

N°d'ordre : 03/2005-M/MT

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene



Mémoire

Présenté pour l'obtention du diplôme de

Magister en Mathématiques

Spécialité : ANALYSE (Equations aux dérivées partielles)

Par : ALLAB KARIMA

Sujet

Stabilité Frontière Rapide de Systèmes Distribués et Applications

Soutenu publiquement le : 17/01/2005, devant le jury composé de :

Mr. Dj.TENIOU	Président	Professeur	à L'U.S.T.H.B
Mr. A.HEMINNA	Directeur de Thèse	Maître de conférence	à L'U.S.T.H.B
Mr. K.LEMBRABET	Examineur	Professeur	à L'U.S.T.H.B
Mm. O.ZAIR	Examineur	chargé de cours	à L'U.S.T.H.B

Remerciement

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur A.HEMINNA, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B de m'avoir proposé un sujet de recherche aussi passionnant.

Je remercie Monsieur Dj.TENIOU, professeur à l'U.S.T.H.B pour l'honneur qu'il me fait eu présidant le jury.

Je remercie également Monsieur K.LEMBRABET, professeur à l'U.S.T.H.B et Madame O.ZAIR, Maître de conférence à l'U.S.T.H.B qui ont bien voulu participer au jury de cette thèse.

CE travail n'aurait pu aboutir sans la profonde compréhension, la longue patience de ma mère et de ma sœur Houria.

Enfin, je tiens à remercier tous ceux qui de près ou de loin m'ont soutenu pour mener ce travail à terme.

Table des matières

Introduction	3
1 Rappels	7
1.1 Rappels sur la géométrie différentielle pour les surfaces	7
1.1.1 Paramétrisation	7
1.1.2 La normale et le plan tangent	7
1.1.3 Base duale	8
1.1.4 Tenseur métrique	8
1.1.5 Le transposé d'un vecteur	8
1.1.6 Intégration sur Γ	9
1.1.7 Dérivation sur une surface	9
1.1.8 Opérateur de projection	10
1.1.9 Dérivée d'un champ tangentiel	10
1.1.10 Opérateur de courbure	12
1.1.11 Dérivée d'un champ normal	13
1.1.12 Dérivée d'un champ de vecteurs sur Γ	13
1.1.13 Expression de la divergence	13
1.1.14 Espaces fonctionnels sur la surface Γ	14
1.1.15 Calcul de la dérivée d'un champ de vecteurs défini sur une coque . .	15
1.2 Rappels généraux	19
1.2.1 Notions de base sur les distributions.	19
1.2.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$	19
1.2.3 Les espace de Sobolev	20
1.2.4 Espace image de la trace	21
1.2.5 Rappels d'analyse fonctionnelle	29
1.2.6 Rappels sur les opérateurs et les semi groupes	31
1.2.7 Problème variationnel abstrait	35

2	Stabilité forte	36
2.1	Introduction	36
2.1.1	Résultats préliminaires	38
2.2	La régularité	50
2.3	Démonstration du premier théorème principal	60
3	Stabilité exponentielle	63
3.1	Introduction	63
3.2	Existence des solutions	63
3.3	Une identité	71
3.4	Régularité des solutions faibles	81
3.5	Théorème d'unicité	82
3.6	Une méthode pour la stabilisation rapide	85
3.6.1	Quelques notions de contrôlabilité et d'observabilité.	91
3.7	Démonstration du deuxième théorème principal	107
	Conclusion	123
	Bibliographie	124

Introduction

Dans ce mémoire on étudie le problème de la stabilisation frontière de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel stationnaires. Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels de même ordre que l'opérateur principal. Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes : mécaniques comme l'élasticité (*cf.*[16], [18]) ou physiques comme les processus de diffusion (*cf.*[17], [23], [26].) ou la propagation d'ondes (*cf.*[3]).

Les conditions de Ventcel (*cf.*[16]) sont obtenues par des méthodes asymptotiques. La condition :

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \quad \text{sur } \Gamma$$

dite condition de Ventcel (*cf.*[17]), a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusion. (*cf.*[26]).

Plus généralement l'approche proposée peut être utilisée pour étudier la stabilisation frontière d'autres problèmes comme :

- . le bilaplacement
- . l'équation de la chaleur
- . les équations de Maxwell.

ou d'opérateur plus généraux : coefficients variables, ordre élevé ; etc. . . .

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ de frontière Γ de classe C^2 ; on considère $\{\Gamma_0, \Gamma_1\}$ une partition de Γ telle que :

$$(\mathcal{H}_1).$$

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

avec :

$$mes(\overline{\Gamma_1}) > 0 \quad \text{et} \quad \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$$

On considère deux constantes positives a et b et on suppose que :

$$(\mathcal{H}_2).$$

$$mes(\overline{\Gamma_0}) > 0 \quad \text{ou} \quad a > 0$$

Le premier problème étudié est un problème avec condition de Ventcel pour l'équation des ondes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} u'' - \Delta u & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = & -au - bu' \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ u(0) & = & u^0 \quad \text{dans } \Omega \\ u'(0) & = & u^1 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (P_s)$$

Soit $\mathcal{V}$ l'espace défini par :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) ; v_{\Gamma_0} = 0, v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\} \quad (1)$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T v|^2 + a|v|^2) d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

On note par $\mathcal{V}'$ le dual de $\mathcal{V}$.

La théorie des semi groupes linéaires, permet de montrer que si $(u^0, u^1) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, alors le problème (P_s) admet une solution faible unique $u \in C(\mathbb{R}^+, \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, L^2(\Omega))$ et pour des données initiales régulières et compatibles la solution est régulière. L'énergie de la solution u est définie par :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T u|^2 + a|u|^2) d\Gamma \quad (3)$$

La compacité, le principe d'invariance de la Salle (cf.[15]) et le théorème de Holmgren (cf.[12], p. 129 ,th. 5.3.3) permettent de montrer le théorème suivant :

Théorème 0.1 (*Premier théorème principal*) *On suppose que les condition $(\mathcal{H}_1) - (\mathcal{H}_2)$ sont vérifiées. Alors pour toute solution faible u du problème (P_s) l'énergie $E(u, t)$ décroît vers zéro lorsque t tend vers $+\infty$.*

On considère ensuite l'équation des ondes avec condition de Ventcel stationnaire :

$$\left\{ \begin{array}{lll} y'' - \Delta y & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y & = & u_1 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu y - \Delta_T y & = & u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ y(0) & = & y^0 \quad \text{dans } \Omega \\ y'(0) & = & y^1 \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (P_V)$$

On introduit l'espace $\mathcal{H} = L^2(\Omega)$; muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_{\Omega} (v)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4)$$

et l'espace $\mathcal{V}$ défini précédemment ; muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ définie par :

$$\|\cdot\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5)$$

On suppose que :

$(\mathcal{H}_3)$.

$$mes(\overline{\Gamma_0}) \succ 0$$

et qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$(\mathcal{H}_4)$.

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\} \\ \Gamma_1 &= \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

où ν désigne la normale unitaire sortante.

On désigne par $(\partial_m \nu)$ l'opérateur de courbure de Γ ; Les valeurs propres de $(\partial_m \nu)$ sont les courbures principales de Γ ; les inverses des courbures sont les rayons de courbures de Γ .

Dans la suite on fera l'hypothèse $(\mathcal{H}_5)$ suivante : les rayons de courbures sont positifs, ce qui implique en particulier que :

$$tr(\partial_m \nu) \geq 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

La méthode générale de stabilisation développée dans [14] permet de montrer le résultat suivant :

Théorème 0.2 (*Deuxième théorème principal*) *Il existe deux opérateurs linéaires bornés :*

$$P : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V} \quad Q : L^2(\Omega) \longrightarrow \mathcal{V}$$

et des constantes $M \succ 0$ et $w \succ 0$ tels que si on pose :

$$u_1 = -\partial_\nu (Py' + Qy)_{/\Gamma_0} \quad u_2 = (Py' + Qy)_{\Gamma_1} \quad (6)$$

Alors le problème $(P_{\mathcal{V}})$ est bien posé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{V}'$ et on a :

$$\|(y, y')\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{V}'} \preceq M \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{V}} e^{-wt} \quad \forall t \geq 0, \forall (y^0, y^1) \in \mathcal{H} \times \mathcal{V}' \quad (7)$$

Dans ce travail on a adopté le plan suivant :

Dans le chapitre I, on rappelle dans la première section quelques éléments de géométrie différentielle pour les surfaces. Dans la section 2, on présente quelques notations, définitions et résultats préliminaires d'analyse fonctionnelle ; la théorie des opérateurs et des semi groupes, systèmes dynamiques abstraits et les espaces de sobolev.

Dans le chapitre II, on étudie la régularité de la solution du problème (P_S) , puis on montre le premier théorème principal.

Dans le chapitre III, on montre que le problème (P_V) homogène $(u_1 = u_2 = 0)$ est bien posé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{V}$, on donne un résultat de régularité des solutions faibles puis un théorème d'unicité. On donnera un bref rappel du résultat général de stabilisation développé dans [14], par V . Komornik avant la démonstration du deuxième théorème principal.

Chapitre 1

Rappels

Ce chapitre rassemble les définitions et propriétés essentielles, qui seront utilisées de façon constante dans les chapitres ultérieurs.

1.1 Rappels sur la géométrie différentielle pour les surfaces

On s'intéresse dans ce paragraphe aux notions fondamentales permettant de calculer la dérivée d'une fonction, d'un champ de vecteurs, ou d'un endomorphisme (plus généralement de tenseurs) définis sur une surface.

1.1.1 Paramétrisation

Soit Γ une surface plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ lui-même rapporté à une base orthonormée, on transforme un ouvert $\widehat{\Gamma}$ du plan (O, ξ^1, ξ^2) en la surface Γ par une carte régulière $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ (cf. figure 1.1).

Si on fait varier une seule des composantes ξ^1 ou ξ^2 on obtient une famille de courbes tracées sur Γ appelées lignes de coordonnées.

1.1.2 La normale et le plan tangent

En chaque point m de Γ , on définit deux vecteurs tangents à Γ par :

$$a_\alpha(m) = \frac{\partial \varphi}{\partial \xi^\alpha}(\varphi^{-1}(m)) \quad \alpha = 1, 2 \quad (1.1)$$

Les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ sont supposés linéairement indépendants. La normale unitaire à Γ en chaque point m est définie par :

$$\nu(m) = \nu = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|} \quad (1.2)$$

où $\wedge$ (respectivement $\|\cdot\|$) désigne le produit vectoriel (respectivement la norme euclidienne). Le plan tangent à Γ en m engendré par les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ est noté $T_m(\Gamma)$.

1.1.3 Base duale

En générale, la base $\{a_\alpha(m)\} = \{a_1(m), a_2(m)\}$ du plan tangent $T_m(\Gamma)$ n'est ni orthogonale, ni normée. On est donc amené à utiliser la cobase ou base duale notée $\{a^\alpha(m)\} = \{a^1(m), a^2(m)\}$ définie par :

$$a^\alpha(m) \cdot a_\beta(m) = \delta_\beta^\alpha \quad (1.3)$$

où δ_β^α est le symbole de Kronecker, $\alpha, \beta = 1, 2$.

$a^\alpha(m)$, $\alpha, \beta = 1, 2$ est une forme linéaire sur le plan tangent, mais on peut l'identifier avec un vecteur du plan tangent.

1.1.4 Tenseur métrique

On définit le tenseur métrique de la surface Γ associé à la carte φ par :

$$g_{\alpha\beta} = (a_\alpha, a_\beta) \quad \alpha, \beta = 1, 2 \quad (1.4)$$

où $(\cdot, \cdot)$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^3$. On note $|g|$ le déterminant de ce tenseur.

1.1.5 Le transposé d'un vecteur

Soit $q = q^1 a_1 + q^2 a_2$ un vecteur arbitraire du plan tangent $T_m(\Gamma)$; on lui associe par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ une forme linéaire (vecteur transposé) :

$$\bar{q} = q_1 a^1 + q_2 a^2. \quad (1.5)$$

Les q^α sont les composantes contravariantes et les q_α sont les composantes covariantes.

On a :

$$q_\alpha = g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \quad \alpha = 1, 2. \quad (1.6)$$

En effet :

On a :

$$\bar{q}.a_\alpha = q_\beta a^\beta .a_\alpha = q_\beta \delta_\alpha^\beta = q_\alpha$$

d'où :

$$\begin{aligned} q_\alpha &= (q, a_\alpha) \\ &= g_{\alpha\beta} q^\beta \\ &= g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \quad \alpha = 1, 2. \end{aligned}$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

1.1.6 Intégration sur Γ

$|g|^{\frac{1}{2}}$ représente l'aire du parallélogramme construit à partir des vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$; si f est une fonction scalaire définie sur Γ on a :

$$\int_{\Gamma} f(m) d\Gamma = \int_{\Gamma} f \circ \varphi(\xi^1, \xi^2) |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 d\xi^2 \quad (1.7)$$

1.1.7 Dérivation sur une surface

Dérivation d'une fonction scalaire

Soit f une fonction définie sur Γ et suffisamment régulière ; sa dérivée est une forme linéaire sur l'espace tangent définie par :

$$\partial_m f = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^2 f_{,\alpha} a^\alpha \quad (1.8)$$

Le transposé de $\partial_m f$ noté $\overline{\partial_m f}$ est un vecteur appelé gradient tangentiel de f défini par :

$$\overline{\partial_m f} = \sum_{\alpha=1}^2 q^\alpha a_\alpha = \nabla_T f \quad (1.9)$$

avec :

$$q^\alpha = \sum_{\beta=1}^2 g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\beta=1}^2 g^{\alpha\beta} f_{,\beta}$$

où $g^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique dual de $g_{\alpha\beta}$ tel que :

$$\sum_{\beta=1}^2 g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \delta_\mu^\alpha \quad \alpha, \mu = 1, 2 \quad (1.10)$$

1.1.8 Opérateur de projection

On désigne par $\pi(m)$ l'opérateur de projection orthogonale sur le plan tangent $T_m(\Gamma)$ en m à Γ . Si $q(m)$ est un vecteur de $\mathbb{R}^3$, $\pi(m)q(m)$ (au point m de Γ) est un vecteur de $T_m(\Gamma)$ tel que :

$$(q(m) - \pi(m)q(m)) \cdot z = 0 \quad \forall z \in T_m(\Gamma) \quad (1.11)$$

Le transposé de la normale $\nu(m)$ est la forme linéaire noté par $\overline{\nu(m)}$ qui vérifie la relation suivante :

$$Id_3 = \pi(m) + \nu(m) \overline{\nu(m)} \quad (1.12)$$

où Id_3 désigne l'identité dans $\mathbb{R}^3$.

$\nu(m) \overline{\nu(m)}$ est la projection orthogonale sur la droite engendrée par $\nu(m)$.

On désigne par $\overline{C}$ le transposé d'un endomorphisme C de $\mathbb{R}^3$ défini par :

$$\forall y, z \in \mathbb{R}^3 \quad (Cy, z) = (\overline{C}z, y) \quad (1.13)$$

On vérifie que π est symétrique, c'est-à-dire $\pi(m) = \overline{\pi(m)}$ pour tout $m \in \Gamma$.

Tout champ $q(m)$ défini sur Γ , peut être décomposé en une composante tangentielle :

$$q_T(m) = \pi(m)q(m) \quad (1.14)$$

et une composante normale :

$$q_\nu(m) = \overline{\nu(m)} \cdot q(m) \quad (1.15)$$

On a :

$$q(m) = q_T(m) + q_\nu(m) \nu(m), \quad m \in \Gamma. \quad (1.16)$$

1.1.9 Dérivée d'un champ tangentiel

Soit q_T un champ régulier de vecteur tangent à Γ :

$$m \in \Gamma \longrightarrow q_T(m) = q^\alpha(m) a_\alpha(m) \in T_m(m).$$

On définit la dérivée de q_T sur Γ par :

$$\begin{aligned} \partial_m q_T &= \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial q_T}{\partial \xi^\alpha} \cdot a^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 q_{,\alpha} a^\alpha, \end{aligned} \quad (1.17)$$

c'est un endomorphisme qui applique le plan tangent dans $\mathbb{R}^3$ et non pas dans le plan tangent lui même. On introduit les symboles de christoffel $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$ par :

$$\pi.a_{\alpha,\beta} = \sum_{\lambda=1}^2 \Gamma_{\alpha\beta}^\lambda a_\lambda \quad \alpha, \beta = 1, 2, \quad (1.18)$$

où :

$$a_{\alpha,\beta} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^1 \partial \xi^2} = a_{\beta,\alpha}$$

ce qui prouve que :

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda = \Gamma_{\beta\alpha}^\lambda \quad (1.19)$$

Lemme 1.1 *La dérivée du tenseur métrique $g_{\beta\gamma}$ est donnée par :*

$$g_{\alpha\beta;\mu} = \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda g_{\alpha\lambda} \quad (1.20)$$

Preuve. De (1.4) on a :

$$g_{\alpha\beta,\mu} = (a_{\alpha,\mu}, a_\beta) + (a_\alpha, a_{\beta,\mu})$$

Et de (1.18) , on obtient :

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta;\mu} &= (\pi a_{\alpha,\mu}, a_\beta) + (a_\alpha, \pi a_{\beta,\mu}) \\ &= (\Gamma_{\alpha\mu}^\lambda a_\lambda, a_\beta) + (a_\alpha, \Gamma_{\beta\mu}^\lambda a_\lambda) \\ &= \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g_{\lambda\beta} + \Gamma_{\beta\mu}^\lambda g_{\alpha\lambda} \end{aligned}$$

ce qui donne (1.20) . ■

Si on pose $q_T = q^\beta a_\beta$, on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_m q_T &= (q^\beta a_\beta)_{,\alpha} . a^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 (q_{,\alpha}^\beta a_\beta + q^\beta a_{\beta,\alpha}) a^\alpha. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La dérivée covariante du champ q_T sur Γ et par définition $\pi \partial_m q_T$, elle applique le plan tangent dans lui même et on a :

$$\begin{aligned} \pi \partial_m q_T &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 q_{,\alpha}^\beta \pi a_\beta . a^\alpha + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 q^\beta \pi a_{\beta,\alpha} . a^\alpha \\ &= \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 q_{,\alpha}^\beta a_\beta . a^\alpha + \sum_{\alpha=1}^2 \sum_{\beta=1}^2 q^\beta \Gamma_{\alpha,\beta}^\lambda a_\lambda . a^\alpha \\ &= \sum_{\alpha,\beta=1}^2 \left(q_{,\alpha}^\beta + \Gamma_{\alpha\lambda}^\beta q^\lambda \right) a_\beta . a^\alpha. \end{aligned} \quad (1.22)$$

1.1.10 Opérateur de courbure

On définit l'opérateur de courbure de la surface par :

$$\partial_m \nu = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha} \cdot a^\alpha. \quad (1.23)$$

Puisque $\frac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha}$ ($\alpha = 1, 2$) est un élément du plan tangent, il existe des scalaires b_α^β tel que :

$$\frac{\partial \nu}{\partial \xi^\alpha} = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_\alpha^\beta a_\beta$$

et donc :

$$\partial_m \nu = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_\alpha^\beta a_\beta \cdot a^\alpha \quad (1.24)$$

Cet opérateur applique le plan tangent dans lui même.

Lemme 1.2 *L'opérateur de courbure $\partial_m \nu$ est symétrique*

Preuve. Pour $\alpha = 1, 2$; on a :

$$\begin{aligned} \bar{\nu} \cdot a_\alpha &= (\nu, a_\alpha) \\ &= 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\left(\frac{\partial \nu}{\partial \xi^\beta}, a_\alpha \right) + (\nu, a_{\alpha, \beta}) = 0.$$

On pose :

$$b_{\alpha\beta} = \sum_{\mu=1}^2 g_{\alpha\mu} b_\beta^\mu \quad (\alpha, \beta = 1, 2), \quad (1.25)$$

on obtient :

$$b_{\alpha\beta} = (\nu, a_{\alpha, \beta}), \quad (1.26)$$

ce qui prouve en particulier que $b_{12} = b_{21}$. Alors :

$\forall y, z \in T_m(\Gamma)$:

$$y = y^\alpha a_\alpha, \quad z = z^\alpha \cdot a_\alpha$$

On a :

$$\begin{aligned} ((\partial_m \nu) y, z) &= - (b_\alpha^\beta a_\beta \cdot a^\alpha \cdot a_\mu y^\mu, z^\lambda a_\lambda) \\ &= -b_\alpha^\beta (a_\beta \cdot a_\lambda) y^\alpha \cdot z^\lambda \\ &= -b_{\alpha\lambda} y^\alpha z^\lambda \\ &= (y, (\partial_m \nu) z). \end{aligned}$$

Ce qui montre que l'endomorphisme de courbure $\partial_m \nu$ est symétrique. ■

1.1.11 Dérivée d'un champ normal

On note par $q_\nu \nu$ le champ normal ; on a par définition :

$$\partial_m (q_\nu \nu) = \nu \partial_m q_\nu + q_\nu \partial_m \nu \quad (1.27)$$

1.1.12 Dérivée d'un champ de vecteurs sur Γ

Lemme 1.3 *Soit q un champ de vecteurs défini sur Γ on a :*

$$\partial_m q = \pi \partial_m q_T - \nu \overline{q_T} \partial_m \nu + \nu \partial_m \nu + q_\nu \partial_m \nu.$$

Preuve. D'après (1.16) on a :

$$\begin{aligned} \partial_m q &= \partial_m q_T + \partial_m (q_\nu \nu) \\ &= \partial_m q_T + \nu \partial_m q_\nu + q_\nu \partial_m \nu \end{aligned}$$

de (1.12) , il vient :

$$\partial_m q = \pi \partial_m q_T + \nu \overline{\nu} \partial_m q_T + \nu \partial_m q_\nu + q_\nu \partial_m \nu$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \partial_m (\overline{\nu} q_T) &= \overline{\nu} \partial_m q_T + \overline{q_T} \partial_m \nu \\ &= 0 \end{aligned}$$

Puisque $\overline{\nu} q_T = 0$.

On obtient :

$$\partial_m q = \pi \partial_m q_T - \nu \overline{q_T} \partial_m \nu + \nu \partial_m q + q_\nu \partial_m \nu$$

■

1.1.13 Expression de la divergence

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs sur une surface Γ .

La divergence du champ de vecteurs tangents à Γ :

$$q_T = q^1 a_1 + q^2 a_2$$

est un champ scalaire défini sur Γ par :

$$\int_{\Gamma} \operatorname{div} (q_T) z dm = - \int_{\Gamma} \partial_m z q_T dm \quad \text{pour tout } z \in \mathcal{D}(\Gamma). \quad (1.28)$$

où $\mathcal{D}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Γ à support compact (le support d'une fonction est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert sur lequel elle est identiquement nulle).

Expression de la divergence d'un champ d'endomorphisme sur une surface Γ .

Désignons par ζ_t un champ d'endomorphismes du plan tangent à la surface Γ .

Posons :

$$\zeta_t = \zeta_\beta^\alpha \cdot a^\beta a_\alpha.$$

(on a utilisé la convention de sommation par indice répété).

La divergence tangentielle du champ ζ_t est un champ de formes linéaire sur $T_m(\Gamma)$, noté $div\zeta_t$ et défini par :

$$\int_\Gamma div\zeta_t \cdot q_T dm = - \int_\Gamma tr_2(\zeta_t \cdot \pi \partial_m q_T) dm \quad \text{pour tout } q_T \in D(\Gamma, T(\Gamma)) \quad (1.29)$$

tr_2 désigne la trace d'un endomorphisme du plan tangent dans lui même et $\mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$ désigne l'espace des champs tangents à Γ dont les composantes dans la base de $T_m(\Gamma)$ sont $\{a_\alpha\}$ $\alpha = 1, 2$. sont dans $\mathcal{D}(\Gamma)$.

1.1.14 Espaces fonctionnels sur la surface Γ

Espace $L^2(\Gamma)$.

$L^2(\Gamma)$ est l'espace des fonctions $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $\bar{f} = f \circ \varphi \in L^2(\Gamma)$.

On pose :

$$\|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \int_\Gamma |f|^2 dm = \int_{\hat{\Gamma}} |f|^2 |g|^{\frac{1}{2}} d\xi^1 d\xi^2.$$

où g est le tenseur métrique.

Espace $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$.

Un champ q_T :

$$\begin{aligned} \Gamma &\longrightarrow T(\Gamma) \\ m &\longrightarrow q_T(m) = q^1(m) a_1(m) + q^2(m) a_2(m) \in T_m(\Gamma) \end{aligned}$$

est dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$ si $q_\alpha \in L^2(\Gamma)$ pour $\alpha = 1, 2$.

On pose alors :

$$\|q_T\|_{L^2(\Gamma, T(\Gamma))}^2 = \int_\Gamma \bar{q}_T q_T dm = \int_\Gamma \sum_{\alpha=1}^2 q_\alpha q^\alpha dm. \quad (1.30)$$

où $q_\alpha = g_{\alpha\beta} q^\beta$.

La norme définie par (1.30) est équivalente à la norme définie par :

$$\left(\sum_{\alpha=1}^2 \|q^\alpha\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Espace $H^1(\Gamma)$.

C'est l'espace des fonctions $f : \Gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ de $L^2(\Gamma)$ telles que $\overline{\partial_m f}$ est dans $L^2(\Gamma, T(\Gamma))$. On pose alors :

$$\|f\|_{H^1(\Gamma)}^2 = \|f\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\overline{\partial_m f}\|_{L^2(\Gamma; T(\Gamma))}^2. \quad (1.31)$$

On note $H_0^1(\Gamma)$ le sous-espace des fonctions de $H^1(\Gamma)$ nulles sur le bord $\partial\Gamma$ de Γ . C'est aussi la fermeture de $\mathcal{D}(\Gamma)$ dans $H^1(\Gamma)$ muni de la norme définie par (1.31).

Théorème 1.1 *Si $u \in C^1(\Gamma)$ et $q_T \in (C^1(\Gamma))^2$ sont respectivement une fonction et un champ de vecteurs tangents à la surface Γ , on a la formules de stokes suivante (cf.[21]) :*

$$\int_{\Gamma} (\nabla_{\Gamma} u \cdot q_T) d\gamma + \int_{\Gamma} u \operatorname{div}_{\Gamma} q_T d\gamma = 0 \quad (1.32)$$

1.1.15 Calcul de la dérivée d'un champ de vecteurs défini sur une coque

Représentation géométrique d'une coque

On considère une surface régulière Γ plongé dans $\mathbb{R}^3$ et on pose :

$$\Omega^\epsilon = \Gamma \times]-\epsilon, \epsilon[\quad (1.33)$$

Si M désigne un point de Ω^ϵ , on peut écrire :

$$\Omega^\epsilon = \{M \in \mathbb{R}^3, OM = Om + x_\nu \nu\} \quad (1.34)$$

où O est une origine arbitraire de $\mathbb{R}^3$; m un point de Γ et x_ν un scalaire compris entre $-\epsilon$ et ϵ . (figure 1.2). Nous considérons l'endomorphisme du plan tangent $T_m(\Gamma)$ défini par :

$$\mu = I + x_\nu \partial_m \nu. \quad (1.35)$$

Dans le cadre de l'hypothèse des coques minces (cf.[16]), nous avons :

$$\mu^{-1} = I - x_\nu \partial_m \nu + (x_\nu)^2 (\partial_m \nu)^2 + \dots + (-x_\nu)^n (\partial_m \nu)^n + \dots$$

Calcul de la dérivée d'une fonction réelle définie sur Ω^ϵ

Considérons une fonction réelle q , définie sur Ω^ϵ et que l'on peut par conséquent considérer comme une fonction de m et de x_ν . En différentiant la relation (1.34), on obtient :

$$dM = dm + x_\nu \partial_m \nu \cdot dm + \nu dx_\nu \quad (1.36)$$

Nous avons :

$$\begin{aligned}\pi.dM &= \pi.dm + x_\nu \pi.\partial_m \nu.dm + \pi.\nu dx_\nu \\ &= dm + x_\nu \partial_m \nu.dm\end{aligned}$$

Donc :

$$\pi.dM = (I + x_\nu \partial_m \nu).dm \quad (1.37)$$

D'après (1.35) ; il vient :

$$\pi.dM = \mu.dm \quad (1.38)$$

Soit :

$$dm = \mu^{-1}.\pi.dM \quad (1.39)$$

Par ailleurs (1.36) donne :

$$\begin{aligned}\bar{\nu}.dM &= \bar{\nu}.dm + \bar{\nu}.x_\nu \partial_m \nu.dm + \bar{\nu}.\nu dx_\nu \\ &= \bar{\nu}.(I + x_\nu \partial_m \nu).dm + dx_\nu \\ &= \bar{\nu}.\mu.dm + dx_\nu\end{aligned}$$

de (1.39) , on a :

$$\bar{\nu}.dM = dx_\nu \quad (1.40)$$

De la dérivée d'une fonction scalaire sur Ω^ϵ ; nous avons l'égalité :

$$\partial_M q.dM = \partial_m q.dx_m + \partial_{x_\nu} q.dx_\nu$$

En utilisant (1.39) et (1.40) ; il vient :

$$\partial_M q = \partial_m q.\mu^{-1}.\pi + \partial_{x_\nu} q.\bar{\nu} \quad (1.41)$$

Calcul de la dérivée d'un champ de vecteurs défini sur Ω^ϵ

Soit q un champ de vecteurs de $\mathbb{R}^3$ sur Ω^ϵ . La dérivée, notée $\partial_m q$, est en chaque point un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$, tel que :

$$\partial_M q.dM = \partial_m q.dm + \partial_{x_\nu} q.dx_\nu$$

D'après (1.41) , on a :

$$\partial_M q.dM = (\partial_m q.\mu^{-1}.\pi + \partial_{x_\nu} q.\bar{\nu}).dM$$

En utilisant la décomposition :

$$q = q_T + q_\nu \nu$$

nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned}\partial_M q &= \partial_M q_T + \partial_M (q_\nu \nu) \\ &= \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q_T \cdot \bar{\nu} + \partial_m (q_\nu \nu) \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} (q_\nu \nu) \bar{\nu}\end{aligned}$$

Remarquons alors que :

$$\partial_m (q_\nu \nu) = q_\nu \partial_m \nu + \nu \partial_m q_\nu$$

ceci conduit à :

$$\partial_M q = \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q_T \cdot \bar{\nu} + q_\nu \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \nu \cdot \partial_m q_\nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q_\nu \cdot \bar{\nu}$$

D'après (1.12) , on a :

$$\partial_M q = (\pi + \nu \cdot \bar{\nu}) \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \cdot \bar{\nu} + q_\nu \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \nu \cdot \partial_m q \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \nu \cdot \bar{\nu}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}\partial_M q &= \pi \cdot \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \cdot \bar{\nu} + \nu \cdot \bar{\nu} \cdot \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + q_\nu \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi \\ &\quad + \nu \cdot \partial_m q \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \nu \cdot \bar{\nu}\end{aligned}\tag{1.42}$$

Remarquons ensuite que la relation :

$$\bar{\nu} \cdot q_T = 0$$

implique que :

$$\bar{q}_T \cdot \partial_m \nu + \bar{\nu} \cdot \partial_m q_T = 0$$

ce qui donne :

$$\nu \cdot \bar{\nu} \cdot \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi = -\nu \cdot \bar{q}_T \cdot \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi\tag{1.43}$$

De (1.42) et (1.43) ; il vient :

$$\begin{aligned}\partial_M q &= \pi \cdot \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + q_\nu \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \cdot \bar{\nu} - \nu \cdot \bar{q}_T \cdot \partial_m \nu \cdot \mu^{-1} \cdot \pi \\ &\quad + \nu \cdot \partial_m q_T \cdot \mu^{-1} \cdot \pi + \partial_{x_\nu} q \nu \cdot \bar{\nu}\end{aligned}\tag{1.44}$$

Si on prend $x_\nu = 0$, (1.35) s'écrit :

$$\mu = I$$

De l'inégalité (1.44) , on aura sur Γ :

$$\begin{aligned}(\partial_M q)_{\Gamma} &= \bar{\nabla} q_{\Gamma} \\ &= \pi \cdot \partial_m q_T \cdot \pi + q_\nu (\partial_m \nu) \cdot \pi + \partial_\nu q_T \cdot \bar{\nu} - \nu \cdot \bar{q}_T \cdot (\partial_m \nu) \cdot \pi \\ &\quad + \nu \cdot (\partial_m q_\nu) \cdot \pi + (\partial_\nu q_\nu) \nu \cdot \bar{\nu}\end{aligned}\tag{1.45}$$

D'où :

$$(\partial_M q)_{\Gamma} = \begin{pmatrix} \pi \partial_M q + q_\nu (\partial_m \nu) & \partial_\nu q_T \\ \partial_m q_\nu - \bar{q}_T \partial_m \nu & \partial_\nu q_\nu \end{pmatrix}$$

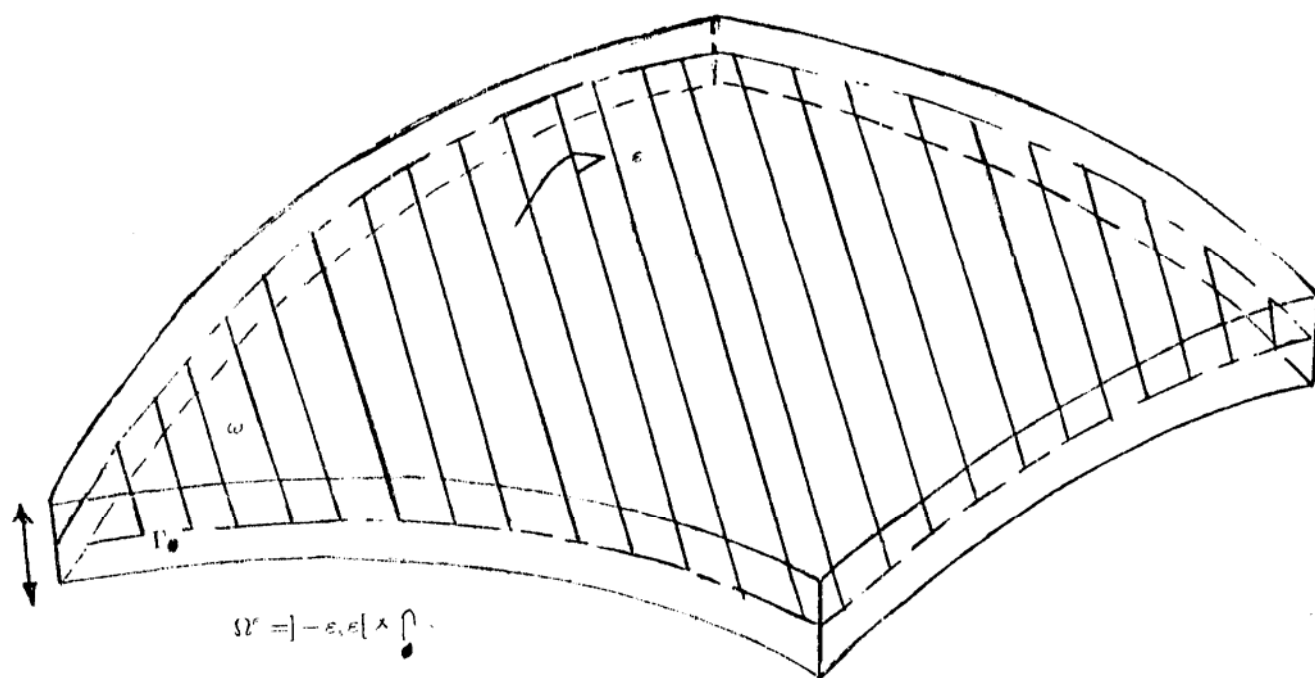


Figure 1.2

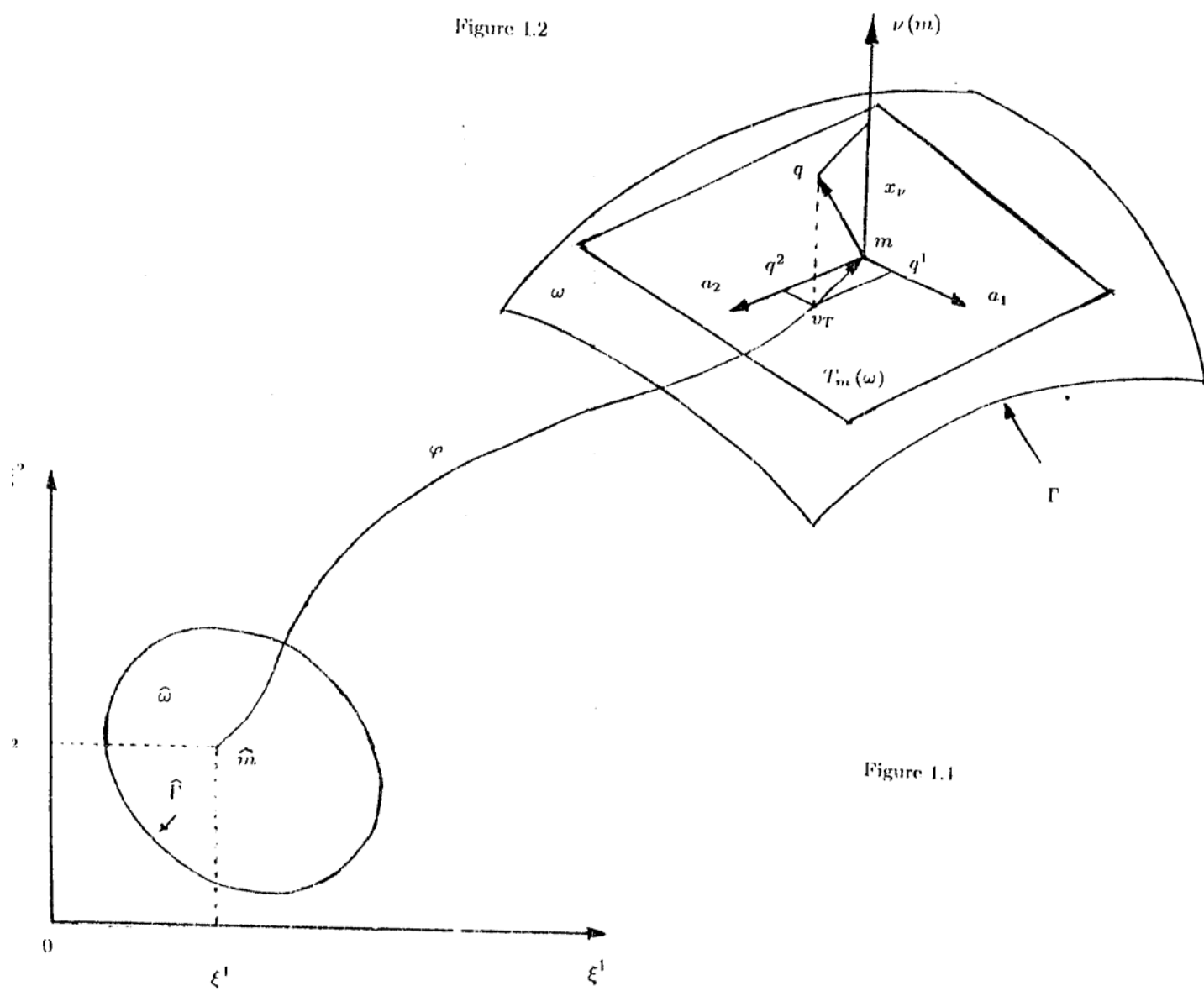


Figure 1.1

1.2 Rappels généraux

1.2.1 Notions de base sur les distributions.

Définition 1.1 $\mathcal{D}(\Omega)$ est l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables dans Ω et à support compact dans Ω (c'est-à-dire pour chaque φ il existe un compact $K \subset \Omega$ tel que φ est nulle en dehors de K).

Théorème 1.2 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$

Définition 1.2 $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est l'espace des restrictions à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Si Ω est borné on a :

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$$

Et en générale :

$$\mathcal{D}(\overline{\Omega}) \neq \mathcal{D}(\Omega).$$

Exception intéressante : $\mathcal{D}(\overline{\mathbb{R}^n}) = \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$

Une suite $(\varphi_j)_j$ de $\mathcal{D}(\Omega)$ converge vers une fonction φ de $\mathcal{D}(\Omega)$ si :

- (i) Il existe un compact $K \subset \Omega$ qui contient tous les supports des φ_j .
- (ii) Quand $j \rightarrow +\infty$, les dérivées de tous les ordres de φ_j convergent uniformément sur K vers les dérivées correspondantes de φ .

1.2.2 Espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.3 l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\Omega)$, est l'espace des fonctionnelles linéaires et continues sur $\mathcal{D}(\Omega)$. On note $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit de dualité entre $\mathcal{D}'(\Omega)$ et $\mathcal{D}(\Omega)$. Donc $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ on a :

- (i) l'application $\varphi \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$ est linéaire ;
- (ii) si $\varphi_j \rightarrow \varphi$ dans $\mathcal{D}(\Omega)$, alors :

$$\langle T, \varphi_j \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle$$

dans $\mathbb{C}$.

Par définition, deux distributions T_1 et T_2 sont égales si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle$$

Remarque 1.1 Les distributions sont une généralisation des fonctions et le produit de dualité $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est une généralisation du produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega)$

Définition 1.4 Une suite $(T_j)_j$ de $\mathcal{D}'(\Omega)$ converge vers $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \langle T_j, \varphi \rangle \rightarrow \langle T, \varphi \rangle.$$

Remarque 1.2 Dans tout ce travail, on identifiera $L^2(\Omega)$ à son dual. On a alors, la situation suivante :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega)$$

Dérivation dans $\mathcal{D}'(\Omega)$.

Soit $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$, on définit $\frac{\partial T}{\partial x_i}$ par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \quad \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = - \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle.$$

1.2.3 Les espace de Sobolev

Nous renvoyons à [1] pour les démonstrations des résultats ci-dessous.

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. on dit qu'une distribution $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ est dans $(L^p(\Omega))^n$ ($1 \leq p \leq \infty$), s'il existe une fonction $f \in L^p(\Omega)$, telle que :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

Il est bien connu qu'alors la classe de f est unique.

Par la suite on considère $m \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$ et on pose :

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), D^\alpha f \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{N}^m \text{ tel que } |\alpha| \leq m\}$$

alors $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach lorsqu'on le munit de la norme définie par :

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p} \quad \text{pour tout } p \in W^{m,p}(\Omega)$$

On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Lorsque $p = 2$, on notera de préférence $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$.

Sur $H^m(\Omega)$ on utilisera plutôt la norme équivalente :

$$\|f\|_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

qui fait de $H^m(\Omega)$ un espace de Hilbert réel muni du produit scalaire :

$$\langle u, v \rangle_{H^m} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u \overline{D^{\alpha} v} dx \right).$$

Théorème 1.3 $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Théorème 1.4 $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^m(\Omega)$.

Cette densité permet de définir les traces d'ordre supérieur des fonctions de $H^m(\Omega)$ sur $\partial\Omega$.

Notation 1 On note $\gamma_0\varphi$ la restriction à $\partial\Omega$ des valeurs de φ . L'application γ_0 est linéaire et continue de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H^1(\Omega)$ dans $C^0(\partial\Omega)$ muni de la norme de $L^2(\partial\Omega)$. Par densité γ_0 se prolonge en une application linéaire continue :

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega).$$

1.2.4 Espace image de la trace

Théorème 1.5 L'espace image de γ_0 est $H^{1/2}(\partial\Omega)$. C'est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|\mu\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} = \inf_{\substack{v \in H^1(\Omega) \\ \gamma_0 v = \mu}} \|v\|_{1,\Omega}$$

Théorème 1.6 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) ; \gamma_0 v = 0\}$$

Théorème 1.7 (Inégalité de Poincaré) Il existe une constante c dépendant du diamètre de Ω telle que :

$$\forall v \in H_0^1(\Omega) ; \|v\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}.$$

c'est-à-dire la semi norme $|\cdot|_{1,\Omega}$ est une norme sur $H_0^1(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{1,\Omega}$.

On note $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$, espace de Hilbert pour la norme duale :

$$\|f\|_{-1,\Omega} = \sup_{v \in H_0^1(\Omega)} \frac{\langle f, v \rangle}{|v|_{1,\Omega}}$$

où les crochets désignent la dualité entre $H^{-1}(\Omega)$ et $H_0^1(\Omega)$. Du fait de la densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$, on peut identifier les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ à des distributions. On dit alors que $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de distributions. Ceci justifie les crochets pour noter la dualité.

Exemple important : la dérivée normale $\gamma_1 v$ définie sur $\partial\Omega$ par :

$$\forall v \in H^2(\Omega), \quad \gamma_1 v = \nabla v_{|\partial\Omega} \cdot \nu$$

On a $\gamma_1 v \in H^{1/2}(\partial\Omega)$ pour toute fonction $v \in H^2(\Omega)$ et on a la formule de Green pour le Laplacien :

$$\forall u \in H^2(\Omega), \quad \forall v \in H^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \Delta u \cdot v \, dx = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_{\partial\Omega} \partial_{\nu} u v \, d\partial\Omega$$

Théorème 1.8 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans :

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega) ; \gamma_0 v = 0 \text{ et } \gamma_1 v = 0\}$$

Notation 2 On désigne par $H^{-2}(\Omega)$ le dual de $H_0^2(\Omega)$. Comme $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\Omega)$, $H^{-2}(\Omega)$ est un espace de distribution.

Théorème 1.9 (Extension de l'inégalité de Poincaré) Il existe une constante c

telle que :

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}.$$

c est-à-dire la semi norme $\|\Delta \cdot\|_{0,\Omega}$ est une norme sur $H_0^2(\Omega)$ équivalente à la norme $\|\cdot\|_{2,\Omega}$.

Théorème 1.10 $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$ pour tout $p \geq 1$.

Remarque 1.3 L'application γ_0 n'est pas définie pour les fonctions de $L^2(\Omega)$, l'application γ_1 n'est pas définie pour les fonctions de $H^1(\Omega)$.

Théorème 1.11 Soit $m \in \mathbb{N}^{\star}$

i) L'application $\overrightarrow{\gamma_m} u = (\gamma_0 u, \gamma_1 u, \dots, \gamma_{m-1} u)$ définie sur $D(\overline{\Omega})$ se prolonge par densité au une application linéaire continue surjective de $H^m(\Omega)$ sur $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Omega)$

ii) Il existe un relèvement continu de $\prod_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ dans $H^m(\partial\Omega)$.

Et l'on a :

$$\text{Ker } \overrightarrow{\gamma_m} = H_0^m(\Omega).$$

Lemme 1.4 Soit $H^1(\Delta.\Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, muni de la norme :

$$\|v\|_{H^1(\Delta.\Omega)} = \left(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Delta.\Omega)$.

Preuve. On considère une forme $\mathcal{M}$, linéaire, continue sur $H^1(\Delta.\Omega)$, nulle sur $D(\overline{\Omega})$ et on montre qu'elle est identiquement nulle. En effet :

Le fait que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire et continue sur $H^1(\Delta.\Omega)$, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in H^1(\Delta.\Omega)$ telle que :

$$\langle \mathcal{M}, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H^1(\Delta.\Omega)$$

où $(,)$ est le produit scalaire associé à cette forme, défini par :

$$(f, v) = \int_{\Omega} (fv + \nabla f \nabla v + \Delta f \Delta v) dx$$

Il vient :

$$\mathcal{M}v = \int_{\Omega} (fv + \nabla f \nabla v + \Delta f \Delta v) dx$$

Si prend $\varphi \in D(\overline{\Omega})$, on obtient $M\varphi = 0$. Donc :

$$\int_{\Omega} (f\varphi + \nabla f \nabla \varphi + \Delta f \Delta \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega}) \quad (1.46)$$

D'après la formule de Green, (1.46) donne :

$$\int_{\Omega} (f\varphi + (\Delta f - f) \Delta \varphi) dx + \int_{\partial\Omega} f \partial_{\nu} \varphi d\partial\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega}) \quad (1.47)$$

Soit $\Phi \in D(\mathbb{R}^n)$, telle que :

$$\varphi = \Phi_{\Omega}$$

On pose $g = \Delta f \in L^2(\Omega)$ et on désigne par $\tilde{f}$ le prolongement par 0 de f en dehors de Ω , c'est-à-dire :

$$\tilde{f} = \begin{cases} f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{à l'extérieure de } \Omega \end{cases}$$

et :

$$\tilde{g} = \begin{cases} g & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{à l'extérieure de } \Omega \end{cases}.$$

D'où (1.47) s'écrit :

$$\left(\tilde{f} + \Delta(\tilde{g} - \tilde{f}), \Phi \right) + \int_{\partial\Omega} f \partial_{\nu} \Phi d\partial\Omega = 0.$$

En prenant $\varphi \in D(\Omega)$, on aura :

$$\tilde{f} + \Delta(\tilde{g} - \tilde{f}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) .$$

De plus pour $\varphi \in D(\mathbb{R}^n/\Omega)$, on aura :

$$\tilde{f} + \Delta(\tilde{g} - \tilde{f}) = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n/\Omega)$$

Donc :

$$\Delta(\tilde{g} - \tilde{f}) = -\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

D'où :

$$\widehat{\Delta}(\tilde{g} - \tilde{f}) = \|\xi\|^2 \left(\widehat{\tilde{g}} - \widehat{\tilde{f}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

(où $\widehat{\cdot}$ désigne la transformation de Fourier).

et :

$$\widehat{\tilde{g}} - \widehat{\tilde{f}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

car $\tilde{g} - \tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Alors :

$$(1 + \|\xi\|^2) \left(\widehat{\tilde{g}} - \widehat{\tilde{f}} \right) \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

Ce qui montre que :

$$\tilde{g} - \tilde{f} \in H^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n), (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{2}{2}} \widehat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$$

Or $\tilde{g} - \tilde{f}$ est nulle à l'extérieure de Ω ; donc :

$$g - f \in H_0^2(\Omega) .$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\mathbb{R}^n)$ et $g - f \in H_0^2(\Omega)$; il existe alors une suite $\Psi_j \in D(\Omega)$ qui converge vers $g - f$ dans $H_0^2(\Omega)$.

Le fait que $\Psi_j \in D(\Omega)$ donne l'égalité suivante :

$$(\Psi_j, \Delta\varphi) = (\Delta\Psi_j, \varphi)$$

qui implique :

$$(g - f, \Delta\varphi) = (\Delta(g - f), \varphi)$$

de (1.47) avec $g = \Delta f$; il vient :

$$\int_{\Omega} (f + \Delta(g - f)) \varphi dx + \int_{\partial\Omega} f \partial_{\nu} \varphi d\partial\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega}) \quad (1.48)$$

Comme $\tilde{f} + \Delta(\tilde{g} - \tilde{f}) = 0$ dans $D(\overline{\Omega})$ et $\Delta(\tilde{g} - \tilde{f})_{|\Omega} = \Delta(g - f)$, (1.48) donne :

$$\int_{\partial\Omega} f \partial_\nu \varphi d\partial\Omega = 0 \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega})$$

D'où :

$$f|_{\partial\Omega} = 0$$

mais $f \in H^1(\Omega)$ et $\Delta f \in L^2(\Omega)$, alors :

$$f \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$$

Pour le voir, il suffit de résoudre le problème :

$$\begin{cases} -\Delta f = k \in L^2(\Omega) \\ f|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

Enfin, de la densité de $D(\overline{\Omega})$ dans $H^2(\Omega)$, l'égalité suivante :

$$\int_{\Omega} (f\varphi + \nabla f \nabla \varphi + \Delta f \Delta \varphi) dx \quad \forall \varphi \in D(\overline{\Omega})$$

montre que :

$$f \equiv 0$$

donc :

$$\mathcal{M} \equiv 0.$$

Alors $D(\overline{\Omega})$ est dense dans $H^1(\Delta.\Omega)$. ■

Lemme 1.5 Soit $L^2(\Delta.\Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, muni de la norme :

$$\|v\|_{L^2(\Delta.\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ est dense dans $L^2(\Delta.\Omega)$.

Preuve. Pour cela on considère une forme $\mathcal{M}$, linéaire, continue sur $L^2(\Delta.\Omega)$, nulle sur $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ et on montre qu'elle est identiquement nulle. En effet :

Le fait que $\mathcal{M}$ est une forme linéaire et continue sur $L^2(\Delta.\Omega)$, le théorème de représentation de Riesz assure l'existence et l'unicité d'une fonction $f \in L^2(\Delta.\Omega)$ telle que :

$$\langle \mathcal{M}, u \rangle = (f, u) \quad \forall u \in L^2(\Delta.\Omega)$$

où $(.,.)$ désigne le produit scalaire associé à cette forme, défini par

$$(f, v) = \int_{\Omega} (fv + \Delta f \Delta v) dx$$

Il vient :

$$\mathcal{M}v = \int_{\Omega} (fv + \Delta f \Delta v) dx$$

Si prend $\varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$, on obtient $\langle \mathcal{M}, \varphi \rangle = 0$. Donc :

$$\int_{\Omega} (f\varphi + \Delta f \Delta \varphi) dx = 0 \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \quad (1.49)$$

On désigne par $\tilde{f}$ le prolongement par 0 de f en dehors de Ω , c'est-à-dire :

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{si } x \notin \Omega \end{cases}$$

Si on prend $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle \Delta(\tilde{f})_{\Omega}, \varphi \rangle &= \langle \Delta(\tilde{f}), \varphi \rangle \\ &= \langle \tilde{f}, \Delta \varphi \rangle \\ &= \langle f, \Delta \varphi \rangle \\ &= \langle \Delta f, \varphi \rangle \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\Delta(\tilde{f})_{\Omega} = \Delta f$$

au sens de distribution.

De même on montre que :

$$\Delta(\tilde{f})_{\mathbb{R}^n \setminus \Omega} = 0$$

ce qui permet d'écrire :

$$\Delta(\tilde{f}) = \begin{cases} \Delta f & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{à l'extérieure de } \Omega \end{cases}.$$

De plus $\Delta f \in L^2(\Omega)$ car $f \in L^2(\Delta \cdot \Omega)$ et $\Delta(\tilde{f}) \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Mais :

$$\widehat{\Delta(\tilde{f})} = \|\xi\|^2 \widehat{\tilde{f}} \in L^2(\mathbb{R}^n),$$

et $\widehat{\tilde{f}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$ car $\tilde{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Alors :

$$(1 + \|\xi\|^2) \widehat{\tilde{f}} \in L^2(\mathbb{R}^n)$$

ce qui montre que $\tilde{f} \in H^2(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in \zeta'(\mathbb{R}^n), (1 + \|\xi\|^2)^{\frac{2}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}$.

Or $\tilde{f}$ est nulle à l'extérieure de Ω ; donc :

$$\tilde{f} \in H_0^2(\Omega).$$

Comme $D(\Omega)$ est dense dans $H_0^2(\mathbb{R}^n)$ et $f \in H_0^2(\Omega)$; il existe alors une suite $\Psi_j \in D(\Omega)$ qui converge vers f dans $H_0^2(\Omega)$.

cela implique :

$$\Psi_j \longrightarrow f \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

et :

$$\Delta \Psi_j \longrightarrow \Delta f \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

D'après (1.49) , on a :

$$\int_{\Omega} (f \varphi_j + \Delta f \Delta \varphi_j) dx = 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}$$

à la limite on obtient :

$$\int_{\Omega} |f|^2 + |\Delta f|^2 = 0$$

ce qui donne :

$$f = 0$$

Donc :

$$\mathcal{M} = 0.$$

ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 1.6 Soit $||| \cdot |||$ la norme définie sur $H^1(\Omega)$ par :

$$|||v||| = \left[\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}.$$

On suppose que $\text{mes}(\Gamma_0) = 0$. Alors il existe une constante $c \succ 0$ telle que :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c |||v||| \tag{1.50}$$

Preuve. On raisonne par l'absurde ; il existe alors une suite $(w_n)_n$ de fonction de $\mathcal{V}$ telle que :

$$\frac{1}{n} \|w_n\|_{H^1(\Omega)} \succ |||w_n|||$$

Si on pose :

$$v_n = \frac{w_n}{\|w_n\|_{H^1(\Omega)}}$$

On obtient :

$$\|v_n\|_{H^1(\Omega)} = 1 \quad (1.51)$$

et

$$|||v_n||| < \frac{1}{n} \quad (1.52)$$

D'une part on a d'après (1.51) , la suite $(v_n)_n$ est bornée dans $H^1(\Omega)$ et comme l'injection $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{1-s}(\Omega)$ est compacte, avec $0 < s < \frac{1}{2}$, on peut alors extraire une suite notée $(v_n)_n$ qui converge dans $H^{1-s}(\Omega)$ vers v .

De la continuité de la trace on a :

$$v_{n|\Gamma_1} \longrightarrow v_{|\Gamma_1} \quad \text{sur } H^{1-s-\frac{1}{2}}(\Gamma_1). \quad (1.53)$$

Comme :

$$0 < s < \frac{1}{2}$$

alors :

$$\frac{1}{2} - s \succ 0$$

D'où :

$$H^{\frac{1}{2}-s}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$$

ce qui donne d'après (1.53) :

$$v_{n|\Gamma_1} \longrightarrow v_{|\Gamma_1} \quad \text{dans } L^2(\Gamma_1)$$

et d'après (1.52) , l'unicité de la limite entraîne que :

$$v_{|\Gamma_1} = 0$$

Donc :

$$v_{|\Gamma} = 0$$

puisque $\text{mes}(\Gamma_0) = 0$.

Comme l'injection canonique de $H^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compact ; on peut donc extraire de la suite $(v_n)_n$ une sous suite $(v_n)_n$ telle que :

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{dans } L^2(\Omega)$$

de plus, la continuité de l'injection canonique de $L^2(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$ montre que :

$$v_n \longrightarrow v \quad \text{dans } D'(\Omega).$$

et d'après la continuité de la dérivation de $D'(\Omega)$ dans $D'(\Omega)$ on a :

$$\nabla v_n \longrightarrow \nabla v \quad \text{dans } (D'(\Omega))^n.$$

Enfin :

de (1.52) il vient :

$$\nabla v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } (L^2(\Omega))^n$$

la continuité de l'injection :

$$L^2(\Omega) \hookrightarrow D'(\Omega)$$

montre que :

$$\nabla v_n \longrightarrow 0 \quad \text{dans } (D'(\Omega))^n.$$

L'unicité de la limite entraîne que :

$$\nabla v = 0 \quad \text{dans } (D'(\Omega))^n.$$

ce qui prouve que $\nabla v = 0 \in L^2(\Omega)$ et v est une constante dans Ω .

mais $v_{|\Gamma} = 0$ alors :

$$v = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} v_n \longrightarrow v \text{ dans } L^2(\Omega) . \\ \text{et} \\ \nabla_n v \longrightarrow \nabla v \text{ dans } (L^2(\Omega))^n . \end{array} \right.$$

avec :

$$v = 0$$

alors :

$$v_n \longrightarrow 0 \text{ dans } H^1(\Omega)$$

ce qui contredit (1.51) . ■

1.2.5 Rappels d'analyse fonctionnelle

Introduisons maintenant quelques espaces fonctionnels fondamentaux. Pour p donné avec $1 \leq p \leq +\infty$, on appelle $L^p(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables sur Ω que l'on munit de la norme :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(\Omega)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{1/p} < +\infty \text{ pour } p < +\infty \\ \|f\|_{L^\infty(\Omega)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{x \in \Omega} |f(x)| < +\infty \text{ pour } p = +\infty. \end{aligned}$$

C'est un espace de Banach pour la norme définie ci-dessus. L'espace $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :

$$(f, g) \stackrel{\text{déf}}{=} \int_{\Omega} f(x) \overline{g(x)} \, dx.$$

On introduit maintenant des espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Hilbert séparable X .

Une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est dite étagée si elle est de la forme :

$$f(t) = \sum_{i=1}^k v_i \chi_{E_i}(t)$$

où les v_i sont des éléments de X en nombre fini, les E_i forment une partition mesurable (pour la mesure de Lebesgue de $[0, T]$ et χ_{E_i} désigne la fonction caractéristique de E_i . On dit qu'une fonction $f : [0, T] \rightarrow X$ est mesurable s'il existe une suite de fonctions étagées f_n telle que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_X = 0$$

presque partout dans $[0, T]$.

Comme dans le cas scalaire, la relation d'égalité presque partout est une relation d'équivalence sur l'ensemble des fonctions mesurables sur $[0, T]$ à valeurs dans X et pour $1 \leq p \leq +\infty$, on appelle $L^p(0, T; X)$ l'espace des classes de fonctions mesurables de $[0, T]$ dans X que l'on munit de la norme :

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p(0, T; X)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_0^T \|f(t)\|_X^p \, dt \right)^{1/p} < +\infty \text{ pour } p < +\infty \\ \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} &\stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{t \in [0, T]} \text{ess } \|f(t)\|_X < +\infty \text{ pour } p = +\infty. \end{aligned}$$

Convention. Dans ce travail, on supposera que Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^n$ avec $n \geq 1$.

Notation 3 On note ν le vecteur normal unitaire sur la frontière $\partial\Omega$, dirigé vers l'extérieur de Ω .

Théorème 1.12 Soit Ω un ouvert borné connexe de $\mathbb{R}^n$ de frontière C^1 par morceaux et Γ_0 une partie de sa frontière telle que $\text{mes}(\Gamma_0) > 0$, alors la semi norme :

$$|\cdot|_{1, \Omega} = \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{0, \Omega}^2$$

induit une norme sur $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), v = 0 \text{ sur } \Gamma_0\}$ équivalente à celle induite par la norme $\|\cdot\|_{H^1(\Omega)}$.

Théorème 1.13 Si v est une fonction de $H_0^1(\Omega)$, la fonction $\tilde{v}$, prolongement de v par 0 dans $\mathbb{R}^n/\Omega$, appartient à $H^1(\mathbb{R}^n)$.

Théorème 1.14 On désigne par $\hat{\cdot}$ la transformation de Fourier ; on a :

$$H^m(\mathbb{R}^n) = \{v \in L^2(\mathbb{R}^n), (1 + |\xi|^2)^{m/2} \hat{v} \in L^2(\mathbb{R}^n)\}$$

et la norme :

$$\|v\|_{H^m(\mathbb{R}^n)} = \|(1 + |\xi|^2)^{\frac{m}{2}} \hat{v}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Théorème 1.15 On note $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1})$ l'application trace précédente et on pose :

$$H_0^m(\Omega) = \text{Ker } \gamma$$

En identifiant $L^2(\Omega)$ avec son dual, on montre que les injections suivantes :

$$\mathcal{D}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-m}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$$

sont continues et à images denses ($H^{-m}(\Omega)$ étant le dual de $H_0^m(\Omega)$).

Les applications γ_j ne sont pas surjectives sur $L^2(\Omega)$. On pose par définition :

$$\gamma_j(H^m(\Omega)) = \bigcap_{j=0}^{m-1} H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

1.2.6 Rappels sur les opérateurs et les semi groupes

Opérateurs non bornés dans un espace de Banach X

Dans ce paragraphe, on suppose que X est un espace de Banach. Sa norme est notée $\|\cdot\|$.

Définition 1.5 Un opérateur linéaire dans X est un couple (D, A) où D est un sous-espace vectoriel de X et $A : D \rightarrow X$ est une application linéaire. On dit que A est borné si $\|Ax\|$ reste borné lorsque $x \in D$, $\|x\| \leq 1$. Dans le cas contraire, il est dit non borné

Définition 1.6 Si (D, A) est un opérateur linéaire dans X , le graphe de A , est un espace vectoriel défini par :

$$G(A) = \{(u, f) \in X \times X, u \in D, f = Au\}$$

On désignera dans la suite, le couple (D, A) par A (cf.[24])

Définition 1.7 Un opérateur (linéaire) A dans X est dit dissipatif si on a :

$$\forall u \in D(A), \forall \lambda > 0, \|u - \lambda Au\| \geq \|u\|.$$

A est dit m -dissipatif si A est dissipatif et pour tout $\lambda > 0$, l'opérateur $I - \lambda A$ est surjectif, c'est à dire :

$$\forall f \in X, \forall \lambda > 0, \exists u \in D(A), u - \lambda Au = f.$$

Opérateurs non bornés dans un espace de Hilbert X

Dans ce paragraphe on suppose que X est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire $\langle, \rangle$. Si A est un opérateur linéaire dans X de domaine dense, la formule :

$$G(A^*) = \{(v, \varphi) \in X \times X, \forall (u; f) \in G(A), (\varphi, u) = (v; f)\}$$

définit un opérateur linéaire A^* adjoint de A de domaine :

$$D(A^*) = \{v \in X, \exists c < \infty, |\langle Au, v \rangle| \leq c \|u\|, \forall u \in D(A)\}$$

tel que

$$\langle A^*v, u \rangle = \langle v, Au \rangle, \forall v \in D(A^*), \forall u \in D(A)$$

Proposition 1.1 A est dissipatif dans X si et seulement si $\langle Au, u \rangle \leq 0$, pour tout $u \in D(A)$.

Définition 1.8 Soit $A : D(A) \longrightarrow X$ un opérateur linéaire non-borné. On dit que A est monotone si A :

$$(Au, u) \geq 0 \quad \forall u \in D(A).$$

Si de plus

$$\forall f \in X, \exists u \in D(A)$$

tel que

$$u + Au = f$$

alors il est maximal monotone.

Semi groupe engendré par un opérateur m-dissipatif

Soit X un espace de Banach et A un opérateur m-dissipatif dans X , de domaine dense. On désigne par $L(\cdot)$ l'espace des fonctions linéaires et continues et $C^n(\cdot, \cdot)$ l'ensemble des fonctions de classe n ($n \in \mathbb{N}$).

Théorème 1.16 *Il existe une unique famille à un paramètre $T(t) \in L(X)$ définie pour $t \geq 0$ et telle que :*

1) $T(t) \in L(X)$ et $\|T(t)\| \leq 1, \forall t \geq 0$.

2) $T(0) = I$.

3) $T(t+s) = T(t)T(s)$, $\forall s, t \geq 0$.

4) Pour tout $x \in D(A)$.

$u(t) = T(t)x$ est l'unique solution du problème :

$$\begin{cases} u \in C([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), X) \\ u'(t) = Au(t), \quad \forall t \geq 0 \\ u(0) = x \end{cases}$$

enfin, pour tout $x \in D(A)$ et $t \geq 0$, on a $T(t)Ax = AT(t)x$.

Le résultat suivant précise le théorème.1.16 .

Proposition 1.2 *Il existe des constante $M > 0$ et b telles que :*

$$\|T(t)\| \leq Me^{bt}$$

Systèmes dynamiques abstraits (cf.[7])

Dans tout ce paragraphe, (Z, d) désigne un espace métrique complet, (Z sera en pratique l'un des sous-ensembles positivement invariants mentionnés ci-dessous).

Définition 1.9 *Un système dynamique sur Z est une famille $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ d'applications sur Z telle que :*

(i) $S(t) \in C(Z, Z), \forall t \geq 0$.

(ii) $S(0) = Id$ identité.

(iii) $S(t+s) = S(t)S(s), \forall s, t \geq 0$.

(iv) $\forall z \in Z$, la fonction $S(t)z \in C([0, +\infty), Z)$.

Définition 1.10 *pour tout $z \in Z$, la courbe continue $t \longrightarrow S(t)z$ est appelée trajectoire issue de z .*

Définition 1.11 Soit $z \in Z$ L'ensemble :

$$\omega(z) = \{y \in Z, \exists t_n \longrightarrow \infty, S(t_n)z \longrightarrow y, \quad \text{lorsque } n \longrightarrow \infty\}$$

est appelée ensemble ω - limite de z .

Théorème 1.17 On a :

$$\omega(z) = \bigcap_{s>0} \bigcup_{t \geq s} \{S(t)z\}.$$

Fonctions de Liapunov et principe d'invariance Soit (Z, d) un espace métrique complet et $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ un système dynamique sur Z .

Définition 1.12 Une fonction $\Phi \in C(Z, \mathbb{R})$ est dite fonction de Liapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ si

$$\Phi(S(t)z) \leq \Phi(z) \quad \forall z \in Z \quad \text{et } \forall t \geq 0.$$

Remarque 1.4 Si Φ est une fonction de Liapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, alors pour tout $z \in Z$ la fonction $t \rightarrow \Phi(S(t).z)$ est décroissante (au sens large).

Théorème 1.18 (Principe d'invariance de la salle) (cf. [7], [15])

Soit Φ une fonction de Liapunov pour $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ et soit $z \in Z$ tel que $\bigcup_{t \geq 0} \{S(t).z\}$ soit relativement compact dans Z , alors

(i) $c = \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(S(t).z)$ existe.

(ii) $\Phi(y) = c, \quad \forall y \in \omega(z).$

En particulier, on a

$$\forall y \in \omega(z) \quad \text{et } \forall t \geq 0, \quad \Phi(S(t).z) = \Phi(y)$$

Théorème 1.19 (de Hille Yosida) Soit A un opérateur maximal monotone dans un espace de Hilbert H . Alors pour tout $u_0 \in D(A)$ il existe une fonction

$$u \in C^1([0, +\infty[; H) \cap C^0([0, +\infty[; D(A))$$

unique telle que

$$\begin{cases} \frac{du}{dt} + Au = 0 & \text{Dans } [0, +\infty[\\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

De plus on a

$$|u(t)| \leq |u_0|$$

et

$$\left| \frac{du}{dt}(t) \right| = |Au(t)| \leq |Au_0|$$

Théorème 1.20 *Etant donné $\varphi \in H'$, il existe $f \in H$ unique tel que*

$$\langle \varphi, v \rangle = (f, v) \quad \forall v \in H$$

De plus on a

$$|f| = \|\varphi\|_{H'}.$$

1.2.7 Problème variationnel abstrait

Soit X un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$, de norme $\|\cdot\|$, de dual X' et de norme duale $\|\cdot\|_*$:

$$\forall f \in X', \quad \|f\|_* = \sup_{v \in X, v \neq 0} \frac{f(v)}{\|v\|}.$$

Soit a une forme bilinéaire sur $X \times X$ et ℓ un élément de X' . On pose le problème :

Chercher $u \in X$ tel que:

$$\forall v \in X, \quad a(u, v) = \ell(v). \quad (1.54)$$

Lemme 1.7 (de Lax-Milgram) *On suppose que a est continue sur $X \times X$ et X -elliptique ; c'est-à-dire il existe une constante $M \succ 0$ et une constante $\alpha > 0$ telles que :*

$$\forall v \in X, \quad \forall u \in X, \quad a(u, v) \leq M \|v\| \|u\|$$

$$\forall v \in X, \quad a(v, v) = a(u, v) \geq \alpha \|v\|^2.$$

Alors le problème (1.54) a une solution unique u et

$$\|u\| \leq \frac{1}{\alpha} \|\ell\|_*$$

c'est-à-dire l'application $u \mapsto \ell$ est un isomorphisme de X sur X' .

Chapitre 2

Stabilité forte

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on montre par une application du principe de la Salle, la stabilisation forte du problème (P_S) .

Ce chapitre comporte deux sections. Dans la premier section, on étudie l'existence et l'unicité de la solution du problème (P_S) . Dans la deuxième section, on montre, en utilisant le principe de la Salle (*cf.* [7],[15]) et le théorème de Holmgren ([12], p,129, th.5.3.3), la décroissance vers zéro de l'énergie de la solution de l'équation des ondes avec conditions au bord de Ventcel stationnaires par un Feedback frontière linéaire.

On rappelle que le problème (P_S) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} u'' - \Delta u & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R} \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R} \\ \partial_\nu u - \Delta_T u & = & -au - bu' \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R} \\ u(0) & = & u^0 \in \Omega \\ u'(0) & = & u^1 \in \Omega \end{array} \right. \quad (P_S)$$

avec u^0 et u^1 sont dans $\mathcal{V}$.

et l'espace $\mathcal{V}$ est défini par :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) ; v_{|\Gamma_0} = 0, v_{|\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$$

et l'énergie de la fonction u est définie par :

$$E(u, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |u'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T u|^2 + a|u|^2) d\Gamma$$

Proposition 2.1 *L'expression notée et définie par :*

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T v|^2 + a|v|^2) d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.1)$$

est une norme sur $\mathcal{V}$.

Preuve. Soit $v \in \mathcal{V}$ tel que $\|v\|_{\mathcal{V}} = 0$. Alors :

$$\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + a\|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = 0 \implies \begin{cases} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ a\|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

On distingue deux cas :

Si $a = 0$: on a $mes(\overline{\Gamma_0}) \succ 0$. D'où

$$\begin{aligned} \|v\|_{\mathcal{V}} = 0 &\implies \nabla v = 0 \text{ dans } \Omega \\ &\implies v \text{ est une constante.} \end{aligned}$$

comme $v \in \mathcal{V}$ alors $v_{\Gamma_0} = 0$. Ce qui montre que v est nul sur une partie de la frontière.

Donc :

$$v = 0.$$

Si $mes(\overline{\Gamma_0}) = 0$, alors $a \succ 0$. D'où

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = 0 \implies \begin{cases} \nabla v &= 0 & \text{dans } \Omega \\ \nabla_T v &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \\ v_{\Gamma_1} &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

D'où :

$$v \text{ est une constante}$$

et

$$v_{\Gamma_1} = 0$$

Donc $v = 0$. Ce qui montre que $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ est une norme.

■

La formulation variationnelle de problème (P_S) et :

$$\begin{cases} (u'', v) + (u, v)_{\mathcal{V}} + b \int_{\Gamma_1} u' v d\Gamma = 0 \\ u(0) = u^0 \\ u'(0) = u^1 \end{cases} \quad (2.2)$$

avec

$$(u, v)_{\mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma + a \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.3)$$

En effet, soit $v \in \mathcal{V}$, on multiplie la première équation de (P_S) par v et on applique formellement la formule de green. On obtient :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Omega} (u'' - \Delta u) v dx \\ &= \int_{\Omega} u'' v dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} u v d\Gamma \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$(u'', v) + \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma + a \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} u' v d\Gamma = 0 \quad (2.4)$$

puisque $\partial_{\nu} u - \Delta_T u = -au - bu'$ sur Γ_1 .

On désigne par $\mathcal{A} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$ l'opérateur linéaire, borné, défini par :

$$\langle \mathcal{A}u, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = (u, v)_{\mathcal{V}} \quad (2.5)$$

avec

$$(\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma + a \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma \quad (2.6)$$

et par $\mathcal{B} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{V}'$

$$(\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = b \int_{\Gamma_1} u v d\Gamma \quad (2.7)$$

(2.3) donc équivalente à :

$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u + \mathcal{B}u' &= 0 & \forall u \in \mathcal{V} \\ u(0) &= u^0 & \in \mathcal{V} \\ u'(0) &= u^1 & \in \mathcal{V} \end{cases} \quad (2.8)$$

2.1.1 Résultats préliminaires

On montre les résultats préliminaires suivants :

Lemme 2.1 *L'opérateur $\mathcal{B}$ est continu de $\mathcal{V}$ dans $\mathcal{V}'$.*

Preuve. Soit $u \in \mathcal{V}$, $v \in \mathcal{V}$; on a :

$$\begin{aligned} \left| (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| &\leq b \int_{\Gamma_1} |u v| d\Gamma \\ &\leq b \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

Si $mes(\overline{\Gamma_0}) = 0$, alors $a \succ 0$; comme

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 + a \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Alors

$$\begin{aligned} \left| (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| &\leq \frac{b}{a} \sqrt{a} \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \sqrt{a} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq c \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

avec $c = \frac{b}{a}$.

Si $a = 0$, alors $mes(\overline{\Gamma_0}) \succ 0$ et on a :

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

D'où

$$\begin{aligned} \left| (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| &\leq b \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq b \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.12 , il existe une constante $c \succ 0$ tel que :

$$\left| (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| \leq c \|u\|_{\mathcal{V}} \cdot \|v\|_{\mathcal{V}}$$

ce qui montre que $\mathcal{B}u \in \mathcal{V}'$ et la continuité de l'application :

$$\mathcal{B} : \mathcal{V}' \longrightarrow \mathcal{V}$$

■

On définit sur $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ l'opérateur C de domaine :

$$D(C) = \{U = (u, v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} ; \mathcal{A}u + \mathcal{B}v \in L^2(\Omega)\}$$

par

$$C = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ \mathcal{A} & \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Si on pose $U = (u(t), u'(t))^t$, le problème (2.8) s'écrit

$$\begin{cases} U' + CU &= 0 & \text{dans } \mathbb{R} \\ U(0) &= (u(0), u'(0))^t \end{cases} \quad (2.9)$$

Proposition 2.2 *L'opérateur C est maximal monotone sur $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.*

Preuve. • C est monotone.

Soit $U = (u, v) \in D(C)$; on a :

$$\begin{aligned} (CU, U)_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} &= ((-v, \mathcal{A}u + \mathcal{B}v), (u, v))_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \\ &= (-v, u)_{\mathcal{V}} + (\mathcal{A}u + \mathcal{B}v, v)_{L^2(\Omega)} \\ &= (-v, u)_{\mathcal{V}} + (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + (\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\ &= (\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \end{aligned}$$

puisque :

$$(\mathcal{A}u, v) = (v, u)_{\mathcal{V}}$$

On obtient :

$$(CU, U)_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} = \int_{\Gamma_1} b |v|^2 d\Gamma \geq 0$$

car $b \succ 0$. Ce qui montre que l'opérateur C est monotone.

• $(I + C)$ est surjectif de $D(C)$ sur $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.

Soit $W = (w_1, w_2) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$. On pose $U = (u, v)$. D'où :

$$\begin{aligned} (I + C)U &= W \iff (u, v) + C(u, v) = (w_1, w_2) \\ &\iff (u, v) + (-v, \mathcal{A}u + \mathcal{B}v) = (w_1, w_2) \end{aligned}$$

Donc

$$(I + C)U = W \iff \begin{cases} u - v &= w_1 \\ v + \mathcal{A}u + \mathcal{B}v &= w_2 \end{cases} \quad (2.10)$$

Ce qui donne en particulier :

$$v + \mathcal{A}(v + w_1) + \mathcal{B}v = w_2$$

D'où

$$(I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v + \mathcal{A}w_1 = w_2$$

Donc

$$(I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v = w_2 - \mathcal{A}w_1$$

avec

$$w_2 \in L^2(\Omega), \quad \mathcal{A}w_1 \in \mathcal{V}'$$

donc

$$w_2 - \mathcal{A}w_1 \in \mathcal{V}'.$$

Alors pour montrer que $(I + C)$ est surjectif de $D(C)$ sur $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, il suffit de montrer que $(I + \mathcal{A} + \mathcal{B})$ est surjectif de $\mathcal{V}$ sur $\mathcal{V}'$.

On considère un élément $f \in \mathcal{V}'$ et on cherche un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que :

$$((I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v - f, z)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = 0, \quad \forall z \in \mathcal{V}$$

On pose :

$$. a(v, z) = ((I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v, z)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}.$$

$$. L(v) = b(f, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \quad \forall f \in \mathcal{V}.$$

on a :

. $a(., .)$ est bilinéaire.

. $a(., .)$ est continue sur $\mathcal{V}$.

Soit $u, v \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| (u, v)_{\mathcal{V}} + (\mathcal{A}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + (\mathcal{B}u, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |uv| dx + \int_{\Omega} |\nabla u \nabla v| dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T u \nabla_T v| d\Gamma + a \int_{\Gamma_1} |uv| d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} |uv| d\Gamma \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\quad + a \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

On distingue deux cas :

Si $a = 0$, alors $mes(\overline{\Gamma_0}) > 0$ et on a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq \left[\|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \left[\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} + \\ &\quad \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

D'après le théorème 1.12, il vient :

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}$$

D'où la continuité de $a(., .)$:

Si $mes(\overline{\Gamma_0}) = 0$ alors $a > 0$ et on a :

$$|a(u, v)| \leq \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} + a \|u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}$$

D'après le lemme 1.6, il existe une constante $c > 0$ tel que :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &\leq c \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|v\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}} \\ &\leq c' \|u\|_{\mathcal{V}} \|v\|_{\mathcal{V}}. \end{aligned}$$

D'où la continuité de la forme $a(.,.)$.

$a(.,.)$ est coercive. Soit $v \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned}
a(v, v) &= ((I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\
&= (v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + (\mathcal{A}v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} + (\mathcal{B}v, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \\
&= \int_{\Omega} |v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + a \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\Gamma \\
&\geq \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma + \int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + a \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\Gamma \\
&= \|v\|_{\mathcal{V}}^2
\end{aligned}$$

$.L(.)$ est linéaire.

$.L(.)$ est continue. En effet :

Soit $v \in \mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{V}'$, on a :

$$\begin{aligned}
|L(v)| &\leq |\langle f, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}}| \\
&\leq \|f\|_{\mathcal{V}'} \|v\|_{\mathcal{V}}
\end{aligned}$$

D'où la continuité de $L(.)$.

On peut alors appliquer le lemme 1.7 de Lax Milgram qui assure l'existence et l'unicité d'un élément $v \in \mathcal{V}$ tel que :

$$(((I + \mathcal{A} + \mathcal{B})v, z))_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} = \langle f, z \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \quad \forall z \in \mathcal{V}$$

De la première équation de (2.10) on a :

$$v = u - w_1$$

comme $u \in \mathcal{V}$ et $w_1 \in \mathcal{V}$ alors $u \in \mathcal{V}$ ce qui implique

$$U = (u, v) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$$

Enfin de la deuxième équation de (2.10) on a :

$$\mathcal{A}u + \mathcal{B}v = w_2 - v \in L^2(\Omega)$$

Car $w_2 \in L^2(\Omega)$ et $v \in \mathcal{V}$. Et alors pour tout $w = (w_1, w_2) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$, il existe $U = (u, v) \in D(C)$ tel que :

$$(I + C)U = w$$

Donc l'opérateur $(I + C)$ est surjectif.

Alors l'opérateur $(I + C)$ est maximale monotone. ■

Proposition 2.3 Soit $H^1(\Delta, \Omega) = \{v \in H^1(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, muni de la norme :

$$\|v\|_{H^1(\Delta, \Omega)} = \left(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut définir une application continue :

$$\begin{aligned} H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Omega) \\ v &\longmapsto (\partial_\nu v)_\Gamma \end{aligned}$$

Et pour tout élément $w \in H^1(\Omega)$ et tout élément $v \in H^1(\Delta, \Omega)$ on a :

$$(\partial_\nu v, w)_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} = \int_{\Omega} (w \Delta v + \nabla w \nabla v) dx$$

Preuve. Soit $w \in D(\overline{\Omega})$ l'espace des restriction à $\overline{\Omega}$ des fonctions de $D(R^n)$. D'après le théorème 1.11, pour tout $\varphi \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relèvement $v \in H^1(\Omega)$ telle que $\varphi = v_\Gamma$ et :

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

On définit ainsi un relèvement R par :

$$\begin{aligned} H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^1(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto R\varphi = v \end{aligned}$$

avec :

$$(R\varphi)_\Gamma = \varphi$$

Et soit T_w défini par :

$$\begin{aligned} T_w : H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T_w, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \int_{\Gamma} \partial_\nu w R\varphi d\Gamma \end{aligned}$$

où ∂_ν représente la dérivée normale.

Montrons d'abord que $T_w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle T_w, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right| &= \left| \int_{\Gamma} \partial_\nu w R\varphi d\Gamma \right| \\ &= \left| \int_{\Omega} (\nabla w \nabla R\varphi + \Delta w R\varphi) dx \right| \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned}
\left| \langle T_w, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right| &\leq \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla R\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \|R\varphi\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left(\|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|R\varphi\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla R\varphi\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
&\leq c \left(\|w\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \right) \|R\varphi\|_{H^1(\Omega)} \\
&\leq c \|w\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \|R\varphi\|_{H^1(\Omega)}
\end{aligned}$$

De la continuité de R , on obtient :

$$\left| \langle T_w, \varphi \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right| \leq c' \|w\|_{H^1(\Delta, \Omega)} \|\varphi\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

Ce qui prouve que

$$T_w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

et

$$\|T_w\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \|w\|_{H^1(\Delta, \Omega)}$$

donc l'application :

$$T : w \in D(\overline{\Omega}) \longrightarrow T_w \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$$

est bornée sur $D(\overline{\Omega})$ muni de la norme de $H^1(\Delta, \Omega)$; elle peut donc être prolongée d'après le lemme 1.4 par densité en une application linéaire continue de $H^1(\Delta, \Omega)$ dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$.

■

Proposition 2.4 Soit $L^2(\Delta, \Omega) = \{v \in L^2(\Omega), \Delta v \in L^2(\Omega)\}$, muni de la norme :

$$\|v\|_{L^2(\Delta, \Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

On peut définir une application continue :

$$\begin{aligned}
L^2(\Delta, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \\
v &\mapsto (v_\Gamma, (\partial_\nu v)_\Gamma)
\end{aligned}$$

Et pour tout élément $w \in H^2(\Omega)$ et pour tout élément $v \in L^2(\Delta, \Omega)$ on a :

$$(v, \partial_\nu w)_{H^{-\frac{1}{2}}(\Omega), H^{\frac{1}{2}}(\Omega)} - (\partial_\nu v, w)_{H^{-\frac{3}{2}}(\Omega), H^{\frac{3}{2}}(\Omega)} = \int_{\Omega} (v \Delta w + w \Delta v) dx$$

Preuve. Soit $w \in D(\overline{\Omega})$, pour $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, il existe un relèvement $v \in H^2(\Omega)$, telle que :

$$\varphi_1 = v_\Gamma, \quad \varphi_2 = \partial_\nu v_\Gamma$$

et :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

On définit ainsi un relèvement R par :

$$\begin{aligned} H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow H^2(\Omega) \\ \varphi &\longmapsto R\varphi = v \end{aligned}$$

où :

$$\varphi = (\varphi_1, \varphi_2) = ((R\varphi)_\Gamma, \partial_\nu (R\varphi)_\Gamma)$$

Soit $T_w = (T_w^1, T_w^2)$ défini par :

$$\begin{aligned} T_w : H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\longmapsto \langle T_w^1, \varphi_1 \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} - \langle T_w^2, \varphi_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \\ &\quad \int_\Gamma ((\partial_\nu \omega) \varphi_1 - \omega \varphi_2) d\Gamma \end{aligned}$$

Montrons que $T_w \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. D'après la formule de Green on a :

$$\begin{aligned} \left| \langle T_w^1, \varphi_1 \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} - \langle T_w^2, \varphi_2 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \right| &= \left| \int_\Omega (\Delta w v - w \Delta v) dx \right| \\ &\leq \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c_1 \|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)} + \\ &\quad c_1 \|w\|_{L^2(\Omega)} \|\Delta v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c_1 \left(\|\Delta w\|_{L^2(\Omega)} + \|w\|_{L^2(\Omega)} \right) \|v\|_{H^2(\Omega)} \end{aligned}$$

D'où :

$$|T_w(\varphi)| \leq c \|u\|_{L^2(\Delta, \Omega)} \|\varphi\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}$$

Ce qui prouve que :

$$T_w \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

et l'application :

$$w \in D(\overline{\Omega}) \longrightarrow T_w \in H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

est bornée sur $D(\overline{\Omega})$, muni de la norme de $L^2(\Delta, \Omega)$; elle peut donc être prolongée d'après le lemme 1.5 par densité en une application linéaire continue de $L^2(\Delta, \Omega)$ dans $H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$. ■

Proposition 2.5 *Soit*

$$Z = \{v \in \mathcal{V}, \Delta v \in L^2(\Omega), \partial_\nu v - \Delta_T v \in L^2(\Gamma_1)\}$$

on a :

$$Z \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$$

et il existe une constante positive c telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left(\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\nu v - \Delta_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \right), \quad \forall v \in Z \quad (2.11)$$

Preuve. On commence par établir l'inclusion :

$$Z \subset H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$$

Soit $v \in Z \subset \mathcal{V}$; la proposition (2.3) montre que :

$$\partial_\nu v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

comme :

$$\partial_\nu v - \Delta_T v \in L^2(\Gamma_1)$$

et :

$$L^2(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

alors :

$$\Delta_T v \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

d'où :

$$\delta_0(v) \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

et :

$$\|v\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \leq c \|v - \Delta_T v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

Car :

$$\begin{array}{ccc} I - \Delta_T : & H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1) & \longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \\ & v & \longmapsto v - \Delta_T v \end{array}$$

est un isomorphisme.

De plus comme :

$$v_{\Gamma_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

et :

$$v - \Delta v \in L^2(\Omega)$$

Alors :

$$v \in H^2(\Omega)$$

En effet ; étant donné f dans $L^2(\Omega)$ et g donné dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$, le problème :

$$\begin{cases} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ u = g & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases}$$

admet une solution unique $u \in H^1(\Omega)$ avec :

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq c \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right]$$

Les théorèmes classiques de régularité montrent que $u \in H^2(\Omega)$ et :

$$\|u\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left[\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|g\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \right]$$

D'où :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left[\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v_{\Gamma_1}\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \right] \quad (2.12)$$

Enfin, on montre par l'absurde l'estimation (2.11) ; il existe alors une suite $\{w^k\} \subset Z$, telle que :

$$\begin{cases} \|w^k\|_{H^2(\Omega)} = 1, & w^k - \Delta w^k \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Omega), \\ \partial_\nu w^k - \Delta_T w^k \longrightarrow 0 & \text{dans } L^2(\Gamma_1) \end{cases}$$

En posant :

$$f_k = w^k - \Delta w^k \text{ et } g_k = \partial_\nu w^k - \Delta_T w^k.$$

On obtient :

$$\int_{\Omega} f_k v dx + \int_{\Gamma_1} g_k v d\Gamma_1 = \int_{\Omega} (w^k v + \nabla v \nabla w^k) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w^k d\Gamma_1 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.13)$$

Comme :

$$\|w^k\|_{H^2(\Omega)} = 1$$

La suite $\{w^k\}$ est bornée dans $H^2(\Omega)$; Alors w^k converge vers w dans $H^{2-s}(\Omega)$ forte avec $0 < s < \frac{1}{2}$.

Par passage à la limite dans (2.13) ; on obtient :

$$\int_{\Omega} (wv + \nabla v \nabla w) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T w \nabla_T v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (2.14)$$

puisque :

$$f_k = w^k - \Delta w^k \text{ converge vers } 0 \text{ dans } L^2(\Omega) \quad (2.15)$$

et :

$$g_k = \partial_\nu w^k - \Delta_T w^k \quad \text{converge vers 0} \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_1) \quad (2.16)$$

Si on prend le cas où $v = w \in \mathcal{V}$ dans (2.14) on obtient :

$$\|w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T w\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = 0$$

Ce qui montre que :

$$w^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad (2.17)$$

et :

$$w^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Omega) \quad (2.18)$$

Ce qui donne d'après (2.15) et (2.17) :

$$\Delta w^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Omega) \quad (2.19)$$

Comme :

$$.w^k \in H^1(\Omega)$$

$$.\Delta w^k \in L^2(\Omega)$$

Alors :

$$w^k \in H^1(\Delta, \Omega)$$

avec :

$$\|w^k\|_{H^1(\Delta, \Omega)}^2 = \|w^k\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|\Delta w^k\|_{L^2(\Omega)}^2$$

de (2.17) et (2.19) , il vient :

$$w^k \longrightarrow w = 0 \quad \text{dans} \quad H^1(\Delta, \Omega)$$

Cette dernière convergence assure d'après la proposition 2.3 la convergence de $(\partial_\nu w_{\Gamma_1}^k)$ vers zéro dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$, puisque l'application :

$$\begin{aligned} H^1(\Delta, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ v &\longmapsto (\partial_\nu v_\Gamma) \end{aligned}$$

est continue.

D'après (2.16) on a :

$$\partial_\nu w^k - \Delta_T w^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad L^2(\Gamma_1)$$

La continuité de l'injection :

$$L^2(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

montre que :

$$\partial_\nu w^k - \Delta_T w^k \longrightarrow 0 \quad \text{dans} \quad H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1).$$

Alors la convergence de $(\partial_\nu w^k)_{\Gamma_1}$ vers zéro dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$, montre que $\Delta_T w^k$ convergence vers zéro dans $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$. D'où $w^k_{\Gamma_1}$ convergence vers zéro dans $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$.

car :

$$\|v\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \leq c \left(\|v - \Delta_T v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right), \quad \forall v \in Z$$

Enfin :

$$w^k \in H^2(\Omega)$$

le fait que :

$$w^k_{\Gamma_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

et :

$$w^k - \Delta w^k \in L^2(\Omega)$$

et comme :

$$w^k_{\Gamma_1} \longrightarrow 0 \text{ dans } H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

et :

$$w^k - \Delta w^k \longrightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

Alors de (2.12) , il vient la convergence de w^k vers zéro dans $H^2(\Omega)$.

Ce qui contredit :

$$\|w^k\|_{H^2(\Omega)}^2 = 1$$

■

Proposition 2.6 Si $v \in Z$ alors $v_\Gamma \in H^2(\Gamma_1)$ et on a :

$$\|v_\Gamma\|_{H^2(\Gamma_1)} \leq c \left(\|v - \Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|\partial_\nu v - \Delta_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \right), \quad \forall v \in Z$$

Preuve. Si $v \in Z$, alors $v \in H^2(\Omega)$. D'où :

$$\partial_\nu v \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$$

Comme $\partial_\nu v - \Delta_T v \in L^2(\Gamma_1)$. Donc :

$$\Delta_T v_{\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$$

ce qui montre que :

$$v_{\Gamma_1} \in H^2(\Gamma_1)$$

Comme l'application :

$$\begin{array}{ccc} H^2(\Gamma_1) & \longrightarrow & L^2(\Gamma_1) \\ v & \longmapsto & v - \Delta_T v \end{array}$$

est un isomorphisme, alors :

$$\begin{aligned}\|v\|_{H^2(\Gamma_1)} &\leq c \|v - \Delta_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \\ &\leq c \left(\|v - \partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu v - \Delta_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \right)\end{aligned}$$

On conclut alors grâce à (2.11) . ■

2.2 La régularité

Proposition 2.7 on a :

$$D(C) = \{(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V} : \Delta u_1 \in L^2(\Omega), \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1\}$$

Preuve. Soit $U = (u_1, u_2) \in D(C)$; on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= (\mathcal{A}u_1, v)_{\mathcal{V}'} + (\mathcal{B}u_2, v)_{\mathcal{V}} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T u_1 \nabla_T v d\Gamma + a \int_{\Gamma_1} u_1 v d\Gamma + \\ &\quad b \int_{\Gamma_1} u_2 v d\Gamma, \quad \forall v \in \mathcal{V}\end{aligned}$$

Si on prend v dans $D(\Omega)$ alors :

$$v|_{\Gamma_1} = 0.$$

On obtient :

$$-\Delta u_1 = \mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2$$

D'où :

$$-\Delta u_1 = \mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2 \in L^2(\Omega).$$

ce qui montre que $u_1 \in H^1(\Delta, \Omega)$.

D'après la proposition 2.3 $(\partial_\nu u_1)_{\Gamma_1}$ est définie comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et pour $v \in \mathcal{V}$ on a :

$$\begin{aligned}(\mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= - \int_{\Omega} v \Delta u_1 dx + (\partial_\nu u_1, v)_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - (\Delta_T u_1, v)_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} (au_1 + bu_2) v d\Gamma\end{aligned}$$

Comme :

$$-\Delta u_1 = \mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2$$

Alors :

$$\partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ce qui montre que :

$$(u_1, u_2) \in \{(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \Delta u_1 \in L^2(\Omega), \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1\}$$

Réciproquement, soit (u_1, u_2) tel que :

$$* (u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}.$$

$$* \Delta u_1 \in L^2(\Omega).$$

$$* \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

Soit $v \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2, v)_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= (\mathcal{A}u_1, v)_{V'} + (\mathcal{B}u_2, v)_{\mathcal{V}} \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla v dx - \langle \Delta_T u_1, v \rangle + a \int_{\Gamma_1} u_1 v d\Gamma + b \int_{\Gamma_1} u_2 v d\Gamma \end{aligned}$$

comme $u_1 \in H^1(\Delta, \Omega)$ et d'après la proposition 2.3 , $(\partial_\nu u_1)_{\Gamma_1}$ est définie comme un élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)$ et on a :

$$\langle \partial_\nu u_1, v \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} = \int_{\Omega} (v \Delta u_1 + \nabla u_1 \nabla v) dx$$

D'où :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} &= (\partial_\nu u_1, v)_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} - \int_{\Omega} v \Delta u_1 dx - \\ &\quad \langle \Delta_T u_1, v \rangle + \int_{\Gamma_1} (au_1 + bu_2) v dx \\ &= - \int_{\Omega} v \Delta u_1 dx \quad \forall v \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

Si on prend $v \in D(\Omega)$; on obtient :

$$(\mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2, v)_{D'(\Omega), D(\Omega)} = - \langle \Delta u_1, v \rangle \quad \forall v \in D(\Omega)$$

ce qui montre que :

$$\mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2 = -\Delta u_1 \in L^2(\Omega).$$

et :

$$(u_1, u_2) \in \{(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, \mathcal{A}u_1 + \mathcal{B}u_2 \in L^2(\Omega)\}$$

■

Proposition 2.8 $D(C)$ est dense dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.

Preuve. On introduit les ensembles D_0 et D définis par :

$$D_0 = \{(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, u_1 \in H^2(\Omega), \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1\}$$

et :

$$D = \{(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega) ; u_1 \in H^2(\Omega), \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 = 0, \quad \text{sur } \Gamma_1\}$$

On a $D \subset D_0$. En effet Si $(u_1, u_2) \in D$ alors $(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times H_0^1(\Omega) \subset \mathcal{V} \times \mathcal{V}$, $u_1 \in H^2(\Omega)$ et $\partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + b0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1$.

D'où :

$$u = (u_1, u_2) \in D_0$$

On montre maintenant que D est dense dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.

Soit $(v_1, v_2) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ tel que :

$$((v_1, v_2), (w_1, w_2))_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in D$$

Ou encore :

$$(v_1, w_1)_{\mathcal{V}} + (v_2, w_2)_{L^2(\Omega)} = 0, \quad \forall (w_1, w_2) \in D$$

Si on prend $w_1 = 0$, $w_2 \in H_0^1(\Omega)$, alors $(0, w_2) \in D$, on obtient :

$$(v_2, w_2)_{L^2(\Omega)} = 0 \quad \forall w_2 \in H_0^1(\Omega)$$

Ce qui donne $v_2 = 0$ (par densité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$), il reste $(v_1, w_1)_{\mathcal{V}} = 0$ pour tout élément w_1 de $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ qui vérifie :

$$\partial_\nu w_1 - \Delta_T w_1 + aw_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \quad (2.20)$$

$(v_1, w_1)_{\mathcal{V}} = 0$ s'écrit :

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla w_1 dx + \int_{\Gamma} (\nabla_T v_1 \nabla_T w_1 + av_1 w_1) d\Gamma = 0$$

En intégrant par parties dans Ω et sur Γ_1 ; on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla v_1 \nabla w_1 dx = - \int_{\Omega} v_1 \Delta w_1 dx + \int_{\Gamma_1} (v_1 \partial_\nu w_1) d\Gamma$$

et :

$$\int_{\Gamma} \nabla_T v_1 \nabla_T w_1 d\Gamma = - \langle \Delta_T w_1, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

Alors :

$$- \int_{\Omega} v_1 \Delta w_1 dx + \langle \partial_\nu w_1 - \Delta_T w_1 + av_1 w_1, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \quad \forall w_1 \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$$

D'après (2.20) on obtient :

$$\int_{\Omega} v_1 \Delta w_1 dx = 0$$

pour tout élément w_1 de $H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$ qui vérifie (2.20) .

Montrer que $v_1 = 0$, revient a montrer que l'application :

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ (w_1, w_2) &\longmapsto \Delta w_1 \end{aligned}$$

est surjective ; pour cela on prend $f \in L^2(\Omega)$ et on résout le problème :

$$\begin{cases} -\Delta w_1 &= f & \text{dans } \Omega \\ w_1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_{\nu} w_1 - \Delta_T w_1 + a w_1 &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (2.21)$$

Dont la formulation variationnelle est :

$$\int_{\Omega} \nabla w_1 \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T w_1 \nabla_T w + a w_1 w) d\Gamma = (f, w) \quad \forall w \in \mathcal{V} \quad (2.22)$$

D'après le lemme 1.7 de Lax Milgram, ce problème admet une solution unique $w_1 \in \mathcal{V}$.

En effet : On pose :

- $a(w_1, w) = \int_{\Omega} \nabla w_1 \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} (\nabla_T w_1 \nabla_T w + a w_1 w) d\Gamma$
- $L(v) = \int_{\Omega} f w dx$

Comme :

- $a(.,.)$ est bilinéaire.
- $a(.,.)$ est continue sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Soient $w_1, w \in \mathcal{V}$.

$$\begin{aligned} |a(w_1, w)| &\leq \|\nabla w_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)} + \|\nabla_T w_1\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla_T w\|_{L^2(\Omega)} + \\ &\quad a \|w_1\|_{L^2(\Omega)} \|w\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq c \|w_1\|_{\mathcal{V}} \|w\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

- $a(.,.)$ est coercive sur $\mathcal{V} \times \mathcal{V}$.

Soit $w \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} a(w, w) &= \|\nabla w\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T w\|_{L^2(\Omega)}^2 + a \|w\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ &= \|w\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned}$$

D'où la coercivité.

- $L(.)$ est linéaire sur $\mathcal{V}$.

• $L(\cdot)$ est continue sur $\mathcal{V}$. Soit $w \in \mathcal{V}$.

De plus d'après la proposition 2.5 , $w_1 \in H^2(\Omega)$. En effet :

Comme : $w_1 \in \mathcal{V}$, $\Delta w_1 = -f \in L^2(\Omega)$ et $\partial_\nu w_1 - \Delta_T w_1 = -aw \in L^2(\Omega)$.

On obtient :

$$w_1 \in Z$$

Alors d'après la proposition 2.6 :

$$w_1 \in H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}$$

Donc :

$$w = (w_1, w_2) \in D, \forall w_2 \in H_0^1(\Omega)$$

Ce qui prouve la surjectivité de l'application :

$$\begin{aligned} D &\longrightarrow L^2(\Omega) \\ w &\longmapsto \Delta w_1 \end{aligned}$$

D'où :

$$v_1 = 0$$

et D est dense dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$.

Enfin on montre maintenant que $D_0 \subset D(C)$.

Soit $U = (u_1, u_2) \in D_0$; on a :

$$(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}.$$

et :

$$\Delta u_1 \in L^2(\Omega)$$

puisque $u_1 \in H^2(\Omega)$.

• $\partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0$ sur Γ_1 .

Ce qui montre d'après la proposition 2.6 que :

$$(u_1, u_2) \in D(C)$$

Donc :

$$D_0 \subset D(C)$$

et $D(C)$ est dense dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$; ce qui termine la démonstration. ■

Proposition 2.9 *Le domaine $D(C)$ est donné par :*

$$D(C) = \{U = (u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}, u_1 \in H^2(\Omega), \partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 + au_1 + bu_2 = 0, \text{ sur } \Gamma_1\}$$

et la norme $||| \cdot |||_{D(C)}$ définie sur $D(C)$ par :

$$|||(u_1, u_2)|||_{D(C)} = \left(\|u_1\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

est équivalente à la norme $\|\cdot\|_{D(C)}$ définie par :

$$\|(u_1, u_2)\|_{D(C)} = \left(\|u_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Preuve. Cela revient à montrer que $D(C)$ est égal à l'espace D_0 défini dans la preuve de la proposition 2.8 . On sait que $D_0 \subset D(C)$; il reste à montrer que $D(C) \subset D_0$.

Soit $U = (u_1, u_2) \in D(C)$. Alors $(u_1, u_2) \in \mathcal{V} \times \mathcal{V}$ et $\Delta u_1 \in L^2(\Gamma_1)$. D'où :

$$u_{1\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)$$

et :

$$u_{2\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)$$

Donc :

$$u_{1\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$$

et :

$$u_{2\Gamma_1} \in L^2(\Gamma_1)$$

Comme :

$$\partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 = -au_1 - bu_2 \text{ sur } \Gamma_1.$$

Alors :

$$\partial_\nu u_1 - \Delta_T u_1 \in L^2(\Gamma_1)$$

Ce qui montre d'après la proposition 2.5 :

$$u_1 \in H^2(\Omega)$$

et :

$$\|u_1\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left(\|u_1 - \Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|au_1 + bu_2\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \quad (2.23)$$

Ce qui permet d'avoir l'équivalence des normes. En effet :

Soit $(u_1, u_2) \in D(C)$, il est clair que :

$$\left(\|u_1\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \geq c \left(\|u_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

De plus, d'après (2.23) , on a :

$$\begin{aligned}\|u_1\|_{H^2(\Omega)} &\leq c \left(\|u_1 - \Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} + \|au_1 + bu_2\|_{L^2(\Gamma_1)} \right) \\ &\leq c \left(\|u_1\|_{\mathcal{V}} + \|u_2\|_{\mathcal{V}} + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)} \right)\end{aligned}$$

Alors :

$$\left(\|u_1\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c \left(\|u_1\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u_2\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u_1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

D'après les propositions 2.2 , 2.8 , 2.9 , on déduit le théorème suivant (cf.[2], [5], [13]). ■

Théorème 2.1 *i) Pour $(u^0, u^1) \in \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$; le problème (P_S) admet une unique solution u vérifiant :*

$$u \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega))$$

et si u est la solution du problème (P_S) la fonction définie par

$$t \longrightarrow E(u, t)$$

est décroissante ; et vérifie

$$\|E(u, \cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^+)} \leq E(u, 0)$$

ii) Si $(u^0, u^1) \in D(C)$, la solution u du problème (P_S) vérifie :

$$(u, u', u'') \in L^\infty(\mathbb{R}^+, H^2(\Omega) \times \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$$

de plus la fonction :

$$t \longrightarrow \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

est définie p.p et est décroissante sur $\mathbb{R}^+$.

Preuve. *i)* soit (u^0, u^1) un élément de $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$. La théorie des semi groupes assure l'existence et l'unicité de la solution :

$$\begin{aligned}U(t) &= (u(t), u'(t)) \\ &= T(t)U(0)\end{aligned}$$

du problème :

$$\begin{cases} U &= (u, u') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega)) \cap C(\mathbb{R}^+; D(C)) \\ U'(t) &= -CU(t) \quad t \succ 0 \\ U(0) &= (u^0, u^1) \end{cases}$$

où $T(t)$ est le C_0 semi groupe de contraction engendré par l'opérateur $-C$.

Dire que $(u, u') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$ revient à dire que :

$$u \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}) \quad \text{et} \quad u' \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

D'où :

$$u \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}) \cap C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

et :

$$\|U(t)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \leq \|U(0)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)}$$

avec

$$\begin{aligned} \|U(t)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} &= \|(u(t), u'(t))\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \\ &= \left[\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} E(u, t) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \|U'(0)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} &= \|(u(0), u'(0))\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \\ &= \left[\|u(0)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\|u^0\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u^1\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{2} E(u, 0) \end{aligned}$$

Alors

$$E(u, t) \leq E(u, 0) \quad \forall t \succ 0$$

est décroissante et on particulier :

$$\|E(u, \cdot)\|_{L^\infty(\Omega)} \leq E(u, 0)$$

ii) Si $(u^0, u^1) \in D(C)$; le théorème 1.19 , de Hill Yosida assure l'existence et l'unicité de la solution $U(t) = (u(t), u'(t))$ du problème :

$$\begin{cases} U &= (u, u') & \in C^1(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times \mathcal{H}) \cap C^0(\mathbb{R}^+; D(C)) \\ U'(t) &= -CU(t) & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ U(0) &= (u^0, u^1) \end{cases}$$

Donc

$$(u, u', u'') \in L^\infty(\mathbb{R}^+; H^2(\Omega) \times \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$$

et comme :

$$\begin{aligned}\|U'(t)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} &= \|(u'(t), u''(t))\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \\ &= \left[\|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

et :

$$\|U'(0)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} = \|(u'(0), u''(0))\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)}$$

on a :

$$CU(t) = T(t)CU(0)$$

d'où :

$$\|CU(t)\|_{\mathcal{V} \times L^2(\Omega)} \leq \|CU(0)\|$$

or :

$$CU(t) = \begin{pmatrix} -u'(t) \\ \mathcal{A}u(t) + \mathcal{B}u'(t) \end{pmatrix}$$

comme :

$$\mathcal{A}u(t) + \mathcal{B}u'(t) = -\Delta u(t)$$

puisque :

$$(u(t), u'(t)) \in D(C)$$

(voir la démonstration de la proposition (2.7)).

on obtient :

$$\|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u'(0)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

Ce qui montre la décroissance de la fonction :

$$t \longrightarrow \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \quad \forall t \geq 0$$

pour terminer la preuve, on doit faire appel aux lemmes suivants. ■

Lemme 2.2 *L'ensemble $\{(u(t), u'(t)), t \in \mathbb{R}^+\}$ est borné dans $(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{V}$, où $u(\cdot)$ est la solution du problème (P_S) avec $(u^0, u^1) \in D(C)$.*

Preuve. D'après la proposition 2.9 , l'équivalence entre les deux normes $\|\cdot\|_{D(C)}$ et $\|\cdot\|_{D(C)}$ donne :

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c \left[\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

D'où :

$$\begin{aligned} \|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 &\leq c \left[\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \\ &\leq c \left(\left[\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] + \left[\|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right] \right) \end{aligned}$$

De plus la décroissance de l'énergie

$$\|u(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \|u'(0)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(0)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

et la décroissance de la fonction

$$t \longrightarrow \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

montrent :

$$\|u(t)\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|u'(t)\|_{\mathcal{V}}^2 \leq c \left[\|u'(0)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|u'(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u'(0)\|_{\mathcal{V}}^2 + \|\Delta u(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right]$$

Alors :

$$\|u(t), u'(t)\|_{(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{V}} \leq c', \quad \forall t \geq 0.$$

la constante c' dépend de (u^0, u^1) mais ne dépend pas du temps. ■

Lemme 2.3 *L'injection $(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{V} \hookrightarrow \mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ est compacte.*

Preuve. Soit $(v_n)_n = (v_n^1, v_n^2)_n$ une suite bornée dans $(H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{V}$, en particulier v_n^1 est bornée dans $H^2(\Omega)$; comme l'injection $H^2(\Omega) \hookrightarrow H^1(\Omega)$ est compacte on peut alors extraire une sous suite $\{v_{np}^1\}_{p \in \mathbb{N}}$ de $\{v_n^1\}_n$ tel que $\{v_{np}^1\}_{p \in \mathbb{N}}$ converge dans $H^1(\Omega)$.

Comme l'injection :

$$H^2(\Omega) \hookrightarrow H^{2-s}(\Omega), \quad \left(0 \prec s \prec \frac{1}{2} \right)$$

est compact, on peut extraire une suite $\{v'_{np}\}_p$ de $\{v_n^1\}$ qui converge dans $H^{2-s}(\Omega)$, donc dans $H^1(\Omega)$.

D'où $\{v_{np, \Gamma_1}\}$ converge dans $H^{\frac{3}{2}-s}(\Gamma_1)$ donc dans $H^1(\Gamma_1)$ puisque $s \prec \frac{1}{2}$, d'où $\{v_{np}\}$ converge dans $\mathcal{V}$.

On termine en remarquant que l'injection :

$$\mathcal{V} \hookrightarrow L^2(\Omega)$$

est compacte ■

2.3 Démonstration du premier théorème principal

On montre par un calcul classique, que l'énergie est décroissante et on :

$$E(S) - E(T) = \int_0^T \int_{\Gamma_1} b(u')^2 d\Gamma dt ; \quad 0 \leq S < T < +\infty$$

En effet : on multiplie $y'' - \Delta y = 0$ par y' et on intègre formellement par partie dans $\Omega \times (S, T)$. D'après la formule de Green on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (y')^2 dx \Big|_S^T - \int_S^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y y' d\Gamma dt + \int_S^T \int_{\Omega} \nabla y \nabla y' dx dt = 0 \quad (2.24)$$

De plus comme :

$$\partial_{\nu} y = \Delta_T y - ay - by' \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

et :

$$y' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \quad (\text{car } y = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0).$$

Alors :

$$\frac{1}{2} \left(\int_{\Omega} ((y')^2 + (\nabla y)^2) dx \Big|_S^T + \int_{\Gamma_1} ((\nabla_T y)^2 + a(y)^2) d\Gamma \Big|_S^T \right) + \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(y')^2 d\Gamma dt = 0$$

D'après la définition de l'énergie, on a :

$$E(T) - E(S) = - \int_S^T \int_{\Gamma_1} b(y')^2 d\Gamma dt \leq 0$$

car $b \succ 0$.

On peut prendre dans la suite $(u^0, u^1) \in D(C)$ puisque $D(C)$ est dense dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ et l'énergie est continue par rapport aux données initiales.

Pour montrer que l'énergie décroît vers zéro, d'après le Principe de La Salle, il suffit de montrer que pour toute suite (t_k) tendant vers $+\infty$ telle que $\{u(t_k), u'(t_k)\}$ converge dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ vers (z^0, z^1) , alors $(z^0, z^1) = 0$. En effet :

D'après la définition 1.9, la définition 1.12 et la remarque 1.4, l'énergie est une fonction de Liapunov, puisque :

$$E(u(t)) \leq E(u(0)) ; \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

et d'après la proposition 2.9 l'ensemble $\{(u(t_k), u'(t_k)) , t \in \mathbb{R}^+\}$ est précompact dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$; on peut alors appliquer le théorème 1.18 (Principe d'invariance de la Salle) qui assure l'existence de la limite c de l'énergie et on a :

$$c = E(z^0).$$

Il reste à montrer que cette limite est nulle. En effet :

Soit (t_k) une suite de nombres réels croissante vers $+\infty$ et telle que :

$$U(t_k) = \left(u(t_k) , u'(t_k) \right)$$

converge dans $\mathcal{V} \times L^2(\Omega)$ vers un élément (z^0, z^1) .

On pose $z_k(t) = u(t_k + t)$, où z_k est la solution du problème (P_S) avec la donnée de Cauchy $(u(t_k), u'(t_k))$; on a d'après i) du théorème 2.1 La suite (z_k, z'_k) est précompact dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$. Soit alors une sous suite notée encore (z_k, z'_k) qui converge dans $L^\infty(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$ vers un élément (z, z') où z est la solution du problème (P_S) avec la donnée de Cauchy (z^0, z^1) . On montre que $z = 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$.

$E(z, t)$ est constante : en effet :

$$\begin{aligned} E(z, t) &= \lim_{k \rightarrow +\infty} E(z_k, t) \\ &= \lim_{k \rightarrow +\infty} E(u, t_k + t) \\ &= \lim_{s \rightarrow +\infty} E(u, s) \end{aligned}$$

La dernière limite existe d'après le principe de la Salle ; on a alors :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} b(z'(t))^2 d\Gamma dt = 0 ; 0 \leq S < T < +\infty$$

qui donne :

$$z' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+$$

puisque $b \succ 0$.

On pose $w = z'$; comme $w = 0$ sur Γ_1 , alors w est solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} w'' - \Delta w & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ w & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu w & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ w & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \end{array} \right. \quad (2.25)$$

D'après le théorème de Homgren, (cf.[12], p.129,Th.5.3.3) w est nulle dans $\Omega \times \mathbb{R}^+$. z est alors une constante du temps. Donc $z(t, x) = z(x)$ avec z^0 solution du problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta z^0 & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z^0 & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu z^0 - \Delta_T z^0 + a z^0 & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right. \quad (2.26)$$

puisque :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z'' & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \\ z' & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \end{array} \right.$$

On multiplie la première équation de (2.26) par z^0 puis on intègre par partie sur Ω ; On obtient :

$$\int_{\Omega} |\nabla z^0|^2 dx + \int_{\Gamma_1} \left(|\nabla_T z^0|^2 + a |z^0|^2 \right) d\Gamma = 0$$

D'où :

$$z^0 = 0$$

Comme :

$$z^0(x) = z(x)$$

et :

$$z' = 0$$

Alors :

$$(z, z') = (0, 0)$$

et :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} E(u, t) = 0$$

Ce qui termine la preuve.

Chapitre 3

Stabilité exponentielle

3.1 Introduction

On s'intéresse dans ce chapitre à la méthode de stabilisation exponentielle, développée par V. Komornik (*cf.*[14]) ; c'est une autre approche pour la stabilisation, proche de la méthode d'unicité hilbertienne de J.L.lions (HUM). Cette approche est plus directe que le schéma classique ; en effet au lieu de montrer la chaîne : Observabilité $\implies$ contrôlabilité $\implies$ stabilisation

On montre uniquement : Observabilité $\implies$ stabilisation.

Nous avons organisé ce chapitre comme suit :

Dans la première section on montre que le problème (P_V) homogène ($u_1 = u_2 = 0$) est bien posé dans $\mathcal{H} \times \mathcal{V}$. Dans la deuxième section on donne un résultat de régularité des solutions faibles. Dans la troisième section on donne le théorème d'unicité. Dans la quatrième section on rappelle le résultat général de stabilisation développé dans [14] par K. Komornik puis on montre le théorème 0.2 qui assure à partir d'un feedback frontière un taux de décroissance arbitrairement grand de l'énergie pour l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel stationnaires.

La nouveauté principale est que le taux de décroissance est aussi grand que l'on veut. En outre on donnera une construction explicite du Feedback. Signalons que F.Bourquin J.S Briffaut et M.collet ont développé un traitement numérique des problèmes de stabilisation par la méthode de V. Komornik (*cf.*[4]).

3.2 Existence des solutions

On suppose dans ce paragraphe que les hypothèses

$$(H_1) : \Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$$

$(H_3) : mes(\overline{\Gamma_0}) \succ 0$

$(H_4) : \text{il existe } x_0 \in \mathbb{R}^3 \text{ tel que } \Gamma_0 = \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\} \text{ et } \Gamma_1 = \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0\}$

$(H_5) : \text{les rayons de courbures sont positifs, ce qui implique en particulier que :}$

$tr(\partial_m \nu) \geq 0$ sur Γ_1 .

sont vérifiées. On rappelle le problème (P_V) et les espaces définis en introduction :

$$(P_V) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y &= 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y &= u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu y - \Delta_T y &= u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) &= y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

$\mathcal{H} = L^2(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{H}}$ définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{H}} = \left(\int_{\Omega} |v|^2 dx \right)^{1/2}$$

et :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), v|_{\Gamma_0} = 0, v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$$

muni de la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{V}}$ définie par :

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\int_{\Omega} |\nabla v|^2 dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T v|^2 d\Gamma \right)^{1/2}.$$

On considère le problème homogène (P_H) associé au problème (P_V) :

$$(P_H) \quad \begin{cases} y'' - \Delta y &= 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+ \\ y &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+ \\ \partial_\nu y - \Delta_T y &= 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) &= y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

On définit sur $\mathcal{H}$ l'opérateur non borné $\mathcal{A} = -\Delta$ de domaine :

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \{v \in \mathcal{V}, \Delta v \in L^2(\Omega), \partial_\nu v = \Delta_T v \text{ sur } \Gamma_1\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} = (\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|v\|_{\mathcal{V}}^2)^{1/2}$$

Alors le problème (P_H) s'écrit :

$$\begin{cases} y'' + \mathcal{A}y &= 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y &= 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ y(0) &= y^0 & \text{dans } \Omega \\ y'(0) &= y^1 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.1)$$

La formulation variationnelle du problème (P_H) est :

$$(y, v)''_{\Omega} + \int_{\Omega} \nabla y \nabla v dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \nabla_T v d\Gamma = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}. \quad (3.2)$$

Proposition 3.1 *On a $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{V} \cap H^2(\Omega)$ et la norme $\|\cdot\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}$ est équivalente sur $D(\mathcal{A})$ à la norme induite par $H^2(\Omega)$.*

Preuve. On désigne par c une constante positive assez grande.

Soit $v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, d'après la proposition 2.3 $\partial_{\nu} v$ est définie comme élément de $H^{-1/2}(\Gamma_1)$ et comme $\partial_{\nu} v = \Delta_T v$ sur $\Gamma_1 \times \mathbb{R}^1$, il vient :

$$\Delta_T v \in H^{-1/2}(\Gamma_1)$$

D'où :

$$v|_{\Gamma_1} \in H^{3/2}(\Omega).$$

Comme $v \in \mathcal{V}$, on obtient :

$$v \in \mathcal{V} \cap H^2(\Omega)$$

Enfin, pour montrer l'équivalence entre les deux normes, il suffit seulement de montrer l'existence d'une constante $c \succ 0$ telle que :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left[\|v\|_{\mathcal{V}} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \right] \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Pour cela, on va supposer que cette inégalité n'est pas vraie ; d'où il existe une suite $\{v^k\} \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ telle que :

$$\begin{cases} \|v^k\|_{H^2(\Omega)} = 1 & v^k \rightarrow 0 & \text{dans } \mathcal{V}. \\ \Delta v^k \rightarrow 0 & & \text{dans } L^2(\Omega). \end{cases}$$

D'après la proposition 2.3 et le fait que $v^k \in H^1(\Delta, \Omega)$ (car $v^k \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$) ; il vient :

$$\partial_{\nu} v^k \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma_1).$$

D'où :

$$\Delta_T v^k \rightarrow 0 \text{ dans } H^{-1/2}(\Gamma_1).$$

car $\Delta_T v^k = \partial_\nu v^k$ sur Γ_1 .

Ce qui montre que :

$$v_{\Gamma_1}^k \rightarrow 0 \text{ sur } H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$$

mais :

$$v^k - \Delta v^k \rightarrow 0 \text{ dans } L^2(\Omega)$$

et :

$$\|v^k\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left(\|v^k - \Delta v^k\|_{L^2(\Omega)} + \|v_{\Gamma_1}^k\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} \right)$$

Alors :

$$v^k \rightarrow 0 \text{ dans } H^2(\Omega)$$

Ce qui contredit l'égalité $\|v^k\|_{H^2(\Omega)} = 1$.

■

La proposition suivante assure l'existence et l'unicité de la solution (cf.[13], [19]).

Proposition 3.2 *i) Si $(y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{H}$ le problème $(P_{\mathcal{H}})$ admet une solution faible unique*

$$y \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{H})$$

et pour tout $T > 0$, on a :

$$\|y\|_{L^\infty(0,T; \mathcal{V})}^2 + \|y'\|_{L^\infty(0,T; \mathcal{H})}^2 \leq C_T (\|y^0\|_{\mathcal{V}}^2 + \|y^1\|_{\mathcal{H}}^2)$$

ii) Si $(y^0, y^1) \in D(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}$ alors la solution y du problème est dans

$$y \in C^0(\mathbb{R}^+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{V})$$

et pour tout $T > 0$ il existe une constante positive C_T^1 telle que

$$\|y\|_{L^\infty(0,T; \mathcal{D}(\mathcal{A}))}^2 + \|y'\|_{L^\infty(0,T; \mathcal{V})}^2 \leq C_T^1 (\|y^0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^2 + \|y^1\|_{\mathcal{V}}^2)$$

L'énergie $E(y, t)$ associée à la solution y du problème $(P_{\mathcal{H}})$ définie par :

$$E(y, t) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (|\nabla y|^2 + |y'|^2) dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma$$

est une constante qui sera notée E_0 .

Preuve. Si $(y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{H}$, la théorie des semi groupe assure l'existence et l'unicité de la solution faible :

$$Y = (y, y') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$$

du problème :

$$\begin{cases} y'(t) = -Ay(t) & t \succ 0 \\ y(0) = (y^0, y^1) \end{cases}$$

Dire que $(y, y') \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V} \times L^2(\Omega))$ revient à dire que :

$$y \in C(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}) \quad \text{et} \quad y' \in C(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

D'où :

$$y \in C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{V}) \cap C^1(\mathbb{R}^+; L^2(\Omega)).$$

et le fait que la solution y est donnée par $Y(t) = T(t)Y(0)$, où $T(t)$ est le C_0 semi groupe de contractante engendré par $(-A)$, il vient :

$$\|T(t)\| \leq 1$$

Donc :

$$\|Y(t)\|_H \leq \|Y(0)\|_H \quad \forall t \geq 0$$

Alors pour tout $T > 0$, on a :

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})}^2 + \|y'\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{H})}^2 \leq \|y^0\|_{\mathcal{V}}^2 + \|y^1\|_{\mathcal{H}}^2$$

La démonstration de *ii)* de la proposition fait appel au théorème 1.19 de Hill-Yosida.

Commençant d'abord par écrire l'équation $y'' - \Delta y = 0$ sous forme d'un système de deux équations du 1^{er} ordre :

$$\begin{cases} y' - z = 0 & \text{dans } \Omega \\ z' - \Delta y = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (3.3)$$

On pose :

$$Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$$

Le système (3.3) s'écrit :

$$Y' + AY = 0$$

avec :

$$AY = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} Y = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -z \\ -\Delta y \end{pmatrix} \quad (3.4)$$

On considère l'opérateur non borné :

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H$$

défini par :

$$(3.4) \text{ avec } \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V} \subset \mathcal{V} \cap H^2(\Omega) \times \mathcal{V}$$

$$H = \mathcal{V} \times \mathcal{H}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \left\{ v \in \mathcal{V}, \quad \Delta v \in L^2(\Omega), \quad \partial_\nu v = \Delta_T v. \quad \text{sur } \Gamma_1 \right\}$$

et :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega), \quad v|_{\Gamma_0} = 0, \quad v|_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$$

Vérifions que A est maximal monotone dans H .

• A est monotone.

En effet : si on prend $Y = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{D}(A)$, on obtient :

$$\begin{aligned} (AY, Y)_H &= (A(y, z), (y, z))_{\mathcal{V} \times \mathcal{H}} = ((-z, -\Delta y), (y, z))_{\mathcal{V} \times \mathcal{H}} = (-z, y)_{\mathcal{V}} + (-\Delta y, z)_{\mathcal{H}} \\ &= \int_{\Omega} -\nabla z \cdot \nabla y \, dx + \int_{\Gamma_1} -\nabla_T z \cdot \nabla y \, d\Gamma + \int_{\Omega} -\Delta y \, z \, dx \end{aligned}$$

D'après la formule de Green et le fait que $\partial_\nu y = \Delta_T y$ sur Γ_1 , il vient :

$$(AY, Y)_H = \int_{\Omega} -\nabla z \cdot \nabla y - \int_{\Gamma_1} \nabla_T z \cdot \nabla_T y \, d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \cdot \nabla_T z \, d\Gamma$$

D'où :

$$(AY, Y)_H = 0$$

Ce qui montre que A est monotone.

• A est maximal monotone, il suffit de prouver que :

$$A + I : D(A) \longrightarrow H$$

est surjectif.

Soit $F = (f, g) \in H$, montrer que $A + I$ est surjectif revient à résoudre l'équation :

$$AY + Y = F$$

c'est-à-dire le système :

$$\begin{aligned} -z + y &= f & \text{dans } \Omega \\ -\Delta y + z &= g & \text{dans } \Omega \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $z \in \mathcal{V}$. On déduit de (3.5) que :

$$-\Delta y + y = f + g \quad (3.6)$$

multipliant par la suite (3.6) par $z \in \mathcal{V}$, puis en intégrant formellement par partie sur Ω ; on obtient :

$$-\int_{\Omega} (\Delta y \cdot z + yz) dx = \int_{\Omega} (f + g)z \, dx$$

De la formule de Green et de l'égalité :

$$\Delta_T v^k = \partial_{\nu} v^k \quad \text{sur } \Gamma_1$$

il vient :

$$\int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \cdot \nabla_T z \, dx + \int_{\Omega} yz \, dx = \int_{\Omega} (f + g)z \, dx \quad \forall z \in \mathcal{V}$$

on pose :

$$a(y, z) = \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla z \, dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \cdot \nabla_T z \, dx + \int_{\Omega} yz \, dx$$

et :

$$L(z) = \int_{\Omega} (f + g)z \, dx.$$

La bilinéarité, continuité, coercivité de $a(., .)$ et la continuité de $L(.)$

(resp linéarité de $L(.)$) montrent d'après le théorème 1.7 de Lax Milgram l'existence et l'unicité de la solution $y \in \mathcal{V}$.

De plus, d'après la deuxième équation de (3.5) , on a :

$$\Delta y \in L^2(\Omega)$$

Comme :

$$\partial_{\nu} y = \Delta_T y \quad \text{sur } \Gamma_1$$

ce qui montre que :

$$y \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$$

Donc :

$$(y, z) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V} = \mathcal{D}(A)$$

Alors l'opérateur A est maximal monotone.

Le théorème 1.19 de Hill Yosida assure pour tout $(y^0, y^1) \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}$ l'existence et l'unicité de la solution $Y = (y, z) \in C^1(\mathbb{R}^+, \mathcal{V}) \cap C^0(\mathbb{R}^+; \mathcal{D}(\mathcal{A}))$ telle que :

$$\begin{cases} Y'(t) + AY(t) &= 0 & \text{sur } \mathbb{R}^+ \\ Y(0) &= (y^0, y^1) \end{cases}$$

avec $z = y'$.

De plus on a :

$$\|y(t)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \leq \|y(0)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} \quad \forall t \geq 0$$

ce qui donne :

$$\|y(t)\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y'(t)\|_{\mathcal{V}} \leq \|y^0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})} + \|y^1\|_{\mathcal{V}} \quad \forall t \geq 0$$

pour tout $T > 0$ on a :

$$\|y\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{D}(\mathcal{A}))}^2 + \|y'\|_{L^\infty(0,T;\mathcal{V})}^2 \leq (\|y^0\|_{\mathcal{D}(\mathcal{A})}^2 + \|y^1\|_{\mathcal{V}}^2)$$

Par la suite, on prend $(y^0, y^1) \in D(A)$, on multiplie l'équation $y'' - \Delta y = 0$ par y' et on intègre formellement par partie dans $\Omega \times (S, T)$. On obtient :

$$0 = \int_S^T \int_\Omega (y'' y' - \Delta y y') dx dt$$

ce qui donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_\Omega (y')^2 dx - \int_S^T \int_\Gamma \partial_\nu y y' d\Gamma dt + \int_S^T \int_\Omega \nabla y \nabla y' dx dt = 0. \quad (3.7)$$

cela d'après la formule de Green.

De plus comme :

$$y = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0,$$

c'est-à-dire :

$$y' = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

et :

$$\partial_\nu y = \Delta_T y \quad \text{sur } \Gamma_1.$$

(3.7) , s'écrit :

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_\Omega \left((y')^2 + |\nabla_T y|^2 \right) dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma \right] = 0.$$

On pose:

$$E(t, y) = \frac{1}{2} \left[\int_\Omega \left((y')^2 + (\nabla y)^2 \right) dx + \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma \right]$$

qui représente la définition de l'énergie.

Ce qui montre que $E(\cdot)$ est une constante par rapport au temps t .

Par un argument de densité, on montre que $E(\cdot)$ est une constante par rapport au temps t pour $(y^0, y^1) \in H = \mathcal{V} \times \mathcal{H}$. ■

3.3 Une identité

Lemme 3.1 *La dérivée du tenseur métrique dual $g^{\alpha\beta}$ est donnée par :*

$$g_{,\alpha}^{\lambda\beta} = \frac{\partial g^{\lambda\beta}}{\partial \xi^\alpha} = -(\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g^{\beta\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g^{\mu\lambda})$$

où $\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda$ désigne le symbole de Cristoffel.

Preuve. La dérivée de :

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta_\gamma^\alpha$$

est donnée par :

$$g_{,\mu}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = -g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma,\mu}$$

où $g^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique dual et δ_γ^α est le symbole de Kronecker.

D'après 1.1 , il vient :

$$g_{,\mu}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = -g^{\alpha\beta} [g_{\lambda\gamma} \Gamma_{\mu\beta}^\lambda + g_{\beta\lambda} \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda]$$

D'où :

$$\begin{aligned} g_{,\mu}^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} g^{\gamma\beta} &= -g^{\alpha\beta} g_{\lambda\gamma} \Gamma_{\mu\beta}^\lambda g^{\gamma\beta} - g^{\alpha\beta} g_{\beta\lambda} \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda g^{\gamma\beta} \\ &= -g^{\alpha\beta} \delta_\lambda^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\lambda - \delta_\lambda^\alpha \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda g^{\gamma\beta} \end{aligned}$$

Si $\beta = \lambda$, on a :

$$\begin{aligned} g^{\alpha\beta} \delta_\lambda^\beta \Gamma_{\mu\beta}^\lambda &= g^{\alpha\lambda} \Gamma_{\mu\lambda}^\beta \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^\beta g^{\lambda\alpha} \end{aligned}$$

Et si $\alpha = \lambda$ on a :

$$\begin{aligned} \delta_\lambda^\alpha \Gamma_{\mu\gamma}^\lambda g^{\gamma\beta} &= \Gamma_{\mu\gamma}^\alpha g^{\gamma\beta} \\ &= \Gamma_{\mu\lambda}^\alpha g^{\beta\lambda} \end{aligned}$$

De (1.19) , on obtient :

$$g_{,\mu}^{\alpha\beta} = - \left[\Gamma_{\lambda\mu}^\alpha g^{\beta\lambda} + \Gamma_{\lambda\mu}^\beta g^{\lambda\alpha} \right].$$

■

Lemme 3.2 *étant donné f un champ scalaire de classe C^2 défini sur Γ , on a :*

$$\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}) = \pi \overline{\partial_m (\partial_m f)}$$

où π désigne la projection sur le plan tangent et la barre désigne le transposé d'un vecteur.

Preuve. On a :

$$\partial_m f = f_{,\alpha} a^\alpha$$

D'où :

$$\overline{\partial_m f} = g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} a_\beta$$

Donc :

$$\begin{aligned} \partial_m (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} a_\beta) &= (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} a_\beta)_{,\alpha} a^\alpha \\ &= g^{\lambda\beta}_{,\alpha} f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} a_{\beta,\alpha} a^\alpha \end{aligned}$$

Alors :

$$\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}) = g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} \pi a_{\beta,\alpha} a^\alpha$$

D'après le lemme 3.1 et le fait que $\pi a_{\beta,\alpha} = \Gamma_{\alpha\beta}^\mu a_\mu$; il vient :

$$\begin{aligned} \pi(\partial_m(\overline{\partial_m f})) &= -(\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g^{\beta\mu} + \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g^{\mu\lambda}) f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu a_\mu \\ &= -\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g^{\beta\mu} f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g^{\mu\lambda} f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda} \Gamma_{\alpha\beta}^\mu a_\mu a^\alpha \\ &= -\Gamma_{\mu\alpha}^\lambda g^{\beta\mu} f_{,\lambda} a_\beta - \Gamma_{\mu\alpha}^\beta g^{\mu\lambda} f_{,\lambda} a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\mu} f_{,\lambda} \Gamma_{\alpha\mu}^\beta a_\beta a^\alpha + g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} a_\beta a^\alpha \\ &= (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g^{\mu\beta} f_{,\lambda}) a_\beta a^\alpha \end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned} \overline{\pi \partial_m (\overline{\partial_m f})} &= (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g^{\mu\beta} f_{,\lambda}) \overline{a_\beta a^\alpha} \\ &= (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g^{\mu\beta} f_{,\lambda}) g_{\lambda\beta} a^\lambda g^{\alpha\mu} a_\mu \\ &= (g^{\lambda\beta} f_{,\lambda\alpha} g_{\lambda\beta} g^{\alpha\mu} - \Gamma_{\alpha\mu}^\lambda g^{\mu\beta} f_{,\lambda} g_{\lambda\beta} g^{\alpha\mu}) a_\mu a^\lambda \\ &= (g^{\alpha\mu} f_{,\lambda\alpha} - \Gamma_{\alpha,\mu}^\lambda g^{\alpha\mu} f_{,\lambda}) a_\mu a^\lambda \end{aligned}$$

ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 3.3 Si u_T et v_T sont deux champs vectoriels tangents de classe C^1 définis sur Γ on a :

$$\partial_m (\overline{u_T} v_T) = \overline{u_T} (\partial_m v_T) + \overline{v_T} \pi (\partial_m u_T)$$

Preuve. Par définition on a :

$$\begin{aligned} \partial_m (\overline{u_T} v_T) &= \partial_m (u_T \cdot v_T) \\ &= u_T \cdot \partial_m v_T + v_T \cdot \partial_m u_T \\ &= u_T \cdot \pi \partial_m v_T + v_T \cdot \pi \partial_m u_T \end{aligned}$$

car $u_T \in T_m(\Gamma)$ et $v_T \in T_m(\Gamma)$. Alors :

$$\partial_m (\overline{u_T} v_T) = \overline{u_T} (\partial_m v_T) + \overline{v_T} \pi (\partial_m u_T)$$

■

Lemme 3.4 Soient f un champ scalaire de classe C^2 et q_T un champ tangent de classe C^1 défini sur Γ ; alors

$$\overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) = \overline{\nabla_T f} (\pi \partial_m q_T) \nabla_T f + \frac{1}{2} \partial_m (|\nabla_T f|^2) q_T$$

où ∇_T est le gradient tangentiel.

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) &= (\partial_m f) (\overline{\partial_m ((\partial_m f) q_T)}) \\ &= \partial_m ((\partial_m f) q_T) \overline{\partial_m f} \end{aligned}$$

D'après le lemme 3.3 , il vient :

$$\begin{aligned} \partial_m ((\partial_m f) q_T) (\overline{\partial_m f}) &= (\partial_m f) (\pi \partial_m q_T) + \overline{q_T} (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f})) \\ &= (\partial_m f) (\pi \partial_m q_T) + (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f})) q_T \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) &= \partial_m ((\partial_m f) q_T) (\overline{\partial_m f}) + (\partial_m f) (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}) q_T) (\overline{\partial_m f}) \\ &= (\partial_m f) (\pi \partial_m q_T) + (\partial_m f) (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}) q_T) \end{aligned}$$

d'après le lemme 3.2 , on a :

$$(\pi \overline{\partial_m} (\overline{\partial_m f})) = (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}))$$

donc :

$$\overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) = (\partial_m f) (\pi \partial_m q_T) (\overline{\partial_m f}) + (\partial_m f) (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f}) q_T)$$

Enfin d'après le lemme 3.3 , on obtient :

$$\begin{aligned} \partial_m (|\nabla_T f|^2) &= \partial_m (\partial_m f \overline{\partial_m f}) \\ &= 2 (\partial_m f) (\pi \partial_m (\overline{\partial_m f})) \end{aligned}$$

$$\overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) =$$

Alors :

$$\begin{aligned} \overline{\nabla_T f} \nabla_T (\overline{\nabla_T f} q_T) &= \partial_m f (\pi \partial_m q_T) (\overline{\partial_m f}) + \frac{1}{2} \partial_m (|\nabla_T f|^2) q_T \\ &= \overline{\nabla_T f} (\pi \partial_m q_T) \nabla_T f + \frac{1}{2} \partial_m (|\nabla_T f|^2) q_T \end{aligned}$$

Ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 3.5 *Pour tout champ de vecteur scalaire η défini sur Γ et tout champ tangent v_T supposés réguliers on a :*

$$(\partial_m \eta)v_T = \text{tr}(v_T \partial_m \eta) \quad \text{et} \quad \text{div}_T v_T = \text{tr}(\pi \partial_m v_T)$$

Preuve. Si $v_T = v^\alpha a_\alpha = v^1 a_1 + v^2 a_2$, on a:

$$a^\alpha (v_T \partial_m \eta) a_\alpha = a^1 (v_T \partial_m \eta) a_1 + a^2 (v_T \partial_m \eta) a_2$$

On calcule d'abord $v_T \partial_m \eta$:

$$\begin{aligned} \partial_m \eta v_T &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^\beta} a^\beta \right) (v^\alpha a_\alpha) \quad \alpha = 1, 2 ; \beta = 1, 2 \\ &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} a^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} a^2 \right) (v^1 a_1 + v^2 a_2) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} v^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} v^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} a^\alpha (v_T \partial_m \eta) a_\alpha &= (v^1 a_1 + v^2 a_2) \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} a^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} a^2 \right) \\ &= v^1 \frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} + v^2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} \\ &= v^\alpha \partial_\alpha \eta \end{aligned}$$

mais :

$$\begin{aligned} \text{tr}(v_T \partial_m \eta) &= v^1 \frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} + v^2 \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} \\ &= v^\alpha \partial_\alpha \eta. \end{aligned}$$

ce qui montre que :

$$\begin{aligned} \text{tr}(v_T \partial_m \eta) &= a^\alpha (v_T \partial_m \eta) a_\alpha \\ &= v^\alpha \partial_\alpha \eta. \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned} (\partial_m \eta)v_T &= (\partial_\beta \eta) a^\beta (v^\alpha a_\alpha) \\ &= \left(\frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} a^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} a^2 \right) (v^1 a_1 + v^2 a_2) \\ &= \frac{\partial \eta}{\partial \xi^1} v^1 + \frac{\partial \eta}{\partial \xi^2} v^2 \\ &= (\partial_\alpha \eta) v^\alpha \end{aligned}$$

Alors :

$$tr(v_T \partial_m \eta) = (\partial_m \eta) v_T$$

ce qui montre la première relation. Soit $\psi \in \mathcal{D}(\Gamma)$ un champ scalaire ; d'après (1.28) on a :

$$\int_{\Gamma} \psi div_T v_T d\Gamma = - \int_{\Gamma} (\partial_m \psi) v_T d\Gamma$$

de la première relation, on a :

$$\int_{\Gamma} \psi div_T v_T d\Gamma = - \int_{\Gamma} tr(v_T \partial_m \psi) d\Gamma$$

comme :

$$\partial_m(\psi v_T) = v_T \partial_m \psi + \psi(\partial_m v_T)$$

ce qui donne par projection :

$$\pi \partial_m(\psi v_T) = v_T \partial_m \psi + \psi(\pi \partial_m v_T),$$

et puisque $v_t \in T_m(\Gamma)$ et Ψ est un champ scalaire ce qui permet d'écrire :

$$\int_{\Gamma} \psi div_T v_T d\Gamma = - \int_{\Gamma} tr(\pi \partial_m(\psi v_T)) d\Gamma + \int_{\Gamma} \psi div_T v_T d\Gamma \quad (3.8)$$

Si τ_T est un champ régulier d'endomorphisme du plan tangent à Γ et v_T un champ tangent régulier ; (1.29) donne :

$$\int_{\Gamma} div_T \tau_T v_T d\Gamma = - \int_{\Gamma} tr(\tau_T \pi \partial_m(v_T)) d\Gamma$$

en particulier si on prend $\tau_T = i_2$, où i_2 est l'identité du plan tangent, il vient :

$$\int_{\Gamma} div_T i_2 v_T d\Gamma = \int_{\Gamma} tr(\pi \partial_m(v_T)) d\Gamma$$

Donc (3.8) s'écrit :

$$\int_{\Gamma} \psi div_T v_T d\Gamma = \int_{\Gamma} \psi div_T i_2 v_T d\Gamma + \int_{\Gamma} \psi tr(\pi \partial_m(v_T)) d\Gamma$$

Pour montrer que $div_T v_T = tr(\pi \partial_m v_T)$ pour tout champ tangent v_T , il suffit de montrer que :

$$\int_{\Gamma} div_T i_2 v_T = 0$$

pour cela on calcule :

$$\int_{\Gamma} div_T i_2 w_T$$

pour tout $w_T \in \mathcal{D}(\Gamma, T(\Gamma))$ l'espace des champs tangents de classe C^∞ sur Γ . En effet :

$$\int_{\Gamma} \text{div}_T i_2 w_T = - \int_{\Gamma} \text{tr}(\pi.(\partial_m w_T)) d\Gamma = - \int_{\Gamma} \text{div}_T w_T d\Gamma$$

D'après le théorème 1.1 :

$$\int_{\Gamma} \text{div}_T w_T d\Gamma = 0$$

D'où $\text{div}_T i_2 = 0$.

ce qui termine la démonstration. ■

Lemme 3.6 Soit $x_0 \in R^3$, on pose $q = x - x_0 = q_T + q_\nu \nu$. On a :

$$\begin{cases} \pi \partial_m q_T + q_\nu \partial_m \nu &= \frac{i_2}{q_T \partial_m \nu} \\ \partial_m q_\nu &= 2 - q_\nu \text{tr}(\partial_m \nu) \end{cases} \quad (3.9)$$

où i_2 est l'identité du plan tangent.

Preuve. D'après (1.45) et le fait que $q_\Gamma = q_T + q_\nu \nu$; on a :

$$\begin{aligned} \partial_M q_\Gamma &= \pi. \partial_m q_T. \pi + q_\nu \partial_m \nu. \pi + \partial_\nu q_T. \bar{\nu} - \nu. \bar{q}_T. \partial_m \nu. \pi + \nu. \partial_m q_\nu. \pi \\ &\quad + \partial_\nu q_\nu \nu \bar{\nu} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \nabla q_\Gamma &= \overline{\partial_M q_\Gamma} = \pi. \overline{\partial_m q_T}. \pi + q_\nu \partial_m \nu. \pi + \nu. \overline{\partial_\nu q_T} - \nu. (\partial_m \nu) q_T. \bar{\nu} + \overline{\partial_m q_\nu}. \bar{\nu} \\ &\quad + \partial_\nu q_\nu \end{aligned}$$

soit $w = w_T + w_\nu$ un champ de vecteurs, défini sur Γ . On calcule $\bar{w} \nabla q_\Gamma w$ où $\bar{w}$ représente le transposé de w ; on obtient :

$$\begin{aligned} \bar{w} \nabla q_\Gamma w &= w_T (\pi \overline{\partial_m q_T} + q_\nu \partial_m \nu) w_T + w_T (\overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu) q_T) w_\nu + w_\nu \overline{\partial_\nu q_T} w_T + \\ &\quad w_\nu \overline{\partial_\nu q_\nu} w_T \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\nabla q_\Gamma = \begin{pmatrix} \pi \overline{\partial_m q_T} + q_\nu \partial_m \nu & \overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu) q_T \\ \overline{\partial_\nu q_T} & \partial_\nu q_\nu \end{pmatrix}$$

de plus, comme :

$$\begin{aligned} \nabla q &= i_3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où i_3 est l'identité de $\mathbb{R}^3$, on obtient :

$$\begin{cases} \pi \overline{\partial_m q_T} + q_\nu \partial_m \nu = i_2 \\ \overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu) q_T = 0 \end{cases}$$

Ce qui permet d'écrire par transposition :

$$\begin{cases} \overline{\pi \partial_m q_T + q_\nu \partial_m \nu} = i_2 \\ \overline{\partial_m q_\nu} - (\partial_m \nu) q_T = 0 \end{cases}$$

Comme l'opérateur de courbure est symétrique, on obtient :

$$\pi \partial_m q_T + q_\nu \partial_m \nu = i_2$$

et :

$$\partial_m q_\nu = \overline{q_T} \partial_m \nu$$

Pour la troisième relation, on utilise d'abord la première relation de (3.9) , qui montre que :

$$\pi \partial_m q_T = i_2 - q_\nu \partial_m \nu$$

Et d'après le lemme 3.5 , il vient :

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_t q_T &= \operatorname{tr}(\pi \partial_m q_T) \\ &= \operatorname{tr}(i_2) - \operatorname{tr}(q_\nu \partial_m \nu) \\ &= 2 - q_\nu \operatorname{tr}(\partial_m \nu) \end{aligned}$$

■

Proposition 3.3 *Etant donné q élément de $W^{1,\infty}(\overline{\Omega}, R^3)$, on pose :*

$$q_\Gamma = q_T + q_\nu \nu.$$

Alors pour tout $(y^0, y^1) \in D(A) \times \mathcal{V}$; la solution y du problème (P_H) vérifie la relation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt \\ & - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} q_\nu (\partial_\nu y)^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\ & + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu (|\nabla_T y|^2 - |\partial_\nu y|^2 - |y'|^2) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y (\pi \partial_m q_T) \nabla_T y d\Gamma dt \\ & = 0 \end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. On multiplie la première équation de (P_H) par $q.\nabla y$ puis on intègre sur $\Omega \times (0, T)$; la deuxième équation par $q_T.\nabla_T y$ puis on intègre sur $\Gamma_1 \times (0, T)$; la somme donne :

$$\int_0^T \int_{\Omega} y''(q.\nabla y) dx dt - \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(q.\nabla y) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_{\nu} y - \Delta_T y).(q_T.\nabla_T y) d\Gamma dt = 0 \quad (3.11)$$

Comme :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y''(q.\nabla y) dx dt &= \int_{\Omega} y'(q.\nabla y) dx \Big|_0^T - \int_0^T \int_{\Omega} y'(q.\nabla y)' dx dt \\ &= \int_{\Omega} y'(q.\nabla y) dx dt \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} q.\nabla (y')^2 dx dt \end{aligned} \quad (3.12)$$

De la formule :

$$\int_{\Omega} q.\nabla y dx = \int_{\Gamma} q.\nu y d\Gamma - \int_{\Omega} \operatorname{div} q y dx \quad (3.13)$$

(2.9) s'écrit :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} y''(q.\nabla y) dx dt &= \int_{\Omega} y'(q.\nabla y) dx \Big|_0^T - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q.\nu |y'|^2 d\Gamma dt + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q |y'|^2 dx dt. \end{aligned}$$

et d'après la formule de Green il vient :

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} \Delta y(q.\nabla y) dx dt &= \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y(q.\nabla y) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y.\nabla(q.\nabla y) dx dt \\ &= \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y(q.\nabla y) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y.\nabla q.\nabla y dx dt - \\ &\quad \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y.q.\nabla(\nabla y) dx dt \end{aligned}$$

Appliquons de nouveau (3.13) , on obtient :

$$\int_{\Omega} \nabla y.q.\nabla(\nabla y) dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} q.\nabla(\nabla y)^2 dx = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \operatorname{div} q.|\nabla y|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} q.\nu |\nabla y|^2 d\Gamma$$

d'où :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} \Delta y (q \cdot \nabla y) dx dt &= \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla y) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q \cdot |\nabla y|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q \cdot \nu |\nabla y|^2 d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{3.14}$$

alors :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} (y'' - \Delta y) (q \cdot \nabla y) dx dt &= \int_{\Omega} y' (q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q_{\nu} (|\nabla y|^2 - |y'|^2) d\Gamma dt \\
- \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_{\nu} y (q \cdot \nabla y) d\Gamma dt &= 0
\end{aligned} \tag{3.15}$$

D'après lemme 3.4 , il vient :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_1} \Delta_T y (q_T \cdot \nabla_T y) d\Gamma dt &= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \cdot \nabla_T (q_T \cdot \nabla_T y) d\Gamma dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y (\pi \partial_m q_T) \cdot \nabla_T y d\Gamma dt - \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_m (|\nabla_T y|^2) q_T d\Gamma dt \\
&= - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \pi \partial_m q_T \cdot \nabla_T y d\Gamma dt + \\
&\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt.
\end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\partial_\nu y - \Delta_T y)(q_T \cdot \nabla_T y) d\Gamma dt &= -\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \pi \partial_m q_T \nabla_T y d\Gamma dt \\
+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu y_1 (q_T \cdot \nabla_T y) d\Gamma dt &= 0
\end{aligned} \tag{3.16}$$

La somme de (3.15) et (3.16) donne :

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma} \partial_\nu y (q \cdot \nabla y) d\Gamma dt \\
&+ \int_0^T \int_{\Gamma_1} \partial_\nu y (q_T \cdot \nabla_T y) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q_\nu (|\nabla y|^2 - |y'|^2) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y \pi \partial_m q_T \nabla_T y d\Gamma dt \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Sur Γ_0 on a :

$$q \nabla y = q_\nu (\partial_\nu y)$$

D'où :

$$\int_{\Gamma_0} \left(\frac{1}{2} q_\nu |\nabla y|^2 - (\partial_\nu y)(q \nabla y) \right) d\Gamma = -\frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} q_\nu (\partial_\nu y)^2 d\Gamma$$

car $y = 0$ sur Γ_0 , donc $y' = 0$ sur Γ_0 .

Sur Γ_1 on a :

$$|\nabla y|^2 = |\nabla_T y|^2 + (\partial_\nu y)^2$$

et :

$$(\partial_\nu y)(q \cdot \nabla y) = (\partial_\nu y)(q_T \cdot \nabla_T y) + q_\nu (\partial_\nu y)^2 + q_\nu (\partial_\nu y)^2$$

d'où :

$$\int_{\Gamma_1} \left(\frac{1}{2} q_\nu |\nabla y|^2 - (\partial_\nu y)(q \nabla y) + (\partial_\nu y)(q_T \cdot \nabla_T y) \right) d\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 - (\partial_\nu y)^2 d\Gamma$$

alors :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_{\nu} |y'|^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_{\Gamma_0} q_{\nu} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma \\
& + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y (\pi \partial_m q_T) \cdot \nabla_T y d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} q_{\nu} (|\nabla_T y|^2 - (\partial_{\nu} y)^2) d\Gamma
\end{aligned}$$

Enfin :

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} q_{\nu} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt \\
& + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} \operatorname{div}_T q_T |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\
& + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_{\nu} (|\nabla_T y|^2 - (\partial_{\nu} y)^2 - |y'|^2) d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \nabla_T y (\pi \partial_m q_T) \cdot \nabla_T y d\Gamma dt \\
& = 0
\end{aligned}$$

■

3.4 Régularité des solutions faibles

Théorème 3.1 *Soit $(y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{H}$. Si y est la solution du problème (P_H) , alors $\partial_{\nu} y \in L^2_{loc}(R^+, L^2(\Gamma))$ et il existe une constante $c > 0$ indépendant de (y^0, y^1) et $T > 0$ telle que :*

$$\int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt \leq c(T+1)E_0 \tag{3.18}$$

Preuve. On commence par prendre $(y^0, y^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}$. On considère un champ $q \in W^{1,+\infty}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)$ tel que $q|_{\Gamma} = \nu$ (cf. [20]) La relation (3.10) s'écrit :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt \\ & + \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T y|^2 - (\partial_{\nu} y)^2 - |y'|^2) d\Gamma dt \\ & = 0 \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt &= \int_{\Omega} y'(q \cdot \nabla y) dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|\nabla_T y|^2 - |y'|^2) d\Gamma dt. \end{aligned}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt &\leq \int_{\Omega} (y')^2 dx + \int_{\Omega} (q \cdot \nabla y)^2 dx \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div} q (|y'|^2 - |\nabla y|^2) dx dt \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} \nabla y \cdot \nabla q \cdot \nabla y dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt. \\ &\leq c_1 E_0 + c_2 T E_0 \end{aligned}$$

Alors :

$$\frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt \leq c(T+1) E_0 \quad (3.19)$$

$c = \max(c_1, c_2)$.

On termine par un argument de densité. ■

3.5 Théorème d'unicité

On pose :

$$R = \|x - x_0\|_{L^\infty(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)} ; R_j = \|x - x_0\|_{L^\infty(\Gamma_j; \mathbb{R}^3)} ; j = 0, 1; C_1 = \|tr(\partial_m \nu)\|_{L^\infty(\Gamma_1)} \quad (3.20)$$

On rappelle d'après l'hypothèses :
 $(\mathcal{H}_4)$ qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$\begin{aligned} \Gamma_0 &= \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \geq 0\} \\ \Gamma_1 &= \{x \in \Gamma ; (x - x_0) \cdot \nu(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

où ν désigne la normale unitaire sortante.

$(\mathcal{H}_5)$ que les rayons de courbures sont positifs, ce qui implique en particulier que :

$$tr(\partial_m \nu) \geq 0, \quad \text{sur } \Gamma_1$$

Théorème 3.2 *Soit $(y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times H$ et $T \succ 2R$. Alors la solution y du problème (P_H) correspondant vérifie :*

$$(T - 2R) E_0 + \frac{1}{R} |y^0|_\Omega^2 \leq \frac{R_0}{2} \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu y)^2 d\Gamma dt + \frac{R_1}{2} (1 + C_1) \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \quad (3.21)$$

Preuve. On prend $q = x - x_0$ dans (3.10) et on suppose que $(y^0, y^1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V}$; le lemme 3.6 permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} & (y', q \cdot \nabla y)|_0^T + \frac{3}{2} \int_0^T \int_\Omega |y'|^2 dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega |\nabla y|^2 dx dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma q_\nu (\partial_\nu y)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \left(|y'|^2 - |\nabla_T y|^2 \right) d\Gamma dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu tr(\partial_m \nu) |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \nabla_T y (\partial_m \nu) \nabla_T y d\Gamma dt \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

On multiplie la première équation de (P_H) par y et on intègre sur $(0, T) \times \Omega$, on obtient :

$$(y', q \cdot \nabla y)|_0^T + \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla y|^2 - |y'|^2 \right) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt = 0 \quad (3.23)$$

La somme (3.22) et (3.23) donne :

$$\begin{aligned} & (y', q \cdot \nabla y + y)|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Omega \left(|\nabla y|^2 - |y'|^2 \right) dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^T \int_\Gamma q_\nu (\partial_\nu y)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \left(|y'|^2 - |\nabla_T y|^2 \right) d\Gamma dt \\ & \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu tr(\partial_m \nu) |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \nabla_T y (\partial_m \nu) \nabla_T y d\Gamma dt \end{aligned}$$

ou encore :

$$\begin{aligned}
& (y', q \cdot \nabla y + y)|_0^T + T E_0 \\
= & \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu (\partial_\nu y)^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \left(|y'|^2 - |\nabla_T y|^2 \right) d\Gamma dt \\
& - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \text{tr}(\partial_m \nu) |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_\nu \nabla_T y (\partial_m \nu) \nabla_T y d\Gamma dt
\end{aligned} \tag{3.24}$$

Le terme intégré se majore par la méthode de V.komornik comme dans (cf.[12], [18]).

On pose :

$$\zeta(t) = (y'(t), q \cdot \nabla y(t) + y(t))$$

où :

$$\begin{aligned}
q \cdot \nabla y(t) &= \sum_k q_k \cdot \partial_k y(t) \\
&= q_k \cdot \partial_k y(t)
\end{aligned}$$

(convention de la sommation avec un indice répété).

on a :

$$\left| (y'(t), (q \cdot \nabla) y(t) + y(t))_\Omega \right|_0^T \leq |\zeta(0)| + |\zeta(T)|$$

on écrit :

$$|\zeta(t)| \leq \frac{\alpha}{2} |y'(t)|_\Omega^2 + \frac{1}{2\alpha} |q_k \cdot \partial_k y(t) + y(t)|_\Omega^2$$

où est une constante positive qui sera choisie plus loin. On a :

$$\begin{aligned}
|q_k \cdot \partial_k y(t) + y(t)|_\Omega^2 &= |q_k \cdot \partial_k y(t)|_\Omega^2 + |y(t)|_\Omega^2 + 2 \int_\Omega y(t) q_k \cdot (\partial_k y(t)) \\
&= |q_k \cdot \partial_k y(t)|_\Omega^2 + |y(t)|_\Omega^2 + \int_\Omega q_k (\partial_k |y(t)|^2) \\
&= |q_k \cdot \partial_k y(t)|_\Omega^2 - 2 |y(t)|_\Omega^2 + \int_{\Gamma_1} q_\nu |y(t)|^2 \\
&\leq R^2 |\nabla y|_\Omega^2 - 2 |y|_\Omega^2 + \int_{\Gamma_1} q_\nu |y(t)|^2
\end{aligned}$$

d'où :

$$|\zeta(t)| \leq \frac{\alpha}{2} |y'(t)|_\Omega^2 + \frac{R^2}{2\alpha} |\nabla y|_\Omega^2 + \frac{1}{\alpha} |y|_\Omega^2 + \frac{1}{2\alpha} \int_{\Gamma_1} q_\nu |y(t)|^2 d\Gamma$$

On prend α tel que :

$$\frac{\alpha}{2} = \frac{R^2}{2\alpha}$$

(pour faire apparaître l'énergie) c-à-d $\alpha = R$.

On obtient :

$$\begin{aligned} |\zeta(t)| &\leq \frac{R}{2} \int_{\Omega} (|y'(t)|^2 + |\nabla y|^2) dx + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_1} q_{\nu} |y(t)|^2 d\Gamma - \frac{1}{R} \int_{\Omega} |y|^2 dx \\ &\leq RE_0 + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_1} q_{\nu} |y(t)|^2 d\Gamma - \frac{1}{R} \int_{\Omega} |y|^2 dx \\ &\leq RE_0 + \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_1} q_{\nu} |y(t)|^2 d\Gamma - \frac{1}{R} |y|_{\Omega}^2 \end{aligned}$$

La relation (3.24) donne alors :

$$\begin{aligned} (T - 2R) E_0 + \frac{1}{R} |y^0|_{\Omega}^2 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q_{\nu} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_{\nu} |y'|^2 d\Gamma dt + \\ &\quad \frac{1}{2R} \int_{\Gamma_1} q_{\nu} (|y^0| + |y(T)|^2) d\Gamma + \\ &\quad \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_{\nu} (2\nabla_T y (\partial_m \nu) \nabla_T y - \text{tr}(\partial_m \nu) |\nabla_T y|^2 - |\nabla_T y|^2) d\Gamma dt \end{aligned}$$

D'après (3.20) et l'hypothèse $(\mathcal{H}_5)$, il vient :

$$\begin{aligned} (T - 2R) E_0 + \frac{1}{R} |y^0|_{\Omega}^2 &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} q_{\nu} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} q_{\nu} (1 + \text{tr}(\partial_m \nu)) |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \\ &\leq \frac{R_0}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt + \frac{R_1}{2} (1 + C_1) \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \end{aligned}$$

On termine par un argument de densité. ■

Par conséquence on a :

Conséquence 3.1 Soit $T > R$. Pour $(y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times H$ on pose :

$$\|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{F}} = \left(\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_{\nu} y)^2 d\Gamma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_T y|^2 d\Gamma dt \right)^{1/2}$$

où y est la solution du problème homogène correspondant aux données de Cauchy y^0 et y^1 et $\|\cdot\|_{\mathcal{F}}$ est une norme sur $\mathcal{V} \times H$ et le complète $\mathcal{F}$ pour cette norme est égale à $\mathcal{V} \times H$ puisque il existe d'après (3.18) et (3.21) deux constantes $C_1(T) > 0$ et $C_2(T) > 0$ telles que :

$$C_1(T)E_0 \leq \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{F}} \leq C_2(T)E_0 \quad \forall (y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{H} \quad (3.25)$$

3.6 Une méthode pour la stabilisation rapide

Avant de faire la démonstration du théorème, on rappelle le résultat général de stabilisation développé par V.Komornik dans [14]. Pour cela on considère le problème linéaire

suivant :

$$x' = Ax + Bu, \quad x(0) = x_0 \quad (3.26)$$

où A est un opérateur linéaire, fermé, à domaine dense sur un espace de Hilbert H et B un opérateur linéaire, fermé, à domaine dense d'un espace de Hilbert G vers H . On considère aussi le problème dual du problème (3.26) .

$$\varphi' = -A^*\varphi, \quad \varphi'(0) = \varphi_0, \quad \psi = B^*\varphi \quad (3.27)$$

où A^* et B^* sont les adjoints de A et B respectivement. On fait les hypothèses suivantes :

(H_1) : L'opérateur A^* engendre un *groupe* continu dans H' .

(H_2) : il existe un opérateur linéaire *continu* $E : G \rightarrow H$ et un nombre complexe λ tels que $B^* = E^*(A + \lambda I)^*$.

(H_3) : Il existe deux nombres positifs T et c' tels que :

$$\|\psi\|_{L^2(0,T'; G')} \leq c' \|\varphi_0\|_{H'}, \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

(H_4) : Il existe deux nombres positif T et c tels que :

$$\|\varphi_0\|_{H'} \leq c \|\psi\|_{L^2(0,T; G')} \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

Lemme 3.7 *Les hypothèses (H_1) – (H_3) donnent la nouvelle version de (H_3) suivante : Pour tout $T > 0$, il existe $C_T > 0$ tel que :*

$$\|\psi\|_{L^2(-T, T; G')} \leq C_T \|\varphi_0\|_{H'}, \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*) \quad (3.28)$$

Preuve. On fixe $m \geq 1$ et on considère le temps T tel que :

$$(m-1)T' \leq T < mT' \quad (3.29)$$

où T' est défini dans l'hypothèse (H_3) .

D'après (3.27) et (3.29) , on peut écrire :

$$\begin{aligned} \int_{-T}^T \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds &\leq \int_{-mT'}^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\ &= \int_{-mT'}^0 \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds + \int_0^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \end{aligned} \quad (3.30)$$

D'une part on a :

$$\begin{aligned}
\int_0^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds &= \sum_{j=0}^{m-1} \int_{jT'}^{(j+1)T'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \int_0^{T'} \|B^* e^{-(s+jT')A^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\
&\leq \sum_{j=0}^{m-1} C^2 \|e^{-jT'A^*} \varphi_0\|_{H'}^2 \leq \sum_{j=0}^{m-1} C'^2 \|e^{-T'A^*}\|^j \|\varphi_0\|_{H'}^2 \\
&= C_{1T}^2 \|\varphi_0\|_{H'}^2
\end{aligned}$$

donc :

$$\int_0^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \leq C_{1T}^2 \|\varphi_0\|_{H'}^2 \quad (3.31)$$

D'autre part on a :

$$\begin{aligned}
\int_{-mT'}^0 \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds &= \int_0^{mT'} \|B^* e^{sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\
&= \int_0^{mT'} \|B^* e^{(mT'-s)A^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\
&= \int_0^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} e^{mT'A^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\
&\leq C^2 \|e^{mT'A^*} \varphi_0\|_{H'}^2 \\
&\leq C_{1T}^2 \|e^{T'A^*}\|^{2m} \|\varphi_0\|_{H'}^2
\end{aligned}$$

d'où :

$$\int_{-mT'}^0 \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \leq C_{1T}^2 \|e^{T'A^*}\|^{2m} \|\varphi_0\|_{H'}^2 \quad (3.32)$$

De (3.31) et (3.32) , (3.30) s'écrit :

$$\int_{-T}^T \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \leq \int_{-mT'}^{mT'} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \leq C_{1T}^2 \|\varphi_0\|_{H'}^2 + C_{1T}^2 \|e^{T'A^*}\|^{2m} \|\varphi_0\|_{H'}^2$$

on obtient le résultat avec :

$$C_T = C_{1T} \left(1 + \|e^{T'A^*}\|^{2m}\right)^{1/2}$$

■

On va définir la solution de (3.26) par transposition (*cf.*[13]), pour cela on fixe $x_0 \in H$ et $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, G)$ arbitraires puis on multiplie l'équation 3.26 par la solution de l'équation (3.27) ; une intégration formelle par partie entre 0 et T donne:

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} = \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds \quad (3.33)$$

En effet :

Soit φ solution du problème (3.27) , d'après (3.26) on a :

$$\begin{aligned} \langle x(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} &= \langle Ax(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} + \langle Bu(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} \\ &= \langle x(t), A^* \varphi(t) \rangle_{H, H'} + \langle u(t), B^* \varphi \rangle \\ &= - \langle x(t), \varphi'(t) \rangle_{H, H'} + \langle u(t), \Psi(t) \rangle \end{aligned}$$

Et comme l'intégration par partie formelle de $\int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} ds$ donne :

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} dt &= \langle x(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} \Big|_0^T - \int_0^T \langle x(t), \varphi'(t) \rangle dt \\ &= \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} - \langle x(0), \varphi(0) \rangle_{H, H'} - \int_0^T \langle x(t), \varphi'(t) \rangle_{H, H'} dt \end{aligned}$$

avec $x(0) = x_0$ et $\varphi(0) = \varphi_0$. Alors :

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} - \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} = \int_0^T \langle x'(t), \varphi(t) \rangle_{H, H'} dt + \int_0^T \langle x(t), \varphi'(t) \rangle_{H, H'} dt$$

donc :

$$\begin{aligned} \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} &= \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle Ax(t) + Bu(t), \varphi(t) \rangle_{G, G'} ds + \int_0^T \langle x(t), -A^* \varphi(t) \rangle_{H, H'} dt \\ &= \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle x(t), A^* \varphi(t) \rangle_{H, H'} dt + \int_0^T \langle u(t), B^* \varphi(t) \rangle_{G, G'} ds - \\ &\quad \int_0^T \langle x(t), A^* \varphi(t) \rangle_{H, H'} dt \end{aligned}$$

En posant $\Psi = B^* \varphi(t)$, on obtient :

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} = \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds$$

On définit alors la solution de (3.26) comme étant une fonction continue $x : R \rightarrow H$ qui vérifie (3.33) pour tout $\varphi_0 \in H'$ et pour tout $T \in R^+$.

La définition précédente est justifiée par le théorème suivant :

Théorème 3.3 Pour tout $x_0 \in H$ et tout $u \in L^2_{loc}(R^+, G)$, le problème (3.26) possède une solution unique. De plus pour tout $T > 0$ il existe $C_T > 0$ tel que :

$$\|x\|_{L^\infty(-T, T; H)} \leq C_T(\|x_0\|_H + \|u\|_{L^2(-T, T; G)}) \quad (3.34)$$

Preuve. Comme la quantité :

$$\langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds$$

est une forme linéaire, continue et bornée de $\varphi_0 \in H'$ et $H'' = H$ on peut donc assurer d'après le théorème 1.20 de Riesz Fréchet l'existence d'un élément unique $y(T) \in H$ tel que :

$$\langle y(T), \varphi_0 \rangle_{H, H'} = \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds, \quad \forall \varphi_0 \in H'$$

Dans la première étape, on montre la continuité de la fonction :

$$T \longmapsto y(T)$$

En effet : Soient T_1, T_2 tel que :

$$T_1 \succ T_2 \succ 0$$

on a :

$$\begin{aligned} \|y(T_1) - y(T_2)\|_H &= \sup_{\|\varphi_0\|_{H'} \leq 1} \left| \langle y(T_1), \varphi_0 \rangle - \langle y(T_2), \varphi_0 \rangle_{H, H'} \right| \\ &= \sup_{\|\varphi_0\|_{H'} \leq 1} \left| \int_{T_1}^{T_2} \langle u(s), \varphi(s) \rangle_{G, G'} ds \right| \\ &\leq \sup_{\|\varphi_0\|_{H'} \leq 1} \int_{T_1}^{T_2} |\langle u(s), \varphi(s) \rangle_{G \times G'}| ds \\ &\leq \sup_{\|\varphi_0\|_{H'} \leq 1} \left(\int_{T_1}^{T_2} \|u(s)\|_G^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{T_1}^{T_2} \|\psi(s)\|_{G'}^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

De (3.28) , il vient :

$$\begin{aligned} \|y(T_1) - y(T_2)\|_H &\leq \sup_{\|\varphi_0\|_{H'} \leq 1} \left(\int_{T_1}^{T_2} \|u(s)\|_G^2 ds \right)^{1/2} c_T \|\varphi_0\|_{H'} \\ &\leq c_T \left(\int_{T_1}^{T_2} \|u(s)\|_G^2 ds \right)^{1/2} \end{aligned}$$

comme la quantité $(\int_{T_1}^{T_2} \|u(s)\|_G^2 ds)^{1/2}$ tend vers zéro quand T_1 tend vers T_2 alors :

$$\|y(T_1) - y(T_2)\|_H \text{ tend vers zéro}$$

lorsque $T_1 \longrightarrow T_2$

ce qui montre la continuité de la fonction :

$$T \longrightarrow y(T)$$

on a :

$$\langle y(T), \varphi_0 \rangle_{H, H'} = \langle y(T), e^{TA^*} \varphi(T) \rangle_{H, H'} = \langle y(T) e^{TA}, \varphi(T) \rangle_{H, H'}.$$

D'après l'hypothèse (H_1) , $\varphi_0 \mapsto \varphi(T)$ est un automorphisme sur H' .

En posant $x(T) = y(T) e^{TA}$, on a :

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} = \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds$$

où e^{sA} est le C_0 semi groupe engendré par l'opérateur A .

Dans la deuxième étape, on montre la continuité de la fonction :

$$t \longrightarrow x(t)$$

En effet :

Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}^+$, il vient :

$$x(t_0 + h) - x(t_0) = e^{(t_0+h_0)A} [y(t_0 + h) - y(t_0)] + (e^{(t_0+h_0)A} - e^{t_0A})y(t_0)$$

donc :

$$\|x(t_0 + h) - x(t_0)\| \leq \|e^{(t_0+h)A}\| \|y(t_0 + h) - y(t_0)\| + \|(e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A})y(t_0)\|$$

Comme e^{TA} est un C_0 semi groupe, alors d'après la proposition 1.12 , il existe deux constantes $M_\omega > 0$ et $\omega > 0$, telles que :

$$\|e^{(t_0+h)A}\| \leq M_\omega e^{\omega(t_0+h)}$$

D'où :

$$\|x(t_0 + h) - x(t_0)\|_H \leq M_\omega e^{\omega(t_0+h)} \|y(t_0 + h) - y(t_0)\| + \|(e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A})y(t_0)\|$$

puisque $M_\omega e^{\omega(t_0+h)} \|y(t_0 + h) - y(t_0)\| + \|(e^{(t_0+h)A} - e^{t_0A})y(t_0)\|$ tend vers zéro quand h tend vers 0. Alors :

$$\|x(t_0 + h) - x(t_0)\|_H \text{ tend vers zéro.}$$

quand h tend vers 0.

ce qui montre la continuité de la fonction :

$$\begin{aligned} x & : \mathbb{R} \rightarrow H \\ t & \rightarrow x(t) \end{aligned}$$

Enfin pour l'estimation (3.34) on a :

$$\begin{aligned} \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H,H'} &= \left| \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} + \int_0^T \langle u(s), \psi(s) \rangle_{G,G'} ds \right| \\ &\leq \|x_0\|_H \|\varphi_0\|_{H'} + \int_0^T \|u(s)\|_G \|\psi(s)\|_{G'} ds \\ &\leq \|x_0\|_H \|\varphi_0\|_{H'} + \left(\int_{-T}^T \|u(s)\|_G^2 ds \right)^{1/2} \cdot \left(\int_{-T}^T \|\psi(s)\|_{G'}^2 ds \right)^{1/2} \\ &\leq \|x_0\|_H \|\varphi_0\|_{H'} + \|u\|_{L^2(-T,T;G)} \cdot \|\psi\|_{L^2(-T,T;G')} \end{aligned}$$

d'après l'inégalité (3.28) , on obtient :

$$\left| \langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H,H'} \right| \leq \left[\|x_0\|_H + c_T \|u\|_{L^2(-T,T;G)} \right] \|\varphi_0\|_{H'} \quad (3.35)$$

Comme :

$$\|x(T)\|_H = \sup_{\varphi(T) \neq 0} \frac{\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H,H'}}{\|\varphi(T)\|_{H'}}$$

avec :

$$\varphi(T) = e^{-sA^*} \varphi_0$$

et que $\varphi_0 \longrightarrow \varphi(T)$ est un isomorphisme, il existe alors une constante C tel que :

$$\|x(T)\|_H \leq C \sup_{\varphi_0 \neq 0} \frac{\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H,H'}}{\|\varphi_0\|_{H'}}$$

cette dernière inégalité et (3.35) donnent le résultat demandé.

Ce qui achève la démonstration. ■

3.6.1 Quelques notions de contrôlabilité et d'observabilité.

On rappelle brièvement certains résultats sur l'observabilité et la contrôlabilité.

Définition 3.1 Soit $T \succ 0$.

(1) Le problème (3.26) est dit exactement nul-contrôlable au temps T si pour tout état initial $x_0 \in H$, il existe une fonction $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R}; G)$ telle que :

$$\|u\|_{L^2(0,T;G)} \leq c \|x_0\|_H$$

et telle que la solution du problème (3.26) correspondant vérifie la condition finale :

$$x(T) = 0$$

(2) Le problème (3.26) est dit exactement contrôlable au temps T si pour tout couple $x_0, x_1 \in H$, il existe une fonction $u \in L^2_{loc}(\mathbb{R} ; G)$ tel que :

$$\|u\|_{L^2(0,T ; G)} \leq c' (\|x_0\|_H + \|x_1\|_H)$$

et telle que la solution du problème (3.26) correspondant vérifie la condition finale :

$$x(T) = x_1$$

(3) Le problème (3.27) est dit exactement observable au temps T si :

$$\|\varphi_0\|_{H'} \leq c'' \|\Psi\|_{L^2(0,T ; G')}, \quad \Psi = B^* \varphi$$

pour tout $\varphi_0 \in D(A^*)$.

Commentaire 3.1 Cela implique que si $\Psi = 0$ sur $[0, T]$, alors $\varphi_0 = 0$; d'où la solution $\varphi = 0$. L'observation de Ψ sur $[0, T]$ permet donc de déterminer la solution φ , d'où la définition observable. De plus la solution φ dépend continûment de l'observation Ψ .

Théorème 3.4 Soit ω un nombre réel, sous les hypothèses $(H_1) - (H_4)$, la formule :

$$\langle \Lambda_\omega \varphi_0, \psi_0 \rangle_{H, H'} = \int_0^T e^{-2\omega s} \langle JB^* e^{-sA^*} \varphi_0, B^* e^{-sA^*} \psi_0 \rangle_{G, G'} ds \quad (3.36)$$

où $J : G' \rightarrow G$ est l'isomorphisme canonique de Riesz, définit un opérateur positif, auto adjoint :

$$\Lambda_\omega : H' \rightarrow H.$$

De plus Λ_ω est un isomorphisme et :

$$\|x\|_\omega = \langle \Lambda_\omega^{-1} x, x \rangle_{H', H}^{1/2}$$

définit une norme équivalente sur H .

Preuve. . L'opérateur Λ_ω est défini positif.

Il suffit de montrer pour $\varphi_0 \in H'$:

$$\langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} \geq 0 \quad \forall \varphi_0 \in H'$$

et :

$$\langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} = 0 \Rightarrow \varphi_0 = 0$$

En effet :

Soit $\varphi_0 \in H'$

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H} &= \int_0^T e^{-2ws} \langle JB^* e^{-sA^*} \varphi_0, B^* e^{-sA^*} \varphi_0 \rangle_{G \times G'} ds \\ &= \int_0^T e^{-2ws} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \end{aligned}$$

d'où :

$$\langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} \geq 0 \quad \forall \varphi_0 \in H'$$

de plus :

$$\langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} = 0$$

revient à dire que :

$$\int_0^T e^{-2ws} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds = 0$$

où encore :

$$\int_0^T e^{-2ws} \|\Psi(s)\|_{G'}^2 ds = 0$$

avec $\Psi(s) = B^* \varphi(s) = B^* e^{-sA^*} \varphi_0$.

Donc :

$$\langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} = 0 \Rightarrow \Psi = 0 \quad \text{p p sur } [0, T]$$

D'après l'hypothèse (H_4) , il vient :

$$\langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} = 0 \Rightarrow \varphi = 0$$

ce qui termine la démonstration.

• L'opérateur Λ_w est auto adjoint. Soient $\varphi_0, \Psi_0 \in H'$ on a :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H} &= \int_0^T e^{-2ws} \langle JB^* e^{-sA^*} \varphi_0, B^* e^{-sA^*} \Psi_0 \rangle_{G \times G'} ds \\ &= \int_0^T e^{-2ws} \langle J\Psi_1, \Psi_2 \rangle_{G \times G'} ds \end{aligned}$$

avec $\Psi_1 = B^* e^{-sA^*} \varphi_0$, $\Psi_2 = B^* e^{-sA^*} \Psi_0$.

Pour montrer que l'opérateur Λ_w est auto adjoint, il suffit d'utiliser le fait que l'opérateur J est auto adjoint, puisque $G''' = G$; d'où :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_w \varphi_0, \Psi_0 \rangle_{H \times H'} &= \int_0^T e^{-2ws} \langle \Psi_1, J \Psi_2 \rangle_{G \times G'} ds \\ &= \int_0^T e^{-2ws} \langle J \Psi_2, \Psi_1 \rangle_{G' \times G} ds \\ &= \langle \varphi_0, \Lambda_w \Psi_0 \rangle_{H' \times H} \end{aligned}$$

Donc l'opérateur Λ_w est auto adjoint.

• L'opérateur Λ_ω est un isomorphisme.

On montre que l'opérateur Λ_ω est surjectif. Soit $x \in H$ et $f_x \in H'' = H$ (puisque H un espace de Hilbert donc réflexif) définie par :

$$\begin{aligned} f_x &: H' \longrightarrow \mathbb{C} \\ y &\longmapsto \langle f_x, y \rangle_{H'', H'} = \langle x, y \rangle_{H, H'} \end{aligned}$$

Comme $f_x \in H'' = H$, alors :

$$f_x \circ \Lambda_\omega^{-1} : \text{Im } \Lambda_\omega \longrightarrow \mathbb{C}$$

se prolonge en un élément de H' noté encore $f_x \circ \Lambda_\omega^{-1}$, d'après le théorème de Riesz Fréchet, il existe $u \in H$ unique tel que :

$$\langle f_x \circ \Lambda_\omega^{-1}, g \rangle_{H', H} = (u, g)_H \quad \forall g \in H.$$

En particulier si on prend $g = \Lambda_\omega v$ avec $v \in H'$ on a d'une part :

$$\langle f_x \circ \Lambda_\omega^{-1}, g \rangle_{H', H} = \langle f_x \circ \Lambda_\omega^{-1}, \Lambda_\omega v \rangle_{H', H} = \langle f_x, v \rangle_{H, H'} = (x, v)_{H, H'}.$$

D'autre part, on a :

$$\begin{aligned} \langle f_x \circ \Lambda_\omega^{-1}, \Lambda_\omega v \rangle_{H', H} &= (u, \Lambda_\omega v)_H \\ &= (\Lambda_\omega^* u, v)_{H'} \\ &= (\Lambda_\omega u, v)_{H'} \\ &= (x, v)_{H'} \end{aligned}$$

d'où $\Lambda_\omega u = x$.

ce qui montre la surjectivité de Λ_ω .

Il reste à montrer l'existence de deux constantes c_1 et c_2 telles que :

$$c_1 \|x\|_H \leq \|x\|_w \leq c_2 \|x\|_H$$

Par définition on a :

$$\begin{aligned}
\|x\|_w^2 &= \langle \Lambda_\omega^{-1} x, x \rangle_{H', H} \\
&= \langle \Lambda_\omega^{-1} x, \Lambda_\omega (\Lambda_\omega^{-1} x) \rangle_{H', H} \\
&= \langle \Lambda_\omega (\Lambda_\omega^{-1} x), \Lambda_\omega^{-1} x \rangle_{H, H'}
\end{aligned}$$

car Λ_ω est auto adjoint. D'où :

$$\|x\|_w^2 = \int_0^T e^{-2ws} \|B^* e^{-sA^*} (\Lambda_\omega^{-1} x)\|_G^2 ds$$

Donc :

$$e^0 \|B^* e^{-sA^*} (\Lambda_\omega^{-1} x)\|_{L^2(0,T;G)}^2 \geq \|x\|_w^2 \geq e^{-2wT} \|B^* e^{-sA^*} (\Lambda_\omega^{-1} x)\|_{L^2(0,T;G)}^2$$

et d'après l'hypothèse (H_4) et l'inégalité (3.28) , il vient :

$$c_T \|\Lambda_\omega^{-1} x\|_{H'}^2 \geq \|x\|_w^2 \geq c'_T e^{-2wT} \|\Lambda_\omega^{-1} x\|_{H'}^2$$

on a :

$$\begin{aligned}
\|x\|_H &= \|\Lambda_\omega (\Lambda_\omega^{-1} x)\|_H \\
&\leq \|\Lambda_\omega\| \|\Lambda_\omega^{-1} x\|_H \\
&\leq c_T (c'_T)^{-\frac{1}{2}} e^{wt} \|x\|_w
\end{aligned}$$

puisque Λ_ω est continu.

De plus :

$$\begin{aligned}
\|x\|_w &\leq \sqrt{c_T} \|\Lambda_\omega^{-1} x\|_H \\
&\leq \sqrt{c_T} \|\Lambda_\omega^{-1}\| \|x\|_H \\
&\leq \sqrt{c_T} c_2 \|x\|_H
\end{aligned}$$

puisque Λ_ω^{-1} est continu.

Alors il existe deux constantes $c_T^1 = (\sqrt{c_T} c_2)^{-1}$ et $c_T^2 = c_T (c'_T)^{-\frac{1}{2}}$; telles que :

$$c_T^1 \|x\|_H \leq \|x\|_w \leq c_T^2 \|x\|_H$$

ce qui montre l'équivalence entre les deux normes $\|x\|_w$ et $\|x\|_H$. ■

Nous donnons maintenant le théorème sur la stabilisation rapide démontré dans [14].

Théorème 3.5 (cf.[13]) On suppose qu'il existe un temps $T > 0$ pour lequel les hypothèses

(H₁) : L'opérateur A^* engendre un groupe continu dans H' .

(H₂) : il existe un opérateur linéaire continu $E : G \rightarrow H$ et un nombre complexe λ tels que $B^* = E^*(A + \lambda I)^*$.

(H₃) : Il existe deux nombres positifs T et c' tels que :

$$\|\psi\|_{L^2(0,T'; G')} \leq c' \|\varphi_0\|_{H'}, \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

(H₄) : Il existe deux nombres positif T et c tels que :

$$\|\varphi_0\|_{H'} \leq c \|\psi\|_{L^2(0,T; G')} \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

sont vérifiées. Soit $\omega > 0$ arbitraire. on pose :

$$F = -JB^*\Lambda_\omega^{-1}x \quad (3.37)$$

Alors l'opérateur $A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1}$ engendre un semi groupe continu dans H et la solution du problème à boucle fermée :

$$x' = Ax + BFx, \quad x(0) = x_0 \quad (3.38)$$

vérifie :

$$\|x(t)\|_\omega \leq \|x_0\|_\omega e^{-\omega t}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.39)$$

pour tout $x_0 \in H$.

Preuve. On donne d'abord une démonstration formelle de ce théorème.

On Commence par écrire $\Lambda_\omega \in L(H', H)$.

$$\Lambda_\omega = \int_0^T e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} ds$$

On fixe $x_0 \in H$ arbitraire et on considère la solution de (3.38) , il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), x(t) \rangle_{H',H} &= \frac{d}{dt} (\|x(t)\|_\omega)^2 \\ &= \left\langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle_{H',H} + \left\langle \frac{d}{dt}(\Lambda_\omega^{-1}x(t)), x(t) \right\rangle_{H',H} \end{aligned}$$

comme :

$$\begin{aligned} \left\langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), \frac{d}{dt}x(t) \right\rangle_{H',H} &= \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), Ax(t) + BFx(t) \rangle_{H',H} \\ &= \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), Ax(t) \rangle_{H',H} - \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), BJB^* \Lambda_\omega^{-1}x(t) \rangle_{H',H} \\ &= \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), A\Lambda_\omega(\Lambda_\omega^{-1}x(t)) \rangle_{H',H} - \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), BJB^* \Lambda_\omega^{-1}x(t) \rangle_{H',H} \\ &= \langle \Lambda_\omega^{-1}x(t), (A\Lambda_\omega - BJB^*) (\Lambda_\omega^{-1}x(t)) \rangle_{H',H} \end{aligned}$$

de plus :

$$\begin{aligned}
\left\langle \frac{d}{dt} (\Lambda_\omega^{-1} x(t)), x(t) \right\rangle_{H',H} &= \left\langle \Lambda_\omega^{-1} \frac{d}{dt} (x(t)), x(t) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle \Lambda_\omega^{-1} (Ax(t) - BJB^* \Lambda_\omega^{-1} x(t)), \Lambda_\omega (\Lambda_\omega^{-1} x(t)) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle \Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} Ax(t), \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} - \left\langle BJB^* \Lambda_\omega^{-1} x(t), \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H}
\end{aligned}$$

car Λ_ω est un opérateur auto adjoint. Alors :

$$\begin{aligned}
&\left\langle \frac{d}{dt} (\Lambda_\omega^{-1} x(t)), x(t) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle x(t), A^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H,H'} - \left\langle JB^* \Lambda_\omega^{-1} x(t), B^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle \Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} x(t), A^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H,H'} - \left\langle B^* \Lambda_\omega^{-1} x(t), JB^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), \Lambda_\omega A^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} - \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), BJB^* \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} \\
&= \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), (\Lambda_\omega A^* - BJB^*) \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H}
\end{aligned}$$

d'où :

$$\left\langle \frac{d}{dt} (\Lambda_\omega^{-1} x(t)), x(t) \right\rangle_{H',H} = \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), (\Lambda_\omega A^* - BJB^*) \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H}$$

alors :

$$\frac{d}{dt} \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \right\rangle_{H',H} = \left\langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*) \Lambda_\omega^{-1} x(t) \right\rangle_{H',H} \quad (3.40)$$

Si on dérive la quantité $(e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*})$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds} (e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}) &= \frac{d}{ds} (e^{-2\omega s}) e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} + \frac{d}{ds} (e^{-sA}) e^{-2\omega s} BJB^* e^{-sA^*} \\
&\quad + e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* \frac{d}{ds} (e^{-sA^*}) \\
&= -2\omega e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} - A e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} \\
&\quad - e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} A^*
\end{aligned}$$

d'où :

$$-\int_0^T \frac{d}{ds} (e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}) ds = A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* + 2\omega \Lambda_\omega \quad (3.41)$$

mais :

$$\begin{aligned}
& - \int_0^T \frac{d}{ds} (e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*}) ds \\
& = -e^{-2\omega T} e^{-TA} BJB^* e^{-TA^*} + e^{-2\omega 0} e^{-0A} BJB^* e^{-0A^*} \\
& = BJB^* - e^{-2\omega T} e^{-TA} BJB^* e^{-TA^*}
\end{aligned} \tag{3.42}$$

(3.41) et (3.42) donne :

$$A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^* = -2\omega\Lambda_\omega - BJB^* - e^{-2\omega T} e^{-TA} BJB^* e^{-TA^*} \tag{3.43}$$

pour terminer la démonstration, on doit faire appel au lemme suivant. ■

Lemme 3.8 on a :

$$BJB^* + e^{-2\omega T} e^{-TA} BJB^* e^{-TA^*} \geq 0$$

Preuve. On a pour $\varphi' = -A^* \varphi_0$,

$$-e^{-2\omega T} \|B^* \varphi\|_{G'}^2 \leq \|B^* \varphi_0\|_{G'}^2, \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

d'où :

$$-e^{-2\omega T} \langle JB^* \varphi, B^* \varphi \rangle_{G,G'} \leq \langle JB^* \varphi_0, B^* \varphi_0 \rangle_{G,G'} \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

donc :

$$-e^{-2\omega T} \langle BJB^* \varphi, \varphi \rangle_{G,G'} \leq \langle BJB^* \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{G,G'} \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

Alors :

$$\langle -e^{-2\omega T} e^{-TA} BJB^* e^{-TA^*} \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{G,G'} \leq \langle BJB^* \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{G,G'} \quad \forall \varphi_0 \in D(A^*).$$

ce qui donne le résultat demander.

Fin de la démonstration du théorème 3.5

d'après le lemme précédent, l'inégalité (3.43) donne :

$$A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^* \leq -2\omega\Lambda_\omega \tag{3.44}$$

de (3.40) et (3.44), il vient :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H} & \leq \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), -2\omega\Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} x(t) \rangle_{H',H} \\
& \leq -2\omega \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H}
\end{aligned}$$

ce qui donne :

$$\frac{d}{dt} \|x(t)\|_{\omega}^2 \leq -2\omega \|x(t)\|_{\omega}^2$$

où encore :

$$\left(\|x(t)\|_{\omega}^2 \right)' + 2\omega \|x(t)\|_{\omega}^2 \leq 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (3.45)$$

La fonction est décroissante. En effet :

$$\begin{aligned} \left(e^{2\omega t} \|x(t)\|_{\omega}^2 \right)' &= 2\omega e^{2\omega t} \|x(t)\|_{\omega}^2 + e^{2\omega t} \left(\|x(t)\|_{\omega}^2 \right)' \\ &= e^{2\omega t} \left(e^{2\omega t} \|x(t)\|_{\omega}^2 + \|x(t)\|_{\omega}^2 \right) \\ &\leq 0 \end{aligned}$$

cela d'après (3.45) . Ce qui montre la décroissance de $e^{2\omega t} \|x(t)\|$; donc

$$e^{2\omega t} \|x(t)\|_{\omega}^2 \leq e^{2\omega 0} \|x(0)\|_{\omega}^2 \quad \forall t \geq 0$$

et comme :

$$\|x(0)\|_{\omega}^2 = \|x_0\|_{\omega}^2$$

Alors :

$$\|x(t)\|_{\omega}^2 \leq \|x_0\|_{\omega}^2 e^{-2\omega t} \quad \forall t \geq 0$$

Cette preuve est incorrecte dans le cas où la dimension est infinie, les solutions fortes de (3.38) ne sont pas suffisamment régulières de manière à justifier les calculs.

Pour vaincre une telle difficulté, on utilise des équations intégrales équivalentes. On commence d'abord par modifier l'équation (3.43) , comme suit. On fixe $\varphi_0 \in D(A^*)^2$ (pour que $A^*\varphi_0$ soit dans $D(A^*)$) et on considère la solution de (3.38) ; on aura d'après (H_2) :

$$\begin{aligned} & e^{-2\omega T} \|B^*\varphi(T)\|_{G'}^2 - \|B^*\varphi_0\|_{G'}^2 \\ &= \int_0^T \frac{d}{ds} \left(e^{-2\omega t} \|E^*(A + \lambda I)^* \varphi(s)\|_{G'}^2 \right) ds \\ &= \int_0^T \frac{d}{ds} \langle e^{-2\omega t} E^*(A + \lambda I)^* e^{-sA^*} \varphi_0, E^*(A + \lambda I)^* e^{-sA^*} \varphi_0 \rangle_{G'} ds \end{aligned}$$

La quantité :

$$(A + \lambda I)^* \varphi_0 \in D(A^*)$$

car :

$$\varphi_0 \in D(A^*)^2$$

d'où la fonction :

$$s \longrightarrow e^{-sA^*} (A + \lambda I)^* \varphi_0$$

est dérivable et on a :

$$\frac{d}{ds} (e^{-sA^*} (A + \lambda I)^* \varphi_0) = -A^* e^{-sA^*} (A + \lambda I)^* \varphi_0$$

d'où :

$$\begin{aligned} & e^{-2\omega T} \|B^* \varphi(T)\|_{G'}^2 - \|B^* \varphi_0\|_{G'}^2 \\ = & \int_0^T \frac{d}{ds} e^{-2\omega s} \|E^* (A + \lambda I)^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds + \\ & \int_0^T e^{-2\omega s} \frac{d}{ds} \langle E^* (A + \lambda I)^* e^{-sA^*} \varphi_0, E^* (A + \lambda I)^* e^{-sA^*} \varphi_0 \rangle_{G'} ds \\ = & - \int_0^T e^{-2\omega s} \langle 2\omega s J B^* e^{-sA^*} \varphi_0, B^* e^{-sA^*} \varphi_0 \rangle_{G', G} ds + \\ & \int_0^T e^{-2\omega s} \langle -J B^* e^{-sA^*} (A^* \varphi_0), A^* e^{-sA^*} \varphi_0 \rangle_{G, G'} ds \\ = & -2\omega \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle \Lambda_\omega A^* \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle A^* \varphi_0, \Lambda_\omega \varphi_0 \rangle_{H', H} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} e^{-2\omega T} \|B^* \varphi(t)\|_{G'}^2 - \|B^* \varphi_0\|_{G'}^2 &= -2\omega \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \quad (3.46) \\ - \langle \Lambda_\omega \varphi_0, A^* \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle A^* \varphi_0, \Lambda_\omega \varphi_0 \rangle_{H', H} &\quad \forall \varphi_0 \in D(A^*) \end{aligned}$$

car Λ_ω est auto adjoint.

D'après (3.43) et (3.46) , on obtient :

$$\begin{aligned} & e^{-2\omega T} \langle J B^* e^{-TA^*} \varphi_0, B^* e^{-TA^*} \varphi_0 \rangle_{G'} - \langle J B^* \varphi_0, B^* \varphi_0 \rangle_{G'} \\ = & -2\omega \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle A \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle \Lambda_\omega A^* \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} & e^{-2\omega T} \langle e^{-TA} B J B^* e^{-TA^*} \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} - \langle B J B^* \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \\ = & \langle (-2\omega \Lambda_\omega - A \Lambda_\omega - \Lambda_\omega A^*) \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \end{aligned}$$

où encore :

$$\begin{aligned} & \langle (-\Lambda_\omega 2\omega \Lambda_\omega^{-1} \Lambda_\omega - A \Lambda_\omega - \Lambda_\omega A^*) \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \\ = & \langle (\Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} e^{-2\omega T} e^{-TA} B J B^* e^{-TA^*} \Lambda_\omega^{-1} \Lambda_\omega - \Lambda_\omega \Lambda_\omega^{-1} B J B^* \Lambda_\omega^{-1} \Lambda_\omega) \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} \end{aligned}$$

ce qui implique :

$$\langle (A \Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - B J B^* + \Lambda_\omega (2\omega \Lambda_\omega^{-1} - \Lambda_\omega^{-1} e^{-2\omega T} e^{-TA} B J B^* e^{-TA^*} \Lambda_\omega^{-1}) \Lambda_\omega) \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'}$$

On pose :

$$C^*C = 2\omega\Lambda_\omega^{-1} + e^{-2\omega T}\Lambda_\omega^{-1}e^{-TA}BJB^*e^{-TA^*}\Lambda_\omega^{-1} \quad (3.47)$$

on obtient :

$$\langle (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - BJB^* + \Lambda_\omega C^*C\Lambda_\omega) \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} = 0$$

on conclut que Λ_ω réalise l'équation algébrique de Riccati :

$$A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - BJB^* + \Lambda_\omega C^*C\Lambda_\omega = 0 \quad (3.48)$$

Grâce aux hypothèses (H_1) , (H_2) et (H_3) on peut appliquer le théorème de Flandoli ([8], pp.99-100) Pour conclure que Λ_ω^{-1} vérifie l'équation duale de l'équation algébrique de Riccati :

$$\Lambda_\omega^{-1}A + A^*\Lambda_\omega^{-1} - \Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1} + C^*C = 0$$

Comme l'opérateur $A + BF = A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1}$ et le générateur du groupe $U(t)$ (cf.[8]), alors :

$$U(t)x_0 = x(t)$$

où :

$$\begin{aligned} x'(t) &= (A + BF)x_0 \\ &= (A - BJB^*\Lambda_\omega^{-1})x_0 \end{aligned}$$

et :

$$x_0 = x(0)$$

on calcule :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \int_0^t \langle (C^*C + \Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1}) u(\tau - s)x_0, u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} d\tau \\ &- \frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \end{aligned}$$

En effet :

$$\begin{aligned} &\langle (C^*C + \Lambda_\omega^{-1}BJB^*\Lambda_\omega^{-1}) u(\tau - s)x_0, u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle (\Lambda_\omega C^*C\Lambda_\omega + \Lambda_\omega^{-1}BJB^*) \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*) \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \end{aligned}$$

de (3.40) , il vient :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle (\Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*) \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*) \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0, \Lambda_\omega^{-1}u(\tau - s)x_0 \rangle_{H', H} \end{aligned}$$

On obtient alors :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_0^t \langle (C^*C + \Lambda_\omega^{-1} BJB^* \Lambda_\omega^{-1}) u(\tau - s) x_0, u(\tau - s) x_0 \rangle_{H', H} d\tau \\
& - \frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1} u(\tau - s) x_0, u(\tau - s) x_0 \rangle_{H', H} \\
& = \langle \Lambda_\omega^{-1} x(0), (A\Lambda_\omega + \Lambda_\omega A^* - 2BJB^*) \Lambda_\omega^{-1} x(0) \rangle_{H', H} \\
& = \frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1} x(0), x(0) \rangle_{H', H} \\
& = 0 \\
& u^*(t - s) \Lambda_\omega^{-1} u(t - s) + \int_s^t u^*(t - s) (C^*C + \Lambda_\omega^{-1} BJB^* \Lambda_\omega^{-1}) u(t - s) d\tau
\end{aligned}$$

est un opérateur constant par rapport à t .

autrement dit ; il existe une constante c , qui ne dépend pas de t telles que :

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} \int_0^t \langle (C^*C + \Lambda_\omega^{-1} BJB^* \Lambda_\omega^{-1}) u(\tau - s) x_0, u(\tau - s) x_0 \rangle_{H', H} d\tau \\
& - \frac{d}{dt} \langle \Lambda_\omega^{-1} u(\tau - s) x_0, u(\tau - s) x_0 \rangle_{H', H}
\end{aligned}$$

si on prend $t = s$ dans cette dernière égalité, on obtient :

$$c = \langle \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \rangle$$

Alors :

$$\Lambda_\omega^{-1} = U^*(t - s) \Lambda_\omega^{-1} U(t - s) + \int_s^t U^*(\tau - s) (C^*C + \Lambda_\omega^{-1} \beta J \beta^* \Lambda_\omega^{-1}) U(\tau - s) d\tau \quad (3.49)$$

pour tout $t, s \in \mathbb{R}$.

Si on prend $x \in H$, il vient :

$$\begin{aligned}
\langle \Lambda_\omega^{-1} \beta J \beta^* \Lambda_\omega^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H', H} &= \langle \beta J \beta^* \Lambda_\omega^{-1} x_0, \Lambda_\omega^{-1} x_0 \rangle_{H, H'} \\
&= \langle J \beta^* \Lambda_\omega^{-1} x_0, \beta^* \Lambda_\omega^{-1} x_0 \rangle_{G, G'} \\
&= \|\beta^* \Lambda_\omega^{-1} x_0\|_{G'}^2 \geq 0
\end{aligned}$$

De même on montre que :

$$e^{-2wT} \Lambda_\omega^{-1} e^{-TA} \beta J \beta^* e^{-TA^*} \Lambda_\omega^{-1} \geq 0$$

ce qui donne d'après (3.43) :

$$\begin{aligned}
C^*C + \Lambda_\omega^{-1} \beta J \beta^* \Lambda_\omega^{-1} &\geq C^*C \\
&\geq 2w \Lambda_\omega^{-1}
\end{aligned}$$

On déduit à partir de l'inégalité (3.49) :

$$\Lambda_w^{-1} \geq U^*(t-s) \Lambda_w^{-1} U(t-s) + 2w \int_s^t U^*(\tau-s) (C^*C + \Lambda_w^{-1} \beta J \beta^* \Lambda_w^{-1}) U(\tau-s) d\tau$$

pour tout $t \geq s$.

Par la suite, on fixe $x_0 \in H$, arbitraire et on considère la solution $x = x(t)$ de (3.2). De l'inégalité précédente, il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H',H} &\geq \langle U(t-s)^* \Lambda_w^{-1} U(t-s) x_0, x_0 \rangle_{H',H} + \\ &2w \int_s^t \langle U(\tau-s)^* \Lambda_w^{-1} U(\tau-s) x_0, x_0 \rangle d\tau \end{aligned}$$

comme $x(t) = U(t-s)x_0$, on obtient :

$$\langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H',H} \geq \langle \Lambda_w^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H} + 2w \int_s^t \langle \Lambda_w^{-1} x(\tau), x(\tau) \rangle_{H',H} d\tau$$

pour tout $t \geq s$. Par la suite, on fixe $x_0 \in H$, arbitraire et on considère la solution $x = x(t)$ de (3.38), il vient :

$$\begin{aligned} \langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H',H} &\geq \langle U(t-s)^* \Lambda_w^{-1} U(t-s) x_0, x_0 \rangle_{H',H} + \\ &2w \int_s^t \langle U(\tau-s)^* \Lambda_w^{-1} U(\tau-s) x_0, x_0 \rangle d\tau \end{aligned}$$

comme $x(t) = U(t-s)x_0$, on obtient :

$$\langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H',H} \geq \langle \Lambda_w^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H} + 2w \int_s^t \langle \Lambda_w^{-1} x(\tau), x(\tau) \rangle_{H',H} d\tau$$

pour tout $t \geq s$ et à partir du lemme donné par la suite ; on conclut que

$$\langle \Lambda_w^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H} \leq \langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H',H} e^{-2wt}$$

pour tout $t \geq 0$.

Alors :

$$\|x(t)\|_w^2 \leq \|x_0\|_w^2 e^{-2wt}$$

pour tout $t \geq 0$.

■

Lemme 3.9 Soit $f : [0, +\infty] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue qui satisfait pour une certaine constante $w \succ 0$ l'inégalité :

$$f(s) \geq f(t) + 2w \int_s^t f(\tau) d\tau \quad (3.50)$$

Alors (cf. [14]) :

$$f(t) \leq f(0) e^{-2wt} \quad \forall t \geq 0$$

Le théorème précédent permet de montrer le corollaire 3.6.1 .

Corollaire 3.1 *On suppose que les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées et qu'il existe des constantes positives T, ω, c_1 et c_2 telles que :*

$$c_1 \|\varphi_0\|_{H'}^2 \leq \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle \leq c_2 \|\varphi_0\|_{H'}^2 \quad (3.51)$$

pour tout $\varphi_0 \in D(A^*)$. Alors l'opérateur $A - BJB^* \Lambda_\omega^{-1}$ engendre un groupe continu dans H et la solution du problème à boucle fermé :

$$x' = Ax - BJB^* \Lambda_\omega^{-1} x, \quad x(0) = x_0$$

vérifie :

$$\|x(t)\|_H \leq c_2 c_1^{-1} \|x_0\|_H e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0 \quad (3.52)$$

pour tout $x_0 \in H$.

Preuve. Montrer que l'opérateur $A - BJB^* \Lambda_\omega^{-1}$ engendre un groupe continu dans H , revient à montrer d'abord que les hypothèses (H_3) et (H_4) sont vérifiées :

D'après la deuxième inégalité de (3.51) on a :

$$\begin{aligned} c_2 \|\varphi_0\|_{H'}^2 &\geq \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \times H'} \\ &= \int_0^T e^{-2ws} \|B^* e^{-sA^*} \varphi_0\|_{G'}^2 ds \\ &\geq e^{-2ws} \|\Psi\|_{L^2(0,T; G')}^2 \end{aligned}$$

donc il existe une constante $c = (c_2 e^{2ws})^{\frac{1}{2}}$ tel que :

$$\|\Psi\|_{L^2(0,T; G')}^2 \leq c \|\varphi_0\|_{H'}^2.$$

d'où l'hypothèse (H_3) .

de plus d'après la première inégalité de (3.51) on a :

$$\begin{aligned} c_1 \|\varphi_0\|_{H'}^2 &\leq \langle \Lambda_\omega \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H \cdot H'} \\ &\leq \int_0^T e^{-2ws} \|\Psi\|_{G'}^2 ds \\ &\leq \|\Psi\|_{L^2(0,T; G')}^2 \end{aligned}$$

donc il existe une constante $c' = (c_1)^{-1}$ tel que :

$$\|\Psi\|_{L^2(0,T;G')}^2 \geq c' \|\varphi_0\|_{H'}^2.$$

ce qui montre que l'hypothèse (H_4) est vérifiée. On peut donc appliquer le théorème 3.5 qui montre que l'opérateur $A - BJB^*\Lambda_w^{-1}$ engendre un groupe continu dans H . ■

pour montrer l'inégalité (3.52) , on doit faire appel au lemme 3.10 suivant :

Lemme 3.10 *Sous les même hypothèses ; l'opérateur Λ_w satisfait la double inégalité suivante :*

$$c_1 \|\varphi_0\|_{H'}^2 \leq \|\Lambda_w \varphi_0\|_{H'} \leq c_2 \|\varphi_0\|_{H'} \quad \forall \varphi_0 \in H'. \quad (3.53)$$

Preuve. d'après la première inégalité de (3.51) on a :

$$c_1 \|\varphi_0\|_{H'}^2 \leq \langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} \leq \|\Lambda_w \varphi_0\|_H \cdot \|\varphi_0\|_{H'}.$$

d'où :

$$\begin{aligned} c_1 \|\varphi_0\|_{H'} &\leq \|\Lambda_w \varphi_0\|_H \\ c_1 \|\varphi_0\|_{H'}^2 &\leq \langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'} \leq \|\Lambda_w \varphi_0\|_H \cdot \|\varphi_0\|_{H'} \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \|\Lambda_w \varphi_0\|_H &= \sup_{\|\Psi_0\|_{H'} \leq 1} \langle \Lambda_w \varphi_0, \Psi_0 \rangle_{H,H'} \\ &\leq \sup_{\|\Psi_0\|_{H'} \leq 1} \langle \Lambda_w \varphi_0, \varphi_0 \rangle_{H,H'}^{\frac{1}{2}} \langle \Lambda_w \Psi_0, \Psi_0 \rangle_{H,H'}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

et d'après la deuxième inégalité de (3.51) on a :

$$\begin{aligned} \|\Lambda_w \varphi_0\| &\leq \sup_{\|\Psi_0\|_{H'} \leq 1} c_2^{\frac{1}{2}} \|\varphi_0\|_{H'} c_2^{\frac{1}{2}} \|\Psi_0\|_{H'} \\ &\leq c_2 \|\varphi_0\|_{H'} \end{aligned}$$

Alors :

$$c_1 \|\varphi_0\|_{H'} \leq \|\Lambda_w \varphi_0\|_{H'} \leq c_2 \|\varphi_0\|_{H'}$$

Fin de la démonstration du corollaire 3.1

On a par définition de la norme de $\|\cdot\|_\omega$:

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_\omega^2 &= \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), x(t) \rangle_{H',H} \\ &= \langle \Lambda_\omega^{-1} x(t), \Lambda_w (\Lambda_w^{-1} x(t)) \rangle_{H',H} \\ &= \langle \Lambda_w (\Lambda_\omega^{-1} x(t)), \Lambda_\omega^{-1} x(t) \rangle_{H,H'} \end{aligned}$$

car l'opérateur Λ_w est auto adjoint.

D'après la première inégalité de (3.51) on a :

$$\langle \Lambda_w \Lambda_w^{-1} x(t), \Lambda_w^{-1} x(t) \rangle_{H, H'} \geq c_1 \|\Lambda_w^{-1} x(t)\|_{H'}^2 \quad (3.54)$$

et de la deuxième inégalité de (3.53) , il vient :

$$\|\Lambda_w^{-1} x(t)\|_{H'} \geq c_2^{-1} \|x(t)\|_H \quad (3.55)$$

De (3.54) et (3.55) on obtient :

$$\|x(t)\|_w^2 \geq c_1 c_2^{-2} \|x(t)\|_H^2 \quad (3.56)$$

De plus :

$$\begin{aligned} \|x_0\|_w^2 &= \langle \Lambda_w^{-1} x_0, x_0 \rangle_{H', H} \\ &= \langle \Lambda_w^{-1} x_0, \Lambda_w (\Lambda_w^{-1} x_0) \rangle_{H', H} \\ &= \langle \Lambda_w (\Lambda_w^{-1} x_0), \Lambda_w^{-1} x_0 \rangle_{H, H'} \end{aligned}$$

D'après la deuxième inégalité de (3.51) on a :

$$\langle \Lambda_w (\Lambda_w^{-1} x_0), \Lambda_w^{-1} x_0 \rangle_{H, H'} \leq c_2 \|\Lambda_w^{-1} x_0\|_{H'}^2 \quad (3.57)$$

et de la première inégalité de (3.53) , il vient :

$$\|\Lambda_w^{-1} x_0\|_{H'} \leq c_1^{-1} \|\Lambda_w (\Lambda_w^{-1} x_0)\|_H \quad (3.58)$$

De (3.57) et (3.58) , on obtient :

$$\|x_0\|_w^2 \leq c_2 c_1^{-1} \|x_0\|_H^2 \quad (3.59)$$

Enfin de (3.56) , (3.59) et (3.39) , il vient :

$$\begin{aligned} \|x(t)\|_H^2 &\leq c_1^{-1} c_2 \|x(t)\|_w^2 \\ &\leq c_1^{-1} c_2 \|x_0\|_w^2 e^{-2wt} \quad \forall t \geq 0 \\ &\leq c_1^{-1} c_2 c_2 c_1^{-1} \|x_0\|_H^2 e^{-2wt} \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

Ce qui donne :

$$\|x(t)\|_H \leq c_2 c_1^{-1} \|x_0\|_H e^{-wt}, \quad \forall t \geq 0$$

D'où l'inégalité (3.53) . ■

3.7 Démonstration du deuxième théorème principal

On désigne par (P'_v) , le problème adjoint du problème (P_v) défini par :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \zeta'' - \Delta \zeta & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ \zeta & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu \zeta - \Delta_T \zeta & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \zeta(0) = \zeta^0 & ; & \zeta'(0) = \zeta^1 \\ \Psi & = & (\partial_\nu \zeta_{\Gamma_0}, \zeta_{\Gamma_1}) \end{array} \right. \quad (P_{V'})$$

avec :

$$\zeta^0 \in \mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) ; v_{\Gamma_0} = 0, v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}.$$

$$\zeta^1 \in \mathcal{H} = L^2(\Omega).$$

Pour $T \succ R$; on rappelle qu'il existe deux constantes $c_1(T) \succ 0$ et $c_2(T) \succ 0$ telle que :

$$C_1(T) E_0 \leq \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{F}}^2 \leq C_2(T) E_0 \quad \forall (y^0, y^1) \in \mathcal{V} \times \mathcal{H}$$

avec :

$$|||(y^0, y^1)|||_{\mathcal{F}} = \left(\int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_\nu y)^2 d\Gamma + \int_\Omega \int_{\Gamma_1} (\nabla_T y)^2 d\Gamma \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.60)$$

où $|||\cdot|||_{\mathcal{F}}$ et une norme sur $\mathcal{V} \times \mathcal{H}$, est le complète $\mathcal{F}$ pour cette norme est égal à $\mathcal{V} \times \mathcal{H}$.
 y est la solution du problème (P_H) correspondant aux données de Cauchy y^0 et y^1 .

On considère les espaces :

$$.H' = \mathcal{V} \times \mathcal{H}.$$

$$.G' = L^2(\Gamma_0) \times H_0^1(\Gamma_1).$$

et les opérateurs :

$$.A^* : H' \rightarrow H'.$$

$$.B^* : H' \rightarrow G'.$$

de domaines :

$$\begin{aligned} D(A^*) &= D(B^*) = \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V} \\ &= \{(\eta_0, \eta_1) \in (H^2(\Omega) \cap \mathcal{V}) \times \mathcal{V} / \partial_\nu \eta_0 = \Delta_T \eta_0 \text{ sur } \Gamma_1\} \end{aligned} \quad (3.61)$$

définis par :

$$A^*(\eta_0, \eta_1) = (-\eta_1, \mathcal{A}\eta_0) = -(\eta_1, \Delta\eta_0) \quad (3.62)$$

et :

$$B^*(\eta_0, \eta_1) = (\partial_\nu \eta_{0\Gamma_0}, \eta_{0\Gamma_1}) \quad (3.63)$$

On pose :

$$\varphi = (\zeta, \zeta'), \quad \varphi^0 = (\zeta^0, \zeta^1)$$

Le problème adjoint (P'_v) s'écrit alors :

$$\varphi' = -A^*\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi^0, \quad \Psi = B^*\varphi \quad (3.64)$$

En effet, comme $\varphi = (\zeta, \zeta')$, on a :

$$\begin{aligned} \varphi' &= (\zeta, \zeta')' \\ &= (\zeta', \zeta'') \\ &= (\zeta', \Delta\zeta) \\ &= - \begin{pmatrix} 0 & I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \zeta \\ \zeta' \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où :

$$\varphi' = -A^*\varphi, \quad \varphi(0) = \varphi^0. \quad (3.65)$$

avec :

$$A^* = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -\Delta & 0 \end{pmatrix}$$

Proposition 3.4 A^* engendre un groupe continu dans H^* .

Preuve. A^* est dissipatif

En effet :

Soit $\eta = (\eta_0, \eta_1) \in D(A^*)$; on a :

$$\begin{aligned} \langle A^*(\eta_0, \eta_1) ; (\eta_0, \eta_1) \rangle_{H'} &= \langle -(\eta_1, \Delta\eta_0) ; (\eta_0, \eta_1) \rangle_{\mathcal{V} \times \mathcal{H}} \\ &= -\langle \eta_0, \eta_1 \rangle_{\mathcal{V}} - \langle \Delta\eta_0, \eta_1 \rangle_H \\ &= -\int_{\Omega} \nabla\eta_0 \nabla\eta_1 dx + \int_{\Gamma_1} \Delta_T \eta_0 \eta_1 d\Gamma - \int_{\Omega} \Delta\eta_0 \eta_1 dx \end{aligned}$$

D'après la formule de Green et le fait que :

$$\Delta_T \eta_0 = \partial_\nu \eta_0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

$$\eta_0 = 0 \text{ sur } \Gamma_1 :$$

On a :

$$\begin{aligned} \langle A^*(\eta_0, \eta_1) ; (\eta_0, \eta_1) \rangle_{H'} &= -\int_{\Omega} \nabla\eta_0 \nabla\eta_1 dx + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \eta_0 \eta_1 d\Gamma + \int_{\Omega} \nabla\eta_0 \nabla\eta_1 dx - \\ &\quad \int_{\Gamma_1} \partial_\nu \eta_0 \eta_1 d\Gamma \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors A^* est dissipatif.

• $I - \lambda A^*$ est surjectif de $D(A^*)$ sur H' pour tout $\lambda \succ 0$.

Soit $f = (f_0, f_1) \in H'$; l'égalité :

$$(\eta_0, \eta_1) - \lambda A^*(\eta_0, \eta_1) = (f_0, f_1)$$

donne :

$$\begin{cases} \eta_0 + \lambda \eta_1 &= f_0 \\ \eta_1 + \lambda \Delta \eta_0 &= f_1 \end{cases} \quad (3.66)$$

de ce système on obtient :

$$\eta_0 - \lambda^2 \Delta \eta_0 = f_0 - \lambda f_1 \quad (3.67)$$

Soit alors $v \in \mathcal{V}$. On multiplie la dernière équation par v ; puis on intègre formellement dans Ω ; on obtient :

$$\int_{\Omega} \eta_0 v dx - \lambda^2 \int_{\Omega} \Delta \eta_0 v dx = \int_{\Omega} (f_0 - \lambda f_1) v dx$$

D'après la formule de Green et le fait que $\partial_\nu \eta_0 = \Delta_T \eta_0$ sur Γ_1 ; $\eta_0 = 0$ sur Γ_0 , la dernière égalité donne :

$$\int_{\Omega} \eta_0 v dx + \lambda^2 \int_{\Gamma_1} \nabla_T \eta_0 \nabla_T v dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \nabla \eta_0 \nabla v dx = \int_{\Omega} (f_0 - \lambda f_1) v dx \quad \forall v \in \mathcal{V}$$

Donc la formulation variationnelle de (3.67) est :

$$\langle \eta_0, v \rangle_H + \lambda^2 \langle \eta_0, v \rangle_V = \langle f_0 - \lambda f_1, v \rangle \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad (3.68)$$

Pour montrer l'existence de $\eta_0 \in \mathcal{V}$ unique vérifiant (3.68) , il suffit d'appliquer le lemme 1.7 de Lax Milgram ; pour cela on pose :

$$a(\eta_0, v) = \int_{\Omega} \eta_0 v dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \nabla \eta_0 \nabla v dx + \lambda^2 \int_{\Gamma_1} \nabla_T \eta_0 \nabla_T v d\Gamma$$

et :

$$L(v) = \int_{\Omega} (f_0 - \lambda f_1) v dx$$

On a :

- $a(., .)$ est une forme bilinéaire.
- $a(., .)$ est continue sur $\mathcal{V}$. En effet :

Soit $v \in \mathcal{V}$, $u \in \mathcal{V}$. On a :

$$\begin{aligned} |a(u, v)| &= \left| \int_{\Omega} uv dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \lambda^2 \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T v d\Gamma \right| \\ &\leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^2 \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} + \lambda^2 \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)} \|\nabla_T v\|_{L^2(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

Alors :

$$|a(u, v)| \leq c \|u\|_V \|v\|_V$$

D'où la continuité de $a(u, v)$.

• $a(., .)$ est coercive. En effet :

Soit $u \in \mathcal{V}$, on a :

$$\begin{aligned} a(u, u) &= \int_{\Omega} u u dx + \lambda^2 \int_{\Omega} \nabla u \nabla u dx + \lambda^2 \int_{\Gamma_1} \nabla_T u \nabla_T u d\Gamma \\ &\geq \lambda^2 \left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla_T u\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \right) \\ &= \lambda^2 \|u\|_{\mathcal{V}}^2 \end{aligned}$$

donc :

$$a(u, u) \geq c \|u\|_{\mathcal{V}}^2 \quad \forall u \in \mathcal{V}$$

Ce qui montre la coercive de $a(., .)$.

• $L(.)$ est une forme linéaire.

• $L(.)$ est continue. En effet :

Si on prend $v \in \mathcal{V}$, il vient :

$$\begin{aligned} |L(v)| &= \left| \int_{\Omega} (f_0 - \lambda f_1) v dx \right| \\ &= \left| \langle f_0 - \lambda f_1, v \rangle_{\mathcal{V}', \mathcal{V}} \right| \\ &\leq \|f_0 - \lambda f_1\|_{\mathcal{V}'} \|v\|_{\mathcal{V}} \end{aligned}$$

D'où la continuité de $L(.)$.

Alors le lemme 1.7 de Lax Milgram assure l'existence et l'unicité de la solution $\eta_0 \in \mathcal{V}$ du problème (3.68).

D'après la deuxième équation de (3.66) on a :

$$\eta_1 = \frac{1}{\lambda} (f_0 - \eta_0) \in \mathcal{V}$$

car $f_0 \in \mathcal{V}$ et $\eta_0 \in \mathcal{V}$.

De plus, d'après la première équation de (3.66) on a :

$$\Delta \eta_0 = \frac{1}{\lambda} (f_1 - \eta_1) \in L^2(\Omega)$$

car $f_1 \in \mathcal{H} = L^2(\Omega)$ et $\eta_1 \in L^2(\Omega)$.

mais ;

• $\eta_0 \in \mathcal{V}$.

et :

$$\Delta_T \eta_0 = \partial_\nu \eta_0 \text{ sur } \Gamma_1.$$

ce qui montre que $\eta_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$.

D'où :

$$(\eta_0, \eta_1) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \times \mathcal{V} = D(A^*)$$

Alors $I - \lambda A^*$ est surjectivité et A^* engendre un groupe continu sur H' . ■

Proposition 3.5 *Il existe un opérateur linéaire borné :*

$$E : G \longrightarrow H$$

tel que :

$$B^* = E^* (A + I)^*.$$

Preuve. Dans toute la démonstration c désignera une constante positive assez grande. On rappelle que l'espace $\mathcal{V}$ est défini par :

$$\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega) ; v_{\Gamma_0} = 0, v_{\Gamma_1} \in H^1(\Gamma_1)\}$$

muni de la norme :

$$\|v\|_{\mathcal{V}} = \left(\|v\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v_{\Gamma_1}\|_{H^1(\Gamma_1)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Soit $u = (u_1, u_2) \in G$, l'opérateur E sera défini à partir de la solution v_1 du problème :

$$\begin{cases} \Delta v_1 & = & v_1 & \text{dans } \Omega \\ v_1 & = & -u_1 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v_1 - \Delta_T v_1 & = & u_2 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.69)$$

La solution v_1 de (3.69) est définie par transposition :

$$\int_{\Omega} f v_1 dx = \int_{\Gamma_0} u_1 \partial_\nu v d\Gamma + \langle u_2, v \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \quad \forall f \in L^2(\Omega) \quad (3.70)$$

où v est la solution du problème :

$$\begin{cases} v - \Delta v & = & f & \text{dans } \Omega \\ v & = & 0 & \text{sur } \Gamma_0 \\ \partial_\nu v - \Delta_T v & = & 0 & \text{sur } \Gamma_1 \end{cases} \quad (3.71)$$

Le problème (3.71) a pour formulation variationnelle :

$$\int_{\Omega} f w dx = \int_{\Omega} v w dx + \int_{\Omega} \nabla v \nabla w dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma \quad \forall w \in \mathcal{V}. \quad (3.72)$$

En effet :

Soit $w \in \mathcal{V}$, on multiplie la première équation de (3.71) par w , puis on intègre par partie.

On obtient :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f w dx &= \int_{\Omega} (v w - \Delta v w) dx \\ &= \int_{\Omega} (v w + \nabla v \nabla w) dx - \int_{\Gamma_0} \partial_{\nu} v w d\Gamma - \int_{\Gamma_1} \partial_{\nu} v w d\Gamma \\ &= \int_{\Omega} (v w + \nabla v \nabla w) dx - \int_{\Gamma_1} \Delta_T v w d\Gamma \end{aligned}$$

d'où :

$$\int_{\Omega} f w dx = \int_{\Omega} (v w + \nabla v \nabla w) dx + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T w d\Gamma \quad \forall w \in \mathcal{V}$$

D'après le lemme 1.7 de Lax Milgram ; le problème (3.72) admet une solution unique $v \in \mathcal{V}$ et on a :

$$\|v\|_{\mathcal{V}} \leq c \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad (3.73)$$

Comme $v \in H^1(\Omega)$, alors d'après la proposition 2.3 , $\partial_{\nu} v$ est définie comme élément de $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et on a :

$$\|\partial_{\nu} v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq c \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \right)$$

La troisième équation de (3.71) , montre que $v|_{\Gamma_1} \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)$ et on a :

$$\begin{aligned} \|v\|_{H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} &\leq c \|\partial_{\nu} v\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &\leq c \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $v \in H^2(\Omega)$, puisque $\Delta v \in L^2(\Omega)$ et :

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} \leq c \left(\|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} + \|v\|_{H^1(\Omega)} \right) \quad (3.74)$$

L'estimation (3.74) et le théorème de la trace montre que :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\nu} v\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq c \|v\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq c \left(\|v\|_{H^1(\Omega)} + \|\Delta v\|_{L^2(\Omega)} \right) \end{aligned}$$

De plus d'après l'estimation (3.73) et la première équation de (3.71) on a :

$$\begin{aligned} \|\partial_{\nu} v\|_{L^2(\Gamma_0)} &\leq c \left(\|f\|_{L^2(\Omega)} + \|f - v\|_{L^2(\Omega)} \right) \\ &\leq c' \|f\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

ce qui montre la continuité de l'application :

$$\begin{aligned} L^2(\Omega) &\rightarrow L^2(\Gamma_0) \\ f &\longmapsto (\partial_{\nu} v)|_{\Gamma_0} \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\Gamma_0} u_1 \partial_\nu v d\Gamma + \langle u_2, v \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \right| &\leq \|u_1\|_{L^2(\Gamma_0)} \|\partial_\nu v\|_{L^2(\Gamma_0)} + \\
&\quad \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \|v\|_{H^1(\Gamma_1)} \\
&\leq c \|u_1\|_{L^2(\Gamma_0)} \|f\|_{L^2(\Omega)} + c \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \|f\|_{L^2(\Omega)}
\end{aligned}$$

alors :

$$\left| \int_{\Gamma_0} u_1 \partial_\nu v d\Gamma + \langle u_2, v \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \right| \leq c \left(\|u_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \right) \|f\|_{L^2(\Omega)}$$

Cette dernière inégalité montre l'existence et l'unicité d'un élément $v_1 \in L^2(\Omega)$ vérifiant (3.70) .

De plus :

$$\left| \int_{\Omega} f v_1 dx \right| \leq c \left(\|u_1\|_{L^2(\Gamma_0)} + \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \right) \|f\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall f \in L^2(\Omega)$$

Donc :

$$\|v_1\|_{L^2(\Omega)} \leq c \|u\|_G \tag{3.75}$$

On prend $v \in D(\Omega)$ dans (3.70) ; obtient :

$$\int_{\Omega} f v_1 dx = 0$$

et d'après la première relation du (3.71) , il vient :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\Omega} f v_1 dx \\
&= \int_{\Omega} (v - \Delta v) v_1 dx \\
&= \int_{\Omega} v v_1 dx - \langle \Delta v_1, v \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} \\
&= \langle v - \Delta v, v \rangle_{D'(\Omega), D(\Omega)} \quad \forall v \in D(\Omega)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que :

$$\Delta v_1 - v_1 = 0 \quad \text{dans } \Omega.$$

au sens de distribution, d'où :

$$\Delta v_1 = v_1 \quad \text{dans } \Omega.$$

Soit $k \in D(\Gamma_0)$ et $w \in H^2(\Omega)$ tel que $w_{\Gamma_1} = 0$, $(\partial_\nu w)_{\Gamma_0} = k$ et $(\partial_\nu w)_{\Gamma_1} = 0$.

Sur Γ_1 on a $\partial_\nu w - \Delta_T w = 0$; on peut alors prendre $v = w$ dans (3.71) ; en tenant compte

de la proposition 2.3 , on obtient :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f v_1 dx &= \int_{\Omega} (v - \Delta v) v_1 dx \\
&= \int_{\Omega} (w - \Delta w) v_1 dx \\
&= \int_{\Omega} w v_1 dx - \langle v_1, \partial_{\nu} w \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f v_1 dx &= - \langle v_1, k \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} \\
&= \int_{\Gamma_0} u_1 k d\Gamma
\end{aligned}$$

Comme k est arbitraire dans $D(\Gamma_0)$, on obtient :

$$v = -u_1 \quad \text{sur} \quad \Gamma_0$$

Soient $h \in D(\Gamma_1)$ et $w_1, w_2 \in H^2(\Omega)$ tel que :

$$.w_{1\Gamma_0} = 0.$$

$$.w_{1\Gamma_1} = -h.$$

$$.(\partial_{\nu} w_1)_{\Gamma} = 0.$$

$$.w_{2\Gamma} = 0.$$

$$.(\partial_{\nu} w_2)_{\Gamma_0} = 0.$$

$$.(\partial_{\nu} w_2)_{\Gamma_1} = \Delta_T w_2.$$

On pose :

$$w = w_1 - w_2$$

alors :

$$w_{\Gamma_0} = 0, \quad w_{\Gamma} = -h, \quad (\partial_{\nu} w)_{\Gamma_0} = 0$$

et :

$$(\partial_{\nu} w - \Delta_T w)_{\Gamma_1} = 0$$

on peut alors prendre $v = w$ dans (3.70) on obtient :

$$\int_{\Omega} f v_1 dx = \int_{\Gamma_0} u_1 \partial_{\nu} w d\Gamma + (u_2 w)_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)}$$

mais :

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} f v_1 dx &= \int_{\Omega} (v - \Delta v) v_1 dx \\
&= \int_{\Omega} w v_1 dx - \int_{\Omega} \Delta w v_1 dx
\end{aligned}$$

Et d'après la proposition (2.4) :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f v_1 dx &= \int_{\Omega} w v_1 dx - \int_{\Omega} w \Delta v_1 dx - \langle \partial_{\nu} w_1, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \\ &\quad \langle \partial_{\nu} v_1, w \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma)} \end{aligned}$$

Comme :

$$\begin{aligned} w &= \partial_{\nu} w \quad \text{sur } \Gamma_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

Alors :

$$\langle u_2, w \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = - \langle \partial_{\nu} w_1, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \langle \partial_{\nu} v_1, w \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)}$$

Comme :

$$\begin{aligned} - \langle \partial_{\nu} w, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} &= \langle -\Delta_T w, v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \\ &= \langle w_1, -\Delta_T v_1 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

avec :

$$.w_{\Gamma_1} = -h.$$

$$.(\partial_{\nu} w - \Delta_T w)_{\Gamma_1} = 0.$$

Alors :

$$\langle u_2, h \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} = - \langle \Delta_T v_1, h \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} + \langle \partial_{\nu} v_1, h \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_1)}$$

D'où :

$$\partial_{\nu} v_1 - \Delta_T v_1 = u_2 \text{ sur } \Gamma_1$$

On définit l'opérateur E de la façon suivante :

$$\begin{aligned} E : \quad G &\rightarrow H \\ u = (u_1, u_2) &\mapsto (v_1, v_1) \end{aligned}$$

où v_1 est la solution du problème (3.69) .

L'étude de la continuité de E :

• E est continu :

D'après la troisième équation de (3.69) on a :

$$\partial_{\nu} v_1 - \Delta_T v_1 + v_{1\Gamma_1} = v_{1\Gamma_1} + u_2$$

d'où :

$$(I_d - \Delta_T) v_{1\Gamma_1} = v_1 + u_2 - \partial_{\nu} v_1$$

donc :

$$v_{1\Gamma_1} = (I_d - \Delta_T)^{-1} (v_1 + u_2 - \partial_\nu v_1)$$

tel que I_d désigne l'identité. Puisque $(I_d - \Delta_T)^{-1}$ est un isomorphisme de $H^{-2}(\Gamma_1)$ sur $L^2(\Gamma_1)$, on obtient :

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{L^2(\Gamma_1)} &\leq c \left(\|u_2\|_{H^{-2}(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu v_1\|_{H^{-2}(\Gamma_1)} + \|v_1\|_{H^{-2}(\Gamma_1)} \right) \\ &\leq c \left(\|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} + \|\partial_\nu v_1\|_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} + \|v_1\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1)} \right) \end{aligned}$$

Car les injections $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{-1}(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \hookrightarrow H^{-2}(\Gamma_1)$ sont continues et d'après la proposition 2.3 , l'application :

$$\begin{aligned} L^2(\Delta, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_1) \times H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1) \\ v &\longrightarrow (v_{\Gamma_1}, (\partial_\nu v)_{\Gamma_1}) \end{aligned}$$

est continue.

D'où :

$$\begin{aligned} \|v_1\|_{L^2(\Gamma_1)} &\leq c \left(\|v_1\|_{L^2(\Delta, \Omega)} + \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \right) \\ &\leq c \left(\|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\Delta v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)}^2 \right) \\ &\leq c \left(\|v_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)}^2 \right) \end{aligned}$$

car $\Delta v_1 = v_1$ dans Ω .

Enfin ; comme :

$$\|u_2\|_{H^{-1}(\Gamma_1)} \leq c \|u\|_G$$

et :

$$\|v_1\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 \leq c' \|u\|_G^2$$

Il vient :

$$\|v_1\|_{L^2(\Gamma_1)} \leq c \|u\|_G$$

$$\bullet B^* = E^* (A + I)^* .$$

Pour $(\eta_0, \eta_1) \in D(A^*)$ et $u = (u_1, u_2) \in G$ on a :

$$\begin{aligned} \langle E^* (A + I)^* (\eta_0, \eta_1), (u_1, u_2) \rangle_{G', G} &= \langle (A + I)^* (\eta_0, \eta_1), E(u_1, u_2) \rangle_{G', G} \\ &= \langle A^* (\eta_0, \eta_1) + (\eta_0, \eta_1), (v_1, v_1) \rangle_{H', H} \\ &= \langle (-\eta_1 + \eta_0, -\Delta \eta_0 + \eta_1), (v_1, v_1) \rangle_{H', H} \\ &= \int_{\Omega} v_1 dx - \int_{\Omega} \eta_1 v_1 dx + \int_{\Omega} \eta_1 v_1 dx - \int_{\Omega} \Delta \eta_0 v_1 dx \end{aligned}$$

D'après la proposition 2.4 :

$$- \int_{\Omega} \Delta \eta_0 v_1 dx = - \langle v_1, \partial_{\nu} \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \partial_{\nu} v_1, \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} - \int_{\Omega} \Delta v_1 \eta_0 dx$$

De plus, comme :

$$\cdot \langle \partial_{\nu} v_1, \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_0), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0)} = 0$$

puisque $\eta_0 = 0$ sur Γ_0 .

$$\cdot - \langle v_1, \partial_{\nu} \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \langle u_1, \partial_{\nu} \eta_0 \rangle_{L^2(\Gamma_0)}$$

puisque $-v_1 = u_1$ sur Γ_0

et :

$$\begin{aligned} \cdot - \langle v_1, \partial_{\nu} \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma), H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} + \langle \partial_{\nu} v_1, \eta_0 \rangle_{H^{-\frac{3}{2}}(\Gamma_1), H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_1)} &= \langle \partial_{\nu} v_1 - \Delta_T v_1 \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \\ &= \langle u_2, \eta_0 \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \end{aligned}$$

car :

$$\cdot \partial_{\nu} \eta_0 = \Delta_T \eta_0 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\cdot \partial_{\nu} v_1 - \Delta_T v_1 = u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

Alors :

$$\begin{aligned} \langle E^*(A+I)^*(\eta_0, \eta_1), (u_1, u_2) \rangle_{G', G} &= \int_{\Omega} \eta_0 (v_1 - \Delta v_1) dx + \langle u_1, \partial_{\nu} \eta_0 \rangle_{L^2(\Gamma_0)} \\ &\quad + \langle u_2, \eta_0 \rangle_{H^{-1}(\Gamma_1), H^1(\Gamma_1)} \\ &= \langle B^*(\eta_0, \eta_1), (u_1, u_2) \rangle_{G', G} \end{aligned}$$

Car $v_1 - \Delta v_1 = 0$ dans Ω .

Grâce a la proposition 3.5 et à la proposition 3.4 , les hypothèses (H_1) et (H_2) sont vérifiées ; et grâce à l'estimation (3.25) , les hypothèses (H_3) et (H_4) sont vérifiées.

Fin de la démonstration du théorème.

Soient $(U_0, U_2) \in G$ et (ζ_1, ζ_2) la solution du problème $(P_{V'})$. On multiplie la première équation de (P_V) par ζ , on intègre formellement sur $\Omega \times (0, T)$ et on utilise la formule de Green, on obtient :

$$\int_{\Omega} (y' \zeta - y \zeta') dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma} (\zeta \partial_{\nu} y - \partial_{\nu} \zeta y) d\Gamma dt = 0. \quad (3.76)$$

Comme :

$$\cdot \partial_{\nu} y = \Delta_T y - u_2 \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\cdot y = u_1 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

$$\cdot \partial_{\nu} \zeta = \Delta_T \zeta \quad \text{sur } \Gamma_1$$

$$\cdot \zeta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0$$

(3.76) , donne :

$$\int_{\Omega} (y' \zeta - y \zeta') dx \Big|_0^T + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (\zeta (\Delta_T y - u_2) - \Delta_T \zeta y) d\Gamma dt - \int_0^T \int_{\Gamma_0} u_1 \partial_{\nu} \zeta d\Gamma dt = 0$$

puisque :

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} (\zeta \Delta_T y - \Delta_T \zeta y) d\Gamma dt = 0$$

Il vient :

$$\int_{\Omega} \left(y' \zeta - y \zeta' \right) dx \Big|_0^T - \int_0^T \int_{\Gamma_1} \zeta u_2 d\Gamma dt = - \int_0^T \int_{\Gamma_1} u_1 \partial_{\nu} \zeta d\Gamma dt$$

d'où :

$$- \int_{\Omega} \left(y' (0) \zeta (0) + y (0) \zeta' (0) \right) dx = \int_0^T \left\langle (-u_1, u_2) (s) ; \left(\partial_{\nu} \zeta|_{\Gamma_0}, \zeta|_{\Gamma_1} \right) (s) \right\rangle_{G', G} ds \quad (3.77)$$

On pose :

$$.x_0 = (y^1, -y^0), x = (y', -y)$$

$$.\varphi = (\zeta, \zeta'), \varphi_0 = (\zeta^0, \zeta^1), u = (-u_1, u_2).$$

$$.\Psi = \beta^* \varphi = (\partial_{\nu} \zeta|_{\Gamma_0}, \zeta|_{\Gamma_1}).$$

Alors (3.77) s'écrit :

$$\langle x(T), \varphi(T) \rangle_{H, H'} = \langle x_0, \varphi_0 \rangle_{H, H'} + \int_0^T \langle u(s), \Psi(s) \rangle_{G, G'} ds. \quad (3.78)$$

Puisque (P'_v) et (3.65) sont équivalent ; on conclut que (P_v) est équivalent à (3.78) cette équivalence assure l'existence et l'unicité de la solution y de (P_v) .

Alors le problème (P_v) est bien posé dans $H'' = \mathcal{H} \times \mathcal{V}'$ (car H est un espace de Hilbert donc réflexif) et on a d'après le théorème 3.5, l'existence d'une constante $M = c_2 c_1^{-1} \succ 0$, tel que :

$$\|x(t)\|_H \leq M \|x_0\|_H e^{-wt}, \forall t \geq 0$$

pour tout $x_0 \in H$.

comme :

$$x(t) = (y', -y)$$

et :

$$\begin{aligned} x(0) &= x_0 = (y'(0), -y(0)) \\ &= (y^1, -y^0) \end{aligned}$$

Il vient :

$$\|(y', -y)\|_{\mathcal{V}' \times \mathcal{H}} \leq M \|(y^1, -y^0)\|_{\mathcal{V}' \times \mathcal{H}} e^{-wt} \quad \forall (y^1, y^0) \in \mathcal{V}' \times \mathcal{H}$$

C'est-à-dire :

$$\|(y, y')\|_{\mathcal{H} \times \mathcal{V}'} \leq M \|(y^0, y^1)\|_{\mathcal{V}' \times \mathcal{H}} e^{-wt} \quad \forall (y^0, y^1) \in \mathcal{V}' \times \mathcal{H}$$

Forme implicite du Feedback .

L'opérateur Λ_w^{-1} est défini par la matrice suivant :

$$\Lambda_w^{-1} = \begin{pmatrix} P & -Q \\ -R & S \end{pmatrix}$$

Le Feedback est alors donné par :

$$\begin{aligned} u &= (u_1, u_2) \\ &= -JB^* \Lambda_w^{-1} x(t) \\ &= -JB^* \begin{pmatrix} Py' + Qy \\ -Ry' - Sy \end{pmatrix} \\ &= -J (\partial_\nu (Py' + Qy)_{\Gamma_0}, (Py' + Qy)_{\Gamma_1}) \\ &= (-\partial_\nu (Py' + Qy)_{\Gamma_0}, (Py' + Qy)_{\Gamma_1}) \end{aligned}$$

D'où :

$$u_1 = -\partial_\nu (Py' + Qy)_{\Gamma_0}$$

et :

$$u_2 = (Py' + Qy)_{\Gamma_1}$$

Forme explicite du Feedback.

Soit $(\zeta^0, \zeta^1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$, on résout le problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} \zeta'' - \Delta \zeta & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ \zeta & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \partial_\nu \zeta - \Delta_T \zeta & = & 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ \zeta(0) & = & \zeta^0 \\ \zeta'(0) & = & \zeta^1 \\ \Psi(s) & = & B^*(\zeta, \zeta) \\ & = & (\partial_\nu \zeta|_{\Gamma_0}, \zeta|_{\Gamma_1}) \end{array} \right. \quad (3.79)$$

Puis le problème :

$$\left\{ \begin{array}{lll} z'' - \Delta z & = & 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ z & = & e^{-2\omega s} \partial_\nu \zeta \quad \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T) \\ \partial_\nu z - \Delta_T z & = & e^{-2\omega s} \zeta \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \\ z'(T) & = & z(T) \quad \text{dans } \Omega. \\ & = & 0 \end{array} \right. \quad (3.80)$$

Définition de Λ_ω .

L'opérateur Λ_ω est défini par :

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega &: H' \longrightarrow H \\ \varphi_0 &\longmapsto \int_0^T e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^0 e^{-sA^*} \varphi^0 ds \end{aligned}$$

On pose : $\varphi = (\zeta, \zeta'), \quad \varphi^0 = (\zeta^0, \zeta^1), \quad \theta = (-z', z)$.

Le problème en z s'écrit :

$$\begin{cases} \theta'(s) = A\theta + BJB^* e^{-2\omega s} \Psi(s). \\ \theta(T) = 0 \end{cases} \quad (3.81)$$

On multiplie (3.81) par e^{-sA} et on intègre par partie sur $(0, T)$, on aura :

$$\int_0^T e^{-sA} \theta'(s) ds = \int_0^T e^{-sA} A\theta(s) ds + \int_0^T e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* \varphi(s) ds. \quad (3.82)$$

comme :

$$(e^{-sA} \theta(s))' = -e^{-sA} A\theta(s) + e^{-sA} \theta'(s)$$

ou encore :

$$e^{-sA} \theta'(s) = (e^{-sA} \theta(s))' + e^{-sA} A\theta(s)$$

l'inégalité (3.82) s'écrit :

$$\int_0^T (e^{-sA} \theta(s))' + e^{-sA} A\theta(s) ds = \int_0^T e^{-sA} A\theta(s) ds + \int_0^T e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* \varphi(s) ds.$$

Le fait que $\theta(T) = 0$, donne :

$$\begin{aligned} \theta(0) &= - \int_0^T e^{-2\omega s} e^{-sA} BJB^* e^{-sA^*} \varphi_0 ds \\ &= -\Lambda_\omega \varphi^0. \end{aligned}$$

Alors :

$$\Lambda_\omega(\zeta_0, \zeta_1) = -\theta(0) = (z'(0), -z(0)) \quad (3.83)$$

D'après le théorème 3.4 l'opérateur Λ_ω est un isomorphisme de H' sur H .

ce qui donne d'après (3.83) :

$$\Lambda_\omega^{-1}(z'(0), -z(0)) = (\zeta_0, \zeta_1)$$

Λ_ω est donc défini par :

$$\begin{aligned} \Lambda_\omega &: H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega) \longrightarrow H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega) \\ (\zeta^0, \zeta^1) &\longmapsto (z'(0), -z(0)) \end{aligned}$$

Alors :

$$\begin{aligned} u(t) &= -JB^* \Lambda_\omega^{-1} x \\ &= -JB^* \Lambda_\omega^{-1} (y'(t), -y(t)) \end{aligned}$$

En posant $(\zeta^0(t), \zeta^1(t)) = \Lambda_\omega^{-1} (y'(t), -y(t))$, on obtient :

$$u(t) = -JB^* (\zeta^0, \zeta^1)$$

et par définition de l'opérateur B^* , il vient :

$$u(t) = (\partial_\nu \zeta_{\Gamma_0}^0, \zeta_{\Gamma_1}^1)$$

On obtient alors les systèmes :

$$\left\{ \begin{array}{lll} y''(t) - \Delta y(t) & = & 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ y(t) & = & \partial_\nu \zeta^0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu y(t) - \Delta_T y(t) & = & \zeta^0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ y(0) & = & y^0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ y'(0) & = & y^1 \quad , \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} \zeta''(s) - \Delta \zeta(s) & = & 0 \quad , \quad \text{dans } \\ \zeta(s) & = & 0 \quad , \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu \zeta(s) - \Delta_T \zeta(s) & = & 0 \quad , \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ \Psi(s) & = & (\partial_\nu \zeta(s)_{\Gamma_0}, \Delta_T \zeta_{\Gamma_1}) \\ \zeta(0) & = & \zeta^0(t) \\ \zeta'(0) & = & \zeta^1(t) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{lll} z''(s) - \Delta z(s) & = & 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ z(T) & = & z'(T) \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ & = & 0 \quad , \\ z(s) & = & e^{-2ws} \partial_\nu \zeta(s) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+ \\ \partial_\nu z(s) - \Delta_T z(s) & = & e^{-2ws} \zeta(s) \quad , \quad \text{sur } \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+ \\ z(0) & = & y(t) \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ z'(0) & = & y'(t) \quad , \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

y est solution du problème à boucle fermé :

$$\left\{ \begin{array}{lll} y'' - \Delta y & = & 0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}^+ \\ (y_{\Gamma_0}, (\partial_\nu y - \Delta_T y)_{\Gamma_1}) & = & -JB^* \Lambda_\omega^{-1} (y'(t), -y(t)) \\ y(0) & = & y^0 \quad , \quad \text{dans } \Omega \\ y'(0) & = & y^1 \quad , \quad \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

■

Conclusion

Dans ce mémoire nous avons étudié les stabilisations frontière forte et exponentielle de l'équation des ondes avec des conditions au bord de Ventcel stationnaires ; puis on a appliqué la méthode générale de la stabilisation développée par V. Komornik : qui nous a donné un Feedback frontière qui assure cette stabilité exponentielle avec un taux de Décroissance arbitrairement grand.

Quelle que travaux généralisant l'étude de la stabilisation pour des problème non linéaire [10]

Mots clés : ondes, problème de Ventcel, Feedback frontière, stabilisation, contrôlabilité, observabilité, équation de Riccati

Bibliographie

- [1] **R. A. Adams**, Sobolev spaces. Academic press, New york, 1975.
- [2] **V. Barbu**. Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems. Academic Press, New York, 1993.
- [3] **A. Bendali and Lemrabet**. The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, SIAM J. Appl. Math, 56, 1996, p. 1664-1693.
- [4] **F. Bourquin J.-S. Briffaut & M. Collet**, On the feedback stabilisation : Kormornik's method, proceedings of the 2nd international conference on active control in mechanical engineering, Lyon, 22-23 October (1997).
- [5] **H. Brezis**, Analyse fonctionnelle, Théorie et application. Springer-verlag Heidelberg (1987).
- [6] **R.F. Curtain, H.J Zwart**, An Introduction to Infinite Dimensional Linear Systems Theory Springer Berlin Heidelberg London Paris Tokyo Hong Kong Barcelona Budapest
- [7] **A. Haraux** Systèmes dynamiques dissipatifs et applications, Masson, Paris (1991) .
- [8] **F. Flandoli**, A new approach to the L-Q-R problem for hyperbolic dynamics with boundary control, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 102, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New-York, 1987, 89-111.
- [9] **A. Héminda**, stabilisation frontière de l'équation des ondes avec conditions de Ventcel. Maghreb Math. Rev, Vol 11, No2, (2002) pp 165-196.
- [10] **A. Héminda**, contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, (2000). Alger.

- [11] **A. Héminda**, stabilisation frontière de problème. C.R.Acad. Sci. Paris, t.328, série I, p.1171-1174, (1999).
- [12] **L. Hörmander**, linear partial differentials operators, 116, Springer Verlag baud (1969).
- [13] **V. Komornik**, Exact controllability and stabilization ; The multiplier method, Masson-Johon Wiley, Paris (1994).
- [14] **V. Komornik**, Stabilisation rapide de problème d'évolution linéaire. CR . Acad .Sci Paris, 15, 321, Série I (1995) 581.586.
- [15] **J.P. La Salle**, extensions of Lyapunov second method (1960).
- [16] **K. Lemrabet**, Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers, thèse, USTHB, Alger.(1987).
- [17] **K. Lemrabet**, problèmes aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier, C.R.Acad. Sci. Paris, 15, série I (1985) p. 531-534
- [18] **K. Lemrabet**, Problèmes de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, C.R.Acad. Sci. Paris , 304, série I (1987) p.151-154.
- [19] **J.L. Lions et E. Magenes**, Problèmes aux limites non homogènes et leurs applications, 1, Dunod, paris (1968).
- [20] **J.L. Lions**, contrôlabilité exacte, perturbation et stabilisation de systèmes distribués. Masson (1986).
- [21] **J.C.Nedelec**, Ondes acoustiques et électromagnétiques, équations intégrales. Cours de DEA, école polytechnique, Palaiseau. France 1996.
- [22] **P.A. Raviart**, Introduction a l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles .
- [23] **A. Samarsky et V. Andreev**, Méthodes aux différences pour équations elliptiques. Moscou.
- [24] **T. Cazenave et A.Haraux**, Introduction aux problèmes d'évolution semi linéaires.
- [25] **R. Valid**, la mécanique des milieux continus et le calcul des structures, Eyrolles, Paris (1977).

- [26] **A. D Wentzell**, (Ventcel'), On boundary condition for multidimensionnal diffusion processes, Theor. Prob. and Appel. 4 (1959),p. 164-177.