

N° d'ordre : 31/2010-M/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
"HOUARI BOUMEDIENNE"
FACULTÉ DE PHYSIQUE



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la matière et des hautes énergies

Par

Boubalou Nabila

Sujet

**LES ETATS SPINORIELS DE LA PARTICULE
ETENDUE RELATIVISTE**

Soutenu publiquement, le 06/07/2010 devant le jury composé de :

Mr.	M. HACHEMANE	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mme.	A-H. HAMICI	Maître de conférence	U.S.T.H.B.	Directrice de mémoire.
Mr.	M. TRIBECHÉ	Professeur	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	A. CHAFA	Maître de conférence	U.S.T.H.B.	Examinateur.

Remerciements

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique Théorique de l'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene (USTHB) sous la direction de Madame **HAMICI Amel Hiba** Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, à qui j'exprime toute ma reconnaissance pour sa méthode de travail, sa disponibilité, sa patience, ses conseils et sa gentillesse qui m'ont permis de garder confiance en moi pour poursuivre et achever ce présent travail. Elle été amie et mère, moi qui été loin de ma maison, alors il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes, mais je dirai j'avais de la chance de l'avoir comme promotrice.

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **A. SMIDA**, Professeur à l'U.S.T.H.B et je lui souhaite une bonne santé et un bon rétablissement.

A Monsieur **M.HACHEMANE** Professeur à l'U.S.T.H.B, j'adresse mes plus vifs remerciements pour son aide, ses conseils, et pour avoir accepté de présider mon jury de mémoire.

Je remercie Monsieur **M. TRIBECHÉ** Professeur à l'U.S.T.H.B et Monsieur **A. CHAFA** Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, pour avoir accepté d'honorer mon jury de soutenance.

Je remercie tous les membres du laboratoire Physique Théorique enseignants et étudiants.

Je remercie mes amies proches, Nora, Aicha, Zina, Samia, Souad, Yassmina, Hanane, Mouna, biba et Nawel pour leurs encouragements.

Mes plus grands remerciements pour ma famille, mon père, ma mère, mes frères et mes sœurs, pour leur soutien tout au long de mes études. Je remercie aussi mon fiancé pour son aide, ses encouragements, sa patience et sa compréhension.

Table des matières

Introduction	1
1 La Mécanique Quantique Stochastique Non Relativiste	4
1.1 Introduction	4
1.2 La mécanique quantique stochastique pour une particule libre scalaire . . .	5
1.2.1 Les systèmes d'imprimitivité Galiléens	5
1.2.2 Les systèmes de covariance et probabilités	9
1.2.3 Densité et courant de probabilité	12
1.2.4 Les propagateurs	13
1.3 La mécanique quantique stochastique pour une particule libre spinorielle .	16
1.3.1 La représentation de spin total nul	17
1.3.2 Les systèmes de covariance et probabilités	19
1.3.3 Les propagateurs	22
1.4 Conclusion	23
2 La Mécanique Quantique Stochastique pour une Particule Relativiste	
libre	24
2.1 Introduction	24
2.2 La mécanique quantique stochastique pour une particule relativiste libre .	26
2.2.1 Les systèmes d'imprimitivité relativistes	26
2.2.2 L'espace des phases stochastique relativiste et les systèmes de co- variance relativistes	31

2.2.3	Densité, courant de probabilité et interprétations probabilistes . . .	35
2.2.4	Les propagateurs	39
2.3	La mécanique quantique stochastique pour une particule libre spinorielle .	41
2.3.1	Analyse harmonique de la représentation de l'espace des phases relativistes $U_0(a, \Lambda)$	42
2.3.2	Les systèmes de covariance	45
2.3.3	Les probabilités	46
2.3.4	Les propagateurs	47
2.4	Conclusion	48
3	Particule Quantique Relativiste Stochastiquement et Intrinsèquement	
	Etendue	49
3.1	Introduction	49
3.2	La théorie fonctionnelle	50
3.3	La particule relativiste libre stochastiquement et intrinsèquement étendue .	51
3.3.1	La particule scalaire relativiste intrinsèquement étendue	51
3.3.2	La particule scalaire relativiste intrinsèquement et stochastiquement étendue	55
3.4	La particule spinorielle relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue	58
3.4.1	Les systèmes de covariance	58
3.4.2	Les interprétations probabilistes	61
3.4.3	Les propagateurs	64
3.5	Application au cas du spin unité	65
	Conclusion	69
	Annexes	70

A L'espace-temps de Minkowski et le groupe de Poincaré	71
.1 L'espace-temps de Minkowski	71
.2 La causalité et la simultanéité en relativité restreinte	72
.3 Le groupe de Poincaré $P = ISO(3, 1)$:	74
.4 Le groupe de Lorentz $L = O(1, 3)$	76
.5 Le groupe T^4 des translations quadri-dimensionnelles	80
.6 Algèbre de Lie du groupe de Poincaré	80
.7 Opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré	81
B Calcul d'isométrie	82
.1 Dans le cas de la particule relativiste scalaire intrinsèquement et stochas- tiquement étendue	82
.2 Dans le cas de la particule relativiste spinorielle intrinsèquement et sto- chastiquement étendue	84
Bibliographie	87

Introduction

L'étude des particules en physique repose sur la notion de symétrie. Mathématiquement cette symétrie est décrite par la théorie des groupes [1].

En effet, il est possible de classer les propriétés liées aux particules élémentaires en trois catégories: intrinsèque (interne), cinématique et dynamique, chaque catégorie est liée à un type donné de symétrie et donc à un type donné de groupe.

En mécanique quantique non relativiste, la symétrie cinématique, c'est à dire l'invariance de la physique dans le changement de référentiels d'inertie, est représentée par le groupe de Galilée, mais lorsqu'on parle de la physique des particules les énergies mises en jeu sont généralement supérieures aux énergies de masse au repos des particules, on fait alors appel à la mécanique quantique relativiste. Cette dernière repose sur les postulats de la relativité restreinte et ceux de la mécanique quantique. Les conséquences des postulats de la relativité, c'est à dire la constance de la vitesse de la lumière et l'invariance de toutes les lois de la physique dans tous les repères inertiels, se reflètent sur la structure de l'espace-temps, qui est toujours à quatre dimensions mais qui est désormais muni d'une pseudo métrique qui lie l'espace et le temps, c'est l'espace temps de Minkowski. Le groupe de symétrie, qui permet le passage d'un repère d'inertie à un autre, n'est plus alors celui de Galilée mais de Poincaré.

La mécanique quantique relativiste est donc une théorie qui tente d'appliquer les postulats de la mécanique quantique à la relativité restreinte afin de décrire la dynamique d'une particule quantique dont la vitesse est de l'ordre de la vitesse de la lumière dans le vide.

L'une des incohérences de la mécanique quantique relativiste est celle liée à la localisation spatiale qui permet de définir la position qui est nécessaire aussi bien à la notion même de la particule, qui est un objet infiniment petit localisable en un point, qu'à la description des interactions de ces particules.

En effet, dans la mécanique quantique conventionnelle. Les processus de mesure ne tiennent pas compte de l'origine de la perturbation qu'entraîne l'observation du système quantique. Ce dernier est traité indépendamment de l'appareil de mesure qui est alors supposé parfait. Or les appareils de mesure réels présentent des imperfections qui touchent le système et la mesure.

Ce problème de mesure n'est que théorique et ne gêne en rien les prédictions de la mécanique quantique tant que les énergies mises en jeu sont non relativistes. Dans le domaine relativiste, cette notion de mesure parfaite (notamment celle liée à l'opérateur position) est incompatible avec la condition de causalité, en effet, selon le théorème d'Hegerfeldt [2], il est impossible de préparer un état d'un système relativiste élémentaire qui soit parfaitement localisé dans une région finie de l'espace. Parmi les théories physiques récentes proposées pour supprimer cette difficulté de la mécanique quantique, la mécanique quantique stochastique sur l'espace des phases [3]. Cette théorie repose sur une notion plus souple du processus de mesure et attribue une extension à toutes les particules élémentaires. Cette extension stochastique est liée aux fluctuations, lors de la mesure de la position, de l'impulsion et du spin, dues aux imprécisions inévitables des appareils de mesure réels. La mesure est alors décrite par des opérateurs positifs qui ne sont plus des projecteurs. Ces opérateurs sont définis par des fonctions d'onde propre d'une particule d'essai stochastiquement étendue et jouant le rôle de micro-détecteur réel [4]. Chacune de ces fonctions caractérise une représentation irréductible de l'espace des phases du groupe de symétrie cinématique du système quantique considéré.

Une autre théorie à attribuer une extension aux particules élémentaires, est la théorie quantique fonctionnelle [5] mais cette extension n'est pas liée à la mesure, elle est intrinsèque à la particule. Cette théorie a été proposée par J.L. Destouches l'un des étudiants de de Broglie. Ce dernier a doté la particule d'un caractère ondulatoire et a proposé la

théorie de la double solution, où l'équation d'onde associée à une particule admet deux solutions liées, l'une est l'onde Ψ associé à l'état de la particule, et l'autre l'onde u qui représente la particule elle même. J.L. Destouches, généralise cette théorie en se basant sur une conception non ponctuelle de la particule élémentaire et considère que la ponctualité n'est qu'un moyen pour simplifier les calculs. Dans la réalité physique on ne peut ni isoler cette particule du reste de l'univers ni empêcher l'influence de ce dernier sur cette particule. C'est ainsi qu'il a introduit sa théorie fonctionnelle où chaque particule est représentée par une onde physique u . On dit alors que la particule possède une extension fonctionnelle (intrinsèque).

En combinant la théorie stochastique et la théorie fonctionnelle, un modèle de particule stochastiquement et intrinsèquement étendue a été développé au sein de notre équipe [6]. Dans le cas relativiste l'étude a été faite pour une particule scalaire [7, 8]. Nous nous proposons dans le présent travail, de reprendre ce modèle pour une particule relativiste spinorielle de spin entier. La particule étendue est alors représentée par deux modes. Le mode externe qui est stochastique et doté d'un spin entier, évolue dans l'espace des phases stochastiques relativistes. Quant au mode interne, qui est ponctuel et scalaire, il reste confiné dans un espace-temps interne de Minkowski et est décrit par une onde physique. Après avoir brièvement rappeler, dans le premier chapitre, la mécanique quantique stochastique non relativiste pour les particules scalaires [9] et spinorielles [10], nous présentons dans le second chapitre la mécanique relativiste stochastique pour des particules scalaires puis spinorielles. Dans le chapitre trois, nous abordons notre travail qui consiste en l'étude de la particule relativiste spinorielle intrinsèquement et stochastiquement étendue, les espaces d'Hilbert, les systèmes de covariance, les interprétations probabilistes puis les propagateurs sont déterminés. Nous reprenons notre étude pour le cas particulier du spin externe unité puis nous terminons par une brève conclusion.

La Mécanique Quantique Stochastique Non Relativiste

1.1 Introduction

La mécanique quantique explique de nombreux phénomènes tels que le rayonnement électromagnétique, le fonctionnement des semi-conducteurs, les propriétés des métaux...et aucune expérience physique n'a, à ce jour, imposé sa révision, tant que les énergies mises en jeu sont non relativistes. Néanmoins, elle est entachée depuis sa naissance, d'incohérences mathématiques liées au processus de mesure utilisé. En effet, dans cette théorie, le système étudié est traité indépendamment de l'appareil de mesure [11] et ce dernier est considéré comme classique et parfait. Signalons cependant que ce problème de mesure n'est que théorique et ne gêne en rien les prédictions de la mécanique quantique non relativiste qui sont d'une remarquable précision.

Parmi les théories physiques récentes proposées pour supprimer cette difficulté conceptuelle de la mécanique quantique, la mécanique quantique stochastique sur l'espace des phases [3, 4] semble être la seule à apporter une solution raisonnable à ce problème [12]. Cette théorie repose sur une notion plus souple du processus de mesure et remplace les valeurs exactes des observables quantiques obtenues lors de mesures effectuées par un ap-

pareil de mesure parfait par des valeurs stochastiques mesurées à l'aide de détecteurs réels, ainsi la localisation au sens strict liée à la mesure de l'opérateur position (ou impulsion) est remplacée par une localisation stochastique dans l'espace des phases.

Dans ce chapitre, nous présentons la mécanique quantique stochastique (MQS) sur l'espace des phases en commençant par un premier paragraphe qui traite des particules libres scalaires. Comme cette théorie est basée sur la théorie des groupes, nous allons formuler le processus de mesure de la mécanique quantique conventionnelle puis celui de la MQS en termes de système d'imprimitivité et de système de covariance. Nous aborderons également l'aspect probabiliste de cette théorie stochastique à travers le courant et la densité de probabilité ainsi que le propagateur et le lien avec leurs équivalents de la mécanique quantique conventionnelle.

Le but de notre travail étant d'étudier le spin dans la mécanique quantique stochastique, nous présentons dans le deuxième paragraphe de ce chapitre, comment est introduit le spin dans la mécanique quantique stochastique.

1.2 La mécanique quantique stochastique pour une particule libre scalaire

1.2.1 Les systèmes d'imprimitivité Galiléens

Une particule élémentaire quantique non relativiste de masse m et de spin nul est associée [13] à la représentation projective⁽¹⁾ $\tilde{U}(g)$ unitaire irréductible du groupe de Galilée G [14, 15].

Cette représentation est définie, dans le cas d'une particule scalaire, par son action sur l'espace d'Hilbert $\tilde{H}(\mathbb{R}_{imp}^3, d\mathbf{k})$ des fonctions $\tilde{\Psi}(\mathbf{k}) = \langle \mathbf{k} | \Psi \rangle$ de carré intégrable dépen-

⁽¹⁾Une représentation projective se caractérise par la propriété suivante

$$\tilde{U}(g)\tilde{U}(g') = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\xi(g, g')\right)\tilde{U}(gg'); \quad g = (b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$$

dantes de la variable impulsion \mathbf{k} :

$$\left[\tilde{U}(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) \tilde{\Psi} \right] (\mathbf{k}) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left[\left(\frac{\mathbf{k}^2}{2m} \right) b - \mathbf{k} \cdot \mathbf{a} \right] \right\} \tilde{\Psi} (R^{-1}(\mathbf{k} - m\mathbf{v})) \quad (1.2.1)$$

Les quantités $(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)^{(2)}$ sont les paramètres de transformation de ce groupe [16]. Leurs actions respectives sont générées par les opérateurs infinitésimaux $H, \mathbf{P}, \mathbf{K}, \mathbf{J}$ qui forment les observables fondamentales de la mécanique quantique non relativiste. Les opérateurs H, \mathbf{P} et \mathbf{J} possèdent les interprétations physiques d'hamiltonien, d'opérateur impulsion et d'opérateur moment cinétique, tandis que le générateur \mathbf{K} ne possède pas d'interprétation physique en considérant ce groupe abstrait, mais en étendant le groupe de Galilée de sorte à avoir le groupe de Galilée étendu $\tilde{G}^{(3)}$, on peut lier l'opérateur \mathbf{K} à l'opérateur position $\mathbf{Q} = \frac{\mathbf{K}}{m}$. Cette interprétation peut se déduire facilement de la représentation projective (1.2.1) car celle-ci a été déduite de la représentation vectorielle du groupe étendue.

Dans cette représentation impulsion, l'opérateur \mathbf{P} prend une forme diagonale dans la base⁽⁴⁾ $\{|\mathbf{k}\rangle\}$ dont les éléments sont normalisés à l'unité

$$\langle \mathbf{k} | \mathbf{k}' \rangle = \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k}) \quad (1.2.2)$$

et satisfont la relation de fermeture (résolution de l'identité) suivante

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{k}\rangle \langle \mathbf{k}| d\mathbf{k} = \mathbf{1}. \quad (1.2.3)$$

La représentation configuration, correspond à une représentation où l'opérateur position \mathbf{Q} est réalisé comme l'opérateur multiplication. Les états $\{|\mathbf{x}\rangle\}$ propres de \mathbf{Q} sont, comme dans le cas de la représentation impulsion, normalisés sur la distribution de Dirac

$$\langle \mathbf{x} | \mathbf{x}' \rangle = \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \quad (1.2.4)$$

⁽²⁾ $b \in \mathbb{R}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}_{conf}^3$, $\mathbf{v} \in \mathbb{R}_{imp}^3$ et $R \in SO(3)$.

⁽³⁾ Le groupe de Galilée étendu \tilde{G} est composé des éléments $\hat{g} = (\theta, g)$ $\theta \in \mathbb{R}, g \in G$.

⁽⁴⁾ En fait les éléments de cette base sont des distributions et non des éléments de l'espace d'Hilbert des états. Ce point constitue, pour les mathématiciens, une inconsistance.

et résolvent l'identité

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| d\mathbf{x} = \mathbf{1}. \quad (1.2.5)$$

La transformation de Fourier

$$\hat{\Psi}(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}_{imp}^3} d^3\mathbf{p} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}\right\} \tilde{\Psi}(\mathbf{p}) \quad (1.2.6)$$

permet le passage à la représentation unitaire configuration \hat{U} qui agit comme suit

$$\left[\hat{U}(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)\hat{\Psi}\right](\mathbf{x}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2b + m\mathbf{v}(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right]\right\} \hat{\Psi}(R^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a} + b\mathbf{v})) \quad (1.2.7)$$

En faisant agir l'opérateur évolution

$$\exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_0t\right\}; \quad \hat{H}_0 = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{d\mathbf{x}^2} = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x \quad (1.2.8)$$

nous obtenons l'action de cette représentation sur l'état de la particule à un instant t

$$\begin{aligned} \left[\hat{U}(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)\hat{\Psi}\right](\mathbf{x}, t) &= \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\left[-\frac{1}{2}m\mathbf{v}^2(t-b) + m\mathbf{v}\cdot(\mathbf{x} - \mathbf{a})\right]\right\} \times \\ &\hat{\Psi}(R^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{a} - \mathbf{v}(t-b)), t-b) \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Les fonctions $\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t)$ sont solutions de l'équation de Schrödinger libre

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta_x\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.10)$$

Dans la mécanique quantique non relativiste, on associe à l'opérateur \mathbf{Q} un opérateur de projection ou opérateur à valeur projective (traduction de PV measure)⁽⁵⁾ $E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta})$

$$E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta}) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| \quad (1.2.11)$$

qui vérifie

$$(E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta})\hat{\Psi})(\mathbf{x}, t) = \chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})\hat{\Psi}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.12)$$

où $\chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$ est la fonction caractéristique

$$\hat{\chi}_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{si } \mathbf{x} \in \hat{\Delta} \\ 0, & \text{si } \mathbf{x} \notin \hat{\Delta} \end{cases} \quad (1.2.13)$$

⁽⁵⁾Un opérateur de projection E obéit aux propriétés suivantes: $E = E^*$, $E = E^2$ et $\|E\| = 1$.

Cet opérateur [17] réalise la résolution spectrale de l'opérateur position

$$\mathbf{Q} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{x} |\mathbf{x}\rangle \langle \mathbf{x}| d\mathbf{x} \quad (1.2.14)$$

L'opérateur $E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta})$ est un opérateur de localisation spatiale pour l'espace des états du système et il est associé à une localisation parfaite ou stricte.

La probabilité que la mesure de la position donne une valeur appartenant à $\hat{\Delta}$ lorsque le système est dans l'état $|\Psi\rangle$ est donnée par la valeur moyenne de $E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta})$ dans l'état normalisé $\hat{\Psi}$

$$P_{\Psi}(\hat{\Delta}) = \langle \hat{\Psi} | E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta}) | \hat{\Psi} \rangle = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{x} \hat{\Psi}^*(\mathbf{x}) \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \quad (1.2.15)$$

L'opérateur de projection $E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta})$ possède les propriétés suivantes:

$$E(M) = 1 \quad (1.2.16)$$

$$E(\cup_{i=1}^{\infty} \Delta_i) = \sum_{i=1}^{\infty} E(\Delta_i), \quad \Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset, \quad i \neq j \quad (1.2.17)$$

qui provient du fait que la probabilité définie sur tout l'espace de configuration M , est normalisée à l'unité et que la probabilité définie sur une union d'ensembles de Borel est la somme des probabilités sur chaque ensemble Borel⁽⁶⁾ [18].

De plus il possède la propriété de transformation [17] suivante sous l'action du groupe de Galilée isochrone⁽⁷⁾

$$\hat{U}(g) E^{\mathbf{Q}}(\hat{\Delta}) \hat{U}^{-1}(g) = E^{\mathbf{Q}}(g\hat{\Delta}), \quad g\hat{\Delta} = \{R\mathbf{x} + \mathbf{v}t + \mathbf{a}, \mathbf{x} \in \hat{\Delta}\} \quad (1.2.18)$$

qui exprime le fait que la probabilité de localiser la particule qui est dans l'état transformé $\hat{U}(g)\hat{\Psi}$ dans la région $\hat{\Delta}$ est égale à la probabilité de localiser cette particule dans la région

⁽⁶⁾Les ensembles Borel dans \mathbb{R}^n , appartiennent à la plus petite famille de sous-ensembles de \mathbb{R}^n obéissant aux propriétés suivantes:

- la famille est fermée sous la complémentarité
- la famille est fermée sous les unions dénombrables
- la famille contient tous les sous-ensembles ouverts.

⁽⁷⁾Le groupe de Galilée isochrone est le groupe de Galilée sans les translations temporelles $g = (0, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R)$.

transformée $g\hat{\Delta}$ quand elle est dans l'état $\hat{\Psi}$. La paire $\{E^{\mathbf{Q}}, \hat{U}\}$ constitue un système d'imprimitivité dans l'espace de configuration. Les systèmes d'imprimitivité peuvent aussi décrire le processus de mesure d'autres observables fondamentales comme l'impulsion, le moment angulaire, le spin...[17]. La paire $\{E^{\mathbf{P}}, \tilde{U}\}$ forme alors un système d'imprimitivité dans l'espace des impulsions.

Le mécanisme de mesure de la mécanique quantique conventionnelle est donc défini par la donnée d'un système d'imprimitivité. Ce dernier est constitué d'une famille d'opérateurs de projection et de la représentation du groupe de symétrie de l'espace-temps considéré.

Toutefois, sachant qu'en réalité, l'appareil de mesure n'est pas parfait, les mesures des positions ou des impulsions ne peuvent se faire qu'avec une précision finie, cela revient à remplacer les opérateurs de projection (de localisation au sens strict ou parfait) par des opérateurs positifs de localisation dans l'espace des phases et les systèmes d'imprimitivité deviennent alors des systèmes d'imprimitivité généralisés ou systèmes de covariance.

1.2.2 Les systèmes de covariance et probabilités

Un système de covariance est une paire $\{U, E^\xi\}$ constituée d'une représentation U d'un groupe G et d'une mesure à valeurs opérateur positif⁽⁸⁾ (traduction de Positive Operator Valued measure ou POV) $E^\xi(\Delta)$ vérifiant [3]

$$U(g)E^\xi(\Delta)U^{-1}(g) = E^\xi(g\Delta), \quad \forall g \in G \quad (1.2.19)$$

La mécanique quantique stochastique non relativiste utilise la notion de localisation dans l'espace des phases $\Gamma = \mathbb{R}^6$. La représentation U du groupe de Galilée qui agit sur l'espace d'Hilbert $H(\mathbb{R}^6 = \mathbb{R}_{conf}^3 \times \mathbb{R}_{imp}^3, d\mathbf{q}d\mathbf{p})$ des fonctions $\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} | \Psi \rangle$ de carré intégrable dépendantes des variables position \mathbf{q} et impulsion \mathbf{p} a pour expression:

$$U(b, \mathbf{a}, \mathbf{v}, R) \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2} (t-b) + m\mathbf{v}(\mathbf{q}-\mathbf{a}) \right) \right\} D^j(R) \times \\ \Psi((R^{-1}(\mathbf{q}-\mathbf{v}(t-b)-\mathbf{a}), R^{-1}(\mathbf{p}-m\mathbf{v}), t-b) \quad (1.2.20)$$

⁽⁸⁾L'opérateur positif satisfait la condition suivante $E^\xi(\Delta) \geq 0$.

Cet opérateur ne peut pas être un projecteur car $E \neq E^2$.

où $D^j(R)$ est la matrice de rotation (elle est égale à 1 dans le cas scalaire).

Ces fonctions satisfont l'équation de Schrödinger par rapport à la variable \mathbf{q}

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta_{\mathbf{q}} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \quad (1.2.21)$$

L'opérateur positif $E^\xi(\Delta)$ [3] constituant le système de covariance est donné par l'intégrale

$$E^\xi(\Delta) = \int_{\Delta} |\xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} |; \quad \Delta \subset \Gamma \quad (1.2.22)$$

En étendant l'intégration à tout l'espace des phases Γ , on obtient un opérateur qui projette un vecteur $|\Psi\rangle$ de H sur un vecteur $|\Psi_\xi\rangle$ d'un sous-espace H^ξ de H , tel que

$$|\Psi_\xi\rangle = E^\xi(\Gamma) |\Psi\rangle = \int_{\Gamma} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \Psi_\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) |\xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}\rangle \quad (1.2.23)$$

où

$$\Psi_\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \langle \xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} | \Psi \rangle = \int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^*(\mathbf{q}', \mathbf{p}') \Psi(\mathbf{q}', \mathbf{p}', t) \quad (1.2.24)$$

L'opérateur $E^\xi(\Gamma)$ correspond à l'identité dans H^ξ

$$E^\xi(\Gamma) = \int_{\Gamma} |\xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}\rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} | = 1_{H^\xi} \quad (1.2.25)$$

Les fonctions $\xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}$ sont nommées résolution continue de l'identité dans H^ξ , elles s'obtiennent par application de la représentation espace des phases $U(0, \mathbf{a} = \mathbf{q}, \mathbf{v} = \mathbf{p}/m, I)$ sur la fonction ξ nommée générateur de cette résolution [19, 20]

$$\xi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} = U(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I) \xi \equiv U_{\mathbf{q}, \mathbf{p}} \xi \quad (1.2.26)$$

Les fonctions ξ possèdent la propriété d'invariance sous rotation

$$\xi(R\mathbf{q}, R\mathbf{p}) = \xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (1.2.27)$$

et les fonctions conjuguées se définissent comme

$$\xi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{p}\right) \xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (1.2.28)$$

Ces fonctions ξ sont interprétées comme les fonctions d'onde propres d'une particule d'essai jouant le rôle d'un micro-détecteur réel (imparfait) au repos stochastique à l'origine

d'un repère classique. Les fonctions $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ seront alors celles de la même particule à la position stochastique \mathbf{q} et ayant l'impulsion stochastique \mathbf{p} [3].

Dans les représentations configuration et impulsion, les fonctions $\xi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$, ont respectivement pour expressions

$$\hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{x}) = \left[\hat{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \hat{\xi} \right](\mathbf{x}) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})\right) \hat{\xi}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \quad (1.2.29)$$

$$\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k}) = \left[\tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}} \tilde{\xi} \right](\mathbf{k}) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} \cdot \mathbf{q}\right) \tilde{\xi}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \quad (1.2.30)$$

où $\hat{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ et $\tilde{U}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}$ sont les représentations configuration et impulsion de l'élément $(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)$ du groupe de Galilée.

La probabilité que la mesure simultanée de la position \mathbf{q} et de l'impulsion \mathbf{p} donne la valeur (\mathbf{q}, \mathbf{p}) de $\Delta = \hat{\Delta} \times \tilde{\Delta}$ est définie comme la moyenne de l'opérateur positif

$$P\left(\mathbf{q} \in \hat{\Delta}, \mathbf{p} \in \tilde{\Delta}\right) = \langle \Psi | E^\xi(\Delta) | \Psi \rangle = \int_{\Delta = \hat{\Delta} \times \tilde{\Delta}} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \Psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \quad (1.2.31)$$

$$\hat{\Delta} \subset \mathbb{R}_{conf}^3, \quad \tilde{\Delta} \subset \mathbb{R}_{imp}^3$$

En étendant le domaine d'intégration correspondant à l'une des variables à tout l'espace \mathbb{R}^3 , on définit les probabilités marginales

$$P\left(\mathbf{q} \in \hat{\Delta}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{imp}^3\right) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}_{imp}^3} d\mathbf{p} |\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})|^2$$

$$= \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi(\mathbf{x}) \left| \hat{\Psi}(\mathbf{x}) \right|^2 \quad (1.2.32)$$

$$P\left(\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{conf}^3, \mathbf{p} \in \tilde{\Delta}\right) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}_{conf}^3} d\mathbf{q} |\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})|^2$$

$$= \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \hat{\chi}_{\mathbf{p}}^\xi(\mathbf{k}) \left| \tilde{\Psi}(\mathbf{k}) \right|^2 \quad (1.2.33)$$

où les fonctions de confiance du micro-détecteur dans, respectivement, l'espace de configuration et d'impulsion sont données par

$$\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 \left| \hat{\xi}(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \right|^2 \quad (1.2.34)$$

$$\hat{\chi}_{\mathbf{p}}^\xi(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \left| \tilde{\xi}(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right|^2 \quad (1.2.35)$$

La fonction $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}(\mathbf{x})$ est interprétée comme la densité de probabilité que la mesure de la position donne \mathbf{q} quand la particule est en \mathbf{x} . De même, $\tilde{\chi}_{\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ est interprétée comme densité de probabilité que la mesure de l'impulsion donne \mathbf{p} quand l'impulsion de la particule est \mathbf{k} .

Ainsi, $P(\mathbf{q} \in \hat{\Delta}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}_{imp}^3)$ définit la probabilité que la mesure de la position de la particule donne la valeur \mathbf{q} contenue dans l'intervalle $\hat{\Delta}$ indépendamment de son impulsion. De même, $P(\mathbf{q} \in \mathbb{R}_{conf}^3, \mathbf{p} \in \tilde{\Delta})$ est interprétée comme la probabilité que l'impulsion donne la valeur \mathbf{p} de $\tilde{\Delta}$ indépendamment de la position. Ce sont ces probabilités marginales qui vont permettre le passage vers la mécanique quantique conventionnelle.

La probabilité totale $P(\mathbf{q} \in \hat{\Delta}, \mathbf{p} \in \tilde{\Delta})$ est interprété comme la probabilité que les mesures simultanées de la position et de l'impulsion donnent (\mathbf{q}, \mathbf{p}) dans $\Delta = \hat{\Delta} \times \tilde{\Delta}$, avec la fonction de confiance

$$\chi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}^{\xi}(\mathbf{x}, \mathbf{k}) = \hat{\chi}_{\mathbf{q}}^{\xi}(\mathbf{x}) \tilde{\chi}_{\mathbf{p}}^{\xi}(\mathbf{k}) \quad (1.2.36)$$

1.2.3 Densité et courant de probabilité

En mécanique quantique, on définit la densité de probabilité ρ et la densité de courant de probabilité \mathbf{J} par:

$$\rho(\mathbf{x}, t) = |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (1.2.37)$$

et

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*] = \frac{1}{m} \text{Re} \left[\Psi^* \left(\frac{\hbar}{i} \nabla \Psi \right) \right] \quad (1.2.38)$$

Ces deux quantités satisfont à l'équation de continuité

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = 0 \quad (1.2.39)$$

En mécanique quantique stochastique dans l'espace des phases, on définit des grandeurs analogues

$$\rho^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = |\Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 \quad (1.2.40)$$

et

$$\mathbf{J}^{\xi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \frac{\hbar}{2mi} [\Psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{q}} \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) - \Psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) \nabla_{\mathbf{q}} \Psi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)] \quad (1.2.41)$$

qui satisfont également à une équation de continuité

$$\frac{\partial \rho^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \nabla_{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{J}^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = 0 \quad (1.2.42)$$

Soulignons ici, que le courant de probabilité $J^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)$ est défini d'une manière ad hoc pour satisfaire l'équation de continuité. Afin de pouvoir lui donner une interprétation physique nous définissons les densités $(\hat{\rho}^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{t}), \hat{\mathbf{J}}^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{t}))$ stochastiques par analogie aux densités $(\hat{\rho}^{cl}(\mathbf{q}, t), \hat{\mathbf{J}}^{cl}(\mathbf{q}, t))$ de la mécanique statistique classique [3].

$$\hat{\rho}^\xi(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} |\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 d\mathbf{p} \quad (1.2.43)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^\xi(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mathbf{p}}{m} |\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 d\mathbf{p} \quad (1.2.44)$$

L'intégration des densités $(\rho^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t), \mathbf{J}^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t))$ par rapport à l'impulsion [3]

$$\hat{\rho}^\xi(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}_{imp}^3} d\mathbf{p} \rho^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi(\mathbf{x}) |\Psi(\mathbf{x}, t)|^2 \quad (1.2.45)$$

$$\hat{\mathbf{J}}^\xi(\mathbf{q}, t) = \int_{\mathbb{R}_{imp}^3} \mathbf{J}^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) d\mathbf{p} = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi(\mathbf{x}) \mathbf{J}(\mathbf{x}, t) \quad (1.2.46)$$

redonne les mêmes densités (1.2.43) et (1.2.44), à condition que ξ soit réelle, et permet, à la limite ponctuelle (qui correspond au passage $\hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi(\mathbf{x}) \rightarrow \delta(\mathbf{x} - \mathbf{q})$ de la fonction de confiance de l'appareil de mesure réel vers l'appareil de mesure parfait), de montrer que la densité de probabilité stochastique $\hat{\rho}^\xi(\mathbf{q}, t)$ et le courant stochastique $\hat{\mathbf{J}}^\xi(\mathbf{q}, t)$ tendent vers leurs homologues $\rho(\mathbf{q}, t)$ et $J(\mathbf{q}, t)$ de la mécanique quantique conventionnelle.

1.2.4 Les propagateurs

En mécanique quantique, l'évolution temporelle du vecteur d'état $|\psi\rangle$ se fait selon la loi [11]

$$|\psi_t\rangle = \hat{U}(t - t') |\psi_{t'}\rangle \quad (1.2.47)$$

où l'opérateur évolution $\hat{U}(t - t')$ est donné par

$$\begin{aligned}\hat{U}(t - t') &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar} H_0(t - t') \right] \\ &= \exp \left[-\frac{i\mathbf{P}^2}{2m\hbar}(t - t') \right]\end{aligned}\quad (1.2.48)$$

Le propagateur

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \langle \mathbf{x} | \hat{U}(t - t') | \mathbf{x}' \rangle \quad (1.2.49)$$

est défini comme l'élément de matrice de l'opérateur évolution $\hat{U}(t - t')$ dans la représentation configuration. Il représente l'amplitude de probabilité de transition de l'état localisé en \mathbf{x}' à l'instant t' , vers l'état localisé en \mathbf{x} à l'instant t .

Ce propagateur est caractérisé par les propriétés d'unitarité et de reproductibilité suivantes

$$K(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', t') = K^*(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}'', t'') \quad (1.2.50)$$

$$K(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} K(\mathbf{x}'', t''; \mathbf{x}', t') K(\mathbf{x}', t'; \mathbf{x}, t) d\mathbf{x}' \quad (1.2.51)$$

Pour une particule libre de masse m , son expression est [21]

$$K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \left(\frac{m}{i2\pi\hbar(t - t')} \right)^{\frac{3}{2}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \frac{1}{2} \frac{m(\mathbf{x} - \mathbf{x}')^2}{(t - t')} \right) \quad (1.2.52)$$

Remarquons que lorsqu'on tente de définir, à l'aide de ce propagateur, la probabilité que la particule ayant été préparée à l'instant t' à la position \mathbf{x}' soit détectée à l'instant t à la position \mathbf{x}

$$P(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') = \int \rho(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t') d\mathbf{x} = (2\pi\hbar)^3 \int |K(\mathbf{x}, t; \mathbf{x}', t')|^2 d\mathbf{x} \longrightarrow \infty \quad (1.2.53)$$

alors cette probabilité diverge dans l'espace de configuration.

En gardant à l'esprit le fait qu'un propagateur est une amplitude de probabilité de transition entre un état initial et un état final, on définit le propagateur stochastique comme la valeur moyenne de l'opérateur évolution exprimé dans la représentation espace des phases du groupe de Galilée

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \langle \xi_{\mathbf{qp}} | U(t - t') | \xi_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \rangle \quad (1.2.54)$$

cette quantité conserve les propriétés d'unitarité et de reproductibilité

$$\begin{aligned}
 K^\xi(\mathbf{q}'' , \mathbf{p}'' , t'' ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') &= K^{\xi*}(\mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t' ; \mathbf{q}'' , \mathbf{p}'' , t'') \\
 &= \int_{\mathbb{R}^6} K^\xi(\mathbf{q}'' , \mathbf{p}'' , t'' ; \mathbf{q} , \mathbf{p} , t) \times \\
 &\quad K^\xi(\mathbf{q} , \mathbf{p} , t ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') d^3\mathbf{q} d^3\mathbf{p} \quad (1.2.55)
 \end{aligned}$$

La densité de probabilité que la particule ayant été préparée à l'instant t' aux coordonnées stochastiques $\left\{ \left(\mathbf{q}' , \hat{\chi}_{\mathbf{q}'}^\xi \right) ; \left(\mathbf{p}' , \tilde{\chi}_{\mathbf{p}'}^\xi \right) \right\}$ soit détectée à l'instant t aux coordonnées stochastiques $\left\{ \left(\mathbf{q} , \hat{\chi}_{\mathbf{q}}^\xi \right) ; \left(\mathbf{p} , \tilde{\chi}_{\mathbf{p}}^\xi \right) \right\}$ est définie comme le carré d'un propagateur stochastique

$$\rho(\mathbf{q} , \mathbf{p} , t ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') = (2\pi\hbar)^3 \left| K^\xi(\mathbf{q} , \mathbf{p} , t ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') \right|^2 \quad (1.2.56)$$

Cette extrapolation lève la difficulté originale (le fait que le propagateur (1.2.49) n'est ni un véritable produit scalaire, ni il détermine une véritable densité de probabilité), en effet, comme (1.2.54) satisfait

$$(2\pi)^3 \int_{\mathbb{R}^6} \left| K^\xi(\mathbf{q}'' , \mathbf{p}'' , t'' ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') \right|^2 d^3\mathbf{q}'' d^3\mathbf{p}'' = 1 \quad (1.2.57)$$

il détermine une véritable densité de probabilité

Le passage vers la limite ponctuelle permet de lier le propagateur stochastique (1.2.54) au propagateur conventionnel (1.2.49). Dans le cas particulier [3] où la fonction d'onde propre stochastique de la particule d'essai jouant le rôle de micro détecteur correspond à celle de l'état fondamental d'oscillateur harmonique non relativiste [22], le propagateur stochastique a alors pour expression [3]

$$\begin{aligned}
 K_l(\mathbf{q}'' , \mathbf{p}'' , t'' ; \mathbf{q}' , \mathbf{p}' , t') &= (2\pi\hbar)^{-3} \left(\frac{l^2}{l^2(t'' - t')} \right)^{\frac{3}{2}} \times \\
 &\quad \exp\left[-\frac{(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}')^2}{8l^2(t'' - t')} - \frac{l^4}{2l^2(t'' - t')} \left(\frac{\mathbf{p}'' - \mathbf{p}'}{\hbar} \right)^2 \right] \times \\
 &\quad \times \exp \frac{il^2}{2\hbar l^2(t'' - t')} \times \\
 &\quad \left[(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}') \cdot (\mathbf{p}'' + \mathbf{p}') - \frac{t'' - t'}{2m} (\mathbf{p}''^2 + \mathbf{p}'^2) \right] \quad (1.2.58)
 \end{aligned}$$

$$\text{où } l^2(t'' - t') = l^2 + i \frac{\hbar}{4m} (t'' - t')$$

Le passage au cas ponctuel correspond à la limite du paramètre l'extension l nul

$$\lim_{l \rightarrow 0} \left(\frac{\pi \hbar^2}{2l^2} \right)^{3/2} K_l(\mathbf{q}'', \mathbf{p}'', t''; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \begin{cases} K(q'', t''; q', t') & t'' \neq t' \\ \delta(\mathbf{q}'' - \mathbf{q}') & t'' = t' \end{cases} \quad (1.2.59)$$

Le propagateur conventionnel émerge comme une limite renormalisée du propagateur stochastique. Quand $l \rightarrow 0$, le terme de renormalisation tend vers l'infini mais pas le propagateur stochastique.

1.3 La mécanique quantique stochastique pour une particule libre spinorielle

Nous avons, dans le paragraphe précédent, présenté la mécanique quantique stochastique pour le cas de la particule libre scalaire. Voyons comment sont formulés les principaux résultats lorsqu'on attribue à la particule ainsi qu'au micro-détecteur un spin respectivement désigné par \mathbf{j} et \mathbf{j}' . Le système, constitué de la particule et du micro détecteur, aura donc un spin total \mathbf{J} .

La représentation U_J espace des phases du groupe de Galilée G agit dans l'espace d'Hilbert H_J

$$H_J = l^2(2J + 1) \otimes L^2(\Gamma); \quad \Gamma = \mathbb{R}^6 \quad (1.3.1)$$

Comme cette représentation est hautement réductible, il est nécessaire de trouver ses sous-représentations irréductibles pour pouvoir décrire les particules élémentaires [13]. La représentation espace des phases de spin total \mathbf{J} est donnée par :

$$(U_J(g)\psi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \exp \frac{i}{\hbar} \left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2} (t - b) + m\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{a}) \right) D^{\mathbf{J}}(R) \times \psi(R^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{v}(t - b) - \mathbf{a}), R^{-1}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}), t - b) \quad (1.3.2)$$

où $D^{\mathbf{J}}(R)$ [31] est la matrice de rotation de spin $J = 0, \frac{1}{2}, 1, \dots$

L'étude des sous-représentations irréductibles de la représentation U_J se fait en effectuant l'analyse harmonique du groupe de Galilée. Deux cas de figure se présentent [23].

Le premier, que nous allons présenter, consiste à considérer un spin total \mathbf{J} nul ($\mathbf{J} = \mathbf{0}$), cela correspond à l'égalité des spins entiers de la particule et du micro-détecteur. Dans le deuxième cas, le spin est non nul ($\mathbf{J} \neq \mathbf{0}$), le spin de la particule et du micro-détecteur sont alors différents et peuvent être entiers ou demi-entiers.

1.3.1 La représentation de spin total nul

Le système évolue dans l'espace d'Hilbert $H_0 \simeq L^2(\Gamma)$ et la représentation espace des phases s'écrit :

$$(U_0(g)\psi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}\left(-\frac{m\mathbf{v}^2}{2}(t-b) + m\mathbf{v} \cdot (\mathbf{q} - \mathbf{a})\right)\right) \times \psi(R^{-1}(\mathbf{q} - \mathbf{v}(t-b) - \mathbf{a}), R^{-1}(\mathbf{p} - m\mathbf{v}), t-b) \quad (1.3.3)$$

En considérant une particule de spin entier \mathbf{j} et un micro-détecteur de type n et de même spin \mathbf{j} , chaque sous-représentation irréductible est désignée par U_0^{nj} et le sous-espace d'Hilbert sur le quel elle agit H_0^{nj} . La particule est représentée dans l'espace des impulsions par la fonction $\tilde{\psi}(\mathbf{k})$ ayant $(2j+1)$ composantes $\tilde{\psi}_s(\mathbf{k})$ avec $\tilde{\psi}_s \in L^2(\mathbb{R}^3)$ et $s = -j, \dots, +j$. Le micro-détecteur est représenté par sa fonction propre $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p}}(\mathbf{k})$ ayant $(2j+1)$ composantes $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{k})$. Le sous-espace H_0^{nj} est constitué de la famille de toutes les fonctions de H_0 qui s'écrivent sous la forme suivante:

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}^*(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.3.4)$$

$$= \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{q} \cdot \mathbf{k}\right) \tilde{\xi}_s^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.3.5)$$

Les fonctions $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}$ s'écrivent en coordonnées sphériques comme le produit d'une composante radiale $e_n(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)$ et d'une composante angulaire $Y_{js}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$. Les fonctions $e_n(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|)$ appartiennent à l'espace $L^2_{\mu}(\mathbb{R}^1, p^2 dp)$ de toutes les fonctions $f(p)$ de carré sommable par rapport au module $p \in [0, \infty[$ de l'impulsion et à la mesure d'intégration $d\bar{\mu}(p) = p^2 dp$. Les fonctions angulaires ne sont autres que les harmoniques sphériques avec la notation $Y_{js}(\mathbf{k}) = Y_j^s(\mathbf{k}/|\mathbf{k}|)$; $j = 0, 1, 2, \dots$

Ainsi, la fonction d'onde propre $\tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}(\mathbf{p} - \mathbf{k})$ s'écrit

$$\tilde{\xi}_s(\mathbf{p} - \mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} e_n^*(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) Y_{js}^*(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \quad (1.3.6)$$

et les fonctions $\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p})$ peuvent être écrites sous la forme[23]:

$$\psi_{nj}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathbf{q} \cdot \mathbf{k}\right) e_n(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) Y_{js}(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.3.7)$$

pour tout n et j fixés.

La représentation $U_0(g)$ se décompose en somme directe des sous-représentations U_0^{nj} et l'espace H_0 en sous-espaces orthogonaux H_0^{nj}

$$U_0(g) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} U_0^{nj}(g) \quad (1.3.8)$$

et

$$L^2(\Gamma) \simeq H_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} H_0^{nj} \quad (1.3.9)$$

L'irréductibilité des sous-représentations $U_0^{nj}(g)$ ⁽⁹⁾ est vérifiée en utilisant la méthode d'équivalence des représentations, "si une représentation est irréductible, toute autre représentation qui lui est équivalente est également irréductible" [24].

En effet, partant de la représentation impulsion $\tilde{U}_j(g)$, qui est unitaire et irréductible, nous pouvons trouver une transformation W_{ξ}

$$W_{\xi} : \tilde{\psi} \longrightarrow \psi_{nj}, \tilde{\psi} \in \tilde{H}_j, \psi_{\xi} \in H_0^{\xi} \quad (1.3.10)$$

telle que

$$U_0^{\xi}(g) = W_{\xi} \tilde{U}_j(g) W_{\xi}^{-1} \quad (1.3.11)$$

assurant l'invariance des produits scalaires[10]

$$\langle \psi_{\xi} | \psi_{\xi} \rangle_{H_0^{nj}} = \langle W_{\xi} \tilde{\psi} | W_{\xi} \tilde{\psi} \rangle_{H_0^{nj}} = \langle \tilde{\psi} | \tilde{\psi} \rangle_{\tilde{H}_j} \quad (1.3.12)$$

et dont l'inverse existe

$$W_{\xi}^{-1} W_{\xi} = W_{\xi} W_{\xi}^{-1} = 1 \quad (1.3.13)$$

⁽⁹⁾Par commodité, nous allons noter dans ce qui suit H_0^{nj} par H_0^{ξ} et $U_0^{nj}(g)$ par $U_0^{\xi}(g)$

1.3.2 Les systèmes de covariance et probabilités

La mesure à valeur projecteur (PV) $E_0(\Delta)$ [23] associé à la représentation U_0 donne un système de covariance $\{U_0, E_0\}$, pour le groupe de Galilée isochrone G' .

$$(E_0(\Delta)\psi)(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) = \chi_\Delta(\mathbf{q}, \mathbf{p})\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, 0) \quad \Delta \subset \Gamma \quad (1.3.14)$$

Ce système de covariance, est décomposable en somme directe de systèmes de covariances irréductibles $\{U_0^{nj}, E_0^{nj}\}$.

$$E_0^\xi(\Delta) = \int_{\Delta} |U_0(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)\xi\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \langle U_0(0, \mathbf{q}, \mathbf{p}/m, I)\xi| \quad (1.3.15)$$

chaque couple $\{U_0^{nj}, E_0^{nj}\}$ constitue un système de covariance dans le sous-espace H_0^{nj} . L'interprétation physique des opérateurs $E_0^{nj}(\Delta)$ est liée à la localisation des systèmes quantiques dans l'espace des phases stochastique. En effet, la probabilité de localisation dans cet espace est définie comme la valeur moyenne de l'opérateur positif $E_0^\xi(\Delta)$

$$\begin{aligned} P_{\psi_\xi}(\Delta) &= \langle \psi_\xi | E_0^\xi(\Delta) | \psi_\xi \rangle \\ &= \int_{\Delta = \hat{\Delta} \times \tilde{\Delta}} d\mathbf{q}d\mathbf{p} \psi_\xi^*(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \psi_\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (1.3.16)$$

Une interprétation plus détaillée est possible quand on passe aux systèmes de covariances marginaux $\{U_0(g), \tilde{E}_0^{nj}\}$ et $\{U_0(g), \hat{E}_0^{nj}\}$.

$$\tilde{E}_0^\xi(\tilde{\Delta}) = E_0^\xi(\mathbb{R}_{conf}^3 \times \tilde{\Delta}), \quad \tilde{\Delta} \subset \mathbb{R}_{imp}^3 \quad (1.3.17)$$

$$\hat{E}_0^\xi(\hat{\Delta}) = E_0^\xi(\hat{\Delta} \times \mathbb{R}_{imp}^3), \quad \hat{\Delta} \subset \mathbb{R}_{conf}^3 \quad (1.3.18)$$

grâce aux quels les probabilités marginales sont définies:

$$P_{\psi_\xi}(\tilde{\Delta}) = \langle \psi_\xi | \tilde{E}_0^\xi(\tilde{\Delta}) | \psi_\xi \rangle \quad (1.3.19)$$

$$P_{\psi_\xi}(\hat{\Delta}) = \langle \psi_\xi | \hat{E}_0^\xi(\hat{\Delta}) | \psi_\xi \rangle \quad (1.3.20)$$

Selon l'orientation du spin de la particule par rapport au micro-détecteur, les expressions de ces probabilités sont différentes. En fait, deux cas se présentent, celui où les deux spin sont alignés et celui où la particule possède un spin ayant une direction quelconque par rapport à celui du micro-détecteur.

Premier cas

L'amplitude de densité de probabilité de spin $\hat{\psi}_s(\mathbf{x})$ est parfaitement alignée en tout point $\mathbf{x} \in \mathbb{R}_{conf}^3$ avec l'axe des coordonnées stochastiques [23] sur lequel le spin est mesuré. Cet axe coïncide avec le spin du micro-détecteur de sorte qu'une seule composante de $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ est non nulle. Les probabilités marginales s'écrivent [23]

$$P_{\psi_\xi}(\tilde{\Delta}) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \chi_{\mathbf{p},s}(\mathbf{k}) \left| \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) \right|^2 \quad (1.3.21)$$

$$P_{\psi_\xi}(\hat{\Delta}) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{x} \chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x}) \left| \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) \right|^2 \quad (1.3.22)$$

en fonction des fonctions de confiance

$$\chi_{\mathbf{p},s}(\mathbf{k}) = (2\pi\hbar)^3 \left| \tilde{\xi}_s(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \right|^2 \quad (1.3.23)$$

$$\chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x}) = (2\pi\hbar)^3 \left| \hat{\xi}_s(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \right|^2 \quad (1.3.24)$$

La fonction de confiance $\chi_{\mathbf{p},s}(\mathbf{k})$ représente la densité de probabilité que la mesure de l'impulsion donne \mathbf{p} quand la particule a l'impulsion \mathbf{k} , et $\chi_{\mathbf{q},s}(\mathbf{x})$ est la densité de probabilité que la mesure de la position donne \mathbf{q} quand la particule est en \mathbf{x} . Cette interprétation reste la même que celle du paragraphe précédent mais pour une particule avec un spin entier non nul.

La probabilité $P_{\psi_\xi}(\Delta)$ (1.3.16) représente la probabilité d'observer les valeurs stochastiques $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) \in \Delta$ pour une mesure simultanée de la position et de l'impulsion de cette particule.

Deuxième cas

En général, l'amplitude de densité de probabilité $\hat{\psi}(\mathbf{x})$ est une matrice colonne à $(2j + 1)$ composantes $\hat{\psi}_s(\mathbf{x})$ [23]. Le spin de la particule prend ainsi une direction quelconque par rapport à l'axe des coordonnées stochastiques sur lequel il est mesuré. La fonction d'onde s'écrit alors

$$\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.3.25)$$

et les probabilités marginales dans les espaces impulsion et configuration ont la forme suivante

$$P_{\psi_\xi}(\tilde{\Delta}) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \left[\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}^*(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_s(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \right] \times \left[\sum_{s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s'}(\mathbf{k}') \tilde{\psi}_{s'}^*(\mathbf{k}') d\mathbf{k}' \right] \quad (1.3.26)$$

$$P_{\psi_\xi}(\hat{\Delta}) = \int_{\hat{\Delta}} d\mathbf{q} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} \left[\sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s}^*(\mathbf{x}) \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \right] \times \left[\sum_{s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\xi}_{\mathbf{q},\mathbf{p},s'}(\mathbf{x}') \hat{\psi}_{s'}^*(\mathbf{x}') d\mathbf{x}' \right] \quad (1.3.27)$$

Ces mêmes probabilités peuvent se mettre sous la forme

$$P_{\psi_\xi}(\hat{\Delta}) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \hat{\psi}_s^*(\mathbf{x}) f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \hat{\psi}_{s'}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (1.3.28)$$

$$P_{\psi_\xi}(\tilde{\Delta}) = \sum_{s,s'=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\psi}_s^*(\mathbf{k}) f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \tilde{\psi}_{s'}(\mathbf{k}) d\mathbf{k} \quad (1.3.29)$$

où les fonctions [23]

$$f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) = \int_{\Delta_{\mathbf{k}}} d\mathbf{p}' \tilde{\xi}_s(\mathbf{p}') \tilde{\xi}_{s'}^*(\mathbf{p}') \quad (1.3.30)$$

$$f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = \int_{\Delta_{\mathbf{x}}} d\mathbf{q}' \hat{\xi}_s(\mathbf{q}') \hat{\xi}_{s'}^*(\mathbf{q}') \quad (1.3.31)$$

avec

$$\mathbf{q}' = \mathbf{x} - \mathbf{q} \quad , \quad \Delta_{\mathbf{x}} = \mathbf{x} - \hat{\Delta} \quad (1.3.32)$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{k} - \mathbf{p} \quad , \quad \Delta_{\mathbf{k}} = \mathbf{k} - \tilde{\Delta} \quad (1.3.33)$$

possèdent les limites suivantes

$$\lim_{\hat{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^3} f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) = \delta_{ss'} \quad (1.3.34)$$

$$\lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow \mathbb{R}^3} f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) = \delta_{ss'} \quad (1.3.35)$$

Ces fonctions servent à définir les fonctions de distribution de spin [23]

$$\chi_s^{\Delta \mathbf{x}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \right|^2 \right)^{-1} \quad (1.3.36)$$

$$\chi_s^{\Delta \mathbf{k}}(s') = \left\| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right\|^2 \left(\sum_{s'=-j}^{+j} \left| f_{ss'}^{\tilde{\Delta}}(\mathbf{k}) \right|^2 \right)^{-1} \quad (1.3.37)$$

qui vérifient les relations de normalisation suivantes [25]

$$\sum_{s'=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta \mathbf{x}}(s') = \sum_{s=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta \mathbf{x}}(s') = 1 \quad (1.3.38)$$

$$\sum_{s'=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta \mathbf{k}}(s') = \sum_{s=-j}^{+j} \chi_s^{\Delta \mathbf{k}}(s') = 1 \quad (1.3.39)$$

Ces relations de normalisation permettent d'interpréter $\chi_s^{\Delta \mathbf{x}}(s')$ et $\chi_s^{\Delta \mathbf{k}}(s')$ comme des fonctions de confiance du spin stochastique $s = (s, \chi_s)$. Le sens physique de ces fonctions de confiance est que la mesure du spin par rapport au système quantique ne donne jamais une valeur exacte mais une distribution de valeurs.

Notons aussi que ces interprétations sont compatibles avec la limite ponctuelle qui correspond à la mécanique quantique conventionnelle, car la fonction $f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x})$ tend vers le produit du symbole de Kronecker avec la fonction de confiance dans l'espace de configuration [23].

$$f_{ss'}^{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \longrightarrow \delta_{ss'} \chi_{\hat{\Delta}}(\mathbf{x}) \quad (1.3.40)$$

Par conséquent, la probabilité stochastique tend vers la probabilité conventionnelle

$$P_{\psi_\xi}(\hat{\Delta}) \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^3} \left| \hat{\psi}_s(\mathbf{x}) \right|^2 d\mathbf{x} \quad (1.3.41)$$

1.3.3 Les propagateurs

Le propagateur s'exprime par la relation suivante

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \langle \xi_{\mathbf{q}\mathbf{p}} | U(t - t') | \xi_{\mathbf{q}'\mathbf{p}'} \rangle \quad (1.3.42)$$

Ce propagateur possède la propriété d'invariance par rapport aux translations spatiales et aux rotations [23]

$$K^\xi(\mathbf{a} + R\mathbf{q}, \mathbf{a} + R\mathbf{p}, \mathbf{t}; \mathbf{a} + R\mathbf{q}', \mathbf{a} + R\mathbf{p}', t') = K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, \mathbf{t}; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') \quad (1.3.43)$$

Pour une particule de spin non nul, le propagateur libre stochastique a pour expression⁽¹⁰⁾

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t')\right) \tilde{\xi}_{\mathbf{q}, \mathbf{p}, s}^*(\mathbf{k}) \tilde{\xi}_{\mathbf{q}', \mathbf{p}', s}(\mathbf{k}) \quad (1.3.44)$$

Ce propagateur contient $(2j+1)$ termes et représente l'amplitude de probabilité que la particule, ayant été préparée aux coordonnées stochastiques $(\mathbf{q}', \mathbf{p}')$ à l'instant t' , soit détectée en (\mathbf{q}, \mathbf{p}) à l'instant t sans que s change de valeur.

Si on exprime les fonctions d'onde propre en coordonnées sphériques, ce même propagateur possède l'expression suivante

$$K^\xi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t; \mathbf{q}', \mathbf{p}', t') = \frac{2j+1}{4\pi(2\pi\hbar)^3} \left[\int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{k} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \left[(\mathbf{q} - \mathbf{q}') \cdot \mathbf{k} - \frac{\mathbf{k}^2}{2m}(t-t') \right] \right) \times \right. \\ \left. P_j\left(\frac{(\mathbf{p} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{p}' - \mathbf{k})}{|\mathbf{p} - \mathbf{k}| |\mathbf{p}' - \mathbf{k}|}\right) e_n^*(|\mathbf{p} - \mathbf{k}|) e_n(|\mathbf{p}' - \mathbf{k}|) \right] \quad (1.3.45)$$

où P_j est un polynôme de Legendre d'ordre j .

1.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté la mécanique quantique stochastique pour une particule libre, d'abord scalaire puis spinorielle. Les résultats de cette étude nous permettent de dire que la mécanique quantique stochastique est une théorie complète qui résout les inconsistances mathématiques de la mécanique quantique conventionnelle. La notion de mesure quantique est alors reformulée en terme de théorie des groupes en considérant des appareils de mesure quantiques et imparfaits et en passant d'un espace de configuration (ou impulsion) à un espace des phases.

⁽¹⁰⁾Relation obtenue en exprimant l'opérateur évolution et les fonctions d'onde propres en représentation impulsion

**Stochastique pour une
Particule Relativiste libre****2.1 Introduction**

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté la mécanique quantique stochastique (MQS) non relativiste pour des systèmes avec et sans spin. Dans cette théorie, les particules élémentaires qui évoluent dans un espace des phases stochastiques $\Gamma^\xi = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}; \chi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^\xi)\}$ ne sont plus ponctuelles mais possèdent une extension stochastique liée au processus de mesure utilisé lors la mesure de la position, de l'impulsion et du spin. La mesure est alors décrite par des opérateurs E^ξ positifs, dont la valeur moyenne est liée à la probabilité de mesurer des valeurs stochastiques et qui sont définis par des fonctions d'onde propre ξ d'une particule d'essai stochastiquement étendue jouant le rôle de micro-détecteur réel possédant une fonction de confiance $\chi_{\mathbf{q}, \mathbf{p}}^\xi$ [4]. Chacune des fonctions ξ caractérise une représentation irréductible de l'espace des phases du groupe de Galilée du système quantique considéré. La MQS résout les inconsistances mathématiques de la mécanique quantique conventionnelle mais c'est surtout dans le domaine relativiste que la MQS présente un intérêt majeur. En effet, la mécanique quantique stochastique relativiste

(MQSR), qui se construit par analogie à la mécanique quantique stochastique en remplaçant formellement le groupe de Galilée par celui de Poincaré, permet d'appliquer les principes de la relativité restreinte à ceux de la mécanique quantique sans que cela ne conduise aux inconsistances habituelles de la mécanique quantique relativiste conventionnelle, telles que des densités de probabilité négatives, des quadri-vecteurs courant non covariants, des opérateurs positions impossibles à construire...

La MQSR étudie des particules élémentaires qui évoluent dans un espace des phases stochastiques relativistes $\mu_{m,\eta} = \{(q, p; \chi_{q,p}^\eta)\}$, où $\chi_{q,p}^\eta$ est la fonction de confiance d'un micro-détecteur réel ayant une fonction d'onde propre η , servant à mesurer les quadri-positions et quadri-impulsions stochastiques. Mais si on veut généraliser les résultats de la MQS au cas relativiste, il faut conserver le caractère tridimensionnel de l'espace et la notion usuelle de simultanéité. Cette dernière est définie par un feuilletage⁽¹¹⁾ de l'espace-temps de Minkowski par une famille d'hyperplans genre espace orthogonaux à l'axe du temps. Ainsi sur un même hyperplan σ , les interprétations de la MQS se généralisent au cas de la MQSR.

Nous allons, dans ce chapitre présenter la MQSR. Pour se faire, nous commençons par un premier paragraphe qui traite la MQSR pour la particule libre scalaire dans lequel nous abordons en premier les systèmes d'imprimitivité et les difficultés liées à leur utilisation dans le domaine relativiste, puis nous présentons l'espace des phases stochastiques relativistes, les systèmes de covariance relativistes et les interprétations physiques qui vont avec. Nous introduisons également le quadri-vecteur courant de probabilité et le propagateur stochastique. Dans le paragraphe suivant, nous étendons les principaux résultats de la MQSR dans le cas où la particule possède un spin j et plus particulièrement un spin entier en effectuant l'analyse harmonique de la représentation de spin zéro de l'espace des phases du groupe de Poincaré.

⁽¹¹⁾voir annexe A

2.2 La mécanique quantique stochastique pour une particule relativiste libre

2.2.1 Les systèmes d'imprimitivité relativistes

Dans le régime relativiste, le groupe de Galilée est remplacé par celui de Poincaré ou plus exactement par le sous-groupe noté P_+^\uparrow qui ne contient ni les inversions spatiales ni celle du temps. P_+^\uparrow se réalise comme le produit semi-direct du groupe des translations spatio-temporelles T^4 (dont les éléments sont des quadri-vecteurs a^μ) et du groupe de Lorentz propre $SO(1,3)$. Chaque transformation de Lorentz propre Λ est décomposée en un produit d'une rotation R par un transformation Λ_ν de vitesse v , nommé boost de Lorentz pure, son action sur les quadri-vecteurs $x^\mu = (x^0, \mathbf{x})$ de l'espace de Minkowski $M(1,3)$ est

$$\begin{aligned} x^0 &\mapsto x'^0 = \gamma_{\mathbf{v}} \left(x^0 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c} \right); \quad \gamma_{\mathbf{v}} = \left(1 - \frac{\mathbf{v}^2}{c^2} \right)^{-1/2} \\ \mathbf{x} &\mapsto \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v} \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{c} \left(x^0 + \frac{\gamma_{\mathbf{v}}}{\gamma_{\mathbf{v}} + 1} \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{c} \right) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

Un élément du groupe de Poincaré est donc décrit par les paramètres (a, Λ) et son action sur, respectivement les quadri-vecteurs position et impulsion, est

$$\begin{aligned} x &\mapsto x' = a + \Lambda x; \quad \Lambda = \Lambda_v R \\ k &\mapsto k' = \Lambda k = \Lambda_v(k^0, R\mathbf{k}); \quad v = \gamma_{\mathbf{v}}(c, \mathbf{v}) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

Une particule élémentaire quantique scalaire relativiste libre de masse au repos m est associée à la représentation vectorielle de Wigner \tilde{U} unitaire irréductible du groupe de Poincaré. Cette représentation agit sur l'espace d'Hilbert $L^2(\nu_m^\pm, d\Omega_m(k))$ des fonctions $\tilde{\varphi}(k) = \langle k | \varphi \rangle$ de carré intégrable sur l'hyperboloïde ν_m des masses à deux nappes tridimensionnelles ν_m^+, ν_m^- muni de l'élément de mesure invariant relativiste $d\Omega_m(k)$

$$\nu_m = \nu_m^+ \cup \nu_m^-; \quad \nu_m^\pm = \{k / k^2 = k \cdot k = k_0 \cdot k_0 - \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = m^2 c^2, k^0 \geq 0\} \quad (2.2.3)$$

$$d\Omega_m(k) = \delta(k^2 - m^2 c^2) dk^4 \quad (2.2.4)$$

et son action est définie par

$$\tilde{U}(a, \Lambda) : \tilde{\varphi}(k) \mapsto \tilde{\varphi}'(k) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} a \cdot k\right) \tilde{\varphi}(\Lambda^{-1}k) \quad (2.2.5)$$

où

$$a \cdot k = a_0 k_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} \quad (2.2.6)$$

Dans cette représentation, les générateurs infinitésimaux pour, respectivement, les translations spatio-temporelles, les rotations spatiales et les boosts⁽¹²⁾ sont réalisés comme:

$$(\tilde{P}_\mu \tilde{\varphi})(k) = k_\mu \tilde{\varphi}(k); \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2.7)$$

$$(\mathbf{J} \tilde{\varphi})(k) = -i\hbar (\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \tilde{\varphi}(k); \quad \nabla_{\mathbf{k}} = \left(\frac{\partial}{\partial k^i}\right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.2.8)$$

$$(\mathbf{K} \tilde{\varphi})(k) = i\hbar k_0 \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\varphi}(k); \quad (2.2.9)$$

où l'opérateur quadri-impulsion \tilde{P}_μ possèdent à travers ses composantes temporelle et spatiales les interprétations physiques d'hamiltonien $\tilde{P}_0 = H$ et d'opérateur impulsion $\tilde{\mathbf{P}}$. L'opérateur \mathbf{J} est le moment cinétique, tandis que le générateur \mathbf{K} peut être lié à un opérateur position du type Galiléen.

On associe à l'opérateur \tilde{P}_μ , un opérateur $E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta})$ qui est un projecteur et qui vérifie

$$(E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta}) \tilde{\varphi})(k) = \chi_{\tilde{\Delta}}(k) \tilde{\varphi}(k); \quad \tilde{\Delta} \subset \nu_m^\pm \quad (2.2.10)$$

où $\chi_{\tilde{\Delta}}(k)$ est la fonction caractéristique de $\tilde{\Delta}$. Cet opérateur est nommé la mesure à valeur projecteur (PV) qui réalise la résolution spectrale de l'opérateur quadri-impulsion \tilde{P}_μ . La famille d'opérateurs $E^{\tilde{P}}(\tilde{B})$ est covariante sous l'action des transformations de Poincaré

$$\tilde{U}(a, \Lambda) E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta}) \tilde{U}^{-1}(a, \Lambda) = E^{\tilde{P}}(\Lambda \tilde{\Delta}) \quad (2.2.11)$$

et la paire $\{\tilde{U}(a, \Lambda), E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta})\}$ constitue un système d'imprimitivité [26] de la représentation impulsion.

La probabilité que la mesure de l'impulsion donne une valeur appartenant à $\tilde{\Delta}$ lorsque le système est dans l'état $\tilde{\varphi}$ est donnée par la valeur moyenne de $E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta})$ dans l'état

⁽¹²⁾voir annexe A

normalisé $\tilde{\varphi}$

$$\langle \tilde{\varphi} | E^{\tilde{P}}(\tilde{\Delta})\tilde{\varphi \rangle}_{\nu_m^\pm} = \int_{\tilde{\Delta} \cap \nu_m^\pm} |\tilde{\varphi}(k)|^2 d\Omega_m^\pm(k) \quad (2.2.12)$$

Ainsi si nous interprétons \tilde{P}^μ , comme un opérateur de quadri-impulsion, alors nous pouvons considérer $\tilde{\varphi}(k)$ comme une amplitude de probabilité pour les impulsions relativistes $k \in \nu_m^\pm$.

En utilisant la transformation de Fourier

$$\hat{\varphi}(x) = (2\pi\hbar)^{-\frac{3}{2}} \int_{\nu_m^\pm} \exp(-\frac{i}{\hbar}x.k)\tilde{\varphi}(k)d\Omega_m^\pm(k) \quad (2.2.13)$$

nous obtenons des fonctions qui satisfont, dans le cas scalaire, l'équation de Klein Gordon

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\mu} \frac{\partial}{\partial x^\mu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \hat{\varphi}(x) = 0 \quad \mu = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2.14)$$

$$\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}_{x^0}(\mathbf{x}) = \exp(-iP_0 x^0)\hat{\varphi}(\mathbf{x}); \quad P_0 = \sqrt{\mathbf{P}^2 + m^2 c^2} \quad (2.2.15)$$

Si nous considérons que \hat{Q}^μ est un opérateur position qui se réalise comme un opérateur multiplication

$$\hat{Q}^\mu \hat{\varphi}(x) = x^\mu \hat{\varphi}(x) \quad (2.2.16)$$

au quel nous associons la famille d'opérateurs à mesure projecteur PV, $E^{\hat{Q}}(\hat{\Delta})$, $\hat{\Delta} \subset \sigma$, qui formerait avec la représentation unitaire irréductible $\hat{U}(a, \Lambda)$ dans $L^2(\sigma, d\sigma)$

$$\hat{U}(a, \Lambda)\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(\Lambda^{-1}(x - a)) \quad (2.2.17)$$

un système d'imprimitivité dans l'espace de configuration.

Ces PV opérateurs $E^{\hat{Q}}(\hat{\Delta})$ permettraient de définir une densité de probabilité $|\hat{\varphi}(x)|^2$. Cependant, un tel système d'imprimitivité lié à un schéma de localisation au sens strict n'est pas physiquement acceptable [17]. En effet, la probabilité totale obtenue par intégration, par rapport à un repère d'inertie donné, de cette densité $|\hat{\varphi}(x)|^2$ sur des hyperplans correspondant à différents instants dépend du temps et n'est donc pas conservée.

Par analogie au cas non relativiste, nous pouvons construire à partir de l'équation de Klein Gordon, une équation de continuité

$$\partial_\mu j^\mu(x) = 0 \quad (2.2.18)$$

telle que le quadri-vecteur

$$j^\mu(x) = \frac{i\hbar}{2m} \hat{\varphi}^*(x) \overleftrightarrow{\partial}^\mu \hat{\varphi}(x) \quad (2.2.19)$$

soit conservé.

Mais dans le cas relativiste, $j^\mu(x)$ ne peut pas être interprété comme un courant de probabilité, car $j^0(x)$ n'est pas définie positive. On peut, en effet, construire explicitement des fonction $\hat{\varphi} \in L^2(\sigma^+)$ pour lesquelles $j^0(x') > 0$ et $j^0(x'') < 0$ pour $x', x'' \in \sigma$ [28].

Néanmoins, la construction précédente a mis en évidence, dans l'espace des états $L^2(\sigma, d\sigma(x))$, le produit scalaire covariant suivant

$$\langle \hat{\varphi}_1 | \hat{\varphi}_2 \rangle_\sigma = \pm i\hbar \int_\sigma \hat{\varphi}_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \hat{\varphi}_2(x) d\sigma^\mu(x) \quad (2.2.20)$$

où

$$\hat{\varphi}_1^*(x) \overleftrightarrow{\partial}_\mu \hat{\varphi}_2(x) = \hat{\varphi}_1^*(x) \partial_\mu \hat{\varphi}_2(x) - \hat{\varphi}_2(x) \partial_\mu \hat{\varphi}_1^*(x); \quad \partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \quad (2.2.21)$$

et

$$d\sigma^\mu(x) = n^\mu d\sigma(x) = \frac{1}{3!} \epsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} dx_\alpha dx_\beta dx_\gamma; \quad \mu, \alpha, \beta, \gamma = 0, 1, 2, 3. \quad (2.2.22)$$

Les quantités n^μ sont les composantes, par rapport à un repère d'inertie donné, d'un vecteur unité normal à l'hypersurface genre espace σ de l'espace de Minkowski $M(1,3)$, sur laquelle l'intégration est effectuée et $\epsilon_{\mu\alpha\beta\gamma}$ est le tenseur complètement antisymétrique de Levi-Civita [27].

La notion de particule strictement localisée en un point de l'espace-temps est également à l'origine de la difficulté de définir mathématiquement un opérateur position X^j , $j = 1, 2, 3$ qui satisfait des critères qui font de lui, à la limite non relativiste, un opérateur de position quantique et qui permet d'avoir une formulation covariante relativiste lorsqu'il est écrit sous une forme quadri-vectorielle.

En effet, le problème s'est posé lorsque Dirac a essayé de définir l'opérateur X_D^i qui représente pour $i = 1, 2, 3$, la position d'une particule.

$$X_D^i : \psi(x) \mapsto x^i \psi(x) \quad (2.2.23)$$

Avec cette définition, la quantité $X_D \wedge P$ ne peut pas être identifiée au moment orbital. Cet opérateur ne redonne pas à la limite non relativiste l'opérateur position

classique. De plus l'opérateur vitesse associé ne prévoit que deux valeurs propres possibles des vitesses $\pm c$ interdisant ainsi le spectre continu [3] et X_D^i ne laisse pas invariant l'espace des solutions d'énergie positive qui décrit tous les états d'une telle particule et n'est ainsi pas relié à cette particule seulement.

Après Dirac, la recherche d'un opérateur position relativiste s'est poursuivie. Plusieurs tentatives ont abouti à des expressions différentes, nous allons présenter les deux plus importantes.

En s'intéressant aux solutions de l'équation de Klein Gordon, le choix le plus évident [3] d'un opérateur position est

$$(\hat{Q}^\mu \hat{\varphi})(x) = x^\mu \hat{\varphi}(x); \quad \mu = 0, 1, 2, 3; \quad \hat{\varphi} \in L^2(\sigma) \quad (2.2.24)$$

Ce choix à l'avantage d'être covariant sous la représentation configuration du groupe de Poincaré $\hat{U}(a, \Lambda)$ mais il ne commute pas avec l'opérateur de masse M^2 qui est un Casimir⁽¹³⁾ du groupe de Poincaré, donc il ne peut pas être lié à la localisation d'une particule élémentaire.

Le second choix est celui de Newton et Wigner X_{NW}^j

$$(X_{NW}^j \tilde{\varphi})(k) = (i\hbar \frac{\partial}{\partial k^j} - \frac{1}{2} \frac{i\hbar k^j}{(\mathbf{k}^2 + m^2 c^2)}) \tilde{\varphi}((\mathbf{k}^2 + m^2 c^2)^{1/2}, \mathbf{k}); \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2.25)$$

Cet opérateur satisfait toutes les conditions d'un opérateur de position mais il ne peut pas définir des densités de probabilité covariantes sous les transformations du groupe de Poincaré.

Il semblerait ainsi, que la construction d'un opérateur position relativiste, lié à la notion de localisation au sens strict, et de systèmes d'imprimitivité associés est impossible à réaliser. C'est ce que prouve mathématiquement le théorème de Hegerfeldt [2]:

"Supposons qu'il existe un opérateur $N(\Delta)$ dont la valeur moyenne $\langle \psi_t | N(\Delta) | \psi_t \rangle = \wp_{\psi,t}(\Delta)$ représente la probabilité de présence du système dans la région Δ à l'instant t , alors il n'y a aucun état du système relativiste localisé à l'instant $t = 0$ dans la région finie Δ qui puisse satisfaire la condition de causalité".

⁽¹³⁾voir annexe A

En conclusion, il est impossible de préparer un état d'un système relativiste élémentaire qui soit strictement localisé dans une région finie et par conséquent, l'opérateur $N(\Delta)$ ne peut pas être un projecteur.

Les points de l'espace des phases stochastiques de la MQS ne sont pas ponctuels mais possèdent une extension en rapport avec un processus de mesure réel, cette théorie peut donc être utilisée pour remédier aux problèmes de localisation de la mécanique quantique relativiste. Pour pouvoir généraliser la théorie quantique stochastique au cas relativiste, il faut effectuer un feuilletage de l'espace-temps de Minkowski en hyperplans genre espace. Sur un hyperplan, tous les événements sont simultanés, ils ont lieu au même instant et sont sans relation de cause à effet entre eux par rapport à un repère de Lorentz donné.

2.2.2 L'espace des phases stochastique relativiste et les systèmes de covariance relativistes

L'espace des phases relativiste d'une particule de masse au repos m est défini par [29]:

$$\mu_m^\pm = M(1, 3) \times \nu_m^\pm \quad (2.2.26)$$

Une hypersurface Σ_m genre espace de cet espace μ_m est le produit d'un hyperplan σ genre espace de l'espace de Minkowski $M(1, 3)$ et de l'hyperboloïde des masses ν_m^\pm

$$\Sigma_m = \Sigma_m^+ \cup \Sigma_m^-, \quad \Sigma_m^\pm = \sigma \times \nu_m^\pm \quad (2.2.27)$$

On définit dans cet espace, l'élément invariant de mesure

$$d\Sigma_m(q, p) = 2\varepsilon(p_0)p_\nu d\sigma^\nu(q)d\Omega_m(p); \quad \varepsilon(p_0) = \pm 1 \text{ si } p_0 \gtrless 0 \quad (2.2.28)$$

Sur un hyperplan genre espace tel que $q^0 = \text{const}$, l'élément de mesure $d\Sigma_m^+$ devient

$$d\Sigma_m^+(q, p) = d\mathbf{q}d\mathbf{p}, \quad q^0 = \text{const} \quad (2.2.29)$$

ceci nous permet de définir dans l'espace de Hilbert des phases relativistes⁽¹⁴⁾ $L^2(\Sigma_m^+)$, un produit scalaire analogue au produit scalaire non relativiste dans $L^2(\Gamma)$

$$\langle \varphi_1 | \varphi_2 \rangle_{\Sigma_m^+} = \int_{\Sigma_m^+} \varphi_1^*(q, p) \varphi_2(q, p) d\mathbf{q}d\mathbf{p} \quad (2.2.30)$$

$$q = (q^0, \mathbf{q}); p = (p^0, \mathbf{p}) \quad (2.2.31)$$

$$\mathbf{q}, \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \text{ et } p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}. \quad (2.2.32)$$

La représentation espace des phases du groupe de Poincaré qui est vectorielle et réductible

$$U(a, \Lambda) : \varphi(q, p) \mapsto \varphi'(q, p) = \varphi(\Lambda^{-1}(q - a), \Lambda^{-1}p) \quad (2.2.33)$$

est générée par les opérateurs

$$P^\mu = i\hbar \frac{\partial}{\partial q_\mu} \quad (2.2.34)$$

$$\mathbf{J} = i\hbar \mathbf{q} \times \nabla_{\mathbf{q}} - i\hbar \mathbf{p} \times \nabla_{\mathbf{p}} \quad (2.2.35)$$

$$\mathbf{K} = i\hbar \mathbf{q} \frac{\partial}{\partial q_0} + i\hbar p^0 \nabla_{\mathbf{p}} \quad (2.2.36)$$

et agit dans l'espace de Hilbert $L^2(\Sigma_m^+, d\Sigma_m^+)$ des fonctions $\varphi(q, p)$, solutions d'énergie positive de l'équation suivante

$$\left(\frac{\partial}{\partial q_\mu} \frac{\partial}{\partial q^\mu} + \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} \right) \varphi(q, p) = 0 \quad (2.2.37)$$

$$\varphi(q, p) = \varphi_{q^0}((0, \mathbf{q}), p); \quad \varphi_{q^0} = \exp(-iP_0 q^0) \varphi \quad (2.2.38)$$

Cette représentation étant fortement réductible, pour pouvoir définir une particule élémentaire selon Wigner, on doit trouver ses sous-représentations irréductibles U^η

$$U^\eta = E_\eta U = W_\eta U W_\eta^{-1} \quad (2.2.39)$$

$$W_\eta : L^2(\nu_m^+, d\Omega_m(k)) \longrightarrow E_\eta L^2(\Sigma_m^+) = L^2(\Sigma_{m,\eta}^+) \quad (2.2.40)$$

⁽¹⁴⁾A partir de ce paragraphe, nous ne considérons que les particules et donc que la nappe positive v_m^+ de hyperboloïde des masses.

qui agissent dans le sous-espace irréductible $L^2(\Sigma_{m,\eta}^+)$. Pour cela, on utilise la méthode d'équivalence des représentations⁽¹⁵⁾ impulsion et espace des phases. Comme pour le cas non relativiste [3], chaque sous-espace $L^2(\Sigma_{m,\eta}^+)$ est caractérisé par un générateur de résolution unique η invariant sous rotation tel qu'en représentation impulsion on ait

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \cdot k\right)\eta(p,k); \quad p, k \in v_m^+ \quad (2.2.41)$$

Les fonctions $\tilde{\eta}$ sont les analogues relativistes des fonctions d'onde propres non relativiste $\tilde{\xi}$ de la particule d'essai utilisée pour détecter le système quantique au voisinage de la position stochastique $(\mathbf{0}, \mathbf{0}; \chi_{\mathbf{0},\mathbf{0}}^\xi)$

$$\tilde{\eta}(k) = (2mc)^{1/2}\tilde{\xi}(\mathbf{k}); \quad k = (k^0, \mathbf{k}) \in v_m^+ \quad (2.2.42)$$

Le passage de $\tilde{\eta}$ vers $\tilde{\eta}_{q,p}$ qui permet de détecter des particules aux positions stochastiques⁽¹⁶⁾ $(q, p; \chi_{p,q}^\eta)$ se fait par l'action du groupe de Poincaré

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = (U(q, \Lambda_v)\tilde{\eta})(k) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}q \cdot k\right)\tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1}k); \quad \tilde{\eta} \in L^2(v_m^+) \quad (2.2.43)$$

Ceci nous permet d'interpréter, η comme le vecteur d'état d'une particule d'essai qui joue le rôle de micro-détecteur à l'origine d'un repère d'inertie et $\eta_{q,p}$ le vecteur d'état d'une particule d'essai du même type après avoir subit un boost de Lorentz et une translation spatio-temporelle afin de détecter une particule dans un état φ ayant une localisation spatio-temporelle stochastique moyenne q et une impulsion stochastique moyenne p .

On définit également l'opérateur positif $E_\eta(\Sigma_m^+)$

$$E_\eta(\Sigma_m^+) = \int_{\Sigma_m^+} |\eta_{q,p}\rangle d\mathbf{q}d\mathbf{p} \langle \eta_{q,p} | \quad (2.2.44)$$

qui projette un vecteur $|\varphi\rangle$ de $L^2(\Sigma_m^+)$ sur un vecteur $|\varphi_\eta\rangle$ d'un sous-espace $L^2(\Sigma_{m,\eta}^+)$ de $L^2(\Sigma_m^+)$

$$|\varphi_\eta\rangle = E^\eta(\Sigma_m^+) |\varphi\rangle = \int_{\Sigma_m^+} d\mathbf{q}d\mathbf{p} \varphi_\eta(q, p) |\eta_{q,p}\rangle \quad (2.2.45)$$

⁽¹⁵⁾La démonstration est présentée dans l'annexe B dans le cas général de la particule spinorielle stochastiquement et intrinsèquement étendue.

⁽¹⁶⁾L'interprétation de la fonction de confiance relativiste $\chi_{p,q}^\eta$ sera donnée ultérieurement.

où

$$\varphi_\eta(q, p) = \langle \eta_{q,p} | \varphi \rangle_{\Sigma_m^+} = \langle \tilde{\eta}_{q,p} | \tilde{\varphi} \rangle_{\nu_m^+} = \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \tilde{\varphi}(k) \quad (2.2.46)$$

L'opérateur correspondant à l'identité dans $L^2(\Sigma_{m,\eta}^+)$ est alors défini par

$$E_\eta(\Sigma_m^+) = \int_{\substack{q^0=0 \\ p \in \nu_m^+}} | \tilde{\eta}_{q,p} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \tilde{\eta}_{q,p} | = \tilde{\mathbb{1}}_+; \quad (2.2.47)$$

L'opérateur $E_\eta(\Delta)$

$$E_\eta(\Delta) = \int_{\Delta \subset \Sigma_m^+} | \eta_{q,p} \rangle d\mathbf{q} d\mathbf{p} \langle \eta_{q,p} |$$

associé à la représentation irréductible $U_\eta(a, \Lambda)$, vérifie la relation de covariance suivante

$$U_\eta(g) E_\eta(\Delta) U_\eta^{-1}(g) = E_\eta(g\Delta), \quad g \in E(\sigma) \quad (2.2.48)$$

Le couple $\{U_\eta, E_\eta\}$ forme un système de covariance par rapport à $E(\sigma)$, le sous-groupe Euclidien de Poincaré qui se réalise comme le produit semi-direct des translations d'espace-temps et des rotations qui laissent $\Sigma_m^+ = \sigma \times \nu_m^+$ invariant.

Nous pouvons obtenir dans l'espace des phases $L^2(\Sigma_m^+)$ un opérateur de position stochastique covariant relativiste [3]

$$(Q_{st}^\mu \varphi)(q, p) = q^\mu \varphi(q, p); \quad \mu = 0, \dots, 3. \quad (2.2.49)$$

et en utilisant l'opérateur $E_\eta(\Sigma_m^+)$ de projection orthogonale sur $L^2(\Sigma_{m,\eta}^\pm)$ on introduit

$$Q_\eta^\mu(\sigma) = E_\eta(\Sigma_m^+) Q_{st}^\mu E_\eta(\Sigma_m^+) \quad (2.2.50)$$

tel que

$$Q_\eta^j(\sigma) = W_\eta X_{NW}^j W_\eta^{-1}; \quad j = 1, 2, 3. \quad (2.2.51)$$

et

$$\langle \tilde{\varphi} / X_{NW} \tilde{\varphi} \rangle_{\nu_m^+} = \langle W_\eta \tilde{\varphi} / Q_{st} W_\eta \tilde{\varphi} \rangle_{\Sigma_m^+} \quad (2.2.52)$$

Nous remarquons que la valeur moyenne de l'opérateur de Newton-Wigner en représentation impulsion apparaît comme la valeur moyenne de l'opérateur position stochastique mais seulement sur l'hypersurface $q^0 = \text{const}$ de l'espace des phases.

L'opérateur de Newton-Wigner était le choix le plus intéressant pour être un opérateur de position relativiste, mais cet opérateur ne peut être covariant. En fait, cette comparaison prouve que la mécanique quantique stochastique peut régler le problème de localisation stricte posé en mécanique quantique relativiste, de manière à trouver un opérateur de position stochastique relativiste covariant qui soit une extension de l'opérateur de Newton-Wigner.

2.2.3 Densité, courant de probabilité et interprétations probabilistes

Par analogie au cas non relativiste, les résultats précédents permettent d'interpréter dans le cas relativiste, η comme le vecteur d'état d'une particule d'essai qui joue le rôle de micro-détecteur à l'origine d'un repère d'inertie de Lorentz et $\eta_{q,p}$ le vecteur d'état d'une particule d'essai du même type après avoir subit un boost de Lorentz et une translation spatio-temporelle afin de détecter une particule dans un état φ ayant une localisation spatio-temporelle stochastique moyenne q et une impulsion stochastique moyenne p

Donc la valeur moyenne de l'opérateur POV $E_\eta(\Delta)$

$$\begin{aligned} P_\varphi(\Delta_{q^0}) &= \langle \varphi | E_\eta(\Delta_{q^0}) | \varphi \rangle; \quad \Delta_{q^0} \subset \Sigma_{m,q^0}^+ \\ &= \int_{\Delta_{q^0}} d\mathbf{q}d\mathbf{p} |\varphi(q,p)|^2 \end{aligned} \quad (2.2.53)$$

représente la probabilité de mesurer la quadri-position stochastique moyenne q et la quadri-impulsion stochastique moyenne p d'une particule relativiste scalaire dans l'état φ lorsque ces mesures sont effectuées à un instant q^0 par rapport à un repère d'inertie choisi. L'hypersurface Σ_{m,q^0}^+ de l'espace des phases est le produit cartésien de l'hyperplan q^0 constant de l'espace de Minkowski et de l'hyperboloïde des vitesses ν_m^+ .

Afin d'interpréter la localisation stochastique relativiste, nous devons construire l'équivalent relativiste des probabilités marginales non relativistes.

Pour cela, considérons dans un repère d'inertie de Σ_m^+ à $q^0 = \text{const}$ l'expression suivante

$$P_\varphi(\tilde{\Delta}) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \rho^\eta(p); \quad \tilde{\Delta} \subset \nu_m^+ \quad (2.2.54)$$

où

$$\rho^\eta(p) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{q} \varphi(q, p) \varphi^*(q, p) \quad (2.2.55)$$

correspond à la densité de probabilité marginale de mesurer les impulsions stochastiques indépendamment de la position.

En remplaçant

$$(W_\eta \tilde{\varphi})(q, p) = \int_{v_m^+} \exp(-\frac{i}{\hbar} q \cdot k) \tilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1} k) \tilde{\varphi}(k) d\Omega_m(k) \quad (2.2.56)$$

dans $\rho^\eta(p)$ puis en intégrant et en utilisant la transformation unitaire de Fourier-Plancherel, cette densité de probabilité marginale s'exprime comme

$$\rho^\eta(p) = (2\pi\hbar)^3 \int_{v_m^+} |\tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k)|^2 |\tilde{\varphi}(k)|^2 (2k^0)^{-1} d\Omega_m(k) \quad (2.2.57)$$

En posant $k' = \Lambda_v^{-1} k$, on aura

$$\rho^\eta(p) = \int_{v_m^+} \chi_0^\eta(k') |\tilde{\varphi}(\Lambda_v k')|^2 [(2\Lambda_v k')^{-1}]^0 \frac{d\mathbf{k}'}{2k'^0} \quad (2.2.58)$$

où

$$\chi_0^\eta(k') = (2\pi\hbar)^3 |\tilde{\eta}(k')|^2 \quad (2.2.59)$$

or

$$\tilde{\eta}(k') = (2mc)^{1/2} \tilde{\xi}(\mathbf{k}') \quad (2.2.60)$$

et

$$\tilde{\chi}_0^\xi(\mathbf{k}') = (2\pi\hbar)^3 |\tilde{\xi}(\mathbf{k}')|^2 \quad (2.2.61)$$

ainsi

$$\chi_0^\eta(k') = (2\pi\hbar)^3 (2mc) |\tilde{\xi}(\mathbf{k}')|^2 = (2mc) \tilde{\chi}_0^\xi(\mathbf{k}') \quad (2.2.62)$$

et $\rho^\eta(p)$ devient

$$\rho^\eta(p) = mc \int_{v_m^+} \tilde{\chi}_0^\xi(\mathbf{k}') |\tilde{\varphi}(\Lambda_v k')|^2 [(2\Lambda_v k')^{-1}]^0 \frac{d\mathbf{k}'}{k'^0} \quad (2.2.63)$$

Pour une mesure stricte de l'impulsion

$$\tilde{\chi}_0^\xi(\mathbf{k}') \longrightarrow \delta^3(\mathbf{k}') \quad (2.2.64)$$

nous obtenons pour ($k = \Lambda_v k' = p$ où $k' = (mc, \mathbf{0})$)

$$P_{\varphi_\eta}(\tilde{\Delta}) = \int_{\tilde{\Delta}} d\mathbf{p} \rho^\eta(p) \longrightarrow \int_{\tilde{\Delta}} |\tilde{\varphi}(p)|^2 d\Omega_m(p) \quad (2.2.65)$$

La probabilité marginale correspond donc à la probabilité conventionnelle dans l'espace des impulsions de la mécanique quantique relativiste, mais ceci n'est possible que dans un voisinage non relativiste.

De même la densité de probabilité marginale de mesurer les positions stochastique indépendamment de l'impulsion s'écrit

$$\rho^\eta(q) = \int_{\mathbb{R}^3} d\mathbf{p} |\varphi(q, p)|^2; p = (p^0, \mathbf{p}) \in \nu_m^+ \quad (2.2.66)$$

mais cette intégration ne peut se faire explicitement d'une manière à faire apparaître une fonction de confiance $\hat{\chi}_q^\xi(x)$ dans l'espace de configuration qui permettrait le passage au cas ponctuel, ceci confirme le fait qu'à la limite ponctuelle on ne peut pas avoir une interprétation probabiliste cohérente dans la représentation configuration en mécanique quantique relativiste.

En fait, par analogie au cas relativiste, $\rho^\eta(q)$ est égale à la composante temporelle d'un quadri-courant de probabilité stochastique relativiste qui tend à la limite $c \rightarrow \infty$ vers son homologue non relativiste [3]

$$j_\eta^\mu(q) = 2 \int_{\nu_m^+} \frac{p^\mu}{m} |\varphi(q, p)|^2 d\Omega_m(p) \quad (2.2.67)$$

Ce courant satisfait la loi de conservation

$$\frac{\partial j_\eta^\mu(q)}{\partial q^\mu} = 0 \quad (2.2.68)$$

si les générateurs de résolution η sont réels, c'est-à-dire qu'ils satisfont la condition.

$$\eta(p.k) = \eta^*(p.k) \quad (2.2.69)$$

La composante temporelle de ce courant correspond à la densité de probabilité de localisation stochastique multipliée par m^{-1}

$$j_{\eta}^0(q) = m^{-1}\rho^{\eta}(q) = \int_{\mathbb{R}^3} |\varphi(q, p)|^2 d\mathbf{p} \quad (2.2.70)$$

est définie positive, et s'interprète comme la densité de probabilité marginale de mesurer les impulsions stochastiques indépendamment de la position.

Les composantes marginales $\rho^{\eta}(p)$ et $\rho^{\eta}(q)$ possèdent une interprétation, qui à la limite non relativiste, coïncide avec celle de leurs homologues Galiléens. De même, la quantité $|\varphi(q, p)|^2$ peut être interprétée comme une densité de probabilité au point stochastique

$$\underline{(q, p)} = (q, p; \chi_{q,p}^{\eta}), \quad (2.2.71)$$

en la comparant à son analogue $|\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2$ non relativiste.

En effet, en passant à des approximations pour des faibles impulsions, on obtient

$$|\varphi(q, p)|^2 = |\psi(\mathbf{q}, \mathbf{p}, t)|^2 + O\left(\frac{\mathbf{p}^2}{m^2 c^2}\right) \quad (2.2.72)$$

Ainsi $|\varphi(q, p)|^2$ représente effectivement une densité de probabilité de localisation dans l'espace des phases stochastiques relativistes $\mu_{m,\eta}^+$

$$\mu_{m,\eta}^+ = \left\{ \underline{(q, p)} = (q, p; \chi_{q,p}^{\eta}) / (q, p) \in \Sigma_m^+ = \sigma \times \nu_m^+ \right\} \quad (2.2.73)$$

Par contre et à la différence de son homologue non relativiste, la fonction de confiance $\chi_{q,p}^{\eta}$ relativiste, ne peut plus s'écrire comme le produit de la fonction de confiance configuration et la fonction de confiance impulsion dans n'importe quel repère de Lorentz [3].

Dans le repère propre de la particule d'essai ($\mathbf{p}' = \mathbf{0}$), la fonction de confiance du micro détecteur $\chi_{q',p'}^{\eta}(x', k')$ peut s'écrire, comme dans le cas non relativiste, comme le produit d'une fonction de l'espace des impulsions $\tilde{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}')$ par la fonction de confiance de l'espace de configuration $\hat{\chi}_{\mathbf{q}'}^{\xi}(\mathbf{x}')$ non relativistes

$$\chi_{q',p'}^{\eta}(x', k') \approx \chi_{\mathbf{q}',\mathbf{p}'}^{\xi}(\mathbf{x}', \mathbf{k}') = \hat{\chi}_{\mathbf{q}'}^{\xi}(\mathbf{x}') \tilde{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}') = \hat{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{x}' - \mathbf{q}') \tilde{\chi}_0^{\xi}(\mathbf{k}') \quad (2.2.74)$$

Si nous notons Λ_p la transformation pure de Lorentz permettant le passage de ce repère propre à celui du laboratoire alors

$$x' = \Lambda_p^{-1}x \quad (2.2.75)$$

$$k' = \Lambda_p^{-1}k \quad (2.2.76)$$

où

$$d\mathbf{x}'d\mathbf{k}' = \left(1 - \frac{\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}}{k^0 p^0}\right) d\mathbf{x}d\mathbf{k} \quad (2.2.77)$$

Dans le repère de laboratoire $\chi_{q,p}^\eta(x, k)$ s'écrit donc

$$\begin{aligned} \chi_{q,p}^\eta(x, k) &\approx \chi_{\mathbf{q},\mathbf{p}}^\xi(\mathbf{x}, \mathbf{k}) \\ &= \frac{k^0 p^0}{p \cdot k} \hat{\chi}_0^\xi \left(\mathbf{x} - \mathbf{q} - \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{q})}{p^0 (mc + p^0)} \mathbf{p} \right) \times \tilde{\chi}_0^\xi \left(\mathbf{k} - \frac{\mathbf{p}}{mc} \left(k^0 - \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{k}}{p^0 + mc} \right) \right) \\ &\neq \hat{\chi}_0^\xi(\mathbf{x} - \mathbf{q}) \tilde{\chi}_0^\xi(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \end{aligned} \quad (2.2.78)$$

Par conséquent, une hypersurface $\Sigma_{m,\eta}^+$ de l'espace des phases stochastique relativiste qui est l'équivalent relativiste de Γ_ξ , ne peut s'écrire comme le produit cartésien de l'espace de configuration stochastique par l'espace des impulsions stochastiques.

2.2.4 Les propagateurs

Par analogie au cas non relativiste, le propagateur relativiste de particules libres stochastiquement étendues est défini comme:

$$\begin{aligned} K_\eta(q', p'; q, p) &= \langle \tilde{\eta}_{q',p'} | \tilde{\eta}_{q,p} \rangle_{v_m^+} \\ &= \int_{v_m^+} \exp \left[\frac{i}{\hbar} (q - q') \cdot k \right] \eta^*(p' \cdot k) \eta(p \cdot k) d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (2.2.79)$$

Ce propagateur fournit, pour une particule étendue, qui pour une localisation spatio-temporelle stochastique q possède une quadri-impulsion stochastique p , la probabilité d'atteindre les différentes localisations stochastiques q' le long d'une hypersurface genre espace σ et de posséder les quadri-impulsions stochastiques p' .

Ce propagateur stochastique garde les principales propriétés de son homologue non relativiste. En effet, comme

$$\frac{(2\pi\hbar)^3}{2mc} \int_{\Sigma_m^+} |K_\eta(q'', p''; q', p')|^2 d\Sigma_m(q'', p'') = 1 \quad (2.2.80)$$

il détermine donc une véritable densité de probabilité et satisfait, les propriétés d'unitarité et de reproductibilité

$$K_\eta^*(q', p'; q, p) = K_\eta(q, p; q', p') \quad (2.2.81)$$

$$K_\eta(q', p'; q, p) = \int_{\Sigma_m^+} K_\eta(q', p'; q'', p'') K_\eta(q'', p''; q, p) d\Sigma_m(q'', p'') \quad (2.2.82)$$

Afin d'établir un lien entre ce propagateur stochastique relativiste libre d'une particule scalaire et les propagateurs connus de la théorie des champs locaux, intéressons nous à la partie du propagateur de Feynman qui rend compte de la propagation de la particule seulement (on ne tient pas compte des antiparticules) [4]

$$\begin{aligned} K_F(x'' - x') &= -\frac{2i}{(2\pi)^4} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int d^4k \frac{\exp[-ik(x'' - x')]}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \\ &= 2(2\pi)^{-3} \int_{k^0 > 0} \exp[ik(x' - x'')] d\Omega_m(k) \end{aligned} \quad (2.2.83)$$

Dans le cas particulier où la fonction $\tilde{\eta}(\mathbf{k})$ est celle de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique relativiste

$$\tilde{\eta}^l(\mathbf{k}) = \eta(mck^0) = N_{m,l} \exp\left(-\frac{2l^2}{\hbar^2} mck^0\right) \quad (2.2.84)$$

où $N_{m,l}$ est une constante de normalisation calculée à partir de la condition (imposée par l'isométrie de W_η)

$$\int_{p \in v_m^+} |\eta^l(mcp^0)|^2 d\mathbf{p} = 2mc(2\pi\hbar)^{-3} \quad (2.2.85)$$

le propagateur stochastique prend la forme

$$K_\eta^l(q, p; q', p') = N_{m,l}^2 \int_{v_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(q - q') \cdot k - \frac{2l^2}{\hbar^2}(p + p') \cdot k\right) d\Omega_m(k) \quad (2.2.86)$$

avec

$$N_{m,l}^{-2} = \frac{(2\pi\hbar)^3}{2mc} \int_{\mathbb{R}^3} \exp\left[-\frac{4l^2}{\hbar^2} mc(\mathbf{p}^2 + m^2c^2)^{1/2}\right] d\mathbf{p} \quad (2.2.87)$$

En comparant (2.2.83) avec (2.2.86), on aura

$$N_{m,l}^{-2} K_{\eta}^l(q'', p''; q', p') \xrightarrow{l \rightarrow 0} K_F(q'' - q') \quad (2.2.88)$$

Comme dans le cas non relativiste, le propagateur stochastique multiplié par la constante de normalisation tend, dans le cas ponctuel, vers le propagateur de Feynman.

2.3 La mécanique quantique stochastique pour une particule libre spinorielle

Dans le paragraphe précédent on a présenté la mécanique quantique relativiste stochastique pour une particule scalaire, voyons maintenant comment introduire le spin dans le cas relativiste. Considérons la particule système de spin \mathbf{J} , constituée d'une particule de spin \mathbf{j} et d'une particule d'essai de spin \mathbf{j}' qui joue le rôle d'un micro-detecteur.

La représentation U_J de l'espace des phases de Poincaré, agit dans l'espace d'Hilbert H_J

$$H_J = l^2(2J + 1) \otimes L^2(\Sigma_m^+) \quad (2.3.1)$$

qui contient des matrices colonne $\varphi(q, p)$, d'éléments $\varphi_s(q, p)$, $s = -J, \dots, +J$, définis sur une hypersurface Σ_m^+ de l'espace des phases relativiste et qui sont de carré intégrable par rapport à la mesure invariante de Lorentz

$$d\Sigma_m^+(q, p) = 2p^\nu d\sigma_\nu(q) d\Omega_m^+(p) \quad (2.3.2)$$

La représentation espace des phases de spin \mathbf{J} est donnée par

$$(U_J(a, \Lambda) \varphi)_s(q, p) = \sum_{s'=-J}^J D_{ss'}^J(\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1}p}) \varphi_{s'}(\Lambda^{-1}(q - a), \Lambda^{-1}p) \quad (2.3.3)$$

$$\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1}p} \in SO(3) \subset SO(3, 1)$$

où $\Lambda_p^{-1} \Lambda \Lambda_{\Lambda^{-1}p}$ est une rotation nommée rotation de Wigner, et $D_{ss'}^J$ une matrice de la représentation de dimension J du groupe $SU(2)$. C'est donc une matrice de la représentation spinorielle pour J demi-entier ($J = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \dots$) et vectorielle pour J entier ($J = 0, 1, 2, \dots$) du groupe des rotations spatiales $SO(3)$.

L'analyse harmonique du groupe de Poincaré [32] permet de distinguer deux cas, celui où le spin total \mathbf{J} n'est pas nul et qui correspond à une combinaison de spins entiers ou demi-entiers différents pour la particule et le micro-détecteur ($\mathbf{j} \neq \mathbf{j}'$). Puis le cas où le spin total est nul $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ et qui correspond à une égalité entre les spins entiers de la particule et du micro-détecteur ($\mathbf{j} = \mathbf{j}' = 0, 1, 2, \dots$). Nous allons présenter ce dernier cas.

2.3.1 Analyse harmonique de la représentation de l'espace des phases relativistes $U_0(a, \Lambda)$

La représentation $U_0(a, \Lambda)$, obtenue en posant $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ dans (2.3.1) et (2.3.3), est une représentation vectorielle réductible du groupe de Poincaré, mais à la différence du cas non relativiste, elle n'est pas globalement unitaire. Son analyse harmonique a permis de prouver l'existence d'un opérateur Θ [32] de $H_0 = H_{J=0}$ vers \bar{H}_0 , non borné mais dont l'inverse l'est, tel que la représentation $\bar{U}_0(a, \Lambda) = \Theta U_0(a, \Lambda) \Theta^{-1}$ soit unitaire dans \bar{H}_0 .

L'espace \bar{H}_0 est la somme directe de tous les sous-espaces orthogonaux ΘH_0^{nj}

$$\bar{H}_0 = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Theta H_0^{nj} \quad (2.3.4)$$

et la représentation \bar{U}_0 est la somme directe de sous-représentations $\Theta U_0^{nj}(a, \Lambda) \Theta^{-1}$

$$\bar{U}_0(a, \Lambda) = \bigoplus_{n=1}^{\infty} \bigoplus_{j=0}^{\infty} \Theta U_0^{nj}(a, \Lambda) \Theta^{-1} \quad (2.3.5)$$

En fait, c'est la restriction $U_0^{nj}(a, \Lambda)$ de $U_0(a, \Lambda)$ à chaque sous espace H_0^{nj} qui fournit une représentation unitaire irréductible du groupe de Poincaré.

H_0^{nj} est alors constitué de la famille de toutes les fonctions de H_0 qui s'écrivent sous la forme:

$$\varphi_{nj}(q, p) = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} q \cdot k\right) \tilde{\eta}_{njs}^* (\Lambda_v^{-1} k) \tilde{\varphi}_s(k) d\Omega_m^+(k) \quad (2.3.6)$$

où $\tilde{\varphi}_s(k) \in L^2(\nu_m^+)$ est la composante du vecteur $\tilde{\varphi}(k)$ à $2s + 1$ composantes et $\tilde{\eta}_{njs}^*$ la s ième composante de la fonction d'onde propre $\tilde{\eta}_{nj}^*$ du micro-détecteur qui, dans la représentation impulsion peut être exprimée en coordonnées sphériques comme le produit d'harmoniques sphériques $Y_{js}(R(k, p) \mathbf{p})$ et de fonction radiale $e_n(\frac{p \cdot k}{mc})$.

$$\tilde{\eta}_{njs}^* (\Lambda_v^{-1} k) = (2mc)^{1/2} (2\pi\hbar)^{-3/2} e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) Y_{js} (R(k, p) \mathbf{p}) \quad (2.3.7)$$

Les fonctions angulaires $Y_{js}(\mathbf{p})$ peuvent s'écrire avec une notation plus simple

$$Y_{js}(\mathbf{p}) = Y_j^s \left(\frac{\mathbf{p}}{|\mathbf{p}|} \right); \quad j = 0, 1, 2, \dots \quad (2.3.8)$$

telles que pour chaque \mathbf{k} fixé, on introduit des coordonnées sphériques où θ est l'angle entre \mathbf{k} et \mathbf{p} et $R(k, p)$, une rotation dans le plan déterminé par les vecteurs \mathbf{k}, \mathbf{p} qui s'écrit sous la forme

$$R(k, p) = \Lambda_k^{-1} \Lambda_p \Lambda_{\Lambda_p^{-1} k} \quad (2.3.9)$$

et qui admet la propriété suivante

$$R(k, p) = R(p, k)^{-1} \quad (2.3.10)$$

Les fonctions $e_n(p^0)$ appartiennent à l'espace $L^2(\mathbb{R}, d\tilde{\mu}(p^0))$ et satisfont la relation d'orthonormalisation suivante

$$\int_{mc}^{+\infty} e_{n'}^*(p^0) e_{n''}(p^0) d\tilde{\mu}(p^0) = \delta_{n'n''} \quad (2.3.11)$$

où $d\tilde{\mu}(p^0)$ est la mesure d'intégration

$$d\tilde{\mu}(p^0) = p^0 (p_0^2 - m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} dp^0 \quad (2.3.12)$$

Les fonctions $\varphi_{nj}(q, p)$ peuvent donc être écrites sous la forme.

$$\begin{aligned} \varphi_{nj}(q, p) &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) \times \\ &Y_{js} (R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_s(k) d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Dans chaque sous-espace H_0^{nj} engendré par les fonctions d'onde $\varphi_{nj}(q, p)$, les éléments $\tilde{\varphi}_s(k) \in \nu_m^+$ satisfont la condition additionnelle suivante

$$\int_{\nu_m^+} |\tilde{\varphi}_s(k)|^2 d\mathbf{k} < \infty \quad (2.3.14)$$

La vérification⁽¹⁷⁾ de l'irréductibilité des sous-représentations $U_0^{nj}(a, \Lambda)$, se fait, comme dans le cas non relativiste, par équivalence. En effet, il existe une transformation intégrale [32]

$$(W_{\eta}^{-1}\tilde{\varphi})_s(k) = \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \int_{\sigma \times \nu_m^+} \exp\left(\frac{i}{\hbar}k.p\right) e^*\left(\frac{p.k}{mc}\right) \times Y_{js}^*(R(k.p) \mathbf{P}) \varphi_{nj}(q, p) d\Sigma_m(q, p) \quad (2.3.15)$$

qui préserve le produit scalaire dans les deux espaces d'Hilbert H_0^{nj} et $\tilde{H}_j = l^2(2j+1) \otimes L^2(\nu_m^+)$

$$\langle \varphi_{nj} | \varphi_{nj} \rangle_{H_0^{nj}} = \langle W_{\eta}\tilde{\varphi} | W_{\eta}\tilde{\varphi} \rangle_{H_0^{nj}} = \langle \tilde{\varphi} | \tilde{\varphi} \rangle_{\tilde{H}_j} \quad (2.3.16)$$

et qui relie la représentation irréductible $\tilde{U}_j(a, \Lambda)$ de l'espace des impulsions à $U_0^{nj}(a, \Lambda)$ par la relation d'équivalence unitaire

$$U_0^{nj}(a, \Lambda) = W_{\eta}\tilde{U}_j(a, \Lambda)W_{\eta}^{-1}; \quad (a, \Lambda) \in P \quad (2.3.17)$$

ce qui assure l'irréductibilité des restrictions $U_0^{nj}(a, \Lambda)$ de $U_0(a, \Lambda)$ à H_0^{nj} .

Chaque sous-espace de la décomposition précédente est invariant à gauche par $U_0(a, \Lambda)$ et est caractérisé par un générateur de résolution unique $\eta = \eta_{nj}$ satisfaisant

$$\eta(Rq, Rp) = \eta(q, p); \quad \forall R \in SO(3) \subset P \quad (2.3.18)$$

$$\eta^*(q, p) = \eta(\Lambda_p^{-1}q, (p^0, -\mathbf{p})); \quad (p, q) \in \sigma \times \nu_m^+ \quad (2.3.19)$$

tel que l'opérateur

$$P_{\eta}(\Sigma_m^+) = \int_{\Sigma_m^+} |\eta_{q,p}\rangle d\Sigma_m(q, p) \langle \eta_{q,p} |; \quad \eta_{q,p} = U_0(q, \Lambda_p)\eta$$

$$(P_{\eta}\varphi)(q, p) = \langle \eta_{q,p} | \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in H_0 \quad (2.3.20)$$

soit un projecteur sur H_0^{nj} ⁽¹⁸⁾.

⁽¹⁷⁾Voir l'annexe B

⁽¹⁸⁾Par commodité, notons H_0^{nj} par H_0^{η} et $U_0^{nj}(g)$ par $U_0^{\eta}(g)$

Dans la représentation impulsion le vecteur $\tilde{\eta}$ s'obtient par l'action de l'opérateur W_{η}^{-1} sur le générateur de résolution η

$$\tilde{\eta} = W_{\eta}^{-1}\eta \quad (2.3.21)$$

et

$$\tilde{\eta}_{q,p} = \tilde{U}_j(q, \Lambda_p)\tilde{\eta} \quad (2.3.22)$$

2.3.2 Les systèmes de covariance

Pour la mécanique stochastique, les systèmes de covariance jouent un rôle équivalent au système d'imprimittivité dans les processus de mesure. La représentation $U_0(g)$ et la PV mesure $E_0(\Delta)$,

$$(E_0(\Delta)\varphi)((0, \mathbf{q}), p) = \chi_{\Delta}(\mathbf{q}, \mathbf{p})\varphi((0, \mathbf{q}), p) \quad \Delta \subset \Gamma \quad (2.3.23)$$

forment un système de covariance $\{U_0, E_0\}$ pour le sous groupe Euclidien $E(\sigma)$ du groupe de Poincaré.

Pour tout le groupe de Poincaré, c'est la mesure POV

$$F_0(B) = \int_{-\infty}^{+\infty} E_0(\Delta_{q^0}, q^0) dq^0, \quad B \subset \mu_m^+ \quad (2.3.24)$$

$$E_0(\Delta, q^0) = \exp\left(\frac{i}{\hbar}P_0q^0\right)E_0(\Delta)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}P_0q^0\right) \quad (2.3.25)$$

$$\Delta_{q^0} = \{(\mathbf{q}, \mathbf{p}) / (q, p) \in B\} \subset \Gamma$$

qui donne lieu à un système de covariance $\{U_0, F_0\}$ pour le groupe de Poincaré. Nous devons souligner ici que, dans le cas relativiste l'expression de $F_0(B)$ ainsi définie, n'est pas covariante relativiste. Donc pour remédier à ce problème, nous redéfinissons le produit scalaire d'une manière à avoir une expression covariante sur tout le groupe de Poincaré [3].

A partir de la mesure PV $E_0(\Delta)$ précédente, nous pouvons construire la mesure POV

$$E_0^{\eta}(\Delta) = P_{\eta}E_0(\Delta)P_{\eta} \quad (2.3.26)$$

Le couple $\{U_0^\eta, E_0^\eta\}$ forme alors un système de covariance pour le sous-groupe Euclidien $E(\sigma)$ de Poincaré sur l'espace de Hilbert H_0^η .

Notons que du fait que U_0 ne peut pas se décomposer en somme directe des sous-représentations irréductibles U_0^η , on ne peut pas décomposer le système de covariance $\{U_0, E_0\}$ en somme directe des systèmes de covariance irréductibles $\{U_0^\eta, E_0^\eta\}$, ceci veut dire qu'il est impossible de définir des systèmes de covariance marginaux $\{U_0, E_0^\eta\}$.

2.3.3 Les probabilités

Dans le cas relativiste, la représentation U_0 n'étant pas unitaire, nous ne pouvons pas déterminer les systèmes de covariance marginaux et les interprétations probabilistes qui en découlent. Néanmoins, les opérateurs $E_0^\eta(\Delta)$ restent des opérateurs de localisation dans l'espace des phases relativistes stochastiques et les fonctions $\varphi_{nj}(q, p)$ peuvent toujours être interprétées comme des amplitudes de probabilité stochastique [32]

La valeur moyenne de $E_0^\eta(\Delta)$

$$\begin{aligned}
 P_{\varphi_\eta}(\Delta) &= \langle \varphi_\eta | E_0^\eta(\Delta_{q^0}) | \varphi_\eta \rangle; \quad \Delta_{q^0} \subset \Gamma \\
 &= (2\pi\hbar)^{-3} 2mc \int_{\Delta_{q^0}} d\mathbf{q} d\mathbf{p} \sum_{s', s=-j}^j \int_{\nu_m^+, \nu_m^+} \exp \frac{i}{\hbar} q \cdot (k - k') \times \\
 &\quad [e_n^* \left(\frac{p \cdot k'}{mc} \right) Y_{js'}^* (R(k', p) \mathbf{p}) e_n \left(\frac{p \cdot k}{mc} \right) Y_{js} (R(k, p) \mathbf{p}) \times \\
 &\quad \tilde{\varphi}_s(k) \tilde{\varphi}_{s'}^*(k') d\Omega_m(k) d\Omega_m(k')]. \tag{2.3.27}
 \end{aligned}$$

représente la probabilité que la mesure de la position spatio-temporelle stochastique moyenne et de la quadri-impulsion stochastique moyenne d'une particule quantique dans un état φ_{nj} soit contenue dans Δ lorsque ces mesures sont effectuées à un instant q^0 par rapport à un repère d'inertie de Lorentz choisi.

2.3.4 Les propagateurs

Dans chaque sous-espace irréductible H_0^η , le propagateur libre quantique relativiste d'une particule spinorielle est défini par la relation suivante [32]

$$K_\eta(q, p; q', p') = \langle \eta_{q,p} | \eta_{q',p'} \rangle_{\nu_m^+} \quad (2.3.28)$$

Ce propagateur contient $(2j+1)$ termes et représente, pour une particule étendue ayant une localisation spatio-temporelle stochastique q et une quadri-impulsion stochastique p l'amplitude de probabilité d'atteindre la localisation stochastique q' et de posséder la quadri-impulsion stochastique p' .

Ce propagateur est invariant relativiste

$$K_\eta(a + \Lambda q, \Lambda p; a + \Lambda q', \Lambda p') = K_\eta(q, p; q', p') \quad (2.3.29)$$

$$(a, \Lambda) \in P, (q, p), (q', p') \in \mu_m^+$$

En exprimant ce propagateur dans la représentation impulsion, on trouve

$$K_\eta(q, p; q', p') = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\nu_m^+} \tilde{\eta}_{q,p,s}^*(k) \tilde{\eta}_{q',p',s}(k) d\Omega_m^+(k) \quad (2.3.30)$$

$$= \sum_{s=-j}^{+j} \int_{\nu_m^+} \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q' - q) \cdot k\right] \tilde{\eta}_s^*(\Lambda_v^{-1}k) \tilde{\eta}_s(\Lambda_v^{-1}k') d\Omega_m^+(k) \quad (2.3.31)$$

En remplaçant $\tilde{\eta}_s^*(\Lambda_v^{-1}k)$ par son expression (2.3.7) et en utilisant le théorème d'addition des harmoniques sphériques[33], ce propagateur s'exprime comme:

$$\begin{aligned} K_\eta(q, p; q', p') &= \frac{mc(2j+1)}{2\pi(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q' - q) \cdot k\right] \times \\ &P_j\left(\frac{R(k,p)\mathbf{p} \cdot R(k,p')\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}||\mathbf{p}'|}\right) \times \\ &e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p' \cdot k}{mc}\right) d\Omega_m(k) \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

où P_j est un polynôme de Legendre d'ordre j

En comparant ce propagateur au propagateur non relativiste K_ξ on remarque que le premier est invariant sous toutes les transformations de Poincaré, par contre le deuxième ne peut être invariant par les boost, ceci indique que le propagateur relativiste admet un degré de symétrie plus large que le propagateur non relativiste.

2.4 Conclusion

Ainsi, comme dans le cas non relativiste, nous pouvons obtenir dans le cas de particule stochastiquement étendue de spin entier, les propagateurs, les systèmes de covariance et interpréter le POV associé comme un opérateur de localisation dans l'espace des phases stochastiques relativistes, néanmoins et du fait de la non unitarité de la représentation du groupe de Poincaré, il est impossible de construire des fonctions de confiance spinorielle comme cela a été le cas pour le groupe de Galilée.

Particule Quantique

Relativiste

Stochastiquement et

Intrinsèquement Etendue

3.1 Introduction

Dans les chapitres précédents, nous avons présenté la mécanique quantique stochastique qui permet d'éliminer les inconsistances de la mécanique quantique relativiste. La MQS attribue une extension aux particules due aux imperfections des appareils de mesure réels. Cette théorie n'est pas la seule à doter les corpuscules d'une extension. En effet, Destouches [5, 34], dans sa théorie quantique fonctionnelle qui est la généralisation de la théorie de la double solution de de Broglie [35], attribue aux particules une extension fonctionnelle afin de pouvoir tenir compte de l'influence du milieu extérieur sur leurs caractéristiques propres. Selon Destouches, un corpuscule, à l'image d'un globule fluide, ne peut être ni rigide ni ponctuel.

Le modèle géométrique-différentiel (MGD) s'inspire de cette dernière conception et plutôt que de concevoir une particule comme un globule fluide, elle est désormais composée de

deux modes quantiques, interne et externe, ponctuels [36] quantifiés par la méthode des représentations induites [37]. L'extension de ce type de particule est dite intrinsèque. Afin d'améliorer ce modèle, une extension stochastique a été adoptée pour le seul mode accessible directement à la mesure, à savoir le mode externe. Le mode interne est toujours supposé ponctuel. Ce travail a été réalisé, par notre équipe de recherche dans le cas scalaire [16] et spinoriel [10] pour des particules Galiléennes et dans le cas scalaire [7] seulement pour des particules relativistes.

Notre travail, consiste à reprendre le MGD amélioré dans le cas relativiste et à étudier l'influence du spin du mode externe stochastique. Le mode interne reste, comme dans les travaux précédents, scalaire et ponctuel.

Pour cela, nous allons, dans le premier paragraphe, présenter brièvement la théorie quantique fonctionnelle. Dans le second paragraphe, nous reprenons les principaux résultats de l'étude [7] de la particule relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue. Enfin dans le troisième paragraphe, nous dotons le mode externe d'un spin entier et nous étudions les états spinoriels possibles de la particule relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue et puis nous appliquons ces résultats au cas particulier du spin 1, enfin nous terminons ce chapitre par une conclusion.

3.2 La théorie fonctionnelle

Cette théorie est l'une des plus anciennes à doter la particule d'extension. J.L. Destouches [5, 34], son auteur, considère que la meilleure approximation que l'on puisse faire en distinguant le corpuscule du reste de l'univers, est de tenir compte de l'influence de ce dernier sur les caractéristiques propres du corpuscule. En conséquence, une particule élémentaire doit être représentée par une fonction, l'onde physique u , décrivant ses caractéristiques et ne peut plus être ponctuelle ou rigide.

Rappelons qu'en mécanique quantique conventionnelle, l'argument de la fonction d'onde $\psi(\mathbf{x}, t)$ représente les coordonnées, à un instant donné, d'un point correspondant à la position de la particule ponctuelle. Dans la théorie fonctionnelle, ce point est remplacé par une onde physique u dépendante de variables ξ de type spatio-temporel. La position

\mathbf{x} devient alors une fonctionnelle $F[u]$ qui est une généralisation de la singularité de de Broglie [35].

Comme le point \mathbf{x} est remplacé par une fonction u , la fonction d'onde $\psi(\mathbf{x}, t)$ de la mécanique quantique conventionnelle est remplacée par une fonctionnelle X dépendant de u

$$X[u, t] \tag{3.2.1}$$

Cette fonctionnelle, qu'on nomme fonctionnelle prévisionnelle, permet une interprétation probabiliste et obéit à la décomposition spectrale

$$X[u, t] = \sum_i c_i(t) X_i[u] \tag{3.2.2}$$

telle que X_i représente l'état pour lequel une observable A possède la valeur propre a_i avec l'amplitude de probabilité c_i .

Notons enfin, que la fonction abstraite u peut être obtenue en lui associant un modèle physique spécifique comme celui d'un globule fluide [5].

3.3 La particule relativiste libre stochastiquement et intrinsèquement étendue

3.3.1 La particule scalaire relativiste intrinsèquement étendue

Le modèle géométrique-différentiel [36] a été élaboré en considérant les idées de la théorie fonctionnelle et en choisissant un modèle physique particulier pour l'onde physique u . Dans ce modèle la fonctionnelle X est un champ bilocal avec une partie externe et interne

$$X[u](x, \xi) = \varphi(x, \xi) \tag{3.3.1}$$

Le point x appartient à l'espace-temps de Minkowski externe M et le point ξ à un espace-temps de Minkowski interne M' . La quantification des deux modes se fait par la méthode des représentations induites [37].

Nous allons présenter cette méthode dans le cas simple d'une particule ponctuelle relativiste scalaire (de spin 0), de masse m , puis nous la généraliserons aux deux modes.

La représentation configuration $\hat{U}(P)$ de Poincaré P , peut être obtenue par induction [37, 38] à partir de la représentation irréductible $D(L)$ du sous groupe de Lorentz L

$$\hat{U}(P) = D(L) \uparrow P \quad (3.3.2)$$

Elle agit, dans le cas de particule scalaire, sur les éléments $\hat{\varphi}$ de l'espace d'Hilbert $\hat{H}(M, d^4x)$

$$\hat{U}(a, \Lambda)\hat{\varphi}(x) = \hat{\varphi}(\Lambda^{-1}(x - a)); \Lambda \in L, \quad a \in T \quad (3.3.3)$$

Les vecteurs de cet espace \hat{H} , ne peuvent être considérés comme des états physiques d'une particule [37]. En effet les vecteurs de base $|x\rangle$ décrivent une localisation ponctuelle de la particule, qui viole, selon le théorème d'Hegerfeldt [2], la causalité. Les états localisés $\hat{\varphi}(x)$ sont alors nommés états virtuels [37].

Quand à la représentation impulsion $\tilde{U}(P)$, elle est induite à partir de la représentation unitaire et irréductible $\Delta^{m0}(H)$ du sous groupe Euclidien $H = [T]R$ produit semi-direct des translations T et des rotations R .

$$\tilde{U}^{m0}(P) = \Delta^{m0}(H) \uparrow P \quad (3.3.4)$$

Cette représentation, irréductible et unitaire [13] agit sur les états réels (ou matériels) $\tilde{\varphi}^m$ appartenant à l'espace d'Hilbert $\tilde{H}^{m0}(C_m^+, d\Omega_m^+(k))$ selon

$$\left[\tilde{U}^{m0}(a, \Lambda)\tilde{\varphi}^{m0} \right](k) = \exp(ia.k)\tilde{\varphi}^{m0}(\Lambda^{-1}k) \quad (3.3.5)$$

$$k \in C_m^+ = \{k/ k^2 = m^2, k^0 > 0\} \quad (3.3.6)$$

Notons que dans la méthode de la représentation induite nous utilisons un système d'unité pour lequel $\hbar = 1$ et $c = 1$, et nous considérons une mesure invariante $d\Omega_m^+(k)$ dans l'espace des impulsions qui est le double de celle de la théorie stochastique.

$$d\Omega_m^+(k) = \frac{d^3\mathbf{k}}{k^0} \quad (3.3.7)$$

Le processus de localisation des états scalaires réels se fait à l'aide d'un opérateur de commutation I_{m0} qui, sous forme intégrale, s'exprime comme

$$I_{m0}^+ \tilde{U}^{m0} = \hat{U} I_{m0}^+ \quad (3.3.8)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{m0}(x') &= (I_{m0}^+ \tilde{\varphi}^{m0})(x') \\ &= \frac{m}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_{C_m^+} d\Omega_m^+(k) \exp(-ik \cdot x') \tilde{\varphi}^{m0}(k) \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

Le processus de matérialisation des états virtuels, se fait au moyen d'un opérateur K_{m0} de commutation inverse du précédent

$$K_{m0}^+ \hat{U} = \tilde{U}^{m0} K_{m0}^+ \quad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}^{m0}(k) &= (K_{m0}^+ \hat{\varphi})(k) \\ &= \frac{m}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \int_M d^4x \exp(ik \cdot x) \hat{\varphi}(x) \end{aligned} \quad (3.3.11)$$

La composition d'une matérialisation suivie d'une localisation conduit au processus de propagation d'un état localisé

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{m0}(x') &= [I_{m0}^+ K_{m0}^+ \hat{\varphi}](x') = \int_M d^4x \Pi_{m0}^+(x', x) \hat{\varphi}(x) \\ \hat{\varphi}^{m0} &\in \hat{H}^{m0} \subset \hat{H} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

où le propagateur possède l'expression intégrale suivante

$$\Pi_{m0}^+(x', x) = \frac{m^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_m^+} d\Omega_m^+(k) \exp(-ik \cdot (x' - x)) \quad (3.3.13)$$

Le propagateur causal de la théorie des champs conventionnelle est obtenu par combinaison de ces fonctions avec la fonction de Heaviside $\theta(\pm x^0)$ ⁽¹⁹⁾

$$\Pi_{m0}^c(x) = \theta(x^0) \Pi_{m0}^+(x) + \theta(-x^0) \Pi_{m0}^-(x) \quad (3.3.14)$$

Pour appliquer cette méthode à la particule intrinsèquement étendue composée, rappelons le, d'un mode externe scalaire de masse m et d'un mode interne scalaire de masse

⁽¹⁹⁾La fonction de Heaviside est définie comme suit: $\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

μ , nous avons besoin de quatre types d'espace de Hilbert obtenus par produit tensoriel des espaces de Hilbert externe et interne.

D'abord l'espace de Hilbert

$$\hat{H}(M, d^4x) \otimes \hat{H}(M', d^4\xi) = \hat{H} \otimes \hat{H}' \quad (3.3.15)$$

des états bilocaux localisés $\hat{\varphi}(x, \xi)$, sur le quel agit la représentation réductible

$$\hat{U}(a, \Lambda) \otimes \hat{U}(a', \Lambda'); (a, \Lambda) \in P, (a', \Lambda') \in P' \quad (3.3.16)$$

générée par les opérateurs concernant respectivement la partie externe

$$\hat{P}_\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \quad (3.3.17)$$

$$\mathbf{J} = i (\mathbf{x} \times \nabla_{\mathbf{x}}) \quad (3.3.18)$$

$$\mathbf{K} = i \left(\mathbf{x} \frac{\partial}{\partial x^0} \right) \quad (3.3.19)$$

et interne

$$\hat{P}'_\mu = i \left(\frac{\partial}{\partial \xi^\mu} \right) \quad (3.3.20)$$

$$\mathbf{J}' = i (\boldsymbol{\xi} \times \nabla_{\boldsymbol{\xi}}) \quad (3.3.21)$$

$$\mathbf{K}' = i \left(\boldsymbol{\xi} \frac{\partial}{\partial \xi^0} \right) \quad (3.3.22)$$

Puis les espaces de Hilbert

$$\hat{H}(M, d^4x) \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) = \hat{H} \otimes \tilde{H}^{\mu 0} \quad (3.3.23)$$

$$\tilde{H}^{m 0}(C_m^+, d\Omega_m^+(k)) \otimes \hat{H}(M', d^4\xi) = \tilde{H}^{m 0} \otimes \hat{H}' \quad (3.3.24)$$

des états possédant respectivement, un mode externe localisé avec un mode interne réel $\tilde{\varphi}^{\mu 0}(x, \zeta)$, et un mode externe réel avec un mode interne localisé $\tilde{\varphi}^{m 0}(k, \xi)$.

Ces espaces sont respectivement, les supports des représentations réductibles suivantes

$$\hat{U}(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu 0}(a', \Lambda') \quad (3.3.25)$$

$$\tilde{U}^{m 0}(a, \Lambda) \otimes \hat{U}(a', \Lambda') \quad (3.3.26)$$

Enfin l'espace de Hilbert des états complètement réels $\tilde{\varphi}_{m 0}^{\mu 0}(k, \zeta)$

$$\tilde{H}^{m 0}(C_m^+, d\Omega_m^+(k)) \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) = \tilde{H}_{m 0}^{\mu 0} \quad (3.3.27)$$

sur le quel agit la représentation irréductible suivante

$$\tilde{U}^{m0}(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu0}(a', \Lambda') \quad (3.3.28)$$

telle que $\tilde{U}^{\mu0}(a', \Lambda')$ et $\tilde{U}^{m0}(a, \Lambda)$ sont générées respectivement par

$$\tilde{P}_\mu = k^\mu \quad (3.3.29)$$

$$\mathbf{J} = -i(\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) \quad (3.3.30)$$

$$\mathbf{K} = i(k^0 \nabla_{\mathbf{k}}) \quad (3.3.31)$$

et

$$\tilde{P}'_\mu = \zeta^\mu \quad (3.3.32)$$

$$\mathbf{J}' = -i(\boldsymbol{\zeta} \times \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}) \quad (3.3.33)$$

$$\mathbf{K}' = i(\zeta^0 \nabla_{\boldsymbol{\zeta}}) \quad (3.3.34)$$

La propagation est réalisée par le passage d'un état complètement localisé de $\hat{H} \otimes \hat{H}'$ vers un autre état complètement localisé à travers un état complètement réel

$$\hat{H} \otimes \hat{H}' \longrightarrow \overset{\approx \mu^0}{H}_{m0} \longrightarrow \hat{H}_{m0} \otimes \hat{H}'^{\mu0} \subset \hat{H} \otimes \hat{H}' \quad (3.3.35)$$

et le propagateur obtenu est le produit des propagateurs externe et interne

$$\Pi_{m0}^{\mu0}(x', \xi'; x, \xi) = \Pi^{m0}(x'; x) \otimes \Pi^{\mu0}(\xi'; \xi) \quad (3.3.36)$$

3.3.2 La particule scalaire relativiste intrinsèquement et stochastiquement étendue

Le modèle précédent de la particule intrinsèquement étendue peut être amélioré en y introduisant une composante stochastique. Le mode interne n'étant pas directement affecté par la mesure peut être maintenu ponctuel. Par contre le mode externe peut être décrit stochastiquement car il est directement mesurable. Nous considérons donc une particule étendue stochastiquement et intrinsèquement composée d'un mode quantique externe étendu stochastiquement, et d'un mode interne ponctuel. Dans cette partie, les deux modes sont supposés scalaires et nous ne considérons pas les antimodes.

Nous pouvons également construire quatre espaces d'Hilbert. Le premier correspond au cas où les deux modes sont dans la représentation impulsion, il est constitué d'états complètement réels

$$\begin{aligned} L_m^2 \otimes \tilde{H}^{\mu 0} &= L^2(\nu_m^+, d\Omega_m(k)) \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) \\ &= \left\{ \tilde{\varphi}_{m0}^{\mu 0}(k, \zeta) \right\} \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Sur cet espace agit la représentation impulsion

$$\tilde{U}_m^\mu = \tilde{U}^{m0}(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu 0}(a', \Lambda') \quad (3.3.38)$$

Les autres espaces de Hilbert

$$H_\eta \otimes \tilde{H}^{\mu 0} = L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) = \left\{ \tilde{\varphi}_\eta^{\mu 0}(q, p, \zeta) \right\} \quad (3.3.39)$$

$$\tilde{U}_\eta^\mu = U_\eta(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu 0}(a', \Lambda') \quad (3.3.40)$$

$$H_\eta \otimes \hat{H}' = L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \hat{H}(M', d^4\xi) = \left\{ \hat{\varphi}_\eta(q, p, \xi) \right\} \quad (3.3.41)$$

$$\hat{U}_\eta = U_\eta(a, \Lambda) \otimes \hat{U}(a', \Lambda') \quad (3.3.42)$$

et

$$H_\eta \otimes \hat{H}^{\mu\mu} = L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \hat{H}^\mu(M', d^4\xi) = \left\{ \hat{\varphi}_\eta^\mu(q, p, \xi) \right\} \quad (3.3.43)$$

$$\hat{U}_\eta^\mu = U_\eta(a, \Lambda) \otimes \hat{U}^\mu(a', \Lambda') \quad (3.3.44)$$

correspondent à des états pour les quels le mode externe est stochastique et le mode interne respectivement, réel, localisé et réel localisé.

Les probabilités que la mesure de la position et de l'impulsion stochastique donne une valeur (q, p) de $\Delta \subset \Sigma_m^+$ et que la mesure de l'impulsion interne ζ soit une valeur de $\tilde{\Delta}'$ est donnée par

$$\begin{aligned} P_\varphi(\Delta \times \tilde{\Delta}') &= \left\langle \tilde{\varphi}_\eta^\mu | E(\Delta \times \tilde{\Delta}') \tilde{\varphi}_\eta^\mu \right\rangle \\ &= \int_{\Delta \times \tilde{\Delta}'} d\Sigma_m^+(q, p) d\Omega_\mu^+(\zeta) \left| \tilde{\varphi}_\eta^\mu(q, p, \zeta) \right|^2 \end{aligned} \quad (3.3.45)$$

où les fonctions

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\eta^\mu(q, p, \zeta) &= \langle \tilde{\eta}_{q,p,\zeta} | \tilde{\varphi}_\eta^\mu \rangle \\ &= \int_{\nu_m^+} d\Omega_m(k) \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \tilde{\varphi}_{m_0}^{\mu 0}(k, \zeta)\end{aligned}\quad (3.3.46)$$

sont obtenues par projection de l'état $|\tilde{\varphi}_\eta^\mu\rangle$ sur l'état propre $|\tilde{\eta}_{q,p,\zeta}\rangle$ qui est réalisé comme le produit tensoriel de l'état propre stochastique $\tilde{\eta}$ avec l'état "propre" interne ponctuel $|\zeta\rangle$

$$|\tilde{\eta}_{q,p,\zeta}\rangle = |\tilde{\eta}_{q,p}\rangle \otimes |\zeta\rangle \quad (3.3.47)$$

tel que

$$\langle \zeta' | \zeta \rangle = \zeta^0 \delta(\zeta - \zeta') \quad (3.3.48)$$

Le couple $\left\{ \tilde{U}_m^\mu, E(\Delta \otimes \tilde{\Delta}') \right\}$ constitue un système de covariance qui est le produit du système de covariance stochastique externe et du système d'imprimitivité ponctuel interne.

Comme pour le paragraphe précédent la propagation peut être obtenue par l'action successive d'une matérialisation et d'une localisation

$$\hat{\varphi}_\eta(q, p, \xi) \xrightarrow{W_\eta^{-1} \otimes K_{\mu_0}^+} \tilde{\varphi}_{m_0}^{\mu 0}(k, \zeta) \xrightarrow{W_\eta \otimes I_{\mu_0}^+} \hat{\varphi}_\eta^\mu(q', p', \xi') \quad (3.3.49)$$

où W_η , $I_{\mu_0}^+$ et $K_{\mu_0}^+$ sont respectivement les opérateurs de commutation stochastique externe, de localisation interne et de matérialisation interne.

Le propagateur total est alors le produit

$$\hat{\varphi}_\eta(q, p, \xi) \xrightarrow{K_\eta^\mu} \hat{\varphi}_\eta^\mu(q', p', \xi') \quad (3.3.50)$$

$$K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') = K_\eta(q, p; q', p') \Pi^\mu(\xi, \xi') \quad (3.3.51)$$

du propagateur stochastique libre externe

$$K_\eta(q, p, \xi; q', p', \xi') = \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \tilde{\eta}_{q',p'}(k) \quad (3.3.52)$$

et du propagateur interne

$$\Pi^\mu(\xi - \xi') = \frac{\mu^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_{\mu^+}} d\Omega_\mu^+(\zeta) \exp[-i\zeta \cdot (\xi - \xi')] \quad (3.3.53)$$

3.4 La particule spinorielle relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue

Afin d'améliorer le modèle de la particule relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue nous allons considérer dans ce paragraphe une particule spinorielle étendue composée de deux modes quantiques. Le mode interne de masse μ , reste scalaire - le cas du mode interne spinoriel sera traité dans un autre travail- et ponctuel et est quantifié par la méthode des représentations induites. Le mode externe de masse m , est doté d'un spin \mathbf{j} . Au vue des résultats du chapitre précédent, nous allons donc étudier une particule spinorielle intrinsèquement étendue dont les mesures de la position et de l'impulsion externe se font dans un repère de Lorentz, à l'origine du quel une particule d'essai de spin \mathbf{j} qui sert de micro-détecteur est stochastiquement au repos. Et comme pour le chapitre précédent, nous allons limiter notre étude au cas du spin \mathbf{j} entier.

3.4.1 Les systèmes de covariance

Pour étudier la particule relativiste de spin \mathbf{j} stochastiquement et intrinsèquement étendue, c'est-à-dire donner les interprétations probabilistes et déterminer les propagateurs, nous devons définir principalement quatre espaces de Hilbert différents pour décrire les différents états possibles du système.

Le premier est l'espace de Hilbert des états $\tilde{H}_j^{\mu 0}$ complètement réels

$$\begin{aligned} \tilde{H}_j^{\mu 0} &= \tilde{H}_j \otimes \tilde{H}^{\mu 0} \\ &= [l^2(2j+1) \otimes L^2(\nu_m^+, d\Omega_m^+(k))] \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) \\ &= \left\{ \tilde{\varphi}_j^{\mu 0}(k, \zeta) \right\} \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

Sur cet espace agit la représentation impulsion, produit tensorielle de deux représentations impulsions irréductibles unitaires de Poincaré interne et externe

$$\tilde{U}_j^{\mu 0} = \tilde{U}_j(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu 0}(a', \Lambda') \quad (3.4.2)$$

telle que $\tilde{U}_j(a, \Lambda)$ est générée par

$$\tilde{P}_\mu = k^\mu \quad (3.4.3)$$

$$\mathbf{J} = -i\hbar(\mathbf{k} \times \nabla_{\mathbf{k}}) + \mathbf{S} \quad (3.4.4)$$

$$\mathbf{K} = i\hbar(k^0 \nabla_{\mathbf{k}}) - \frac{\mathbf{S} \times \mathbf{k}}{mc + k_0} \quad (3.4.5)$$

Dans cette représentation, les états du système sont représentés par des fonctions d'onde de la forme

$$\tilde{\varphi}_j^{\mu 0}(k, \zeta) = \langle k, \zeta | \tilde{\varphi}_j^{\mu 0} \rangle = (\langle k | \otimes \langle \zeta |) \tilde{\varphi}_j^{\mu 0} \rangle \quad (3.4.6)$$

où les états de base $|k, \zeta\rangle$ sont le produit des états "propres" externe et interne satisfaisant

$$\langle k' | k \rangle = k^0 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \quad (3.4.7)$$

$$\langle \zeta' | \zeta \rangle = \zeta^0 \delta(\boldsymbol{\zeta} - \boldsymbol{\zeta}') \quad (3.4.8)$$

L'opérateur

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\tilde{\Delta} \otimes \tilde{\Delta}') &= \int_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}'} |k, \zeta\rangle \langle k, \zeta| d\Omega_m^+(k) d\Omega_\mu^+(\zeta) \\ \tilde{\Delta} &\subset \nu_m^+; \quad \tilde{\Delta}' \subset C_\mu'^+ \end{aligned} \quad (3.4.9)$$

constitue avec la représentation (3.4.2) un système d'imprimitivité

Le second espace de Hilbert que nous définissons est l'espaces des états pour lesquels le mode externe est stochastique et le mode interne réel

$$\begin{aligned} H_0^{nj} \otimes \tilde{H}^{\mu 0} &= L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \tilde{H}^{\mu 0}(C_\mu'^+, d\Omega_\mu^+(\zeta)) \\ &= \{\tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}(q, p; \zeta)\} \end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Dans cette représentation, les états du système sont associés aux fonctions d'onde

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}(q, p, \zeta) &= \langle \tilde{\eta}_{q,p}; \zeta / \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} \rangle = (\langle \tilde{\eta}_{q,p} | \otimes \langle \zeta |) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} \rangle \\ &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) \times \\ &\quad Y_{js}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) d\Omega_m(k) \end{aligned} \quad (3.4.11)$$

3.4. La particule spinorielle relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue

sur lesquelles agit la représentation produit de la représentation irréductible de l'espace des phases et de la représentation irréductible impulsion interne.

$$\tilde{U}_{nj}^\mu = U_0^{nj}(a, \Lambda) \otimes \tilde{U}^{\mu 0}(a', \Lambda') \quad (3.4.12)$$

Le produit de l'opérateur POV correspondant à la partie stochastique externe par l'opérateur PV correspondant à la partie interne

$$\begin{aligned} \tilde{E}(\Delta \otimes \tilde{\Delta}) &= E_0^n \otimes \int_{\tilde{\Delta}'} d\Omega(\zeta) |\zeta\rangle \langle \zeta| \\ &= \int_{\Delta} d\Sigma_m^+(q, p) |\eta_{q,p}\rangle \langle \eta_{q,p}| \otimes \int_{\tilde{\Delta}'} d\Omega_\mu^+(\zeta) |\zeta\rangle \langle \zeta| \\ \Delta &\subset \Sigma_m^+; \quad \tilde{\Delta}' \subset C_\mu'^+ \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

constitue un opérateur POV, qui avec (3.4.12) forme un système de covariance.

Les deux derniers espaces de Hilbert sont, l'espace

$$H_0^{nj} \otimes \hat{H}' = L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \hat{H}(M', d^4\xi) = \{\hat{\varphi}_{nj}(q, p; \xi)\} \quad (3.4.14)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{nj}(q, p; \xi) &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) \times \\ &e_n \left(\frac{p \cdot k}{mc} \right) Y_{js}(R(k, p) \mathbf{p}) \hat{\varphi}_s(k, \xi) d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

muni de la représentation

$$\hat{U}_{nj} = U_0^{nj}(a, \Lambda) \otimes \hat{U}(a', \Lambda') \quad (3.4.16)$$

et l'espace

$$\begin{aligned} H_0^{nj} \otimes \hat{H}^{\mu'} &= L^2(\Sigma_{m,\eta}^+, d\Sigma_m^+) \otimes \hat{H}^\mu(M', d^4\xi) \subset H_0^{nj} \otimes \hat{H}' \\ &= \{\hat{\varphi}_{nj}^\mu(q, p; \xi)\} \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}_{nj}^\mu(q, p; \xi) &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) \times \\ &e_n^* \left(\frac{p \cdot k}{mc} \right) Y_{js}^*(R(k, p) \mathbf{p}) \hat{\varphi}_s^\mu(k, \xi) d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (3.4.18)$$

muni de la représentation

$$\hat{U}_{nj}^\mu = U_0^{nj}(a, \Lambda) \otimes \hat{U}^\mu(a', \Lambda') \quad (3.4.19)$$

Ce sont les espaces de Hilbert des états dont les parties externe et interne sont respectivement stochastique et localisée puis stochastique et réelle localisée⁽¹⁹⁾.

Les opérateurs

$$\begin{aligned} \hat{E}(\Delta \otimes \hat{\Delta}) &= E_0^n \otimes \int_{\hat{\Delta}'} d^4\xi |\xi\rangle \langle \xi| \\ &= \int_{\Delta} d\Sigma_m^+(q, p) |\eta_{q,p}\rangle \langle \eta_{q,p}| \otimes \int_{\hat{\Delta}'} d^4\xi |\xi\rangle \langle \xi| \\ \Delta &\subset \Sigma_m; \quad \hat{\Delta}' \subset M' \end{aligned} \quad (3.4.20)$$

constituent, avec la représentation (3.4.16) un système de covariance dans $H_0^{nj} \otimes \hat{H}'$ et avec (3.4.19), un système de covariance dans $H_0^{nj} \otimes \hat{H}^{\mu'}$.

3.4.2 Les interprétations probabilistes

A chaque opérateur POV défini précédemment correspond une probabilité. Ainsi la valeur moyenne de (3.4.9)

$$\begin{aligned} P_\varphi(\tilde{\Delta} \otimes \tilde{\Delta}') &= \langle \tilde{\varphi}_j^{\mu 0} | \tilde{E}(\tilde{\Delta} \otimes \tilde{\Delta}') \tilde{\varphi}_j^{\mu 0} \rangle \\ &= \int_{\tilde{\Delta}, \tilde{\Delta}'} \left| \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) \right|^2 d\Omega_m^+(k) d\Omega_\mu^+(\zeta) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

représente la probabilité d'obtenir lors d'une mesure stricte, une valeur de l'impulsion contenue dans $\tilde{\Delta} \subset \nu_m^+$ pour le mode externe ayant une composante de spin s , et une impulsion contenue dans $\tilde{\Delta}' \subset C_\mu^+$ pour le mode interne.

On peut également définir la probabilité $P_\varphi(\Delta \otimes \tilde{\Delta}')$ de mesurer les valeurs externes stochastiques $(q, p) \in \Delta \subset \Sigma_m^+$ et une impulsion interne de $\tilde{\Delta}'$ lorsque la particule est dans

⁽¹⁹⁾Notons également que l'on peut définir les espaces de Hilbert $\tilde{H}_j \otimes \hat{H}$ et $\tilde{H}_j \otimes \hat{H}^{\mu 0}$ des fonctions $\hat{\varphi}_s(k, \xi)$ et $\hat{\varphi}_s^\mu(k, \xi)$.

l'état $\tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}$

$$\begin{aligned}
 P_\varphi \left(\Delta \otimes \tilde{\Delta}' \right) &= \langle \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} | \tilde{E} \left(\Delta \otimes \tilde{\Delta}' \right) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} \rangle \\
 &= \int_{\Delta, \tilde{\Delta}'} \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right] d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Sigma_m^+(q, p) \times \\
 &\quad \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q \right) e_n \left(\frac{p \cdot k}{mc} \right) \times \\
 &\quad Y_{js} \left(R(k, p) \mathbf{p} \right) \tilde{\varphi}_s^{\mu 0} (k, \zeta) d\Omega_m^+(k) \times \\
 &\quad \sum_{s'=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp \left(\frac{i}{\hbar} k' \cdot q \right) e_n^* \left(\frac{p \cdot k'}{mc} \right) \times \\
 &\quad Y_{js'}^* \left(R(k', p) \mathbf{p} \right) \tilde{\varphi}_{s'}^{\mu 0*} (k', \zeta) d\Omega_m^+(k') \quad (3.4.22)
 \end{aligned}$$

En intégrant sur tout le domaine de définition des variables stochastiques, nous obtenons les probabilités sur la mesure des impulsions internes seulement

$$\begin{aligned}
 P_\varphi \left(\Sigma_m^+ \otimes \tilde{\Delta}' \right) &= P_\varphi \left(\tilde{\Delta}' \right) = \langle \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} | \tilde{E} \left(\Sigma_m^+ \otimes \tilde{\Delta}' \right) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} \rangle \\
 &= \int_{\Sigma_m^+, \tilde{\Delta}'} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Sigma_m^+(q, p) \tilde{\varphi}_{nj}^{*\mu 0} (q, p, \zeta) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} (q, p, \zeta) \\
 &= \int_{\tilde{\Delta}'} d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\Sigma_m^+} \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right] d\Sigma_m^+(q, p) \times \\
 &\quad \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp \left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q \right) e_n \left(\frac{p \cdot k}{mc} \right) \times \\
 &\quad Y_{js} \left(R(k, p) \mathbf{p} \right) \tilde{\varphi}_s^{\mu 0} (k, \zeta) d\Omega_m^+(k) \times \\
 &\quad \sum_{s'=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp \left(\frac{i}{\hbar} k' \cdot q \right) e_n^* \left(\frac{p \cdot k'}{mc} \right) \times \\
 &\quad Y_{js'}^* \left(R(k', p) \mathbf{p} \right) \tilde{\varphi}_{s'}^{\mu 0*} (k', \zeta) d\Omega_m^+(k'). \quad (3.4.23)
 \end{aligned}$$

De même en étendant le domaine d'intégration des impulsions internes à tout C_μ^+ , nous pouvons obtenir les probabilités de mesure stochastique du mode externe seulement

et qui correspondent à la valeur moyenne de $\tilde{E}(\Delta \otimes C_\mu^+)$

$$\begin{aligned}
P_\varphi(\Delta \times C_\mu^+) &= \langle \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} | \tilde{E}(\Delta \otimes C_\mu^+) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0} \rangle \\
&= \int_{C_\mu^+, \Delta} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Sigma_m^+(q, p) \tilde{\varphi}_{nj}^{*\mu 0}(q, p, \zeta) \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}(q, p, \zeta) \\
&= \int_{C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\Delta} \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right] d\Sigma_m^+(q, p) \times \\
&\quad \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) \times \\
&\quad Y_{js}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) d\Omega_m^+(k) \times \\
&\quad \sum_{s'=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(\frac{i}{\hbar} k' \cdot q\right) e_n^*\left(\frac{p \cdot k'}{mc}\right) \times \\
&\quad Y_{js'}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{s'}^{\mu 0*}(k', \zeta) d\Omega_m^+(k'). \tag{3.4.24}
\end{aligned}$$

Dans le cas où la fonction $\tilde{\varphi}^{\mu 0}(k, \zeta)$ est un vecteur à $(2s+1)$ composantes quelconque, la relation (3.4.22) ne peut se réduire, néanmoins, dans le cas particulier où l'on factorise $\tilde{\varphi}^{\mu 0}(k, \zeta)$ en un produit tensoriel de fonctions externe interne

$$\tilde{\varphi}^{\mu 0}(k, \zeta) = \tilde{\varphi}(k) \tilde{\psi}(\zeta) \tag{3.4.25}$$

où $\tilde{\varphi}(k)$ est la fonction d'onde, dans la représentation impulsion du mode externe qui est une matrice colonne à $2s+1$ composantes et $\tilde{\psi}(\zeta)$ la fonction d'onde, toujours dans la représentation impulsion, du mode scalaire interne.

La probabilité (3.4.22) devient

$$P_\varphi(\Delta \times \tilde{\Delta}') = P_\varphi(\Delta) \cdot P_\psi(\tilde{\Delta}') \tag{3.4.26}$$

où

$$P_\psi(\tilde{\Delta}') = \int_{\tilde{\Delta}'} \left| \tilde{\psi}^{\mu 0}(\zeta) \right|^2 d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\Sigma_m^+} d\Sigma_m^+(q, p) \varphi_{nj}^*(q, p) \varphi_{nj}(q, p) \tag{3.4.27}$$

et

$$P_\varphi(\Delta) = \int_{\Delta} d\Sigma_m^+(q, p) \varphi_{nj}^*(q, p) \varphi_{nj}(q, p) \int_{C_\mu^+} \left| \tilde{\psi}^{\mu 0}(\zeta) \right|^2 d\Omega_\mu^+(\zeta) \tag{3.4.28}$$

Si les fonctions internes sont normalisées à l'unité, alors les probabilités $P_\varphi(\Delta)$ sont celles du mode externe stochastique seulement.

3.4.3 Les propagateurs

La propagation est définie comme le passage d'un état localisé $\hat{\varphi}_{nj}(q, p; \xi)$ vers un état réel localisé $\hat{\varphi}_{nj}^\mu(q', p'; \xi')$. Comme dans le paragraphe précédent, ce passage se fait à travers un état complètement réel $\tilde{\varphi}_j^{\mu 0}(k, \zeta)$.

$$\hat{\varphi}_{nj}(q, p; \xi) \rightarrow \tilde{\varphi}_j^{\mu 0}(k, \zeta) \rightarrow \hat{\varphi}_{nj}^\mu(q', p'; \xi') \quad (3.4.29)$$

Le premier processus, se fait par l'action de l'opérateur $W_\eta^{-1} \otimes K_{\mu 0}^+$ réalisé comme le produit tensoriel des opérateurs W_η^{-1} et $K_{\mu 0}^+$ respectivement opérateur de commutation stochastique externe et opérateur de matérialisation interne. Cela permet le passage d'un état ayant un mode externe localisé stochastiquement en (q, p) et un mode interne virtuel localisé en ξ à un état matériel qui possède une impulsion externe k et une impulsion interne ζ .

$$\begin{aligned} W_\eta^{-1} \otimes K_{\mu 0}^+ & : H_0^{nj} \otimes \hat{H}' \rightarrow \tilde{H}_j \otimes \tilde{H}^{\mu 0} \\ \left(W_\eta^{-1} \otimes K_{\mu 0}^+ \tilde{\varphi}_j^{\mu 0} \right)_s(k, \zeta) & = \frac{\mu}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \\ & \int_{M'} d^4\xi \int_{\sigma \times \nu_m^+} \exp(i\zeta \cdot \xi) \times \\ & \exp\left(\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) e^*\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) \times \\ & Y_{js}^*(R(k \cdot p) \mathbf{p}) \hat{\varphi}_{nj}(q, p; \xi) d\Sigma_m^+(q, p) \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

L'opérateur $W_\eta \otimes I_{\mu 0}^+$, produit tensoriel de l'inverse de l'opérateur de commutation stochastique externe et de l'opérateur de localisation interne, permet le passage de l'état réel, d'impulsion externe k et interne ζ , vers un état dont le mode externe est localisé

stochastiquement en (q', p') et le mode interne réel localisé en ξ' .

$$W_\eta \otimes I_{\mu 0}^+ : \tilde{H}_j \otimes \tilde{H}^{\mu 0} \rightarrow H_0^{nj} \otimes \hat{H}^\mu \quad (3.4.31)$$

$$\begin{aligned} (W_\eta \otimes I_{\mu 0}^+ \hat{\varphi}_{nj}^\mu)(q', p'; \xi') &= \frac{\mu}{4\pi^{\frac{3}{2}}} \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \times \\ &\sum_{s=-j}^j \int_{C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} \exp(-i\zeta \cdot \xi') \times \\ &\exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q'\right) e_n\left(\frac{p' \cdot k}{mc}\right) \times \\ &Y_{js}(R(k, p') \mathbf{p}') \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) d\Omega_m(k) \end{aligned} \quad (3.4.32)$$

La propagation est la composition de ces deux processus et le propagateur total est le produit

$$K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') = K_\eta(q, p; q', p') \Pi^\mu(\xi, \xi') \quad (3.4.33)$$

du propagateur interne

$$\Pi^\mu(\xi, \xi') = \frac{\mu^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) \exp[-i\zeta \cdot (\xi - \xi')] \quad (3.4.34)$$

et du propagateur stochastique libre externe

$$\begin{aligned} K_\eta(q, p; q', p') &= \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \tilde{\eta}_{q,p}^*(k) \tilde{\eta}_{q',p'}(k) \\ &= \frac{mc(2j+1)}{2\pi(2\pi\hbar)^3} \int \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q' - q) \cdot k\right] \times \\ &P_j\left(\frac{R(k \cdot p) \mathbf{p} \cdot R(k \cdot p') \mathbf{p}'}{|\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|}\right) \times \\ &e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p' \cdot k}{mc}\right) d\Omega_m(k) \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

3.5 Application au cas du spin unité

Nous allons reprendre les principaux résultats du paragraphe précédent dans le cas particulier où le spin du micro détecteur et du mode externe est l'unité. Le mode interne est quant à lui toujours scalaire.

La particule étendue stochastiquement et intrinsèquement est représentée dans l'espace des impulsions par la fonction d'onde $\tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta)$, qui possède trois composantes $\tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0}(k, \zeta)$, $\tilde{\varphi}_0^{\mu 0}(k, \zeta)$, $\tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0}(k, \zeta)$. De même, la fonction d'onde propre $\tilde{\eta}_s(k)$ a également trois composantes $\tilde{\eta}_{-1}(k)$, $\tilde{\eta}_0(k)$, $\tilde{\eta}_{+1}(k)$.

Dans l'espace $H_0^{n1} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$, cette fonction d'onde s'écrit

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{n1}^{\mu 0}(q, p, \zeta) &= \sum_{s=-1}^{+1} \int_{v_m^+} \tilde{\eta}_{q,p,s}^*(k) \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) d\Omega_m^+(k) \\ &= \int_{v_m^+} (\tilde{\eta}_{q,p,-1}^*(k) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0}(k, \zeta) + \tilde{\eta}_{q,p,0}^*(k) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0}(k, \zeta) + \\ &\quad \tilde{\eta}_{q,p,+1}^*(k) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0}(k, \zeta)) d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (3.5.1)$$

En écrivant la fonction d'onde propre $\tilde{\eta}_{q,p,s}^*(k)$ comme le produit d'une fonction angulaire $Y_{js}(R(k, p) \mathbf{p})$ et une fonction radiale $e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right)$, on aura

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}(q, p, \zeta) &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^{1/2} \int_{v_m^+} \exp\left(-\frac{i}{\hbar} k \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) \times \\ &\quad [Y_{1-1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0}(k, \zeta) + Y_{10}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0}(k, \zeta) + \\ &\quad Y_{1+1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0}(k, \zeta)] d\Omega_m^+(k) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

La probabilité $P_\varphi(\Delta \otimes \tilde{\Delta}')$ de mesurer les valeurs externes stochastiques $(q, p) \in \Delta$ et une impulsion interne de $\tilde{\Delta}'$ lorsque la particule est dans l'état $\tilde{\varphi}_{n1}^{\mu 0}$ possède alors l'expression suivante

$$\begin{aligned} P_\varphi(\Delta \otimes \tilde{\Delta}') &= \langle \tilde{\varphi}_{n1}^{\mu 0} | \tilde{E}(\Delta \otimes \tilde{\Delta}') \tilde{\varphi}_{n1}^{\mu 0} \rangle \\ &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right]^2 \int_{\Delta, \tilde{\Delta}'} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Sigma_m^+(q, p) \int_{v_m^+} d\Omega_m^+(k') \times \\ &\quad \int_{v_m^+} d\Omega_m^+(k) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(k - k') \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p \cdot k'}{mc}\right) \times \\ &\quad [Y_{1-1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0}(k, \zeta) + Y_{10}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0}(k, \zeta) + \\ &\quad Y_{1+1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0}(k, \zeta)] \times [Y_{1-1}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0*}(k', \zeta) + \\ &\quad Y_{10}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0*}(k', \zeta) + Y_{1+1}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0*}(k', \zeta)]. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

En intégrants cette probabilité sur tout le domaine de définition C_μ^+ des impulsions internes, nous obtenons la probabilité de mesurer les positions et impulsions stochastiques externes $(q, p) \in \Delta$ indépendamment des impulsions internes:

$$\begin{aligned}
 P_\varphi(\Delta \times C_\mu^+) &= \left[\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right] \int_{\Delta, C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Sigma_m^+(q, p) \int_{v_m^+} d\Omega_m^+(k') \\
 &\int_{v_m^+} d\Omega_m^+(k) \exp\left(-\frac{i}{\hbar}(k - k') \cdot q\right) e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p \cdot k'}{mc}\right) \\
 &[Y_{1-1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0}(k, \zeta) + Y_{10}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0}(k, \zeta) + \\
 &Y_{1+1}(R(k, p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0}(k, \zeta)] \times [Y_{1-1}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{-1}^{\mu 0*}(k', \zeta) + \\
 &Y_{10}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_0^{\mu 0*}(k', \zeta) + Y_{1+1}^*(R(k', p) \mathbf{p}) \tilde{\varphi}_{+1}^{\mu 0*}(k', \zeta)] \quad (3.5.4)
 \end{aligned}$$

Cette probabilité compte neufs termes dont trois correspondent au cas où le spin de la particule et du micro-détecteur sont parfaitement alignés, les autres termes sont liés aux fluctuations du spin par rapport à l'axe des impulsions stochastiques sur lequel il est mesuré.

Dans le cas où le mode externe possède un spin unité, le propagateur s'écrit comme

$$\begin{aligned}
 K_\eta^\mu(q, p, \xi; q', p', \xi') &= K_\eta(q, p; q', p') \Pi^\mu(\xi, \xi') \\
 &= \left(\frac{2mc}{(2\pi\hbar)^3} \right) \left[\frac{\mu^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) \exp[-i\zeta \cdot (\xi - \xi')] \right] \times \\
 &\int_{v_m^+} d\Omega_m^+(k) \left[\frac{i}{\hbar}(q' - q) \cdot k \right] e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p' \cdot k}{mc}\right) \times \\
 &[(Y_{1-1}(R(k, p') \mathbf{p}) Y_{1-1}(R(k, p) \mathbf{p}') + Y_{10}(R(k, p) \mathbf{p}) + \\
 &Y_{10}(R(k, p') \mathbf{p}') + Y_{1+1}(R(k, p) \mathbf{p}) Y_{1+1}(R(k, p) \mathbf{p}')]. \quad (3.5.5)
 \end{aligned}$$

Expression que l'on peut écrire en fonction des polynômes de Legendre P_1 d'ordre 1,

$$\begin{aligned}
 K_{\eta}^{\mu}(q, p, \xi; q', p', \xi') &= \frac{mc(2j+1)}{2\pi(2\pi\hbar)^3} \cdot \frac{\mu^2}{2(2\pi)^3} \int_{C_{\mu}^+} d\Omega_{\mu}^+(\zeta) \times \\
 &\int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \exp[-i\zeta \cdot (\xi - \xi')] \exp\left[\frac{i}{\hbar}(q' - q) \cdot k\right] \times \\
 &P_1\left(\frac{R(k.p)\mathbf{p} \cdot R(k.p')\mathbf{p}'}{|\mathbf{p}| |\mathbf{p}'|}\right) \times e_n\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) e_n^*\left(\frac{p' \cdot k}{mc}\right). \quad (3.5.6)
 \end{aligned}$$

Conclusion

Le but de ce travail était d'étudier l'impact du spin dans le modèle de la particule relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue. Pour cela, nous avons commencé par présenter la mécanique quantique stochastique, en traitant d'abord le cas de la particule libre non relativiste et sans spin. Nous avons ainsi introduit la notion d'espace des phases stochastiques, de système de covariance lié à la représentation dans cet espace et à des opérateurs à valeur positive qui sont la généralisation des opérateurs de projection et qui permettent de mesurer la position et l'impulsion de façon réaliste en introduisant une composante stochastique liée aux appareils de mesure réels, imparfaits et quantiques. Puis nous avons donné un aperçu sur la manière dont le spin stochastique a été introduit dans le cas non relativiste ceci nous a permis de montrer que non seulement la mesure de la position et de l'impulsion induisait une extension stochastique mais que la mesure du spin était également stochastique et liée à une fonction de confiance de spin. Dans le paragraphe deux, nous avons abordé la mécanique quantique relativiste stochastique pour une particule scalaire en mettant en évidence les différences entre ce cas et le cas non relativiste. Nous avons montré que pour la MQSR la localisation stochastique ne contredit pas les principes de la relativité restreinte et qu'il était possible de définir des courants de probabilité covariant et des opérateurs de position stochastique. L'analyse harmonique de la représentation spin nul de l'espace des phases du groupe de Poincaré nous a permis d'étudier le cas d'une particule relativiste de spin entier stochastiquement étendue. Comme dans le cas non relativiste, nous avons obtenu les systèmes de covariance, l'interprétation probabiliste et les propagateurs, néanmoins comme la représentation de l'espace des phases de spin nul de Poincaré n'est pas unitaire globalement, le passage vers

les probabilités marginales ne peut se faire même approximativement. Tous les résultats présentés dans ces deux chapitres concerne une particule qui possède une extension stochastique.

Le troisième chapitre décrit des particules relativistes stochastiquement et intrinsèquement étendues. Ces dernières sont composées de deux modes, l'un externe évolue dans l'espace des phases stochastiques relativistes et le second interne qui évolue dans l'espace de Minkowski interne, confère à la particule son caractère intrinsèquement étendue. L'essentiel de notre contribution, présentée dans le chapitre trois, a consisté à reprendre le modèle de la particule relativiste stochastiquement et intrinsèquement étendue et de considérer un mode externe avec un spin entier, nous avons étudié le cas particulier d'un spin externe unité.

Cette étude nous a permis de construire les espaces de Hilbert des états possibles physiques du système et de déterminer les représentations susceptibles de décrire ces particules élémentaires. Les opérateurs à valeurs positives (POV) obtenus nous ont permis de donner les différentes interprétations probabilistes. Enfin, nous avons obtenu l'expression du propagateur relativiste libre qui décrit l'évolution de ce type de particule. Nous avons également fait une application des résultats obtenus au cas particulier du spin unité.

Dans notre travail nous n'avons considéré que des spins entiers, mais l'étude de la représentation de spin $J \neq 0$ obtenu par la composition des spins demi entiers du micro-détecteur et de la particule ponctuelle permettrait d'étendre cette étude au cas de particules possédant des spins demi-entiers. De même, le choix d'une expression particulière pour la fonction d'onde propre du micro-détecteur η et de l'onde physique permettrait de calculer de manière explicite le courant et la densité de probabilité ainsi que les propagateurs. Ces remarques pourraient constituer l'objet de travaux ultérieurs.

A L'espace-temps de Minkowski et le groupe de Poincaré

.1 L'espace-temps de Minkowski

Quand on parle de la relativité restreinte, on doit forcément parler de l'espace de Minkowski qui est un espace pseudo-euclidien, à quatre dimensions. Dans cet espace, la distance entre deux points (deux événements) infiniment voisins est donnée par

$$ds^2 = c^2t^2 - d\mathbf{x}^2 \quad (0.1.1)$$

On peut représenter l'espace-temps par un cône de lumière, tel qu'à partir d'un événement, que l'on prend comme origine du cône et qu'on appelle événement présent, tous les événements qui se situent avant celui-ci sont les événements du passé représentant la partie inférieure du cône nommée nappe du passé Γ^- , l'autre nappe qui est placée après l'origine est la nappe future Γ^+ . Tous les événements qui se situent à l'extérieur du cône constituent l'ailleurs de cet événement.

Ce cône de lumière divise l'espace-temps en différentes régions:

Lorsque $ds^2 > 0$, les événements sont tous à l'intérieur du cône, on dit que l'espace est du genre-temps.

Lorsque $ds^2 < 0$, les événements sont tous à l'extérieur du cône, l'espace est du genre-espace.

Lorsque $ds^2 = 0$, les évènements sont à la frontière du cône, l'espace est du genre lumière.

On remarque aussi sur le cône de lumière une ligne qui indique la trajectoire de la particule, cette ligne est appelée ligne d'univers, telle que la pente $\frac{|dx|}{dt}$ entre l'axe du temps et cette ligne est la vitesse v de la particule, cette vitesse est égale à la vitesse de la lumière dans le vide, c au bord du cône.

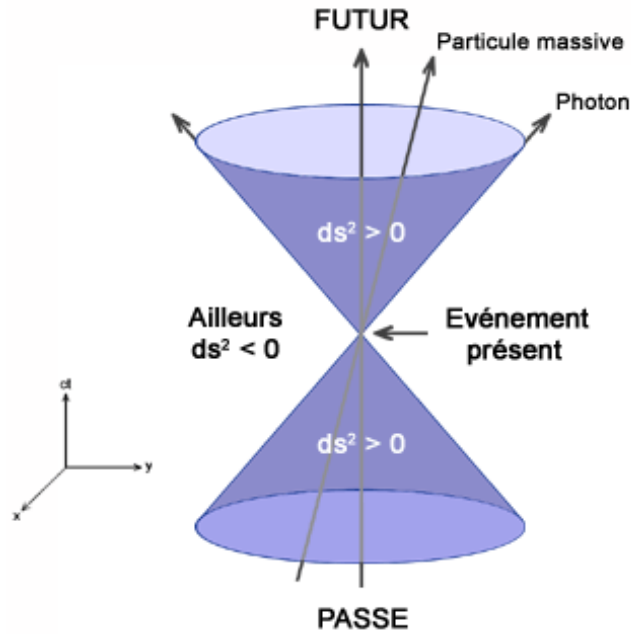


Figure 1: Le cône de lumière dans l'espace de Minkowski

.2 La causalité et la simultanéité en relativité restreinte

La causalité en physique, exige que si un évènement est la cause d'un autre évènement, qu'on appelle effet, alors la cause précède l'effet.

Si on essaye de voir cela à partir du cône de lumière, on remarque que tous les évènements qui se situent à l'intérieure et au bords du cône de lumière de sorte que $cdt \geq dx \Rightarrow c \geq v$ sont liés entre eux d'une manière causale. Par contre ceux de l'ailleurs

ne peuvent être reliés d'une manière causale, en effet $ds^2 < 0$ implique que $c < v$, cela voudrait dire que l'effet précéderait la cause chose qui n'est pas réelle, ainsi la causalité est violée.

Une autre notion importante en relativité restreinte est la simultanéité, si on adopte la définition d'Einstein de cette dernière (à savoir que deux événements se produisant en deux points distincts A et B sont simultanés si deux signaux lumineux issus de A et B arrivent au même moment au milieu M du segment AB), alors pour un observateur galiléen, tous les événements qui se produisent sur la nappe du passé sont simultanés. Mais l'analogie des événements simultanés du cas classique est constitué de tous les points de l'ailleurs sans influence sur l'observateur à un instant donné.

Pour avoir une analogie avec le cas non relativiste, et garder la notion d'espace à trois dimensions d'événements simultanés, on définit la simultanéité dans des hyperplans genre temps Σ , dans lesquels chaque point se situe dans l'ailleurs de l'autre, donc deux observateurs peuvent considérer deux événements sur cette hypersurface comme étant simultanés. Ainsi, la simultanéité est définie par un feuilletage de l'espace-temps par une famille de surfaces du genre espace, sans intersection, indexées par un paramètre réel[39].

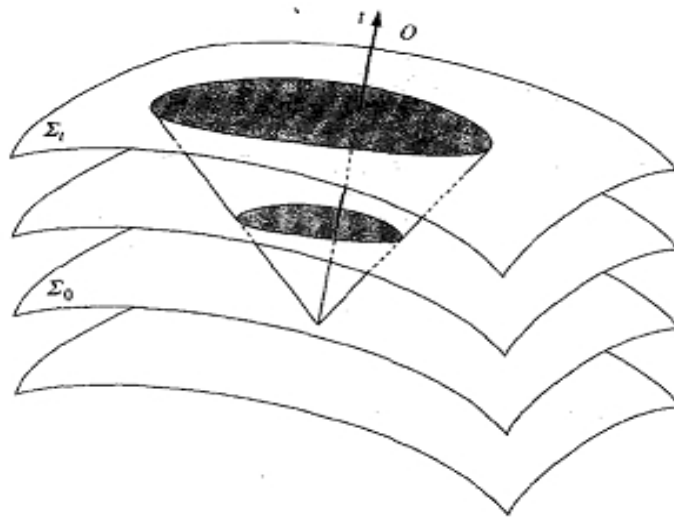


Figure 2: Feuilletage de l'espace de Minkowski

En relativité restreinte, le feuilletage le plus commode est celui défini par des hyperplans genre espace orthogonaux à un axe temps [39]

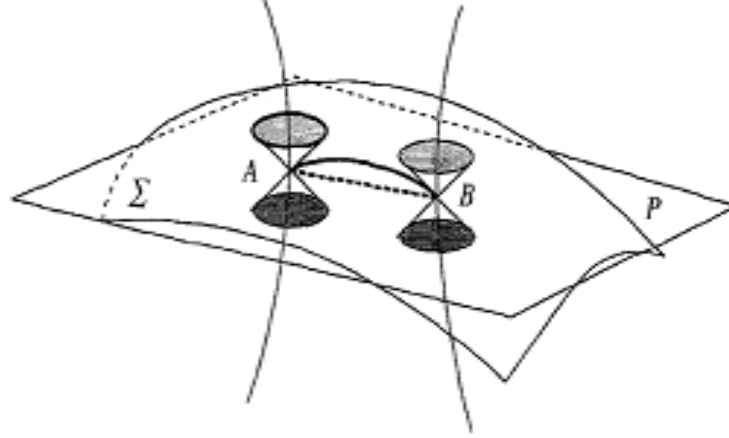


Figure 3: plan du genre espace passant par A et B

.3 Le groupe de Poincaré $P = ISO(3, 1)$:

Le groupe de Poincaré est formé de toutes les transformations de l'espace-temps de Minkowski M vers lui même qui laissent invariante la distance au carré entre deux points voisins.

$$ds^2 = ds'^2 \quad (0.3.1)$$

On représente ce groupe dans l'espace de Minkowski par une base $(e_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3)^{(1)}$, telle que

$$e_\mu \cdot e_\nu = \eta_{\mu\nu}. \quad (0.3.2)$$

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (0.3.3)$$

⁽¹⁾ Les indices grecques $(\mu, \nu, \alpha, \beta, \dots)$ varient de 0 à 3 et les indices (i, j, k, \dots) varient de 1 à 3.

est le tenseur métrique.

Les quadri-vecteurs de cet espace se décomposent sur cette base selon

$$A = A^\mu e_\mu \quad (0.3.4)$$

Les A^μ sont alors appelées les composantes contra-variantes de A dans la base e_μ . Les composantes covariantes s'écrivent en fonction de la métrique $\eta_{\mu\nu}$ comme

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (0.3.5)$$

Le produit scalaire entre deux quadrivecteurs A et B est

$$A.B = \eta_{\mu\nu} A^\mu B^\nu \quad (0.3.6)$$

Ainsi, on peut écrire

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} x^\mu x^\nu$$

Le groupe de Poincaré (ou groupe de Lorentz inhomogène) est le produit semi-direct du groupe de Lorentz $SO(3, 1)$ par le groupe des translations spatio-temporelles $T = T^4$. Un élément de ce groupe est donc représenté par le couple $g(\Lambda, a)$ où Λ est une transformation de Lorentz et a un quadri-vecteur décrivant une translation dans M .

Ainsi, la transformation de tout quadri-vecteur de l'espace de Minkowski s'écrit :

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \quad (0.3.7)$$

Pour cet ensemble de transformations, la loi de multiplication est donnée par:

$$g(\Lambda, a) g(\Lambda', a') = g(\Lambda\Lambda', \Lambda a' + a) \quad (0.3.8)$$

Muni de cette loi, cet ensemble forme le groupe de Poincaré qui a pour élément neutre $g(1, 0)$ et dont l'inverse de chaque $g(\Lambda, a)$ est donné par $g(\Lambda^{-1}, -\Lambda^{-1}a)$.

Afin d'étudier ce groupe, intéressons nous au groupe de Lorentz puis au groupe des translations.

.4 Le groupe de Lorentz $L = O(1, 3)$

Le groupe de Lorentz n'est qu'un sous groupe du groupe de Poincaré (sans les translations dans l'espace-temps), alors la loi de transformations des quadri-vecteurs n'est qu'un cas particulier de celle de Poincaré avec $a^\mu = 0$ ⁽²⁾

$$x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \quad (0.4.1)$$

La matrice de Lorentz Λ est le produit de la matrice de rotation R par un boost Λ_v où

$$R = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & \mathcal{O} & & \\ 0 & & & \end{array} \right) \quad (0.4.2)$$

\mathcal{O} est une matrice 3×3 de $SO(3)$ qui représente une rotation tridimensionnelle dans l'espace euclidien.

et Λ_v une matrice qui, dans le cas où la vitesse est dirigée suivant l'axe oz , s'écrit

$$\Lambda_{v_z} = \begin{pmatrix} \cosh \xi & 0 & 0 & \sinh \xi \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh \xi & 0 & 0 & \cosh \xi \end{pmatrix} \quad (0.4.3)$$

tel que ξ est le paramètre du boost, qui est un angle de rotation hyperbolique dans les plans (x^0, x^3) , défini par

$$\tanh \xi = \frac{v}{c} \quad (0.4.4)$$

Ce paramètre, nommé rapidité n'est pas borné, il varie de $-\infty$ à ∞ . Cette caractéristique fait que le groupe de Lorentz, contrairement au groupe des rotations spatiales, n'est pas un groupe compact.

⁽²⁾Nous adoptons ici un point de vue passif qui consiste à étudier la transformation des repères liés aux deux observateurs.

Lorsque la direction de la vitesse est quelconque, alors Λ_v devient

$$\Lambda_v = \begin{pmatrix} v^0 & \mathbf{v}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^t/v^0 + 1 \end{pmatrix}; \quad v = \begin{pmatrix} v^0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh(\xi) \\ \sinh(\xi) \mathbf{n} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{n} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}| \quad (0.4.5)$$

Le groupe de Lorentz étant le groupe des transformations linéaires et homogènes qui laissent invariant le produit scalaire entre les quadri-vecteurs de l'espace de Minkowski, la matrice Λ de transformation de Lorentz doit satisfaire la relation:

$${}^t\Lambda\eta\Lambda = \eta \quad (0.4.6)$$

qui s'écrit sous forme de composantes

$$\eta_{\alpha\beta}\Lambda^\alpha{}_\mu\Lambda^\beta{}_\nu = \eta_{\mu\nu} \quad (0.4.7)$$

A partir de (0.4.7), on déduit que $(\det \Lambda)^2 = 1$ donc que $\det \Lambda = \mp 1$.

Cette même relation nous donne pour $\mu = \nu = 0$, $(\Lambda^0{}_0)^2 = \sum_i (\Lambda^i{}_0)^2 + 1 \geq 1$ et ainsi, $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$.

Grâce à ces deux derniers résultats, on peut définir quatre sous ensembles de Lorentz classés dans le tableau suivant

$$\begin{aligned} L_+^\uparrow & \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ et } \det\Lambda = +1 \\ L_-^\downarrow & \Lambda^0{}_0 \geq 1 \text{ et } \det\Lambda = -1 \\ L_+^\uparrow & \Lambda^0{}_0 \leq -1 \text{ et } \det\Lambda = +1 \\ L_-^\downarrow & \Lambda^0{}_0 \leq -1 \text{ et } \det\Lambda = -1 \end{aligned} \quad (0.4.8)$$

Le seul sous-ensemble qui nous intéresse est L_+^\uparrow , car c'est le seul qui possède une structure de groupe, plus précisément, c'est le seul qui contient l'identité, on le nomme le groupe de Lorentz propre et on le note $SO(3, 1)$, (groupe des matrices spéciales, orthogonales ayant trois composantes spatiales et une temporelle).

Ce groupe est caractérisé par six paramètres indépendants, continus correspondant à toutes les rotations possibles (réelles ou hyperboliques) de l'espace M , c'est donc un groupe de Lie qui détermine une algèbre de Lie dont les vecteurs de bases sont les générateurs de ce groupe.

Pour trouver ces générateurs, on effectue une transformation de Lorentz infinitésimale. En développant au premier ordre la matrice de Lorentz, on obtient:

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + \delta\omega^\mu{}_\nu \quad (0.4.9)$$

où $\delta\omega^\mu{}_\nu$ constituent les paramètres infinitésimaux des boosts et des rotations.

En utilisant la relation (0.4.7), on trouve que: $\delta\omega^\mu{}_\nu = -\delta\omega^\nu{}_\mu$

En fonction des générateurs $J^{\alpha\beta}$, la transformation de Lorentz infinitésimale devrait s'écrire

$$\Lambda(\delta\omega_{\alpha\beta}) = 1 - 1/2i\delta\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta} \Rightarrow \Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu - 1/2i\delta\omega_{\alpha\beta}(J^{\alpha\beta})^\mu{}_\nu \quad (0.4.10)$$

avec $J^{\alpha\beta} = -J^{\beta\alpha}$

L'identification de ces deux dernières équations permet de définir ces générateurs

$$(J_{\alpha\beta})^\mu{}_\nu = i(\delta^\mu_\alpha\eta_{\nu\beta} - \delta^\mu_\beta\eta_{\nu\alpha}) \quad (0.4.11)$$

tel que

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & J^{01} & J^{02} & J^{03} \\ -J^{01} & 0 & J^{12} & -J^{31} \\ -J^{02} & -J^{12} & 0 & J^{23} \\ -J^{03} & J^{31} & -J^{23} & 0 \end{pmatrix} \quad (0.4.12)$$

Ces six générateurs sont liés aux générateurs K_i des boosts et J_k des rotations spatiales par

$$J_{0i} = -iK_i; \quad i = 1, 2, 3. \quad (0.4.13)$$

$$J_{ij} = \epsilon_{ijk}J_k; \quad i, j, k = 1, 2, 3. \quad (0.4.14)$$

Donc on aura

$$J^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & K_x & K_x & K_x \\ -K_x & 0 & J_z & -J_y \\ -K_x & -J_z & 0 & J_x \\ -K_x & J_y & -J_x & 0 \end{pmatrix} \quad (0.4.15)$$

tel que

$$J_x = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.4.16)$$

$$K_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad K_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (0.4.17)$$

En passant au processus d'exponentiation, on détermine l'expression d'une transformation de Lorentz finie

$$\Lambda(\omega) = \exp\left(-i\frac{1}{2}\omega_{\alpha\beta}J^{\alpha\beta}\right) \quad (0.4.18)$$

où $\omega_{\alpha\beta}$ constituent les paramètres des boosts et des rotations.

Nous pouvons aussi exprimer ces générateurs sous une forme différentielle

$$J^{\alpha\beta} = i(x^\alpha\partial^\beta - x^\beta\partial^\alpha) \quad (0.4.19)$$

L'algèbre de Lie de $SO(3, 1)$ s'exprime en fonction de des générateurs K_i et J_k comme

$$\begin{aligned} [J_i, J_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k \\ [J_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}K_k \\ [K_i, K_j] &= i\varepsilon_{ijk}J_k \end{aligned} \quad (0.4.20)$$

Elle peut également s'écrire en fonction des $J_{\mu\nu}$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\nu\rho}J_{\mu\sigma} - \eta_{\mu\rho}J_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}J_{\nu\rho} - \eta_{\nu\sigma}J_{\mu\rho}) \quad (0.4.21)$$

.5 Le groupe T^4 des translations quadri-dimensionnelles

Le groupe des translations quadri-dimensionnelles T^4 est l'ensemble des transformations inhomogènes de l'espace-temps de Minkowski, son action sur les quadri-vecteurs de cet espace-temps est donnée par

$$x' = x + a \quad (0.5.1)$$

qui en termes de composantes devient

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (0.5.2)$$

La transformation infinitésimale s'écrit donc

$$T(\delta a) = \exp(-i\delta a^{\mu} P_{\mu}) \quad (0.5.3)$$

où le générateur de translation est le quadri-gradient

$$P_{\mu} = i\partial_{\mu} \quad (0.5.4)$$

Ces générateurs au nombre de quatre, vérifient la relation de commutation suivante

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (0.5.5)$$

cette relation définit l'algèbre de Lie de T^4

.6 Algèbre de Lie du groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré étant un groupe à dix paramètres (trois de rotation, trois de boosts et quatre de translations), son algèbre de Lie sera complètement définie si des relations de commutation entre tous ses générateurs sont établies. Ainsi en plus des commutateurs de l'algèbre du groupe de Lorentz et ceux des translations quadri-dimensionnelles, l'algèbre de Lie de Poincaré contient le commutateur $[P_{\mu}, J_{\rho\sigma}]$.

$$[P_{\mu}, P_{\nu}] = 0 \quad (0.6.1)$$

$$[P_{\mu}, J_{\rho\sigma}] = i(\eta_{\mu\rho} P_{\sigma} - \eta_{\mu\sigma} P_{\rho}) \quad (0.6.2)$$

$$[J_{\mu\nu}, J_{\rho\sigma}] = i(J_{\rho\nu}\eta_{\mu\sigma} - J_{\sigma\nu}\eta_{\mu\rho} + J_{\mu\rho}\eta_{\nu\sigma} - J_{\mu\sigma}\eta_{\nu\rho}) \quad (0.6.3)$$

La première de ces relations caractérise le fait que le sous groupe des translations est abélien, la seconde que le groupe de Poincaré est le produit semi-direct du groupe de Lorentz au groupe des translations, enfin la dernière montre que la composition de deux rotations de Lorentz (boosts et rotations) donne une rotation de Lorentz.

.7 Opérateurs de Casimir du groupe de Poincaré

En mécanique quantique, l'état d'un système physique est représenté par un vecteur de norme unité dans l'espace de Hilbert des états[13] montre qu'à toute transformation $g(\Lambda, a)$ d'un système physique dans l'espace de Minkowski, correspond une transformation $U(g(\Lambda, a))$ des états de ce système, cette dernière est appelée la représentation du groupe de Poincaré. Pour le groupe de Poincaré, cette représentation peut être scalaire, vectorielle et spinorielle. Lorsque la représentation est irréductible, elle est étiquetée par les valeurs propres de grandeurs qui commutent avec tous les générateurs du groupe, ces grandeurs sont appelées les opérateurs de Casimir. Les casimir d'une représentation du groupe de Poincaré sont l'opérateur carré de masse $P^2 = M^2$ et l'opérateur de Pauli-Lubansky W^2 définis respectivement par

$$M^2 = P_0^2 - \mathbf{P}^2 ; (E^2 - p^2 c^2 = m^2 c^4) \quad (0.7.1)$$

$$-\frac{1}{M^2} W^2 = \mathbf{J}^2 - \frac{(\mathbf{P} \cdot \mathbf{J})^2}{M^2}; \left(W_\mu = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} J^{\nu\sigma} P^\sigma \right) \quad (0.7.2)$$

Le premier est lié à la masse de la particule (si le système physique décrit est une particule massive) et le second à son spin. La représentation irréductible $\tilde{U}_{mj}(g(\Lambda, a))$ de Poincaré est donc susceptible de décrire toutes les caractéristiques d'une particule élémentaire.

Remarquons cependant que compte tenu que groupe de Lorentz n'est pas compact, cette représentation irréductible n'est unitaire que lorsqu'elle est de dimension infinie⁽³⁾.

⁽³⁾Théorème [1]:

Un groupe de Lie simple non compact n'admet pas de représentations unitaires de dimension finie excepté la représentation triviale où tous les générateurs sont représentés par la matrice identité.

B Calcul d'isométrie

.1 Dans le cas de la particule relativiste scalaire intrinsèquement et stochastiquement étendue

L'opérateur de commutation stochastique $W_\eta \otimes 1_{\tilde{H}^{\mu 0}}$ permet le passage, pour chaque valeur fixée de $q^0 \in \mathbb{R}^1$, des fonctions de la représentations impulsion $\tilde{\varphi}(k, \zeta) \in \tilde{H} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ vers les fonctions $\tilde{\varphi}(q, p; \zeta) \in H_\eta \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ de la représentation espace des phases externes et impulsion interne. Nous allons vérifier, dans le cas de la particule relativiste scalaire stochastiquement et intrinsèquement étendue, qu'il y a égalité⁽⁴⁾ des produits scalaires dans les espaces de Hilbert de ces fonctions. Mathématiquement, cette égalité se traduit par

$$\langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} = \langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\nu_m^+ \times C_\mu^+} \quad (0.1.1)$$

où les produits scalaires dans $H_\eta \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ et $\tilde{H} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ s'expriment respectivement comme

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} &= \int_{\Gamma \times C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \int_{\nu_m^+ \times \nu_m^+} d\Omega_m^+(k') d\Omega_m^+(k'') \times \\ &\tilde{\eta}_{q,p}^*(k') \tilde{\eta}_{q,p}(k'') \tilde{\varphi}^*(k', \zeta) \tilde{\varphi}(k'', \zeta) \end{aligned} \quad (0.1.2)$$

et

$$\langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\nu_m^+ \times C_\mu^+} = \int_{\nu_m^+ \times C_\mu^+} |\tilde{\varphi}(k, \zeta)|^2 d\Omega_\mu^+(\zeta) d\Omega_m^+(k)$$

En utilisant la relation suivante

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \cdot k\right) \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k) \quad (0.1.3)$$

⁽⁴⁾L'égalité est démontrée pour $k \in \nu_m^+$, mais une démonstration analogue est possible pour $k \in \nu_m^\pm$.

le produit scalaire (0.1.2) devient

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} &= \int_{\Gamma \times C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \int_{\nu_m^+ \times \nu_m^+} d\Omega_m^+(k') d\Omega_m^+(k'') \times \\ &\exp\left(\frac{i}{\hbar} q \cdot (k'' - k')\right) \tilde{\eta}^*(\Lambda_v^{-1} k') \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k'') \tilde{\varphi}^*(k', \zeta) \tilde{\varphi}(k'', \zeta) \end{aligned} \quad (0.1.4)$$

$$\Gamma = \mathbb{R}_{conf}^3 \times \mathbb{R}_{imp}^3$$

En effectuant une intégration sur \mathbf{q} , sachant que

$$(2\pi\hbar)^{-3} \int_{\mathbb{R}_{conf}^3} d\mathbf{q} \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \cdot (\mathbf{k}'' - \mathbf{k}')\right) = \delta(\mathbf{k}'' - \mathbf{k}') \quad (0.1.5)$$

En intégrant ensuite sur les impulsions externes, tel que

$$d\Omega_m^+(k) = \frac{d\mathbf{k}}{2k^0}, \quad k^0 = (\mathbf{k}^2 + m^2 c^2)^{1/2} \quad (0.1.6)$$

On aura

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi} \mid \tilde{\varphi} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} &= (2\pi\hbar)^3 \int_{\mathbb{R}_{imp}^3 \times C_\mu^+} d\mathbf{p} d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) (2k^0)^{-1} \left| \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k) \right|^2 \left| \tilde{\varphi}(k, \zeta) \right|^2 \\ &= \int_{\nu_m^+ \times C_\mu^+} d\Omega_m^+(k) d\Omega_\mu^+(\zeta) \left| \tilde{\varphi}(k, \zeta) \right|^2 \left(\int_{\mathbb{R}_{imp}^3} (2\pi\hbar)^3 d\mathbf{p} (2k^0)^{-1} \left| \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k) \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (0.1.7)$$

Afin que l'égalité des produits scalaires soit vérifiée, nous devons montrer que dans l'expression précédente, l'intégrale $\int_{\mathbb{R}_{imp}^3} (2\pi\hbar)^3 d\mathbf{p} (2k^0)^{-1} \left| \tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k) \right|^2$ est égale à l'unité. Si nous exigeons l'invariance sous rotation de $\tilde{\eta}(k)$, ceci implique que $\tilde{\eta}$ dépend exclusivement de $|\mathbf{k}|$ ou, d'une manière équivalente de k^0

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = \eta(mck^0), \quad k = (k^0, \mathbf{k}) \in \nu_m^+ \quad (0.1.8)$$

où

$$mck^0 = (\Lambda_v(mc, \mathbf{0})) \cdot \Lambda_v k = p \cdot \Lambda_v k, \quad p = mv \quad (0.1.9)$$

En remplaçant dans (0.1.8), nous obtenons

$$\tilde{\eta}(\Lambda_v^{-1} k) = \eta(mc(\Lambda_v^{-1} k)^0) = \eta(p \cdot k) \quad (0.1.10)$$

.2. Dans le cas de la particule relativiste spinorielle intrinsèquement et
stochastiquement étendue

cela nous permet de voir que nous vérifions effectivement l'isométrie de W_η

$$\langle \tilde{\varphi}_{nj} | \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} = \int_{v_m^+ \times C_\mu^+} d\Omega_m^+(k) d\Omega_\mu^+(\zeta) |\tilde{\varphi}(k, \zeta)|^2 = \langle \tilde{\varphi} | \tilde{\varphi} \rangle_{v_m^+ \times C_\mu^+} \quad (0.1.11)$$

mais à la condition que

$$\int_{p=mv} d\mathbf{p} |\eta(p.k)|^2 = 2k^0 (2\pi\hbar)^{-3} \quad (0.1.12)$$

En fait l'invariance de $p.k$ et $d\Omega_m(p)$ permet d'écrire l'égalité suivante

$$\int_{v_m^+} d\mathbf{p} |\eta(p.k)|^2 = \frac{k_0}{mc} \int_{p' \in v_m^+} |\tilde{\eta}(p')|^2 d\mathbf{p}'; \quad p' = \Lambda_{k/m}^{-1} p \quad (0.1.13)$$

qui finalement aboutira à la condition suivante sur la norme des fonctions $\tilde{\eta}$

$$\int_{k \in v_m^+} |\tilde{\eta}(k)|^2 d\mathbf{k} = 2mc (2\pi\hbar)^{-3} \quad (0.1.14)$$

Avec cette condition, la fonction $\tilde{\eta}_{q,p}(k)$ s'écrira

$$\tilde{\eta}_{q,p}(k) = \exp\left(\frac{i}{\hbar} q.k\right) \eta(p.k); \quad p, k \in v_m^+ \quad (0.1.15)$$

Il existe une correspondance directe entre le générateur de résolution $\tilde{\xi}(\mathbf{k})$ dans le cas non relativiste exprimé en représentation impulsion et la fonction $\tilde{\eta}(k)$ définie sur l'hyperboloïde de masse [40]

$$\tilde{\eta}(k) = (2mc)^{1/2} \tilde{\xi}(\mathbf{k}); \quad k = (k^0, \mathbf{k}) \in v_m^+ \quad (0.1.16)$$

L'étude de la représentation d'espace des phases relativistes, nous a permis de trouver que l'espace des phases relativistes $L^2(\Sigma_m^+)$ joue un rôle analogue à celui de $L^2(\Gamma)$ si nous travaillons dans un repère d'inertie où σ est l'hyperplan $q^0 = cst$.

.2 Dans le cas de la particule relativiste spinorielle intrinsèquement et stochastiquement étendue

Dans le cas relativiste spinoriel, l'opérateur $W_\eta \otimes 1 = W_{nj} \otimes 1_{\tilde{H}^{\mu 0}}$ permet, pour un $q^0 \in \mathbb{R}^1$ donné, le passage de la fonction d'onde dans la représentation impulsion $\tilde{\varphi}_j^{\approx \mu 0}(k, \zeta) \in$

$\tilde{H}_j^{\mu 0} = \tilde{H}_j \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ vers une fonction d'onde dans la représentation espace des phases externes et impulsions internes $\tilde{\varphi}_{nj}^{\mu 0}(q, p; \zeta) \in H_0^{nj} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$.

Démontrons qu'il y a égalité des produit scalaires dans ces deux espaces, en effet, le produit scalaire dans $H_0^{nj} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ est défini comme

$$\langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} = \int_{\Gamma \times C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) d\mathbf{q} d\mathbf{p} \tilde{\varphi}_{nj}^*(q, p; \zeta) \tilde{\varphi}_{nj}(q, p; \zeta) \quad (0.2.1)$$

En remplaçant les fonctions $\tilde{\varphi}_{nj}(q, p; \zeta)$ par leurs expressions

$$\tilde{\varphi}_{nj}(q, p; \zeta) = \sum_{s=-j}^j \int_{\nu_m^+} \exp\left(\frac{i}{\hbar} q \cdot k\right) \tilde{\eta}_{njs}^*(\Lambda_v^{-1} k) \tilde{\varphi}_j^{\mu 0}(k, \zeta) d\Omega_m^+(k) \quad (0.2.2)$$

et les fonctions d'onde propres $\tilde{\eta}_{njs}$ par un produit de fonction radiale e_n et d'harmonique sphérique Y_{js}

$$\tilde{\eta}_{njs}(\Lambda_k^{-1} p) = (2mc)^{1/2} (2\pi)^{-3/2} e_n^*\left(\frac{p \cdot k}{mc}\right) Y_{js}^*(R(k \cdot p) \mathbf{p}) \quad (0.2.3)$$

puis en effectuant une intégration sur \mathbf{q} , la relation (0.2.1) devient

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_\mu^+} &= \sum_{s, s'=-j}^{+j} \int_{C_\mu^+} d\Omega_\mu^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \frac{mc}{k \cdot 0} \tilde{\varphi}_s^{\mu 0*}(k, \zeta) \tilde{\varphi}_{s'}^{\mu 0}(k, \zeta) \times \\ &\times \int_{\nu_m^+} d\mathbf{p}' \left| e_n\left(\frac{k \cdot p'}{mc}\right) \right|^2 Y_{js}^*(R\mathbf{p}') Y_{j s'}(R\mathbf{p}') \end{aligned} \quad (0.2.4)$$

Exprimons p' en coordonnées sphériques où θ' est l'angle entre k et p' . Remarquons aussi que $R(k \cdot p')$ est une rotation dans le plan k, p' et elle ne change pas ϕ . Par conséquent

$$Y_{js}(\theta', \phi) = C_{js} P_j^s(\cos \theta') e^{is\phi} \quad (0.2.5)$$

où C_{js} est une constante qui dépend de j, s et $P_j^s(\cos \theta')$ les fonctions de Legendre associées[41]

La relation d'orthonormalisation des Y_{js}

$$\int \sin \theta' d\theta' \int d\phi Y_{js}^*(\theta', \phi) Y_{j' s'}(\theta', \phi) = \delta_{jj'} \delta_{ss'} \quad (0.2.6)$$

alors l'intégrale

$$\int_{\nu_m^+} d\mathbf{p}' \left| e_n\left(\frac{k \cdot p'}{mc}\right) \right|^2 Y_{js}^*(R\mathbf{p}') Y_{j s'}(R\mathbf{p}') \quad (0.2.7)$$

est nulle si s et s' sont différents.

En posant $p = \Lambda_k^{-1} p'$ et en décomposant le p en composante parallèle et orthogonale à k , on aura

$$p'_0 = (mc)^{-1}(k_0 p_0 + |\mathbf{k}| \cdot p_{\parallel}) \quad (0.2.8)$$

$$p_{\parallel} = |\mathbf{k}|^{-1} \mathbf{k} \cdot \mathbf{p}; \quad \mathbf{p}_{\perp} = \mathbf{p} - p_{\parallel} |\mathbf{k}|^{-1} \mathbf{k} \quad (0.2.9)$$

et la relation (0.2.4) peut alors s'écrire

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_{\mu}^+} &= \sum_{s=-j}^{+j} \int_{C_{\mu}^+} d\Omega_{\mu}^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \left| \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) \right|^2 \times \\ &\times \int_{\nu_m^+} d\mathbf{p} \left(\mathbf{1} + \frac{|\mathbf{k}| p_{\parallel}}{k_0 p_0} \right) |e_n(p_0) Y_{js}(\mathbf{p})|^2 \end{aligned} \quad (0.2.10)$$

Comme p^0 et $|Y_{js}(\mathbf{p})|^2$ sont des fonctions paires de $p_{\parallel} \in \mathbb{R}$ pour tous les $p \in \nu_m^+$, nous pouvons alors conclure que

$$\begin{aligned} \langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_{\mu}^+} &= \sum_{s=-j}^{+j} \int_{C_{\mu}^+} d\Omega_{\mu}^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \times \\ &\left| \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) \right|^2 \int_{mc}^{\infty} d\tilde{\mu}(p_0) |e_n(p_0)|^2; \\ d\tilde{\mu}(p_0) &= p_0(p_0^2 - m^2 c^2)^{\frac{1}{2}} dp_0 \end{aligned} \quad (0.2.11)$$

Comme les fonctions radiales satisfont la relation suivante

$$\int_{mc}^{\infty} d\tilde{\mu}(p_0) e_n^*(p_0) e_{n'}(p_0) = \delta_{nn'} \quad (0.2.12)$$

alors l'expression (0.2.4) se réduit à

$$\langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\Sigma_m^+ \times C_{\mu}^+} = \sum_{s=-j}^{+j} \int_{C_{\mu}^+} d\Omega_{\mu}^+(\zeta) \int_{\nu_m^+} d\Omega_m^+(k) \left| \tilde{\varphi}_s^{\mu 0}(k, \zeta) \right|^2 = \langle \tilde{\varphi}_{nj} \mid \tilde{\varphi}_{nj} \rangle_{\nu_m^+ \times C_{\mu}^+} \quad (0.2.13)$$

Ce qui prouve l'unitarité de la transformation intégrale $W_{nj} \otimes 1_{\tilde{H}^{\mu 0}}$ définie de $\tilde{H}_j \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$ vers $H_0^{nj} \otimes \tilde{H}^{\mu 0}$.

Bibliographie

- [1] W. Greiner et B. Müller, *Mécanique Quantique Symétries* (Springer-Verlag, 1999).
- [2] G.C. Hegerfeldt, *Phys. Rev. D***10**, 3320, (1974).
- [3] E. Prugovecki, *Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time* (Reidel, Dordrecht, 1984).
- [4] E. Prugovecki, *Principles of Quantum General Relativity* (World Scientific Publishing, 1995).
- [5] J.L. Destouches, *La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules* (Paris, Gauthier- Villars, 1956).
- [6] M. Hachemane : "Conception Géométrique-Différentielle de la Particule Étendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induites, Symétrie de De Sitter". Thèse de Magistère USTHB, Alger (1994).
- [7] A. Smida, A. H. Hamici, M. Hachemane, VIII International Conference on Geometry, Integrability and Quantization Varna Bulgaria p, 302 (2006).
- [8] A-H. Hamici: "L'Interaction dans la Conception Géométrique-Différentielle de la particule Étendue, Espace-Temps Plan de Minkowski". Thèse de Doctorat, USTHB, Alger (2007).
- [9] A. Smida, M. Hachemane, A-H. Hamici, Y. Oualili, *Int. J. Theo. Phys.* **47**, 1459 (2008).

- [10] R. Zamoum : "Etude des Particules Etendues Stochastiques avec spin". Mémoire de Magister, USTHB, Alger (2008).
- [11] C.C. Tannoudji, B. Diu, F. Loloë, Mécanique Quantique TI (Paris, Hermann, 1977).
- [12] M. Lachièze-Rey, L'espace physique entre mathématiques et philosophie, p 257, (EDP science, 2006).
- [13] E. P. Wigner, Ann. Math **40**, 149 (1939)
- [14] V. Bargmann, The Annals of Mathematics **59**, 1 (1954).
- [15] J A. De Azcàrraga, J M. Izquierdo, Lie group, Lie algebra, Cohomology and some Applications in Physics (Cambridge university press, 1995).
- [16] Y. Oualili : La Stochasticité pour la Particule Etendue. Mémoire de Magister, USTHB, Alger (2006).
- [17] E. Prugovecki, Quantum Geometry. Kluwer, Dordrecht. (1992).
- [18] H. T. Croft, K. J. Falcon, R. K. Guy, Unsolved Problems in Geometry (New York, Springer, 1991).
- [19] S.T. Ali, E. Prugovecki, J. Math. Phys **17**, 219 (1977).
- [20] E. Prugovecki, Phys. Rev D **18**, 3655 (1978).
- [21] P.R. Feynman and A R. Hibbs, Quantum Mechanics and Path Integrals (New York: McGraw-Hill 1965).
- [22] A. Messiah, "Mécanique quantique". TII Dunod (1972).
- [23] S.T. Ali, E. Prugovecki, Acta Appl. Math. **6**, 19-45 (1986).
- [24] J.M. Levy-Leblond, Commun. Math. Phys **4**, 157 (1967).
- [25] E. Prugovecki, Phys. Rev, A **10**, 543, (1977).

- [26] G.W. Mackey, Bull. Amer. Math. Soc. **69**, 628(1963).
- [27] L. Landau, E. Lifchitz, "Théorie Quantique Relativiste" I Mir, Moscow, (1972).
- [28] D. I. Blokhintsev, Space and Time in the Microworld, D. Reidel, Dordrecht, 1973.
- [29] J. Ehlers, in B.K. Sachs (eds), General Relativity and Cosmology, Academic Press, New York and London, 1971.
- [30] E. Prugovečki, Phys. Rev. **D18**, 3655 (1978).
- [31] B. Delamotte, Un Soupçon de la Théorie des Groupes : Groupe des Rotations et Groupe de Poincaré (cour de D. E. A. Université de Paris,1995-1996).
- [32] S. T. Ali, E. Prugovecki, Acta Appl. Math. **6**, 47-62 (1986).
- [33] G. Zepp, "Mécanique quantique". Vuibert (1975).
- [34] J.L. Destouches, Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle (Paris, Gauthier-Villars, 1958).
- [35] L. de Broglie, "La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire" (Paris, Gauthier-Villars,1971).
- [36] A. Smida, M. Hachemane, A-H. Hamici, Found. Phys **28**, 8 (1998).
- [37] N.B .Mensky, Commun. math. Phys. **47**, 97-108 (1976).
- [38] A.J. Coleman (1968) Induced and subduced representations. in: Group theory and its applications, p. 57. New York-London: Academic Press.
- [39] R. Hakim, Gravitation relativiste (EDP sciences/ CNRS Editions, 2001).
- [40] S. T. Ali, E. Prugovecki, for nonzero spin, 1983.
- [41] M. Le Bellac, Physique Quantique (EDP sciences/ CNRS Editions, 2003).