équations dynamiques sous la forme :

$$\dot{\alpha}_b = \mathbf{0} , \quad (4-15)$$

$$\dot{\Xi}_b = \mathbf{0} , \quad (4-16)$$

$$i\dot{\alpha}_c = \tau \bar{\omega}_c , \quad (4-17)$$

$$i\dot{\Xi}_c = 2(\Xi_c \bar{\mathcal{H}}_c \tau - \tau \bar{\mathcal{H}}_c \Xi_c) , \quad (4-18)$$

Nous avons $\frac{d\langle \bar{H} \rangle_c}{dt} = \mathbf{0}$. Nous introduirons le vecteur $\bar{\omega}_c$ et la matrice $\bar{\mathcal{H}}_c$ (analogues au ω et $\mathcal{H}$), pour exprimer la variation $\delta\langle \bar{H} \rangle$ en termes des variations $\delta\alpha_c$ et $\delta\Xi_c$. Toutes les contractions α et Ξ sont continues en $t = t_0$. Dans le temps complexe $[t_0 + i\beta, t_0]$, α_b et Ξ_b sont constant : $\alpha_b = \alpha_b(t_0)$, $\Xi_b = \Xi_b(t_0)$.

4-Développements dans les sources

Nous employons l'indice (0) pour les solutions des équations dynamiques sans les sources :

$\alpha_d(t) = \alpha_d^{(0)}(t)$, $\Xi_d(t) = \Xi_d^{(0)}(t)$, $\alpha_a(t) = \alpha_a^{(0)}(t)$, $\Xi_a(t) = \Xi_a^{(0)}(t)$. Comme $\mathcal{A}(\mathbf{1}) \neq \mathbf{1}$, même dans la limite sans source cette limite ne correspond pas à $\Xi_a^{-1} = \mathbf{0}$, $\frac{1}{\Xi_a} \alpha_a = \mathbf{0}$, au contraire de ce qui produit quand nous n'optimisons pas l'état initial . Par conséquent, $\Xi_b^{(0)} \neq \Xi_d^{(0)}$ et $\alpha_b^{(0)} \neq \alpha_d^{(0)}$. Dans la limite sans source, $\mathcal{A}(t_0 + i\mathbf{0}) = \mathcal{A}(t_0 + \mathbf{0}) \rightarrow \mathbf{1}$. pour t_0 , nous avons ainsi :

$$\alpha_b^{(0)}(t_0) = \alpha_c^{(0)}(t_0) = \alpha_d^{(0)}(t_0) = \bar{\alpha}_0 , \quad (4-19)$$

$$\Xi_b^{(0)}(t_0) = \Xi_c^{(0)}(t_0) = \Xi_d^{(0)}(t_0) = \bar{\Xi}_0 , \quad (4-20)$$

$\bar{\alpha}_0$ et $\bar{\Xi}_0$ sont les solutions statique de TDHFB associées à l'opérateur $\bar{H}$ et qui vérifient :

$$\bar{\omega}_0 = \mathbf{0} , \quad (4-21)$$

$$\bar{\Xi}_0 \bar{\mathcal{H}}_0 \tau = \tau \bar{\mathcal{H}}_0 \bar{\Xi}_0 . \quad (4-22)$$

Les expressions pour le vecteur $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}(\bar{\alpha}_0, \bar{\Xi}_0)$ et la matrice $\bar{\mathcal{H}}_0 = \bar{\mathcal{H}}(\bar{\alpha}_0, \bar{\Xi}_0)$ sont obtenues dans l'annexe C, en remplaçant $\bar{\mathbf{f}}_0$ et $\bar{\mathbf{g}}_0$ par les fonctions indépendantes du temps $\bar{\mathbf{f}}_0$ et $\bar{\mathbf{g}}_0$.

Le développement à l'ordre 0 pour les équations (4-9) et (4-12) :

$$2i\dot{\alpha}_d^{(0)} = (\Xi_d^{(0)} + \tau) \bar{\omega}_0 , \quad (4-23)$$

$$i\dot{\Xi}_d^{(0)} = -(\Xi_d^{(0)} + \tau) \bar{\mathcal{H}}_0 (\Xi_d^{(0)} - \tau) , \quad (4-24)$$

$$2i\dot{\alpha}_a^{(0)} = (\Xi_a^{(0)} - \tau) \bar{\omega}_0 , \quad (4-25)$$

$$i\dot{\Xi}_a^{(0)} = -(\Xi_a^{(0)} - \tau) \bar{\mathcal{H}}_0 (\Xi_a^{(0)} + \tau) , \quad (4-26)$$

Avec $\bar{\omega}_0 = \mathbf{0}$, nous prenons pour $t_0 + i\beta < t < t_0$: $\dot{\alpha}_d^{(0)} = \mathbf{0}$ et $\dot{\alpha}_a^{(0)} = \mathbf{0}$. En employant la continuité à $t = t_0$, nous obtenons ainsi pour $0 < u < \beta$:

$$\alpha_d^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = \bar{\alpha}_0 , \quad (4-27)$$

$$\left(\frac{1}{\Xi_a} \alpha_a\right)^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = \mathbf{0} , \quad (4-28)$$

La solution de (4-24) avec les conditions aux limites $\Xi_d^{(0)-1}(t_0 + i\beta) = \mathbf{0}$, est la suivante :

$$\Xi_d^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = -\tau \coth(u\bar{\mathcal{H}}_0\tau) , \quad (4-29)$$

ce qui peut également être écrit comme :

$$\Xi_d^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = \tau \left(1 - \frac{2}{1 - \exp(-u\bar{\mathcal{H}}_0 2\tau)}\right) \quad (4-30)$$

pour le cas uniforme :

$$\Xi_d^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\omega_p} \coth\left(\frac{u\omega_p}{2}\right) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\omega_p} \coth\left(\frac{u\omega_p}{2}\right) \end{pmatrix} \quad (4-31)$$

Dans la théorie Φ^4 on a, $\omega_p = \sqrt{-\bar{g}_0(\mathbf{P})}$ et,

$$\bar{g}_0(\mathbf{P}) = -\left(\mathbf{P}^2 + \bar{m}_0^2 + \frac{b}{2}\bar{\varphi}_0^2 + \frac{b}{2}\bar{G}_0(x, x)\right) \quad (4-32)$$

Pour $u = \beta$, nous devons obtenir la solution statique de **TDHFB** associée au Hamiltonien $\bar{H}$,

$$\Xi_d^{(0)}(t_0 + i0) = \bar{\Xi}_0 = -\tau \coth(\beta\bar{\mathcal{H}}_0\tau) , \quad (4-33)$$

On peut écrire la solution (4-26) :

$$\Xi_a^{(0)}(t_0 + i\beta - iu) = -\tau \coth((\beta - u)\bar{\mathcal{H}}_0\tau) , \quad (4-34)$$

On vérifie que pour $u = \beta$, $\Xi_a^{(0)-1}(t_0) = \mathbf{0}$.

Au premier ordre, $\bar{\omega}_c^{(0)}(t_0) = \bar{\omega}_0(t_0) = \mathbf{0}$ et $\bar{\Xi}_c^{(0)}(t_0) = \bar{\Xi}_0$. Par conséquent les parties droite des équations (4-17)et (4-18)disparaissent au voisinage de (t_0) .Nous déduisons cela au premier ordre de développement dans les sources, α_c et Ξ_c sont constant dans l'intervalle $[t_0 + i\beta, t_0]$ et valent respectivement aux $\bar{\alpha}_0$ et $\bar{\Xi}_0$.Nous pouvons également obtenir ce résultat à partir des relations de l'annexe C et à partir des expressions obtenues ci-dessus pour $\alpha_d^{(0)}(t), \alpha_a^{(0)}(t), \Sigma_d^{(0)}(t), \Sigma_a^{(0)}(t)$.

L'approximation de l'état initial est caractérisée par $\alpha_d(t_0), \Xi_d(t_0)$ qui ne correspondent pas à la solution statique α_0, Ξ_0 .

Au lieu d'utiliser l'expansion de l'équation (4-9)et(4-10) pour α_d et Ξ_d ,il est plus commode d'élargir au premier ordre les équations (4-17) et (4-18) pour α_c et Ξ_c dans l'intervalle $t_0 + i\beta \leq t \leq t_0$:

$$i \frac{d}{dt} \beta^\Phi(x, y, t, t'') = \tau [\bar{t} \beta^\Phi(t, t'') - \frac{1}{2} \bar{T}_{(jk} \Sigma_{kj}^\Phi)(t, t'') \quad (4-35)$$

$$i \frac{d}{dt} \sum_{ij}^\Phi(x, y, x_1, t, t'') = 2[\Sigma^\Phi \bar{\mathcal{H}}_0 \tau - \tau \bar{\mathcal{H}}_0 \Sigma^\Phi + \bar{\Xi}_0 \bar{r}_{(k} \beta_k^\Phi \tau - \tau \bar{r}_{(k} \beta_k^\Phi \bar{\Xi}_0 \\ - \frac{1}{2} \bar{\Xi}_0 \bar{R}_{(kl} \Sigma_{lk}^\Phi \tau + \frac{1}{2} \tau \bar{R}_{(kl} \Sigma_{lk}^\Phi \bar{\Xi}_0]_{ij} \quad (4-36)$$

5-Approximation de la fonction à deux points

Dans la suite nous considérons un problème uniforme. Dans l'espace de l'impulsion l'équation (4-35) on peut l'écrire sous la forme :

$$\frac{d^2}{dt^2} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') = \bar{g}_0(-\mathbf{p}) \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') + \frac{b}{4} \bar{\Phi}_0 \int_{\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 = -\mathbf{p}} \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_2}{(2\pi)^3} \Sigma_{11}^\Phi(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}, t, t'') \quad (4-37)$$

$$i \frac{d}{dt} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') = -\beta_2^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') \quad (4-38)$$

Dans la phase symétrique, $\bar{\Phi}_0 = 0$ et la fonction $\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'')$ pour $t_0 + i\beta < t < t_0$ on peut écrire :

$$\frac{d^2}{dt^2} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') = \bar{g}_0(\mathbf{p}) \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') \quad (4-39)$$

$$\text{Où} \quad -\bar{g}_0(\mathbf{p}) = \mathbf{p}^2 + \bar{m}_0^2 + \frac{b}{0} \bar{G}_0(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (4-40)$$

Nous pouvons donc porter $\beta_{1,2}^\Phi(\mathbf{p}, t_0, t'')$ de $\beta_{1,2}^\Phi(\mathbf{p}, t_0 + i\beta, t'')$:

$$\begin{pmatrix} \beta_1^\Phi \\ \beta_2^\Phi \end{pmatrix}(\mathbf{p}, t_0, t'') = A(\mathbf{p}) \begin{pmatrix} \beta_1^\Phi \\ \beta_2^\Phi \end{pmatrix}(\mathbf{p}, t_0 + i\beta, t'') \quad (4-41)$$

Où $A(\mathbf{p})$ est la matrice :

$$A(\mathbf{p}) = \begin{pmatrix} \cosh \omega_p \beta & \frac{\sinh \omega_p}{\omega_p} \\ \omega_p \sinh \omega_p & \cosh \omega_p \beta \end{pmatrix} \quad (4-42)$$

Avec $\omega_p = \sqrt{\bar{g}_0(\mathbf{p})}$.

Le fait que $\mathcal{D}(t_0 + i\beta) = 0$ donne :

$$\alpha_c(t_0 + i\beta) = \alpha_b(t_0 + i\beta) \quad , \quad \Xi_c(t_0 + i\beta) = \Xi_b(t_0 + i\beta) \quad (4-43)$$

Dans la phase symétrique, $\mathbf{l}^\Phi = 0$, on a :

$$\beta^\Phi(t_0 + i\beta) = \beta^\Phi(t_0, t'') + 2\tau m^\Phi(t'', t_0) \quad (4-44)$$

De l'équation (4-41), nous obtenons :

$$\beta^\Phi(\mathbf{p}, t_0, t'') = (A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} 2\tau m^\Phi(\mathbf{p}, t'', t_0) \quad (4-45)$$

Pour $t'' > t'$ la relation (3-88) du chapitre (3) est modifiée :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t', t'') = 4\tilde{m}^\Phi(\mathbf{p}, t', t_0)(A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} \tau m^\Phi(\mathbf{p}, t'', t_0) \quad (4-46)$$

avec

$$(A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{2} & \frac{1}{2\omega_p} \coth\left(\frac{\beta}{2}\omega_p\right) \\ \frac{-\omega_p \coth\left(\frac{\beta}{2}\omega_p\right)}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \quad (4-47)$$

Pour $t' > t''$, nous avons :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t', t'') = 4\tilde{m}^\Phi(\mathbf{p}, t', t_0)(A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} \tau m^\Phi(\mathbf{p}, t'', t_0) \quad (4-48)$$

Nous vérifions à nouveau, dans la limite $t' = t'' = t_0$, on obtient la solution des équations TDHFB en t_0 :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t_0, t_0) = \frac{1}{2\omega_p} \coth(\beta\omega_p) = G_0(\mathbf{p}, t_0) \quad . \quad (4-49)$$

Pour la fonction à deux points dans la phase symétrique, on peut vérifier que la matrice $\bar{\Xi}_0$ est de la forme :

$$\bar{\Xi}_0(\mathbf{p}) - \tau = 2(A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} \tau \quad (4-50)$$

Il est également intéressant de calculer l'approximation obtenue pour la fonction de Green retardée (3-94) quand on optimise à la fois la dynamique et l'état initial. Dans la phase symétrique la fonction de corrélation pour $t' > t''$:

$$\beta_1^\Phi(t', t'') = 2\tilde{m}^\Phi(t'', t_0)\beta^\Phi(t_0, t') \quad (4-51)$$

Pour le produit anti-T et $t' > t''$:

$$\beta_1^\Phi(t', t'') = 2\tilde{m}^\Phi(t', t_0)\beta^\Phi(t_0, t'') \quad (4-52)$$

En utilisant (4-45) et le fait que :

$$(A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} \tau + \left[\tau (A^{-1}(\mathbf{p}) - \mathbf{1})^{-1} \right]^T = -\tau \quad (4-51)$$

Nous obtenons :

$$\chi_{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, t', t'') = i\Theta(t' - t'')4\tilde{m}^\Phi(\mathbf{p}, t'', t_0)\tau m^\Phi(\mathbf{p}, t', t_0) \quad (4-52)$$

Cette expression (4-52) est identique à la formule (3-96) obtenue sans l'optimisation de l'état initial

A l'équilibre

Les fonctions de corrélations à deux temps ne doivent dépendre que de la différence $t' - t''$. Malheureusement, ce n'est pas vrai pour les fonctions à trois points et quatre points.

A l'équilibre, $\alpha^{(0)} = \alpha_0$, $\Xi^{(0)} = \Xi_0$ et les matrices $\mathbf{t}, \mathbf{T}, \mathbf{r}$ et $\mathbf{R}$ sont des constantes. A l'équilibre dans la phase symétrique, nous pouvons résoudre l'équation (76) pour m^Φ :

$$m_1^\Phi(\mathbf{p}, t', t'') = -\frac{1}{2} \cos(\omega_p(t_0 - t')) \quad (4-53)$$

$$m_2^\Phi(\mathbf{p}, t', t'') = -\frac{1}{2i} \frac{1}{\omega_p} \sin(\omega_p(t_0 - t')) \quad (4-54)$$

On écrit $\Delta t = t' - t''$, pour $\Delta t < 0$, l'équation (4-46) donne :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t) = \frac{1}{2\omega_p} \left(\coth \frac{\beta\omega_p}{2} \cos\omega_p\Delta t - \frac{1}{i} \sin\omega_p\Delta t \right) \quad (4-55)$$

Pour $\Delta t > 0$, nous utilisons l'équation (48)

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t) = \frac{1}{2\omega_p} \left(\coth \frac{\beta\omega_p}{2} \cos\omega_p\Delta t + \frac{1}{i} \sin\omega_p\Delta t \right) \quad (4-56)$$

Pour $\Delta t = 0$, on obtient $\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t = 0) = G_0(\mathbf{p})$, dans ce cas la fonction à deux points coïncide avec la solution de l'équation du champ moyen de .

En prenant la transformée de Fourier en temps pour les équations (4-55) et (4-56) :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \omega) = \int_{-\infty}^0 d(\Delta t) e^{i(\omega - i\varepsilon)\Delta t} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t) + \int_0^{+\infty} d(\Delta t) e^{i(\omega + i\varepsilon)\Delta t} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, \Delta t) , \quad (4-57)$$

On obtient :

$$\beta_1^\omega(\mathbf{p}, \omega) = i \left[\frac{n_p + 1}{\omega^2 - (\omega_p - i\varepsilon)^2} - \frac{n_p}{\omega^2 - (\omega_p + i\varepsilon)^2} \right] \quad (4-58)$$

Où n_p est le nombre d'occupation : $2n_p + 1 = \coth \frac{\beta\omega_p}{2}$.

Nous allons montrer maintenant que notre approximation pour les fonctions de corrélations à deux temps avec deux opérateurs champs satisfait au théorème de dissipation-fluctuation. Ce théorème peut être écrit comme une relation entre la transformée de Fourier en temps de la fonction de corrélation $C_{\Phi\Phi}^2(x, x', t, t')$ et la fonction de réponse :

$$\chi_2(x, x', t, t') = Tr \left([\Phi^H(x, t, t_0), \Phi^H(x', t', t_0)] \mathcal{D}(t_0) \right) \quad (4-59)$$

Et on a :

$$\tilde{\chi}_2(x, x', \omega) = (1 - e^{-\beta\omega}) \tilde{C}_{\Phi\Phi}^2(x, x', t - t') \quad (4-60)$$

Où la transformée de Fourier en temps est défini en fonction de :

$$\tilde{\chi}_2(x, x', \omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d(t - t') e^{i\omega(t-t')} \chi_2(x, x', t - t') , \quad (4-61)$$

La fonction de corrélation C^2 nous donne des informations sur les fluctuations de l'état d'équilibre tandis que la fonction de réponse χ^2 , contient des informations sur la dynamique du système hors-équilibre à cause des petites perturbations extérieure.

La fonction χ_2 apparait également dans la dissipation d'énergie du système Par conséquent le système est proche de l'équilibre.

En utilisant la définition :

$$Tr(\Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0) \mathcal{D}(t_0)) - \varphi(x, t') \varphi(y, t'') \equiv \langle \Phi(x, \tau) \Phi(y, \tau) \rangle \quad (4-62)$$

avec $\tau = t' - t''$ le théorème de dissipation - fluctuation peut être écrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \Phi(x, \tau) \Phi(y) \rangle &= e^{\beta\omega} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle \Phi(y) \Phi(x, \tau) \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\omega(\tau - i\beta)} \langle \Phi(x, \tau - i\beta) \Phi(y) \rangle \end{aligned} \quad (4-63)$$

Afin de vérifier le théorème de dissipation -fluctuation sur nos approximations pour les fonctions de corrélation à deux points, il suffit donc de vérifier que l'équation (4-55) $\Delta t = \tau$, est équivalente à l'équation (4-56) pour $\Delta t = \tau - i\beta$ ce qui peut être fait facilement.

A l'équilibre, l'équation (3-96) pour la fonction de Green retardée à deux champs dans la phase symétrique est donnée par :

$$\chi_{\Phi\Phi}(\mathbf{p}, t', t'') = -\theta(t' - t'') \frac{1}{\omega_p} \sin \omega_p(t' - t'') \quad (4-64)$$

6-La fonction à quatre points

La fonction de réponse $\Pi_R(q^2, t', t'')$

Quand on couple une source $J^{\Phi\Phi}(x, y, t)$ à l'opérateur $\Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0)$, la variation de $G(x, y, t') = Tr(\Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0) \mathcal{D}(t_0))$ en présence de la source s'écrit :

$$\delta G(x, y, t') = \int_{t_0}^{+\infty} dt'' \int d^3z d^3u \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(x, y, z, u, t', t'') J^{\Phi\Phi}(z, u, t'') \quad (4-65)$$

Où $\chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}$ est la fonction de Green retardée à quatre opérateurs champs définie dans l'équation

(3-99). En présence d'une source de type :

$$J^{\Phi\Phi}(x_1, x_2, t') = J^{\Phi\Phi}(t'') e^{-iq \cdot x_1} \delta^3(x_1 - x_2) , \quad (4-66)$$

on a :
$$\delta G(x, y, t') = \int_{t_0}^{+\infty} dt'' J^{\Phi\Phi}(t'') \int d^3 z e^{-iq \cdot z} \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(x, y, z, z, t', t'') \quad (4-67)$$

En introduisant la transformée de Fourier, nous obtenons pour $x = y$:

$$\delta G(x, x, t') = e^{-iq \cdot x} \int dt'' J^{\Phi\Phi}(t'') \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(\mathbf{k}, -\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q} - \mathbf{p}_1, t', t'') \quad (4-68)$$

La fonction de polarisation Π_R est définie comme :

$$\Pi_R(q^2, t', t'') \equiv \frac{\delta G(x, x, t')}{e^{-iq \cdot x} \delta J^{\Phi\Phi}(t'')} \Big|_{J^{\Phi\Phi}=0} \quad (4-69)$$

$$\Pi_R(q^2, t', t'') = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \chi_{\Phi\Phi, \Phi\Phi}(\mathbf{k}, -\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q} - \mathbf{p}_1, t', t'') \quad (4-70)$$

Dans le cas statique $\Pi_R(q^2, t', t'')$ ne dépend que de $\Delta t = t' - t''$ et elle est proportionnelle à $\theta(t' - t'')$. On définit ainsi sa transformée de Fourier dans le temps par :

$$\tilde{\Pi}_R(q^2, \omega) = \int_0^{+\infty} d(\Delta t) e^{i\omega \Delta t + \epsilon \Delta t} \Pi_R(q^2, \Delta t) \quad (4-71)$$

La fonction de polarisation $\Pi_R(q^2, t', t'')$, peut être reconnue comme la transformée de Fourier par rapport à $x - y$ et de la fonction de Green retardée pour les opérateurs $\Phi^2(x)$ et $\Phi^2(y)$:

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi^2, \Phi^2}(x, x, y, y, t', t'') = \\ -i\theta(t' - t'') Tr([\Phi^H(x, t', t_0) \Phi^H(x, t', t_0), \Phi^H(y, t'', t_0) \Phi^H(y, t'', t_0)] \mathcal{D}(t_0)) \end{aligned} \quad (4-72)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned} \chi_{\Phi^2, \Phi^2}(q^2, t', t'') &= \int d^3 x e^{-iq \cdot (x-y)} \chi_{\Phi^2, \Phi^2}(x, x, y, y, t', t'') \\ &= \Pi_R(q^2, t', t'') \end{aligned} \quad (4-73)$$

Cette fonction est directement liée à la "viscosité" dans la théorie Φ^4 . Dans la représentation spectrale :

$$\chi_{\Phi^2, \Phi^2}(p, p_0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \frac{\rho_{\Phi^2, \Phi^2}(p, \omega)}{p_0 - \omega + i\epsilon}, \quad (4-74)$$

La viscosité est définie :

$$\eta_{\Phi^2, \Phi^2} = \lim_{p, p_0 \rightarrow 0} \frac{\rho_{\Phi^2, \Phi^2}(p, p_0)}{p_0} \quad (4-75)$$

Les calculs de η_{Φ^2, Φ^2} ont été faits dans la limite de haute température et les résultats ont été comparés à l'approximation classique [14].

Nous allons commencer par le calcul de la fonction de Green non-retardée :

$$\Pi(q^2, t', t'') \equiv \frac{1}{2} \frac{\delta \Sigma_{11}^{\zeta}(x, x, t')}{e^{-iq \cdot x} \delta J^{\Phi\Phi}(t'')} \Big|_{J^{\Phi\Phi}=0} \quad (4-76)$$

On peut écrire la fonction de Green non-retardée avec la fonction à quatre points $\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}$:

$$\Pi(\mathbf{q}^2, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') = i \frac{1}{2} \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 \mathbf{p}_1}{(2\pi)^3} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{k}, -\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{p}_1, \mathbf{q} - \mathbf{p}_1, \mathbf{t}', \mathbf{t}'') \quad (4-77)$$

Dans la suite nous allons montrer les différentes approximations de la fonction de Green non-retardée $\Pi(\mathbf{q}^2, \mathbf{t}', \mathbf{t}'')$.

Résolution des équations dynamiques pour des valeurs complexes du temps

Dans la phase symétrique, nous avons pour $t_0 + i\beta \leq t \leq t_0$:

$$i \frac{d}{dt} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\Sigma \mathbf{p}_i, \mathbf{t}, \mathbf{t}'') = -\Sigma_{12}^{\Phi\Phi} - \Sigma_{21}^{\Phi\Phi} \quad (4-78)$$

$$i \frac{d}{dt} \Sigma_{12}^{\Phi\Phi} = \bar{g}_0(-\mathbf{p}_2) \Sigma_{11}^{\Phi\Phi} - \Sigma_{22}^{\Phi\Phi} - \frac{b}{4} \bar{\Xi}_{11}^0(-\mathbf{p}_1) I \quad (4-79)$$

$$i \frac{d}{dt} \Sigma_{12}^{\Phi\Phi} = \bar{g}_0(\mathbf{p}_1) \Sigma_{11}^{\Phi\Phi} - \Sigma_{22}^{\Phi\Phi} - \frac{b}{4} \bar{\Xi}_{11}^0(\mathbf{p}_2) I \quad (4-80)$$

$$i \frac{d}{dt} \Sigma_{22}^{\Phi\Phi} = \bar{g}_0(-\mathbf{p}_2) \Sigma_{21}^{\Phi\Phi} + \bar{g}_0(\mathbf{p}_1) \Sigma_{12}^{\Phi\Phi} \quad (4-81)$$

avec :

$$I = \int_{\mathbf{p}_4 + \mathbf{p}_5 = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2} \frac{d^3 \mathbf{p}_4}{(2\pi)^3} \frac{d^3 \mathbf{p}_5}{(2\pi)^3} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_4, \mathbf{p}_5, \mathbf{p}_3, -\Sigma \mathbf{p}_i, \mathbf{t}, \mathbf{t}'') \quad (4-82)$$

Nous allons utiliser une expansion perturbative où nous négligeons le terme de boucle $\frac{b}{4} \bar{\Xi}_{11}^0(\mathbf{p}_2) I$. Cette expansion ne sera valable que si :

$$\frac{b}{4} \coth \frac{\beta m(\beta)}{2} \ll 1 \quad (4-83)$$

Où $m(\beta)$ est la masse self-consistent définie par :

$$m^2(\beta) = m_0^2 + \frac{b}{4} \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{2\sqrt{p^2 + m^2(\beta)}} \coth \left(\frac{\beta}{2} \sqrt{p^2 + m^2(\beta)} \right) \quad (4-84)$$

Pour une température nulle, la condition (4-83) devient : $\frac{b}{4} \ll 1$. A haute température on a : $\frac{b}{2} \ll \beta m(\beta)$ avec $m^2(\beta) = \tilde{m}^2 + \frac{b}{24\beta^2}$.

La solution du système (4-78)-(4-81) pour un ordre plus bas on élimine seulement le terme de boucle I .

Les éléments de la matrice $\Sigma_{ij}^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}_0, \mathbf{t}'')$ sont en fonction des termes $I_{ij}^{\Phi\Phi}$ et à partir de la solution du système $I_{ij}^{\Phi\Phi}(\mathbf{t}'', \mathbf{t}_0)$ (4-85)-(4-88), nous obtenons finalement une approximation pour la fonction à deux temps et quatre points $\Sigma_{11}^{\Phi\Phi}$.

Les équations dynamique pour les éléments de $l^{\Phi\Phi}$ dans la phase symétrique

$$i \frac{d}{dt} l_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{k}, -\mathbf{q} - \mathbf{k}, \mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i + \mathbf{q}, t'', t) = -g_0(\mathbf{k})l_{21}^{\Phi\Phi} - g_0(\mathbf{q} + \mathbf{k})l_{12}^{\Phi\Phi} + J \quad (4-85)$$

$$i \frac{d}{dt} l_{12}^{\Phi\Phi} = l_{11}^{\Phi\Phi} - g_0(\mathbf{k})l_{22}^{\Phi\Phi} \quad (4-86)$$

$$i \frac{d}{dt} l_{21}^{\Phi\Phi} = l_{11}^{\Phi\Phi} - g_0(\mathbf{q} + \mathbf{k})l_{22}^{\Phi\Phi} \quad (4-87)$$

$$i \frac{d}{dt} l_{22}^{\Phi\Phi} = l_{12}^{\Phi\Phi} + l_{21}^{\Phi\Phi} \quad (4-88)$$

Avec les conditions : $l_{11}^{\Phi\Phi}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3, -\sum \mathbf{p}_i, t, t) = -\frac{1}{2}[\delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3) + \delta^3(\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_3)]$

$$J = \frac{b}{4} \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p} \coth\left(\frac{\beta\omega_p}{2}\right) [l_{12}^{\Phi\Phi}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q} + \mathbf{p}, \mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i + \mathbf{q}, t'', t) + l_{21}^{\Phi\Phi}(-\mathbf{p}, -\mathbf{q} + \mathbf{p}, \mathbf{p}_i, -\mathbf{p}_i + \mathbf{q}, t'', t)] \quad (4-89)$$

Lorsque nous négligeons les termes de boucle I est J dans les systèmes dynamiques de $\Sigma^{\Phi\Phi}$ et $l^{\Phi\Phi}$ pour $t > t_0$, nous retrouvons le théorème de Wick comme il se doit. Nous soulignons que nous avons négligé les interactions qui apparaissent dans les termes I est J , mais les interactions restent dans les fréquences ω_k . Cela implique que la masse de self-consistent $m(\beta)$ est renormalisée, pour ce cas la on a la fonction de polarisation (fonction de Green retardée)

$\Pi_R(q^2, t', t'')$ à l'ordre zéro

$$\Pi_R^{(0)}(q^2, t', t'') = -\theta(t' - t'') \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p \omega_{p+q}} \left[\coth \frac{\beta\omega_p}{2} \cos \omega_p \Delta t \sin \omega_{p+q} \Delta t + \coth \frac{\beta\omega_{p+q}}{2} \cos \omega_{p+q} \Delta t \sin \omega_p \Delta t \right] \quad (4-90)$$

Sa transformée de Fourier en temps :

$$\Pi_R^{(0)}(q^2, \omega) = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p \omega_{p+q}} \left[(n_{p+q} + n_p + 1) \frac{\omega_{p+q} + \omega_p}{(\omega + i\eta)^2 - (\omega_{p+q} + \omega_p)^2} - (n_{p+q} - n_p) \frac{\omega_{p+q} - \omega_p}{(\omega + i\eta)^2 - (\omega_{p+q} - \omega_p)^2} \right] \quad (4-91)$$

Résolution des équations dynamiques avec les termes d'interaction I et J au premier ordre

L'approximation de la fonction $\Pi(q^2, t', t'')$ est donnée par :

$$\Pi(q^2, t', t'') = i \frac{1}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \Sigma_{11}^{\Phi\Phi}(k, -q - k, p_1, q - p_1, t', t'') \quad (4-92)$$

$$\text{Ou } \Pi(q^2, t', t'') = -\frac{i}{2} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \text{tr}[l^{\Phi\Phi}(p + q, -p, k, -q - k, t', t_0) \Sigma^{\Phi\Phi}(p, -p - q, p_1, q - p_1, t_0, t'')] \quad (4-93)$$

Et pour trouver les résultats exactes il faut résoudre le système d'équation de $l^{\Phi\Phi}$ en tenant compte du terme de boucle J

L'approximation de la fonction $\Pi(q^2, t', t'')$ de premier ordre

$$\begin{aligned} \Pi_R^{(1)}(q^2, t', t'') = & -\theta(t' - t'') \frac{b}{4} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p \omega_{p+q}} \left[(n_{p+q} + n_p + 1) \sin \Omega_1 \Delta t \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k \omega_{k-1}} \left[(n_{q-k} + \right. \right. \\ & n_k + 1) \frac{\Omega_3}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} - (n_{q-k} - n_k) \frac{\Omega_4}{\Omega_1^2 - \Omega_4^2} \left. \right] - (n_{p+q} - n_p) \sin \Omega_2 \Delta t \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k \omega_{q-k}} \left[(n_{q-k} + n_k + \right. \\ & \left. \left. 1) \frac{\Omega_3}{\Omega_2^2 - \Omega_3^2} - (n_{q-k} - n_k) \frac{\Omega_4}{\Omega_2^2 - \Omega_4^2} \right] \right] \end{aligned} \quad (4-92)$$

Avec :

$$\Omega_1 = \omega_{p+q} + \omega_p \quad \Omega_2 = \omega_{p+q} - \omega_p \quad (4-93)$$

$$\Omega_3 = \omega_{q-k} + \omega_k \quad \Omega_4 = \omega_{q-k} - \omega_k \quad (4-94)$$

Et $\Delta t = t' - t''$

En prenant sa transformée de Fourier en temps en ajoutant le terme à l'ordre zéro et le terme du premier ordre, on obtient :

$$\begin{aligned} \Pi_R(q^2, \omega) = & \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_p \omega_{p+q}} \left[(n_{p+q} + n_p + 1) \frac{\Omega_1}{(\omega + i\eta)^2 - \Omega_1^2} \left(1 + \frac{b}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k \omega_{k-1}} \left[(n_{q-k} + n_k + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 1) \frac{\Omega_3}{\Omega_1^2 - \Omega_3^2} - (n_{q-k} - n_k) \frac{\Omega_4}{\Omega_1^2 - \Omega_4^2} \right] \right) - (n_{p+q} - n_p) \frac{\Omega_2}{(\omega + i\eta)^2 - \Omega_2^2} \left(1 + \frac{b}{4} \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_k \omega_{q-k}} \left[(n_{q-k} + n_k + \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. 1) \frac{\Omega_3}{\Omega_2^2 - \Omega_3^2} - (n_{q-k} - n_k) \frac{\Omega_4}{\Omega_2^2 - \Omega_4^2} \right] \right) \right] \end{aligned} \quad (4-95)$$

En général la fonction de réponse caractérise la réponse linéaire à une perturbation et puisque la fonction de réponse est complexe, notons que la réponse est déphasée par rapport à l'excitation. Lorsqu'un système est mis dans une situation (faiblement) hors-équilibre la fonction de réponse dynamique coïncidant avec une fonction de corrélation d'équilibre, caractérise la façon dont le système réagit lorsqu'il est soumis à une perturbation extérieure.

Dans le cas statique la fonction de réponse est également appelée fonction de réponse isotherme puisqu'elle décrit une situation où le système est maintenu à une température T . Elle décrira également des situations où la force varie lentement dans le temps sur des échelles de temps plus grandes. La situation inverse doit être décrite par une fonction de réponse dynamique.

Chapitre V

Application :

Dynamique de l'inflation dans une
métrique de De Sitter.

1-Introduction

Après avoir étudié les équations TDHFB dans un espace -temps plat pour un champ scalaire en self-interaction, nous étudions dans ce chapitre un champ de bosons O(1) dans un espace-temps de De Sitter en dimension D. Nous dérivons les équations TDHFB et nous vérifions la procédure de renormalisation qui reste valable lorsque $\langle \Phi \rangle \neq 0$.

2-Les équations TDHFB

Nous considérons un champ bosoniques O(1) à D dimension, dans un espace-temps décrit par la métrique :

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)dx^2 \quad (5-1)$$

Où $a(t)$ est le facteur d'échelle de l'univers, pour un espace-temps de De Sitter on a $a(t) = e^{\chi t}$, où χ est le taux d'expansion de l'univers ($H = \frac{\dot{a}}{a} = \chi = cte$). La dynamique exacte du champ Φ est gouvernée par l'action :

$$S = \int dx^D L, \quad (5-2)$$

$$L = e^{D\chi t} \left[\frac{1}{2} \dot{\Phi}^2 - \frac{1}{2} e^{-2\chi t} |\nabla \Phi|^2 - V(\Phi) \right] \quad (5-3)$$

Nous considérons dans ce qui suit un potentiel quartique de type :

$$V(\Phi) = \frac{1}{2} (m^2 + gR) \Phi^2 + \frac{\lambda}{4!} \Phi^4, \quad (5-4)$$

Où R est le scalaire de Ricci $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$. Le tenseur de Ricci $R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}$ se calcule à partir de la trace partielle du tenseur de Riemann :

$$R^\lambda_{\mu\nu\rho} = \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\nu}}{\partial x^\rho} - \frac{\partial \Gamma^\lambda_{\mu\rho}}{\partial x^\nu} + \Gamma^\eta_{\mu\nu} \Gamma^\lambda_{\rho\eta} - \Gamma^\eta_{\mu\rho} \Gamma^\lambda_{\nu\eta}, \quad (5-5)$$

$\Gamma^\lambda_{\mu\nu}$ Étant les symboles de Christoffel. On trouve aisément :

$$R = D(D+1) \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = D(D+1) \chi^2. \quad (5-6)$$

Introduisant le nouveau champ $\tilde{\Phi} = e^{D\chi t/2} \Phi$. La densité lagrangienne devient alors (en supprimant le tilda).

$$L = \frac{1}{2} \dot{\tilde{\Phi}}^2 - \frac{1}{2} e^{-2\chi t} |\nabla \tilde{\Phi}|^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{D^2 \chi^2}{4} - m^2 - gR \right] \tilde{\Phi}^2 - \frac{\lambda}{4!} e^{-D\chi t} \tilde{\Phi}^4, \quad (5-7)$$

La densité hamiltonienne du système :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} \Pi^2 + \frac{1}{2} e^{-2\chi t} |\nabla \tilde{\Phi}|^2 + \frac{1}{2} \left[-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right] \tilde{\Phi}^2 + \frac{\lambda}{4!} e^{-D\chi t} \tilde{\Phi}^4, \quad (5-8)$$

Pour obtenir une dynamique approchée du champ Φ , nous utilisons le principe variationnel BV, en prenant pour $\mathcal{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ les ansätze. Cela nous conduit aux équations TDHFB qui s'obtiennent de la même façon au chapitre 3.

La densité d'énergie est donnée par : $\mathcal{E}(x, t) = Tr(\mathcal{D}(t)\mathcal{H}(x, t))$. On trouve alors aisément :

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(x, t) = & \frac{1}{2} [S(x, x, t) + \pi^2(x, t)] - \frac{1}{2} e^{-2\chi t} \nabla_x^2 [-G(x, y, t)|_{x=y} + \varphi^2(x, t)] \\ & + \frac{1}{2} \left[-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right] (G(x, x, t) + \varphi^2(x, t)) \\ & + \frac{\lambda}{4!} e^{-D\chi t} [3G^2(x, x, t) + 6G(x, x, t)\varphi^2(x, t) + \varphi^4(x, t)]\end{aligned}\quad (5-9)$$

Où $\varphi = \langle \Phi \rangle$, $\pi = \langle \Pi \rangle$, $S = \langle \overline{\Phi\Phi} \rangle$ et $G = \langle \overline{\Pi\Pi} \rangle$, $T = \langle \overline{\Phi\Pi} + \overline{\Pi\Phi} \rangle$.

$$\dot{\varphi}(x, t) = \pi(x, t), \quad (5-10a)$$

$$\dot{\pi}(x, t) = - \left[-e^{-2\chi t} \nabla_x^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right) + \frac{\lambda}{3!} e^{-D\chi t} (3G + \varphi^2(x, t)) \right] \varphi(x, t), \quad (5-10b)$$

$$\dot{G}(x, y, t) = T(x, y, t), \quad (5-10c)$$

$$\dot{S}(x, y, t) = - \left[e^{-2\chi t} \nabla_x^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} (G(x, x, t) + \varphi^2(x, t)) \right] T(x, x, t), \quad (5-10d)$$

$$\begin{aligned}\dot{T}(x, y, t) = & -2 \left[e^{-2\chi t} \nabla_x^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} (G(x, x, t) + \varphi^2(x, t)) \right] G(x, y, t) + \\ & 2S(x, y, t).\end{aligned}\quad (5-10e)$$

On diagonalise les noyaux φ, π, G, S et T dans l'espace des impulsions :

$$\begin{aligned}G(x - y, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} G(k, t) \\ S(x - y, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} S(k, t), \\ T(x - y, t) &= \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} e^{-ik(x-y)} T(k, t), \text{ Avec } \int_k = \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3}\end{aligned}\quad (5-11)$$

l'invariance par translation de la théorie permet de récrire ces équations (TDHFB) sous la forme :

$$\dot{\varphi}(t) = \pi(t), \quad (5-12a)$$

$$\dot{\pi}(t) = - \left[\left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right) + \frac{\lambda}{3!} e^{-D\chi t} \left(3 \int_k G(k, t) + \varphi^2(t) \right) \right] \varphi(t), \quad (5-12b)$$

$$\dot{G}(P, t) = T(P, t), \quad (5-12c)$$

$$\dot{S}(p, t) = - \left[e^{-2\chi t} P^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + m^2 + gR \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} \left(\int_k G(k, t) + \varphi^2(t) \right) \right] T(p, t), \quad (5-12d)$$

$$\dot{\mathbf{T}}(\mathbf{P}, t) = -2 \left[e^{-2\chi t} \mathbf{P}^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} \left(\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right) \right] \mathbf{G}(\mathbf{P}, t) + 2\mathbf{S}(\mathbf{P}, t). \quad (5-12e)$$

Les divergences de ces équations apparaissent dans le terme $\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t)$, d'après la théorie du champ moyen, nous savons que le paramètre de Heisenberg $\mathbf{I} = 4\mathbf{GS} - \mathbf{T}^2$ est conservé. On peut donc éliminer une variable (soit $\mathbf{S}$) des équations :

$\mathbf{S} = \frac{1}{4} \mathbf{G}^{-1}(\mathbf{I} + \mathbf{T}^2)$. En posant et $\mathbf{r} = \frac{1}{4} \mathbf{G}^{-1} \mathbf{T}$, les équations (14-a,b,c et d) deviennent :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\pi}(t), \quad (5-13a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = - \left[\left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} \right) + \frac{\lambda}{3!} e^{-D\chi t} \left(3 \int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right) \right] \boldsymbol{\varphi}(t), \quad (5-13b)$$

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, t) = 4\mathbf{G}(\mathbf{p}, t) \Gamma(\mathbf{p}, t), \quad (5-13c)$$

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{8} \mathbf{G}^{-2} - 2\Gamma^2 - \frac{1}{2} \left[e^{-2\chi t} \mathbf{P}^2 + \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} \left(\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right) \right], \quad (5-13d)$$

On introduit la masse effective dépendant du temps :

$$\mu^2(t) = \left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} \left(\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right) \quad (5-14)$$

Les équations TDHFB deviennent dans notre cas :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\pi}(t), \quad (5-15a)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = - \left[\mu^2(t) - \frac{\lambda}{3} e^{-D\chi t} \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right] \boldsymbol{\varphi}(t), \quad (5-15b)$$

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, t) = 4\mathbf{G}\Gamma(\mathbf{p}, t), \quad (5-15c)$$

$$\dot{\Gamma}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{8} \mathbf{G}^{-2} - 2\Gamma^2 - \frac{1}{2} [e^{-2\chi t} \mathbf{P}^2 + \mu^2(t)], \quad (5-15d)$$

3-Renormalisabilité des équations TDHFB

Nous allons étudier la renormalisabilité des équations (5-15). Pour cela nous récrivons $\mathbf{G}$ sous forme d'une équation du second ordre :

$$\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, t) = \left(\frac{1}{2\mathbf{G}(\mathbf{p}, t)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathbf{G}}^2(\mathbf{p}, t)}{\mathbf{G}(\mathbf{p}, t)} - 2[e^{-2\chi t} \mathbf{P}^2 + \mu^2(t)] \mathbf{G}(\mathbf{p}, t), \quad (5-16)$$

De même les équations (5-15 a, b) :

$$\ddot{\boldsymbol{\varphi}}(t) + \left[\left(-\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} \right) + \frac{\lambda}{3!} e^{-D\chi t} \left(3 \int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right) \right] \boldsymbol{\varphi}(t) = 0, \quad (5-17)$$

Commençons par analyser les divergences ultraviolettes qui apparaissent dans l'intégrale $\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t)$, pour ce faire nous considérons la quantité suivante :

$$\varrho^2(t) = -\frac{D^2 \chi^2}{4} + \mathbf{m}^2 + \mathbf{gR} + \frac{\lambda}{3!} e^{-D\chi t} \left(3 \int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \varphi^2(t) \right) \quad (5-18)$$

Pour éliminer les infinités de $\varrho^2(t)$, nous allons éliminer les divergences par le choix d'un vide adiabatique tel que le taux d'expansion χ soit plus petit que la fréquence effective

$\omega_{\mathbf{k}} = \sqrt{e^{-2\chi t} \mathbf{k}^2 + \beta^2(t)}$ [30]. Le vide adiabatique dans l'approximation gaussienne est donné par le comportement asymptotique :

$$\mathbf{G}(\mathbf{k}, t) \cong \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{e^{-2\chi t} \mathbf{k}^2 + \beta^2(t)}}, \quad (5-19)$$

Où $\beta^2(t)$ est une masse effective qui fixe la condition de renormalisation. Le comportement ultraviolet de l'intégrale $\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t)$ dans l'équation(21) est donné par l'expression

$$\frac{\lambda}{2} e^{-D\chi t} \int_{\mathbf{k}} \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{e^{-2\chi t} \mathbf{k}^2 + \beta^2(t)}}, \quad (5-20)$$

En introduisant le moment physique $\mathcal{P} = e^{-\chi t} \mathbf{k}$, ce comportement ultraviolet est identique à celui du vide de Minkowski, en prenant I tendant rapidement vers 1

$$\frac{\lambda}{2} \int_{\mathcal{P}} \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{\mathcal{P}^2 + \beta^2(t)}}, \quad (5-21)$$

Dans ce cas la, il faut considérer un univers en faible expansion. La prescription [15] renormalise la masse et la constante de couplage $\mathbf{m}$ et λ . Pour $D=3$ elle s'écrit :

$$\frac{\mathbf{m}^2}{\lambda} = \frac{\mathbf{m}_R^2}{\lambda_R} - 2\mathfrak{J}_1, \quad \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda_R} - 2\mathfrak{J}_2(\mathbf{M}), \quad \mathbf{g}_R = \mathbf{g}(1 - 2\lambda_R \mathfrak{J}_2(\mathbf{M})) + \frac{\lambda_R}{3} \mathfrak{J}_2, \quad (5-22)$$

avec : $\mathfrak{J}_1 = \int_{\mathcal{P}} \frac{1}{2|\mathcal{P}|},$

$$\mathfrak{J}_2(\mathbf{M}) = \frac{1}{M^2} \int_{\mathcal{P}} \left[\frac{1}{2|\mathcal{P}|} - \frac{\sqrt{I}}{2\sqrt{\mathcal{P}^2 + \mathbf{M}^2(t)}} \right], \quad (5-23)$$

Où $\mathfrak{J}_1$ possède une divergence quadratique et $\mathfrak{J}_2(\mathbf{M})$ possède une divergence logarithmique[4]. $\mathbf{M}$ est une masse de renormalisation. On trouve la masse effective renormalisée qui s'écrit :

$$\varrho^2(t) = \mathbf{m}_R^2 + \chi^2 \left[-\frac{9}{4} + 12\mathbf{g}_R + \frac{\lambda_R}{2} \mathfrak{J}_1(\mathbf{M}) \right] - \frac{\lambda_R}{2} [\mathfrak{J}_1(\mathbf{M}) - \varrho^2(t) \mathfrak{J}_2(\mathbf{M}) - e^{-3\chi t} \int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t)] + \frac{\lambda}{3!} e^{-3\chi t} \quad (5-24)$$

A grand moment $\mathcal{P}$, on trouve :

$$\varrho^2(t) = \mathbf{m}_R^2 + \chi^2 \left(-\frac{9}{4} + 12\mathbf{g}_R \right) - \frac{\lambda_R}{2} \left(\frac{-\varrho^2 + \beta^2 - \frac{\chi^2}{4}}{4\mathcal{P}^3} + \text{termes finis} \right) + \frac{\lambda}{3!} e^{-3\chi t} \varphi^2(t), \quad (5-25)$$

On peut dire que ϱ^2 est fini si et seulement on a, $\beta^2 = \varrho^2 + \frac{\chi^2}{4}$ (5-26)

Pour la renormalisation de μ^2 , on suit le même cheminement que précédemment ce qui donne

$$\mu^2(t) = m_R^2 + \chi^2 \left(-\frac{9}{4} + 12g_R \right) - \frac{\lambda_R}{2} \left(\frac{-\varrho^2 + \beta^2 - \frac{\chi^2}{4}}{4\mathcal{P}^3} + \text{termes finis} \right) + \frac{\lambda}{2} e^{-3\chi t} \varphi^2(t), \quad (5-27)$$

La procédure de renormalisation n'est pas affectée par la présence d'une valeur moyenne non-nulle du champ Φ .

Les équations TDHFB n'auront de véritable sens physique qu'après avoir vérifié qu'elles sont finies, ou on élimine les divergences qui peuvent éventuellement apparaître. Nous avons étudié la renormalisation de ces équations dans un espace-temps de De Sitter pour un champ scalaire $O(1)$ en self-interaction quartique, couplé à la gravité. On a donc renormalisée les équations TDHFB en espace courbe pour un Hamiltonien couplé à la gravité et en self-interaction. Cette renormalisation est la même que celle en espace plat, à condition de faire l'hypothèse d'un univers en faible expansion.

Chapitre VI

CMBR et les paramètres cosmologiques

1-Introduction

Dans ce chapitre nous étudions le fond diffus cosmologie (CMBR) car il a une importance majeure pour la cosmologie. Il constitue la plus ancienne image de l'univers dont nous disposons, il a un spectre de corps noir parfait son intensité est la même dans toutes les directions à 10^{-5} près. Les faibles écarts à l'isotropie sont très riches en informations.

À partir des spectres de puissances on extrait les paramètres cosmologiques (dans le cadre d'un modèle donné). L'idée est maintenant de tenter de comprendre les fluctuations du CMBR en utilisant le formalisme variationnel de BV et les équations approchées qui en découlent. Ces fluctuations sont à l'origine des perturbations cosmologiques qui sont la cause des grandes structures de l'univers. Pour expliquer l'existence de fluctuation primordiales de densité, on utilise l'inflation qui suppose que l'univers a traversé une phase d'expansion exponentielle au cours de laquelle les inévitables fluctuations quantiques microscopiques se sont dilatées jusqu'à des tailles macroscopiques.

2- Les paramètres cosmologiques

La dynamique de l'univers à grande échelle est régie par la gravitation, décrite par la théorie de la Relativité d'Einstein qui lie le contenu énergétique de l'univers à la géométrie de l'espace temps. L'isotropie et l'homogénéité de l'univers conduit au choix de la métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW) :

$$ds^2 = dt^2 - a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1-kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 \right] \quad (6-1)$$

Où $a(t)$ un facteur d'échelle, et r est désigne une coordonnée de distance sans dimension, k est l'indice de courbure. L'évolution de l'univers est donnée par les équations de Friedmann :

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3} \rho + \frac{\Lambda}{3} - \frac{k}{a^2} \quad (6-2)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (6-3)$$

Où $H = 100h = \frac{\dot{a}}{a} \text{ km} \cdot \text{sec}^{-1}, \text{Mpc}^{-1}$ est le paramètre de Hubble. On définit également le rayon de Hubble $R_H = \frac{c}{H^{-1}}$ qui est une longueur caractéristique de l'Univers.

Les équations 2 et 3 font intervenir le paramètre Λ : la constante cosmologique. L'équation 3 montre que le terme $(\rho + 3p)$, relatif au contenu énergétique de l'Univers, joue un rôle attractif et tend à freiner l'expansion alors que le terme $\Lambda > 0$, tend à l'accélérer. À partir de ces deux équations on obtient l'équation de conservation de l'énergie :

$$\dot{\rho} + 3\frac{\dot{a}}{a}(\rho + p) = 0 \quad (6-4)$$

Supposons à présent $\Lambda = 0$. On un Univers plat, ρ prend la valeur particulière :

$$\rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G} \quad (6-5)$$

que l'on nomme densité critique, en ce sens, que l'Univers est plat, ouvert ou fermé selon que ρ est égal, inférieur ou supérieur à cette valeur, toujours si $\Lambda = 0$. On définit alors le paramètre cosmologique Ω_i relatif ou constituant i (matière baryonique, non baryonique sombre, rayonnement...), comme le rapport de sa densité à la densité critique :

$$\Omega_i = \frac{\rho_i}{\rho_c} \quad (6-6)$$

Afin de généraliser cette définition, on définit également les densités de courbure et de constante cosmologie

$$\Omega_k = -\frac{k}{a^2 H^2} \quad (6-7)$$

$$\Omega_\Lambda = -\frac{\Lambda}{3H^2} \quad (6-8)$$

En distinguant parmi les éléments qui contribuent à ρ , la matière (Ω_m) et le rayonnement (Ω_r), on réécrit alors la première équation de Friedmann (2) :

$$1 = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda + \Omega_k \quad (6-9)$$

Il est usuel de réécrire l'équation sous la forme réduite :

$$\sum_i \Omega_i + \Omega_k = 1 \quad (6-10)$$

Les contributions du rayonnement des photons **CMBR** et des neutrinos sont négligeables aujourd'hui en pratique, ainsi :

$$\Omega_0 \approx \Omega_m + \Omega_\Lambda \quad (6-11)$$

On remarque la valeur particulière $\Omega_0 = 1$ qui implique que la courbure est nulle. Conformément à la prédiction générique des modèles d'inflation.

3-Le scénario d'inflation

Le modèle cosmologique standard souffre d'un grand nombre de défaut, communément appelés les problèmes cosmologiques, comme le problème de la constante cosmologique, de la matière noire, de l'horizon, des reliques etc.

La résolution de ces problèmes passe par des théories ingénieuses, mais hautement spéculatives comme l'inflation, par l'espoir que des campagnes d'observations futures mettront de nouvelles formes de matière comme les WIMPS (Weakly Interacting Massive Particles) au d'énergie comme la quintessence, ou pourquoi pas, par une remise en question des fondements même la gravitation.

Par définition, une période dite d'inflation caractérise une variation seconde du facteur d'échelle positive. En d'autres termes, l'inflation est une expansion accélérée, nous pouvons écrire de façons équivalentes :

$$\ddot{a} > 0 \quad (6-12)$$

$$\frac{d(H^{-1}/a)}{dt} < 0 \quad (6-13)$$

$$p < -\rho/3 \quad (6-14)$$

La deuxième relation exprime que la longueur de Hubble mesurée en coordonnées curvilignes diminue. Ce n'est jamais vrai en dehors d'une période d'inflation. Les nombreux succès de la théorie du Big Bang nous montrent qu'il ne faut pas remplacer ce modèle par celui de l'inflation, mais bien considérer les deux. En fait l'inflation se termine pour laisser la place au modèle conventionnel. On peut écrire :

$$\frac{\ddot{a}}{a} \geq 0 \Rightarrow p(\rho) \leq -\frac{\rho}{3} \quad (6-15)$$

En particulier, la variation seconde du facteur d'échelle est positive pour un Univers dominé par une énergie du vide, pour laquelle :

$$p(\rho) = -\rho \text{ et } a(t) \propto e^{Ht} \quad (6-16)$$

Le modèle d'inflation suppose qu'à très grande échelle, le contenu matériel de l'Univers est dominé par un champ scalaire, l'inflaton. Toute nos considérations sur le modèle de De Sitter trouvent donc ici leur justification.

4 Les fluctuations quantiques dans l'Univers inflationnaire

L'analogie entre un trou noir et l'espace de De Sitter est également utile pour étudier les effets quantiques de la période inflationnaire. Il est bien connu, par exemple que les trous noirs s'évaporent en émettant des radiations à la température de Hawking $T_H = \frac{M_p^2}{8\pi M} = \frac{1}{4\pi r_g}$, où M est la masse du trou noir [16]. Un phénomène similaire existe dans l'espace de de Sitter, où un observateur se sent comme s'il était dans un bain thermique à une température $T_H = H/2\pi$.

Du point de vue géométrique l'espace-temps de De Sitter, à courbure constante positive s'écrit dans le système de coordonnées $(\bar{t}, \chi, \theta, \varphi)$ avec $0 \leq \chi \leq \pi$:

$$ds^2 = dt^2 - H^{-2} \cosh^2 Ht [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (6-17)$$

On substitue t par $i\tau$, afin de faire la transition à la formulation euclidienne de la théorie quantique des champs en espace de De Sitter, la métrique devient celle des sphères S^4 ,

$$-ds^2 = d\tau^2 + H^{-2} \cos^2 H\tau [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \quad (6-18)$$

Les champs bosoniques sur une sphère sont périodiques en τ , avec une période de $\frac{2\pi}{H}$, ce qui équivalent à des résultats de statistique quantique $T_H = \frac{2\pi}{H}$ [31]. Physiquement, l'apparition d'une température T_H en espace de De Sitter est liée à la nécessité d'une moyenne en plus au-delà de l'horizon des événements [17], [18]. Cependant, la température de l'espace de De Sitter est

anormale et la sphère S^4 euclidienne est périodique dans les quatre directions. Le spectre des fluctuations de vide se révèle tout à fait contraire au spectre habituel des fluctuations thermiques.

Une moyenne comme $\langle \Phi(\mathbf{x})\Phi(\mathbf{y}) \rangle$ et $\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle$ joue un rôle particulièrement important dans notre étude. Dans l'espace de Minkowski à une température finie T on a :

$$\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle = \frac{T}{(2\pi)^3} \sum_{\mathbf{n}=-\infty}^{\infty} \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi n T)^2 + \mathbf{p}^2 + \mathbf{m}^2} \quad (6-19)$$

Il est facile de montrer que cette moyenne sera proportionnelle à $\frac{H^2}{m^2}$, pour $\mathbf{m}^2 \ll H^2$ et $\mathbf{n} = \mathbf{0}$, est dans ce cas là on a :

$$\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2} \quad (6-20)$$

Ce résultat est obtenu par une autre méthode différente [19], [20], [21]. Le comportement de $\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle$ pour $\mathbf{m}^2 \rightarrow 0$ est remarquable, les divergences infrarouges correspondant à celle de la théorie des champs dans l'espace de De Sitter. Dans ce cas là, la quantification de champs scalaire sans masse dans l'espace de De Sitter est la même que dans l'espace de Minkowski [19], [20], [21].

L'opérateur champs scalaire $\Phi(\mathbf{x})$, on peut s'écrire sous forme :

$$\Phi(\mathbf{x}, t) = (2\pi)^{-3/2} \int d^3\mathbf{k} (e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{k}}(t) + e^{-i\mathbf{k}\mathbf{x}} \psi_{\mathbf{k}}^*(t)) \quad (6-21)$$

Il est possible de réécrire l'équation sous la forme :

$$\ddot{\psi}_{\mathbf{k}}(t) + 3H\dot{\psi}_{\mathbf{k}}(t) + k^2 e^{-2Ht} \psi_{\mathbf{k}}(t) = 0 \quad (6-22)$$

Il est important de se rappeler que la quantité $\mathbf{k}$ utilisée ici n'est pas l'impulsion physique, mais l'impulsion conjuguée aux coordonnées $\mathbf{x}$ comobiles. Cette impulsion conforme est indépendante du temps. L'impulsion physique $\mathbf{p}$ est donnée par la relation : $\mathbf{p}^2 = \mathbf{k}^2 e^{-2Ht}$

La résolution de l'équation donne la solution :

$$\psi_{\mathbf{k}}(t) = \frac{iH}{k\sqrt{2k}} \left(1 - \frac{ik}{H} e^{-Ht} \right) \exp\left(\frac{ik}{H} e^{-Ht}\right) \quad (6-23)$$

On constate que pour t suffisamment grand, $\psi_{\mathbf{k}}(t)$ n'oscille plus et reste égale à $\frac{iH}{k\sqrt{2k}}$.

Calculons à présent la valeur de $\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle$:

$$\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} |\psi_{\mathbf{k}}|^2 = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \left(\frac{e^{-eHt}}{2t} + \frac{H^2}{2k^3} \right) \quad (6-24)$$

A fin de distinguer plus clairement la signification physique de cette quantité, nous passons du $\mathbf{k}$ conforme à l'impulsion physique $\mathbf{p} = \mathbf{k} e^{-Ht}$ ceci donne,

$$\langle \Phi(\mathbf{x})^2 \rangle = \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{p} \left(\frac{1}{2} + \frac{H^2}{2p^2} \right) \quad (6-25)$$

Nous retrouvons ici le terme des fluctuations du vide qui apparaissait dans l'espace de Minkowski. Le second terme est propre à l'inflaton, il correspond à un nombre de modes,

$$\eta_k = \frac{H^2}{2p^2} \quad (6-26)$$

Cette relation nous laisse déjà entrevoir l'idée de la formation d'un état macroscopique à partir du vide (où ont seulement lieu des fluctuations quantiques) : en effet nous pouvons constater que ce nombre η_k , qui est un nombre de particules dans un certain état, augmente très fort pour des valeurs de H/p très grandes, c'est $H\lambda \gg 1$ ou encore $\lambda \gg H^{-1}$. Autrement dit, ce nombre devient énorme pour des fluctuations dont les longueurs d'onde seraient plus grandes que l'ordre de grandeur de l'horizon H^{-1} .

On en conclut donc que lorsque la taille des fluctuations devient grande par rapport à la taille de l'horizon, celles-ci cessent d'osciller et se figent. Ainsi, ces fluctuations ne se distinguent plus du fond uniforme.

On limite notre attention aux fluctuations de grande longueur, $p \leq H$ qui seront les seules importantes pour nous,

$$\begin{aligned} \langle \phi(x)^2 \rangle &\approx \frac{H^2}{2(2\pi)^2} \int_{He^{-Ht}}^H \frac{d^3p}{p} = \frac{H^2}{4\pi^2} \int_{-Ht}^0 d\ln \frac{p}{H} \\ &\equiv \frac{H^2}{4\pi^2} \int_0^{Ht} d\ln \frac{k}{H} = \frac{H^3}{4\pi^2} t \end{aligned} \quad (6-27)$$

Quand $t \rightarrow \infty$, la moyenne $\langle \phi(x)^2 \rangle$ tend vers l'infini. Un résultat semblable est obtenu pour un champ scalaire avec masse. Dans ce cas les fluctuations de grande longueur d'onde et avec $m^2 \ll H^2$ se comportent sous cette forme :

$$\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{2m^2}{3H} t\right) \right] \quad (6-28)$$

Lorsque $t \leq \frac{3H}{m^2}$, la moyenne $\langle \phi(x)^2 \rangle$ croît linéairement comme le cas du champ sans masse (6-27) et $\langle \phi(x)^2 \rangle$ tend alors vers sa valeur asymptotique,

$$\langle \phi(x)^2 \rangle = \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2} \quad (6-28-a)$$

Maintenant on donne une interprétation physique de ces résultats, tout d'abord on note que la moyenne $\langle \phi(x)^2 \rangle$ (27) vient de l'expression exponentielle pour des valeurs petites de $p \sim H \exp(-T)$, et le nombre des modes (d'occupation) (26) prend une forme exponentielle. Pour $L = |\mathbf{x} - \mathbf{y}| e^{Ht}$ grande, la fonction de corrélation $\langle \phi(\mathbf{x}) | \phi(\mathbf{y}) \rangle$ pour un champ sans masse est [32],

$$\langle \phi(\mathbf{x}) | \phi(\mathbf{y}) \rangle \approx \langle \phi(x)^2 \rangle \left(1 - \frac{1}{Ht} \ln HL \right) \quad (6-29)$$

Cela signifie que les amplitudes des champs $\phi(\mathbf{x})$ et $\phi(\mathbf{y})$ seront fortement corrélées. Les fluctuations quantiques du champ ϕ avec $p \ll H^{-1}$ se comportent d'une manière faible et non homogène (quasi classique) produit pendant l'étape inflationnaire.

Une période inflationnaire se termine avec la création de η_k modes, étant d'autant grand que la longueur d'onde de ces fluctuations est grande (ou l'impulsion faible).

Une fois cette période d'inflation terminée, la taille de l'horizon recommence à croître et, après un certain laps de temps, l'horizon redeviendra plus grand que les fluctuations considérées. A cet

instant, précis, des inhomogénéités macroscopique apparaissent dans la sphère de causalité .L'origine des grandes structures de l'Univers trouve ici un début d'explication.

5-Les perturbations cosmologiques

Dans le but de décrire l'origine des perturbations cosmologiques, nous nous plaçons dans le cadre de la théorie de l'inflation. Nous n'étudions pas les perturbations créées par les défauts topologiques. En effet, l'hypothèse de telles perturbations est défavorisée par les observations actuelles.

Nous supposons que le champ scalaire ϕ l'inflaton est homogène .En réalité, les modèles inflationnaires prévoient des fluctuations quantiques de statistique gaussienne de ce champ[22] . Au moment où les fluctuations quantiques de l'inflation sortent de l'horizon, pendant la période inflationnaire, elles sont gelées dans leur état et deviennent des fluctuations classiques .Les particules produites à la fin de l'inflation (au cours du processus appelé réchauffage ou reheating) garderont la trace des ces fluctuations. Les grandes structures se formeront grâce à l'effondrement gravitationnel des surdensités présentes.

Les fluctuations peuvent être de trois sortes différentes :

- Les fluctuations scalaires analogues à des variations de densité.
- Les fluctuations vectorielles liées à la vorticité du fluide cosmique.
- Les fluctuations tensorielles identiques à des ondes gravitationnelles.

A un Univers de densité uniforme est associée à la métrique Robertson-Walker. Si la densité s'écarte de l'uniformité, la métrique est elle aussi perturbée et prends la forme :

$$ds^2 = a(\tau)^2 \left[(1 + 2\psi) d\tau^2 - \beta_i d\tau dx^i - \left((1 - 2\phi) \delta_{ij} + 2h_{ij} \right) dx^i dx^j \right] \quad (6-30)$$

$\tau = \int \frac{dt}{a(t)}$: Le temps conforme.

δ_{ij} : La matrice identité à trois dimensions.

$\psi(x)$ et $\phi(x)$: sont des champs scalaires.

β_i : Un champ vectoriel.

h_{ij} : Un champ tensoriel.

Seules les fluctuations scalaires et tensorielles peuvent survivre à l'expansion de l'Univers. Les spectres de puissance des fluctuations scalaires et tensoriel ces sont définis par :

$$\langle g(\mathbf{k}) g(\mathbf{k}') \rangle = \frac{2\pi^2}{k^3} P_g(\mathbf{k}) \delta^3(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (6-31)$$

où g représente les fluctuations scalaires ou tensorielles. Les spectres de puissance des perturbations sont décrits dans l'approximation de roulement lent (en prenant $c = 1$):

$$P_s(\mathbf{k}) = \frac{128\pi G^3 V^3}{3(V')^2} \Big|_{aH=k} \quad (6-32)$$

où $P_S(k)$ est le spectre de puissance des fluctuations scalaires et,

$$P_T(k) = \frac{32G^2}{3} V \Big|_{aH=k} \quad (6-33)$$

le spectre de puissance des fluctuations tensorielles, k nombre d'onde $k = \frac{2\pi a}{\lambda}$ (λ la longueur d'onde physique). A noter que les fluctuations tensorielles n'ont pas encore été observées $V(\phi)$ et le potentiel du champ scalaire homogène Φ relatif à la séparation des interactions forte et électrofaible. Le spectre de puissance $P(k)$ des fluctuations est la variation des modes de Fourier (à un facteur de normalisation près) et ne dépend que de la norme de $\vec{k}$:

$$P(k) = \langle |\delta_{\vec{k}}|^2 \rangle \quad (6-34)$$

D'une façon équivalente, le spectre de puissance est la transformée de Fourier de la fonction de corrélation :

$$P(k) = \int C(r) e^{-i\vec{k}\vec{r}} d\vec{r} \quad (6-35)$$

La fonction de corrélation à deux points ne dépend que de la distance r entre les points, elle s'écrit :

$$C(r) = \langle \delta(x_1) \delta(x_2) \rangle \quad (6-36)$$

Les spectres $P_S(k)$ et $P_T(k)$ sont relativement bien décrits par les lois de puissance d'indices spectraux respectifs $n_s - 1$ et n_T :

$$P_S(k) \propto k^{n_s-1} \text{ et } P_T(k) \propto k^{n_T} \quad (6-37)$$

Ainsi, avec $n_s = 1$ et $n_T = 0$, les fluctuations sont invariantes d'échelle. L'inflation prévoit que les spectres ne sont pas tout à fait invariants d'échelle. Les valeurs des indices spectraux sont liées aux paramètres de roulement lent ϵ et η par :

$$n_s - 1 = -6\epsilon + 2\eta \quad (6-38)$$

$$n_T = -2\eta \quad (6-39)$$

Par ailleurs le rapport des spectres de puissance est :

$$\frac{P_T}{P_S} = \frac{m_{PL}^2}{4\pi} \left(\frac{V'}{V} \right)^2 = 4\epsilon \quad (6-40)$$

on définit aussi le rapport entre les fluctuations d'origine tensorielle et scalaire du CMBR,

$$r \equiv \frac{C_l^T}{C_l^S} \approx 12, 4\epsilon \quad (6-41)$$

où l'on note que les C_l^S et C_l^T sont les spectres de puissance angulaire. Ainsi l'inflation prévoit une faible contribution du mode tenseur au spectre de fluctuation de température.

5-1 Le fond diffus cosmologique

Les anisotropies du CMBR ont pour origine des fluctuations quantiques du champ de l'inflation. C'est donc par leurs propriétés statistiques que l'on peut remonter aux paramètres cosmologiques.

5-1-1 Le spectre des fluctuations

On mesure sur le ciel les fluctuations de température $\Delta T(\mathbf{n})$ par rapport à la température moyenne T_0 . Ces fluctuations résultant de processus aléatoires, ce sont leurs propriétés statistiques que l'on cherche à étudier. Dans le cas de fluctuations gaussiennes toutes l'information statistique est contenue dans la fonction de corrélation à deux points définie par :

$$C(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2) = \langle \Delta T(\mathbf{n}_1) \Delta T(\mathbf{n}_2) \rangle \quad (6-42)$$

Où $\mathbf{n}_1$ et $\mathbf{n}_2$ sont deux directions d'observations, et la moyenne $\langle . \rangle$ est une moyenne sur l'ensemble des réalisations de l'Univers. Les modèles d'inflation les plus simples prédisent des fluctuations gaussiennes, et il est donc légitime de se limiter à la fonction de corrélation à deux points. L'hypothèse d'isotropie de l'Univers implique que la corrélation ne dépend en réalité que de l'écart angulaire entre les deux directions d'observation, c'est-à-dire $\cos\theta = \mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2$ et on le note alors $C(\theta)$.

5-1-2 Les fluctuations de température

Les satellites COBE et WMAP ont mesuré les anisotropies du CMBR en mesurant sa température dans toutes les directions pour avoir une mesure précise des fluctuations de température, on ne mesure pas seulement la température entre deux directions.

On en tire la variation de température dans une certaine direction angulaire $(\theta, \phi) = \mathbf{n}$ par rapport à la température moyenne. On décompose ensuite cette variation sur les harmoniques sphériques :

$$\frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} = \sum_{l,m} a_{l,m} Y_{l,m}(\theta, \phi), \quad (6-43)$$

La fonction de corrélation peut s'écrire :

$$\left\langle \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} \frac{\Delta T(\theta', \phi')}{T} \right\rangle = \sum_{l,m} \sum_{l',m'} \langle a_{l,m} a_{l',m'}^* \rangle Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l',m'}^*(\theta', \phi'), \quad (6-44)$$

Si on note α l'angle entre les deux directions (θ, ϕ) et (θ', ϕ') , on peut introduire les polynômes de Legendre P_l reliés aux harmoniques sphériques par la relation :

$$P_l(\alpha) = \frac{4\pi}{2l+1} \sum_{m=-l}^l Y_{l,m}(\theta, \phi) Y_{l,m}^*(\theta', \phi'), \quad (6-45)$$

Pour réécrire la fonction de corrélation comme suit :

$$F_{corr} = \left\langle \frac{\Delta T(\theta, \phi)}{T} \frac{\Delta T(\theta', \phi')}{T} \right\rangle = \sum_l \frac{2l+1}{2\pi} P_l(\alpha) C_l \quad (6-46)$$

On conclut donc que la fonction de corrélation ne dépend pas des deux directions, mais que de l'angle α entre elles ; ce à quoi on s'attend dans un Univers isotrope.

En utilisant l'orthogonalité des polynômes de Legendre,

$$\int_{-1}^1 P_l(\alpha) P_{l'}(\alpha) \cos(\alpha) d\alpha = \frac{2}{2l+1} \delta_{ll'}, \quad (6-47)$$

On peut déterminer

$$C_l = 2\pi \int_{-1}^1 P_l(\alpha) F_{corr}(\alpha) \cos(\alpha) , \quad (6-48)$$

Cette formule permet de calculer C_l à partir des mesures de $F_{corr}(\alpha)$. Physiquement C_l correspond à l'amplitude du multi pole l . On représente $\frac{l(l+1)}{2\pi} C_l$ en fonction de l ; c'est ce qu'on appelle le spectre en puissance.

Pour les grandes échelles l'anisotropie de température due aux perturbations scalaires, qui est la principale contribution, est simplement proportionnelle au potentiel de Bardeen[23] :

$$\frac{\delta T(\theta, \phi)}{T} \approx \frac{1}{3} \Phi(\tau_{CMB}, x_E) \quad (6-49)$$

où τ_{CMB} est le temps conforme d'émission du CMBR et x_E est la position d'émission. Cela permet de calculer le spectre de puissance de ces anisotropes pour les grandes échelles c'est-à-dire pour les bas multipôles,

$$C_l^T = \frac{4\pi}{25} \int_0^\infty \frac{dk}{k} j_l^2(k) k^3 P_S(k) \quad (6-50)$$

où j_l est la fonction de Bessel sphérique d'ordre l .

5-1-3 FLUCTUATIONS DE DENSITE

Les spectres des perturbations du champ d'inflation génèrent à la fin de l'inflation des fluctuations de densité d'énergie de radiation $\delta_r = \delta\rho_r/\rho_r$ et de matière $\delta_m = \delta\rho_m/\rho_m$. Ces fluctuations de

densité d'énergie évoluent d'après les équations d'Einstein perturbées. On parle de fluctuations adiabatiques lorsque les conditions initiales de cette évolution conservent l'entropie $S \propto T^3 a^3$. De plus, la loi de Stephan permet d'écrire $\rho_r \propto T^4$ et aussi $\rho_m \propto a^{-3}$. On en déduit que la fluctuation d'entropie est [24],

$$\frac{\delta S}{S} \propto \frac{3}{4} \delta_r - \delta_m . \quad (6-51)$$

La conservation de l'entropie $\frac{\delta S}{S} = 0$ impose que les fluctuations de radiation et de matière, soit couplées c'est-à-dire que les deux formes d'énergie soient en équilibre. L'inflation à un champ ne produit que ce type de conditions initiales pour les fluctuations.

5-2-Ondes gravitationnelles primordiales

Nous avons vu que la détection des fluctuations de température du CMBR offre un moyen de contraindre la phase inflationnaire. Une seconde source d'informations sur les fluctuations primordiales vient des fluctuations tensorielles c'est-à-dire des ondes gravitationnelles primordiales. Il est nettement plus difficile de détecter le signal de ces fluctuations. Leur détection est cependant d'un grand intérêt pour deux raisons.

La première est qu'elle fournirait le seul test réel que l'origine des fluctuations est bien inflationnaire et non un quelconque mécanisme générant des fluctuations adiabatiques.

La seconde raison est liée à la relation entre l'échelle d'énergie à laquelle a eu lieu l'inflation et le rapport tenseur/scalaire. On peut définir un rapport tenseur/ scalaire observé défini comme le rapport des contributions scalaire et tensorielle au spectre de puissance des fluctuations de température

$$\left(\frac{T}{S}\right)_Q \equiv \frac{C_2^T}{C_2^S} \approx -f_{n_T} \approx 2f\epsilon \quad (6-52)$$

Où f est une fonction dépendant des paramètres cosmologiques, $f = f(h, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \dots)$. Ce rapport est directement mesurable mais dépend des paramètres cosmologiques. Pour un modèle cosmologique ajustant au mieux les données actuelles, c'est-à-dire un modèle possédant de la matière noire et une constante cosmologique $f = f(h, \Omega_m, \Omega_\Lambda, \dots) \approx 5$. La mesure de ce rapport donne une mesure de ϵ et donc de la valeur du paramètre de Hubble pendant l'inflation H_{inf} .

La mesure de l'amplitude absolue de l'anisotropie de température faite par COBE et WMAP ($T \approx 2,7K$)

$$\left(\frac{\delta T}{T}\right)_Q = \sqrt{\frac{5C_2}{4\pi}} \approx 6,7 \times 10^{-6} \quad (6-53)$$

Cette anisotropie est reliée au paramètre de Hubble pendant l'inflation

$$\frac{H_{inf}^2}{m_{Pl}^2} = 60\pi\epsilon \left(\frac{\delta T}{T}\right)_Q^2 \quad (6-54)$$

Ce paramètre de Hubble H_{inf} renseigne directement sur la valeur du potentiel V_{inf} pendant l'inflation grâce à l'équation de Friedmann et donc à l'échelle d'énergie à laquelle cette inflation s'est produite $M_{inf} \equiv V_{inf}^{1/4}$. Malheureusement, la détection de ces ondes gravitationnelles primordiales est très difficile. Elles sont fortement sous-dominantes dans le spectre de la température et l'effet de lentille gravitationnel est une source de bruit fond puissante dans le spectre polarisé du CMBR.

6-CMBR et les paramètres cosmologiques

Les photons du CMBR ont traversé l'Univers pour parvenir jusqu'à nous en suivant les géodésiques. Ils ont donc subi les déformations dues à sa géométrie. Le CMBR ne donne que difficilement des contraintes sur chacun des paramètres. Mais aussi ils sont également accessibles par l'étude de la supernova de type **Ia**, qui permet de sonder l'Univers sur des distances beaucoup plus petites ($z \approx 0,1 - 1$). La figure 1 montre l'ensemble des résultats récents. On voit clairement deux pics (à $l \sim 200$ et $l \sim 550$) que l'on appelle pics acoustiques.

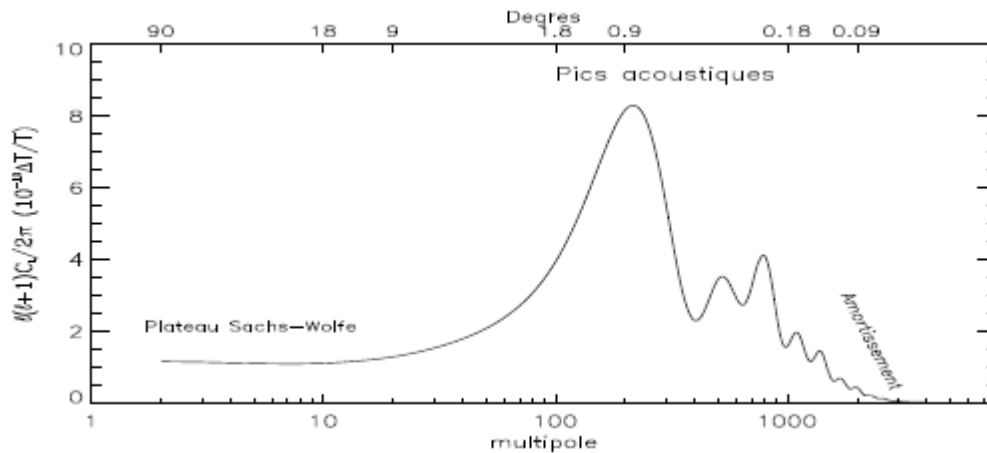


Figure 1 : Spectre de puissance angulaire en température. La puissance est tracée en fonction du multipôle l (échelle du bas) ou des échelles angulaires (échelle du haut). On distingue les trois zones principales (de gauche à droite) : le plateau Sachs-Wolfe, les pics acoustiques et la zone d'amortissement [25]

Le plateau Sachs-Wolf

Pour les échelles plus grandes que l'horizon, la physique qui ne peut être causale et les anisotropies ne peuvent provenir que des fluctuations initiales des photons (issues des fluctuations du potentiel gravitationnel) et de l'effet Sachs-Wolfe[26].

Comme le spectre des fluctuations du potentiel gravitationnel est invariant d'échelle, les fluctuations de température sont statistiquement identiques et le spectre angulaire est presque plat à la grande échelle (petits multipôle l).

Les pics acoustiques

Pour les échelles plus petites que l'horizon, dans un Univers dominé par la matière qui subit des oscillations acoustiques adiabatiques. Les baryons ont tendance à tomber dans les puits de potentiel gravitationnel. Mais les photons exercent sur eux une pression de radiations qui entre en compétition avec la force gravitationnelle. C'est ce qui conduit des oscillations acoustiques de la matière dont les photons CMBR portent l'empreinte. Le spectre de puissance reflète un déphasage sous forme de pics visibles aux échelles plus petites que l'horizon (c'est-à-dire aux multipôles $l \geq 180$).

La zone d'amortissement

A plus petites échelle angulaire, le spectre est amorti. Cet amortissement est d'abord dû à la diffusion résiduelle des photons qui efface les structures dont la taille est plus petite que leur libre parcours : c'est l'amortissement de Silk.

6-1 Contraintes sur les paramètres cosmologiques

La forme du spectre de puissance angulaire du fond diffus cosmologique dépend des paramètres cosmologiques.

Paramètre de Hubble H_0

Le paramètre de Hubble représente la vitesse relative d'expansion de l'Univers. Il est inversement lié à la distance qui nous sépare de la surface de dernière diffusion. Ainsi, si on augmente H_0 , on diminue la distance entre l'observateur et la surface de dernière diffusion. L'observateur voit donc les structures sous un angle plus grand, ce qui se traduit sur le spectre de puissance par un décalage du spectre vers les grandes échelles, c'est-à-dire les petits multipôles [27].

Densité de baryons, Ω_b

La densité de baryons joue directement sur la forme du spectre de puissance et particulièrement sur le rapport entre les amplitudes des deux pics. En effet, c'est l'empreinte de l'oscillation des baryons que l'on retrouve dans les pics du spectre du CMBR. Il est remarquable que la valeur de Ω_b mesurée grâce au CMBR ($\bar{z} \cong 1400$) soit si proche de la valeur estimée à partir de la nucléosynthèse primordiale bien avant l'évolution de l'Univers ($\bar{z} \cong 10^9$) : $\Omega_b h = 0.0200^{+0.002}_{-0.0018}$ [27].

Densité de matière, Ω_M

La forme et la hauteur des pics acoustiques sont liées à la densité de matière. En particulier, le rapport Ω_b/Ω_M détermine l'amplitude des oscillations acoustiques. En effet, par définition les photons ne sont pas couplés avec la matière noire, l'autre composante de la matière. Le rapport matière sur radiation donne également accès à z_{eq} redshift de l'égalité entre matière et rayonnement, qui détermine l'amplitude de l'effet Sachs-Wolfe intégré [27].

7-L'application du principe variationnel de Balian Vénéroni aux les photons CMBR

7-1 Equation d'évolution pour l'opérateur nombre de photons

Nous allons considérer un système quantique possédant un grand nombre de photons avec les électrons libres du milieu. Nous nous placerons dans le formalisme de la seconde quantification dans lequel l'évolution d'un tel système est décrite par l'évolution de son opérateur nombre, défini à partir des opérateurs quantiques de création et d'annihilation obéissent aux relations de commutation et anti-commutation suivantes,

$$[a_s(p), a_{s'}^\dagger(p')] = (2\pi)^3 2p^0 \delta^3(p - p') \delta_{ss'}, \quad \text{Pour les photons} \quad (6-55)$$

$$[b_r(q), b_{r'}^\dagger(q')] = (2\pi)^3 \frac{q^0}{m} \delta^3(q - q') \delta_{rr'}, \quad \text{Pour les fermions} \quad (6-56)$$

Définissons l'opérateur nombre, pour les photons dans l'espace de Fourier :

$$\mathcal{N}_{ij}(k) \equiv a_i^\dagger(k) a_j(k) \quad (6-57)$$

Nous pouvons relier la valeur de cet opérateur à la matrice de densité en appliquant de manière répétée les opérateurs de créations-annihilation :

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}) \rangle &= \text{tr}[\mathcal{D}\mathcal{N}_{ij}] = \int \frac{d^3}{(2\pi)^3} \langle \mathbf{p} | \mathcal{D}\mathcal{N}_{ij}(\mathbf{k}) | \mathbf{p} \rangle \\ &= (2\pi)^3 \delta(\mathbf{0}) 2k^0 \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{k})\end{aligned}\quad (6-59)$$

L'équation d'évolution de cet opérateur est donnée en représentation de Heisenberg par :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}_{ij} = i[H, \mathcal{N}_{ij}] \quad (6-60)$$

où H est l'Hamiltonien du système. Ce Hamiltonien peut s'écrire comme la somme d'un terme libre et d'un terme d'interaction, $H = H_0 + H_1$. Dans le cas des photons CMBR, ce terme sera décrit par l'interaction Compton entre les photons et les électrons libre du plasma.

7-2 Le principe variationnel de Balian-Vénéroni

Nous utiliserons le principe variationnel proposé par R. Balian et M. Vénéroni. Celui-ci permet le calcul de la valeur moyenne $\langle \mathcal{N} \rangle$ du nombre des photons CMBR dans un formalisme dépendant du temps. L'action $\mathcal{Z}$ introduite au chapitre (III) s'écrit, en posant $\mathcal{A} = \mathcal{N}$:

$$\mathcal{Z}(\mathcal{N}(t), \mathcal{D}(t)) = \text{Tr}(\mathcal{N}(t_0) \mathcal{D}(t_0)) + \mathcal{Z}_{dyn}$$

$$\text{Avec} \quad \mathcal{Z}_{dyn} = \text{Tr} \int_{t_0}^{\infty} dt \mathcal{D}(t) \left\{ \frac{d\mathcal{N}(t)}{dt} - i[\mathcal{N}(t), H] + i\mathcal{N}(t) \sum_j J_j(t) Q_j \right\} \quad (6-61)$$

Une fois les espaces variationnels de l'opérateur $\mathcal{N}$ et de l'opérateur densité $\mathcal{D}$ choisis, les équations du mouvement s'obtiennent par la variation sous contraintes suivante :

$$\delta(\mathcal{Z}) = 0 ; \quad \mathcal{N}(t_1) = \mathcal{N} ; \quad \mathcal{D}(t_0) = \mathcal{D} \quad (6-62)$$

Dans notre étude, on considère que l'Univers est en expansion, on prend le cas particulier d'un espace de De Sitter qui correspond au cas limite d'un espace inflationnaire. Il existe de multiples paramétrisations pour un espace de De Sitter. On garde ici la même paramétrisation pour FRW avec,

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) dx^2 \quad \text{Et} \quad a(t) = e^{xt}$$

Le principe de **B.V** fournit les équations du champ moyen pour l'opérateur densité :

$$\dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \boldsymbol{\pi}(t), \quad (64-1)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = - \left[\mu^2(t) - \frac{\lambda}{3} e^{-Dxt} \boldsymbol{\varphi}^2(t) \right] \boldsymbol{\varphi}(t), \quad (64-2)$$

$$\dot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, t) = 4\mathbf{G}\Gamma(\mathbf{p}, t), \quad (64-3)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathbf{p}, t) = \frac{1}{8} \mathbf{G}^{-2} - 2\Gamma^2 - \frac{1}{2} [e^{-2xt} \mathbf{P}^2 + \mu^2(t)], \quad (64-4)$$

Nous récrivons $\mathbf{G}$ sous forme d'une équation du second ordre :

$$\ddot{\mathbf{G}}(\mathbf{p}, t) = \left(\frac{1}{2\mathbf{G}(\mathbf{p}, t)} \right) + \frac{1}{2} \frac{\dot{\mathbf{G}}^2(\mathbf{p}, t)}{\mathbf{G}(\mathbf{p}, t)} - 2[e^{-2\chi t} \mathbf{P}^2 + \mu^2(t)] \mathbf{G}(\mathbf{p}, t) \quad (6-65)$$

Avec la masse effective :

$$\mu^2(t) = \mathbf{m}^2 - \frac{\mathbf{D}^2 \chi^2}{4} + \mathbf{gR} + \frac{\lambda}{2} e^{-\mathbf{D}\chi t} \left(\int_{\mathbf{k}} \mathbf{G}(\mathbf{k}, t) + \varphi^2(t) \right), \quad (6-66)$$

La solution de l'équation (65) est de la forme[28] :

$$\begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{a}^{(1-\mathbf{D})\chi t} \int_{\mathbf{k}} \left[\frac{1}{2\bar{\omega}_{\mathbf{k}}^3} - \frac{(\mathbf{g}-\alpha_{\mathbf{D}})\mathbf{Ra}^{2\chi t}}{4\bar{\omega}_{\mathbf{k}}^3} + \mathcal{O}(\bar{\omega}_{\mathbf{k}}^3) \right] , \text{ avec } \alpha_{\mathbf{D}} \equiv \frac{\mathbf{D}-1}{4\mathbf{D}} \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{(\mathbf{D}+1)/2}} \frac{4}{(\mathbf{D}-1)} [\mathbf{m}^{\mathbf{D}-3} \Gamma(3-\mathbf{D})] [\mathbf{m}^2 + (\mathbf{g} - \alpha_a) \mathbf{R}] + \text{un terme fini} \end{aligned} \quad (6-67-a)$$

$\Gamma(\mathbf{x})$ est la fonction Gamma.

$$\mathbf{G} = \frac{1}{(4\pi)^{(\mathbf{D}+1)/2}} \frac{4}{(\mathbf{D}-1)} \left[\frac{1}{3-\mathbf{D}} - \frac{1}{2} \left(\gamma + \ln \frac{\mathbf{m}^2}{\Lambda^2} \right) \right] [\mathbf{m}^2 + (\mathbf{g} - \alpha_a) \mathbf{R}] + \text{un terme fini} \quad (6-67-b)$$

γ est la constante de Euler et Λ une masse arbitraire. Nous considérons que l'Univers est dans le cas d'équilibre. Dans ce cas, la fonction à deux point coïncide avec la solution du champ moyen de TDHFB on remplace la solution $\mathbf{G}$ dans l'équation (2-13a) du chapitre 2 :

$$\langle \bar{\Phi}_i(\mathbf{x}) \bar{\Phi}_j(\mathbf{y}) \rangle = \left(\mathbf{G}_{\xi}^{1/2} (1 - \xi)^{-1} \mathbf{G}_{\xi}^{1/2} \right)_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \equiv \mathbf{G}_{ij}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (6-68)$$

Pour un état pur $\xi = 1$, on a la solution suivante :

$$\langle \Phi(\mathbf{x}) | \Phi(\mathbf{y}) \rangle \cong \frac{3H^4}{8\pi^2 m^2} \quad (6-69)$$

D'un point de vue de théorie quantique des champs, cette expression vient de la resommation de contribution "en boucle" provenant de l'auto-interaction du champ, du moins dans leurs contributions infrarouges.

Les divergences infrarouges rencontrées dans l'espace de De Sitter ne sont donc pas strictement de nature quantique .Elles viennent de l'accumulation de modes super-Hubble.

Nous nous limitons à l'ordre 1.La quantité $\langle \Phi(\mathbf{x}) | \Phi(\mathbf{y}) \rangle$ est en fait toujours inobservable. Ce qui pourrait être une observable, ce sont les variations de φ par rapport à une valeur mesurée à plus

grande échelle. Si l'on s'intéresse aux corrélations d'une telle quantité à distance finie, alors on est amené à introduire une régularisation IR et le corrélateur est fini.



Conclusion

Le principe variationnel dépendant du temps proposé par Balian et Vénéroni (BV) a pour but de faire une prédiction optimal de la valeur moyenne d'une observable $\mathbf{A}$ mesurée au temps t_1 , à partir de la connaissance de l'état initial du système, décrit par un opérateur densité $\mathbf{D}_0$ au temps t_0 . L'action BV fait intervenir deux opérateurs variationnels, $\mathbf{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ jouant respectivement le rôle d'opérateur densité du système et d'observable sur laquelle la mesure est effectuée qui doivent satisfaire aux conditions :

$$\mathbf{D}(t_0)=\mathbf{D}_0 ; \quad \mathcal{A}(t_1)=\mathbf{A} \quad .$$

Les conditions de stationnarité de cette action par rapport à $\mathbf{D}(t)$ et $\mathcal{A}(t)$ déterminent alors l'évolution du système entre t_0 et t_1 . Cette évolution sera régie par les équations exactes (équation de Liouville-Von-Neumann et équation de Heisenberg).

Dans ce travail, nous proposons une étude de la dynamique du champ d'inflation dans l'approximation du champ moyen avec l'optimisation de l'état initial.

Au chapitre II, nous nous sommes intéressés au cas où l'observable mesurée $\mathbf{A}$ est linéaire. Il est apparu naturel de choisir l'opérateur $\mathcal{A}(t)$ de la même forme, linéaire dans ses paramètres variationnels. Quant à l'état initial, il peut être suggéré par le principe d'entropie maximum. Nous avons donc sélectionné, aussi bien pour l'opérateur densité initiale $\mathbf{D}_0$ que pour $\mathbf{D}(t)$, la classe des opérateurs exponentiels de formes quadratiques des opérateurs de création et d'annihilation de bosons. Les équations d'évolution des contractions de $\mathbf{D}(t)$ sont similaires aux équations moyennes TDHF pour les fermions. Nous les avons dénotées par TDHFB Time-Dependent Hartree-Fock Bogoliubov. Ces équations ne dépendent ni de $\mathbf{A}$, ni de t_1 .

Les équations TDHFB pour les champs $\boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x}, t)$ et $\boldsymbol{\pi}(\mathbf{x}, t)$ sont formellement classiques. Elles coïncident avec les équations d'Hamilton-Jacobi. Cependant, leur couplage avec les quantités $\mathbf{G}$, $\mathbf{S}$ et $\mathbf{T}$, ainsi que l'évolution non triviale de ces dernières, en particulier l'effet de « l'étalement de la gaussienne » (qui est un effet quantique), les distinguent d'un ensemble d'équations purement classiques.

Parmi les nombreuses propriétés des équations TDHFB, nous pouvons citer la conservation de l'énergie et de la fonction de partition $\text{Tr } \mathbf{D}$. Cette dernière loi de conservation est due au fait que l'opérateur identité appartienne à l'espace variationnel de $\mathcal{A}(t)$. Par ailleurs, une des plus importantes propriétés des équations TDHFB est qu'un état initialement pur (à température nulle) reste pur durant l'évolution. Cela exclut la possibilité de voir évacuer des corrélations si elles ne sont pas présentes dans l'état initial.

L'évolution de $\mathcal{A}(t)$ n'est pas nécessaire à la résolution des équations TDHFB, et donc au calcul de la valeur moyenne $\langle \mathbf{A} \rangle$ au temps t_1 . Elles deviennent utiles, lorsque l'on s'intéresse aux dispersions d'opérateurs de la classe $\mathcal{A}(t)$.

Nous avons étudié au chapitre III les équations dynamiques couplées en choisissant aussi bien pour $\mathbf{D}(t)$ et pour $\mathcal{A}(t)$ des exponentielles de formes quadratiques, ce qui donne directement accès à la

fonctionnelle génératrice des fonctions de corrélations. Le développement dans les sources permet alors d'obtenir les fonctions de Green à deux temps, avec deux, trois ou quatre opérateurs champs.

Le champ moyen permet de calculer correctement les valeurs moyennes d'observables à un corps, mais sous-estimer les fluctuations. Balian et Vénéroni ont montré que le principe variationnel est aussi adapté pour calculer les fluctuations dans le contexte du champ moyen.

Dans le chapitre IV, nous avons fait une optimisation l'état initial, les approximations obtenues avec cette méthode pour les fonctions de corrélations à deux temps comprennent non seulement les corrélations entre les particules provenant de la dynamique, mais aussi ce qui sont présents dans l'état initial. Nous avons montré que notre approximation pour les fonctions de corrélations à deux temps avec deux opérateurs champ satisfait au théorème de dissipation - fluctuation. Nous avons appliqué ce formalisme à une théorie des champs hors équilibre.

Au chapitre V nous avons étudié la renormalisabilité des équations en espace-temps courbe pour un champ scalaire $O(1)$ en self-interaction quartique, couplé à la gravité. L'espace-temps est décrit par la métrique de De Sitter. La prescription que nous avons utilisé contourne le problème de l'inexistence de la notion de vide et donc de particules en espace courbe. Pour ce faire, nous avons supposé que le taux d'expansion de l'Univers est petit, ce qui conduit à la possibilité d'un développement adiabatique. Dans l'approximation gaussienne, le concept de vide adiabatique peut être étendu à un cas d'interaction.

Dans le chapitre VI, nous révélons toutes les potentialités du principe variationnel de Balian-Vénéroni. Appliqué à des problèmes de théorie des champs, ce principe permet une étude de l'Univers primordial. Cependant l'approximation TDHFB ce qui ne peut pas tenir compte des corrélations lorsqu'elles ne sont pas présentes dans l'état initial, constitue une faiblesse dont il faudra s'affranchir pour étudier les fluctuations quantique des champs d'inflation que l'on sait être responsable de l'anisotropie de la température du rayonnement fossile.

On explique les origines des paramètres cosmologiques et l'extraction de ses paramètres à partir des données d'observation du CMBR. On calcule aussi les fonctions de corrélations par deux méthodes, l'une par la méthode de l'analogie entre un trou noir et l'espace de De Sitter également utile pour étudier les effets quantiques de la période inflationnaire. La deuxième donne la solution des équations TDHFB dans l'espace de De Sitter. Ces deux méthodes donnent bien le même résultat.

En conclusion, ces résultats révèlent toute la richesse du principe variationnel de Balian-Vénéroni. Ils ouvrent la voie à des perspectives intéressantes, notamment une variante de l'action BV beaucoup plus élaborée qui permet d'injecter les observations actuelles dans la détermination de la dynamique de l'univers primordial.

APPENDICE : A

REPRESENTATION FONCTIONNELLE DE SCHRODINGER

a-INTRODUCTION

Les outils de base d'une théorie de champs sont un espace de Fock, des vecteurs et opérateurs sur cet espace, lorsqu'on utilise le formalisme opératoire. Un autre formalisme peut être utilisé. Il s'agit d'un formalisme où les vecteurs deviennent des fonctionnelles (l'équivalent pour les champs de représentation en terme de fonction d'ondes pour une théorie quantique, dans le cas où l'on a un espace de Hilbert, $L^2(\mathbb{R})$). Il existe un formalisme mixte, celui des fonctions de Green (qui sont de point de vue technique des distributions).

Le formalisme des fonctions de Green permet un exposé formel synthétique des méthodes non-perturbative en théorie des champs. Un avantage important est de permettre l'extension à température finie d'une façon naturelle grâce à la continuation analytique dans le plan complexe.

En effet, les fonctions de Green contiennent toutes les informations nécessaires pour étudier des systèmes (en équilibre) ayant des données initiales aussi bien mal définies. Cependant, la difficulté majeure est d'extraire ces informations.

Un formalisme nommé (représentation fonctionnelle de Schrödinger) [3], s'adapte aussi aux situations où le système étudié est dans un mélange d'états, lorsqu'il doit être décrit par un opérateur densité. Des travaux [5] ont montré que cette représentation est compatible avec une procédure de renormalisation, au moins dans le cas du champ moyen dépendant et indépendant du temps.

b-Théorie des champs bosoniques

Image de Schrödinger

L'état du système est défini par la fonctionnelle d'onde $\Psi(\varphi)$, dépendant d'un champ $\varphi(x)$ à t fixe. Le produit scalaire sur un espace vectoriel complexe $\mathbb{C}$ est défini par l'intégrale fonctionnelle.

$$\begin{aligned}\langle \Psi_1 | \Psi_2 \rangle &= \int \mathcal{D}\varphi \Psi_1^*(\varphi) \Psi_2(\varphi) \\ &= \langle \Psi_2 | \Psi_1 \rangle^*\end{aligned}\tag{A-1}$$

Evidemment l'espace dual comporte un complexe conjugué fonctionnel. A t fixes, l'opérateur champ canonique $\Phi(x)$ agit par une multiplication :

$$\Phi(x)\Psi(\varphi) = \varphi(x)\Psi(\varphi)\tag{A-2}$$

Tandis que l'opérateur moment canonique $\Pi(x)$ agit par une fonctionnelle différentielle :

$$\Pi(x)\Psi(\varphi) = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \Psi(\varphi) \quad (\text{A-3})$$

Les deux opérateurs Φ et Π sont hermétiques avec le produit interne (2-1) et satisfont l'algèbre de Heisenberg.

$$[\Phi(x), \Phi(y)] = 0 = [\Pi(x), \Pi(y)] \quad (\text{A-4})$$

$$[\Phi(x), \Pi(y)] = i\delta(x - y)$$

L'action de tout opérateur dépendant de Π et Φ est donnée par l'expression suivante :

$$O(\Pi, \Phi)\Psi(\varphi) = O\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)}, \varphi(x)\right)\Psi(\varphi) \quad (\text{A-5})$$

On peut l'écrire sous une forme équivalente à un noyau fonctionnel, dont l'action sur un état est multiplicative :

$$\begin{aligned} O(\varphi_1, \varphi_2) &\equiv \langle \varphi_1 | O(\Pi, \Phi) | \varphi_2 \rangle \\ &= O\left(\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi_1}, \varphi_1\right) \delta(\varphi_1 - \varphi_2) \end{aligned} \quad (\text{A-6})$$

$$O(\Pi, \Phi)\Psi(\varphi) = \int \mathcal{D}\tilde{\varphi} O(\varphi, \tilde{\varphi})\Psi(\tilde{\varphi}) \quad (2-7)$$

Avec $\delta(\varphi_1 - \varphi_2)$ une fonctionnelle de la fonction delta [3].

La mesure d'une grandeur physique O ne peut donner comme résultat qu'une valeur de l'observable correspondante. En utilisant les états propres $|\varphi\rangle$ de l'opérateur champ Φ , nous aurons les formules suivantes :

$$\langle \varphi | \tilde{\varphi} \rangle = \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \quad (\text{A-8a})$$

$$\Phi(x)|\varphi\rangle = \varphi(x)|\varphi\rangle \quad (\text{A-8b})$$

$$\langle \varphi | \Phi(x) | \tilde{\varphi} \rangle = \varphi(x) \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \quad (\text{A-8c})$$

$$\langle \varphi | \Pi(x) | \tilde{\varphi} \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi(x)} \delta(\varphi - \tilde{\varphi}) \quad (\text{A-8d})$$

$$\langle \varphi | O | \tilde{\varphi} \rangle = O(\varphi, \tilde{\varphi}) \quad (\text{A-8e})$$

Ces propriétés ne sont en fait que la généralisation à un nombre infini de degrés de liberté de la représentation (x,p) de la mécanique quantique ordinaire.

Pour l'équation fondamentale de la dynamique dans l'image de Schrödinger, c'est l'équation de Schrödinger dépendant du temps pour une fonctionnelle dépendant du temps.

$$|\Psi; t\rangle \leftrightarrow \Psi(\varphi; t).$$

L'équation dynamique prend sa forme une fois que l'opérateur Hamiltonien $H(\Pi, \Phi)$ est donné :

$$i \frac{\delta}{\delta t} \Psi(\varphi; t) = H\left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta\varphi}, \varphi\right] \Psi(\varphi; t) \quad (\text{A-9})$$

Pour un Hamiltonien indépendant de temps, on peut faire une séparation de variable de la fonctionnelle $\Psi(\varphi; t)$:

$$\Psi(\varphi; t) = e^{-iEt} \Psi_E(\varphi) \quad (\text{A-10})$$

$$H \left[\frac{1}{i} \frac{\delta}{\delta \varphi}, \varphi \right] \Psi_E(\varphi) = E \Psi_E(\varphi) \quad (\text{A-11})$$

L'équation (2-9) ne peut être résolue exactement que pour des systèmes linéaires décrits par un Hamiltonien quadratique :

$$H = \frac{1}{2} \int (\Pi^2 + \Phi h \Phi)$$

$\Psi_\Omega(\varphi)$ est une fonctionnelle gaussienne qui représente l'état de vide,

$$\Psi_\Omega(\varphi) = \det^{\frac{1}{4}} \frac{\Omega_R}{\pi} \exp \left[-\frac{1}{2} \int \varphi \Omega \varphi \right] \quad (\text{A-12})$$

Avec la covariance Ω déterminé par $\Omega^2 = h$

La résolution d'équation dynamique (2-11). Conduit à l'énergie de vide $E_0 = \frac{1}{2} \text{Tr} \Omega$ (A-14)

Pour faire une analogie avec la mécanique quantique ordinaire, nous construisons l'opérateur de création $\mathbb{A}^+$ et l'opérateur d'annihilation $\mathbb{A}$.

$$\begin{aligned} \mathbb{A} &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Omega^{-\frac{1}{2}} \{ \Omega \Phi + i \Pi \} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Omega^{-1/2} \left\{ \Omega \varphi + \frac{\delta}{\delta \varphi} \right\} \\ \mathbb{A}^+ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Omega^{-1/2} \{ \Omega^* \Phi - i \Pi \} \leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} \int \Omega^{-1/2} \left\{ \Omega^* \varphi - \frac{\delta}{\delta \varphi} \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-15})$$

Les deux opérateurs $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^+$ vérifient les relations de commutation canoniques des bosons

$$[\mathbb{A}(x), \mathbb{A}^+(x)] = \delta(x, y) \quad (\text{A-16})$$

$$[\mathbb{A}(x), \mathbb{A}(y)] = 0$$

L'action de l'opérateur $\mathbb{A}$ sur $\Psi_\Omega(\varphi)$ s'écrit alors

$$\mathbb{A} \Psi_\Omega(\varphi) = 0.$$

L'équation (2-12) représente conventionnellement le vide de Fock d'après l'image de Schrödinger, correspondant à $\mathbb{A}$ et $\mathbb{A}^+$. On peut construire un espace Fock pour les états excités obtenus par l'action de l'opérateur $\mathbb{A}^+$ sur $\Psi_\Omega(\varphi)$.

$$\Psi_1(\varphi) \propto \mathbb{A}^+ \Psi_0(\varphi) \quad (\text{A-17a})$$

$$\Psi_2(\varphi) \propto \mathbb{A}^+ \mathbb{A}^+ \Psi_0(\varphi) \quad (\text{A-17b})$$

La covariance Ω est symétrique :

$$\Omega = \Omega_R + i\Omega_I \quad ; \quad \Omega(x, y) = \Omega(y, x) \quad (\text{A-18})$$

Une notation fonctionnelle évidente est employée partout,

$$\int \varphi \Omega \varphi = \int dx dy \varphi(x) \Omega(x, y) \varphi(y) \quad (\text{A-19})$$

Le det (déterminant) de $\Psi_\Omega(\varphi)$ est une fonctionnelle : Malgré la possibilité pour une grande généralité, nous utiliserons toujours une transformation covariance invariante :

$$\Omega(x, y) = \int \frac{dp}{2\pi} e^{-ip(x-y)} \Omega(p) \quad (\text{A-20a})$$

Dans la représentation de moment, on a :

$$\int dx dy e^{ipx} \Omega(x, y) e^{-ipy} = \Omega(p) (2\pi) \tau \delta(p - q) \quad (\text{A-20b})$$

Dans notre espace fonctionnel, les différentes bases Fock construites avec différentes covariances peuvent être inéquivalentes .Ceci se produit parce que la théorie des champs possède un nombre infini de degrés de liberté. Nous considérons deux vides de l'espace de Fock avec des covariances Ω_1 et Ω_2 . Le produit scalaire entre ces deux vides est donc :

$$e^{-N} = \langle \Omega_1 | \Omega_2 \rangle \quad (\text{A-21a})$$

Par exemple quand les covariances sont réelles, N est donné par :

$$N = \frac{L}{2} \int \frac{dk}{2\pi} \ln \frac{1}{2} \left(\sqrt{\frac{\Omega_1(k)}{\Omega_2(k)}} + \sqrt{\frac{\Omega_2(k)}{\Omega_1(k)}} \right) \quad (\text{A-21b})$$

Où L est la longueur de l'espace. En ignorant la divergence infrarouge associée à l'infinité de l'espace, $\frac{N}{L}$ divergera dans l'ultra- violet à moins que Ω_1 et Ω_2 s'approchent l'un de l'autre rapidement pour k grand. Comme l'intégral (A-21b) est positive, la divergence de l'ensemble e^{-N} va s'annuler.

Donc le produit scalaire (A-21a) est nul, les deux espaces de Fock construits sur ces deux bases sont donc orthogonaux. Il y a différents espaces de Fock pour des covariances différentes, ce qui conduit à des représentations différentes.

Si la configuration du système est décrite par un mélange mal connu, nous devons introduire la matrice densité :

$$D(\varphi_1, \varphi_2) = \sum_n P_n(t) \Psi_n(\varphi_1, t) \Psi_n^*(\varphi_2, t) \quad (\text{A-22})$$

P_n Est la probabilité pour que le système se trouve dans l'état n , $\{\Psi_n\}$ représente l'ensemble complet de fonctionnelles des ondes.

L'équation dynamique (l'équation de Schrödinger dépendant du temps) devient :

$$\frac{d}{dt} D(t) = i[D(t), H] + \frac{\delta}{\delta t} D(t) \quad (\text{A-23})$$

Si l'on suppose que les P_n sont conservées, cela conduit à une évolution isentropique [EJS88]

.

$$S = -k_B \sum_n P_n \ln P_n = \text{cte.} \quad (\text{A-23})$$

L'évolution isentropique est approximative, elle néglige les effets dus à la dissipation. Dans ce cas -la, il faudra modéliser la variation temporelle des probabilités P_n qui conduit à étudier un système hors-équilibre. Il faut donc résoudre l'équation de Liouville –Von-Neumann (1-1)

$$i \frac{d}{dt} D(t) = [H, D(t)] \quad (\text{A-24})$$

APPENDICE : B

1- Les caractéristiques de l'état gaussien

L'opérateur gaussien est un opérateur exponentiel de forme quadratique qui dépend des opérateurs du champ $\Phi(x, t)$ et $\Pi(x, t)$. L'opérateur gaussien de densité $\mathcal{D}(t)$ est complètement caractérisé par le vecteur $\alpha(x, t)$ et la matrice $\Xi(x, y, t)$ qui sont bien définis par les équations de chapitre III (3-22) et (3-23) [29].

A la place des quantités G , T et S , nous introduisons les paramètres G_ξ , Σ_ξ et ξ , ξ est le degré de mélange (pour un état pur $\xi = 1$)

$$Tr(\mathcal{D}(t)\bar{\Phi}(x)\bar{\Phi}(y)) = \left(G_\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1}G_\xi^{1/2}\right)(x, y, t) \quad (B-1)$$

$$Tr(\mathcal{D}(t)\bar{\Pi}(x)\bar{\Pi}(y)) = \frac{1}{4}\left(G_\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1}G_\xi^{1/2}\right)(x, y, t) + 4\left(\Sigma_\xi G_\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1}G_\xi^{1/2}\Sigma_\xi\right)(x, y, t), \quad (B-2)$$

$$Tr(\mathcal{D}(t)\bar{\Phi}(x)\bar{\Pi}(y)) = \frac{i}{2}\delta^3(x-y) + 2\left(G_\xi^{1/2}(1-\xi)^{-1}G_\xi^{1/2}\Sigma_\xi\right)(x, y, t) \quad (B-3)$$

Pour un état pur,

$$T(x, y, t) = 2(G\Sigma + \Sigma G)(x, y, t), \quad (B-4)$$

$$S(x, y, t) = \frac{1}{4}G^{-1}(x, y, t) + 4(\Sigma G\Sigma)(x, y, t) \quad (B-5)$$

Pour une configuration uniforme, nous avons les équations :

$$G(P) = G_\xi(P)(1-\xi(P))^{-1}, \quad (B-6)$$

$$S(P) = \frac{1}{4}G^{-1}_\xi(P)(1-\xi(P)) + 4\Sigma_\xi^2(P)G_\xi(P)\frac{1}{1-\xi(P)}, \quad (B-7)$$

$$T(P) = 4G_\xi(P)\frac{1}{1-\xi(P)}\Sigma_\xi(P) \quad (B-8)$$

L'invariance de Heisenberg en fonction de degré de mélange,

$$I(P) = \frac{1+\xi(P)}{1-\xi(P)} \quad (B-9)$$

2- L'expression de l'entropie de Von Neumann pour les bosons dans l'approximation de Hartree-Bogoliubov

L'entropie de Von Neumann est donnée en fonction de l'opérateur de densité :

$$S = -\frac{\text{Tr} \mathcal{D} \log \mathcal{D}}{\text{Tr} \mathcal{D}} + \log \text{Tr} \mathcal{D} \quad (\text{B-10})$$

Dans l'approximation HB, l'opérateur $\mathcal{D}$ est un exponentiel de forme quadratique qui dépend des opérateurs du champ $\Phi(x, t)$ et $\Pi(x, t)$. On peut écrire la densité de l'entropie en fonction de la matrice Ξ .

$$S = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \frac{1}{4} \text{tr} \left\{ \left(\frac{1}{2} (1 - \tau) \Xi (1 - \tau) - 1 \right) \log \left(\frac{\Xi + \tau}{\Xi - \tau} \right) \right\} \\ + \frac{1}{2} \log \det \left\{ \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Xi (1 - \tau) - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}. \quad (\text{B-11})$$

Où τ est une matrice 2×2 ,

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B-12})$$

On peut écrire l'entropie en fonction du terme invariant de Heisenberg I

$$S = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[\frac{1}{2} \sqrt{I} \log \left(\frac{\sqrt{I} + 1}{\sqrt{I} - 1} \right) + \frac{1}{2} \log(I - 1) \right] . \quad (\text{B-13})$$

La solution statique de HB est caractérisé par α^0, Ξ^0 , nous avons : $I = -\Xi_{11}^0 \Xi_{22}^0$ on peut réécrire l'équation (D-4) sous cette forme :

$$S = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \left[(n_p + 1) \log(n_p + 1) - n_p \log n_p \right] , \quad (\text{B-14})$$

n_p : est le nombre d'occupation en relation avec le degré de mélange $\xi(p)$:

$$2n_p + 1 = \sqrt{\frac{1 + \xi(p)}{1 - \xi(p)}} = \sqrt{I(p)} . \quad (\text{B-15})$$

On utilise l'expression $\xi(p) = \frac{1}{\cosh \beta \omega_p}$, et nous avons aussi $2n_p + 1 = \coth \left(\frac{\beta \omega_p}{2} \right)$. Dans la théorie Φ^4 on a, $\omega_p = \sqrt{-g_0(p)}$ et

$$g_0(\mathbf{p}) = -\left(\mathbf{p}^2 + m_0^2 + \frac{b}{2}\varphi_0^2 + \frac{b}{2}G_0(x, x)\right) \quad , \quad (\text{B-16})$$

La solution statique est donnée,

$$\Xi_{11}^0(\mathbf{P})g_0(\mathbf{P}) = \Xi_{22}^0(\mathbf{p}), \quad (\text{B-17})$$

$$\Xi_{11}^0(\mathbf{P})\Xi_{22}^0(\mathbf{p}) = -\frac{1+\xi(\mathbf{p})}{1-\xi(\mathbf{p})} \quad (\text{B-18})$$

Les éléments de la matrice en fonction de la fréquence ω_p :

$$\Xi_{11}^0(\mathbf{P}) = \frac{1}{\omega_p} \coth\left(\frac{\beta\omega_p}{2}\right) \quad (\text{B-19})$$

$$\Xi_{22}^0(\mathbf{p}) = -\omega_p \coth\left(\frac{\beta\omega_p}{2}\right) \quad (\text{B-20})$$

$$I(\mathbf{p}) = \coth^2\left(\frac{\beta\omega_p}{2}\right) \quad (\text{B-21})$$

Les deuxièmes dérivées de la matrice d'entropie S pour une solution statique Ξ_0

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Xi_{11}(P) \partial \Xi_{11}(P)} \Big|_{\Xi_0} = -\frac{\omega_p^2}{4} \left[\frac{x}{\coth x} + \frac{1}{\coth^2 x - 1} \right] \quad (\text{B-22})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Xi_{11}(P) \partial \Xi_{22}(P)} \Big|_{\Xi_0} = -\frac{1}{4} \left[\frac{x}{\coth x} - \frac{1}{\coth^2 x - 1} \right] \quad (\text{B-23})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Xi_{22}(P) \partial \Xi_{22}(P)} \Big|_{\Xi_0} = -\frac{1}{4\omega_p^2} \left[\frac{x}{\coth x} + \frac{1}{\coth^2 x - 1} \right] \quad (\text{B-24})$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial \Xi_{12}(P) \partial \Xi_{12}(P)} \Big|_{\Xi_0} = \frac{x}{\coth x} \quad (\text{B-25})$$

Où $x = \frac{\beta\omega_p}{2}$,

APPENDICE : C

1-Dans cet appendice, on donne quelques relations pour les valeurs α_b , α_c , Ξ_b et Ξ_c en fonction des termes α_d , α_a , Ξ_d et Ξ_a .

$$\alpha_b = (\Xi_a - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d + (\Xi_d + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_a , \quad (C-1)$$

$$\alpha_c = (\Xi_d - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_a + (\Xi_a + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d , \quad (C-2)$$

Où τ est une matrice 2×2 ,

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (C-3)$$

Pour la matrice Ξ , nous avons les relations :

$$\Xi_b - \tau = (\Xi_a - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d (\Xi_d - \tau) , \quad (C-4)$$

$$\Xi_c - \tau = (\Xi_d - \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d (\Xi_a - \tau) , \quad (C-5)$$

$$\Xi_b + \tau = (\Xi_d + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d (\Xi_a + \tau) , \quad (C-6)$$

$$\Xi_c + \tau = (\Xi_a + \tau) \frac{1}{\Xi_a + \Xi_d} \alpha_d (\Xi_d + \tau) , \quad (C-7)$$

2-Nous donnons les équations d'évaluation pour n_d , α_d , Ξ_d , n_a , α_a , Ξ_a .

$$i \frac{\dot{n}_d}{n_d} = F_c^{(d)} - F_b^{(d)} - F_{Kc}^{(d)} \quad (\text{C-8})$$

$$2i \dot{\alpha}_d = - [(\Xi_d + \tau) (\mathcal{H}_c - \mathcal{I}_K^c) (\Xi_d - \tau) - (\Xi_d - \tau) \mathcal{H}_b (\Xi_d + \tau)] \tau \alpha_{b-c} \\ + \Xi_d (w_c - w_b) + \tau (w_c + w_b) - (\Xi_d + \tau) w_K^c \quad (\text{C-9})$$

$$i \dot{\Xi}_d = - [(\Xi_d + \tau) (\mathcal{H}_c - \mathcal{I}_K^c) (\Xi_d - \tau) - (\Xi_d - \tau) \mathcal{H}_b (\Xi_d + \tau)] \quad (\text{C-10})$$

$$i \frac{\dot{n}_a}{n_a} = F_b^{(a)} - F_c^{(a)} + F_{Kc}^{(a)} \quad (\text{C-11})$$

$$2i \dot{\alpha}_a = [(\Xi_a - \tau) (\mathcal{H}_c - \mathcal{I}_K^c) (\Xi_a + \tau) - (\Xi_a + \tau) \mathcal{H}_b (\Xi_a - \tau)] \tau \alpha_{c-b} \\ + \Xi_a (w_b - w_c) + \tau (w_c + w_b) - (\Xi_a - \tau) w_K^c \quad (\text{C-12})$$

$$i \dot{\Xi}_a = [(\Xi_a - \tau) (\mathcal{H}_c - \mathcal{I}_K^c) (\Xi_a + \tau) - (\Xi_a + \tau) \mathcal{H}_b (\Xi_a - \tau)] \quad (\text{C-13})$$

On donne les expressions suivantes pour le vecteur $\boldsymbol{\omega}$ et la matrice $\mathcal{H}$:

$$\tilde{w}_b(\mathbf{x}, t)_1 = \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta \varphi_b(\mathbf{x}, t)} = -f_b(\mathbf{x}, t) \quad , \quad \tilde{w}_b(\mathbf{x}, t)_2 = i \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta \pi_b(\mathbf{x}, t)} = i\pi_b(\mathbf{x}, t) \quad (\text{C-14})$$

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{ij} = -2 \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta \Xi_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{ji}} \quad (\text{C-15})$$

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{11} = - \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta G_b(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)} = \frac{1}{2} g_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) \quad (\text{C-16})$$

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{22} = + \frac{\delta \langle H \rangle_b}{\delta S_b(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)} = \frac{1}{2} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad ,$$

(C-17)

$$\mathcal{H}_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{12} = 2i \frac{\delta < H >_b}{\delta T_b(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)} = 0 .$$

(C-18)

Les quantités $\mathbf{F}$ qui apparaissent dans les équations (E-1) et (E-4) sont définies par :

$$\begin{aligned} F_b^{(d)} = & \int d^3x (\mathcal{E}_b(\mathbf{x}, t) - \tilde{w}_b(\mathbf{x}, t)\alpha_{b-d}(\mathbf{x}, t)) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \text{tr} [\mathcal{H}_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)(\Xi_b - \Xi_d + 2\alpha_{b-d}\tilde{\alpha}_{b-d})(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (\text{C-19})$$

$$\begin{aligned} F_{Kc}^{(d)} = & \int d^3x (\mathcal{K}_c(\mathbf{x}, t) - \tilde{w}_{Kc}(\mathbf{x}, t)\alpha_{c-d}(\mathbf{x}, t)) \\ & + \frac{1}{2} \int d^3x d^3y \text{tr} [\mathcal{I}_{Kc}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)(\Xi_c - \Xi_d + 2\alpha_{c-d}\tilde{\alpha}_{c-d})(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)] \end{aligned} \quad (\text{C-20})$$

Pour la théorie Φ^4 , nous avons :

$$f_b(\mathbf{x}, t) = - \left(-\Delta + m_0^2 + \frac{b}{6} \varphi_b^2(\mathbf{x}, t) + \frac{b}{2} G_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \varphi_b(\mathbf{x}, t) , \quad (\text{C-21})$$

$$g_b(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = - \left(-\Delta + m_0^2 + \frac{b}{2} \varphi_b^2(\mathbf{x}, t) + \frac{b}{2} G_b(\mathbf{x}, \mathbf{x}, t) \right) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) . \quad (\text{C-22})$$

à partir des variations dans la limite des source K_c , nous obtenons :

$$\tilde{w}_K^c(\mathbf{x}, t)_1 = \frac{\delta K_c}{\delta \varphi_c(\mathbf{x}, t)} , \quad \tilde{w}_K^c(\mathbf{x}, t)_2 = i \frac{\delta K_c}{\delta \pi_c(\mathbf{x}, t)} , \quad (\text{C-23})$$

$$\mathcal{I}_K^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{ij} = -2 \frac{\delta K_c}{\delta \Xi_c(\mathbf{y}, \mathbf{x}, t)_{ji}} . \quad (\text{C-24})$$

$$w_K^c(\mathbf{x}, t)_1 = J^\Phi(\mathbf{x}, t) + 2 \int d^3x_2 \left(J^{\Phi\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, t) \varphi_c(\mathbf{x}_2, t) + J^{\Phi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, t) \pi_c(\mathbf{x}_2, t) \right) , \quad (\text{C-25})$$

$$w_K^c(\mathbf{x}, t)_2 = i J^\Pi(\mathbf{x}, t) + 2 i \int d^3 x_2 \left(J^{\Phi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, t) \varphi_c(\mathbf{x}_2, t) + J^{\Pi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, t) \pi_c(\mathbf{x}_2, t) \right) , \quad (\text{C-26})$$

$$\mathcal{I}_K^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{11} = -J^{\Phi\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) , \quad (\text{C-27})$$

$$\mathcal{I}_K^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{12} = -2i J^{\Phi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) , \quad (\text{C-28})$$

$$\mathcal{I}_K^c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)_{22} = J^{\Pi\Pi}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) . \quad (\text{C-29})$$

Les expressions des matrices t, T, r et R qui apparaissent dans les équations dynamiques pour les fonctions de corrélations à deux temps :

$$t_{11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -g^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) , \quad t_{22}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) = -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) , \quad (\text{C-30})$$

$$T_{1,11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = -\frac{b}{2} \varphi^{(0)}(\mathbf{x}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) , \quad T_{2,jk} = 0 , \quad (\text{C-31})$$

$$r_{11,1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) = T_{1,11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, t) \quad (\text{C-32})$$

$$R_{11,11}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{u}, t) = \frac{b}{4} \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \delta^3(\mathbf{x} - \mathbf{z}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{u}) . \quad (\text{C-33})$$

Les autres éléments sont égaux à zéros

Nous utilisons les transformations de Fourier suivantes :

$$W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \dots \frac{d^3 p_n}{(2\pi)^3} \exp(i \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j) \tilde{W}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) , \quad (\text{C-34})$$

$$\tilde{W}(\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n) = \int d^3 x_1 \dots d^3 x_n \exp(-i \sum_{j=1}^n \mathbf{p}_j \cdot \mathbf{x}_j) W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) , \quad (\text{C-35})$$

$$\tilde{W}(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) = (2\pi)^3 \delta^3(\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \dots + \mathbf{p}_n) W(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_n) . \quad (\text{C-36})$$

La même pour la fonction de deux points β^Φ on a :

$$\beta_1^\Phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, t, t'') = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{i\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})} \beta_1^\Phi(\mathbf{p}, t, t'') . \quad (\text{C-37})$$

3-Exponentielles de Formes Quadratiques d'Opérateurs de Bosons

3-1 Espace de Fock

On considère l'espace de Fock bâti sur un ensemble de n bosons $\{\mathbf{a}_i^+\}, (\mathbf{i} = 1 \dots n)$.
On introduit le vecteur α de dimension $2n$:

$$\alpha = \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{a}^+ \end{pmatrix} . \quad (\text{C-38})$$

Les relations de commutation satisfaites par les composantes de $\mathbf{a}$ s'écrivent :

$$[\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j] = \tau_{ij} , \quad (\text{C-39})$$

Où τ est la matrice $(2n \times 2n)$:

$$\tau \equiv \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{1} \\ -\mathbf{1} & \mathbf{0} \end{pmatrix} , \quad (\text{C-40})$$

Qui vérifie les relations :

$$\tilde{\tau} = -\tau ; \quad \tau^2 = -\mathbf{1} \quad (\text{C-41})$$

Comme τ définit une structure symplectique dans $\mathbb{C}^{2n}$, pour tout couple de vecteurs λ^1 et λ^2 du type :

$$\lambda \equiv \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix} , \quad l_i \in \mathbb{C}^n , \quad (\text{C-42})$$

on a

$$\tilde{\lambda}^1 \tau \lambda^2 = -\tilde{\lambda}^2 \tau \lambda^1 . \quad (\text{C-43})$$

On exprime aussi α au moyen des couples d'opérateurs $\{x_i, p_i, \omega_i\} (i = 1 \dots n)$:

$$\begin{pmatrix} \sqrt{\omega_i} x_i \\ -ip_i/\omega_i \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{\hbar}{2}} (\mathbf{1} + \tau) \alpha , \quad \alpha = \sqrt{\frac{1}{2\hbar}} (\mathbf{1} - \tau) \begin{pmatrix} \sqrt{\omega_i} x_i \\ -ip_i/\omega_i \end{pmatrix} , \quad (\text{C-44})$$

On a alors :

$$\frac{2}{\hbar} \begin{pmatrix} -\sqrt{\omega_i \omega_j} x_i x_j & i\sqrt{\omega_i/\omega_j} x_i p_j \\ i\sqrt{\omega_j/\omega_i} p_i x_j & p_i p_j / \sqrt{\omega_i \omega_j} \end{pmatrix} = -(\mathbf{1} - \tau)(\tau \alpha \bar{\alpha})(\mathbf{1} - \tau) \quad (\text{C-45})$$

3-2 Opérateurs exponentiels quadratiques

La transformation exponentielle quadratique la plus générale Γ pour un système de n bosons s'écrit :

$$\Gamma \equiv \exp(\nu) \exp(\tilde{\lambda} \tau \alpha) \exp(\frac{1}{2} \tilde{\alpha} \tau S \alpha) \quad (\text{C-46})$$

Où ν , les coefficients du vecteur λ et ceux de la matrice S sont des $\mathbf{C}$ -nombres. Sans introduire de restriction, on peut supposer la matrice τS symétrique, c'est-à-dire :

$$\tilde{S} = \tau S \tau, \quad (\text{C-47})$$

On en déduit que $\tau r S = 0$ et que si s est valeur propre de S , alors $-s$ l'est aussi. Si on introduit les quatre sous-matrices S_{ij} de dimension n :

$$S \equiv \begin{pmatrix} S_{11} & -S_{12} \\ S_{21} & -S_{22} \end{pmatrix}, \quad (\text{C-48})$$

Cette propriété se traduit par les relations :

$$S_{11} = \tilde{S}_{22} \quad ; \quad S_{12} = \tilde{S}_{12} \quad ; \quad S_{21} = \tilde{S}_{21} \quad . \quad (\text{C-49})$$

De plus pour une fonction f quelconque et une matrice S vérifiant $\tilde{S} = \tau S \tau$ on a :

$$f(S) = -\tau \bar{f}(-S) \tau \quad (\text{C-50})$$

Qui entraîne :

$$\bar{\lambda}^{(1)} \tau f(S) \lambda^{(2)} = -\bar{\lambda}^{(2)} \tau f(-S) \lambda^{(1)} \quad (\text{C-51})$$

En particulier

$$\bar{\lambda}^{(i)} \tau f(S) \lambda^{(i)} = 0, \text{ si } f \text{ est paire.}$$

Désormais, nous dirons qu'une matrice est de classe des matrices S si elle vérifie (-10).

3 -3 Transformations de Bogoliubov

On dit qu'une matrice T définit une transformation de Bogoliubov si les opérateurs de quasi-particule β :

$$\beta \equiv T\alpha \quad (C-52)$$

Satisfont aux règles de commutation de bosons :

$$[\beta_i, \beta_j] = \tau_{ij} \quad , \quad (C-53)$$

Pour cela, T doit vérifier la relation :

$$T^{-1} = -\tau \bar{T} \tau \quad , \quad (C-54)$$

qui exprime que T est une transformation symplectique par rapport à la structure définie par τ . En conséquence $\det T = 1$ et les valeurs propres de T peuvent être groupées en paires inverses l'une de l'autre. En fonction des quatre sous-matrices $T_{\lambda\mu}$:

$$T \equiv \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{pmatrix} \quad , \quad (C-55)$$

cette propriété conduit aux six équations suivantes :

$$\begin{aligned} T_{11}\bar{T}_{22} - T_{12}\bar{T}_{21} &= 1 \quad , \quad T_{22}^{-1}T_{12} = \bar{T}_{12}\bar{T}_{11}^{-1} \quad , \quad T_{22}^{-1}T_{21} = \bar{T}_{21}\bar{T}_{22}^{-1} \\ \bar{T}_{22}T_{11} - \bar{T}_{12}T_{21} &= 1 \quad , \quad T_{12}T_{22}^{-1} = \bar{T}_{22}^{-1}\bar{T}_{12} \quad , \quad T_{21}T_{11}^{-1} = \bar{T}_{11}^{-1}\bar{T}_{21} \end{aligned} \quad (C-56)$$

On peut remarquer que si une matrice S satisfait aux conditions exposées en .2, la matrice $T = \exp(-S)$ définit une transformation de Bogoliubov.

Le vide (non normalisé) $|0\rangle_b$ associé aux opérateurs β peut s'écrire :

$$|0\rangle_b = \exp\left(\frac{1}{2}Z_{ij}a_i^+a_j^+\right)|0\rangle_a \quad ; \quad Z = -T_{11}^{-1}T_{12} \quad (C-57)$$

A la transformation ci-dessus on associe la matrice S_Z

$$S_Z = \begin{pmatrix} 0 & -Z \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad (C-58)$$

qui satisfait les conditions .2 puisque Z est symétrique. On a alors

$$\exp(-S_Z) = \begin{pmatrix} 1 & Z \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad . \quad (C-59)$$

L'existence du vide $|0\rangle_b$ n'est pas garantie. Nous dirons qu'une transformation de Bogoliubov est acceptable lorsque le vide $|0\rangle_b$ est normalisable. Par exemple, pour une transformation de dimension 1, il faut que $|Z| < 1$ pour que $|0\rangle_b$ soit normalisable.

REFERENCES

- [1].Brian R.Green. Titre original /The Fabric of The cosmos/Editions Robert Laffont, S.A, Paris, 2005, pour la tradition française.
- [2].R.Balian et M.Vénéroni, phys, Lett, 47 (1981), 1353,1765 (e).
- [3].R.Jackiw et R.Floréanini, phys rev D37 ,2206 (1988).
- [4] .O. Eboli. R. Jackiw-So-Young Di. 1988 The American physical society (15june 1988).
- [5].S-Y.Pi et M.Samiullah, phys, Rev.D 36.3128(1987).
- [6].R.Balian physique statistique tome 1 Edition 1985, man de lab.
- [7]. R.Balian et M.Vénéroni, nucl of Phys.408 (1993) , 445.
- [8]. M. Benarous, Annals of Physics 269, 107-128 (1998).
- [9] M. Benarous .Thèse, IPN. Orsay, France, oct 1991
- [10] M.Benarous. arXiv: hep-th/9710055v1 7Oct1997.
- [11]. R.Balian et M.Vénéroni, nucl of Phys.164 (1985) , 334.
- [12].Cécile Martin.1995 arXiv: hep-th /9505031v15 May 1995.
- [13].J.Zinn-Justin, ((Quantum field theory et critical phenomena)),The international series of monographs on physics, Oxford University Press, 1990.
- [14].E.Wang et U.Heinz, phys .Rev.D53 (1996) ,5978 ; A.Jakovac ,hep-th/9808349.
- [15].F.Cooper et E. Mottola, Phys.Rev.D36, 3114(1987).
- [16] .I.D.Novikov et V.P.Frolov, The physics of Black Holes (in Russian), Nauka, Moscow (1986).
- [17].arXiv0802.2462v2 (astro-ph)20Feb2008.
- [18].S.W.Hawking et I.G.Mass, phys.Lett 110B, 35(1982).
- [19].A.Vilenkin et L.H.Ford, phys. D26 ,1231 (1982).
- [20].A.A. Starobinsky , phys.Lett.117B, 175 (1982).
- [21].T.S.Bunchand P.C.W.Davies, Proc.R.Soc.Londou,Sern ,A A360,117(1978).
- [22].R.H.Brandenberger, Rev Mod, Phys, Vol 57, N° 1 jan 85.
- [23].J.Martin, inflationary cosmological perturbations of quantum-mechanical origin, Lect.Notes Phys.6, 69, Springer Berlin Heidelberg (2005). Het-th/0406011.

[24].Phd 2005 Les contraintes cosmologiques sur la physique de l'Univers primordial /par Jonathan Rocher Paris XI Orsay.

[25]. Doc NASA.

[26] : *Sachs et wolf* 1967. Perturbations of a Cosmological Model and Angular Variations of the Microwave Background". [*Astrophysical Journal*](#) 147: 73.

[27] .Bennetten 2003 et O'Meara 2011.

[28].Field Theory et Particles, Campos de Jardo, Brazil 8-21 January 1989.

[29].Cécile Martin arXiv: hep-th9909211v1 29 Sep 1999

[30].O.Eboli, S-Y-Pi et M.Samiullah, Ann of phys 193,102-141(1989).

[31] G.W. Gibbons et S.W.Hawking, Phys., Rev.D15 ,2752(1977).

[32]. A. Vilenkin , Nucl. Phys. 3226, 527 (1983).

[33] . Francis Bernarde : Cosmologie des fondements théoriques aux observations 2007, CNRS Editions.

[34]. P.Bonche et H.Flocard Nucl phys. A437 (1987)301.

